

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT17

Estudio de la dispersión mesón-mesón y de las propiedades y naturaleza de las resonancias hadrónicas más ligeras

Study of meson-meson scattering and of the properties and nature of the lightest hadronic resonances

Supervisor/es: Jacobo Ruiz de Elvira Carrascal

Alba Pinilla San Bruno

Grado en Física

Curso académico 2024-25

Convocatoria Junio

Calificación: 9.6

Resumen:

Este trabajo estudia la dispersión de piones —los mesones más ligeros— en el régimen de bajas energías de la interacción fuerte. Dado que en este dominio la teoría fundamental, la Cromodinámica Cuántica (QCD), no puede desarrollarse de forma perturbativa, se recurre a herramientas efectivas basadas en simetrías fundamentales como la simetría quiral, la unitariedad y la analiticidad.

En particular, se hace uso de la teoría de perturbaciones quiral (ChPT) para describir la interacción entre piones a orden árbol y un loop, y se aplica el método de la amplitud inversa (IAM) como técnica de unitarización no perturbativa. Esto permite extender la validez de ChPT e identificar resonancias hadrónicas como polos en el plano complejo de energía.

El estudio está centrado en caracterizar las propiedades y la naturaleza de las resonancias hadrónicas más ligeras —la $\rho(770)$ y la $\sigma/f_0(500)$ — mediante el análisis de la dispersión pión-pión. A su vez, se estudia su dependencia con la masa del pión, con el objetivo de conectar los resultados teóricos con simulaciones de *lattice* QCD y observaciones experimentales.

Abstract:

This work studies the scattering of pions —the lightest mesons— in the low-energy regime of the strong interaction. Since in this domain the fundamental theory, Quantum Chromodynamics (QCD), cannot be developed perturbatively, effective tools based on fundamental symmetries such as chiral symmetry, unitarity, and analyticity are used.

In particular, chiral perturbation theory (ChPT) is used to describe pion interactions at tree level and one-loop order, and the inverse amplitude method (IAM) is considered as a non-perturbative unitarization technique. This allows one to extend the validity of ChPT and to identify hadronic resonances as poles in the complex energy plane.

The study is focused on characterising the properties and nature of the lightest hadronic resonances —the $\rho(770)$ and the $\sigma/f_0(500)$ — by analysing pion-pion scattering. Moreover, their dependence on the pion mass is studied, with the aim of connecting the theoretical results with QCD simulations.

Índice

1. Introducción	2
2. Fundamentos teóricos de QCD a bajas energías	3
2.1. Simetría Quiral	3
2.2. Ruptura espontánea de la simetría y Teorema de Goldstone	3
2.3. Teoría de perturbaciones quiral	4
3. Dispersión pión-pión	5
3.1. Amplitud de dispersión, unitariedad y variables de Mandelstam	5
3.2. Simetría de cruce y amplitudes pión-pión	6
3.3. Expansión en ondas parciales	7
3.4. Dispersión de piones en ChPT a nivel árbol	8
3.5. Dispersión de piones en ChPT a un loop	9
4. Métodos no perturbativos en teorías efectivas	10
4.1. Relaciones de dispersión	10
4.2. Calculando la parte imaginaria de la amplitud: Reglas de Cutkosky	12
4.3. Unitarización: el método de la amplitud inversa	13
4.3.1. Unitariedad perturbativa en ChPT	13
4.3.2. Método de la Amplitud Inversa (IAM)	14
5. Propiedades y naturaleza de las resonancias hadrónicas ligeras	15
5.1. Aparición de polos y análisis en la segunda hoja de Riemann	15
5.2. Dependencias con la masa del pión	17
6. Conclusiones	19

1. Introducción

Los hadrones son estados compuestos formados por quarks, los cuales están ligados entre sí mediante la interacción fuerte, que está mediada por gluones [1]. Esta interacción, descrita por la Cromodinámica Cuántica (QCD) —una teoría gauge no abeliana con simetría de grupo $SU(N_c)$, donde $N_c=3$ es el número de colores— presenta dos rasgos fundamentales: la libertad asintótica —a altas energías (o distancias $\lesssim 0.1$ fm) la constante de acoplo de QCD decrece, de modo que los quarks se comportan como partículas prácticamente libres— y el confinamiento del color —a distancias $\gtrsim 1$ fm los quarks no pueden aparecer aisladamente, sino que permanecen siempre ligados formando estados hadrónicos.

Aunque todavía no existe una demostración rigurosa de que QCD implique confinamiento, numerosos estudios no perturbativos respaldan fuertemente esta propiedad [2]. Por el contrario, la libertad asintótica sí es una consecuencia probada de QCD [3, 4], y fue una de las razones fundamentales para aceptar esta teoría como la descripción correcta de la interacción fuerte.

Los hadrones se clasifican en dos familias según su espín: los bariones, con espín semientero, y los mesones, con espín entero. Además, tanto mesones como bariones se organizan según sus números cuánticos de momento angular total J , paridad P —que indica el comportamiento del sistema bajo inversión espacial— y conjugación de carga C —que refleja su transformación al intercambiar partículas por antipartículas— usando la notación J^{PC} . El valor de J satisface la relación habitual $|l - s| \leq J \leq |l + s|$, donde l es el momento angular orbital y s el espín. Para mesones formados por un quark y un antiquark, la paridad viene dada por $P = (-1)^{l+1}$ y la conjugación de carga $C = (-1)^{l+s}$. Así, los estados con $l = 0$ se conocen como pseudoescalares (0^{-+}) y vectoriales (1^{--}) y los estados con $l = 1$ como escalares (0^{++}), axiales (1^{++}) y (1^{+-}) y tensores (2^{++}).

Debido a su complejidad, las teorías cuánticas de campos se desarrollan mediante expansiones perturbativas en la constante de acoplo, la intensidad de la interacción. En QCD, sin embargo, este acoplo crece a bajas energías, escapando al tratamiento perturbativo. Para estudiar las interacciones hadrónicas en ese régimen se recurre principalmente a tres enfoques no perturbativos: las teorías efectivas —que retienen solo los grados de libertad relevantes a una escala de energía dada y construyen el lagrangiano más general posible compatible con las simetrías fundamentales de QCD—, métodos dispersivos —que consisten en imponer principios fundamentales como la analiticidad (causalidad), unitariedad (conservación de probabilidad) y simetría de cruce (equivalencia entre partícula hacia adelante y antipartícula hacia atrás en el tiempo)— y cálculos en el retículo (lattice QCD) —que discretizan el espacio-tiempo en una malla para resolver QCD numéricamente.

En este trabajo emplearemos las teorías efectivas y los métodos dispersivos para analizar las interacciones de los mesones más ligeros del espectro hadrónico: los piones. Una simetría clave de la interacción fuerte es el isospín, una simetría aproximada $SU(2)$ que refleja la invarianza al intercambiar los quarks up y down. Bajo esta simetría, los tres piones se organizan en un triplete de isospín: $\pi^+(u\bar{d})$, $\pi^-(d\bar{u})$ y $\pi^0((u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2})$.

Otra característica esencial de la interacción fuerte es la aparición de estados inestables de vida muy breve: las resonancias. En este trabajo nos centraremos en las resonancias más ligeras que aparecen en la dispersión de piones, la $\rho(770)$ (vectorial) y la σ o $f_0(500)$ (escalar). Asimismo, examinaremos cómo varían estas resonancias con la masa del pión, lo cual es crucial para relacionar los resultados de *lattice* QCD (que por su coste computacional se emplean masas de pión superiores a las físicas) con los datos experimentales. Además, como se detallará más adelante, dada la naturaleza aún debatida de la σ y su importancia en la fenomenología de QCD a bajas energías, estudiaremos también el límite $m_\pi \rightarrow 0$.

Para estudiar la dispersión pión-pión y la aparición de resonancias, es esencial establecer primero el marco teórico subyacente. En primer lugar, revisaremos las propiedades de QCD a bajas energías, la simetría quiral y su ruptura espontánea, y formularemos la teoría de perturbaciones quiral.

2. Fundamentos teóricos de QCD a bajas energías

2.1. Simetría Quiral

Para estudiar la dispersión de piones a bajas energías —por debajo de la escala del quark extraño, $m_s \sim 100 \text{ MeV}$ ¹— solo es necesario considerar los quarks *up* y *down*, cuyas masas m_u y m_d son de unos pocos MeV [5]. Centrándonos en la parte fermiónica del lagrangiano de QCD en este sector,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{j=1}^{N_f=2} \bar{q}_j(x)(i\not{D} - \tilde{m}_j)q_j(x), \quad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad \tilde{m} = \begin{pmatrix} m_u & \\ & m_d \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

siendo g la constante de acoplamiento fuerte, q el doblete de cuatrispinores y A_μ el campo del gluón, se observa que en el límite $m_u = m_d \equiv m_q$ este lagrangiano es invariante bajo transformaciones $\text{SU}(2)$, la simetría de isospín. A lo largo de este trabajo se adoptará este límite, es decir, se tomarán las masas de los quarks *up* y *down* como iguales.

