UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Sección Departamental de Informática y Automática

Sobre dos lógicas categóricas: lógica lineal y álgebra con tipos ordenados

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Narciso Martí Oliet

Director

José Messeguer Guaita

Madrid, 2016

ISBN: 978-84-669-0704-0

Sobre Dos Lógicas Categóricas: Lógica Lineal y Álgebra con Tipos Ordenados

Tesis Doctoral

Narciso Martí Oliet

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Mayo 1991

Esta tesis fue publicada en 2001 en la colección de tesis doctorales
en cd-rom, serie ciencias exactas y de la naturaleza, del Servicio de
Publicaciones de la UCM, con ISBN 84–669–0704–1.

Sobre Dos Lógicas Categóricas: Lógica Lineal y Álgebra con Tipos Ordenados

Memoria presentada por D. Narciso Martí Oliet para la obtención del Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid.

Madrid, Mayo 1991

Director: Dr. José Meseguer Guaita
Tutor: Dr. David de Frutos Escrig

A Eva,
with all my love

From a categorical point of view, algebra and logic are the same,
provided in algebra one admits many-sorted operations
and in logic one pays attention to equality of deductions.

J. Lambek, "On the Unity of Algebra and Logic"

Gracias

A mi director y amigo José Meseguer por haberme enseñado muchísimo más que lo contenido en este trabajo puede mostrar, por haber depositado su confianza en mí desde que nos conocimos en Granada, y por haberme animado, apoyado y ayudado sin vacilar en todo momento, tanto profesional como personalmente.

A mi tutor David de Frutos y María Inés, por haber estado siempre dispuestos a ayudarme desde el otro lado del océano.

Al Computer Science Laboratory de SRI International y todos sus miembros, por haberme aceptado en su seno y por haberme proporcionado un lugar de trabajo inigualable poniendo todos sus recursos a mi disposición, incluyendo ayuda económica para la realización de viajes. En particular, a los directores del CSL John Rushby y Mark Moriconi, por su apoyo y estímulo, y a Pat Lincoln, Sam Owre y Natarajan Shankar por sus valiosos discusiones, comentarios y consejos sobre cualquier aspecto de la lógica, y por su amistad. Y muy en especial a Tim Winkler, quien me ha enseñado muchos más comandos de los que recuerdo y que tanto interés, empeño y trabajo de su parte ha puesto para poder imprimir el símbolo ⅋ de la forma adecuada.

A Andrea Asperti, Michael Barr, Gianluigi Bellin, Val Breazu-Tannen, Luca Cardelli, Pierre-Louis Curien, Jean-Yves Girard, Joseph Goguen, Carl Gunter, Simone Martini, John Mitchell, Andre Scedrov, Robert Seely y Ross Street por sus apreciables comentarios y consejos sobre este trabajo.

Al Ministerio de Educación y Ciencia por la beca de formación de postgrado en el extranjero que ha posibilitado mi estancia en SRI y la realización de esta investigación. También a la Office of Naval Research y la National Science Foundation por su ayuda parcial en este sentido; especialmente a Ralph Wachter de ONR por su interés en este trabajo y apoyo.

Y a Eva, *por todo.*

Índice general

Capítulo 0

Introducción: sobre lógicas categóricas

La lógica categórica como disciplina matemática se puede definir (sin ninguna intención de exactitud) como el estudio de la lógica usando teoría de categorías. Aunque este intento de definición pueda hacer pensar que este campo es algo muy concreto y con poca variedad, la realidad es todo lo contrario, puesto que la lógica categórica es un área fascinante y asombrosamente rica en la cual se han obtenido resultados de mucha importancia, y que está resultando muy útil en las aplicaciones en informática. No tenemos espacio aquí para decir mucho al respecto, puesto que esta tarea de por sí podría ocupar varios libros, pero queremos destacar la importancia que tiene la teoría de topos, cuyas relaciones con la lógica intuicionista de orden superior están muy bien explicadas en los libros [93, 14, 64]. Otra cuestión muy interesante que no tratamos en este trabajo es la interpretación de cuantificadores mediante adjunciones [96, 140]. Un par de referencias de carácter introductorio donde el lector puede encontrar mucha más información sobre el estudio de la lógica usando herramientas de teoría de categorías son [80] de Kock y Reyes, y el conjunto de trabajos [130] de Poigné.

Un aspecto que vale la pena destacar es el interés que el estudio de la lógica desde un punto de vista categórico ha adquirido para la informática, en varios campos que van desde la implementación de lenguajes funcionales [33] hasta la teoría de la concurrencia [113], pasando por diferentes lógicas de programas [125]. Una de las razones a las que se debe este interés es el aspecto constructivo de muchas de estas lógicas, en las que las pruebas se corresponden con computaciones. Este aspecto ha sido explotado sobre todo en la teoría de tipos, donde podemos destacar el estudio de modelos categóricos del lambda cálculo polimórfico de Girard-Reynolds [47, 135], de la teoría de tipos de Martin-Löf [107], y de tipos dependientes en general [29, 38, 75, 109, 141, 142, 146, 147, entre otros]. Las aplicaciones de estas teorías de tipos en programación funcional pueden verse en la colección de artículos [73]. De hecho, la lógica lineal de Girard [49] que estudiamos en la Parte I está relacionada con estos estudios, teniendo en cuenta que su origen histórico se basa en los espacios coherentes estudiados como semántica del lambda cálculo polimórfico [48] y que, bajo la identificación de tipos con fórmulas, las conectivas de la lógica lineal aparecen como refinamientos de las conectivas (o constructores de tipos) más habituales en programación funcional, por ejemplo la implicación lineal $\multimap$ es un refinamiento de $\Rightarrow$.

En esta introducción tenemos dos objetivos principales. En primer lugar, queremos motivar la correspondencia entre categorías y lógicas postulada por Lambek y Lawvere que constituye la base fundamental de la lógica categórica. En este sentido la Parte I de este trabajo sigue el espíritu de los trabajos de Lambek [88, 89, 90] que identifican categorías con sistemas deductivos en los que se toma en consideración una relación de equivalencia entre pruebas. Por otra parte, la Parte II sigue el espíritu de los trabajos pioneros de Lawvere [94], generalizando la semántica funtorial del álgebra heterogénea al álgebra con tipos ordenados de [62]. Si no al final de esta introducción, esperamos que al menos al final de este trabajo el lector entienda que, en las palabras de J. Lambek [91],

> ...desde un punto de vista categórico, el álgebra y la lógica son lo mismo, supuesto que en álgebra se admitan operaciones heterogéneas, y en lógica se preste atención a la igualdad entre deducciones.

En segundo lugar, queremos explicar cómo se puede formalizar la noción intuitiva de que una lógica es categórica. Para ello, resumimos el trabajo de Meseguer [110], que empieza formalizando el concepto de lógica (general) y continúa con el desarrollo en ese marco del concepto que nos interesa de *lógica categórica*. Entonces podemos destacar el hecho de que tanto la lógica lineal estudiada en la Parte I como el álgebra con tipos ordenados cuya semántica funtorial se estudia en la Parte II son ambas lógicas categóricas. Concluimos esta introducción con un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo, y algunas ideas sobre las que estamos trabajando.

0.1. Categorías y sistemas deductivos

En sus artículos [88, 89, 90], Lambek mostró cómo las categorías corresponden a sistemas deductivos en los que se toma en consideración una relación de equivalencia entre pruebas. Podemos resumir brevemente esta correspondencia diciendo que los objetos se corresponden con fórmulas y los morfismos se corresponden con (clases de equivalencia de) pruebas. Un ejemplo paradigmático de esta clase de correspondencias es la existente entre la lógica proposicional intuicionista (con pruebas de deducción natural escritas en términos del lambda cálculo con tipos) y las categorías cartesianas cerradas, que nosotros vamos a generalizar en el Capítulo 3 de la Parte II. Remitimos al lector al excelente libro [93] para los detalles de esta correspondencia, así como también para otra de gran interés entre topos y lógicas intuicionistas de orden superior.

En esta sección consideramos un ejemplo mucho más básico para explicar las ideas clave en esta correspondencia entre lógica y categorías. Recordemos la definición de una categoría $\mathcal{C}$ con productos finitos [99], empezando por la misma definición de categoría. En primer lugar, tenemos dos colecciones $Ob(\mathcal{C})$ de *objetos* y $Mor(\mathcal{C})$ de *morfismos*. Cada morfismo $f \in Mor(\mathcal{C})$ tiene asociados dos objetos $\partial_0(f), \partial_1(f) \in Ob(\mathcal{C})$, llamados *origen* y *destino*, respectivamente. Para decir que f es un morfismo en $\mathcal{C}$ con origen A y destino B escribimos

$$f : A \to B \; en \; \mathcal{C}.$$

Cada objeto $A \in Ob(\mathcal{C})$ tiene asociado un morfismo *identidad* id_A cuyo origen es A y cuyo destino es también A, es decir, $id_A : A \to A\ en\ \mathcal{C}$ para todo objeto A. Dados $f : A \to B, g : B \to C\ en\ \mathcal{C}$, existe un morfismo $f; g : A \to C\ en\ \mathcal{C}$ llamado la *composición* de f seguido de g. Esta operación parcial de composición debe satisfacer la siguiente ecuación de asociatividad: Si $f : A \to B, g : B \to C$ y $h : C \to D\ en\ \mathcal{C}$, entonces $(f; g); h = f; (g; h)$. Finalmente las identidades son unidades para esta operación, en el sentido de que si $f : A \to B\ en\ \mathcal{C}$, entonces $id_A; f = f$ y $f; id_B = f$.

Para que una categoría tenga productos finitos es necesario y suficiente que tenga un objeto final y productos binarios [99]. Un objeto $1 \in Ob(\mathcal{C})$ se llama *final* si para todo objeto A existe un único morfismo $\langle\rangle_A : A \to 1$. Por último, productos binarios se definen como sigue. Dados objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, existen un objeto $A \times B$, llamado el *producto* de A y B, y dos morfismos $\pi_{A,B} : A \times B \to A$, $\pi'_{A,B} : A \times B \to B\ en\ \mathcal{C}$, llamados *proyecciones*, que satisfacen la siguiente propiedad universal: dado un objeto C y morfismos $f : C \to A, g : C \to B\ en\ \mathcal{C}$ cualesquiera, existe un único morfismo $\langle f, g\rangle : C \to A \times B\ en\ \mathcal{C}$ tal que $\langle f, g\rangle; \pi_{A,B} = f$ y $\langle f, g\rangle; \pi'_{A,B} = g$. Una forma típica de presentar esta definición de productos binarios es mediante el siguiente diagrama conmutativo, donde la flecha en trazo discontinuo indica la propiedad de existencia y unicidad del morfismo $\langle f, g\rangle$.

$$
\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_{A,B}"'] \arrow[r, "\pi'_{A,B}"] & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\langle f, g\rangle"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Conviene resaltar que la definición de objeto final o productos, así como cualquier otra construcción universal, sólo los determina salvo isomorfismo, por lo que, para fijar la estructura, suponemos que se realiza una elección arbitraria.

