UTILIZACIÓN DE MATERIAL DIVULGATIVO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

LUPIÁÑEZ, F.G.

IMI (Instituto Matemático Interdisciplinar), Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
Madrid, España
fg_lupianez@mat.ucm.es

Resumen
Se describe la experiencia didáctica de utilización de material divulgativo (artículos, libros, posters) para la enseñanza universitaria de la Geometría Proyectiva en la titulación de Matemáticas.

Palabras clave: Experiencia didáctica, Geometría proyectiva, material didáctico, divulgación matemática.

Abstract
Use of popular science materials for teaching Projective Geometry
We describe an experience of use of popular science articles, books and posters, for university teaching of Projective Geometry for undergraduate students.

Keywords: Experience teaching, university teaching, Geometry, materials.

1. Motivación de la innovación docente presentada

En los estudios de Licenciatura (o Grado) en Matemáticas, en España, desde tiempo inmemorial, hay una asignatura con carácter obligatorio cuyo contenido es la Geometría Proyectiva. Por tanto, en las aulas donde se explica esta asignatura encontramos alumnos que, posteriormente se inclinarán, unos hacia Matemática fundamental, pero otros a cosas tales como Estadística, Matemática Computacional, Astronomía...especialidades en las que es bastante dudosa la utilidad de la Geometría proyectiva. Además, a los alumnos , esta asignatura les resulta bastante más abstracta (y difícil) que el Álgebra Lineal y Geometría que han estudiado en primer curso, lo cual origina una cierta disminución de la asistencia a clase por algunos alumnos, puesto que ven la Geometría Proyectiva como algo alejado de las aplicaciones prácticas

En el pasado curso, he comenzado a tomar medidas directas para motivar a los alumnos al estudio de la Geometría Proyectiva.

En los estudios de Grado existe la posibilidad de realizar “seminarios"(en algunas asignaturas). Yo he tomado la decisión de hacer consistir esos seminarios en la exposición y comentario de material divulgativo sobre Geometría Proyectiva a nivel de primer ciclo. Aunque pueda, en principio, parecer raro, este tipo de material (libros, artículos, posters) es relativamente abundante, bonito y motivador para los estudiantes que se inician en el estudio de la Geometría Proyectiva.

El procedimiento práctico que se puede seguir en las clases puede ser la distribución previa entre los alumnos del material divulgativo (artículos o capítulos de libros) mediante, por ejemplo el campus virtual de la Universidad y, posteriormente, en el seminario, aclarar o comentar en la pizarra los conceptos que vayan apareciendo en ese material divulgativo.

El material divulgativo existente sobre Geometría Proyectiva, no cubre todos los temas de la asignatura que se explica en el Grado, pero hay variedad suficiente para amenizar buena parte de los conceptos que aparecen a lo largo del curso. Concretamente, se comienza presentando la relación existente entre Geometría Proyectiva y pintura (especialmente, del Renacimiento); se ilustran conceptos como razón doble, dualidad, etc, mediante material divulgativo con dibujos atrayentes, y finalmente, se hace hincapié en el concepto de cónicas, presentando aplicaciones de estas curvas en el arte (pintura y arquitectura).

2. Presentación de los materiales utilizados

A continuación, vamos a mostrar los diversos materiales utilizados, agrupándolos por temas:

2.1. Pintura y Geometría Proyectiva

Aquí he utilizado, fundamentalmente los artículos que aparecen en los posters “Orígenes de la Geometría Proyectiva” (de M.E. Alonso, M.C. del Amo, R. Mallavibarrena, I. Pinto, J.M. Ruiz) [1], el artículo de la Profa. Güelmes [4] y el libro de J.V. Field [3] del cual, como ejemplo, presento una página (véanse los Anexos 1, 2 y 3). Esencialmente, en estos materiales se muestra como el interés de los pintores y arquitectos del renacimiento por plasmar en un plano el espacio tridimensional, desarrolló el estudio de las propiedades invariantes al proyectar y cortar, que fue el origen del estudio sistemático de la Geometría Proyectiva.

2.2. Nociones de Geometría Proyectiva

Conceptos que aparecen en Geometría Proyectiva y que son claramente diversos de los de geometría afín ya conocidos por los alumnos, como los de puntos del infinito, principio de dualidad, razón doble, son ilustrados con material divulgativo que aparece en varios capítulos del libro de E. Colerus [2] y de un artículo de L.Ugarte [6] (en anexos 4 y 5). El libro [2], a pesar de estar escrito a principios del siglo XX, es un libro muy motivador sobre las diversas ramas de la Geometría y puede ser utilizado con provecho como “aperitivo” para introducir a los alumnos en posteriores estudios geométricos.

2.3. Panorámica histórica

Los orígenes de la Geometría Proyectiva y presentación de los matemáticos más destacados en este campo se puede encontrar en el artículo por el Prof. Hernández Peñalver [5] y en varios posters de [1] (en anexos 6 y 7). El artículo [5] presenta la evolución de la Geometría Proyectiva: mencionando la aparición de los primeros conceptos en la antigua Grecia, el deseo de los pintores renacentistas de pintar de manera realista el espacio tridimensional como iniciador de la formalización de algunos problemas de Geometría Proyectiva, y analizando el trabajo de matemáticos antiguos que trabajaron en este campo (Desargues, La Hire, Monge, Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Plücker). En uno de los posters (“Nombres propios de la Geometría Proyectiva”) de [1] se presenta una brevísima reseña del trabajo científico de matemáticos que trabajaron en esta área.

2.4. Cónicas

Material divulgativo sobre cónicas aparece en [4] y un poster (“Las cónicas en la Arquitectura”) en [1] (anexos 8 y 9).

Con este material se trata de motivar a los alumnos para el estudio de la Geometría Proyectiva en 1er ciclo y, en lo posible, entusiasmarlos para que continúen con estudios geométricos más avanzados.

Siguen los anexos mencionados en el texto:

ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

LA GEOMETRÍA EN LEONARDO DA VINCI

ANEXO 1

Leonardo da Vinci
Autorretrato
Turín, Librería real

Mona Lisa
Óleo sobre tabla 77 x 53 cm.
París, Louvre

LEONARDO DA VINCI (1452-1519)

Nació el 15 de abril de 1452 en el pueblo toscano de Vinci. A mediados de la década de 1460 la familia se instaló en Florencia, donde acude a formarse al taller de ANDREA DEL VERROCCHIO, figura principal de su época en el campo de la pintura y escultura, y en 1478 alcanza la maestría. Pinta su primera gran obra, *La anunciación* (Galería de los Uffizi, Florencia), entre 1472 y 1477. Después deja inacabada *La adoración de los Magos* (Uffizi), un encargo de los monjes de San Donato de Scopeto, hacia 1481.

