

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**



**DESARROLLO DE MODELOS NUMÉRICOS APLICADOS A  
HIDRÁULICA AMBIENTAL**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

María Isabel Herreros Cid

Bajo la dirección de los doctores

Manuel Pastor Pérez

Carlos Armenta Deu

**Madrid, 2004**

**ISBN: 978-84-669-1740-7**

© María Isabel Herreros Cid, 2003

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DESARROLLO DE MODELOS  
NUMÉRICOS APLICADOS A  
HIDRÁULICA AMBIENTAL

TESIS DOCTORAL

MARÍA ISABEL HERREROS CID  
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICAS  
Madrid 2003

Tribunal nombrado por Mgfc. y Excmo. Sr. Rector de la  
Universidad Complutense de Madrid, el día ..... de .....  
de 200....

Presidente D. ....

Vocal D. ....

Vocal D. ....

Vocal D. ....

Secretario D. ....

Realizando el acto de defensa y de lectura de la tesis el día .....

de ..... de 200.....

en .....

Calificación .....

**EL PRESIDENTE**

**LOS VOCALES**

**EL SECRETARIO**

*A mi madre y a mi hermana*

## AGRADECIMIENTOS

A D. Manuel Pastor Pérez, profesor de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, codirector de esta tesis, por su constante ayuda, apoyo y paciencia, por haberme contagiado su entusiasmo y transmitido su particular visión de la investigación. Por todo ello, y después de estos años trabajando juntos, siempre podrá contar con mi más profunda admiración y con mi más sincera amistad.

A D. Carlos Armenta Deu, profesor de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid, codirector de esta tesis, por sus consejos, su disponibilidad y lo mucho que ha facilitado la realización de esta tesis doctoral.

A D. Manuel Quecedo Gutiérrez, profesor Ad. Honorem de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, por lo mucho que me ha ayudado con sus ideas y sus sugerencias en las reuniones que hemos tenido cada viernes durante estos años. Por sus valiosos consejos a la hora de programar el método de *level-set*, así como por todas sus observaciones y comentarios, que han sido de una gran ayuda a lo largo de toda la tesis.

A D. Mokhtar Mabssout, profesor de la Facultad de Ciencias de Tetuán, por su disponibilidad a la hora de prestarme su ayuda, por las interesantes discusiones mantenidas sobre el método *fractional-step*, por su colaboración en la elaboración de la parte de *flujo con superficie libre en medios porosos*, y por su gran amistad.

A D. José Campos Gutiérrez, antiguo profesor de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid, que falleció en Agosto del 2002, tutor de mi trabajo de investigación de tercer ciclo, por haber facilitado la vía administrativa para la admisión de esta tesis en el departamento, y por su apoyo y su gran bondad, permanecerá siempre en mi recuerdo.

A mis compañeros de trabajo del sector de Ingeniería Computacional del CEDEX, tanto a los que trabajan aquí permanentemente como a los que pasan parte de su tiempo en sus estancias pre y postdoctorales. Por haber contribuido a un ambiente de trabajo agradable y estimulante.

Al CEDEX, en especial a Dña. Milagros Couchoud, directora del Centro de Estudios de Técnicas Aplicadas (CETA), por poner sus medios a mi disposición para la realización de esta tesis y al Ministerio de Fomento por la ayuda económica prestada mediante sus becas CEDEX.

A Aguas de la Cuenca del Ebro (ACESA) por el convenio sobre un modelo numérico para el embalse de Santa Liestra y a la Dirección General de Obras Hidráulicas del Ministerio de Medio Ambiente por el convenio sobre modelización numérica de flujos de derrubios en embalses en sus fases de iniciación y propagación, porque ambos han contribuido a la realización de esta tesis.

De manera muy especial a mi madre y a mi hermana, por la paciencia que han tenido y los ánimos que me han dado en todo momento, por haberme apoyado y haber estado a mi lado a lo largo de todo el camino.

## RESUMEN

Uno de los problemas que más interés y preocupación ha suscitado en los últimos años es la contaminación del medio ambiente por productos generados por actividades humanas e industriales.

Esta tesis se centra en el estudio del transporte de contaminantes en aguas continentales, pudiendo dividirse para su análisis en dos casos: (1) El transporte de contaminantes en aguas superficiales, (2) El transporte de contaminantes en aguas subterráneas.

El mecanismo fundamental de transporte es la convección debida al movimiento del fluido al que se realiza el vertido. Por ello, el estudio de estos problemas requiere el conocimiento previo de la dinámica del medio, llevándose a cabo en una segunda etapa el estudio del transporte de contaminantes.

La tesis que aquí se presenta tiene como objetivo fundamental el desarrollo de modelos numéricos eficientes que permitan reproducir el comportamiento dinámico del medio, así como el transporte de contaminantes.

Respecto del estudio de la dinámica en aguas superficiales, la ecuación de balance de masa se reduce a la condición de incompresibilidad y esta restricción plantea dificultades numéricas importantes. Las ecuaciones de balance de momento lineal dan lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes. Para integrar estas ecuaciones desde el punto de vista numérico es necesario hacer uso de métodos de paso fraccional, también conocidos como *fractional-step*.

Un problema importante a tener en cuenta aquí es la existencia de superficies libres, que se trata con el método de *level-set*.

Debido tanto a esta dificultad como al elevado número de grados de libertad a los que se llega en estas formulaciones, puede en ocasiones emplearse modelos simplificados. Si el espesor de la capa de fluido es relativamente pequeño en relación con sus otras dos dimensiones características, puede llevarse a cabo una integración en profundidad, obteniéndose ecuaciones donde las variables de campo son el espesor de la capa y las correspondientes velocidades bidimensionales integradas en profundidad. Son importantes en este tipo de problemas de convección dominante, la contribución de los términos de fuente, por lo que es esta tesis se propone el método de dos pasos de Taylor-Galerkin, basado en la ecuación transitoria completa, así como un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para tener en cuenta la contribución de los términos de fuente.

Por otro lado, en el caso del estudio de la dinámica de aguas subterráneas, el principal objetivo es el proporcionar un método preciso para el seguimiento de flujos de superficie libre en el interior de medios porosos. Se propone aquí un nuevo método para el seguimiento de la superficie libre del flujo basado en las técnicas de *level-set*. Con este método de Elementos Finitos es posible estudiar la filtración de  $n$  fluidos inmiscibles en el interior de un suelo y conocer, para cualquier tiempo dado, la posición de la interfase entre los flujos. Una vez que el campo de velocidades en el medio poroso es conocido, puede procederse al estudio del transporte de contaminantes en dicho medio.

Respecto del transporte de contaminantes, las ecuaciones del modelo son ecuaciones de conservación de los diferentes contaminantes, las cuales tienen en cuenta posibles fenómenos de interacción entre éstos, así como decaimiento debido a fenómenos físico-químicos o incluso biológicos. No obstante esta tesis se centra en el estudio del problema convectivo, por lo que se hace uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin, de gran sencillez y precisión, para el tratamiento de problemas de convección dominante.

## ABSTRACT

Environmental pollution caused by human and industrial activity is a problem that has aroused a great interest in the last years.

This thesis focuses on the study of pollutant transport in continental water. To analyze it two cases are considered: (1) Pollutant transport in superficial water, (2) Pollutant transport in underground water.

The main mechanism for the pollutant transport is the advection due to the fluid movement. Because of this, the study of this topic requires the previous knowledge of the medium dynamics. The study of the pollutant transport is carried out in a second stage.

The main aim of the thesis presented here is the development of efficient numerical models that allow us to reproduce the dynamic behaviour of the medium, as well as the pollutant transport.

Concerning superficial water dynamics, the mass balance equation is reduced to the incompressibility condition and this restriction poses important numerical difficulties. The linear momentum balance equations give rise to the Navier-Stokes equations. To integrate these equations numerically it is necessary to use the *fractional-step* method.

An important problem to take into account is the existence of free surfaces. To deal with them the *level-set* technique is used.

Due to this difficulty, as well as the high number of degrees of freedom involved in these formulations, it is convenient to use simplified models. If the thickness of the fluid layer is small compared to the two other characteristic dimensions, an integration in depth can be carried out, giving rise to a set of equations where the variables are the thickness of the layer and the two corresponding bidimensional velocities integrated in depth. In this kind of advection dominated problems, the contribution of the source terms is important. Therefore, in this thesis the two-step Taylor-Galerkin algorithm is proposed along with a fourth order Runge-Kutta scheme to take into account the source terms contribution.

On the other hand, to study the underground water dynamics, the main aim is to provide a precise method to track free surface flows inside a porous medium. A new method based on the *level-set* technique is proposed here to track the free flow surface. Using this Finite Element method it is possible to study the seepage of  $n$  immiscible fluids inside a soil, and to know, for every time step, the position of the interface between these fluids. Once the velocity field inside the porous medium is known, the study of the pollutant transport can be carried out.

Concerning the pollutant transport, the equations of the model are conservation equations for the different pollutants, which take into account interaction between them, as well as decay due to physical and chemical phenomena or even biological ones. Nevertheless this thesis focuses on the advection problem, using the two-step Taylor-Galerkin algorithm, of a great simplicity and precision, to study the advection dominated problem.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Modelos completos para flujos con superficie libre</b>	<b>15</b>
2.1. <b>Introducción</b>	15
2.2. <b>Ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos</b>	16
2.2.1. Las leyes generales de conservación	16
2.2.2. Límite incompresible	20
2.3. <b>Modelos reológicos</b>	21
2.4. <b>Discretización</b>	23
2.4.1. Taylor-Galerkin de dos pasos	24
2.4.2. Fractional-Step: fluido compresible	28
2.4.3. El problema de la incompresibilidad	33
2.4.4. Fractional-Step: límite incompresible	37
2.5. <b>Validación</b>	40
2.5.1. Flujo incompresible sobre un escalón cuadrado	41
2.5.2. Flujo incompresible alrededor de un cilindro circular	41
2.5.3. Flujo incompresible en una cavidad	46
2.6. <b>Seguimiento de interfases en fluidos no miscibles</b>	56
2.6.1. Ecuaciones del movimiento	56
2.6.2. Discretización	61
2.7. <b>Aplicaciones</b>	68
2.7.1. El problema de Riemann en lecho mojado	68

2.7.2.	El problema de Riemann en lecho seco . . . . .	73
2.7.3.	Fluidos en rotación . . . . .	73
2.7.4.	Caída de fangos en ríos . . . . .	78
<b>3.</b>	<b>Modelos integrados en profundidad</b>	<b>93</b>
3.1.	Introducción . . . . .	93
3.2.	Modelos matemáticos hidrodinámicos . . . . .	94
3.2.1.	Ecuaciones de onda en profundidades reducidas: formulación $h-\eta$ . . . . .	95
3.2.2.	Ecuaciones de onda en profundidades reducidas: formulación $h-Z$ . . . . .	97
3.3.	Modelos reológicos integrados en profundidad . . . . .	99
3.4.	Leyes de fricción con el fondo . . . . .	104
3.5.	Discretización . . . . .	107
3.5.1.	Procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características . . . . .	108
3.5.2.	Algoritmo de Taylor-Galerkin de dos pasos . . . . .	113
3.5.3.	Aplicación a un problema tipo . . . . .	116
3.5.4.	Problema de la integración de las fuentes: esquema de descomposición . . . . .	118
3.6.	Validación . . . . .	124
3.6.1.	El problema de Riemann . . . . .	124
3.7.	Aplicaciones hidrodinámicas . . . . .	128
3.7.1.	Flujo deslizante de Aberfan . . . . .	131
3.7.2.	Balsa minera en el este de Tejas . . . . .	132
3.7.3.	Rotura de residuos mineros: Cougar 7 en Greenhills . . . . .	138
3.7.4.	Propagación de olas en embalses . . . . .	140
<b>4.</b>	<b>Contribución a la modelización del transporte de contaminantes</b>	<b>163</b>
4.1.	Introducción . . . . .	163
4.2.	Flujo con superficie libre en medios porosos . . . . .	164
4.2.1.	Introducción . . . . .	164
4.2.2.	Modelo matemático . . . . .	165
4.2.3.	Modelo numérico . . . . .	168

4.2.4. Aplicaciones . . . . .	174
4.3. Transporte de contaminantes . . . . .	192
4.3.1. Introducción . . . . .	192
4.3.2. Ecuaciones generales . . . . .	192
4.3.3. Discretización . . . . .	197
4.3.4. Aplicaciones . . . . .	203
<b>5. Conclusiones, aportaciones y futuras líneas de investigación</b>	<b>231</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	231
5.2. Aportaciones . . . . .	233
5.3. Futuras líneas de investigación . . . . .	235

# Índice de figuras

2-1. Flujo sobre un escalón cuadrado: condiciones de contorno y malla. . . . .	42
2-2. Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de $Re = 85$ . . . . .	42
2-3. Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de la presión hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de $Re = 85$ . . . . .	43
2-4. Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de $Re = 200$ . . . . .	44
2-5. Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de la presión hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de $Re = 200$ . . . . .	45
2-6. Flujo alrededor de un cilindro: condiciones de contorno y malla utilizada. . . . .	47
2-7. Flujo alrededor de un cilindro: vectores velocidad y valores de la presión para el estado estacionario en el caso de $Re = 40$ . . . . .	48
2-8. Flujo alrededor de un cilindro: vectores velocidad y valores de la presión en el estado estacionario para $Re = 100$ . . . . .	49
2-9. Flujo alrededor de un cilindro: vectores velocidad y valores de la presión para $t = 1000$ s y $Re = 3600$ . . . . .	50
2-10. Flujo en una cavidad: condiciones de contorno y malla utilizada. . . . .	52
2-11. Flujo en una cavidad: velocidades y presión para $Re = 400$ en el estado estacionario. . . . .	53
2-12. Flujo en una cavidad: velocidades y presión para $Re = 1000$ en el estado estacionario. . . . .	54
2-13. Flujo en una cavidad: velocidades y presión para $Re = 5000$ en el estado estacionario. . . . .	55
2-14. Ejemplo de la descripción de dos fases utilizando una función indicadora. . . . .	57

2-15. Ejemplo de la descripción del subdominio de cada material utilizando dos funciones indicadoras. . . . .	58
2-16. Función indicadora: función de interpolación utilizada en la interfase entre fluidos. . .	60
2-17. Interpolación de las propiedades del material y región estrecha a ambos lados de la interfase. (a) Vista en planta. (b) Corte a lo largo de AB. . . . .	67
2-18. Problema de Riemann en lecho mojado: condiciones de contorno y malla computacional.	69
2-19. Problema de Riemann en lecho mojado: evolución de la interfase. . . . .	70
2-20. Problema de Riemann en lecho mojado: evolución de la presión. . . . .	71
2-21. Problema de Riemann en lecho mojado: evolución de los vectores velocidad. . . . .	72
2-22. Problema de Riemann en lecho seco: condiciones de contorno y malla computacional. .	74
2-23. Problema de Riemann en lecho seco: evolución de la interfase. . . . .	75
2-24. Problema de Riemann en lecho seco: evolución de la presión. . . . .	76
2-25. Problema de Riemann en lecho seco: evolución de los vectores velocidad. . . . .	77
2-26. Fluidos en rotación: condiciones de contorno y malla computacional. . . . .	79
2-27. Fluidos en rotación: evolución de la interfase en la primera rotación. . . . .	80
2-28. Fluidos en rotación: evolución de la presión en la primera rotación. . . . .	81
2-29. Fluidos en rotación: evolución de los vectores velocidad en la primera rotación. . . . .	82
2-30. Caída de fangos en ríos: condiciones de contorno y malla computacional. . . . .	83
2-31. Caída de fangos en ríos: evolución de las interfases para tres fluidos newtonianos. . . .	84
2-32. Caída de fangos en ríos: evolución de los valores de la presión para tres fluidos newtonianos.	85
2-33. Caída de fangos en ríos: evolución de los vectores velocidad para tres fluidos newtonianos.	86
2-34. Caída de fangos en ríos: evolución de las interfases para el caso en que el fluido 1 es un fluido friccional con $\phi = 8^\circ$ . . . . .	87
2-35. Caída de fangos en ríos: evolución de la presión para el caso en que el fluido 1 es un fluido friccional con $\phi = 8^\circ$ . . . . .	88
2-36. Caída de fangos en ríos: evolución de los vectores velocidad para el caso en que el fluido 1 es un fluido friccional con $\phi = 8^\circ$ . . . . .	89
3-1. Ecuaciones de onda en profundidades reducidas: notación. . . . .	95

3-2. Distribución de velocidades en la dirección perpendicular a la superficie de la base para un fluido de Bingham. . . . .	103
3-3. Comparación de las diferentes soluciones para la altura en un fluido de Bingham. . . . .	104
3-4. Procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características. . . . .	108
3-5. Comparación de la eficacia de los algoritmos de Taylor-Galerkin y CBG en la solución de un problema tipo con una fuente para diferentes números de fuente, $Sr$ . . . . .	119
3-6. Solución del problema tipo con el método de descomposición. $Sr = 0.5$ . . . . .	122
3-7. Solución del problema tipo para un número de fuente $Sr = 1$ , utilizando el algoritmo de descomposición con el método de Runge-Kutta. . . . .	123
3-8. Solución calculada utilizando el esquema de descomposición de Zhang para una fuente $Sr = 1.0$ , usando (a) $\Delta t = 0.1$ y (b) $\Delta t = 0.01$ . . . . .	124
3-9. Evolución de los perfiles de $h$ y $hu$ y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado $63^\circ$ y se encuentra inicialmente seco aguas abajo del lugar de rotura. . . . .	126
3-10. Evolución de los perfiles de profundidad y velocidad y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado $63^\circ$ y se encuentra inicialmente seco aguas abajo del lugar de rotura. . . . .	127
3-11. Evolución de las incógnitas calculadas $h$ y $hu$ y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado $63^\circ$ y la profundidad inicial aguas abajo es de 7 m. . . . .	129
3-12. Evolución de los perfiles de profundidad y velocidad y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado $63^\circ$ y la profundidad inicial aguas abajo es de 7 m. . . . .	130
3-13. Flujo deslizante de Aberfan: evolución temporal del perfil del deslizamiento. . . . .	133
3-14. Flujo deslizante de Aberfan: posición del frente en función del tiempo. . . . .	133
3-15. Balsa minera en el este de Tejas: sección de la presa. . . . .	134
3-16. Balsa minera en el este de Tejas: malla de elementos finitos utilizada en el análisis del deslizamiento. . . . .	135
3-17. Balsa minera en el este de Tejas: isolíneas de profundidad en diferentes instantes después de la rotura. . . . .	136

3-18. Balsa minera en el este de Tejas: secciones de la superficie libre en diferentes instantes en un plano vertical que pasa a través de la línea central de la zona de rotura. . . . .	137
3-19. Balsa minera en el este de Tejas: influencia de las tensiones viscosas. Evolución de la profundidad calculada en dos puntos de control considerando e ignorando las tensiones viscosas. . . . .	139
3-20. Cougar 7 en Greenhills: características del terreno dado por Dawson et al. (1998). . . . .	141
3-21. Cougar 7 en Greenhills: modelo del terreno y puntos de control. . . . .	142
3-22. Cougar 7 en Greenhills: perspectiva de la propagación del deslizamiento. . . . .	143
3-23. Cougar 7 en Greenhills: propagación del deslizamiento. Isolíneas de profundidad. . . . .	144
3-24. Cougar 7 en Greenhills: propagación del deslizamiento. Sección a lo largo de AA'. . . . .	145
3-25. Cougar 7 en Greenhills: efecto de las tensiones viscosas. Evolución de la profundidad calculada en los tres puntos de control considerando e ignorando las tensiones viscosas. . . . .	146
3-26. Propagación de olas en embalses: geometría y topografía del embalse. . . . .	147
3-27. Propagación de olas en embalses: malla de elementos finitos utilizada en el cálculo. . . . .	148
3-28. Propagación de olas en embalses: condición de contorno reflectante. . . . .	150
3-29. Propagación de olas en embalses: condición de contorno absorbente. . . . .	151
3-30. Propagación de olas en embalses: condición de contorno de aliviadero. . . . .	152
3-31. Propagación de olas en embalses: condición inicial. . . . .	153
3-32. Propagación de olas en embalses: evolución de la sobreelevación. . . . .	154
3-33. Propagación de olas en embalses: evolución de la sobreelevación en 3D. . . . .	155
3-34. Propagación de olas en embalses: historia de sobreelevaciones causadas en la presa. . . . .	156
4-1. Filtración en un tubo horizontal: malla computacional y condiciones de contorno. . . . .	175
4-2. Filtración en un tubo horizontal: evolución de la interfase entre aire y agua. . . . .	176
4-3. Filtración en un tubo horizontal: evolución de la presión. . . . .	176
4-4. Filtración en un tubo horizontal: evolución de los vectores velocidad. . . . .	177
4-5. Filtración en un tubo horizontal: presión en el tubo para seis pasos de tiempo. . . . .	177
4-6. Presa rectangular: condiciones de contorno y malla computacional. . . . .	179
4-7. Presa rectangular: evolución de la interfase entre los dos fluidos hasta el estado estacionario. . . . .	180

4-8. Presa rectangular: evolución de los valores de la presión hasta el estado estacionario. . .	181
4-9. Presa rectangular: evolución de los vectores velocidad hasta el estado estacionario. . .	182
4-10. Presa rectangular con permeabilidad variable: condiciones de contorno y malla computacional. . . . .	184
4-11. Presa rectangular con permeabilidad variable: evolución de la interfase entre los dos fluidos hasta el estado estacionario. . . . .	185
4-12. Presa rectangular con permeabilidad variable: evolución de la presión hasta el estado estacionario. . . . .	186
4-13. Presa rectangular con permeabilidad variable: evolución de los vectores velocidad hasta el estado estacionario. . . . .	187
4-14. Presa triangular con drenaje: condiciones de contorno y malla computacional. . . . .	188
4-15. Presa triangular con drenaje: evolución de la interfase entre los dos fluidos hasta el estado estacionario. . . . .	189
4-16. Presa triangular con drenaje: evolución de la presión hasta el estado estacionario. . . .	190
4-17. Presa triangular con drenaje: evolución de los vectores velocidad hasta el estado estacionario. . . . .	191
4-18. Transporte de la función escalón en una dimensión: malla de elementos finitos utilizada.	204
4-19. Transporte de la función escalón en una dimensión: evolución temporal de la concentración.	206
4-20. Transporte de la función escalón en una dimensión: comparación de la evolución de la concentración utilizando y sin utilizar el amortiguamiento local. . . . .	207
4-21. Rotación de una concentración cilíndrica: malla computacional. . . . .	208
4-22. Rotación de una concentración cilíndrica: campo de velocidades. . . . .	208
4-23. Rotación de una concentración cilíndrica: evolución bidimensional de la concentración.	209
4-24. Rotación de una concentración cilíndrica: evolución tridimensional de la concentración.	210
4-25. Rotación de una concentración cilíndrica: evolución bidimensional de la concentración con un amortiguamiento local de $C_e = 0.005$ . . . . .	211
4-26. Rotación de una concentración cilíndrica: evolución tridimensional de la concentración con un amortiguamiento local de $C_e = 0.005$ . . . . .	212
4-27. Transporte de una concentración cónica: malla computacional. . . . .	213
4-28. Transporte de una concentración cónica: evolución monodimensional. . . . .	214

---

4-29. Transporte de una concentración cónica: evolución bidimensional. . . . .	214
4-30. Transporte de una concentración cónica: evolución tridimensional. . . . .	215
4-31. Transporte de una concentración cónica: evolución monodimensional con un amortiguamiento local de $C_e = 0.001$ . . . . .	216
4-32. Transporte de una concentración cónica: evolución bidimensional con un amortiguamiento local de $C_e = 0.001$ . . . . .	216
4-33. Transporte de una concentración cónica: evolución tridimensional con un amortiguamiento local de $C_e = 0.001$ . . . . .	217
4-34. Transporte de una concentración cónica: comparación para $t = 500$ s de la concentración con y sin amortiguamiento local. . . . .	218
4-35. Transporte de contaminantes bajo una excavación: esquema del terreno. . . . .	219
4-36. Transporte de contaminantes bajo una excavación: condiciones de contorno. . . . .	219
4-37. Transporte de contaminantes bajo una excavación: presión inicial. . . . .	220
4-38. Transporte de contaminantes bajo una excavación: malla computacional. . . . .	220
4-39. Transporte de contaminantes bajo una excavación: valores de la presión en el estado estacionario. . . . .	221
4-40. Transporte de contaminantes bajo una excavación: valores de la velocidad en el estado estacionario. . . . .	222
4-41. Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 2D. . . . .	223
4-42. Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 3D. . . . .	224
4-43. Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 2D con un amortiguamiento local de $C_e = 0.015$ . . . . .	225
4-44. Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 3D con un amortiguamiento local de $C_e = 0.015$ . . . . .	226



# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los problemas que más interés y preocupación ha suscitado en los últimos años es la contaminación del medio ambiente por productos generados por actividades humanas e industriales.

Los vertidos de sustancias tóxicas al medio ambiente marino, aguas continentales, aguas subterráneas o atmósfera pueden propagarse alejándose de la fuente, alcanzando zonas alejadas de esta.

Nos centraremos en nuestro caso en el problema del transporte de contaminantes en aguas continentales, pudiendo dividirlo para su análisis en dos casos: (1) El transporte de contaminantes en aguas superficiales, que atañe problemas tales como vertidos en ríos, como es el conocido caso de Aznalcóllar, (2) El transporte de contaminantes en aguas subterráneas, que implica el estudio de la infiltración, el paso de agua a través de zonas contaminadas, etc.

El mecanismo fundamental de transporte es la convección debida al movimiento del fluido al que se realiza el vertido. Por ello, el estudio de estos problemas requiere el conocimiento previo de la dinámica del medio, llevándose a cabo en una segunda etapa el estudio del transporte de contaminantes.

La tesis que aquí se presenta tiene como objetivo fundamental el desarrollo de modelos numéricos eficientes que permitan reproducir el comportamiento dinámico del medio, así como el transporte de contaminantes.

Respecto del estudio de la dinámica en aguas superficiales, los modelos matemáticos que se emplearán constan de (i) ecuaciones de balance de masa, (ii) ecuaciones de balance de momento lineal, (iii) ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento del medio.

En los casos del medio marino y de las aguas continentales, la ecuación del balance de masa se

reduce a la condición de incompresibilidad del fluido, y esta restricción plantea dificultades numéricas importantes. Las ecuaciones de balance de momento lineal dan lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes, que ya incluyen como ecuación constitutiva del material una ley de comportamiento de tipo fluido newtoniano.

Un problema importante a tener en cuenta aquí es la existencia de superficies libres (contacto agua-atmósfera, por ejemplo).

Debido tanto a esta dificultad como al elevado número de grados de libertad a los que se llega en estas formulaciones, puede en ocasiones emplearse modelos simplificados. Si el espesor de la capa de fluido es relativamente pequeño en comparación con sus otras dos dimensiones características, puede llevarse a cabo una integración en el espesor, obteniéndose ecuaciones donde las variables de campo son el espesor de la capa y las correspondientes velocidades bidimensionales promediadas en profundidad. Aparecen aquí leyes de rozamiento con el fondo para las que en ocasiones se emplean fórmulas empíricas.

Por otro lado, en el caso del estudio de la dinámica de aguas subterráneas, las ecuaciones de balance de masa y de momento lineal de un fluido en el interior de un medio poroso nos dan las ecuaciones de filtración en dicho medio, proporcionándonos el campo de velocidades necesario para el subsecuente estudio del transporte convectivo de contaminantes.

Respecto del transporte de contaminantes, las ecuaciones del modelo son ecuaciones de conservación de los diferentes contaminantes, las cuales tienen en cuenta posibles fenómenos de interacción entre éstos, así como decaimiento debido a fenómenos físico-químicos o incluso biológicos.

Los modelos matemáticos que se emplean presentan, desde el punto de vista numérico, las siguientes dificultades:

- Tratamiento de los términos convectivos. No es posible emplear formulaciones clásicas de Elementos Finitos, según se explica más adelante, por lo que se presentarán nuevos métodos de estabilización de estos términos, tales como el método de dos pasos de Taylor-Galerkin o el método basado en la características de Galerkin.
- Incompresibilidad del fluido, que se tratará empleando métodos de tipo paso fraccional o *fractional-step*.
- Tratamiento de la superficie libre, que se llevará a cabo empleando técnicas de tipo *level-set*.

- Tratamiento de los términos de fuente, que serán integrados haciendo uso del método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Se dedicarán los capítulos 2 y 3 al estudio de dos modelos hidrodinámicos para el análisis dinámico en el caso de aguas superficiales: uno completo basado en la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes y otro integrado en profundidad.

El problema de las aguas subterráneas se abordará en el capítulo 4, estudiándose el problema de la filtración en un medio poroso.

El transporte de contaminantes será objeto de la segunda parte del capítulo 4.

Podemos, por tanto, resumir el contenido de los distintos capítulos de esta tesis de la siguiente manera:

El objetivo del capítulo 2 consiste en presentar un modelo de Elementos Finitos para el cálculo del movimiento de  $n$  fluidos inmiscibles e incompresibles. Para ello han de resolverse las ecuaciones de Navier-Stokes teniendo en cuenta que el problema de la incompresibilidad nos llevará al uso del método de paso fraccional conocido como *fractional-step*. Una vez hecho esto, se describirá el modelo propuesto para el tratamiento del movimiento de varios fluidos inmiscibles e incompresibles con el método conocido como *level-set*, que captura la posición de la interfase entre los distintos materiales y la transporta.

En el capítulo 3 se describen los modelos matemáticos hidrodinámicos de las ecuaciones de onda en profundidades reducidas, dándose una descripción de distintos modelos reológicos integrados en profundidad así como de las leyes de fricción con el fondo. Se explican aquí dos alternativas para llevar a cabo la discretización numérica, esto es, el método basado en el procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características y el método de dos pasos de Taylor-Galerkin, procediéndose a una posterior discusión sobre el problema de la integración de las fuentes y la consecuente utilización del método de Runge-Kutta de cuarto orden para llevar a cabo esta tarea.

El capítulo 4 se encuentra dividido en dos partes. En la primera parte, el principal objetivo es el proporcionar un método preciso para el seguimiento de flujos de superficie libre en el interior de medios porosos. Se propone aquí un nuevo método para el seguimiento de la superficie libre del flujo basado en las técnicas de *level-set* explicadas en el capítulo 2. Con este método de Elementos Finitos es posible estudiar la filtración de  $n$  fluidos inmiscibles en el interior de un suelo y conocer, para

cualquier tiempo dado, la posición de la interfase entre los flujos. Una vez que el campo de velocidades en el medio poroso es conocido, puede procederse al estudio del transporte de contaminantes en dicho medio. Este es el principal objetivo de la segunda parte de este capítulo. Además, es bien conocido que el método de Elementos Finitos estándar de Galerkin a menudo da lugar a soluciones oscilatorias, particularmente en el caso del problema del transporte convectivo dominante o en el caso de ser muy gruesa la malla de elementos finitos utilizada, además de ser un método válido únicamente en el caso de ecuaciones autoadjuntas. Por ello, en esta parte del capítulo 4 haremos uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin, de gran sencillez y precisión, para el tratamiento de problemas de convección dominante.

## Capítulo 2

# Modelos completos para flujos con superficie libre

### 2.1. Introducción

Existen una gran variedad de problemas como el movimiento de burbujas, flujos de superficie libre, llenado de moldes, deslizamiento de laderas y flujo de derrubios, etc. en los que se encuentran involucrados varios fluidos inmiscibles que interactúan a través de una interfase. En estos problemas la discontinuidad existente en las propiedades del fluido a ambos lados de la interfase, tales como viscosidad y densidad, así como la evolución del sistema depende en gran medida de la interacción entre los fluidos. Por todo ello, la precisión en el cálculo de la evolución de la interfase es crítica para la solución del problema [18]<sup>1</sup>.

Para resolver este tipo de problemas se han propuesto numerosos métodos para el seguimiento de la interfase en el marco de las Diferencias Finitas y de los Volúmenes Finitos.

El objetivo de este capítulo consiste en presentar un modelo con el método de los Elementos Finitos para el cálculo del movimiento de  $n$  fluidos inmiscibles e incompresibles. Para ello el capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: en primer lugar se hace un resumen de las ecuaciones de conservación que rigen el movimiento de un fluido, como son las leyes de conservación de la masa,

---

<sup>1</sup>Cada capítulo de esta tesis posee una bibliografía independiente cuya numeración responde a un orden estrictamente alfabético.

del momento y de la energía, haciendo la particularización para el caso de fluidos incompresibles. La sección 2.3 presenta la ecuación constitutiva que se utilizará para los diferentes tipos de fluido que aquí se utilizan. Seguidamente se pasará a la resolución, mediante el método de los Elementos Finitos, de las ecuaciones de Navier-Stokes mostrándose varios ejemplos de validación para el caso de fluidos newtonianos de una sola fase. Una vez hecho esto se describirá el modelo propuesto para el tratamiento del movimiento de varios fluidos inmiscibles e incompresibles con el método conocido como *level-set*, que captura la posición de la interfase entre los distintos materiales y la transporta. Se presentan, por último, algunas aplicaciones de la modelización de flujos con superficie libre para el caso de dos y tres fluidos inmiscibles e incompresibles, por ser éstos los casos más frecuentes en los problemas de Hidráulica Ambiental tratados en esta tesis. Así, por ejemplo, la rotura de una balsa minera origina un flujo de dos componentes inmiscibles, el aire y los residuos almacenados, mientras que cuando estos lodos entran en un cauce de agua hay que considerar tres fases.

## 2.2. Ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos

### 2.2.1. Las leyes generales de conservación

La descripción más general de un fluido se obtiene a partir del sistema completo de las ecuaciones de Navier-Stokes, a menudo expresadas a partir de las leyes de conservación de tres flujos básicos, esto es, el de masa, momento y energía [7] [8] [23] [25] [29].

#### Ley de conservación de la masa

La ley de conservación de la masa es de naturaleza puramente cinemática, lo que quiere decir que es independiente de la naturaleza del fluido o de las fuerzas que actúan sobre él. Expresa el resultado empírico de que, en un fluido, la masa no puede desaparecer del sistema ni ser creada. No existe flujo difusivo para el transporte de masa, lo que significa que la masa tan sólo puede transportarse a través de la convección [8]. Por otro lado, de momento no consideraremos fluidos multifase suponiendo que no existen fuentes debido a reacciones químicas. Así pues, en nuestro caso, la ecuación general de conservación en forma diferencial puede escribirse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

siendo  $\rho$  la densidad del fluido y  $\mathbf{u}$  la velocidad.

Una forma equivalente de la ecuación anterior (2.1) se obtiene desarrollando el operador de la divergencia e introduciendo la derivada material<sup>2</sup>:

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.2)$$

lo que nos lleva a la siguiente forma de la ley de conservación de la masa:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

Aunque ambas ecuaciones (2.1) y (2.3) son completamente equivalentes desde el punto de vista matemático no ocurre lo mismo cuando se lleva a cabo una discretización numérica. La ecuación (2.1) recibe el nombre de forma *conservativa* de la ley de conservación, recibiendo el nombre de forma *no conservativa* la ecuación (2.3).

### Ley de conservación del momento

Es bien sabido, por las leyes de Newton, que las fuentes que causan la variación del momento en un sistema físico son las fuerzas que actúan sobre él. Estas fuerzas son las fuerzas externas de volumen  $\mathbf{f}_e$  y las fuerzas internas  $\mathbf{f}_i$ . Estas últimas dependen de la naturaleza del fluido considerado, y son consecuencia de las suposiciones hechas acerca de las propiedades de las deformaciones internas dentro del fluido y de su relación con las tensiones internas [8].

Tanto  $\mathbf{f}_e$  como  $\mathbf{f}_i$  son fuerzas por unidad de masa. El uso de magnitudes intensivas en este tipo de problemas se encuentra justificado en tanto que, dado que estamos tratando con grandes masas, las magnitudes involucradas son independientes de la cantidad de materia.

Consideraremos, de momento, que el fluido es newtoniano, y tomaremos, por tanto, las tensiones

---

<sup>2</sup>En las distintas áreas de conocimiento esta derivada se denomina de distintas maneras. Así, por ejemplo, en Física Aplicada y Matemáticas se conoce como *derivada total*, mientras que en Mecánica de Fluidos, en Mecánica del Medio Continuo y en Métodos Numéricos se denomina *derivada material*. Siendo ambas denominaciones correctas, se ha elegido en esta tesis el término *derivada material*.

internas como

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor unitario. De esta manera, siguiendo la metodología empleada en Mecánica de Fluidos, hemos introducido una componente de presión isotrópica  $p\mathbf{I}$  y un tensor de tensión desviadora  $\boldsymbol{\tau}$  dado por:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \quad (2.5)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.

Para fluidos newtonianos en equilibrio termodinámico local se cumple la llamada relación de Stokes [8], dada por:

$$2\mu + 3\lambda = 0 \quad (2.6)$$

de manera que:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right] \quad (2.7)$$

Hasta ahora, con la excepción de muy altas temperaturas o presiones, no hay evidencia experimental de que la relación de Stokes no se cumpla, por lo que no consideraremos el segundo coeficiente de viscosidad  $\lambda$  independiente de  $\mu$ .

El término de fuentes consiste en la suma de las fuerzas externas de volumen por unidad de volumen  $\rho \mathbf{f}_e$  y la suma de todas las fuerzas internas. En la mayoría de los casos que trataremos la única fuerza externa considerada será la de la gravedad.

Por definición, las fuerzas internas se cancelan dos a dos en cada punto interior al volumen, por lo que las fuerzas internas restantes dentro del volumen son aquellas que actúan en los puntos de la superficie del contorno puesto que no tienen oponente dentro del volumen considerado [8].

La forma diferencial de la ecuación del movimiento viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) = \rho \mathbf{f}_e \quad (2.8)$$

Podemos obtener una forma no conservativa equivalente a la ecuación anterior sustrayendo del miembro izquierdo la ecuación de continuidad (2.1) multiplicada por  $\mathbf{u}$ :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}_e \quad (2.9)$$

donde se ha introducido la derivada material (2.2):

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

Cuando introducimos la forma (2.7) del tensor de tensión desviadora para un fluido newtoniano viscoso en las ecuaciones (2.8) y (2.9), obtenemos las *ecuaciones de Navier-Stokes del movimiento*. Para coeficientes constantes de viscosidad, se reduce a

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \left[ \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \rho \mathbf{f}_e \quad (2.11)$$

Para un fluido ideal sin tensiones desviadoras (esto es, para un fluido sin viscosidad) la ecuación del momento se reduce a la *ecuación del movimiento de Euler*:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}_e \quad (2.12)$$

### Ley de conservación de la energía

Sabemos, a partir del análisis termodinámico del continuo, que el contenido energético de un sistema se mide por su energía interna por unidad de masa  $e$ . Esta energía interna es una variable de estado del sistema y por lo tanto su variación durante una transformación termodinámica depende únicamente de los estados inicial y final [8].

En un fluido, la energía total que ha de considerarse en la ecuación de conservación es la suma de su energía interna y su energía cinética por unidad de masa  $\mathbf{u}^2/2$ . Denotaremos por  $E$  esta energía total por unidad de masa:

$$E = e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \quad (2.13)$$

La primera ley de la Termodinámica establece que las fuentes para la variación de la energía total son el trabajo de las fuerzas que actúan sobre el sistema más el calor transmitido al sistema.

En relación con las fuentes de variación de la energía en un fluido, hay que hacer una distinción

entre las fuentes de superficie y las de volumen. Las fuentes de volumen son la suma del trabajo de las fuerzas de volumen  $\mathbf{f}_e$  y las fuentes de calor distintas de conducción (p.e. radiación, reacciones químicas)  $q_H$ . Las fuentes de superficie son el resultado del trabajo hecho en el fluido por las tensiones internas actuando en la superficie del volumen considerando que no hay fuentes de calentamiento superficiales [8].

La forma diferencial de la ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = \nabla \cdot (k_T \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) + W_f + \dot{q}_H \quad (2.14)$$

siendo  $T$  la temperatura absoluta,  $k_T$  el coeficiente de conductividad térmica y  $W_f$  el trabajo por unidad de tiempo (potencia) de las fuerzas de volumen externas:

$$W_f = \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} \quad (2.15)$$

### 2.2.2. Límite incompresible

Las ecuaciones de Navier-Stokes se completan con la existencia de una relación de estado dada por:

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.16)$$

En el caso de fluidos incompresibles se asume normalmente que [30]:

1. El problema es isotermo.
2. Que la variación de  $\rho$  con  $p$  es muy pequeña, de manera que en los términos en que aparece el producto de la velocidad por la densidad esta última puede suponerse constante.

No obstante, para el caso en que exista una pequeña compresibilidad podemos relacionar los cambios de la densidad con los cambios en la presión a través de la siguiente relación:

$$d\rho = \frac{\rho}{K} dp \quad (2.17)$$

siendo  $K$  el módulo de compresibilidad. La ecuación anterior puede escribirse como

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp \quad (2.18)$$

o bien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.19)$$

con  $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$  siendo la velocidad del sonido.

Podemos ahora reescribir las ecuaciones de conservación de la masa (2.1) y del momento (2.8) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{f}_e \quad (2.21)$$

Para el caso de un fluido completamente incompresible tenemos que  $c \rightarrow \infty$ , y la ecuación (2.20) queda reducida a:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.22)$$

teniéndose, por tanto, que para fluidos incompresibles ha de cumplirse la relación  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , quedando las ecuaciones (2.5) y (2.7) reducidas a:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.23)$$

### 2.3. Modelos reológicos

Recordemos que, implícitamente en la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes está la ecuación (2.4), la cual expresa las tensiones totales en función de la componente hidrostática y desviadora:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.24)$$

siendo  $p$  la presión,  $\mathbf{I}$  el tensor unitario y  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de tensión viscosa que es función del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{D})$$

siendo  $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ .

Para la mayoría de los materiales que vamos a estudiar, como ocurre en el caso del movimiento de lodos contaminados, consideraremos el material compuesto por una sola fase, en lugar de modelizar por separado la fase sólida y líquida así como las presiones intersticiales entre ambas. De esta manera, la aproximación utilizada hace uso de una ecuación constitutiva para el material fluidificado como un todo.

Siguiendo esta aproximación, se pueden obtener las diferentes reologías implicadas en los deslizamientos de laderas (uno de los casos objeto de nuestro estudio), así como en muchos otros problemas, a partir del modelo viscoplástico generalizado propuesto por Chen y Ling [3]

$$\boldsymbol{\tau} = \left[ \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu_1 |4I_{2,D}|^{(\eta_1-1)/2} \right] \mathbf{D} + \frac{4}{3}\mu_2 |4I_{2,D}|^{(\eta_2-2)/2} \mathbf{D}^2 \quad (2.25)$$

donde los llamados fluidos friccionales pueden incorporarse considerando que la tensión de fluencia total obedece a la ley de Coulomb:

$$\tau_y = \tau_{y,0} \cos \phi + p \sin \phi \quad (2.26)$$

En estas ecuaciones:

- $\tau_y$  es la tensión de fluencia del material.
- $\tau_{y,0}$  es la componente cohesiva de la tensión de fluencia del material.
- $\phi$  es el ángulo de fricción interno.
- $I_{2,D}$  es el segundo invariante de  $\mathbf{D}$ , tal que  $I_{2,D} = \frac{1}{2}tr(\mathbf{D}^2)$ .
- $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son constantes reológicas.

Podemos simplificar la ecuación (2.25) teniendo en cuenta que el término en  $\mathbf{D}^2$  es prácticamente despreciable, obteniéndose

$$\boldsymbol{\tau} = \left[ \frac{\tau_{y,0} \cos \phi + p \sin \phi}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu_1 |4I_{2,D}|^{(\eta_1-1)/2} \right] \mathbf{D} \quad (2.27)$$

Esta ecuación puede particularizarse para describir los diferentes tipos de fluidos, incluidos los newtonianos con su correspondiente densidad y viscosidad, como pueden ser el agua y el aire involucrados en muchos de los problemas que trataremos más adelante. De esta manera sólo es necesaria una única ecuación constitutiva para describir los distintos fluidos involucrados, como pueden ser los newtonianos, de Bingham y friccionales. Seguidamente se determina la expresión de las tensiones internas para cada uno de ellos.

**Fluido newtoniano.** Este tipo de fluido se obtiene considerando en la ecuación (2.27) que  $\tau_y = 0$ , es decir, que  $\tau_{y,0} = 0$  y  $\phi = 0$ , siendo  $\eta_1 = 1$ . Por tanto:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu_1\mathbf{D} \quad (2.28)$$

**Fluido de Bingham.** El fluido de Bingham se obtiene de la ecuación (2.27) considerando  $\tau_y = \tau_{y,0}$ ,  $\phi = 0$  y  $\eta_1 = 1$ . En este caso:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left[ \frac{\tau_{y,0}}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu_1 \right] \mathbf{D} \quad (2.29)$$

**Fluido friccional.** Los fluidos de tipo friccional se obtienen a partir de la ecuación (2.27) considerando  $\tau_{y,0} = 0$  y  $\eta_1 = 1$ . Así pues:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left[ \frac{p \sin \phi}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu_1 \right] \mathbf{D} \quad (2.30)$$

## 2.4. Discretización

Aunque las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser escritas en forma no conservativa, la forma conservativa es concisa, con gran significado físico y muy recomendada en aplicaciones prácticas, puesto

que es capaz de proporcionar resultados precisos a la hora de reproducir fuertes discontinuidades u ondas de choque.

De ahora en adelante trataremos dichas ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de flujos transitorios, viscosos y compresibles de fluidos newtonianos de una sola fase. Para ello haremos uso de dos métodos: el método de dos pasos de Taylor-Galerkin (de segundo orden en el tiempo) y el método de tres pasos denominado de paso fraccional o *fractional-step* (de primer orden en el tiempo).

### 2.4.1. Taylor-Galerkin de dos pasos

En el caso de fluidos compresibles podemos resolver las ecuaciones de Navier-Stokes haciendo uso del método de Taylor-Galerkin de dos pasos, siendo la solución obtenida de segundo orden en el tiempo.

Consideremos la forma conservativa de las ecuaciones de conservación de la masa y momento lineal:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \mathbf{S} \quad (2.31)$$

donde  $\phi$  es el vector de incógnitas,  $\mathbf{F}$  es el tensor de flujo convectivo,  $\mathbf{G}$  es el tensor de flujo difusivo y  $\mathbf{S}$  es el vector de fuentes.

Supondremos una relación simple entre la presión y la densidad, de manera que la ecuación de la energía se encuentra desacoplada y, por tanto, no la consideraremos.

$$\phi = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} p \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Como ya hemos visto, la presión se relaciona con la densidad de la siguiente manera:

$$p = p(\rho) \quad \text{ó} \quad \frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad (2.36)$$

en donde  $c$  es la velocidad del sonido, de manera que  $c^2 = \frac{K}{\rho}$ , siendo  $K$  la compresibilidad del fluido.

Por lo tanto, una vez obtenida la densidad podremos calcular la presión sin más que tener en cuenta la relación:  $\Delta p \approx c^2 \Delta \rho$ .

El procedimiento de Taylor-Galerkin para resolver la ecuación de conservación (2.31) comienza con un desarrollo de segundo orden en el tiempo

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n \quad (2.37)$$

donde la derivada temporal de primer orden de las incógnitas puede calcularse utilizando la ecuación (2.31)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n = \left( \mathbf{S} - \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} \right)^n \quad (2.38)$$

Para obtener la derivada temporal de segundo orden, el procedimiento de dos pasos de Taylor-Galerkin considera un paso intermedio entre  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , ignorando la contribución del flujo difusivo. El objetivo de este primer paso de tiempo es calcular la solución en el tiempo  $t^{n+1/2}$ . Este paso es seguido de un segundo en el que se calcula la solución en  $t^{n+1}$ .

De esta manera, en el primer paso se obtiene

$$\phi^{n+1/2} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \mathbf{S} - \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} \right)^n \quad (2.39)$$

que permite el cálculo de  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  y  $\mathbf{S}^{n+1/2}$ .

Considerando ahora un desarrollo en serie de Taylor de los términos de flujo y fuentes,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i^{n+1/2} &= \mathbf{F}_i^n + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial t}\right)^n \frac{\Delta t}{2} \\ \mathbf{S}^{n+1/2} &= \mathbf{S}^n + \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}\right)^n \frac{\Delta t}{2}\end{aligned}$$

donde los valores de  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  y  $\mathbf{S}^{n+1/2}$  se calculan haciendo uso de  $\phi^{n+1/2}$ , las derivadas temporales del flujo y las fuentes son

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial t}\right)^n &= \frac{2}{\Delta t} \left(\mathbf{F}_i^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^n\right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}\right)^n &= \frac{2}{\Delta t} \left(\mathbf{S}^{n+1/2} - \mathbf{S}^n\right)\end{aligned}$$

Incorporando estas expresiones en la derivada temporal de segundo orden

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|^n = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{S} - \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}\right)^n$$

se obtiene

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|^n = \frac{2}{\Delta t} \left(\mathbf{S}^{n+1/2} - \mathbf{S}^n - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{F}_i^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^n\right)\right) \quad (2.40)$$

Sustituyendo ahora las expresiones obtenidas para las derivadas temporales de primer, (2.38), y segundo orden, (2.40), en el desarrollo de Taylor (2.37) se tiene

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left(\mathbf{S}^{n+1/2} - \frac{\partial \mathbf{F}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i}\right) \quad (2.41)$$

Teniendo en cuenta que podemos aproximar  $\phi$  por medio de las funciones de forma  $\mathbf{N}$ , de manera que

$$\phi = \mathbf{N} \hat{\phi}$$

siendo  $\hat{\phi}$  los valores nodales, la ecuación (2.41) puede discretizarse en el espacio usando el método de Boubnov-Galerkin. El sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta\hat{\phi}^n = & \Delta t \left( \int \mathbf{N}^T \mathbf{S}^{n+1/2} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\mathbf{F}_i^{n+1/2} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \right. \\ & \left. + \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{F}_i^{n+1/2} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\mathbf{G}_i^n \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{G}_i^n d \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se advierte inmediatamente que:

- La expresión anterior es idéntica a la obtenida al utilizar una aproximación de Galerkin estándar en la ecuación (2.31) y una integración explícita con los valores de  $\mathbf{F}_i$  actualizados por medio de la ecuación (2.39).
- En problemas no lineales es conveniente interpolar directamente en la forma estándar de Elementos Finitos por:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{N} \hat{\mathbf{F}}_i$$

siendo  $\mathbf{N}$  la matriz de las funciones de forma y  $\hat{\mathbf{F}}_i$  los valores de  $\mathbf{F}_i$  en los nodos. Esta alternativa es mejor que calcularlo como  $\mathbf{F}_i(\phi)$ .

Así, la evaluación de  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  necesita sólo efectuarse en los puntos de integración numérica dentro de un elemento, y el cálculo de  $\phi_i^{n+1/2}$  mediante la ecuación (2.39) sólo se efectúa en dichos puntos. Para un elemento triangular lineal esto simplifica los cálculos a una única evaluación de  $\phi_i^{n+1/2}$  y  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  en el centro de cada elemento, tomando naturalmente el valor medio de  $\phi_i^n$  y  $\mathbf{F}_i^n$  en dicho punto [29].

El sistema de ecuaciones (2.42) a resolver durante cada paso de tiempo es del tipo:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

y puede resolverse de una manera económica utilizando un esquema de Jacobi [14] [15]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{M}_L^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}) \quad (2.43)$$

donde el superíndice es un contador de iteraciones y la matriz  $\mathbf{M}_L$  es la representación diagonal de la matriz de masas. Normalmente son necesarias menos de seis iteraciones para alcanzar la convergencia.

**Estabilidad.** En ausencia de términos de fuente, el límite de estabilidad para  $\Delta t$  viene dado por la expresión [25]:

$$C^2 + 2\frac{C}{Re} \leq \alpha \quad (2.44)$$

en donde

$$C \equiv (|\mathbf{u}| + c)\frac{\Delta t}{h} \quad (2.45)$$

es el número de Courant, y

$$Re \equiv (|\mathbf{u}| + c)\frac{h}{2\nu} \quad (2.46)$$

es el número de Reynolds en cada elemento de la malla,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  es la viscosidad cinemática y  $h$  es el tamaño del elemento. Si la solución transitoria es de interés debe utilizarse la matriz consistente de masas y el valor de  $\alpha$  es  $\alpha = 1/3$ . En tal caso  $\Delta t$  debe elegirse globalmente como el menor sobre todos los elementos. En caso contrario puede hacerse uso de la forma diagonal de la matriz de masas siendo  $\alpha = 1$ .

### 2.4.2. Fractional-Step: fluido compresible

Se introduce aquí el método *fractional-step* para el caso compresible por completitud. Sin embargo, siendo este algoritmo un método de primer orden en el tiempo, se recomienda para el tratamiento de problemas relacionados con fluidos compresibles el uso de otros métodos que proporcionan una mayor precisión como es el caso del método de Taylor-Galerkin de dos pasos, que como se ha comentado, corresponde a un esquema de segundo orden en el tiempo. No obstante, el *fractional-step* para el caso compresible puede utilizarse como una herramienta de comparación con otros métodos y, por tanto, de validación de resultados.

Recordemos la ecuación de conservación del momento en su forma conservativa (2.8):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) = \rho\mathbf{f}_e$$

siendo  $\mathbf{f}_e = \begin{pmatrix} g \sin \vartheta \\ -g \cos \vartheta \end{pmatrix}$ ,  $\vartheta$  el ángulo formado entre  $\mathbf{f}_e$  y la vertical y  $g$  la constante de la gravedad.

Podemos escribir esta ecuación en notación tensorial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i + \delta_{ij} p) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) - \rho f_i = 0 \quad (2.47)$$

La solución de esta ecuación puede llevarse a cabo mediante los tres pasos del método llamado *fractional-step* descrito a continuación:

- Paso I: Discretización de la velocidad

Consiste en resolver explícitamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)^{*n} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i)^n - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij})^n - \rho f_i^n = 0 \quad (2.48)$$

Las ecuaciones (2.48) contienen todos los términos convectivos.

- Paso II: Discretización de la ecuación de continuidad

Resolvemos explícitamente o implícitamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)^{**n} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij} p)^{n+1} = 0 \quad (2.49)$$

- Paso III: Corrección de la velocidad

Una vez determinado el incremento de presión corregimos la velocidad de dicho efecto, de manera que:

$$\Delta(\rho u_i)^n = \Delta(\rho u_i)^{*n} + \Delta(\rho u_i)^{**n} \quad (2.50)$$

**Paso I: Discretización de la velocidad.** Para resolver el primer paso haremos uso de la técnica de Taylor-Galerkin de dos pasos descrita en la sección 2.4.1 resolviendo la ecuación (2.48) como sigue:

$$(\rho u_i)^{*(n+1/2)} = (\rho u_i)^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i)^n - \rho f_i^n \right) \quad (2.51)$$

$$\mathbf{M} \Delta(\rho \hat{u}_i)^{*n} = \Delta t \left\{ \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \left( (\rho u_j u_i)^{*(n+1/2)} - (\tau_{ij})^n \right) d \right. +$$

$$+ \int \mathbf{N}^T (\rho f_i)^{*(n+1/2)} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( (\rho u_j u_i)^{*(n+1/2)} - (\tau_{ij})^n \right) \cdot n_j d\Gamma \quad (2.52)$$

**Estabilidad.** En la ausencia de términos de fuente, el límite de estabilidad para en esta parte de la descomposición viene dado por la expresión (2.44):

$$C^2 + 2 \frac{C}{Re} \leq \alpha \quad (2.53)$$

en donde

$$C \equiv |\mathbf{u}| \frac{\Delta t}{h} \quad (2.54)$$

es el número de Courant, y

$$Re \equiv |\mathbf{u}| \frac{h}{2\nu} \quad (2.55)$$

es el número de Reynolds en cada elemento de la malla,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  es la viscosidad cinemática y  $h$  es el tamaño del elemento. Como ya se explicó en la sección anterior, si la solución transitoria es de interés debe utilizarse la matriz consistente de masas y el valor de  $\alpha$  es  $\alpha = 1/3$ . En tal caso  $\Delta t$  debe elegirse globalmente como el menor sobre todos los elementos. En caso contrario puede hacerse uso de la forma diagonal de la matriz de masas siendo  $\alpha = 1$ .

**Paso II: Discretización de la ecuación de continuidad** Consideremos la ecuación (2.49):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i)^{**n} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p)^{n+1} = 0$$

Para continuar es conveniente proceder con la discretización temporal de la ecuación anterior y de la de conservación de la masa, de manera que:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \frac{\partial (\rho u_i)^{n+\theta_1}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\Delta \rho u_i^{**}}{\Delta t} + \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.57)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  toman valores comprendidos entre  $1/2$  y  $1$ , si bien  $\theta_1 = 1$  introduce algunos saltos espurios y debería usarse únicamente para el cálculo del estado estacionario. En el caso de que la

solución transitoria sea de interés se recomienda  $\theta_1 = 1/2$ .

$$\rho u_i^{n+\vartheta_1} = \rho u_i^n + \vartheta_1 (\Delta \rho u_i^{*n} + \Delta \rho u_i^{**n}) \quad (2.58)$$

$$p^{n+\vartheta_2} = p^n + \vartheta_2 (p^{n+1} - p^n) \quad (2.59)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.36)

$$p = p(\rho) \quad \text{ó} \quad \frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad (2.60)$$

tenemos que:

$$(\Delta p)^n \approx c^2 (\Delta \rho)^n \Rightarrow (\Delta p)^n = \Delta p, (\Delta \rho)^n = \Delta \rho \quad (2.61)$$

por tanto:

$$\Delta p \approx c^2 \Delta \rho$$

siendo  $c^2 = \frac{K}{\rho}$ , con  $K$  = compresibilidad del fluido.

Utilizando las expresiones (2.58), (2.59) y (2.61) podemos escribir las ecuaciones (2.56) y (2.57) de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \vartheta_1 \frac{\partial (\Delta \rho u_i)^{**n}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \rho u_i^n}{\partial x_i} - \vartheta_1 \frac{\partial (\Delta \rho u_i)^{*n}}{\partial x_i} \quad (2.62)$$

$$\frac{\Delta \rho u_i^{*n}}{\Delta t} + \vartheta_2 \frac{\partial (c^2 \Delta \rho)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (2.63)$$

Eliminando  $(\Delta \rho u_i)^{**n}$  de la ecuación (2.62) obtenemos:

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \Delta \rho - \Delta t^2 \vartheta_1 \vartheta_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (c^2 \Delta \rho) \right) = -\frac{\partial \rho u_i^n}{\partial x_i} - \vartheta_1 \frac{\partial (\Delta \rho u_i)^{*n}}{\partial x_i} + \Delta t \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} p^n \quad (2.64)$$

La expresión anterior es prácticamente autoadjunta en la variable  $\Delta \rho$ , de manera que el proceso de aproximación de Galerkin estándar es óptimo. De esta manera se obtiene el siguiente sistema discreto:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2 c^2} \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} d \quad + \vartheta_1 \vartheta_2 \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d \right] \Delta \hat{p} = -\frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N} d \quad (\rho \hat{u}_i^n + \vartheta_1 \Delta \rho \hat{u}_i^{*n}) -$$

$$-\vartheta_1 \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d \hat{p}^n + \vartheta_1 \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \cdot n_i d\Gamma (\hat{p})^{n+\vartheta_2} \quad (2.65)$$

y como:

$$\text{grad} \left( p^{n+\vartheta_2} \right) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{1}{\vartheta_1} \rho \mathbf{u}^{n+\vartheta_1} - \left( \frac{1}{\vartheta_1} \rho \mathbf{u}^n + \Delta \rho \mathbf{u}^{*n} \right) \right] \cdot \mathbf{n} \quad (2.66)$$

la integral de contorno será:

$$\vartheta_1 \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \cdot n_i d \hat{p}^{n+\vartheta_2} = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \left[ \rho u_i^{n+\vartheta_1} - (\rho u_i^n + \vartheta_1 \Delta \rho u_i^{*n}) \right] \cdot n_i d\Gamma \quad (2.67)$$

**Paso III: Corrección de la velocidad** Una vez que el incremento de presión ha sido determinado en el *paso II*, el incremento de velocidad  $\Delta \rho \mathbf{u}^*$  debe ser corregido de los efectos de la presión. Esto se hace resolviendo la ecuación de discretización temporal (2.57) para calcular  $\Delta \rho \mathbf{u}^{**}$ :

$$\int \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d \Delta \rho \hat{\mathbf{u}}^{**n} + (1 - \vartheta_2) \int \mathbf{N}^T \text{grad} (p^n) d + \vartheta_2 \int \mathbf{N}^T \text{grad} (p^{n+1}) d = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

de manera que:

$$\Delta \rho \mathbf{u}^n = \rho \mathbf{u}^{n+\vartheta_1} - \rho \mathbf{u}^n = \vartheta_1 (\Delta \rho \mathbf{u}^{*n} + \Delta \rho \mathbf{u}^{**n}) \quad (2.69)$$

Finalmente,  $\rho \mathbf{u}^{n+1}$  se obtiene teniendo en cuenta las correspondientes condiciones de contorno  $\Gamma_{\rho u}$ .

**Forma semi-implícita.** La ecuación (2.65) puede resolverse implícitamente de manera que el *paso II* no introduzca ninguna limitación en la estabilidad. Por lo tanto, el paso de tiempo crítico de todo el proceso vendrá dado por el *paso I* y está relacionado con la velocidad del flujo más que con la velocidad del sonido como ocurre en el esquema de Taylor-Galerkin de dos pasos para el caso de fluidos incompresibles.

**Forma explícita.** En este caso puede suponerse que el término  $\vartheta_1 \vartheta_2 \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d \Delta p$  en la ecuación (2.65) es de orden superior y puede ignorarse. La ecuación (2.65), por tanto, puede escribirse:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2 c^2} \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} d \right] \Delta \hat{p} = -\frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N} d (\rho \hat{u}_i^n + \vartheta_1 \Delta \rho \hat{u}_i^{*n}) -$$

$$-\vartheta_1 \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d(\hat{p})^n + \vartheta_1 \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \cdot n_i d\Gamma (\hat{p})^{n+\vartheta_2} \quad (2.70)$$

La solución de la ecuación anterior requiere el cálculo de la matriz de masas, que puede ser la matriz de masas diagonal en el caso de buscarse sólo la solución estacionaria.

Si la solución transitoria es de interés, el paso de tiempo crítico vendrá dado por la siguiente expresión [25]:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{2\vartheta_1 c}} \quad (2.71)$$

Es interesante darse cuenta de que este límite se encuentra muy próximo al que arroja el esquema de Taylor-Galerkin [16] en el caso de que  $u \ll c$ .

### 2.4.3. El problema de la incompresibilidad

Las ecuaciones de Navier-Stokes son la base para la mayoría de los códigos utilizados en la Mecánica de Fluidos. En la discusión presentada aquí se considerará el caso de un fluido cuasi-incompresible, en el que se permite la existencia de una pequeña compresibilidad. Además, en favor de una mayor simplicidad a la hora de escribir las ecuaciones del fluido, se hará uso de una formulación Lagrangiana, ignorándose de esta manera los términos convectivos involucrados.

Así, podemos escribir la ecuación de conservación del momento en un sistema de coordenadas transportado por convección de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_e \quad (2.72)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad,  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones,  $\rho$  la densidad y  $\mathbf{f}_e$  el vector de fuerzas de volumen, normalmente la gravedad.

Puesto que el tensor de tensiones puede descomponerse en componentes hidrostática,  $p\mathbf{I}$ , y desviadora  $\boldsymbol{\tau}$ , (ver ecuación (2.24))

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.73)$$

podemos escribir la ecuación del momento como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = \text{div } \boldsymbol{\tau} - \text{grad } p + \rho \mathbf{f}_e \quad (2.74)$$

y la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.75)$$

Si los cambios de densidad son pequeños podemos escribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \text{div } \boldsymbol{\tau} - \text{grad } p + \rho \mathbf{f}_e \quad (2.76)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2.77)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido tal que  $c^2 = \frac{K}{\rho}$ , siendo  $K$  la compresibilidad del fluido (que se supone constante).

Como ya vimos en la sección 2.2.1, podemos escribir la tensión desviadora de la siguiente manera

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.78)$$

de manera que

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \mathbf{D}_0 \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (2.79)$$

siendo, en el caso bidimensional

$$\boldsymbol{\tau}^T = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yy} & \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

y en el caso tridimensional

$$\boldsymbol{\tau}^T = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yy} & \tau_{zz} & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Si aplicamos ahora la discretización estándar de Galerkin a las ecuaciones (2.76) y (2.77), y escribimos el vector velocidad  $\mathbf{u}$  y la presión  $p$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \\ p &= \mathbf{N}_p \hat{p}\end{aligned}$$

siendo  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{p}$  los valores nodales de las incógnitas, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

donde

$$\mathbf{M}_u = \int \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u d$$

$$\mathbf{M}_p = \int \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho c^2} \mathbf{N}_p d$$

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{S}^T \mathbf{N}_u^T \mu \mathbf{D}_0 \mathbf{S} \mathbf{N}_u d$$

$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{N}_u^T \nabla \mathbf{N}_p d$$

$$\mathbf{Q}^T = \int \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_u d$$

$$\mathbf{f}_u = \int \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{f}_e d + \text{términos de contorno}$$

Una amplia discusión sobre las condiciones de contorno puede encontrarse en [5].

En el caso de un fluido completamente incompresible la matriz  $\mathbf{M}_p$  se hace cero, lo que impide la aplicación de procedimientos de tipo explícito. Sin embargo, una dificultad aún más seria planteada por la incompresibilidad es el cero existente en la diagonal de la segunda matriz de la ecuación (2.80) [28]. Debido a esto, la solución no tiene sentido a menos que se incorporen condiciones especiales para

llevar a cabo la condición de Babuška-Brezzi, [1] [2], que asegura la convergencia del método [9]. A este respecto, la utilización del mismo orden de interpolación para los espacios de velocidad y presión puede dar lugar a oscilaciones en el campo de presiones [11] [17], a no ser que se haga uso de técnicas especiales de estabilización [10].

Para salvar esta restricción el método de paso fraccional o *fractional-step*, propuesto originalmente por Chorin [4], ha sido usado con éxito en el marco de la Mecánica de Fluidos [27], en Mecánica de Suelos [12] [13] y, más recientemente, en el análisis dinámico explícito de sólidos [28].

#### 2.4.4. Fractional-Step: límite incompresible

Básicamente se trata del mismo método ya explicado para el caso de fluidos compresibles en la sección 2.4.2, si bien para el caso incompresible hay que introducir algunas modificaciones en el tratamiento del *paso II* (discretización de la ecuación de continuidad) así como en el cálculo de las tensiones para fluidos newtonianos.

La solución del sistema (2.47) puede llevarse a cabo mediante los tres pasos, ya explicados, del *fractional-step*:

- Paso I: Discretización de la velocidad

Consiste en resolver explícitamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)^{*n} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i)^n - \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij})^n - \rho f_i^n = 0 \quad (2.81)$$

siendo  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} g \sin \vartheta \\ -g \cos \vartheta \end{pmatrix}$ ,  $\vartheta$  el ángulo formado entre  $\mathbf{f}$  y la vertical y  $g$  la constante de la gravedad.

Las ecuaciones (2.81) contienen todos los términos convectivos.

- Paso II: Discretización de la ecuación de continuidad

Resolvemos implícitamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)^{**n} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij} p)^{n+1} = 0 \quad (2.82)$$

- Paso III: Corrección de la velocidad

Una vez determinado el incremento de presión corregimos la velocidad de dicho efecto, de manera que:

$$\Delta(\rho u_i)^n = \Delta(\rho u_i)^{*n} + \Delta(\rho u_i)^{**n} \quad (2.83)$$

**Paso I: Discretización de la velocidad.** Para resolver este primer paso, hacemos uso de la técnica de Taylor-Galerkin de dos pasos, resolviendo la ecuación (2.81) de manera análoga a como se hizo en el caso de un fluido compresible (ecuaciones (2.51) y (2.52)):

$$(\rho u_i)^{*(n+1/2)} = (\rho u_i)^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i)^n - \rho f_i^n \right) \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta(\rho \hat{u}_i)^{*n} &= \Delta t \left\{ \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \left( (\rho u_j u_i)^{*(n+1/2)} - (\tau_{ij})^n \right) d \right. \\ &+ \left. \int \mathbf{N}^T (\rho f_i)^{*(n+1/2)} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( (\rho u_j u_i)^{*(n+1/2)} - (\tau_{ij})^n \right) \cdot n_j d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.85)$$

El límite para la estabilidad de este paso es el mismo que fue explicado en la sección 2.4.2:

**Estabilidad.** En la ausencia de términos de fuente, el límite de estabilidad para  $\Delta t$  viene dado por la expresión (2.53):

$$C^2 + 2 \frac{C}{Re} \leq \alpha \quad (2.86)$$

en donde, como vimos en la sección 2.4.2

$$C \equiv |\mathbf{u}| \frac{\Delta t}{h} \quad (2.87)$$

es el número de Courant, y

$$Re \equiv |\mathbf{u}| \frac{h}{2\nu} \quad (2.88)$$

es el número de Reynolds en cada elemento de la malla,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  es la viscosidad cinemática y  $h$  es el tamaño del elemento. Si la solución transitoria es de interés debe utilizarse la matriz consistente de masas,  $\alpha = 1/3$ , y  $\Delta t$  debe elegirse globalmente como el menor sobre todos los elementos. En caso contrario puede hacerse uso de la forma diagonal de la matriz de masas ( $\alpha = 1$ ).

**Paso II: Discretización de la ecuación de continuidad.** Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad en el tiempo  $t^{n+1}$ :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 \quad (2.89)$$

y discretizando la ecuación del momento, obtenemos:

$$\frac{\Delta \rho \mathbf{u}^{**n}}{\Delta t} + \operatorname{grad}(p^{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.90)$$

de manera que la ecuación de continuidad discretizada en el tiempo será:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}^{*n}) - \Delta t \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p^{n+1})) = 0 \quad (2.91)$$

donde  $\rho \mathbf{u}^{*n} = \rho \mathbf{u}^n + \Delta \rho \mathbf{u}^{*n}$ .

Siguiendo ahora una discretización del tipo Galerkin estándar, la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{grad} \mathbf{N})^T \operatorname{grad} \mathbf{N} d \Delta \hat{p}^n = & -\frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{N}^T \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}^{*n}) d - \\ & - \int (\operatorname{grad} \mathbf{N})^T \operatorname{grad} p^n d + \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \operatorname{grad} p^{n+1} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde se supone que la presión es prescrita en el contorno  $\Gamma_p$ .