Esta definición de categoría con productos finitos puede presentarse también de la forma siguiente. Como antes, tenemos dos colecciones de objetos y morfismos y las funciones que asignan a un morfismo su origen y destino, manteniendo la notación anterior $f : A \to B\ en\ \mathcal{C}$. Las identidades y la composición vienen dadas por las reglas

$$
\frac{A \ \in\ Ob(\mathcal{C})}{id_A : A \to A\ en\ \mathcal{C}} \qquad \frac{f : A \to B,\ g : B \to C\ en\ \mathcal{C}}{f; g : A \to C\ en\ \mathcal{C}},
$$

y las ecuaciones que tienen que satisfacer son

$$
\frac{f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D\ en\ \mathcal{C}}{f; (g; h) = (f; g); h} \qquad \frac{f : A \to B\ en\ \mathcal{C}}{id_A; f = f} \qquad \frac{f : A \to B\ en\ \mathcal{C}}{f; id_B = f}.
$$

El objeto final está caracterizado por

$$
\frac{}{1 \ \in\ Ob(\mathcal{C})} \qquad \frac{A \ \in\ Ob(\mathcal{C})}{\langle\rangle_A : A \to 1\ en\ \mathcal{C}} \qquad \frac{f : A \to 1\ en\ \mathcal{C}}{f = \langle\rangle_A}.
$$

Para los productos binarios, tenemos en primer lugar reglas que afirman la existencia del objeto producto y de las proyecciones:

$$\frac{A, B \;\in\; Ob(\mathcal{C})}{A \times B \;\in\; Ob(\mathcal{C})} \qquad \frac{A, B \;\in\; Ob(\mathcal{C})}{\pi_{A,B} : A \times B \to A \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{A, B \;\in\; Ob(\mathcal{C})}{\pi'_{A,B} : A \times B \to B \; en \; \mathcal{C}}.$$

La existencia del morfismo inducido se expresa mediante la regla

$$\frac{f : C \to A, \; g : C \to B \; en \; \mathcal{C}}{\langle f, g \rangle : C \to A \times B \; en \; \mathcal{C}},$$

y que el diagrama de arriba conmuta es afirmado por las reglas ecuacionales

$$\frac{f : C \to A, \; g : C \to B \; en \; \mathcal{C}}{\langle f, g \rangle ; \pi_{A,B} = f} \qquad \frac{f : C \to A, \; g : C \to B \; en \; \mathcal{C}}{\langle f, g \rangle ; \pi'_{A,B} = g}.$$

Finalmente, es fácil ver que la unicidad del morfismo inducido en la definición de arriba es equivalente a la satisfacción de la siguiente regla ecuacional

$$\frac{h : C \to A \times B \; en \; \mathcal{C}}{\langle h; \pi_{A,B} \, , \; h; \pi'_{A,B} \rangle = h}.$$

Hasta aquí no hay nada nuevo, pero reconsideremos este conjunto de reglas tras los siguientes cambios en la terminología y la notación:

$$\begin{array}{rcl} \text{objeto} & \longmapsto & \text{fórmula} \\ \text{morfismo} & \longmapsto & \text{secuente} \\ f : A \to B & \longmapsto & f : A \vdash B \\ A \times B & \longmapsto & A \wedge B \\ 1 & \longmapsto & \top. \end{array}$$

Las dos reglas

$$\frac{}{\top \;\in\; For(\mathcal{C})} \qquad \frac{A, B \;\in\; For(\mathcal{C})}{A \wedge B \;\in\; For(\mathcal{C})}$$

afirman que hay una fórmula constante $\top$ y que la colección de fórmulas es cerrada para la operación binaria $\wedge$.

Si en las reglas siguientes nos olvidamos del nombre del secuente (es decir, para cada $f : A \vdash B$ nos quedamos sólo con $A \vdash B$),

$$\frac{A \;\in\; For(\mathcal{C})}{id_A : A \vdash A \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{A \;\in\; For(\mathcal{C})}{\langle\rangle_A : A \vdash \top \; en \; \mathcal{C}}$$

$$\frac{f : A \vdash B, \; g : B \vdash C \; en \; \mathcal{C}}{f; g : A \vdash C \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{f : C \vdash A, \; g : C \vdash B \; en \; \mathcal{C}}{\langle f, g \rangle : C \vdash A \wedge B \; en \; \mathcal{C}}$$

$$\frac{A, B \;\in\; For(\mathcal{C})}{\pi_{A,B} : A \wedge B \vdash A \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{A, B \;\in\; For(\mathcal{C})}{\pi'_{A,B} : A \wedge B \vdash B \; en \; \mathcal{C}},$$

es inmediato que lo que se obtiene es un cálculo de secuentes para la lógica intuicionista proposicional cuya única conectiva es la conjunción. Sin embargo, la novedad es que, al tener los secuentes la forma $f : A \vdash B$, con un nombre f, esas mismas reglas proporcionan un lenguaje de pruebas, que se completa al introducir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{f : A \vdash B \text{ en } \mathcal{C}}{id_A; f = f} \qquad \frac{f : A \vdash B \text{ en } \mathcal{C}}{f; id_B = f} \qquad \frac{f : A \vdash 1 \text{ en } \mathcal{C}}{f = \langle\rangle_A}$$

$$\frac{f : C \vdash A,\ g : C \vdash B \text{ en } \mathcal{C}}{\langle f, g\rangle; \pi_{A,B} = f} \qquad \frac{f : C \vdash A,\ g : C \vdash B \text{ en } \mathcal{C}}{\langle f, g\rangle; \pi'_{A,B} = g}$$

$$\frac{f : A \vdash B,\ g : B \vdash C,\ h : C \vdash D \text{ en } \mathcal{C}}{f; (g; h) = (f; g); h} \qquad \frac{h : C \vdash A \times B \text{ en } \mathcal{C}}{\langle h; \pi_{A,B}\,,\ h; \pi'_{A,B}\rangle = h}.$$

Así pues, podemos definir una *prueba* $[\alpha] : A \vdash B$ como la clase de equivalencia de todas las expresiones de prueba $\alpha : A \vdash B$ que son identificadas por esas reglas ecuacionales, haciendo abstracción de esta forma de la presentación completamente sintáctica más habitual. De hecho, esta equivalencia entre pruebas está plenamente de acuerdo con las reducciones de pruebas en cálculos de secuentes en las presentaciones usuales de la teoría de pruebas [132].

Resumiendo, podemos decir que una clase de categorías coincide con un sistema deductivo para una lógica intuicionista, donde la estructura categórica está estrechamente conectada con la estructura lógica; en este ejemplo particular, puede verse como las identidades corresponden con el (esquema de) axioma de identidad para la lógica, la composición se corresponde con la regla de corte, y el producto (binario) con la conjunción $\wedge$. De forma completamente análoga podemos añadir una estructura cerrada a una categoría con productos (obteniendo así una categoría cartesiana cerrada), correspondiente a la implicación lógica, y la adición de coproductos finitos se corresponde con la disyunción[1] [93].

Éste es el punto de vista considerado en la Parte I sobre la lógica lineal. Esta lógica, introducida recientemente por Girard [49], se obtiene a partir de (una presentación como cálculo de secuentes) de la lógica clásica al prohibir las reglas estructurales de debilitamiento y contracción

$$\frac{A \vdash B}{A, C \vdash B} \qquad \frac{A, A \vdash B}{A \vdash B},$$

lo cual tiene importantes consecuencias en la forma que las conectivas adquieren en la lógica, así como en su poder expresivo; por ejemplo, la conjunción usual $\wedge$ se separa en dos conectivas $\otimes$ y $\&$, y por otro lado, la lógica tiene una negación clásica (en el sentido de que la ley de la doble negación es válida) al mismo tiempo que es constructiva. Usando la noción de categoría con un objeto dualizante (véase la Sección 3.1 en la Parte I), refinamos los resultados obtenidos por Seely [143] sobre la relación entre lógica lineal y categorías lineales, con un enfoque general análogo al esbozado en el ejemplo anterior. Un aspecto muy importante, que no discutimos aquí, pero que está completamente motivado y desarrollado en el Capítulo 2 de la Parte I, es que añadimos una tercera componente a esta correspondencia entre lógica y categorías, a saber, computaciones en sistemas concurrentes,

[1] Desafortunadamente, si se quiere realizar un tratamiento siguiendo este estilo de la negación clásica no se obtiene ninguna información nueva y las categorías correspondientes se reducen a las álgebras de Boole (véase la Proposición 71 en la Parte I). Ésta es una indicación de la falta de “constructividad” en las pruebas de la lógica clásica.

más exactamente computaciones en redes de Petri en este trabajo. Esta tercera componente se obtiene a partir de los resultados de Meseguer y Montanari en [116, 117]. De este modo obtenemos una correspondencia triangular entre lógica, teoría de categorías y teoría de la concurrencia.

0.2. Álgebras en categorías

Habiendo visto en la sección anterior "la unidad de las categorías y las lógicas," vamos a ver ahora "la unidad de las categorías y el álgebra," presentando los resultados de Lawvere y Bénabou para las álgebras homogénea y heterogénea [94, 15]. Presentamos aquí el caso heterogéneo; el caso homogéneo puede verse como el caso particular en el que sólo se tiene un tipo.

Consideremos una *signatura* heterogénea dada por un conjunto de tipos S y una familia de conjuntos $\Sigma = \{\Sigma_{\overline{s},s} \mid \overline{s} \in S^*, s \in S\}$ de símbolos de operación (disjuntos dos a dos). La definición conjuntista usual de una (S,Σ)-*álgebra* heterogénea $\mathbf{A}$ consiste en dar un conjunto A_s para cada $s \in S$ y una función $A_\sigma : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s$ para cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$. En el caso en que σ es una constante en $\Sigma_{\varepsilon,s}$ (donde ε denota la lista vacía), su interpretación consiste en un elemento $A_\sigma \in A_s$, o equivalentemente en una función $A_\sigma : 1 \to A_s$ con origen en el conjunto unitario 1, de forma que este caso se puede considerar un caso particular del anterior. Además, la definición de (S,Σ)-*homomorfismo* heterogéneo entre dos (S,Σ)-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ consiste en una S-función $h = \{h_s : A_s \to B_s \mid s \in S\}$ que satisface la condición de homomorfismo

$$h_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n))$$

para todo $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$.