En 1482 LEONARDO entra al servicio de LUDOVICO SFORZA, duque de Milán al que sirve como ingeniero en sus numerosas empresas militares y también como arquitecto. Además ayudó al matemático italiano LUCA PACIOLI en su célebre obra *La divina proporción* (1509).

La obra más importante del periodo milanés son las dos versiones de la *Virgen de la roca* (una de 1483 y otra de la década de 1490). De 1495 a 1497 trabaja en su obra maestra *La última cena*, pintura mural para el refectorio del monasterio de Santa María *delle Grazie*, Milán. Desgraciadamente, su empleo experimental del óleo sobre yeso seco provocó problemas técnicos que condujeron a su rápido deterioro hacia el año 1500. De esta primera etapa milanesa también cabe citar algunos retratos femeninos como el de *La dama del armiño*.

Durante su estancia en Florencia, viaja un año a Roma. En 1502 entra al servicio de CÉSAR BORGIA, hijo del papa ALEJANDRO VI. En su calidad de arquitecto e ingeniero mayor del duque, supervisa las obras en las fortalezas de los territorios papales del centro de Italia. Al final del año 1503 comienza a planificar la decoración del gran salón del Palacio de la Signoria con el tema de *la batalla de Anghiari*, victoria florentina en la guerra contra Pisa. Realiza numerosos dibujos y completa su cartón en 1505, pero nunca realiza la pintura en la pared. Durante su segundo periodo florentino, pinta varios retratos, pero el único que se ha conservado es el de *La Gioconda* (1503-1506).

En 1506 regresa a Milán al servicio del gobernador francés CARLOS II CHAUMONT, mariscal de Amboise. Al año siguiente es nombrado pintor de la corte de LUIS XII de Francia. En Milán continúa sus proyectos de ingeniería y de esta época parece ser la segunda versión de la *Virgen de las rocas* y *Santa Ana, la Virgen y el Niño* (1506-1513). De 1514 a 1516 vive en Roma bajo el mecenazgo de GIULIANO DE MÉDICIS, hermano del papa LEÓN X, ocupado fundamentalmente de experimentos científicos y técnicos. En 1516 se traslada a Francia a la corte de FRANCISCO I. Muere el 2 de mayo de 1519.

Las innovaciones estilísticas de LEONARDO se hacen patentes en *La última cena*. *La Gioconda*, su obra más famosa, sobresale tanto por sus innovaciones técnicas como por el misterio de su legendaria sonrisa. Es un ejemplo consumado de dos técnicas —el **sfumato** y el claroscuro— de las que LEONARDO fue uno de los primeros grandes maestros. Especialmente interesantes en toda su pintura son los fondos de paisaje, en los que introduce la perspectiva aérea. Los numerosos dibujos suyos que poseemos revelan su perfección técnica y su maestría en el estudio de las anatomías humana, de animales y plantas.

Pero además, LEONARDO destaca por encima de sus contemporáneos como científico. Sus teorías se basan en la observación y documentación. En el campo de la anatomía estudia la circulación sanguínea y el funcionamiento del ojo. Realiza descubrimientos en meteorología y geología, conoce el efecto de la luna sobre las mareas, anticipa las concepciones modernas sobre la formación de los continentes y conjetura sobre el origen de las conchas fosilizadas. Por otro lado, es uno de los inventores de la hidráulica y probablemente descubre el hidrómetro; su programa para la canalización de los ríos todavía posee valor práctico. Inventa un gran número de máquinas ingeniosas entre las que destacan sus máquinas voladoras, que, aunque sin aplicación práctica inmediata, establecen algunos principios de la aerodinámica.

Dibujo anatómico
Madrid, Biblioteca Nacional

Mano izquierda de Leonardo

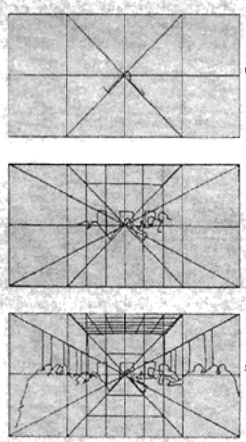
La última cena
Temple sobre pared, 460 x 880 cm.
Milán, Refectorio de Santa María delle Grazie

LEONARDO representa aquí el momento más dramático de la cena, en el que Cristo anuncia a sus discípulos que *uno de vosotros me traicionará*. Los sentimientos que sacuden a los apóstoles después de este anuncio, se plasman en los rostros y en las manos de modo que la personalidad de cada uno de los personajes queda patente. LEONARDO rompe la rigidez de la disposición simétrica de las cenas toscanas del siglo XV eligiendo el instante en que se anuncia la futura traición y representando a los personajes con gestos desordenados y expresiones de angustia.

La composición se halla en el interior de dos cuadrados que componen el rectángulo de la pared, sitúa a los doce apóstoles en sus diagonales en cuatro grupos de tres: dos grupos a la derecha y dos grupos a la izquierda de la figura central.

En el primer grupo, a la izquierda, Bartolomé, Santiago el Menor y Andrés, que hablan entre ellos; en el segundo, Pedro se inclina hacia Cristo, detrás de la figura de Judas que se retrae aferrado a la bolsa de las monedas. En el tercer grupo, a la derecha, Tomás levanta el dedo, al lado de Santiago el Mayor y de Felipe; en el cuarto, finalmente, Mateo y Simón se dirigen gesticulando con las manos a Tadeo, que está en un extremo de la mesa.

La perspectiva real de la sala continúa en la perspectiva de la escena pintada sobre la pared del fondo. El pintor hace coincidir el punto de fuga con el ojo del observador, creando la ilusión de una continuidad entre el espacio real y el espacio imaginario.

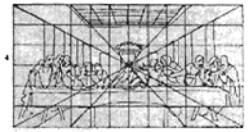


1
2
3

La composición de esta obra se basa rigurosamente en una construcción geométrica. Esta composición de doble cuadrado o proporción de 1 a 2 se llamaba en la época diapasón por tener el mismo significado que este término musical. Hay que recordar que LEONARDO era un apasionado de la música y hablaba frecuentemente de la sutileza de las relaciones del arte de los sonidos con la pintura. En los croquis se ilustran las diferentes fases.