Para calcular la integral de contorno, proyectamos la ecuación (2.90) a lo largo de la normal  $\mathbf{n}$ :

$$\operatorname{grad}(p^{n+1}) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\Delta t} [\rho \mathbf{u}^{n+1} - (\rho \mathbf{u}^n + \Delta \rho \mathbf{u}^{*n})] \cdot \mathbf{n} \quad (2.93)$$

resultando lo siguiente:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \operatorname{grad} p^{n+1} \cdot \mathbf{n} d = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T [\rho \mathbf{u}^{n+1} - (\rho \mathbf{u}^n + \Delta \rho \mathbf{u}^{*n})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.94)$$

Este procedimiento evita despreciar  $\operatorname{grad}(p^{n+1})$  y, por tanto, la integral en el contorno  $\Gamma - \Gamma_p$ . Otra posibilidad, que ha sido utilizada en el contexto de la Dinámica de Sólidos, consiste en aproximar  $\operatorname{grad}(p^{n+1})$  por su valor en el paso de tiempo previo,  $\operatorname{grad}(p^n)$ . Sin embargo, la primera alternativa

citada proporciona una mayor precisión. De esta manera, el sistema de ecuaciones a resolver queda como sigue:

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{grad} \mathbf{N})^T \mathbf{grad} \mathbf{N} d \Delta \hat{p}^n = & -\frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{N}^T \mathbf{div} (\rho \mathbf{u}^{*n}) d - \\ & - \int (\mathbf{grad} \mathbf{N})^T \mathbf{grad} p^n d - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T [\rho \mathbf{u}^{n+1} - (\rho \mathbf{u}^n + \Delta \rho \mathbf{u}^{*n})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.95)$$

Es importante hacer notar que este segundo paso se resuelve de manera implícita por lo que el límite de estabilidad vendrá dado entonces por el del *paso I*.

**Paso III: Corrección de la velocidad.** Una vez que el incremento de presión ha sido determinado en el *paso II*, el incremento de velocidad  $\Delta \rho \mathbf{u}^*$  debe ser corregido de los efectos de la presión. Esto se hace resolviendo la ecuación de discretización temporal (2.90) para calcular  $\Delta \rho \mathbf{u}^{**}$ :

$$\int \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d \Delta \rho \hat{\mathbf{u}}^{**n} + \int \mathbf{N}^T \mathbf{grad} p^{n+1} d = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

de manera que:

$$\Delta \rho \mathbf{u}^n = \Delta \rho \mathbf{u}^{*n} + \Delta \rho \mathbf{u}^{**n} \quad (2.97)$$

Finalmente,  $\rho \mathbf{u}^{n+1}$  se obtiene teniendo en cuenta las correspondientes condiciones de contorno  $\Gamma_{\rho u}$ .

## 2.5. Validación

Existen, en la Dinámica de Fluidos Computacional, una serie de pruebas que suelen emplearse para comparar los resultados obtenidos con un modelo nuevo con otros anteriores ya establecidos. Entre ellas, hemos elegido tres ejemplos numéricos de validación: flujo incompresible sobre un escalón cuadrado, flujo incompresible alrededor de un cilindro circular y flujo incompresible en una cavidad, que ilustran el comportamiento de los fluidos incompresibles tratados con el método *fractional-step*. Los números de Reynolds elegidos en este estudio coinciden con los empleados por otros autores [25] [30], habiéndose obtenido resultados idénticos a los descritos por estos investigadores.

### 2.5.1. Flujo incompresible sobre un escalón cuadrado

Este problema ha sido presentado por numerosos autores como un ejemplo de fluido newtoniano incompresible tanto en el caso transitorio como en el estacionario.

Se considera el flujo en un canal de 1 m de altura, de manera que a una distancia de 1.2 m del contorno de flujo entrante se sitúa un escalón de 0.4 m de altura por 0.4 m de anchura. La longitud total del canal es de 6 m, tal y como se muestra en la Figura 2-1. Se han elegido estos valores para que la geometría coincida con aquella presentada por otros autores [22] [25] [26].

El perfil de velocidades del flujo entrante es de la forma  $u = 4y(1 - y)$  y  $v = 0$ , dejándose libre la presión en ese contorno. En el contorno correspondiente al flujo saliente se toma un valor de la presión  $p = 0$ , dejando libres ambas componentes de la velocidad. En el resto del contorno se toma  $u = v = 0$ , dejando libre la presión (ver Figura 2-1). La presión se toma inicialmente como cero en todo el dominio.

En los ejemplos que aquí se presentan se ha utilizado una malla no estructurada consistente en 1364 elementos triangulares lineales y 760 nodos, tal y como se muestra en la Figura 2-1. En dicha malla se han estudiado los casos correspondientes a  $Re = 85$  y  $Re = 200$ , estando definido el número de Reynolds por  $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$ , siendo  $\rho$  la densidad,  $\mu$  la viscosidad dinámica,  $L$  la altura del canal y  $u$  la velocidad en el punto medio del contorno correspondiente al flujo entrante.

La Figura 2-2 muestra la evolución de los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario para un número de Reynolds de 85. Los resultados obtenidos para la presión se muestran en la Figura 2-3.

Para el caso de un número de Reynolds de 200, los resultados para los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario se dan en la Figura 2-4, mientras que los resultados para la presión aparecen en la Figura 2-5.

Los resultados coinciden con aquellos dados por otros autores [22] [25] [26] [30].

### 2.5.2. Flujo incompresible alrededor de un cilindro circular

Este problema trata el caso del flujo de un fluido newtoniano incompresible alrededor de un cilindro circular situado en el interior de un dominio rectangular. Las dimensiones del dominio son de 15 m de ancho por 25 m de largo, teniendo el cilindro 1 m de diámetro. De nuevo, para poder establecer una

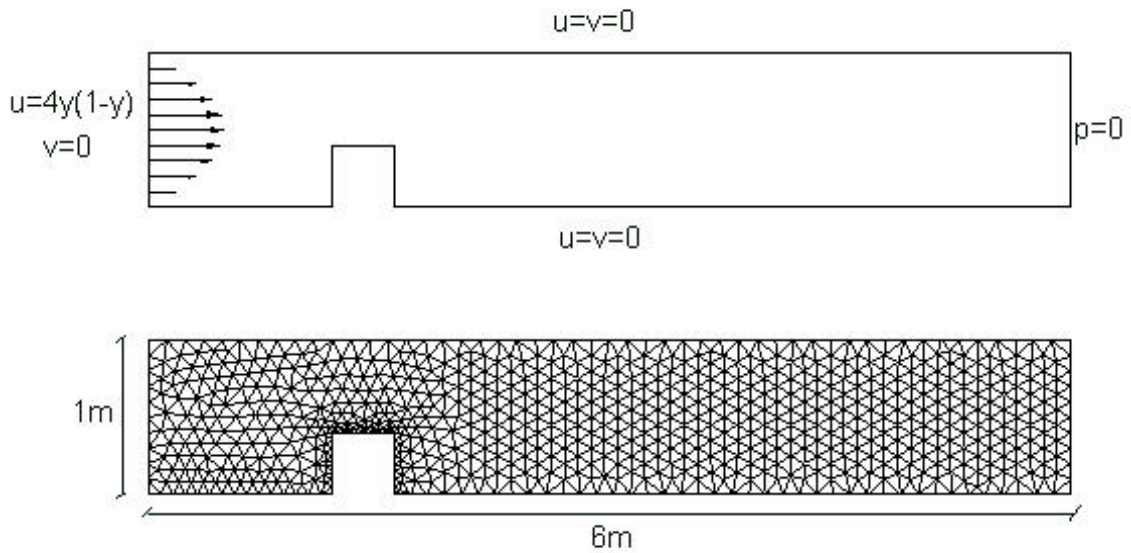


Figura 2-1: Flujo sobre un escalón cuadrado: condiciones de contorno y malla.

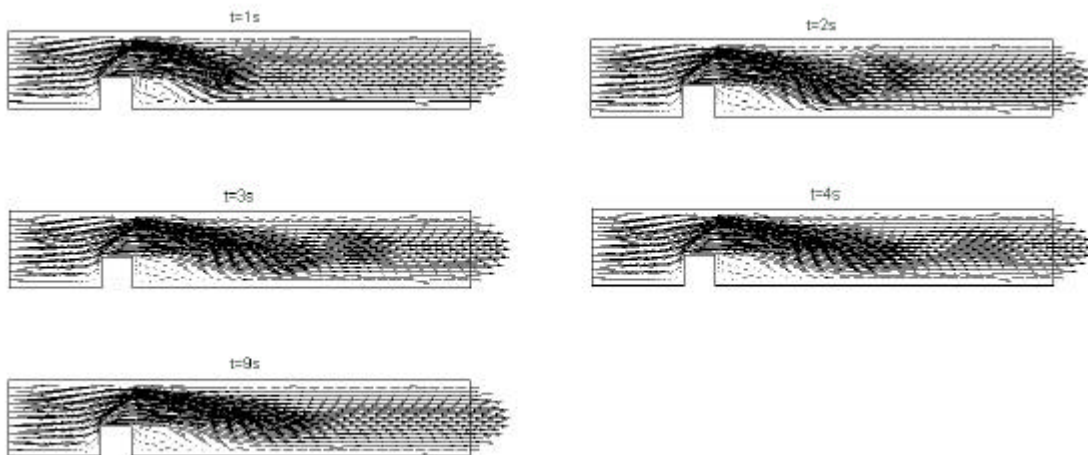


Figura 2-2: Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de  $Re = 85$ .

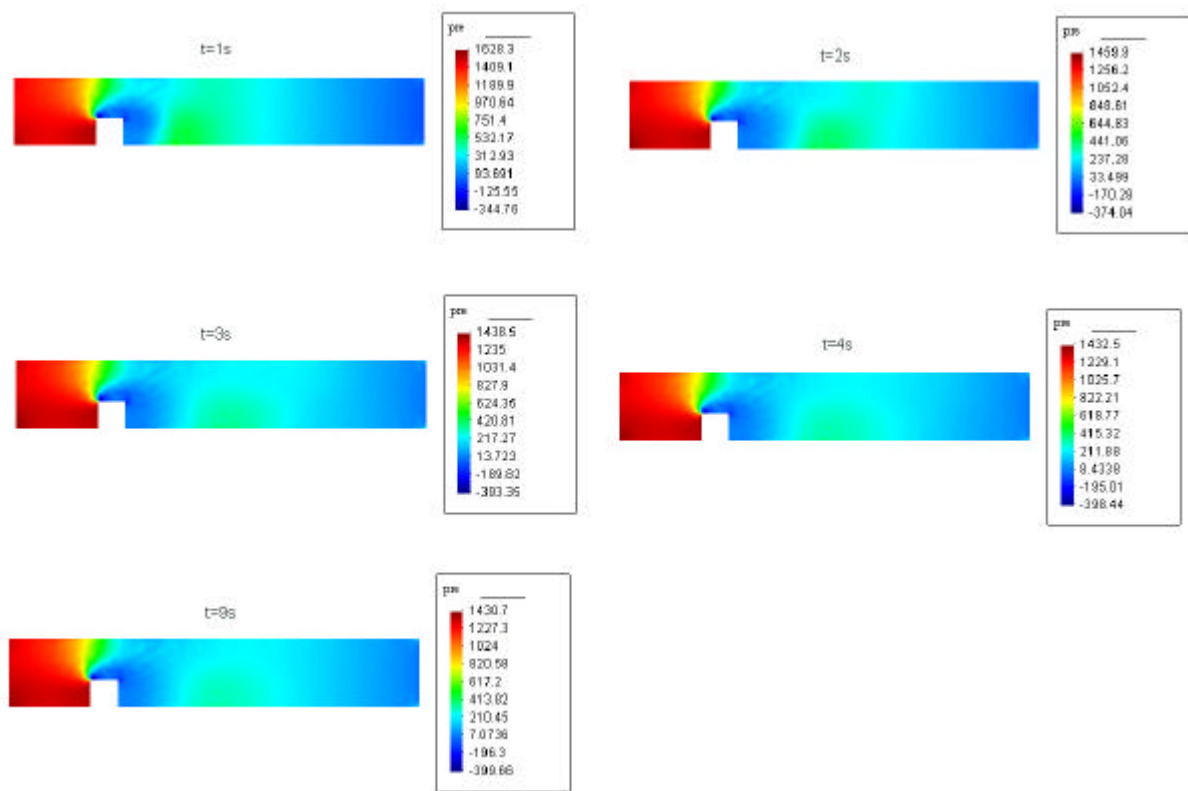


Figura 2-3: Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de la presión hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de  $Re = 85$ .

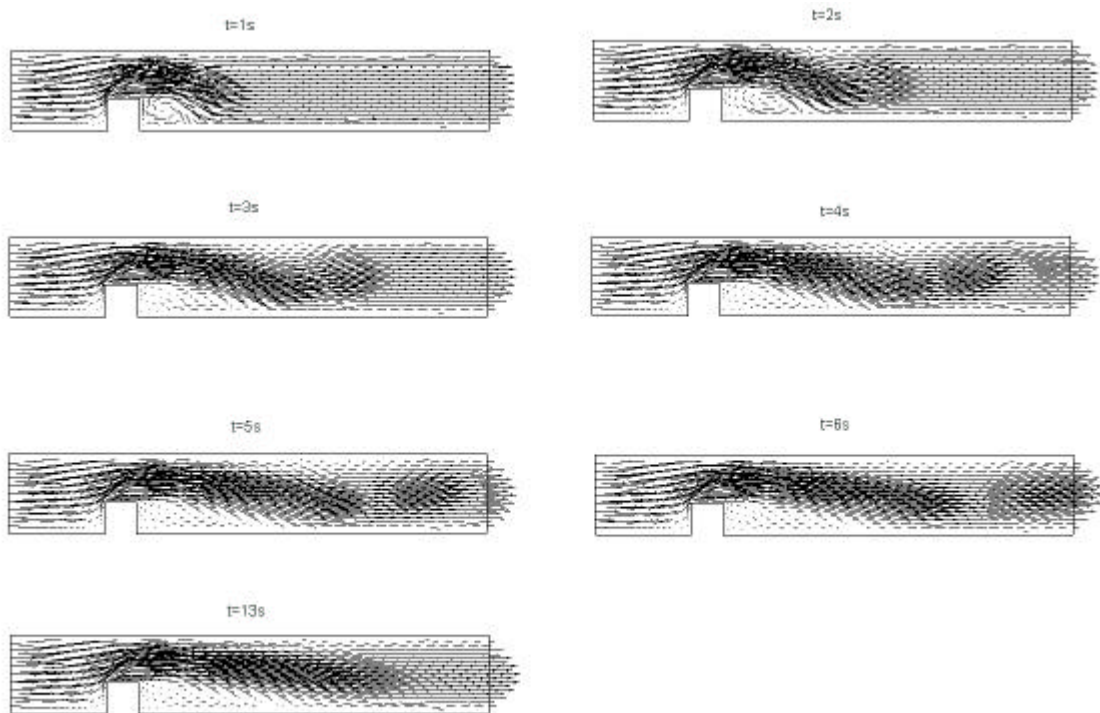


Figura 2-4: Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de  $Re = 200$ .

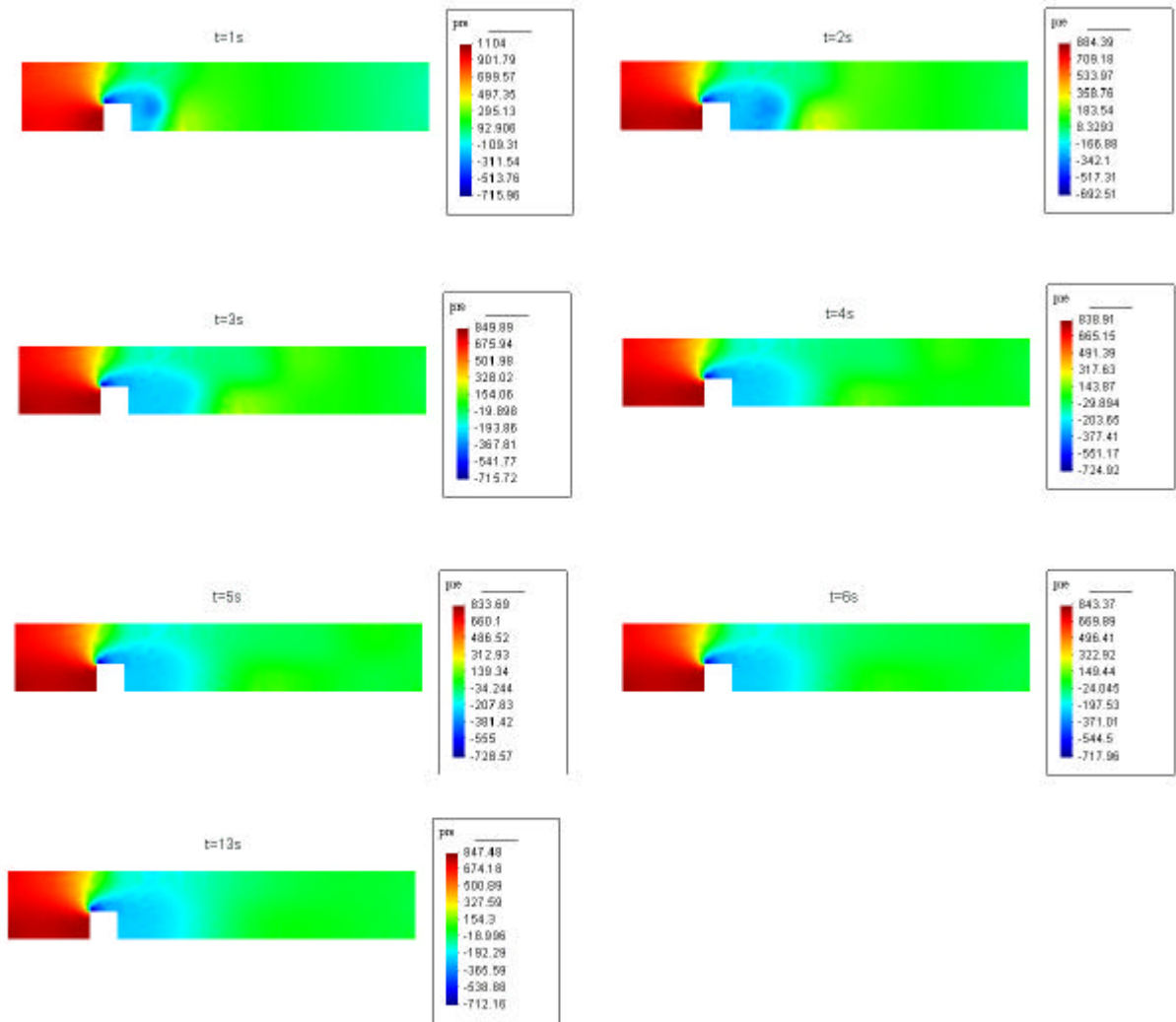


Figura 2-5: Flujo sobre un escalón cuadrado: evolución de la presión hasta alcanzar el estado estacionario para un valor de  $Re = 200$ .

comparación con los resultados dados por otros autores, la geometría responde a aquella presentada por [25].

En la pared del cilindro se aplica la condición de no deslizamiento,  $u = v = 0$ . En el contorno correspondiente al flujo entrante se aplica una velocidad uniforme,  $u = 1 \text{ m s}^{-1}$  y  $v = 0$ , dejándose libre la presión. En el contorno correspondiente al flujo saliente se aplica la condición  $p = 0$ , dejando libres ambas componentes de la velocidad. En los otros dos contornos paralelos a la dirección de flujo entrante se aplican las condiciones  $v = 0$ , dejándose la presión y la  $u$  libres (ver Figura 2-6). Se toma la presión nula como condición inicial en todo el dominio.

Se ha utilizado en este ejemplo la malla de elementos triangulares lineales dada en la Figura 2-6, compuesta por 4666 elementos y 2413 nodos.

Se han estudiado los casos correspondientes a  $Re = 40, 100$  y  $3600$ .

En la Figura 2-7 se muestran los resultados de velocidad y presión para el estado estacionario en el caso de  $Re = 40$ .

Para  $Re = 100$  se dan los resultados de los vectores de velocidad y la presión en el estado estacionario en la Figura 2-8.

Se han incluido también aquí los resultados obtenidos para el caso de un flujo con  $Re = 3600$ . La solución de este problema es periódica y los resultados para la solución transitoria se dan en la Figura 2-9 que muestra los valores de los vectores velocidad y de la presión habiendo transcurrido un tiempo de  $t = 1000 \text{ s}$ .

De nuevo, todos los resultados obtenidos en este ejemplo coinciden con aquellos dados por [25].

### 2.5.3. Flujo incompresible en una cavidad

Este problema (presentado con anterioridad por [25] y [30]) trata el caso de un flujo newtoniano incompresible en el interior de una cavidad cuadrada de 1 m de lado con una velocidad horizontal uniforme,  $u = 1 \text{ m s}^{-1}$  y  $v = 0$ , a lo largo de todo el contorno superior, dejándose libre la presión. En el punto medio del contorno inferior y en un único nodo se aplica la condición  $p = 0$ . En el resto de los nodos del contorno se impone  $u = v = 0$ , dejándose libre la presión (ver Figura 2-10).

Se ha utilizado en este ejemplo una malla estructurada de  $40 \times 40$  elementos triangulares lineales (3200 elementos y 1681 nodos), tal y como se muestra en la Figura 2-10. En dicha malla se han

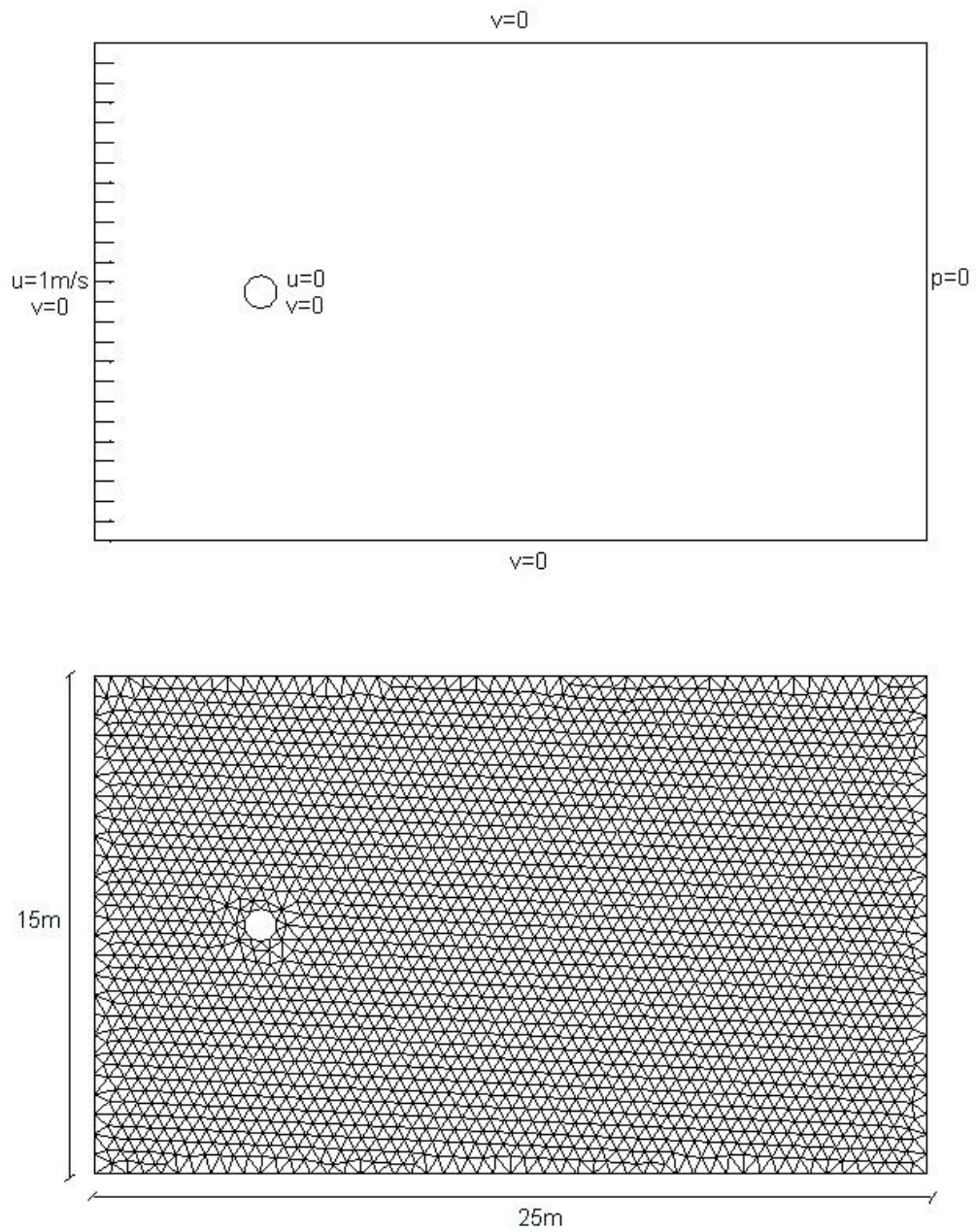


Figura 2-6: Flujo alrededor de un cilindro: condiciones de contorno y malla utilizada.

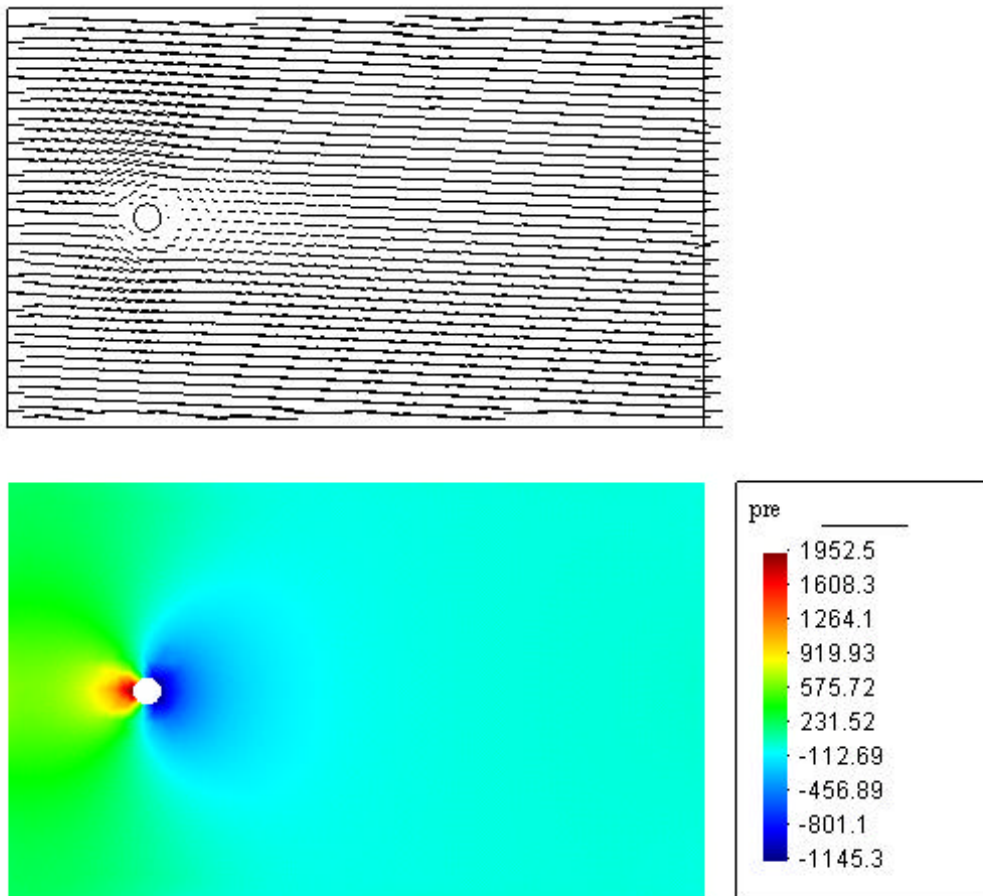


Figura 2-7: Flujo alrededor de un cilindro: vectores velocidad y valores de la presión para el estado estacionario en el caso de  $Re = 40$ .

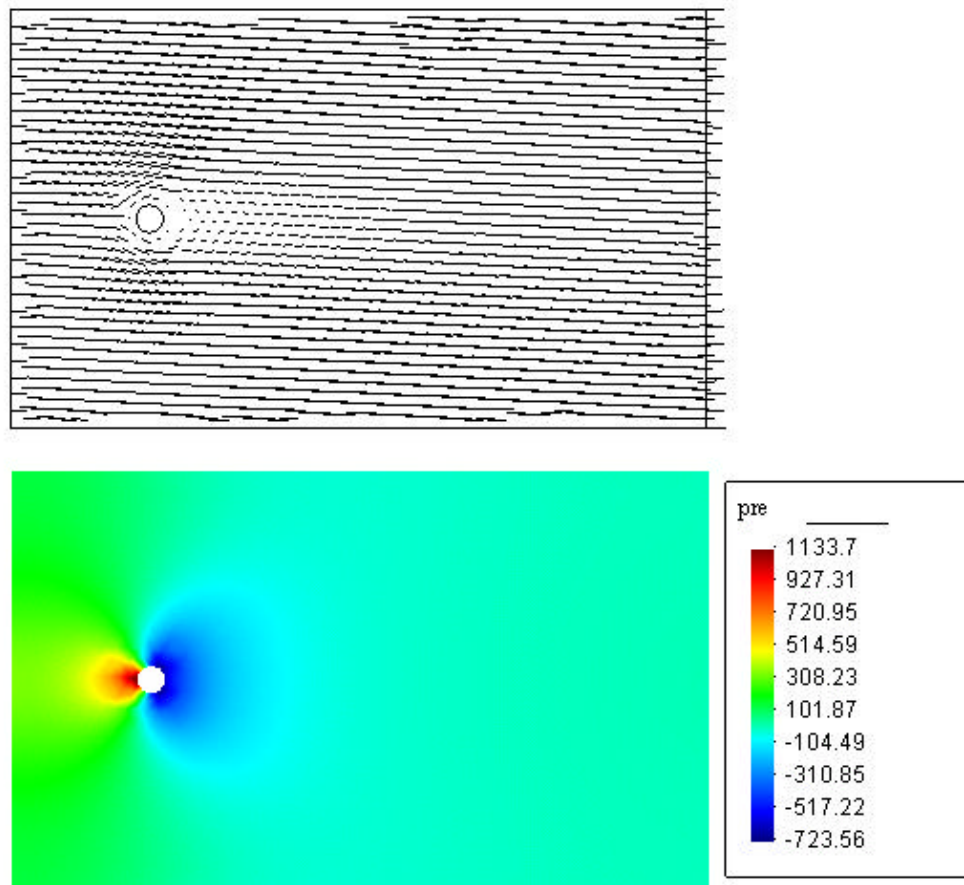


Figura 2-8: Flujo alrededor de un cilindro: vectores velocidad y valores de la presión en el estado estacionario para  $Re = 100$ .

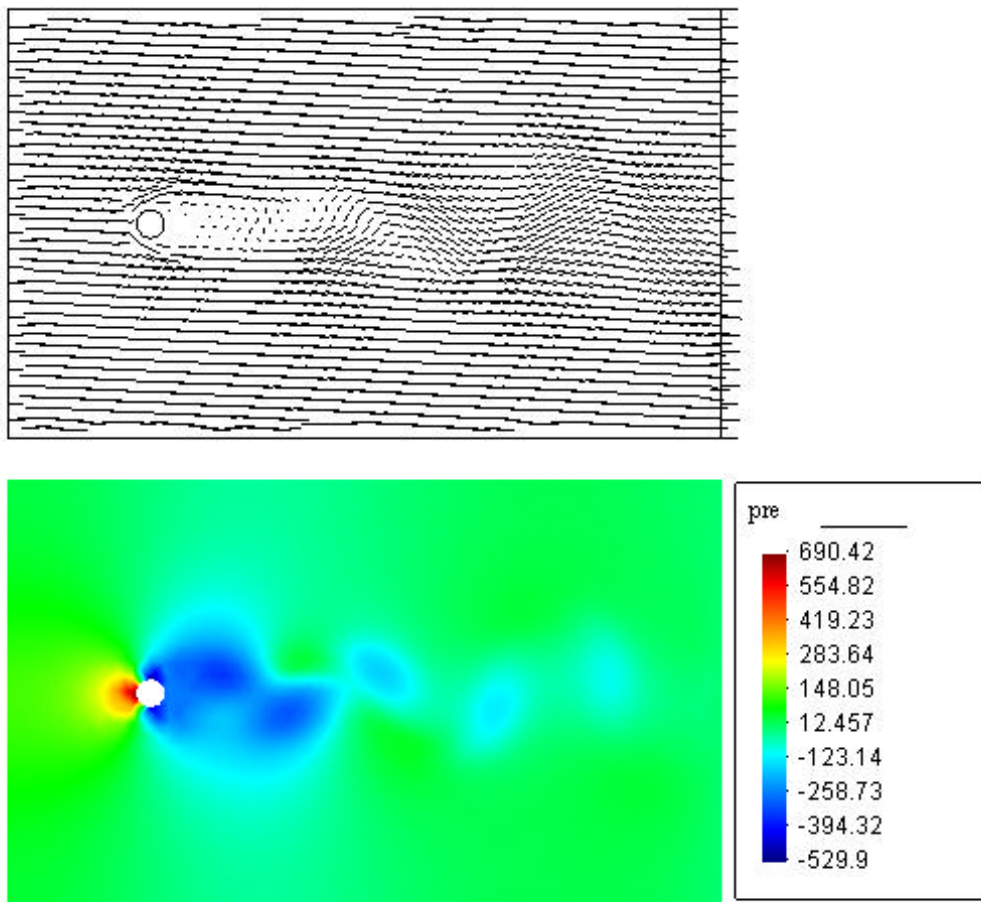


Figura 2-9: Flujo alrededor de un cilindro: vectores velocidad y valores de la presión para  $t = 1000$  s y  $Re = 3600$ .

estudiado varios casos, correspondientes a números de Reynolds de 400, 1000 y 5000.

En las Figuras 2-11, 2-12 y 2-13 se dan como resultados los contornos de presión y los vectores de velocidad en el estado estacionario para  $Re = 400, 1000$  y  $5000$  respectivamente.

Para números de Reynolds comprendidos entre 100 y 10000 se consigue la estabilización, y los resultados obtenidos se encuentran en gran acuerdo con los presentados por otros autores [25] [30]. Pero los resultados son menos precisos a medida que el número de Reynolds aumenta, no consiguiéndose, por supuesto, la estabilización para el caso del fluido no viscoso. Sin embargo, se ha comprobado que los resultados para números de Reynolds cada vez mayores mejoran notablemente a medida que la malla es refinada.

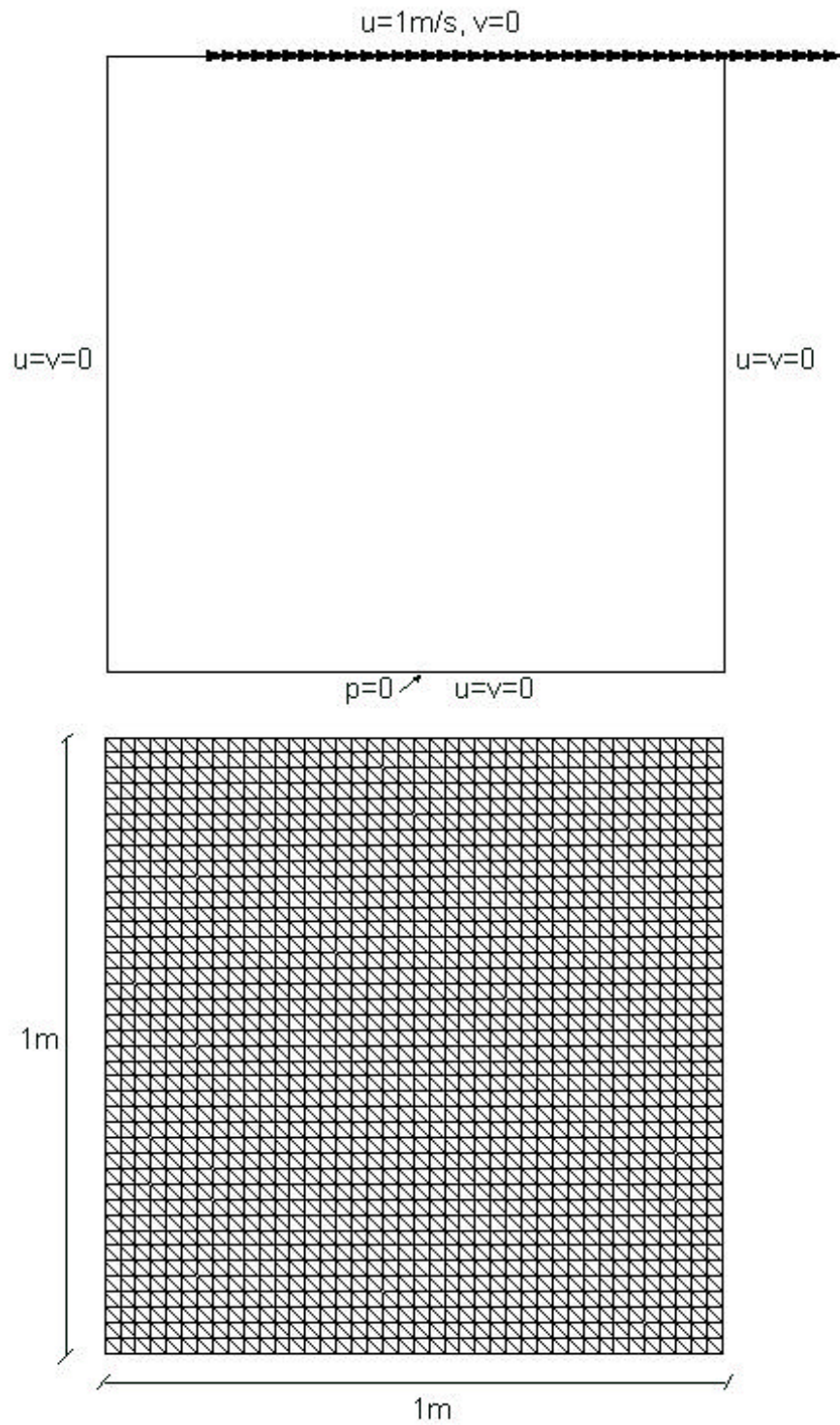


Figura 2-10: Flujo en una cavidad: condiciones de contorno y malla utilizada.

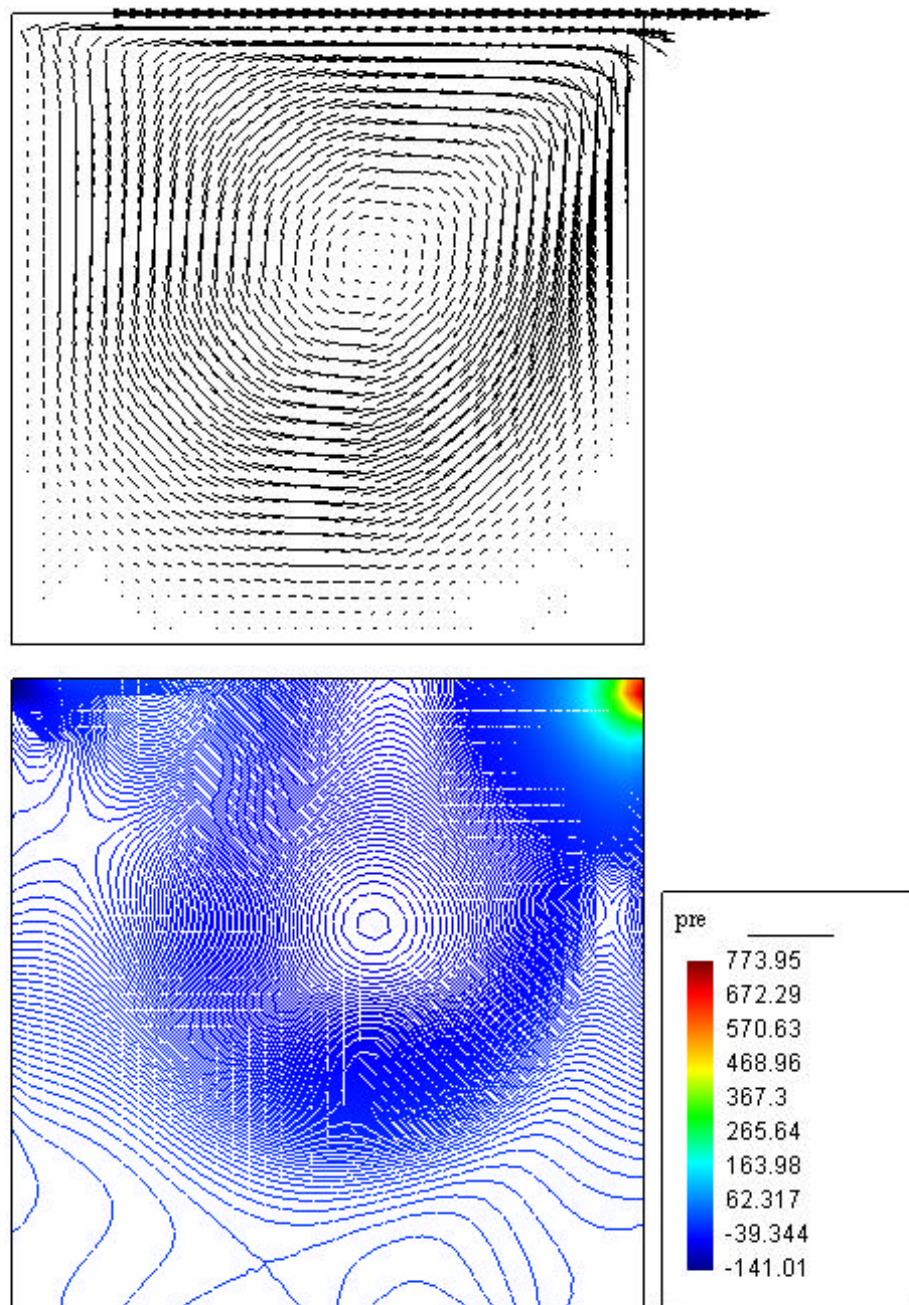


Figura 2-11: Flujo en una cavidad: velocidades y presión para  $Re = 400$  en el estado estacionario.

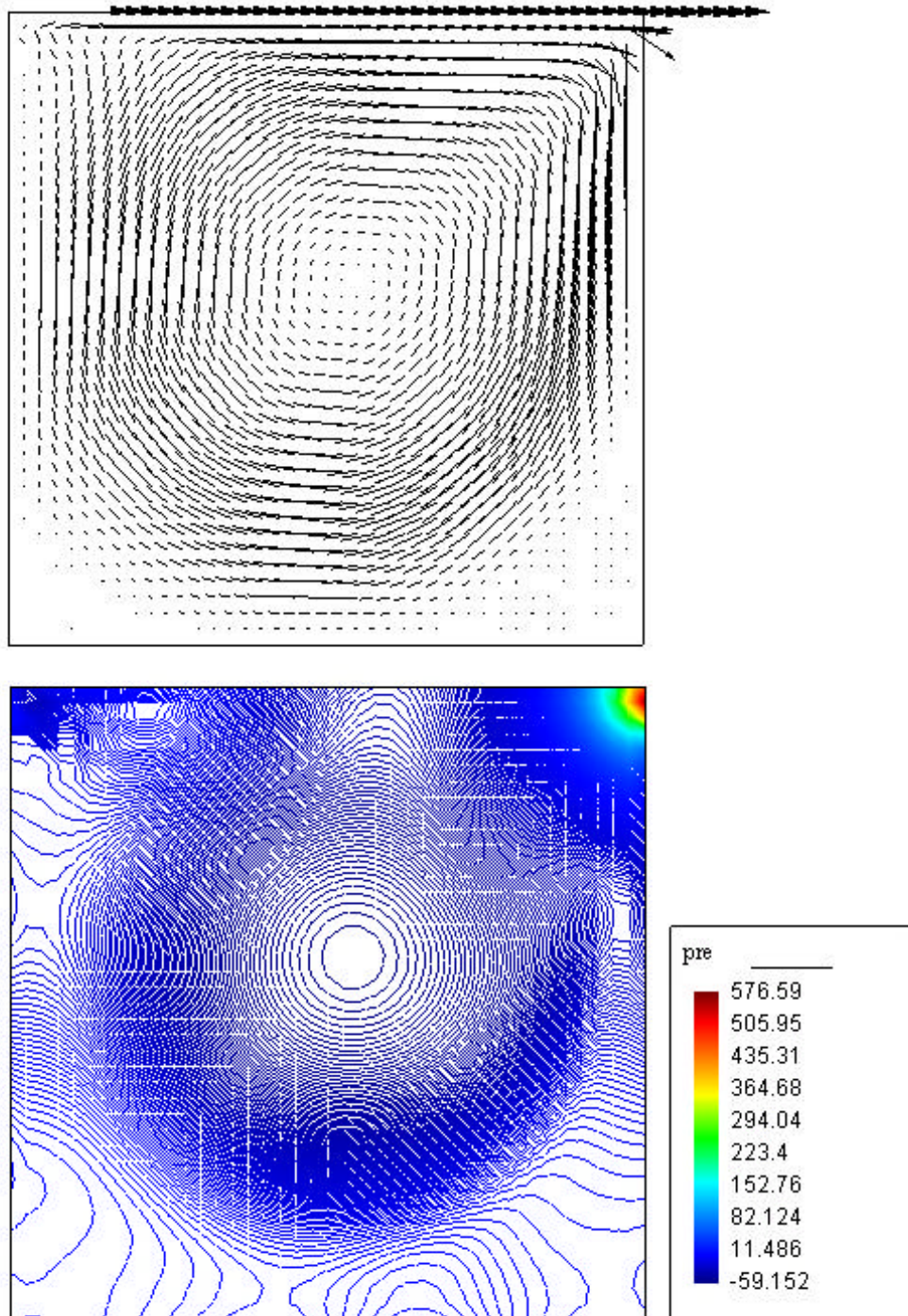


Figura 2-12: Flujo en una cavidad: velocidades y presión para  $Re = 1000$  en el estado estacionario.

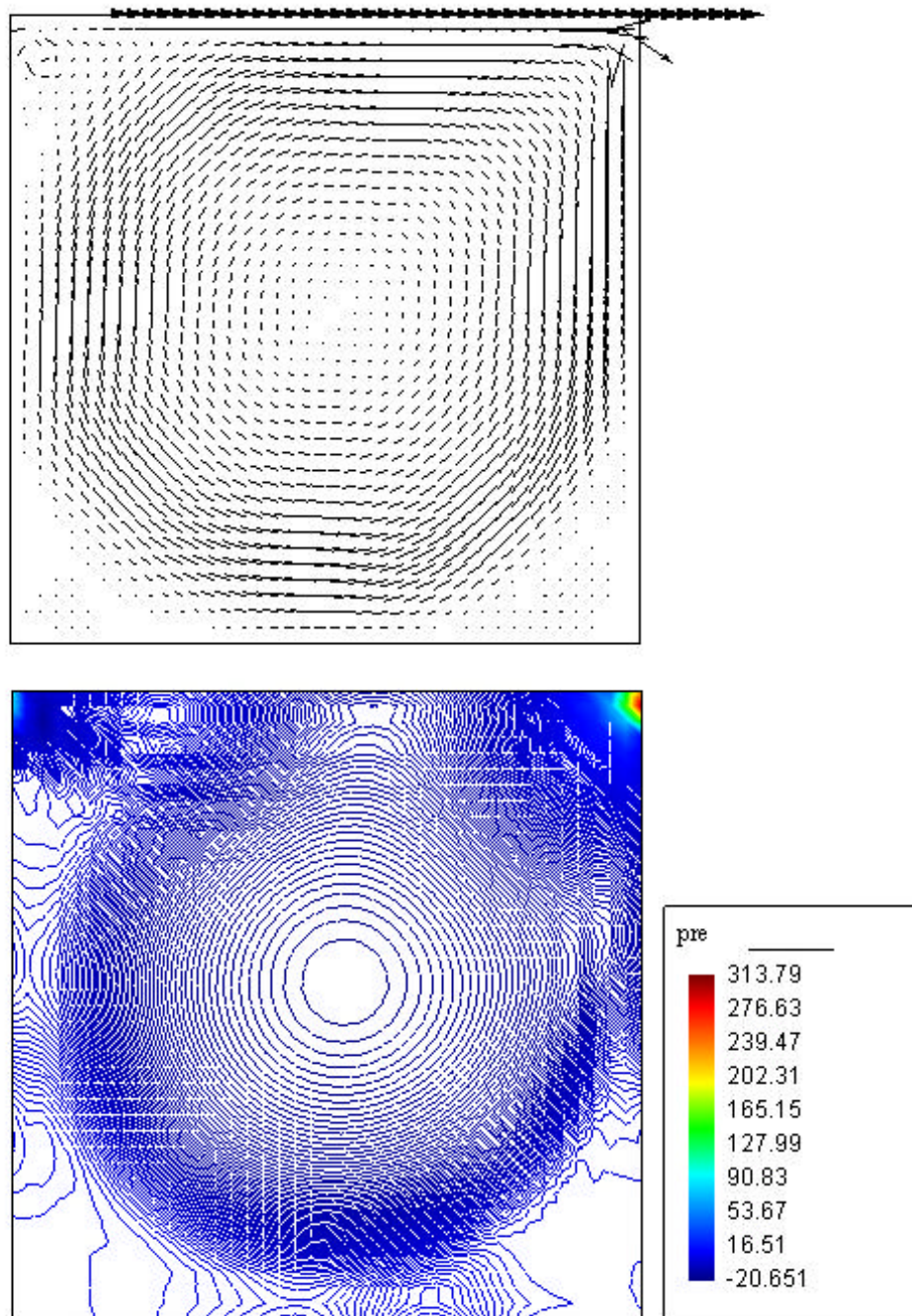


Figura 2-13: Flujo en una cavidad: velocidades y presión para  $Re = 5000$  en el estado estacionario.

## 2.6. Seguimiento de interfaces en fluidos no miscibles

En esta sección describiremos un método para calcular el movimiento de  $n$  fluidos incompresibles inmiscibles. Consideraremos que dichos fluidos son inmiscibles cuando exista un gradiente relativamente grande de densidad y viscosidad a ambos lados de la interfase. El método trata de capturar y transportar esta interfase utilizando una aproximación conocida como *level-set*, para lo que dicha interfase se identifica con el cero de una función suave [24].

### 2.6.1. Ecuaciones del movimiento

Considerando que los  $n$  fluidos son inmiscibles e incompresibles, el flujo inestable de estos fluidos es modelizado utilizando las ecuaciones de conservación del momento lineal y de la masa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} \text{div} \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{f}_e \quad (2.98)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.99)$$

donde:

- $\rho(\mathbf{x}, t)$  es el campo de densidades.
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  es el campo de velocidades.
- $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = u_i u_j$ .
- $p(\mathbf{x}, t)$  es el campo de presiones.
- $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$  es el tensor de tensión viscosa. Se define como una función del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$ , como ya hemos visto.
- $\mathbf{f}_e$  son las fuerzas de volumen; en nuestro caso, la gravedad. Otras fuerzas como la tensión superficial en la interfase de los fluidos y la fuerza de Coriolis son ignoradas.

En la aproximación propuesta, una función indicadora,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , identifica la porción del dominio ocupada por cada fluido tal y como se muestra en la Figura 2-14 para el caso sencillo de dos fluidos, y las propiedades del material pueden calcularse como [19] [20]

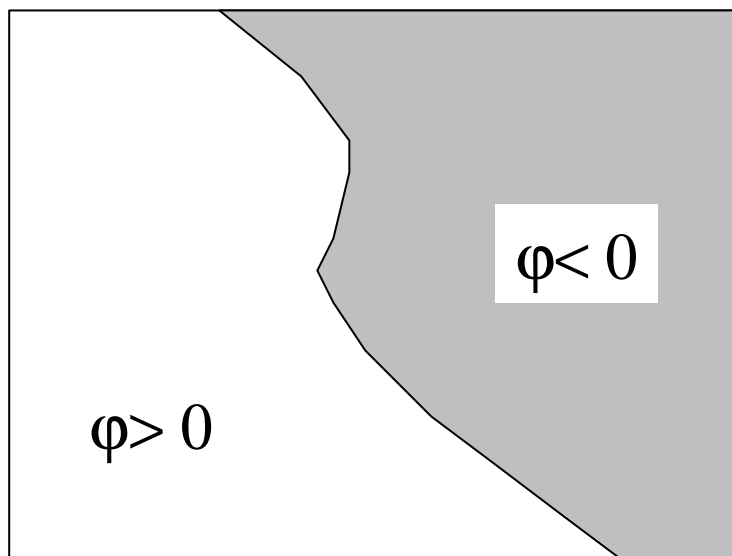


Figura 2-14: Ejemplo de la descripción de dos fases utilizando una función indicadora.

$$P(\mathbf{x}, t) = P_1 + (P_2 - P_1) H(\varphi(\mathbf{x}, t))$$

donde  $P_i$  es una propiedad del material (densidad, viscosidad, tensión de fluencia, ...) del fluido  $i$  y

$$H(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi > 0 \\ 0 & \text{si } \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (2.100)$$

Esta idea puede ampliarse para el caso de tres fluidos utilizando dos funciones indicadoras [21], de manera que:

$$P(\mathbf{x}, t) = P_1 + (P_2 - P_1) H(\varphi_1(\mathbf{x}, t)) + (P_3 - P_1) H(\varphi_2(\mathbf{x}, t)) \quad (2.101)$$

siendo los subdominios en este caso los dados en la Figura 2-15.

De igual manera, podemos extender esta idea al caso de  $n$  fluidos incorporando  $n - 1$  funciones indicadoras  $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ . Así, los subdominios ocupados por cada fluido se identifican según la siguiente tabla:

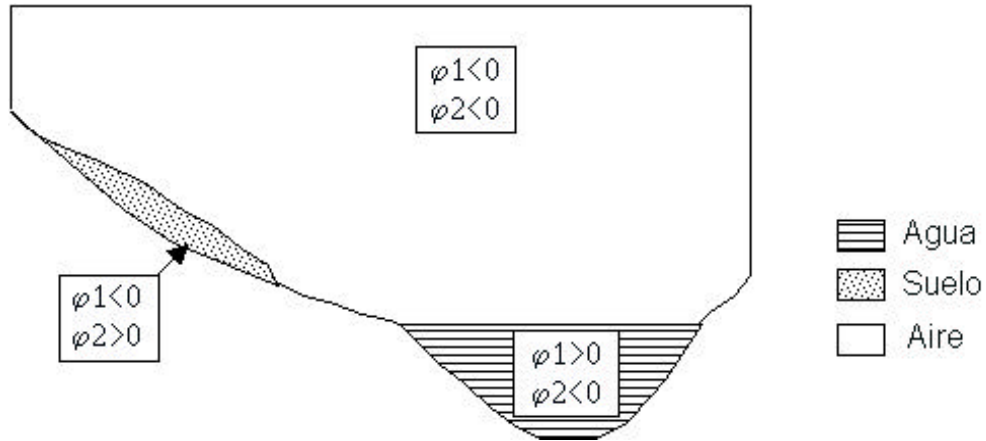


Figura 2-15: Ejemplo de la descripción del subdominio de cada material utilizando dos funciones indicadoras.

	<i>fluido 1</i>	<i>fluido 2</i>	<i>fluido 3</i>	...	<i>fluido n</i>
$\varphi_1$	$\varphi_1 \leq 0$	$\varphi_1 > 0$	$\varphi_1 \leq 0$	...	$\varphi_1 \leq 0$
$\varphi_2$	$\varphi_2 \leq 0$	$\varphi_2 \leq 0$	$\varphi_2 > 0$	...	$\varphi_2 \leq 0$
$\varphi_3$	$\varphi_3 \leq 0$	$\varphi_3 \leq 0$	$\varphi_3 \leq 0$	...	$\varphi_3 \leq 0$
...	...	...	...	...	...
$\varphi_{n-1}$	$\varphi_{n-1} \leq 0$	$\varphi_{n-1} \leq 0$	$\varphi_{n-1} \leq 0$	...	$\varphi_{n-1} > 0$

calculándose las propiedades del material a partir de las  $n - 1$  funciones indicadoras  $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$  como

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{x}, t) = & P_1 + (P_2 - P_1) H(\varphi_1(\mathbf{x}, t)) + (P_3 - P_1) H(\varphi_2(\mathbf{x}, t)) + \dots \\
 & \dots + (P_n - P_1) H(\varphi_{n-1}(\mathbf{x}, t))
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

donde los subíndices  $1, \dots, n$  indican los distintos tipos de fluido, en orden de densidad creciente.

Puesto que  $P_i$  es una propiedad del material que se mueve con el flujo, su derivada material es cero:

$$\frac{d(P_i)}{dt} = \frac{\partial(P_i)}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad}(P_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.103)$$

Considerando ahora la dependencia de las propiedades del material con las funciones distancia, ecuación (2.102), esta condición puede escribirse como

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad}\varphi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.104)$$

que establece que las funciones indicadoras son transportadas por convección, lo que requiere que la función  $H()$  sea una función suave.

En el caso en que las funciones  $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$  sean funciones lineales de la posición,  $\mathbf{x}$ , su segunda derivada espacial es cero, y las aproximaciones numéricas de las ecuaciones (2.104) son exactas. Por lo tanto, considerar  $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$  como funciones lineales beneficia también la solución de (2.104) puesto que la difusión en el frente causada por esquemas numéricos de bajo orden así como las oscilaciones producidas por los de alto orden [8] desaparecerán. La función lineal más simple es aquella de pendiente unidad, es decir, la función distancia:  $|\text{grad} \varphi_i| = 1$  con  $i = 1, \dots, n - 1$ .

En lo referente a la función  $H()$ , la ecuación (2.100) funciona bien tan sólo para razones de densidad pequeñas. Para razones de densidad altas, como ocurre en la mayoría de los casos de nuestro interés,  $\rho_{\text{sólido}}/\rho_{\text{aire}} \geq 1000$ , aparecen inestabilidades indeseadas en el campo de presiones que pueden distorsionar la solución. Este problema está relacionado con la solución numérica de una ecuación de Poisson mal condicionada para la presión [6].

Para impedir cambios bruscos en las propiedades del material a ambos lados de la interfase, se interpolan dichas propiedades a lo largo de una región de grosor constante de anchura total  $2\delta$  alrededor de la interfase [24], donde se toma  $\delta$  del orden de un elemento representativo de la malla. Existen diferentes alternativas para la definición de la función  $H()$ . En nuestro caso tomaremos una interpolación lineal

$$H(\varphi_i) = \frac{\text{mín}(\delta, \text{máx}(\varphi_i, -\delta)) + \delta}{2\delta} \quad (2.105)$$

tal y como se muestra en la figura 2-16.

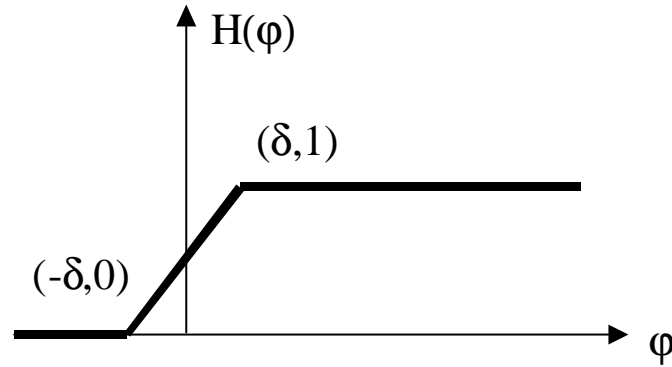


Figura 2-16: Función indicadora: función de interpolación utilizada en la interfase entre fluidos.

Esta definición de una función de interpolación, basada en la distancia a la interfase, requiere el mantener las funciones indicadoras como funciones distancia. Las ecuaciones (2.104) establecen que las funciones indicadoras son transportadas por convección por la velocidad del fluido: puesto que dicha velocidad no es uniforme en el dominio, las iniciales funciones distancia se distorsionarán a medida que progresa el tiempo y, después de un rato, ya no se mantendrán como funciones distancia.

Para resolver este problema se utilizará la velocidad del fluido tal y como se propone en las ecuaciones (2.104) para transportar por convección las funciones indicadoras y, una vez que hallan sido transportadas, se corregirán de manera que cumplan la condición  $|grad \varphi_i| = 1$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ . Para lograr esto, se propone el resolver para cualquier tiempo  $t$  y cada una de las funciones  $\varphi_i$ , la siguiente ecuación hasta llegar al estado estacionario [19] [20] [21] [24]:

$$\frac{\partial \varphi_i(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi_i(t)) |grad \varphi_i(\hat{\tau})| = S(\varphi_i(t)), \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.106)$$

con condiciones iniciales

$$\varphi_i(\mathbf{x}, \hat{\tau} = 0) = \varphi_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.107)$$

donde  $S()$  es la función signo y  $\hat{\tau}$  un tiempo ficticio.

Claramente, la solución estacionaria de este problema cumplirá la condición  $|grad \varphi_i| = 1$  para  $i = 1, \dots, n - 1$ , y el cero de las funciones  $\varphi_i(\hat{\tau} \rightarrow 0)$  coincide con el de  $\varphi_i(t)$ .

La ecuación (2.106) puede escribirse también como:

$$\frac{\partial \varphi_i(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi_i^n) \frac{\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})}{|\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})|} \cdot \text{grad} \varphi_i(\hat{\tau}) = S(\varphi_i^n), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.108)$$

donde puede verse que se trata de un problema de transporte convectivo con velocidad

$$\mathbf{v} = S(\varphi_i^n) \frac{\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})}{|\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})|}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.109)$$

Esta ecuación para la velocidad indica que las características del problema se inician en la posición de la interfase y viajan con velocidad  $\pm 1$ . Por tanto, la reconstrucción de las funciones indicadoras como funciones distancia comienzan en la posición de la interfase y progresan a lo largo de las direcciones normales. Entonces, la zona crítica, alrededor de la posición de la interfase, se reconstruye en el primer paso de tiempo ficticio,  $\hat{\tau}$ , al iterar la solución del problema (2.106).

### 2.6.2. Discretización

#### Navier-Stokes

Recordemos la ecuación de conservación del momento en su forma conservativa para el caso incompresible (2.21):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_e = \mathbf{0}$$

siendo  $\mathbf{f}_e = \begin{pmatrix} g \sin \vartheta \\ -g \cos \vartheta \end{pmatrix}$ ,  $\vartheta$  el ángulo formado entre  $\mathbf{f}_e$  y la vertical y  $g$  la constante de la gravedad.

Escribiendo esta ecuación en notación tensorial tenemos:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f_i = 0 \quad (2.110)$$

La solución de esta ecuación puede llevarse a cabo mediante los tres pasos del método *fractional-step* explicado en la sección 2.4.4:

- Paso I: Discretización de la velocidad

Consiste en resolver explícitamente:

$$\frac{\partial (u_i)^{*n}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)^n}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\tau_{ij})^n}{\partial x_j} - f_i^n = 0 \quad (2.111)$$

Las ecuaciones (2.111) contienen todos los términos convectivos.

- Paso II: Discretización de la ecuación de continuidad

Resolvemos implícitamente:

$$\frac{\partial(u_i)^{**n}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p)^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.112)$$

- Paso III: Corrección de la velocidad

Una vez determinado el incremento de presión corregimos la velocidad de dicho efecto, de manera que:

$$\Delta(u_i)^n = \Delta(u_i)^{*n} + \Delta(u_i)^{**n} \quad (2.113)$$

**Paso I: Discretización de la velocidad.** Para resolver el primer paso haremos uso de la técnica de Taylor-Galerkin de dos pasos descrita en la sección 2.4.1 resolviendo la ecuación (2.111) como sigue:

$$(u_i)^{*(n+1/2)} = (u_i)^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial(u_j u_i)^n}{\partial x_j} - f_i^n \right) \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta(\hat{u}_i)^{*n} = & \Delta t \left\{ \int \left[ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} (u_j u_i)^{*(n+1/2)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} (\tau_{ij})^n \right] d \right. + \\ & \left. + \int \mathbf{N}^T (f_i)^{*(n+1/2)} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( (u_j u_i)^{*(n+1/2)} - \frac{1}{\rho} (\tau_{ij})^n \right) \cdot n_j d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.115)$$

**Estabilidad.** En la ausencia de términos de fuente, el límite de estabilidad para  $\Delta t$  en esta parte de la descomposición viene dado por la expresión (2.86):

$$C^2 + 2 \frac{C}{Re} \leq \alpha \quad (2.116)$$

en donde, como se vio en la sección 2.4.4

$$C \equiv |\mathbf{u}| \frac{\Delta t}{h} \quad (2.117)$$

es el número de Courant, y

$$Re \equiv |\mathbf{u}| \frac{h}{2\nu} \quad (2.118)$$

es el número de Reynolds en cada elemento de la malla,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $h$  es el tamaño del elemento. Si la solución transitoria es de interés debe utilizarse la matriz consistente de masas ( $\alpha = 1/3$ ) y  $\Delta t$  debe elegirse globalmente como el menor de todos los elementos. En caso contrario puede hacerse uso de la forma diagonal de la matriz de masas ( $\alpha = 1$ ).

**Paso II: Discretización de la ecuación de continuidad.** Partiendo de la ecuación de continuidad en el instante  $t^{n+1}$

$$\text{div } \mathbf{u}^{n+1} = 0$$

y discretizando la ecuación del momento de la forma

$$\frac{\Delta \mathbf{u}^{**n}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.119)$$

la ecuación de continuidad discretizada en el tiempo queda

$$\text{div } \mathbf{u}^{*n} - \Delta t \text{div} \left( \frac{1}{\rho} \text{grad } p^{n+1} \right) = 0$$

donde  $\mathbf{u}^{*n} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^{*n}$ .

Siguiendo ahora una discretización estándar de Galerkin, esta ecuación se puede escribir como

$$\int (\text{grad } \mathbf{N})^T \frac{1}{\rho} \text{grad } \mathbf{N} d \Delta \hat{p}^n = -\frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{N}^T \text{div } \mathbf{u}^{*n} d - \int (\text{grad } \mathbf{N})^T \frac{1}{\rho} \text{grad } p^n d + \int_{\Gamma - \Gamma_p} \mathbf{N}^T \frac{1}{\rho} \text{grad } p^{n+1} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

donde se supone la presión prescrita en  $\Gamma_p$ .

Para calcular la integral de contorno, se proyecta la ecuación (2.119) a lo largo de la normal  $\mathbf{n}$

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p^{n+1} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}^{n+1} - (\mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^{*n})] \cdot \mathbf{n}$$

resultando

$$\int_{\Gamma-\Gamma_p} \mathbf{N}^T \frac{1}{\rho} \text{grad} p^{n+1} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma-\Gamma_p} \mathbf{N}^T [\mathbf{u}^{n+1} - (\mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^{*n})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Incorporando ahora esta ecuación, el sistema de ecuaciones a resolver para calcular el incremento de presión es

$$\begin{aligned} \int (\text{grad } \mathbf{N})^T \frac{1}{\rho} \text{grad } \mathbf{N} d\Gamma \Delta \hat{p}^n &= -\frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{N}^T \text{div} \mathbf{u}^{*n} d\Gamma - \\ &- \int (\text{grad } \mathbf{N})^T \frac{1}{\rho} \text{grad} p^n d\Gamma - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma-\Gamma_p} \mathbf{N}^T [\mathbf{u}^{n+1} - (\mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}^{*n})] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned}$$

**Paso III: Corrección de la velocidad.** Una vez que ha sido determinado el incremento de presión en el paso anterior, el incremento de velocidad  $\Delta \mathbf{u}^*$  debe de corregirse por los efectos de la presión. Esto se hace resolviendo la discretización temporal (2.119) para calcular  $\Delta \mathbf{u}^{**}$  :

$$\int \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Gamma \Delta \hat{\mathbf{u}}^{**n} + \int \mathbf{N}^T \text{grad} p^{n+1} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (2.120)$$

de manera que

$$\Delta \mathbf{u}^n = \Delta \mathbf{u}^{*n} + \Delta \mathbf{u}^{**n} \quad (2.121)$$

### Convección de las funciones indicadoras

Como ya se describió en la sección 2.6.1, para asignar las propiedades del material a cada punto en el dominio, el procedimiento propuesto hace uso de  $n - 1$  funciones indicadoras,  $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ , las cuales deben (1) ser transportadas por convección por el campo de velocidades

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \varphi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.122)$$

y (2) ser corregidas para mantenerlas como funciones distancia, es decir, hacer evolucionar las siguientes expresiones hasta alcanzar el estado estacionario

$$\frac{\partial \varphi_i(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi_i^n) \frac{\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})}{|\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})|} \cdot \text{grad} \varphi_i(\hat{\tau}) = S(\varphi_i^n), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.123)$$

con condiciones iniciales

$$\varphi_i(\mathbf{x}, \hat{\tau} = 0) = \varphi_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.124)$$

donde  $S()$  es la función signo y  $\hat{\tau}$  un tiempo ficticio.

Estas dos cosas se consiguen haciendo uso del algoritmo de dos pasos de Taylor-Galerkin, tal y como se describe a continuación.

**Convección.** Consideremos las funciones indicadoras,  $\varphi_i$  con  $i = 1, \dots, n-1$ . Las correspondientes ecuaciones de convección, como ya hemos visto, serían

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad} \varphi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.125)$$

Teniendo en cuenta que

$$\text{div}(\varphi_i \mathbf{u}) = \varphi_i \text{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \text{grad}(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

y que, puesto que el fluido es incompresible,  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ , podemos escribir la ecuación (2.125) como

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \text{div}(\varphi_i \mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.126)$$

y aplicando la técnica de dos pasos de Taylor-Galerkin tendríamos que:

$$\varphi_i^{n+1/2} = \varphi_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial(\varphi_i u_j)^n}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \hat{\varphi}_i^n &= \Delta t \left\{ \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} (\varphi_i u_j)^{n+1/2} d - \right. \\ &\left. - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\varphi_i u_j)^{n+1/2} \cdot n_j d\Gamma \right\}, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.128)$$

**Corrección.** El valor de las funciones indicadoras calculadas resolviendo el anterior sistema de ecuaciones (2.128) se corrige haciendo evolucionar

$$\frac{\partial \varphi_i(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi_i^n) \frac{\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})}{|\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})|} \cdot \text{grad} \varphi_i(\hat{\tau}) = S(\varphi_i^n), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.129)$$

$$\varphi_i(\mathbf{x}, \hat{\tau} = 0) = \varphi_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.130)$$

hasta alcanzar el estado estacionario.

