

LA INTUICIÓN EN MATEMÁTICAS

Durante largo tiempo el razonamiento se ha estudiado principalmente en términos de nexos proposicionales gobernados por reglas lógicas. Consecuentemente, el proceso instruccional, especialmente en ciencias y en matemáticas, ha tendido a proporcionar al aprendiz cierta cantidad de información (principios, leyes, teoremas, fórmulas) y desarrollar métodos del razonamiento formal adaptado a los dominios respectivos.

Aunque la matemática es un sistema deductivo de conocimientos, la actividad creativa en matemáticas es un proceso constructivo, en el cual los procedimientos inductivos, las analogías y las conjeturas plausibles, juegan un papel fundamental.

En el presente artículo enfatizaremos algunos de los significados y tipologías de intuiciones, y trataremos de establecer estrategias adecuadas para educar la intuición del estudiante.

1. El significado y el papel de la intuición

La palabra intuición en matemáticas comporta una pesada carga de ambigüedad y misterio (Davis y Hersh, 1988). Según contextos, las connotaciones son diferentes, unas vinculadas a la inspiración, y otras como oposición a los modos de proceder con rigor. Algunos de los significados que atribuimos a la palabra intuición en matemáticas son los siguientes:

1. Intuitivo es opuesto a riguroso.
2. Intuitivo significa visual.
3. Intuitivo significa plausible o convincente, aún sin demostración.
4. Intuitivo significa inspirado en un modelo físico, o en algunos ejemplos importantes de los procedimientos heurísticos.
6. Intuitivo significa holístico o integrador, entendido como contrario a detallado o analítico.

La intuición no es una percepción directa de algo externo existente. Es el efecto que provoca en la mente la experiencia de ciertas actividades mentales de manipulación de objetos concretos (en una fase posterior, de marcas en un papel, e incluso de imágenes mentales). Como fruto de esta experiencia, hay algo en la "pupila de la mente" (un residuo, un efecto) que constituye su representación.

Tenemos intuición porque tenemos representaciones mentales de los objetos matemáticos. Adquirimos estas representaciones no por memorización de fórmulas verbales, sino a través de reiteradas experiencias (en el nivel elemental, la experiencia de la manipulación de objetos materiales; en un nivel superior, la experiencia de resolver problemas y de descubrir cosas por nosotros mismos).

Una intuición es una idea que posee las dos propiedades

fundamentales de una realidad concreta y objetivamente dada: inmediatez (evidencia intrínseca) y certeza (no la certeza convencional formal, sino la certeza inmanente, prácticamente significativa).

2. Clasificación de intuiciones

Fischebein (1987), con el fin de introducir claridad en el complejo dominio de la intuición, propuso la siguiente clasificación, en la que se considera la intuición en relación a soluciones:

- **Intuiciones afirmatorias:** son representaciones o interpretaciones de varios hechos aceptados como ciertos, auto-evidentes y auto-consistentes. Una intuición afirmatoria se puede referir:

- al significado de un concepto, por ejemplo el significado intuitivo de nociones como fuerza, punto, línea recta, etc.

- al significado de relaciones o a una afirmación, por ejemplo, la fuerza como algo necesario en orden a mantener un cuerpo en movimiento.

- a la aceptación de una inferencia, la cual puede ser inductiva o deductiva; por ejemplo, de $A=B$ y $B=C$ uno deduce intuitivamente que $A=C$.

- **Intuiciones conjeturales:** son hipótesis asociadas con los sentimientos de certeza. Por ejemplo «estoy seguro que llegarás a ser un excelente matemático».

- **Intuiciones anticipatorias:** son también conjeturas, pero han sido clasificadas separadamente, dado que pertenecen más explícitamente a la actividad de resolución de problemas. Una intuición anticipatoria es la perspectiva preliminar, global, de una solución de un problema, y precede al análisis y al desarrollo de una solución. No toda hipótesis es una solución; únicamente esas hipótesis que van asociadas, al comienzo, con el sentimiento de certeza y de evidencia, son intuiciones anticipatorias. La naturaleza contradictoria de la intuición anticipatoria (y la intuición en general) se expresa en las revelaciones introspectivas del matemático: en su forma inicial, la solución se percibe simultáneamente como cierta e imperativa y también como tenue, sutil, transitoria y pasajera.

- **Intuiciones conclusivas:** resumen en una conclusión, en una visión global, las ideas esenciales de una solución de un problema que ha sido previamente elaborado. Esta perspectiva total, global, añade a la construcción formal y analítica un sentimiento de intrínseca y directa certidumbre (certeza).

