Fundamentos cognitivos de la adición

V. Bermejo*, P. Rodríguez**

Resumen

Para estudiar las bases cognitivas de la operación de sumar, se analiza la posible relación existente entre dos tareas de conservación y dos adición, hipotetizando que ambas se fundamentan en el esquema parte-todo. Cuatro grupos de niños de 2º de preescolar y de 1º de EGB pasan las pruebas. Los resultados muestran, entre otras cosas, dos hechos importantes: por una parte, que existe en general una relación significativa entre la conservación y los problemas aditivos numéricos; y, por otra, que estos últimos son no obstante más precoces que la primera. Se explican estos datos asumiendo la operatividad progresiva del esquema parte-todo en la realización de estas dos categorías de pruebas.

Abstract

To study the cognitive bases of the operation of adding, the possible relationship between two tasks of conservation and two tasks of addition is analysed. The hypothesis is that part-whole scheme is the basis for both. Four groups of 5 to 7 year old children do the tasks. The results show, among other things, two important facts: on the one hand that, in general, there is a significative relationship between conservation and numerical additive problems. And, on the other hand, that the latter are more precocious than the first. These data are explained assuming the progressive operativity of the part-whole scheme in the relization of the two categories of tasks.

Introducción

El foco de interés de los primeros trabajos sobre el aprendizaje de las matemáticas en los niños gira en torno a las dificultades específicas de las operaciones o problemas, quedando relegados a un segundo plano los mecanismos y procesos

* *Facultad de Psicología. Universidad Complutense de Madrid.*

** *E.U. de Profesorado de Segovia.*

cognitivos implicados en dicho aprendizaje. La tendencia actual, en cambio, se centra preferentemente en el estudio de estos procesos, insistiendo en la necesidad de identificar los conocimientos previos que el niño posee antes de empezar su instrucción escolar, los conceptos o habilidades a partir de los cuales debería iniciarse el acto instruccional, así como los procesos cognitivos subyacentes al mismo aprendizaje. En esta óptica resulta obsoleta la concepción anterior, que enfatizaba sin mesura la influencia de los factores externos en la práctica educativa, prestándose ahora mayor atención a los modelos que intentan explicar cómo adquiere el niño esta competencia matemática elemental.

Los autores han seguido diferentes orientaciones en el intento de clarificar esta temática, resaltando a veces la importancia sea de los factores lógicos, sea del conteo, sea del esquema parte-todo. La escuela de Ginebra (Kamii, 1984; Piaget y Szeminska, 1941) sostiene que el número resulta de una síntesis constructiva de las operaciones de clasificación y de seriación, acentuando consiguientemente la relevancia de los factores lógicos en la adquisición de las habilidades numéricas. En este sentido, se defiende que la conservación del número es un requisito indispensable para la comprensión de las nociones matemáticas elementales, considerando las actividades cuantitativas precoces (ej.: el conteo temprano) como meras producciones memorísticas sin trascendencia alguna posterior. Como consecuencia de ello, se juzga ineficaz el entrenamiento o la instrucción de estas nociones matemáticas elementales antes de la adquisición de las operaciones concretas (Copeland, 1974; Kamii y De Vries, 1977). Por otra parte, algunas investigaciones encuentran una correlación positiva entre la conservación del número (CN) y los rendimientos aritméticos (Dodwell, 1961; Hood, 1962; Spears y Dodwell, 1970; Van Engen, 1971); coligiendo que dicha relación resulta obvia, ya que si el niño fracasara en la CN se debería a su incomprensión de la permanencia numérica al reagrupar o reorganizar los objetos del conjunto, siendo entonces difícil que entienda el conteo de objetos y las demás operaciones aritméticas elementales (Copeland, 1974; Isaacs, 1972; Piaget y Szeminska, 1941; Van Engen, 1971). Sin embargo, no se ha demostrado que el efecto del entrenamiento o instrucción de las operaciones lógicas (clasificación y seriación) se transfiera o incida en tareas numéricas, tal como contar hacia adelante o hacia atrás (Steffe, Von Glaserfeld, Richards y Gobb, 1983), o en la resolución de problemas aditivos y substrativos (Carpenter y Moser, 1982). Una excepción relativa sería el trabajo de Clements (1984), ya que encuentra una cierta transferencia del entrenamiento lógico sobre el ámbito numérico; si bien ésta resulta más sensible cuando se trata del entrenamiento en habilidades numéricas sobre las operaciones lógicas, y por supuesto sobre diferentes conceptos aritméticos.

