Teoría del grado de Brouwer-Kronecker

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Curso 2019/2020

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Doble grado en Matemáticas-Física

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

JOSÉ POLO GÓMEZ

Madrid, 10 de julio de 2020

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JULIO 2020

TEORÍA DEL GRADO DE BROUWER-KRONECKER

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

JOSÉ POLO GÓMEZ

RESUMEN. En este trabajo se estudian los elementos básicos de la teoría del grado de Brouwer-Kronecker. Se demuestran los resultados de existencia de difeotopías y de aproximación de aplicaciones continuas (propias) con homotopía que permiten definir consistentemente el grado de una aplicación suave y su extensión a aplicaciones continuas, respectivamente. La invariancia por homotopía del grado se utiliza para probar varios resultados topológicos profundos incluyendo el teorema de Borsuk-Hirsch sobre el grado de aplicaciones pares e impares en esferas y el de Jordan-Brouwer sobre la desconexión de espacios afines por hipersuperficies.

Palabras clave: orientación, difeotopía, aproximación, aplicación propia, grado, esferas, aplicación esencial, paridad.

ABSTRACT. In this work we study the basics of Bouwer-Kronecker degree theory. In order to define consistently de degree of a smooth mapping and its extension to continuous mappings, we prove results regarding the existence of diffeotopies and the approximation with homotopy of (proper) continuous mappings. The homotopy invariance of the degree is applied in order to tackle some deep topological theorems as the Borsuk-Hirsch theorem addressing the degree of even and odd mappings in spheres and the Jordan-Brouwer theorem on the separation of affine spaces by hypersurfaces.

Keywords: orientation, diffeotopy, approximation, proper mapping, degree, spheres, essential application, parity.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55M25, 55P57; Secondary 55Q40.

Índice

Introducción

Los orígenes del *grado de Brouwer-Kronecker* se remontan a la primera mitad del siglo XIX, cuando Cauchy publica los primeros trabajos en los que utiliza un "índice de enrollamiento" para estudiar la existencia de ceros de aplicaciones suaves del plano en sí mismo. En la segunda mitad del siglo XIX, Kronecker extendió esta herramienta a dimensiones superiores, pero fue Brouwer, ya en el siglo XX, el que advirtió la naturaleza profundamente geométrica de este índice. Brouwer extiende el índice a funciones continuas y espacios más generales, y lo utiliza para demostrar en dimensión arbitraria resultados topológicos centrales como el teorema de invarianza de la dimensión, concediéndole el estatus de herramienta topológica que tiene en el contexto de la teoría moderna.

En este trabajo se introduce la *teoría del grado de Brouwer-Kronecker* desde la base proporcionada por las asignaturas de *Topología Elemental* y *Variedades Diferenciables* del Grado en Matemáticas. El grado de Brouwer-Kronecker es una herramienta fundamental de la Topología Diferencial que formaliza los conceptos intuitivos de intersección y sienta una infraestructura teórica que permite demostrar en dimensión arbitraria resultados topológicos profundos, desde los teoremas de Brouwer hasta la fórmula de Gauss-Bonnet. Está, además, íntimamente relacionado con la cohomología de de Rham, aunque este es un aspecto que no trataremos aquí.

El texto está estructurado en 12 secciones en las que se recorre el camino desde los resultados básicos en los que se sustenta la teoría hasta algunas de sus aplicaciones más notables.

Se comienza, en las secciones 1 y 2, revisando los conceptos básicos de variedades y orientación. Aquí se aprovecha para fijar la notación utilizada y para enunciar algunos resultados importantes que se utilizan a lo largo del trabajo (como el teorema de Sard) o justifican su planteamiento (como el teorema de Whitney), pero que no se demuestran por exceder los límites del trabajo. En las secciones 3 y 5 se tratan las difeotopías y la aproximación de aplicaciones continuas, respectivamente. Las primeras resultan indispensables para definir apropiadamente el grado de Brouwer-Kronecker de una aplicación suave en la sección 4, y son los resultados de aproximación los que permiten extender esta definición a aplicaciones continuas en la sección 6.

A partir de aquí, se aprovecha el marco establecido por la teoría de grado expuesta para demostrar varios resultados topológicos fundamentales en dimensión arbitraria, comenzando en la sección 7 por los teoremas de Brouwer. Por haberse tratado en trabajos anteriores, no demostramos aquí el teorema de Hopf, sin duda uno de los resultados redondos de la teoría de grado. En su lugar, en la sección 8 se demuestra una equivalencia interesante que resalta hasta qué punto el estudio de las aplicaciones no nulhomótopas es esencial[1] en la clasificación de las aplicaciones entre esferas. En la sección 9 se demuestra el teorema de Borsuk-Hirsch, y sus extensas aplicaciones se desarrollan en las secciones 10 y 11. En la última sección del trabajo, se relajan las condiciones de definición del grado para poder aplicarlo a variedades no orientables, lo que permite demostrar el célebre teorema de separación de Jordan, con el que concluimos la exposición.

1. Variedades diferenciables. Notación y resultados iniciales

Recordemos, para empezar, las nociones básicas de diferenciabilidad.

Definiciones 1.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ conjuntos arbitrarios, la aplicación $f : X \to Y$ se dice $\mathcal{C}^r$ *diferenciable* si localmente puede extenderse a una aplicación $\mathcal{C}^r$ diferenciable entre abiertos de los espacios afines ambiente, es decir, si todo $x \in X$ tiene un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ y una aplicación $F : U \to \mathbb{R}^q$ $\mathcal{C}^r$ diferenciable en el sentido habitual tal que $F\big|_{U\cap X} = f\big|_{U\cap X}$. En particular, se dice que f es un $\mathcal{C}^r$ *difeomorfismo* si f es biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son $\mathcal{C}^r$ diferenciables en el sentido anterior.

Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se dice que es una *variedad* $\mathcal{C}^r$ *diferenciable* si es localmente $\mathcal{C}^r$ difeomorfo a un abierto de un espacio afín, es decir, si para todo $x \in M$, existen un entorno abierto suyo $U \subset M$, un abierto $W \subset \mathbb{R}^m$ y un difeomorfismo $\varphi : W \to U$. A φ se la denomina *parametrización de* M *en* x, a su inversa, *sistema de coordenadas*, y $m = \dim_x(M)$ es la *dimensión en* x, que no depende del sistema de coordenadas escogido y que es constante si la variedad es conexa. Aquí se considerarán siempre variedades de dimensión constante $\dim(M)$. Nótese que el abierto W siempre puede reducirse a una bola de centro $\varphi^{-1}(x)$ de radio ε suficientemente pequeño, y esta es difeomorfa a $\mathbb{R}^m$ por el difeomorfismo $x \mapsto x/\sqrt{\varepsilon^2 - ||x||^2}$. Por tanto, siempre puede tomarse $W = \mathbb{R}^m$.

[1]De ahí que la terminología clásica llame *esenciales* a las aplicaciones no nulhomótopas.

Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se dice que es una *variedad* $\mathcal{C}^r$ *diferenciable con borde* si es localmente difeomorfa a un abierto de un semiespacio afín, es decir, si para todo $x \in M$, existe un entorno abierto suyo $U \subset M$, un abierto $W \subset \mathbb{H}^m$ y un difeomorfismo $\varphi : W \to U$, donde $\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^m \cap \{x_1 \geq 0\}$. En particular, x pertenece al *borde de* M, denotado ∂M, si y solo si $\varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^m \cap \{x_1 = 0\}$, lo que por el Teorema de la Función Inversa no depende de la parametrización escogida. Es inmediato que el borde ∂M es por sí mismo una variedad diferenciable de dimensión $\dim_x(\partial M) = \dim_x(M) - 1$, dado $x \in \partial M$.

Dado un punto $x \in M$ y una parametrización φ de M en x, con $a = \varphi^{-1}(x)$, se define el *espacio tangente a* M *en* x como $T_xM = \operatorname{im}(d_a\varphi) \subset \mathbb{R}^p$, que no depende de la elección de la parametrización. En particular, $d_a\varphi : \mathbb{R}^m \to T_xM$ es un isomorfismo, y la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^m$ es naturalmente una base del espacio tangente $\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}|_x, i = 1, \ldots, m \right\}$ que denotamos como derivadas parciales, en referencia a su interpretación como derivaciones. Así, sean M y N variedades diferenciables, y sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre ellas. Dados $x \in M$ e $y = f(x) \in N$, y φ y ψ sendas parametrizaciones de M y N en x e y con $a = \varphi^{-1}(x)$ y $b = \psi^{-1}(y)$, respectivamente, se define la derivada de f en x como $d_xf = d_b\psi \circ d_ag \circ (d_a\varphi)^{-1} : T_xM \to T_yN$, donde $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es una *localización* de f. En particular, la matriz jacobiana de d_ag respecto de las bases canónicas de los espacios afines correspondientes coincide con la matriz jacobiana de d_xf respecto a las bases inducidas en los espacios tangentes. Se comprueba que la definición de derivada no depende de las parametrizaciones, al coincidir con la restricción de la derivada de cualquier extensión local de f. La definición del espacio tangente y de la derivada permiten formular consistentemente un cálculo en variedades, verificándose muchos de los resultados clásicos para funciones entre espacios afines, como el Teorema de la Función Inversa para variedades sin borde.

Observación 1.2. Utilizando el Teorema de la Función Inversa (entre espacios afines) se demuestra que localmente toda variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable sin borde $M \subset \mathbb{R}^p$ de dimensión m viene descrita por ecuaciones, es decir, que para todo $x \in M$, existen un entorno abierto suyo $U \subset \mathbb{R}^p$ y una aplicación $\mathcal{C}^r$ diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^{p-m}$ tal que

$$M \cap U = \{ x \in U \ : \ f(x) = 0 \} \quad \text{y} \quad T_xM = \ker(d_xf) \ .$$

Si $M \subset \mathbb{R}^p$ es una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable con borde, entonces para cada $x \in M$, existen un entorno abierto suyo $U \subset \mathbb{R}^p$ y aplicaciones $f : U \to \mathbb{R}^{p-m}$ y $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^r$ diferenciables tales que

$$M \cap U = \{ x \in U \ : \ f(x) = 0 \, , \, \bar{f}(x) \geq 0 \} \quad \text{y} \quad T_xM = \ker(d_xf) \ .$$

En particular, el borde ∂M es una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable de dimensión $m - 1$ y verifica

$$\partial M \cap U = \{ x \in U \ : \ f(x) = \bar{f}(x) = 0 \}$$

Observación 1.3. Por ser localmente homeomorfas a un espacio afín, las variedades diferenciables heredan sus propiedades topológicas locales, como la compacidad local, la conexión por caminos local y las componentes conexas abiertas. Por estar sumergidas en espacios afines, heredan las propiedades globales que se conservan por restricción, como la existencia de una base topológica numerable, el ser Hausdorff, la metrizabilidad y como consecuencia la paracompacidad[2]. En particular, como consecuencia de sus propiedades

[2]Una prueba elemental, elegante y sorprendentemente breve de esta implicación puede verse en [8].

locales y globales, las variedades diferenciables poseen una propiedad que utilizaremos en varias ocasiones en lo que sigue: la existencia de exhauciones por compactos de la variedad, que además pueden tomarse encajados. En efecto, sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable. Entonces por ser un subconjunto localmente compacto de un espacio afín (que es Hausdorff), es localmente cerrada. Así, existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ tal que $M = U \cap \overline{M}$. En ese caso, la metrizabilidad nos permite definir explícitamente

$$K_N = \{x \in M \,:\, \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^p \setminus U) \geq 1/N\} \cap \overline{B}(0, N) \cap \overline{M}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. Claramente K_N es compacto y está contenido en U y en $\overline{M}$, luego en M, y la familia de compactos encajados $\{K_N\}$ recubre la variedad. Con todo, nótese que en realidad la exhaución por compactos puede realizarse en general por ser M localmente compacto y II axioma de numerabilidad.

Observación 1.4. En su formulación más general, el grado de Brouwer-Kronecker permite estudiar aplicaciones definidas entre variedades $\mathcal{C}^r$ diferenciables sin borde y en general no sumergidas en un espacio afín $\mathbb{R}^p$. Aquí se reducirá el tratamiento a las variedades $\mathcal{C}^\infty$ diferenciables y sumergidas. La construcción puede generalizarse teniendo en cuenta los siguientes resultados:
(1) (Teorema de inmersión de Whitney) *Toda variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable de dimensión m es difeomorfa a una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable sumergida en un espacio afín cuya dimensión puede acotarse por $2m+1$.*
(2) Toda variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable sumergida en $\mathbb{R}^p$ es $\mathcal{C}^r$ difeomorfa a una variedad $\mathcal{C}^\infty$ diferenciable sumergida en el mismo espacio afín.
Ambos resultados pertenecen al ámbito de la topología diferencial, y sus demostraciones se pueden encontrar en [3] y [4], respectivamente. En adelante, tanto a las variedades como a las aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$ diferenciables se las denominará, por brevedad, *suaves*.

Enunciamos a continuación sin demostrar algunos resultados fundamentales sobre la existencia de particiones diferenciables de la unidad y valores regulares.

Proposición y definición 1.5. *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad suave, dado un recubrimiento de M por abiertos, $\mathcal{U} = \{U_i \subset M,\, i \in \mathcal{I}\}$, existe una colección de funciones suaves $\big\{\theta_i : M \to [0,1],\, i \in \mathcal{I}\big\}$ verificando que*

(i) *Para todo $x \in M$, existe un entorno abierto $U^x \subset M$ tal que $\theta_i\big|_{U^x} = 0$ salvo para una cantidad finita de índices. Por tanto, la suma está bien definida. Además, $\sum_i \theta_i(x) = 1$.*

(ii) *Para cada $i \in \mathcal{I}$, $\mathrm{sop}(\theta_i) = \overline{\big\{x \in M \,:\, \theta_i(x) \neq 0\big\}} \subset U_i$.*

A la familia de funciones $\big\{\theta_i : M \to [0,1],\, i \in \mathcal{I}\big\}$ se la denomina *partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $\mathcal{U}$.*

Consecuencias. La posibilidad de construir particiones diferenciables de la unidad permite demostrar inmediatamente los siguientes resultados en las condiciones anteriores.

(1) (Función meseta) *Sean $C \subset W \subset M$, donde C es cerrado y W es abierto. Existe una función suave $\theta : M \to [0,1]$ tal que $\theta \equiv 1$ en C y $\theta \equiv 0$ fuera de W.*

Idea de la demostración. Basta escoger $\{W, M \setminus C\}$ como recubrimiento abierto de M. La función cuyo soporte está contenido en W tiene las propiedades buscadas.

(2) (Teorema de Extensión de Tietze para el caso $\mathcal{C}^r$) *Sea* $f : C \to \mathbb{R}^q$ *una función* $\mathcal{C}^r$ *diferenciable, y sea* $U \subset M$ *un abierto tal que* C *es cerrado en* U*. Entonces existe una extensión* $\mathcal{C}^r$ *diferenciable de* f *en* U*,* $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^q$*.*

Idea de la demostración. Por la definición de diferenciabilidad, existen extensiones locales $\tilde{f}_i$ a abiertos U_i que se pueden restringir si es necesario para que estén contenidos en U. Tomando $\{U \setminus C, U_i\}_i$ como recubrimiento de U, se obtiene como partición diferenciable de la unidad el conjunto de funciones suaves $\{\eta, \theta_i\}_i$, donde η es la función cuyo soporte está contenido en $U \setminus C$. Se comprueba entonces que $\tilde{f} = \sum_i \theta_i \tilde{f}_i$ está bien definida en U y extiende f manteniendo el orden de diferenciabilidad.

Definición 1.6. Sean M y N variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre ellas.

(i) Se dice que un punto $x \in M$ es un *punto crítico* de f si la derivada en dicho punto $d_x f$ no es sobreyectiva; en caso contrario se dice que el punto es un *punto regular*.

(ii) Un punto $a \in N$ se dice que es un *valor regular* de f si todos los puntos de su imagen inversa $f^{-1}(a)$ son regulares; en caso contrario se dice que el punto es un *valor crítico*.

Denotamos por $C_f \subset M$ al conjunto de los puntos críticos y por $R_f = N \setminus f(C_f) \subset N$ al conjunto de los valores regulares.

Observación 1.7. Nótese que si $\dim(N) \leq \dim(M)$ la condición de punto crítico puede expresarse imponiendo la nulidad de los determinantes de todos los menores de orden máximo del jacobiano de una localización de f, que son funciones continuas por ser f diferenciable. Si $\dim(N) > \dim(M)$, $C_f = M$. Por tanto, en ambos casos el conjunto de puntos regulares es abierto y C_f es cerrado en M.

Proposición 1.8. *Sean* M *y* N *variedades* $\mathcal{C}^r$ *diferenciables de dimensiones* m *y* n *respectivamente, con* $\partial N = \varnothing$*. Sean* $f : M \to N$ *una aplicación* $\mathcal{C}^r$ *diferenciable y* $a \in N$ *un valor regular de* f *y de* $f\big|_{\partial M}$*. Entonces, se tiene que* $f^{-1}(a) \subset M$ *es una variedad* $\mathcal{C}^r$ *diferenciable de dimensión* $m - n$*,* $\partial f^{-1}(a) = f^{-1}(a) \cap \partial M$ *y, para cada* $x \in f^{-1}(a)$*, el espacio tangente* $T_x f^{-1}(a) = \ker(d_x f)$*.*

Idea de la demostración. Para los puntos de $f^{-1}(a)$ que no están en el borde de M se procede como en el caso sin borde: se localiza f a una aplicación $\mathcal{C}^r$ diferenciable de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y se obtiene un entorno del punto en $f^{-1}(a)$ que es difeomorfo a $\mathbb{R}^{m-n}$. Ahora bien, si $x \in f^{-1}(a) \cap \partial M$, al localizar f se obtiene una aplicación $\mathcal{C}^r$ diferenciable $F : \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^n$, que se puede tomar de manera que $F(0) = 0$. De esta F existe una extensión diferenciable definida en un entorno abierto de 0 en $\mathbb{R}^m$, $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}^n$. Imitando la demostración para el caso sin borde (véase [2]) se obtiene un difeomorfismo $h : U \to W$, donde $U \subset V$ y W son entornos abiertos de 0 en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, respectivamente. Que a sea punto regular de $f\big|_{\partial M}$ es lo que garantiza que existe cierta forma lineal λ en las últimas $m - n$ componentes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que

$$h(f^{-1}(a) \cap \mathbb{H}^m \cap U) = (\{0\} \times [\{\lambda \geq 0\} \cap \mathbb{R}^{m-n}]) \cap W \ ,$$

y en particular

$$h(f^{-1}(a) \cap \partial\mathbb{H}^m \cap U) = (\{0\} \times [\{\lambda = 0\} \cap \mathbb{R}^{m-n}]) \cap W \ .$$

Una vez que se ha demostrado que $f^{-1}(a)$ es una subvariedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable de M, dado $x \in f^{-1}(a)$, en un entorno de x en M se pueden tomar coordenadas adaptadas a $f^{-1}(a)$, $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, y como la derivada de f en x es sobreyectiva, se pueden tomar en un entorno de a en N unas coordenadas $(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$, de manera que $\mathbf{y}_i \circ f = \mathbf{x}_i$ para $i = 1, \ldots, n$. De esa manera, las últimas $m - n$ coordenadas parametrizan $f^{-1}(a)$, con $\mathbf{x}_{n+1} \geq 0$ si $x \in \partial f^{-1}(a)$. Usaremos esta construcción más adelante, y además permite demostrar inmediatamente la ecuación paramétrica para $T_x f^{-1}(a)$ dada en el enunciado.

Teorema 1.9 (de Sard-Brown)**.** *Sean M y N variedades suaves y $f : M \to N$ una aplicación suave entre ellas. Se tiene entonces que el conjunto R_f de valores regulares de f es residual en N, esto es, es intersección numerable de abiertos densos. En particular, R_f es denso.*

Idea de la demostración. Como N tiene una base numerable de abiertos, el enunciado se reduce a una cuestión local[3]. Como los difeomorfismos mantienen el ser o no residual, basta demostrar el resultado para localizaciones de f. Para cada parametrización de M, la localización es $g : U \to \mathbb{R}^n$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{H}^m$, y por ser diferenciable g es en cualquier caso una restricción de otra aplicación diferenciable definida de un abierto de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$.

Sea h la aplicación diferenciable entre abiertos de espacios afines de la que la localización g es, quizás, restricción. El principal esfuerzo de la prueba consiste en demostrar que $h(C_f)$ tiene interior vacío, a lo cual se llega comprobando que $h(C_f)$ tiene medida de Lebesgue cero, como puede verse en [1].