Dado que las masas de los quarks *up* y *down* son muy pequeñas frente a las escalas típicas hadrónicas, es posible considerarlas como una pequeña perturbación en torno a $m_q = 0$, el llamado límite quiral. En este límite, el lagrangiano de QCD es invariante bajo las transformaciones globales:

$$q_L \rightarrow L q_L = \exp\left(-i\theta_a^L \frac{t^a}{2}\right) q_L, \quad q_R \rightarrow R q_R = \exp\left(-i\theta_a^R \frac{t^a}{2}\right) q_R, \quad (2)$$

donde t^a son los generadores del álgebra $\text{SU}(N_f)$ en el espacio de sabor², siendo el número de sabores $N_f = 2$ en nuestro caso y

$$q_{L,R} = P_{L,R} q, \quad P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (3)$$

son las proyección quirales a la izquierda y derecha del doblete de quarks ($\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, con γ^i las matrices de Dirac). Así, en el lím $m_q \rightarrow 0$, la teoría presenta simetría quiral $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$. No obstante, puesto que las masas de los quarks *up* y *down* no son exactamente nulas, esta simetría está explícitamente rota en QCD.

Sin embargo, el valor de m_q es tan pequeño que la simetría quiral debería seguir siendo una simetría aproximada de QCD, en particular en su descomposición en las componentes vectorial ($L + R$) y axial ($L - R$). En ese caso, los hadrones que son “compañeros quirales” —es decir, que solo difieren a través de una transformación de paridad³, como el vector $\rho(770)$ de paridad negativa ($J^{PC} = 1^{--}$) y el axial $a_1(1260)$ de paridad positiva (1^{++}), los cuales se transforman uno en otro bajo $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ — deberían tener masas casi iguales. Sin embargo, ambos estados difieren en masa en casi 500 MeV [5]. La ausencia de esa degeneración en el espectro real indica que la simetría quiral no se realiza de forma lineal, sino que está espontáneamente rota en el vacío de QCD.

2.2. Ruptura espontánea de la simetría y Teorema de Goldstone

Una ruptura espontánea de simetría ocurre cuando el lagrangiano de un sistema es invariante bajo un grupo de simetría, pero su vacío no lo es. En ese caso, la naturaleza “escoge” dinámicamente uno entre los posibles estados de mínima energía, rompiendo así la simetría del lagrangiano en el estado fundamental. En QCD, en el límite quiral $m_q \rightarrow 0$, el lagrangiano presenta una simetría

¹En este trabajo usaremos siempre unidades naturales.

²El sabor denota los distintos tipos de quarks en QCD.

³La paridad intercambia las componentes quirales izquierda y derecha de los campos de quarks.

global $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Sin embargo, el vacío solo respeta la parte vectorial de esta simetría $SU(2)_{L+R}$, mientras que la parte axial $SU(2)_{L-R}$ se rompe espontáneamente. Esta ruptura se manifiesta en la aparición de un condensado de quarks y antiquarks en el vacío, $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, que selecciona una dirección específica en el espacio de simetría [6].

Como consecuencia de esta ruptura, y de acuerdo con el teorema de Goldstone [7], por cada generador de simetría roto por el vacío aparece un bosón sin masa: los llamados bosones de Goldstone. El patrón de ruptura $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{L+R}$, genera tres bosones de Goldstone asociados a los tres generadores rotos, que en la naturaleza se identifican con los tres piones. Estos bosones heredan los números cuánticos de los generadores axiales rotos, por lo que son pseudoescalares ($J^{PC} = (1)^{-+}$). Dado que la simetría quiral en QCD está además explícitamente rota, $m_q \neq 0$, los piones adquieren una masa pequeña, tratándose por tanto de pseudo bosones de Goldstone, cuya masa puede considerarse, en primera aproximación, como una perturbación [6].

2.3. Teoría de perturbaciones quiral

La ruptura espontánea de la simetría quiral implica que, a bajas energías, los piones, como pseudo bosones de Goldstone, son los únicos grados de libertad relevantes. La teoría de perturbaciones quiral (ChPT) se construye como la teoría efectiva más general compatible con las simetrías de QCD, empleando únicamente como grados de libertad los campos del pión⁴. Estos se agrupan en la matriz

$$U(x) = \exp\left(\frac{i \pi_a(x) t^a}{F_0}\right) \in SU(2), \quad (4)$$

donde $t^a = \tau^a/2$ son los generadores del álgebra de $SU(2)$ (τ^a son las matrices de Pauli), F_0 una constante de normalización que se puede relacionar con la constante de desintegración del pión en el límite quiral⁵ [6], y $\pi_a(x)$ los campos del pión en la llamada base cartesiana, relacionados con la base de carga por

$$\pi^0(x) = \pi_3(x), \quad \pi^+(x) = \frac{\pi_1(x) - i\pi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad \pi^-(x) = \frac{\pi_1(x) + i\pi_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

La representación exponencial en (4) garantiza una transformación no lineal de los campos piónicos bajo el grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$, garantizando su carácter de modos de Goldstone del patrón de ruptura $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{L+R}$ [6].

De esta forma, en el límite quiral, el lagrangiano efectivo de ChPT se construye como una expansión ordenada en el número de derivadas del campo $U(x)$,

$$\mathcal{L}_{\text{ChPT}}^0 = \mathcal{L}_2^0(U, \partial_\mu U) + \mathcal{L}_4^0(U, \partial U, \partial^2 U) + \dots \quad (6)$$

donde \mathcal{L}_{2i} contiene exactamente $2i$ derivadas del campo $U(x)$ y el superíndice indica el límite quiral $m_q \rightarrow 0$. Cada término de orden superior incorpora una constante de baja energía (LECs), que codifican la dinámica no perturbativa de QCD y deben fijarse experimentalmente.

No obstante, la simetría quiral está también explícitamente rota por las pequeñas masas de los quarks, lo que da lugar a una masa no nula para los piones. Para incluir este efecto, y puesto que la masa de los quarks aparece en \mathcal{L}_{QCD} linealmente, se define la matriz $\chi = 2B_0\tilde{m}$, donde B_0 relaciona la masa del pión con la masa de los quarks. De esa forma, el lagrangiano efectivo se puede construir como una expansión ordenada en derivadas y masa de quarks,

$$\mathcal{L}_{\text{ChPT}} = \mathcal{L}_2(U, \partial_\mu U, \chi) + \mathcal{L}_4(U, \partial U, \partial^2 U, \chi) + \dots \quad (7)$$

⁴Cuando también se tiene en cuenta la dinámica del quark extraño, emergen también los kaones y la eta.

⁵En este trabajo se ha tomado a orden árbol (primer orden en teoría de perturbaciones, es decir, sin incluir loops) para evitar la dependencia con la masa del pión [8].

En particular, el lagrangiano \mathcal{L}_2 , que es el que se va a emplear principalmente en este trabajo, debe involucrar dos derivadas y el término de masas a orden más bajo:

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{F_0^2}{4} \left[\text{Tr} \left(\partial_\mu U(x) \partial^\mu U(x)^\dagger \right) + \text{Tr} \left(\chi U(x) + \chi U(x)^\dagger \right) \right], \quad (8)$$

donde la constante $F_0^2/4$ permite recuperar el término cinético y de masas canónico al expandir el campo $U(x)$, lo que permite identificar la relación $m_\pi^2 = 2B_0 m_q$, es decir, que la masa del pión al cuadrado es proporcional a la masa de los quarks. Además, la traza garantiza que el lagrangiano es un escalar en el espacio de sabor.

De esta forma, ya disponemos de la base para calcular a orden árbol procesos sencillos a bajas energías, como la dispersión elástica de piones⁶.

3. Dispersión pión-pión

3.1. Amplitud de dispersión, unitariedad y variables de Mandelstam

La dispersión es una técnica fundamental en la física de partículas. Esta consiste en hacer colisionar dos haces de partículas con momentos bien definidos y analizar los productos resultantes. A escala hadrónica la interacción fuerte domina con tal magnitud que las contribuciones de la fuerza electromagnética, débil o gravitatoria resultan totalmente despreciables.

Un proceso de dispersión puede interpretarse como una probabilidad P de transición entre un estado inicial $|i\rangle$ y un estado final $|f\rangle$. Para ello se define la matriz S , que conecta los espacios de Fock de entrada y salida [9]:

$$P_{if} = |S_{if}|^2 = |\langle f | S | i \rangle|^2 \quad (9)$$

Partiendo de un estado inicial $|i\rangle$, la probabilidad de terminar en cualquier estado final $|f\rangle$ debe ser uno por lo que

$$1 = \sum_f |\langle f | S | i \rangle|^2 = \sum_f \langle i | S^\dagger | f \rangle \langle f | S | i \rangle = \langle i | S^\dagger S | i \rangle \Rightarrow SS^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1}, \quad (10)$$

que es la llamada condición de unitariedad para la matriz S [9]. Separando la probabilidad trivial de no interacción de la parte dinámica, definimos

$$S = \mathbb{1} + iT \Rightarrow S_{if} = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) T_{if}, \quad (11)$$

donde la matriz o amplitud de transición T codifica la información debida a la interacción, y en el segundo paso, se ha hecho explícita la conservación del cuadrimomento en la transición entre el estado inicial y final. Introduciendo esta descomposición en la Ec. (10), se obtiene:

$$T - T^\dagger = iT T^\dagger. \quad (12)$$

Proyectando sobre el estado $|i\rangle$, introduciendo en el lado derecho la identidad $\sum_j |j\rangle \langle j| = 1$ y teniendo en cuenta que las interacciones fuertes son invariantes bajo inversión temporal ($T_{if} = T_{fi}$), se deduce

$$\langle i | T | i \rangle - \langle i | T^\dagger | i \rangle = 2i \text{Im} \langle i | T | i \rangle = (2\pi)^4 i \sum_j \delta^4(p_j - p_i) |\langle j | T | i \rangle|^2, \quad (13)$$

que es la llamada condición de unitariedad para la matriz T [9].