Otra posición teórico-empírica, opuesta a la clásica piagetiana, propugna que ni la conservación, ni la inclusión constituyen prerrequisitos indispensables para adquirir las habilidades numéricas (Fuson, 1982; Hiebert, Carpenter y Moser, 1982; Lemoyne y Favreaw, 1981; Saxe, 1979; Souveney, 1980). Al contrario, el aprendizaje de estas habilidades puede afectar el desarrollo de la CN (Acredolo, 1982; Fuson, Secada y Hall, 1983; Gelman, 1982; Siegler, 1981). Así, por ejemplo, Fuson y otros (1983) encuentran empíricamente que el contar sobre todo y la correspondencia uno a uno pueden influir en la adquisición de la CN. Pero el autor más representativo de esta orientación es sin duda alguna Gelman (1972, 1982; Gelman y Gallistell, 1978), que después de analizar minuciosamente el proceso de contar y haber propuesto un modelo del mismo basado en el procesamiento de la información (Riley, Greeno y Gelman, 1984), considera que el conteo constituye la base de las operaciones matemáticas elementales. Aún más, en su trabajo de 1982, esta autora pretende mostrar, sin llegar a convencer, a nuestro juicio, tanto por los resultados obtenidos como por razones metodológicas, que la cardinalidad (uno de los principios constituyentes del conteo), incide directamente en la adquisición de la CN.

Entre ambas posiciones puede situarse el punto de vista defendido por Pennington, Wallace y Wallace (1980) que, basándose en la afirmación emitida por otros autores de que el niño pequeño es capaz de reconocer la permanencia del número en aquellas situaciones en las que no haya indicios perceptivos conflictivos (Bryant, 1974; Gelman, 1972; Gelman y Gallistel, 1978; Lawson, Baron y Siegel, 1974; McGarrigle y Donaldson, 1974; Mehler y Bever, 1967; Miller, Heldmeyer y Miller, 1975), sostienen que existe una relación entre la CN y otras habilidades matemáticas (sumar, restar y multiplicar). Y aunque, a nuestro juicio, los datos de este trabajo sólo indican que los niños de 8 a 10 años pueden sumar, restar y multiplicar correctamente sin ser conservadores; no obstante, los autores comentan y explican estos resultados suponiendo que los sujetos poseían ya un concepto implícito de la CN, que puede ser efectivo antes de llegar a ser completa su formación. En otras palabras, la adquisición de la CN se llevaría a cabo de modo progresivo, probablemente durante años, y los distintos niveles evolutivos de dicho concepto incidirían en el desarrollo de otras nociones, en este caso, de las operaciones aritméticas mencionadas: «This concept functions effectively as an implicit principle long before it is articulated as a clear and consistent rule» (p. 242); tal como ha acontecido desde el punto de vista histórico, ilustran los autores, en la formulación de ciertos conceptos matemáticos (ej.: el cero o el cálculo infinitesimal).

Otra línea de investigación, que intenta superar los planteamientos de los trabajos anteriores, centra su estudio en la importancia del esquema parte-todo, tanto en la adquisición de las operaciones matemáticas elementales como en la misma conservación (Bermejo y Rodríguez, 1986; Bermejo y Rodríguez, próxima aparición; Bermejo y Lago, 1986; Resnick, 1983; Riley, Greeno y Heller, 1983). Para Resnick, el autor que más ha profundizado en esta dirección, la comprensión del número arrancaría precisamente del esquema parte-todo, cuyos orígenes se encontrarían en las diversas situaciones de la vida cotidiana, en las que se efectúan particiones sin aludir por el momento a su valor cuantitativo. Presupone, por tanto, que antes de iniciar la andadura escolar, los niños disponen ya de una comprensión más o menos rudimentaria del mencionado esquema y que dicha comprensión sufrirá diversas transformaciones a lo largo de la instrucción formal. En concreto, la evolución de la construcción de esta relación (parte-todo) presentaría tres períodos según este autor: durante el primero, el niño presentaría ciertas restricciones en cuanto a sus posibilidades relacionadas con el número, el conteo y las comparaciones, de modo que sólo sería capaz de solventar algunos problemas aritméticos y en determinadas situaciones. En el segundo período, que coincide con 1° de E.G.B., se adquiriría la noción de composición y descomposición del todo en sus partes, así como la de que un número está compuesto por otros o que la suma (todo) resulta de la unión de las partes (sumandos). Igualmente, comprende y aplica la propiedad conmutativa, iniciando la suma, por ejemplo, por el sumando mayor, independientemente de la ubicación de éste. Finalmente, durante el tercer período, que corresponde a 2° de E.G.B., el niño llega a comprender el sistema de base diez, a través de tres estadios evolutivos fundados igualmente en el esquema parte-todo; pero que no vamos a recoger aquí en aras de una mayor brevedad y para hacer gracia al lector (Ver Resnick, 1983).

La relevancia del esquema parte-todo ha sido reconocida también en la resolución de problemas (Bermejo y Rodríguez, próxima aparición; De Corte y Verschaffel, 1981; Kinstsch y Greeno, 1985; Riley, Greeno y Heller, 1983), ya que, entre otras cosas, parece facilitar la tarea consistente en asignar valores a los términos de la ecuación «$a + b = c$», así como la de localizar la incógnita en dicha ecuación. En definitiva, permite organizar la información presentada en el problema e integrar los elementos no explícitos en el mismo. Esta misma incidencia puede observarse igualmente en el ámbito de la conservación (Bermejo y Lago, 1986; Piaget e Inhelder, 1941), ya que el todo permanece constante independientemente de la disposición espacial de sus partes, de la forma geométrica adoptada, o de las divisiones realizadas. La recomposición de las partes, mediante la operación inversa, conduce necesariamente al todo inicial, haciéndose patente una vez más la presencia de la relación partes-todo.