Una vez se ha visto esto, como C_f es cerrado y M puede recubrirse por una cantidad numerable de compactos encajados, se tiene que C_f puede escribirse como unión numerable de compactos, $C_f = \bigcup_n K_n$, luego $f(C_f)$ es unión numerable de compactos, $f(C_f) = \bigcup_n f(K_n)$. Como $f(C_f)$ tiene medida cero y la medida de Lebesgue es completa, cada uno de los $f(K_n)$ tiene medida cero, luego interior vacío. Por tanto, se tiene que $R_f = N \setminus f(C_f) = \bigcap_n (N \setminus f(K_n))$, donde $\overline{N \setminus f(K_n)} = N$, por lo que $N \setminus f(K_n)$ es un abierto denso en N, y se concluye que R_f es residual. Finalmente, como N es localmente compacto y Hausdorff, por el Teorema de Baire se concluye que en particular R_f es denso.

Observación 1.10. La misma técnica de demostración anterior permite obtener el siguiente resultado, a veces denominado "pequeño teorema de Sard-Brown": *en las condiciones de 1.9, sea $A \subset M$ un conjunto arbitrario. Si $\dim(M) < \dim(N)$, entonces $f(A) \subset N$ tiene interior vacío.*

2. Orientación

Para finalizar la revisión de conceptos y resultados básicos de variedades diferenciables, recordamos el concepto de orientabilidad y algunos casos relevantes en los que la orientación puede prescribirse de forma canónica.

[3]Para obtener la versión global basta tener en cuenta que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.

Definiciones 2.1. Dado un espacio vectorial E de dimensión finita n, dos bases B y B' se dicen equivalentes si el determinante de la matriz de cambio de base correspondiente es positivo. Es inmediato que esta relación es de equivalencia, por lo que el conjunto de todas las bases se divide en dos clases, cada una de las cuales define una *orientación* en E. Dada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, denotamos con $[v_1, \ldots, v_n]$ la orientación que define.

Sea M una variedad diferenciable, una *orientación en* $x \in M$ es una orientación ζ_x en el espacio tangente T_xM, y una orientación en M es un conjunto de orientaciones en cada punto de M, $\zeta_M = \{\zeta_x : x \in M\}$, que verifica que para todo $z \in M$, existe un sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \to W$ de M en z tal que para cada $x \in U$,

$$\zeta_x = \left[\left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m}\right|_x \right] ,$$

donde W es un abierto de $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{H}^m$, según z esté en el borde o no. Si en una variedad diferenciable puede definirse una orientación, se dice que la variedad es *orientable*, y una vez especificada la orientación, que está *orientada*. Un sistema de coordenadas que realice la definición anterior se dice que es *compatible con la orientación*.

Sean M y N variedades diferenciables orientables con la misma dimensión, y sean ζ_M y ζ_N sus respectivas orientaciones. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre ellas. Sea $x \in M$ un punto regular de f, se dice que f *preserva la orientación en* x si $d_xf(\zeta_{M,x}) = \zeta_{N,f(x)}$. Más explícitamente, dados $x \in M$ e $y = f(x) \in R_f$, existen sendos sistemas de coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de M en x y de N en y compatibles con las orientaciones, esto es, tales que

$$\zeta_{M,x} = \left[\left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m}\right|_x \right] \qquad \text{y} \qquad \zeta_{N,y} = \left[\left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1}\right|_y, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m}\right|_y \right] .$$

Así, dada la derivada $d_xf : T_xM \to T_yN$, f preserva la orientación si

$$\left[d_xf\left(\left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right|_x \right), \ldots, d_xf\left(\left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n}\right|_x \right) \right] = \zeta_{N,y} ,$$

lo que claramente equivale a que el determinante de la matriz jacobiana asociada a las bases de los espacios tangentes inducidas por los sistemas de coordenadas sea positivo. En caso contrario, se dice que f *invierte la orientación en* x. En estas condiciones, se define el *signo de* f *en* x como

$$\mathrm{sign}_x(f) = \det(J_f(x))/|\det(J_f(x))| ,$$

que por tanto toma el valor $+1$ o -1 según f preserve o invierta la orientación, respectivamente.

Observaciones 2.2. En la definición anterior, puesto que f es diferenciable, $\det(J_f(x))$ es una función continua en el dominio de coordenadas correspondiente. En particular, el conjunto de puntos regulares $M \setminus C_f$ es abierto y el signo está bien definido en un entorno de x en el que es constante. Se concluye que el signo es localmente constante y por tanto es constante en cada componente conexa de $M \setminus C_f$.

Claramente, localmente cualquier variedad es orientable, pues los espacios afines lo son. La orientabilidad o no de una variedad depende por tanto de si se puede definir consistentemente la orientación en distintos sistemas de coordenadas, es decir, de si la variedad posee un conjunto de sistemas de coordenadas cuyos dominios la recubren de manera que los cambios de coordenadas (allá donde la intersección de los dominios sea no vacía) tienen signo $+1$ (*atlas positivo*). Se trata pues de una propiedad global.

Bajo las construcciones que se presentan a continuación subyace una idea común: dada una subvariedad orientable de una variedad orientable, se puede establecer un criterio que defina consistentemente la orientación de la subvariedad a partir de la variedad ambiente. En las construcciones, dicho criterio se generaliza en forma de prescripción al tratar con una familia específica de subvariedades, y en particular permite probar su orientabilidad.

Orientación del borde de una variedad.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m con borde y orientable. Nótese que la orientación en los puntos del borde viene plenamente determinada por la orientación del interior de la variedad: dado $z \in \partial M$, sea $\mathbf{x}$ un sistema de coordenadas con dominio de coordenadas conexo, cuyo signo es por tanto constante. Sea x un punto del interior de M contenido en el dominio de coordenadas, $\mathbf{x}$ puede o bien ser compatible o bien ser incompatible con la orientación en x, y por tanto o bien es compatible o bien es incompatible con la orientación en z, respectivamente. De hecho, una variedad con borde es orientable si y solo si lo es su interior: en efecto, tomando un sistema de coordenadas como antes, basta imponer que la orientación en z sea la dada por $\mathbf{x}$ si es compatible con la orientación del interior, o la opuesta en caso contrario. Claramente esta prescripción no depende del sistema de coordenadas elegido (dado otro con la misma compatibilidad, el cambio de coordenadas en el interior tendría que ser positivo, y por tanto sería positivo en todo el dominio), y dada la conexión del dominio de coordenadas, tampoco depende del punto de referencia x.

Ahora bien, el borde ∂M también es una variedad diferenciable por sí misma, y es orientable si M lo es. Para verlo, dotémoslo de una orientación: dado $z \in \partial M$, el espacio tangente $T_z\partial M$ es un subespacio de dimensión $m-1$ de T_zM. Sea $v \in T_zM \setminus T_z\partial M$, se dice que v es *saliente* si existe una curva $\gamma : (\varepsilon, 1] \to M$ tal que $\gamma(1) = z$ y $\gamma'(1) = v$, con ε tan cercano a 1 como sea necesario; se dice que es *entrante* si existe $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma'(0) = v$ para ε tan cercano a 0 como sea necesario. Basta considerar un sistema de coordenadas de z y localizar tramos suficientemente pequeños de las curvas para concluir que todo vector de $T_zM \setminus T_z\partial M$ o es saliente o es entrante, y nunca ambas cosas a la vez: en efecto, dado un sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \to \mathbb{H}^m$ de M en z, sea

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m \ , \ t \mapsto \mathbf{x}(z) + t \cdot d_z\mathbf{x}(v) \ .$$

Se tiene que o bien la restricción de α a $(-\varepsilon, 0]$ o bien la restricción a $[0, \varepsilon)$ tiene su imagen en $\mathbb{H}^m$. Sea β esa restricción, $\gamma = \mathbf{x}^{-1} \circ \beta$ es una curva que realiza la definición. Además, si existieran curvas $\gamma_1 : (1-a, 1] \to M$ y $\gamma_2 : [0, b) \to M$ que realizasen la definición de v como vector saliente y entrante de T_zM, respectivamente, entonces trasladando la parametrización de γ_1 a $(-a, 0]$ y pegando ambas curvas obtendríamos una curva diferenciable

$$\gamma : (-a, b) \to M$$

que verifica que $\gamma(0) = z$ y $\gamma'(0) = v$. Al localizar la curva (reduciendo a y b si es necesario para que $\gamma(-a,b) \subset U$), $\mathbf{x} \circ \gamma$ es una curva contenida en $\mathbb{H}^m$. Si tomamos el sistema de coordenadas de manera que $\mathbf{x}_1 \geq 0$, el borde viene dado por $\mathbf{x}_1 = 0$ y su espacio tangente por $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Así, $\mathbf{x}_1 \circ \gamma$ alcanza un mínimo en $\mathbf{x}(z)$, luego su derivada, que es la primera componente de $d_z\mathbf{x}(\gamma'(0)) = d_z\mathbf{x}(v)$, se anula. Se tendría entonces que $v \in T_z\partial M$, en contra de lo supuesto.

Así, dado $v \in T_zM \setminus T_z\partial M$ saliente, sea $\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ una base de $T_z\partial M$ tal que

$$\zeta_{M,z} = [v, u_1, \ldots, u_{m-1}] ,$$

definimos

$$\zeta_{\partial M,z} := [u_1, \ldots, u_{m-1}] .$$

Tomando, como antes, un sistema de coordenadas de M en z para el que el borde sea $\mathbf{x}_1 = 0$, se comprueba que dados distintos v' y $\{u'_1, \ldots, u'_{m-1}\}$, la matriz de cambio entre las bases $\{v, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ y $\{v', u'_1, \ldots, u'_{m-1}\}$ será de la forma

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$$

donde A es la matriz de cambio entre $\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ y $\{u'_1, \ldots, u'_{m-1}\}$, y $c > 0$ siempre pues en el mismo sistema de coordenadas los vectores salientes tienen el mismo signo de la componente $\mathbf{x}_1$, que es la que define el borde. Como el determinante de la matriz completa es positivo, se concluye que el determinante de A también lo es. Claramente la base $\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ define de forma unívoca la orientación localmente en cada dominio de coordenadas, y por tanto la prescripción proporciona una orientación al borde.

Orientación de una hipersuperficie.

Una hipersuperficie diferenciable M de un espacio afín $\mathbb{R}^p$ es una variedad diferenciable de dimensión $p-1$. Dado un punto $x \in M$ y una parametrización $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ de M en x, el vector $\nu(x) \in \mathbb{R}^p$ cuya componente i-ésima ν_i se corresponde con el coeficiente de v_i en el determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & \partial_1\varphi_1(x) & \cdots & \partial_{p-1}\varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_p & \partial_1\varphi_p(x) & \cdots & \partial_{p-1}\varphi_p(x) \end{pmatrix} ,$$

es, por las propiedades del determinante, un vector ortogonal a T_xM, y que verifica

$$\det \begin{pmatrix} \nu_1 & \partial_1\varphi_1(x) & \cdots & \partial_{p-1}\varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_p & \partial_1\varphi_p(x) & \cdots & \partial_{p-1}\varphi_p(x) \end{pmatrix} > 0 .$$

Normalizando $\nu(x)$, se obtiene un vector unitario tal que $\left[\nu(x), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{p-1}}\Big|_x\right]$ es la orientación canónica de $\mathbb{R}^p$. En particular, si M es orientable existe un atlas positivo y se puede recubrir M con dominios de sistemas de coordenadas con cambios positivos, y por un razonamiento análogo al del borde en la construcción anterior, se concluye que en las intersecciones el vector normal que definen es el mismo. Por tanto, si una hipersuperficie es orientable, posee un campo normal $\nu : M \to \mathbb{R}^p$ bien definido globalmente. Claramente el recíproco también es cierto: si una hipersuperficie diferenciable posee un campo normal global, entonces por lo anterior, dado $x \in M$, sea $\{u_1, \ldots, u_{p-1}\}$ una base del espacio tangente T_xM tal que $[\nu(x), u_1, \ldots, u_{p-1}]$ es la orientación canónica de $\mathbb{R}^p$, la prescripción

$$\zeta_{M,x} = [u_1, \ldots, u_{p-1}]$$

define consistentemente la orientación en M.

Orientación de una imagen inversa

En las condiciones de 1.8, $f^{-1}(a)$ es una variedad diferenciable, y dado $x \in f^{-1}(a)$, $T_xf^{-1}(a) = \ker(d_xf)$. Así, existe un subespacio vectorial L tal que $T_xM = L \oplus \ker(d_xf)$, siendo L isomorfo a T_aN por la restricción de d_xf. Supongamos ahora que M y N son orientables, escojamos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de L tal que $[d_xf(v_1, \ldots, v_n)] = \zeta_{N,a}$, y otra $\{u_1, \ldots, u_{m-n}\}$ de $\ker(d_xf)$ tal que $[v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_{n-m}] = \zeta_{M,x}$. Se prescribe

$$\zeta_{f^{-1}(a),x} = [u_1, \ldots, u_{n-m}] \ .$$

Sean $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ y $\{u'_1, \ldots, u'_{n-m}\}$ bases de L' y $\ker(d_xf)$ que verifican las mismas condiciones anteriores, donde $T_xM = L' \oplus \ker(d_xf)$. La matriz del cambio de base entre $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ y $\{v'_1, \ldots, v'_n, u'_1, \ldots, u'_{n-m}\}$ será de la forma

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$$

donde los bloques A y B son matrices cuadradas de orden n y $m-n$, respectivamente, y en particular B es la matriz del cambio de base entre $\{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ y $\{u'_1, \ldots, u'_{n-m}\}$. Como $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ y $\{v'_1, \ldots, v'_n, u'_1, \ldots, u'_{n-m}\}$ definen la misma orientación en M, $\det(A) \cdot \det(B) > 0$. Y puesto que los términos de $*$ se anulan al aplicar d_xf,

$$d_xf(v'_1, \ldots, v'_n) = A \cdot d_xf(v_1, \ldots, v_n)$$

y como $[d_xf(v'_1, \ldots, v'_n)] = [d_xf(v_1, \ldots, v_n)] = \zeta_{N,a}$, se tiene que $\det(A) > 0$. Por tanto, $\det(B) > 0$, concluyendo que la prescripción define $\zeta_{f^{-1}(a),x}$ de forma consistente. Resta ver que de hecho define una orientación en $f^{-1}(a)$. Para ello, escogemos sistemas de coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de x en M y de a en N como en 1.8, de manera que $\mathbf{y}$ sea compatible con la orientación de N. Como $\mathbf{y}_i \circ f = \mathbf{x}_i$ para $i = 1, \ldots, n$, dado $z \in f^{-1}(a)$ en el dominio de coordenadas,

$$\left[d_zf \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\bigg|_z, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n}\bigg|_z \right) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1}\bigg|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_n}\bigg|_a \right] = \zeta_{N,a} \ .$$

Así, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+1}}|_z, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m}|_z \right\}$, que es base de $T_zf^{-1}(a)$, define una orientación positiva si $\mathbf{x}$ es compatible con la orientación de M, y negativa en caso contrario. En cualquier caso, la orientación queda definida de forma consistente en toda la intersección del dominio de coordenadas y la imagen inversa a partir de la prescripción.

El cilindro

Sea M una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable sin borde y orientable, se denomina *cilindro de* M a $[0,1] \times M$. Esta construcción intervendrá en algunos de los resultados posteriores, de ahí que resulte de interés revisar sus propiedades. En primer lugar, el cilindro es también una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable, por ser el producto de dos variedades $\mathcal{C}^r$ diferenciables. Además, es orientable, por ser el producto de dos variedades orientables. En particular, optamos aquí por la siguiente convención para orientar el cilindro: dado $x \in M$, sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base positiva de T_xM, definimos la orientación en $(t,x) \in [0,1] \times M$ como

$$\zeta_{(t,x)} = [(1,0), (0,u_1), \dots, (0,u_m)] \ .$$

Además, al ser el producto de una variedad con borde por otra sin borde, se tiene que

$$\partial([0,1] \times M) = (\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M) \equiv M_0 \cup M_1 \ .$$

Más adelante identificaremos este borde como la unión de dos copias de M, mediante los difeomorfismos

$$\pi_0 : \{0\} \times M \equiv M_0 \to M \ , \ (0,x) \mapsto x$$
$$\pi_1 : \{0\} \times M \equiv M_1 \to M \ , \ (1,x) \mapsto x$$

y será importante saber si estos preservan o no la orientación de M_i como elementos del borde del cilindro. Claramente, las derivadas de π_0 y π_1 son la identidad, por lo que basta estudiar la relación entre la orientación de las componentes del borde y la de M. Para $t = 0$, el vector $(1,0)$ es entrante, luego $(-1,0)$ es saliente y por tanto para cada $x \in M$

$$\zeta_{(0,x)} = [(-1,0), \partial\zeta_{(0,x)}] = [(1,0), \zeta_x] \ .$$

Así, $\partial\zeta_{(0,x)} = -\zeta_x$. Por el contrario, en $t = 1$, $(1,0)$ es saliente, luego para cada $x \in M$

$$\zeta_{(1,x)} = [(1,0), \partial\zeta_{(1,x)}] = [(1,0), \zeta_x] \ .$$

Así, $\partial\zeta_{(1,x)} = \zeta_x$. Se concluye que en M_0 la orientación se invierte y en M_1 se preserva.

3. Difeotopías

Para más adelante poder definir consistentemente el concepto de grado de una aplicación suave sobre una variedad conexa se recurre al concepto de difeotopía, que permite demostrar que las variedades diferenciables (sin borde) son objetos particularmente simétricos: sus componentes conexas son "diferenciablemente homogéneas", es decir, que cualquier punto puede llevarse a otro mediante un difeomorfismo de la variedad en sí misma. Cabe señalar que, aunque estamos trabajando con variedades suaves, los resultados de esta sección y sus demostraciones no se simplifican bajo esta restricción, por lo que se expone aquí la versión más general en términos de variedades $\mathcal{C}^r$ diferenciables.

Definición 3.1. Sean X e Y espacios topológicos, una *homotopía* es una aplicación continua $H : [0,1] \times X \to Y$. La componente de $[0,1]$ puede tratarse como un parámetro, entendiendo entonces la homotopía $H_t : X \to Y$ como una deformación continua de aplicaciones continuas de X en Y. Se dice que dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son *homótopas* si existe una homotopía H tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$, y lo denotamos $f \simeq g$. Se comprueba que la relación de homotopía es una relación de equivalencia, y el espacio cociente resultante se denota con $[X,Y]$.

Definición 3.2. Sea M una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable, se dice que $F : [0,1] \times M \to M$ es una $\mathcal{C}^r$ *difeotopía* si es una homotopía $\mathcal{C}^r$ diferenciable, $F_0 = \mathrm{id}_M$ y F_t es un difeomorfismo de M en sí misma para todo t. Decimos que F conecta x con $F_1(x)$, para cada $x \in M$.

Para probar el resultado fundamental que permite concluir la homogeneidad, demostramos en primer lugar un resultado para espacios afines que luego emplearemos localmente y propagaremos utilizando la conexión.

Lema 3.3. *En $\mathbb{R}^m$, existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^m$ con $||x|| < \varepsilon$ existe una difeotopía suave $F : [0,1] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que conecta el origen con x y además es constantemente la identidad para $||x|| \geq 1$.*

Demostración. Sea $\theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función meseta que verifica que $\theta(0) = 1$ y $\theta(x) = 0$ si $||x|| \geq 1$. Dado $x \in \mathbb{R}^m$, sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$, como $d_x\theta$ es un funcional lineal sobre un espacio de dimensión finita,

$$|d_x\theta(u)| \leq ||u||_2 \left(\sum_{n=1}^{m} |d_x\theta(\mathbf{e}_n)|^2 \right)^{1/2} = ||u||_2 \left(\sum_{n=1}^{m} \left| \left.\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_n}\right|_x \right|^2 \right)^{1/2} .$$

Ahora bien, como $\theta \equiv 0$ en $||x|| \geq 1$, en ese caso $d_x\theta = 0$. Por otro lado, el disco $||x|| \leq 1$ es compacto en $\mathbb{R}^m$, y como θ es suave, en particular sus derivadas parciales son continuas y por tanto alcanzan su máximo en el disco. Sean

$$\alpha_n = \max_{||x|| \leq 1} \left\{ \left| \left.\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_n}\right|_x \right| \right\} \text{ y } \alpha = \sqrt{m} \cdot \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} .$$

Entonces la norma de $d_x\theta$ como operador verifica

$$||d_x\theta|| \leq \alpha .$$

Ahora, sea $\varepsilon = 1/\alpha > 0$ y sea $z \in \mathbb{R}^m$ tal que $||z|| < \varepsilon$. Definimos

$$F_t(x) = x + t\theta(x)z \ , \ t \in [0,1] .$$

Veamos que esta F es una difeotopía que satisface las condiciones del enunciado. Desde luego es una homotopía suave, y

$$F_0 = \mathrm{id}_M \quad , \quad F_1(0) = z \quad \text{y} \quad F_t\big|_{||x|| \geq 1} = \mathrm{id}_M ,$$

pues $\theta(0) = 1$ y $\theta\big|_{||x|| \geq 1} \equiv 0$. Por tanto, resta ver que se trata de un difeomorfismo. Veamos en primer lugar que es inyectiva: sean $x, y \in \mathbb{R}^m$ tales que $F_t(x) = F_t(y)$. En ese caso

$$x - y = t(\theta(y) - \theta(x))z ,$$

luego

$$||x - y|| = t||z||\, |\theta(x) - \theta(y)| \leq ||z||\, |\theta(x) - \theta(y)| .$$

Ahora, por el Teorema de los Incrementos Finitos, al ser $\mathbb{R}^m$ convexo,

$$|\theta(x) - \theta(y)| \leq \alpha||x - y|| ,$$

y puesto que $||z|| < 1/\alpha$, la desigualdad solo puede satisfacerse si $||x - y|| = 0$, es decir, si $x = y$.