⁶Dispersión elástica es aquel proceso en el que las partículas salientes son las mismas que las entrantes, sin posibilidad de crear otras partículas.

Para estudiar la dispersión de piones es preciso fijar primero la notación y la cinemática. Consideremos el proceso $\pi_a(p_1) + \pi_b(p_2) \rightarrow \pi_c(p_3) + \pi_d(p_4)$, donde cada pión tiene masa m_π y cuadrimomento $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$. Puesto que la amplitud de dispersión es un escalar Lorentz, es útil definir las variables de Mandelstam [9]

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad (14)$$

que son también escalares Lorentz y por tanto, permiten expresar cualquier amplitud sin referirse a un sistema de coordenadas particular. Al imponer que los piones estén *on-shell* ($p_i^2 = m_\pi^2$) y la conservación del cuadrimomento ($p_1 + p_2 = p_3 + p_4$), se verifica

$$s + t + u = 4m_\pi^2, \quad (15)$$

de modo que sólo dos de las tres variables son independientes. Puesto que los estados final e inicial son funciones únicamente del cuadrimomento, el proceso de dos cuerpos sólo puede ser función de dos de las variables de Mandelstam, que en general tomaremos como s y t . Sin embargo, aunque redundante, en general escribiremos la amplitud de transición como $T(s, t, u)$.

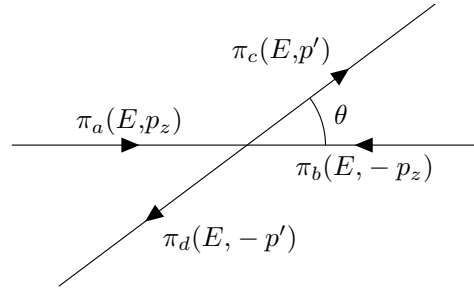


Figura 1: Dispersión pión-pión en el centro de masas.

En el sistema de referencia en el centro de masas —cuya representación esquemática se ilustra en la Fig. 1—, la cinemática de la dispersión pión-pión se expresa de forma sencilla en términos del módulo del trimomento $|\vec{p}|$ y el ángulo de dispersión θ . Definiendo $z = \cos \theta$, las variables de Mandelstam se pueden reescribir de la forma

$$\begin{aligned} s &= E_{\text{CM}}^2 = 4(m_\pi^2 + |\vec{p}|^2), \\ t &= -2|\vec{p}|^2(1 - z) = -\frac{s - 4m_\pi^2}{2}(1 - z), \\ u &= -2|\vec{p}|^2(1 + z) = -\frac{s - 4m_\pi^2}{2}(1 + z), \end{aligned} \quad (16)$$

donde E_{CM} es la energía total del sistema en centro de masas. La región física ($|\vec{p}|^2 \geq 0$) viene definida por las condiciones: $s \geq 4m_\pi^2$, $t \leq 0$ y $u \leq 0$, que es el llamado canal s de dispersión.

3.2. Simetría de cruce y amplitudes pión-pión

El triplete de isospín formado por los piones se describe usando estados de isospín total I y tercera componente I_3 :

$$|\pi^+\rangle = -|1, +1\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle. \quad (17)$$

donde el signo de $|\pi^+\rangle$ es una elección de fase conveniente debido a la paridad negativa del pión. Al combinar dos piones, proyectando sobre los multipletes de isospín total $I = 0, 1, 2$ y usando coeficientes de Clebsch–Gordan, se obtienen los estados:

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle, & |\pi^0\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle, \\ |\pi^+\pi^0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|2,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle, & |\pi^-\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|2,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle, \\ |\pi^+\pi^+\rangle &= |2,2\rangle, & |\pi^-\pi^-\rangle &= |2,-2\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Gracias a esta descomposición, la dispersión de piones en cualquier canal de carga se puede expresar como combinación de amplitudes con isospín $I = 0, 1, 2$.

La simetría de cruce es una propiedad de las teorías cuánticas de campos que identifica una partícula entrante con momento p_i con su antipartícula saliente con momento $-p_i$. Bajo esta operación —como muestra la Fig. 2— las variables de Mandelstam permutan ($s \leftrightarrow t \leftrightarrow u$), de modo que una misma amplitud T describe tres procesos o canales diferentes: canal s , $T(s, t, u)$ con región física definida por $s \geq 4m_\pi^2$, $t \leq 0$, $u \leq 0$; el canal t , $T(t, s, u)$ con $t \geq 4m_\pi^2$, $s \leq 0$, $u \leq 0$; y el canal u , $T(u, t, s)$ con $u \geq 4m_\pi^2$, $t \leq 0$ y $s \leq 0$ [9]. Esta propiedad permite escribir las tres amplitudes

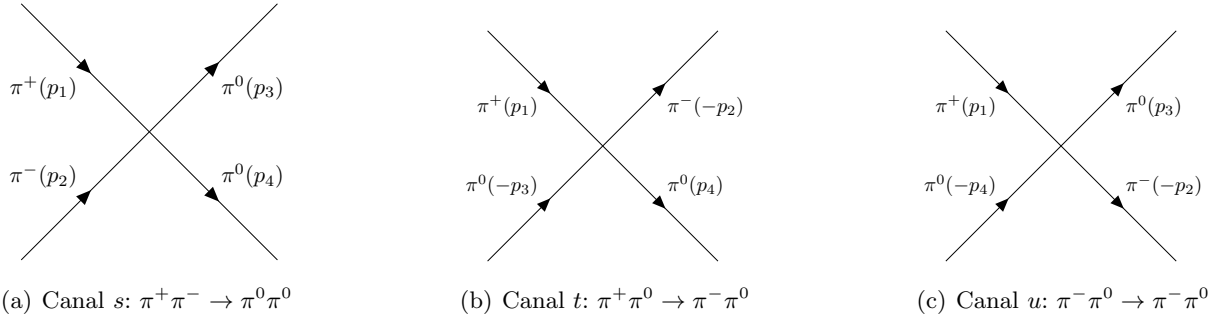


Figura 2: Relación entre el canal s , t y u para el proceso $\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0$.

con isospín bien definido $I = 0, 1, 2$, en términos de una sola amplitud, por ejemplo la del proceso $\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0$, denotada como $A(s, t, u)$, dando lugar a las relaciones:

$$\begin{aligned} T^{I=0}(s, t, u) &= 3A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s), \\ T^{I=1}(s, t, u) &= A(t, s, u) - A(u, t, s), \\ T^{I=2}(s, t, u) &= A(t, s, u) + A(u, t, s). \end{aligned} \quad (19)$$

De esta forma, gracias a la simetría de cruce y al isospín, basta conocer $A(s, t, u)$ para reconstruir todas las amplitudes de la dispersión de piones.

3.3. Expansión en ondas parciales

Con el objetivo de estudiar la estructura angular de la dispersión se realiza una expansión de la amplitud en ondas parciales. La conservación del momento angular permite separar las contribuciones de cada momento angular J [10], facilitando así la identificación de resonancias. En el sistema de referencia del centro de masas, usando como variables independientes s y el ángulo $z = \cos\theta$, la amplitud pión-pión con isospín I se expande como

$$T^I(s, t, u) = 32\pi \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) P_J(z) t_J^I(s), \quad (20)$$

donde $P_J(z)$ son los polinomios de Legendre y $t_J^I(s)$ las amplitudes de ondas parciales de momento angular J . La ortonormalidad de los $P_J(z)$ permite extraer cada onda parcial $t_J^I(s)$ mediante

$$t_J^I(s) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^1 P_J(z) T(s, t(s, z), u(s, z)) dz, \quad (21)$$

donde la dependencia de las variables de Mandelstam t y u con s y z viene dada en la Ec. (16).

Imponiendo la condición de unitariedad de la matriz T (Ec. (13)), y usando la descomposición de los polinomios de Legendre en armónicos esféricos, se puede evaluar analíticamente la integral que surge al insertar en la Ec. (13) la resolución de identidad en el espacio de dos piones con momento arbitrario.⁷ El resultado es que cada onda parcial cumple la relación de unitariedad elástica:

$$\text{Im}t_J^I(s) = \sigma(s)|t_J^I(s)|^2, \quad \sigma(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}, \quad (22)$$

donde $\sigma(s)$ es el llamado espacio de fases. Esta ecuación, conocida como la condición de unitariedad elástica para ondas parciales, garantiza la conservación de la probabilidad en cada canal parcial.