El presente trabajo se enmarca dentro de esta última línea de investigación, intentando superar los viejos planteamientos en torno a la interacción conservación-habilidades matemáticas, y situando nuestro análisis en un nivel más detallado y minucioso de las tareas propuestas. Pensamos que el esquema parte-todo no sólo está presente en las situaciones de conservación y de resolución de problemas aditivos, sino que constituye el pilar central en la comprensión de dichas nociones. En esta óptica, proponemos a niños de diferentes edades dos pruebas de conservación (división en partes y la conservación del número) y otras dos aditivas (problemas numéricos y verbales), estudiando no sólo la evolución que presenta cada una de ellas sino sobre todo la posible relación que pueda vincularlas, gracias probablemente a la eficiencia común del esquema parte-todo, que podría no obstante explicitarse antes en unas tareas que en otras.

Metodología empírica (*)

Sujetos

La investigación se lleva a cabo en cuatro colegios Nacionales de Madrid, participando en ella

(*) Algunos datos de este experimento se han recogido en Bermejo y Rodríguez (1986, próxima aparición).

100 niños elegidos al azar distribuidos en cuatro grupos iguales. El primero está formado por preescolares de 2° curso, de los que 13 son niños y 12 niñas, con edades comprendidas entre 5;0 a 5;6 años ($\bar{X} = 5{,}4$). El segundo grupo lo constituyen también preescolares de 2° curso, entre los que hay 15 niños y 10 niñas, y cuyas edades oscilan entre los 5;6 y 6;0 años ($\bar{X} = 5{,}8$). En los otros dos restantes, los sujetos pertenecen a 1° de E.G.B., de manera que el primero de ellos lo componen 13 niños y 12 niñas, con edades entre 6;0 y 6;6 años ($\bar{X} = 6{,}4$); y el segundo lo forman 16 niños y 9 niñas de 6;6 a 7;0 años ($\bar{X} = 6{;}8$).

Material y procedimiento

El material utilizado es sencillo y familiar a los niños, consistiendo en fichas de 3 cm. de diámetro de colores rojo y azul, plastilina de color naranja y azul, caramelos, un muñeco de guiñol, papel y lápiz. Las pruebas son individuales y se realizan durante las horas lectivas, durando aproximadamente alrededor de treinta a treinta y cinco minutos para cada niño. Se pasan dos bloques de tareas, de las que uno son de conservación y el otro de adición, siendo aleatorio el orden de presentación de las mismas. Las pruebas de conservación son de dos tipos: una sobre la materia (CM) y la otra sobre el número (CN). En la rimera se pide a los sujetos que construyan una bola igual al modelo, preguntando después de dividir una de las bolas en dos, cuatro u ocho partes, si hay igual, más o menos plastilina. En la conservación del número, se presentan inicialmente dos filas de seis fichas cada una, en correspondencia uno a uno, de modo que una vez admitida la igualdad numérica, la hilera inferior se transforma espacialmente: alargándola, acortándola o dividiéndola en dos, cuestionando después en torno a su igualdad numérica.

Las tareas aditivas son de dos categorías diferentes: unas consisten en sumas numéricas o problemas aditivos numéricos (PAN) y las otras en problemas aditivos verbales (PAV). Un ejemplo ilustrativo de las primeras sería: «$2 + 7 = x$», y de las segundas: «si tú coges dos caramelos y yo siete, ¿cuántos tenemos entre los dos?». Para tener en cuenta el nivel de escolaridad de los niños, algunas sumas superaban la decena sólo cuando se experimentaba con sujetos de E.G.B. En cuanto a los PAV, el experimentador presenta un muñeco de guiñol que está aprendiendo a sumar, pidiendo al niño que le enseñe y explique cómo lo hace él. A continuación le invita a jugar con los caramelos, planteándole dos tipos de problemas: cuatro de combinación, como el ejemplo propuesto más arriba, y cuatro de igualación ej.: («si yo tento siete caramentos y tú dos, ¿cuántos deberías coger para tener los mismos que yo?»). Durante la realización de estas tareas (PAV), el niño manipula a su gusto los caramelos que se ponen a su disposición sobre la mesa, representando cada cantidad propuesta con los caramelos correspondientes.

Análisis y discusión de resultados

En aras de una mayor claridad en la exposición de nuestros resultados, presentamos dos tipos de análisis sucesivos. En primer lugar, examinamos sucintamente los datos en cada una de las pruebas realizadas por separado, recogiendo únicamente aquellos que, a nuestro juicio, revisten mayor interés con respecto a nuestros planteamientos. Y, en segundo lugar, estudiamos las posibles relaciones existentes entre las diferentes tareas, utilizando para ello desde el punto de vista estadístico tanto el coeficiente de contingencia como la prueba de Fisher.