3. Educar en la intuición

Estamos de acuerdo con Guzmán (1991) en que “la intuición no se debe concebir como una especie de regalo arbitrario de las musas. La intuición se puede cultivar activamente”. Veamos algunas formas de desarrollo:

1. Prepárese para recibir la intuición.

2. Dejar a un lado la convicción, existente en muchos de nosotros, de que el éxito ante un problema está garantizado por el conocimiento de información y la elaboración de datos.

3. Tratar activamente de oír los mecanismos mentales no

conscientes que todos poseemos, y que se ponen en marcha cuando se desea resolver un problema.

Cuando nos referimos al punto primero, “Prepararse para recibir la intuición”, queremos indicar que en un primer momento hay que trabajar con los estudiantes las creencias que tienen sobre la intuición. La intuición es algo más que *una corazonada* o *confiar en los instintos*.

Afirmaba Louis Pasteur:

“La intervención del azar sólo favorece a aquellas mentes que están preparadas para hacer descubrimientos por un estudio paciente y un esfuerzo perseverantes”.

Muchos estudiantes creen que la intuición significa no tener que pensar en las cosas. Incluso con el uso de la expresión *tener una corazonada* quieren significar que la intuición no tiene lugar en la mente. En otros casos, también se asocia con pensar, o no, de forma lógica. Sin embargo, no pensar de forma lógica no es lo mismo que ser intuitivo. De hecho, al utilizar la intuición percibimos de forma activa nuestras impresiones, las registramos, las interpretamos y, por último, las integramos con el resto de los procesos mentales. La intuición es un proceso muy riguroso. Un proceso que necesita de una instrucción.

En los apartados anteriores hemos explicitado algunos tipos y modelos de intuición: intuiciones afirmatorias (inferencias), intuiciones anticipatorias (conjeturas), etc... Consideramos que estos tipos y modelos son los contenidos que deberían incluirse en un programa para cultivar la intuición.

En lo que se sigue desarrollamos algunas estrategias para trabajar en el aula una tipología de intuiciones, las afirmatorias, en particular las referidas a los procesos de inferencia.

4. La inferencia, un tipo de intuición afirmatoria

Inferir es sacar o inducir una cosa de otra. Las inferencias pueden ser inmediatas o mediadas. En el primer caso se concluye una proposición de otra sin intervención de una tercera. En el segundo, se concluye una proposición de otra por medio de otra u otras proposiciones. Esta tipología de inferencia es propia de los procesos de deducción, inducción y razonamiento por analogía.

En los procesos de resolución de problemas, uno de los tipos de inferencias que se da es conocer qué clase de información implícita hay que buscar en el problema, como un punto clave para su resolución. Algunos de los criterios que debe satisfacer el proceso de hacer inferencias sobre la información presentada explícita o implícitamente, son:

- a. la información se ha utilizado en el pasado para el mismo tipo de situación (trabajar la memoria);

- b. las inferencias tienen que ver con propiedades (variables, términos, expresiones...) que aparecen en la meta o en los resultados, o con inferencias directas sobre las metas y los resultados. Ejemplos de este tipo son: las inferencias en las estrategias de ensayo y error; inferencias por negación, inferencias por consecuencia, inferencias por relación, inferencias sobre la meta de información, etc.

Con los estudiantes hay distintas estrategias y actividades que se puede trabajar para entrar en los procesos de inferencia: conocer propiedades numéricas, conocer propiedades topológicas, pensar sobre el tipo de operaciones que resolvería el problema y

ayudar a explicitar las operaciones implícitas y trabajar sobre la meta. A continuación presentamos algunos ejemplos para trabajarlas.

4.1. Conocer propiedades numéricas

Por ejemplo, elementos tan rudimentarios como la expresión:

si n es entero par, $n = 2p$, p entero impar; si n es entero impar, $n = 2p + 1$, p entero impar. O el siguiente problema:

DIVISIBLES POR 13

Demuestra que todos los números de 6 cifras de la forma $abcabc$ son divisibles por 13.

Para resolver este problema se prueba con varios casos: 123123; 111111, 234234, etc. Un segundo paso en su resolución sería investigar si se conocen propiedades numéricas de los números de la forma $abcabc$. Para ello es importante detenerse y abstraer a propiedades numéricas. $abcabc = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = a(10^5 + 10^2) + b(10^4 + 10) + c(10^3 + 1) = 1001(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) = 1001(abc)$; de aquí se deduce que es divisible por 13 ya que 1001 lo es.