3.4. Dispersión de piones en ChPT a nivel árbol

En el marco de las teorías cuánticas de campos, las amplitudes de dispersión se obtienen a partir de las funciones de correlación, que son valores esperados que describen cómo se relacionan las fluctuaciones cuánticas de un campo en distintos puntos del espacio-tiempo. Concretamente, la amplitud de dispersión $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ se extrae de la función de correlación de cuatro puntos (dos campos entrantes y dos salientes) [9]:

$$\langle \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) | S | \pi^c(p_3) \pi^d(p_4) \rangle = Z_{\text{QCD}}^{-1} \int [\mathcal{D}\Pi] T \left\{ \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) \pi^c(p_3) \pi^d(p_4) e^{iS_{\text{QCD}}} \right\}, \quad (23)$$

donde el operador T denota el orden temporal de los campos, $[\mathcal{D}\Pi]$ es la medida funcional sobre los campos de QCD, $Z_{\text{QCD}} = \int [\mathcal{D}\Pi] e^{iS_{\text{QCD}}}$ es el funcional generador de QCD, y $S_{\text{QCD}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}$ es su acción. Como (23) no puede resolverse de forma exacta a baja energía (QCD es no perturbativa a la escala de energía de los piones), usamos el Teorema de Equivalencia [6]: las funciones de correlación de la teoría fundamental y de la teoría efectiva coinciden orden a orden en expansión perturbativa. Así, reemplazamos \mathcal{L}_{QCD} por el lagrangiano efectivo de ChPT, $\mathcal{L}_{\text{ChPT}}$, y obtenemos

$$Z_{\text{QCD}} \simeq Z_{\text{eff}} = \int [\mathcal{D}\pi] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{ChPT}}}. \quad (24)$$

En este trabajo, se va a calcular a nivel árbol la amplitud de transición $A(s, t, u)$, la única necesaria gracias a la simetría de cruce e isospín. Para ello, amputamos en primer lugar los propagadores externos de piones, pues éstos describen la evolución libre antes y después de la interacción. A continuación, hacemos uso de la reducción LSZ, que relaciona la función de correlación amputada con la matriz S , convirtiendo campos cuánticos en estados asintóticos de piones. Finalmente, expandimos la acción efectiva a primer orden y nos quedamos con la contribución del lagrangiano \mathcal{L}_2 en (7) que contiene exactamente cuatro campos de piones, la única que va a contribuir a la parte conectada de la amplitud. Así, nuestra amplitud de dispersión viene dada por

$$\langle \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) | T | \pi^0(p_3) \pi^0(p_4) \rangle = Z_{\text{ChPT}}^{-1} \int [\mathcal{D}\pi] T \left\{ \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) \pi^0(p_3) \pi^0(p_4) \int d^4x \mathcal{L}_2^{4\pi}(x) \right\}, \quad (25)$$

⁷Este desarrollo, verificado explícitamente en este trabajo, se omite aquí por razones de espacio.

donde $\mathcal{L}_2^{4\pi}(x)$, es la contribución de $\mathcal{L}_2(x)$ con exactamente cuatro campos de piones. En particular, los únicos términos de $\mathcal{L}_2^{4\pi}(x)$ que pueden contraerse acorde al Teorema de Wick —las únicas contracciones permitidas entre campos piónicos son aquellas que conservan carga e isospín— son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{4\pi}(x)|_{\text{con}} = & \frac{1}{3f^2} \left(\partial^\mu \pi^0(x) \partial_\mu \pi^+(x) \pi^0(x) \pi^-(x) - \partial^\mu \pi^-(x) \partial_\mu \pi^+(x) (\pi^0(x))^2 + \right. \\ & \left. \partial^\mu \pi^0(x) \partial_\mu \pi^-(x) \pi^0(x) \pi^+(x) - \partial^\mu \pi^0(x) \partial_\mu \pi^0(x) \pi^-(x) \pi^+(x) + \frac{m_\pi^2}{2} \pi^0(x)^2 \pi^-(x) \pi^+(x) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Evaluando las contracciones de Wick, y expresando la cinemática en función de las variables de Mandelstam (Ec. (16)), se ha obtenido a orden árbol

$$A_2(s, t, u) = \frac{s - m_\pi^2}{F_0^2}, \quad A_2(t, s, u) = \frac{t - m_\pi^2}{F_0^2}, \quad A_2(u, t, s) = \frac{u - m_\pi^2}{F_0^2}, \quad (27)$$

donde el subíndice denota que son $\mathcal{O}(p^2)$ (dos derivadas o un término de masa). Usando (3.2), las tres amplitudes con isospín bien definido obtenidas a nivel árbol son

$$T_2^{I=0}(s, t, u) = \frac{2s - m_\pi^2}{F_0^2}, \quad T_2^{I=1}(s, t, u) = \frac{t - u}{F_0^2}, \quad T_2^{I=2} = \frac{2m_\pi^2 - s}{F_0^2}. \quad (28)$$

En el sistema de referencia de centro de masas, usando la relación entre las variables de Mandelstam y el ángulo de dispersión en (16), se observa que $T_2^{I=0}$ y $T_2^{I=2}$ no dependen de $z = \cos(\theta)$, mientras que $T_2^{I=2}$ es proporcional a z .

Finalmente, proyectado en ondas parciales estas tres amplitudes para los valores más bajos de momento angular ($J = 0, 1, 2$), se han obtenido las ondas parciales a nivel árbol ($t_J^I(s)|_2$):

$$t_0^0(s)|_2 = \frac{2s - m_\pi^2}{32\pi F_0^2}, \quad t_1^1(s)|_2 = \frac{s - 4m_\pi^2}{96\pi F_0^2}, \quad t_0^2(s)|_2 = \frac{2m_\pi^2 - s}{32\pi F_0^2}, \quad (29)$$

mientras que las demás ondas parciales se anulan. Esto es debido a la simetría de Bose, que exige invarianza bajo $z \rightarrow -z$ al intercambiar las dos piones finales. Así, en los canales con isospín $I = 0, 2$ (funciones pares en z) sobreviven únicamente las ondas J par, y en el canal $I = 1$ (impar en z) únicamente las ondas con J impar.

3.5. Dispersión de piones en ChPT a un loop

Los resultados obtenidos en la sección anterior sólo incluyen la contribución a orden más bajo en la expansión quiral

$$t_J^I(s) = t_J^I(s)|_2 + t_J^I(s)|_4 + \mathcal{O}(p^6) \quad (30)$$

donde el subíndice indica el orden en momentos (o derivadas) y masas. Las ondas parciales a $\mathcal{O}(p^2)$ en (29) son reales, de modo que $\text{Im} t_J^I(s)|_2 = 0$. Esto refleja que, a nivel árbol, no se generan cortes ni, por tanto, parte imaginaria. Para estudiar la condición de unitariedad elástica en la Ec. (22) es imprescindible incluir correcciones de orden superior. El cálculo completo a $\mathcal{O}(p^4)$ exige regularizar y renormalizar divergencias ultravioletas, lo cual está más allá del alcance de este trabajo. En su lugar, utilizamos las expresiones de [8], según las cuales

$$t_J^I(s)|_4 = \sum_{i=0}^2 c_i^{IJ}(s) [L(s)]^i + \sum_{i=1}^3 c_i^{IJ}(s) l_i^r, \quad L(s) = \log \frac{\sigma(s) - 1}{\sigma(s) + 1}, \quad \text{Im} t_J^I(s)|_4 = \sigma(s) [t_J^I(s)|_2]^2 \quad (31)$$

donde los coeficientes c_i^{IJ} y c_i^{IJ} , a parte de depender de $\sigma(s)$, son polinomios en s . En $t_4(s)$ aparecen por tanto términos polinómicos, proporcionales a las LECs, y términos logaritmos ($L(s)$) originados por los diagramas de loop.

4. Métodos no perturbativos en teorías efectivas

ChPT describe la interacción de piones a baja energía mediante un lagrangiano efectivo compatible con las simetrías de QCD, organizado como una expansión perturbativa en momentos y masas. Al truncarse a un orden finito, la amplitud resultante es un polinomio sin singularidades, por lo que no puede reproducir resonancias, que, tal y como veremos, aparecen como polos en la segunda hoja de Riemann de la amplitud de dispersión. Para generar esas resonancias es imprescindible recurrir a métodos no perturbativos, como las relaciones de dispersión, que incorporan principios fundamentales como la analiticidad, unitariedad y simetría de cruce para extender la amplitud más allá del régimen puramente perturbativo.

4.1. Relaciones de dispersión

La simetría de cruce relaciona los tres canales físicos de dispersión (s , t y u) mediante una única amplitud $T(s, t, u)$. Sin embargo, para poder explotar esta relación es crucial conocer su estructura analítica. Según la hipótesis de Mandelstam, las únicas singularidades de T son las impuestas por la dinámica: polos simples —asociados a estados ligados— y cortes de rama —que se abren en los umbrales de producción de partículas [11]. Bajo esta suposición, las regiones t y u se obtienen como continuaciones analíticas de la región s , permitiendo así describir todos los procesos de la dispersión de piones a partir de una misma función.

Puesto que en la dispersión de piones no hay estados ligados, nos centraremos en su estructura de cortes. Para ello resulta fundamental el principio de reflexión de Schwarz, que establece que si una función $f(s)$ es analítica en un dominio del plano complejo y satisface $\text{Im } f(s) = 0$ en la intersección de dicho dominio con el eje real, entonces

$$f(s^*) = f(s)^*. \quad (32)$$

Como consecuencia de la reflexión de Schwarz, el dominio de analiticidad de $T(s, t, u)$ no puede abarcar todo el plano complejo en s , pues en ese caso $\text{Im } T(s, t, u) = 0$ para $s \in \mathbb{R}$, mientras que unitariedad (Ec. (13)) exige precisamente $\text{Im } T(s, t, u) \neq 0$ en la región física, $s > 4m_\pi^2$. Por tanto, $T(s, t, u)$ debe presentar un corte derecho en el eje real desde el umbral $s = 4m_\pi^2$ hasta $+\infty$. Esta discontinuidad viene dada por [12]:

$$\begin{aligned} \text{Disc } T(s, t, u) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T(s + i\epsilon, t, u) - T(s - i\epsilon, t, u)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T(s + i\epsilon, t, u) - T(s + i\epsilon, t, u)^*) = 2i \text{Im } T(s, t, u). \end{aligned} \quad (33)$$

Además, manteniendo t fijo, la condición de unitariedad en el canal u genera un corte izquierdo en s , pues dada la condición on-shell, Ec. (15):

$$u = 4m_\pi^2 - s - t \geq 4m_\pi^2 \quad \implies \quad s \leq -t, \quad (34)$$

de modo que existe un corte para $s \in (-\infty, -t)$. Estos dos cortes son la estructura de singularidades básica en la variable s para la dispersión de piones.