Con respecto a las PAN (ver más ampliamente, Bermejo y Rodríguez, 1986), hay que señalar que el acierto de los niños en general es manifiestamente elevado, ya que incluso los más pequeños (G. I) llegan a resolver hasta un 80 % de las tareas propuestas. Igualmente, aparece una ligera evolución con la edad en cada uno de los ciclos a que pertenecen los sujetos, de modo que los mayores tanto de preescolar como de 1° de EGB resuelven aproximadamente un 6 % más de pruebas que los pequeños de los respectivos cursos. Más interesante nos parece el comportamiento de los sujetos de preescolar ante la prueba «$2 + 7$», que tiene el 2° sumando mayor que el primero y además supera el número de dedos de una mano. Estos niños suelen representar los sumandos con los dedos de las manos, pasando después a contarlos todos.

Ahora bien, como el 2° sumando mencionado no puede representarse con los dedos de una sola mano, un número importante de preescolares fracasa en su resolución (G. I: 42 %; G. II: 47 %); ya que se muestran incapaces de utilizar la estrategia de contar a partir del primer sumando, bien representando entonces el «7» con los dedos de las dos manos, bien aplicando en primer lugar la propiedad conmutativa. Esto permite afirmar, a nuestro juicio, que estos niños aún no han comprendido perfectamente la relación parte-todo (sumando-suma), ya que de lo contrario sabrían que el orden de las partes no altera el todo, empleando entonces la propiedad conmutativa. En cambio, la mayoría de los niños de 1° de EGB optan por utlizar una estrategia más evolucionada (Carpenter y Moser, 1982; Siegler y Clark, 1982; Fuson, 1982), consistente en contar a partir del primer sumando. Pero la dificultad más relevante que encuentran los sujetos mayores radica en las sumas con «llevadas», ya que para operar correctamente en estos casos han de saber que cada cifra del todo (suma) representa valores diferentes según su posición (unidades, decenas, etc.), así como que, según las reglas de la sintaxis (Brown y Burton, 1976; Brown y Van Lehn, 1980; Resnick, 1980, 1983), en cada columna sólo puede consignarse un solo dígito, que posee el mismo estatus que los valores de la columna de los que resulta. Sin embargo, el fracaso más frecuente en la realización de esta tarea consiste en la formación de resultados independientes en cada una de las columnas, no produciéndose el intercambio necesario entre ellas.

En cuanto a los PAV (ver, más ampliamente, Bermejo y Rodríguez, próxima aparición), el éxito de los niños difiere según la edad de los mismos y la tarea propuesta; ya que en los problemas de combinación incluso los niños pequeños obtienen altos porcentajes de respuestas correctas (87 %), mientras que en los de igualación sólo alcanzan el 53 %, llegando a un 90 % los sujetos mayores (G. IV). Esto muestra que la resolución acertada de un tipo de problemas aditivos no garantiza el éxito en otros similares. Ahora bien, hay al menos dos factores que han facilitado, o dificultado a veces, la solución de las pruebas: la disponibilidad de ayudas (caramelos) y el lugar ocupado por la incógnita en la ecuación $a + b = c$. Sobre el primero se ha hablado frecuentemente en la literatura en torno a nuestro tema (Bolduc, 1970; Carpenter y Moser, 1982; Le Blanc, 1971; Marshall, 1977), resaltando sobre todo su papel facilitador, si bien a veces puede provocar efectos contraproducentes (ver Bermejo y Rodríguez, próxima aparición), como el hecho de utilizar estrategias simples cuando en realidad el niño es capaz de emplear otras más evolucionadas. En cuanto al segundo factor, se simplifica la solución de la tarea si el dato desconocido es el todo (suma), como ocurre manifiestamente en las pruebas de combinación; mientras que se dificulta cuando se localiza la incógnita en alguno de los sumandos (partes), tal como acaece en los problemas de igualación (De Corte y Verschaffel, 1981; Grouws, 1971; Hirstein, 1979; Rosenthal y Resnick, 1974; Riley, Greeno y Heller, 1983). Una vez más se pone de relieve que si el niño hubiera comprendido perfectamente el esquema parte-todo, así como su utilización en estas tareas concretas, no se vería afectado por la ubicación de la incógnita. En cambio, esta incomprensión conduce, al menos parcialmente, a que no pocos preescolares (42,1 % en ambos grupos) intenten resolver los problemas de igualación como si fueran de combinación, empleando la estrategia de contar todo («counting-all»). Por otra parte, una vez más constatamos que las estrategias empleadas en la resolución de las pruebas son función de la edad y del tipo de tarea. Así, mientras que en los problemas de combinación se usa prioritariamente la estrategia de contar todo, los de igualación dan lugar en cambio a una mayor variedad de las mismas; ya que si bien los dos primeros grupos de sujetos prefieren, aunque de modo diverso, la «match-separete» y la «add-on», los mayores se inclinan por otras extrategias más evolucionadas, como son el uso de reglas y la resolución mental.