1. LEONARDO coloca un cuadrado junto a dos medios cuadrados, luego traza las diagonales del cuadrado central.
2. Traza las diagonales del rectángulo mayor y divide en seis partes iguales el cuadrado central.
3. Uniendo de dos en dos los puntos de encuentro de las diagonales y las verticales que dividen el cuadrado central obtiene dos nuevos cuadrados que se inscriben el uno en el otro en el centro; el más pequeño alberga la figura de Cristo rodeado por las ventanas y el borde de la mesa, alrededor, el cuadrado intermedio delimita la pared del fondo y los lados de los dos cuadrados grandes marcan la posición de los paños de la pared lateral. Si trazáramos el círculo sugerido por el frontón de la ventana obtendríamos una vasta aureola en torno a la cabeza de Cristo.
4. Dividiendo en tres partes la mitad inferior del lado más corto del rectángulo y trazando dos rectas paralelas, LEONARDO delimita la superficie de la mesa. Finalmente, las figuras de los apóstoles están dispuestas, de tres en tres, en cada uno de los cuartos de la escena. Observamos además que las diagonales del rectángulo dan la perspectiva de las partes superiores de los paneles laterales, perspectiva que confluye en la cabeza de Cristo.

4

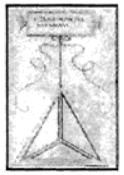


La anunciación
Óleo sobre tela, 98 x 217 cm.
Florencia, Galería de los Uffizi

Obra de juventud para el convento de San Bartolomeo, recoge ya buena parte de las características posteriores de su pintura. Asocia los colores según una teoría que más tarde expondrá en su *Tratado sobre la pintura*, se deja guiar por la relación que existe entre los colores fundamentales y complementarios.

La composición del cuadro se encuentra dentro de la tradición iconográfica de las anunciaciones, con el ángel que aparece a la izquierda y la Virgen que recibe el mensaje situada a la derecha.

La rigurosa formación científica de LEONARDO influye en la composición de sus pinturas; aquí divide el rectángulo del cuadro en cinco partes: en las dos primeras, inscribe el triángulo de la figura del ángel; en las dos últimas, el de la Virgen. En el centro, el rectángulo del cielo y de las montañas.



Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
2002

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM

ANEXO 2

LA PERSPECTIVA LINEAL

Para pintar una superficie, lo primero hago un cuadro o rectángulo del tamaño que me parece, el cual me sirve como una ventana abierta, por la que se ha de ver la historia que voy a expresar, y allí determino la estatura de las figuras que he de poner, cuya longitud la divido en tres partes. Estas partes para mí son proporcionales a aquella medida que comúnmente llaman braza (48 cm. aproximadamente); pues según se advierte en la proporción del hombre, su regular longitud es de tres brazas. Con esta medida divido la línea que sirve de base al rectángulo, y anoto las veces que entra en ella.

Hecho esto, señalo un punto adonde se ha de dirigir principalmente la vista, dentro del rectángulo, [...] le llamo punto del centro. Este punto se colocará en paraje conveniente, no más alto que la altura que se señala a las figuras en aquel cuadro. Señalado el punto del centro, tiro rectas desde todas las divisiones de la línea de la base a él, las cuales me demuestran el modo con que van disminuyendo las cantidades.

Leone Battista Alberti. Della pictura. 1435

Alberto Durero (1471-1528), presentado con frecuencia como la encarnación alemana de las ideas del Renacimiento, diseñó varias de estas máquinas e ilustra en varios de sus grabados este principio de proyección y sección (ver la figura 3).

FIGURA 3: Velo de Alberti. Grabado de Durero.

Alberti da un concepto preciso de proporcionalidad, que determina el tamaño aparente de un objeto en la pintura en relación a su tamaño real y la distancia entre su posición y el ojo del observador.

ANEXO 3

Fig. 7.26 Guidobaldo del Monte, *Six books on perspective* (Pesaro, 1600), title-page, showing points of concurrence for the images of four sets of parallel lines.

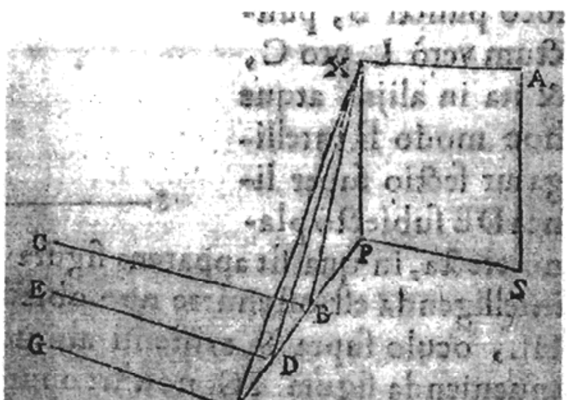


Fig. 7.27 Guidobaldo del Monte, *Six books on perspective* (Pesaro, 1600), p. 54, diagram to illustrate Book 2, Proposition 1. The eye is at *A*, and we are given three lines *BC*, *DE*, *FG* in the subject plane, parallel to one another but not parallel to the line of section (*FP*). Their images meet at the point *X*.

CAPÍTULO IX

El principio de dualidad

Volvamos a desplazarnos mentalmente hasta el año 1812 y Saratow del Volga. Nuestro ya conocido oficial de Ingenieros, Poncelet, se hallaba en este Saratow, como prisionero de guerra, en la más espantosa de las miserias. Era aquel invierno que derrotó al gran Napoleón, extremadamente duro para los mismos rusos; invierno en el cual, según testimonio de Poncelet, llegó a helarse el mercurio de los termómetros. Todas estas fatigas hicieron enfermar gravemente a Poncelet, pero afortunadamente su ánimo permaneció inquebrantable. Y de los pocos kopeks de que disponía para su manutención, supo ahorrar lo suficiente para comprar papel barato, mientras que la tinta se la fabricaba él mismo, probablemente con hollín de la estufa. Con estos medios extraordinariamente mezquinos trabajó y descubrió, como ya hemos indicado en otro lugar, la Geometría proyectiva, y dentro de esta Geometría una ley o principio que, tanto por su sencillez como por su fecundidad, resiste la comparación con cualquier otro principio básico de las Matemáticas. Fué publicado por Poncelet en el año 1822, e independientemente de él, por Gergonne, en 1826, y se conoce con el nombre de principio o ley de la dualidad o principio de la reciprocidad. Principio que podríamos llamar asimismo «ley de las relaciones recíprocas», o «ley de la correlación», o «principio de la bilateralidad», u otro nombre por el estilo.

De acuerdo con nuestro método habitual empezaremos por examinar un caso sencillo que nos iniciará inmediatamente en dos de los más importantes teoremas de la Geometría. Pero antes, una observación preliminar: hemos hablado ya de proyección y de sección, y tratado de explicar el primero de estos conceptos. Añadiremos ahora que, desde el punto de vista puramente gráfico o de dibujo, se entiende, en rigor, por proyección, una «unión» mediante rectas — llamadas proyectantes — de acuerdo con determinadas reglas; interpretándose, por lo tanto, la palabra proyección de un modo dinámico, o sea como la acción de proyectar. Pues bien, en el fondo, el principio de dualidad no se basa más que en la duplicidad natural — que ya conocemos — del proceso proyectivo. La permutación de los conceptos de sección y proyección, origina una especie de conexión, bilateralidad, reciprocidad o dualidad. Estudiémosla en uno de los casos más sencillos (fig. 20).