Dado que $T(s, t, u)$ es analítica salvo por los cortes derecho e izquierdo en el plano complejo de s , podemos aplicar el teorema integral de Cauchy en un contorno C donde T sea analítica:

$$T(s, t, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds' \frac{T(s', t, u)}{s' - s}. \quad (35)$$

Deformando C para rodear infinitamente cerca ambos cortes —tal y como se muestra en la Fig. 3—, y asumiendo que $T(s', t, u) \rightarrow 0$ más rápido que $1/|s'|$ cuando $|s'| \rightarrow \infty$, la contribución

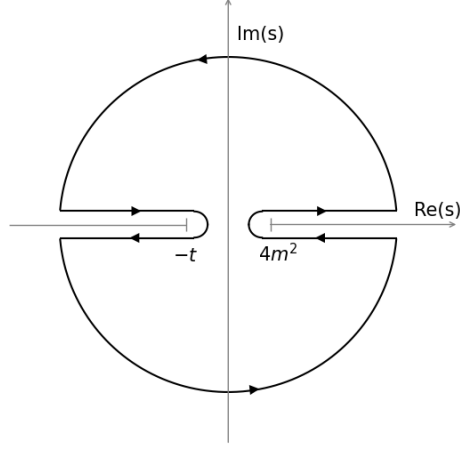


Figura 3: Contorno de integración en el plano s .

del arco se anula. Quedan entonces solo las integrales a lo largo de las discontinuidades, cuya diferencia viene dada por la relación (33):

$$\begin{aligned} T(s, t, u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Disc } T(s', t, u)}{s' - (s + i\epsilon)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-t} ds' \frac{\text{Disc } T(s', t, u)}{s' - (s + i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Im } T(s', t, u)}{s' - (s + i\epsilon)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-t} ds' \frac{\text{Im } T(s', t, u)}{s' - (s + i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (36)$$

En la región física, $s \geq 4m_\pi^2$, el segundo sumando no presenta polos en el eje de integración. Para extraer la parte real de T se emplea el teorema de Sokhotski–Plemelj:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \text{P.V.} \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta(x), \quad (37)$$

donde P.V. denota el valor principal. Aplicando este sobre el primer término, se obtiene la relación de dispersión

$$\text{Re } T(s, t, u) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Im } T(s', t, u)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-t} ds' \frac{\text{Im } T(s', t, u)}{s' - s}, \quad (38)$$

donde hemos usado la convención $s \rightarrow s + i\epsilon$. De esta forma, una relación de dispersión proporciona el valor de la amplitud en cualquier punto del plano complejo en función de su parte imaginaria a lo largo del corte derecho e izquierdo.

Si $T(s, t, u)$ no tiende a cero suficientemente rápido cuando $|s| \rightarrow \infty$, la contribución de la parte circular no se anula. Asumiendo que la amplitud de dispersión es conocida en un punto s_1 , se puede escribir:

$$T(s, t, u) = T(s_1, t, u) + \frac{s - s_1}{2\pi i} \oint ds' \frac{T(s', t, u)}{(s' - s)(s' - s_1)}, \quad (39)$$

obteniendo así una relación de dispersión una vez sustraída, siendo s_1 el punto de sustracción.

Si una sola sustracción no bastara para hacer cero la contribución del círculo en el infinito, se puede repetir el procedimiento tantas veces como haga falta. Por ejemplo, con dos sustracciones en el mismo punto s_1 [12]:

$$T(s, t, u) = T(s_1, t, u) + (s - s_1) \frac{\partial}{\partial s} T(s, t, u) \Big|_{s=s_1} + \frac{(s - s_1)^2}{2\pi i} \oint ds' \frac{T(s', t, u)}{(s' - s)(s' - s_1)^2}. \quad (40)$$

4.2. Calculando la parte imaginaria de la amplitud: Reglas de Cutkosky

Para usar las relaciones de dispersión introducidas en la sección anterior es crucial calcular la parte imaginaria de la amplitud. Las reglas de Cutkosky ofrecen un método sistemático para ello.

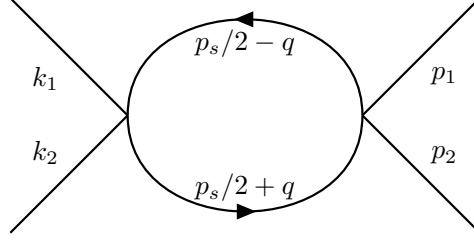


Figura 4: Diagrama loop simple.

Para ilustrar el procedimiento, consideremos el diagrama de la Fig. 4, que representa la corrección de un loop con dos piones intermedios. En el centro de masas $p_s = k_1 + k_2 = (\sqrt{s}, 0)$, por lo que haciendo uso de las reglas de Feynman, la amplitud viene dada por

$$M(s) = \frac{1}{2i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_s/2 - q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_s/2 + q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}, \quad (41)$$

donde $q = (q^0, \vec{q})$ es el cuadrimomento del loop y ϵ un infinitesimal positivo. Para evaluar primero la integral en q^0 , aplicamos el teorema de los residuos. Cada propagador tiene ceros en

$$\frac{s}{4} + q^2 \mp \sqrt{s} q^0 - m_\pi^2 + i\epsilon = 0 \implies q^0 = \pm \frac{\sqrt{s}}{2} \pm (E_q - i\epsilon), \quad \text{con } E_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m_\pi^2}. \quad (42)$$

Cerrando el contorno de integración en el semiplano inferior sólo contribuyen dos polos. Sin embargo, dado que $E_q > 0$, únicamente contribuirá a la integral espacial el polo $q^0 = -\frac{\sqrt{s}}{2} + E_q - i\epsilon$. Puesto que es un polo simple, obtener su residuo es equivalente a sustituir

$$\frac{1}{(p_s/2 + q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((p_s/2 + q)^2 - m_\pi^2), \quad (43)$$

donde el signo menos viene de la orientación del contorno de integración. De esta forma, teniendo en cuenta que $\delta((p_s/2 - q)^2 - m_\pi^2) = \delta(q^0 + \sqrt{s}/2 - E_q)/2E_q$, se obtiene

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{1}{2i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^0}{(2\pi)} \frac{-2\pi i \delta((p_s/2 - q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon)}{(p_s/2 - q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_q \sqrt{s} (\sqrt{s} - 2E_q \pm i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Pasando la integral tridimensional a coordenadas esféricas e integrando a todo el ángulo sólido,

$$M(s) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{s} (\sqrt{s} - 2E_q \pm i\epsilon)} \frac{1}{2E_q} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{dE_q \sqrt{E_q^2 - m_\pi^2}}{\sqrt{s} (\sqrt{s} - 2E_q \pm i\epsilon)}, \quad (45)$$

donde el denominador tiene ahora un polo en $E_q = \sqrt{s}/2$, que solo contribuirá a la integral si $\sqrt{s} > 2m_\pi$, es decir, por encima del umbral de producción de dos piones. Por tanto, por debajo

de está energía, la amplitud será claramente real, mientras que por encima, con el teorema de Sokhotski–Plemelj (Ec. (37)), tendremos,

$$\frac{1}{\sqrt{s} - 2E_q \pm i\epsilon} \rightarrow \frac{\text{P.V.}}{\sqrt{s} - 2E_q} \mp \delta(\sqrt{s} - 2E_q), \quad (46)$$

y la amplitud tendrá una discontinuidad. La ecuación (46) nos permite calcular la discontinuidad usando una vez más la sustitución

$$\frac{1}{(p_s/2 - q)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((p_s/2 - q)^2 - m_\pi^2), \quad (47)$$

por lo que la parte imaginaria de la amplitud viene dada por

$$\text{Im } M(s) = \frac{1}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}, \quad (48)$$

que es proporcional a la función $\sigma(s)$, el espacio de fases para dos partículas en el estado final.

Mediante este desarrollo se evidencia que la parte imaginaria de una amplitud se obtiene al poner *on-shell* las partículas intermedias y reemplazar sus propagadores por deltas de Dirac. Este procedimiento es conocido como las reglas de Cutkosky, las cuales proporcionan una forma de determinar la discontinuidad, y por tanto la parte imaginaria, de una amplitud de dispersión a partir de los diagramas de Feynman del proceso.

Una vez calculada la parte imaginaria de la amplitud, su parte real puede obtenerse usando una relación de dispersión sustraída,

$$M(s) = M(0) + \frac{s}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\text{Im}(M)}{z(z-s)} dz = M(0) + \frac{1}{32\pi^2} \left(2 + \sigma(s) \log \frac{\sigma(s) - 1}{\sigma(s) + 1} \right), \quad (49)$$

y de esta forma se consigue evitar la divergencia que reside en $M(0)$. Además, se puede ver que la parte logarítmica se relaciona directamente con la función $L(s)$ en la Ec. (31); este cálculo explícito ilustra cómo los términos de $L(s)$ que aparecen en t_4 surgen directamente de los loops de piones. Este resultado se usará para reconstruir la amplitud completa mediante una relación de dispersión, lo que sienta las bases para el método de la amplitud inversa desarrollado en la siguiente sección.

4.3. Unitarización: el método de la amplitud inversa

4.3.1. Unitariedad perturbativa en ChPT

ChPT permite describir la interacción de piones a bajas energías mediante una expansión perturbativa en momentos y masas. Por construcción, esta aproximación excluye el estudio de resonancias, ya que estas son fenómenos intrínsecamente no perturbativos, que de hecho, marcan el límite de validez del régimen perturbativo en el que se basa la serie quiral.