La primera idea importante es notar que la única propiedad de conjuntos y funciones que hemos usado en estas definiciones es la existencia de productos cartesianos $A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$ y de un conjunto unitario 1. Estas propiedades tienen una formulación categórica completamente general en la noción de categoría con productos finitos que hemos visto en la sección anterior. Si $\mathcal{C}$ es una *categoría con productos finitos*, podemos definir las nociones de (S,Σ)-álgebra y (S,Σ)-homomorfismo *en* $\mathcal{C}$ por el simple método de interpretar las anteriores definiciones en términos de objetos y morfismos en vez de conjuntos y funciones. Por ejemplo, un (S,Σ)-*homomorfismo en* $\mathcal{C}$ entre (S,Σ)-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$ consiste en una S-familia de morfismos $\{h_s : A_s \to B_s \mid s \in S\}$ en $\mathcal{C}$ tal que para todo $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$,

$$A_\sigma; h_s = (h_{s_1} \times \cdots \times h_{s_n}); B_\sigma$$

como morfismos $A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \longrightarrow B_s$, es decir, el siguiente diagrama de morfismos en $\mathcal{C}$ conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \arrow[r, "A_\sigma"] \arrow[d, "h_{s_1} \times \cdots \times h_{s_n}"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\
B_{s_1} \times \cdots \times B_{s_n} \arrow[r, "B_\sigma"] & B_s
\end{tikzcd}$$

En particular, $A_\sigma; h_s = id_1; B_\sigma = B_\sigma$ para $\sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$.

La segunda idea importante es la interpretación categórica de las variables. En este sentido, cabe recordar que una *ecuación* heterogénea tiene la forma $(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n)\, t = t'$ donde $x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n$ es un *contexto* de variables (distintas dos a dos) y t, t' son términos cuyas variables están entre las dadas por el contexto. Entonces, lo que hacemos es considerar un *término en un contexto* de variables explícito. De esta forma, es fácil ver que, dada una (S, Σ)-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$, la operación derivada asociada a un término t de tipo s en un contexto $x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n$ da lugar a un *morfismo en* $\mathcal{C}$

$$[\![t]\!]_A : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s.$$

En particular las variables se interpretan como proyecciones, es decir, la operación derivada $[\![x_i]\!]_A$ en el contexto anterior es la i-ésima proyección

$$\pi_i : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \longrightarrow A_{s_i}.$$

Con esta interpretación categórica de los términos se tiene que la composición en la categoría corresponde a sustitución en los términos.

En este marco, una (S, Σ)-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$ *satisface* una ecuación $(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n)\, t = t'$ si $[\![t]\!]_A = [\![t']\!]_A$ como morfismos $A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s$ en $\mathcal{C}$.

El gran avance en este punto de vista se obtiene al darse cuenta de que, si $\mathbf{A}$ es una (Σ, Γ)-álgebra (es decir, una Σ-álgebra que satisface el conjunto de ecuaciones Γ), la operación $[\![\_]\!]_A$ constituye un funtor que conserva productos $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \mathcal{C}$ donde $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ es la categoría definida como sigue. Su conjunto de objetos es S^*, o sea, listas finitas de tipos, y un morfismo $s_1 \ldots s_n \longrightarrow r_1 \ldots r_m$ viene dado por una lista $[t_1], \ldots, [t_m]$ de clases de equivalencia módulo las ecuaciones Γ de Σ-términos t_i en el contexto de variables $x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n$. La composición en esta categoría se define mediante la sustitución de términos.

Pero es más, esta correspondencia es biyectiva, en el sentido de que todo funtor $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \mathcal{C}$ que conserva productos da lugar a una (Σ, Γ)-álgebra en $\mathcal{C}$. De este modo, álgebras en $\mathcal{C}$ se identifican con funtores que conservan productos $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \mathcal{C}$, y los homomorfismos entre tales álgebras se identifican con las transformaciones naturales entre tales funtores. Además, la construcción de la categoría $\mathcal{L}_T$ para una teoría ecuacional heterogénea T da lugar a una adjunción entre tales teorías y las categorías con productos finitos. En la Sección 0.4, un poco más adelante, veremos que estos resultados muestran que el álgebra heterogénea es una *lógica categórica*.

En la Parte II desarrollamos en primer lugar una semántica categórica para el álgebra con tipos ordenados [62], siguiendo el espíritu de esta discusión, y generalizando todos estos resultados. Luego, estudiamos una extensión de orden superior, pasando de categorías con productos finitos a categorías cartesianas cerradas, y considerando un lenguaje de términos que es un lambda cálculo tipado con subtipos. De esta forma, generalizamos la correspondencia entre categorías cartesianas cerradas y lambda cálculo con tipos presentada en [93].

0.3. Lógicas generales

La abundancia de lógicas es algo muy evidente. Sin tratar de ser exhaustivos ni sistemáticos podemos mencionar, por ejemplo, lógicas ecuacionales, intuicionistas, clásicas, homogéneas, heterogéneas, de primer orden, de orden superior, modales, temporales, condicionales, etc. así como diversas combinaciones entre ellas. Esta situación y la importante cuestión de las aplicaciones de las diferentes lógicas en informática, ha hecho que varios autores hayan dedicado su atención a la cuestión de formalizar qué se entiende por una lógica. En general, se pueden distinguir dos enfoques diferentes, uno más sintáctico desde la teoría de pruebas, donde la noción de deducción es fundamental, y otro más semántico desde la teoría de modelos donde la noción básica es la de satisfacción. Aquí vamos a resumir algunas de las ideas principales desarrolladas por Meseguer en [110], donde esta cuestión se aborda desde un punto de vista que trata de unificar los dos enfoques comentados. La idea básica es que una lógica tiene dos componentes. Por un lado un sistema de deducción que proporciona el aspecto sintáctico, y por otro una institución (noción tomada del trabajo de Goguen y Burstall [57]) que proporciona la componente semántica de los modelos para una lógica. En esta sección damos sólo algunas de las definiciones principales, las necesarias para hacer ver cómo el trabajo desarrollado en las dos partes que siguen se encuadra dentro de un marco formal muy general; para las motivaciones subyacentes a estos conceptos así como para una discusión más completa, ejemplos y resultados sobre ellos, remitimos al lector al artículo original [110].

Definición 1 [110] Un *sistema de deducción* es un triple $\mathcal{E} = (\underline{Sign}, sen, \vdash)$ donde

- $\underline{Sign}$ es una categoría cuyos objetos se llaman *signaturas*,
- sen es un funtor[2] $sen : \underline{Sign} \longrightarrow \underline{Set}$ que asocia a cada signatura un conjunto de *sentencias*, y
- $\vdash$ es una función que a cada signatura Σ en $\underline{Sign}$ le asocia una relación binaria $\vdash_\Sigma \subseteq \mathcal{P}(sen(\Sigma)) \times sen(\Sigma)$, llamada Σ-*deducción*,

tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

- *Reflexividad*: para toda $\varphi \in sen(\Sigma)$, $\{\varphi\} \vdash_\Sigma \varphi$;
- *Monotonía*: si $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ y $\Gamma' \supseteq \Gamma$, entonces $\Gamma' \vdash_\Sigma \varphi$;
- *Transitividad*: si $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi_i$ para $i \in I$, y $\Gamma \cup \{\varphi_i \mid i \in I\} \vdash_\Sigma \psi$, entonces $\Gamma \vdash_\Sigma \psi$;
- $\vdash$-*traducción*: si $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, entonces para todo $H : \Sigma \to \Sigma'$ en $\underline{Sign}$, $H(\Gamma) \vdash_{\Sigma'} H(\varphi)$. $\Box$

Ejemplo 2 Un punto interesante que vale la pena mencionar sobre la forma en que esta definición se aplica a la lógica lineal es el siguiente. Como veremos en la Parte I, una de las características más importantes de la lógica lineal es la ausencia de las reglas estructurales de debilitamiento y contracción

$$\frac{A \vdash B}{A, C \vdash B} \qquad\qquad \frac{A, A \vdash B}{A \vdash B}.$$

[2] La función $sen(H)$ asociada por el funtor sen a un morfismo de signaturas H se denota también H.

Si interpretamos $\vdash$ en estas reglas como el $\vdash$ que aparece en la definición anterior para alguna signatura, entonces la ausencia de tales reglas parece indicar que la lógica lineal no satisface la condición de *Monotonía*, y que por tanto no es un sistema de deducción según esta definición. Sin embargo, lo que ocurre es que hay que tener en cuenta cuál es la noción adecuada de sentencia para la lógica lineal; nuestros resultados en la Parte I van a dejar claro que para una signatura consistente en un conjunto de constantes S, una sentencia en la lógica lineal consiste precisamente en un secuente de la forma $\Gamma \vdash \Delta$ donde Γ y Δ son listas de fórmulas de lógica lineal con constantes en S, y que el símbolo $\vdash$ en la anterior definición se interpreta como la barra horizontal en las reglas de inferencia que permiten deducir un secuente a partir de otros. Desde este punto de vista, la condición de *Monotonía* se satisface y la lógica lineal constituye en efecto un sistema de deducción.

Como es habitual, una teoría, también llamada presentación, se define como una colección de sentencias. Algunos autores definen teorías como presentaciones cerradas bajo deducción, pero tal diferenciación no nos es necesaria.

Definición 3 Dado un sistema de deducción $\mathcal{E}$, la categoría $\underline{Th}$ de *teorías* tiene como objetos pares $T = (\Sigma, \Gamma)$ donde Σ es una signatura y $\Gamma \subseteq sen(\Sigma)$, y como morfismos $H : (\Sigma, \Gamma) \longrightarrow (\Sigma', \Gamma')$, llamados *morfismos de teorías*, morfismos de signaturas $H : \Sigma \to \Sigma'$ tales que para toda sentencia $\varphi \in \Gamma$, $\Gamma' \vdash_{\Sigma'} H(\varphi)$.

La categoría $\underline{Th}_0$ es la subcategoría de $\underline{Th}$ que tiene los mismos objetos que $\underline{Th}$ pero cuyos morfismos son aquellos morfismos de teorías $H : (\Sigma, \Gamma) \longrightarrow (\Sigma', \Gamma')$ que conservan axiomas, es decir, $H(\Gamma) \subseteq \Gamma'$. $\Box$

Como ya hemos mencionado, la componente semántica de una lógica está basada en la noción de institución debida a Goguen y Burstall [57]. Si los morfismos de signaturas se ven como cambios de notación, la interpretación intuitiva de la condición de $\models$-invarianza es que la relación de satisfacción es conservada por los cambios de notación.