Por último, para finalizar este primer bloque de análisis pasamos a estudiar brevemente las conservaciones. Como era de esperar, se constata una clara evolución con la edad tanto en la CN como en la GM, resultando más difícil esta última, ya que, por ejemplo, el 76 % de niños del G. IV se muestran conservadores en el número, por un 64 % que lo son en la materia. Por otra parte los argumentos que proponen los niños para justificar la conservación son de identidad simple o aditiva y de inversión, manifestando en este caso, sobre todo en la inversión, la comprensión del esquema parte-todo. Es obvio que al afirmar el niño que una bola de plastilina es igual a la misma bola dividida en dos, cuatro u ocho partes, está suponiendo que el todo es igual a las partes y viceversa.

Una vez examinados los resultados correspondientes a cada prueba, veamos ahora las posibles relaciones existentes entre ellos. Empecemos por la dualidad quizás menos interesante para los objetivos aquí planteados: CM - CN.El primer dato que podemos observar es que la CM resulta más difícil que la CN para todos los grupos, ya que en la primera sólo se muestran conservadores el 34 %, mientras que en la segunda lo hace el 52 %. Además, sólo 5 niños resuelven las primeras pruebas (CM) y no las segundas; mientras que 23 lo hacen al contrario. Esta diferencia en el grado de dificultad, confirmada en otras investigaciones (Bryant, 1974; Goth, 1980; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974; Michie, 1984; Piaget e Inhelder, 1963; Siegler, 1981), se debe, a nuestro juicio, a que en las cantidades discretas (CN) se halla mejor definida la unidad, facilitando entonces la composición y descomposición del todo en partes; y además, como señala Siegler (1981), a que el niño dispone en el caso de la CN de dos recursos más: el conteo o la estrategia de contar, y la correspondencia uno a uno. Sin embargo, el coeficiente de contingencia entre ambas pruebas es significativo, tanto para los niños preescolares ($C = 0.35$) como para los de 1° de EGB ($C = 0.43$); poniendo de manifiesto la existencia de una relación entre ambas tareas, principalmente en los grupos II ($p = 0.006$) y III ($p = 0.0006$).

Ahora bien, es a todas luces obvio que nuestro interés se centra prioritariamente en torno a la vinculación entre las conservaciones y las pruebas aditivas, como queda sentado en la introducción de este trabajo. Pasemos, pues, sin más ambajes al estudio de estas posibles relaciones. Con respecto a la CN y los PAN encontramos que el coeficiente de contingencia es significativo en los niños de 1° de EGB ($C = 0.54$), pero no entre los preescolares ($C = 0.067$), como por otra parte puede observarse en la prueba de Fisher para el G. III ($p = 0.013$) y el G. IV ($p = 0.0024$). Este nexo puede constatarse también en la tabla n° 1, al observar que casi todos los niños conservadores (49/52) resuelven correctamente las PAN. En cambio, no pocos sujetos (45/94) obtienen resultados exitosos en los PAN, fracasando sin embargo en la CN. En consecuencia, puede colegirse que los niños no conservadores del número poseen la competencia cognitiva necesaria para solventar tareas aditivas numéricas de baja complejidad. En cuanto a la CN y los PAV, no aparece ninguna relación significativa entre ellos, ni en general, ni en ninguno de los grupos de sujetos. Sólo los niños mayores (G. IV) muestran una relación elevada, pero no significativa entre la CN y los problemas de igualación solamente ($p = 0.091$). No obstante, creemos conveniente señalar que todos los niños conservadores, menos uno, resuelven correctamente los problemas de combinación; mientras que hay 12 que fracasan en los problemas de igualación. O bien, observando la tabla n.° 2, podemos constatar que todos los niños conservadores de 1° de EGB (G. III y G. IV) resuelven las tareas aditivas, no siendo cierta la afirmación recíproca. Sin embargo, más del 50 % de niños conservadores del G. I. fracasan en estos problemas, poniéndose de relieve en este caso la independencia entre ambas tareas.

TABLA II
Distribución del número de sujetos en función de la Edad, C.N. y P.A.V.

C.N.	P.A.V.	EDAD				
		G.I	G.II	G.III	G.IV	Total
Conserva	Bien	5	8	11	20	44
	Mal	6	2	0	0	8
Total		11	10	11	20	52
No conserva	Bien	7	10	13	5	55
	Mal	7	5	1	0	13
Total		14	15	14	5	68

Referente a la relación entre la CM y los PAN, el coeficiente de contingencia es significativo sólo en el caso de los niños escolares (G. III y G. IV), siendo también significativo el G. II aislado en la prueba de Fisher ($p = 0.037$). Esto significa que, al igual que ocurría en la díada CN - PAN, existe una relación estadísticamente significativa entre ambas tareas. Así puede observarse en la tabla n.° 3, que todos los niños conservadores sin excepción

TABLA I
Distribución del número de sujetos en función de la Edad, C.N. y P.A.N.

C.N.	P.A.N.	EDAD				
		G.I	G.II	G.III	G.IV	Total
Conserva	Bien	11	10	10	18	49
	Mal	0	0	1	2	3
Total		11	10	11	20	52
No conserva	Bien	14	15	12	4	45
	Mal	0	0	2	1	3
Total		14	15	14	5	48

TABLA III
Distribución del número de sujetos en función de la Edad, C.M. y P.A.N.