Veamos ahora que es sobreyectiva: para $t = 0$ es la identidad y es trivial. Supongamos que $t > 0$, y sea $y \in \mathbb{R}^m$, si $\theta(y) = 0$, $F_t(y) = y$. Si $\theta(y) \neq 0$, considérese la recta $L : y + \lambda z$ con λ recorriendo $\mathbb{R}$, y definamos la función real

$$g(\lambda) = -t\theta(y + \lambda z) \ .$$

Claramente, g es continua y su imagen se encuentra en $[-t, 0]$. Además, como $\theta(y) \neq 0$, $g(0) < 0$, y para $\lambda \to -\infty$, $g(\lambda) = 0$. Por tanto, la función

$$h(\lambda) = g(\lambda) - \lambda$$

es continua y verifica $h(0) < 0$ y $h(\lambda) \to +\infty$ cuando $\lambda \to -\infty$. Por tanto, g tiene un punto fijo λ_0, y multiplicando dicho escalar por z,

$$\lambda_0 z + t\theta(y + \lambda_0 z)z = 0.$$

Sea $x = y + \lambda_0 z$, se verifica que

$$F_t(x) = y + \lambda_0 z + t\theta(y + \lambda_0 z)z = y \ .$$

Finalmente, dado $x \in \mathbb{R}^m$, sea $u \in \ker(d_x F_t)$. Entonces $u = -t d_x\theta(u)z$, luego

$$||u|| \leq ||d_x\theta||||u||||z|| \leq \alpha \cdot ||z|| \, ||u|| \ ,$$

concluyéndose como antes que $u = 0$, pues $||z|| < 1/\alpha$. Por tanto, como $d_x F_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $d_x F_t$ es un isomorfismo. □

Observación 3.4. Al considerar una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable, que es localmente $\mathcal{C}^r$ difeomorfa a $\mathbb{R}^m$, el lema anterior se traduce en que para cada punto x de la variedad existe un entorno abierto U^x (difeomorfo a $\mathbb{R}^m$), dentro de él otro entorno abierto V^x (difeomorfo al disco $B(0, 1)$) cuya adherencia $\overline{V^x} = K^x$ es un compacto contenido en U^x, y dentro de este otro entorno abierto W^x (difeomorfo al disco $B(0, \varepsilon)$), de manera que para cada punto $y \in W^x$, existe una $\mathcal{C}^r$ difeotopía de U^x que conecta x con y y es la identidad fuera de K^x. De hecho, trasladando el origen en la difeotopía construida en el lema, agrandando V^x y reduciendo W^x si es necesario, podemos garantizar que existe una $\mathcal{C}^r$ difeotopía de U^x que conecta dos puntos cualesquiera de W^x y es la identidad fuera de K^x. Finalmente, como K^x es compacto, $M \setminus K^x$ es abierto, y la difeotopía puede extenderse suavemente por la identidad al resto de la variedad.

Teorema 3.5. *Sea M una variedad $\mathcal{C}^r$ diferenciable conexa y sin borde, y sean $a, b \in M$, existe una $\mathcal{C}^r$ difeotopía que conecta a con b y que es la identidad fuera de un compacto K que es entorno de ambos puntos.*

Demostración. Considérese para cada $x \in M$ una tríada de entornos $W^x \subset V^x \subset U^x$ como en la observación anterior. En particular, $\{W^x\ , \ x \in M\}$ es un recubrimiento abierto de M, y por ser M conexo existe una cadena finita $W^{x_1}, \ldots, W^{x_s}$ tal que $a \in W^{x_1}$, $b \in W^{x_s}$ y $W^{x_k} \cap W^{x_{k+1}} \neq \varnothing$ para cada $k = 1, \ldots, s-1$. En ese caso, sea $y_k \in W^{x_k} \cap W^{x_{k+1}}$, tomando además $y_0 = a$ e $y_s = b$, por la observación existen $\mathcal{C}^r$ difeotopías $F^{(1)}, \dots, F^{(s)}$, tales que $F^{(k)}$ conecta y_{k-1} con y_k y es la identidad fuera del compacto K^{x_k}. Así, definimos

$$F_t = F_t^{(s)} \circ F_t^{(s-1)} \circ \cdots \circ F_t^{(1)} \ ,$$

que es una $\mathcal{C}^r$ difeotopía que conecta a y b y que se reduce a la identidad fuera de los compactos K^{x_k}, y por tanto es la identidad fuera del compacto $K = \bigcup_k K^{x_k}$, que en particular contiene a K^{x_1} y K^{x_s}, que son entornos de a y b respectivamente. □

Observación 3.6. El resultado anterior puede utilizarse fácilmente para obtener iterativamente difeotopías que conecten conjuntos finitos de puntos (arbitrarios en dimensión 2 o superior, ordenados en dimensión 1), demostrando que las variedades sin borde no solo son homogéneas sino finitamente homogéneas.

Finalizamos la sección viendo que las difeotopías respetan tanto las componentes conexas como la orientación de la variedad sobre la que actúan.

Proposición 3.7. *Sea M una variedad diferenciable y sea $F : [0,1] \times M \to M$ una difeotopía. Se tiene entonces que, para cada t, F_t preserva las componentes conexas de M. Si, además, M está orientada, F_t preserva la orientación.*

Demostración. Sea $x \in M$, y sea $t \in [0,1]$. El camino $[0,1] \to M \ , \ s \mapsto F_{st}(x)$ es diferenciable, en particular continuo, y conecta $F_0(x) = x$ con $F_t(x)$. Por tanto, x y $F_t(x)$ se encuentran en la misma componente conexa por caminos. Nótese que al ser el espacio localmente conexo por caminos, las componentes conexas y las conexas por caminos coinciden.

Ahora, supongamos que M está orientada. La aplicación

$$G : [0,1] \times M \to [0,1] \times M \ , \ (t,x) \mapsto (t, F_t(x))$$

es un difeomorfismo del cilindro, pues es derivable en cada $(t,x) \in [0,1] \times M$ con

$$d_{(t,x)}G = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, d_x F_t) \ ,$$

y por ser cada F_t difeomorfismo, su inversa está bien definida y también es diferenciable:

$$G^{-1} : [0,1] \times M \to [0,1] \times M \ , \ (t,x) \mapsto (t, F_t^{-1}(x)) \ .$$

Por ser difeomorfismo, G o bien preserva o bien invierte la orientación en cada componente conexa del dominio. Pero las componentes conexas del cilindro son los productos de $[0,1]$ por las componentes conexas de M, y como F_t las preserva, G preserva las del cilindro. Ahora, como $F_0 = \mathrm{id}_M$, $d_{(0,x)}G = \mathrm{id}_{\mathbb{R} \times T_x M}$, que evidentemente preserva la orientación. Como para cada $(t,x) \in [0,1] \times M$, $(0,x)$ se encuentra en la misma componente conexa, se concluye que G preserva la orientación en todos los puntos del cilindro. Sea $x \in M$, y sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base positiva de $T_x M$. Dado $t \in [0,1]$, $\{(1,0), (0,u_1), \dots, (0,u_m)\}$ es una base positiva de $T_{(t,x)}([0,1] \times M)$. Respecto de esta base, la matriz de la derivada de G en (t,x) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A(t,x) \end{pmatrix}$$

y por lo anterior tiene determinante positivo. Ahora bien, $A(t,x)$ es la matriz de la derivada de F_t en x respecto de $\{u_1,\ldots,u_m\}$, y su determinante es igual al de la matriz total. Se concluye así que F_t preserva la orientación. □

4. Grado de una aplicación suave

Para definir el grado de una aplicación suave, vamos a necesitar sumar sobre el conjunto de puntos de la imagen inversa de un valor regular, para lo cual en general necesitamos garantizar que este conjunto es finito. Esto se podría hacer simplemente imponiendo que la variedad diferenciable de partida fuera compacta. Esta restricción es, sin embargo, más fuerte de lo necesario, y nos impediría aplicar la teoría para probar algunos de los resultados de interés más adelante. En su lugar, trasladamos la restricción a la aplicación, a la que exigimos que sea *propia*.

Definición y proposición 4.1. Sean M y N variedades diferenciables, y sea $f : M \to N$ una aplicación continua. Se dice que f es *propia* si es cerrada y, para cada $y \in N$, $f^{-1}(y) \subset M$ es compacto. Equivalentemente, f es propia si y solo si para cada compacto $K \subset N$, su imagen inversa $f^{-1}(K) \subset M$ es compacto.

Demostración. Supongamos que f es propia en el primer sentido de la definición. Dado un compacto $K \subset N$, sea $(x_n) \subset f^{-1}(K)$ una sucesión. En ese caso, $(f(x_n)) \subset K$ y por tanto posee una subsucesión $f(x_{n_k})$ convergente a cierto $y \in N$. Como $f^{-1}(y) \subset M$ es compacto, por la compacidad local de M se tiene que existe un abierto $G \subset M$ que contiene a $f^{-1}(y)$ y tal que su adherencia $\overline{G}$ es un compacto. Como f es cerrada, $f(M \setminus G)$ es cerrado, luego $N \setminus f(M \setminus G)$ es un abierto que contiene a y. En particular, $N \setminus f(M \setminus G)$ contiene a la subsucesión convergente señalada al inicio, salvo quizás una cantidad finita de términos. Por último, $f^{-1}(N \setminus f(M \setminus G)) \subset G \subset \overline{G}$, luego, salvo quizás una cantidad finita de términos, $(x_{n_k}) \subset \overline{G}$, y por tanto posee una subsucesión convergente, que en particular es subsucesión de (x_n).

Recíprocamente, supongamos que las imágenes inversas de los compactos de N lo son en M. En ese caso, desde luego $\{y\} \subset N$ es compacto, y por tanto también lo es $f^{-1}(y) \subset M$. Ahora, dado un cerrado $C \subset M$, sea $z \in \overline{f(C)}$, existe una sucesión $(x_n) \subset C$ tal que $f(x_n) \to z$ cuando $n \to \infty$. Sea K_z un entorno compacto de z, este contiene a $(f(x_n))$ salvo quizás una cantidad finita de términos, luego $(x_n) \subset f^{-1}(K)$ salvo quizás una cantidad finita de términos. Como $f^{-1}(K)$ es compacto, (x_n) posee una subsucesión convergente a cierto $x \in C$ por ser C cerrado. Y por la continuidad de f, $f(x) = z \in f(C)$. □

Observación 4.2. En las condiciones anteriores, si M es compacta, entonces f es propia. Asimismo, cualquier homeomorfismo es en particular una aplicación propia.

Definición 4.3. Decimos que dos aplicaciones f y g son *propiamente homótopas* si existe una homotopía propia entre ellas.

Ahora sí, estamos en condiciones de formular y demostrar la cadena de resultados que nos llevará a la definición del grado de una aplicación suave entre variedades suaves.

Proposición y definición 4.4. *Sean M y N variedades suaves, orientadas, sin borde y de igual dimensión m, y sea $f : M \to N$ una aplicación propia suave entre ellas. Para cada valor regular $a \in R_f$, $f^{-1}(a)$ es finito, y se define el* grado de f en a

$$d(f,a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \operatorname{sign}_x(f) \ .$$

Además, existe un entorno abierto V de a en N tal que $V \subset R_f$ y para cada $b \in V$,

$$d(f,b) = d(f,a) \ .$$

Demostración. En primer lugar, veamos que $f^{-1}(a)$ es finito. En efecto, por ser a un valor regular y ser M y N de la misma dimensión, para cada $x \in f^{-1}(a)$, $d_x f$ es un isomorfismo, y por el Teorema de la Función Inversa, existen un entornos abiertos de x y de a, $U_x \subset M$ y $V \subset N$, tales que la restricción $f\big|_{U_x} : U_x \to V$ es un difeomorfismo. En particular, $U_x \cap f^{-1}(a) = \{x\}$, luego $f^{-1}(a)$ es discreto, y como f es propia, es compacto, luego finito.

Para la segunda parte, la idea es encontrar, usando la construcción anterior dada por el Teorema de la Función Inversa, un entorno abierto V' de a en N tal que $f^{-1}(V')$ sea unión disjunta de abiertos conexos U'_x de M difeomorfos a V' por f, donde la etiqueta x alude al elemento de $f^{-1}(a)$ que contiene. Llegados a ese punto, en cada U'_x, por ser conexo, el signo de f será constante: para cada $z \in U'_x$, $\operatorname{sign}_z(f) = \operatorname{sign}_x(f)$. Así, dado $b \in V'$, como $f\big|_{U'_x}$ es un difeomorfismo sobre V', en cada U'_x habrá un solo punto de $f^{-1}(b)$, donde por lo anterior f tendrá el mismo signo que en x. Luego

$$d(f,b) = \sum_{y \in f^{-1}(b)} \operatorname{sign}_y(f) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \operatorname{sign}_x(f) = d(f,a) \ .$$

Para llegar a esta situación, en primer lugar notamos que, por ser el espacio Hausdorff, los entornos U_x de la primera construcción pueden reducirse hasta hacerse disjuntos. A continuación, notamos que como f es propia, $f(C_f)$ es cerrado, luego R_f es abierto, y reduciendo V si es necesario, se puede tomar $V \subset R_f$ y el mismo para cada $x \in f^{-1}(a)$ (reduciendo U_x a $U_x \cap f^{-1}(V)$). El único obstáculo que resta es la posibilidad de que algún punto de V no esté en ninguno de los abiertos U_x. Sea $U = \bigcup_{x \in f^{-1}(a)} U_x \subset M$, U es abierto y contiene a $f^{-1}(a)$. Por ser f propia, $N \setminus f(M \setminus U)$ es un abierto de N que contiene a a. Como N es localmente conexo, existe un entorno abierto y conexo de a, $V' \subset V \cap (N \setminus f(M \setminus U)$, y definimos $U'_x = U_x \cap f^{-1}(V')$. Se tiene entonces que $f\big|_{U'_x} : U'_x \to V'$ es un difeomorfismo, para cada $x \in f^{-1}(a)$. En particular, U'_x es conexo por serlo V'. Finalmente, $f^{-1}(V') \subset U$, luego

$$f^{-1}(V') = U \cap f^{-1}(V') = \bigcup_{x \in f^{-1}(a)} (U_x \cap f^{-1}(V')) = \bigcup_{x \in f^{-1}(a)} U'_x \ ,$$

como queríamos. $\square$

Para demostrar el siguiente resultado, vamos a utilizar que conocemos la forma que tienen las variedades suaves de dimensión 1. Aunque este teorema de clasificación tiene interés por sí mismo, en este contexto tiene la función de un lema auxiliar, por lo que solo se ofrece aquí un esbozo de la prueba.

Teorema 4.5 (de clasificación de curvas suaves)**.** *Toda variedad suave y conexa de dimensión 1 es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$ o a un intervalo real.*

Idea de la demostración. La idea que se esboza a continuación se basa en la concisa demostración que puede verse en [5]. Considerando parametrizaciones por la longitud del arco, se prueba que si una curva no es difeomorfa a una circunferencia, entonces dos parametrizaciones locales pueden extenderse consistentemente a una parametrización de la unión de sus imágenes. Por el lema de Zorn, se tiene que existe una parametrización maximal, cuya imagen ha de ser un abierto de la variedad, por construcción. Esas dos características garantizan la sobreyectividad, y por tanto que la parametrización es de hecho un difeomorfismo.

Proposición 4.6. *Sea M una variedad suave, orientada y de dimensión $m+1$, y sea N una variedad suave, orientada, sin borde y de dimensión m. Sea $H : M \to N$ una aplicación propia suave, y sea a un valor regular de H y $H\big|_{\partial M}$. Se tiene entonces que*

$$d(H\big|_{\partial M}, a) = 0 \, .$$

Demostración. Como M tiene dimensión $m+1$, su borde ∂M tiene dimensión m. Además, dado que el interior de M es abierto en M (para cada punto que no es del borde existe un entorno abierto suyo difeomorfo a un abierto afín, y que por tanto no contiene puntos del borde), ∂M es cerrado en M. Así, si denotamos $H\big|_{\partial M} \equiv G$, se tiene que G es una aplicación propia suave por serlo H: en efecto, dado un compacto $K \subset N$, $G^{-1}(K) = \partial M \cap H^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado del compacto $H^{-1}(K)$, luego compacto.

Por hipótesis, a es un valor regular de H y G, luego por 1.8, $H^{-1}(a)$ es una variedad suave de dimensión 1, con borde $\partial H^{-1}(a) = H^{-1}(a) \cap \partial M = G^{-1}(a)$. Además, como H es propia, $H^{-1}(a)$ es compacta, y por tanto también lo son sus componentes conexas, que son cerradas, y de las que hay una cantidad finita, pues también son abiertas por la conexión local. Por 4.5, cada una de estas componentes conexas es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$ o a $[0,1]$ (la compacidad descarta los demás modelos de intervalo). Como la circunferencia no tiene borde, $G^{-1}(a) = \{x_1, y_1, \ldots, x_s, y_s\}$, donde cada par $\{x_j, y_j\}$ pertenece a la misma componente conexa C_j difeomorfa a $[0,1]$.