La aparición de resonancias, una característica intrínseca de las interacciones fuertes, está íntimamente relacionada con la unitariedad. Dado que la matriz S es unitaria, $|S_J^I| = 1$, puede parametrizarse mediante una fase, $S_J^I(s) = e^{2i\delta_J^I(s)}$, con $\delta_J^I(s)$ el llamado desfasaje. Por otro lado, la relación entre la matriz S y T para una onda parcial, $S_J^I(s) = 1 + 2i\sigma(s)t_J^I(s)$, implica que

$$t_J^I(s) = \frac{S_J^I(s) - 1}{2i\sigma(s)} = \frac{e^{2i\delta_J^I(s)} - 1}{2i\sigma(s)} = \frac{e^{i\delta_J^I(s)} \sin \delta_J^I(s)}{\sigma(s)} \Rightarrow |t_J^I(s)| \leq \frac{1}{\sigma(s)}. \quad (50)$$

Las resonancias se asocian a la saturación de esta cota —es decir, cuando la interacción se hace máxima y $\delta_J^I(s)$ atraviesa $\pi/2$ — y por ello su descripción requiere que la condición de unitariedad se satisfaga exactamente.

Sin embargo, ChPT sólo satisface unitariedad de forma perturbativa. Usando los resultados obtenidos en las Ecs. (29) y (31) se observa que:⁸

$$\text{Im } t_2(s) = 0, \quad \text{Im } t_4(s) = \sigma(s)t_2^2(s), \quad (51)$$

que es la versión perturbativa de la condición de unitariedad en la Ec. (13). Dada la relevancia de la unitariedad en la descripción de resonancias, en la próxima sección veremos cómo es posible “unitarizar” ChPT mediante el método de la amplitud inversa (IAM) [10], que se basa en la observación de que la unitariedad fija exactamente la parte imaginaria de la inversa de la amplitud:

$$\text{Im } t(s) = \sigma(s)|t(s)|^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Im} \left(\frac{t(s)}{|t(s)|^2} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{t(s)^*} \right) = -\text{Im} \frac{1}{t(s)} = \sigma(s). \quad (52)$$

4.3.2. Método de la Amplitud Inversa (IAM)

El IAM unitariza la expansión quiral partiendo de una relación de dispersión para la inversa de la amplitud, en la que el corte derecho queda completamente fijado por unitariedad, mientras que el izquierdo se aproxima por ChPT. Para obtener su expresión, partamos de la relación de dispersión para la amplitud en ChPT a $\mathcal{O}(p^4)$ proyectada en ondas parciales⁹. A este orden, la amplitud crece como s^2 cuando $s \rightarrow \infty$, por lo que su convergencia requiere tres sustracciones,

$$\begin{aligned} t_2(s) &= t_2(0) + s t_2'(0), \\ t_4(s) &= t_4(0) + s t_4'(0) + s^2 t_4''(0) + \frac{s^3}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\text{Im } t_4(s')}{s'^3(s' - s)} ds' + \frac{s^3}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im } t_4(s')}{s'^3(s' - s)} ds', \end{aligned} \quad (53)$$

donde se ha tenido en cuenta que $t_2(s)$ es un polinomio de primer orden en s y por consiguiente, su parte imaginaria es nula en el eje real. Por otro lado, escribiendo también una relación de dispersión con tres sustracciones para la función $G(s) = t_2(s)^2/t(s)$, se obtiene

$$G(s) = G(0) + s G'(0) + s^2 G''(0) + \frac{s^3}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\text{Im } G(s')}{s'^3(s' - s)} ds' + \frac{s^3}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im } G(s')}{s'^3(s' - s)} ds'. \quad (54)$$

Usando la Ec. (52), se obtiene que la parte $\text{Im } G(s)$ en la región física es:

$$\text{Im } G(s') = t_2(s)^2 \text{Im} \frac{1}{t(s)} = -\sigma(s)t_2(s)^2 = -\text{Im } t_4(s), \quad \text{para } s \geq 4m_\pi^2, \quad (55)$$

lo que permite fijar exactamente la contribución proveniente del corte derecho.

Las constantes de sustracción en (54) requieren evaluar $G(s)$ y sus derivadas en $s = 0$, el régimen donde ChPT da una aproximación muy buena de la dispersión de piones. Por tanto, obtenemos:

$$G(0) = \frac{t_2(0)^2}{t(s)} \simeq \frac{t_2(0)^2}{t_2(s) + t_4(s)} \simeq t_2(0) - t_4(0), \quad G'(0) \simeq t_2'(0) - t_4'(0) \quad G''(0) \simeq -t_4''(0). \quad (56)$$

Finalmente, necesitamos evaluar $\text{Im } G(s)$ en el corte izquierdo, la zona no física. Para ello, podemos hacer uso una vez más de la serie quiral, obteniendo:

$$\text{Im } G(s') = t_2(s)^2 \text{Im} \frac{1}{t(s)} \simeq t_2(0)^2 \text{Im} \left(\frac{1}{t_2(s) + t_4(s)} \right) \simeq -\text{Im } t_4(s), \quad \text{para } s \leq 0, \quad (57)$$

donde se ha vuelto a hacer uso de que $t_2(s)$ es una función real en el eje real.

⁸Para abreviar la notación omitimos a partir de ahora los índices de isospín I y momento angular J .

⁹Al proyectar en ondas parciales el corte izquierdo comienza en $s = 0$.

De esta forma, usando (53), la relación de dispersión para $G(s)$ en Ec. (54) se reduce a

$$\begin{aligned} G(s) &\simeq t_2(0) - t_4(0) + s (t_2'(0) - t_4'(0)) - s^2 t_4''(0) - \frac{s^3}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\text{Im } t_4(s')}{s'^3(s' - s)} ds' + \frac{s^3}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im } t_4(s')}{s'^3(s' - s)} ds' \\ &= t_2(s) - t_4(s). \end{aligned} \quad (58)$$

De esta forma se obtiene la llamada amplitud unitarizada del IAM, que viene dada por

$$t^{\text{IAM}}(s) = \frac{t_2(s)^2}{t_2(s) - t_4(s)}. \quad (59)$$

La amplitud del IAM satisface unitariedad de forma exacta pues

$$\text{Im } t^{\text{IAM}}(s) = \frac{t_2(s)^2 \text{Im } t_4(s)^*}{|t_2(s) - t_4(s)|^2} = \frac{\sigma(s) t_2(s)^4}{|t_2(s) - t_4(s)|^2} = \sigma(s) |t(s)^{\text{IAM}}|^2, \quad (60)$$

al mismo tiempo que reproduce la expansión quiral a bajo momento,

$$t^{\text{IAM}}(s) = \frac{t_2(s)}{1 - t_4(s)/t_2(s)} \simeq t_2(s) (1 + t_4(s)/t_2(s) + \dots) = t_2(s) + t_4(s) + \dots \quad (61)$$

Además, al haberse obtenido mediante una relación de dispersión, se puede continuar a valores complejos de s , lo que, como ya veremos, permite utilizar la amplitud del IAM para estudiar resonancias. Sin embargo, el método incorpora dos aproximaciones clave que limitan su ámbito de validez. El corte izquierdo ($s < 0$) se modela con la expansión quiral de ChPT, lo cual excede su dominio perturbativo y rompe la simetría de cruce, pues el corte derecho sí se introduce exactamente. Esto hace que el IAM no sea fiable en regiones donde el corte izquierdo domina. Además, el IAM se deriva para procesos puramente elásticos, estados intermedios de dos piones, ignorando canales inelásticos como $K\bar{K}$, cuyos efectos se vuelven importantes para $\sqrt{s} \geq 1$ GeV. Por lo que su aplicación práctica se limita a energías por debajo de este umbral.

5. Propiedades y naturaleza de las resonancias hadrónicas ligeras

5.1. Aparición de polos y análisis en la segunda hoja de Riemann

Las resonancias son estados cuasi-ligados cuya masa excede al menos uno de los umbrales físicos de los canales a los que se acoplan, de modo que pueden desintegrarse y no son estables. Según la hipótesis de Mandelstam (véase la sección 4), las únicas singularidades de la matriz S son las impuestas por la dinámica del sistema. Así, un estado ligado de masa M_B , se manifiesta como un polo simple en $s = M_B^2$ sobre el eje real por debajo del umbral en la primera hoja de Riemann de la onda parcial correspondiente. De forma análoga, una resonancia en un canal dado se identifica con un polo complejo s_R , que normalmente es parametrizado como $\sqrt{s_R} = M_R - i\Gamma_R/2$, con M_R su masa y Γ_R su anchura de desintegración [12]. Sin embargo, estos polos no pueden encontrarse en el eje real por encima del umbral pues violarían unitariedad, mientras que aquellos en la hoja física fuera del eje real violarían causalidad [12]. Por ello, las resonancias sólo pueden aparecer como singularidades en hojas no físicas, reflejando así su carácter inestable.