Ya vimos que se trata de un problema de transporte convectivo con velocidad

$$\mathbf{v} = S(\varphi_i^n) \frac{\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})}{|\text{grad} \varphi_i(\hat{\tau})|}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.131)$$

Teniendo esto en cuenta, podemos escribir las ecuaciones (2.129) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \varphi_i(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + \text{div}(\varphi_i(\hat{\tau}) \mathbf{v}) = S(\varphi_i^n) + \varphi_i(\hat{\tau}) \text{div} \mathbf{v}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.132)$$

y podemos aplicar, de nuevo, la técnica de dos pasos de Taylor-Galerkin, de manera que:

$$\varphi_i^{n+1/2} = \varphi_i^n + \frac{\Delta t}{2} [S(\varphi_i) (1 - |\text{grad} \varphi_i|)]^n, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.133)$$

$$\mathbf{M} \Delta \hat{\varphi}_i^n = \Delta t \int \mathbf{N}^T [S(\varphi_i) (1 - |\text{grad} \varphi_i|)]^{n+1/2} d, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.134)$$

Una vez que las funciones indicadoras han sido transportadas por convección y corregidas, las propiedades del material se calculan como vimos en la sección 2.6.1

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, t) = & P_1 + (P_2 - P_1) H(\varphi_1(\mathbf{x}, t)) + (P_3 - P_1) H(\varphi_2(\mathbf{x}, t)) + \dots \\ & \dots + (P_n - P_1) H(\varphi_{n-1}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (2.135)$$

donde (ver Figura 2-17)

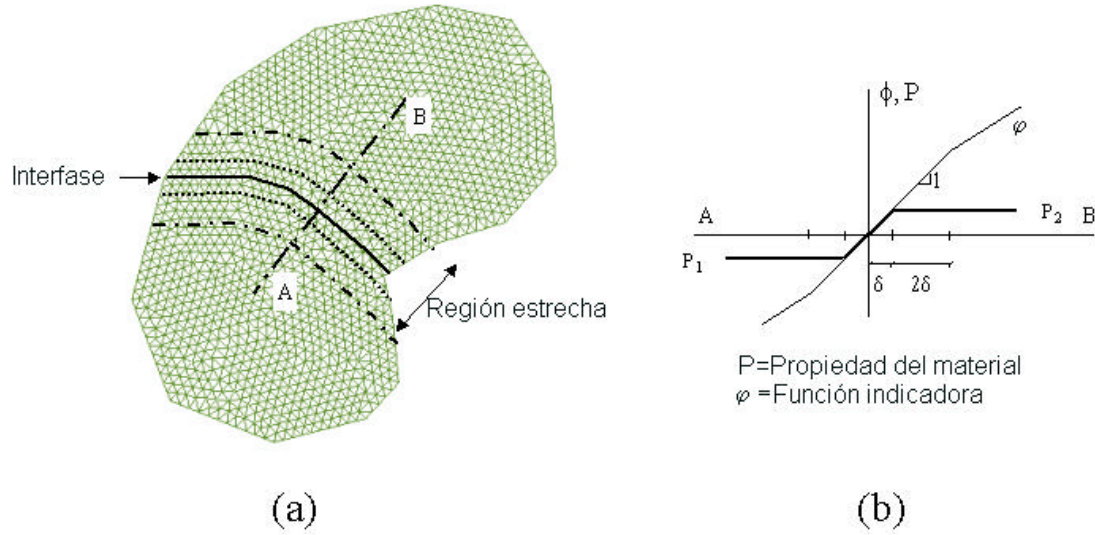


Figura 2-17: Interpolación de las propiedades del material y región estrecha a ambos lados de la interfase. (a) Vista en planta. (b) Corte a lo largo de AB.

$$H(\varphi_i) = \frac{\min(\delta, \max(\varphi_i, -\delta)) + \delta}{2\delta}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.136)$$

siendo  $\delta$  el tamaño de un elemento representativo de la malla.

Hay que hacer notar que para acelerar la convergencia de las ecuaciones (2.129) al estado estacionario, el algoritmo de Taylor-Galerkin de dos pasos hace uso de la matriz de masas así como de un paso de tiempo óptimo correspondiente a cada elemento [30]:

$$\Delta\hat{\tau} = \frac{h}{|\mathbf{v}|} = h \quad (2.137)$$

siendo  $h$  el tamaño de cada elemento de la malla.

Se ha encontrado un comportamiento óptimo del algoritmo cuando se reduce ligeramente este paso de tiempo aplicando un factor del orden de 0.90-0.85.

Sin embargo, al hacer uso de esta técnica, la fase de corrección de la solución lleva un tiempo bastante significativo del tiempo total de cálculo. Para reducirlo, tanto la fase de transporte convectivo como la de corrección se limitan a una región estrecha a ambos lados de la interfase [21]. De esta

manera, la fase de corrección puede limitarse a dicha región estrecha ahorrándose iteraciones, puesto que la condición de  $|\text{grad } \varphi_i| = 1$ , para  $i = 1, \dots, n$ , tan sólo debería cumplirse en esta región. Anchuras típicas de la misma son del orden de  $3\delta$ - $4\delta$  centradas en la interfase (ver Figura 2-17).

## 2.7. Aplicaciones

Se presentan aquí varios ejemplos de aplicación del método descrito con anterioridad para el tratamiento de flujos con superficie libre: el problema de Riemann en lecho mojado, el problema de Riemann en lecho seco, fluidos en rotación y caída de fangos en ríos. Estas aplicaciones ilustran el comportamiento de dos y tres fluidos inmiscibles e incompresibles tratados con el método de *level-set* para el seguimiento de las interfases entre ellos.

### 2.7.1. El problema de Riemann en lecho mojado

Se trata en este ejemplo de ver la evolución de la interfase entre dos fluidos newtonianos uno que representa el agua de densidad  $1000 \text{ Kg m}^{-3}$ , y otro que representa el aire de densidad  $1 \text{ Kg m}^{-3}$ , ambos de viscosidad nula. Se considera, por tanto, el dominio formado por los dos fluidos y se estudia el movimiento de ambos.

Inicialmente se supone que el agua ocupa una región del dominio de altura 20 m y se propaga sobre un lecho del mismo material de altura 2.5 m. El resto del dominio se encuentra lleno de aire. El movimiento de ambos fluidos en este tipo de problemas se desencadena por la única acción de la gravedad, de manera que las condiciones iniciales de presión y velocidad son nulas. Las condiciones de contorno son las mostradas en la Figura 2-18. En el contorno correspondiente al flujo entrante se toma  $u = 0$  dejándose libres la presión y la componente vertical de la velocidad  $v$ . En el contorno de flujo saliente se toma  $p = 0$  sin prescribir ningún valor para las velocidades. En el resto del contorno se toma  $u = v = 0$ , dejándose libre la presión.

Se ha utilizado para este ejemplo una malla de 30 m de altura por 80 m de anchura. Dicha malla se encuentra compuesta por 3182 elementos triangulares lineales y 1695 nodos (ver Figura 2-18).

En la Figura 2-19 se puede ver la evolución de la interfase entre los dos fluidos, mientras que las Figuras 2-20 y 2-21 muestran la evolución de los valores de la presión y de los vectores velocidad.

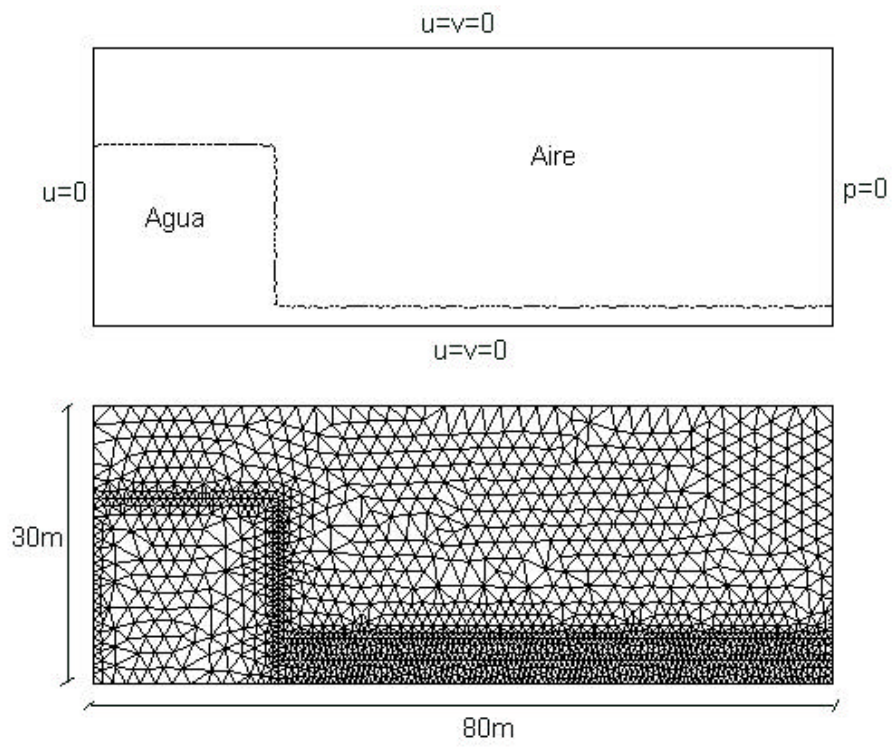


Figura 2-18: Problema de Riemann en lecho mojado: condiciones de contorno y malla computacional.

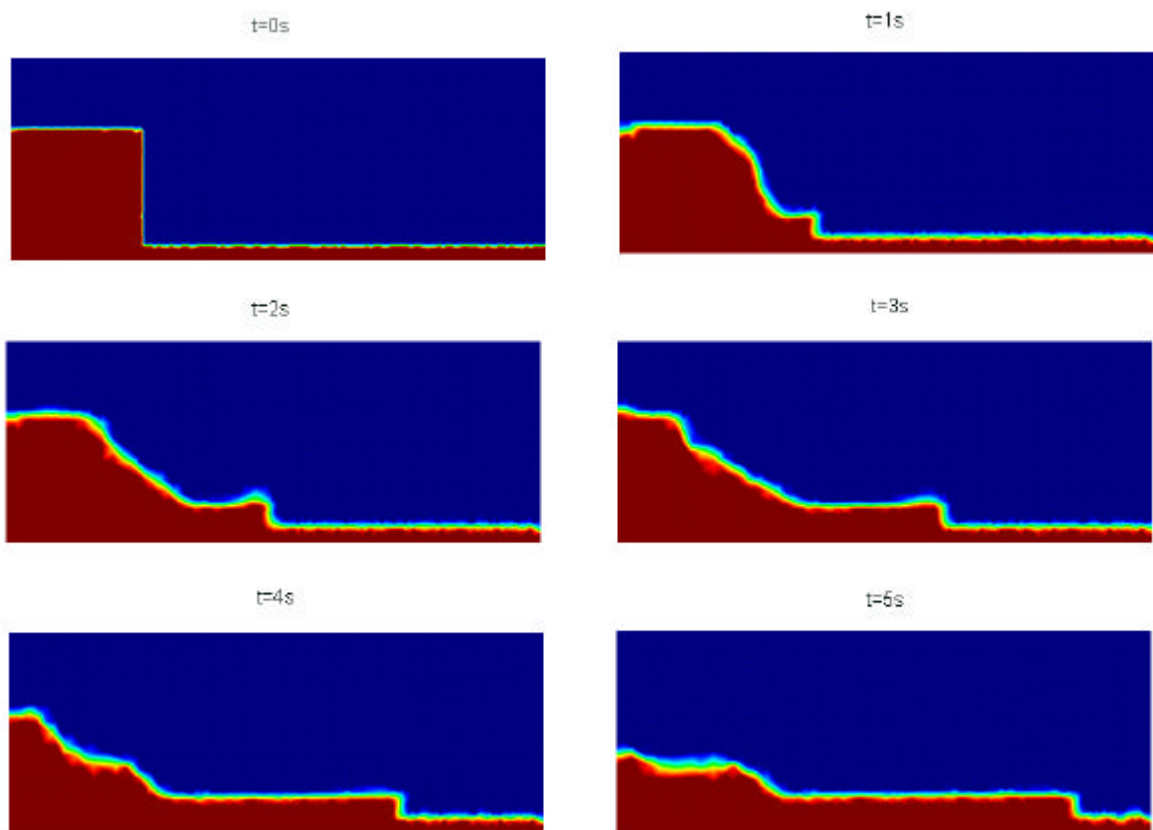


Figura 2-19: Problema de Riemann en lecho mojado: evolución de la interfase.

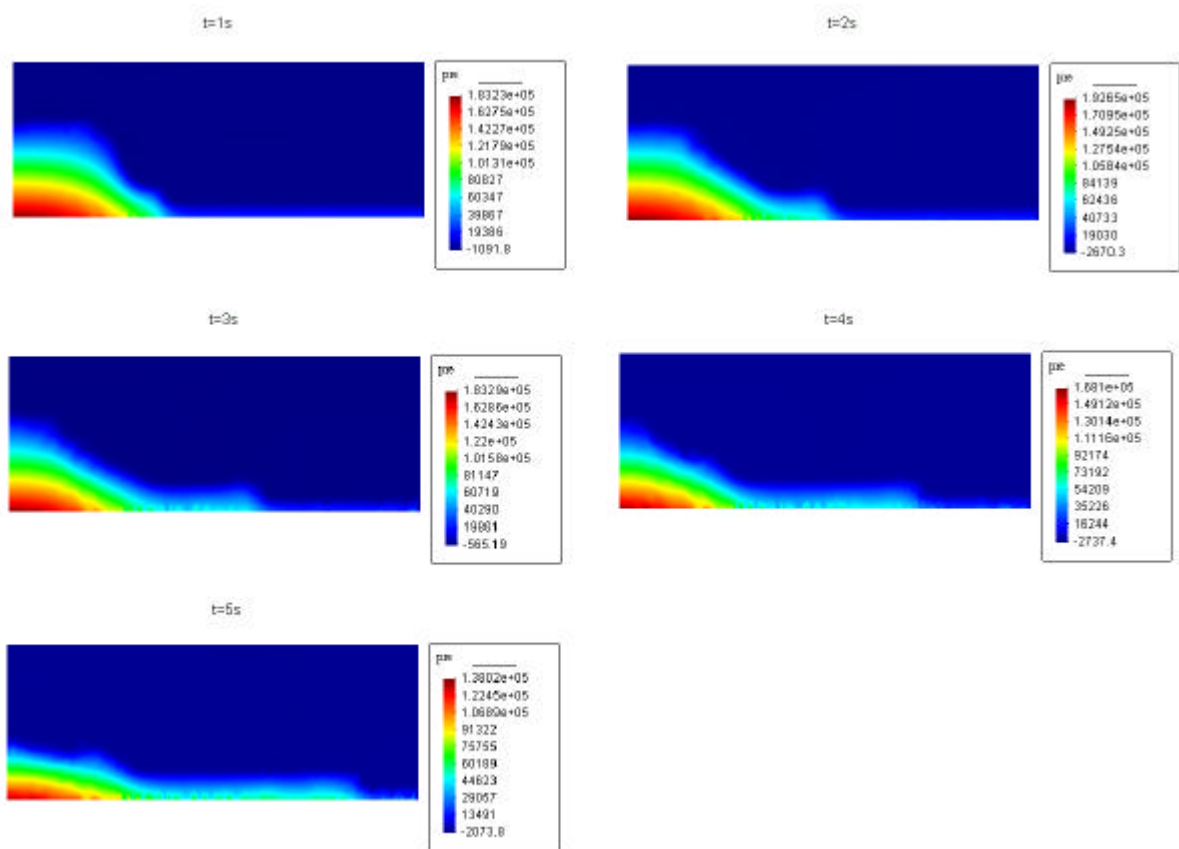


Figura 2-20: Problema de Riemann en lecho mojado: evolución de la presión.

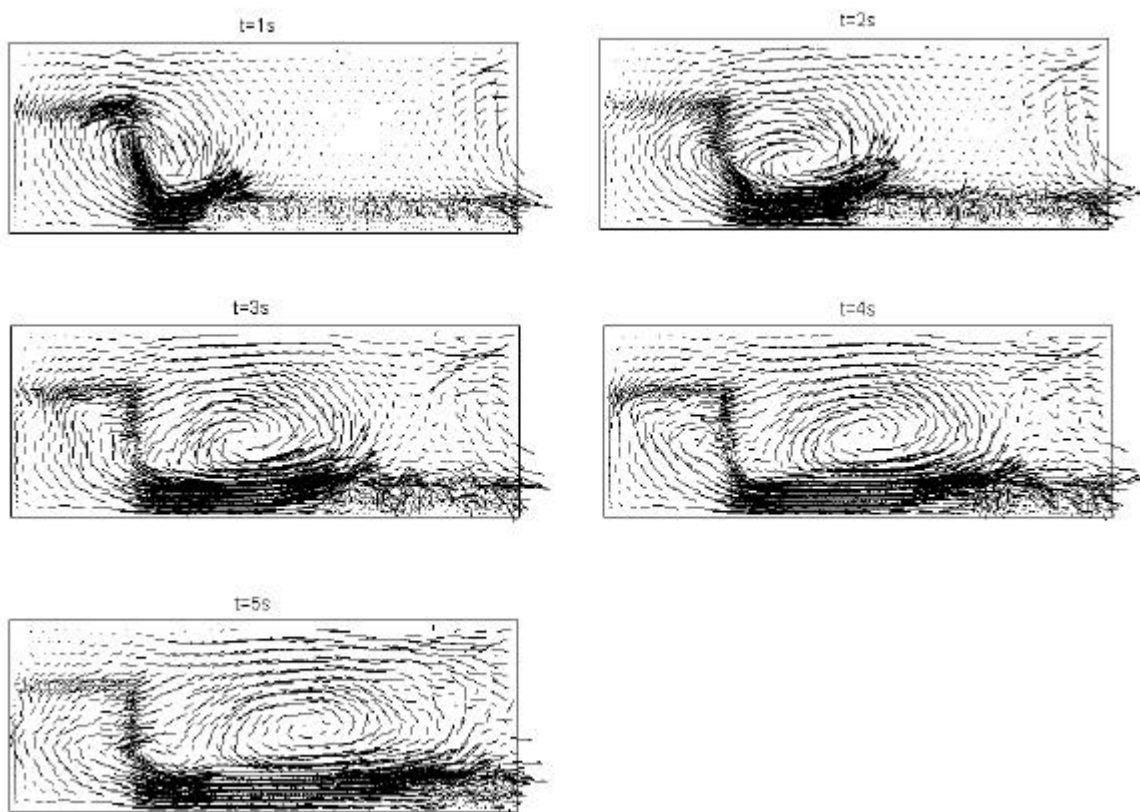


Figura 2-21: Problema de Riemann en lecho mojado: evolución de los vectores velocidad.

### 2.7.2. El problema de Riemann en lecho seco

Al igual que en el ejemplo anterior, se trata de ver la evolución de la interfase entre dos fluidos newtonianos uno que representa el agua de densidad  $1000 \text{ Kg m}^{-3}$ , y otro que representa el aire de densidad  $1 \text{ Kg m}^{-3}$ , ambos de viscosidad nula. Se considera, por tanto, el dominio formado por los dos fluidos y se estudiará el movimiento de ambos.

Partimos de condiciones análogas a las del caso anterior (problema de Riemann en lecho mojado) con la diferencia de que el agua se propaga sobre un lecho seco, manteniéndose el resto de las condiciones idénticas. De esta manera, el agua ocupa inicialmente una región de altura 20 m mientras que el resto del dominio se encuentra lleno de aire. Como ya se vio en el caso anterior, el movimiento de ambos fluidos en este tipo de problemas se desencadena por la única acción de la gravedad, de manera que las condiciones iniciales de presión y velocidad son nulas. Las condiciones de contorno son las mostradas en la Figura 2-22. En el contorno correspondiente al flujo entrante se toma  $u = 0$  dejándose libres la presión y la componente vertical de la velocidad  $v$ . En el contorno de flujo saliente se toma  $p = 0$  sin prescribir ningún valor para las velocidades. En el resto del contorno se toma  $u = v = 0$ , dejándose libre la presión.

Se ha utilizado para este ejemplo una malla de 30 m de altura por 80 m de anchura. Dicha malla se encuentra compuesta por 2150 elementos triangulares lineales y 1171 nodos (ver Figura 2-22).

En la Figura 2-23 se puede ver la evolución de la interfase entre los dos fluidos, mientras que las Figuras 2-24 y 2-25 muestran la evolución de los valores de la presión y de los vectores velocidad.

### 2.7.3. Fluidos en rotación

En este ejemplo se estudia el movimiento de dos fluidos en rotación en el interior de una cavidad circular de 2 m de radio, donde se ha ignorado el efecto de la gravedad. Se le imprime al sistema una velocidad tangencial uniforme de  $6 \text{ m s}^{-1}$  en sentido horario, tomándose como nula la velocidad normal. La presión no se prescribe nada más que en un nodo de la parte inferior del contorno tomando en este punto el valor de  $p = 0$  (ver Figura 2-26). Inicialmente la presión es nula en todo el dominio.

Los fluidos en estudio son aire (fluido newtoniano), con  $\rho = 1 \text{ Kg m}^{-3}$  y  $\mu = 0 \text{ Pa s}$ , y un fluido de Bingham con  $\rho = 1500 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $\mu = 100 \text{ Pa s}$  y  $\tau_{y,0} = 40 \text{ Pa}$ .

La malla utilizada en este ejemplo consta de 2910 elementos triangulares lineales y 1520 nodos, tal

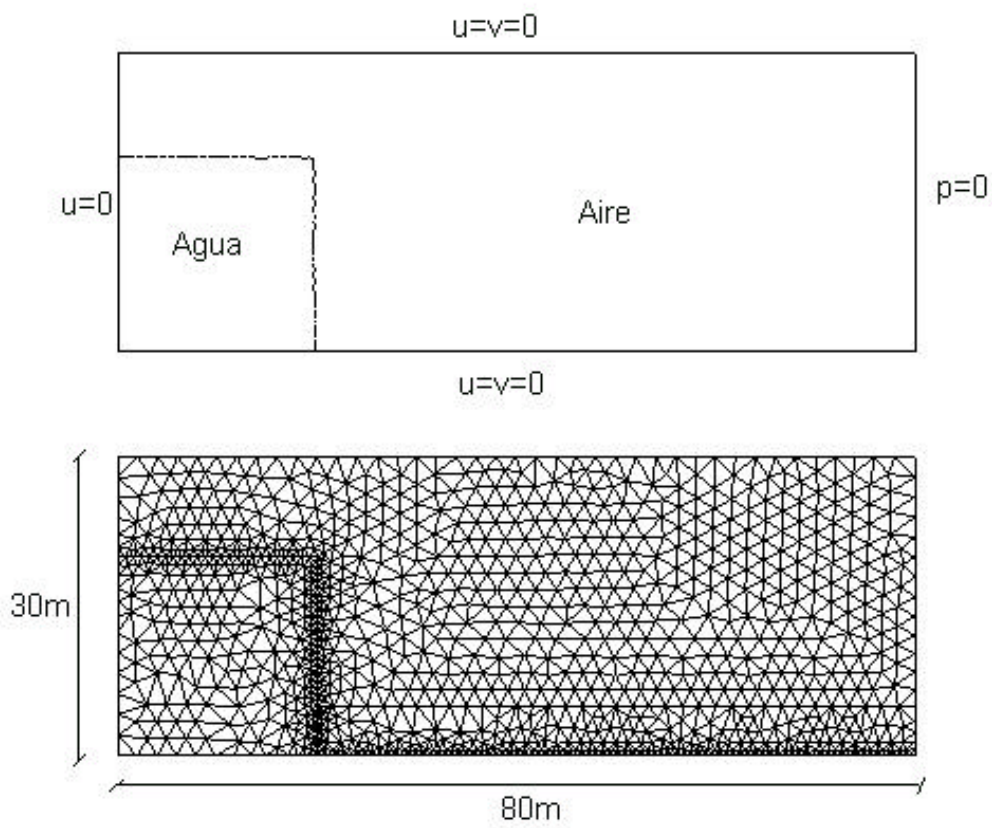


Figura 2-22: Problema de Riemann en lecho seco: condiciones de contorno y malla computacional.

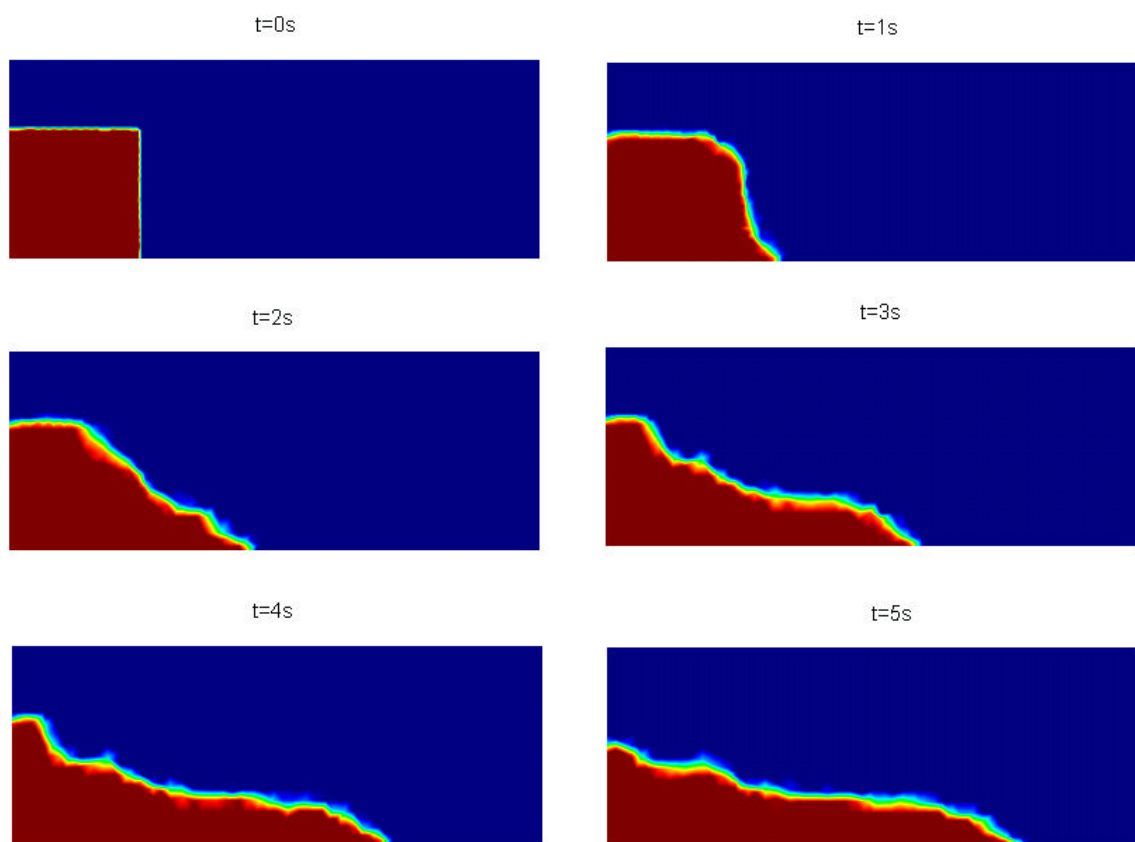


Figura 2-23: Problema de Riemann en lecho seco: evolución de la interfase.

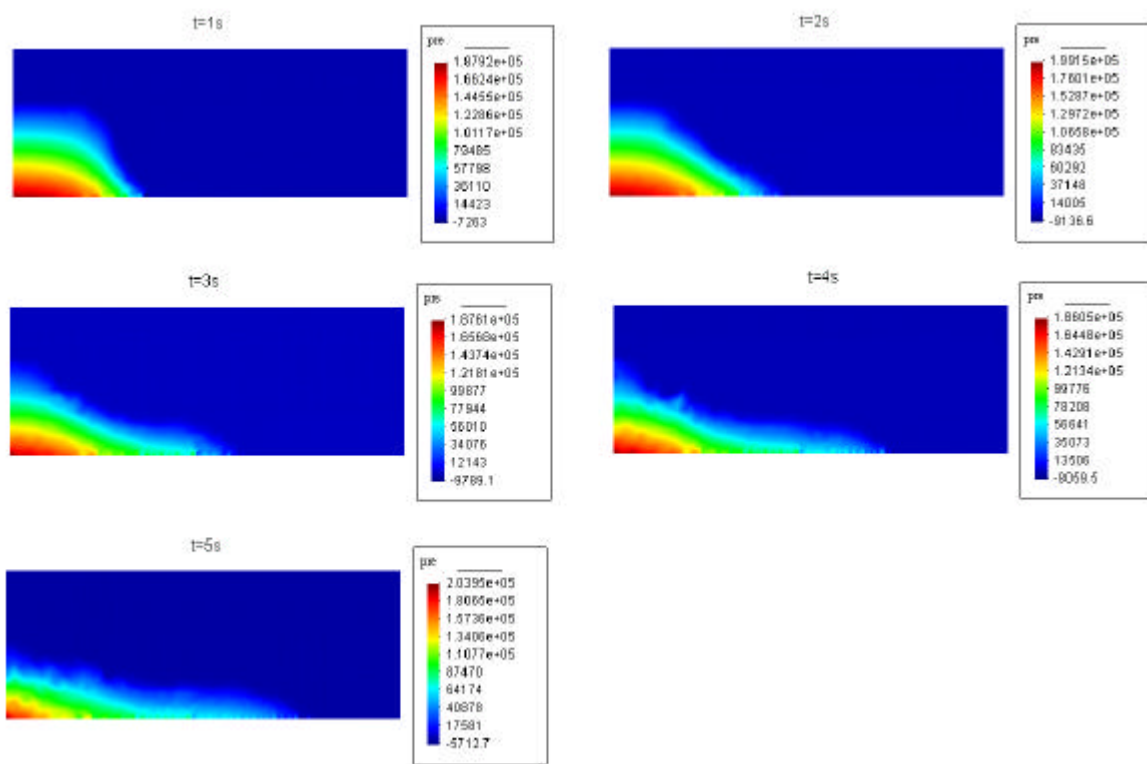


Figura 2-24: Problema de Riemann en lecho seco: evolución de la presión.

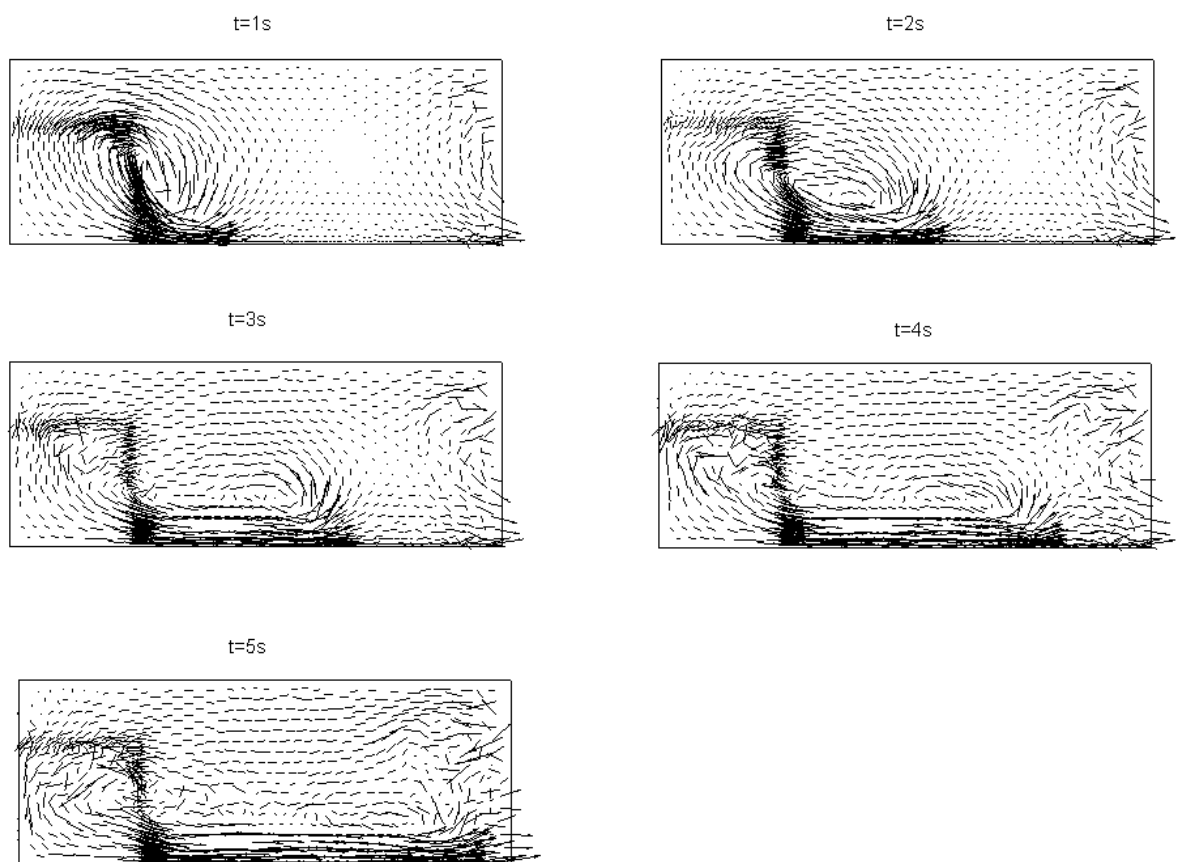


Figura 2-25: Problema de Riemann en lecho seco: evolución de los vectores velocidad.

y como se muestra en la Figura 2-26.

En las Figuras 2-27, 2-28 y 2-29 se dan la evolución de la interfase entre los dos fluidos, la presión y los vectores velocidad durante la primera rotación.

#### 2.7.4. Caída de fangos en ríos

Se estudia en este ejemplo la interacción entre tres fluidos distintos. El fenómeno en estudio consiste en el deslizamiento de una ladera por efecto de la gravedad y consecuente caída en un río o embalse. Para ello se ha utilizado la malla mostrada en la Figura 2-30 que consta de 5180 elementos triangulares lineales y 2679 nodos. Las condiciones de contorno son  $u = v = 0$  en todo el contorno y  $p = 0$  en las dos esquinas superiores, tal y como se muestra en la Figura 2-30. Los valores iniciales de presión y velocidad son nulos.

Vamos a estudiar dos casos:

En el primero se trata el problema de tres fluidos newtonianos de manera que el fluido 1 representa una ladera con propiedades  $\rho = 2000 \text{ Kg m}^{-3}$  y  $\mu = 10^{-2} \text{ Pa s}$ , el fluido 2 representa el agua con  $\rho = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$  y  $\mu = 10^{-2} \text{ Pa s}$  y el fluido 3 representa el aire con  $\rho = 1 \text{ Kg m}^{-3}$  y  $\mu = 10^{-5} \text{ Pa s}$ . En las Figuras 2-31, 2-32 y 2-33 se muestran los resultados de la evolución de las interfases, la presión y los vectores velocidad.

En el segundo caso el fluido 1 es un fluido friccional con  $\rho = 3000 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $\mu = 0.1 \text{ Pa s}$  y  $\phi = 8^\circ$ , mientras que los fluidos 2 y 3 representan el agua ( $\rho = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$  y  $\mu = 10^{-2} \text{ Pa s}$ ) y el aire ( $\rho = 1 \text{ Kg m}^{-3}$  y  $\mu = 10^{-5} \text{ Pa s}$ ) respectivamente. Los resultados para la evolución de las interfases, de la presión y de los vectores velocidad se dan en las Figuras 2-34, 2-35 y 2-36.

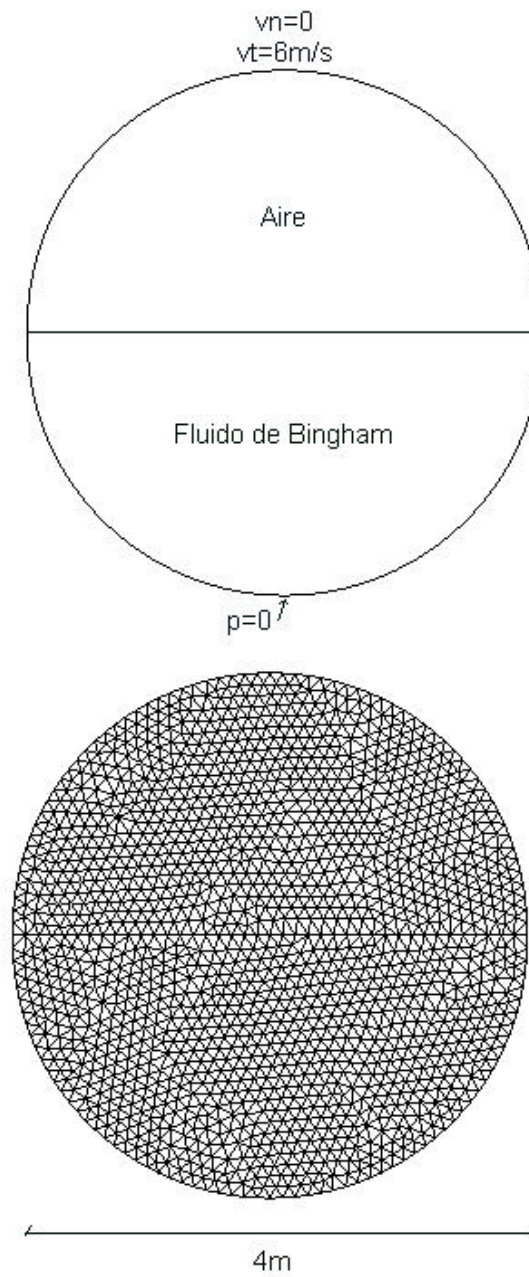


Figura 2-26: Fluidos en rotación: condiciones de contorno y malla computacional.

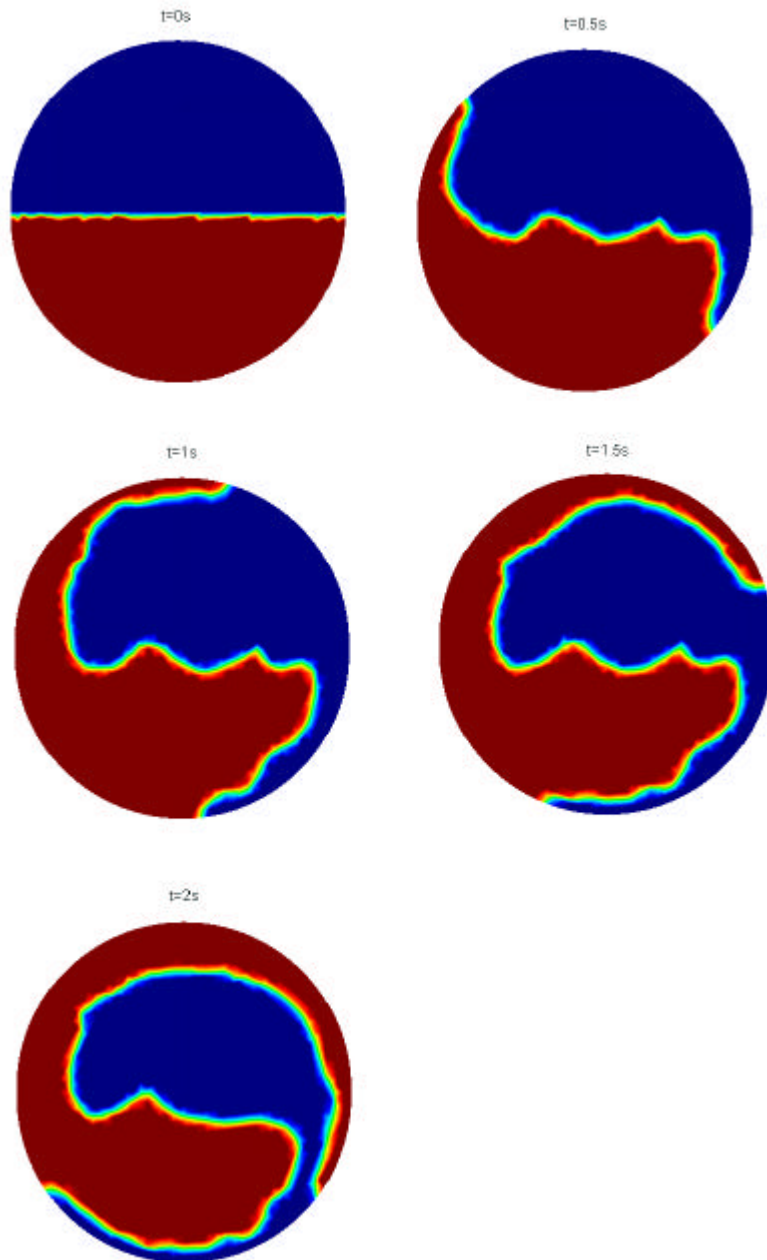


Figura 2-27: Fluidos en rotación: evolución de la interfase en la primera rotación.

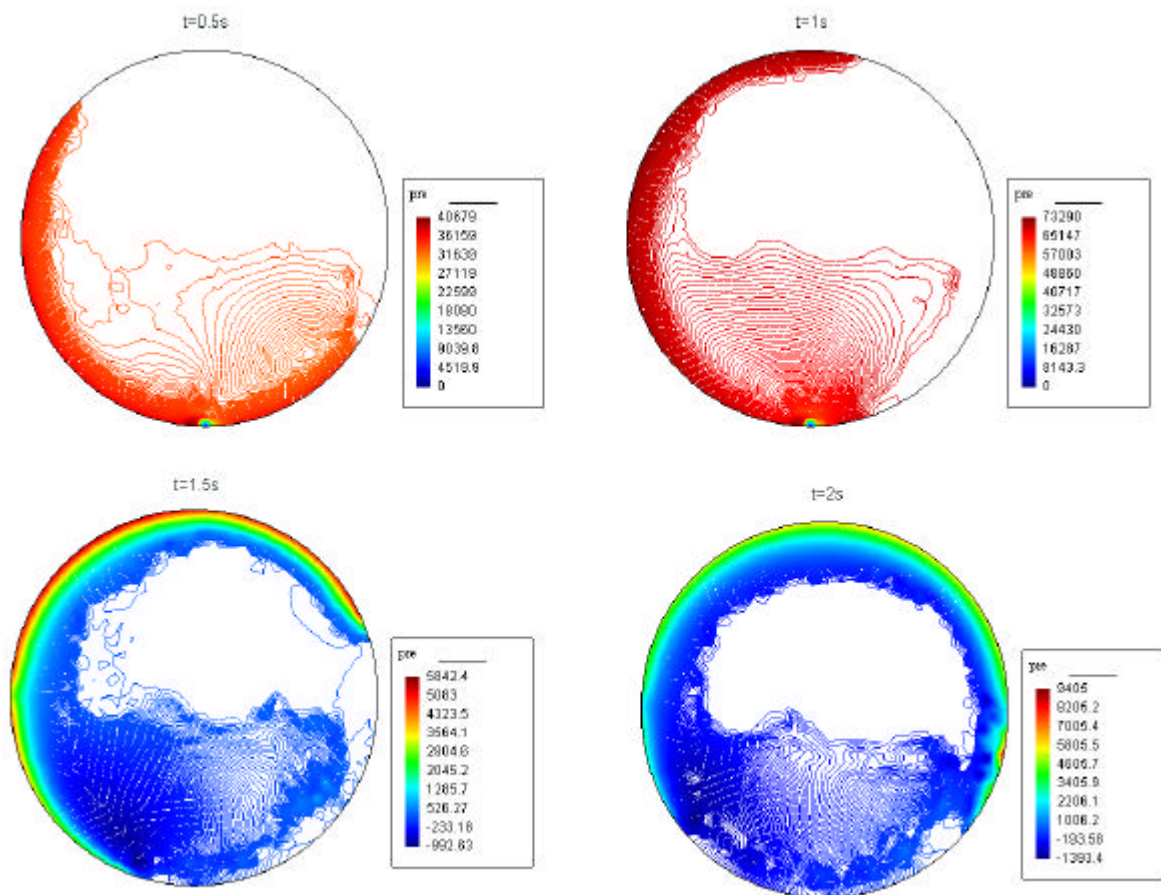


Figura 2-28: Fluidos en rotación: evolución de la presión en la primera rotación.

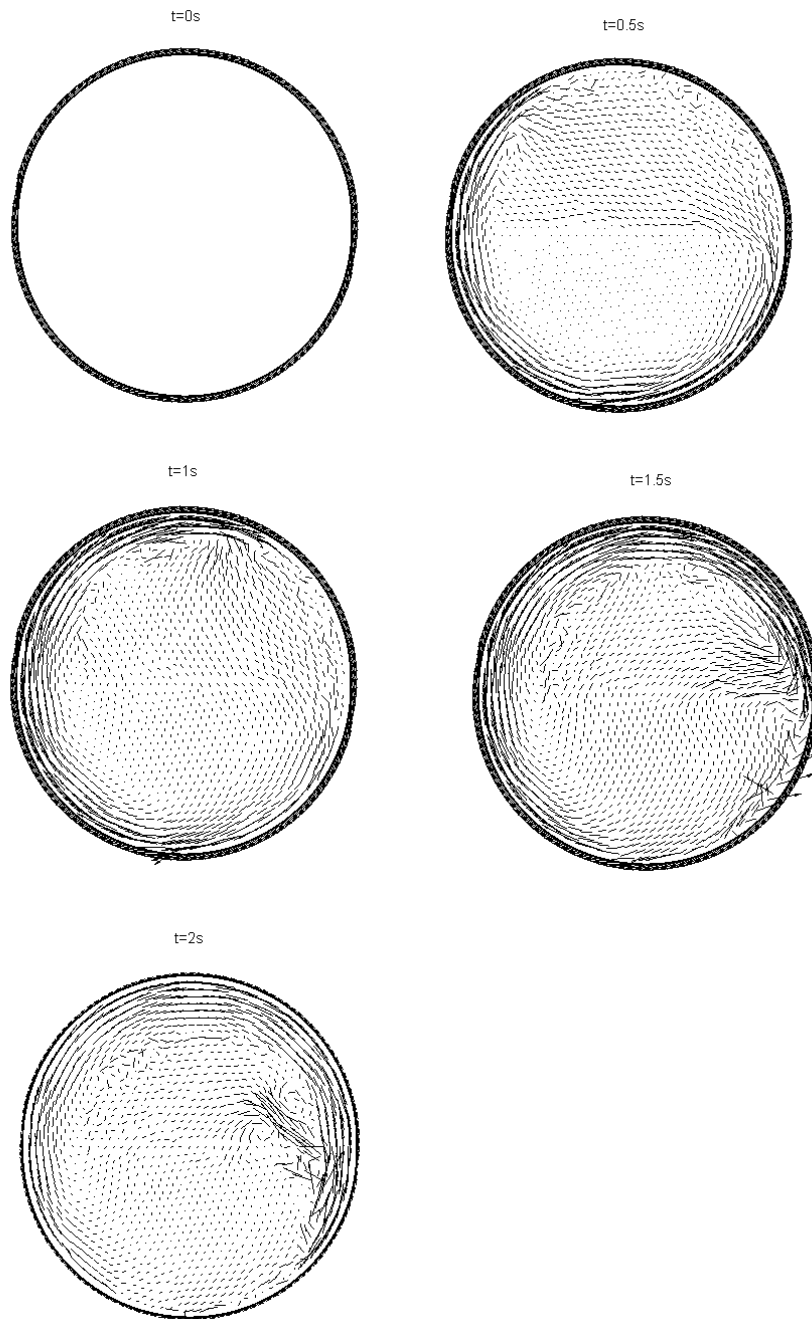


Figura 2-29: Fluidos en rotación: evolución de los vectores velocidad en la primera rotación.

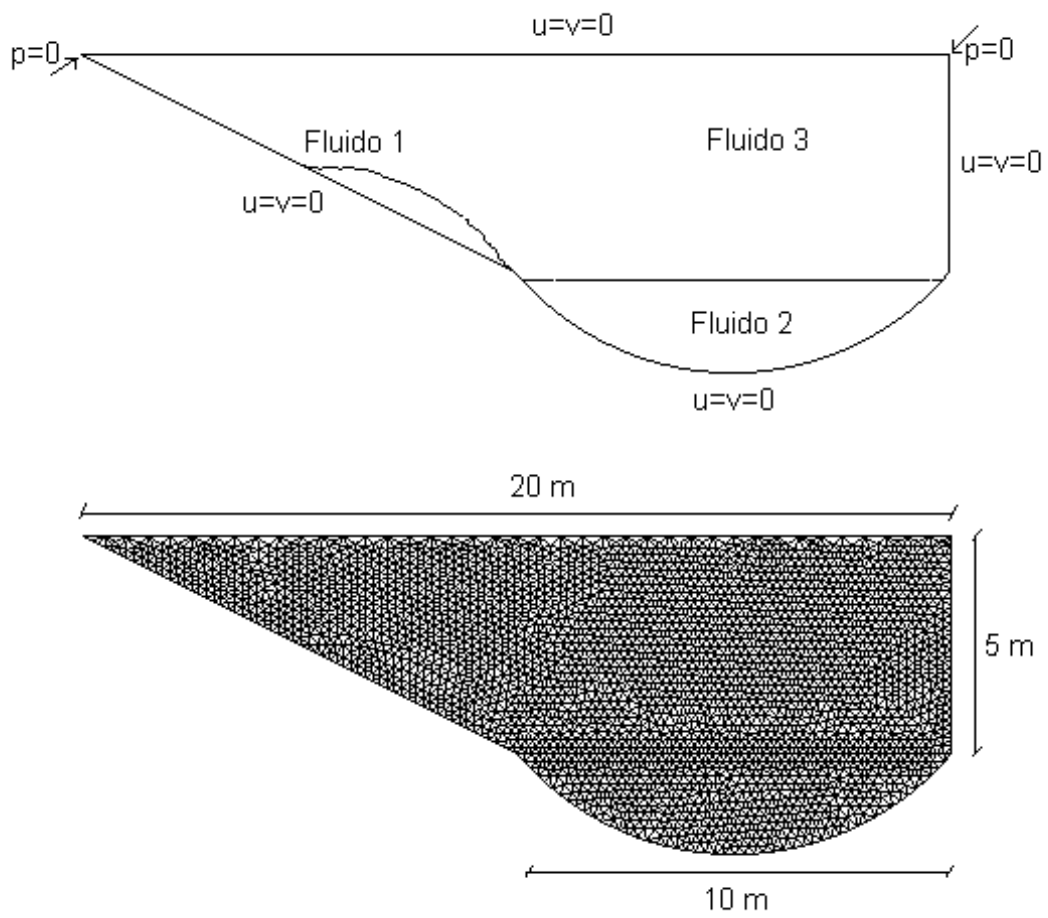


Figura 2-30: Caída de fangos en ríos: condiciones de contorno y malla computacional.

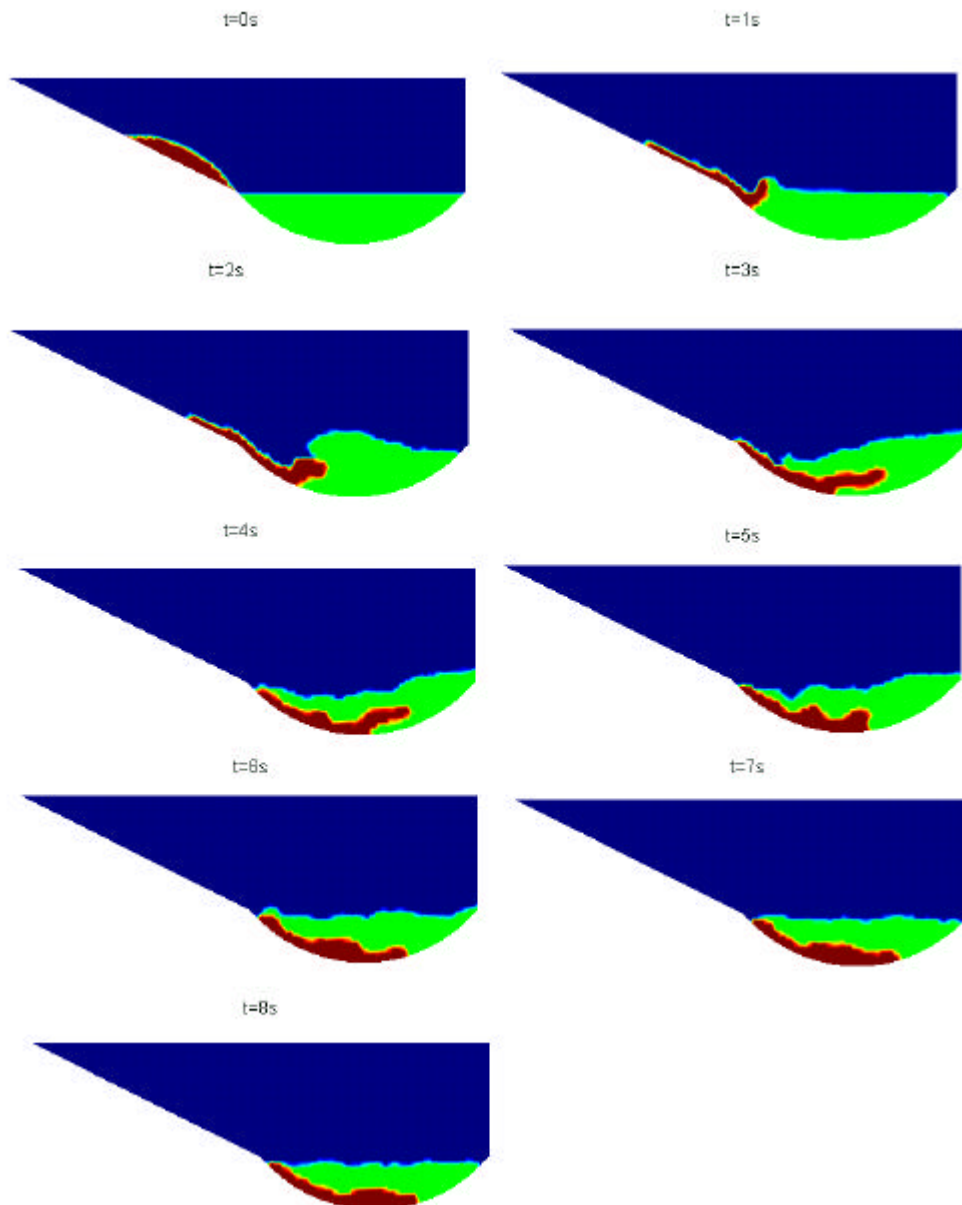


Figura 2-31: Caída de fangos en ríos: evolución de las interfases para tres fluidos newtonianos.

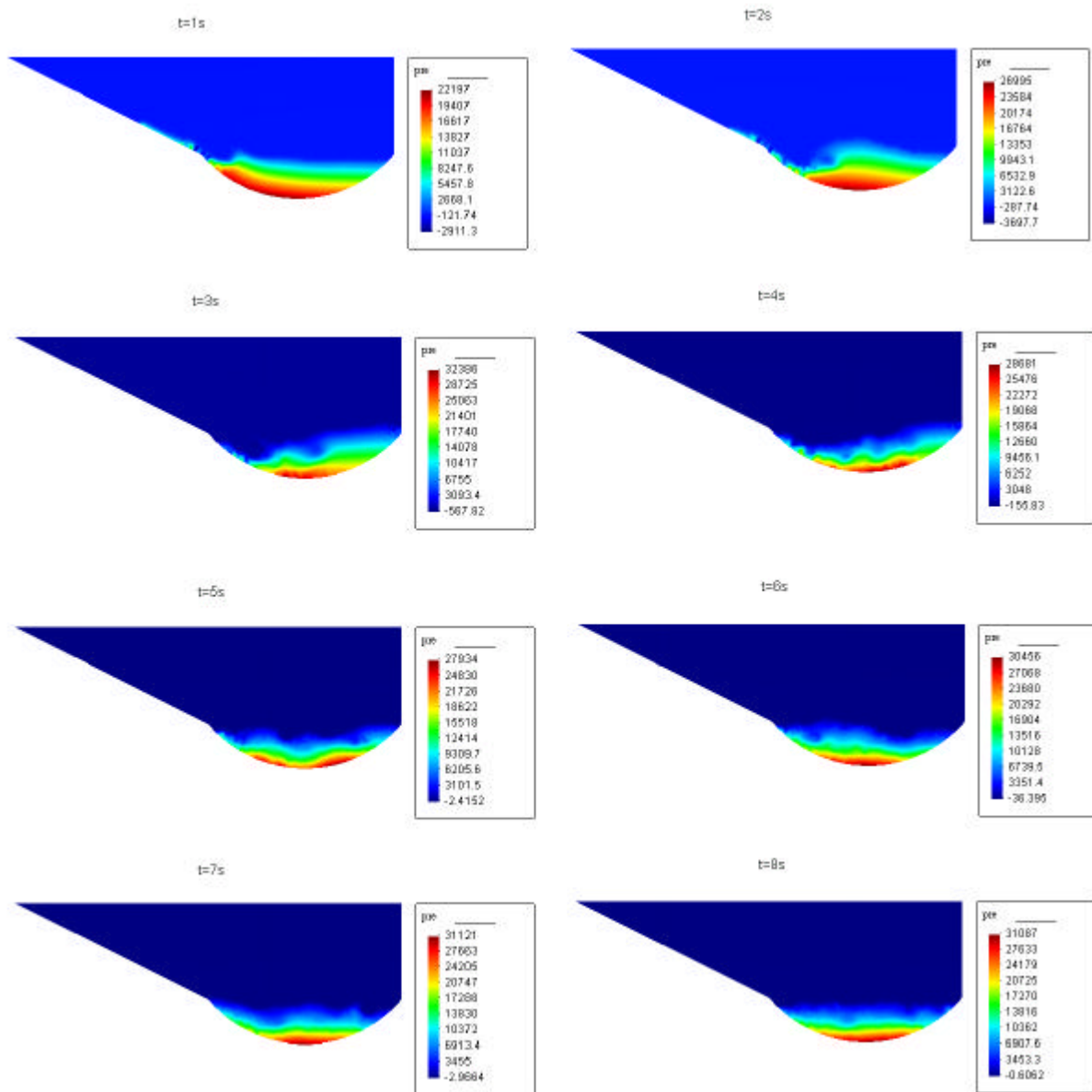


Figura 2-32: Caída de fangos en ríos: evolución de los valores de la presión para tres fluidos newtonianos.

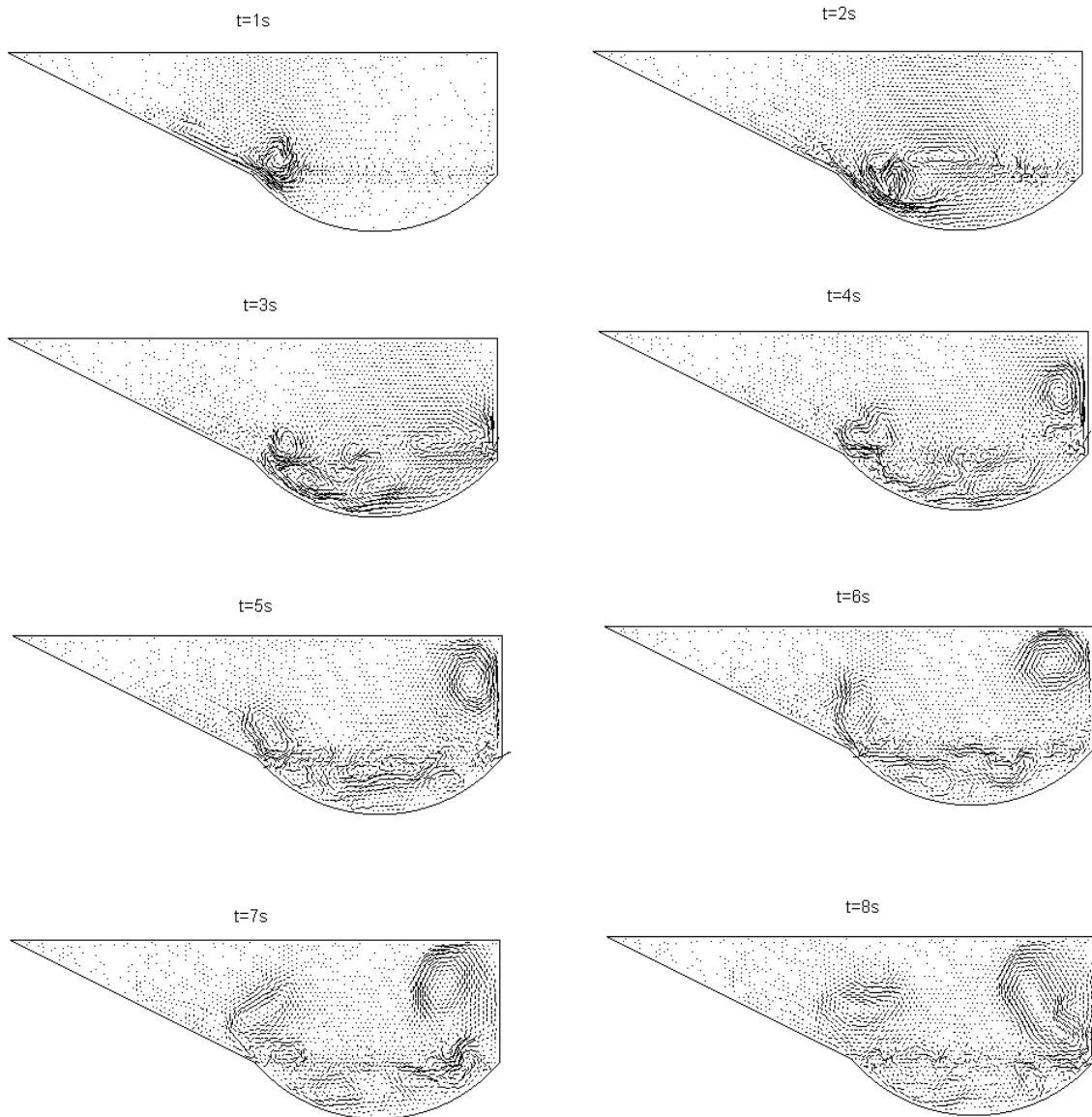


Figura 2-33: Caída de fangos en ríos: evolución de los vectores velocidad para tres fluidos newtonianos.

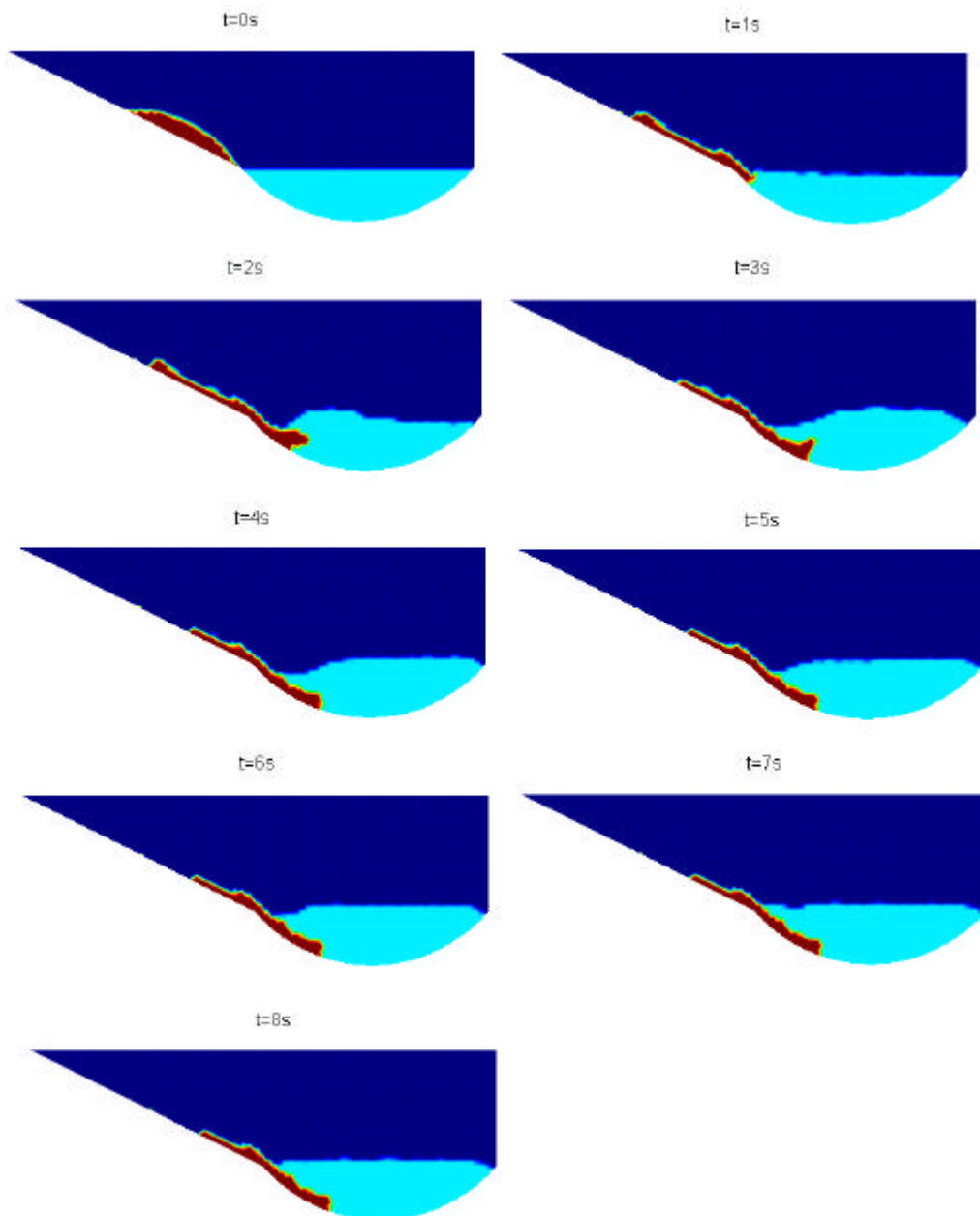


Figura 2-34: Caída de fangos en ríos: evolución de las interfases para el caso en que el fluido 1 es un fluido friccional con  $\phi = 8^\circ$ .

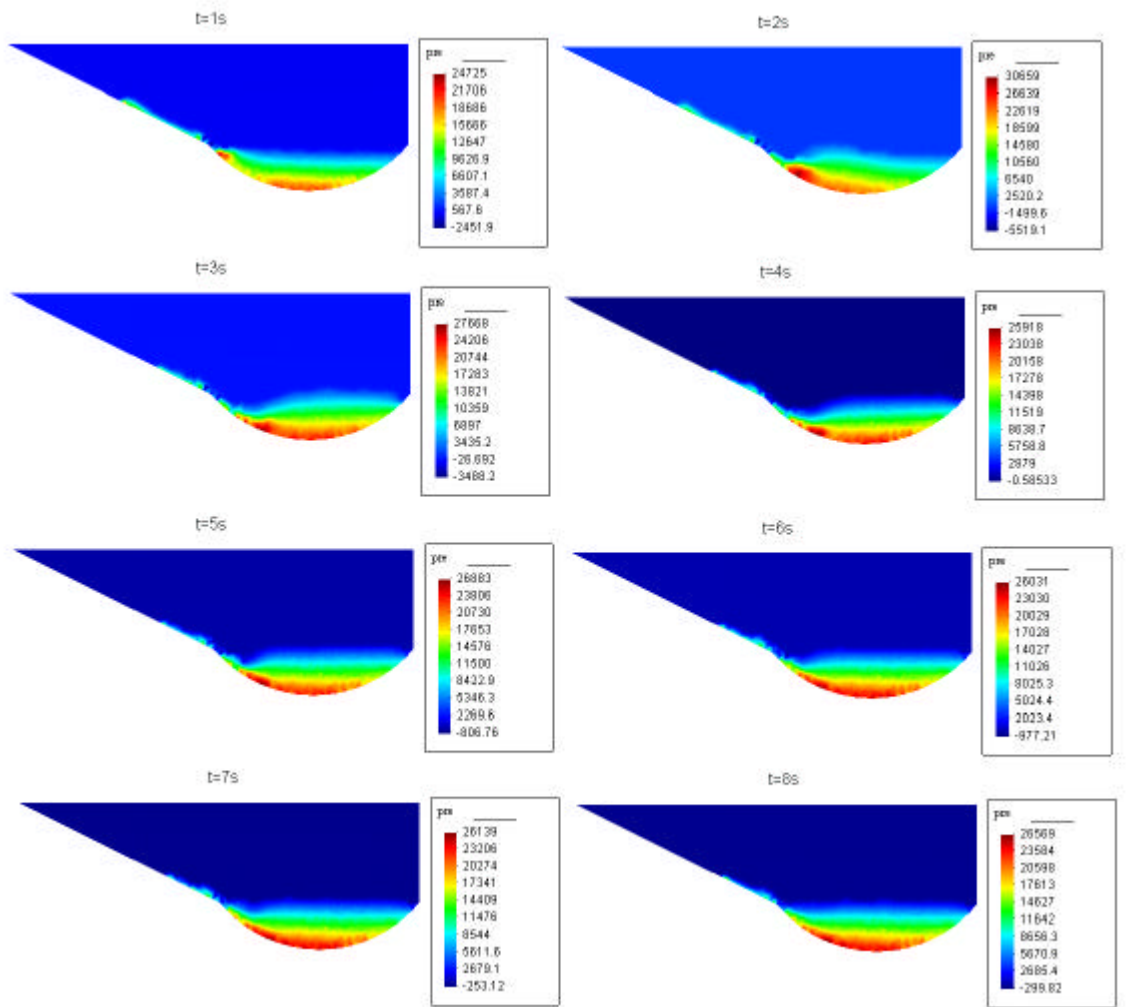


Figura 2-35: Caída de fangos en ríos: evolución de la presión para el caso en que el fluido 1 es un fluido friccional con  $\phi = 8^\circ$ .

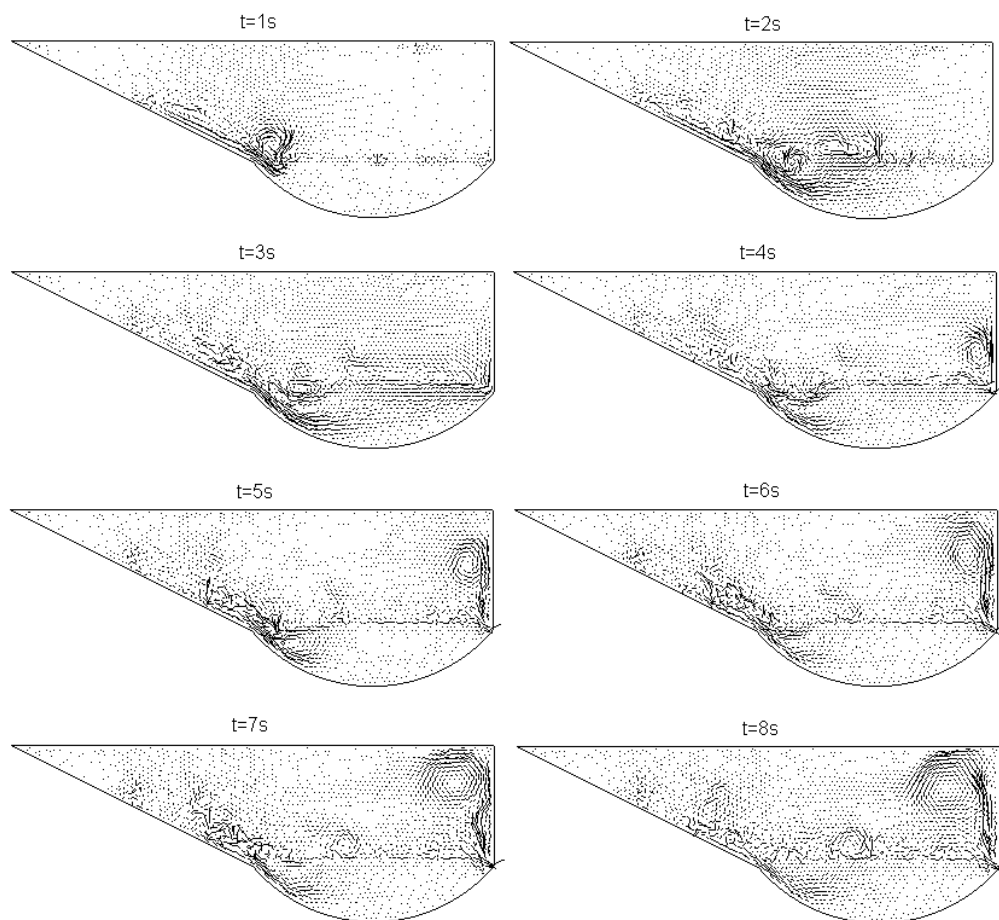


Figura 2-36: Caída de fangos en ríos: evolución de los vectores velocidad para el caso en que el fluido 1 es un fluido friccional con  $\phi = 8^\circ$ .