C.M.	P.A.N.	EDAD				
		G.I	G.II	G.III	G.IV	Total
Conserva	Bien	2	8	8	16	34
	Mal	0	0	0	0	0
Total		2	8	8	16	34
No conserva	Bien	23	17	14	6	60
	Mal	0	0	3	3	6
Total		23	17	17	9	66

resuelven los PAN, fracasando sólo 6 de ellos en estas últimas. En cuanto a la relación entre la CM y los PAV, sólo resulta significativa en el grupo II, que alcanza en la prueba de Fisher una $p = 0.04$. Ahora bien, si comparamos la CM sólo con los resultados obtenidos en los problemas de igualación, entonces este nexo es igualmente significativo ($p = 0.036$) en los niños mayores (G. IV). La tabla n.º 4 muestra que todos los sujetos conservadores, menos uno, resuelven correctamente los PAV; pero al mismo tiempo pone también de manifiesto que 46/100 niños, que no conservan, solucionan perfectamente las tareas aditivas.

De todo lo dicho anteriormente, cabe destacar lo siguiente. En primer lugar, existe en general una relación marcada entre las conservaciones y los problemas aditivos numéricos (PAN), excepto en los niños pequeños (G. I). Sin embargo, resulta obvio que estas últimas tareas se adquieren antes que las conservaciones. Ahora bien, estos dos tipos de datos no suponen, a nuestro juicio, la incidencia directa de una variable sobre la otra, sino que más bien nos lleva a pensar en la existencia en ambas categorías de pruebas de mecanismos cognitivos similares o comunes, como sería el esquema parte-todo.Así, acabamos de ver que desde el punto de vista estadístico la CM se muestra globalmente más vinculada que la CN con los PAN y esto parece claro si consideramos que la tarea de la CM por división propuesta a los niños consiste en presentar dos bolas de plastilina iguales, de las que una se divide sucesivamente en dos, cuatro y ocho partes, preguntando en cada momento si estas partes son igual a la otra bola (todo). En las sumas (PAN) se da una situación similar, ya que aparecen relacionadas las partes (sumandos) con un todo (suma o resultado). Sin embargo, la relación entre la CM y los PAV es menos clara estadísticamente, como también acontece entre los PAN y los PAV, ya que en ningún caso aparecen vinculados de manera significativa. Estas diferencias podrían deberse a que los procesos cognitivos que entran en juego son parcialmente distintos, en el sentido de que, si bien en los PAN se pide concretamente que se ejecute la operación aditiva sobre unos datos ya ordenados gráficamente; en cambio, en los PAV se requieren además otras actividades de comprensión y representación del problema complementarias, resultando más comleja su resolución, tal como puede verse en los modelos de De Corte y Verschaffel (1985) y Kintsch y Greeno (1985). Podría afirmarse, siendo conscientes de su simplismo, que en las tareas de CM y de los PAN priman los procesos de ejecución, mientras que en los PAV lo harían los de representación. De aquí, pues, procederían al menos alguna de las diferencias encontradas.

TABLA IV

Distribución del número de sujetos en función de la Edad, C.M. y P.A.V.

C.N.	P.A.N.	G.I	G.II	G.III	G.IV	Total
		EDAD				
Conserva	Bien	1	8	8	16	33
	Mal	1	0	0	0	1
Total		2	8	8	16	34
No conserva	Bien	11	10	16	9	46
	Mal	12	7	1	0	20
Total		23	17	17	9	66

Conclusiones

El viejo planteamiento sobre si la conservación constituye un prerrequisito indispensable para adquirir las nociones matemáticas elementales (Kamii, 1984; Piaget y Szeminska, 1941), o si son éstas las que realmente influyen en el desarrollo de las conservaciones (Acredolo, 1982; Fuson y otros, 1983; Gelman, 1982; Siegler, 1981), no parece el modo más apropiado para intentar clarificar la competencia cognitiva requerida para la realización de tales tareas. Tampoco resulta convincente la posición de Pennington y otros (1980), que, admitiendo la influencia de la conservación en la adquisición de las operaciones aritméticas elementales de sumar, restar y multiplicar, explican la mayor precocidad de éstas últimas, suponiendo que el desarrollo de la conservación presenta diferentes niveles progresivos a lo largo de los años, de modo que estos niveles incidirían de manera diversa en el aprendizaje de las nociones aritméticas coetáneas.

Nuestros resultados confirman, por una parte, la existencia en general de una relación entre la conservación y las actividades aditivas numéricas, y, por otra, la precocidad de estas últimas con respecto a la conservación. En cuanto al primer punto, que afecta principalmente a los dos grupos de niños de 1º de EGB, se explicaría, a nuestro entender, no por la influencia directa de unas nociones sobre las otras, sino más bien por la presencia en ambos de elementos cognitivos comunes, es decir, por la operatividad del esquema parte-todo en la realización de las tareas mencionadas. La precocidad, no obstante, de las habilidades matemáticas sobre las conservaciones se debería a que esta relación parte-todo, si bien se manifiesta ya cuando el niño pequeño compone y descompone el todo en partes (por ejemplo, en los juegos educativos, o cuando la tarta se divide en partes), no llega a comprenderse perfectamente y a generalizarse su aplicación hasta más tarde; de modo que su incidencia se expresa antes en las situaciones aditivas que en las de conservación.