Definición 4 [57] Una *institución* $\mathcal{I} = (\underline{Sign}, sen, \underline{Mod}, \models)$ consta de

- una categoría $\underline{Sign}$ de *signaturas*,
- un funtor $sen : \underline{Sign} \longrightarrow \underline{Set}$ que asocia a cada signatura un conjunto de *sentencias*,
- un funtor $\underline{Mod} : \underline{Sign}^{op} \longrightarrow \underline{Cat}$ que asocia a cada signatura una categoría de *modelos*[3], y
- una función $\models$ que a cada signatura Σ en $\underline{Sign}$ le asocia una relación binaria $\models_\Sigma \subseteq Ob(\underline{Mod}(\Sigma)) \times sen(\Sigma)$, llamada Σ-*satisfacción*,

tales que la siguiente propiedad es válida: para todo modelo M' en $\underline{Mod}(\Sigma')$, morfismo $H : \Sigma \to \Sigma'$ y sentencia $\varphi \in sen(\Sigma)$:

$$\models\text{-}invarianza\text{:}\quad H^\flat(M') \models_\Sigma \varphi \text{ si y sólo si } M' \models_{\Sigma'} H(\varphi).\ \Box$$

[3]Escribimos $\underline{Mod}(H) = H^\flat$ para un morfismo H en $\underline{Sign}$.

Con estos datos, se puede definir una relación, también denotada $\models$ siguiendo la práctica habitual, $\models_\Sigma \subseteq \mathcal{P}(sen(\Sigma)) \times sen(\Sigma)$ como sigue:

$$\Gamma \models_\Sigma \varphi \text{ si y sólo si } M \models_\Sigma \varphi \text{ para todo modelo } M \text{ en } \underline{Mod}(\Sigma, \Gamma),$$

donde $\underline{Mod}(\Sigma, \Gamma)$ denota la subcategoría plena de $\underline{Mod}(\Sigma)$ cuyos objetos son los modelos que satisfacen todas las sentencias en Γ. De esta forma se obtiene un sistema de deducción a partir de la institución.

Proposición 5 [110] Dada una institución $\mathcal{I} = (\underline{Sign}, sen, \underline{Mod}, \models)$, el triple $(\underline{Sign}, sen, \models)$, donde ahora $\models$ denota la relación definida arriba entre conjuntos de sentencias y sentencias, es un sistema de deducción.

Denotamos por $\underline{Th}_\models$ la categoría de teorías asociada al sistema de deducción dado por la proposición anterior.

Si $H : (\Sigma, \Gamma) \longrightarrow (\Sigma', \Gamma')$ es un morfismo de teorías en $\underline{Th}_\models$, es fácil ver, usando la condición de $\models$-invarianza, que $H^\flat : \underline{Mod}(\Sigma') \longrightarrow \underline{Mod}(\Sigma)$ se restringe a un funtor (denotado igual)

$$H^\flat : \underline{Mod}(\Sigma', \Gamma') \longrightarrow \underline{Mod}(\Sigma, \Gamma).$$

En otras palabras, el funtor $\underline{Mod} : \underline{Sign}^{op} \longrightarrow \underline{Cat}$ se extiende a un funtor

$$\underline{Mod} : \underline{Th}_\models^{op} \longrightarrow \underline{Cat}.$$

Definición 6 [57] Una institución $\mathcal{I} = (\underline{Sign}, sen, \underline{Mod}, \models)$ se llama *liberal* si para todo morfismo de teorías $H : (\Sigma, \Gamma) \longrightarrow (\Sigma', \Gamma')$ en $\underline{Th}_\models$, el funtor

$$H^\flat : \underline{Mod}(\Sigma', \Gamma') \longrightarrow \underline{Mod}(\Sigma, \Gamma)$$

tiene un adjunto a izquierda

$$H^* : \underline{Mod}(\Sigma, \Gamma) \longrightarrow \underline{Mod}(\Sigma', \Gamma'). \ \Box$$

La institución de la lógica de primer orden no es liberal, pero las de la lógica ecuacional y la lógica de Horn homogéneas sí lo son. En efecto, Lawvere demostró en su tesis doctoral [94] que todas las construcciones libres usuales en álgebra son consecuencia de que la institución de la lógica ecuacional homogénea es liberal.

Definición 7 [110] Decimos que una institución $\mathcal{I} = (\underline{Sign}, sen, \underline{Mod}, \models)$ *admite modelos iniciales* si para toda teoría T en $\underline{Th}_\models$, la categoría $\underline{Mod}(T)$ tiene un objeto inicial.

La institución $\mathcal{I}$ se llama *exacta* si el funtor $\underline{Mod} : \underline{Th}_\models^{op} \longrightarrow \underline{Cat}$ conserva productos fibrados (*pullbacks*). $\Box$

Por ejemplo, la institución de la lógica ecuacional homogénea admite modelos iniciales y es exacta. Más adelante veremos que esto es una consecuencia directa del hecho de que esta lógica es categórica.

Una vez definidas las componentes sintáctica y semántica, la definición precisa de lo que entendemos por una lógica (general) es muy sencilla. Una lógica tiene dos componentes, un sistema de deducción y una institución, relacionadas de forma que la lógica sea correcta, es decir, de forma que deducción implique satisfacción.

Definición 8 [110] Una *lógica* es una tupla $\mathcal{L} = (\underline{Sign}, sen, \underline{Mod}, \vdash, \models)$ donde

- $(\underline{Sign}, sen, \vdash)$ es un sistema de deducción,
- $(\underline{Sign}, sen, \underline{Mod}, \models)$ es una institución, y

la siguiente condición de *corrección* es válida: para toda signatura Σ en $\underline{Sign}$, conjunto de sentencias $\Gamma \subseteq sen(\Sigma)$ y sentencia $\varphi \in sen(\Sigma)$,

$$\Gamma \vdash_\Sigma \varphi \implies \Gamma \models_\Sigma \varphi.$$

Una lógica se llama *completa* si, además,

$$\Gamma \vdash_\Sigma \varphi \iff \Gamma \models_\Sigma \varphi. \ \square$$

Se dice que una lógica es liberal, exacta o admite modelos iniciales cuando la institución subyacente tiene tales propiedades.

Hay un aspecto importante que esta definición no cubre, a saber, la teoría de pruebas, ya que la única información que aparece en la definición de un sistema de deducción es la relación de deducibilidad, sin decir nada sobre cómo la deducción se lleva a cabo. Este aspecto se trata en [110] bajo los conceptos de *cálculo de pruebas* y *cálculo efectivo de pruebas*, que junto con una lógica dan lugar a la noción de *sistema lógico*, pero nosotros no vamos a entrar en ellos. Otra noción de gran interés tratada en el artículo [110] que omitimos en este resumen es la de *morfismos de lógicas*. Ejemplos importantes de tales morfismos son la inclusión de la lógica ecuacional en la lógica de primer orden con igualdad, o el paso de lógica heterogénea a lógica homogénea omitiendo tipos. En la Sección 4.5 de la Parte II, veremos que hay un morfismo de la lógica ecuacional con tipos ordenados en la lógica ecuacional de orden superior con tipos ordenados que es conservativo. Otro ejemplo de morfismo entre lógicas en la inclusión de la lógica constituida por el fragmento $\otimes$ de la lógica lineal en la lógica de reescritura mencionada en el Capítulo 5 de la Parte I.

0.4. Lógicas categóricas

Habiendo definido en la sección anterior lo que entendemos por una lógica, podemos pasar a definir ahora el concepto de lógica categórica. La idea esencial es que se tiene una categoría de categorías con cierta estructura, de forma que las teorías en la lógica y estas categorías están "muy bien relacionadas," en el sentido de que existe una adjunción entre ellas y además los modelos de una teoría coinciden con los funtores desde la categoría generada libremente por la teoría que conservan la estructura dada.

Definición 9 [110] Una lógica se llama una *lógica categórica* sobre $\mathcal{C}$ si existe una categoría $\mathcal{C}$ con sumas fibradas (*pushouts*) y un funtor fiel $\mathcal{C} \longrightarrow \underline{Cat}$ tal que

1. Existen funtores $\mathcal{U} : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{Th}_0$ y $\mathcal{L} : \underline{Th}_0 \longrightarrow \mathcal{C}$ con $\mathcal{L}$ adjunto a izquierda de $\mathcal{U}$.

2. Para cada teoría T tenemos un isomorfismo natural de categorías

$$\underline{Mod}(T) \simeq \mathcal{L}(T)/\mathcal{C},$$

entre la categoría de modelos de T y la categoría de objetos bajo $\mathcal{L}(T)$ (*slice category*) $\mathcal{L}(T)/\mathcal{C}$ cuyos objetos son morfismos $J : \mathcal{L}(T) \longrightarrow C$ en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos $F : J \rightarrow J'$ son morfimos $F : C \rightarrow C'$ en $\mathcal{C}$ tales que $J; F = J'$.

3. Para toda teoría $T = (\Sigma, \Gamma)$ y sentencia $\varphi \in sen(\Sigma)$, tenemos

$$\Gamma \vdash_\Sigma \varphi \iff 1_{\mathcal{L}(T)} \models_\Sigma \varphi$$

donde estamos identificando modelos con funtores. □

En [110], Meseguer prueba que una lógica categórica tiene propiedades muy interesantes como muestra el siguiente teorema.

Teorema 10 [110] Una lógica categórica es completa, liberal, exacta, y admite modelos iniciales. □

La siguiente lista enumera los ejemplos más importantes de lógicas categóricas dando referencias donde se puede encontrar más información al respecto.

1. La lógica del lambda cálculo con tipos es categórica sobre la categoría $\underline{CCCat}$ de categorías cartesianas cerradas [93].

2. La lógica intuicionista de orden superior es categórica sobre la categoría $\underline{Topos}$ de topos elementales de Lawvere-Tierney [93].

3. La lógica de la teoría de tipos de Martin-Löf [107] con tipos de igualdad es categórica sobre la categoría $\underline{LCCCat}$ de categorías localmente cartesianas cerradas [141].

4. La lógica de la teoría de tipos de Martin-Löf sin tipos de igualdad es categórica sobre la categoría $\underline{RCCCat}$ de categorías relativamente cartesianas cerradas [75], y también sobre la categoría $\underline{CtxCat}$ de categorías contextuales de Cartmell [29].

5. La lógica del lambda cálculo polimórfico de Girard-Reynolds [47, 135] es categórica sobre la categoría $\underline{RCCCat}$ de categorías relativamente cartesianas cerradas [109], y también sobre la categoría $\underline{PLCat}$ de PL-categorías de Seely [142].

En la Parte I demostramos que la lógica lineal de Girard es categórica sobre la categoría $\underline{LinCat}$ de categorías lineales. En efecto, en el Teorema 53 de la Parte I probamos que el funtor $\mathcal{L}[\_] : \underline{LinTh} \longrightarrow \underline{LinCat}$ es adjunto a izquierda del funtor $(\_)^\circ : \underline{LinCat} \longrightarrow \underline{LinTh}$, y además que tenemos un isomorfismo

$$\underline{Mod}(T) \simeq \mathcal{L}[T]/\underline{LinCat}.$$

La Definición 56 de satisfacción y el Teorema 57 de completitud proporcionan el resto de los datos exigidos por la definición de lógica categórica.