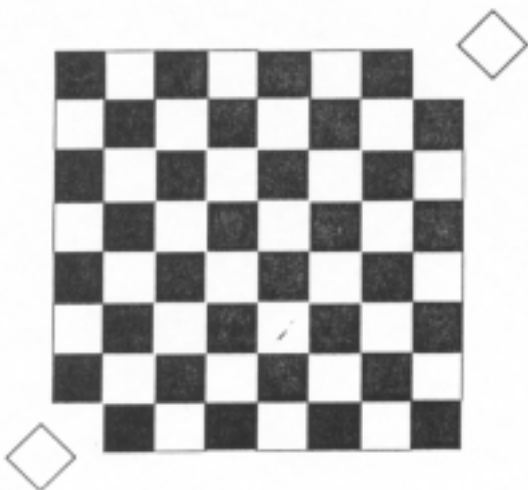
4.2 Conocer propiedades topológicas

Tomamos el siguiente problema:

DOMINO Y AJEDREZ

Disponemos de un tablero de ajedrez y 32 fichas de dominó. Cada ficha del dominó cubre 2 cuadrados adyacentes del tablero. 32 fichas pueden cubrir 64 cuadrados. Supongamos que se cortan 2 cuadrados de las esquinas opuestas de la diagonal del tablero de ajedrez. ¿Es posible colocar 31 fichas de forma que queden cubiertos los 62 cuadros restantes? Muestra cómo puedes hacerlo, y si no, prueba que es imposible.

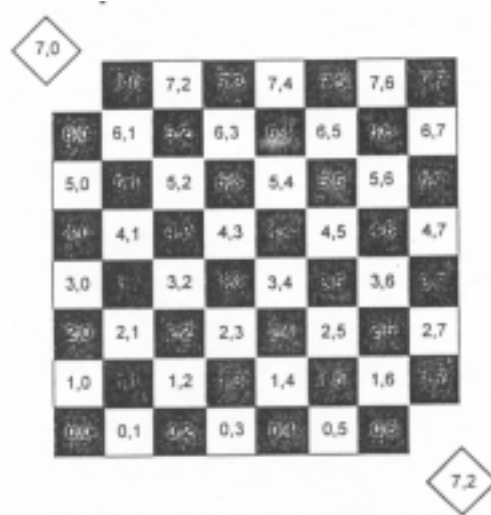
En un proceso de razonamiento adecuado es importante preguntarse por las propiedades del



tablero: ¿Cómo son los cuadrados del tablero de ajedrez? ¿Los colores? ¿Los de la diagonal opuesta son del mismo color?

Al dar respuesta a estas cuestiones, nos damos cuenta que la diagonal opuesta es del mismo color. Hay 30 cuadros de un color y 32 cuadros de otro color. 62 cuadros que no pueden ser cubiertos por 31 fichas de dominó.

Otra forma de llegar a la solución es considerar el tablero como una matriz coloreada 8×8 . Situar las coordenadas y buscar una propiedad común en la notación establecida entre todos los pares ordenados. Las fichas del dominó tendrían que cubrir dos cuadrados uno cuya suma de coordenadas es par y otra impar. Las diagonales están configuradas par, impar. La matriz en que se han hecho estas muescas no pueden recubrirse con 31 fichas.



4.3 Pensar sobre el tipo de operaciones que resolvería el problema y ayudar a explicitar las operaciones implícitas

Un problema que ejemplifica esta estrategia es el siguiente:

NÚMERO DE PESADAS

Tenemos 24 monedas pero una de ellas es falsa. Sabemos que la moneda falsa pesa más. ¿Cómo puedes averiguar cual es la moneda falsa con el número mínimo de pesadas?

4.4. Trabajar sobre la meta

Algunas estrategias que se pueden trabajar con los estudiantes para incidir sobre la meta en un problema:

- Proporcionar ejemplos suficientes para que los estudiantes aprendan a enfretarse con situaciones en las que la meta del problema no es clara.

- Prestar atención al significado de las representaciones, diagramas, etc.. En muchos casos las metas son explícitas y aparecen representadas en un diagrama o imagen.

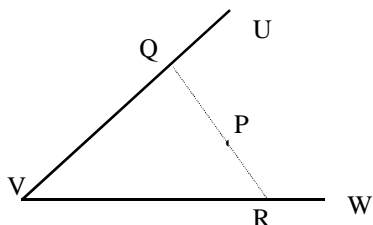
- Incluir actividades prácticas o mentales, en las que se puedan utilizar el método de explicitar la representación de la meta y derivar propiedades de la meta, o el método de reducción al absurdo.