Debido al corte de unitariedad (Ec. (33)), la matriz S de una onda parcial en el eje real se define como

$$S_I(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S(s + i\epsilon), \quad (62)$$

por lo que si se cruza de forma continuada el corte derecho desde el semiplano superior al inferior se llega a una hoja de Riemann no física, la segunda hoja de Riemann. Por tanto, para valores de s en el corte, podemos definir la matriz S de una onda parcial en la segunda hoja como:

$$S_{II}(s - i\epsilon) = S_I(s + i\epsilon) = S_I(s - i\epsilon)^* = S_I^{-1}(s - i\epsilon), \quad (63)$$

donde en el segundo y tercer paso hemos aplicado el principio de reflexión de Schwarz y la condición de unitariedad para la matriz S , respectivamente. Dado que, exceptuando el corte, ambos lados de la ecuación son analíticos, esta relación se puede extender analíticamente a todo el plano complejo de s , de modo que un polo en la matriz S en la segunda hoja de Riemann se traduce en un cero de S en la hoja física. Usando ahora la relación $S_I(s) = 1 + 2i\sigma(s)t_I(s)$, se obtiene:

$$1 + 2i\sigma(s)t_{II}(s) = \frac{1}{1 + 2i\sigma(s)t_I(s)} \implies t_{II}(s) = \frac{t_I(s)}{1 + 2i\sigma(s)t_I(s)}, \quad (64)$$

donde la función $\sigma(s)$ debe satisfacer $\sigma(s^*) = -\sigma(s)^*$ para cumplir el principio de reflexión de Schwarz en la segunda hoja.

Usando el IAM para unitarizar las ondas parciales de ChPT a $\mathcal{O}(p^4)$ obtenidas en la sección 3.5, podemos determinar la posición de las resonancias que aparecen en la dispersión de piones a bajas energías —su masa y anchura— con sólo buscar la solución de la ecuación

$$t_{II}^{\text{IAM}}(s)^{-1} = 0 \iff t_I^{\text{IAM}}(s) = \frac{-1}{2i\sigma(s)}. \quad (65)$$

Sin embargo, para resolver esta ecuación necesitamos fijar primero el valor de las LECs (l_i^r) que entran en $t_4(s)$ en la Ec. (31). Para ello, impondremos mediante una minimización χ^{210} que en las tres ondas parciales estudiadas en este trabajo, $IJ = 00, 11, 20$, la predicción del IAM en un conjunto de $N = 100$ puntos a bajas energías $\sqrt{s_j} \in [2m_\pi, 800]$ MeV reproduzca dentro de errores los resultados teóricos de referencia en [13] para los desfases $\delta_J^I(s)$ de la amplitud (Ec. (50)), es decir

$$\chi_\delta^2 = \sum_{IJ} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_J^{\text{th}}(s_j) - \delta_J^{\text{IAM}}(s_j)}{\Delta\delta_J^{\text{th}}(s_j)} \right)^2, \quad (66)$$

donde $\delta_J^{\text{th}}(s_j)$ y $\Delta\delta_J^{\text{th}}(s_j)$ son, respectivamente, el valor y la incertidumbre teórica dados en [13] y $\delta_J^{\text{IAM}}(s_j) = \arctan \frac{\text{Im } t_J^{\text{IAM}}(s_j)}{\text{Re } t_J^{\text{IAM}}(s_j)}$ es el desfase calculado con el IAM. Además, también impondremos que los valores de las LECs no se desvíen demasiado de sus valores de referencia de ChPT dados en [14], permitiendo ligeras variaciones esperadas al extender la validez de la serie quiral,

$$\chi_{l_i}^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{l_i^{\text{IAM}} - l_i^{\text{ChPT}}}{\Delta l_i^{\text{ChPT}}} \right)^2. \quad (67)$$

Minimizando ambas contribuciones $\chi^2 = \chi_\delta^2 + \chi_{l_i}^2$, de forma numérica, se han obtenido los valores de las LECs:

$$l_1^r = -3.7, \quad l_2^r = 5.0, \quad l_3^r = 0.8.$$

Una vez fijadas las LECs, podemos localizar los polos que corresponden a las resonancias más ligeras en la dispersión de piones. Para visualizarlos, en la Fig. 5 mostramos $|t_{II}^{\text{IAM}}|$ en la segunda hoja de Riemann para los canales $IJ = 00, 11, 20$, donde se puede observar que en los canales 00 y 11 aparecen dos polos conjugados —como exige el principio de reflexión de Schwarz— mientras

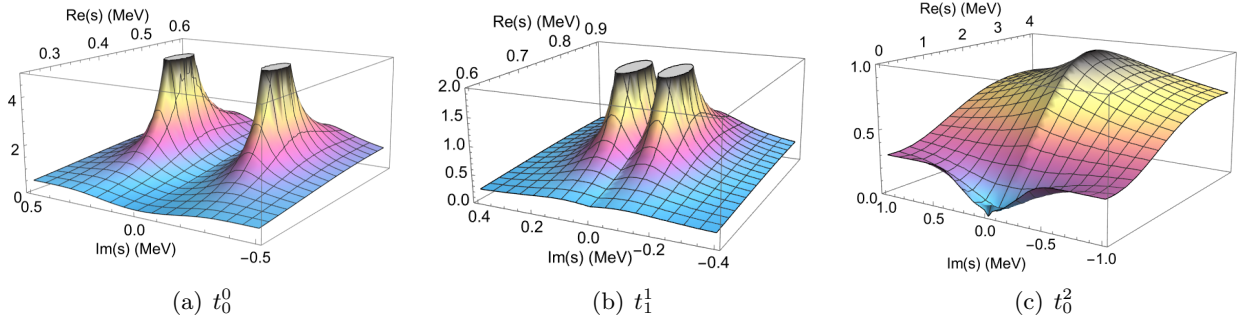


Figura 5: Valor absoluto de las amplitudes unitarizadas en la segunda hoja de Riemann $|t_{II}^{IAM}|$ para los canales $IJ = 00, 11, 20$.

que el canal 20 es no resonante. Esto se debe a que no es posible generar un estado $\bar{q}q$ con $I = 2$, lo que hace este canal repulsivo sin resonancias convencionales.

El polo de ambas resonancias se determina de manera exacta buscando la solución de la Ec. (65) y su posición en el plano complejo,

$$\sqrt{s_{\text{pole}}} = M - i\Gamma/2, \quad (68)$$

define su masa M y anchura Γ (inversa de la vida media). Las resonancias que aparecen en los canales 00 y 11 se denominan $\sigma/f_0(500)$ y $\rho(770)$, respectivamente, y sus polos en este trabajo se han obtenido en

$$\sqrt{s_{\sigma}} = 451.0 - 226.8i, \quad \sqrt{s_{\rho}} = 767.6 - 77.6i. \quad (69)$$

La $\rho(770)$ es un mesón vectorial, y un triplete de isospín ($\rho^{-}, \rho^0, \rho^{+}$), cuya anchura $\Gamma_{\rho} \simeq 155$ MeV es pequeña frente a su masa, tal y como corresponde a un estado $\bar{q}q$ [5]. En cambio, el mesón σ o $f_0(500)$, es un escalar y un singlete de isospín, y presenta una anchura $\Gamma_{\sigma} \simeq 454$ MeV incluso mayor que su masa, reflejo de su extrema inestabilidad y de una dinámica interna más compleja [5]. En términos de la dispersión, una anchura tan grande implica que su polo está muy alejado del eje real, lo que refleja su carácter difuso y no resonante en el sentido habitual.

5.2. Dependencias con la masa del pión

Dado que ChPT es una expansión perturbativa en el momento y la masa del pion, podemos explorar cómo varían los polos de las resonancias al cambiar m_{π} . Para profundizar en la naturaleza de las resonancias —especialmente la σ , que tiene los números cuánticos del vacío ($J = I = 0$) y cuyo carácter es clave para la dinámica de QCD— se estudian dos escenarios: aumentar y disminuir m_{π} . Para garantizar que la expansión de ChPT siga siendo fiable y que la amplitud de dispersión siga siendo elástica —se mantenga por debajo del umbral de producción de dos kaones— restringimos los valores de $m_{\pi} < 300$ MeV, muy por debajo de la masa del kaon.

En este trabajo se ha variado m_{π} desde su valor físico (139.57 MeV) hasta 300 MeV (Fig. 6), observándose que la masa de ambas resonancias, M_{ρ} y M_{σ} , crece al aumentar m_{π} , siendo el incremento mucho más pronunciado para la σ . En cambio, las anchuras Γ_{ρ} y Γ_{σ} decrecen al aumentar m_{π} , lo que refleja la disminución del espacio de fases $\sigma(s)$ —el umbral $2m_{\pi}$ crece más rápido que la masa de las resonancias— y por tanto la menor energía disponible para desintegrarse. Sin embargo, mientras que la reducción de Γ_{ρ} es perfectamente compatible con esta reducción cinemática [15], lo que vuelve a poner de manifiesto una naturaleza $\bar{q}q$, Γ_{σ} decrece de forma mucho más pronunciada,

¹⁰Formalmente no es un χ^2 , pues en vez de datos experimentales usamos predicciones teóricas para los observables.

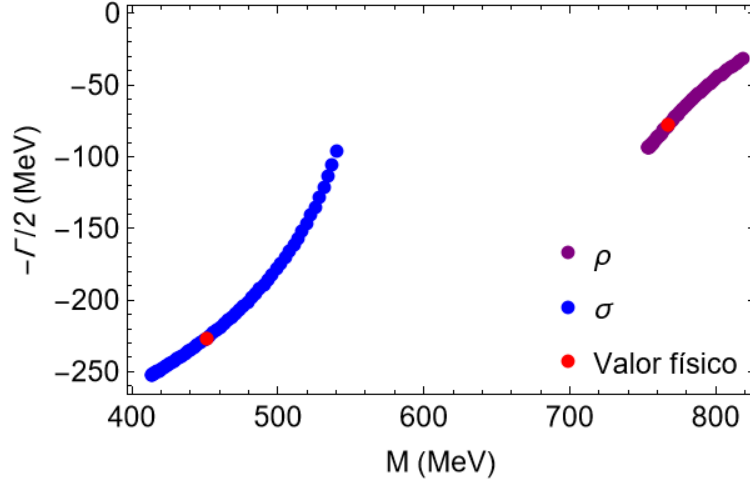


Figura 6: Comportamiento del polo de la $\sigma/f_0(500)$ y la $\rho(770)$ al variar la masa del pión.

apuntando a una dinámica interna distinta. Además, el principio de reflexión de Schwarz garantiza que los polos de ambas resonancias aparezcan siempre en pares de conjugados, tanto por debajo, tal y como se muestra en la Fig. 6, como por encima del eje real.