La serie rectilínea s, con los puntos A, B, C, D, aparece en la figura como «sección» del haz de rectas S compuesto de las rectas a, b, c, d, que determinan los puntos sobre la recta s. Pero podríamos decir también y con el mismo derecho, que el haz de rectas es la «proyección» de la alineación o sea que al permutar nosotros los conceptos de sección y proyección se permutan automáticamente los de alineación y haz de rectas. Como este ejemplo no nos da siquiera una pequeña muestra de la verdadera grandiosidad del principio de dualidad, expondremos otro mucho más interesante y fecundo en consecuencias que ocupa un lugar distinguido en la historia de la Geometría. En 1640, el gran matemático Blas Pascal publicó, a la edad de 16 años, su célebre « teorema del exágono » sobre las secciones cónicas, del que vamos a examinar uno de sus casos particulares. Si Pascal hubiese conocido el principio de dualidad habría podido deducir inmediatamente el teorema dual. Pero por no ser así, tuvieron que pasar 166 años hasta que este teorema dual, el teorema de Brianchon, fuese descubierto en 1806.

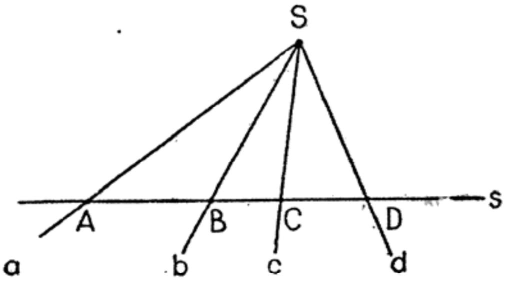


FIG. 20

Supongamos que tenemos dos rectas que se cortan (figura 21) — y por lo dicho sobre el punto del infinito las rectas paralelas se cortan también — y sean éstas g y g_1. En la recta g están situados tres puntos completamente arbitrarios A, B, C, y en la g_1 otros tres A_1, B_1, C_1, arbitrarios también. « Unamos » ahora A con B_1 y A_1 con B, y prolonguemos estas rectas hasta que se corten : obtendremos el punto C_s. Uniendo luego B con C_1 y B_1 con C obtendremos el punto A_s, y haciendo lo mismo con C y A_1 y C_1 y A resultará por ejemplo, la longitud de un segmento, el área o la medida de un ángulo, por lo que el paralelismo de rectas no se conserva. Sin embargo, una línea recta seguirá siéndolo en (casi) todas las secciones de cualquier proyección, por lo que un punto que no pertenece a una recta dada se transformará al proyectar y seccionar en un punto que no pertenece a la recta transformada. Estas consideraciones, aunque triviales, sugieren que la respuesta a las cuestiones arriba planteadas no parece incumbir a la geometría euclídea ordinaria, sino que en esta "geometría" los elementos fundamentales parecen ser los de punto y recta, y la relación de incidencia (o pertenencia), y que no tienen cabida nociones como la distancia. Sin embargo, para estudiar las propiedades invariantes por proyección y sección se utilizó en un principio la geometría euclídea, pues era la única conocida en la época de Desargues.

Una importante innovación en geometría fue la adición de ciertos elementos ideales al espacio euclídeo, elementos que ahora conocemos como puntos del infinito, recta del infinito, etc... La introducción de la noción de punto en el infinito asociado a rectas paralelas se atribuye generalmente a Johann Kepler (1571-1630), aunque fue Desargues quien utilizó sistemáticamente esta idea en su tratado de secciones cónicas de 1639. Alberti ya había observado que dos rectas paralelas en una escena real deben dibujarse de manera que se corten en un punto, salvo que el lienzo sea también paralelo a dichas rectas. Por ello, las baldosas cuadradas del suelo no se ven como cuadrados en el lienzo. En la escena representada en la Figura 2 se pueden adivinar también rectas que convergen a un punto principal, o del infinito, y que en la realidad son rectas paralelas.

Veamos cómo surge la necesidad natural de añadir puntos del infinito al plano usual. Las rectas $A'C'$ y $B'D'$ de la Figura 3, que corresponden a los segmentos paralelos AC y BD, deben cortarse en algún punto I' del plano Π' que contiene al lienzo (suponemos éste no paralelo a AC). En efecto, el punto O y la recta AC determinan un plano Π_1, y el punto O y la recta BD determinan otro plano Π_2. Ambos planos cortan a Π' en las rectas $A'C'$ y $B'D'$, respectivamente, y la intersección de los tres planos determina el punto

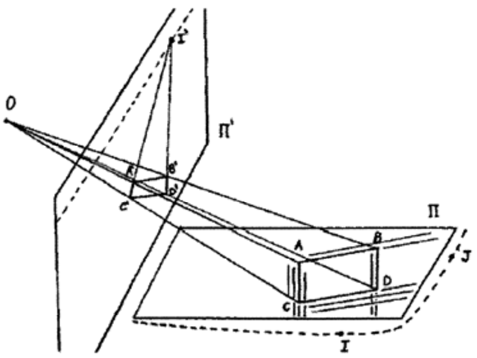


Figura 3

I'. Ahora bien, el punto I' no corresponde a ningún punto ordinario del plano Π que contiene a las rectas AC y BD, pues la recta OI' es de hecho paralela a Π. Para completar la correspondencia entre los puntos de las rectas $A'C'$ y AC, y entre los puntos de $B'D'$ y BD, Desargues añadió un *punto ideal* o *punto en el infinito* I a las rectas paralelas AC y BD. Así las rectas paralelas AC y BD se cortan en el punto I.

Supongamos ahora que BD es una recta variable contenida en el plano Π y paralela a AC. Es fácil ver que el punto de corte de las rectas $A'C'$ y $B'D'$ correspondientes es también I', por lo que la recta BD debe contener el mismo punto ideal I que AC. Es decir, la colección de rectas paralelas a una recta dada tiene asociado un mismo punto ideal. Como existe un número infinito de colecciones de rectas paralelas, cabe considerar una infinidad de puntos ideales añadidos al plano euclídeo. Además, la colección de todos los puntos I' correspondientes a puntos del infinito I es precisamente la recta obtenida al cortar Π' con el plano paralelo a Π que pasa por O, por lo que Desargues hizo la hipótesis adicional de que los puntos del infinito yacen todos ellos en la llamada *recta del infinito*. Se obtiene así un plano ampliado al añadir esta nueva recta a las ya existentes.