- Variar suficientemente el marco de experiencia a partir del cual se desarrollan ideas y procesos, con objeto de prevenir su fijación en un conjunto o conjuntos particulares de experiencias; es decir, propiciar la abstracción.

Algunos problemas para proponer a los estudiantes que ejemplifican lo anterior.

ANGULO AGUDO

Dado un ángulo agudo UVW y un punto P dentro del ángulo, usa un compás y una regla para construir un segmento QR que pase a través de P , tal que QP y PR estén en razón 2:1. Q y R están en la línea VU y VW respectivamente.



Este ejemplo nos permite acentuar las ventajas de la representación explícita. En este caso puede provocar la idea de construir triángulos semejantes. La inferencia en el problema es: Considerar que QP y PR tienen que estar en razón 2:1 si y solo si la razón de QR y PR es la razón 3:1.

CONGRUENTES

¿Pueden dos triángulos tener 5 de sus 6 partes (3 ángulos y 3 lados) iguales y no ser triángulos congruentes?

Para resolver este problema utilizamos el método de explicitar la representación de la meta y derivar propiedades de la meta. La estrategia que se debería seguir es cómo construir este par de triángulos. El método es centrarse en la meta haciéndola cada vez más específica y en las relaciones que se derivan y hacer inferencias.

5. "Oír" los mecanismos mentales. el contexto interno del estudiante

Otra de las formas para educar la intuición es tratar activamente de prestar atención a los mecanismos mentales no conscientes que todos poseemos -en particular los estudiantes- y que se ponen en marcha cuando se desea resolver un problema.

Más allá de la dinámica de los nexos conceptuales, hay un mundo instalado de expectativas y creencias, que influyen profundamente en la recepción y el uso del conocimiento matemático. Para el profesor de matemáticas es fundamentalmente importante identificar estas fuerzas intuitivas y tenerlas en cuenta en el proceso instruccional.

Las creencias de los estudiantes establecen el contexto personal dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas, y el control al trabajar la matemática. El educador necesita ser consciente de la tensión que se produce en el estudiante a la hora de la construcción del contexto personal entre el contexto en el que se desarrolla la actividad: «el contexto interactivo» (en el que se evocan las percepciones individuales de los requerimientos de la tarea -por ejemplo contexto escolar, contexto de la vida cotidiana, etc.) y el contexto representado

en la tarea: contexto «figurativo» o situación descrita en la tarea, que está estrechamente relacionado con su experiencia personal (por ejemplo, el empleo de distintos métodos de solución puede estar relacionado con sus experiencias en la vida diaria).

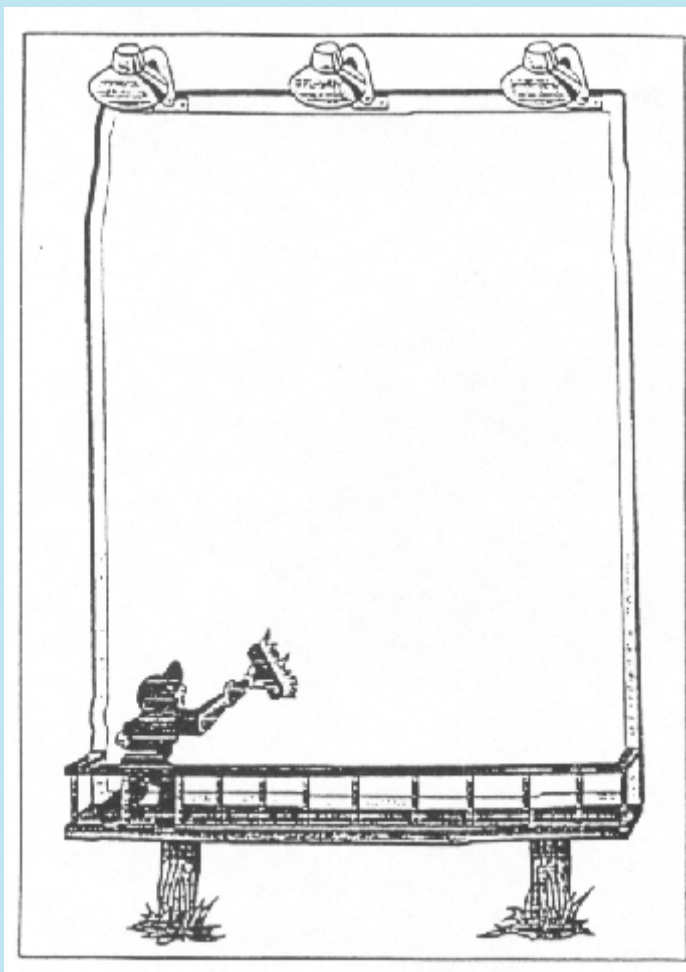
Todas las tareas están socialmente situadas, pero el contexto de la tarea es consecuencia de la construcción y de la respuesta del individuo. El contexto personal de la tarea, como resultado de la interrelación entre el contexto «interactivo» y el «figurativo», toma la forma de una representación cognitiva a través de la cual el individuo adscribe significado personal a la tarea y en la que se llega a entender el proceso de resolución de problemas.