Por otra parte, los problemas aditivos verbales no aparecen relacionados estadísticamente ni con las conservaciones, ni tampoco con las pruebas aditivas numéricas. Y la razón, que ya hemos apuntado anteriormente, radica en que en las tareas aditivas verbales el niño tiene que construir la representación del problema planteado, antes de ejecutar o emitir su respuesta, requiriendo para ello un conjunto de procesos cognitivos semánticos de mayor complejidad que en las restantes situaciones, tal como puede constatarse en los modelos propuestos por Kintsch y Greeno (1985) y De Corte y Verschafell (1985). Ello explica que a pesar de tratarse de la misma operación aditiva, las sumas o problemas numéricos resulten más fáciles para los niños que los problemas aditivos verbales.

Para concluir, señalemos algunas implicaciones educativas que se desprenden del contenido de este trabajo. En primer lugar, convendría que se insistiera aún más, porque en algunos libros de texto de matemáticas ya se hace, en la trascendencia de la relación parte-todo, en orden a facilitar la comprensión de no pocas nociones matemáticas elementales y fundamentales que aparecen a lo largo del curriculum escolar del niño. Igualmente, los problemas verbales de adición que se proponen no sólo resultan más difíciles de resolver para los niños que las mismas operaciones presentadas bajo forma de suma o problema numérico, sino que dentro de los mismos problemas verbales su complejidad difiere en función sobre todo de la estructura semántica de los mismos. Y finalmente, aunque la disponibilidad de ayudas (objetos, dedos, dibujos, etc.) puede a veces resultar contraproducente (ver Carpenter y Moser, 1982), sin embargo, en general la presencia de tales ayudas suele favorecer la resolución de los problemas planteados a los niños.

Bibliografía

ACREDOLO, C.: Conservation-nonconservation: Alternative explanations. En Brainerd, C. (Ed.), Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development. *New York: Springer-Verlag, 1982.*

BERMEJO, V. y LAGO, M.O.: La adquisición de la edición. Estrategias infantiles en función de la naturaleza de los sumandos. Segundas Jornadas Internacionales de Psicología y Educación, *Madrid, Junio, 1986.*

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P.: El esquema parte-todo en la conservación y la adición. Segundas Jornadas Internacionales de Psicología y Educación, *Madrid, Junio, 1986.*

BERMEJO, V. y RODRIGUEZ, P.: Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. (Próxima aparición).

BOLDUC, E.: A factorial study of the effects of three variables on the ability of first-grade children to solve arithmetic addition problems. (Doctoral dissertation, University of Tennesse, 1969). Dissertation Abstracts International, *1970,* 30, *3358A.*

BROWN, J y BURTON, R.: Diagnostic models for procedural in basic mathematical skills. Cognitive Science, *1978,* 2(2), 155-192.

BROWN, J. y VAN LEHN, K.: Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. Cognitive Science, *1980,* 4(4), *379-426.*

BRYANT, P.: Perception and understanding in young children. *London: Methven, 1974.*

CARPENTER, T. y MOSER, J.: The development of addition and subtraction problem-solving skills. En Carpenter, T., Moser,J. y Romberg, T. (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective. *Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1982.*

CLEMENTS, D.H.: Training effects on the development and generalization of piagetian logical operations and knowledge of number. Journal of Educational Psychology, *1984,* 5, *766-776.*

COPELAND, R.: How children learn mathematics *(2nd ed.). New York: Macmillan, 1974.*

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL L.: Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. Journal of Educational Psychology, *1981,* 73, *775-779.*

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L.: Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. Journal of Mathematical Behavior, *1985,* 4, *3-21.*

DODWELL, P.: Children's understanding of number concets. Characteristics of and individual and of a grou test. Canadian Journal of sychology, *1961,* 15, *29-36.*

FUSON, K.: The counting-on solution procedure: Analysis and empirical results. En Carpenter, T., Moser, J. y Romberg, T. (Eds.), Addition and substraction: A cognitive perspective. *Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1982.*

FUSON, K., SECADA, W. y HALL, J.: Matching, counting, and conservation of number equivalence. Child Development, *1983,* 54, *91-97.*

GELMAN, R.: Logical capacity of very young children: Number invariance rules. Child Development, *1972,* 43, *371-383.*

GELMAN, R.: Accessing one-to-one correspondence: Still another paper about conservation. British Journal of Psychology, *1982,* 73, *209-220.*

GELMAN, R. y GALLISTEL, C.: The child's understanding of number. *Cambridge Mass: Harvard University Press, 1978.*

GOTH, P.: The development of addition-subtraction knowledge and its relation to conservation in young elementary school children. Unpublished doctoral dissertation, University of Texas at Austin, 1980. Citado por Gelman, R. y Starkey, P., 1982.