Consideremos una de esas componentes de forma genérica, $C \in \{C_1, \ldots, C_s\}$. Sabemos que existe una parametrización $\gamma : [0,1] \to C$, e invirtiendo su sentido si es necesario se puede tomar compatible con la orientación de $H^{-1}(a)$ como imagen inversa. Sean $x = \gamma(0)$ e $y = \gamma(1)$ los puntos del borde. Nótese que $\gamma'(0) \notin T_x\partial M$, ya que si fuera así entonces $\ker(d_xG) = \ker(d_xH)$, lo que va en contra de que x sea un punto regular de G. Análogamente, $\gamma'(1) \notin T_y\partial M$. Por tanto, $\gamma'(0) \in T_xM$ es un vector entrante y $\gamma'(1) \in T_yM$ es un vector saliente. Sean $\{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ bases positivas de $T_x\partial M$ y $T_y\partial M$, respectivamente, se tiene que

$$\zeta_{x,M} = [-\gamma'(0), u_1, \ldots, u_m] \;\text{ y }\; \zeta_{y,M} = [\gamma'(1), v_1, \ldots, v_m] \, .$$

Por otro lado, como los cambios de signo y las permutaciones cambian de signo la orientación, se tiene

$$(-1)^{m+1}\zeta_{x,M} = [u_1, \ldots, u_m, \gamma'(0)] \;\text{ y }\; (-1)^m\zeta_{y,M} = [v_1, \ldots, v_m, \gamma'(1)] \, .$$

Por otro lado, por la definición de la orientación como imagen inversa de $H^{-1}(a)$,

$$\operatorname{sign}_x(G)\zeta_{x,M} = [u_1, \ldots, u_m, \gamma'(0)] \ \text{ y } \ \operatorname{sign}_y(G)\zeta_{y,M} = [v_1, \ldots, v_m, \gamma'(1)] \ .$$

En particular, $\operatorname{sign}_x(G) = -\operatorname{sign}_y(G)$. Y se concluye que

$$d(G, a) = \sum_{j=1}^{s} (\operatorname{sign}_{x_j}(G) + \operatorname{sign}_{y_j}(G)) = \sum_{j=1}^{s} (\operatorname{sign}_{x_j}(G) - \operatorname{sign}_{x_j}(G)) = 0 \ .$$

□

Proposición 4.7. *Sean M y N variedades suaves, orientadas, sin borde y de dimensión m. Sea $H : [0,1] \times M \to N$ una homotopía propia suave, y sea $a \in N$ un valor regular de H_0 y H_1. Se tiene entonces que*

$$d(H_0, a) = d(H_1, a) \ .$$

Demostración. Nótese que $M_i = \{i\} \times M$ es un cerrado de $[0,1] \times M$, por lo que $H\big|_{M_0}$ y $H\big|_{M_1}$ son propias. Dado que $\partial([0,1] \times M) = M_0 \cup M_1$, $H\big|_{\partial([0,1]\times M)} = H\big|_{M_0} \cup H\big|_{M_1}$, en el sentido de que coincide con $H\big|_{M_i}$ si el punto está en M_i, siendo M_0 y M_1 disjuntos. Como M_i es difeomorfo a M por π_i,

$$H_i = H\big|_{M_i} \circ \pi_i^{-1} \ \text{ y } \ H\big|_{M_i}^{-1}(a) = \{i\} \times H_i^{-1}(a) \ .$$

Además, dado que π_i es un difeomorfismo, H_i es propia por serlo $H\big|_{M_i}$ y los valores regulares de ambas aplicaciones son los mismos. La idea es utilizar 4.6, aunque entonces se exigía que el punto en cuestión fuera un punto regular de H y de la restricción a su frontera, y a es un punto regular de H_0 y H_1, luego de la restricción de H a la frontera de $[0,1] \times M$, pero no necesariamente de H. Ahora bien, por 4.4, existen entornos $V_0 \subset R_{H_0}$ y $V_1 \subset R_{H_1}$ tales que para cada $b \in V_i$, $d(H_i, a) = d(H_i, b)$. Y por el Teorema de Sard-Brown 1.9, el conjunto de valores regulares de H es denso en N. En particular, sea $b \in V = V_0 \cap V_1$ un valor regular de H. Entonces por 4.6,

$$d(H\big|_{\partial([0,1]\times M)}, b) = \sum_{x \in H_0^{-1}(a)} \operatorname{sign}_{(0,x)}(H\big|_{M_0}) + \sum_{x \in H_1^{-1}(a)} \operatorname{sign}_{(1,x)}(H\big|_{M_1}) = 0 \ .$$

Finalmente, recordando que $\pi_0 : M_0 \to M$ invierte la orientación y $\pi_1 : M_1 \to M$ la preserva, se tiene que

$$\operatorname{sign}_{(0,x)}(H\big|_{M_0}) = -\operatorname{sign}_x(H_0) \ \text{ y } \ \operatorname{sign}_{(1,x)}(H\big|_{M_1}) = \operatorname{sign}_x(H_1) \ .$$

Se concluye que

$$d(H\big|_{\partial([0,1]\times M)}, b) = -d(H_0, b) + d(H_1, b) = -d(H_0, a) + d(H_1, a) = 0 \ .$$

□

Proposición y definición 4.8. *Sean M y N variedades suaves, orientadas, sin borde y de dimensión m, siendo N además conexa, y sea $f : M \to N$ una aplicación propia suave entre ellas. Se tiene entonces que el grado de f en cada punto de R_f vale siempre lo mismo. Dicho valor se denomina* grado de f *y se denota* $\deg(f)$.

Demostración. Sean $a, b \in R_f \subset N$. Como N es conexa, por 3.5, existe una difeotopía suave F que conecta a con b. Así,

$$[0,1] \times M \to N \ , \ (t,x) \mapsto F_t \circ f$$

es una homotopía propia suave de $F_0 \circ f = f$ en $F_1 \circ f$. Como para cada t, F_t es un difeomorfismo, en particular F_1 preserva los valores regulares de f. Además, por 3.7, F_1 preserva la orientación. Luego por 4.7 se tiene

$$d(f,b) = d(F_1 \circ f, b) = \sum_{x \in f^{-1}(F_1^{-1}(b))} \operatorname{sign}_x(F_1 \circ f) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \operatorname{sign}_x(f) = d(f,a) \ .$$

□

Proposición 4.9. *Sean M una variedad suave, orientada y de dimensión $m+1$, y N una variedad suave, orientada, conexa, sin borde y de dimensión m. Si $H : M \to N$ es una aplicación propia suave, entonces*

$$\deg\left(H\big|_{\partial M}\right) = 0 \ .$$

Demostración. Por el Teorema de Sard-Brown 1.9, el conjunto de valores regulares de H es residual, y el de $H\big|_{\partial M}$ también. Como la intersección de conjuntos residuales sigue siendo residual, en particular es no vacía, luego existe $a \in N$ valor regular de H y $H\big|_{\partial M}$. Por 4.6,

$$d(H\big|_{\partial M}, a) = 0 \ ,$$

y por 4.8,

$$\deg\left(H\big|_{\partial M}\right) = 0 \ .$$

□

Proposición 4.10. *Sean M y N variedades suaves, orientadas, sin borde y de dimensión m, siendo además N conexa. Si $H : [0,1] \times M \to N$ es una homotopía propia suave, entonces*

$$\deg\left(H_0\right) = \deg\left(H_1\right) \ .$$

Demostración. De nuevo por el Teorema de Sard-Brown 1.9, existe $a \in N$ valor regular de H_0 y H_1. Por 4.7,

$$d(H_0, a) = d(H_1, a) \ ,$$

y por 4.8,

$$\deg\left(H_0\right) = \deg\left(H_1\right) \ .$$

□

Finalizamos la sección enunciando un resultado específico del grado de una aplicación suave que, a diferencia de los anteriores, no procede directamente de una proposición análoga para el grado de la aplicación en un punto.

Proposición 4.11. *Sean M, N y P variedades suaves, orientadas, sin borde y con dimensión m, siendo además N y P conexas. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ aplicaciones propias suaves. Se tiene entonces que la composición verifica*

$$\deg\left(g \circ f\right) = \deg\left(g\right) \cdot \deg\left(f\right).$$

Demostración. Por la regla de la cadena, dado $x \in M$,

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f \ .$$

Ahora, como M, N y P son de la misma dimensión, si $a \in P$ es un punto regular de $g \circ f$ y $x \in f^{-1}(g^{-1}(a))$, entonces $d_x(g \circ f)$ es un isomorfismo, y por tanto también lo es $d_x f$. En particular, cada $y \in g^{-1}(a)$ es también un valor regular de f. Puesto que es inmediato que el signo se comporta multiplicativamente (por su definición mediante determinantes),

$$d(g \circ f, a) = \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(a))} \mathrm{sign}_x(g \circ f) = \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(a))} \mathrm{sign}_x(f) \cdot \mathrm{sign}_{f(x)}(g) \ .$$

Para cada $x \in f^{-1}(g^{-1}(a))$, $f(x) \in g^{-1}(a)$, luego

$$\sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(a))} \mathrm{sign}_x(f) \cdot \mathrm{sign}_{f(x)}(g) = \sum_{y \in g^{-1}(a)} \mathrm{sign}_y(g) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sign}_x(f) \ .$$

Finalmente, por 4.8,

$$\deg (g \circ f) = \sum_{y \in g^{-1}(a)} \mathrm{sign}_y(g) \cdot d(f, y) = \sum_{y \in g^{-1}(a)} \mathrm{sign}_y(g) \cdot \deg (f) = \deg (g) \cdot \deg (f) \ .$$

□

5. Aproximación

Para finalizar la exposición de las bases de la teoría del grado de Brouwer-Kronecker, generalizaremos la definición y los resultados obtenidos en la sección anterior a aplicaciones propias continuas, aproximándolas por aplicaciones propias suaves e imponiendo la invariancia bajo homotopías. Es necesario pues entender en qué condiciones podemos realizar estas aproximaciones y qué propiedades garantizan, particularmente en lo relativo a las homotopías.

En primer lugar, demostramos una propiedad de las variedades diferenciables que resulta esencial para poder realizar las aproximaciones.

Lema 5.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad suave sin borde de dimensión m, existen un entorno abierto suyo $U \subset \mathbb{R}^p$ y una retracción*[4] *suave sobre M, $\rho : U \to M$.*

Demostración. Dado $x_0 \in M$, consideramos un sistema de coordenadas de M en x_0, $\mathbf{x} : W \to \mathbb{R}^m$, donde W es un entorno abierto de x_0 en M y escogemos que $\mathbf{x}(x_0) = 0$. Se tiene entonces que, para $i = 1, \ldots, m$, las aplicaciones

$$\tilde{X}_i : W \to \mathbb{R}^p \quad , \quad x \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\right|_x = \frac{\partial(\mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i}(\mathbf{x}(x))$$

son suaves, y además $\{\tilde{X}_1(x), \ldots, \tilde{X}_m(x)\}$ es una base de $T_x M$ para cada $x \in W$. En x_0, esta base puede completarse con vectores $\{w_{m+1}, \ldots, w_p\} \subset \mathbb{R}^p$ para obtener una base de $\mathbb{R}^p$. En particular, eso implica que la función suave

$$\det (\tilde{X}_1(x), \ldots, \tilde{X}_m(x), w_{m+1}, \ldots, w_n) \ ,$$

[4]Dado un espacio topológico X y $A \subset X$, una *retracción* sobre A es una aplicación continua $\rho : X \to A$ que verifica que $\rho(x) = x$ para cada $x \in A$.

donde los vectores se consideran columnas, es distinta de cero en x_0 y por tanto en todo un entorno de x_0, que volvemos a llamar W, reduciéndolo si es necesario. En particular, $\{\tilde{X}_1(x), \dots, \tilde{X}_m(x), w_{m+1}, \dots, w_p\}$ es base de $\mathbb{R}^p$ para todo $x \in W$. Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en cada punto, se obtienen aplicaciones

$$\{X_1(x), \dots, X_m(x), Y_{m+1}(x), \dots, Y_p(x)\} .$$

Por las fórmulas del proceso de Gram-Schmidt[5], son estas aplicaciones suaves de W en $\mathbb{R}^p$ que verifican que su norma euclídea es 1 y que para cada $x \in W$, forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^p$. Además, $\{X_1(x), \dots, X_m(x)\}$ es base ortonormal de T_xM, y por tanto $\{Y_{m+1}(x), \dots, Y_p(x)\}$ es base ortonormal del complemento ortogonal $T_xM^{\perp}$.

Basándonos en la construcción anterior, podemos definir la aplicación

$$F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \quad , \quad (a,t) = (a_1, \dots, a_m, t_{m+1}, \dots, t_p) \mapsto \mathbf{x}^{-1}(a) + \sum_{j=m+1}^{p} t_j Y_j(\mathbf{x}^{-1}(a))$$

que es suave y cuya derivada en $0 = (0,0)$ tiene como matriz jacobiana a

$$(\tilde{X}_1(x_0), \dots, \tilde{X}_m(x_0), Y_{m+1}(x_0), \dots, Y_p(x_0)) ,$$

que ya sabemos que tiene determinante no nulo por ser los vectores columna una base de $\mathbb{R}^p$. Por tanto, F es un difeomorfismo local en $(a,t) = (0,0)$, y por el Teorema de la Función Inversa existe un entorno abierto de $(0,0)$ y otro de x_0 tal que la restricción de F a esos dos abiertos es un difeomorfismo. En particular, por la topología de $\mathbb{R}^p$ como producto de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{p-m}$, existen un entorno abierto V_0 de $0 \in \mathbb{R}^m$, un entorno abierto U de $x_0 \in \mathbb{R}^p$ y $\varepsilon > 0$ tales que la restricción

$$F\big| : V_0 \times B_{p-m}(0, \varepsilon) \to U$$

es un difeomorfismo, donde $B_{p-m}(0,\varepsilon)$ es la bola abierta en $\mathbb{R}^{p-m}$ de centro 0 y radio ε. Como $\mathbf{x}^{-1}(V_0) \subset U \cap M$ es un entorno abierto de x_0 en M, existe un entorno abierto $U_0 \subset U$ de x_0 en $\mathbb{R}^p$, tal que

$$U_0 \cap M = \mathbf{x}^{-1}(V_0) = F\big|(V_0 \times \{0\}) .$$

Restringimos U a U_0 en el difeomorfismo $F\big|$, y denotamos por $G = F\big|^{-1}$. Sea π la proyección sobre las m primeras coordenadas, definimos

$$r = \mathbf{x}^{-1} \circ \pi \circ G : U_0 \to W_0 ,$$

[5]Recordamos que el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt procedía de forma iterativa, partiendo de una base $\{v_1, \dots, v_p\}$ y tomando $w_1 = v_1/||v_1||$ y

$$z_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, w_j \rangle w_j \quad \text{con} \quad w_k = z_k/||z_k|| ,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^p$. Así, si las v_k son aplicaciones suaves, las fórmulas anteriores definen aplicaciones suaves, teniendo en cuenta que los denominadores no se anulan nunca por ser en cada punto los sistemas linealmente independientes. Además, como consecuencia de la construcción,

$$\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \mathrm{span}\{w_1, \dots, w_k\}$$

para cada $k \in \{1, \dots, p\}$.

donde $W_0 = U_0 \cap M \subset M$: en efecto, $W_0 \subset W \subset M$, y por construcción $\pi(G(U_0)) = V_0$, luego $W_0 = \mathbf{x}^{-1}(V_0) = U_0 \cap M$. Así, se concluye que r es una retracción suave sobre M de un entorno abierto de x_0 en $\mathbb{R}^p$, que además verifica que

$$x - r(x) = \sum_{j=m+1}^{p} t_j Y_j(r(x)) \in \operatorname{span}\{Y_{m+1}(r(x)), \ldots, Y_p(r(x))\} = T_{r(x)}M^{\perp}$$

para ciertos $(t_{m+1}, \ldots, t_p) \in B_{p-m}(0, \varepsilon)$.

Para completar la demostración, queremos pegar las retracciones de los distintos entornos de forma consistente. Esto se consigue inmediatamente si definimos la retracción por una fórmula independiente de la construcción explícita, lo que se puede hacer reduciendo U_0 para que $r(x)$ sea el único punto de M que realiza la distancia $\operatorname{dist}(x, M)$, es decir,

$$||x - r(x)|| = \operatorname{dist}(x, M) .$$

Como M es localmente compacto, podemos tomar $B = B_p(x_0, \eta)$ con $\eta < \varepsilon$ tal que $K = \overline{B} \subset U_0$ es compacto. Escogemos un punto $x \in B_p(x_0, \eta/2) = B'$. Si $z \notin K$, entonces, por la desigualdad triangular,

$$||x - z|| \geq ||z - x_0|| - ||x - x_0|| \geq \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} > ||x - x_0|| .$$

Se concluye que, como $x_0 \in K$,

$$\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, K \cap M) .$$

Ahora bien, por la compacidad local, $K \cap M$ se puede tomar compacto, y por tanto la función $z \mapsto ||x - z||$ alcanza su mínimo. En particular, existe $z_0 \in K \cap M$ tal que

$$||x - z_0|| \leq ||x - z||$$

para todo $z \in M$. Como $x_0 \in M$, $||x - z_0|| \leq ||x - x_0|| < \eta/2$, y en general

$$\operatorname{dist}(x, M) = ||x - z_0|| .$$

Esto implica que $x - z_0$ es ortogonal a M en z_0: en efecto, la función $M \ni z \mapsto ||x - z||^2$ es una función suave por ser restricción de una función suave de $\mathbb{R}^p$, cuya derivada en z es $T_zM \ni v \mapsto 2\langle x - z, v\rangle$. En particular, esta función alcanza un mínimo global de M en z_0, por lo que al ser M una variedad sin borde, la derivada ha de anularse en z_0, lo que implica precisamente que $x - z_0 \perp T_{z_0}M$. Como $||x - z_0|| < \eta < \varepsilon$ y $z_0 \in U_0 \cap M = \mathbf{x}^{-1}(V_0)$, existen $(t_{m+1}, \ldots, t_p) \in B_{p-m}(0, \varepsilon)$ tales que

$$F(\mathbf{x}(z_0), t_{m+1}, \ldots, t_p) = x$$

y por tanto $r(x) = z_0$.

Veamos que z_0 es el único punto de M que realiza la distancia $\operatorname{dist}(x, M)$: en efecto, si z_0' es tal que $\operatorname{dist}(x, M) = ||x - z_0'|| < \eta/2$, entonces se verifican

$$z_0' \in K \cap M \subset W_0 = \mathbf{x}^{-1}(V_0)$$

y como antes eso implica que existen $(t'_{m+1}, \ldots, t'_p) \in B_{p-m}(0, \varepsilon)$ tales que

$$F(\mathbf{x}(z_0'), t'_{m+1}, \ldots, t'_p) = x .$$

Por la biyectividad de F se concluye que $z_0' = z_0 = r(x)$. Es decir, que para cada $x \in B'$, $r(x)$ es el único punto de M para el que $\operatorname{dist}(x, M) = ||x - r(x)||$. Para restringir la retracción a B', hemos de asegurarnos de que la imagen está en $B' \cap M$, es decir, tomamos

$$U_0' = \{x \in B' \, : \, ||x_0 - r(x)|| < \eta/2\} = B' \cap r^{-1}(B')$$

de manera que la restricción de r a U_0' sigue siendo una retracción y tiene la virtud de que verifica la siguiente propiedad:

$$(\triangle) \;\; ||x - r(x)|| \leq ||x - z|| \text{ para cada } x \in U_0' \text{ y } z \in M, \text{ siendo } = \text{ si y solo si } z = r(x) \, .$$

Como U_0' es un entorno de x_0 en $\mathbb{R}^p$, y $x_0 \in M$ es arbitrario, puede recubrirse M con abiertos que tengan asociadas retracciones sobre M con la propiedad $(\triangle)$. Se define U como la unión de todos esos abiertos, que es un abierto que contiene a x_0, y ρ como el pegado de las retracciones asociadas. Este pegado es consistente: dadas dos retracciones $r_1 : U_1 \to U_1 \cap M$ y $r_2 : U_2 \to U_2 \cap M$, si $x \in U_1 \cap U_2$, entonces, por $(\triangle)$

$$||x - r_1(x)|| \leq ||x - r_2(x)|| \;\text{ y }\; ||x - r_2(x)|| \leq ||x - r_1(x)||$$

y la igualdad se da si y solo si $r_1(x) = r_2(x)$. Como la aplicación es suave en cada uno de los abiertos de la unión que da lugar a U, es suave en U. $\square$

Observación 5.2. La retracción que se ha construido para demostrar el lema es, como hemos visto, ortogonal, y tiene unas propiedades particulares, que no se han demostrado por no resultar de interés en el contexto actual, aunque sí lo son en el contexto general de la topología diferencial. A los entornos de las variedades en los que están definidas estas retracciones se los denomina *entornos tubulares*.

Proposición 5.3. *Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves, N sin borde. Si $f : M \to N$ es una aplicación continua, entonces para cada $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ continua y positiva, existe una aplicación suave $g : M \to N$ tal que para todo $x \in M$ se verifica*

$$||f(x) - g(x)|| < \varepsilon(x) \, .$$

Además, si f es propia, g puede tomarse propia.

Demostración. Sea $\bar{\varepsilon} : M \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Dado $x \in M$, $\bar{\varepsilon}(x) > 0$, luego por la continuidad existen entornos abiertos D_x y E_x de x en M tales que para cada $z \in D_x$,

$$\bar{\varepsilon}(z) > \bar{\varepsilon}(x)/2$$

y para cada $z \in E_x$,

$$||f(x) - f(z)|| < \bar{\varepsilon}(x)/2 \, .$$

Así, $G_x = D_x \cap E_x$ es un entorno abierto de x en M tal que para cada $z \in G_x$,

$$||f(x) - f(z)|| < \bar{\varepsilon}(z) \, .$$

Sea $\{\theta_x \, : \, x \in M\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $\{G_x \, : \, x \in M\}$. Entonces, puesto que $N \subset \mathbb{R}^q$, la aplicación

$$h = \sum_{x \in M} \theta_x f(x)$$

está bien definida como aplicación de M en $\mathbb{R}^q$, es suave, y verifica

$$||h(z) - f(z)|| = || \sum_{x \in M} \theta_x(z)(f(x) - f(z))|| \leq \sum_{x \in M} \theta_x(z) ||f(x) - f(z)|| < \bar{\varepsilon}(z)$$

para cada $z \in M$. Ahora bien, como se ha indicado, la imagen de h está en $\mathbb{R}^q$, no necesariamente en N. Ahora bien, como N es una variedad suave sin borde, por 5.1, existe un entorno abierto U de N en $\mathbb{R}^q$ y una retracción suave $\rho : U \to N$. La idea es tomar la función $\bar{\varepsilon}$ en la construcción anterior adecuadamente, de manera que $g = \rho \circ h$ satisfaga las condiciones del enunciado.

(i) $g = \rho \circ h$ ha de estar bien definida. Para ello, debemos exigir que $h(M) \subset U$. Como U es un entorno de $N \supset f(M)$ y la función distancia es continua, $\bar{\varepsilon}_1(x) = d(f(x), \mathbb{R}^q \setminus U)$ es una función continua y positiva en M. Así, tomando $\bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_1$ garantizamos que $h(M) \subset U$.