Destacamos que para trabajar una matemática intuitiva es conveniente no separar, en el currículum, los contenidos de los procesos, tener en cuenta las estrategias informales y los valores y creencias de los estudiantes. El cuadro de la página siguiente puede ser utilizado por el profesorado para detectar y diagnosticar las expectativas y creencias acerca de la matemática de los estudiantes (Gómez-Chacón, 1998).

6. Y para terminar

Nuestra postura es que se debería favorecer el uso de la intuición en la educación matemática. Hemos puesto énfasis en que las interpretaciones intuitivas son componentes del razonamiento productivo. El reto educativo es no eliminar las intuiciones -anticipatorias o afirmatorias-, sino desarrollar, junto con el desarrollo de las estructuras lógicas del razonamiento, nuevas y adecuadas, interpretaciones intuitivas tanto como sea posible. En otros trabajos (Gómez-Chacón, 1998, 1999) hemos tratado de poner de relieve que una de las tareas fundamentales en la educación matemática, es desarrollar en los estudiantes la capacidad de distinguir entre sentimientos, ideas intuitivas, creencias y convicciones que sostienen formalmente, poniendo acento en los mecanismos mentales y emocionales no conscientes, en particular en el contexto personal del estudiante. Esto se puede hacer a través de estrategias y actividades prácticas como las ejemplificadas anteriormente

CUADRO 1.- CUESTIONARIO: ESLOGAN DE LAS CLASES DE MATEMÁTICAS



MATEMÁTICAS

ALUMNO:

FECHA:

Ante el comienzo de curso, seguro que te has parado a pensar en cómo te gustaría que fueran las clases de matemáticas; en qué cosas son las que más te ayudarían en tu aprendizaje de esta asignatura.

1. ¿Qué te gustaría aprender de matemáticas en este curso?
2. ¿Qué es lo que más te gusta de las matemáticas?
3. ¿Cómo te gustaría que fueran las clases de matemáticas?
4. Pensando en tu futuro profesional ¿qué consideras importante de matemáticas que no debemos dejar de aprender?
5. Si has sido alumno del curso pasado, indica algunos aspectos de los trabajados, que consideras es importante que no olvidemos y que continuemos haciendo y aprovechando en este curso para las clases de matemáticas.
6. Utiliza el cartel para comunicar tus expectativas, tus deseos, tus sugerencias. Si eres capaz, intenta inventarte un eslogan -a modo de anuncio- que exprese lo que tú deseas de la clase de matemáticas.

REFERENCIAS

DAVIS, P. J. y HERSH, R. (1988) *Experiencia matemática*. Barcelona: Labor-MEC.

FISCHBEIN, E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics*. Kluwer.

GOMEZ-CHACÓN, I. M^a (1998) Creencias y contexto social en matemáticas, *Revista de Didáctica de las matemáticas, UNO*, 17, 83-104, 1998

GOMEZ-CHACÓN, I. M^a (1998) *Matemáticas y contexto. Enfoques y estrategias para el aula*. Madrid: Narcea.

GOMEZ-CHACÓN, I. M^a (1999) Toma de conciencia de la actividad emocional en el aprendizaje de la matemática. Una perspectiva para el tratamiento de la diversidad, *Revista de Didáctica de las matemáticas, UNO*, 21, 29-46.

GUZMAN, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

Inés M^a Gómez-Chacón
Licenciada en Ciencias Matemáticas y Doctora en Educación Matemática. Investigadora del Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas (IEPS) de Madrid, es también Consultora Internacional en Educación Matemática. Autora de libros, trabajos de investigación y artículos especializados en temas de Didáctica de la Matemática.