La principal ventaja al trabajar en el plano ampliado es que podemos dar a los teoremas un enunciado "universal", eliminando las distinciones que se establecen en la geometría euclídea. Por ejemplo, ahora dos rectas distintas cualesquiera se cortan exactamente en un punto, y dos puntos distintos cualesquiera siguen determinando una y sólo una recta.

Este plano ampliado constituirá nuestro modelo intuitivo de plano proyectivo, en el cual la recta del infinito no se distingue de las ordinarias. Aparentemente la incorporación de la recta del infinito y el uso de las convenciones anteriores no parece conducir a ninguna contradicción. Abordaremos este asunto en la última sección.

3. En busca de un invariante proyectivo: la razón doble

Como el objetivo de la geometría proyectiva es el estudio de propiedades que se mantienen invariantes por proyecciones y secciones, resulta natural preguntarse si dados k puntos alineados puede definirse un invariante proyectivo asociado a ellos. Veamos primero que k debe ser mayor o igual que cuatro, es decir, no puede existir un tal invariante para pares ni para ternas de puntos alineados.

Sean A, B, C tres puntos cualesquiera de una recta p y A', B', C' otros tres puntos cualesquiera de otra recta p'. Llamando $O = AA' \cap BB'$ al punto de intersección de las rectas AA' y BB', es claro que por proyección desde O el par A, B se transforma en el par A', B'. Por otro lado, para transformar A, B, C en la terna A', B', C' necesitamos usar en general dos proyecciones. En efecto, elegimos primero dos puntos distintos cualesquiera O_1 y O_2 sobre la recta AA', y consideramos los puntos de intersección $B_1 = BO_1 \cap B'O_2$ y $C_1 = CO_1 \cap C'O_2$. Entonces llamando q a la recta B_1C_1, la terna A, B, C se transformará en A', B', C' por la proyección de p sobre q desde O_1 seguida de la proyección de q sobre p' desde O_2.

Sin embargo, si se consideran dos cuaternas de puntos alineados entonces ya no es posible llevar en general una sobre otra por proyecciones y secciones sucesivas. El motivo es que existe un invariante proyectivo asociado a cuatro puntos alineados, que recibe el nombre de *razón doble* (también llamado *razón cruzada* o *relación anarmónica*).

El concepto de razón doble tiene su origen en los griegos, quienes investigaron muchas de sus propiedades. Desargues demostró en el apéndice de la obra de Bosse de 1648 que esta razón es invariante por proyección y sección, aunque incluso Pappus conocía ya ciertos resultados al respecto. Este concepto recibió un nuevo impulso a principios del siglo XIX, con la noción de magnitud con sentido introducida por Lazare Nicholas-Marguerite Carnot (1753–1823) en su *Geometría de la posición* de 1803, y por August Ferdinand Möbius (1790–1868) en su obra *Der barycentriche calcul* de 1827, lo que dio lugar a una notación más cómoda y eficaz. El tratamiento moderno de la razón doble se debe principalmente a las obras de Möbius y de Chasles. Un estudio de esta noción exento de consideraciones métricas fue desarrollado por von Staudt.

Consideremos una recta "orientada", es decir, una recta en la que hemos elegido un sentido como el positivo. Dados dos puntos ordinarios A y B, indicaremos por $\overline{AB}$ la distancia con su signo o sentido del punto A al punto B. Así por ejemplo $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

La expresión "razón doble" proviene del hecho de que esta cantidad va a estar definida como un cociente o razón de *razones simples*, concepto que introducimos a continuación. Dado un segmento ordinario AB y un punto ordinario P, distinto de B, alineado con A y B, llamaremos *razón simple* o *razón en la que el punto P divide al segmento AB* al cociente $(AB, P) = \overline{AP}/\overline{PB}$. Es claro que este cociente no depende de la orientación asignada a la recta AB.

5. Desarrollo de la geometría proyectiva sintética

Poncelet fue quien sentó las bases para el desarrollo sintético de la geometría proyectiva. Este desarrollo se realizó fundamentalmente en Francia y Alemania. Entre los franceses mencionaremos tan sólo a Michel Chasles (1793-1880), pues las ideas de Poncelet tuvieron más acogida fuera de Francia que en ella.

5.1. CHASLES

Chasles no tenía conocimiento de lo que, por los mismos años, obtenían los geómetras alemanes, por lo que muchas de sus nuevas ideas no lo eran en realidad.

La mayor contribución de Chasles a la geometría proyectiva fue el reconocimiento de la *razón doble* de cuatro puntos alineados, cuatro rectas concurrentes, o cuatro planos coaxiales, como uno de los pilares fundamentales. Chasles encontró este concepto de razón doble, que él llamó *razón anharmónica,* en su intento de reconstrucción del libro de los *Porismas de Euclides* a partir de las obras de Pappus. Había sido usado por Desargues, pero Chasles sólo tenía la referencia de lo que había escrito La Hire. En aquellos años lo usaban ya Möbius y Steiner, pero el desconocimiento del alemán impedía a Chasles enterarse de lo que se estudiaba al otro lado del Rin.

Chasles trata las seis razones dobles de cuatro elementos de una de las formas ya descritas, lo que le permite estudiar las involuciones de puntos alineados o de rectas concurrentes.

El mejor resultado que obtiene Chasles con relación a la razón doble es el siguiente de 1828:

«Dadas dos rectas en correspondencia biyectiva que conserva la razón doble, las rectas que unen puntos correspondientes son tangentes a una cónica.»

La propiedad dual de ésta se convertirá en manos de Steiner en el punto de partida del estudio de las cónicas sin salir del plano.

La segunda idea fundamental de Chasles es el estudio de las homografías. Como tales entiende las transformaciones del plano en sí mismo o en otro plano que llevan puntos a puntos, rectas a rectas y que conservan la razón doble. La proyección central y la homología de Poincaré son casos particulares de homografías. También introduce el término correlación para designar la transformación que lleva puntos a rectas y rectas a puntos.

En cuanto a la labor histórica de Chasles, su obra principal fue publicada en 1837, bajo el título de *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Geometrie*. Es una obra muy parcial respecto a la aportación de los franceses a la geometría, y su desconocimiento del alemán no es excusa para olvidar todas las aportaciones en lengua alemana en el campo de la geometría.

5.2. Steiner

El primer geómetra de la escuela alemana que siguió los pasos de Poncelet en el estudio de la geometría sintética proyectiva fue Jacob Steiner (1796-1863).

Steiner era hijo de un granjero suizo y en sus años de juventud fue profesor en la escuela de Pestalozzi donde se concedía gran importancia a la intuición geométrica. Cuando más tarde llegó a profesor en Berlín llevó los métodos de Pestalozzi de la escuela elemental al límite, enseñando geometría sin figuras y apagando la luz en sus clases de doctorado.