(ii) Buscamos que $||g(x) - f(x)|| = ||\rho(h(x)) - f(x)|| < \varepsilon(x)$ para cada $x \in M$, para lo que basta que

$$h(x) \in \{y \in U \,:\, ||\rho(y) - f(x)|| < \varepsilon(x)\} = \rho^{-1}(B_N(f(x), \varepsilon(x))) \subset U \ ,$$

que es abierto. Para poder hacer esto a través de una cota continua de $||h-f||$, utilizamos la compacidad local para obtener mínimos locales: dado $x \in M$, sea $K_x \subset M$ un entorno compacto y sea $\varepsilon_x = \text{mín}\,\{\varepsilon(z) \,:\, z \in K_x\} > 0$, definimos

$$V_x = \{y \in U \,:\, ||\rho(y) - f(x)|| < \varepsilon_x/2\} = \rho^{-1}(B_N(f(x), \varepsilon_x/2)) \subset U \ ,$$

que es un entorno abierto de $f(x) = \rho(f(x))$. En particular, existe un $\delta_x > 0$ tal que la bola abierta $B_q(f(x), \delta_x) \subset V_x$. Por tanto, exigir que $||h(x) - f(x)|| < \delta_x$ es suficiente para que se cumpla la condición requerida. Tomamos ahora un entorno abierto W_x de x en M que verifique

$$W_x \subset f^{-1}\left(B_N(f(x), \delta_x/2)\right) \cap K_x \ .$$

Sea $\{\eta_x \,:\, x \in M\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $\{W_x \,:\, x \in M\}$ de M, definimos, para $z \in M$,

$$\bar{\varepsilon}_2(z) = \sum_{x \in M} \eta_x(z) \frac{\delta_x}{2} \ .$$

Esta función es suave y es positiva puesto que cada $\delta_x > 0$ y siempre hay algún $\eta_x(z) > 0$ para cada $z \in M$. Además, por construcción de la partición diferenciable, dado $z \in M$, solo hay un conjunto finito de x para los que $\eta_x(z) \neq 0$. En particular, sea $\{x_1, \ldots, x_s\}$ ese conjunto finito, de manera que $\eta_{x_i}(z) \neq 0$ y $z \in W_{x_i}$, para cada $i = 1, \ldots, s$. En particular, $z \in W_{x_i}$ implica que

$$z \in K_{x_i} \quad \text{luego} \quad \varepsilon(z) \geq \varepsilon_{x_i} \quad (\star)$$

y que

$$f(z) \in B_N(f(x), \delta_{x_i}/2) \subset V_{x_i} \quad (2\star).$$

Asimismo, suponiendo sin pérdida de generalidad que $\delta_{x_1} = \text{máx}_{i=1,\ldots,s}\, \delta_{x_i}$, se tiene que

$$\bar{\varepsilon}_2(z) = \sum_{i=1}^{s} \eta_{x_i}(z) \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \frac{\delta_{x_1}}{2} \sum_{x \in M} \eta_x(z) = \frac{\delta_{x_1}}{2} \quad (3\star).$$

(iii) Fijando $\bar{\varepsilon} = \text{mín}\,\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$, que es continua y positiva, por $(3\star)$, se tiene que

$$||h(z) - f(z)|| < \bar{\varepsilon}_2(z) \leq \frac{\delta_{x_1}}{2} \ ,$$

y por $(2\star)$,

$$||f(z) - f(x_1)|| < \frac{\delta_{x_1}}{2} \ .$$

Así,

$$||h(z) - f(x_1)|| \leq ||h(z) - f(z)|| + ||f(z) - f(x_1)|| < \delta_{x_1} \text{ luego } h(z) \in V_{x_1}$$

por lo que

$$||\rho(h(z)) - f(x_1)|| < \frac{\varepsilon_{x_1}}{2} \overset{(\star)}{\leq} \frac{\varepsilon(z)}{2} .$$

Finalmente,

$$||\rho(h(z)) - f(z)|| \leq ||\rho(h(z)) - f(x_1)|| + ||f(x_1) - f(z)|| < \frac{\varepsilon(z)}{2} + \frac{\delta_{x_1}}{2} .$$

Basta tomar en (ii) $\delta_x < \varepsilon_x$ para concluir.

Supongamos ahora que f es propia, y veamos que si tomamos $\bar{\varepsilon}$ suficientemente pequeño, la aproximación resultante g también es propia.

(i) En primer lugar, por la paracompacidad de N, se puede tomar un recubrimiento abierto $\{G_\mu\}$ suyo que sea localmente finito. Para cada $x \in N$, $\{x\} \cap G_\mu \neq \varnothing$ solo para una cantidad finita de índices, $\mu_1, \ldots, \mu_s$. Por la compacidad local, existe un entorno compacto K_x de x en N tal que $K_x \subset \bigcap_{i=1}^{s} G_{\mu_i}$. Así, $\{\overset{\circ}{K}_x\}$ es un recubrimiento de N, y por la paracompacidad se puede refinar obteniendo un recubrimiento localmente finito. Etiquetando con $\{V_\lambda\}$ los elementos de este recubrimiento, tomamos para cada λ un abierto de $\{G_\mu\}$ que lo contenga, y lo llamamos U_λ (pudiendo tomar más de una vez el mismo abierto de $\{G_\mu\}$). Obtenemos así dos recubrimientos abiertos localmente finitos de N, $\{V_\lambda\}$ y $\{U_\lambda\}$, con la propiedad de que $\overline{V}_\lambda \subset U_\lambda$ y $\overline{V}_\lambda$ es compacto. Como f es propia, $\{K_\lambda = f^{-1}(\overline{V}_\lambda)\}$ es un recubrimiento por compactos de M que también es localmente finito.

(ii) Buscamos que la aproximación g sea propia, es decir, que dado un compacto $L \subset N$, $g^{-1}(L)$. Esto lo podemos garantizar obligando a que $g^{-1}(L)$ interseque solo a una cantidad finita de K_λ's. Si lo conseguimos, al ser $g^{-1}(L)$ cerrado, podremos escribirlo como una unión finita de compactos, que es un compacto. Ahora bien,

$$g^{-1}(L) \cap f^{-1}(\overline{V}_\lambda) \neq \varnothing \text{ si y solo si existe un } x \in M \text{ tal que } g(x) \in L \text{ y } f(x) \in \overline{V}_\lambda .$$

Una forma de garantizar que esto solo ocurre una cantidad finita de veces es obligar a g a que si $f(x) \in \overline{V}_\lambda$, entonces $g(x) \in U_\lambda$. De esa manera, si $g^{-1}(L) \cap f^{-1}(\overline{V}_\lambda) \neq \varnothing$, entonces $g(x) \in L \cap U_\lambda$. Y como $\{U_\lambda\}$ es localmente finito y L es compacto, $L \cap U_\lambda \neq \varnothing$ solo ocurre para una cantidad finita de índices, y se concluiría.

(iii) Veamos que tomando $\bar{\varepsilon}$ suficientemente pequeño se satisfacen las exigencias de (ii). Dado $x \in M$, como $\{K_\lambda\}$ es localmente finito, existe un entorno abierto G_x de x en M que solo interseca a un número finito de K_λ's. Sea $\{\tau_x\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $\{G_x\}$, y sea

$$\lambda_x = \min_{G_x \cap K_\lambda \neq \varnothing} d(\overline{V}_\lambda, N \setminus U_\lambda) ,$$

definimos, para $z \in M$,

$$\lambda(z) = \sum_{x \in M} \tau_x(z) \lambda_x .$$

En particular, dado $z \in M$, existe un K_λ que lo contiene, por lo que si $\tau_x(z) \neq 0$, entonces $z \in G_x$, luego $G_x \cap K_\lambda \neq \varnothing$, y por tanto

$$\lambda_x \leq d(\overline{V}_\lambda, N \setminus U_\lambda) \ .$$

Tomando, $\varepsilon \leq \lambda$, se tiene que la aproximación g obtenida verifica

$$||g(z) - f(z)|| < \lambda(z) \leq d(\overline{V}_\lambda, N \setminus U_\lambda) \sum_{x \in M} \tau_x(z) = d(\overline{V}_\lambda, N \setminus U_\lambda).$$

Como $f(z) \in \overline{V}_\lambda$, se concluye que $g(z) \in U_\lambda$, como queríamos. □

Proposición 5.4. *Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves, N sin borde. Si $f : M \to N$ es una aplicación continua, existe una función $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ continua y positiva, tal que si $g : M \to N$ es una aplicación continua tal que para todo $x \in M$ se verifica*

$$||f(x) - g(x)|| < \varepsilon(x) \ ,$$

entonces f y g son homótopas. Además, si f es propia, ε puede escogerse de manera que la homotopía también lo sea.

Demostración. Como $N \subset \mathbb{R}^q$, f y g son funciones continuas sobre $\mathbb{R}^q$, y allí son homótopas por ser $\mathbb{R}^q$ contráctil. En particular, podemos definir la homotopía

$$\tilde{H} : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^q \ , \ (t, x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x) = \tilde{H}_t \ .$$

Ahora, si $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in M$, entonces para cada $t \in [0,1]$,

$$||f(x) - \tilde{H}_t(x)|| = t||f(x) - g(x)|| \leq ||f(x) - g(x)|| < \varepsilon(x) \ .$$

En particular, si tomamos $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_1$, donde $\bar{\varepsilon}_1$ es la función definida en la demostración de 5.3 asociada a la retracción suave $\rho : U \to N$, se tiene que $\rho \circ \tilde{H}_t$ está bien definida para cada t. Así,

$$H : [0,1] \times M \to N \quad , \quad (t, x) \mapsto \rho(\tilde{H}(t, x))$$

es una homotopía de f en g.

Supongamos ahora que f es propia. Sea

$$F : [0,1] \times M \to N \quad , \quad (t, x) \mapsto f(x) \ ,$$

como $[0,1]$ es compacto, por el Teorema de Tychonoff se tiene que F es una aplicación propia, y

$$||F(t,x) - H(t,x)|| = ||f(x) - H_t(x)|| < \varepsilon(x) \ .$$

Tomando $\varepsilon \leq \lambda$, donde λ es la función definida en la demostración de 5.3, se tiene, como entonces, que H es propia. □

Observación 5.5. Nótese que en la demostración anterior, si f y g son aplicaciones suaves, $\tilde{H}$ lo es y por tanto H también, por serlo ρ.

Observación 5.6. Una consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores es la que sigue: *sean $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves, N sin borde. Si $f : M \to N$ es una aplicación propia, existe una aplicación $g : M \to N$ propia y suave tal que f y g son propiamente homótopas.*

En efecto, por 5.4, existe una función continua y positiva $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ tal que si $f' : M \to N$ es continua y $||f(x) - f'(x)|| < \varepsilon(x)$ para cada $x \in M$, entonces f y f' son propiamente homótopas. Por 5.3, dada ε, existe $g : M \to N$ suave tal que $||f(x)-g(x)|| < \varepsilon(x)$ para cada $x \in M$. Luego g es suave y propiamente homótopa a f. $\square$

Proposición 5.7. *Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves, N sin borde, y sean f y g aplicaciones suaves de M en N. Si f y g son homótopas, entonces existe una homotopía suave de f en g. Si, además, existe una homotopía propia entre f y g, la homotopía suave también se puede tomar propia.*

Demostración. Si f y g son homótopas, existe una homotopía $\tilde{H} : [0,1] \times M \to N$ tal que $\tilde{H}_0 = f$ y $\tilde{H}_1 = g$. Como f y g son continuas, por 5.4 existen funciones continuas y positivas ε_f y ε_g de M en $\mathbb{R}$ tales que si f' y g' son funciones continuas de M en N que verifican

$$||f(x) - f'(x)|| < \varepsilon_f(x) \quad \text{y} \quad ||g(x) - g'(x)|| < \varepsilon_g(x)$$

para cada $x \in M$, entonces $f' \simeq f$ y $g' \simeq g$. Sea

$$\varepsilon(t,x) = (1-t)\varepsilon_f(x) + t\varepsilon_g(x) \ ,$$

por 5.3, existe una homotopía suave $\tilde{H}'$ que aproxima $\tilde{H}$, verificándose

$$||\tilde{H}_t(x) - \tilde{H}'_t(x)|| < \varepsilon(t,x)$$

para cada $(t,x) \in [0,1] \times M$. En particular,

$$||f(x) - \tilde{H}'_0(x)|| < \varepsilon(0,x) = \varepsilon_f(x) \quad \text{y} \quad ||g(x) - \tilde{H}'_1(x)|| < \varepsilon(1,x) = \varepsilon_g(x) \ ,$$

luego $f \simeq \tilde{H}'_0$ y $g \simeq \tilde{H}'_1$. Como f, $\tilde{H}'_0$, g y $\tilde{H}'_1$ son suaves, por la observación 5.5, existen homotopías suaves

$$F : [0,1] \times M \to N \quad \text{y} \quad G : [0,1] \times M \to N$$

de f en $\tilde{H}'_0$ y de g en $\tilde{H}'_1$, respectivamente. Terminamos pegando las tres homotopías suavemente. Para ello, consideramos la partición diferenciable de la unidad $\{\theta, 1-\theta\}$ subordinada al recubrimiento $\{(1/3,1], [0,2/3)\}$ de $[0,1]$, que verifica

$$\theta(t) = 0 \ \text{ para } t \in [0,1/3] \ \text{ y } \ \theta(t) = 1 \ \text{ para } t \in [2/3,1] \ ,$$

y definimos

$$H : [0,1] \times M \to N \quad , \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} F(\theta(3t),x) & \text{para } t \in [0,1/3] \\ \tilde{H}'(\theta(3t-1),x) & \text{para } t \in [1/3,2/3] \\ G(\theta(3-3t),x) & \text{para } t \in [2/3,1] \end{cases} .$$

Así, H es una homotopía suave de f en g. Además, si $\tilde{H}$ es propia, 5.3 garantiza que $\tilde{H}'$ se puede tomar propia. Además, f y g son propias (como ya razonamos al demostrar 4.7), luego por 5.4 y 5.5 F y G pueden tomarse propias. Finalmente, como $[0,1]$ es compacto, $\theta \times \mathrm{id}_M$ es propia, y la composición de aplicaciones propias es propia, se tiene que cada uno de los trozos que definen H son aplicaciones propias, y como hay una cantidad finita de ellos, H es una aplicación propia. $\square$

6. Grado de una aplicación continua

A hombros de los resultados anteriores, el grado de Brouwer-Kronecker se generaliza a aplicaciones continuas de forma natural, y los resultados demostrados para aplicaciones suaves se obtienen aquí de forma fluida.

Definición 6.1. Sean M y N variedades suaves, orientadas, sin borde y de dimensión m, siendo N además conexa, y sea $f : M \to N$ una aplicación propia entre ellas. Sea $g : M \to N$ una aplicación suave propiamente homótopa a f, se define el *grado de* f como $\deg(f) = \deg(g)$.

Observación 6.2. Nótese que la definición es buena: en primer lugar, por 5.6, siempre existe una aplicación suave propiamente homótopa a f. En segundo lugar, si g_0 y g_1 son dos aplicaciones suaves propiamente homótopas a f, entonces en particular son propiamente homótopas entre sí. Por 5.7, esto implica que existe una homotopía propia suave H con $H_0 = g_0$ y $H_1 = g_1$, y en ese caso, por 4.10, $\deg(g_0) = \deg(g_1)$.

Observación 6.3. Con esta definición, los resultados demostrados para el grado de una aplicación suave se extienden fácilmente para aplicaciones continuas:

(1) *Sean M una variedad suave, orientada y de dimensión $m+1$, y N una variedad suave, orientada, conexa, sin borde y de dimensión m. Si $H : M \to N$ es una aplicación propia, entonces*

$$\deg(H\big|_{\partial M}) = 0 \, .$$

En efecto, sea H' una homotopía suave propiamente homótopa a H. La restricción de la homotopía entre ellas a ∂M permite concluir que $H\big|_{\partial M}$ y $H'\big|_{\partial M}$ son propiamente homótopas. Como, por 4.9, $\deg(H'\big|_{\partial M}) = 0$, se concluye. □

(2) *Sean M y N variedades suaves, orientadas, sin borde y de dimensión m, siendo además N conexa. Si $H : [0,1] \times M \to N$ es una homotopía propia, entonces*

$$\deg(H_0) = \deg(H_1) \, .$$

En efecto, sea H' una homotopía suave propiamente homótopa a H. Restringiendo la homotopía que las conecta, se concluye que H'_0 y H'_1 son homótopas a H_0 y H_1, respectivamente. Así, por 4.10,

$$\deg(H_0) = \deg(H'_0) = \deg(H'_1) = \deg(H_1) \, .$$

□

(3) *Sean M, N y P variedades suaves, orientadas, sin borde y con dimensión m, siendo además N y P conexas. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ aplicaciones propias suaves. Se tiene entonces que la composición verifica*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

En efecto, sean f' y g' aplicaciones suaves propiamente homótopas a f y g por homotopías propias F y G, respectivamente. Definimos

$$H(t, x) = G(t, F(t, x)) \, .$$

La aplicación

$$(t, x) \mapsto (t, F(t, x))$$

es propia: la imagen inversa de (t, y) es $\{t\} \times F_t^{-1}(y)$, que es compacto por ser F_t propia. Asimismo, dado un cerrado $C \subset [0, 1] \times M$, si $(t_n, F(t_n, x_n))$ converge a (t, y), para $(t_n, x_n) \subset C$, en particular (t_n) converge a t. Como F es propia, por lo visto en la demostración de 4.1, existe una subsucesión $(t_{n'}, x_{n'})$ que converge a $(t, x) \in C$, y por la continuidad $(t, F(t, x)) = (t, y)$.

Puesto que G es propia y la composición de aplicaciones propias lo es, se concluye que H es una homotopía propia entre $g' \circ f'$ y $g \circ f$. Por 4.11,

$$\deg(g \circ f) = \deg(g' \circ f') = \deg(g') \cdot \deg(f') = \deg(g) \cdot \deg(f) .$$

□

Observación 6.4. El resultado (2) de 6.3 es una de las claves de la utilidad del grado de Brouwer-Kronecker: es un invariante *propiamente* homotópico. Su valor concreto depende de la orientación de las variedades (cambiando de signo al invertir la orientación de una de ellas), pero si dos aplicaciones tienen distinto grado, lo seguirán teniendo cualquiera que sea la orientación que se le asigne a las variedades, y por tanto no serán propiamente homótopas.

El matiz "propiamente" en la aseveración anterior no es superfluo en lo más mínimo: tómese como ejemplo el par de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dado por $p(x) = x$ y $q(x) = x^2$. Como $\mathbb{R}$ es contráctil, desde luego son homótopas. Sin embargo, $\deg(p) = 1$, mientras que $\deg(q) = 0$ por no ser sobreyectiva (por ejemplo, $q^{-1}(-1) = \varnothing$, y por tanto es un valor regular y $d(q, -1) = 0$).

Con todo, aunque el grado puede permitirnos eventualmente distinguir aplicaciones que no son propiamente homótopas, en general no permite una clasificación completa de las clases de homotopía propia. Para ejemplificarlo, considérense de nuevo aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con $p(x) = -x^2$ y $q(x) = x^2$. Ambas son continuas y propias, y ninguna es sobreyectiva, por lo que $\deg(p) = 0 = \deg(q)$. Ahora bien, supongamos que p y q fueran propiamente homótopas, y sea H una homotopía propia entre ellas: en ese caso, dado $x \neq 0$ fijo, $H_t(x) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una curva que une $-x^2$ con x^2. Por la conexión de $[0, 1]$, la imagen de dicha curva pasa por 0. Así, se tiene que para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe un $t \in [0, 1]$ tal que $H(t, x) = 0$. En particular, $H^{-1}(0)$ no es acotado en $[0, 1] \times \mathbb{R}$ y por tanto no puede ser compacto, lo que va en contra de que H sea propia. Se concluye que p y q no son propiamente homótopas, a pesar de tener el mismo grado de Brouwer-Kronecker.

7. Primeras aplicaciones

El soporte teórico desarrollado en las secciones anteriores nos habilita ahora para demostrar algunos resultados profundos de manera inmediata. Comenzamos con una observación elemental.

Observación 7.1. Las esferas

$$\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \,:\, x_1^2 + \ldots + x_{m+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

son variedades suaves, sin borde, que pueden orientarse de forma canónica como borde del disco unidad

$$\mathbb{D}^{m+1} = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ ||x|| \leq 1\}$$

o como hipersuperficie. Tomando como vector normal $\nu(x) = x$, que es un vector saliente con respecto a $\mathbb{D}^{m+1}$, ambas prescripciones coinciden. Además, son variedades compactas, por lo que todas las aplicaciones continuas definidas sobre ellas en particular son propias. Se dan, pues, las condiciones para utilizar la teoría de grado desarrollada hasta ahora.