Lawvere mostró en su tesis doctoral [94] que la lógica ecuacional homogénea es categórica sobre la categoría $\underline{PCat}$ de categorías con productos finitos. Lawvere probó que las (Σ, Γ)-álgebras para una teoría ecuacional homogénea (Σ, Γ) en una categoría $\mathcal{C}$ pueden ponerse en correspondencia biyectiva con funtores $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \mathcal{C}$ que conservan productos, donde la categoría $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ tiene como objetos los números naturales y como morfismos $n \to m$ m-tuplas $\langle [t_1], \ldots, [t_m] \rangle$ de clases de equivalencia módulo las ecuaciones Γ de Σ-términos t_i cuyas variables están entre $x_1, \ldots, x_n$.

Este resultado fue generalizado a la lógica ecuacional heterogénea por Bénabou en su tesis doctoral [15]. La categoría $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ se construye como en el caso homogéneo, pero ahora tiene como conjunto de objetos el monoide libre S^* generado por el conjunto S de tipos.

En la Parte II generalizamos estos resultados a la lógica ecuacional con tipos ordenados. Efectivamente, en el Teorema 37 construimos una *categoría clasificante* $\mathcal{L}_T$ para una teoría con tipos ordenados $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ tal que existe un isomorfismo

$$\underline{OSAlg}_{\Sigma,\Gamma} \simeq \mathcal{L}_T / \underline{PICat},$$

donde $\underline{PICat}$ denota la categoría de categorías con productos finitos y una estructura de inclusiones. Luego, en el Teorema 48 y la Observación 52 demostramos que el funtor $\mathcal{L}_{\_} : \underline{OSTh} \longrightarrow \underline{PICat}$ es adjunto a izquierda de $T_{\_} : \underline{PICat} \longrightarrow \underline{OSTh}$ para teorías desambiguadas. Para el caso general de teorías con ambigüedad tenemos una adjunción análoga con una categoría $\underline{LPICat}$ que tiene estructura adicional que no hace falta considerar para interpretar las álgebras. Sin embargo, las categorías $\underline{LPICat}$ y $\underline{PICat}$ se relacionan mediante una adjunción (Proposición 51), y por lo tanto en este caso tenemos una estructura de lógica categórica ligeramente más general que la dada en la Definición 9.

0.5. Sumario

Tras esta introducción general sobre lógicas categóricas, en la Parte I estudiamos por un lado una *correspondencia triangular* sistemática entre redes de Petri, categorías lineales y teorías de la lógica lineal de Girard. Por otra parte, estudiamos la semántica categórica de la lógica lineal en términos de categorías con un objeto dualizante.

La *lógica lineal* ha sido introducida recientemente por Girard [49] como una lógica de acciones que parece muy bien adaptada para computación concurrente. Nuestra correspondencia triangular ilustra algunas de las relaciones entre la lógica lineal y la concurrencia, destacando en especial la teoría de redes de Petri, desde el punto de vista de su semántica categórica. Desde esta perspectiva, las categorías son vistas como sistemas concurrentes cuyos objetos son estados, y cuyos morfismos son transiciones.

Más detalladamente, el punto de partida de nuestro trabajo es el trabajo de Meseguer y Montanari en el que una red de Petri es vista como un grafo con una estructura de monoide conmutativo [116, 117]. Esto les permite asociar a una red N una categoría $\mathcal{T}[N]$ de forma que los estados de N coinciden con los objetos de $\mathcal{T}[N]$ y las computaciones en la red coinciden con morfismos en esta categoría. Como las computaciones se pueden componer tanto secuencial como concurrentemente, $\mathcal{T}[N]$ es una categoría *monoidal* donde el producto tensorial coincide con la composición en paralelo. Siguiendo las ideas descubiertas por Asperti [6], Gunter [65] y otros, se observa que el comportamiento de una red de Petri puede describirse usando la conectiva $\otimes$ de la lógica lineal. De esta forma, los estados de una red de Petri se convierten en proposiciones de lógica lineal y sus computaciones en deducciones en este fragmento de la lógica lineal. Nuestro enfoque categórico hace esta correspondencia muy clara, y tiene particular importancia puesto que permite la identificación de computaciones concurrentes y deducciones lógicas, no a un nivel meramente sintáctico, sino de una forma más abstracta axiomatizable ecuacionalmente. De hecho, varias nociones de computación en una red de Petri son posibles; Degano, Meseguer y Montanari [36] estudiaron varias de ellas usando variaciones de la categoría $\mathcal{T}[N]$ y, dada la correspondencia con las deducciones, esto permite introducir diferentes nociones de equivalencia entre pruebas. En resumen, nuestra correspondencia triangular permite identificar, por un lado objetos en una categoría monoidal, estados de una red de Petri y proposiciones en el fragmento $\otimes$ de la lógica lineal, y por otro morfismos en una categoría, computaciones en una red de Petri y pruebas en ese fragmento de la lógica lineal.

La lógica lineal es mucho más rica que el simple fragmento constituido por la conectiva $\otimes$. Cambiando el modelo de computación, la correspondencia con la lógica lineal de las redes de Petri se puede extender a otras interpretaciones computacionales. Este aspecto se ilustra mediante la discusión de la interpretación lógica de máquinas con $\wedge$-ramificación y dos contadores obtenida por Lincoln, Mitchell, Scedrov y Shankar [97]. La conectiva $\multimap$ de implicación lineal expresa estados condicionales donde una transición ha sido empezada consumiendo algunos de los recursos que necesita, pero aún no ha sido concluida debido a la falta de los recursos restantes; su semántica categórica viene dada por categorías monoidales cerradas. La interpretación intuitiva de las conectivas & y $\oplus$ es elección externa e interna, respectivamente, y su semántica categórica consiste en productos y coproductos.

La noción categórica correspondiente a la negación no es tan obvia. Presentamos una nueva axiomatización algebraica de modelos de la lógica lineal *con negación*, en la que los axiomas reflejan directamente al nivel de modelos la dualidad de De Morgan que posee la lógica lineal. Esta axiomatización se consigue mediante el uso del concepto de *objeto dualizante*. Un objeto D en una categoría monoidal cerrada es denominado dualizante si el morfismo natural $A \longrightarrow ((A \multimap D) \multimap D)$, obtenido por Curry-conversión a partir del morfismo de evaluación $(A \multimap D) \otimes A \longrightarrow D$ es siempre un isomorfismo. Entonces, una *categoría lineal* es justamente una categoría con un objeto dualizante y productos finitos. Esta nueva axiomatización es considerablemente más simple que una previa debida a Seely [143] y basada en la noción de categoría $*$-autónoma de Barr [9]. Damos definiciones precisas de la categoría de teorías lineales y de los modelos de una teoría lineal, hacemos explícitos los detalles de la adjunción entre teorías lineales y categorías lineales, definimos satisfacción de un secuente en un modelo, y demostramos las esperadas propiedades de corrección y completitud de la lógica lineal con respecto a los modelos en categorías lineales, probando de esta forma que la lógica lineal es una *lógica categórica*.

La interpretación de una proposición p como un recurso y de su negación $p^\perp$ como una deuda sugiere una nueva variante de la lógica lineal, que llamamos *lógica lineal cancelativa*, en la cual siempre es posible cancelar una proposición p vista como un recurso y su negación $p^\perp$ vista como una deuda. De esta forma se obtiene una semántica para una generalización del habitual juego de marcas en redes de Petri, llamado *juego financiero*. Los modelos categóricos de la lógica lineal cancelativa son *categorías lineales cancelativas*, cuyas propiedades son satisfechas también por la dualidad del álgebra lineal.

Estudiamos varias clases de modelos definidas ecuacionalmente, en particular los modelos en conjuntos parcialmente ordenados, que llamamos *álgebras de Girard* y que generalizan a la lógica lineal las álgebras de Boole de la lógica clásica, conteniendo los modelos en cuantales como un caso especial. También mostramos cómo los modelos en diferentes clases se relacionan mediante adjunciones.

En un apéndice incluimos una exposición elemental de los conceptos generales y propiedades de las categorías monoidales simétricas cerradas y, usando esa maquinaria categórica, desarrollamos una detallada comparación entre la noción de categoría con un objeto dualizante y la noción de categoría $*$-autónoma debida a Barr [9], probando que ambas nociones son equivalentes en un preciso sentido categórico, cuando se añade un ligero refinamiento a la noción de categoría $*$-autónoma.

En la Parte II cambiamos de tema, aunque manteniéndonos dentro del espíritu de la lógica categórica, y pasamos a estudiar la semántica categórica del *álgebra con tipos ordenados* [62] y su extensión a orden superior. Nuestra motivación para este estudio es la siguiente. Creemos que el fracaso en hacer explícitas dos nociones diferentes de subtipo, una noción de *subtipo como inclusión*, originalmente propuesta por Goguen [56], y una noción de *subtipo como conversión implícita*, originalmente propuesta por Reynolds [136], conduce a situaciones insatisfactorias en los enfoques actuales de subtipos. Argüimos que elegir una de las nociones a costa de la otra sería erróneo y limitado, y proponemos un marco en el que dos relaciones de subtipo $\tau \leq \tau'$ (inclusión) y $\tau \leq: \tau'$ (conversión implícita) se distinguen e integran. La mayor parte de nuestra investigación está dedicada a extender la teoría de primer orden de subtipos como inclusiones desarrollada en [62] a un contexto de orden superior desde un punto de vista de semántica categórica.

En primer lugar, repasamos las definiciones y resultados básicos del álgebra con tipos ordenados, incluyendo signatura, álgebra, homomorfismo, la construcción del álgebra de términos, deducción ecuacional, y los teoremas de corrección, completitud e inicialidad correspondientes a su semántica conjuntista. De aquí pasamos a desarrollar una semántica funtorial generalizando los resultados de Lawvere y Bénabou para las álgebras homogénea y heterogénea [94, 15]. La estructura considerada es la de una categoría con productos y una *estructura de inclusiones*, que abreviamos a *PI-categoría*. Esta estructura axiomatiza las propiedades que las inclusiones usuales entre conjuntos tienen, de forma que los conceptos de álgebra, homomorfismo y satisfacción de una ecuación para el álgebra con tipos ordenados se pueden desarrollar en este marco mucho más general. Probamos que la categoría de álgebras y homomorfismos para una teoría con tipos ordenados T en una PI-categoría $\mathcal{C}$ es isomorfa a la categoría de PI-funtores de $\mathcal{L}_T$ en $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{L}_T$ es la *categoría clasificante* de T. La construcción de la PI-categoría $\mathcal{L}_T$ proporciona una adjunción entre teorías con tipos ordenados y PI-categorías. También demostramos teoremas de corrección, completitud e inicialidad para el álgebra con tipos ordenados con respecto a su semántica en PI-categorías. Así pues, el álgebra con tipos ordenados es también una *lógica categórica*.