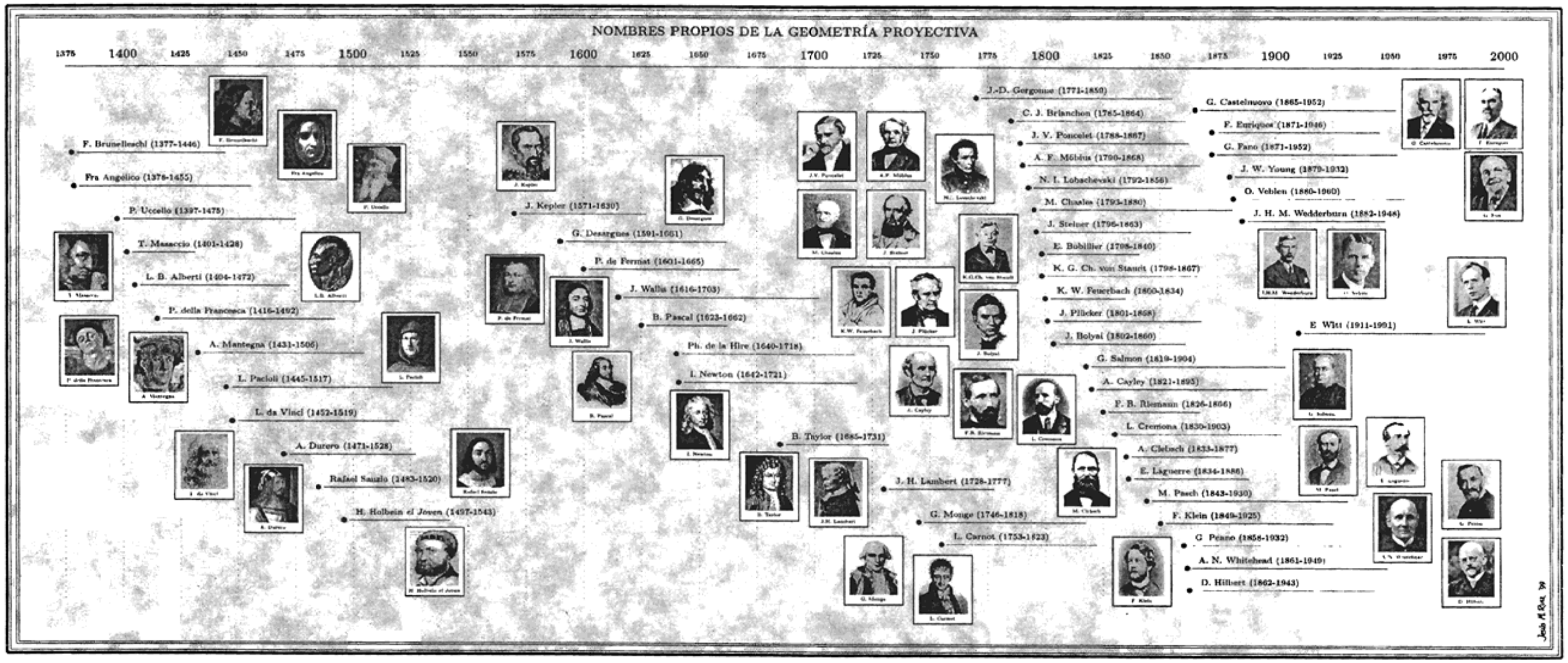
En sus últimos años, para conservar su bien ganada reputación de productividad, se dedicó a tomar teoremas y demostraciones de artículos publicados en inglés y republicarlos bajo su nombre sin indicar que no eran originales suyos.

La obra principal de Steiner es *Systematische Entwicklung der Abhangigkeit geometrischen Gestalten von einander* (1832) *(Desarrollo sistemático de la dependencia de las formas geométricas una de otra).*

La obra de Steiner es un trabajo sistemático en el que a partir de las llamadas formas fundamentales obtiene las estructuras más complicadas utilizando conceptos proyectivos. Las formas fundamentales son: puntos, rectas, haces de rectas, planos y haces de planos.

Designa con el nombre de «proyectiva» la relación entre las formas fundamentales de dimensión uno: puntos colineales, haces de rectas y haces de planos, pero no define claramente qué entiende por proyectividad. Parece que una proyectividad es, para Steiner, una biyección que conserva la razón doble. Ahora bien, como toma las distancias positivas necesita añadir una ordenación para evitar ambigüedades.

Prueba que una proyectividad entre formas de dimensión uno está determinada cuando se conocen tres pares de elementos correspondientes, aunque la demostración no es totalmente concluyente.



Las primeras ideas de Geometría Proyectiva aparecieron en la actividad práctica de artistas y arquitectos del Renacimiento. Los pintores **Fra Angelico** y **Paolo Uccello** se valieron de la *perspectiva* para crear impresión de profundidad. La necesidad de una base matemática para su trabajo era clara [illegible] artistas de la época y la elaboró el arquitecto **Filippo Brunelleschi**. Después **Tommaso Masaccio** y **Andrea Mantegna** la aplicaron [illegible] para la pintura. **Piero della Francesca**, **Leone Battista Alberti** y **Alberto Durero** reflexionaron sobre las nociones de proyección y sección en su afán de entender el problema de la representación plana de un objeto tridimensional. **Hans Holbein el Joven** muestra [illegible] el fenómeno de la *anamorfosis* [illegible] por **Leonardo da Vinci**. El primer matemático que hizo uso de estas ideas fue el francés **Girard Desargues**.

1639

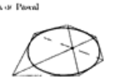
Desargues, arquitecto e ingeniero militar de Lyon, publica en París su *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (Primer borrador sobre los resultados de intersecar un cono con un plano). A pesar de lo [illegible] del lenguaje en este tratado se ofrece un tratamiento [illegible] original de las cónicas. Aquí aparece por primera vez el término *involución*. Los métodos proyectivos permiten a Desargues un tratamiento general y unificado de las cónicas, en contraposición con los métodos clásicos de **Apolonio**. El libro se perdió y sólo se encontró una copia en 1847 en una librería de París.

1640

Blaise Pascal publica a los 16 años su *Essai pour les coniques*. Aquí aparece su *mysterium hexagrammicum*, [illegible] de Pascal, según el cual *los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica se cortan en tres puntos alineados*. Para dar plena validez a este teorema hay que recurrir a los puntos de infinito del plano.

1806

Después de un largo periodo de [illegible] el estudio de la Geometría Proyectiva renace en la École Polytechnique de París en torno a la figura de **Gaspard Monge**. Un discípulo suyo, **Julien Brianchon**, demuestra a los 21 años el teorema que lleva su nombre: *En un hexágono circunscrito a una cónica las tres diagonales se encuentran en un punto*. Este teorema es el primer caso de *dualidad* en Geometría Proyectiva, es dual del teorema de Pascal.