Ejemplo 7.2. Hay dos aplicaciones que merecen particular atención en el contexto de las esferas. La primera de ellas es la identidad, que trivialmente presenta grado 1 y por tanto no es nulhomótopa, como se ha visto en 7.5. La segunda es la aplicación antipodal

$$-\mathrm{id} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m \, , \, (x_1, \ldots, x_{m+1}) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_{m+1}) \, .$$

Claramente esta aplicación es biyectiva, y verifica $d_x(-\mathrm{id})(v) = -v$. Por la definición de la orientación de la esfera como hipersuperficie, dado que la normal $\nu(-x) = -x$, y considerando el punto $x = (1, 0, \ldots, 0)$, vemos que

$$\mathrm{sign}_x((-\mathrm{id})) = \det\left(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m+1}}\right) = (-1)^{m+1} \, .$$

Es decir, que $-\mathrm{id}$ preserva la orientación si m es impar, y la invierte si m es par. Por la biyectividad, las imágenes inversas solo contienen un punto, y se concluye que el grado de la aplicación antipodal es $(-1)^{m+1}$. En particular, de nuevo, no es nulhomótopa.

Teorema 7.3 (de no retracción)**.** *No existen retracciones del disco cerrado unidad $\mathbb{D}^{m+1}$ en su borde $\mathbb{S}^m$.*

Demostración. Supongamos que existiera tal retracción, es decir, una aplicación continua $\rho : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ tal que para cada $x \in \mathbb{S}^m$, $\rho(x) = x$. En ese caso, por ser el disco cerrado una variedad suave, orientada y con borde de dimensión $m + 1$, se cumplen las hipótesis de 6.3 (1), pues al ser además compacto ρ es propia por ser continua. Así,

$$\deg\left(\rho\big|_{\mathbb{S}^m}\right) = 0 \, .$$

Ahora bien, por construcción $\rho\big|_{\mathbb{S}^m} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^m}$, y por tanto $\deg\left(\rho\big|_{\mathbb{S}^m}\right) = 1$, lo que entra en contradicción con lo anterior. Se concluye que no existe tal retracción. □

Observación 7.4. Este resultado, cuya relevancia se pone de manifiesto en las equivalencias demostradas más adelante, deja patente una de las virtudes del grado de Brouwer-Kronecker: a pesar de estar formulado a través de herramientas pertenecientes al ámbito del cálculo diferencial, gracias al puente que la teoría de aproximación tiende hacia las aplicaciones continuas en general, se pueden probar resultados de naturaleza estrictamente topológica. Así, en numerosos casos, el grado de Brouwer-Kronecker va a proporcionar una vía alternativa a las técnicas habituales de la topología algebraica y la homología. En este trabajo, esta idea alcanza su máxima expresión en las secciones 10 y 11.

Teorema 7.5. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *No existen retracciones de $\mathbb{D}^{m+1}$ en su borde $\mathbb{S}^m$.*

(ii) *La esfera $\mathbb{S}^m$ no es contráctil.*

(iii) [Punto fijo de Brouwer] *Toda $f : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{D}^{m+1}$ continua tiene algún punto fijo.*

Demostración. Veamos que (i) implica (ii) por contradicción: supongamos que la esfera $\mathbb{S}^m$ es contráctil, es decir, que la identidad $\mathrm{id} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ es nulhomótopa. En ese caso, existe una homotopía

$$H : [0,1] \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$$

tal que $H_0(x) = x$ y $H_1(x) = c$ para cada $x \in \mathbb{S}^m$ y para cierto $c \in \mathbb{S}^m$ fijo. Así, la imagen de H sobre los puntos $(1, x)$ del cilindro es siempre la misma y por tanto se puede cocientar colapsando la "tapa superior" del cilindro de forma consistente con la homotopía. Esto es, la aplicación $\overline{H} : \mathrm{Cono} \to \mathbb{S}^m$ del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} {[0,1] \times \mathbb{S}^m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^m \\ \mathrm{Cono} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

está bien definida y es continua, donde Cono es el espacio resultante de colapsar la tapa superior del cilindro. Sumergiendo $[0,1] \times \mathbb{S}^m$ en $\mathbb{R}^{m+2}$, el colapso puede hacerse al cono recto. A su vez, el cono recto puede proyectarse homeomórficamente sobre $\mathbb{D}^{m+1}$ mediante la proyección de la última coordenada π_{m+2}. En particular, $\{0\} \times \mathbb{S}^m$ se proyecta sobre el borde $\partial\mathbb{D}^{m+1} = \mathbb{S}^m$, y dado que $H_0 = \mathrm{id}$, la restricción de $\overline{H}$ al borde también lo es. Por tanto, la aplicación obtenida es una retracción de $\mathbb{D}^{m+1}$ sobre $\mathbb{S}^m$, en contra de la hipótesis.

Esta misma construcción permite obtener el recíproco: en efecto, si existiera una retracción de $\mathbb{D}^{m+1}$ en $\mathbb{S}^m$, en particular $\mathbb{D}^{m+1}$ es homeomorfo al cono recto que, expandiendo el vértice a $\mathbb{S}^m$, proporciona una homotopía de la identidad en una constante, lo que contradice que $\mathbb{S}^m$ no sea contráctil.

Para ver que (i) implica (iii) empleamos el argumento habitual, también por contradicción: supongamos que existe una aplicación continua $f : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{D}^{m+1}$ sin puntos fijos. Entonces, para cada $x \in \mathbb{D}^{m+1}$, como $x \neq f(x)$, la semirrecta

$$\ell(x, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) f(x) \quad \text{para} \quad \lambda > 0$$

está bien definida y posee una única intersección con $\mathbb{S}^m$. Sea $\lambda(x) > 0$ la función que determina la intersección $\ell(x, \lambda(x))$, esta es la única solución positiva de la ecuación cuadrática $(||\ell(x, \lambda(x))||^2 = 1)$ que podemos escribir como

$$(||x||^2 - ||f(x)||^2 - 2, f(x)\rangle)\lambda(x)^2 + 2(\langle x, f(x)\rangle - ||f(x)||^2)\lambda(x) + (||f(x)||^2 - 1) = 0\ .$$

Como la dependencia de x de las soluciones positivas de esta ecuación es continua,

$$\rho(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$$

es una retracción continua de $\mathbb{D}^{m+1}$ en $\mathbb{S}^m$, en contra de la hipótesis.

Recíprocamente, (iii) implica (i). De nuevo por contradicción, si existe una retracción ρ del disco $\mathbb{D}^{m+1}$ en su borde $\mathbb{S}^m$, basta componerla con la aplicación antipodal $x \mapsto -x$ para obtener una aplicación de $\mathbb{D}^{m+1}$ en $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{D}^{m+1}$ sin puntos fijos, en contra de la hipótesis. $\square$

Finalizamos la sección demostrando otro resultado clásico debido a Brouwer sobre la existencia de campos tangentes sin ceros en las esferas, el archiconocido *teorema de la bola peluda* o *de la esfera despeinada.*

Teorema 7.6 (de la bola peluda)**.** *Sea $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ la esfera unidad. Son equivalentes:*

(i) *La dimensión m es impar.*

(ii) *Existe un campo tangente a la esfera sin ceros, es decir, existe una aplicación continua*

$$X : \mathbb{S}^m \to T\mathbb{S}^m \ , \ x \mapsto (x, X_x)$$

tal que $X_x \in T_x\mathbb{S}^m$ no se anula para ningún $x \in \mathbb{S}^m$.

(iii) *La identidad y la aplicación antipodal son homótopas.*

Demostración. Vamos a proceder demostrando el círculo de implicaciones (i)-(ii)-(iii)-(i). En primer lugar, si $m = 2k - 1$ es impar, entonces podemos construir explícitamente un campo tangente sin ceros. Con $x = (x_1, \ldots, x_{2k}) \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$,

$$X_x = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$$

define un campo tangente en $\mathbb{S}^m$ que no se anula en ningún punto. En efecto, como $T_x\mathbb{S}^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} : \langle v, x\rangle = 0\}$, basta notar que

$$\langle x, X_x\rangle = -x_1x_2 + x_2x_1 + \cdots - x_{2k}x_{2k-1} + x_{2k-1}x_{2k} = 0$$

para concluir que $X_x \in T_x\mathbb{S}^m$. Claramente la aplicación es continua y no se anula en ningún punto.

A continuación, si existe un campo tangente X_x que no se anula en ningún punto, entonces $Y_x = X_x/||X_x||$ también lo es y además tiene norma 1. Así, la aplicación

$$H : [0, 1] \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m \ , \ (t, x) \mapsto \cos{(\pi t)}x + \operatorname{sen}{(\pi t)}Y_x$$

está bien definida, pues por el teorema de Pitágoras

$$||H_t(x)||^2 = \cos^2{(\pi t)}||x||^2 + \operatorname{sen}^2{(\pi t)}||Y_x||^2 = 1 \ ,$$

y se trata de una homotopía de $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{S}^m$ que lleva $H_0 = \mathrm{id}$, la identidad, en $H_1 = -\mathrm{id}$, la aplicación antipodal.

Finalmente, si la identidad y la aplicación antipodal son homótopas, entonces por 4.10, $\deg{(\mathrm{id})} = \deg{(-\mathrm{id})}$, y, por lo visto en el ejemplo 7.2, esto solo ocurre si $(-1)^{m+1} = 1$, es decir, si m es impar. □

Observación 7.7. Obsérvese que las esferas de dimensión impar son precisamente aquellas para las que la característica de Euler es nula. Por tanto, el resultado anterior puede enunciarse de forma equivalente afirmando que *existen campos tangentes sin ceros si y solo si la característica de Euler es cero.* La virtud de este enunciado es que, de hecho, se verifica para cualquier variedad diferenciable. Es decir, que la característica de Euler nula caracteriza las variedades que pueden tener campos tangentes sin ceros.

8. Sobre el teorema de Hopf

Finalizamos la sección 6 observando que en general el grado de Brouwer-Kronecker no permite una clasificación exhaustiva de las clases de homotopía. Sin embargo, el grado está especialmente indicado para trabajar en esferas. Vamos a verlo en esta sección. Por el momento, empezamos considerando un ejemplo.

Ejemplo 8.1. Veamos que para cada $d \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación $f_d : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ tal que $\deg(f_d) = d$. Para $d = 0$, tenemos cualquier aplicación constante. Para $d \neq 0$, podemos generalizar las curvas definidas sobre la circunferencia de la forma

$$c_d : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \,,\ (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mapsto (\cos d\theta, \operatorname{sen} d\theta) \,.$$

Considerando el lazo unidad

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1 \,,\ t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t) \,,$$

que tiene derivada $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, vemos que

$$(c_d \circ \alpha)'(t) = (-d \cdot \operatorname{sen} dt, d \cdot \cos dt) \,.$$

Utilizando coordenadas polares, para cada punto $x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, la orientación es

$$\zeta_x = [(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)]$$

de manera que

$$d_x c_d(\zeta_x) = [d_x c_d(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)] = [(-d \cdot \operatorname{sen} d\theta, d \cdot \cos d\theta)] = \operatorname{signo}(d)\zeta_{c_d(x)} \,,$$

es decir, $\operatorname{sign}_x(c_d) = \operatorname{signo}(d)$. Finalmente,

$$c_d^{-1}(1,0) = \{(\cos(2\pi k/|d|), \operatorname{sen}(2\pi k/|d|)) \,:\, k = 0, \ldots, |d|-1\}$$

por lo que $\deg c_d = d$.

Para trasladar la construcción anterior a esferas de dimensión m con $m > 1$, podemos emplear coordenadas esféricas. En particular, como

$$x_1^2 + \ldots + x_{m+1}^2 = 1$$

existen ángulos $\theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi]$ tales que

$$x_1^2 + x_2^2 = \operatorname{sen}^2\varphi \quad \text{y} \quad (x_1, x_2) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) \,.$$

Así, definimos $f_d : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ de manera que

$$f_d(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, x_3, \ldots, x_{m+1}) = (\cos d\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen} d\theta \operatorname{sen}\varphi, x_3, \ldots, x_{m+1}) \,.$$

Teniendo en cuenta que todas las componentes permanecen fijas salvo las dos primeras, un cálculo análogo al anterior, siendo $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^m$ un valor regular, permite concluir que $\deg f_d = d$.

La construcción del ejemplo anterior permite ver que el grado de Brouwer-Kronecker, como aplicación del conjunto de clases de homotopía $[\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^m]$ en $\mathbb{Z}$, es sobreyectivo. Lo interesante es que, de hecho, se tiene que es biyectivo, lo que constituye un caso particular del siguiente resultado central debido a Hopf.

Teorema 8.2 (de Hopf)**.** *Sea M una variedad suave, orientada, sin borde, compacta y conexa de dimensión m, y sean $f, g : M \to \mathbb{S}^m$ aplicaciones continuas. Se tiene que son homótopas si y solo si* $\deg(f) = \deg(g)$.

El teorema de Hopf deja claro que, como adelantábamos al comienzo de la sección, el grado está particularmente indicado para su uso en esferas. Este "buen condicionamiento" no es casualidad. Desde un punto de vista histórico, el grado tiene su origen en el estudio de las aplicaciones esenciales (no nulhomótopas) entre esferas. Intuitivamente, sobre las esferas el grado cuenta "cuánto se enrolla la aplicación", distinguiendo el sentido de enrollamiento a través de la orientación. Así entendido, el grado de Brouwer-Kronecker es la generalización natural a dimensiones superiores del número de vueltas utilizado en la circunferencia. No probaremos este teorema aquí, por haberse tratado su demostración en trabajos de fin de grado precedentes (véase [13]). En su lugar, vamos a probar un resultado que presenta el teorema de Hopf bajo una luz diferentes. En particular, vamos a ver que el enunciado de Hopf es equivalente a un enunciado aparentemente más débil. Considérese lo siguiente:

Teorema 8.3 (de caracterización de las aplicaciones esenciales)**.** *Sea $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ una aplicación continua entre esferas de la misma dimensión. Si $\deg(f) = 0$, entonces f es nulhomótopa.*

Nótese que el recíproco es cierto por 6.3 (2). Claramente, el teorema anterior es consecuencia del teorema de Hopf: si $\deg(f) = 0$, entonces f y la aplicación constante son homótopas, pues esta última tiene grado nulo. Pues bien, lo que vamos a ver es que la implicación recíproca también es cierta.

Proposición 8.4. *Si el enunciado 8.3 es cierto, el enunciado 8.2 también lo es.*

Demostración. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad suave, orientada, sin borde, compacta y conexa de dimensión m. Así, el cilindro $C \equiv [0,1] \times M \subset \mathbb{R}^{p+1}$ es una variedad suave, orientada, compacta y conexa de dimensión $m+1$, con borde

$$\partial C = (\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M) \equiv M_0 \cup M_1 \ ,$$

donde, como vimos en la sección 2, M_0 y M_1 son difeomorfos a M y la proyección invierte la orientación en M_0 y la preserva en M_1.

Sean ahora f y g aplicaciones continuas de M en $\mathbb{S}^m$ tales que $\deg(f) = \deg(g)$. Por 5.6, basta probar el resultado en el caso en que f y g son suaves. Definimos $h : \partial C \to \mathbb{S}^m$ a trozos, siendo, para cada $x \in M$,

$$h(0,x) = f(x) \quad \text{y} \quad h(1,x) = g(x) \ .$$

Ahora, como M_0 y M_1 son compactos, en particular son cerrados en $\mathbb{R}^{p+1}$. Como la esfera $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, se puede entender h como una aplicación en $\mathbb{R}^{m+1}$, de manera que por el teorema de extensión de Tietze (consecuencia de 1.5) existe una función suave $F : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $F\big|_{\partial C} = h$, y definimos $H = F\big|_C$. Así, $H : C \to \mathbb{R}^{m+1}$ es una función suave que verifica que

$$H\big|_{\partial C} = h \quad \text{y} \quad H(\partial C) \subset \mathbb{S}^m \ .$$

Si conseguimos definir H sobre $\mathbb{S}^m$ en lugar de $\mathbb{R}^{m+1}$, la aplicación resultante será una homotopía de f en g y habremos terminado. Lo único que nos impide tomar $\tilde{H} = H/||H||$ son los ceros que H pueda tener en C, de los que nos vamos a ocupar a continuación, haciendo uso de difeotopías.

Para empezar, podemos considerar sin pérdida de generalidad que 0 es un valor regular de H. En efecto, si 0 no es un valor regular, por 3.3 existe un radio $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada punto con $||x|| < \varepsilon$ existe una difeotopía suave que conecta ese punto con el 0 y es constantemente la identidad para $||x|| \geq 1$. Por 1.9, existe un valor regular a de H con $||a|| < \varepsilon$, por lo que componiendo H con la difeotopía F_a que lleva a a 0 se obtiene una aplicación (que volvemos a denotar H) de C en $\mathbb{R}^{m+1}$ de la que 0 es valor regular. Además, como $F_a\big|_{\mathbb{S}^m} = \mathrm{id}$ y $h(\partial C) \subset \mathbb{S}^m$, se sigue cumpliendo que

$$H\big|_{\partial C} = h \ .$$

En estas condiciones, como C es compacta, si 0 es un valor regular de H se tiene que $H^{-1}(0)$ es un conjunto finito, que además no interseca con la frontera. Sea K un subconjunto de C difeomorfo al disco unidad $\mathbb{D}^{m+1}$, sea V su interior y ∂V su frontera, que es difeomorfa a $\mathbb{S}^m$. Tomemos tantos puntos distintos de V como ceros tiene H. Por 3.6 y por ser M_0 y M_1 compactos, existe una difeotopía que lleva los ceros de H en los puntos escogidos de V que es la identidad fuera de un compacto que no toca el borde de C. Así, la composición de esta difeotopía con H preserva la restricción al borde del cilindro y lleva los ceros a V. Llamamos de nuevo H a la aplicación resultante.

Como resultado de las manipulaciones anteriores, obtenemos una aplicación H que, restringida a $C' \equiv C \setminus V$, no tiene ceros, y por tanto podemos definir

$$H' : C' \to \mathbb{S}^m \ , \ x \mapsto \frac{H(x)}{||H(x)||} \ ,$$

que en particular verifica que $H\big|_{\partial C} = h$. Ahora bien, C' es una variedad de dimensión $m+1$ suave, orientada y con borde

$$\partial C' = \partial C \sqcup \partial V \ .$$

Como la unión es disjunta, por 6.3 (1),

$$\deg\left(H'\big|_{\partial C'}\right) = 0 = \deg(h) + \deg\left(H'\big|_{\partial V}\right) \ .$$

Ahora bien, como M_0 y M_1 son disjuntas y M_0 invierte la orientación de M mientras que M_1 la preserva, se tiene que

$$\deg(h) = \deg(g) - \deg(f) \ ,$$

lo que, dada la igualdad de los grados de f y g implica que $\deg(h) = 0$. Por tanto,

$$\deg\left(H'\big|_{\partial V}\right) = 0 \ .$$

Así, como ∂V es difeomorfo a $\mathbb{S}^m$, $H'\big|_{\partial V}$ es una aplicación de $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{S}^m$ que tiene grado nulo. Por hipótesis, esto implica que $H'\big|_{\partial V}$ es nulhomótopa, lo que por la misma construcción realizada en 7.5 permite extenderla con continuidad a todo $\overline{V} = K$. El pegado de H' con la extensión obtenida proporciona una aplicación

$$\widetilde{H} : [0,1] \times M \to \mathbb{S}^m$$

que es continua, pues H' y la extensión coinciden en ∂V, y además verifica que

$$H(0,x) = f(x) \quad \text{y} \quad H(1,x) = g(x) \ .$$

Por tanto, $\widetilde{H}$ es una homotopía de M en $\mathbb{S}^m$ que lleva f en g. $\square$

Observación 8.5. El resultado anterior reduce el estudio de las clases de homotopía de las aplicaciones entre esferas al estudio de cuáles son nulhomótopas, justificando por qué históricamente se buscaba específicamente estudiar la existencia y caracterización de las aplicaciones esenciales.

9. El teorema de Borsuk-Hirsch

Las aplicaciones del ejemplo 7.2 pertenecen a una clase más general de aplicaciones entre esferas, las aplicaciones *impares*[6], que son aquellas que verifican $f(-x) = -f(x)$. El hecho de que estas aplicaciones no sean nulhomótopas resulta ser un caso particular del siguiente resultado central, que da nombre a la sección.