# Bibliografía

- [1] I. Babuška. "The finite element method with Lagrange multipliers". *Num. Math.*, 20, 179-92, 1973.
- [2] F. Brezzi. "On the existence, uniqueness and approximations of saddle point problems arising from Lagrange multipliers". *RAIRO 8-R2*, 129-51, 1974.
- [3] C.L. Chen, C.H. Ling. "Granular-flow rheology: role of shear-rate number in transition regime". *J. Eng. Mech.*, ASCE, 122, 469-480, 1996.
- [4] A. Chorin. "Numerical solution of incompressible flow problems". *Stud. Num. Analysis*, 2, 64-71, 1968.
- [5] R. Codina, M. Vazquez, O.C. Zienkiewicz. "A fractional step method for compressible flows: boundary conditions and incompressible limit". *Proceeding of the national conference on finite elements in fluids – New trends and applications*. Venecia, 15-21. Octubre 1995.
- [6] R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, S. Osher. "A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)". *J. Comp. Phys.*, 152(2), 457-492, 1999.
- [7] J.R.D. Francis. *Fluid Mechanics for engineering students*. Edwars Arnold, London, 1975.
- [8] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1: Fundamentals of numerical discretization*. John Wiley & Sons. 1988.
- [9] P. Nithiarasu, O.C. Zienkiewicz. "On stabilization of the CBS algorithm: internal and external time steps". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 875-880, 2000.

- [10] M. Pastor, M. Quecedo, O.C. Zienkiewicz. "A mixed displacement-pressure formulation for numerical analysis of plastic failure". *Computers and Structures*, Vol. 62, No. I, 13-23, 1997.
- [11] M. Pastor, O.C. Zienkiewicz, T. Li, L. Xiaoqing, M. Huang. "Stabilized finite elements with equal order of interpolation for soil dynamics problems". *Archives of Computational Methods in Engineering.*, Vol. 6, 1, 3-33, 1999.
- [12] M. Pastor, T. Li, X. Liu, O.C. Zienkiewicz. "Stabilized low order finite elements for failure and localization problems in undrained soils and foundations". *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 174, 219-234, 1999.
- [13] M. Pastor, T. Li, X. Liu, O.C. Zienkiewicz, M. Quecedo. "A fractional sep algorithm allowing equal order of interpolation for coupled analysis of saturated soil problems". *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5, 511-534, 2000.
- [14] M. Pastor, M. Mabssout. "Alternative formulations in soil dynamics". *Revue française de génie civil: Numerical modelling in Geomechanics*, Vol. 6, nº 6/2002, 1099-1117, 2002.
- [15] J. Peraire. *A finite element method for convection dominated flows*. Tesis doctoral. Universidad de Gales, Swansea, 1986.
- [16] J. Peraire, O.C. Zienkiewicz, K. Morgan. "Shallow water problems. A general explicit formulation". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 22, 517-574, 1986.
- [17] M. Quecedo, M. Pastor, O.C. Zienkiewicz. "Application of a fractional step method to localization problems". *Computers and Structures*, 74, 535-545, 2000.
- [18] M. Quecedo, M. Pastor. "Application of the level set method to the finite element solution of two-phase flows". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 645-663, 2001.
- [19] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo. "Simulación de ondas de avenida causadas por roturas de presas". *Revista de Ingeniería Civil*, No. 121, p. 23-31, 2001.
- [20] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo, Quinfen Zhang. "Comparison of two algorithms for solving the dam break problem". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 2001. (Aceptado).

- 
- [21] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros. "Numerical modelling of impulse wave generated by fast landslides". Enviado a *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002.
- [22] B. Ramaswamy. "Finite element solution for advection and natural convection flows". *Comp. Fluids*, Vol. 16, 349-388, 1988.
- [23] A.H. Shapiro. *The Dynamics and Thermodynamics of compressible fluid flow*. The Ronald Company, New York, 1953.
- [24] M. Sussman, P. Smeraka, S. Osher. "A level-set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow". *J. Comp. Phys.*, 114, 146-159, 1994.
- [25] J. Wu. *Compressible and incompressible flow problems – A new finite element algorithm and adaptativity*. Tesis doctoral. Universidad de Gales, Swansea, Sept. 1992.
- [26] C.T. Yang, S.N. Atluri. "An 'assumed deviatoric stress-pressure velocity' mixed finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous flow: Part II: Computational studies". *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 4, 43-69, 1984.
- [27] O.C. Zienkiewicz, R. Codina. "A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part I. The split, characteristic-based scheme". *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20, 887-913, 1995.
- [28] O.C. Zienkiewicz, J. Rojek, R.L. Taylor, M. Pastor. "Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, 565-583, 1998.
- [29] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos, Vol. 2: Mecánica de sólidos y de fluidos. Dinámica y no linealidad*. Mc Graw Hill. Cuarta edición, 1995.
- [30] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The finite element method, Vol. 3: Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann. Quinta edición, 2000.

## Capítulo 3

# Modelos integrados en profundidad

### 3.1. Introducción

Muchos de los problemas que aparecen en Hidráulica Ambiental requieren un gran tiempo de resolución cuando se emplean los modelos completos descritos en el capítulo anterior, debido al elevado número de grados de libertad. Sin embargo, en muchas ocasiones, la estructura de estos flujos permite, integrando en su espesor, reducir de manera considerable el número de grados de libertad y, por tanto, el tiempo de cálculo. Estos modelos se denominan *integrados en profundidad* y pueden aplicarse a problemas como el flujo de lodos de balsas mineras tras su rotura, deslizamientos de laderas, hidrodinámica de ríos, etc.

En este capítulo se describirán las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos así como las técnicas de discretización empleadas para desarrollar herramientas de simulación.

Es importante destacar que existen otros procesos cuyas ecuaciones diferenciales parciales son muy parecidas a las que rigen los anteriormente mencionados, tales como las corrientes producidas por mareas, propagación y amplificación de ondas largas, tsunamis, etc.

La no linealidad de las ecuaciones citadas permite reproducir también los problemas (tanto estacionarios como transitorios) de formación de ondas de choque, formación de ondas en movimientos supercríticos, propagación de frentes en ríos y embalses o propagación de ondas producidas por rotura de presas.

En el presente capítulo se ha utilizado el método de dos pasos de Taylor-Galerkin, basado en la

ecuación transitoria completa, así como un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para tener en cuenta la contribución de los términos de fuente. Con este método, las soluciones estacionarias se obtienen como caso particular del transitorio.

Por otro lado, el tipo de elementos que se ha utilizado ha sido triángulos lineales en dos dimensiones, ya que ofrecen la máxima flexibilidad geométrica para adaptarse a contornos complejos y para incorporar en el esquema general procedimientos adaptativos. Además, la utilización de mallas no estructuradas permite a su vez el diseñar mallas adaptadas a problemas en forma óptima, objetivo difícilmente alcanzable mediante las típicas mallas estructuradas empleadas en los métodos de Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos convencionales.

La secuencia de este capítulo es la siguiente. En primer lugar se describen los modelos matemáticos hidrodinámicos de las ecuaciones de onda en profundidades reducidas. A continuación se da una descripción de los modelos reológicos integrados en profundidad así como de las leyes de fricción con el fondo propuestas. Seguidamente se describen dos alternativas para llevar a cabo la discretización numérica, esto es, el método basado en el procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características (CBG) y el método de dos pasos de Taylor-Galerkin, procediéndose a una posterior discusión sobre el problema de la integración de las fuentes y la consecuente utilización del método de Runge-Kutta de cuarto orden para llevar a cabo esta tarea. Finalmente se presentan varios ejemplos de validación, así como algunas de las aplicaciones hidrodinámicas del método propuesto.

## 3.2. Modelos matemáticos hidrodinámicos

El modelo aquí utilizado para resolver el problema de superficie libre se basa en la solución de las ecuaciones integradas en profundidad.

Dichas ecuaciones se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes considerando un fluido incompresible e isotérmico y suponiendo que la componente vertical de la aceleración es despreciable. Finalmente las ecuaciones de onda en profundidades reducidas se obtienen integrando en profundidad las ecuaciones de conservación del momento y de la masa y haciendo uso de la regla de Leibnitz. Los detalles de esta derivación pueden encontrarse en libros de texto tales como [35] [41].

Existen dos formulaciones distintas para resolver este problema. Para el caso de deslizamientos de laderas, flujos de derrubios, etc. es preferible hacer uso de la formulación  $h$ - $Z$ , mientras que en caso

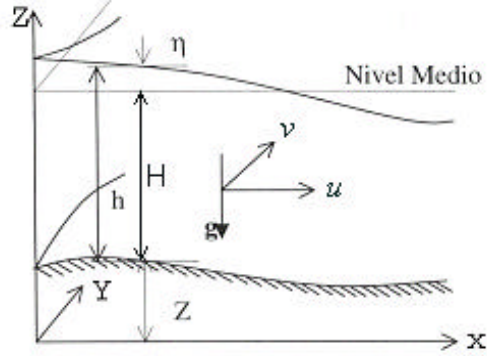


Figura 3-1: Ecuaciones de onda en profundidades reducidas: notación.

de propagación de olas en embalses se recomienda el uso de la formulación  $h-\eta$ . Esto es consecuencia del nivel tomado como referencia a partir del cual se calculan las perturbaciones, siendo en el primer caso el nivel de referencia la superficie de deslizamiento mientras que en el segundo se trata del nivel del fluido en reposo. Ambas formulaciones se detallan a continuación.

### 3.2.1. Ecuaciones de onda en profundidades reducidas: formulación $h-\eta$

Usando la notación descrita en la Figura 3-1, las ecuaciones integradas en profundidad son:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}h) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}v h) = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{\sigma}_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{\sigma}_{xy}) + \frac{\tau_x^S}{\rho} + \frac{\tau_x^B}{\rho} + \frac{r_x}{\rho} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}h) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}v h) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2h) = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{\sigma}_{yx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{\sigma}_{yy}) + \frac{\tau_y^S}{\rho} + \frac{\tau_y^B}{\rho} + \frac{r_y}{\rho} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y}$$

donde  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  son las componentes de la velocidad promediadas en profundidad,  $\bar{\sigma}$  es el tensor de tensiones promediado en profundidad,  $\mathbf{r}$  es el vector de la fuerza de Coriolis,  $p_a$  es la presión atmosférica

y  $\rho$  es la densidad del fluido.

$\boldsymbol{\tau}^S$  y  $\boldsymbol{\tau}^B$  son los vectores de tracción en la superficie libre (aire) y en el fondo (fricción):

$$\begin{aligned}\tau_i^S &= \bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j|_{Z+h} \\ \tau_i^B &= \bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j|_Z\end{aligned}\quad (3.1)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de manera más compacta de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\mathbf{U}}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{U}}) = -gh \text{ grad } \eta + \frac{1}{\rho} \text{div}(h\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\boldsymbol{\tau}^S}{\rho} + \frac{\boldsymbol{\tau}^B}{\rho} + \frac{\mathbf{r}}{\rho} - \frac{h}{\rho} \text{ grad } p_a \quad (3.3)$$

donde  $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{u}}h$ .

En favor de una mayor sencillez y sin pérdida de generalidad, la contribución de los términos debidos a la fuerza de Coriolis, las tracciones con el aire y los gradientes de presión atmosférica se ignorarán de ahora en adelante.

En lo que respecta a la fricción con el fondo,  $\boldsymbol{\tau}^B$ , más adelante se discutirán las distintas leyes de fricción a tener en cuenta.

Para la reproducción precisa de fuertes discontinuidades u ondas de choque haciendo uso de esquemas numéricos, tales como el método de dos pasos de Taylor-Galerkin, es necesario que las leyes de conservación se encuentren escritas en forma conservativa. Sin embargo, debido a la existencia de la componente  $\text{grad } \eta$ , las ecuaciones (3.2) y (3.3) no están escritas de esta manera. Para conseguir esto, podemos reescribir estas ecuaciones teniendo en cuenta que

$$-gh \text{ grad } \eta = -\text{grad} \left( g \frac{h^2 - H^2}{2} \right) + g(h - H) \text{ grad } H$$

resultando

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\mathbf{U}}) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \text{div} \left( \bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{U}} + \left( g \frac{h^2 - H^2}{2} \right) \mathbf{I} \right) = g(h - H) \text{grad } H + \frac{1}{\rho} \text{div}(h\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\boldsymbol{\tau}^B}{\rho} \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor unitario de segundo orden.

Ahora, introduciendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}^T &= (h, h\bar{u}, h\bar{v}) \\ \mathbf{F}_x^T &= \left( h\bar{u}, h\bar{u}^2 + g \frac{h^2 - H^2}{2}, h\bar{u}\bar{v} \right) \\ \mathbf{F}_y^T &= \left( h\bar{v}, h\bar{u}\bar{v}, h\bar{v}^2 + g \frac{h^2 - H^2}{2} \right) \\ \mathbf{G}_x^T &= \left( 0, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{xx}, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{yx} \right) \\ \mathbf{G}_y^T &= \left( 0, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{xy}, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{yy} \right) \\ \mathbf{S}^T &= \left( 0, g(h - H) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\tau_x^B}{\rho}, g(h - H) \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\tau_y^B}{\rho} \right) \end{aligned}$$

podemos escribir estas ecuaciones de manera conservativa

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} = \mathbf{S}$$

Esta formulación  $h$ - $\eta$  es la base para la solución de problemas hidrodinámicos costeros utilizando el Método de los Elementos Finitos [27] [34] [41].

### 3.2.2. Ecuaciones de onda en profundidades reducidas: formulación $h$ - $Z$

Siguiendo el mismo propósito de escribir las ecuaciones de onda en profundidades reducidas de manera conservativa puede considerarse que, puesto que

$$Z + H + \eta = Z + h \quad (3.6)$$

y

$$Z + H = cte$$

podemos escribir [29] [30]

$$grad \eta = grad(h + Z)$$

dando lugar a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + div(\bar{\mathbf{U}}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + div \left( \bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{U}} + g \frac{h^2}{2} \mathbf{I} \right) = -gh grad Z + \frac{1}{\rho} div(h\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\boldsymbol{\tau}^B}{\rho} \quad (3.8)$$

En este caso tendríamos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} = \mathbf{S}$$

con

$$\begin{aligned} \phi^T &= (h, h\bar{u}, h\bar{v}) \\ \mathbf{F}_x^T &= \left( h\bar{u}, h\bar{u}^2 + g\frac{h^2}{2}, h\bar{u}\bar{v} \right) \\ \mathbf{F}_y^T &= \left( h\bar{v}, h\bar{u}\bar{v}, h\bar{v}^2 + g\frac{h^2}{2} \right) \\ \mathbf{G}_x^T &= \left( 0, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{xx}, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{yx} \right) \\ \mathbf{G}_y^T &= \left( 0, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{xy}, -\frac{1}{\rho} h\bar{\sigma}_{yy} \right) \\ \mathbf{S}^T &= \left( 0, -gh\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\tau_x^B}{\rho}, -gh\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\tau_y^B}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Esta formulación  $h$ - $Z$  no requiere el conocimiento del valor del nivel de fluido en reposo, esto es, de  $H$ . Este punto puede ser de relevancia en problemas que implican zonas de secado-mojado. Por ello esta

formulación es más apropiada para el análisis de rotura de presas, problemas de flujos de derrubios, etc., aunque también puede usarse para el caso de problemas de ingeniería costera [29] [30]. No obstante, los métodos numéricos desarrollados más adelante pueden aplicarse a ambas formulaciones puesto que sólo requieren la incorporación de las correspondientes expresiones para el tensor de flujo convectivo,  $\mathbf{F}$ , el tensor de flujo difusivo,  $\mathbf{G}$ , y el vector de fuentes,  $\mathbf{S}$ .

### 3.3. Modelos reológicos integrados en profundidad

Según Malvern [19], el tensor de tensiones se expresa como

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(\mathbf{D})$$

donde  $p$  es una presión termodinámica y  $\mathbf{D}$  es el tensor velocidad de deformación.

Considerando un fluido isotrópico

$$\mathbf{F}(\mathbf{D}) = \phi_0\mathbf{I} + \phi_1\mathbf{D} + \phi_2\mathbf{D}^2$$

donde  $\phi_i$  es una función de los tres invariantes de  $\mathbf{D}$ , esto es,  $I_{1,D} = \text{tr}(\mathbf{D})$ ,  $I_{2,D} = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{D}^2)$  y  $I_{3,D} = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{D}^3)$ . Sin embargo, teniendo en cuenta que el fluido es incompresible,  $I_{1,D} = 0$ . Se supone además que la dependencia de  $I_{3,D}$  es muy pequeña [4] y que  $\phi_2 = 0$ . Resulta entonces,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \phi_0(I_{2,D})\mathbf{I} + \phi_1(I_{2,D})\mathbf{D}$$

Descomponiendo ahora la tensión en las componentes principal y desviadora

$$\boldsymbol{\sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

la ecuación constitutiva puede escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + \phi_1(I_{2,D})\mathbf{D}$$

donde

$$-\bar{p} = -p + \phi_0$$

Por conveniencia, la barra que denota la componente principal del tensor de tensiones,  $\bar{p}$ , será omitida de aquí en adelante.

De esta manera, y haciendo uso del modelo de Chen y Ling [4], podemos escribir la ley reológica siguiente para un fluido viscoplástico simple:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left( \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu |4I_{2,D}|^{\frac{n-1}{2}} \right) \mathbf{D} \quad (3.9)$$

Los materiales de Mohr-Coulomb con cohesión  $\tau_{y,0}$  y ángulo interno de fricción  $\phi$  pueden incluirse en esta formulación escribiendo la tensión de fluencia,  $\tau_y$ , como

$$\tau_y = \tau_{y,0} \cos \phi + p \sin \phi$$

Por lo tanto, una vez que los parámetros  $\tau_{y,0}$ ,  $\phi$  y  $\eta$  son conocidos, el comportamiento del fluido se encuentra completamente caracterizado. Reologías típicas como la newtoniana, Bingham, etc., se obtienen como casos particulares de esta ecuación constitutiva tal y como se describe a continuación.

**Fluido newtoniano.** Este fluido se obtiene tomando  $\tau_y = 0$  y  $\eta = 1$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

Los resultados experimentales obtenidos por Bagnold [1] muestran que el comportamiento de una dispersión de partículas granulares en un fluido viscoso a velocidades bajas de deformación en la región macro-viscosa, donde dominan los efectos viscosos, puede reproducirse con un modelo de fluido newtoniano, donde la viscosidad dinámica del fluido se corrige con un factor que tiene en cuenta la concentración lineal del material

$$\mu^* = (1 + \lambda) \left( 1 + \frac{1}{2}\lambda \right) \mu$$

donde  $\lambda$  es la concentración lineal definida como:

$$\frac{1}{\lambda} = \left( \frac{C_{\text{máx}}}{C} \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

y  $C$  y  $C_{\text{máx}}$  son la concentración y la concentración máxima posible, que para esferas viene dada por  $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.74$ . Por tanto, el papel de la concentración de partículas granulares consiste en aumentar la viscosidad efectiva de la mezcla.

**Fluido de Bingham.** El fluido de Bingham se obtiene suponiendo  $\tau_y = \tau_{y,0}$ ,  $\phi = 0$  y  $\eta = 1$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left( \frac{\tau_{y,0}}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu \right) \mathbf{D}$$

Para una mezcla de agua y suelo con una fracción de arcilla superior al 10%, debido a la interacción entre las partículas de arcilla, es probable la aparición de una tensión de fluencia por lo que sería aplicable un modelo de tipo viscoplástico como el de Bingham o el de Herschel-Bulkley [16]. Por lo tanto, este modelo se utiliza básicamente para flujos viscosos de derrubios o de fangos en régimen laminar.

**Fluido friccional.** El fluido friccional se obtiene considerando  $\tau_{y,0} = 0$  y  $\eta = 1$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left( \frac{p \sin \phi}{\sqrt{I_{2,D}}} + 2\mu \right) \mathbf{D}$$

Para un flujo tangencial simple ( $u, v = 0, w$ ), puesto que  $D_{22} = 0$  y  $D_{33} = -D_{11}$ , las tensiones vienen dadas por

$$\sigma_{11} = -p \left( 1 - \frac{D_{11}}{\sqrt{D_{11}^2 + D_{13}^2}} \sin \phi \right) + 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{33} = -p \left( 1 + \frac{D_{11}}{\sqrt{D_{11}^2 + D_{13}^2}} \sin \phi \right) - 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{13} = p \frac{D_{13}}{\sqrt{D_{11}^2 + D_{13}^2}} \sin \phi + 2\mu D_{13}$$

que pueden escribirse también como

$$\sigma_{11} = -p(1 - \cos \xi \sin \phi) + 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{33} = -p(1 + \cos \xi \sin \phi) - 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{13} = p \sin \xi \sin \phi + 2\mu D_{13}$$

siendo  $\xi = \frac{\pi}{2} - \phi$ .

Estas componentes de la tensión satisfacen el criterio de Mohr-Coulomb en el caso límite para el que  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{0}$ . Otro aspecto interesante es que  $|\sigma_{11}| < |\sigma_{33}|$  si  $\cos \xi > 0$ , es decir,  $D_{11} > 0$  (estado activo), y  $|\sigma_{11}| > |\sigma_{33}|$  si  $\cos \xi < 0$ , es decir,  $D_{11} < 0$  (estado pasivo).

Para poder ser usada en las ecuaciones del momento, la ecuación (3.9) debe integrarse en profundidad y promediarse. Sin embargo, puesto que la estructura del flujo en la dirección  $z$  se pierde debido a la integración en profundidad y tan sólo serán disponibles las cantidades promediadas, no se trata de una tarea trivial.

La aproximación propuesta es considerar una ecuación constitutiva integrada en profundidad donde la tensión promediada en profundidad es una función de la presión y del tensor velocidad de deformación promediado en profundidad

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{p}\mathbf{I} + \left( \frac{\bar{\tau}_y}{\sqrt{I_{2,\bar{D}}}} + 2\mu |4I_{2,\bar{D}}|^{\frac{n-1}{2}} \right) \bar{\mathbf{D}} \quad (3.10)$$

donde  $\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$  para  $i, j = 1, 2$  y  $\bar{p} = -\frac{1}{2}\rho gh$ .

Suponiendo que la estructura del flujo en la dirección  $z$  corresponde a un flujo tangencial simple ( $u, v = 0, w$ ), estacionario y laminar, en los casos de un fluido newtoniano y friccional puro (con cohesión nula), la correspondiente velocidad de deformación promediada vendrá dada por la expresión:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{3\bar{u}}{2h}$$

mientras que si consideramos la distribución de velocidad presentada en la Figura 3-2 para un fluido de Bingham, la correspondiente velocidad de deformación promediada será

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{3}{2 + \frac{\tau_B}{\tau_y}} \frac{\bar{u}}{h} \quad (3.11)$$

donde  $\tau^B$  es la fuerza de resistencia del fondo.

La fuerza de resistencia del fondo y la velocidad promediada considerada están relacionadas, en el caso de los fluidos de Bingham, por

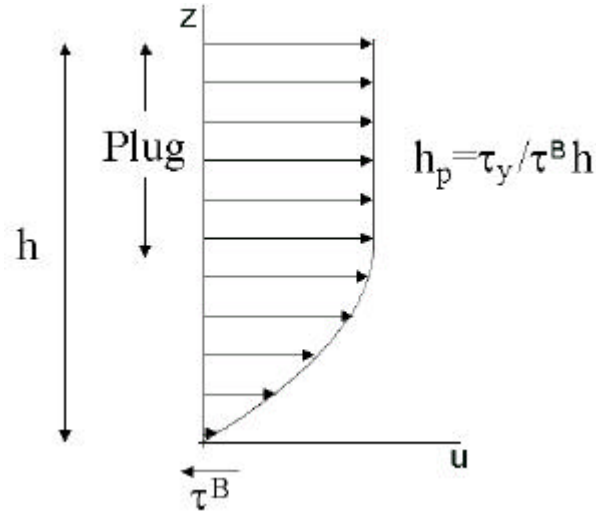


Figura 3-2: Distribución de velocidades en la dirección perpendicular a la superficie de la base para un fluido de Bingham.

$$\bar{u} = \frac{\tau^B}{6\mu} h \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau^B}\right)^2 \left(2 + \frac{\tau_y}{\tau^B}\right) \quad (3.12)$$

que puede escribirse como un polinomio de tercer orden

$$\xi^3 - (3 + a)\xi + 2 = 0 \quad (3.13)$$

donde  $\xi = \tau_y / \tau^B$  y  $a = (6\mu \bar{u}) / (h \tau_y)$ . La solución se encuentra dentro del intervalo  $[0, 1]$ .

Con el fin de evitar el esfuerzo computacional requerido para resolver esta ecuación no lineal para cada paso de tiempo y en cada elemento, se han propuesto un cierto número de aproximaciones [22] (ver Figura 3-3).

La propuesta de ese trabajo está basada en una técnica de economización de polinomios [22]. Puede demostrarse que la mejor aproximación de segundo orden del polinomio de tercer orden (3.13) está dada por

$$\frac{3}{2}\xi^2 - \left(\frac{114}{32} + a\right)\xi + \frac{65}{32} = 0 \quad (3.14)$$

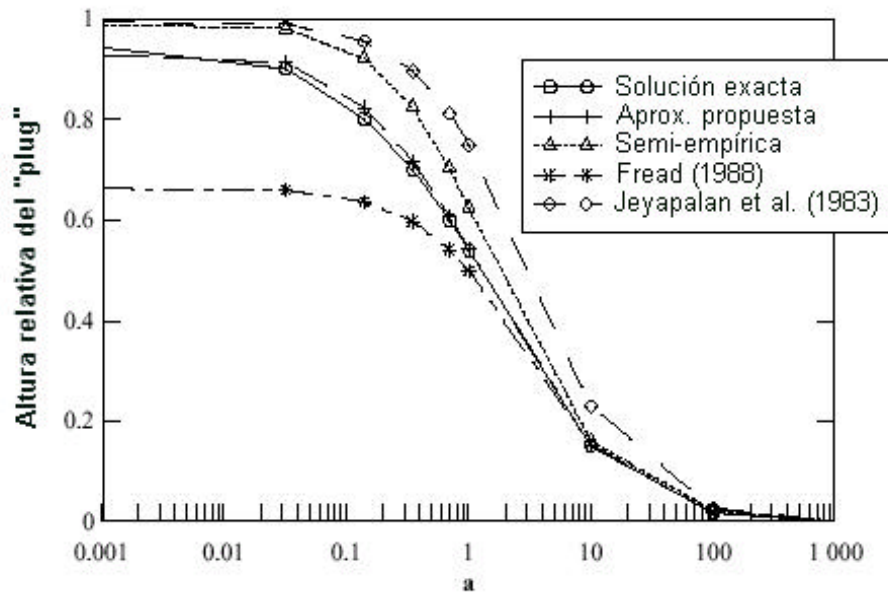


Figura 3-3: Comparación de las diferentes soluciones para la altura en un fluido de Bingham.

con un error máximo de  $1/32$  en el intervalo  $[0, 1]$ . La solución de esta última ecuación para  $\xi$  resulta ser el valor de  $\tau^B$  que será utilizado en la ecuación (3.11).

El término  $\bar{D}_{33}$  se calcula teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad  $\bar{D}_{33} = -(\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22})$ .

Por tanto, siguiendo esta aproximación, todas las componentes de  $\bar{\sigma}$  y  $\bar{D}$  se calculan a partir de la información existente del flujo y del valor calculado de  $\sqrt{I_{2,\bar{D}}}$ .

### 3.4. Leyes de fricción con el fondo

Tan sólo existen soluciones analíticas que permiten obtener la fricción en el fondo en muy pocos casos: flujo tangencial simple, estacionario y uniforme. Sin embargo se hace la aproximación de suponer que la relación entre la fricción y la velocidad media es la misma que en las condiciones ideales empleando la ley de fricción en función de la velocidad media así obtenida.

En el caso de tratarse de un fluido newtoniano en régimen laminar la expresión a tener en cuenta sería la siguiente:

$$\tau^B = -\frac{3\mu}{h}\bar{\mathbf{u}} \quad (3.15)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $h$  la altura de la capa límite.

Por otro lado, para un fluido de Bingham en régimen laminar tendríamos, como ya hemos visto en la sección 3.3:

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{\tau^B}{6\mu}h \left(1 - \frac{\tau_y}{|\tau^B|}\right)^2 \left(2 + \frac{\tau_y}{|\tau^B|}\right) \quad (3.16)$$

Otra posibilidad, aplicable cuando el comportamiento de la masa que desliza se aproxima por un fluido de Herschel-Bulkley,

$$\tau = \tau_y + K\dot{\gamma}^n$$

con  $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial z}$ , siendo  $K$  la viscosidad plástica, es utilizar la ecuación dada por Coussot [5]

$$\tau^B = -\tau_y \left[1 + 1.93 \left(\frac{\tau_y}{K} \left(\frac{h}{|\bar{\mathbf{u}}}\right)^n\right)^{-0.9}\right] \frac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} \quad (3.17)$$

La tensión de fluencia,  $\tau_y$ , y la viscosidad plástica,  $K$ , pueden estimarse a partir de la concentración porcentual (por unidad de volumen) de sólidos en el fluido de acuerdo con O'Brien y Julien [20].

En el caso de la aparición de turbulencia, existe una dependencia de las características de la superficie del fondo y se produce un gran aumento de la resistencia del fondo respecto del caso laminar. El cambio de laminar a turbulento puede predecirse usando el número de Hedstrom y los valores críticos del número de Reynolds propuesto por Hanks y Pratt [10].

En este caso, puede aplicarse la ecuación de Chezy-Manning utilizada para fluidos newtonianos [27] [42]

$$\tau^B = -\rho \frac{gn^2 |\bar{\mathbf{u}}|}{h^{\frac{7}{3}}} \bar{\mathbf{u}} \quad (3.18)$$

donde  $n$  es el número de Manning,  $\rho$  la densidad y  $g$  la constante de la gravedad.

Además, Hungr y sus colaboradores [7] [12], han encontrado que la reología de Voellmy, introducida en primer lugar para avalanchas de nieve, proporciona resultados satisfactorios para avalanchas de

rocas

$$\boldsymbol{\tau}^B = - \left( p^B \tan \delta \frac{1}{|\bar{\mathbf{u}}|} + \rho g \frac{|\bar{\mathbf{u}}|}{\zeta} \right) \bar{\mathbf{u}} \quad (3.19)$$

siendo  $p^B$  la presión en el fondo y  $\delta$  el ángulo de fricción con el fondo.

Este modelo introduce un término de fricción debido a la disipación turbulenta. El coeficiente de turbulencia  $\zeta$  incorpora implícitamente el grosor de la capa base donde tendría lugar la mayor parte de la deformación tangencial en materiales granulares.

Finalmente, para materiales friccionales, podría ser apropiada la fricción de Coulomb

$$\boldsymbol{\tau}^B = -p^B \tan \delta \frac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} \quad (3.20)$$

En algunos casos, cuando el material de la masa que se propaga y el material del fondo son los mismos, el ángulo de fricción con el fondo,  $\delta$ , y el ángulo interno de fricción,  $\phi$ , de la masa que desliza pueden ser el mismo. Se supondrá aquí que, en el caso general,  $\delta$  y  $\phi$  son diferentes.

Debe hacerse notar que el ángulo interno aparente de fricción y, por lo tanto, la fricción en el fondo puede cambiar a medida que evoluciona la presión intersticial debido al proceso de consolidación. Esto fue destacado por Hutchinson [13], quien propuso un modelo simplificado de consolidación para predecir distancias de deslizamiento de flujos, y por Hungr [12], que incorporó un ángulo de fricción efectivo,  $\delta'$

$$\tan \delta = (1 - r_u) \tan \delta'$$

donde el factor  $r_u$  es la razón entre la presión intersticial y la tensión total normal a la superficie del fondo. Este factor de presión intersticial puede considerarse como una función del espacio o del tiempo.

Se propone aquí, al igual que se hizo en [21] [23] [24] [25], considerar un factor de presión intersticial dependiente del tiempo, basado en la solución de la consolidación vertical de una capa de sólido de espesor  $h_s$

$$r_u = r_u^0 \exp \left( -\frac{t}{T_v} \right)$$

donde  $r_u^0 = \left(1 - \frac{\tan \delta_0}{\tan \delta'}\right)$ ,  $T_v = \frac{4h^2}{\pi^2 c_v}$ ,  $c_v$  es el coeficiente de consolidación y  $\delta'$  y  $\delta_0$  son los ángulos de fricción efectivo e inicial respectivamente.

De acuerdo con esta aproximación, el ángulo de fricción que será usado en la ecuación (3.20) es una función dependiente del tiempo y de los ángulos de fricción efectivo,  $\delta'$ , e inicial,  $\delta_0$ ,

$$\tan \delta = \tan \delta' + (\tan \delta_0 - \tan \delta') \exp\left(-\frac{t}{T_v}\right)$$

Podemos resumir las anteriores leyes de fricción con el fondo en la siguiente tabla [9]:

Flujos de barro	Laminar	Newtoniano	$\tau^B = -\frac{3\mu}{h} \bar{\mathbf{u}}$
		Bingham	$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{\tau^B}{6\mu} h \left(1 - \frac{\tau_y}{ \tau^B }\right)^2 \left(2 + \frac{\tau_y}{ \tau^B }\right)$
		Coussot	$\tau^B = -\tau_y \left[1 + 1.93 \left(\frac{\tau_y}{K} \left(\frac{h}{ \bar{\mathbf{u}} }\right)^n\right)^{-0.9}\right] \frac{\bar{\mathbf{u}}}{ \bar{\mathbf{u}} }$
	Turbulento	Chezy-Manning	$\tau^B = -\rho \frac{gn^2  \bar{\mathbf{u}} }{h^{5/3}} \bar{\mathbf{u}}$
Flujos granulares		Voellmy	$\tau^B = -\left(p^B \tan \delta \frac{1}{ \bar{\mathbf{u}} } + \rho g \frac{ \bar{\mathbf{u}} }{\zeta}\right) \bar{\mathbf{u}}$
(arcilla <10 %)		Coulomb	$\tau^B = -p^B \tan \delta \frac{\bar{\mathbf{u}}}{ \bar{\mathbf{u}} }$

### 3.5. Discretización

Hay un gran número de métodos para resolver los problemas de convección dominante como es el caso que nos ocupa. Es bien conocido que el método de Elementos Finitos estándar de Galerkin a menudo da lugar a soluciones oscilatorias. Por este motivo, deben emplearse algoritmos especiales como pueden ser, entre otros, los denominados Streamline Upwind Petrov-Galerkin, Galerkin Mínimos Cuadrados, Taylor-Galerkin o Galerkin basado en las características. Respecto de los dos primeros, cabe decir que se emplean fundamentalmente para obtener estados estacionarios, y que en problemas transitorios introducen demasiada difusión numérica. Respecto de los métodos de Taylor-Galerkin y de Galerkin-Características, cabe decir que, en el contexto del Método de los Elementos Finitos, debido a su precisión y sencillez, el algoritmo de dos pasos de Taylor-Galerkin desarrollado por Peraire [27] ha sido ampliamente utilizado para resolver las ecuaciones de onda en profundidades reducidas [34] y problemas de rotura de presas [28], si bien existen otras alternativas, como el procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características (CBG) que se detalla a continuación [41].

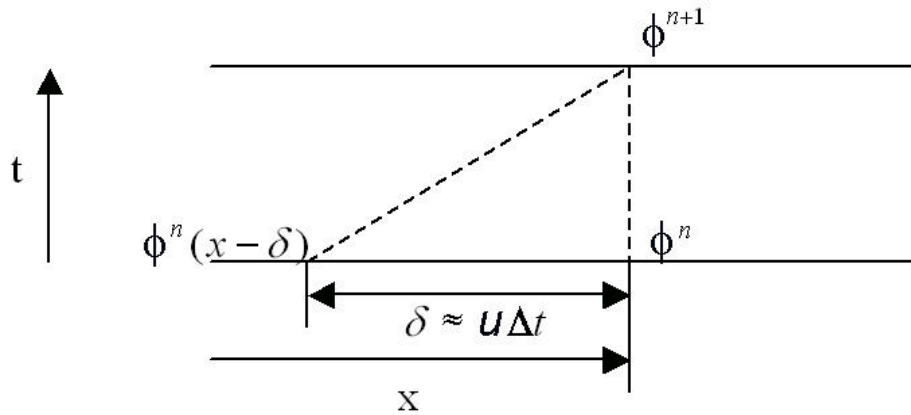


Figura 3-4: Procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características.

No obstante, hay que destacar que, en el caso de problemas no lineales, el método de Galerkin basado en las características presenta mayor difusión que el Taylor-Galerkin [34]. Además, como se mostrará más adelante, cuando son importantes los términos de fuente, se ha encontrado que los mejores resultados se obtienen aplicando el método de Taylor-Galerkin junto con el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración de los términos de fuente.

### 3.5.1. Procedimiento de Galerkin a lo largo de las líneas características

Son posibles muchas variaciones de este tipo de esquemas, sin embargo todas ellas son algo complejas de programar y caras en su utilización. Por esta razón se desarrolló una alternativa más sencilla en la que las dificultades se evitaron a expensas de introducir una estabilidad condicional. Este método se publicó por primera vez en 1984 [38], y está descrito en numerosas publicaciones [17] [18] [39] [40]. Su obtención incorpora un desarrollo de Taylor local que se esquematiza en la Figura 3-4.

Sea la ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

donde  $\phi$  es el vector de incógnitas,  $\mathbf{F}$  es el tensor de flujo convectivo,  $\mathbf{G}$  es el tensor de flujo difusivo y  $\mathbf{S}$  es el vector de fuentes.

Consideremos el caso monodimensional en el que  $F = F(\phi)$ ,  $u = \frac{\partial F}{\partial \phi}$ ,  $G = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $S = S(\phi, x)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S = 0 \quad (3.22)$$

El problema así definido es no lineal a no ser que  $u$  sea constante. Sin embargo, la ecuación no conservativa (3.22) admite la variación espacial de  $u$  y es bastante general.

Si consideramos un cambio en la variable independiente  $x$  tal que

$$dx' = dx - u dt \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que  $\phi = \phi(x', t)$  tenemos

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x \text{ const}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x' \text{ const}} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{x' \text{ const}} \quad (3.24)$$

de manera que podemos escribir la ecuación monodimensional (3.22) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) + S = 0 \quad (3.25)$$

Puede verse que, en la coordenada móvil  $x'$ , el término convectivo desaparece y los términos de difusión y de fuentes son cantidades promediadas a lo largo de las características. Así, la ecuación (3.25) es autoadjunta y la aproximación espacial de Galerkin es óptima.

La discretización temporal de la ecuación (3.25) a lo largo de la característica (Figura 3-4) es la siguiente

$$\frac{1}{\Delta t} (\phi^{n+1} - \phi^n|_{(x-\delta)}) \approx \theta \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - S \right]^{n+1} + (1 - \theta) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - S \right]^n |_{(x-\delta)} \quad (3.26)$$

donde  $(x - \delta)$  es el origen de las líneas características en la Figura 3-4 y  $\theta$  es igual a cero para la forma explícita y varía entre cero y la unidad para las formas semi y completamente implícita.

Utilizando un desarrollo en serie de Taylor, puede aproximarse  $\phi^n|_{(x-\delta)}$  hasta el segundo orden utilizando valores definidos en el tiempo  $n$ :

$$\phi^n|_{(x-\delta)} \approx \phi^n - \delta \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

y suponiendo  $\theta = 1/2$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) |_{(x-\delta)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{2} S |_{(x-\delta)} \approx \frac{S^n}{2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial S^n}{\partial x} \quad (3.29)$$

donde  $\delta$  es la distancia recorrida por la partícula en la dirección  $x$  (Figura 3-4) que es

$$\delta = \bar{u} \Delta t \quad (3.30)$$

siendo  $\bar{u}$  un valor promediado a lo largo de las características. Diferentes aproximaciones de  $\bar{u}$  dan lugar a diferentes términos de estabilización. Normalmente se utiliza la siguiente relación [44] [45]

$$\bar{u} = u^n - u^n \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} \quad (3.31)$$

Sustituyendo las expresiones (3.27)-(3.31) en (3.26), obtenemos

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n = & -\Delta t \left[ u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1/2} + S^{n+1/2} \right] + \\ & + \Delta t \left[ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial S}{\partial x} \right]^n \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \quad (3.33)$$

$$S^{n+1/2} = \frac{S^{n+1} + S^n}{2} \quad (3.34)$$

En la ecuación (3.32) se han despreciado los términos de orden superior.

Para el caso de problemas multidimensionales, la ecuación (3.32) puede escribirse en notación indicial, y aproximando los términos en  $n + 1/2$  por términos en  $n$  (para la forma explícita) tenemos

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n &= -\Delta t \left[ u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S \right]^n + \\ &+ \Delta t \left[ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) - \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\Delta t}{2} u_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \right]^n \end{aligned} \quad (3.35)$$

Otra aproximación para  $\bar{u}$  es [44]

$$\bar{u} = \frac{u^{n+1} + u^n|_{(x-\delta)}}{2} \quad (3.36)$$

Haciendo uso del desarrollo de Taylor

$$u^n|_{(x-\delta)} \approx u^n - u^n \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} \quad (3.37)$$

y, a partir de las ecuaciones (3.26)-(3.30) y las expresiones (3.36) y (3.37) con  $\theta = 1/2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\phi^{n+1} - \phi^n) &= -u^{n+1/2} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} u^{n+1/2} u^{n+1/2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} u^{n+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right) - S^n + \frac{\Delta t}{2} u^{n+1/2} \frac{\partial S^n}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde

$$u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \quad (3.39)$$

Podemos aproximar, al igual que se hizo anteriormente, los términos en  $n + 1/2$  por aquellos en  $n$ , de manera que obtengamos la forma explícita del esquema, esto es

$$\Delta \phi = \phi^{n+1} - \phi^n = -\Delta t \left[ u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \right]^n +$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2}u^n\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+S\right]^n \quad (3.40)$$

La generalización para el caso multidimensional es directa y puede escribirse en notación indicial de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \phi^{n+1} - \phi^n = -\Delta t \left[ u_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right) + S \right]^n + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ u_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right) + S \right]^n \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como puede observarse, la diferencia entre las ecuaciones (3.35) y (3.41) obtenidas a partir de dos aproximaciones distintas de  $\bar{u}$ , reside en los términos de estabilización. Sin embargo, la diferencia entre ellas es pequeña y cuando  $\mathbf{u}$  es constante ambas aproximaciones proporcionan idénticos términos de estabilización, consistentes en la difusión equilibradora  $\frac{u_i u_j \Delta t}{2}$ .

Como se ha comentado con anterioridad, la discretización espacial de Galerkin está justificada cuando se hace uso del procedimiento de Galerkin a lo largo de las características. Podemos aproximar entonces

$$\phi = \mathbf{N} \hat{\phi}$$

y después de premultiplicar por  $\mathbf{N}^T$  e integrar por partes se obtiene

$$\mathbf{M}\Delta\hat{\phi}^n = \mathbf{M}\left(\hat{\phi}^{n+1} - \hat{\phi}^n\right) = -\Delta t \left[ \left( \mathbf{C} \hat{\phi}^n + \mathbf{K} \hat{\phi}^n + \mathbf{f}^n \right) - \Delta t \left( \mathbf{K}_u \hat{\phi}^n + \mathbf{f}_s^n \right) \right] \quad (3.42)$$

donde

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{N} d \quad (3.43)$$

$$\mathbf{C} = \int \mathbf{N}^T u_i \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d \quad (3.44)$$

$$\mathbf{K} = \int \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} k \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d \quad (3.45)$$

$$\mathbf{f} = \int \mathbf{N}^T S d + \text{términos de contorno} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{K}_u = -\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \mathbf{N}^T) u_j \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d \quad (3.47)$$

$$\mathbf{f}_s = -\frac{1}{2} \int u_i \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} S d + \text{términos de contorno} \quad (3.48)$$

Hay que hacer notar que las derivadas de orden superior no se han incluido en la ecuación anterior.

Esta aproximación es válida para el transporte de cualquier magnitud escalar incluso si ésta es una componente de la velocidad  $u_i$ , como ocurre en el caso de las ecuaciones de conservación del momento.

**Estabilidad.** La forma explícita de la ecuación (3.42) es condicionalmente estable. Ignorando el efecto de las fuentes, su incremento de tiempo crítico (o valor máximo de  $\Delta t$  permisible) exige que

$$C \leq \sqrt{\frac{1}{Pe^2} + \alpha} - \frac{1}{Pe} \quad (3.49)$$

siendo  $\alpha = 1/3$  si se usa la matriz consistente de masas y  $\alpha = 1$  si se usa la representación diagonal de la matriz de masas.  $C = \frac{|\mathbf{u}|\Delta t}{h}$  es el número de Courant del elemento y  $Pe = \frac{|\mathbf{u}|h}{2k}$  el número de Peclet del elemento.

### 3.5.2. Algoritmo de Taylor-Galerkin de dos pasos

El algoritmo de dos pasos de Taylor-Galerkin ha sido ampliamente utilizado para resolver los problemas de convección dominante. Por ello, abundan las referencias describiendo este algoritmo y su implementación numérica [27] [41].

El procedimiento de dos pasos de Taylor-Galerkin para resolver la ecuación de conservación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{F} + \text{div } \mathbf{G} = \mathbf{S} \quad (3.50)$$

donde  $\phi$  es el vector de incógnitas,  $\mathbf{F}$  es el tensor de flujo convectivo,  $\mathbf{G}$  es el tensor de flujo difusivo y  $\mathbf{S}$  es el vector de fuentes, comienza con un desarrollo de segundo orden en el tiempo

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n \quad (3.51)$$

donde la derivada temporal de primer orden de las incógnitas puede calcularse utilizando la ecuación (3.50)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n = (\mathbf{S} - \text{div } \mathbf{F} - \text{div } \mathbf{G})^n \quad (3.52)$$

Para obtener la derivada temporal de segundo orden, el procedimiento de dos pasos de Taylor-Galerkin considera un paso intermedio entre  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , ignorando la contribución del flujo difusivo. El objetivo de este primer paso de tiempo es calcular la solución en el tiempo  $t^{n+1/2}$ . Este paso es seguido de un segundo en el que se calcula la solución en  $t^{n+1}$ .

De esta manera, en el primer paso se obtiene

$$\phi^{n+1/2} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{S} - \text{div } \mathbf{F})^n \quad (3.53)$$

que permite el cálculo de  $\mathbf{F}^{n+1/2}$  y  $\mathbf{S}^{n+1/2}$ .

Considerando ahora un desarrollo en serie de Taylor de los términos de flujo y fuentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{n+1/2} &= \mathbf{F}^n + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right)^n \frac{\Delta t}{2} \\ \mathbf{S}^{n+1/2} &= \mathbf{S}^n + \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right)^n \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

donde los valores de  $\mathbf{F}^{n+1/2}$  y  $\mathbf{S}^{n+1/2}$  se calculan haciendo uso de  $\phi^{n+1/2}$ , las derivadas temporales del flujo y las fuentes son

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right)^n &= \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{F}^{n+1/2} - \mathbf{F}^n) \\ \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right)^n &= \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{S}^{n+1/2} - \mathbf{S}^n) \end{aligned}$$

Incorporando estas expresiones en la derivada temporal de segundo orden

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S} - \text{div } \mathbf{F})^n$$

se obtiene

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n = \frac{2}{\Delta t} \left( \mathbf{S}^{n+1/2} - \mathbf{S}^n - \text{div} \left( \mathbf{F}^{n+1/2} - \mathbf{F}^n \right) \right) \quad (3.54)$$

Sustituyendo ahora las expresiones obtenidas para las derivadas temporales de primer, (3.52), y segundo orden, (3.54), en el desarrollo de Taylor (3.51) se tiene

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left( \mathbf{S}^{n+1/2} - \text{div } \mathbf{F}^{n+1/2} - \text{div } \mathbf{G}^n \right)$$

Esta ecuación se discretiza en el espacio usando el método estándar de Galerkin, de manera que podemos aproximar

$$\phi = \mathbf{N} \hat{\phi}$$

El sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \hat{\phi}^n = & \Delta t \left( \int \mathbf{N}^T \mathbf{S}^{n+1/2} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( \mathbf{F}^{n+1/2} \cdot \mathbf{n} \right) d\Gamma + \right. \\ & \left. + \int (\text{grad } \mathbf{N})^T \mathbf{F}^{n+1/2} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\mathbf{G}^n \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int (\text{grad } \mathbf{N})^T \mathbf{G}^n d \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

El sistema de ecuaciones (3.55) a resolver durante cada paso de tiempo es del tipo:

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{f}$$

y puede resolverse de una manera económica utilizando un esquema de Jacobi [26] [27]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{M}_L^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.56)$$

donde el superíndice es un contador de iteraciones y la matriz  $\mathbf{M}_L$  es la representación diagonal de la matriz de masas. Normalmente son necesarias menos de seis iteraciones para alcanzar la convergencia.

Para estudiar la estabilidad del esquema propuesto, se considera a continuación una ecuación lineal monodimensional de transporte escalar con términos de fuente lineales:

**Estabilidad.** Consideremos el problema unidimensional siguiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} = G\phi$$

donde  $A$  y  $G$  son constantes.

Los límites de estabilidad que deberían de imponerse al paso de tiempo, de acuerdo con [27], son los siguientes

$$\Delta t \leq f * \min \left( \alpha \frac{\Delta x}{A}; \frac{2}{G} \right) \quad (3.57)$$

siendo  $f$  un factor de seguridad con valores típicos entre 0.8-0.9,  $\alpha$  se toma como 1 cuando se hace uso de la representación diagonal de la matriz de masas y  $\alpha = 1/\sqrt{3}$  cuando se utiliza la matriz consistente de masas. La primera componente del límite del paso de tiempo es debido a la convección y el segundo al término de fuentes.

Este algoritmo y este límite del paso de tiempo funcionan bien en problemas donde la importancia del término fuente es pequeña comparada con la del de convección, como ocurre en problemas de ingeniería costera donde la fricción con el fondo y la pendiente son pequeñas. Sin embargo, esto no es cierto cuando el término de fuente es importante, como en el caso de fuertes fricciones con el fondo o grandes pendientes.

### 3.5.3. Aplicación a un problema tipo

Para mostrar su efectividad a la hora de resolver leyes de conservación incluyendo una fuente, podemos aplicar el algoritmo de Taylor-Galerkin para resolver un problema tipo con solución analítica conocida [31] [32] [33]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} = G\phi \quad (3.58)$$

Esta ecuación representa la convección de la magnitud  $\phi$  por un campo de velocidades constante,

$A$ , con una fuente proporcional a la magnitud  $\phi$  a través de una constante,  $G$ .

Llevando a cabo el desarrollo de Taylor de segundo orden en el tiempo

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n \quad (3.59)$$

y haciendo uso de la relación (3.58), las derivadas temporales de primer y segundo orden son

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n &= G\phi^n - A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \\ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n &= G \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n - A \frac{\partial}{\partial x} \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n \right) = G \left( G\phi^n - A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \right) - A \frac{\partial}{\partial x} \left( G\phi^n - A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo dichas expresiones en la ecuación (3.59) y reagrupando, tenemos

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = G \left[ \left( 1 + \frac{\Delta t}{2} G \right) \phi^n - \Delta t A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \right] - \left[ A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n - \frac{\Delta t}{2} A^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n \right] \quad (3.60)$$

Hay dos términos distintos en el miembro derecho de esta ecuación: el primer término está relacionado con el término de fuente y el segundo corresponde a la solución del problema de convección, es decir, al problema homogéneo.

En el caso del método CBG [41] [43] [45], el esquema es

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = G \left[ \phi^n - \frac{\Delta t}{2} A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \right] - \left[ A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n - \frac{\Delta t}{2} A^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n \right] \quad (3.61)$$

La solución analítica de (3.58) es

$$\phi(x, t) = \phi_0(x - At) e^{Gt}$$

donde  $\phi_0(x)$  es el valor inicial de  $\phi$ . En este caso se tomará

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \leq 1 \\ 0, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Por tanto,  $\phi(x)$  es una función discontinua en  $x = 1$  para el instante inicial, moviéndose hacia la derecha con una velocidad  $A$ , mientras que es amplificada o atenuada, dependiendo de que  $G > 0$  ó

$G < 0$ , por el término de fuente.

Las ecuaciones (3.60) y (3.61) se discretizan usando elementos lineales de longitud  $\Delta x = 0.1$  y se utiliza la matriz de masas diagonalizada en el miembro izquierdo. La velocidad,  $A$ , es 1.0.

Para asegurar la estabilidad, se toma como paso de tiempo el dado en [27]

$$\Delta t \leq f * \min\left(\frac{\Delta x}{A}; \frac{2}{G}\right)$$

donde  $f$  es un factor de seguridad con un valor típico de 0.8-0.9. En este caso se toma  $f = 1.0$ .

La importancia del término de fuente se cuantifica por medio de un número fuente definido como:

$$Sr = \frac{G \Delta x}{A}$$

La Figura 3-5 presenta la comparación de la solución analítica en el instante  $t = 2.16$  s con aquellas obtenidas con los algoritmos de Taylor-Galerkin (3.60), TG, y el de las Características de Galerkin, CBG, (3.61) para distintos números fuente. Se observa que:

- Para los números de fuente menores, el acuerdo entre ambas soluciones y la solución analítica es adecuado, si bien se observa algo de difusión en el frente.
- A medida que aumenta la importancia del término de fuente, la eficacia del algoritmo CBG disminuye rápidamente. La solución no tiene oscilaciones probablemente debido al amortiguamiento observado en este esquema.
- Los resultados obtenidos con el algoritmo de Taylor-Galerkin son altamente oscilatorios cuando se aumenta el número de fuente a pesar de haberse utilizado el  $\Delta t$  óptimo.

Por lo tanto, incluso para este problema tipo, el algoritmo de Taylor-Galerkin proporciona soluciones poco exactas cuando existe un término de fuente importante. Esto indica que, en esta situación, deberían utilizarse otros métodos de resolución.

#### 3.5.4. Problema de la integración de las fuentes: esquema de descomposición

Para el problema tipo, ecuación (3.58), la solución obtenida descomponiendo el problema en un problema homogéneo, de convección pura,

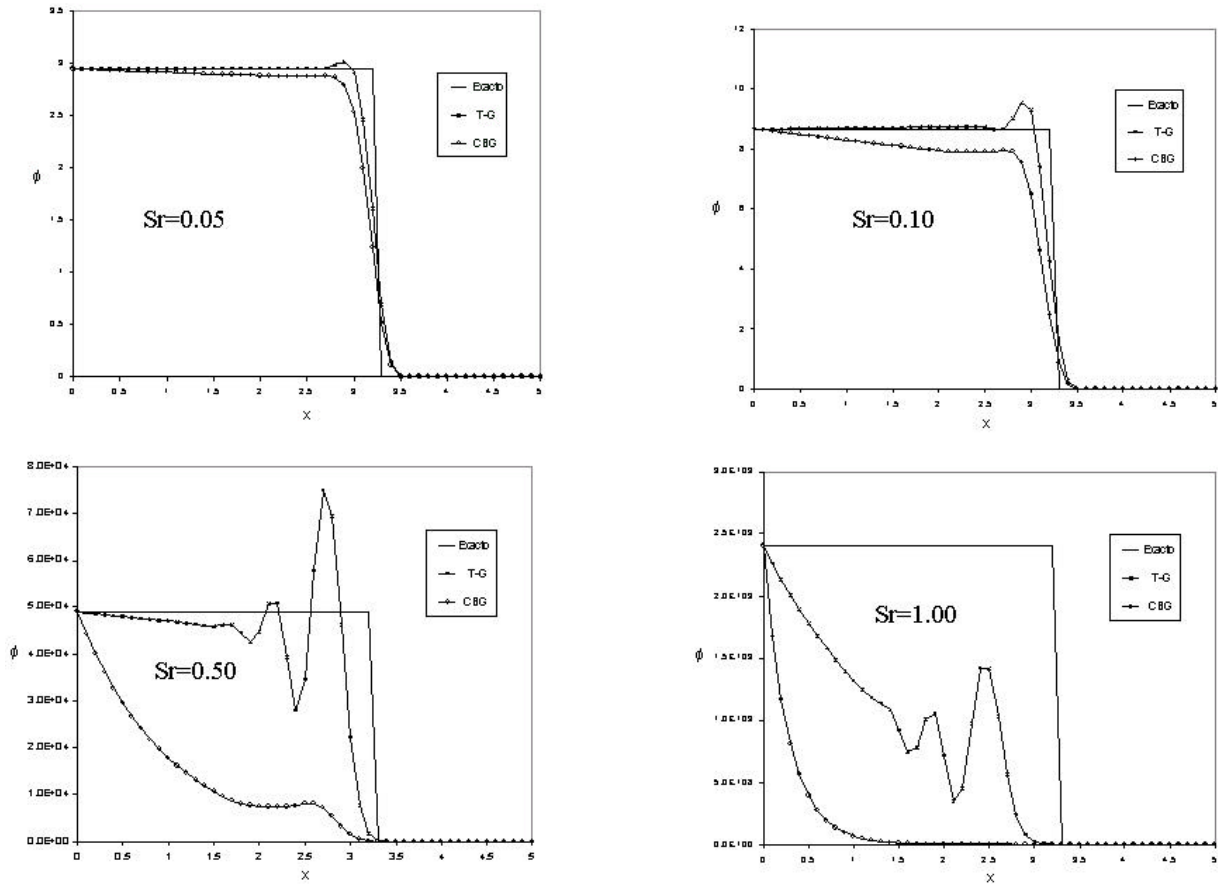


Figura 3-5: Comparación de la eficacia de los algoritmos de Taylor-Galerkin y CBG en la solución de un problema tipo con una fuente para diferentes números de fuente,  $Sr$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \\ \phi(x, t^n) &= \phi^n(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi^{adv}$$

y una ecuación diferencial ordinaria,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= G\phi \\ \phi(x, t^n) &= \phi^{adv} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi^{n+1}$$

es exacta [36] si los esquemas numéricos utilizados para resolver estos problemas son exactos.

Esta descomposición permite utilizar el mejor esquema posible para resolver cada tipo de problema: convección y la ecuación diferencial ordinaria. (Ver, por ejemplo, [35] para una discusión y comparación sobre esquemas hacia delante con fuentes).

Esta descomposición puede escribirse de manera compacta como

$$\phi^{n+1} = S(\Delta t) Adv(\Delta t) \phi^n \quad (3.62)$$

donde

- $Adv(\Delta t)$  es el operador de convección. En el caso de la aplicación del esquema de Taylor-Galerkin al problema tipo

$$Adv : \phi_i^{adv} = \phi_i^n - \Delta t \left( A \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n - \frac{\Delta t}{2} A^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n \right)$$

- $S(\Delta t)$  es el operador de fuente

$$S : \phi_i^{n+1} = \phi_i^{adv} + \Delta t G \phi_i^s$$

siendo  $\phi_i^s$  un valor en el que el vector del término de fuentes es evaluado. Existen dos opciones obvias para la elección de  $\phi_i^s$ :  $\phi_i^s = \phi_i^n$  y  $\phi_i^s = \phi_i^{adv}$ . No obstante, puede demostrarse [35], que la mejor opción es la segunda y por tanto

$$S : \phi_i^{n+1} = \phi_i^{adv} + \Delta t G \phi_i^{adv}$$

Esta descomposición es de primer orden en el tiempo.

Un esquema de segundo orden es [35]

$$\phi^{n+1} = S\left(\frac{\Delta t}{2}\right) Adv(\Delta t) S\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \phi^n \quad (3.63)$$

La efectividad de la descomposición se verifica haciendo uso del problema tipo (3.58), considerando algoritmos de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden para la solución de la ecuación diferencial ordinaria.

Considerando una descomposición de primer orden, ecuación (3.62), la discretización en el tiempo resulta en

$$\phi^{n+1} = \left[ \phi^n - \Delta t \left( A \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big| ^n - \frac{\Delta t}{2} A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big| ^n \right) \right] \left( 1 + \Delta t G + \frac{1}{2} \Delta t^2 G^2 \right) \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} = & \left[ \phi^n - \Delta t \left( A \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big| ^n - \frac{\Delta t}{2} A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big| ^n \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left( 1 + \Delta t G + \frac{1}{2} \Delta t^2 G^2 + \frac{1}{6} \Delta t^3 G^3 + \frac{1}{24} \Delta t^4 G^4 \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

para los esquemas de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden respectivamente.

Del análisis de estabilidad del algoritmo de Runge-Kutta, las limitaciones debidas a la integración del término de fuente son [11]

$$\Delta t < \frac{2}{G} \text{ para el Runge-Kutta de segundo orden}$$

y

$$\Delta t < \frac{2\sqrt{2}}{G} \text{ para el Runge-Kutta de cuarto orden}$$

Estas restricciones debidas a la fuente, deberían añadirse a la condición de convección para calcular el paso de tiempo permitido. Típicamente, la condición debida a la convección es más restrictiva y la solución de la ecuación diferencial ordinaria no añade ninguna restricción adicional. Sin embargo, para valores altos de la fuente, es decir, valores grandes de  $G$ , el paso de tiempo está limitado por esta última.

Por otra parte, Zhang y Tabarrok [37] han desarrollado un algoritmo de descomposición de segundo orden, basado en los algoritmos de Lax-Wendroff, para resolver ecuaciones hiperbólicas con términos de fuente. Los resultados que proporciona este esquema en la solución del problema tipo se comparará con aquellos dados por el algoritmo de descomposición haciendo uso del método de Runge-Kutta.

La aplicación del algoritmo de Zhang al problema tipo resulta en,

$$\phi^{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta t G \right)^{-1} \left[ \phi^n - \Delta t \left( A \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big| ^n - \frac{\Delta t}{2} A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big| ^n \right) \right] \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t G \right) \quad (3.66)$$

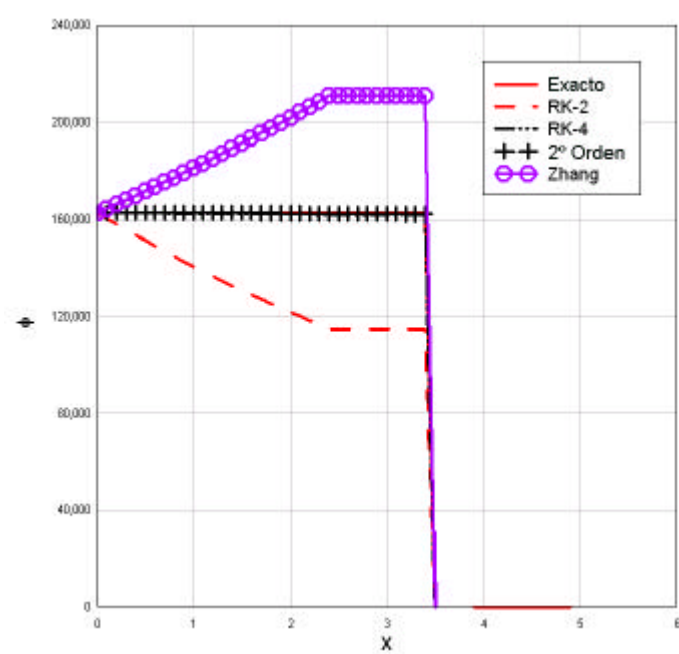


Figura 3-6: Solución del problema tipo con el método de descomposición.  $Sr = 0.5$ .

y para el análisis de estabilidad, el paso de tiempo debería cumplir la siguiente restricción debido al término de fuentes [37]

$$1 - \frac{1}{2}\Delta t G > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{2}{G} \text{ para el método de Zhang}$$

La Figura 3-6 presenta los resultados obtenidos aplicando los esquemas descritos correspondientes a las condiciones iniciales dadas en la sección anterior. Además, esta figura también muestra los resultados obtenidos utilizando una discretización de segundo orden de la ecuación diferencial, ecuación (3.63), junto con el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver la ecuación diferencial ordinaria.

La comparación de estos resultados con aquellos obtenidos usando los algoritmos clásicos de Taylor-Galerkin y CBG, Figura 3-5, indica una importante mejora en la precisión de los resultados cuando se utiliza el esquema de descomposición y método de resolución apropiado para la ecuación diferencial ordinaria.

La Figura 3-7 muestra los resultados para un valor del número fuente de  $Sr = 1.0$ . Claramente, la

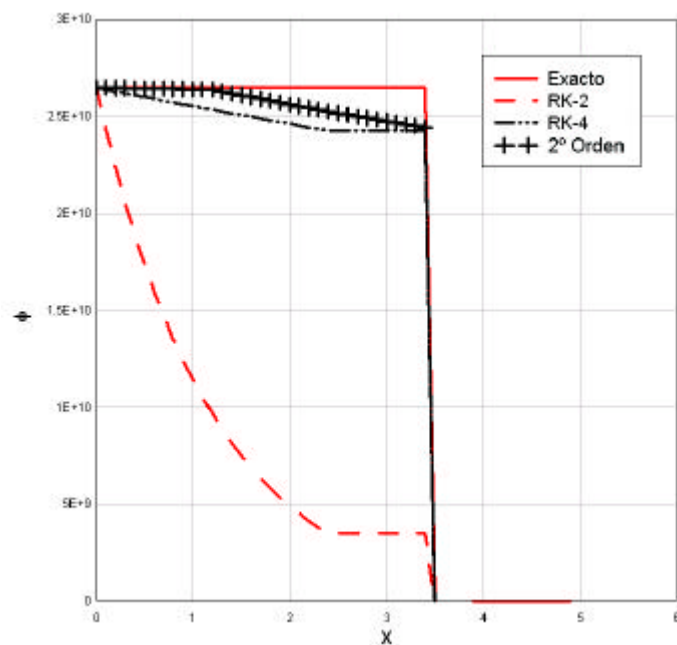


Figura 3-7: Solución del problema tipo para un número de fuente  $Sr = 1$ , utilizando el algoritmo de descomposición con el método de Runge-Kutta.

discretización de segundo orden en el tiempo del problema tipo junto con un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria proporciona una mayor precisión. Además, la tendencia a sobreestimar el valor de la incógnita por la aproximación de Zhang observada en la Figura 3-6 aumenta (Figura 3-8). Para mantener la precisión, el esquema de descomposición de Zhang requiere un paso de tiempo mucho menor:  $\Delta t = 0.01$ , frente a  $\Delta t = 0.1$  utilizado en los esquemas de descomposición con el método de Runge-Kutta, presentando además el inconveniente de algo de difusión en el frente.

Por tanto, los resultados del esquema de descomposición con el método de Runge-Kutta son mucho más precisos incluso en el caso de números de fuente altos, sin presentar oscilaciones. Como era de esperar, el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden resulta ser el de mayor precisión. Merece la pena también observar que los valores calculados considerando discretizaciones de primer y segundo orden en el tiempo, ecuaciones (3.62) y (3.63), son bastante similares. Sin embargo, para valores muy grandes del número fuente, los resultados de la discretización de segundo orden, ecuación (3.63), son

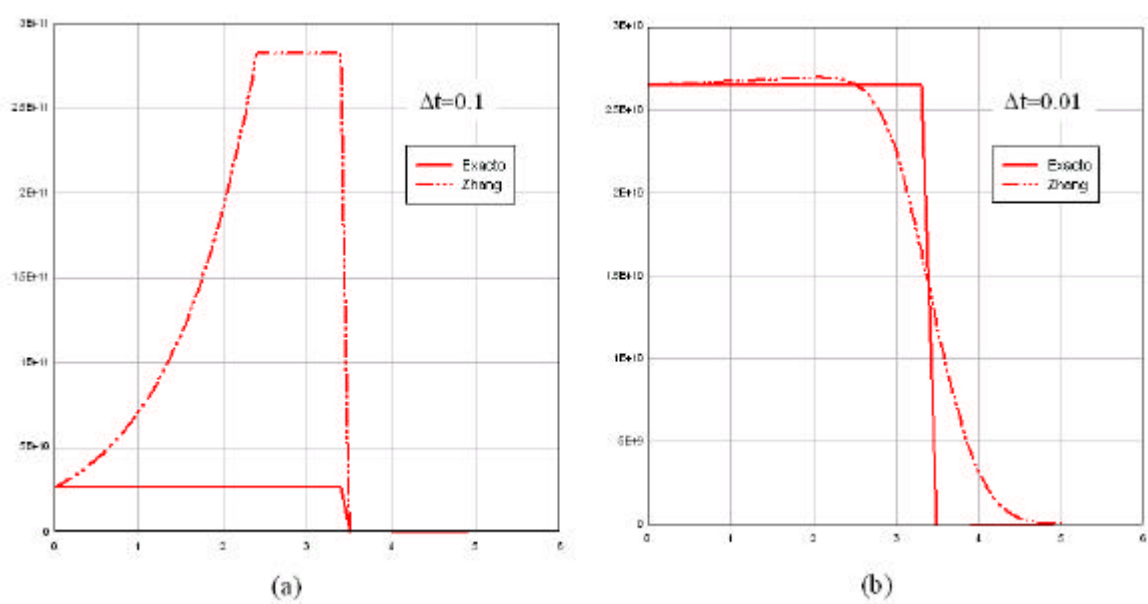


Figura 3-8: Solución calculada utilizando el esquema de descomposición de Zhang para una fuente  $Sr = 1.0$ , usando (a)  $\Delta t = 0.1$  y (b)  $\Delta t = 0.01$ .

más precisos.

Por todo ello, el método seguido en esta tesis para resolver las ecuaciones integradas en profundidad considera una discretización de las ecuaciones diferenciales de segundo orden en el tiempo, haciendo uso del algoritmo de Taylor-Galerkin de dos pasos para los términos de convección y difusión y un Runge-Kutta de cuarto orden para evaluar la contribución de las fuentes.

## 3.6. Validación

### 3.6.1. El problema de Riemann

Existen un número limitado de problemas relacionados con la rotura de presas con solución analítica conocida. Entre ellos, la solución del problema de Riemann es fundamental para comprender las características básicas de la propagación de inundaciones usando modelos integrados en profundidad y es el caso básico para comprobar la precisión y robustez de cualquier método numérico que trate de resolver leyes de conservación. La solución analítica del problema de Riemann, considerando condi-

ciones secas y mojadas en el fondo y lechos horizontales e inclinados pueden encontrarse, por ejemplo, en la referencia [35].

En esta sección, se compara la solución analítica de este problema, considerando un lecho inclinado y condiciones tanto secas como mojadas, con la solución numérica. Esta solución numérica se calcula usando una discretización de segundo orden en el tiempo del sistema de ecuaciones diferenciales, el método de dos pasos de Taylor-Galerkin para el término de convección y un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para evaluar la contribución de las fuentes.

El dominio espacial es un canal de 500 m de largo con una discontinuidad en la profundidad del agua localizada en la mitad del canal. La pendiente del fondo es del 200%,  $\alpha \approx 63^\circ$ , y se considera sin fricción. Este canal se discretiza utilizando 202 nodos agrupados en 200 elementos triangulares lineales.

### **Problema de la rotura de una presa sobre un lecho seco e inclinado**

La mitad izquierda del canal, 250 m, se considera inicialmente inundado y la mitad derecha, inicialmente seca. La profundidad del agua en el área inundada es de 70 m. La profundidad se prescribe igual a 70 m en el extremo izquierdo del canal.

La condición inicial para la velocidad se fija igual a 0 para todo el dominio.