Después pasamos a estudiar una extensión a orden superior del álgebra con tipos ordenados. Sintácticamente, introducimos dos constructores de tipos para conseguir productos y espacios funcionales, y el lenguaje de términos es un lambda cálculo tipado con subtipos.

Categóricamente, pasamos de categorías con productos a categorías cartesianas cerradas, llamadas *CCI-categorías* tras la introducción de una estructura de inclusiones. A este nivel de orden superior realizamos un desarrollo completamente paralelo al caso de primer orden, y demostramos que las álgebras de orden superior coinciden con funtores, la existencia de una adjunción entre teorías de orden superior y CCI-categorías, y teoremas de corrección, completitud e inicialidad para la lógica ecuacional de orden superior con tipos ordenados. También probamos que esta lógica de orden superior es conservativa sobre su equivalente de primer orden, y que admite la introducción de *retractos*, que son operaciones suplementarias que añaden flexibilidad a la disciplina de tipos del álgebra con tipos ordenados. Finalmente, damos axiomas que integran las relaciones $\leq$ y $\leq$: en una semántica categórica unificada. Además de poseer las ventajas de cada una de las nociones sin sus respectivas limitaciones, nuestro marco admite reglas de subtipado estructural que son más informativas y pueden distinguir entre inclusiones y conversiones implícitas.

0.6. Desarrollos futuros

A modo de conclusión, desearíamos mencionar algunas ideas que estamos investigando actualmente.

Por una parte, como se menciona brevemente en el Capítulo 5 de la Parte I, la correspondencia triangular estudiada en este trabajo se extiende a una correspondencia triangular mucho más general entre lógica de reescritura, sistemas concurrentes y categorías con estructura algebraica; esta generalización cubre una extensa variedad de importantes modelos de concurrencia [111, 112, 113]. La lógica de reescritura (con tipos ordenados) permite la identificación de computaciones de reescritura concurrente de términos (módulo un conjunto E de axiomas estructurales) con deducción lógica. De esta forma se adquiere una gran flexibilidad y expresividad para estructurar el estado distribuido de un sistema concurrente y para describir sus transiciones; el fragmento $\otimes$ de lógica lineal aparece como el caso particular en que el estado distribuido se estructura como un multiconjunto. Al considerar una regla de reescritura como una ecuación, se obtiene un morfismo de lógicas $\mathit{OSRwLogic} \longrightarrow \mathit{OSEqtl}$ de la lógica de reescritura (con tipos ordenados) en la lógica ecuacional con tipos ordenados. Ésta última está incluida en una lógica ecuacional de orden superior con tipos ordenados, como veremos en la Sección 4.5 de la Parte II, por lo que tenemos el siguiente diagrama de morfismos de lógicas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathit{OSEqtl} \arrow[r, hook] & \mathit{HOSEqtl} \\
\otimes\text{-}\mathit{Logic} \arrow[r, hook] & \mathit{OSRwLogic} \arrow[u] \arrow[r, hook] & \mathit{HOSRwLogic} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

El desarrollo de la lógica *HOSRwLogic*, consistente en una extensión a orden superior de la lógica de reescritura con tipos ordenados, es uno de los temas en los que nos encontramos trabajando en la actualidad. Esta lógica es importante porque permitirá extender a tipos de orden superior la integración de la programación funcional (de primer orden) dentro de la programación de sistemas concurrentes con lógica de reescritura obtenida en [111, 112, 113]. En cierto sentido, la lógica *HOSRwLogic* proporciona el marco ideal en el que las dos lógicas estudiadas en este trabajo (la lógica lineal y en particular su fragmento $\otimes$-*Logic*, y la lógica *HOSEqtl*) se unifican y permite aplicaciones muy prometedoras en el diseño de lenguajes de programación multiparadigma.

En el Capítulo 6 de la Parte II se mencionan varias posibilidades de cara a la continuación de la investigación sobre la lógica con tipos ordenados. Un aspecto de gran interés es la realización de un análisis similar al desarrollado en esa parte para la lógica esbozada en el Capítulo 5, en la que se integran las dos nociones de subtipo como inclusión y de subtipo como conversión implícita. Otro tema que nos interesa es su extensión a lenguajes con teorías de tipos más ricas, como por ejemplo tipos dependientes.

Notación

La notación que hemos usado en cada parte se introduce a medida que se necesita. Sin embargo, conviene hacer notar que en buena parte nos desviamos de la notación habitual. En lo concerniente a la Parte I, hemos seguido la notación de la lógica lineal introducida por Girard, con la única excepción de que usamos I para su $\mathbf{1}$. Pero lo que es importante resaltar es que esta misma notación ha sido usada también a nivel semántico, en las categorías, siguiendo la práctica habitual de confundir notacionalmente sintaxis y semántica. De este modo, un producto monoidal en una categoría se denota $\otimes$ como es usual, mientras que el hom interno se denota $\multimap$ pues ésta es la notación introducida por Girard para la implicación lineal; por la misma razón, productos y coproductos en una categoría se denotan $\&$ y $\oplus$ respectivamente, siendo sus respectivas unidades un objeto final $\top$ y un objeto inicial 0. En una categoría monoidal simétrica cerrada, denotamos la Curry-conversión por $(\_)^\dagger$ y el morfismo de evaluación por $\varepsilon_{A,B}$.

Por otro lado, en la Parte II, usamos la notación más habitual en teoría de tipos y categorías cartesianas cerradas. En este contexto, $\times$ denota el producto categórico y el producto cartesiano de conjuntos en particular, y 1 denota el objeto final. El hom interno o funtor exponencial es denotado $\Rightarrow$, la Curry-conversión se denota $\Lambda_{A,B,C}(\_)$ y el morfismo de evaluación $ev_{A,B}$. Confundiendo de nuevo sintaxis y semántica, $\times$ y $\Rightarrow$ denotan también los correspondientes constructores de tipos en el álgebra de orden superior con tipos ordenados.

Parte I

Lógica Lineal

Capítulo 1

Introducción (Parte I)

Durante los últimos veinte años la correspondencia de Curry-Howard [72] ha demostrado ser una herramienta metodológica muy fructífera de cara a explotar las profundas conexiones entre variantes de lógica intuicionista y lambda cálculos con tipos. Un resultado directo de esta correspondencia ha sido el diseño de lenguajes de programación funcional con sistemas de tipos muy ricos y potentes, como por ejemplo ML [120]. Esta correspondencia o isomorfismo puede resumirse como sigue:

$$\begin{array}{lcl} \textit{Fórmulas} & \longleftrightarrow & \textit{Tipos} \\ \textit{Pruebas} & \longleftrightarrow & \textit{Funciones} \end{array}$$

Aproximadamente al mismo tiempo que Howard divulgaba su nota original, una correspondencia diferente, la correspondencia de Lambek-Lawvere, era descubierta por estos renombrados matemáticos [88, 89, 90, 95]. Esta otra correspondencia se expresa como sigue:

$$\begin{array}{lcl} \textit{Fórmulas} & \longleftrightarrow & \textit{Objetos} \\ \textit{Pruebas} & \longleftrightarrow & \textit{Morfismos} \end{array}$$

Como en muchas categorías los morfismos son funciones, y en el caso particular del lambda cálculo con tipos las categorías asociadas son categorías cartesianas cerradas, esta correspondencia ha sido mucho menos divulgada y hasta cierto punto ha pasado inadvertida como otra variante de la correspondencia de Curry-Howard en lenguaje categórico. El aspecto crucial que se ignoraba, sin embargo, era que la teoría de categorías es una teoría *abstracta* de estructuras matemáticas y que por lo tanto *morfismos* en una categoría *no son funciones* en general, aunque pueda ocurrir que sean funciones en casos particulares. Un examen de los artículos originales de Lambek y Lawvere pone absolutamente en claro que los morfismos no tienen que ser funciones en su correspondencia entre teoría de categorías y lógica.

Un avance importante ha tenido lugar con la reciente introducción de la lógica lineal por parte de Girard [49, 51]. Esta nueva lógica ha sido reconocida desde su origen como muy adecuada para aplicaciones informáticas. El mismo Girard y sus colaboradores han iniciado algunas de estas aplicaciones en las áreas de semántica operacional [82] y programación lógica [51, 81], y existen actualmente varias investigaciones de gran interés incluyendo, entre otras, un tratamiento lógico de computabilidad en tiempo polinomial a través de lógica lineal acotada [54], y nuevas propuestas para lenguajes de programación funcionales y lógicos [1, 5, 31, 66, 67, 71, 81, 82, 86, 149, 150, entre otros]. Uno de los aspectos más prometedores en el uso de la lógica lineal para aplicaciones informáticas es que es una lógica de *acciones* que parece muy conveniente para computación concurrente [50]. Es claro, y Girard hace hincapié en este punto en sus trabajos, que los viejos cueros de vino de la correspondencia de Curry-Howard no pueden contener el *Beaujolais nouveau* de la lógica lineal. El modo de pensar de la computación funcional es simplemente inadecuado. La correspondencia de Girard puede expresarse así:

$$\begin{array}{lcl} \textit{Fórmulas} & \longleftrightarrow & \textit{Estados} \\ \textit{Pruebas} & \longleftrightarrow & \textit{Transiciones} \end{array}$$

Los detalles de esta correspondencia para el caso de redes de Petri fueron divulgados por Asperti [6]. Recientemente, mucho esfuerzo ha sido dedicado por varios investigadores al estudio de las relaciones entre lógica lineal y concurrencia [3, 7, 21, 22, 23, 41, 44, 45, 65, 131, entre otros]; en este trabajo recopilamos los resultados de nuestra propia investigación en este área, y los relacionamos con los resultados en varios de los artículos mencionados.

Por otra parte, Meseguer y Montanari [116, 117] han descubierto un interesante isomorfismo entre sistemas concurrentes y categorías que puede resumirse:

$$\begin{array}{lcl} \textit{Estados} & \longleftrightarrow & \textit{Objetos} \\ \textit{Transiciones} & \longleftrightarrow & \textit{Morfismos} \end{array}$$

Aunque esta correspondencia fue desarrollada para el caso de redes de Petri en [117], el reciente trabajo [113] hace hincapié en su gran generalidad al explicar cómo varias clases de sistemas concurrentes pueden verse como categorías con estructura algebraica.