Estos resultados facilitan la comparación con los obtenidos en *Lattice* QCD, donde, para reducir el coste computacional, las simulaciones suelen emplear masas del pión mayores que las físicas —los piones ligeros provocan tiempos largos de autocorrelación y grandes fluctuaciones estadísticas, pues la longitud de correlación escala como $1/m_\pi$ — lo que obliga a extrapolar posteriormente al valor físico mediante la expansión quirral que acabamos de obtener.

Al aumentar la masa del pión por encima de 300 MeV¹¹, trabajos como [15] muestran un cambio cualitativo en la trayectoria de los polos de las resonancias ρ y σ : conforme m_π crece y el umbral $2m_\pi$ se eleva, los dos polos conjugados de la ρ se aproximan al eje real y su anchura Γ_ρ se anula justo cuando $M_\rho = 2m_\pi$, momento en el que uno de ellos cruza a la primera hoja de Riemann convirtiéndose en un estado ligado (una partícula estable que ya no puede decaer), mientras que su conjugado permanece en la segunda hoja prácticamente inalterado. En cambio, cuando $M_\sigma = 2m_\pi$ los polos de la σ conservan parte imaginaria ($\Gamma_\sigma \neq 0$) y continúan en la segunda hoja de Riemann, emergiendo al eje real sólo para masas de pión aún mayores, pero siempre como estados virtuales, comportamiento que refuerza la clara naturaleza $\bar{q}q$ de la ρ frente a la dinámica interna más compleja de la σ .

Al reducir m_π desde su valor físico hasta 1 MeV, se observan tendencias similares a las del caso anterior (Fig. 6). Mientras que ambas masas disminuyen al reducir m_π , el cambio de M_σ es más pronunciado y su curvatura difiere claramente de la de M_ρ . Además, Γ_ρ sigue el decrecimiento esperado por la reducción de $\sigma(s)$, mientras que Γ_σ varía ahora de forma más suave, lo que una vez más sugiere que la σ no se ajusta al patrón de un estado $\bar{q}q$ convencional.

Otro indicio de que la σ no encaja como un mesón $\bar{q}q$ surge al comparar los nonetes de sabor que incluyen el quark extraño. En los nonetes pseudoescalar (π, K, η, η') y vectorial (ρ, K^*, ω, ϕ), las masas crecen con el número de quarks extraños, tal como predice el modelo $\bar{q}q$. Sin embargo, en el nonete escalar (a_0, κ, f_0, σ) esta jerarquía se invierte: el estado más ligero es la σ , cuando en un esquema $\bar{q}q$ debería contener dos quarks extraños, y por tanto ser el más pesado de todos. Además, tal y como vimos en la introducción, mientras que un mesón vectorial $J^{PC} = 1^{--}$ (como la $\rho(770)$) puede formarse con un momento angular orbital $l = 0$ y espines alineados sin aportar energía orbital extra, un escalar $J^{PC} = 0^{++}$ (como la σ) requiere $l = 1$ para invertir la paridad, lo

¹¹Este estudio excede el alcance de este trabajo, pues en ese rango comienza a dominar la dinámica inelástica.

que implica energía orbital adicional incompatible con su baja masa observada.

Actualmente, se barajan diferentes teorías para dar explicación a la naturaleza de la σ . La propuesta con más consenso actual es que la σ es un estado formado por cuatro quarks [5] —ya sea un tetraquark $\bar{q}q\bar{q}q$ o una molécula de dos piones $\pi\pi$ — aunque también hay propuestas que lo consideran un estado formado únicamente por gluones, los llamados *glueballs* [5].

Más recientemente, se ha explorado la idea de que la σ sea un dilatón, es decir, el pseudo bosón de Goldstone asociado a la ruptura espontánea de la simetría de escala de QCD. Clásicamente, el lagrangiano de QCD en (1) en el límite quiral no contiene ninguna escala propia y sería invariante bajo la transformación

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \quad \mathcal{L}_{QCD}(x) = \lambda^{-4} \mathcal{L}_{QCD}(\lambda x), \quad (70)$$

pero esa invarianza se rompe cuánticamente por la anomalía de traza [9], reflejada en la dependencia de la constante de acople $g(\mu)$ con la escala:

$$\beta(\mu) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) + \mathcal{O}(g^5), \quad (71)$$

lo que hace que $g(\mu)$ crezca al disminuir μ . Sin embargo, si QCD poseyera un punto fijo infrarrojo $\beta(g^*) = 0$, tal y como predicen algunos resultados de *lattice* QCD [16], la teoría sería exactamente invariante bajo la simetría de escala, presentando así una simetría conforme. Como no se observa esta simetría experimentalmente, debería estar espontáneamente rota, dando lugar al llamado dilatón [16]. Dentro de este contexto, la σ es el candidato más natural para ser el dilatón, pues es el escalar más ligero con los números cuánticos del vacío. De ser un dilatón puro, su masa M_σ debería tender a cero en el límite quiral $m_\pi \rightarrow 0$. Sin embargo, como muestra la Fig. 6, M_σ no se anula cuando $m_\pi \rightarrow 0$ lo que contradice la hipótesis de dilatón ideal. Podría argumentarse que una pequeña ruptura explícita de la simetría de escala o efectos del quark extraño —no incluidos en el límite de dos sabores— impedirían que se anulase exactamente el valor de M_σ , pero el hecho de que permanezca masivo en el límite quiral debilita seriamente su interpretación como dilatón.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la dispersión de piones —los mesones más ligeros del espectro hadrónico— a bajas energías y la generación de las resonancias más ligeras que se producen en su interacción. Para ello se ha calculado su amplitud de dispersión usando el lagrangiano quiral efectivo a orden $\mathcal{O}(p^2)$ y se han utilizado resultados previos en la literatura a orden $\mathcal{O}(p^4)$ para incluir los efectos de un loop. Al comprobar que la expansión perturbativa en ondas parciales en ChPT no satisface unitariedad exactamente, se ha obtenido la amplitud del método de la amplitud inversa usando relaciones de dispersión, lo que ha permitido continuar las amplitudes al plano complejo de s y localizar los polos en la segunda hoja de Riemann de las resonancias $\rho(770)$ y $\sigma(500)$.

El estudio de la variación de estos polos al cambiar la masa del pión revela comportamientos muy distintos: la $\rho(770)$ muestra un comportamiento compatible con lo esperado de un estado $\bar{q}q$ convencional, mientras que la $\sigma(500)$ muestra una mayor dependencia en m_π , lo que apunta a una estructura molecular o tetraquark. Asimismo, se ha estudiado la posible relación de la $\sigma(500)$ con la dinámica conforme de QCD, que continúa siendo un tema de debate actualmente.

Estos resultados, obtenidos únicamente a partir de los principios de unitariedad, analiticidad y simetría quiral, demuestran la potencia de combinar teorías efectivas con métodos no perturbativos para describir la fenomenología de QCD. A pesar de las aproximaciones realizadas (elasticidad, y la aproximación del corte izquierdo), la consistencia con estudios más completos respalda la validez de este enfoque como puente entre la teoría fundamental y las observaciones experimentales.

Referencias

- [1] A. D. Martin y F. Halzen, *Quarks and Leptons: Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley and Sons (WIE), 12 September 1984.
- [2] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445–2459.
- [3] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346–1349.
- [4] D. J. Gross y F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343–1346.
- [5] **Particle Data Group** Collaboration, S. Navas et al., *Review of particle physics*, *Phys. Rev. D* **110** (2024), no. 3 030001.
- [6] S. Scherer, *Introduction to chiral perturbation theory*, *Adv. Nucl. Phys.* **27** (2003) 277.
- [7] J. Goldstone, *Field Theories with Superconductor Solutions*, *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.
- [8] M. Niehus, M. Hoferichter, B. Kubis, y J. Ruiz de Elvira, *Two-Loop Analysis of the Pion Mass Dependence of the ρ Meson*, *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021), no. 10 102002.
- [9] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 1995.
- [10] A. Dobado y J. R. Pelaez, *The Inverse amplitude method in chiral perturbation theory*, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 3057–3073.
- [11] S. Mandelstam, *Determination of the pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity*, *Physical Review* **112** (1958) 1344.
- [12] H. M. Nussenzveig, *Causality and dispersion relations*, vol. 95. Academic Press, New York, London, 1972.
- [13] R. Garcia-Martin et al., *The Pion-pion scattering amplitude. IV: Improved analysis with once subtracted Roy-like equations up to 1100 MeV*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 074004.
- [14] J. Bijnens y G. Ecker, *Mesonic low-energy constants*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **64** (2014) 149–174.
- [15] C. Hanhart, J. R. Pelaez, y G. Rios, *Quark mass dependence of the rho and sigma from dispersion relations and Chiral Perturbation Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 152001.
- [16] R. Zwicky, *QCD with an infrared fixed point and a dilaton*, *Phys. Rev. D* **110** (2024), no. 1 014048.