La Figura 3-9 muestra el perfil de la profundidad del agua,  $h$ , y del flujo,  $hu$ , calculados para diferentes instantes de tiempo utilizando el método propuesto y la correspondiente solución analítica. El acuerdo entre ambas soluciones es bastante bueno. La Figura 3-10 compara los perfiles calculados de profundidad y velocidad con la solución analítica. En relación con los perfiles de velocidad, el acuerdo es bastante bueno: la velocidad calculada aumenta con el tiempo debido al efecto de la inclinación del fondo y su magnitud coincide con el valor analítico. Sin embargo, debe observarse que la velocidad calculada del frente es ligeramente inferior que la analítica. Dado que esto no se observa en el caso del lecho mojado que se presenta a continuación, se atribuye este hecho al algoritmo sencillo utilizado en el cálculo para diferenciar las zonas secas de las mojadas así como a la malla poco fina utilizada.

Este punto es común a la mayoría de los esquemas que tratan con condiciones de lecho seco y una más amplia discusión sobre ello puede encontrarse en [35].

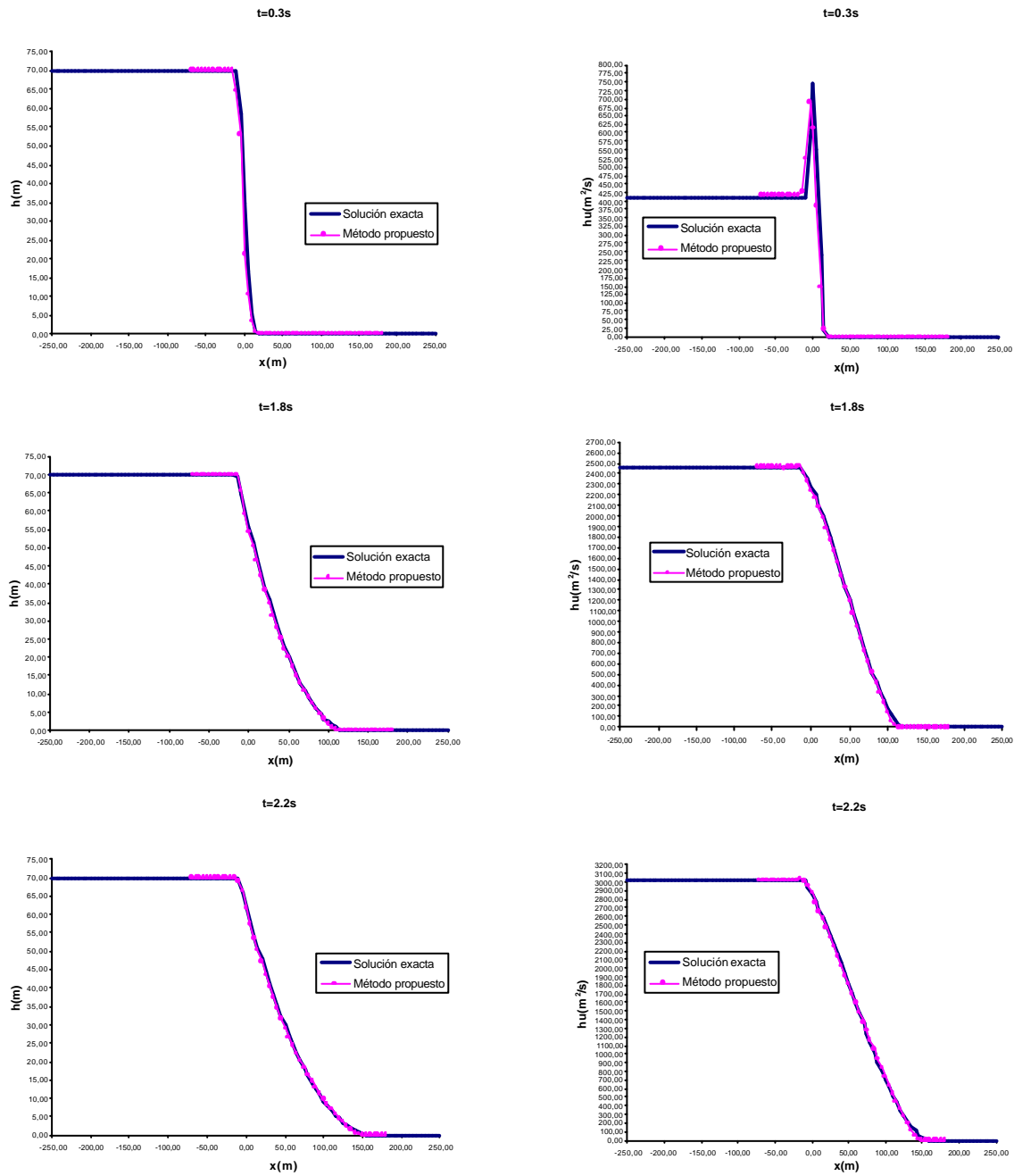


Figura 3-9: Evolución de los perfiles de  $h$  y  $hu$  y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado  $63^\circ$  y se encuentra inicialmente seco aguas abajo del lugar de rotura.

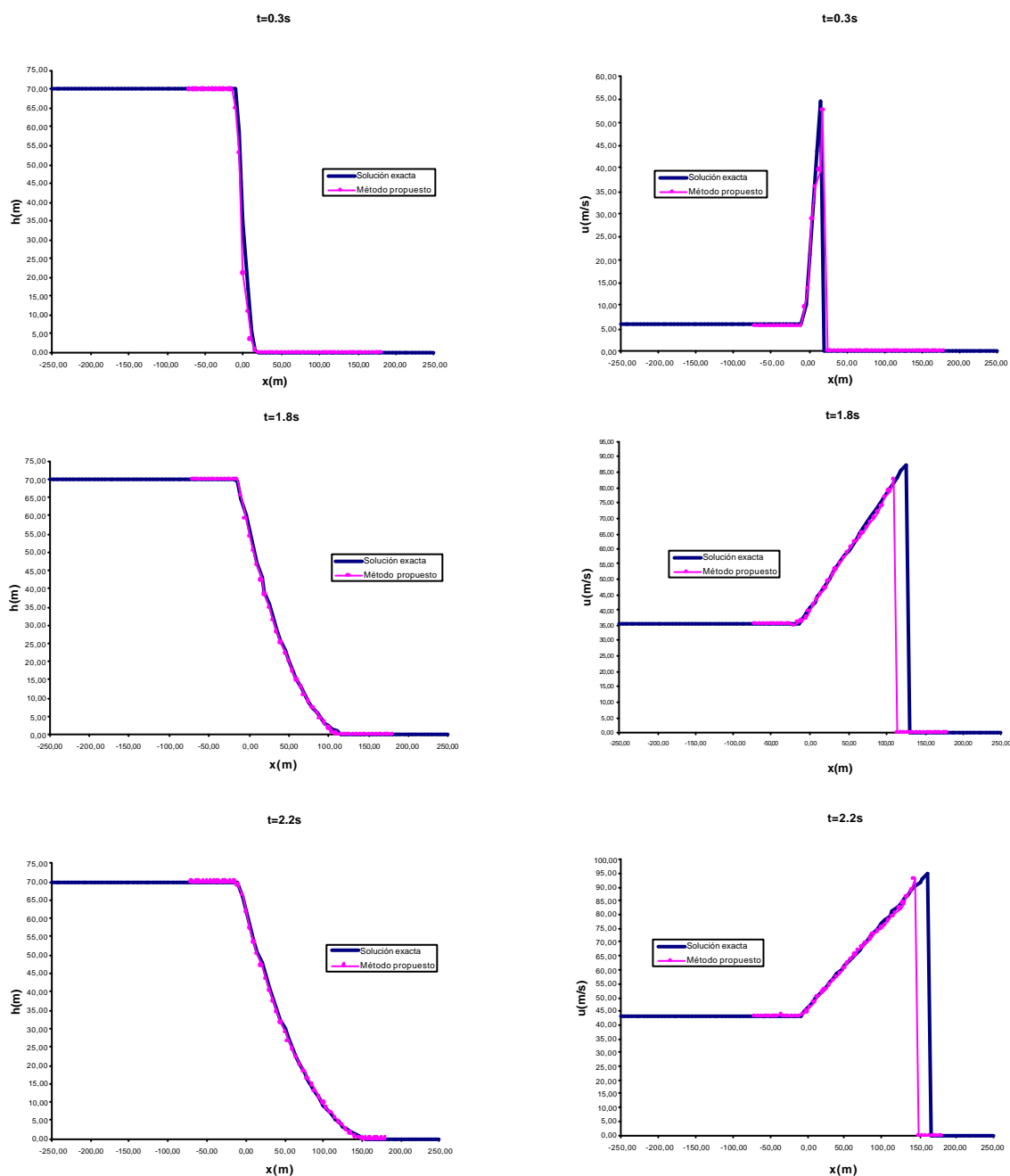


Figura 3-10: Evolución de los perfiles de profundidad y velocidad y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado  $63^\circ$  y se encuentra inicialmente seco aguas abajo del lugar de rotura.

### Problema de la rotura de una presa sobre un lecho mojado e inclinado

En este caso, la mitad derecha del canal, considerada seca en el ejemplo anterior, se considera cubierta por una capa de agua de 7 m de profundidad. Al igual que en el caso precedente, la profundidad se prescribe igual a 70 m en el extremo izquierdo del canal.

La velocidad inicial es 0 en todo el dominio.

La Figura 3-11 muestra los perfiles de profundidad,  $h$ , y flujo,  $hu$ , para la solución analítica y la numérica en tres instantes diferentes de tiempo, mientras que en la Figura 3-12 se observan los resultados correspondientes a la profundidad y la velocidad.

Como era de esperar, existe una onda de choque que se propaga aguas abajo y una rarefacción en la dirección contraria. Como puede observarse en las figuras anteriormente mencionadas, la solución numérica es capaz de reproducir la forma y la velocidad de la onda de choque. Los perfiles de la profundidad del agua se encuentran libres de oscilaciones y únicamente en la solución de la velocidad hay un pico hacia abajo justo en el frente de propagación. Como ocurre en el caso del fondo seco, la velocidad del agua aumenta con el tiempo, incluso en las regiones en que el agua se encontraba originalmente en reposo, debido a la inclinación del fondo, dando lugar, de nuevo, a velocidades mayores que aquellas correspondientes al lecho horizontal.

Por lo tanto, de esta comparación entre el método propuesto y la solución analítica bajo las condiciones de lecho seco y mojado, puede concluirse que el método propuesto es capaz de proporcionar soluciones exactas incluso en casos con grandes pendientes.

### 3.7. Aplicaciones hidrodinámicas

El principal objetivo de este capítulo consiste en el desarrollo de herramientas de simulación que puedan ser aplicadas a problemas de Hidráulica Ambiental. Por ello, se presentan aquí aplicaciones de los modelos integrados en profundidad antes descritos a casos concretos, como son la rotura de balsas mineras, así como la propagación de olas en embalses.

Los tres primeros ejemplos aquí presentados: Flujo deslizante en Aberfan, balsa minera en el este de Tejas y rotura de residuos mineros: Cougar 7 en Greenhills, corresponden a casos reales encontrados en la literatura, coincidiendo los resultados del modelo con los observados *in situ* una vez producidos los deslizamientos. Asimismo, el último ejemplo presentado en esta sección, propagación de olas en

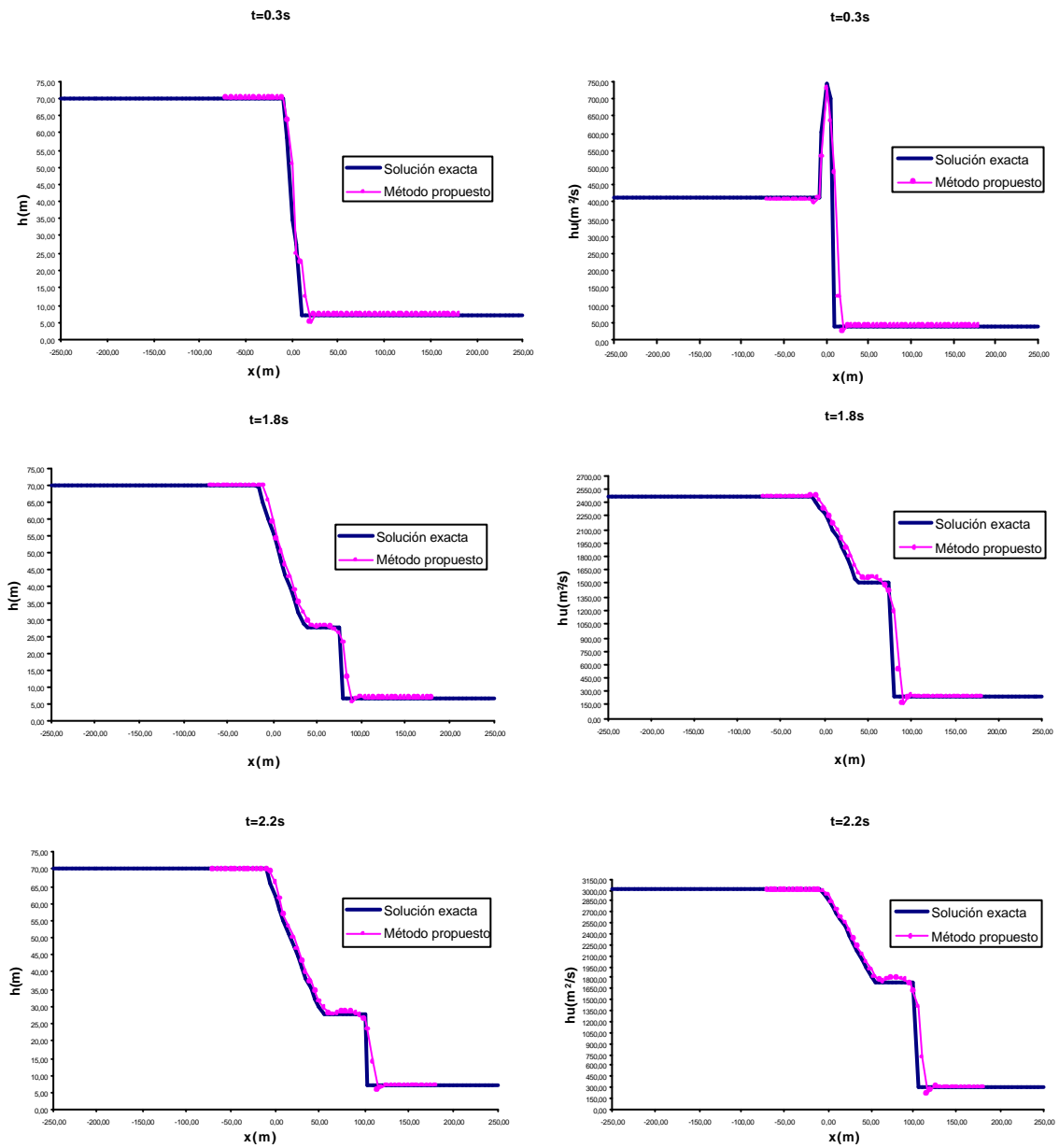


Figura 3-11: Evolución de las incógnitas calculadas  $h$  y  $hu$  y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado  $63^\circ$  y la profundidad inicial aguas abajo es de 7 m.

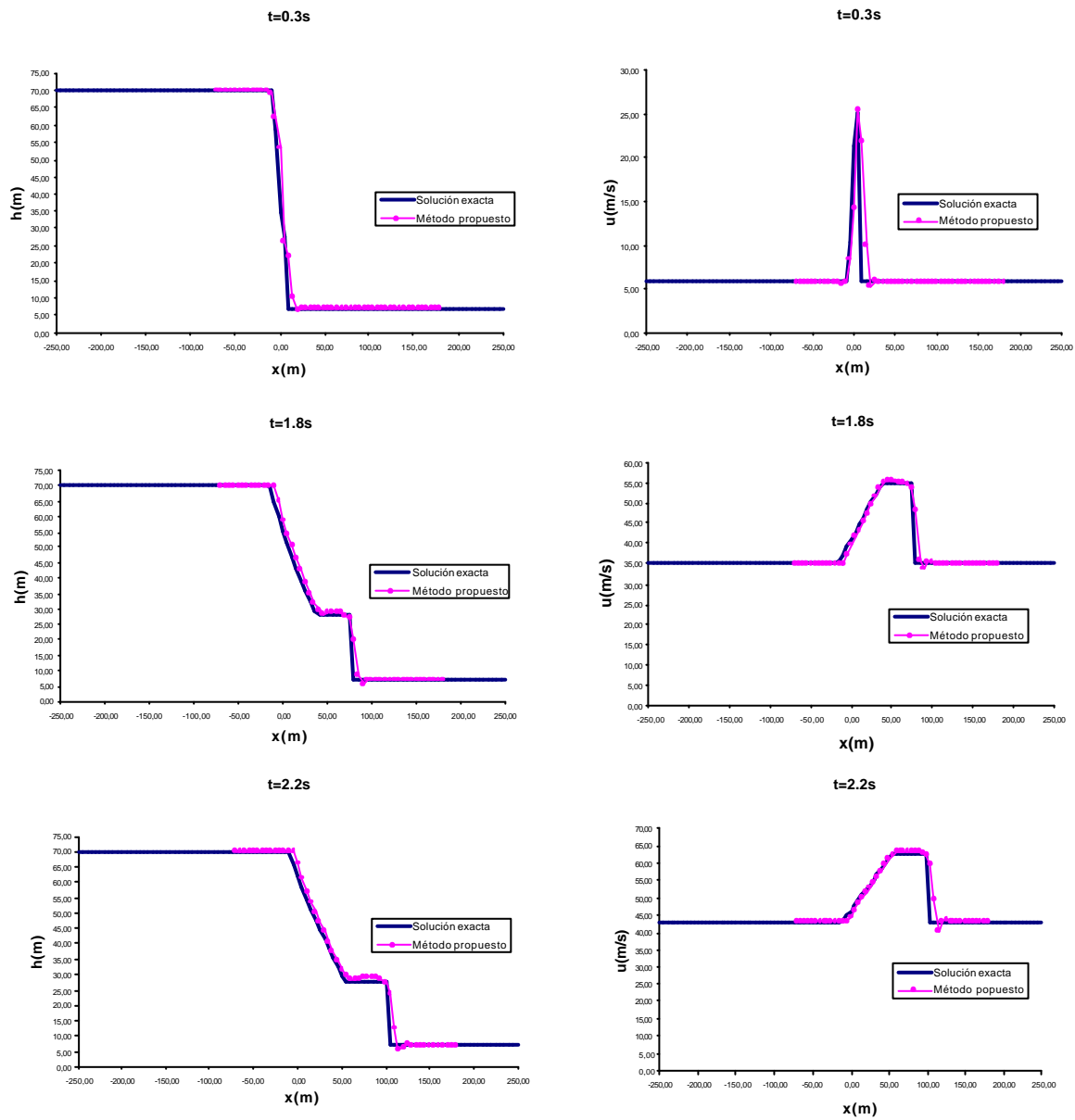


Figura 3-12: Evolución de los perfiles de profundidad y velocidad y la solución analítica para el problema de Riemann. El fondo está inclinado  $63^\circ$  y la profundidad inicial aguas abajo es de 7 m.

embalses, propone una nueva metodología para el estudio de este tipo de problemas.

De esta manera, no sólo se propone aquí un método de análisis de los fenómenos observados, sino que estos modelos proporcionan una poderosa herramienta para la predicción de estos desastres y para el diseño de medidas de mitigación de los mismos.

### 3.7.1. Flujo deslizando de Aberfan

En Octubre de 1966 se produjo la rotura de un terraplén de residuos de una mina de carbón en Aberfan (Gales). Como consecuencia de ésta, se desencadenó un flujo deslizando que se propagó colinas abajo y llegó hasta el pueblo de Aberfan, causando 144 víctimas. El material tenía poca densidad, y había sido vertido directamente sin ninguna compactación adicional. En el momento de la rotura, tenía una altura de 67 m y estaba situado en una ladera con una pendiente media de  $12^\circ$ . El mecanismo de rotura y las propiedades geotécnicas han sido descritas por Bishop y colaboradores [2] y resumidas en las referencias [3] y [13], donde el lector interesado puede encontrar una descripción más detallada. Aquí únicamente se recordarán algunos aspectos de interés en el análisis.

En primer lugar, cabe destacar que la rotura fue debida a presiones intersticiales en el pie del talud, que probablemente estaba saturado, mientras que las zonas superiores del mismo no lo estaban. Bishop comenta que "... el trabajo de rescate se complicó debido a la presencia de agua que fluía, después del deslizamiento, de las areniscas situadas en el pie del deslizamiento rotacional ...". Una vez producida la rotura, el flujo deslizando se propagó ladera abajo, dividiéndose en dos lenguas. De éstas, fue la mayor, situada al sur de la primera, la que alcanzó Aberfan, mientras que la lengua norte se detuvo antes. La longitud alcanzada fue de 600 m, aunque se cree que en el caso de no haber existido obstáculos en su camino se hubiera propagado 750 m. Según testigos presenciales, las velocidades de propagación fueron del orden de 4.5 a 9 m/s.

Una de las principales dificultades que existen al modelizar este flujo deslizando es el papel que jugaron en él las presiones intersticiales. Los materiales movilizados estaban parcialmente saturados, con grados de saturación crecientes con la profundidad. Tuvo lugar una importante interacción entre el suelo y el fluido intersticial, por lo cual esta interacción debe tenerse en cuenta en el análisis de la propagación. Sin embargo, por las dificultades mencionadas antes, los modelos integrados en profundidad empleados hasta ahora para reproducir este deslizamiento han recurrido en la mayoría de

los casos a modelos de Bingham. Así, por ejemplo, Jeyapalan et al. [14] y Jin y Fread [15], emplearon un modelo de Bingham con una tensión de fluencia  $\tau_y = 4794$  Pa,  $\mu = 958$  Pa s y  $\rho = 1760$  Kg/m<sup>3</sup>, obteniéndose resultados que reproducen bien las observaciones.

Sin embargo, a pesar de la bondad de estos ajustes, hay que señalar que se trataba de materiales parcialmente saturados, en los que el rozamiento interno era sin duda importante. Por este motivo, se ha empleado en este trabajo un fluido friccional con un mecanismo de disipación de presiones intersticiales. Respecto de la topografía, se ha tomado un perfil de terreno tomado de Jeyapalan et al. [14].

Como propiedades de los materiales, se ha tomado una densidad de 1740 Kg/m<sup>3</sup>, y un ángulo de rozamiento residual de 36°. El tiempo de consolidación  $T_v$  ha sido tomado del conjunto de parámetros propuestos por Hutchinson [13], suponiendo un espesor de la zona saturada inferior  $h_s = 0.1$  m, y un coeficiente de consolidación  $c_v = 6.4 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s. Suponiendo  $T_v = \frac{4h_s^2}{\pi^2 c_v}$ , se llega a un valor de 64 s para el tiempo de consolidación, al que corresponde un valor de  $r_u^0$  de 0.78.

Los resultados obtenidos en el cálculo pueden verse en la Figura 3-13, donde se da una serie de perfiles del flujo deslizante a lo largo del tiempo, para  $t = 0, 5, 10, 20$  y 60 s. Los resultados obtenidos coinciden bien con lo descritos en los trabajos antes mencionados (distancia máxima recorrida 600 m, tiempo de detención 40 s y velocidad media 15 m/s). En la Figura 3-14 se da la evolución de la posición del frente con el tiempo.

### 3.7.2. Balsa minera en el este de Tejas

Jeyapalan et al. [14] describen las consecuencias de la rotura de la balsa minera yesífera situada en Tejas, que tuvo lugar en 1966. La balsa tenía planta rectangular, y sus diques habían alcanzado una altura de 11 m cuando tuvo lugar la rotura. Esta ocurrió como consecuencia de las presiones intersticiales generadas en el pie del talud, y afectó a una longitud de 140 m de dique, extendiéndose 110 m hacia el interior. Los lodos se propagaron 300 m antes de detenerse, con una velocidad media estimada de 2.5 a 5 m/s.

En la Figura 3-15 se representa una sección de la balsa según un plano vertical perpendicular a la presa en el centro de la rotura.

Los residuos fueron clasificados como *sedimentos no plásticos*. La densidad de las partículas era de

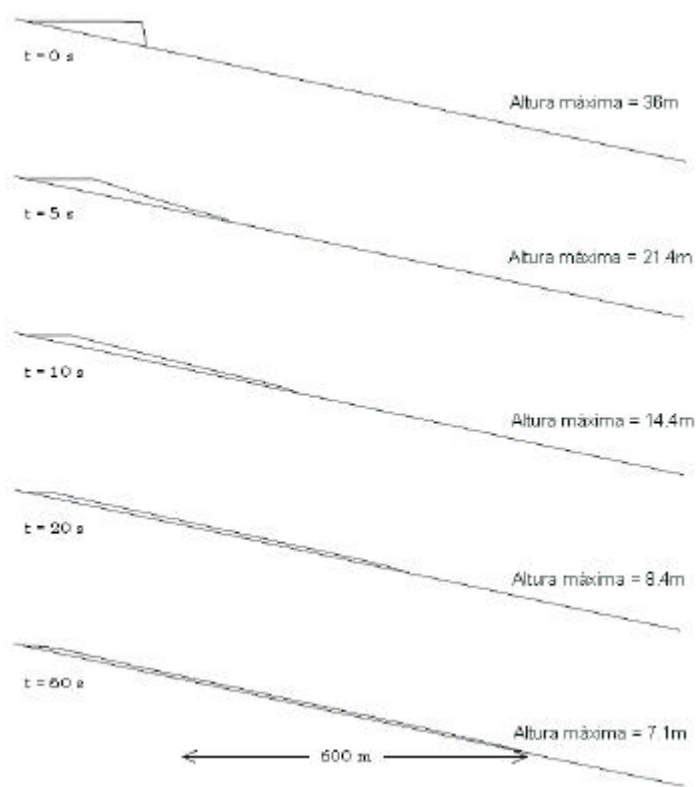


Figura 3-13: Flujo deslizante de Aberfan: evolución temporal del perfil del deslizamiento.

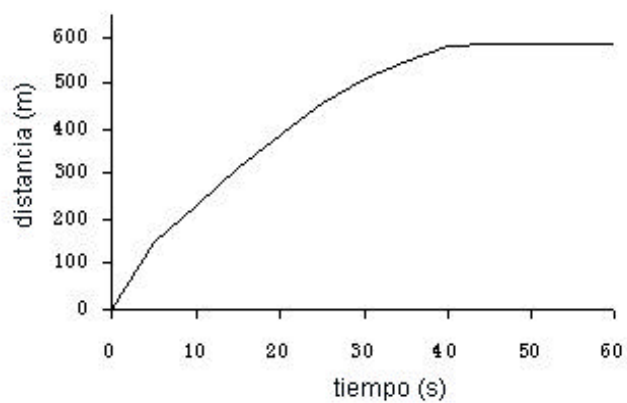


Figura 3-14: Flujo deslizante de Aberfan: posición del frente en función del tiempo.



Figura 3-15: Balsa minera en el este de Tejas: sección de la presa.

2450 Kg/m<sup>3</sup> y poseían un contenido medio de agua del 30 %. La tensión de fluencia fue determinada a partir de simple análisis de estabilidad del talud como  $\tau_y = 10^3$  Pa, y la viscosidad se tomó como  $\mu = 48$  Pa s. Finalmente, se supuso un valor para la densidad de los residuos de  $\rho = 1400$  Kg/m<sup>3</sup>.

La Figura 3-16 presenta la malla de elementos finitos utilizada en el cálculo. Dicha malla representa la presa de 350 m, habiéndose quitado los 140 metros correspondientes a la sección que rompió. Por tanto, el modelo supone que el colapso de la presa tiene lugar de manera instantánea. El plano sobre el que fluyen los residuos ha sido limitado por razones computacionales, imponiéndose condiciones absorbentes en los contornos artificiales.

La Figura 3-17 muestra las isóneas de profundidad para los instantes  $t = 0, 30, 60, 90$  y  $120$  s. La escala vertical se ha multiplicado por un factor de diez para describir mejor las propiedades del flujo. Es interesante observar la formación de un resalto en el instante  $t = 30$  s que se propaga hacia atrás. Este resalto puede apreciarse también en la Figura 3-18, que representa los perfiles de superficie libre a lo largo del plano vertical que pasa por la línea central de la rotura. Dicho resalto se forma a medida que el material disminuye su velocidad en el frente debido a la fricción con el fondo y se detiene finalmente mientras que el material restante continua moviéndose en dirección contraria y se acumula hasta alcanzar el equilibrio.

La distancia de inundación calculada es de 310 m, similar al valor observado de 300 m. La detención del frente ocurre a los 105 s y a los 120 s la masa se congela para todos los efectos prácticos. Dichos valores están de nuevo en gran acuerdo con los valores observados: 60-120 s. Sin embargo, el flujo retrocedió hacia el embalse unos 110 m, mientras que en la simulación recorre una distancia mayor.

Para cuantificar el impacto de la ecuación constitutiva en los cálculos de inundación, el análisis ha sido repetido ignorando el efecto de las tensiones viscosas internas. Se han situado un cierto número de puntos de control a lo largo de la sección perpendicular a la rotura, a diferentes distancias de la presa, y se ha estudiado la evolución de la profundidad de los residuos.

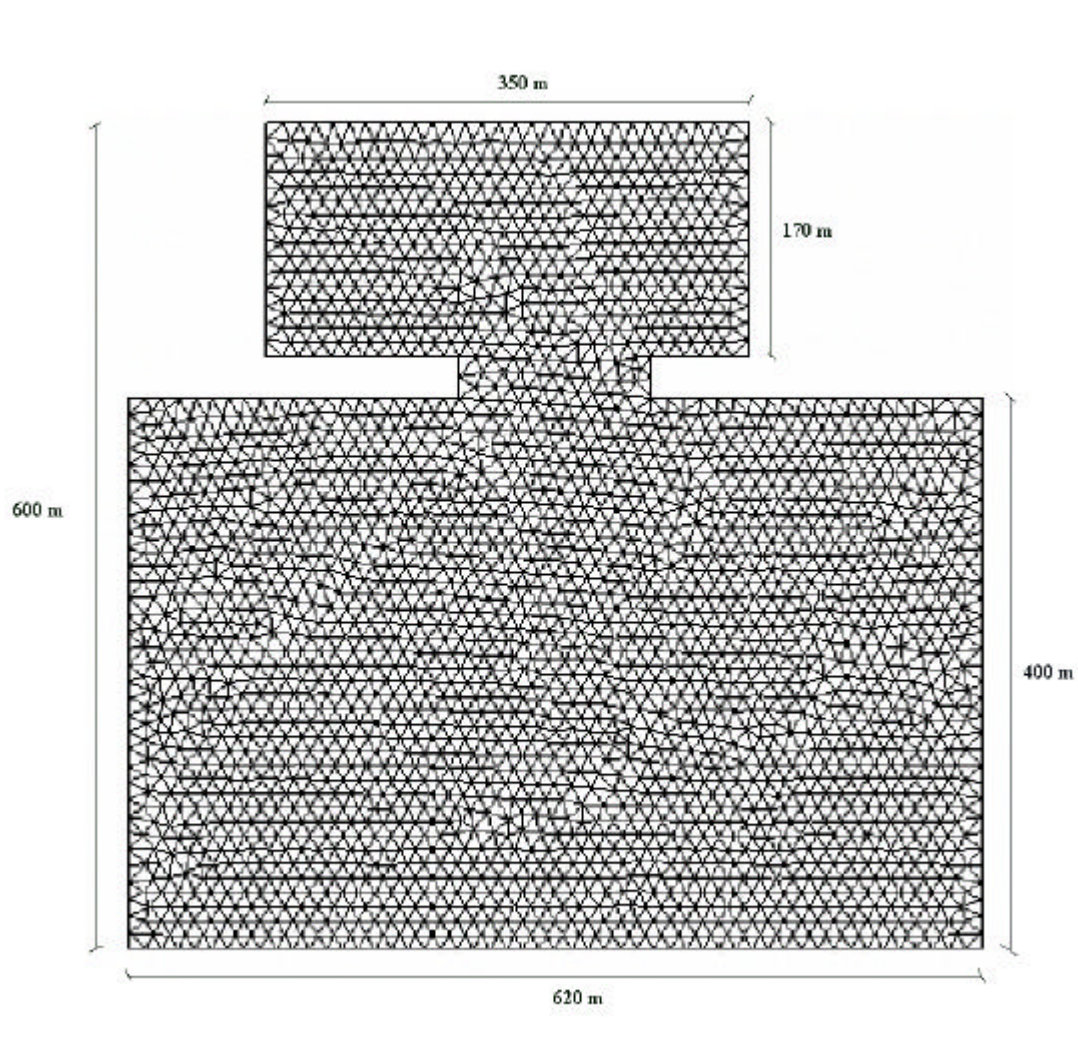


Figura 3-16: Balsa minera en el este de Tejas: malla de elementos finitos utilizada en el análisis del deslizamiento.

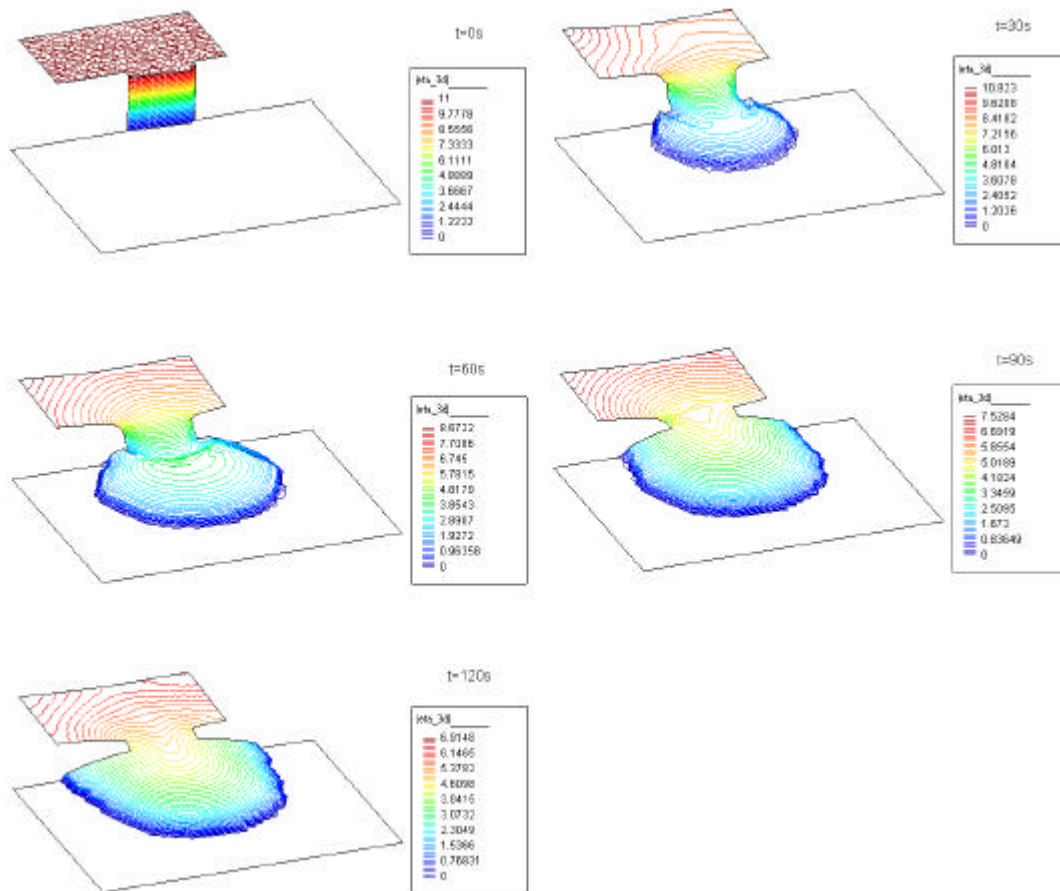


Figura 3-17: Balsa minera en el este de Tejas: isolíneas de profundidad en diferentes instantes después de la rotura.

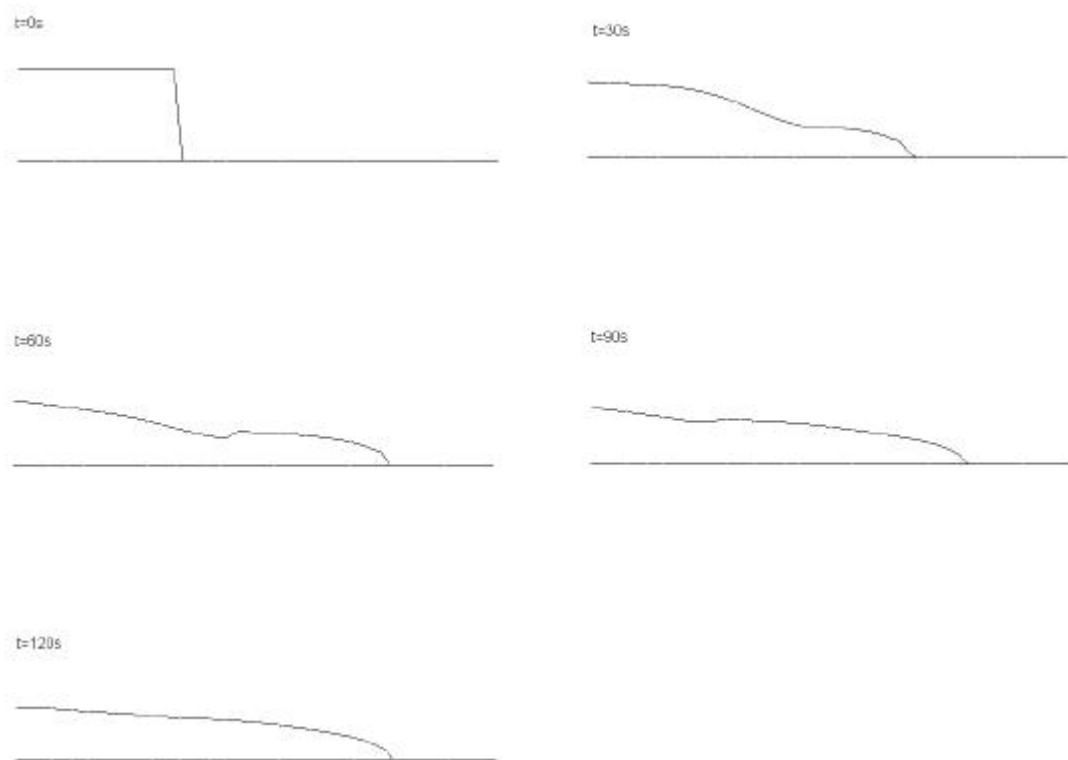


Figura 3-18: Balsa minera en el este de Tejas: secciones de la superficie libre en diferentes instantes en un plano vertical que pasa a través de la línea central de la zona de rotura.

Los resultados muestran que existe un pequeño impacto en el tiempo de llegada del frente para el punto de control situado a mayor distancia de la presa, donde el frente se detiene. La Figura 3-19 presenta la evolución de la profundidad de los residuos en este punto, localizado a 304 m de la presa junto con los resultados obtenidos para un punto situado a 250 m de la misma. Puede concluirse que la influencia de las tensiones viscosas en los resultados es bastante pequeña, y se encuentran dentro de las incertidumbres de este tipo de cálculos.

### 3.7.3. Rotura de residuos mineros: Cougar 7 en Greenhills

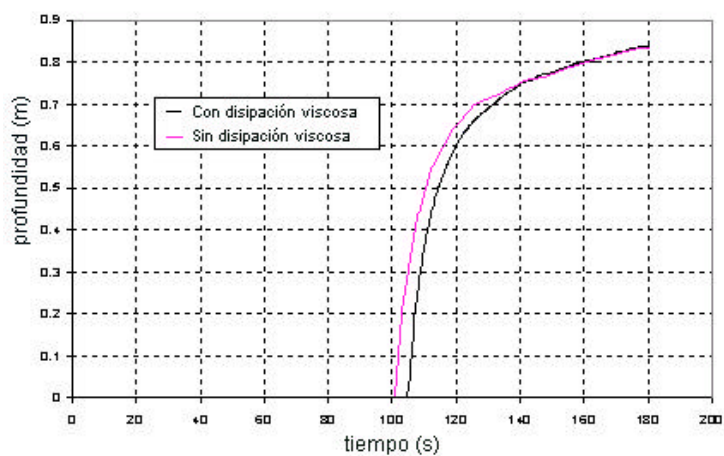
De entre un gran número de deslizamientos ocurridos debido a licuación en las presas de residuos mineros de las Montañas Rocosas, Dawson y colaboradores [6] han analizado en detalle tres casos interesantes. Por ello, se encuentra disponible información sobre las características de los deslizamientos, propiedades de los materiales involucrados, etc.

Se analiza aquí el caso de Fording Greenhills, donde en Mayo de 1992 tuvo lugar un deslizamiento en el lugar denominado Cougar 7. La masa consistía en aproximadamente  $200000 \text{ m}^3$ , que se deslizó a lo largo de 700 m antes de alcanzar el reposo.

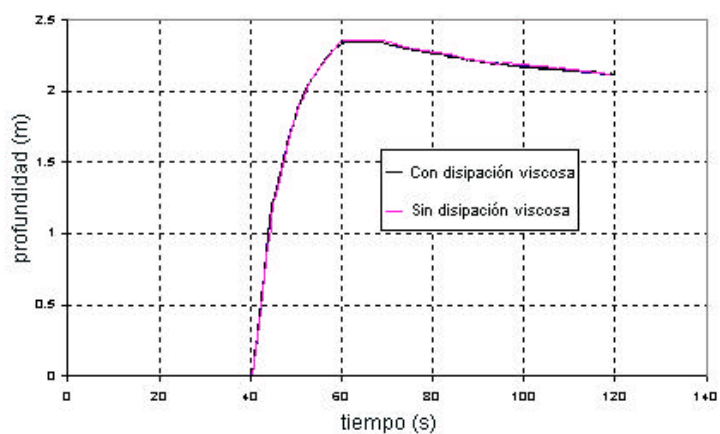
El material estaba compuesto fundamentalmente por grava arenosa, mientras que el de la base, bajo los residuos, y el de la zona del deslizamiento consistían en una capa de coluvión de arena y grava con una profundidad que variaba entre 0.3 m y 0.5 m. En contacto con la base se hallaron capas húmedas de grano fino, cerca de la cresta y en los residuos.

De acuerdo con el análisis *a posteriori* realizado por Dawson y colaboradores, dichas capas jugaron un papel fundamental en las fases tanto de iniciación como de propagación. El modelo propuesto por ellos está basado en la existencia de capas compuestas por materiales granulares de grava arenosa y baja permeabilidad situadas paralelamente a los residuos. El mecanismo desencadenante podría haber consistido en : (i) Una redistribución de las tensiones efectivas debido a cambios en la presión intersticial, y (ii) licuación de estas capas bajo condiciones cuasi-no-drenadas. El deslizamiento podría haber ocurrido sobre estas capas de material licuado.

En este trabajo, se ha basado el análisis de este deslizamiento en las propiedades geotécnicas obtenidas por Dawson y colaboradores [6], y se ha elegido una densidad de  $1900 \text{ Kg/m}^3$  y un ángulo efectivo de fricción de  $37^\circ$ . La masa movilizada se ha tomado de los datos dados en [6], y el tiempo de



(a) Punto situado a 304m de la presa



(b) Punto situado a 250m de la presa

Figura 3-19: Balsa minera en el este de Tejas: influencia de las tensiones viscosas. Evolución de la profundidad calculada en dos puntos de control considerando e ignorando las tensiones viscosas.

consolidación se ha elegido a partir de un retro-análisis igual a 68 s.

El modelo bidimensional de los residuos de Cougar 7 en Greenhills se da en la Figura 3-21. El modelo del terreno se ha obtenido a partir de los datos dados en [6] (ver Figura 3-20). Los resultados de la simulación aparecen en las Figuras 3-22, 3-23 y 3-24, donde puede observarse: (i) perspectivas de la extensión del deslizamiento, (ii) isolíneas de profundidad de los residuos y (iii) secciones a lo largo del plano vertical AA' (ver Figura 3-21).

Finalmente, para cuantificar la influencia de las tensiones viscosas en los resultados del cálculo, el análisis se ha repetido ignorando las tensiones viscosas. La Figura 3-21 muestra la posición de tres puntos de control seleccionados.

La Figura 3-25 presenta la evolución de las profundidades de los residuos calculadas en los tres puntos de control. Los resultados indican que existe un pequeño impacto en el tiempo de llegada de la masa que se propaga en el punto de control situado más lejos del sitio de la rotura, donde el frente se para. En lo concerniente a las profundidades, puede observarse que el valor cuando la masa se para es la misma considerando e ignorando las tensiones viscosas. Sin embargo, la evolución si se encuentra afectada por esta suposición.

#### 3.7.4. Propagación de olas en embalses

El objetivo de esta sección es el de realizar una simulación de la propagación de olas en un embalse producidas por el deslizamiento rápido de una ladera situada en uno de los márgenes. La onda generada por la condición inicial se propaga a lo largo del embalse tanto en la dirección norte como en la dirección sur, hacia la presa. El objeto fundamental de este estudio consiste pues en la presentación de las sobreelevaciones de agua, en particular en la presa, producidas por la propagación de la onda generada en caso de desprendimiento del material de la ladera.

En este estudio se ha considerado que la masa de ladera que cae en el interior del embalse se encuentra situada a unos 4000 m aproximadamente al norte de la presa, teniendo una anchura de 400 m.

La geometría y topografía del embalse pueden verse en la Figura 3-26. La malla de elementos finitos utilizada en este caso se muestra en la Figura 3-27. Dicha malla consta de 4065 elementos triangulares lineales y 2325 nodos.

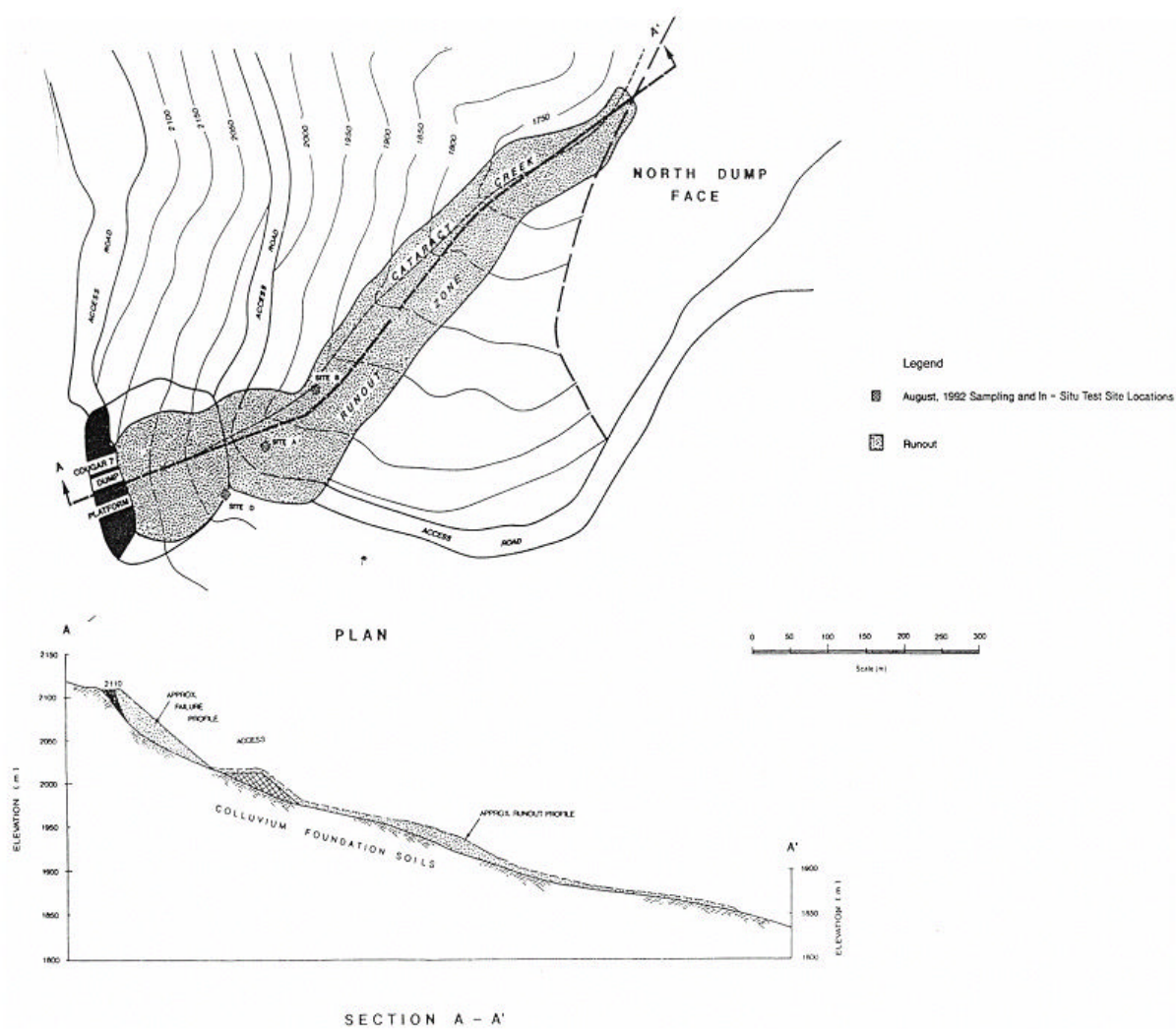


Figura 3-20: Cougar 7 en Greenhills: características del terreno dado por Dawson et al. (1998).

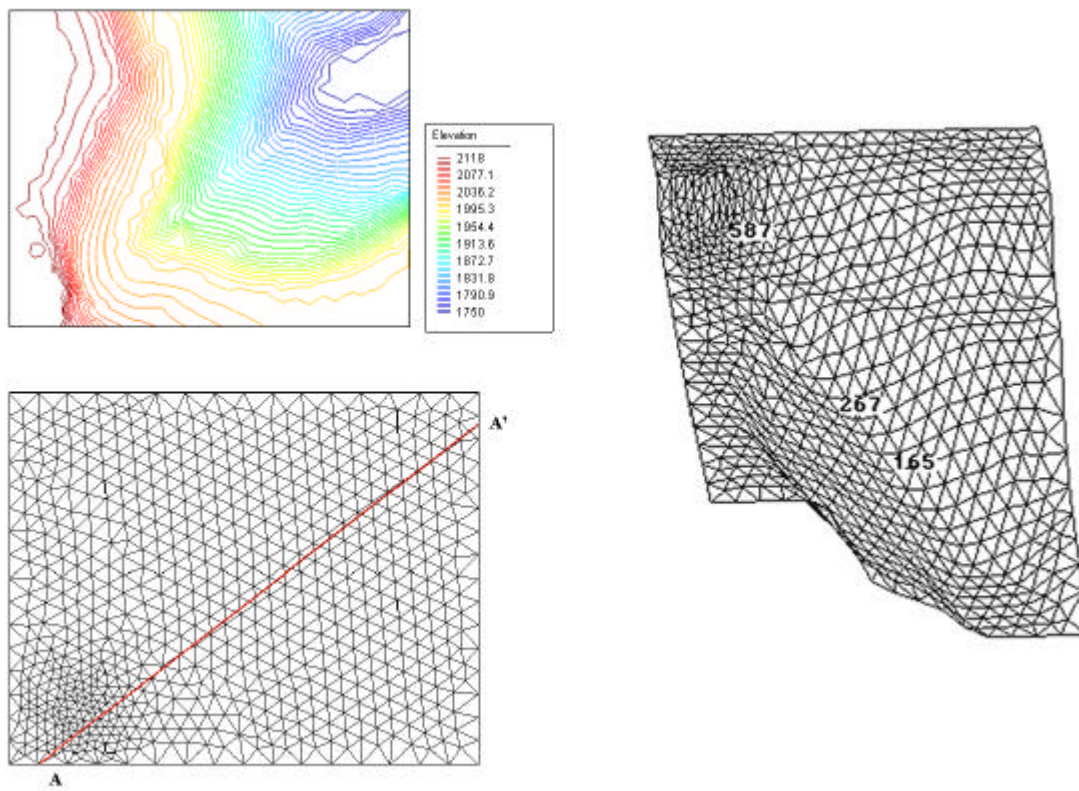


Figura 3-21: Cougar 7 en Greenhills: modelo del terreno y puntos de control.

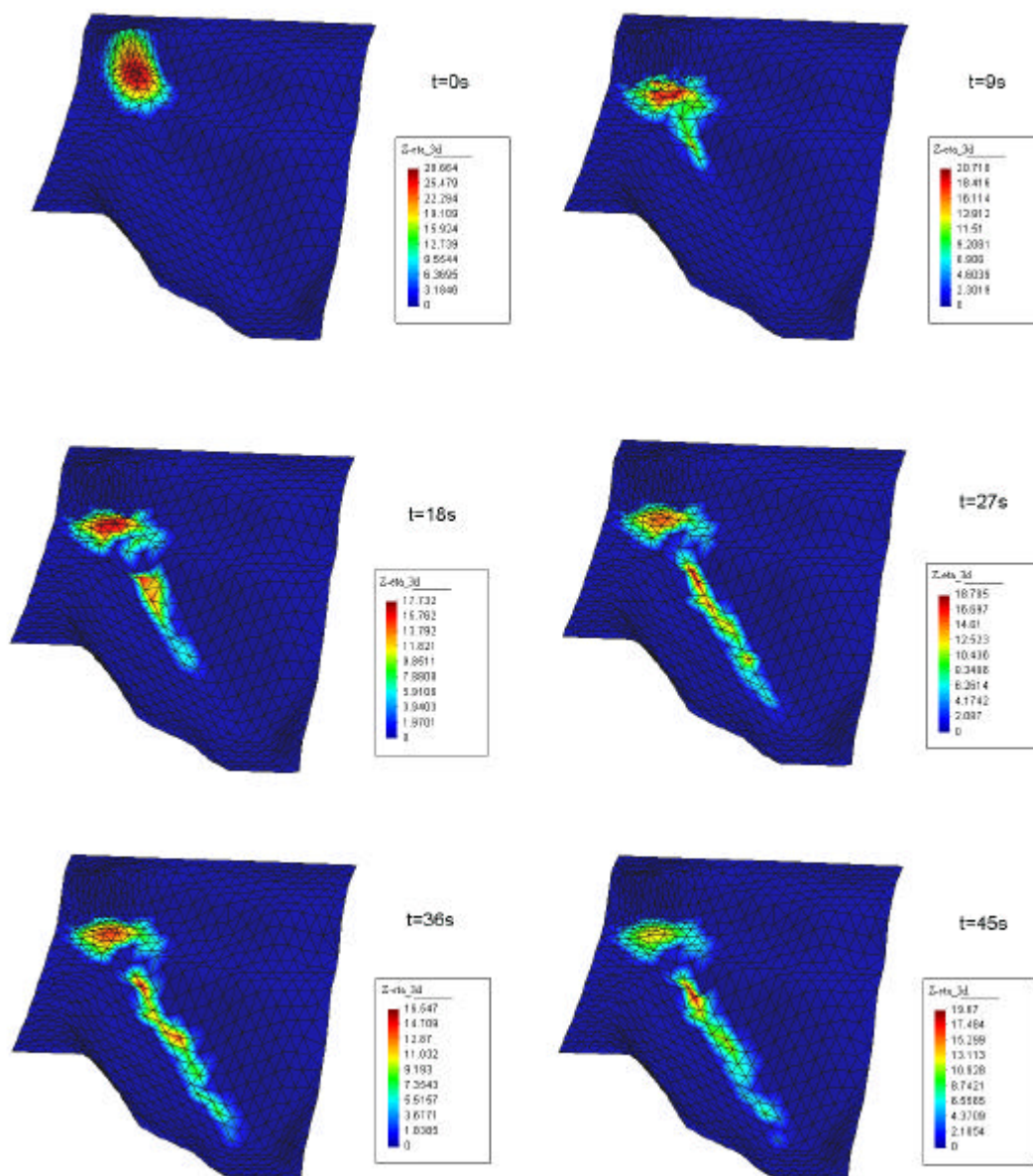


Figura 3-22: Cougar 7 en Greenhills: perspectiva de la propagación del deslizamiento.

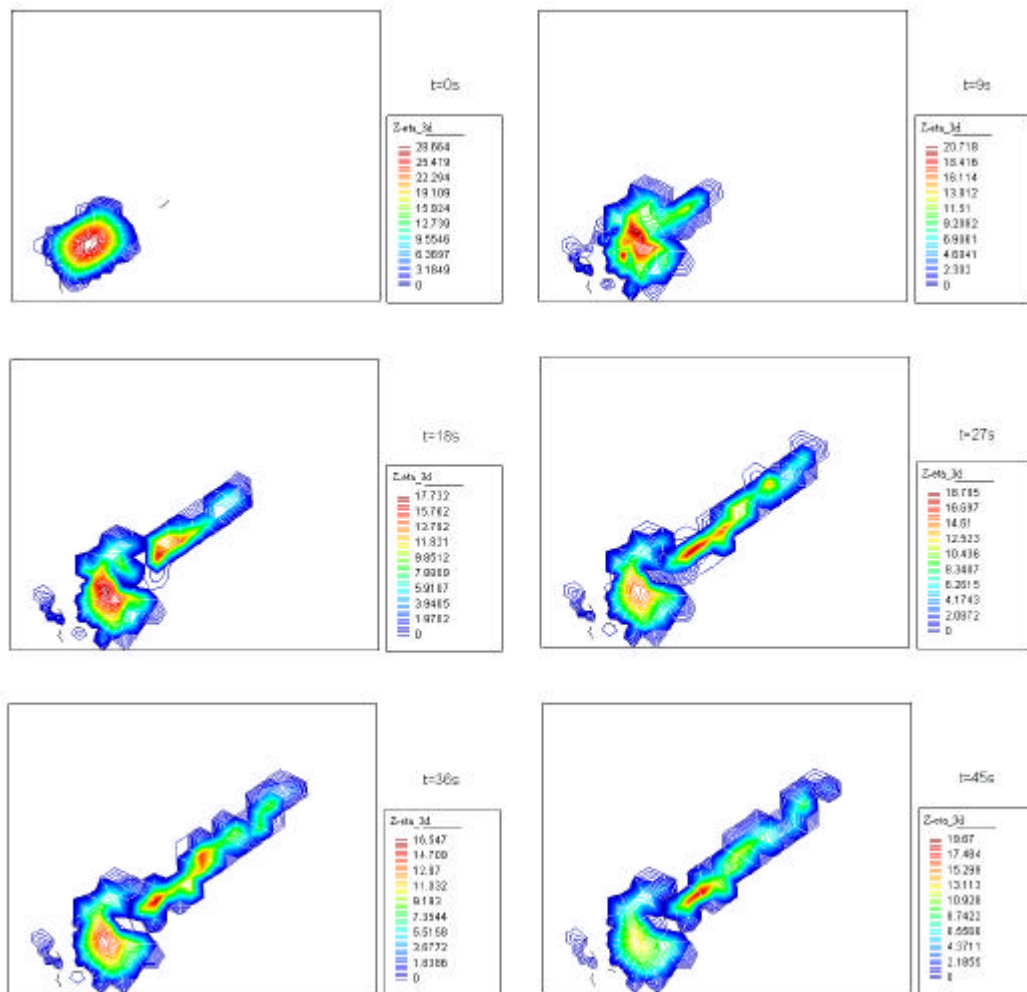


Figura 3-23: Cougar 7 en Greenhills: propagación del deslizamiento. Isolíneas de profundidad.

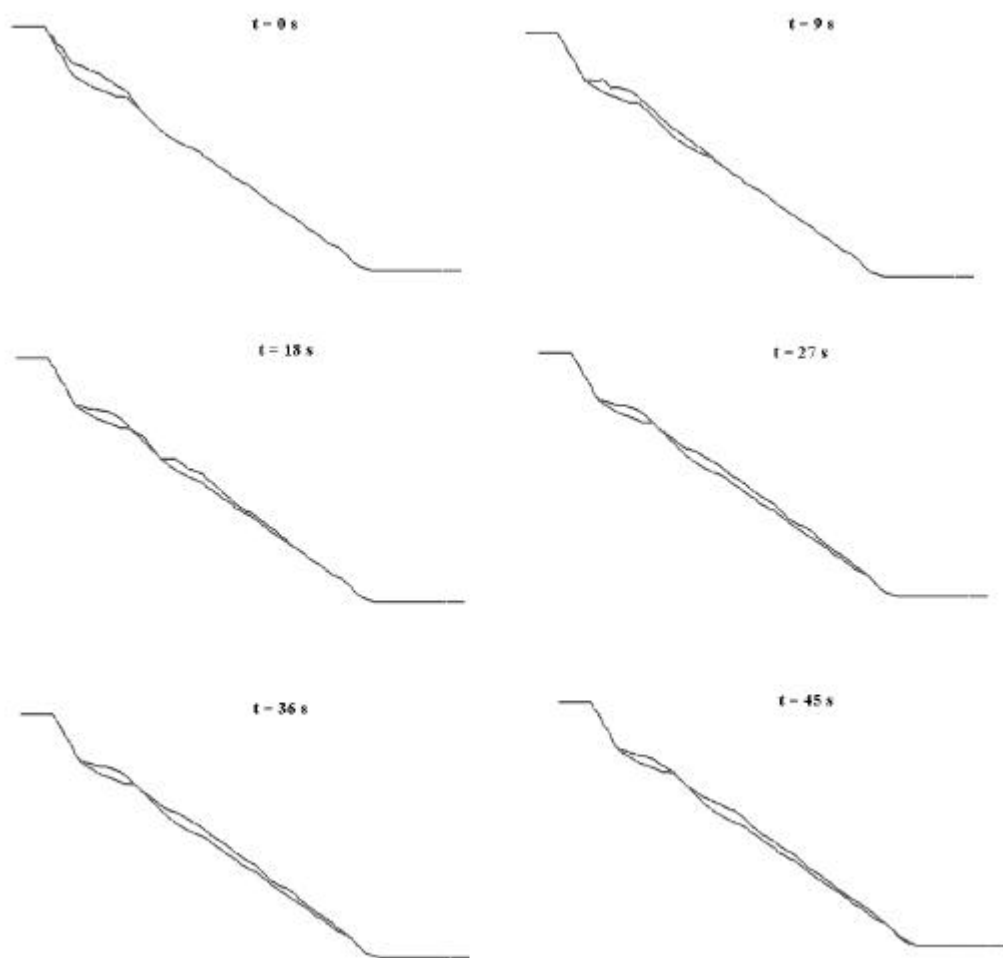


Figura 3-24: Cougar 7 en Greenhills: propagación del deslizamiento. Sección a lo largo de AA'.

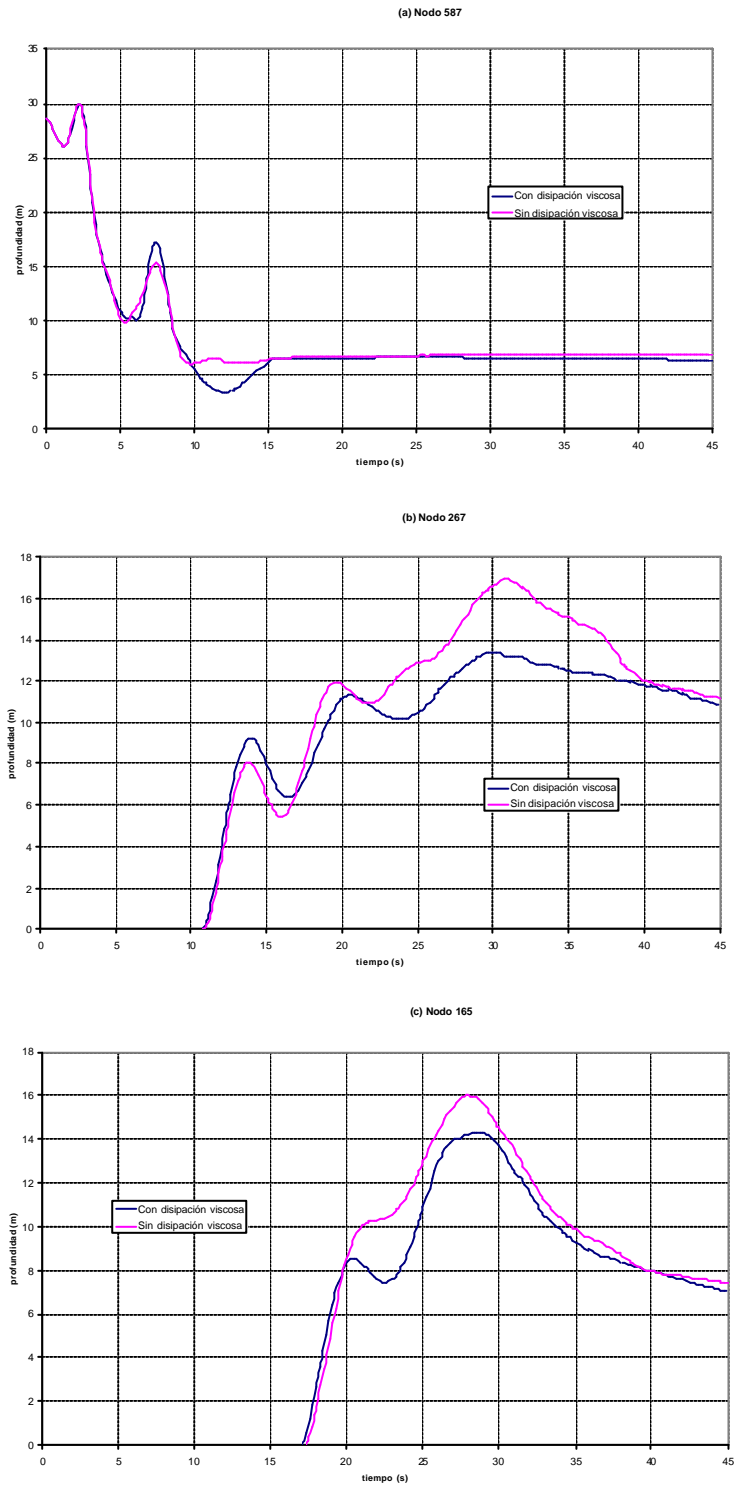


Figura 3-25: Cougar 7 en Greenhills: efecto de las tensiones viscosas. Evolución de la profundidad calculada en los tres puntos de control considerando e ignorando las tensiones viscosas.

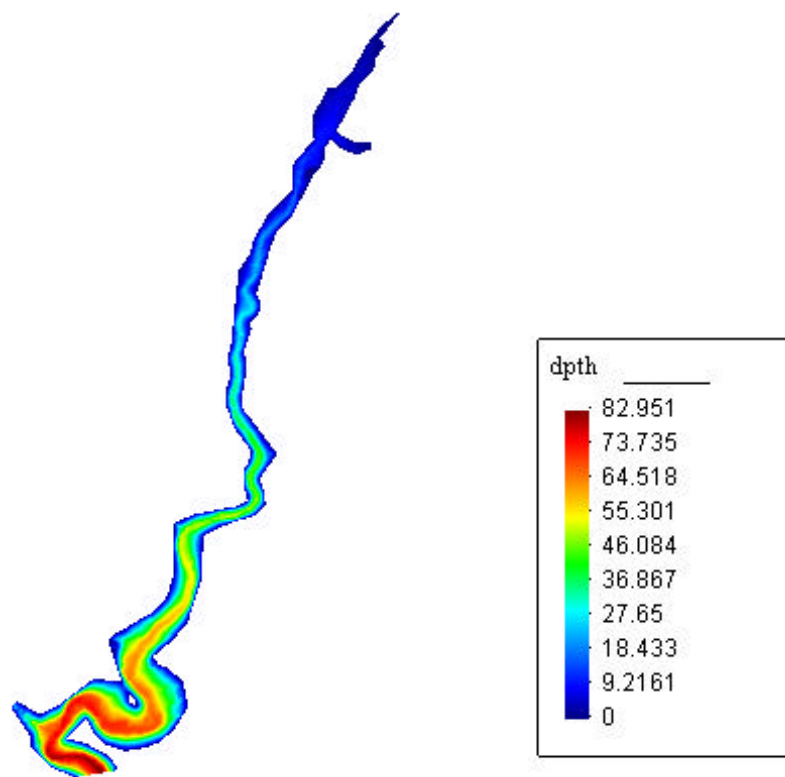


Figura 3-26: Propagación de olas en embalses: geometría y topografía del embalse.

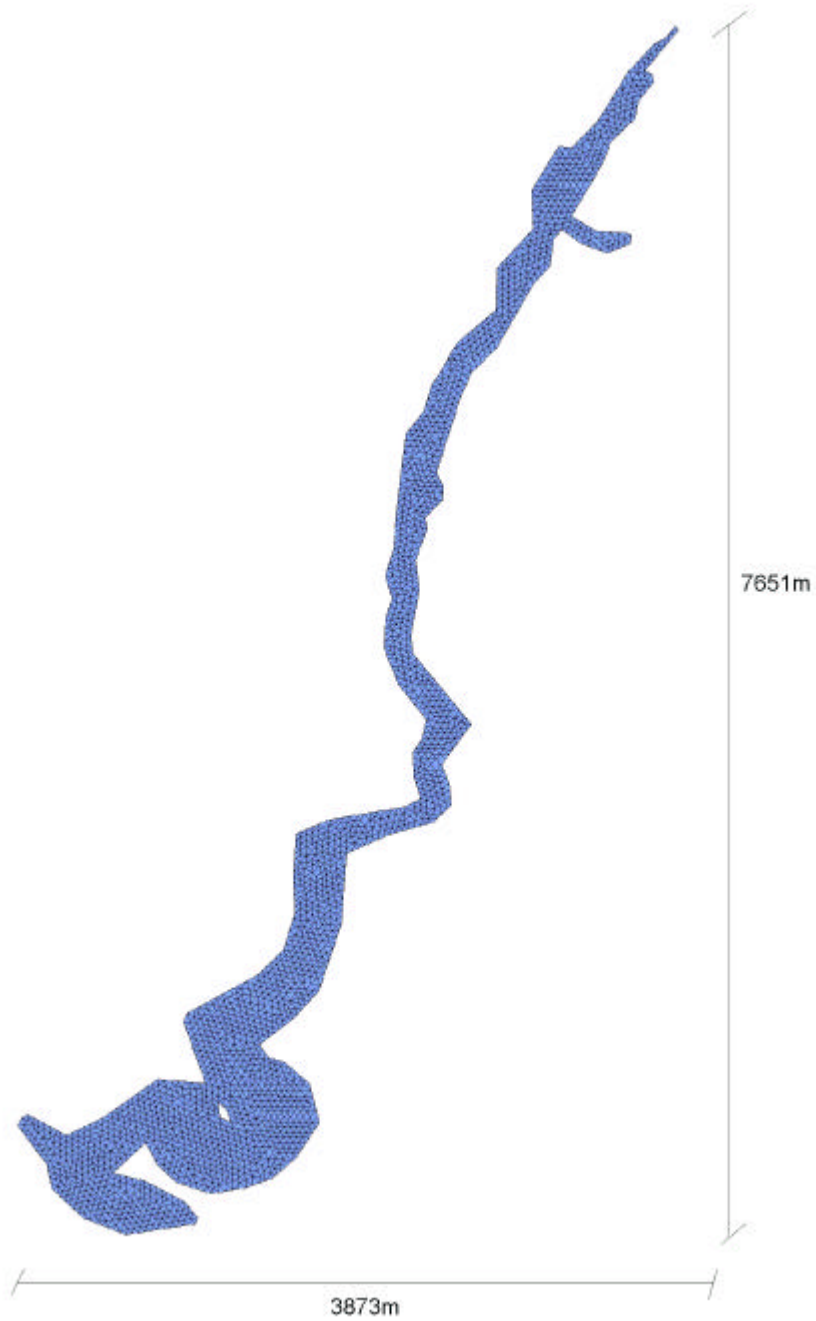


Figura 3-27: Propagación de olas en embalses: malla de elementos finitos utilizada en el cálculo.