En este trabajo vamos a componer los dos últimos isomorfismos para obtener:

$$\begin{tikzcd} \textit{Fórmulas} \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \textit{Objetos} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \textit{Estados} & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \textit{Pruebas} \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \textit{Morfismos} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \textit{Transiciones} & \end{tikzcd}$$

De este modo conseguimos una *correspondencia triangular* potencialmente muy fructífera entre teorías de lógica lineal, sistemas concurrentes y categorías, que da lugar a importantes métodos de transferencia entre los tres campos de lógica, concurrencia y teoría de categorías. En particular, esta correspondencia parece prometedora de cara a obtener información detallada sobre el significado de la correspondencia de Lambek-Lawvere para la lógica lineal en términos de sistemas concurrentes. Que una correspondencia de Lambek-Lawvere existe para lógica lineal había sido ya hecho notar en los artículos de

Seely [143], quien explica la relación entre lógica lineal y las categorías $*$-autónomas de Barr [9], de De Paiva [127], quien considera un marco categórico ligeramente diferente, y de Lafont [82], quien estudia el fragmento intuicionista. Sin embargo, ninguno de estos trabajos presentaba ninguna conexión con el área de sistemas concurrentes. Con respecto a la semántica categórica de la lógica lineal, en este trabajo presentamos una axiomatización de los modelos mucho más simple de lo que era antes posible usando categorías $*$-autónomas en [143, 103].

1.1. Computaciones, morfismos y pruebas

La esencia de la correspondencia triangular descrita arriba puede resumirse como sigue. Queremos interpretar una computación concurrente posiblemente compleja en una red de Petri N, por ejemplo una computación

$$\alpha : A \longrightarrow B$$

mediante la cual la red pasa del estado A al estado B, como una deducción lógica. Por supuesto, la computación α es en general una combinación bastante compleja de computaciones paralelas y secuenciales cuyos constituyentes últimos son algunas de las transiciones básicas

$$t_i : A_i \longrightarrow B_i$$

de la red de Petri N.

Ahora bien, un estado de N es un *multiconjunto*, típicamente representado mediante la aparición de varias "marcas" en algunos de los "lugares" de la red. Usando un operador binario $\otimes$ para denotar la unión de multiconjuntos, un estado típico puede por ejemplo ser $a \otimes a \otimes b \otimes b \otimes b$ indicando que hay dos marcas en el lugar a y tres en el lugar b. La idea clave es interpretar tal estado como una *proposición* que establece que ciertos recursos están disponibles, o sea que tenemos a *y* a *y* b, etc. Sin embargo, tal y como ocurre con otros recursos como dinero por ejemplo, a *y* a es diferente de a, y esto es esencial para que el comportamiento de la red de Petri sea el adecuado, el cual requiere la presencia de marcas con cierta *multiplicidad* mínima para que las transiciones puedan ser disparadas. Ésta es precisamente la intuición expresada por la conectiva de conjunción $\otimes$ en lógica lineal, que es asociativa y conmutativa pero *no* idempotente.

Una vez los estados han sido reinterpretados como proposiciones, podemos reinterpretar la red N como una teoría lógica cuyos axiomas básicos son los secuentes

$$t_i : A_i \vdash B_i$$

correspondientes a las transiciones básicas de la red. Nuestra lógica debe ser una lógica de acción que nos permita deducir cambios complejos a partir de los cambios básicos permitidos por los axiomas. Según esta lógica, computación debe coincidir con deducción; en particular, nuestra anterior computación α puede reinterpretarse como una prueba

$$\alpha : A \vdash B$$

usando los axiomas de la teoría N. En efecto, esta intuición es completamente correcta, y las reglas lógicas para la conjunción lineal nos permiten deducir exactamente las computaciones posibles en la red N.

El hecho evidente de que en un sistema *las transiciones son transitivas* sugiere que las computaciones en una red de Petri se pueden componer *secuencialmente*, es decir, una computación α de A en B y otra β de B en C dan lugar a una composición secuencial $\alpha;\beta$ de A en C. La naturaleza concurrente de las redes de Petri nos permite realizar no sólo composiciones secuenciales sino también composiciones *paralelas* de computaciones. Así, al ejecutar en paralelo las computaciones $\alpha : A \to B$ y $\alpha' : A' \to B'$ se obtiene una computación paralela $\alpha \otimes \alpha' : A \otimes A' \longrightarrow B \otimes B'$. Esto sugiere que el "espacio" de las computaciones en una red de Petri N es una categoría $\mathcal{T}[N]$ con un producto binario $\otimes$, y dada nuestra interpretación lógica de las computaciones, esto sugiere asimismo que el "espacio" de pruebas de la teoría lógica N es también una categoría con esa misma estructura. En resumen, identificamos tres cosas: una computación $\alpha : A \to B$, una prueba $\alpha : A \vdash B$ y un morfismo $\alpha : A \to B$.

1.2. ¿Qué es una prueba?

Ésta es una cuestión candente para investigadores en el campo de teoría de pruebas, y Girard señala que su estudio de normalización y equivalencia de pruebas en lógica lineal tiene como objetivo llegar al estudio de una "geometría de la interacción" [51] que liberará la teoría de pruebas de todas las distinciones sintácticas artificiales y arbitrarias creadas por la sintaxis ordinaria. Uno de los frutos de la correspondencia triangular entre lógica lineal, sistemas concurrentes y categorías es la sugerencia[1] de que la teoría categórica de *coherencia* [98, 100] constituye el marco matemático adecuado para el estudio de esta cuestión[2] y, dada nuestra correspondencia, que la teoría de coherencia es asimismo el escenario adecuado para responder a la cuestión estrechamente relacionada

¿Qué es un proceso concurrente?

que, para redes de Petri, ha sido estudiada usando técnicas de coherencia en el trabajo de Degano, Meseguer y Montanari [36]. El trabajo de Gehlot y Gunter [44, 45] sobre la relación entre lógica lineal y redes de Petri también trata de responder estas mismas cuestiones, si bien desde el punto de vista de la teoría de pruebas en vez del enfoque categórico seguido por nosotros. Resumimos estas investigaciones en la Sección 2.5.

1.3. Objetos dualizantes

El adjetivo "lineal" en "lógica lineal" está muy bien elegido. La lógica lineal tiene mucho más en común con el álgebra lineal de lo que un conocimiento superficial de su modelo

[1] Esta sugerencia no es original nuestra; pertenece a toda una tradición categórica desde que la correspondencia de Lambek-Lawvere fuera descubierta. El artículo [101] de Mac Lane es un excelente exponente de esta tradición.

[2] Recientemente ha llegado a nuestras manos la nota [121] donde Mints también insiste en el interés que la coherencia tiene para la semántica de la lógica lineal.

más conocido, los espacios coherentes [49], podría sugerir. En este trabajo presentamos un detallado estudio axiomático de las propiedades categóricas que hacen el álgebra lineal y la lógica lineal no sólo vagamente semejantes, sino de hecho una misma cosa al ser adecuadamente generalizadas. Más precisamente, presentamos la base de una semántica categórica general para la lógica lineal clásica (es decir, incluyendo la negación) siguiendo las ideas propuestas por Seely [143] y después desarrolladas en nuestro propio trabajo [103], pero con una axiomatización mucho más simple y clara que la permitida por las categorías $*$-autónomas [9].

Al tratar de dar una relación precisa de las ideas de Seely como componente de la correspondencia triangular entre lógica lineal, teoría de categorías y sistemas concurrentes, nos dimos cuenta de que a la definición original de Barr del concepto de categoría $*$-autónoma había que añadirle un requisito para hacerla más natural. Concretamente, queríamos que la conectiva[3] $⅋$, dual de la conjunción lineal $\otimes$, se interpretara como una estructura monoidal simétrica sobre la categoría de base, siendo todos los isomorfismos naturales inducidos canónicamente por dualidad a partir de los de la estructura monoidal simétrica de $\otimes$. En correspondencia subsiguiente, Ross Street [145] nos sugirió que un tratamiento más simple de la dualidad debería ser posible centrando la atención directamente en la transformación natural

$$s_{A,B,D} : (A \multimap B) \longrightarrow ((B \multimap D) \multimap (A \multimap D))$$

que existe en toda categoría con funtor de hom interno $\_\multimap\_$, y que puede ser expresada en la notación del lambda cálculo mediante el término

$$\lambda f.\lambda g.(f;g),$$

donde $f;g$ denota la composición de $f : A \to B$ seguido de $g : B \to D$. Él atribuía a Andrè Joyal la intuición de que requerir que tal transformación natural fuera un isomorfismo debería bastar para que D fuera un *objeto dualizante*. Sin embargo, no pudimos encontrar en la literatura nada escrito sobre dualidad en estos términos, ni sobre la relación entre tal definición y la debida a Barr de categoría $*$-autónoma.

Para motivar un poco más las ideas, el punto esencial que hay que subrayar es la identidad entre *negación* y *dualización*. En lógica lineal clásica la proposición "falsa" $\perp$ actúa como un objeto dualizante en el sentido de que tenemos

$$A^{\perp} = A \multimap \perp$$

y la igualdad de la doble negación

$$A^{\perp\perp} = A.$$

Similarmente, en el caso de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K, podemos ver K como la "proposición falsa" e interpretar el espacio dual

$$V^* = V \multimap K$$

[3] La notación que usamos está de acuerdo con la notación para la lógica lineal introducida por Girard; el único cambio con respecto a su notación es el uso de I en vez de $\mathbf{1}$ para denotar la unidad del producto tensorial $\otimes$. Conviene notar también que estamos usando la misma notación para denotar las conectivas en la sintaxis de la lógica lineal que para denotar los funtores correspondientes en la semántica categórica.

como la "negación" del espacio vectorial V, donde $V \multimap K$ denota ahora el espacio de las *formas lineales* sobre V, es decir, el espacio de las aplicaciones lineales de V en K. Como es bien sabido [102, por ejemplo], tenemos entonces un isomorfismo natural

$$V \cong V^{**},$$

que se puede expresar en la notación del lambda cálculo por el término $\lambda x.\lambda f.f(x)$, y un isomorfismo relacionado

$$s_{V,W} : (V \multimap W) \cong (W^* \multimap V^*)$$

que a nivel de matrices es simplemente transposición. Como hemos mencionado arriba, $s_{V,W}$ puede expresarse en la notación del lambda cálculo por el término $\lambda f.\lambda g.(f;g)$.

Nuestra definición de un *objeto dualizante* $\perp$ en la Sección 3.1 es muy simple. Basta requerir que la transformación natural

$$d_{A,\perp} : A \longrightarrow ((A \multimap \perp) \multimap \perp)$$

expresable como $\lambda x.\lambda f.f(x)$ sea un isomorfismo. Una *categoría lineal* se define entonces como una categoría con un objeto dualizante y productos finitos.