Teorema 9.1 (de Borsuk-Hirsch)**.** *Sea $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ una aplicación continua entre esferas de dimensión m. Se tiene que*

(i) [Borsuk] *Si $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^m$, entonces $\deg(f)$ es impar.*

(ii) [Hirsch] *Si $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^m$, entonces $\deg(f)$ es par.*

Demostración. En primer lugar, veamos que podemos reducir el problema a que f sea suave: en efecto, por 5.4, existe una función $\varepsilon : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}$ continua y positiva tal que si g es una aplicación continua que verifica que $||g(x) - f(x)|| < \varepsilon(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^m$, entonces g y f son homótopas. En particular, podemos tomar $\varepsilon(x) < 1$ en todo punto. Asimismo, por 5.3, existe una aplicación suave $h : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ tal que $||h(x) - f(x)|| < \varepsilon(x)/4$. Definimos

$$g : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m \ , \ x \mapsto \frac{h(x) \pm h(-x)}{||h(x) \pm h(-x)||} \ ,$$

donde el signo $-$ se utiliza en el caso (i) y el signo $+$ en el caso (ii). Veamos, para empezar, que esta aplicación está bien definida, para lo que hemos de comprobar que el denominador nunca se anula: aplicando la desigualdad triangular y que $f(x) = \pm f(-x)$, se tiene

$$\begin{aligned}
||h(x) \pm h(-x)|| &= ||h(x) - f(x) + f(x) \pm f(-x) \mp f(-x) \pm h(-x)|| \\
&= ||(h(x) - f(x)) + (f(x) \pm f(-x)) \mp (f(-x) - h(-x))|| \\
&\geq ||f(x) \pm f(-x)|| - ||(h(x) - f(x)) \pm (h(-x) - f(-x))|| \\
&\geq ||2f(x)|| - ||h(x) - f(x)|| - ||h(-x) - f(-x)|| \\
&\geq 2(1 - \varepsilon(x)/4) > 0 \ .
\end{aligned}$$

Luego g está bien definida, y se trata de una aplicación suave que verifica $g(x) = \pm g(-x)$. Veamos que, de hecho, g se aproxima lo suficiente a f como para asegurar que son homótopas. Denotando $2H(x) = ||h(x) \pm h(-x)||$, acabamos de ver que $H(x) > (1 - \varepsilon(x)/4)$, y claramente $H(x) \leq 1$. Así,

$$\begin{aligned}
||g(x) - f(x)|| &= \frac{||h(x) \pm h(-x) - 2H(x)f(x)||}{2H(x)} \\
&= \frac{||h(x) - H(x)f(x) \pm (h(-x) - H(x)f(x))||}{2H(x)} \ ,
\end{aligned}$$

[6]Precisamente el siguiente resultado justifica esta denominación.

donde se ha utilizado que $f(x) = \pm f(-x)$. Por la desigualdad triangular, usando que $H(x) = H(-x)$,

$$||g(x) - f(x)|| \leq \frac{||h(x) - H(x)f(x)|| + ||h(-x) - H(-x)f(-x)||}{2H(x)} \ .$$

Ahora, dado que

$$||h(x) - H(x)f(x)|| \leq ||h(x) - f(x)|| + (1 - H(x))||f(x)|| < \frac{\varepsilon(x)}{4}(1 + ||f(x)||) = \frac{\varepsilon(x)}{2} \ ,$$

se tiene que

$$||g(x) - f(x)|| < \frac{\varepsilon(x)}{2H(x)} \leq \frac{\varepsilon(x)/2}{1 - \varepsilon(x)/4} < \varepsilon(x) \ .$$

Por la definición de $\varepsilon(x)$, se concluye que f y g son homótopas, y como por 6.3 el grado es invariante por homotopías propias, basta estudiar el grado de g para obtener el de f. Procedemos ahora a la demostración del teorema.

(i) Considérese en $\mathbb{S}^m$ el ecuador dado por $\{x_{m+1} = 0\}$, que es homeomorfo a $\mathbb{S}^{m-1}$ y que denotaremos así en adelante. Por el pequeño teorema de Sard-Brown 1.10, se tiene que $g(\mathbb{S}^{m-1}) \subset \mathbb{S}^m$ tiene interior vacío, por lo que, por el teorema de Sard-Brown 1.9, existe un valor regular $a \in \mathbb{S}^m \setminus g(\mathbb{S}^{m-1})$. Además, como $g(x) = -g(-x)$, $-a$ tampoco pertenece a $g(\mathbb{S}^{m-1})$, y dado $x \in g^{-1}(-a)$, $-x \in g^{-1}(a)$ y la derivada $d_x g = -d_{-x} g$, por lo que es biyectiva si lo es $d_{-x} g$. Es decir, que $-a$ también es un valor regular de g.

Ahora, aplicando una rotación, que es un difeomorfismo que preserva la orientación y por tanto tiene grado 1, lo que por 4.11 no altera el grado de g, podemos suponer que a es el polo norte $(0, \dots, 0, 1)$. Considerando la proyección de la última coordenada,

$$p = \pi_{m+1} \circ g : \mathbb{S}^m \to \{x_{m+1} = 0\} \equiv \mathbb{D}^m \ ,$$

obtenemos una aplicación suave sobre el disco unidad $\mathbb{D}^m$ en el plano del ecuador $\mathbb{S}^m$. Puesto que $\pi_{m+1}(\pm a) = 0$,

$$p^{-1}(0) = g^{-1}(a) \cup g^{-1}(-a) \ ,$$

que por lo anterior no tiene puntos en el ecuador $\mathbb{S}^{m-1}$. Además, como $d_a \pi_{m+1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$, se concluye que 0 es un valor regular de p. Así, si denotamos el hemisferio superior con $\mathbb{S}^+ = \{x \in \mathbb{S}^m \ : \ x_{m+1} \geq 0\}$, se tiene que

$$p^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^+ = (g^{-1}(a) \ \cap \ \mathbb{S}^+) \sqcup (g^{-1}(-a) \ \cap \ \mathbb{S}^+) \ ,$$

donde $\sqcup$ denota que la unión es disjunta, lo que es consecuencia de que $p^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^{m-1} = \varnothing$. Como $g(x) = -g(-x)$, si $x \notin \mathbb{S}^+$ y $g(x) = a$, entonces $-x \in \mathbb{S}^+$, y $g(-x) = -a$. Por tanto,

$$g^{-1}(-a) \cap \mathbb{S}^+ = -g^{-1}(a) \cap (\mathbb{S}^m \setminus \mathbb{S}^+)$$

lo que implica que

$$p^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^+ = (g^{-1}(a) \sqcup (-g^{-1}(a))) \cap \mathbb{S}^+ \ ,$$

luego

$$\deg(g) \equiv d(g, a) \equiv \# g^{-1}(a) \equiv \#(p^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^+) \pmod{2} \ ,$$

es decir, que para analizar la paridad del grado basta estudiar la paridad del cardinal r del conjunto de ceros de p en el hemisferio superior, que denotamos

$$Z = \{z_1, \dots, z_r\} \ .$$

Resta ver que, en efecto, este cardinal es impar, lo que puede hacerse procediendo por inducción sobre la dimensión de la esfera.

Para $m = 1$, $p : \mathbb{S}^1 \to [-1, 1]$, y el ecuador de $\mathbb{S}^1$ es el par de puntos $\{(-1, 0), (1, 0)\}$. Así, $g(1, 0) = -g(-1, 0) \neq (0, 1)$, y por tanto el signo de p cambia entre 1 y -1,

$$(\star) \quad p(1) = -p(-1) \neq 0 \ .$$

Ahora bien, en este caso $\mathbb{S}^+$ es difeomorfo a $[-1, 1]$, por lo que, restringida a $\mathbb{S}^+$, p puede verse como una función de $[-1, 1]$ en $[-1, 1]$. Como 0 es un valor regular, la derivada $p'(z_i) \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, r$, y por tanto en cada cero hay un cambio de signo. Por la conexión del intervalo $[-1, 1]$ y la continuidad de p, se concluye que el número de ceros es impar.

Supongamos ahora el resultado cierto para $m - 1$. Por la construcción realizada en la demostración de 4.4 sabemos que al ser 0 un valor regular de p existen entornos abiertos disjuntos U^i de z_i en $\mathbb{S}^m$ tales que las restricciones

$$p_i = p\big|_{U^i} : U^i \to B$$

son difeomorfismos, donde $B = B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{D}^m$. Sea $\delta < \varepsilon$, definimos $D = \overline{B}(0, \delta) \subset \mathbb{D}^m$ y $S = \partial D$. Se tiene entonces que los conjuntos $V_i = p_i^{-1}(D) \subset U_i$ son entornos abiertos de z_i difeomorfos a una bola abierta, y $S_i = \partial V_i = p_i^{-1}(\partial D)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{m-1}$. Sea

$$M = \mathbb{S}^+ \setminus \bigcup_i V_i \ ,$$

M es una variedad suave y orientada de dimensión m con borde $\mathbb{S}^{m-1} \cup \bigcup_i S_i$, la aplicación

$$H : M \to \mathbb{S}^{m-1} \ , \ x \mapsto \frac{p(x)}{||p(x)||}$$

verifica las condiciones de 4.9. Como la frontera es una unión disjunta, se tiene que

$$\deg\,(H\big|_{\partial M}) = 0 = \deg\,(g_0) + \sum_i \deg\,(H\big|_{S_i}) \ ,$$

donde $g_0 = H\big|_{\mathbb{S}^{m-1}} : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ que verifica

$$g_0(-x) = \frac{p(-x)}{||p(-x)||} = -\frac{p(x)}{||p(x)||} = -g_0(x) \ .$$

Es decir, que g_0 es una aplicación impar entre esferas de dimensión $m - 1$, lo que por la hipótesis de inducción implica que $\deg g_0$ es impar. Para acabar, como $S_i \subset U_i$ y $p(S_i) = \partial B(0, \delta)$,

$$H\big|_{S_i}(x) = \frac{p(x)}{||p(x)||} = \frac{p_i(x)}{||p_i(x)||} = \frac{1}{\delta} p_i\big|_{S_i} \ .$$

Como p_i es un difeomorfismo, $H\big|_{S_i}$ también lo es, por lo que su grado es 1 o -1. En particular,

$$\sum_i \deg\,(H\big|_{S_i}) \equiv r \pmod{2} \ .$$

Como

$$\deg\,(g_0) = -\sum_i \deg\,(H\big|_{S_i}) \equiv r \pmod{2} \ ,$$

hemos concluido.

(ii) Basta notar que, como antes, dado un valor regular $a \in \mathbb{S}^m$,

$$\deg(g) \equiv \# g^{-1}(a) \pmod{2}$$

y, dado que para cada $x \in g^{-1}(a)$ se verifica $g(-x) = g(x) = a$ y por tanto $-x \in g^{-1}(a)$, necesariamente el número de imágenes inversas es par. □

10. Teoremas de Borsuk-Ulam

Una consecuencia del apartado (i) del teorema de Borsuk-Hirsch 9.1 es que *ninguna aplicación entre esferas continua e impar es nulhomótopa*. Vamos a referirnos a este resultado con el nombre de *teorema de Borsuk-Ulam*[7], aunque existen varios enunciados equivalentes. De hecho, es frecuente encontrar enunciados distintos del teorema según la fuente que se consulte [1, 7, 9, 10].

Así, en esta sección hacemos un aparte en la exposición de las aplicaciones del grado de Brouwer-Kronecker para demostrar varios de estos resultados profundos de carácter topológico cuya certeza viene garantizada por los resultados obtenidos mediante la teoría de grado.

Teorema 10.1 (de Borsuk-Ulam)**.** *Para cada $m \geq 1$, las siguientes proposiciones son ciertas y equivalentes:*

(i) *Si $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ es una aplicación continua e impar, entonces f no es nulhomótopa.*

(ii) *Si $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ es una aplicación continua y homótopa a una aplicación impar, entonces es sobreyectiva.*

(iii) *No existe ninguna aplicación continua $f : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ que sea impar en el borde, es decir, tal que $f(x) = -f(-x)$ para cada $x \in \partial\mathbb{D}^{m+1} \equiv \mathbb{S}^m$.*

(iv) *No existe ninguna aplicación continua $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ que sea impar.*

(v) *Si $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ es continua, entonces $f(x) = f(-x)$ para algún $x \in \mathbb{S}^{m+1}$.*

(vi) *Si $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ es continua, entonces $f(x) = f(-x)$ para algún $x \in \mathbb{S}^{m+1}$.*

(vii) *Si $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ es continua e impar, entonces $f(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{S}^m$.*

(viii) *Si $f : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ es continua e impar en su borde $\partial\mathbb{D}^{m+1} \equiv \mathbb{S}^m$, entonces $f(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{D}^{m+1}$.*

(ix) [Lyusternik, Schnirelmann] *En cualquier recubrimiento de $\mathbb{S}^{m+1}$ por $m+2$ cerrados, al menos uno de ellos contiene dos puntos antipodales.*

(x) *En cualquier recubrimiento de $\mathbb{S}^{m+1}$ por $m+2$ conjuntos que o bien son cerrados o bien son abiertos, al menos uno de ellos contiene dos puntos antipodales.*

Demostración. Desde luego, para ver que son ciertas basta probar la equivalencia, pues (i) es consecuencia de 9.1, como se ha señalado previamente.

[7]La referencia a Ulam se debe a que Borsuk le atribuyó la conjetura del resultado.

Para empezar, la equivalencia de (i) y (ii) es inmediata: si (ii) es cierta, entonces como una aplicación constante no es sobreyectiva, en particular no es homótopa a ninguna aplicación impar. Recíprocamente, si (i) es cierta, entonces una aplicación homótopa a una aplicación impar no es nulhomótopa. Ahora bien, si no fuera sobreyectiva, su imagen estaría contenida en una esfera sin un punto, y ese espacio es difeomorfo a un espacio afín, que es contráctil, por lo que la aplicación sería nulhomótopa, en contra de lo anterior.

Nótese ahora que por la construcción utilizada en 7.5, vemos que la nulhomotopía de una aplicación $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ equivale a la existencia de una extensión $\bar{f} : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$. Esto demuestra la equivalencia de (i) y (iii). El argumento para la equivalencia de (i), (iii) y (iv) es similar: por un lado, (i) implica (iv) porque si existiera $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ continua e impar, su restricción al hemisferio superior $\mathbb{S}^+$ es una homotopía entre la restricción de f al ecuador $\mathbb{S}^m$, que es una aplicación continua e impar de $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{S}^m$, y la aplicación constante; por el otro, (iv) implica (iii), porque si existe una $f : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ que es impar en el borde, entonces podemos definir $h : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ por

$$h(x) = f(\pi_{m+2}(x)) \quad \text{si} \quad x_{m+2} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad h(x) = -f(\pi_{m+2}(-x)) \quad \text{si} \quad x_{m+2} \leq 0\,,$$

donde π_{m+2} es la proyección (desde la última coordenada) sobre el ecuador. Así, g es continua e impar.

Por otro lado, la equivalencia entre (iv) y (v) es inmediata: dado que $0 \notin \mathbb{S}^m$, es trivial que (v) implica (iv). Recíprocamente, si $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ fuera continua con $f(x) \neq f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^{m+1}$, entonces

$$g : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m\,,\ x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$$

está bien definida, es continua e impar.

Proseguimos viendo la equivalencia de (iv) y (vi): en efecto, (iv) implica (vi), pues si existiera $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ con $f(x) \neq f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^{m+1}$, entonces podríamos definir g como antes. Y (vi) implica (iv), pues si $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es continua, existe $x \in \mathbb{S}^{m+1}$ tal que $f(x) = f(-x)$. Como $f(x) \in \mathbb{S}^m$, en particular $f(x) \neq 0$, por lo que $f(x) \neq -f(-x)$ y por tanto f no es impar.

Probamos ahora las equivalencias de (vi), (vii) y (viii) siguiendo el círculo de implicaciones (vi)-(vii)-(viii)-(vi).

Comenzamos viendo que (vi) implica (vii): en efecto, si $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ es continua, entonces por (vi) existe un punto $x \in \mathbb{S}^{m+1}$ tal que $f(x) = f(-x)$. Ahora bien, si f es impar, entonces $f(x) = -f(-x)$, luego $f(-x) = -f(-x)$, es decir, que $f(-x) = 0$.

Para ver que (vii) implica (viii), vamos a emplear una aplicación h similar a la definida en la primera parte de la demostración: sea $f : \mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ continua en impar en el borde $\partial\mathbb{D}^{m+1} \equiv \mathbb{S}^m$, definimos $h : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ con

$$h(x) = f(\pi_{m+2}(x)) \quad \text{si} \quad x_{m+2} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad h(x) = -f(\pi_{m+2}(-x)) \quad \text{si} \quad x_{m+2} \leq 0\,,$$

que está bien definida, es continua e impar. Por (vii), $h(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{S}^{m+1}$, lo que implica que $f(\pi_{m+2}(x)) = 0$, con $\pi_{m+2}(x) \in \mathbb{D}^{m+1}$.

Cerramos el círculo de equivalencias viendo que (viii) implica (vi): sea $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ una aplicación continua. Entonces $g(x) = f(x) - f(-x)$ es continua e impar. Como el hemisferio superior $\mathbb{S}^+$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^{m+1}$, por hipótesis se tiene que $g(x) = 0$ para algún $x \in \mathbb{S}^+$, luego $f(x) = f(-x)$.

Veamos ahora que (vi) implica (ix): dado un recubrimiento $\{C_1, \ldots, C_{m+2}\}$ por cerrados de $\mathbb{S}^{m+1}$, definimos

$$f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1} \ , \ x \mapsto (\operatorname{dist}(x, C_1), \ldots, \operatorname{dist}(x, C_{m+1})) \ ,$$

que es continua (por serlo la función distancia). Por hipótesis, existe $z \in \mathbb{S}^{m+1}$ tal que $f(z) = f(-z)$, es decir, que $\operatorname{dist}(z, C_j) = \operatorname{dist}(z, C_j)$ para cada $j = 1, \ldots, m+1$. Distinguimos dos casos para concluir:

- Para algún j, $\operatorname{dist}(z, C_j) = 0$. En ese caso, $z, -z \in C_j$.

- Para cada j, $\operatorname{dist}(z, C_j) > 0$ y como los cerrados recubren, necesariamente $z, -z \in C_{m+2}$.

Por su parte, (ix) implica (iv): para verlo, nótese que si proyectamos los m-símplices regulares que conforman la frontera de un $(m+1)$-símplice regular sobre $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, la esfera queda recubierta por $m+2$ cerrados que no contienen ningún par de puntos antipodales. Llamémoslos $\{C_1, \ldots, C_{m+2}\}$. Sea ahora $f : \mathbb{S}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ una aplicación continua. Entonces los conjuntos $F_j = f^{-1}(C_j)$ son cerrados y recubren $\mathbb{S}^{m+1}$. Por (ix), existe $x \in \mathbb{S}^{m+1}$ tal que $x, -x \in F_i$ para algún i. Por tanto, $f(x), f(-x) \in C_i$, y como C_i no contiene puntos antipodales, $f(x) \neq -f(-x)$. En particular, f no es impar.

Para finalizar, veamos la equivalencia entre (ix) y (x). Es evidente que (x) implica (ix), por lo que solo necesitamos ver el recíproco. Consideremos un recubrimiento $\{A_1, \ldots, A_{m+2}\}$ de $\mathbb{S}^{m+1}$, donde A_i o bien es cerrado o bien es abierto. Si alguno de los cerrados contiene un par de puntos antipodales, hemos terminado. Si no es así, entonces para cada cerrado C del recubrimiento, C y su inversión antipodal $-C$ son compactos disjuntos de $\mathbb{S}^{m+1}$, luego existen entornos abiertos disjuntos U y V de C y $-C$, respectivamente. Entonces $C \subset W = U \cap (-V)$, y como U y V son disjuntos, W no contiene puntos antipodales. Haciendo esto con cada cerrado y sin modificar los abiertos, podemos cambiar cada A_i por W_i (en el caso de los abiertos, solo los renombramos). Así, se ha sustituido el recubrimiento inicial por un recubrimiento abierto $\{W_1, \ldots, W_{m+2}\}$ donde por construcción W_i tiene puntos antipodales si y solo si el conjunto A_i del recubrimiento original los tiene. Puesto que $\mathbb{S}^{m+1}$ es compacto, existe un número de Lebesgue $\delta > 0$ para el recubrimiento, tal que para cada $x \in \mathbb{S}^{m+1}$, existe un $i(x)$ tal que la bola cerrada

$$\overline{B}(x, \delta) \subset W_i \ .$$

Por la compacidad de $\mathbb{S}^{m+1}$, existe una cantidad finita de puntos $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{S}^{m+1}$ tal que las bolas cerradas $\overline{B}(x_k, \delta)$ recubren $\mathbb{S}^{m+1}$. Sea $i(k) = i(x_k)$, definimos

$$F_j = \bigcup_{k \,:\, i(k) = j} \overline{B}(x_k, \delta) \subset W_j \ .$$

Así, $\{F_1, \ldots, F_{m+2}\}$ es un recubrimiento cerrado de $\mathbb{S}^{m+1}$. Por (ix), existe j tal que F_j contiene dos puntos antipodales. Como $F_j \subset W_j$, hemos concluido. □

Observación 10.2. Para $m = 0$ las afirmaciones anteriores no se obtienen como consecuencia de 9.1, pero también son ciertas. De (i) a (v) son triviales. El enunciado (vi) es una consecuencia de la conexión de la circunferencia $\mathbb{S}^1$: en efecto, si $f(x) - f(-x) \in \mathbb{R}$ no tuviera ceros, entonces no cambiaría de signo, lo que por ser impar no es posible a menos que sea idénticamente nula. (vii), (viii), (ix) y (x) son equivalentes a (vi) por la misma demostración.