En cuanto a las condiciones de contorno, se hace uso en este estudio de tres tipos distintos: condición reflectante, absorbente y de aliviadero.

Teniendo en cuenta que el embalse se encuentra rodeado por laderas con pendientes considerables se puede justificar que una onda incidente que llegue a uno de los márgenes se refleje. Se impone, por tanto, en todo el contorno del embalse una condición de contorno reflectante (ver Figura 3-28).

No obstante, el embalse no se encuentra únicamente limitado por laderas. En el extremo sur se sitúa la presa y en el extremo norte el valle se abre suavizándose la topografía. Una onda incidente que llegara a esta última zona no sería reflejada, y para reproducir esta condición se ha supuesto que el extremo norte está *abierto*, tratándose de un contorno artificial o de radiación. Esta condición se impone en los nodos que se muestran en la Figura 3-29.

En la región del contorno en la que se sitúa la presa, una ola cuya altura sobrepase la coronación verterá sobre ella. Esta condición se ha aproximado en el estudio mediante una condición denominada de *aliviadero*, en la que se supone un caudal normal al contorno función de la sobreelevación sobre la coronación de la presa. Dicho caudal de vertido por unidad de longitud viene dado por la expresión:

$$q = d v_n = C_1 d^{C_2} \quad (3.67)$$

siendo  $C_1 \approx 1.7$  y  $C_2 \approx 1.5$ , y definiéndose  $d$  como la sobreelevación sobre la coronación de la presa, es decir,  $d = h + Z - Z_w$  siendo  $Z_w$  la cota de la coronación.

De este modo se impone en los nodos del contorno a los que se va a aplicar esta condición que:

$$\bar{v}_n h = d v_n \quad (3.68)$$

Se ha aplicado, por tanto, una condición de este tipo en los nodos que se muestran en la Figura 3-30.

Las condiciones iniciales dependen del impacto provocado por la caída de material perteneciente a la ladera dentro del embalse. El desprendimiento genera una onda cuya altura inicial depende de la velocidad de entrada en el embalse, así como de la masa movilizada y de la dirección de entrada. Estos datos podrían ser conocidos *a priori* a partir de un estudio previo realizado con las técnicas explicadas en el capítulo anterior, por ejemplo.

La onda generada por la condición inicial (ver Figura 3-31) se propaga a lo largo del embalse tanto

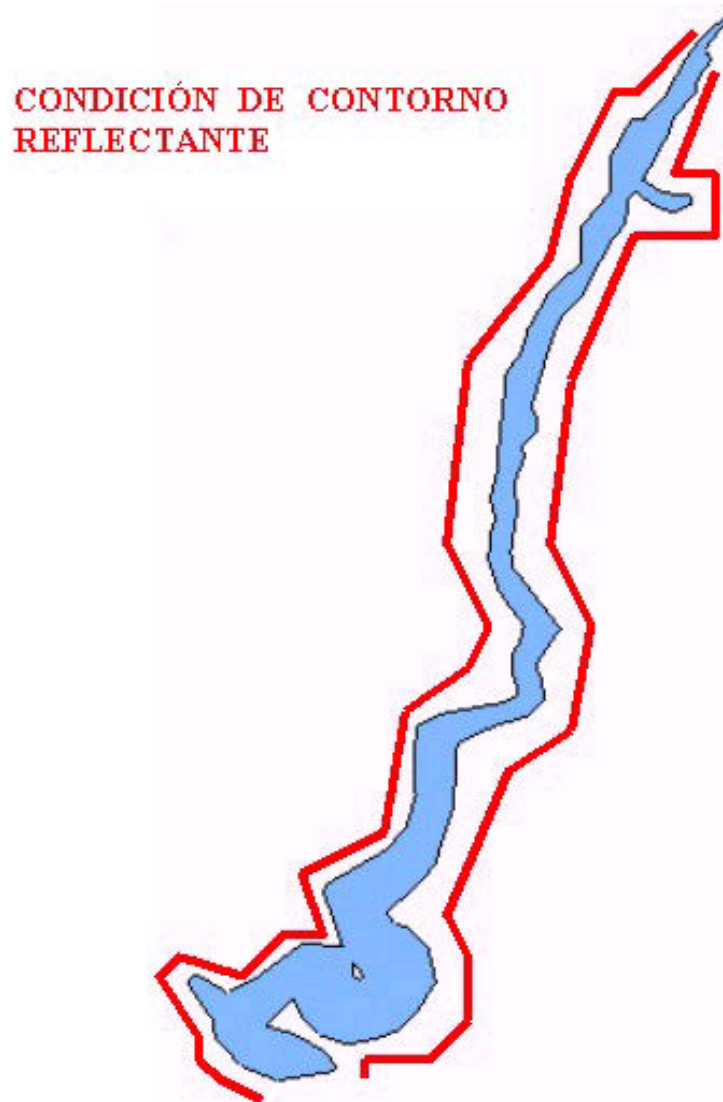


Figura 3-28: Propagación de olas en embalses: condición de contorno reflectante.

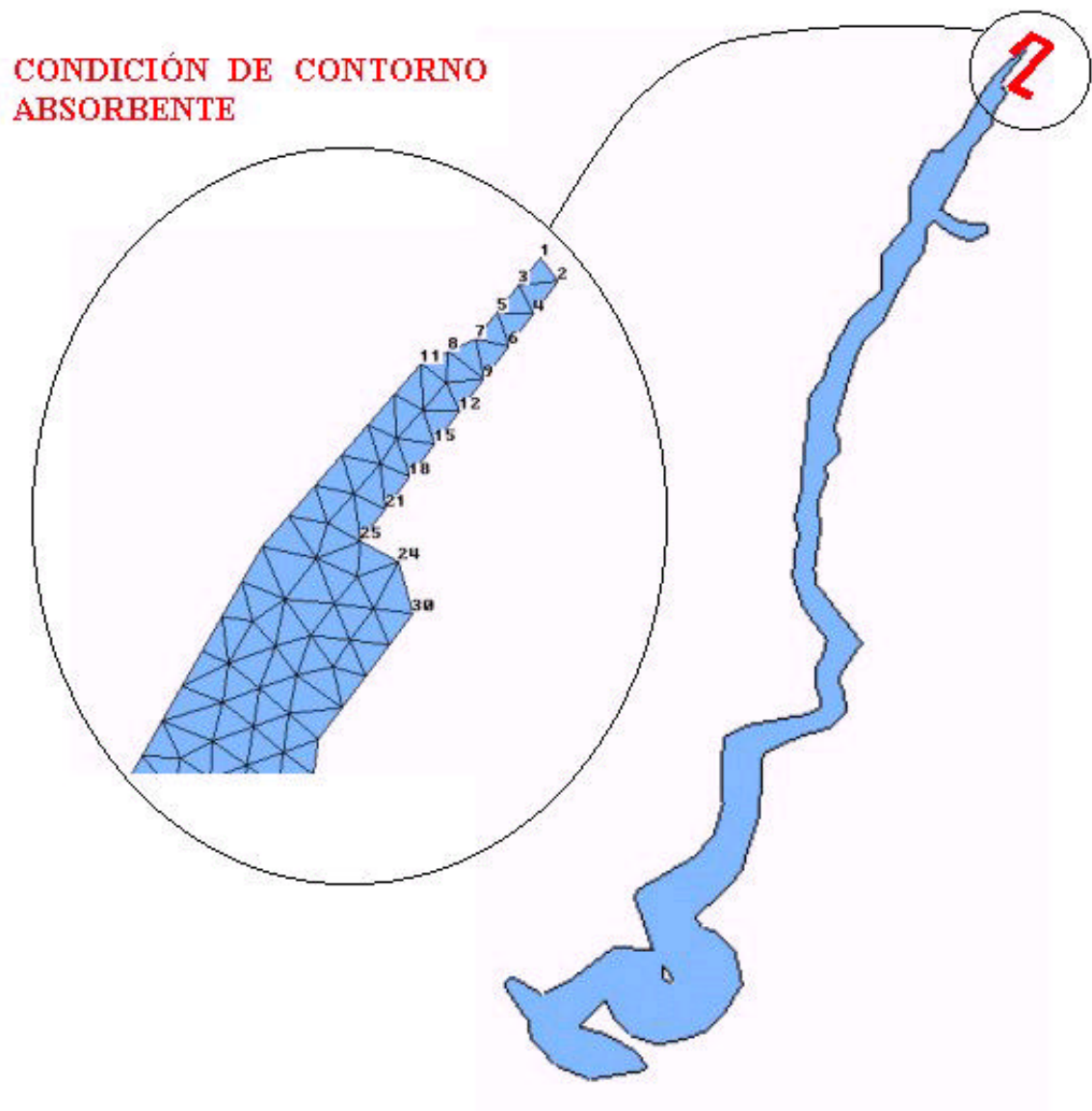


Figura 3-29: Propagación de olas en embalses: condición de contorno absorbente.

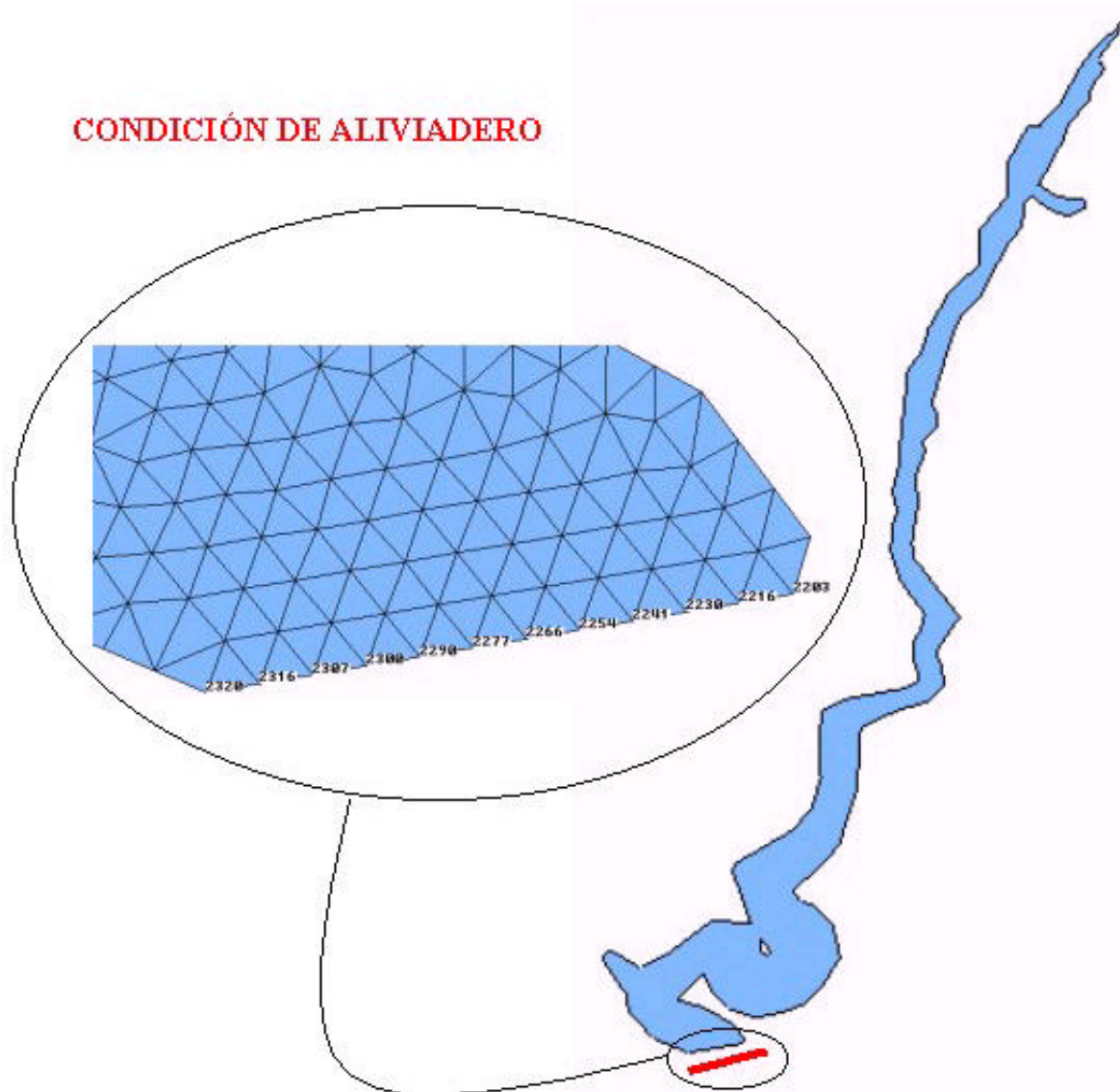


Figura 3-30: Propagación de olas en embalses: condición de contorno de aliviadero.

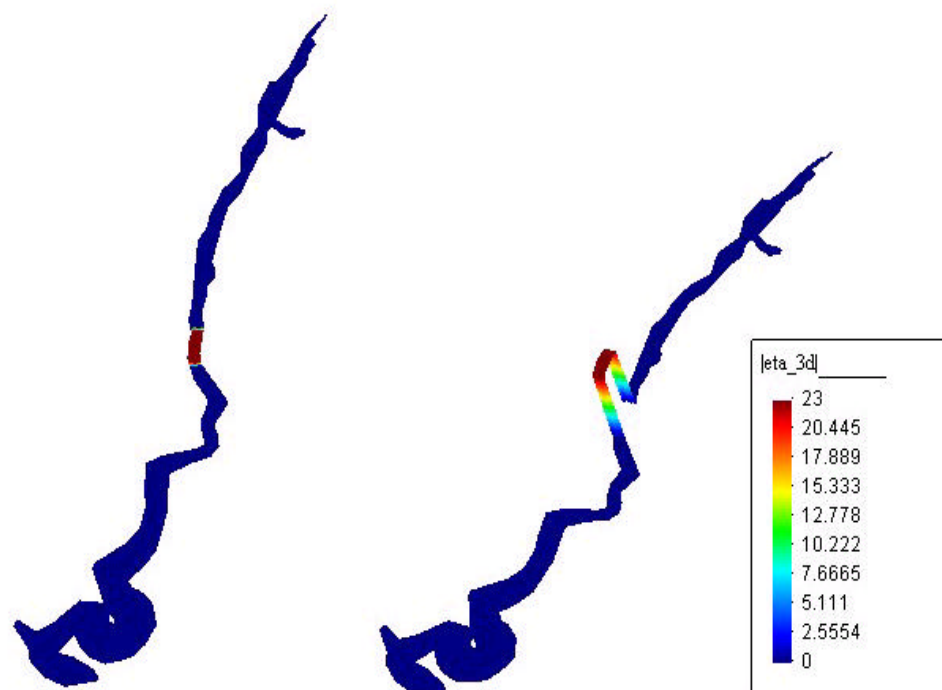


Figura 3-31: Propagación de olas en embalses: condición inicial.

en la dirección norte como en la dirección sur, hacia la presa (Figura 3-32). En la Figura 3-32 se puede observar el contorno de sobreelevaciones o alturas de ola en diferentes tiempos. El mismo resultado se da en la Figura 3-33 donde se representa la deformación de la superficie con el paso de la onda en función del tiempo.

Dado que el principal objetivo de este estudio es conocer la altura de la ola en la presa, se ha representado la correspondiente historia de sobreelevaciones en dicho emplazamiento, dándose en la Figura 3-34 la sobreelevación (en metros) en función del tiempo (en segundos) en la presa.

Para todos los puntos de la presa, la sobreelevación tiene aproximadamente el mismo valor. Como se puede ver en esta Figura 3-34, la altura máxima que alcanza la ola en la presa es de 4.5 m.

Se puede observar que la ola tarda 5 minutos en llegar a la presa, recorriendo para ello una distancia de aproximadamente 3900 metros. En el caso del extremo norte, la ola alcanza este emplazamiento en 3 minutos, recorriendo 2600 metros. Se puede estimar, a partir de estos últimos datos, la velocidad de propagación de la onda, que alcanza aproximadamente los 14 m/s.

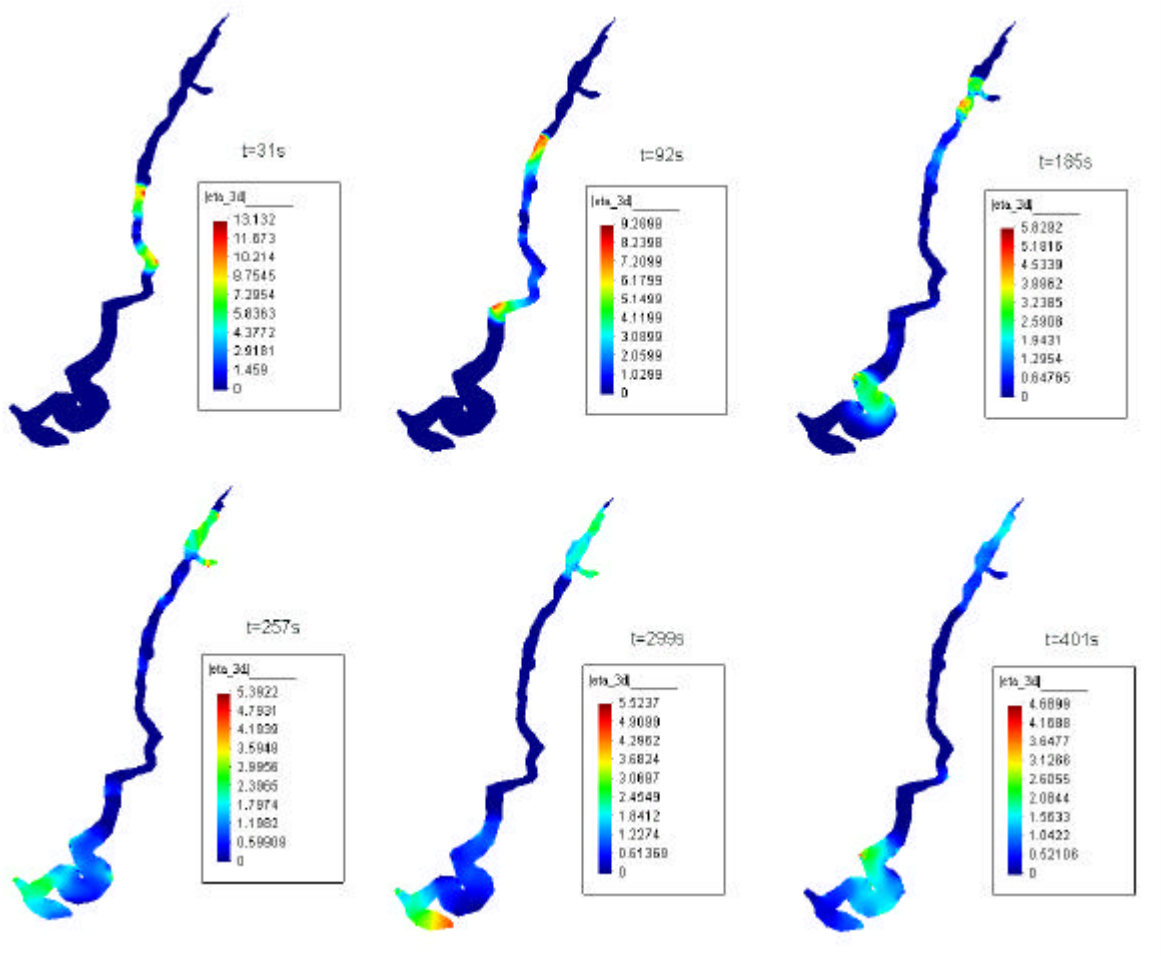


Figura 3-32: Propagación de olas en embalses: evolución de la sobreelevación.

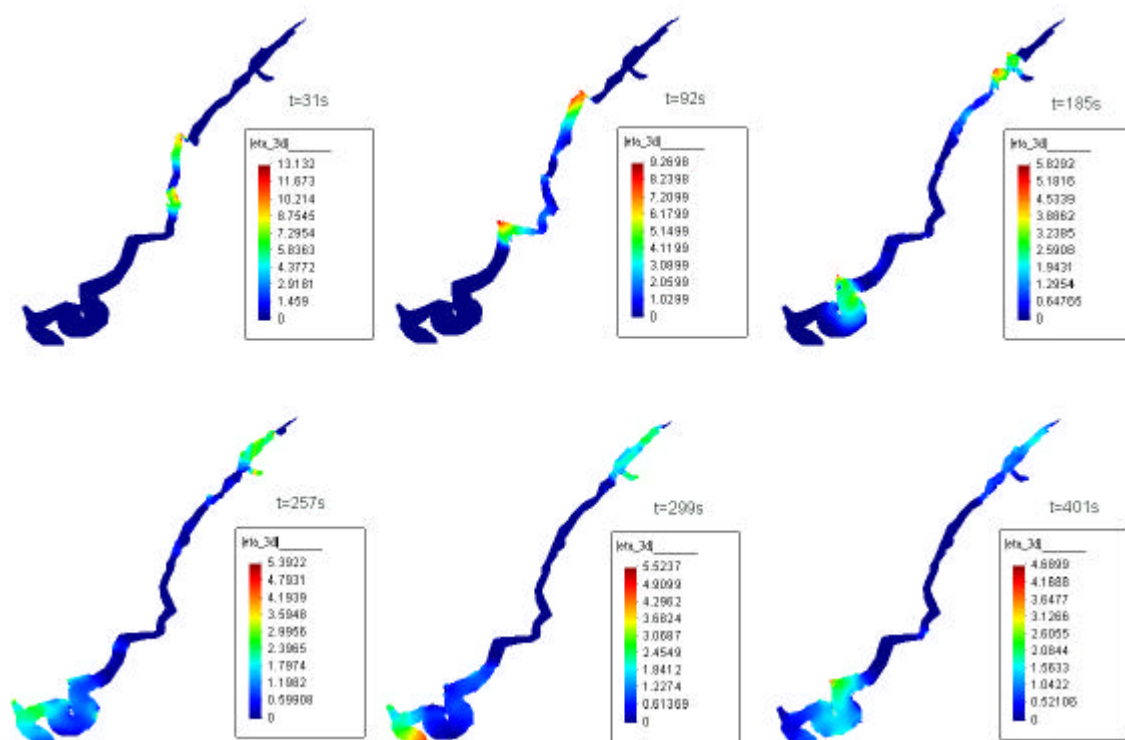


Figura 3-33: Propagación de olas en embalses: evolución de la sobreelevación en 3D.

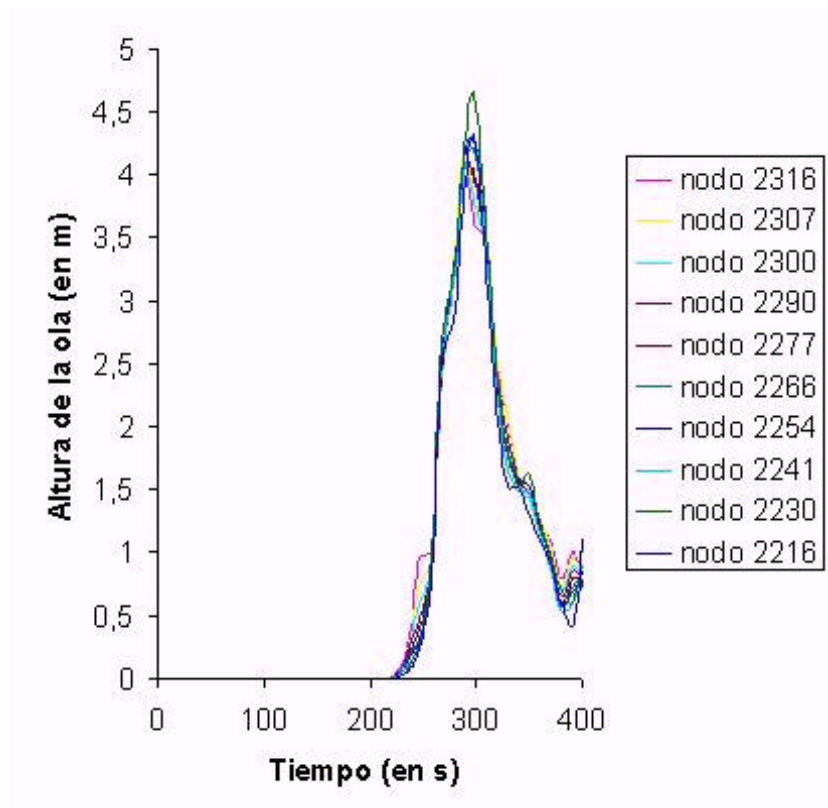


Figura 3-34: Propagación de olas en embalses: historia de sobreelevaciones causadas en la presa.

# Bibliografía

- [1] R.A. Bagnold. "Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear". *Proc. Royal Society of London, Serial A*, 225: 49-63, 1954.
- [2] A.W. Bishop, J.N. Hutchinson, A.D.M. Penman, H.E. Evans. "Geotechnical investigations into the causes and circumstances of the disaster of 21st October 1966". *A selection of technical reports submitted to the Aberfan Tribunal*, (ed. Welsh office), p. 1-80. London HMSO, 1969.
- [3] A.W. Bishop. "The stability of tips and spoil heaps". *Q. J. Engng. Geol.*, 6: 335-376, 1973.
- [4] C.L. Chen, C.H. Ling. "Granular-flow rheology: role of shear-rate number in transition regime". *Journal of Engineering Mechanics*, 122(5): 469-480, 1996.
- [5] P. Coussot. "Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel". *Journal of Hydraulic Research*, 32(4): 535-559, 1994.
- [6] R.F. Dawson, N.R. Morgenstern, A.W. Stokes. "Liquefaction flowslides in Rocky Mountain coal mine waste dumps". *Can. Geotech. J.*, 35: 328-343, 1998.
- [7] S.G. Evans, O. Hungr, J.J. Clague. "Dynamics of the 1984 rock avalanche and associated distal debris flow on Mount Cayley, British Columbia, Canada; Implications for the landslide hazard assessment on dissected volcanoes". *Engineering Geology*, 61: 29-51, 2001.
- [8] D.L. Fread. *The NWS DAMBRK model: Theoretical background and user documentation*. HRL-258, Hydrological Research Laboratory, National Weather Service, Silver Spring, Maryland 20910, 1988.

- [9] E. González, M.I. Herreros, M. Pastor, M. Quecedo, J.A. Fernández Merodo. "Discrete and continuum approaches for fast landslide modeling". *Proceedings of the 1st International PFC Symposium*, p. 307-313. Genselkirchen, Alemania, 2002.
- [10] R.W. Hanks, D.R. Pratts. "On the flow of Bingham plastic slurries in pipes and between parallel plates". *Journal of Society of Petroleum Engineers*, p. 342-346, 1967.
- [11] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1: Fundamentals of numerical discretization*. John Wiley & Sons. 1988.
- [12] O. Hungr. "A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches". *Can. Geotech. J.*, 32: 233-238, 1995.
- [13] J.N. Hutchinson. "Undrained loading, a fundamental mechanism of mudflows and other mass movements". *Can. Geotech. J.*, 23: 115-126, 1986.
- [14] J.K. Jeyapalan, J.M. Duncan, H.B. Seed. "Investigation of flow failures of tailing dams". *J. Geotech. Engng.*, ASCE, 109: 172-189, 1983.
- [15] M. Jin, D.L. Fread. "One-dimensional routing of mud/debris flows using NWS FLDWAV model". *Debris-flow hazards mitigation: Mechanics, prediction and assessment* (ed. C.L. Chen), p. 687-696. New York: ASCE, 1997.
- [16] D. Laigle, P. Coussot. "Numerical modelling of mudflows". *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(7): 617-623, 1997.
- [17] R. Löhner, K. Morgan, O.C. Zienkiewicz. "The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the Finite Element Method". *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 4: 1043-63, 1984.
- [18] R. Löhner, K. Morgan, O.C. Zienkiewicz. "An adaptative Finite Element procedure for compressible high speed flows". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 51: 441-65, 1985.
- [19] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, 1969.
- [20] J.S. O'Brien, P. Julien. "Physical properties and Mechanics of hyper concentrated sediments' flows". In D. Bowles editor. *Delineation of Landslides, Flash Floods and Debris Flow Hazards in Utah*, p. 260-279. Utah State University. Utah Water Research Laboratory, Logan, Utah, 1984.

- [21] M. Pastor, M. Quecedo, J.A. Fernández Merodo, M.I. Herreros, E. González, P. Mira. "Modelización numérica de rotura de balsas y taludes mineros". *Revista de Ingeniería Civil*, No. 124, p. 165-178, 2001.
- [22] M. Pastor, M. Quecedo, E. González, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo, P. Mira. "A simple approximation to bottom friction for Bingham fluid depth integrated models". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 2001. (Aceptado).
- [23] M. Pastor, L. Sopena, J.A. Fernández Merodo, M. Quecedo, P. Mira, M.I. Herreros, E. González. "Modelización de deslizamientos de laderas y olas provocadas en embalses: aplicaciones prácticas". *V Simposio Nacional sobre Taludes y Laderas Inestables*, Vol. II, p. 431-460. Madrid, 2001.
- [24] M. Pastor, M. Quecedo, J.A. Fernández Merodo, M.I. Herreros, E. González, P. Mira. "Modelling tailings dams and mine waste dumps failures". *Géotechnique*, 52, No. 8, 579-591, 2002.
- [25] M. Pastor, J.A. Fernández Merodo, M. Quecedo, M.I. Herreros, E. González, P. Mira. "Modelling of debris flows and flow slides". *Revue française de génie civil: Numerical modelling in Geomechanics*, Vol. 6, n° 6/2002, 1213-1232, 2002.
- [26] M. Pastor, M. Mabssout. "Alternative formulations in soil dynamics". *Revue française de génie civil: Numerical modelling in Geomechanics*, Vol. 6, n° 6/2002, 1099-1117, 2002.
- [27] J. Peraire. *A finite element method for convection dominated flows*. Tesis doctoral. Universidad de Gales, Swansea, 1986.
- [28] M. Quecedo, M. Pastor. "FEM modelling of dam break problems on inclined and curved beds". *Journal of Computational Physics*, 2001. (Aceptado).
- [29] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo. "Simulación de ondas de avenida causadas por roturas de presas". *Revista de Ingeniería Civil*, No. 121, p. 23-31, 2001.
- [30] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo, Quinfen Zhang. "Comparison of two algorithms for solving the dam break problem". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 2001. (Aceptado).

- [31] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo. “Numerical modelling of the propagation of fast landslides using the Finite Element Method”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. (Aceptado).
- [32] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo. “Modelización numérica de la propagación de deslizamientos rápidos usando el Método de los Elementos Finitos. Primera parte: Modelo matemático y modelo numérico”. *Revista de Ingeniería Civil*, 2002. (Aceptado).
- [33] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo. “Modelización numérica de la propagación de deslizamientos rápidos usando el Método de los Elementos Finitos. Segunda parte: Ejemplos numéricos”. *Revista de Ingeniería Civil*, 2002. (Aceptado).
- [34] M. Quecedo, M. Pastor. “A reappraisal of Taylor-Galerkin algorithm for drying-wetting areas in shallow water computations”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 38: 515-531, 2002.
- [35] E.F. Toro. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley & Sons, 2001.
- [36] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*. Springer-Verlag, Berlin, Segunda Edición, 1999.
- [37] Y. Zhang, B. Tabarrok. “Modifications of the Lax-Wendroff scheme for hyperbolic systems with source terms”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44: 27-40, 1999.
- [38] O.C. Zienkiewicz, R. Löhner, K. Morgan, S. Nakazawa. “Finite elements in fluid mechanics – a decade of progress”. *Finite Elements in Fluids* (eds. R.H. Gallagher et al.), Vol. 5, cap. 1, p. 1-26, Wiley Chichester, 1984.
- [39] O.C. Zienkiewicz, R. Löhner, K. Morgan. “High speed inviscid compressible flow by the Finite Element Method”. *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (ed. J.R. Whiteman), Vol. VI, p. 1-25, Academic Press, London, 1985.
- [40] O.C. Zienkiewicz, R. Löhner, K. Morgan, J. Peraire. “High speed compressible flow and other advection dominated problems of fluid mechanics”. *Finite Elements in Fluids* (eds. R.H. Gallagher et al.), Vol. 6, cap. 2, p. 41-88, Wiley Chichester, 1986.

- 
- [41] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. Vol. 2. Mc Graw-Hill, 1991.
- [42] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The finite element method, Vol. 3: Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann. Quinta edición, 2000.
- [43] O.C. Zienkiewicz, P. Ortiz. “A split-characteristics based Finite Element model for the shallow water equations”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20: 1061-1080, 1995.
- [44] O.C. Zienkiewicz, R. Codina. “A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part I. The split, characteristic based scheme”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20: 869-885, 1996.
- [45] O.C. Zienkiewicz, P. Nithiarasu, R. Codina, M. Vazquez, P. Ortiz. “The characteristics-based-split procedure: an efficient and accurate algorithm for fluid problems”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31: 359-392, 1999.



## Capítulo 4

# Contribución a la modelización del transporte de contaminantes

### 4.1. Introducción

Todo modelo numérico utilizado para simular el problema del transporte de contaminantes se compone de dos fases. (1) En primer lugar es necesario el análisis hidromecánico para determinar el campo de velocidades. En el caso de la hidrodinámica superficial esto se lleva a cabo mediante la utilización de modelos completos integrando las ecuaciones de Navier-Stokes tal y como se explicó en el capítulo 2, o bien haciendo uso de modelos integrados en profundidad (capítulo 3). Sin embargo, en el caso de la hidrodinámica subterránea, existe además la dificultad añadida de la determinación de la superficie libre, problema que será abordado en la primera parte de este capítulo introduciendo un nuevo método para la obtención de las velocidades, así como la posición de la superficie libre, en el caso de filtración en medio poroso. (2) Una vez determinado el campo de velocidades, la segunda fase del análisis nos lleva a la modelización del transporte de contaminantes, objetivo de la segunda parte de este capítulo. Se aplicará aquí, el método de dos pasos de Taylor-Galerkin.

Por lo tanto, los dos principales objetivos de este capítulo son los siguientes: el estudio de flujos con superficie libre en medios porosos, así como la modelización del transporte de contaminantes en corrientes de agua.

## 4.2. Flujo con superficie libre en medios porosos

### 4.2.1. Introducción

Para tratar el problema del transporte de contaminantes en aguas subterráneas es fundamental el estudio de la filtración de fluidos en medio poroso. Este es el principal objetivo de la primera parte de este capítulo, el proporcionar un método preciso para el seguimiento de flujos de superficie libre en el interior de medios porosos.

Los problemas de filtración con superficie libre se encuentran profusamente en la práctica de la ingeniería geomecánica. En estos problemas, la superficie libre que delimita los contornos del flujo puede determinarse utilizando técnicas numéricas no lineales que incluyen el Método de Diferencias Finitas con malla adaptativa [8], así como el Método de los Elementos Finitos con malla adaptativa [9] [22] [34], y con malla fija [3] [10] [14].

Los métodos numéricos para resolver problemas de filtración con superficie libre no son muy usados, sin embargo, en la práctica de la ingeniería y son ampliamente ignorados en los libros de Mecánica del Suelo, principalmente debido a la complicación de su derivación e implementación [2]. Algunos libros de texto [1], presentan soluciones básicas para problemas de filtración confinada con capas múltiples de suelo y permeabilidad anisótropa. Sin embargo, estas técnicas son válidas únicamente en el caso de problemas de filtración confinada dado que los contornos del flujo son conocidos. Hasta el momento, existen pocas referencias en las que se den soluciones analíticas para problemas de filtración no confinada, tales como flujos de superficie libre en el interior de presas [11].

Se propone aquí un nuevo método para el seguimiento de la superficie libre del flujo basado en las técnicas de *level-set* explicadas en el capítulo 2. Con este método de Elementos Finitos es posible estudiar la filtración de  $n$  fluidos inmiscibles en el interior de un suelo y conocer, para cualquier tiempo dado, la posición de la interfase entre los flujos.

Esta primera parte del capítulo 4 se encuentra estructurada como sigue. En primer lugar se presenta el modelo matemático utilizado para el estudio de la filtración, describiéndose las ecuaciones de flujo de la difusión en un medio poroso así como la aproximación de *level-set* utilizada para el seguimiento de la interfase entre fluidos. Seguidamente se procede a la discretización de las ecuaciones presentadas en el modelo matemático. Y finalmente, se concluye con varias aplicaciones del método aquí propuesto.

### 4.2.2. Modelo matemático

#### Ecuaciones de flujo

Consideremos el caso sencillo de un suelo completamente saturado con un fluido intersticial de una sola fase. La ecuación de conservación del momento para el fluido viene dada por:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} - \frac{\rho g}{k} \mathbf{w} = \rho \dot{\mathbf{u}} + \frac{\rho}{n} \dot{\mathbf{w}} \quad (4.1)$$

donde:

- $p$  es la presión de la fase fluida.
- $\rho$  es la densidad del fluido.
- $g$  es la fuerza de gravedad.
- $\mathbf{b}$  es la fuerza de volumen por unidad de masa (normalmente la gravedad).
- $k$  es la permeabilidad del suelo al fluido considerado en m/s.
- $n$  es la porosidad.
- $\mathbf{w}$  es la velocidad de Darcy del agua intersticial, es decir,  $\mathbf{w} = n \mathbf{v}_{\text{real}}$  siendo  $\mathbf{v}_{\text{real}}$  la velocidad real del flujo, y  $\dot{w}_i = \frac{dw_i}{dt}$ .
- $\mathbf{u}$  es la velocidad del esqueleto sólido.

El término  $\frac{\rho}{n} \dot{\mathbf{w}}$  en la expresión anterior representa la aceleración del fluido relativa al suelo, y la supondremos despreciable. Del mismo modo, consideraremos que el desplazamiento del esqueleto sólido es nulo, de manera que el término  $\rho \dot{\mathbf{u}}$  es también igual a cero en la ecuación (4.1).

De esta manera podemos reescribir la ecuación (4.1) como sigue

$$\mathbf{w} = -\frac{k}{\rho g} \nabla p + \frac{k}{\rho g} \rho \mathbf{b} \quad (4.2)$$

y puesto que la única fuerza de volumen es la gravedad  $\mathbf{b} = (b_x, b_z) = (0, -g)$ , la expresión anterior puede escribirse

$$\mathbf{w} = -\frac{k}{\rho g} \nabla(p + \rho g z) \quad (4.3)$$

que da la velocidad del fluido en el interior del suelo.

Podemos escribir ahora la ecuación de balance de masa

$$\nabla^T \mathbf{w} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

donde  $\frac{1}{Q} = \frac{n}{K}$ , siendo  $K$  la compresibilidad del fluido.

Sustituyendo la ecuación (4.3) en (4.4) tenemos

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^T \left( \frac{k}{\rho g} \nabla p \right) \quad (4.5)$$

Y resolviendo la ecuación (4.5) se obtiene el campo de presiones del fluido en el interior del esqueleto sólido.

### La aproximación de *level-set*

Sea el caso de un suelo completamente saturado por dos fluidos distintos: agua y aire, por ejemplo. En la aproximación propuesta, una función indicadora,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , identifica la parte del dominio ocupada por cada fluido. Las propiedades del material, tales como densidad y compresibilidad, pueden calcularse como

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_w + (\rho_a - \rho_w)H(\varphi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.6)$$

$$K(\mathbf{x}, t) = K_w + (K_a - K_w)H(\varphi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.7)$$

donde el subíndice  $w$  y  $a$  denotan el agua y el aire respectivamente, y

$$H(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi > 0 \\ 0 & \text{si } \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

De esta manera  $\rho$  y  $K$  son dos propiedades del fluido que se mueven con el flujo, siendo nula su

derivada material

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad}(\rho) = 0$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad}(K) = 0$$

donde, en este caso,  $\mathbf{u}$  es la velocidad real del flujo.

Considerando ahora la dependencia de las propiedades del fluido con la función indicadora, ecuaciones (4.6) y (4.7), la condición anterior puede escribirse

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad}\varphi = 0 \quad (4.9)$$

que establece que la función indicadora es transportada convectivamente por el flujo y requiere que la función  $H()$  sea una función suave.

Considerando  $\varphi$  como una función lineal de su posición,  $\mathbf{x}$ , su derivada espacial de segundo orden es nula y la aproximación numérica de la ecuación (4.9) es exacta. La función lineal más simple es aquella de pendiente unidad, es decir, la denominada función distancia tal que  $|\operatorname{grad} \varphi| = 1$ .

Para evitar cambios bruscos en las propiedades del fluido a ambos lados de la interfase, dichas propiedades se interpolan a lo largo de una región con una anchura constante de aproximadamente  $2\delta$  a ambos lados de dicha interfase [30] [33], donde  $\delta$  se toma del orden del tamaño de la malla. Existen distintas alternativas para la definición de la función  $H()$ . En este trabajo se hace uso de una sencilla interpolación lineal [28] [29] [30]

$$H(\varphi) = \frac{\min(\delta, \max(\varphi, -\delta)) + \delta}{2\delta} \quad (4.10)$$

Esta definición de la función de interpolación, basada en la distancia a la interfase, requiere el mantener la función indicadora como una función distancia. En efecto, la ecuación (4.9) establece que la función indicadora es transportada por convección por la velocidad del flujo: puesto que dicha velocidad no es uniforme en el dominio, la función distancia original se distorsionará con el tiempo y, después de un rato, ya no será una función distancia.

Este problema puede resolverse utilizando la velocidad del fluido tal y como se establece en las

ecuaciones (4.9) transportando la función indicadora y, una vez que dicha función indicadora es transportada, corrigiéndola para que cumpla la condición  $|\text{grad } \varphi| = 1$ . Esto puede conseguirse resolviendo, para cualquier instante  $t$ , la siguiente ecuación hasta alcanzar el estado estacionario [33]:

$$\frac{\partial \varphi(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi(t)) |\text{grad } \varphi(\hat{\tau})| = S(\varphi(t)) \quad (4.11)$$

con condiciones iniciales

$$\varphi(\mathbf{x}, \hat{\tau} = 0) = \varphi(\mathbf{x}, t)$$

donde  $S()$  es la función signo y  $\hat{\tau}$  un tiempo ficticio.

Claramente, la solución estacionaria de este problema cumplirá la condición  $|\text{grad } \varphi| = 1$  y el cero de la función  $\varphi(\hat{\tau} \rightarrow \infty)$  coincide con el de  $\varphi(t)$ .

La ecuación (4.11) puede escribirse también como

$$\frac{\partial \varphi(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi^n) \frac{\text{grad } \varphi(\hat{\tau})}{|\text{grad } \varphi(\hat{\tau})|} \cdot \text{grad } \varphi(\hat{\tau}) = S(\varphi^n) \quad (4.12)$$

lo que demuestra que este problema no es más que la ecuación de transporte convectivo con una velocidad dada por

$$\mathbf{v} = S(\varphi^n) \frac{\text{grad } \varphi(\hat{\tau})}{|\text{grad } \varphi(\hat{\tau})|}$$

Esta ecuación para la velocidad indica que las características del problema se inician en la posición de la interfase y viajan con velocidad  $\pm 1$ . Por lo tanto, la reconstrucción de la función indicadora como una función distancia se inicia en la interfase y progresa a lo largo de la normal en la dirección saliente. Por ello, la zona crítica, alrededor de la posición de la interfase, es reconstruida en el primer paso de tiempo ficticio,  $\hat{\tau}$ , al iterar la solución del problema (4.11).

### 4.2.3. Modelo numérico

El método numérico utilizado en este trabajo para resolver la ecuación de flujo (4.5) es el método estándar de Galerkin para la discretización espacial [39] y el esquema de Newmark para la discretización temporal [13] [23]. Para resolver la ecuación de transporte convectivo (4.9) así como la reinicialización de la función indicadora (4.12), se hace uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin [26].

### Discretización de las ecuaciones de flujo

Recordemos la ecuación (4.5)

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^T \left( \frac{k}{\rho g} \nabla p \right) \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta que el campo de presiones puede interpolarse como

$$p = \mathbf{N}_p \hat{p}$$

siendo  $\hat{p}$  los valores nodales, la ecuación (4.13) puede discretizarse en el espacio de la siguiente manera

$$\int (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{k}{\rho g} \nabla \mathbf{N}_p d \hat{p} + \int \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p d \dot{\hat{p}} - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \frac{k}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = \mathbf{0}$$

o expresándolo de manera matricial

$$\mathbf{K} \hat{p} + \mathbf{C} \dot{\hat{p}} = \mathbf{f} \quad (4.14)$$

donde

- $\mathbf{K}$  es la matriz de permeabilidad:

$$\mathbf{K} = \int (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{k}{\rho g} \nabla \mathbf{N}_p d$$

- $\mathbf{C}$  es la matriz de compresibilidad:

$$\mathbf{C} = \int \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p d$$

- y  $\mathbf{f}$  es:

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \frac{k}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma$$

Para discretizar la ecuación (4.14) en el tiempo, haremos uso del método de Newmark que utiliza las siguientes aproximaciones

$$p^{n+1} = p^n + \Delta t \dot{p}^n + \beta \Delta t \Delta \dot{p}^n \quad (4.15)$$

y

$$\dot{p}^{n+1} = \dot{p}^n + \Delta \dot{p}^n \quad (4.16)$$

donde  $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$ , y  $\beta$  es un parámetro que cumple  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Escribiendo ahora la ecuación (4.14) discretizada en el espacio para  $t^{n+1}$ , y omitiendo, por comodidad, el acento circunflejo sobre la variable  $p$ , tenemos

$$\mathbf{K}p^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{p}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

y teniendo en cuenta las expresiones (4.15) y (4.16)

$$(\mathbf{C} + \beta \Delta t \mathbf{K}) \Delta \dot{p}^n = \mathbf{f}^{n+1} - (\mathbf{C}\dot{p}^n + \mathbf{K}(p^n + \Delta t \dot{p}^n)) \quad (4.18)$$

el esquema generalizado resultante puede reducirse, dependiendo del valor del parámetro  $\beta$ , a uno de los siguientes esquemas

$\beta$	Esquema
0	Euler hacia delante
1	Euler hacia atrás
$\frac{1}{2}$	Crank-Nicolson
$\frac{2}{3}$	Galerkin

Si  $\beta \geq 1/2$  el esquema es incondicionalmente estable [38]. Si  $\beta = 0$ , el esquema resultante es explícito y la matriz  $\mathbf{C}$  puede invertirse si se hace uso de la representación diagonal de la matriz de masas. En las aplicaciones mostradas más adelante se ha utilizado un valor de  $\beta = 2/3$ .

Merece la pena comentar aquí el caso en que pudiera ocurrir que la permeabilidad y compresibilidad dependieran de la presión. En este caso sería necesario actualizar las matrices de permeabilidad,  $\mathbf{K}$ , y compresibilidad,  $\mathbf{C}$ , en cada paso de tiempo. Para ilustrar el procedimiento a seguir en este último

supuesto, comenzaremos haciendo uso de los valores conocidos de  $p^n$  y  $\dot{p}^n$  y calcularemos a partir de ellos los valores para  $t^{n+1}$ .

Supondremos inicialmente que

$$\begin{aligned} p_{(i)}^{n+1} &= p^n \\ \dot{p}_{(i)}^{n+1} &= \dot{p}^n \end{aligned}$$

y con los valores anteriores calcularemos las nuevas matrices de permeabilidad y compresibilidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(i)}^{n+1} &= \mathbf{K} \left( p_{(i)}^{n+1} \right) \\ \mathbf{C}_{(i)}^{n+1} &= \mathbf{C} \left( p_{(i)}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

El nuevo sistema a resolver

$$\left( \mathbf{C}_{(i)}^{n+1} + \beta \Delta t \mathbf{K}_{(i)}^{n+1} \right) \Delta \dot{p}_{(i)}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \left( \mathbf{C}_{(i)}^{n+1} \dot{p}^n + \mathbf{K}_{(i)}^{n+1} (p^n + \Delta t \dot{p}^n) \right) \quad (4.19)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales se obtiene  $\Delta \dot{p}_{(i)}^n$ , y haciendo uso de este valor podemos actualizar  $p_{(i)}^{n+1}$  y  $\dot{p}_{(i)}^{n+1}$  con las siguientes expresiones

$$p_{(i+1)}^{n+1} = p^n + \Delta t \dot{p}^n + \beta \Delta t \Delta \dot{p}_{(i)}^n \quad (4.20)$$

$$\dot{p}_{(i+1)}^{n+1} = \dot{p}^n + \Delta \dot{p}_{(i)}^n \quad (4.21)$$

Para comprobar la convergencia con los nuevos valores calculados se hace uso de la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{\left\| p_{(i+1)}^{n+1} - p_{(i)}^{n+1} \right\|}{\left\| p_{(i+1)}^{n+1} + p_{(i)}^{n+1} \right\|}$$

- Si  $\varepsilon > tol$ , siendo  $tol$  una tolerancia dada, el algoritmo no lineal continuaría comenzando por  $p_{(i+1)}^{n+1}$  y  $\dot{p}_{(i+1)}^{n+1}$ .

- Si  $\varepsilon \leq tol$ , el valor de  $p_{(i+1)}^{n+1}$  está suficientemente próximo al valor exacto y entonces

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p_{(i+1)}^{n+1} \\ \dot{p}^{n+1} &= \dot{p}_{(i+1)}^{n+1} \end{aligned}$$

### Seguimiento de la interfase

**Convección de la función indicadora.** Tal y como se discutió en la sección 4.2.2, para asignar las propiedades del fluido en cada punto del dominio, el procedimiento propuesto hace uso de la función indicadora  $\varphi$  que debe ser transportada convectivamente por el campo de velocidades (condición 1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\varphi = 0 \quad (4.22)$$

y corregida para mantenerla como una función distancia (condición 2), es decir, hacer evolucionar la siguiente expresión hasta alcanzar el estado estacionario

$$\frac{\partial\varphi(\hat{\tau})}{\partial\hat{\tau}} + S(\varphi^n) \frac{\text{grad}\varphi(\hat{\tau})}{|\text{grad}\varphi(\hat{\tau})|} \cdot \text{grad}\varphi(\hat{\tau}) = S(\varphi^n) \quad (4.23)$$

con condiciones iniciales

$$\varphi(\mathbf{x}, \hat{\tau} = 0) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (4.24)$$

donde  $S()$  es la función signo y  $\hat{\tau}$  un tiempo ficticio.

Las dos condiciones anteriores se alcanzan utilizando el método de dos pasos de Taylor-Galerkin tal y como se detalla a continuación.

**Convección.** Consideremos la función indicadora,  $\varphi$ . La ecuación de transporte convectivo sería entonces

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\varphi = 0 \quad (4.25)$$

y aplicando el método de dos pasos de Taylor-Galerkin explicado en los capítulos 2 y 3:

$$\varphi^{n+1/2} = \varphi^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \varphi^n) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{M}\Delta\hat{\varphi}^n = \Delta t \left\{ \int (\text{grad}^T(\mathbf{u}\mathbf{N}))^T \varphi^{n+1/2} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{u} \varphi^{n+1/2} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right\} \quad (4.27)$$

**Corrección.** El valor de la función indicadora calculada resolviendo la ecuación anterior (4.27) se corrige haciendo evolucionar la siguiente expresión hasta alcanzar el estado estacionario

$$\frac{\partial \varphi(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + S(\varphi^n) \frac{\text{grad } \varphi(\hat{\tau})}{|\text{grad } \varphi(\hat{\tau})|} \cdot \text{grad } \varphi(\hat{\tau}) = S(\varphi^n) \quad (4.28)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \hat{\tau} = 0) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (4.29)$$

Como ya se ha mostrado anteriormente, se trata de un problema de transporte convectivo con velocidad

$$\mathbf{v} = S(\varphi^n) \frac{\text{grad } \varphi(\hat{\tau})}{|\text{grad } \varphi(\hat{\tau})|} \quad (4.30)$$

Teniendo esto en cuenta podemos escribir la ecuación (4.28) como sigue

$$\frac{\partial \varphi(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} + \text{div}(\varphi(\hat{\tau}) \mathbf{v}) = S(\varphi^n) + \varphi(\hat{\tau}) \text{div } \mathbf{v} \quad (4.31)$$

y podemos aplicar de nuevo el método de dos pasos de Taylor-Galerkin:

$$\varphi^{n+1/2} = \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} [S(\varphi) (1 - |\text{grad } \varphi|)]^n \quad (4.32)$$

$$\mathbf{M}\Delta\hat{\varphi}^n = \Delta t \int \mathbf{N}^T [S(\varphi) (1 - |\text{grad } \varphi|)]^{n+1/2} d \quad (4.33)$$

Una vez que la función indicadora ha sido transportada y corregida, las propiedades del fluido se calculan como sigue:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_w + (\rho_a - \rho_w) H(\varphi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.34)$$

$$K(\mathbf{x}, t) = K_w + (K_a - K_w)H(\varphi(\mathbf{x}, t)) \quad (4.35)$$

denotando aire y agua con  $a$  y  $w$  respectivamente, y donde

$$H(\varphi) = \frac{\min(\delta, \max(\varphi, -\delta)) + \delta}{2\delta} \quad (4.36)$$

siendo  $\delta$  el tamaño de un elemento representativo de la malla.

Hay que hacer notar que para acelerar la convergencia de la ecuación (4.28) hasta alcanzar el estado estacionario, el algoritmo de dos pasos de Taylor-Galerkin utiliza un paso de tiempo óptimo correspondiente a cada elemento de la malla [40]:

$$\Delta\hat{\tau} = \frac{h}{|\mathbf{v}|} = h \quad (4.37)$$

siendo  $h$  el tamaño de cada elemento.

Se ha encontrado un comportamiento óptimo cuando este paso de tiempo se reduce aplicando un factor del orden de 0.90-0.85.

Sin embargo, utilizando este procedimiento, la fase de corrección de la solución tarda un tiempo significativo. Para reducirlo, ambas fases, convección y corrección, se limitan a una región estrecha a ambos lados de la interfase, ahorrándose de esta manera un cierto número de iteraciones puesto que la condición  $|\text{grad } \varphi| = 1$  tiene que cumplirse únicamente en esta pequeña zona. El tamaño de dicha región es del orden de  $3\delta$ - $4\delta$  centrada en la interfase.

#### 4.2.4. Aplicaciones

Se plantean en esta sección algunos casos concretos de flujo con superficie libre en medio poroso a los que se ha aplicado los métodos anteriormente descritos. Se estudia, en primer lugar, el caso monodimensional de la filtración a través de un tubo horizontal, cuya solución en el estado estacionario es bien conocida. Por otro lado, se presentan otros tres ejemplos de validación del modelo: Presa rectangular, presa rectangular con permeabilidad variable y presa triangular con drenaje, que han sido resueltos por otros autores [5] [15] [24], coincidiendo los resultados obtenidos con los dados por estos investigadores. Dichos ejemplos consisten en el estudio de la filtración de flujos con superficie

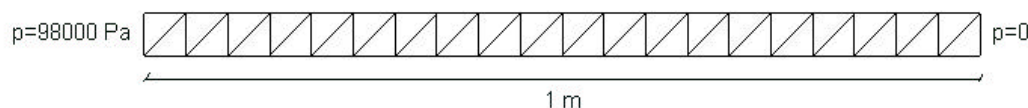


Figura 4-1: Filtración en un tubo horizontal: malla computacional y condiciones de contorno.

libre en el interior de presas con distintas geometrías y permeabilidades variables.

### Filtración en un tubo horizontal

El esquema propuesto ha sido comprobado para el caso monodimensional de un tubo horizontal de 1 metro de longitud. La discretización espacial consiste en una malla regular de 40 elementos triangulares lineales y 42 nodos.

Se supone que en el extremo izquierdo del tubo se aplica la presión equivalente a la presión hidrostática de una columna de agua de diez metros de altura mientras que en el extremo derecho se prescribe una presión nula (ver Figura 4-1). La condición inicial para la presión se toma igual a cero en todo el dominio.

El tubo se encuentra inicialmente saturado con aire:  $K_a = 10^5 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$  y  $\rho_a = 1 \text{ Kg m}^{-3}$ . El agua, con propiedades  $K_w = 10^9 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$  y  $\rho_w = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$ , va filtrándose a través del tubo a partir del extremo izquierdo. La permeabilidad del suelo al aire y al agua se supone que es la misma e igual a  $k_a = k_w = 4.5 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$  y la porosidad del material se toma como  $n = 0.3$ .

La Figura 4-2 muestra la evolución de la interfase entre el aire y el agua. En la Figura 4-3 puede verse la evolución de la presión dentro del tubo. La Figura 4-4 da la evolución de los vectores velocidad.

En el estado estacionario la velocidad del agua en el interior del tubo es de  $4.5 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$ , como era de esperar.

La Figura 4-5 muestra la variación de la presión a lo largo del tubo para seis instantes de tiempo.

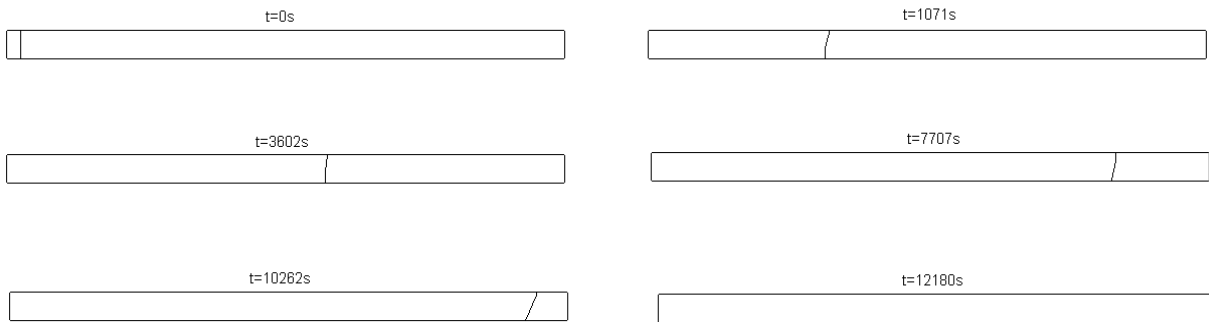


Figura 4-2: Filtración en un tubo horizontal: evolución de la interfase entre aire y agua.

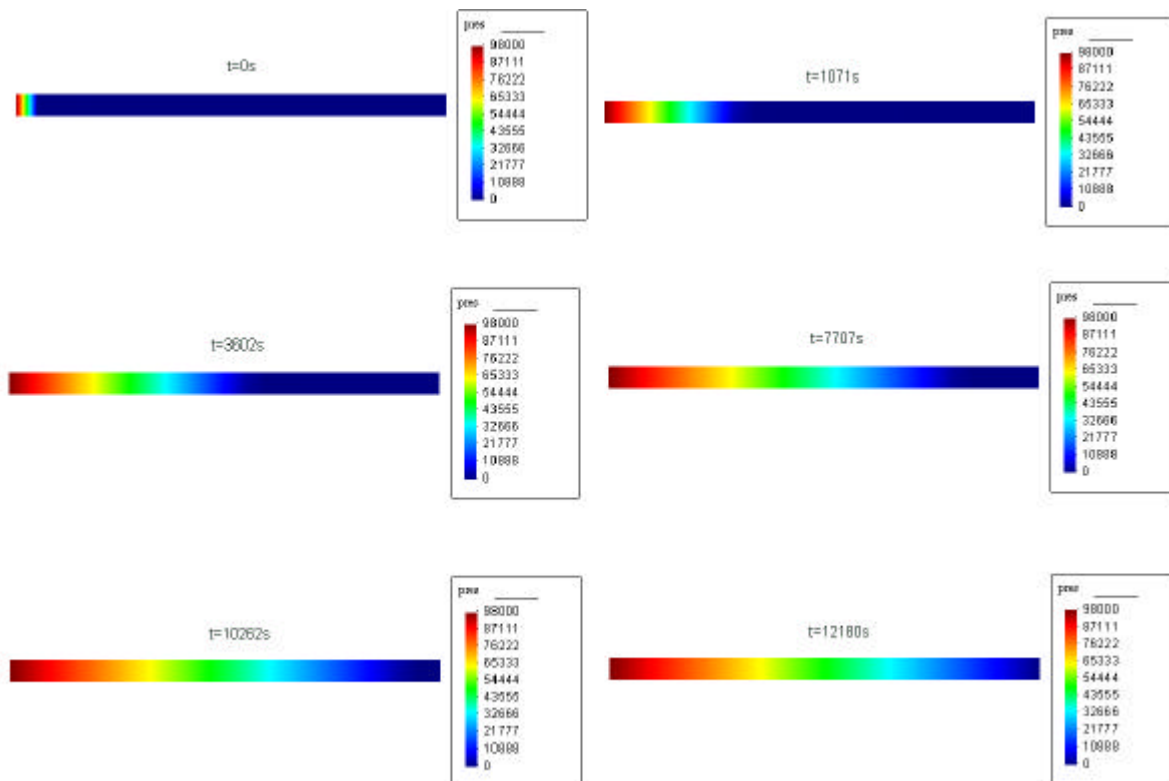


Figura 4-3: Filtración en un tubo horizontal: evolución de la presión.

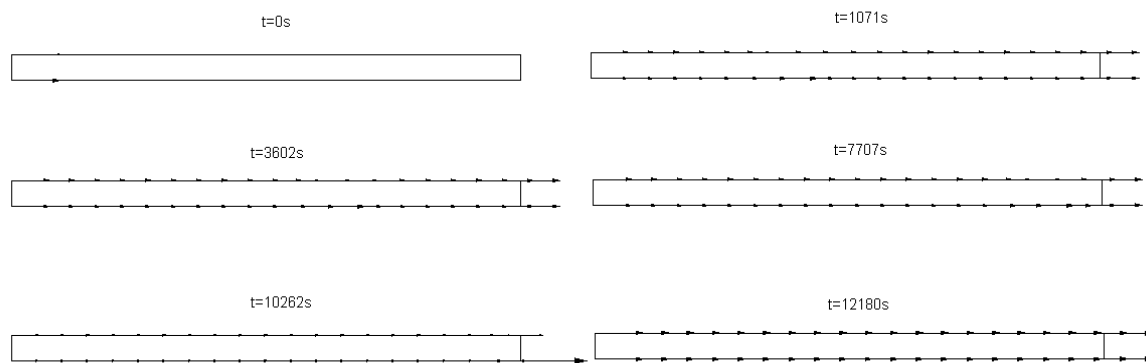


Figura 4-4: Filtración en un tubo horizontal: evolución de los vectores velocidad.

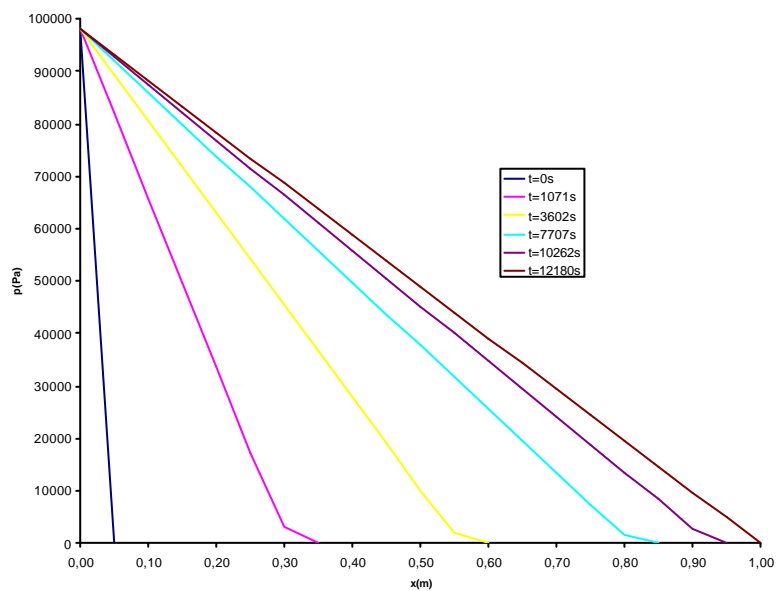


Figura 4-5: Filtración en un tubo horizontal: presión en el tubo para seis pasos de tiempo.

### Presas rectangular

En este ejemplo se estudia la filtración en una presa rectangular. Dicha presa se supone inicialmente saturada con agua y el aire penetra por el contorno superior. La altura del agua en el contorno izquierdo es de 10.1 m mientras que es tan sólo de 2 m en el contorno derecho (ver Figura 4-6). La discretización espacial consiste en una malla de 2948 elementos triangulares lineales y 1559 nodos. La Figura 4-6 muestra las condiciones de contorno para la presión (en Pa) y la malla computacional. La función indicadora  $\varphi$  se toma como positiva en el contorno superior mientras que la condición inicial para la presión es la hidrostática en todo el dominio.

Las propiedades para el agua y el aire son las dadas en el ejemplo anterior, esto es,  $K_w = 10^9 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$ ,  $\rho_w = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $K_a = 10^5 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$  y  $\rho_a = 1 \text{ Kg m}^{-3}$ . La permeabilidad del suelo al aire y al agua se supone la misma e igual a  $k_a = k_w = 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  y la porosidad del material se toma como  $n = 0.3$ .

Las Figuras 4-7, 4-8 y 4-9 muestran la evolución de la interfase entre el agua y el aire, los valores de la presión y los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario.

Los resultados obtenidos coinciden con aquellos dados por Borja y Kishnani [5], Lacy y Prevost [15] y Oden y Kikuchi [24].

### Presas rectangular con permeabilidad variable

En este ejemplo se estudia la filtración en una presa rectangular con permeabilidad variable. La presa se supone inicialmente saturada con agua mientras el aire va filtrándose por el contorno superior. La altura del agua en el contorno izquierdo es de 10.1 m, siendo de tan sólo 2 m en el contorno derecho (ver Figura 4-10). La discretización espacial consiste en una malla de 2948 elementos triangulares lineales y 1559 nodos. La Figura 4-10 muestra las condiciones de contorno para la presión (en Pa) y la malla computacional. La función indicadora  $\varphi$  se prescribe como positiva en el contorno superior. La condición inicial para la presión es la hidrostática para todo el dominio.

Las propiedades del agua y el aire son las mismas que se especificaron en los dos ejemplos anteriores ( $K_w = 10^9 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$ ,  $\rho_w = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $K_a = 10^5 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$  y  $\rho_a = 1 \text{ Kg m}^{-3}$ ). La permeabilidad del suelo al agua y al aire se supone idéntica e igual a  $k_a = k_w = 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$  en la mitad izquierda del dominio y  $k_a = k_w = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  en la mitad derecha. La porosidad del material se toma, de

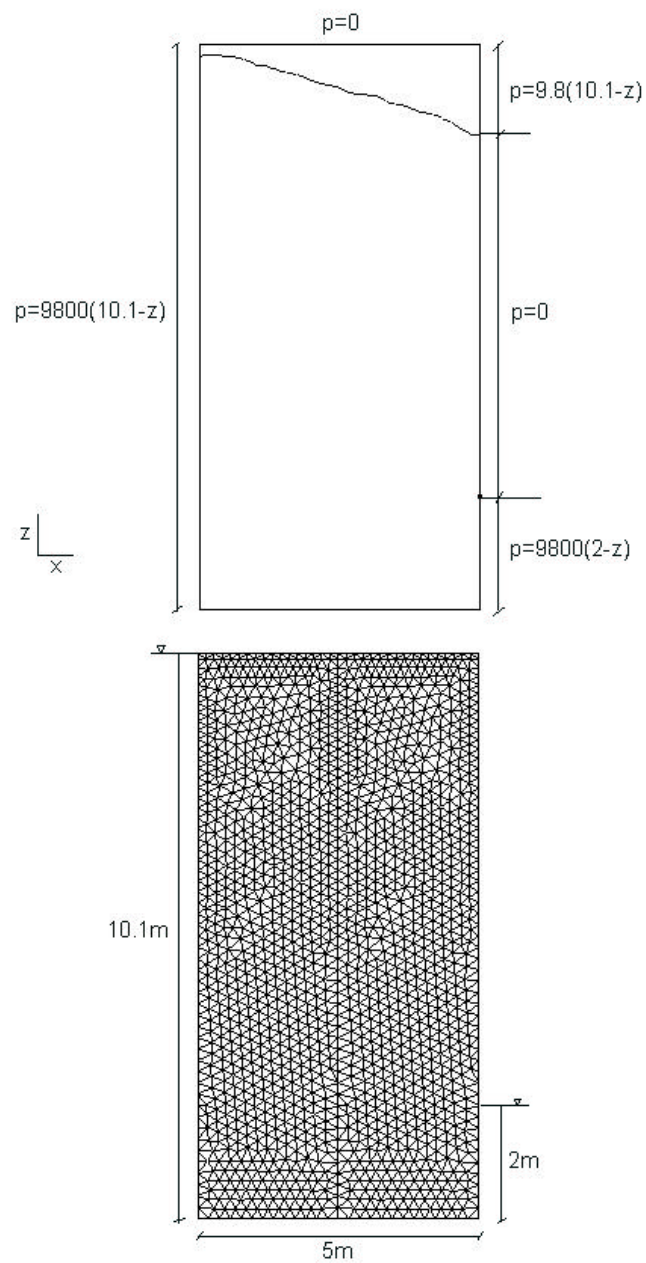


Figura 4-6: Presa rectangular: condiciones de contorno y malla computacional.

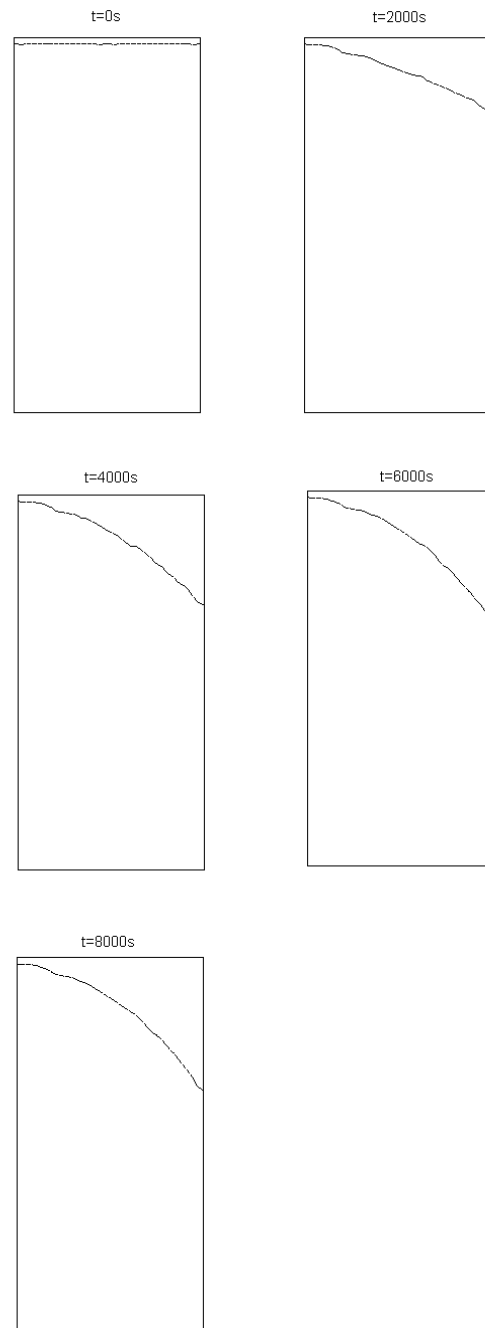


Figura 4-7: Presa rectangular: evolución de la interfase entre los dos fluidos hasta el estado estacionario.