GREENO, J., RILEY, M. y GELMAN, R.: Conceptual competence and children's counting. Cognitive Psychology, *1984,* 16, *94-143.*

GROUWS, D.: Differential performance of third-grade children in solving open sentences of four types. (Doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1971). Dissertation Abstracts International, *1972,* 32, *3860A.*

HIEBERT, J., CARPENTER, T. y MOSER, J.: Cognitive development and children's solutions to verbal arithmetic problems. Journal for Research in Mathematics Education, *1982,* 13, *83-98.*

HIRSTEIN, J.: Children's counting in addition, subtraction, and numeration contexts (Doctoral dissertation, Indiana University, 1980). Dissertation Abstracts International, *1980,* 41, *(01).*

HOOD, H.: An experimental study of Piaget's theory of the developmente of number in children. British Journal of Psychology, *1962,* 53, *273-286.*

INHELDER, B., SINCLAIR, H. y BOVET, M.: Learning and the development of cognition. *Cambridge, MA: Harvard University Press, 1974.*

ISAACS, N.: A brief introduction to Piaget. *New York: Shocken Books, 1972.*

KAMII, C.. El número en la educación preescolar. *Madrid: Visor, 1984.*

KAMII, C. y DE VRIES, R.: Piaget for early education. En Day, M. y Parker, R. (Eds.), The preschool in action. *Boston: Allyn & Bacon, 1977.*

KINTSCH, W. y GREENO, J.: Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, *1985,* 92(1), *109-129.*

LAWSON, G., BARON, J. y SIEGEL, L.: The role of number and length cues in children's quantitative judgments. Child Development, *1974,* 45, *731-736.*

LeBLAND, J.: The performance of first grade children in four levels of conservation of numerousness and three IQ groups when solving subtraction problems. Madison: Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning, 1971.

LEMOYNE, G. y FAVREAU, M.: Piaget's concept of number development: Its relevance to mathematics learning. Journal for Research in Mathematics Education, *1981,* 12, *179-196.*

MARSHALL, G.: A study of training and transfer effects of comparison subtraction and one-to-one correspondence. Dissertation Abstracts International, *1977,* 37, *4936A.*

McGARRIGLE, J. y DONALDSON, M.: Conservation accidents. Cognition, *1974/75,* 3, *341-350.*

MEHLER, J. y BEVER, T.: Cognitive capacity of very young children. Science, *1967,* 158, *141-142.*

MICHIE, S.: Number understanding in preschool children. British Journal of Educational Psychology, *1984,* 54, *145-153.*

MILLER, P.H., HELDMEYER, K.H. y MILLER, S.A.: Facilitation of conservation of number in young children. Developmental Psychology, *1975,* 11, *253.*

PENNINGTON, G., WALLACE, L. y WALLACE, M.: Non-conserver's use and understanding of number and arithmetic. Genetic Psychology Monographs, *1980,* 101, *231-243.*

PIAGET, J. e INHELDER, B.: Les operations intellectuelles et leur dévelopment. En Traité de Psychologie Expérimentale. *Vol. VII. París: PUF, 1963.*

PIAGET, J. y SZEMINSKA, A.: Le génèse du nombre chez l'enfant. *Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1941.*

RESNICK, L.: Syntaz and semantics in learning to subtract. En Carpenter, T., Moser, J. y Romberg, T. (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective. *Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1982.*

RESNICK, L.: A developmental theory of number understanding. En Ginsburg, H. (Ed.), the development of mathematical thinking. *New York: Academic Press, 1983.*

RILEY, M. GREENO, J. y HELLER, J.: Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En Ginsburg, H. (Ed.), The development of mathematical thinking. *New York: Academic Press, 1983.*

ROSENTHAL, D. y RESNICK, L.: Children's solution processes in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, *1974,* 66, *812-825.*

SAXE, G.: Developmental relations between notacional counting and number conservation. Child Development, *1979,* 50, *180-187.*

SIEGLER, R.: Developmental sequences between and within concepts. Monographs of the Society for Research in Child Development, *1981,* 46(2).

SIEGLER, R. y ROBINSON, M.: The development of numerical understandings. En Reese, H. y Lipsett, L. (Eds.), Advances in child development and behavior *(Vol. 16). New York: Academic Press, 1982.*

SOUVENEY, R.: Cognitive competence and mathematical development. Journal for Research in Mathematics Education, *1980,* 11, *215-224.*

SPEARS, W. y DODWELL, P.: An investigation of different instructional methods on number-concept understanding and arithmetic learning. Canadian Journal of Behavioral Science, *1970,* 2, *136-147.*

STEFFE, L., VON GLASERFELD, E., RICHARDS, J. y COBB, P.: Children's counting types: Philosophy, theory, and applications. *New York: Praeger Scientific, 1983.*

VAN ENGEN, H.: Epistemology, research and instruction. En Rosskopf, M., Steffe, L. y Taback, S. (Eds.), Piagetian cognitive-development research and mathematics education. *Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1971.*

*Dirección de los autores: * Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Facultad de Psicología. Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas, 28023 Madrid. ** Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. de Segovia. Pl. Colmenares S.N., 40071 Segovia.*