1822

Jean-Victor Poncelet publica su *Traité des propriétés projectives des figures*. Aquí se recogen, en parte, las reflexiones de estos cinco primeros de guerra en Rusia [illegible] Poncelet [illegible] de los métodos analíticos. Su trabajo se concentra en el estudio de las figuras homólogas, que son las que se derivan una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones. Su objetivo era encontrar, para cada figura, otra homóloga más simple que ella cuyas propiedades deduzca propiedades de la primera. Sus tres aportaciones principales son:

1. El principio de continuidad o permanencia de las relaciones matemáticas.
2. La formulación del principio de dualidad, que trajo una amarga polémica de prioridad con **Joseph-Diez Gergonne**.
3. El descubrimiento de los denominados *puntos circulares del infinito*, por los que pasan todos los círculos del plano.

Jacob Steiner, uno de los grandes [illegible] de los métodos sintéticos y un [illegible] de los métodos [illegible] de la Geometría [illegible] figuras y [illegible] Fue el introductor [illegible] método de definir cónicas a partir de homografías entre haces de rectas. Usó sistemáticamente la razón doble y el principio de dualidad, pero se negó a admitir elementos imaginarios [illegible] de la Geometría.

Michel Chasles descubre independientemente algunos de los resultados de Steiner. Fue practicante del llamado *método mixto*, presenta sus resultados analíticamente y los prueba sintéticamente. Chasles introduce el término *homografía* y define las *correlaciones*. Uno de sus resultados más conocidos asegura que *cuatro puntos fijos de una cónica determinan con un quinto punto de la misma cuatro rectas cuya razón doble no depende de ese último punto*.

1829

Julius Plücker enuncia rigurosamente el principio de dualidad. Plücker abogaba por el uso de los métodos algebraicos en detrimento de los sintéticos. Fue uno de los inventores de las coordenadas homogéneas (descubiertas también por **Karl Wilhelm Feuerbach**, **Étienne Bobillier** y **August Ferdinand Möbius**). Estas coordenadas fueron un instrumento muy adecuado para tratar nociones relacionadas con los puntos de infinito. Sin embargo, la influencia de Steiner, que rechazaba los métodos analíticos, llevó a Plücker a abandonar la Geometría y dedicarse a la Física.

Möbius se ganó la vida como astrónomo. Utilizó coordenadas para representar las curvas y superficies mediante ecuaciones homogéneas [illegible]. Möbius distinguió cuidadosamente entre los distintos tipos de transformaciones de un plano. Las *congruencias* cuando las figuras que se corresponden son iguales, es decir, se conservan longitudes y ángulos. Las *semejanzas* cuando las figuras que se corresponden son semejantes, es decir, se conservan ángulos. Las *afinidades* cuando se conserva el paralelismo pero no necesariamente la longitud ni la forma, y las *colineaciones* cuando las rectas se transforman en rectas. Möbius probó que toda *colineación del plano proyectivo real es una homografía*.

1847

Karl Georg Christian von Staudt publica su obra *Geometrie der Lage* [illegible] en la que, tomando por primera vez la Geometría Proyectiva sin referencia a conceptos métricos [illegible] De este modo la Geometría Proyectiva se establece como una geometría que engloba la Geometría Euclídea. El libro de von Staudt [illegible] de los puntos [illegible] Posteriormente **Felix Klein** resuelve esta dificultad.

1853

Edmond Laguerre [illegible] **Arthur Cayley** [illegible]

1872

[illegible] Programa de Erlangen [illegible]

1882

Moritz Pasch [illegible] **Giuseppe Peano**, **Federigo Enriques**, **Alfred North Whitehead** [illegible] **Oswald Veblen** y **John Wesley Young** [illegible]

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas 2002

Las palabras secciones cónicas definen con propiedad el objeto que representan, son los distintos cortes que se pueden obtener al intersecar en el espacio un plano con un cono.

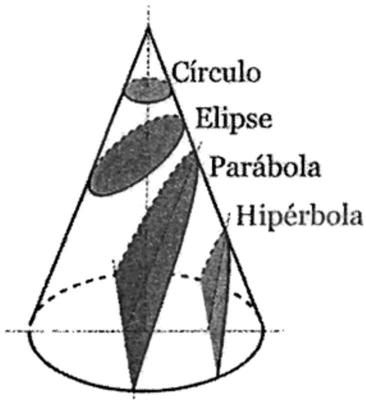


FIGURA 25: Secciones cónicas

Según Kepler en *Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur (1604)* hay cinco tipos de secciones cónicas, desde el par de rectas secantes *(recta linea)* hasta la circunferencia. Desde las primeras, a través de una familia infinita de hipérbolas se pasa a la parábola y desde aquí, a través de una familia infinita de elipses, a la circunferencia. Kepler ilustra así el principio de continuidad para cónicas.

En relación con las secciones hay algunos puntos notables a los que Kepler llama *foci*, focos.

Siguiendo el principio de continuidad, Kepler asumió que todas las secciones cónicas tienen dos focos. La distancia entre los focos es mayor que cero pero finita para elipses e hipérbolas. En el caso de la circunferencia se puede pensar que los focos coinciden en el centro. La parábola tiene un foco "dentro". El segundo foco, llamado por Kepler *caecus focus* (foco ciego), se puede visualizar situándolo a una distancia infinita del primer foco en el eje de la parábola. Esto se traduce en que cualquier recta que sea paralela al eje pasa por este foco ciego.

Las cónicas poseen curiosas e interesantes propiedades por las que resultan sumamente útiles en la naturaleza (planetas y cometas describen cónicas), la ciencia (propiedades de reflexión usadas en óptica), la ingeniería (antenas parabólicas, puentes, centrales eléctricas termosolares) o el arte (presentes en las obras de *Miguel Fisac (1913-2006)* y *Antonio Gaudí (1852-1926)*).