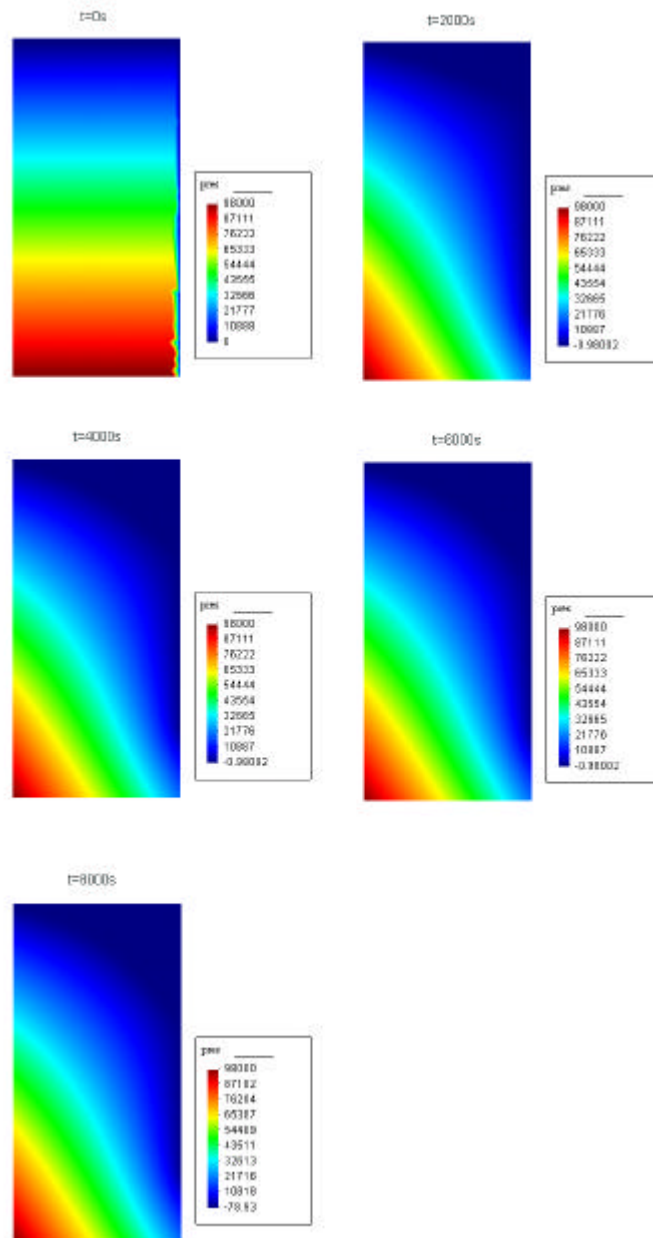


Figura 4-8: Presa rectangular: evolución de los valores de la presión hasta el estado estacionario.

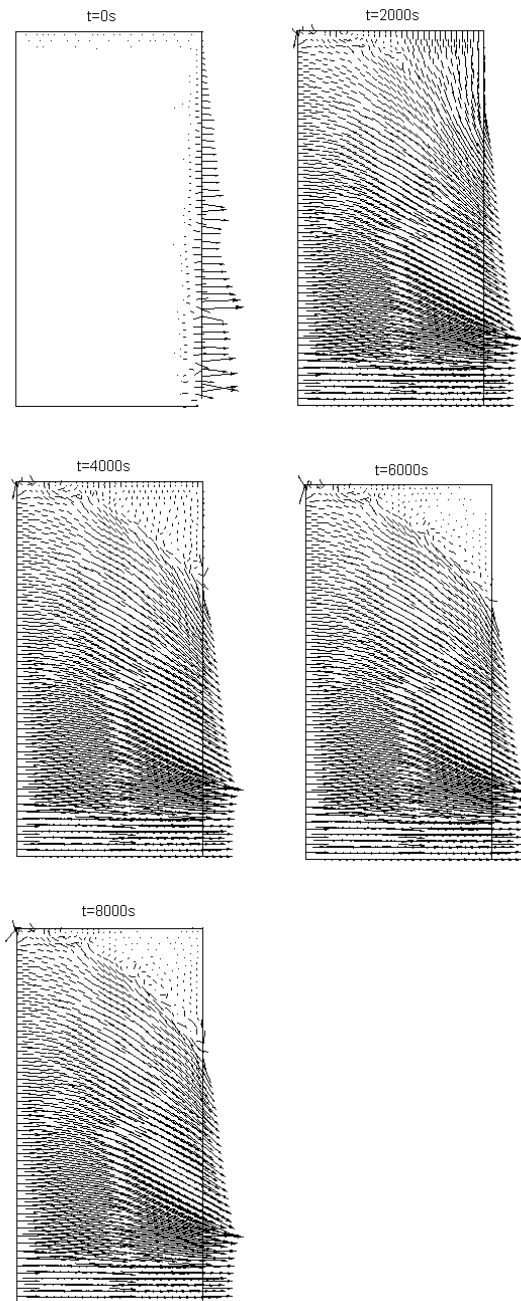


Figura 4-9: Presa rectangular: evolución de los vectores velocidad hasta el estado estacionario.

nuevo, como  $n = 0.3$ .

Las Figuras 4-11, 4-12 y 4-13 muestran la evolución de la interfase entre el agua y el aire, los valores de la presión y los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario.

Los resultados obtenidos se encuentran en gran acuerdo con aquellos dados por Borja y Kishnani [5], Lacy y Prevost [15] y Oden y Kikuchi [24].

### **Presa triangular con drenaje**

Este es el mismo caso resuelto gráficamente por Lambe y Whitman [16] y numéricamente por Borja y Kishnani [5] y Lacy y Prevost [15].

La zona central de la presa se supone compuesta por un material menos permeable que el de las zonas más externas.

Inicialmente la presa posee 6 m de material saturado con agua mientras que el aire va filtrándose por el contorno superior. La altura del agua en el contorno izquierdo es de 6 m, mientras que una zona de drenaje de dos metros de longitud se sitúa en el extremo derecho del contorno inferior tal y como se muestra en la Figura 4-14. La malla utilizada para la discretización espacial cuenta con 2844 elementos triangulares lineales y 1540 nodos (ver Figura 4-14). Las condiciones de contorno para la presión (en Pa) y la malla computacional están dadas en la Figura 4-14. La condición inicial para la presión es la hidrostática, tal y como se muestra en la Figura 4-16.

Las propiedades del agua y del aire son las especificadas en los ejemplos anteriores ( $K_w = 10^9$  Kg m<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>,  $\rho_w = 1000$  Kg m<sup>-3</sup>,  $K_a = 10^5$  Kg m<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup> y  $\rho_a = 1$  Kg m<sup>-3</sup>). La permeabilidad de los materiales al aire y al agua se suponen idénticos y los valores son  $k_a = k_w = 3 \cdot 10^{-2}$  m s<sup>-1</sup> en las dos zonas exteriores y  $k_a = k_w = 5 \cdot 10^{-3}$  m s<sup>-1</sup> en la región central de la presa. La porosidad de los materiales se toma igual a  $n = 0.3$ .

Las Figuras 4-15, 4-16 y 4-17 muestran la evolución de la interfase entre los dos fluidos, los valores de la presión y los vectores velocidad hasta alcanzar el estado estacionario.

Los resultados obtenidos coinciden con aquellos dados por Borja y Kishnani [5].

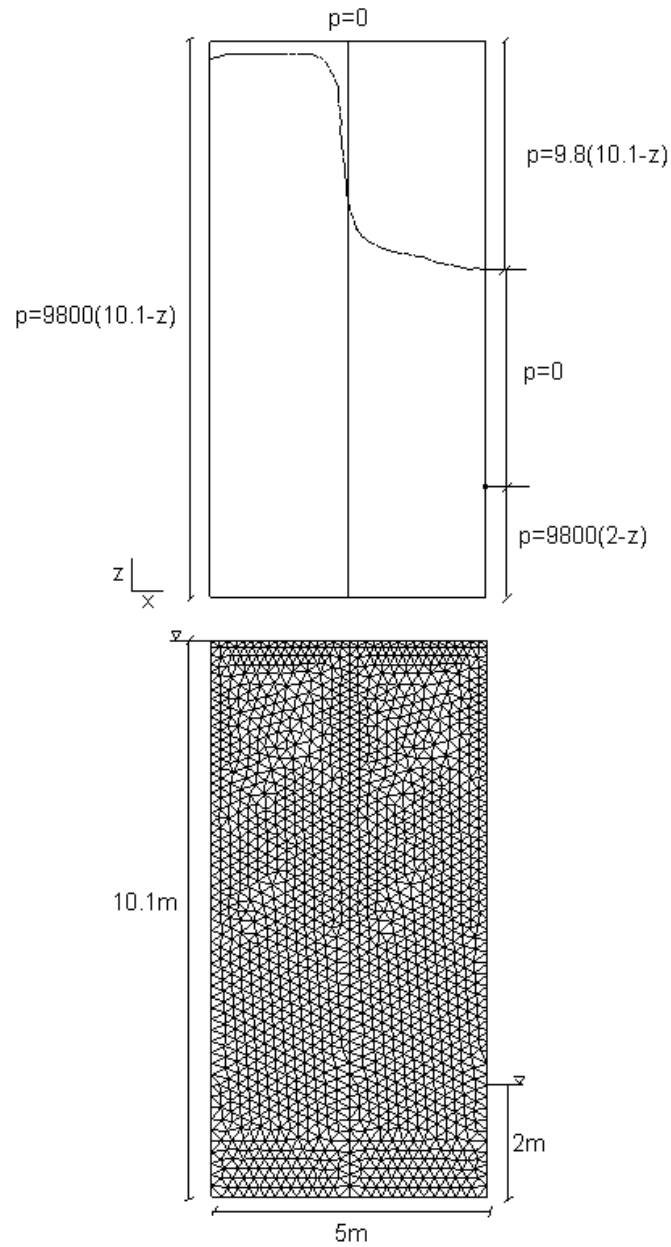


Figura 4-10: Presa rectangular con permeabilidad variable: condiciones de contorno y malla computacional.

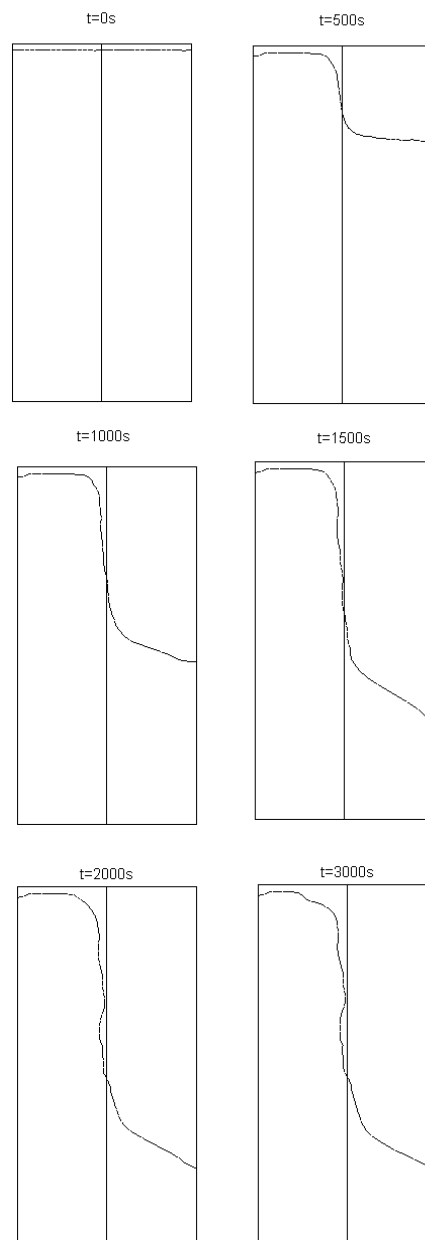


Figura 4-11: Presa rectangular con permeabilidad variable: evolución de la interfase entre los dos fluidos hasta el estado estacionario.

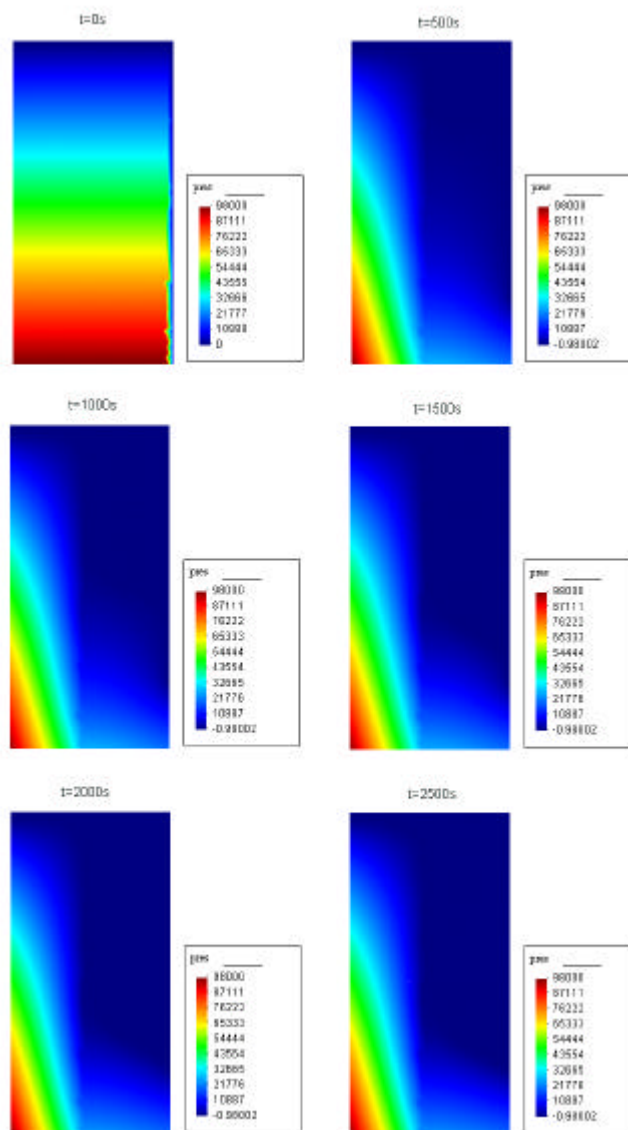


Figura 4-12: Presa rectangular con permeabilidad variable: evolución de la presión hasta el estado estacionario.

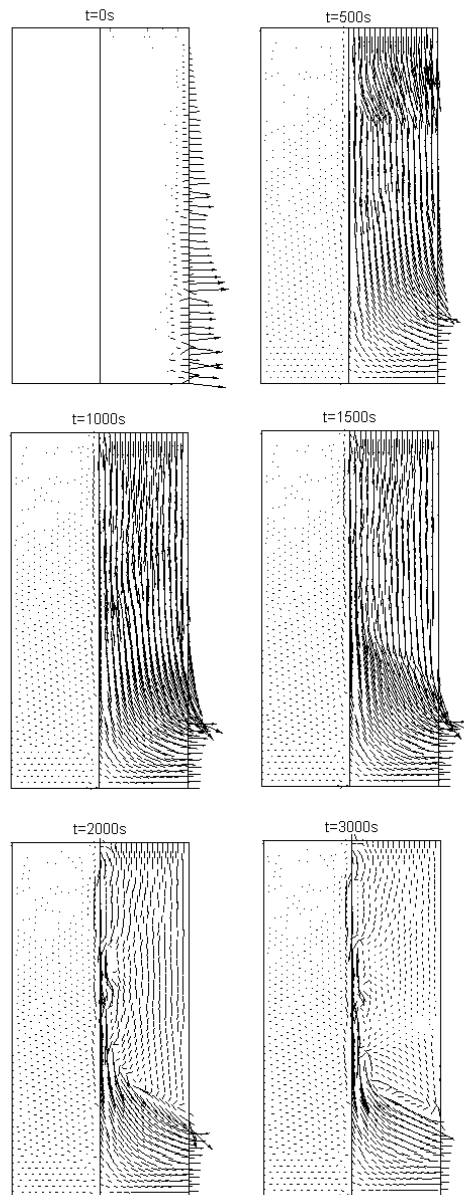


Figura 4-13: Presa rectangular con permeabilidad variable: evolución de los vectores velocidad hasta el estado estacionario.

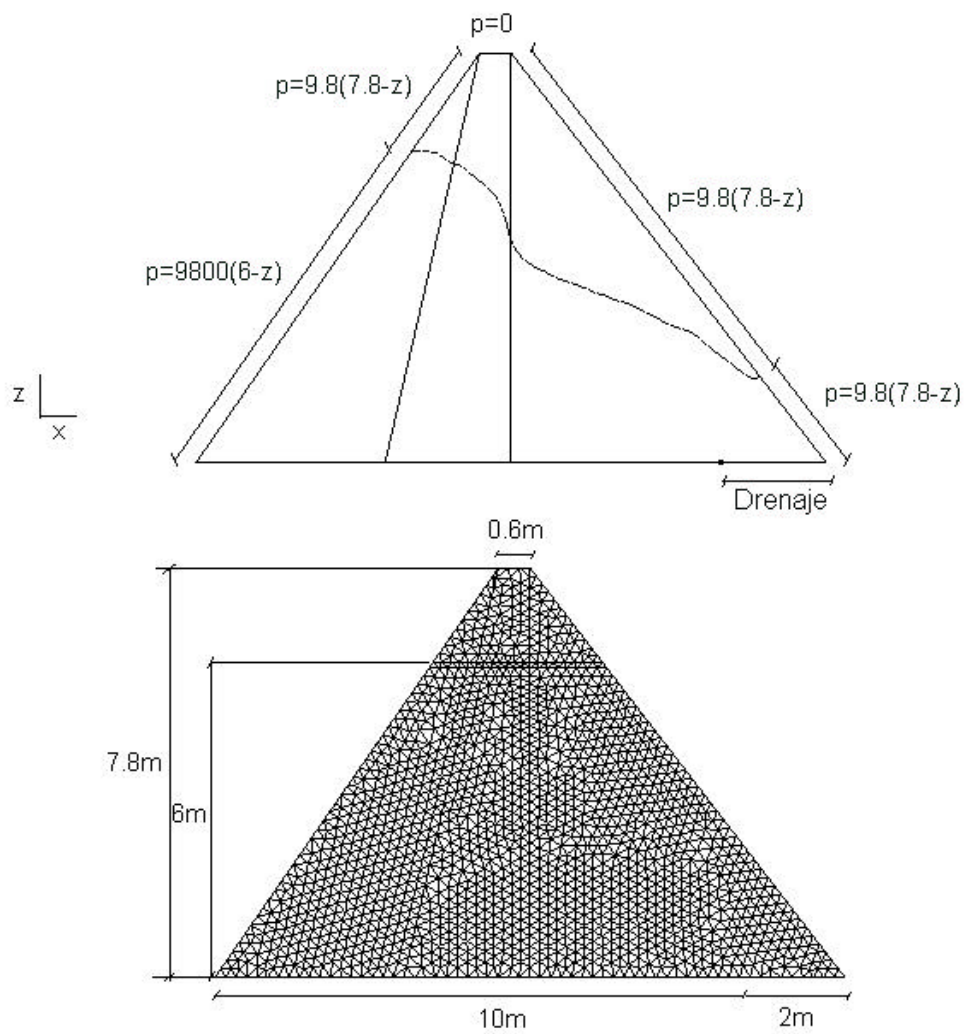


Figura 4-14: Presa triangular con drenaje: condiciones de contorno y malla computacional.

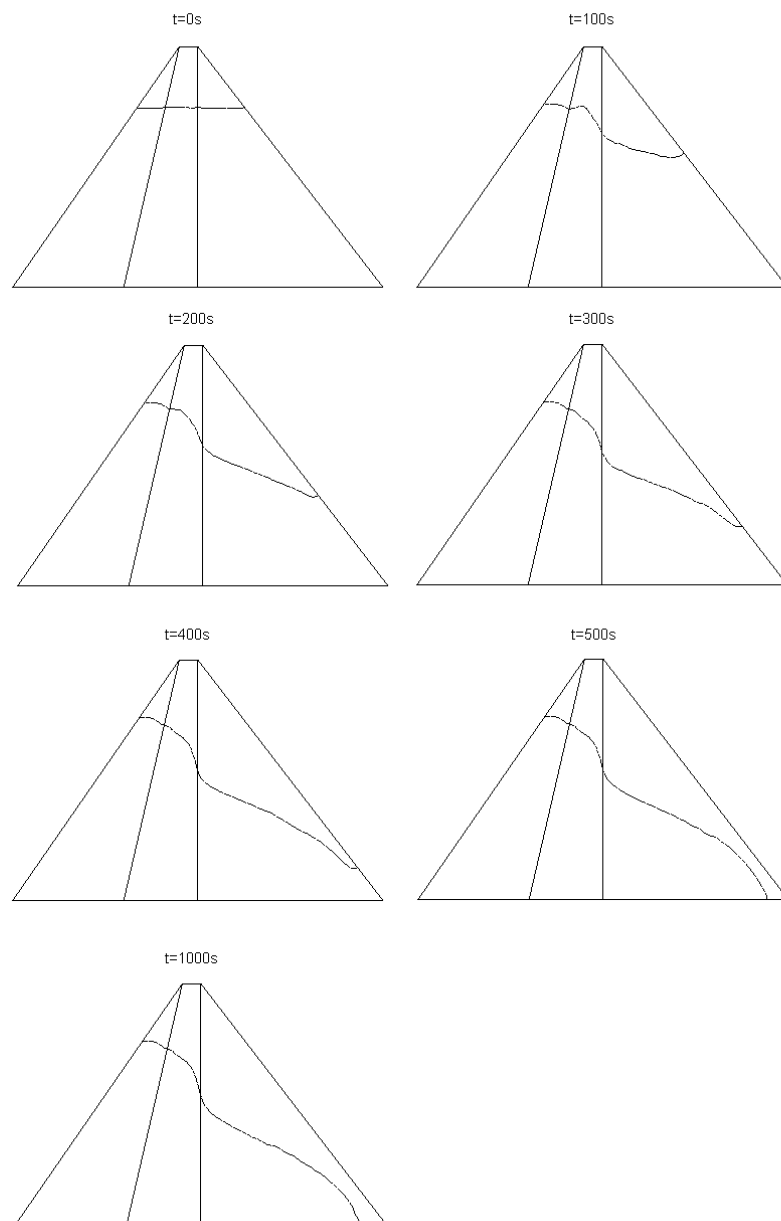


Figura 4-15: Presa triangular con drenaje: evolución de la interfase entre los dos fluidos hasta el estado estacionario.

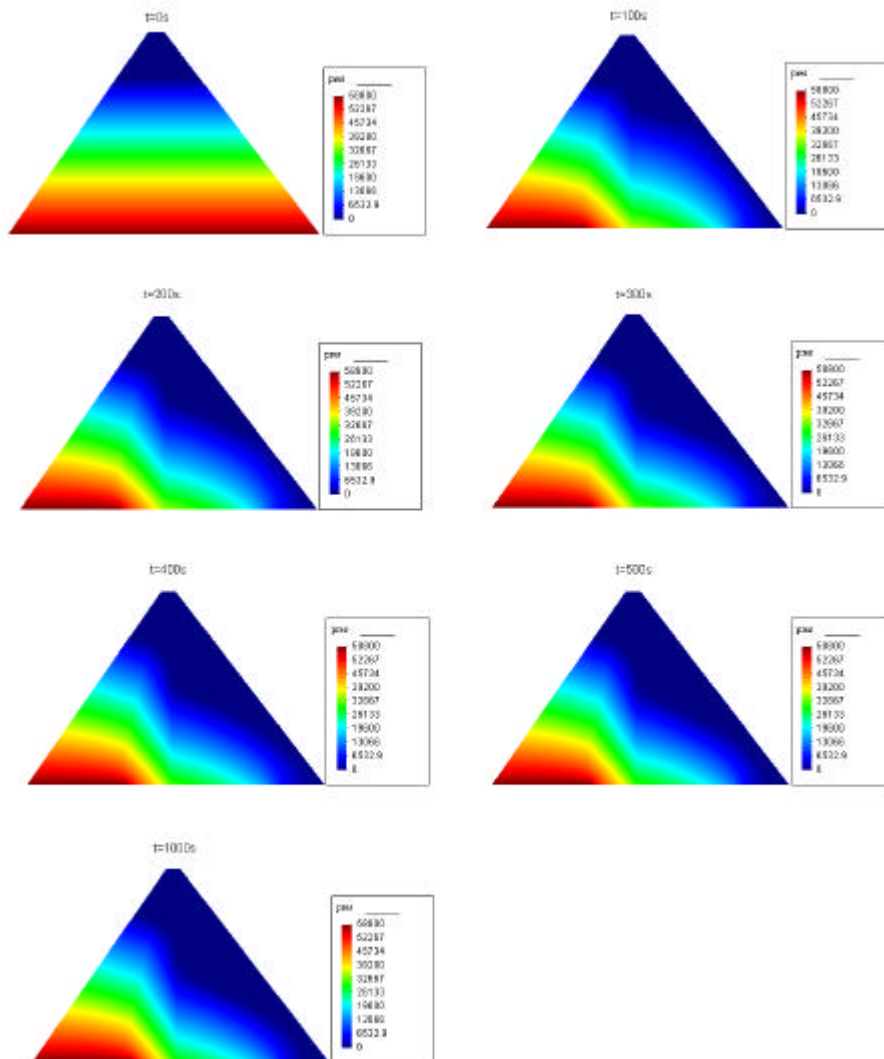


Figura 4-16: Presa triangular con drenaje: evolución de la presión hasta el estado estacionario.

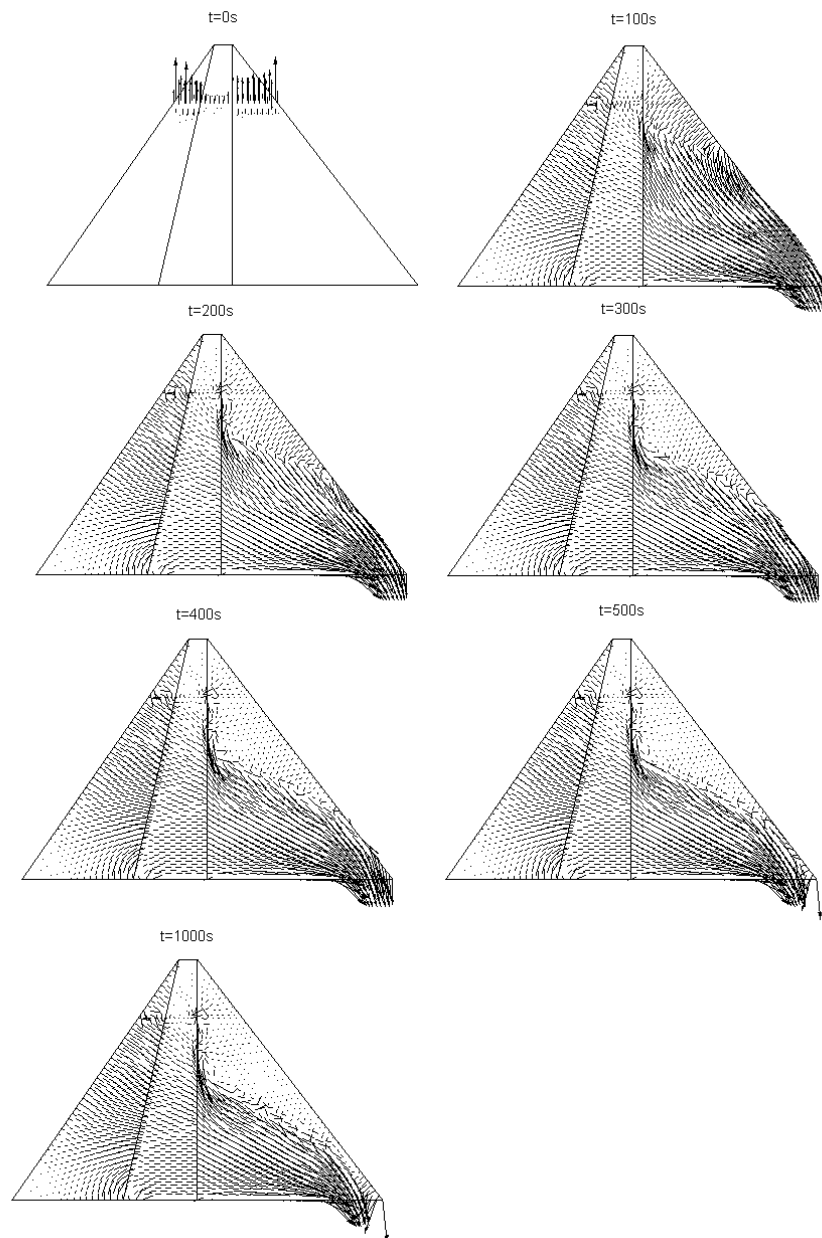


Figura 4-17: Presa triangular con drenaje: evolución de los vectores velocidad hasta el estado estacionario.

## 4.3. Transporte de contaminantes

### 4.3.1. Introducción

Una vez que el campo de velocidades en el medio poroso es conocido, puede procederse al estudio del transporte de contaminantes en dicho medio.

Los principales fenómenos a tener en cuenta son la convección, la dispersión mecánica debida a la tortuosidad, y la difusión molecular. Existen además otros tres fenómenos que son los responsables del almacenamiento (o escape) temporal del contaminante y de la inducción de efectos retardantes, tales como adsorción, degradación y el efecto del agua inmóvil [4] [6] [37]. El transporte de contaminantes en medio poroso es gobernado por las ecuaciones transitorias de convección-difusión donde la incógnita es la concentración de contaminante.

Las dificultades en la solución numérica de las ecuaciones de convección-difusión han sido ampliamente reconocidas. Hay que hacer notar que la filtración en medio poroso se encuentra normalmente dominada por términos difusivos, mientras que el movimiento de los fluidos intersticiales puede dar lugar a transporte convectivo dominante. Es bien conocido que el método de Elementos Finitos estándar de Galerkin a menudo da lugar a soluciones oscilatorias, particularmente en el caso del problema del transporte convectivo dominante o en el caso de ser muy gruesa la malla de elementos finitos utilizada, además de ser un método válido únicamente en el caso de ecuaciones autoadjuntas. Por ello, en este capítulo haremos uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin, de gran sencillez y precisión, para el tratamiento de problemas de convección dominante.

La estructura de esta segunda parte del capítulo 4 es la siguiente. En primer lugar se presentan las ecuaciones generales que gobiernan el transporte de contaminantes en suelos no saturados. Seguidamente se procede a la discretización de las ecuaciones explicándose algunos métodos útiles para el tratamiento de las oscilaciones en las zonas próximas a las discontinuidades. Finalmente se muestran algunos ejemplos de validación para el modelo de transporte convectivo propuesto en este trabajo.

### 4.3.2. Ecuaciones generales

Vamos a estudiar aquí los fenómenos y las ecuaciones constitutivas que gobiernan el transporte de contaminantes en suelos no saturados [36].

### Convección

El flujo convectivo de contaminantes transportado por una corriente móvil de agua cuya concentración viene dada por  $\phi_m$ , se define como [4]

$$\mathbf{J}_c = \phi_m \mathbf{U}_w \quad (4.38)$$

donde la velocidad intrínseca del agua móvil [18]

$$\mathbf{U}_w = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{w}}{\theta_m} \approx \frac{\mathbf{w}}{\theta_m} \quad (4.39)$$

con la porción volumétrica contenida por la fase de agua móvil

$$\theta_m = n(S_w - S_{w0}) \quad (4.40)$$

En la ecuación anterior,  $\mathbf{w}$  es la velocidad de Darcy del agua, es decir,  $n\mathbf{v}_{\text{real}}$ ;  $\mathbf{u}$  es la velocidad del esqueleto sólido;  $n$  es la porosidad;  $S_w$  es el grado de saturación del agua;  $S_{w0}$  es la porción de agua inmóvil en  $S_w$ ; y  $nS_{w0}$  es la proporción volumétrica contenida en el agua inmóvil simbolizada por

$$\theta_{im} = nS_{w0} \quad (4.41)$$

### Difusión molecular

El flujo de masa difusivo molecular producido por el movimiento aleatorio de las moléculas en el agua móvil debido al gradiente de la concentración está definido por la ley de Fick como

$$\mathbf{J}_m = -D_m \nabla \phi_m \quad (4.42)$$

donde  $D_m$  es el coeficiente de difusión molecular en el medio poroso, que puede determinarse por [20]

$$D_m = \tau \eta m D_{m0} \quad (4.43)$$

siendo  $D_{m0}$  el coeficiente de difusión molecular en el agua que es aproximadamente igual a  $10^{-5}$  cm<sup>2</sup>/s;  $\eta$  es el factor de retardo electromolecular (que varía entre 0.9 y 1.0 para grava y arena, entre 0.4 y 0.5

para sedimentos, y es aproximadamente 0.2 para arcilla);  $\tau = \theta^{4.3}/\theta_s^2$  es un factor de tortuosidad con  $\theta = nS_w$  y  $\theta_s = n$ , de manera que el valor del coeficiente de difusión molecular  $D_m$  en el medio poroso está, en general, relacionado con la porosidad y el grado de saturación.

### Dispersión mecánica y dispersión hidrodinámica

La dispersión mecánica del flujo debido a las variaciones de la velocidad de los flujos de filtración en la sección durante el movimiento del contaminante se ha propuesto que obedezca una ley del tipo de la de Fick

$$\mathbf{J}_d = -\mathbf{D}_d \nabla \phi_m \quad (4.44)$$

donde  $\mathbf{D}_d$  es el tensor simétrico de segundo orden llamado tensor de dispersión mecánica. Para un medio poroso isotrópico, puede expresarse como [4]

$$\mathbf{D}_d = a_T \|\mathbf{U}_w\| \mathbf{I} + (a_L - a_T) \frac{\mathbf{U}_w \mathbf{U}_w^T}{\|\mathbf{U}_w\|} \quad (4.45)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz unitaria;  $a_L$  es la dispersividad longitudinal (es decir, la dispersividad a lo largo de las líneas de flujo); y  $a_T$  es la dispersividad transversal (dispersividad a lo largo de la normal a las líneas de flujo). Por lo tanto, el flujo dispersivo y el flujo difusivo pueden sumarse para obtener el llamado flujo de dispersión hidrodinámico

$$\mathbf{J}_h = -\mathbf{D}_h \nabla \phi_m \quad (4.46)$$

donde  $\mathbf{D}_h$  es el tensor de dispersión hidrodinámico y puede escribirse como

$$\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_d = \tau \eta n D_{m0} \mathbf{I} + a_T \|\mathbf{U}_w\| \mathbf{I} + (a_L - a_T) \frac{\mathbf{U}_w \mathbf{U}_w^T}{\|\mathbf{U}_w\|} \quad (4.47)$$

### Efecto del agua inmóvil

Pueden existir en el medio poroso regiones de agua inmóvil o estancada debido a que el agua ocupe poros no comunicados o a la existencia de zonas con permeabilidad muy baja. Es común el suponer que en el agua inmóvil no puede tener lugar dispersión hidrodinámica ni convección del contaminante. Sin

embargo, existe un proceso de intercambio de contaminante entre el agua inmóvil y móvil. Denotando con  $\phi_{im}$  la concentración de contaminante del agua inmóvil, la razón de intercambio de contaminante  $f_{im}^m$  se expresa normalmente por [4]

$$f_{im}^m = \alpha_d^*(\phi_{im} - \phi_m) \quad (4.48)$$

donde  $\alpha_d^*$  es el coeficiente de transporte de masa del fluido en movimiento al agua inmóvil ( $s^{-1}$ ) que depende del coeficiente de difusión molecular y de la geometría del área de contacto entre el agua móvil e inmóvil, y puede ser calculado utilizando la siguiente expresión [6]

$$\alpha_d^* = aD_{m0}/\tau\delta^2 \quad (4.49)$$

donde  $a$  es un factor de forma geométrico y  $\delta$  es la longitud de difusión característica. Puede suponerse simplemente que  $\alpha_d^*$  es constante, puesto que no se conocen los valores de  $a$ ,  $D_{m0}$ ,  $\tau$ , y  $\delta$ .

### Adsorción

Adsorción es el fenómeno de aumento de la masa de contaminante en el sólido a partir de la interfase fluido-sólido. Los principales factores que contribuyen a la adsorción o desorción de contaminante son las características físicas y químicas del contaminante considerado y de la superficie del sólido. La adsorción se considera instantánea y reversible. Las cantidades  $F_m$  y  $F_{im}$  de contaminantes absorbidos por medio del agua móvil y del agua inmóvil pueden escribirse como sigue

$$F_m = (1 - p)K_d^m\phi_m^{N1} \quad (4.50)$$

$$F_{im} = pK_d^{im}\phi_{im}^{N2} \quad (4.51)$$

donde  $K_d^m$  y  $K_d^{im}$  son coeficientes de distribución ( $m^3/Kg$ ); los exponentes  $N1$  y  $N2$  son parámetros en general específicos del material del suelo y de las especies de contaminante en consideración. Generalmente se supone  $K_d^m = K_d^{im} = K_d$  y  $N1 = N2 = N$ . Por tanto, podemos escribir las dos ecuaciones (4.50) y (4.51) como

$$F_m = (1 - p)K_d\phi_m^N \quad (4.52)$$

$$F_{im} = pK_d\phi_{im}^N \quad (4.53)$$

Si  $N = 1$  el problema pasa a ser un problema de adsorción lineal;  $p$  es la porción de la superficie de contacto fluido-sólido y está relacionado con los fluidos inmóviles, pudiendo aproximarse por

$$p = \frac{\theta_{im}}{\theta} \quad (4.54)$$

La masa absorbida  $F$  de especies de contaminante por unidad de masa del sólido se compone de dos partes: una referente al agua móvil y otra al agua inmóvil

$$F = F_m + F_{im} = (1 - p)K_d\phi_m^N + pK_d\phi_{im}^N \quad (4.55)$$

### Degradación

Algunos procesos, tales como la degradación química, la desintegración radioactiva, etc., son responsables del fenómeno de degradación. Este tipo de procesos constituyen las fuentes y sumideros del contaminante en el medio poroso. Considerando un modelo lineal de degradación, la degradación de la masa del contaminante por segundo y por unidad de masa para cada fase puede expresarse como [31]

$$\Gamma_s = -k_s F = -k_s(F_m + F_{im}) \quad (4.56)$$

$$\Gamma_m = -k_m \frac{\phi_m}{\rho_w} \quad (4.57)$$

$$\Gamma_{im} = -k_{im} \frac{\phi_{im}}{\rho_w} \quad (4.58)$$

donde  $k_s$ ,  $k_m$  y  $k_{im}$  son coeficientes de degradación ( $s^{-1}$ ) en el sólido y el agua móvil e inmóvil respectivamente, y  $\rho_w$  es la densidad del agua.

### Ecuaciones que gobiernan el transporte de contaminantes

La ecuación del balance de masa para el contaminante en agua móvil e inmóvil y en el sólido pueden escribirse en la siguiente forma [31]

$$\frac{\partial(\theta_m \phi_m)}{\partial t} + \text{div} [\theta_m (\phi_m \mathbf{U}_w - \mathbf{D}_h \nabla \phi_m)] = \theta_m \rho_w \Gamma_m + f_{im}^m - f_m^s + Q^* c^* \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial(\theta_{im} \phi_{im})}{\partial t} = \theta_{im} \rho_w \Gamma_{im} - f_{im}^m - f_{im}^s \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial(\theta_s \rho_s F)}{\partial t} = \theta_s \rho_s \Gamma_s + f_m^s + f_{im}^s \quad (4.61)$$

donde  $\theta_s = 1 - n$  es la proporción volumétrica contenida por la fase sólida;  $\rho_s$  es la densidad de la fase sólida;  $\rho_s F$  puede considerarse como la concentración del contaminante absorbido en el sólido;  $Q^*$  es la fuente de flujo de agua con concentración  $c^*$  de especies de contaminante;  $f_x^y$  es la cantidad de contaminante que pasa de la fase  $x$  a la fase  $y$  por unidad de tiempo en un elemento representativo de volumen.

#### 4.3.3. Discretización

Consideremos la ecuación que rige el transporte de contaminantes en agua móvil (4.59)

$$\frac{\partial(\theta_m \phi_m)}{\partial t} + \text{div} [\theta_m (\phi_m \mathbf{U}_w - \mathbf{D}_h \nabla \phi_m)] = \theta_m \rho_w \Gamma_m + f_{im}^m - f_m^s + Q^* c^* \quad (4.62)$$

Teniendo en cuenta lo que ya vimos en la sección anterior

$$\mathbf{U}_w = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{w}}{\theta_m} \approx \frac{\mathbf{w}}{\theta_m} \quad (4.63)$$

donde  $\mathbf{w}$  es la velocidad de Darcy del agua, esto es  $n\mathbf{v}_{\text{real}}$  siendo  $n$  la porosidad, podemos escribir la ecuación (4.62) para un medio no saturado como sigue

$$\frac{\partial(\theta_m \phi_m)}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{F}_{\text{conv}} + \mathbf{F}_{\text{disp}} + \mathbf{F}_{\text{dif}}) = S \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial(\theta_m \phi_m)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{F}) = S \quad (4.65)$$

donde  $\phi_m$  es la concentración de contaminante en el agua,  $\mathbf{F}$  es el flujo total de contaminante disuelto y  $S$  los términos tipo fuente que engloban degradación, adsorción y el efecto del agua inmóvil antes descritos. Los subíndices *conv*, *disp* y *dif* se refieren a las componentes convectiva, dispersiva y difusiva respectivamente.

Los flujos vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{conv} &= \phi_m \mathbf{w} \\ \mathbf{F}_{disp} &= -\mathbf{D}_d \theta_m \nabla \phi_m \\ \mathbf{F}_{dif} &= -\mathbf{D}_m \theta_m \nabla \phi_m \end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{D}_d$  y  $\mathbf{D}_m$  los tensores de dispersión mecánica y difusión molecular respectivamente, que como ya hemos visto, a menudo se combinan en un único tensor  $\mathbf{D}_h$ . En el caso de un material saturado con porosidad constante y despreciando los efectos del agua inmóvil, la ecuación de balance es

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{F}_{conv} + \mathbf{F}_{disp} + \mathbf{F}_{dif}) = S \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{conv} &= \phi_m \mathbf{v}_{real} \\ \mathbf{F}_{disp} &= -\mathbf{D}_d \nabla \phi_m \\ \mathbf{F}_{dif} &= -\mathbf{D}_m \nabla \phi_m \end{aligned}$$

Para la discretización de esta ecuación se hará uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin. Para ello, podemos escribir la ecuación que rige el transporte de contaminantes de la siguiente manera

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{F}_{conv}) - \text{div}(\mathbf{D}_h \nabla \phi_m) = S \quad (4.67)$$

siendo, como ya vimos,  $\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_d$ .

La naturaleza matemática del problema depende de la influencia relativa de los distintos términos, empleándose para caracterizarla el denominado número de Peclet, dado por

$$Pe = \frac{|\mathbf{v}_{\text{real}}| h}{2\|\mathbf{D}_h\|} \quad (4.68)$$

donde  $h$  es una longitud característica del problema. Cuando el número de Peclet sea muy pequeño, predominará la difusión sobre la convección, ocurriendo lo contrario para valores altos de  $Pe$ .

Como ya se discutió en el capítulo 3, para valores grandes del número de Peclet, deben emplearse algoritmos especiales como pueden ser, entre otros, los denominados Streamline Upwind Petrov-Galerkin, Galerkin Mínimos Cuadrados, Taylor-Galerkin o Galerkin basado en Características. Respecto de los dos primeros, cabe decir que se emplean fundamentalmente para obtener estados estacionarios, y que en problemas transitorios introducen demasiada difusión numérica. Respecto de los métodos de Taylor-Galerkin y de Galerkin-Characterísticas, cabe decir que presentan un buen compromiso entre sencillez y precisión.

La base del desarrollo del método de Taylor-Galerkin es realizar un desarrollo en serie en el tiempo en dos etapas, pasando de los valores de las variables en el instante  $t^n$  a los de  $t^{n+1}$  :

$$\phi_m^{n+1/2} = \phi_m^n + \frac{\Delta t}{2} \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right|^n \quad (4.69)$$

de donde, empleando el sistema original se llega a

$$\bar{\phi}_m^{n+1/2} = \bar{\phi}_m^n + \frac{\Delta t}{2} (\bar{S} - \overline{\text{div}(\mathbf{F}_{\text{conv}})})^n \quad (4.70)$$

donde la barra sobre las variables indica valores promediados en elementos, esto es

$$\bar{\phi}_m = \frac{1}{e} \int \phi_m d \quad (4.71)$$

siendo  $e$  el tamaño del elemento.

Una vez conocidos los valores en  $t^{n+1/2}$  del vector de incógnitas, pueden obtenerse directamente los vectores de flujo y de fuentes tal y como se vio en los capítulos 2 y 3.

El segundo paso emplea estos valores en  $t^{n+1/2}$

$$\phi_m^{n+1} = \phi_m^n + \Delta t \left( \bar{S}^{n+1/2} - \overline{\text{div}}(\mathbf{F}_{conv}^{n+1/2}) + \overline{\text{div}}(\mathbf{D}_h \nabla \phi_m)^n \right) \quad (4.72)$$

Esta segunda ecuación se discretiza empleando el método estándar de Galerkin, llegándose a

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \hat{\phi}_m^n = & \Delta t \left( \int \mathbf{N}^T S^{n+1/2} d - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left( \mathbf{F}_{conv}^{n+1/2} \cdot \mathbf{n} \right) d\Gamma + \right. \\ & \left. + \int (\text{grad } \mathbf{N})^T \mathbf{F}_{conv}^{n+1/2} d + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\mathbf{D}_h \nabla \phi_m)^n \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int (\text{grad } \mathbf{N})^T (\mathbf{D}_h \nabla \phi_m)^n d \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

El sistema de ecuaciones (4.73) a resolver durante cada paso de tiempo es del tipo:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

y puede resolverse de una manera económica utilizando un esquema de Jacobi [25] [26]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{M}_L^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}) \quad (4.74)$$

donde el superíndice es un contador de iteraciones y la matriz  $\mathbf{M}_L$  es la representación diagonal de la matriz de masas. Normalmente son necesarias menos de seis iteraciones para alcanzar la convergencia.

**Estabilidad.** El esquema anteriormente presentado es condicionalmente estable y su incremento de tiempo crítico (o valor máximo de  $\Delta t$  permisible) exige que

$$C \leq \sqrt{\frac{1}{Pe^2} + \alpha} - \frac{1}{Pe}$$

siendo  $\alpha = 1/3$  si se utiliza la forma consistente de la matriz de masas y  $\alpha = 1$  si se hace uso de la forma diagonalizada.

$Pe$  es el número de Peclet del elemento, definido como ya vimos anteriormente

$$Pe = \frac{|\mathbf{v}_{real}|h}{2\|\mathbf{D}_h\|}$$

y  $C$  es el número de Courant del elemento

$$C = \frac{|\mathbf{v}_{\text{real}}|\Delta t}{h}$$

siendo  $h$  una longitud característica del elemento de la malla.

La condición de estabilidad se escribe

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{h}{|\mathbf{v}_{\text{real}}|} \left[ \sqrt{\frac{1}{Pe^2} + \alpha} - \frac{1}{Pe} \right] \quad (4.75)$$

### Tratamiento de discontinuidades

Claramente, con la aproximación de Elementos Finitos en el que todas las variables son interpoladas usando funciones continuas  $C_0$ , no es posible la reproducción exacta de fuertes discontinuidades u ondas de choque. En todas las soluciones de Elementos Finitos las ondas de choque se representan simplemente como regiones con un gradiente grande. La situación ideal se produce si las rápidas variaciones de las variables se concentran en unos pocos elementos alrededor de la discontinuidad. Desafortunadamente en la mayoría de los casos se encuentra que la aproximación de la discontinuidad introduce oscilaciones locales que pueden persistir a lo largo de un área bastante grande del dominio. Por esta razón, se introducen en el análisis de Elementos Finitos viscosidades adicionales que ayudan a amortiguar las oscilaciones causadas por las ondas de choque [40].

Estos procedimientos que hacen uso de viscosidades artificiales se conocen como *métodos de captura de choques*. La idea de añadir una viscosidad artificial o difusión para capturar las discontinuidades fue sugerida en primer lugar por Neumann y Richtmyer en 1950 [35]. Ellos recomendaron que podía lograrse la estabilización añadiendo un término de disipación adicional que juega el papel de la viscosidad en la región próxima a los choques. Algunos trabajos destacables en este área son los de Lapidus [17], Steger [32], MacCormack y Baldwin [19] y Jameson y Schmidt [12]. En Swansea, una forma modificada del método basada en la segunda derivada de la presión fue desarrollada por Peraire et al. [27] y Morgan et al. [21] para cálculos con Elementos Finitos. Recientemente se ha introducido una viscosidad anisótropa para la captura de choques [7] de manera que la difusión sea añadida de una manera más racional.

Para implementar una difusión artificial se procede de la siguiente manera. Se calculan primero los valores aproximados del vector solución usando un método explícito directo. Después se modifica

cada componente escalar de estos valores añadiendo una corrección que suaviza el resultado. De esta manera, si consideramos una componente escalar  $\phi$  y se han determinado ya los valores de  $\phi^{n+1}$ , los nuevos valores  $\phi_s^{n+1}$  vienen dados por

$$\phi_s^{n+1} = \phi^{n+1} + \Delta t \mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \quad (4.76)$$

donde  $\mu_a$  es un coeficiente de difusión artificial. Es importante hacer notar que cualquiera que sea el método utilizado, el cálculo de  $\mu_a$  debe limitarse al dominio próximo a la discontinuidad para evitar así distorsionar el resultado de todo el problema.

En los métodos basados en la segunda derivada, normalmente se asume que el coeficiente  $\mu_a$  debe ser el mismo para cada una de las ecuaciones con que se cuenta y tan sólo se considera importante una de las variables independientes  $\phi$ . Normalmente se supone que la variable a tener en cuenta aquí es la presión de manera que podemos escribir [19]

$$\mu_a = C_e h^3 \frac{|\mathbf{u}| + c}{\tilde{p}} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \right|_e \quad (4.77)$$

donde  $C_e$  es un coeficiente adimensional,  $\mathbf{u}$  es el vector velocidad,  $c$  la velocidad del sonido,  $\tilde{p}$  es la presión promediada y el subíndice  $e$  denota un elemento.

Podemos aproximar el valor de la segunda derivada de cualquier variable escalar  $\phi$  (como puede ser por ejemplo la presión  $p$ ) como [21]

$$h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \hat{\phi} \quad (4.78)$$

donde  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{M}_L$  son las matrices de masa consistente y diagonal respectivamente, y  $\hat{\phi}$  denota los valores nodales. Entonces,  $\mu_a$  puede volver a escribirse como (4.77)

$$\hat{\mu}_a = C_e h \frac{|\mathbf{u}| + c}{\tilde{p}} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \hat{p} \quad (4.79)$$

Hay que hacer notar que  $\hat{\mu}_a$  es una cantidad nodal. Sin embargo, podemos hacer la siguiente aproximación en los elementos:

$$\mu_{ae} = C_e h (|\mathbf{u}| + c) S_e \quad (4.80)$$

donde  $S_e$  es la variación de presión en el elemento, que es una media de las variaciones nodales  $S_i$  dadas por [21]

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |(p_i - p_k)|} \quad (4.81)$$

Puede verificarse que  $S_i = 1$  cuando la presión tiene un extremo local en el nodo  $i$  y  $S_i = 0$  cuando la presión en el nodo  $i$  es el promedio de los valores de todos los nodos adyacentes al nodo  $i$ . El coeficiente  $C_e$  normalmente varía entre 0.0 y 2.0.

Las variables suavizadas pueden escribirse ahora haciendo uso de la aproximación de Elementos Finitos de Galerkin, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.76), (4.77) y (4.80) y reemplazando  $(|\mathbf{u}| + c)$  por  $h/\Delta t_e$  en la ecuación (4.80)

$$\hat{\phi}_s^{n+1} = \hat{\phi}^{n+1} + \Delta t \mathbf{M}_L^{-1} \frac{C_e S_e}{\Delta t_e} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \hat{\phi}^n \quad (4.82)$$

Este método ha sido ampliamente utilizado y es muy eficiente.

#### 4.3.4. Aplicaciones

Se presentan aquí varias aplicaciones numéricas del transporte de contaminantes en medio poroso en las que se ha aplicado el método de Elementos Finitos de Taylor-Galerkin de dos pasos. Estos ejemplos se han centrado en el estudio del proceso de convección. Otros mecanismos como la dispersión, degradación, adsorción o el efecto del agua inmóvil no han sido considerados.

En primer lugar, se estudia el transporte de la función escalón en una dimensión así como la rotación de una concentración cilíndrica en dos dimensiones. Ambos ejemplos son muy interesantes, desde el punto de vista numérico, al ser funciones discontinuas en una y dos dimensiones. Además de las dificultades que este tipo de funciones presentan a la hora de la modelización numérica, tal y como se explicó en la sección 4.3.3, hay otro aspecto importante a discutir, y es que al propagar estas funciones puede observarse el fenómeno conocido como *dispersión numérica*, según el cual las diferentes componentes armónicas de la señal que se propaga viajan con diferentes velocidades en el esquema numérico mientras que en la solución analítica estas velocidades son iguales. De esta manera, al propagar una función escalón, las diferentes velocidades de propagación de los diferentes armónicos

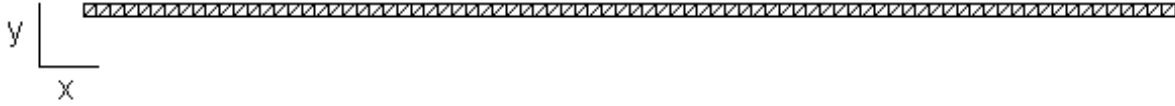


Figura 4-18: Transporte de la función escalón en una dimensión: malla de elementos finitos utilizada.

tienen como consecuencia la aparición de oscilaciones *aguas arriba* o *aguas abajo* de la discontinuidad.

Seguidamente, se analiza el caso del transporte de una concentración cónica en dos dimensiones. Como se observará más adelante, al tratarse en este caso de la propagación de una función continua  $C_0$  y dada la composición espectral de este tipo de funciones, no aparecen apenas oscilaciones.

Finalmente, se estudia como aplicación a un posible caso real, el transporte de contaminantes bajo una excavación.

### Transporte de la función escalón en una dimensión

Se considera en este ejemplo un dominio de 20 m de largo y 0.25 m de ancho. Dadas las dimensiones anteriores podemos considerar que el análisis en este caso es monodimensional.

El dominio es discretizado en 160 elementos triangulares lineales y 162 nodos, tal y como se muestra en la Figura 4-18 .

La forma de la concentración inicial, cuyo transporte vamos a estudiar en esta sección, es de tipo escalón, es decir, dicha concentración tiene un valor de 100 a lo largo de 4 metros centrados a 5 metros del extremo izquierdo y un valor de 0 en el resto del dominio.

La velocidad con la que es transportado el contaminante está dirigida en la dirección horizontal y es constante, es decir, consta de una única componente en la dirección  $x$  cuyo valor es igual a 0.01 m/s.

Para evitar oscilaciones no deseadas se prescribe en los nodos del extremo izquierdo una concentración nula.

En cuanto al paso de tiempo, este es fijado igual a 6 segundos, correspondiente a un número de Courant  $C = 0.24$ , constando el análisis de 300 pasos de tiempo.

En la Figura 4-19 se muestra la evolución temporal de la concentración. Puede observarse la apari-

ción de oscilaciones próximas a las zonas de la discontinuidad. Estas oscilaciones son debidas al fuerte gradiente de concentración de contaminante que se localiza en estos puntos, así como a la dispersión numérica del esquema. Las oscilaciones disminuyen notablemente si hacemos uso del amortiguamiento local propuesto en la sección 4.3.3 con un coeficiente  $C_e = 0.06$  (ver Figura 4-20). La difusión introducida por este método *suaviza* la discontinuidad.

### Rotación de una concentración cilíndrica en dos dimensiones

El dominio considerado en este caso es un cuadrado de 1 metro de lado. La malla de elementos finitos utilizada consta de 1681 nodos y 3200 elementos triangulares lineales, tal y como se muestra en la Figura 4-21.

El flujo es circular, girando en sentido antihorario con una velocidad proporcional a la distancia al centro, siendo el valor máximo de ésta igual a 0.007 m/s en las cuatro esquinas (ver Figura 4-22).

La concentración inicial tiene forma cilíndrica, y su centro se encuentra localizado en un punto situado a 0.725 m del borde izquierdo y a una distancia de 0.5 m del borde inferior. Dicha concentración inicial tiene un valor de 100 en un radio de 0.09 m.

Para evitar oscilaciones no deseadas, se prescribe el valor de la concentración igual a cero en los contornos.

Se fija el paso de tiempo igual a la unidad, constando el análisis de 500 pasos de tiempo.

En las Figuras 4-23 y 4-24 se da la evolución de la concentración en dos y tres dimensiones respectivamente.

Pueden observarse oscilaciones en el escalón y después de éste, debidas al fuerte gradiente de concentración de contaminante localizado en esas zonas y a la dispersión introducida por el esquema numérico, según se discutió con anterioridad. Estas oscilaciones se reducen notablemente al utilizar el amortiguamiento local propuesto con un valor del coeficiente  $C_e = 0.005$ , tal y como se muestra en las Figuras 4-25 y 4-26. Hay que hacer notar que, debido a la difusión introducida por este método, la discontinuidad se *suaviza*.

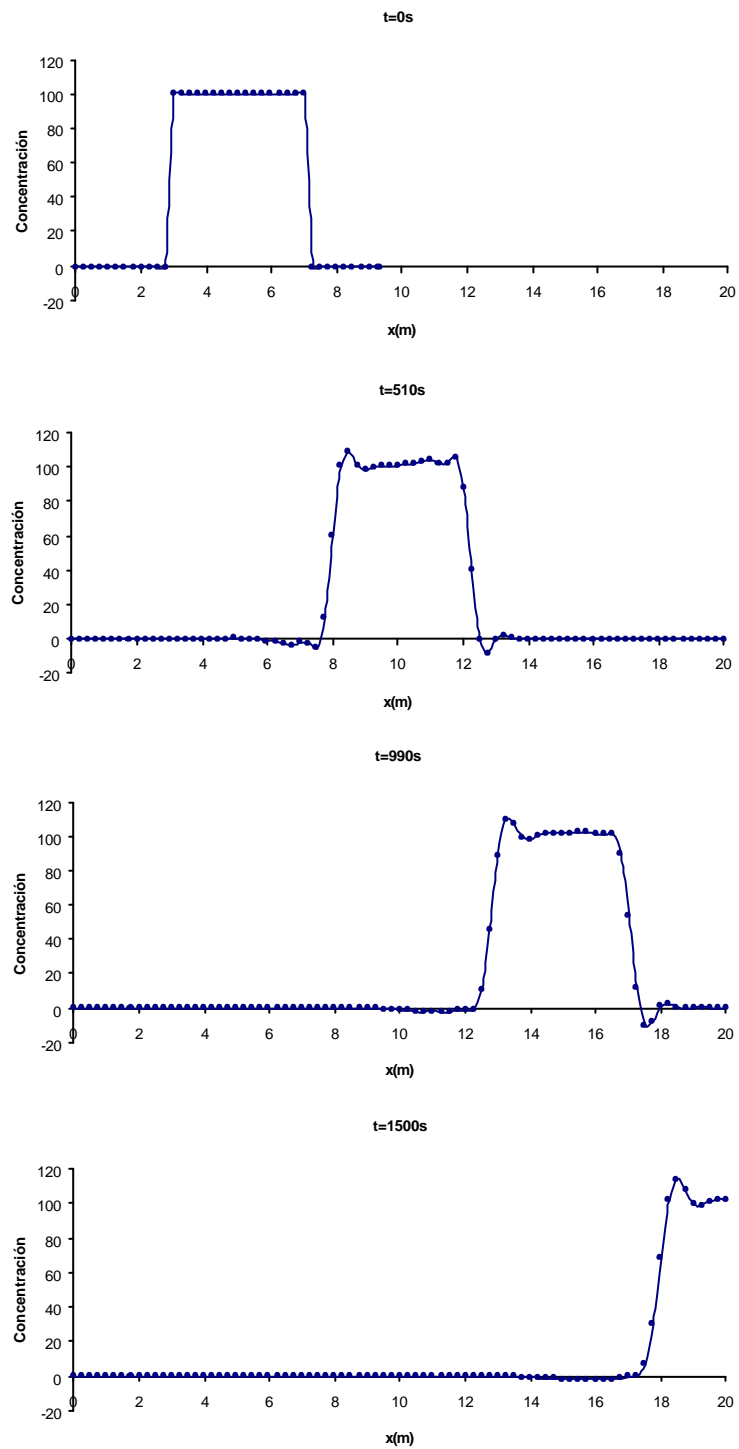


Figura 4-19: Transporte de la función escalón en una dimensión: evolución temporal de la concentración.

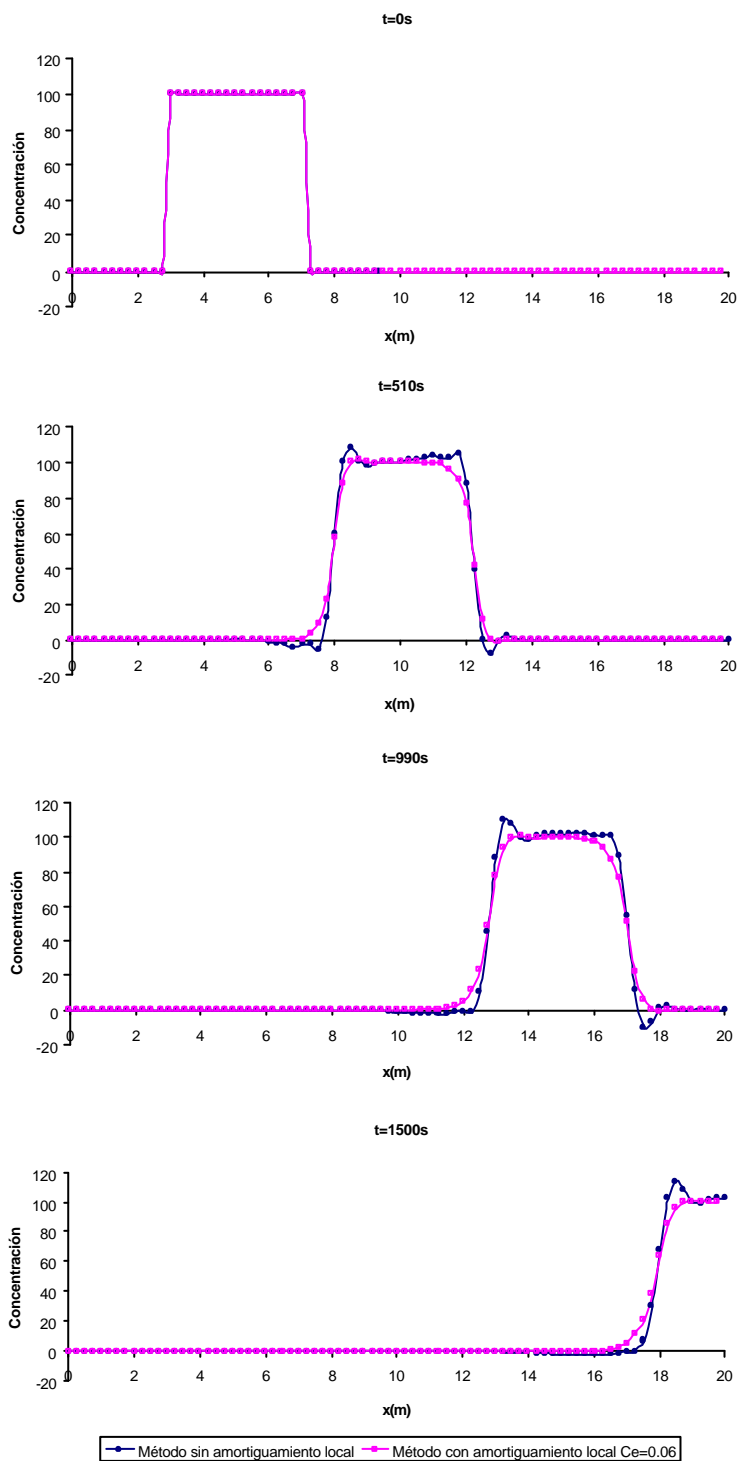


Figura 4-20: Transporte de la función escalón en una dimensión: comparación de la evolución de la concentración utilizando y sin utilizar el amortiguamiento local.

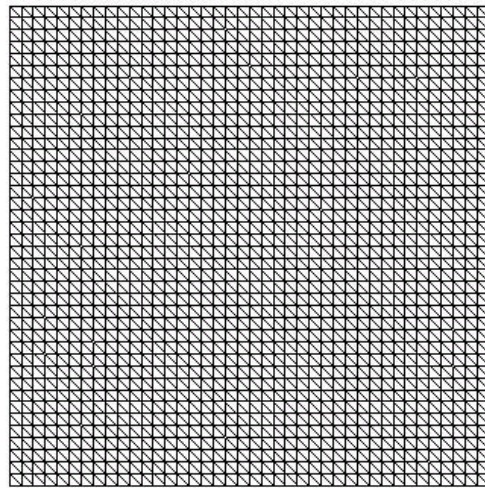


Figura 4-21: Rotación de una concentración cilíndrica: malla computacional.

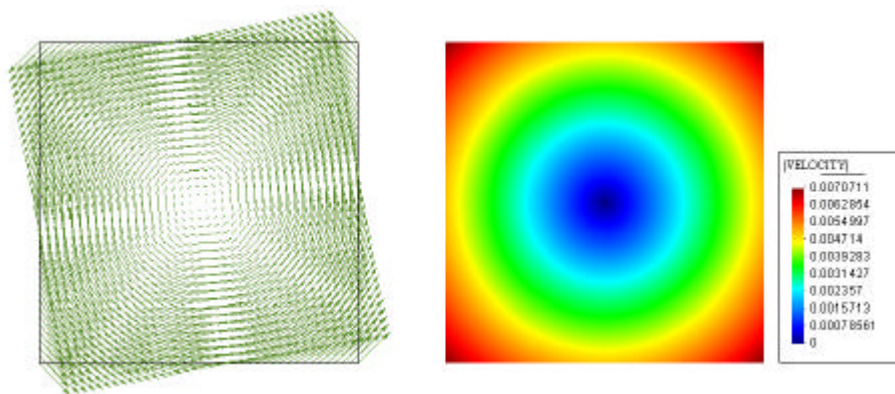


Figura 4-22: Rotación de una concentración cilíndrica: campo de velocidades.

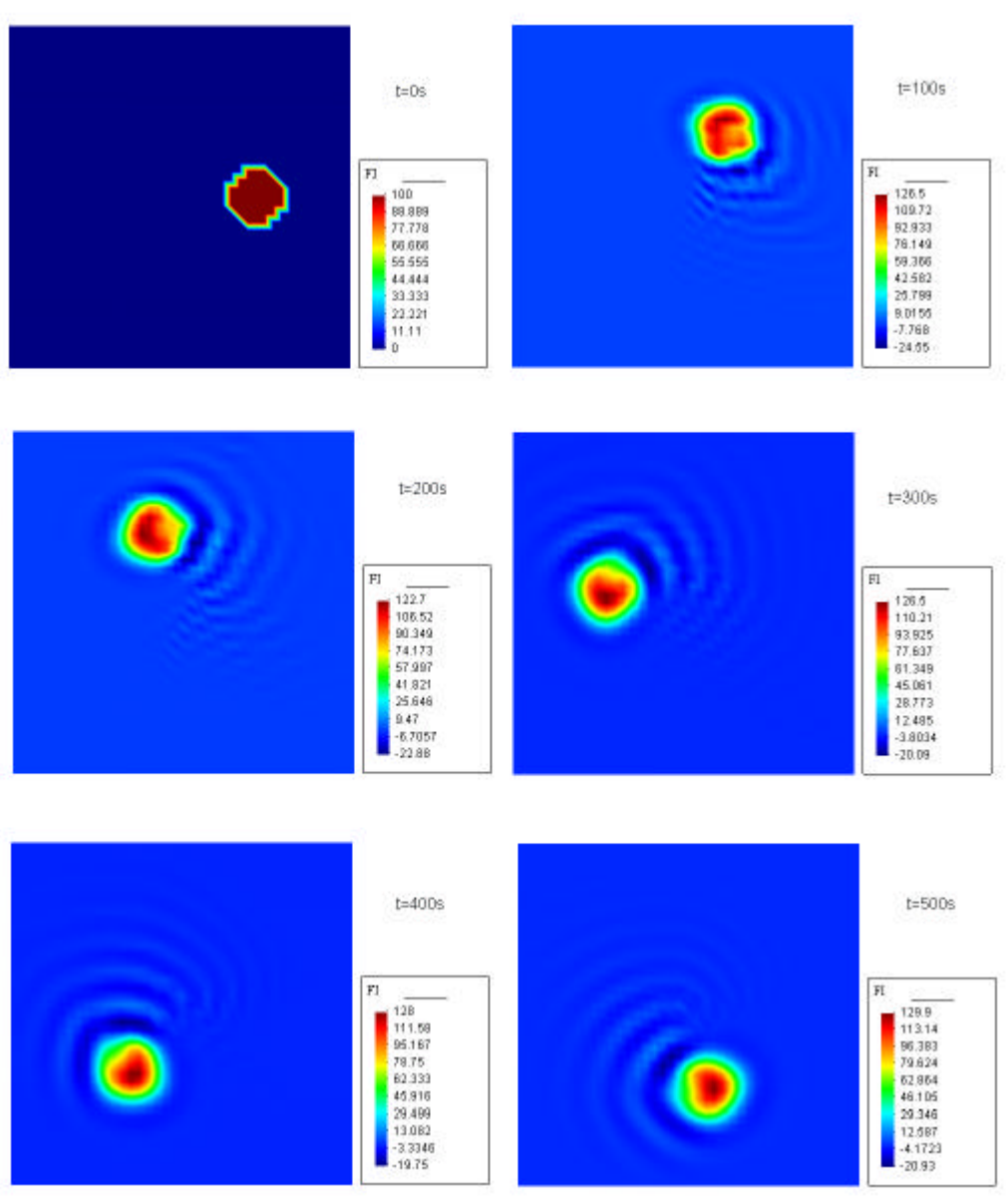


Figura 4-23: Rotación de una concentración cilíndrica: evolución bidimensional de la concentración.