Observación 10.3. El teorema anterior permite deducir los resultados de dimensión inferior a partir de los dimensión superior. En concreto, si se conoce el resultado para alguna dimensión $m \geq 2$, entonces se puede deducir el resultado para $m-1$, viendo que el enunciado (i) para dimensión m implica el enunciado (iii) para dimensión $m-1$: en efecto, si existiera una aplicación $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{m-1}$ continua e impar, identificando $\mathbb{S}^{m-1}$ con el ecuador de $\mathbb{S}^m$ se tiene una aplicación $\bar{f} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ continua e impar pero no sobreyectiva, y por tanto nulhomótopa[8].

11. Teoremas de invarianza

Los teoremas de Borsuk-Ulam expuestos en la sección anterior tienen varias consecuencias relevantes. Para empezar, podemos notar que, puesto que la identidad es una aplicación impar, por 10.1(i), no es nulhomótopa. Este era el enunciado (ii) de 7.5, que por tanto implica el teorema del punto fijo de Brouwer. Aunque con el formalismo desarrollado no tenga mucho sentido obtener que la identidad es una aplicación esencial por este camino, vemos así que el teorema de Borsuk-Ulam implica el teorema del punto fijo de Brouwer. Asimismo, 10.1(vi) implica en particular que no existe ningún subconjunto de $\mathbb{R}^m$ que sea homeomorfo a $\mathbb{S}^m$, es decir, que la esfera de dimensión m no puede sumergirse en el espacio afín de la misma dimensión. La última de las consecuencias célebres de los teoremas de Borsuk-Ulam que aquí consideramos son los *teoremas de invarianza*. Comenzamos la sección con la demostración (debida a Pépin [12]) del *teorema de invarianza del dominio*, a partir del cual se deducen los demás.

Teorema 11.1 (Invarianza del dominio)**.** *Una aplicación continua e inyectiva de un abierto de un espacio afín $\mathbb{R}^m$ en el mismo espacio afín es abierta.*

Demostración. Para $m = 1$ el resultado es trivial: si es continua e inyectiva, es monótona, y transforma intervalos abiertos en intervalos abiertos. En adelante, $m \geq 2$. El objetivo es probar que si $U \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ es continua e inyectiva, entonces f es abierta, es decir, cada abierto $W \subset U$ tiene imagen $f(W)$ abierta en $\mathbb{R}^m$. Más explícitamente, para cada $a \in W$ debemos encontrar un entorno abierto V de $f(a)$ en $\mathbb{R}^m$ tal que $V \subset f(W)$. Para ello, salvo traslaciones, podemos suponer $a = f(a) = 0$. Sea $D = \overline{B}(0, \varepsilon)$ una bola cerrada contenida en W. Por la inyectividad de f, $0 = f(0)$ no está en la imagen de la circunferencia $S = \partial D$, y denotamos por V la componente conexa de $\mathbb{R}^m \setminus f(S)$, que contiene a 0. Como S es compacto, lo es su imagen, que por tanto es cerrada, y esto dice que $\mathbb{R}^m \setminus f(S)$ es abierto y todas sus componentes conexas también. Afirmamos que este entorno abierto V de $0 = f(0)$ es el entorno buscado. De hecho vamos a ver que $V \subset f(D) \subset f(W)$.

En efecto, supongamos lo contrario, es decir, que existe un punto $c \in V \setminus f(D)$. Como V es un abierto conexo de un espacio afín, es conexo por caminos, y existe un camino $\sigma : [0,1] \to V$ con $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = c$. Ahora consideramos las siguientes homotopías

[8]Nótese que si $\bar{f}$ no es sobreyectiva, entonces la imagen está contenida en $\mathbb{S}^m$ sin un punto, que es difeomorfo a $\mathbb{R}^m$, que es contráctil.

definidas de $[0,1] \times \mathbb{S}^{m-1}$ en $\mathbb{S}^{m-1}$:

$$(t,x) \mapsto \frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon t x)}{||f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon t x)||} \qquad (t,x) \mapsto \frac{f(\varepsilon x) - \sigma(t)}{||f(\varepsilon x) - \sigma(t)||} \qquad (t,x) \mapsto \frac{f(\varepsilon t x) - c}{||f(\varepsilon t x) - c||}$$

Encadenándolas, se obtienen las siguientes homotopías

$$\frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon x)}{||f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon x)||} \simeq \frac{f(\varepsilon x)}{||f(\varepsilon x)||} \simeq \frac{f(\varepsilon x) - c}{||f(\varepsilon x) - c||} \simeq \frac{-c}{||c||} .$$

Por supuesto, hay que ver que estas definiciones son posibles para $x \in \mathbb{S}^{m-1}$, $0 \leq t \leq 1$. En efecto:

(i) Si $f(\varepsilon x) = f(-\varepsilon t x)$ como f es inyectiva en D, sería $\varepsilon x = -\varepsilon t x$, luego $t = -1$.

(ii) Si $f(\varepsilon x) = \sigma(t) \in V$, como $\varepsilon x \in S$, la componente V cortaría a $f(S)$.

(iii) Si $f(\varepsilon t x) = c$, como $\varepsilon t x \in D$, se tendría $c \in f(D)$.

En conclusión, vemos que la aplicación impar

$$h : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1} , \ x \mapsto \frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon x)}{||f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon x)||}$$

es nulhomótopa, lo que contradice el enunciado 10.1(i) del teorema de Borsuk-Ulam. □

Se deduce inmediatamente la siguiente versión equivalente:

Corolario 11.2. *Una aplicación continua inyectiva $f : U \to \mathbb{R}^m$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo sobre su imagen $f(U)$, que es un abierto de $\mathbb{R}^m$.*

El siguiente teorema de invarianza es consecuencia directa del ya demostrado:

Corolario 11.3 (Invarianza de la dimensión)**.** *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo de un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ sobre un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $n = m$.*

Demostración. Supongamos que $n \neq m$. Dado que f es un homeomorfismo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m < n$. Denotando $g = f^{-1} : V \to U$ y eligiendo un subespacio afín $H \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión m que corte a V, se tiene que $W = V \cap H$ es un abierto no vacío de $H \equiv \mathbb{R}^m$ y $g|_W : W \to U \subset \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua e inyectiva. Por el teorema, es abierta, luego $g(W)$ es abierto en $\mathbb{R}^m$, luego en U. Como $f : U \to V$ es homeomorfismo, se sigue que $f(g(W))$ es abierto no vacío de V, luego de $\mathbb{R}^n$. Pero

$$f(g(W)) = f(f^{-1}(W)) = W = V \cap H \subset H \subset \mathbb{R}^n$$

y el subespacio afín H tiene interior vacío en $\mathbb{R}^n$ pues $n > m$, lo que es absurdo. □

Acabamos la sección demostrando los dos últimos teoremas de invarianza, que se demuestran en cascada, siendo el segundo consecuencia inmediata del primero.

Corolario 11.4 (Invarianza del interior y de la frontera)**.** *Dados S, T sendos subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, sea $f : S \to T$ un homeomorfismo. Entonces*

$$f(\mathrm{Int}(S)) = \mathrm{Int}(T) \quad y \quad f(\mathrm{Fr}(S)) = \mathrm{Fr}(T) ,$$

donde $\mathrm{Int}(*)$ *es el interior de $*$ y* $\mathrm{Fr}(*)$ *son los puntos de la frontera de $*$ en $\mathbb{R}^m$ que están en el conjunto $*$.*

Demostración. Como $f|_{\mathrm{Int}(S)} : \mathrm{Int}(S) \to \mathbb{R}^m$ es continua e inyectiva, por el teorema de invarianza del dominio 11.1 es abierta. Así, $f(\mathrm{Int}(S)) \subset T$ es abierto en $\mathbb{R}^m$ y en consecuencia $f(\mathrm{Int}(S)) \subset \mathrm{Int}(T)$. Análogamente, para f^{-1} obtenemos $f^{-1}(\mathrm{Int}(T)) \subset \mathrm{Int}(S)$, y aplicando f se deduce el contenido $\mathrm{Int}(T) \subset f(\mathrm{Int}(S))$, y con él la igualdad deseada. Para la segunda igualdad del enunciado, vemos que

$$f(S \cap \overline{\mathbb{R}^m \setminus S}) = T \cap \overline{\mathbb{R}^m \setminus T}\ ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(S \setminus \mathrm{Int}(S)) = T \setminus \mathrm{Int}(T)\ ,$$

y esto es consecuencia inmediata de lo que ya hemos probado. □

Corolario 11.5 (Invarianza del borde)**.** *Sean U, V dos abiertos de un semiespacio afín $\{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$. Si $h : U \to V$ es un homeomorfismo, entonces*

$$h(U \cap \{x = 0\}) = V \cap \{x = 0\}\ .$$

Demostración. Es claro que el interior de U (resp. V) en $\mathbb{R}^m$ es $U \setminus \{x = 0\}$, y el de V es $U\setminus\{x = 0\}$. Así, tenemos un caso particular del corolario anterior. □

12. Teorema de Jordan-Brouwer

En esta última sección del trabajo vamos a mostrar cómo el grado de Brouwer-Kronecker puede adaptarse a una versión más débil que no requiere la orientación para estar bien definida, y utilizaremos esta noción para probar un resultado de la envergadura del teorema de separación de Jordan, en su versión diferenciable.

Definición 12.1. *Sean M y N variedades suaves, sin borde y de dimensión m, y N además conexa. Sea $f : M \to N$ una aplicación suave entre ellas, y sea $a \in R_f$ un valor regular. Se define la* paridad *o* grado módulo 2 *como*

$$\deg_2(f) = \# f^{-1}(a) \pmod{2}\ .$$

Observación 12.2. La definición anterior es buena: desde luego, por ser $a \in R_f$ un valor regular, el número de imágenes inversas es finito. En el momento en que solo nos preguntamos si el número de imágenes inversas es par o impar, la orientación deja de ser necesaria ($1 \equiv -1$), y los resultados probados en la sección 4 se extienden inmediatamente, empezando por el *grado en un punto* hasta la definición del grado de la aplicación cuando la variedad de llegada es conexa. Para ver que la "paridad en un punto" es localmente constante, se emplea la misma construcción de difeomorfismos utilizada en 4.4. Para probar la versión correspondiente del teorema del borde 4.6, es decir, que

$$\deg_2(H\big|_{\partial M}) = 0$$

basta utilizar de nuevo el teorema de clasificación de curvas suaves 4.5, notando que las componentes conexas de $f^{-1}(a)$ o bien no tienen puntos en el borde o tienen dos, en cualquier caso una cantidad par. La invariancia bajo homotopía 4.7 se obtiene inmediatamente del teorema del borde sin necesidad de cambiar ningún signo por la orientación. Así, vemos que la paridad tiene las mismas propiedades que el grado de Brouwer-Kronecker. En particular, es evidente que si las variedades M y N son orientables, entonces

$$\deg_2(f) \equiv \deg(f) \pmod{2}\ .$$

Una vez introducida la adaptación del grado de Brouwer-Kronecker a contextos en los que la orientabilidad de las variedades no está garantizada, se dan las condiciones para probar el resultado central de la sección.

Teorema 12.3 (de separación de Jordan)**.** *Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una variedad suave, cerrada y sin borde de dimensión m (es decir, una hipersuperficie). Se tiene entonces que M desconecta $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus M$, y definamos para cada $r > 0$

$$\pi_r : \overline{D}_r \setminus \{a\} \to S_r \ , \ x \mapsto r\frac{x-a}{||x-a||} \ ,$$

donde

$$\overline{D}_r = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ ||x-a|| \le r\} \quad \text{y} \quad S_r = \partial \overline{D}_r \ .$$

Es decir, π_r es la proyección del disco cerrado pinchado de centro a y radio r sobre su borde. En particular, π_r es una aplicación suave, luego también lo es

$$f_r = \pi_r\big|_{\overline{D}_r \cap M} : \overline{D}_r \cap M \to S_r \ ,$$

que además está definida en un conjunto compacto (ya que M es cerrado) y por tanto es propia. Dado $p \notin M$, $p \neq a$, sea $r = ||p-a||$. Por ser M cerrado existe un entorno abierto conexo U^p de p en S_r tal que $U^p \cap M = \varnothing$. Consideramos $M_p = f_r^{-1}(U^p) \subset M$, que puede ser vacío, y observamos que este conjunto es un abierto de M: en efecto, es un abierto de $\overline{D}_r \cap M$, y además no contiene a ningún punto del borde $\partial(\overline{D}_r \cap M) = S_r \cap M$, pues los puntos del borde se proyectan en sí mismos, y $U^p \cap M = \varnothing$. Así, la restricción

$$f_p = f_r\big|_{M_p} : M_p \to U^p$$

es una aplicación propia, suave y definida entre variedades suaves, sin borde y de dimensión m, siendo U^p conexo. Denotamos entonces

$$w(p) = \deg_2(f_p) \ .$$

Lo primero es ver que esta definición es buena, es decir, que no depende del U^p escogido. Supongamos que tomamos otro abierto $\widetilde{U}^p$, con $\widetilde{M}_p = f_r^{-1}(\widetilde{M}_p)$, y definimos

$$\widetilde{w}(p) = \deg_2(\widetilde{f}_p) \ ,$$

donde $\widetilde{f}_p = f_r\big|_{\widetilde{M}_p}$. Entonces, $U^p \cap \widetilde{U}^p$ es también un entorno abierto de p en S_r. Como f_p y $\widetilde{f}_p$ coinciden en $M_p \cap \widetilde{M}_p = f_r^{-1}(U^p \cap \widetilde{U}^p)$, por el teorema de Sard-Brown 1.9 existe un valor regular de ambas aplicaciones $z \in U^p \cap \widetilde{U}^p$, de manera que

$$w(p) = \deg_2(f_p) \equiv \# f_p^{-1}(z) = \# \widetilde{f}_p^{-1}(z) \equiv \deg_2(\widetilde{f}_p) = \widetilde{w}(p) \equiv \#([a,z] \cap M) \pmod{2} \ ,$$

donde la última igualdad es inmediata por la definición de la proyección. Nótese que si $M_p = \varnothing$, entonces trivialmente $w(p) = 0$. Definiendo $w(a) = 0$, tenemos w definida en $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$.

Veamos que w es localmente constante. Para el caso de a, como no pertenece a M y esta es cerrada, existe $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B(a, \delta) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ no contiene puntos de M, de manera que para cada $p \in B(a,\delta)$, $\overline{D}_{||p-a||} \cap M = \varnothing$ y por tanto $w(p) = 0$. Para el resto de puntos, considérese, en coordenadas esféricas generalizadas centradas en a, un entorno abierto de p en $\mathbb{R}^{m+1}$ de la forma

$$V = (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \times W \subset \mathbb{R}^{m+1} \setminus M \ ,$$

donde $r = ||p-a||$, $\varepsilon > 0$ y W es un abierto en el resto de coordenadas (angulares). Se tiene entonces que para cada $q \in V$ con $||q-a|| = s$, la intersección $V \cap S_s = \{s\} \times W$ es un entorno de q en S_s que puede utilizarse como U^q en la construcción de w. En particular, sea $y \in U^q$ un valor regular de f_q,

$$w(q) \equiv \# f_q^{-1}(y) = \#([a,y] \cap M) \pmod{2} \ .$$

Ahora bien, si tomamos $U^p = V \cap S_r = \{r\} \times W$ para construir f_p, como las proyecciones π_r y π_s son proporcionales,

$$M_p = M_q \quad \text{y} \quad f_p = \frac{r}{s} f_q \ .$$

En particular, $y' = ry/s \in S_r$ es un punto regular de f_p por ser las derivadas proporcionales, y como $[y,y'] \cap M \subset V \cap M = \varnothing$, se concluye que

$$w(p) \equiv \#([a,y'] \cap M) = \#(([a,y] \cap M) \cup ([y,y'] \cap M)) = \#([a,y] \cap M) \equiv w(q) \pmod{2} \ .$$

Que w sea localmente constante garantiza, por la conexión local, que es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$. Ya hemos visto que existen puntos para los que w toma el valor 0. Veamos que existen puntos para los que toma el valor 1. Sea $x \in M$ y sea $r = ||x-a||$, considérese el disco cerrado $\overline{D}_r$, que es compacto. Como M es cerrado, $\overline{D}_r \cap M$ es compacto, y por tanto la función

$$\overline{D}_r \cap M \ni x \mapsto ||x-a||^2$$

alcanza su mínimo $d^2 \leq r^2$ para algún $x_0 \in M$. Como para cada $x \in M$ que no está en el disco, $||x-a||^2 > r^2$, se concluye que en x_0 se alcanza de hecho el mínimo de

$$M \ni x \mapsto ||x-a||^2 \ .$$

Como consecuencia, dado que la dimensión de M es m, el espacio tangente a M en x_0 es exactamente el subespacio perpendicular al gradiente de la función en x_0, es decir,

$$T_{x_0}M = \{u \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ \langle u, x_0 - a \rangle = 0\} \ .$$

En particular, sea $\varepsilon > 0$ y definamos $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon(x_0 - a)$, entonces el segmento $[a, x_\varepsilon]$ corta a M en x_0 perpendicularmente, lo que implica que, si tomamos ε suficientemente pequeño, $[a, x_\varepsilon] \cap M = \{x_0\}$. Para finalizar, sea $r_\varepsilon = (1+\varepsilon)r = ||x_\varepsilon - a||$, como la proyección entre esferas

$$\pi_{r_\varepsilon}\big|_{S_r} : S_r \to S_{r+\varepsilon} \ , \ x \mapsto x + \varepsilon(x-a)$$

es trivialmente un difeomorfismo, y por lo visto anteriormente

$$T_{x_0}M = T_{x_0}S_r \ ,$$

se concluye que

$$d_{x_0} f_{x_\varepsilon} = d_{x_0} \pi_{r_\varepsilon}\big|_{S_r} = (1+\varepsilon)\mathrm{id} \ .$$

En particular, x_0 es un punto regular de f_{x_ε}, y como $f_{r_\varepsilon}^{-1}(x_\varepsilon) = \{x_0\}$, se tiene que x_ε es un valor regular de f_{x_ε} y que

$$w(x_\varepsilon) \equiv \#([a, x_\varepsilon] \cap M) = 1 \pmod{2} \ .$$

□

Referencias

[1] E. Outerelo, J. M. Ruiz: *Mapping Degree Theory.* 7, 40
Graduate Studies in Mathematics, USA 2009.

[2] J. M. Gamboa, J. M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables.* 6
Editorial Sanz y Torres, Alcorcón (Madrid) 2016.

[3] E. Outerelo, J. A. Rojo, J. M. Ruiz: *Topología Diferencial: un curso de iniciación.* 5
Editorial Sanz y Torres, Alcorcón (Madrid) 2014.

[4] M. W. Hirsch: *Differential Topology.* 5
Springer-Verlag, New York 1976.

[5] J. W. Milnor: *Topology from the Differentiable Viewpoint.* 18
The University Press of Virginia, USA 1965.

[6] I. Madsen, J. Tornehave: *From Calculus to Cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes.*
Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[7] V. Guillemin, A. Pollack: *Differential Topology.* 40
Prentice Hall, New Jersey 1974.

[8] M. E. Rudin: *A new proof that metric spaces are paracompact.* 4
Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 603.

[9] E. H. Spanier: *Algebraic Topology.* 40
Springer-Verlag, New York 1966.

[10] J. Matoušek: *Using the Borsuk-Ulam theorem.* 40
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2003.

[11] J. E. Greene: *A new short proof of Kneser's conjecture.*
The American Mathematical Monthly, **109**:10 (Dec. 2002), 918-920.

[12] H. Pépin *Nullstellensatz homogène, théorèmes de Borsuk-Ulam et d'invariance du domain.* 43
RMS: Revue de la filière mathématiques, **119**:1 (2008), 36-47.

[13] P. J. Esteban: *Cohomología de de Rham y grado de Brouwer-Kronecker.* 35
Trabajo de Fin de Grado