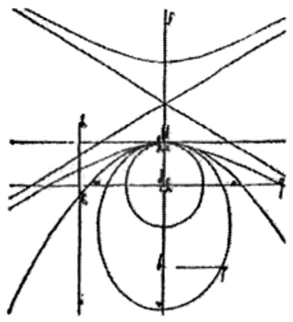


FIGURA 26: Sistema de cónicas de Kepler

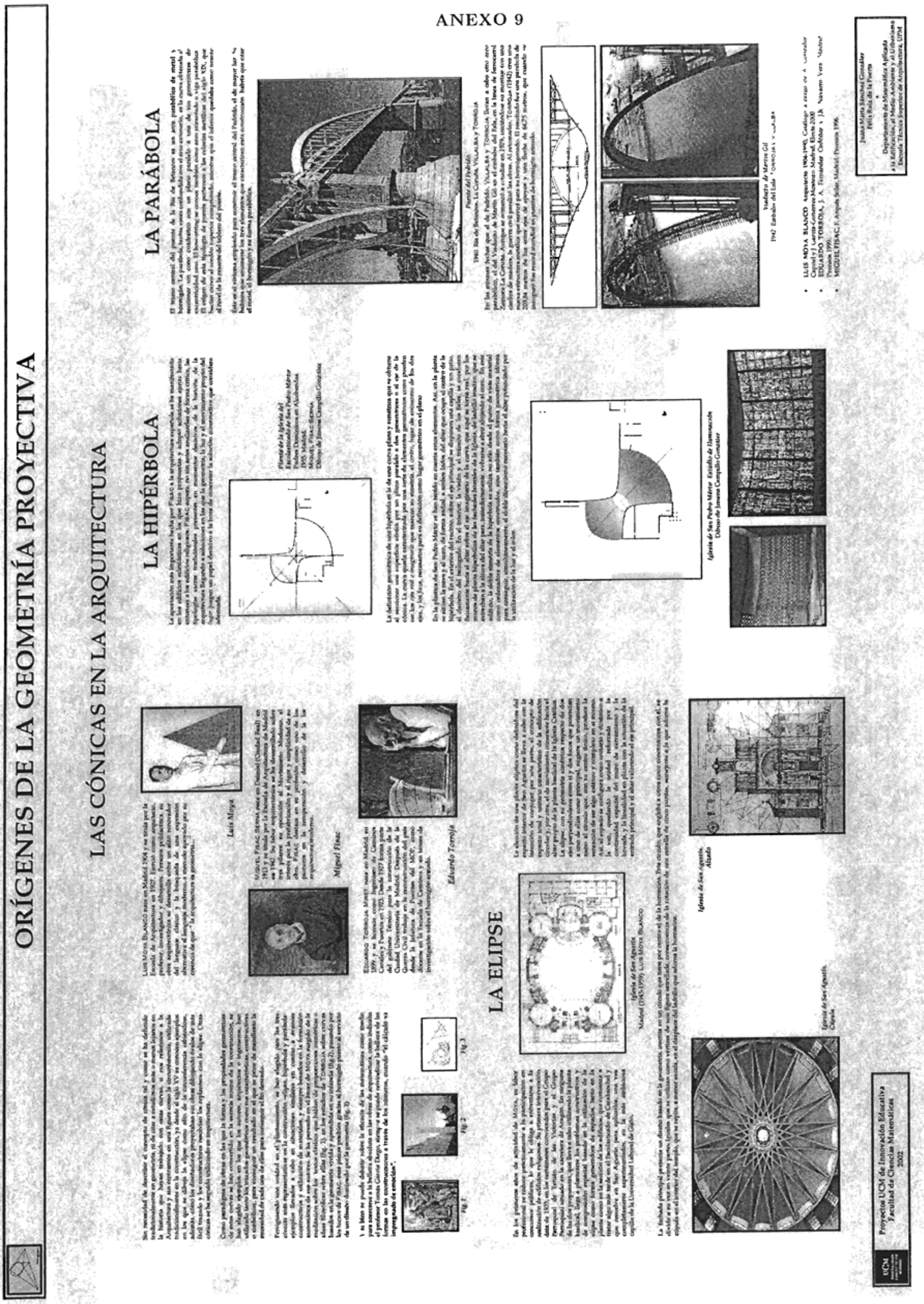
Quizás unas de las más interesantes y útiles que descubrió Apolonio son las llamadas propiedades de reflexión, utilizadas por ejemplo en Óptica. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira, y se obtienen las distintas cuádricas de revolución. Apolonio demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco.

Si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco. Esta propiedad permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el sol. Estos espejos son los denominados espejos ardientes por Euclides, que ya conocía su existencia.

Existe la leyenda de que *Arquímedes (287-212 a.C.)* logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos.

Esta propiedad de los espejos parabólicos es también utilizada en Óptica. Los telescopios más conocidos, y también los más utilizados desde hace siglos, son los telescopios ópticos. Éstos pueden ser de dos tipos dependiendo del sistema óptico empleado, refractores y reflectores.

ANEXO 9


ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA
LAS CÓNICAS EN LA ARQUITECTURA
Luis Moya
Miguel Fisac
Eduardo Torroja
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
LA ELIPSE
Iglesia de San Agustín
Madrid (1945-1959) LUIS MOYA BLANCO
Iglesia de San Agustín. Alzado
Iglesia de San Agustín. Cúpula
LA HIPÉRBOLA
Planta de la Iglesia del Escolasticado de San Pedro Mártir
Padres Dominicos en Alcobendas
1955. Madrid.
MIGUEL FISAC SERNA
Dibujo de Jimena Campillo González
Iglesia de San Pedro Mártir. Estudio de Iluminación
Dibujo de Jimena Campillo González
LA PARÁBOLA
Puente del Pedrido.
1940. Ría de Betanzos. La Coruña. VILLALBA y TORROJA
Viaducto de Martín Gil
1942. Embalse del Esla. TORROJA Y VILLALBA
Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
2002
Juana María Sánchez González
Félix Ruiz de la Puerta
Departamento de Matemática Aplicada a la Edificación, al Medio Ambiente y al Urbanismo
Escuela Técnica Superior de Arquitectura, UPM

3. Referencias bibliográficas

[1] ALONSO, M.E, del AMO, M.C. , MALLAVIBARRENA,R., PINTO, I., RUIZ, J.M.: "Orígenes de la Geometría Proyectiva", Proyectos UCM de Innovación Educativa, Facultad de Ciencias Matemáticas, 2002, **http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html#digi**

[2] COLERUS, E.: *Desde el punto a la cuarta dimensión: Una Geometría para todos,* Traducido por SOLER CARRERAS, David. Barcelona: Ed. Labor, 1948. Traducción de *Vom Punkt zur vierten dimension: Geometrie für Jedermann*

[3] FIELD, J.V.: *The invention of infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford: Oxford University Press,1997

[4] GÜELMES ALZAGA, M.B.: "Arte, perspectiva y Geometría. Amanecer de la Geometría Proyectiva", en VILLA CARO, R. (et al.): *Prisma. Un paseo entre las Matemáticas y la realidad,* Sevilla: Ed. Universidad de Sevilla, 2010, pp. 145-179

[5] HERNÁNDEZ PEÑALVER, G.: "Los orígenes de la Geometría Proyectiva", en *Seminario de Historia de la Matemática I,* Madrid: Universidad Complutense,1991, pp.13-57.

[6] UGARTE, L.: "Geometría Proyectiva plana", en Divulgamat (2001-2002), pp. 91-114.