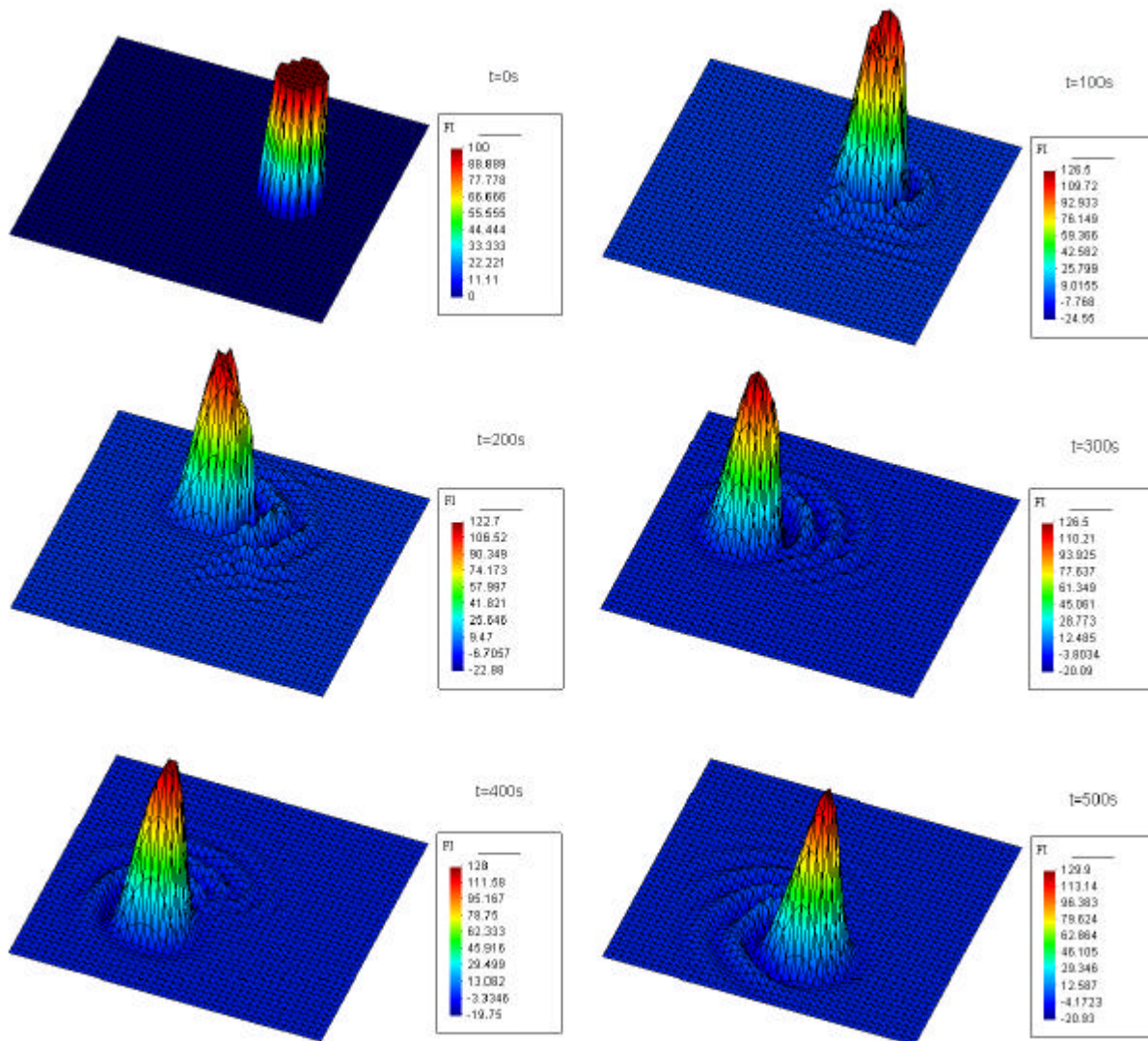


Figura 4-24: Rotación de una concentración cilíndrica: evolución tridimensional de la concentración.

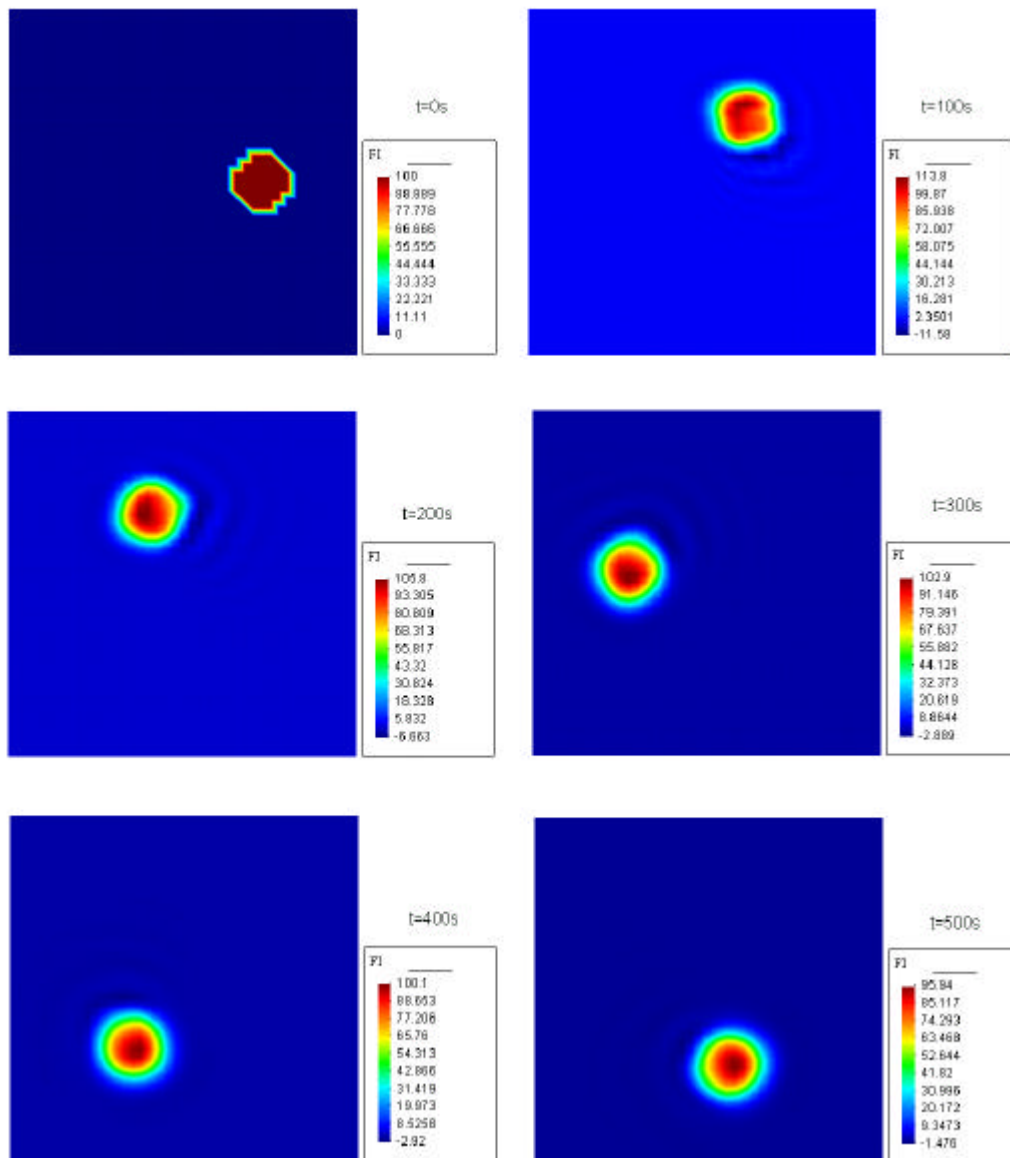


Figura 4-25: Rotación de una concentración cilíndrica: evolución bidimensional de la concentración con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.005$ .

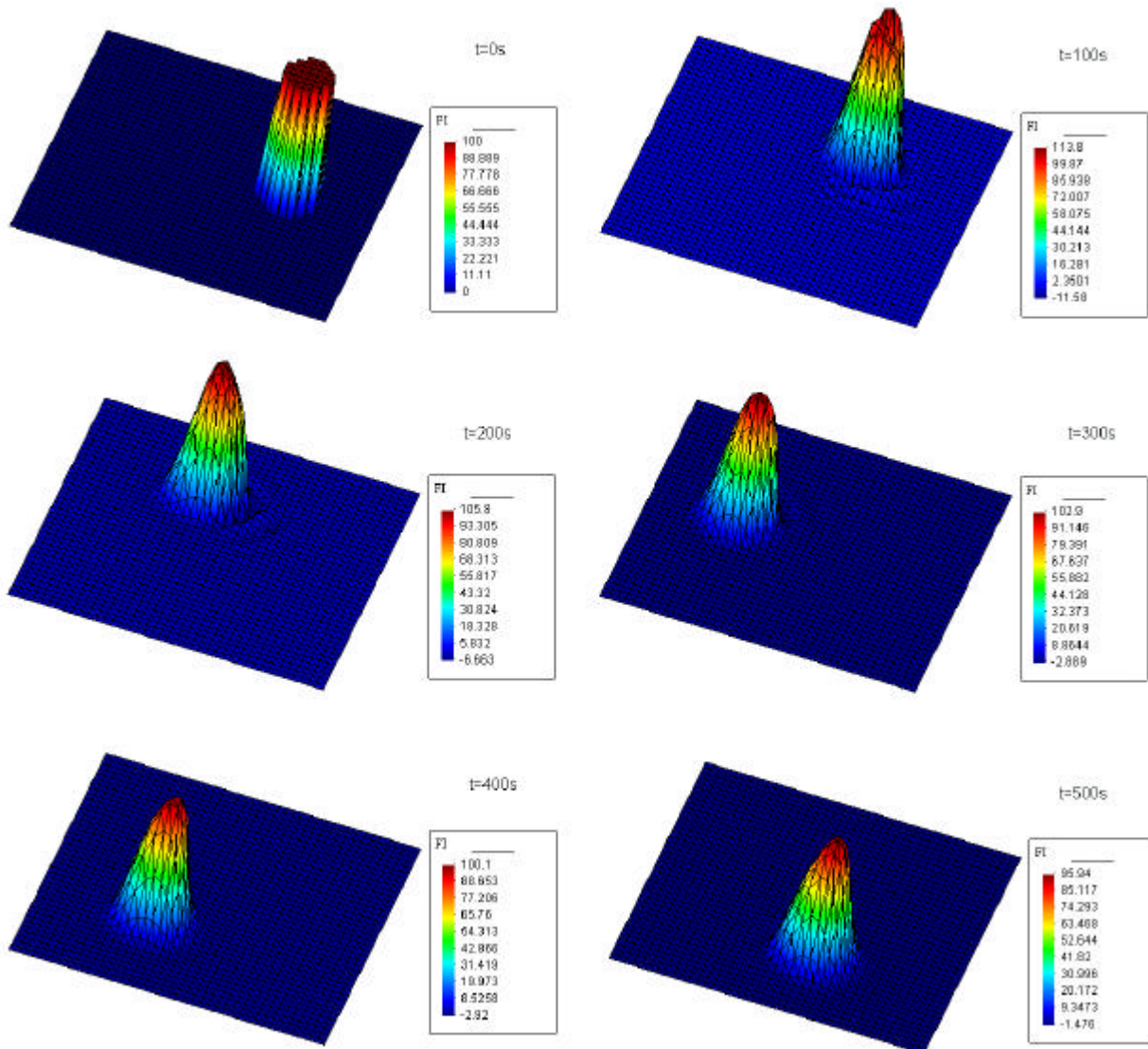


Figura 4-26: Rotación de una concentración cilíndrica: evolución tridimensional de la concentración con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.005$ .

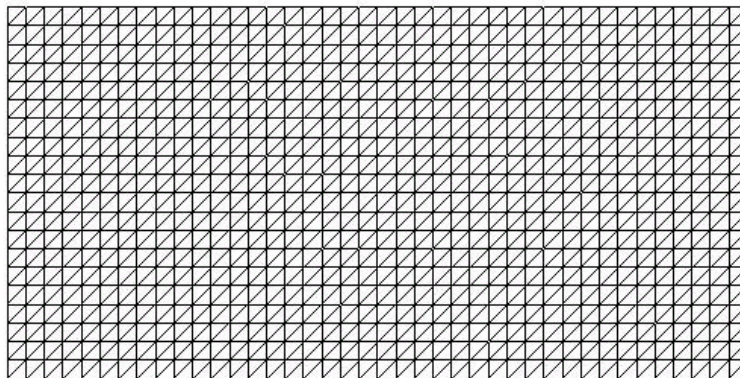


Figura 4-27: Transporte de una concentración cónica: malla computacional.

### Transporte de una concentración cónica en dos dimensiones

El dominio considerado en este caso es un rectángulo de 20 metros de largo y 10 metros de ancho. La malla computacional utilizada consta de 861 nodos y 1600 elementos triangulares lineales, tal y como se muestra en la Figura 4-27.

Se estudiará aquí el transporte de una concentración de contaminante con forma cónica en un campo de velocidades dirigido según el eje horizontal y con un valor constante de 0.01 m/s.

La forma de la concentración inicial es, por tanto, cónica cuyo máximo valor, 100, se localiza a 5 metros del contorno izquierdo y 5 metros del contorno inferior, disminuyendo dicho valor progresivamente en un radio de 2 metros.

Para evitar oscilaciones no deseadas, se prescriben los nodos del contorno izquierdo con un valor de la concentración igual a cero.

Se fija el paso de tiempo igual a la unidad, correspondiente a un número de Courant  $C = 0.02$ , constando el análisis de 1500 pasos de tiempo.

En las Figuras 4-28, 4-29 y 4-30 se da la evolución de la concentración en una, dos y tres dimensiones respectivamente.

Puede observarse la existencia de pequeñas oscilaciones en la zona situada a la izquierda de la concentración cónica. Estas oscilaciones son mucho menores que las observadas en los dos ejemplos anteriores al tratarse, en este caso, de la propagación de una función continua  $C_0$  y dada la composición

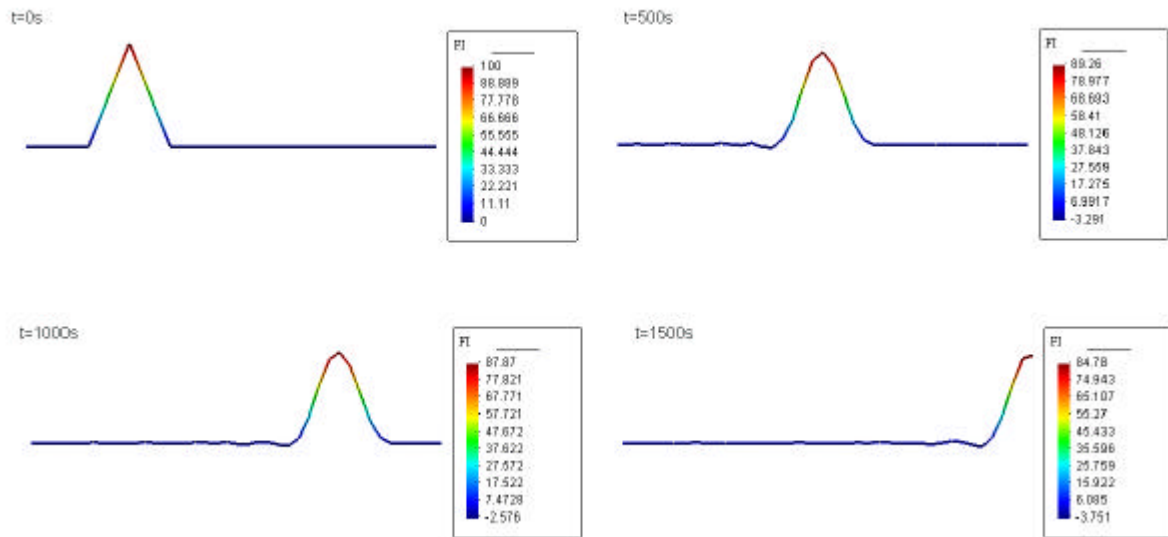


Figura 4-28: Transporte de una concentración cónica: evolución monodimensional.

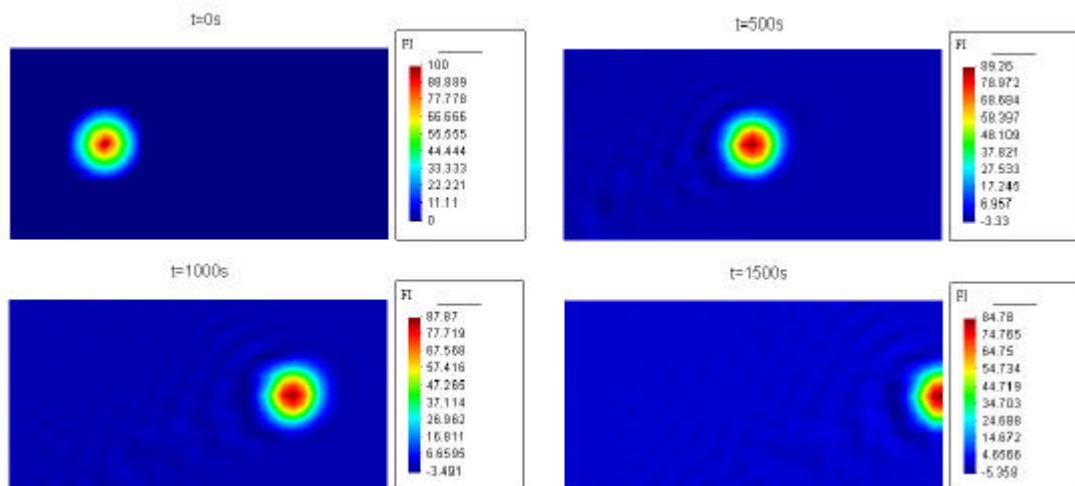


Figura 4-29: Transporte de una concentración cónica: evolución bidimensional.

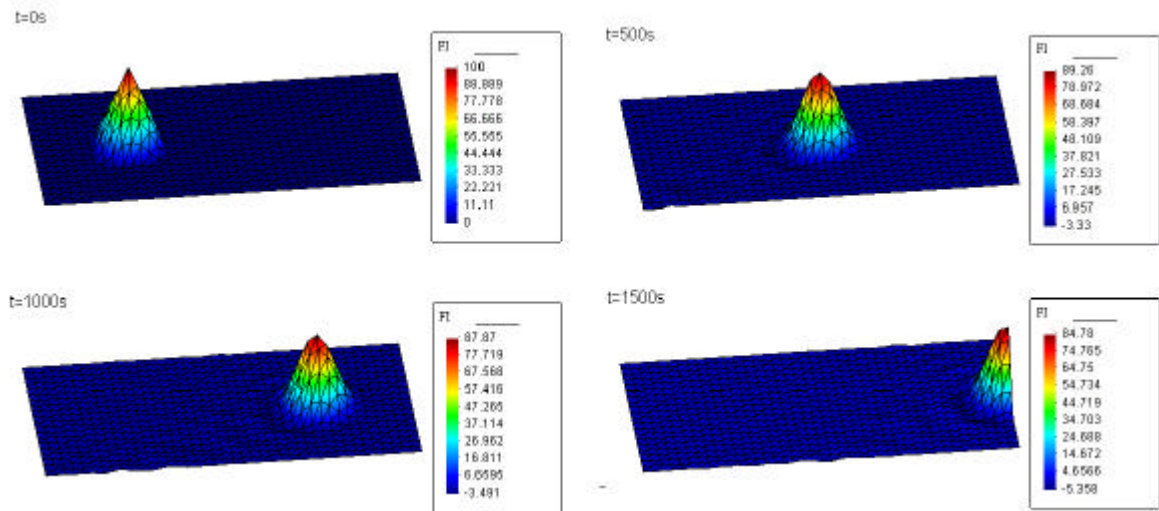


Figura 4-30: Transporte de una concentración cónica: evolución tridimensional.

espectral de este tipo de funciones, tal y como se señaló en la introducción de esta sección. Dichas oscilaciones pueden reducirse utilizando el amortiguamiento local anteriormente propuesto con un coeficiente de  $C_e = 0.001$ , si bien la difusión así introducida reduce también el valor máximo de la concentración alcanzado en el vértice del cono (ver Figuras 4-31, 4-32, 4-33 y 4-34).

En la Figura 4-34 se compara, transcurridos 500 segundos, el valor de la concentración utilizando y sin utilizar el amortiguamiento local propuesto.

### Transporte de contaminantes bajo una excavación

Vamos a tratar en este ejemplo el problema completo del transporte de contaminantes en suelos. Para ello resolveremos en primer lugar el problema dinámico de filtración en un medio poroso y una vez hallemos las velocidades del flujo en el interior del suelo procederemos al transporte convectivo de una concentración de contaminante dada a través del medio.

En un terreno donde el nivel freático se encuentra en la superficie se va a realizar la excavación de un recinto de 8 m de anchura y 3 m de profundidad, tal y como se esquematiza en la Figura 4-35.

Por la simetría del problema respecto de un plano vertical que pasa por el centro de la excavación, tan sólo se discretizará medio dominio, imponiéndose en esta frontera la condición de contorno de flujo

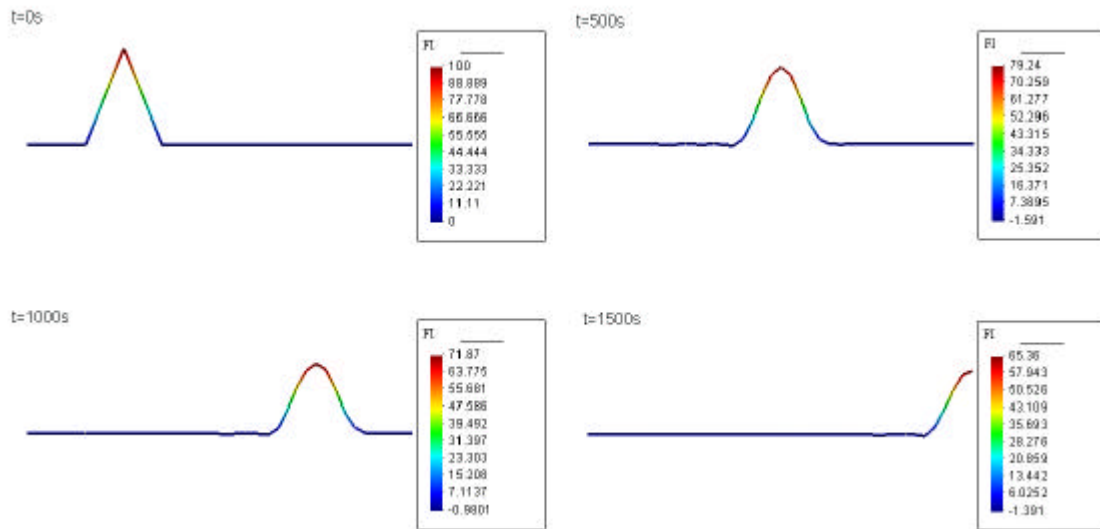


Figura 4-31: Transporte de una concentración cónica: evolución monodimensional con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.001$ .

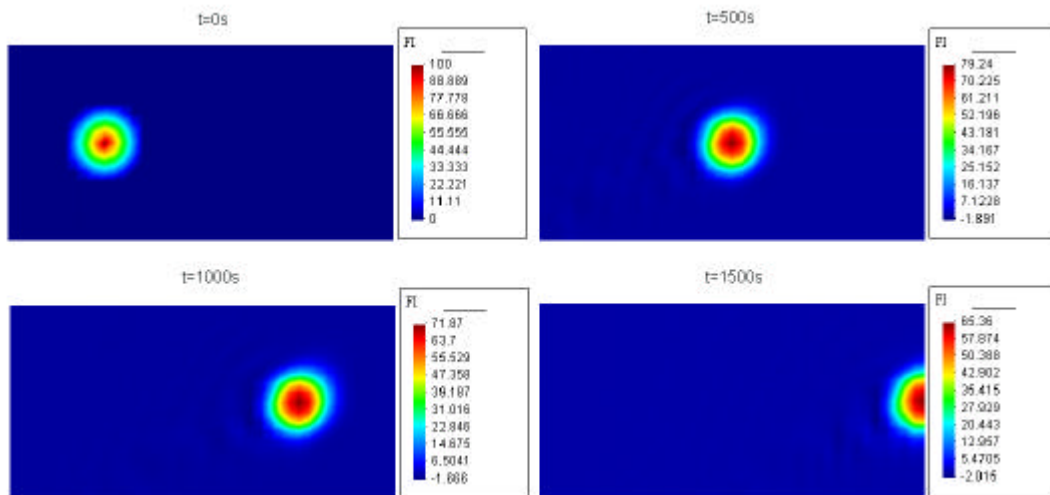


Figura 4-32: Transporte de una concentración cónica: evolución bidimensional con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.001$ .

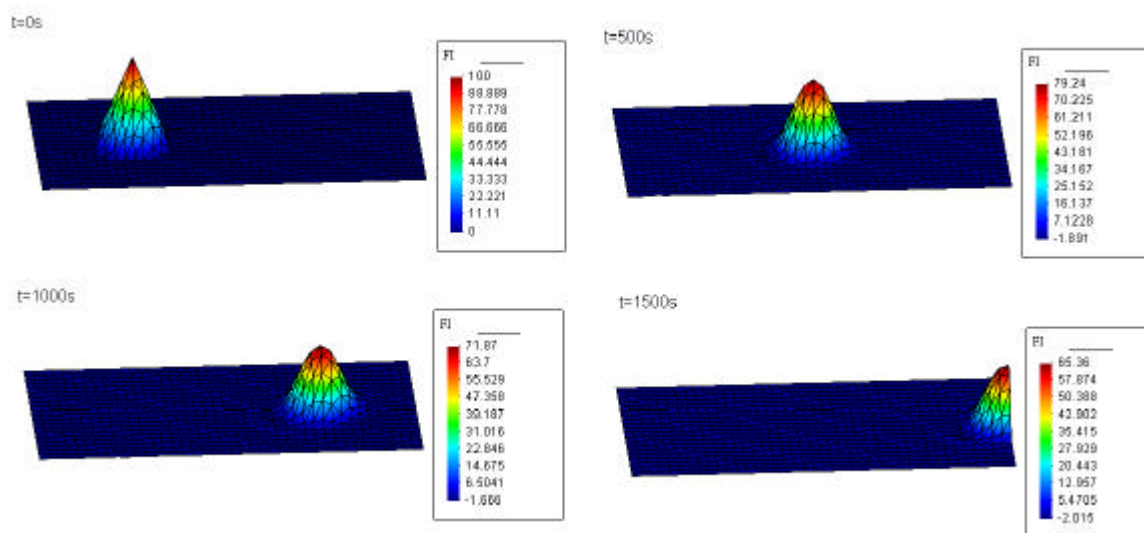


Figura 4-33: Transporte de una concentración cónica: evolución tridimensional con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.001$ .

normal nulo.

Se supondrá también que la pantalla es impermeable, por lo que no será incluida en la malla. Se considerará asimismo nulo el flujo normal en las paredes verticales de la excavación, así como en la base del dominio discretizado. Por otra parte, hay que tener en cuenta que la presión del agua es nula en las superficies horizontales tanto en la zona no excavada como en la excavación (ver Figura 4-36). La condición inicial para la presión es la presión hidrostática correspondiente al estado anterior a la excavación, esto es  $p = (10 - z)\rho g$  en todo el dominio, siendo  $z$  la coordenada correspondiente a la altura en cada punto (ver Figura 4-37).

En cuanto a la discretización espacial, se ha utilizado una malla de elementos triangulares lineales que consta de 647 nodos y 1175 elementos, tal y como se muestra en la Figura 4-38.

Al realizarse la excavación el fluido intersticial que se encuentra en el interior del material saturado comienza a moverse de la zona situada a la izquierda del muro hacia la zona de la derecha fluyendo por encima de la superficie horizontal correspondiente a la excavación. Para la modelización de este fenómeno se ha considerado que el fluido intersticial es agua de densidad  $1000 \text{ Kg m}^{-3}$  y compresibilidad  $10^9 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$ , mientras que se ha supuesto un suelo de permeabilidad  $10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  y una

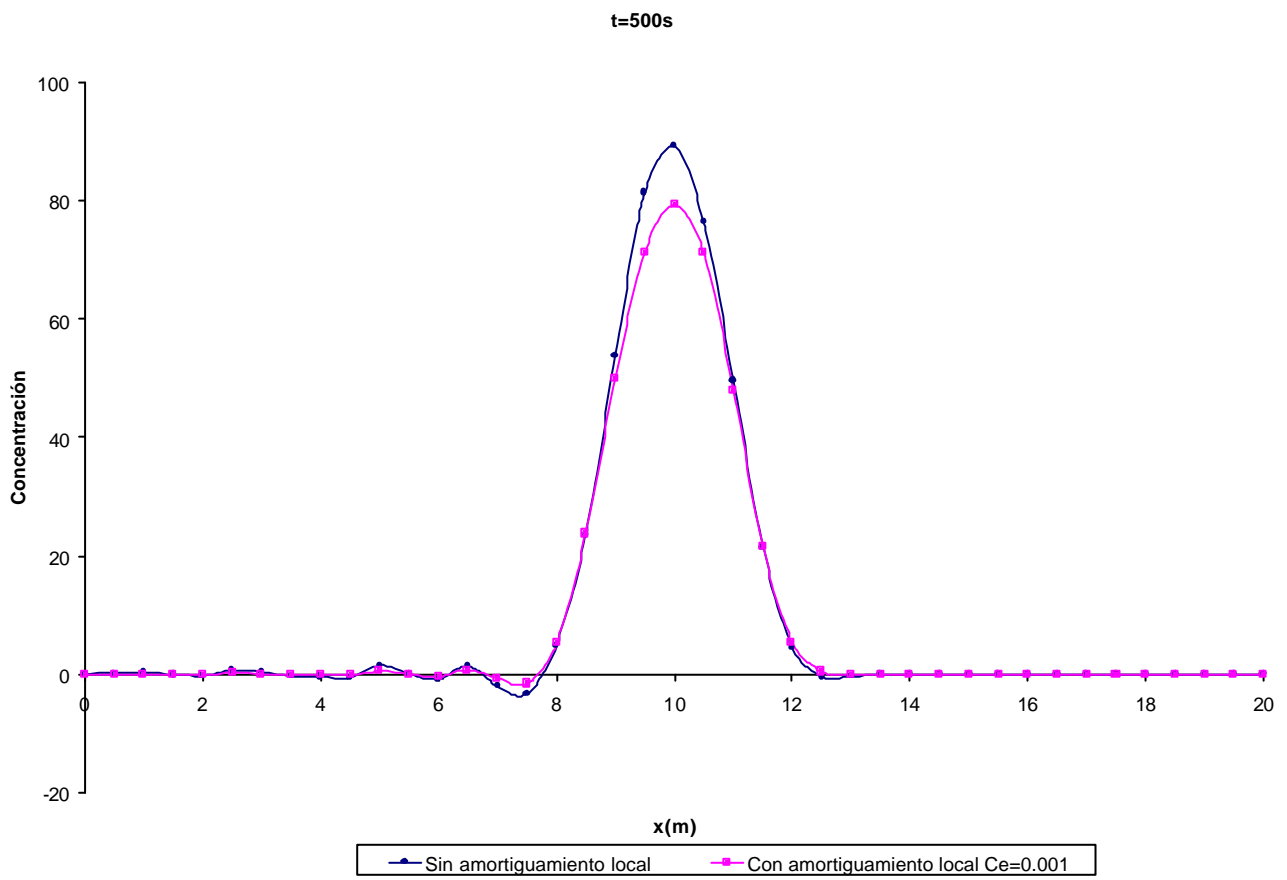


Figura 4-34: Transporte de una concentración cónica: comparación para  $t = 500$  s de la concentración con y sin amortiguamiento local.

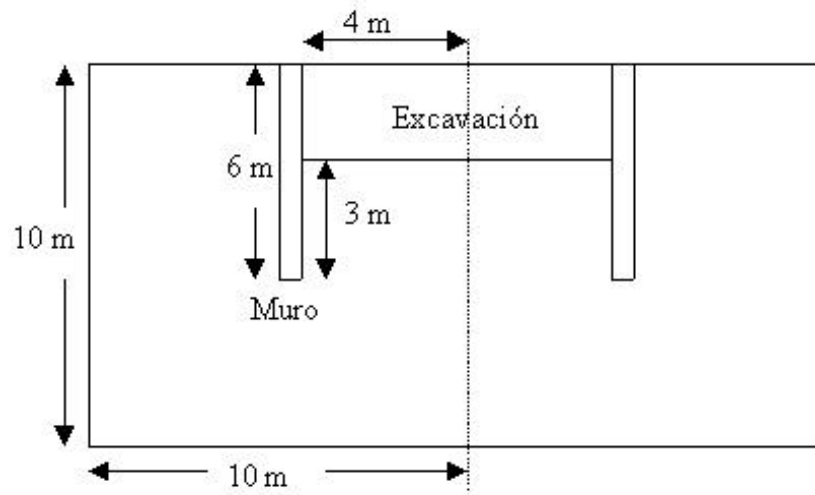


Figura 4-35: Transporte de contaminantes bajo una excavación: esquema del terreno.

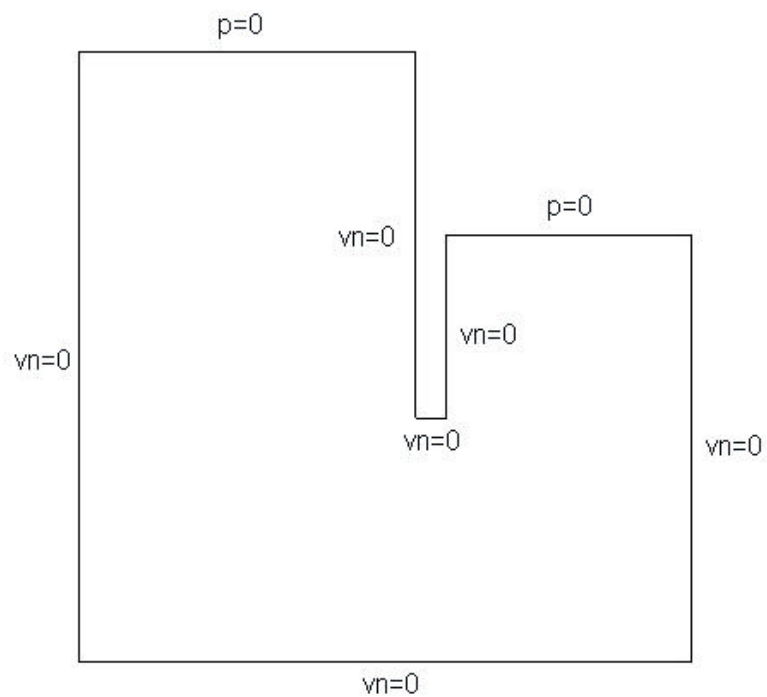


Figura 4-36: Transporte de contaminantes bajo una excavación: condiciones de contorno.

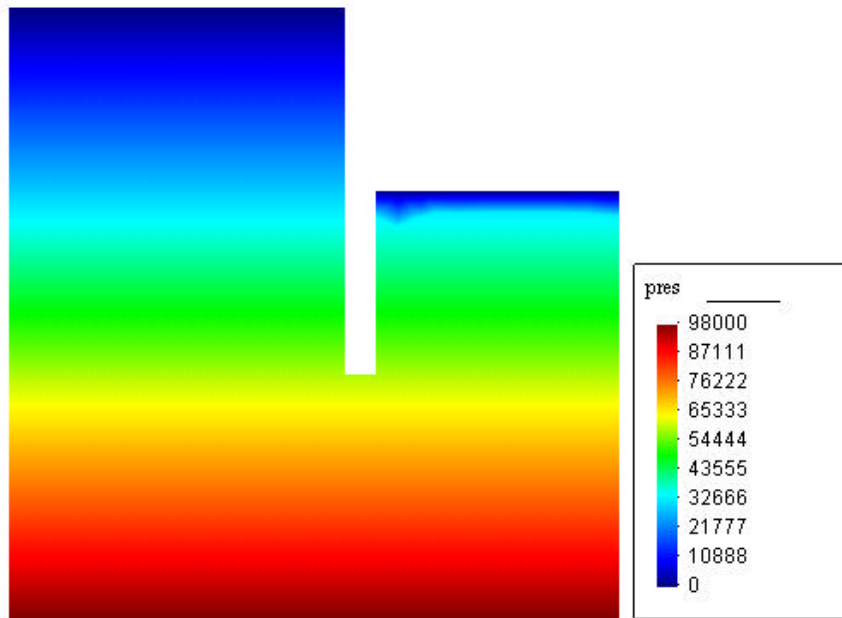


Figura 4-37: Transporte de contaminantes bajo una excavación: presión inicial.

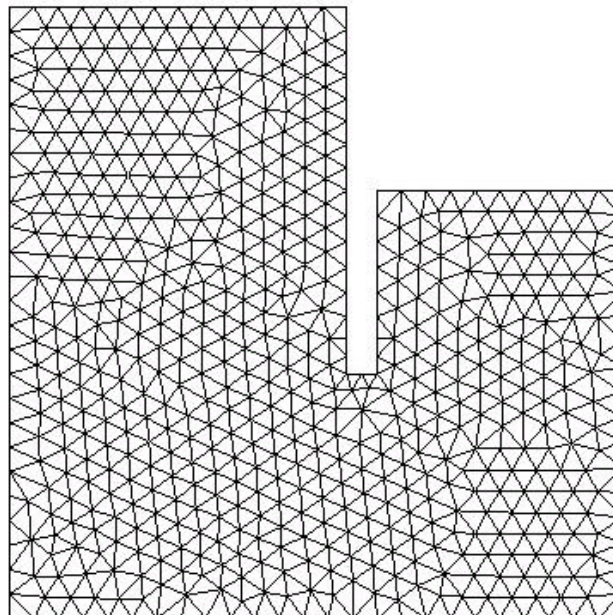


Figura 4-38: Transporte de contaminantes bajo una excavación: malla computacional.

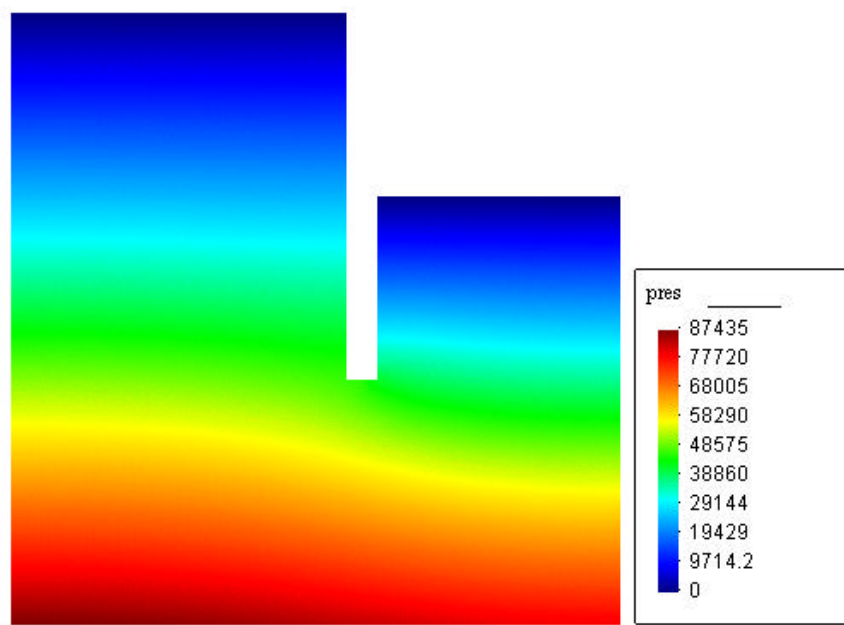


Figura 4-39: Transporte de contaminantes bajo una excavación: valores de la presión en el estado estacionario.

porosidad de 0.3.

Los valores de la presión y la velocidad una vez alcanzado el estado estacionario se dan en las Figuras 4-39 y 4-40 respectivamente.

Una vez conocido el campo de velocidades en el dominio, podemos proceder al transporte de una concentración de contaminante. Se trata de una concentración cilíndrica cuyo centro se sitúa a 2.4 m del contorno izquierdo y 8.5 m del contorno inferior, siendo el valor de la concentración de 100 en un radio de 0.93 m.

Con el fin de evitar oscilaciones indeseadas se prescribe el valor de la concentración nulo en todos los contornos salvo en el contorno superior derecho, por ser este perpendicular a las líneas de flujo salientes.

El paso de tiempo se fija igual a 325 s y el análisis consta de 280 pasos de tiempo.

Se representan en las Figuras 4-41 y 4-42 la evolución de la concentración de contaminante en dos y tres dimensiones respectivamente.

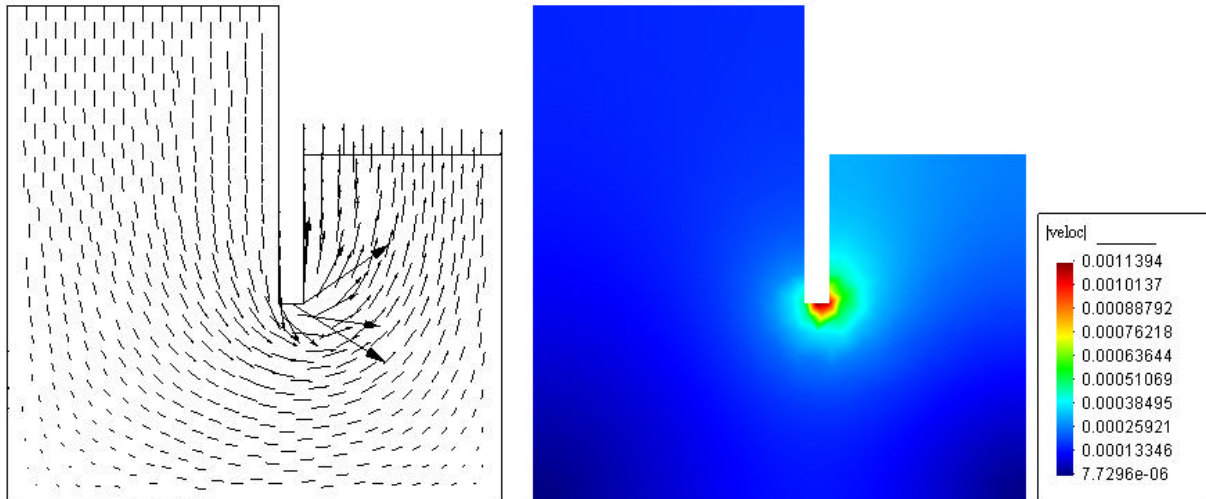


Figura 4-40: Transporte de contaminantes bajo una excavación: valores de la velocidad en el estado estacionario.

Puede observarse la aparición de una serie de oscilaciones que son debidas al fuerte gradiente de concentración de contaminante así como a valores muy grandes de las velocidades localizadas en la parte inferior del muro. Estas oscilaciones se reducen notablemente si utilizamos el amortiguamiento local propuesto en la sección 4.3.3 con un coeficiente  $C_e = 0.015$  (ver Figuras 4-43 y 4-44). Puede observarse como la difusión introducida por este método *suaviza* la discontinuidad.

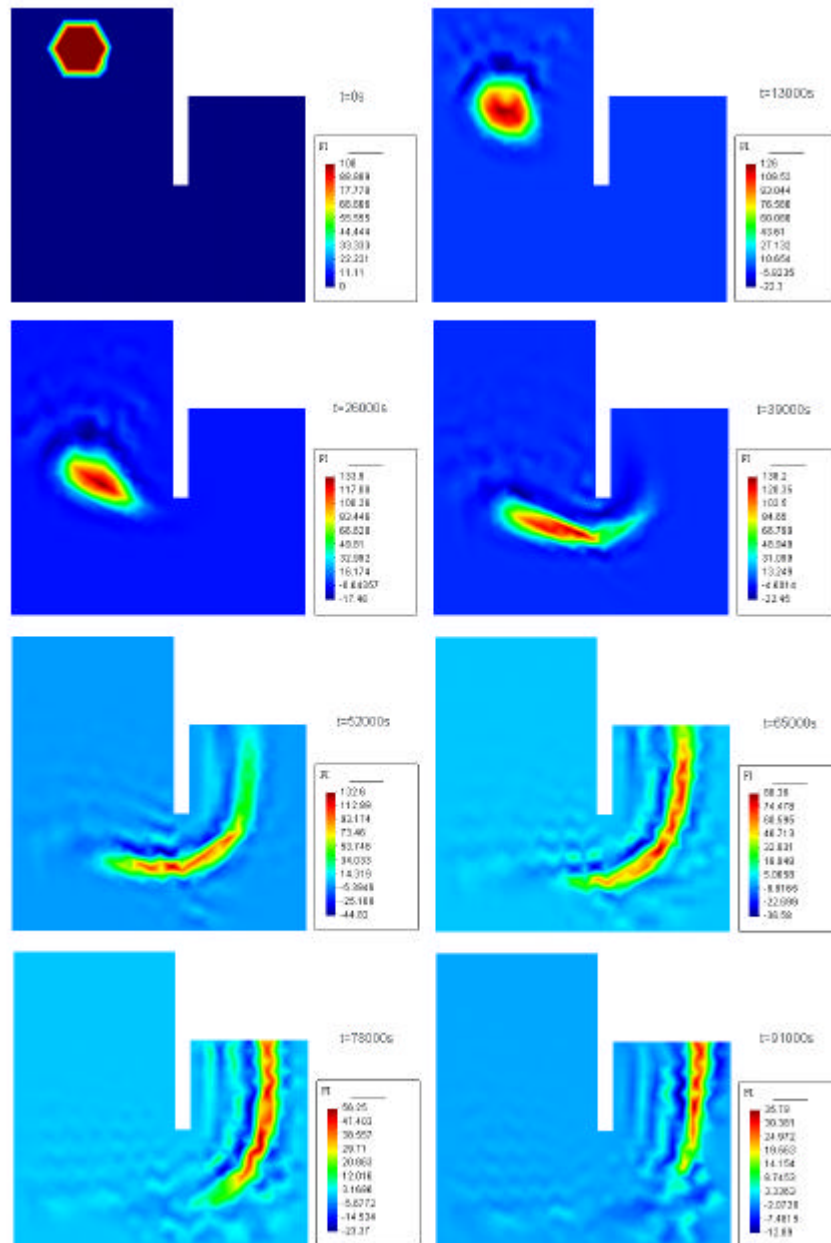


Figura 4-41: Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 2D.

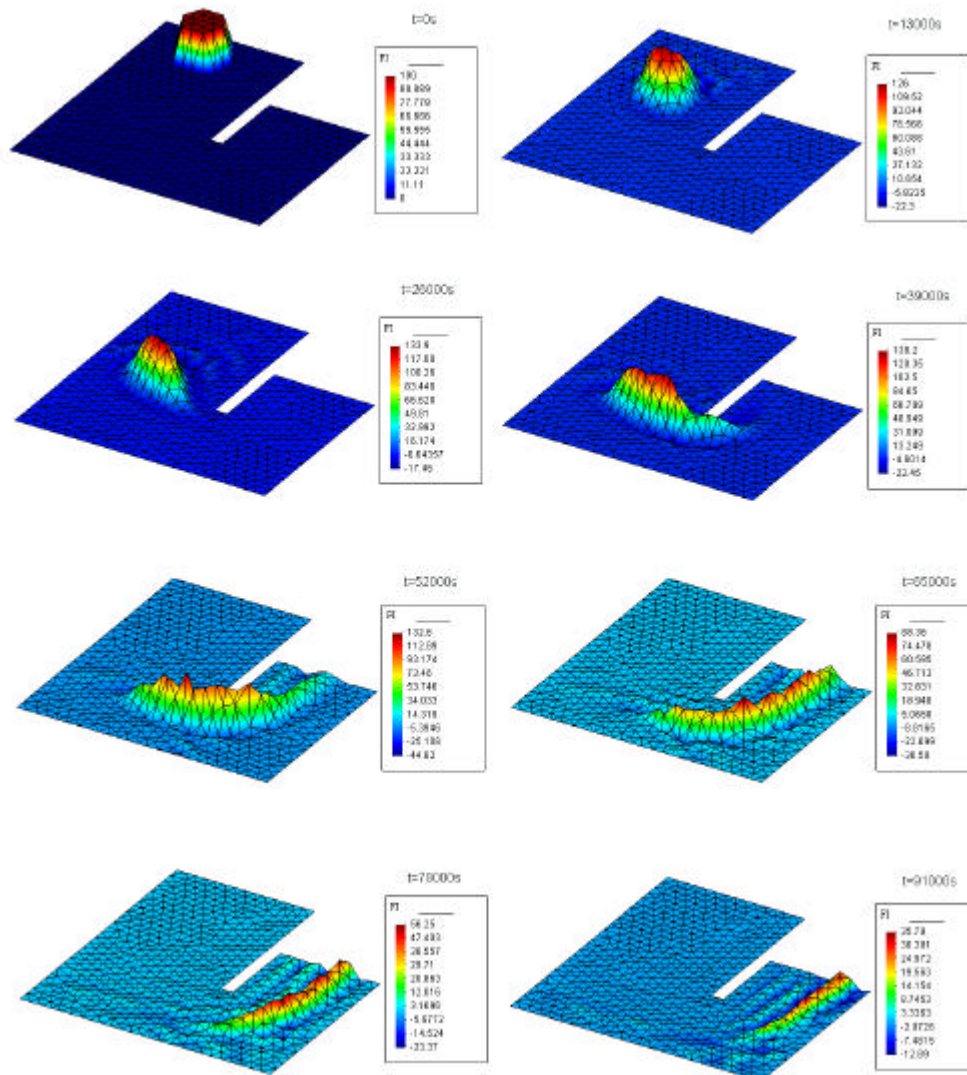


Figura 4-42: Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 3D.

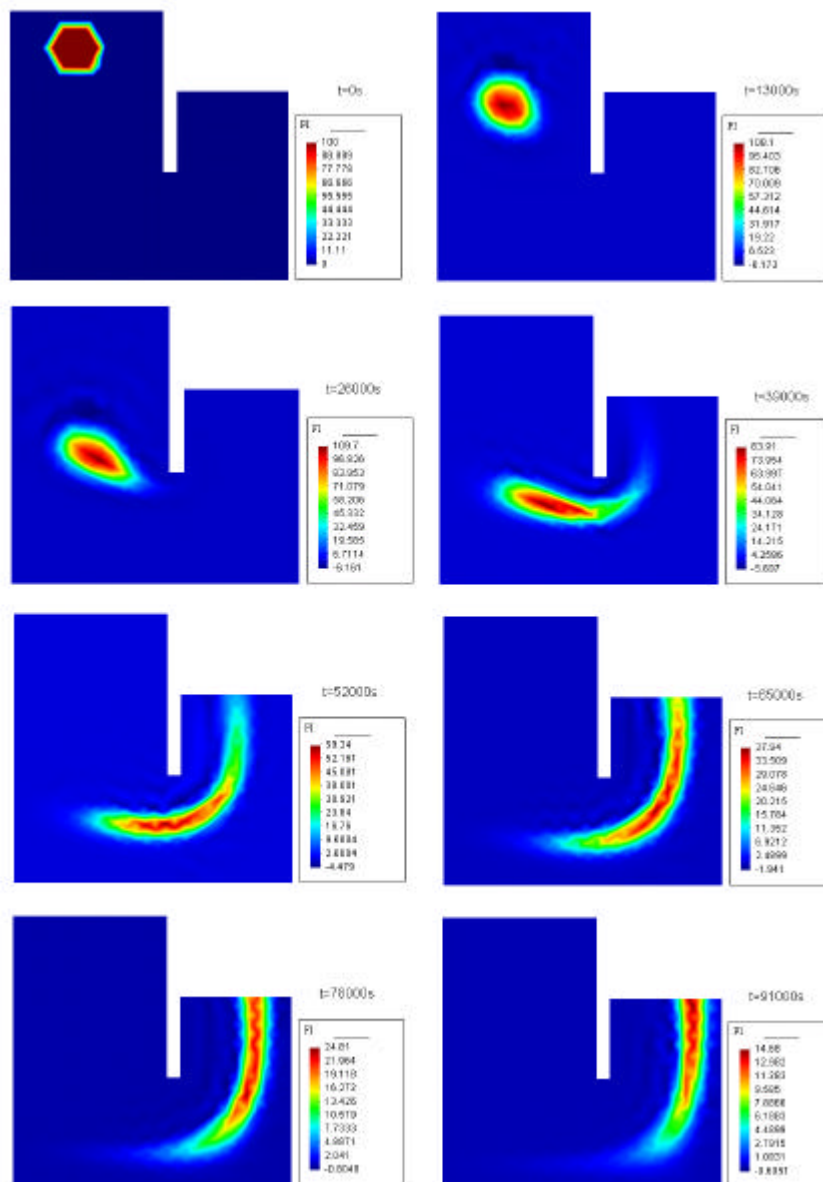


Figura 4-43: Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 2D con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.015$ .

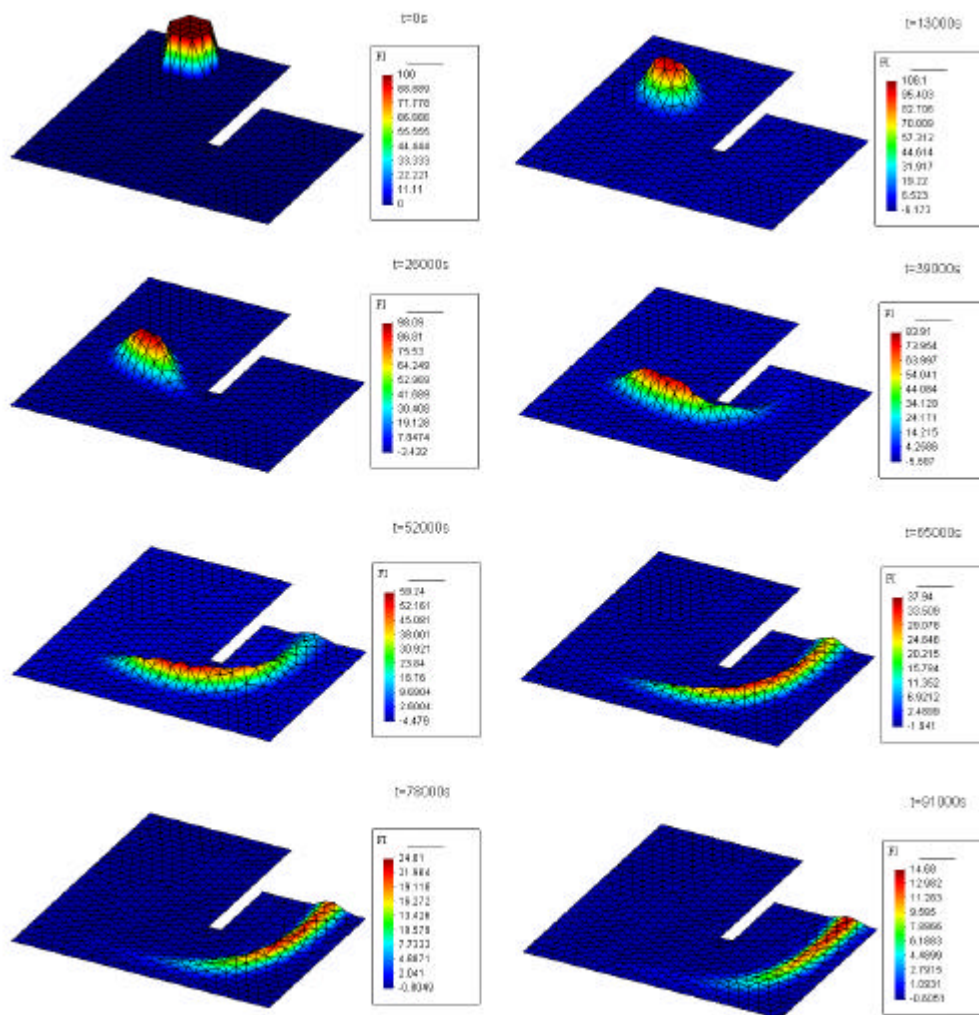


Figura 4-44: Transporte de contaminantes bajo una excavación: evolución de la concentración en 3D con un amortiguamiento local de  $C_e = 0.015$ .

# Bibliografía

- [1] J.P. Bardet. *Experimental soil mechanics*. Upper Saddle River (NJ): Prentice-Hall, 1997.
- [2] J.P. Bardet, T. Tobita. “A practical method for solving free-surface seepage problems”. *Computers and Geotechnics*, 29: 451-475, 2002.
- [3] K.J. Bathe, M.R. Khoshgoftaar. “Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration”. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 3: 13-22, 1979.
- [4] J. Bear, A. Verruijt. *Modelling groundwater flow and pollution*. Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 1987.
- [5] R.I. Borja, S.S. Kishnani. “On the solution of elliptic free-boundary problems via Newton’s method”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88: 341-361, 1991.
- [6] M.L. Brusseau, R.E. Jessup, P.S.C. Rao. “Modeling the transport of solutes influenced by multi-process nonequilibrium”. *Water Resour. Res.*, 25, 1971-1988, 1989.
- [7] R. Codina. “A discontinuity capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection diffusion equation”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 110, 325-42, 1993.
- [8] C.W. Cryer. “On the approximate solution of the free boundary problems using finite differences”. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 17(3): 397-411, 1970.
- [9] W.D.L. Finn. “Finite-element analysis of seepage through dams”. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 93(SM6): 41-8, 1967.

- 
- [10] A. Friedman. *Variational principles and free-boundary problems*. Wiley, New York, 1982.
- [11] M.E. Harr. *Ground water and seepage*. Mc Graw-Hill, 1962.
- [12] A. Jameson, W. Schmidt. "Some recent developments in numerical methods in transonic flows". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 51, 467-93, 1985.
- [13] M.G. Katona, O.C. Zienkiewicz. "A unified set of single step algorithms. Part 3: The beta-m method, a generalization of the Newmark scheme". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21: 1345-1359, 1985.
- [14] N. Kikuchi. "An analysis of the variational inequalities of seepage flow by finite-element methods". *Quarterly of Applied Mathematics*, 35: 149-63, 1977.
- [15] S.J. Lacy, J.H. Prevost. "Flow through porous media: A procedure for locating the free surface". *Internat. J. Numer. Analyt. Methods Geomech.*, 11: 585-601, 1987.
- [16] T.W. Lambe, R.V. Whitman. *Soil Mechanics*. Wiley, New York, 1969.
- [17] A. Lapidus. "A detached shock calculation by second order finite differences". *J. Comp. Phys.*, 2, 154-77, 1967.
- [18] X. Li, O.C. Zienkiewicz, Y.M. Xie. "A numerical model for immiscible two-phase fluid flow in a porous medium and its time domain solution". *Int. Journal Numer. Methods in Engrg.*, 30, 1195-1212, 1990.
- [19] R.W. MacCormack, B.S. Baldwin. "A numerical method for solving the Navier-Stokes equations with application to shock boundary layer interaction". *AIAA paper*, 75-1, 1975.
- [20] R.J. Millington. "Gas diffusion in porous media". *Sci.*, 130, 100-102, 1959.
- [21] K. Morgan, J. Peraire, J. Peiro, O.C. Zienkiewicz. "Adaptative remeshing applied to the solution of a shock interaction problem on a cylindrical leading edge". P. Stow (Ed.), *Computational Methods in Aeronautical Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 327-44, 1990.
- [22] S.P. Neuman, P.A. Witherspoon. "Finite element method of analyzing steady seepage with a free surface". *Water Resources Research*, 6(3): 889-97, 1970.

- [23] N.M. Newmark. "A method of computation for Structural Dynamics". *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 85, p. 67-94, 1959.
- [24] J.T. Oden, N. Kikuchi. "Recent advances: theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media". *Internat. J. Engrg. Sci.*, 18: 1173-1284, 1984.
- [25] M. Pastor, M. Mabssout. "Alternative formulations in soil dynamics". *Revue française de génie civil: Numerical modelling in Geomechanics*, Vol. 6, n<sup>o</sup> 6/2002, 1099-1117, 2002.
- [26] J. Peraire. *A finite element method for convection dominated flows*. Tesis doctoral. Universidad de Gales, Swansea, 1986.
- [27] J. Peraire, J. Peiro, L. Formaggia, K. Morgan, O.C. Zienkiewicz. "Finite element Euler computations in 3-dimensions". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26, 2135-59, 1989. (Ver también el mismo título: *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, AIAA paper 87-0032, 1988).
- [28] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo. "Simulación de ondas de avenida causadas por roturas de presas". *Revista de Ingeniería Civil*, No. 121, p. 23-31, 2001.
- [29] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros, J.A. Fernández Merodo, Quinfen Zhang. "Comparison of two algorithms for solving the dam break problem". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 2001. (Aceptado).
- [30] M. Quecedo, M. Pastor, M.I. Herreros. "Numerical modelling of impulse wave generated by fast landslides". Enviado a *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002.
- [31] J.P. Radu, P. Biver, R. Charlier, S. Cescotto. "2D and 3D finite element modelling of miscible pollutant transport in groundwater, below the unsaturated zone". *Proc. Int. Conf. of Hydrodyn., ICHD'94*, China Ocean Press, Beijing, 1994.
- [32] J.L. Steger. "Implicit finite difference simulation of flow about two dimensional geometries". *AIAA J.*, 16, 679-86, 1978.
- [33] M. Sussman, P. Smeraka, S. Osher. "A level-set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow". *J. Comp. Phys.*, 114, 146-159, 1994.

- 
- [34] R.L. Taylor, C.B. Brown. "Darcy flow solutions with a free surface". *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, 93: 25-33, 1967.
- [35] J. Von Neumann, R.D. Richtmyer. "A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks". *J. Math. Phys.*, 21, 232-7, 1950.
- [36] L. Xikui, S. Cescotto, H.R. Thomas. "Finite-Element method for contaminant transport in unsaturated soils". *Journal of Hydrologic Engineering*, 265-274, 1999.
- [37] R.N. Yong, A.M.O. Mohamed, B.P. Warkentin. *Principles of contaminant transport in soils*. Elsevier Science, Amsterdam, 1992.
- [38] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method: The basis*. Vol. 1. Butterworth-Heinemann. Quinta edición, 2000.
- [39] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. Vol. 2. Mc Graw-Hill, 1991.
- [40] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The finite element method. Vol. 3: Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann. Quinta edición, 2000.

## Capítulo 5

# Conclusiones, aportaciones y futuras líneas de investigación

### 5.1. Conclusiones

El principal objetivo de esta tesis es el desarrollo de modelos numéricos que puedan ser aplicados a problemas concretos de Hidráulica Ambiental, como son el transporte de contaminantes en aguas superficiales y subterráneas, la rotura de balsas mineras, los deslizamientos de laderas, la propagación de olas en embalses, etc. De esta manera, no sólo se propone aquí un método de análisis de los fenómenos observados, sino que estos modelos proporcionan una poderosa herramienta para la predicción de estos desastres y para el diseño de medidas de mitigación de los mismos.

A partir de los trabajos presentados en esta tesis se puede concluir lo siguiente:

- Capítulo 2: Modelos completos para flujos con superficie libre.
  - El principal objetivo de este capítulo es la modelización de flujos con superficie libre para el caso de dos y tres fluidos inmiscibles e incompresibles, por ser éstos los casos más frecuentes en los problemas de Hidráulica Ambiental tratados en esta tesis. Así, por ejemplo, la rotura de una balsa minera origina un flujo de dos componentes inmiscibles, el aire y los residuos almacenados, mientras que cuando estos lodos entran en un cauce de agua hay que considerar tres fases.

- Se presenta en este capítulo un método para la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso incompresible. Este método de paso fraccional, más conocido como *fractional-step*, es un método de primer orden en el tiempo ligeramente difusivo, pero que proporciona resultados de gran precisión.
  - Se aplica el método de *level-set* para el seguimiento de interfases en el caso de  $n$  fluidos inmiscibles. Se trata de un método caro desde el punto de vista computacional pero de una gran precisión. Sin embargo, los resultados son tanto más precisos cuanto menor es el tamaño de la malla, por lo que se requieren mallas muy finas, aumentándose así el esfuerzo computacional.
  - Dada su gran precisión y sencillez, se hace uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin para el tratamiento de los términos convectivos, tanto en el caso del *fractional-step* como en el del *level-set*.
  - Se proponen en este capítulo diferentes modelos reológicos, tales como newtoniano, Bingham y friccional, si bien para algunos de estos modelos, especialmente en el caso de grandes viscosidades, se requieren pasos de tiempo muy pequeños.
- Capítulo 3: Modelos integrados en profundidad.
- El principal objetivo de este capítulo consiste en el desarrollo de herramientas de simulación que puedan ser aplicadas a problemas de Hidráulica Ambiental, reduciendo el esfuerzo computacional requerido por los modelos presentados en el capítulo anterior. Por ello, se presentan aquí aplicaciones de los modelos integrados en profundidad a casos concretos, como son la rotura de balsas mineras, así como la propagación de olas en embalses.
  - Se presentan en este capítulo dos alternativas para la integración de las ecuaciones de onda en profundidades reducidas. Para el caso de deslizamientos de laderas, flujos de derrubios, etc. es más recomendable hacer uso de la formulación  $h-Z$ , mientras que en caso de propagación de olas en embalses se recomienda el uso de la formulación  $h-\eta$ . Esto es consecuencia del nivel tomado como referencia a partir del cual se calculan las perturbaciones, siendo en el primer caso el nivel de referencia la superficie de deslizamiento mientras que en el segundo se trata del nivel del fluido en reposo.

- El análisis de la ecuación de transporte convectivo en una dimensión con una fuente de tipo lineal muestra que alternativas como el método de Taylor-Galerkin o el método basado en las características de Galerkin dan lugar a resultados bien altamente oscilatorios en el primer caso o bien muy difusivos en el segundo, siendo muy poco exactas en ambos casos.
  - Para solucionar este problema se propone la integración separada de los términos de fuente con el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden, mientras que se hará uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin para el tratamiento de los términos convectivos.
  - Se presentan en este capítulo distintos modelos reológicos, como es el caso de fluidos newtonianos, Bingham, friccionales, ... combinados con leyes de fricción con el fondo que dependen del modelo constitutivo empleado. Hay que destacar el caso del fluido friccional cuya ley de fricción con el fondo incluye la disipación de las presiones intersticiales.
- Capítulo 4: Contribución a la modelización del transporte de contaminantes.
- Los dos principales objetivos de este capítulo son los siguientes: el estudio de flujos con superficie libre en medios porosos que permita la determinación del campo de velocidades, así como la subsecuente modelización del transporte de contaminantes en el interior de los mismos.
  - Se propone aquí un nuevo método para la modelización del flujo con superficie libre en medios porosos haciendo uso de la técnica de *level-set* para el seguimiento de las interfases. La precisión de este método, si bien es alta, depende en gran medida del tamaño de la malla, siendo tanto mejor, cuanto menor sea el tamaño de esta última.
  - Se presenta un modelo de transporte convectivo de contaminantes que hace uso del método de dos pasos de Taylor-Galerkin para el tratamiento de dichos términos convectivos.

## 5.2. Aportaciones

Las principales aportaciones de esta tesis se pueden presentar como sigue:

- Capítulo 2: Modelos completos para flujos con superficie libre.

- Se ha propuesto en este capítulo el método de *level-set* combinado con el algoritmo de dos pasos de Taylor-Galerkin para el tratamiento de problemas con superficie libre. Esta metodología aumenta sustancialmente la velocidad de cálculo frente a otras alternativas como podría ser el uso del método basado en las características de Galerkin.
  - Se ha aplicado el método de *level-set* junto con el algoritmo de dos pasos de Taylor-Galerkin para el seguimiento de interfases entre fluidos inmiscibles e incompresibles que presentan reologías no newtonianas, como es el caso de fluidos de Bingham y fluidos friccionales.
  - Los resultados obtenidos en este capítulo permiten establecer una comparación entre éstos y los obtenidos en el capítulo 3 con los modelos integrados en profundidad, dentro de los límites de validez de estos últimos.
  - Se presentan al final de este capítulo varios ejemplos de aplicación del método de *level-set* en el caso de tres fases inmiscibles.
- Capítulo 3: Modelos integrados en profundidad.
- Se han propuesto aquí dos alternativas para el tratamiento separado de los términos de fuente en las ecuaciones integradas en profundidad, dada la poca exactitud que métodos como el Taylor-Galerkin o el basado en las características de Galerkin proporcionan en este caso. Dichas alternativas son el método de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden y el método de Zhang y Tabarrok (1999). El análisis de ambos métodos en el estudio de un problema tipo demuestra que el algoritmo que proporciona una mayor precisión es el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
  - Se ha llevado a cabo la integración de las tensiones internas para modelos reológicos diversos distintos al newtoniano, como es el caso de los fluidos de Bingham y los llamados fluidos friccionales.
  - Se proponen también leyes de fricción con el fondo que dependen de la ley reológica utilizada, destacando entre ellas el caso de los fluidos friccionales, cuya ley de fricción con el fondo incluye la disipación de las presiones intersticiales.
  - Con el fin de evitar el esfuerzo computacional requerido para la resolución de la ecuación que relaciona la fuerza de resistencia del fondo y la velocidad promediada en el caso de flui-

dos de Bingham, la propuesta de ese trabajo está basada en una técnica de economización de polinomios.

- Se han contrastado los resultados del modelo propuesto con casos reales hallados en la literatura, encontrándose un gran acuerdo entre ambos.
  - Se ha propuesto una metodología para el análisis de la propagación de ondas en embalses.
- Capítulo 4: Contribución a la modelización del transporte de contaminantes.
- Se ha utilizado el método de *level-set* combinado con el de dos pasos de Taylor-Galerkin para el seguimiento de la superficie libre en el interior de un medio poroso. Este novedoso método permite la determinación del campo de velocidades en el medio para el subsecuente análisis del problema del transporte convectivo de contaminantes.

### 5.3. Futuras líneas de investigación

En cuanto a lo que se refiere a futuras líneas de investigación, estas son las posibilidades propuestas:

- Capítulo 2: Modelos completos para flujos con superficie libre.
- Dada la limitación temporal impuesta por algunas de las leyes reológicas, sobre todo en el caso de viscosidades altas, se propone la integración separada de las tensiones internas con un método implícito.
  - Para evitar el esfuerzo computacional que requiere el método de *level-set* al hacer uso de mallas muy finas, una solución podría ser el remallado autoadaptativo en las zonas próximas a la interfase.
  - Se propone también la ampliación del modelo bidimensional propuesto a tres dimensiones.
- Capítulo 3: Modelos integrados en profundidad.
- Con el fin de ahorrar el esfuerzo computacional que supone el resolver las ecuaciones integradas en profundidad para cada elemento de la malla, una de las propuestas consiste en el desarrollo de un algoritmo que permita distinguir entre elementos secos y mojados,

resolviéndose de este modo las ecuaciones únicamente en el dominio constituido por los elementos mojados.

- Se propone la utilización de la técnica de *level-set* para la localización y transporte del frente que separa zonas secas y mojadas. Esta técnica combinada con la utilización de nuevas funciones de forma para los elementos situados en la interfase permitiría una mayor precisión a la hora de localizar y propagar el frente. Podría utilizarse también en este caso el remallaje autoadaptativo, que, como ya se ha comentado, reduce el esfuerzo computacional requerido por la técnica de *level-set*.
- Se propone la aplicación de este modelo integrado en profundidad al caso de varias fases inmiscibles, haciendo uso de la técnica de *level-set* para el seguimiento de las interfases.
- Otra propuesta es incluir los efectos de la temperatura en el modelo.
- El estudio de la erosión sería otra línea de investigación interesante en este capítulo.
- Se propone el estudio, empleando teoría de mezclas, del acoplamiento entre las distintas componentes de estos fluidos.

▪ Capítulo 4: Contribución a la modelización del transporte de contaminantes.

- Se propone de nuevo el remallado autoadaptativo como alternativa al uso de mallas extremadamente finas que hacen muy grande el esfuerzo computacional en el caso de la aplicación del método de *level-set*.
- Otra propuesta sería la inclusión de los términos correspondientes a mecanismos como la dispersión, degradación, adsorción o el efecto del agua inmóvil en la ecuación del transporte de contaminantes.
- Finalmente, se propone el uso de algoritmos alternativos al método de dos pasos de Taylor-Galerkin para el tratamiento separado de los términos de fuente, como podría ser, por ejemplo, el método de Runge-Kutta de cuarto orden.