1.4. Modelos para lógica lineal

Para muchas de las aplicaciones propuestas, así como para el mismo desarrollo de la lógica lineal, los modelos son de gran importancia. Aunque varios modelos interesantes como los espacios coherentes y la semántica de fases han sido conocidos desde el principio [49], el desarrollo de una teoría general de modelos para lógica lineal es más reciente. En este contexto, los métodos algebraicos de la teoría de categorías han sido reconocidos como muy útiles por varios autores, incluyendo Lafont [82], De Paiva [127] y Seely [143].

Uno de los beneficios importantes que la correspondencia de Lambek-Lawvere proporciona es una noción muy general y flexible de *modelo* para una teoría lineal T. Nuestro enfoque usa la noción de *objeto dualizante*; esto es considerablemente más simple que usar categorías $*$-autónomas como en [143, 103]; no obstante, añadiendo un pequeño requisito a una categoría $*$-autónoma obtenemos un concepto equivalente a nuestra formulación más simple, como probamos en el Apéndice B. Un modelo de T interpreta la sintaxis de T en una *categoría lineal* $\mathcal{C}$ de tal forma que los axiomas de T se satisfacen entonces como morfismos en $\mathcal{C}$. Como la categoría *Cohl* de espacios coherentes y funciones lineales [49] es una categoría lineal, esta semántica categórica general contiene la semántica denotacional de Girard como un caso particular. Esto es totalmente análogo a la forma en que interpretar una teoría del lambda cálculo con tipos en la categoría de dominios de Scott es un caso particular de su interpretación general en categorías cartesianas cerradas. También como en el caso del lambda cálculo con tipos, la completitud de la lógica[4] se convierte ahora en una propiedad casi trivial asociada con la categoría lineal libre $\mathcal{L}[T]$ generada por la teoría T. En este modelo, que es el modelo inicial de T, la teoría de pruebas y la semántica se unifican, del mismo modo que ocurre en el caso de tipos de datos algebraicos. Por lo tanto, la cuestión de equivalencia de pruebas se transforma en el estudio de modelos iniciales.

[4]Establecida originalmente por Girard en [49] usando la semántica de fases, pero no relacionada con la semántica en espacios coherentes, donde se satisfacen propiedades suplementarias.

1.5. Especificación de concurrencia mediante lógica lineal

A una red de Petri N se le asocia una categoría monoidal $\mathcal{T}[N]$ cuyos objetos son estados, y cuyos morfismos son transiciones complejas, o procesos, consistentes en composiciones paralelas y secuenciales de transiciones atómicas [116]. Por otra parte, una red de Petri N puede verse como una teoría lineal usando sólo la conectiva $\otimes$. La categoría lineal libre $\mathcal{L}[N]$ generada por la red N cuando ésta es vista como una teoría lineal contiene esencialmente a $\mathcal{T}[N]$ como una subcategoría y por lo tanto puede verse también como una categoría cuyos objetos son estados y cuyos morfismos son procesos. Sin embargo, $\mathcal{L}[N]$ es mucho más expresiva que $\mathcal{T}[N]$ y debemos pensar en sus estados y procesos como estados y procesos ideales o *gedanken*. Por ejemplo, terminar en un estado $A\&B$ significa la posibilidad de elegir entre pasar al estado A o pasar al estado B (elección externa), y empezar en un estado $A \oplus B$ significa la posibilidad de empezar o bien en el estado A o bien en el estado B (elección interna). Podemos usar axiomas de lógica lineal para especificar propiedades de la red N. La satisfacción de tales especificaciones por N significa entonces la satisfacción en el modelo $\mathcal{L}[N]$ de sus computaciones ideales que a su vez se reduce a derivar tales especificaciones a partir de los axiomas de N vista como teoría.

1.6. Categorías cancelativas

Un aspecto importante que explotamos en este trabajo es la naturaleza algebraica de los axiomas que definen los modelos en términos de su estructura algebraica. Esto proporciona los beneficios usuales de la lógica ecuacional[5] tales como modelos libres y clases de modelos definibles ecuacionalmente. Una de las propuestas que hacemos es la introducción de una variante de la lógica lineal, que denominamos *lógica lineal cancelativa* y que corresponde a imponer las ecuaciones $X \otimes Y = X \parr Y$ e $I = \perp$. La lógica lineal es una lógica "consciente de los recursos" en la cual una proposición p puede verse como un recurso, y su negación $p^\perp$ como una *deuda* de tal recurso. Sin embargo, debido a la distinción entre $\otimes$, que acumula recursos, y $\parr$, que acumula deudas, en la lógica lineal normal las deudas no pueden en general ser canceladas; la lógica lineal cancelativa hace que esto sea posible. Esta lógica y su teoría de modelos asociada sugiere una generalización del juego de marcas habitual en redes de Petri a lo que llamamos un *juego financiero*, donde un jugador puede progresar tomando prestado algún recurso, pero es siempre honesto sobre sus finanzas, o sea, una deuda no puede cancelarse a menos que el recurso correspondiente se haga disponible.

Los beneficios en términos de claridad y simplicidad que la adopción de una axiomatización basada en el concepto de objeto dualizante proporciona para una semántica categórica de la lógica lineal son considerables, pero los axiomas más simples y los resultados a los que dan lugar también son útiles en el contexto original de álgebra lineal y espacios vectoriales topológicos que motivaron la investigación inicial de Barr [9]. En efecto, el clásico ejemplo del álgebra lineal exhibe un tipo de dualidad con propiedades adicionales que es capturado en lo que denominamos *categorías cancelativas* en este tra-

[5] Específicamente, la lógica ecuacional subyacente es la de teorías esencialmente algebraicas [42] o esquemas (*sketches*) [13]. No obstante, familiaridad con esta versión de lógica ecuacional no es necesaria para poder seguir las ideas en este trabajo.

bajo[6]. Las propiedades más fuertes satisfechas por las categorías cancelativas, en las que tenemos un isomorfismo $A \otimes B \cong A \invamp B$, son comunes a la dualidad del álgebra lineal y a la interpretación de la negación en redes de Petri mediante los juegos financieros.

Otra clase de modelos importante, también definible ecuacionalmente, es aquélla en la que las categorías usadas para los modelos son conjuntos parcialmente ordenados. Llamamos a un modelo de esta clase un *álgebra de Girard*. Tales álgebras son para la lógica lineal lo que las álgebras de Boole son para la lógica clásica. La investigación sobre modelos en cuantales [2, 152], que generalizan la semántica de fases de Girard [49], está contenida en este área.

1.7. Este trabajo

Este trabajo está basado en nuestro artículo [104], que hemos extendido mucho en varias direcciones. En primer lugar, para hacer la presentación de la semántica categórica de la lógica lineal más autosuficiente, hemos añadido los resultados divulgados en el informe [106], que dan una comparación detallada entre los conceptos de categoría con un objeto dualizante y categoría $*$-autónoma [9].

En segundo lugar, el marco categórico básico en el cual se desarrolla la semántica de la lógica lineal es el de categorías monoidales simétricas cerradas[7]. Durante el desarrollo de la investigación que aquí recopilamos nos hemos encontrado con la dificultad de no disponer de una buena referencia básica, conveniente para investigadores en informática, sobre los conceptos generales y propiedades de las categorías monoidales simétricas cerradas, aunque el punto obligado de consulta continúa siendo la monografía original de Eilenberg y Kelly [40]. Por lo tanto, hemos decidido incluir una exposición completamente autónoma sobre categorías monoidales simétricas cerradas en el Apéndice A. Creemos que el inconveniente de una exposición un poco más extensa se compensa con el beneficio de divulgar las técnicas de categorías cerradas y hacerlas más asequibles a los investigadores en informática.

En tercer lugar, hemos incluido comparaciones con el trabajo que varios autores han hecho en este campo en el tiempo transcurrido desde que escribimos la primera versión de [103].

Este trabajo es en algunos aspectos bastante independiente y se supone que el lector no tiene muchos conocimientos en los campos que cubre: redes de Petri, lógica lineal y su semántica categórica. No obstante, algo de familiaridad en ellos puede ser útil. En particular, se parte de la suposición de que el lector tiene conocimientos básicos de teoría de categorías, incluyendo las nociones de funtor, transformación natural, equivalencia, adjunción y (co)límites. El libro de Mac Lane [99] es una referencia básica para este tema, y recientemente han sido publicados varios libros sobre teoría de categorías dirigidos a lectores con una formación informática. Como ya hemos mencionado, el Apéndice A

[6] Robert Seely nos ha señalado que una axiomatización de estas categorías como categorías $*$-autónomas ya apareció en [9], donde se llamaban *compactas*.

[7] Para la lógica lineal no conmutativa debería adoptarse el contexto más general de categorías monoidales no simétricas cerradas en el estilo de Lambek [92]; en este trabajo nos concentramos en el caso simétrico. También es posible dar la noción de objeto dualizante en el caso general de categorías cerradas [40], sin un producto tensorial; desde el punto de vista de la teoría de pruebas, esto podría ser útil para el estudio de fragmentos de lógica lineal que incluyen la conectiva $\multimap$ pero no $\otimes$.

contiene una exposición elemental sobre categorías monoidales simétricas cerradas. Para redes de Petri, el libro de Reisig [134] es una buena referencia, así como otros trabajos de carácter introductorio disponibles entre la enorme cantidad de literatura sobre este tema. Por último, la cantidad de artículos sobre lógica lineal está creciendo muy rápidamente a pesar de su introducción bastante reciente; dos interesantes introducciones de carácter informal son [53] por Girard y [139] por Scedrov. Las notas [148] por Troelstra constituyen una introducción al tema cubriendo tanto aspectos de teoría de pruebas como aspectos de teoría de modelos.

Capítulo 2

De las redes de Petri a la lógica lineal

En este capítulo introducimos primero las redes de Petri y explicamos cómo dan lugar a categorías monoidales (el punto de vista de "redes de Petri como monoides" en [116, 117]). Luego, describimos cómo las redes de Petri pueden también verse como teorías de lógica lineal usando sólo la conectiva de conjunción lineal $\otimes$. Finalmente, introducimos las otras conectivas de la lógica lineal de una forma gradual, discutiendo para cada una su semántica categórica y su interpretación computacional.

2.1. Multiconjuntos y monoides conmutativos libres

Un *multiconjunto*, también llamado *bolsa* en la literatura informática, es un "conjunto" en el cual el número de veces que un elemento aparece se toma en consideración, es decir, cada elemento tiene asociada una multiplicidad. Una forma posible de presentar un multiconjunto sobre un conjunto S es por tanto como un función de S en $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, que da la multiplicidad de cada elemento. También podemos definir la unión y otras operaciones conjuntistas sobre multiconjuntos. Estamos interesados sólo en multiconjuntos *finitos*, o sea, multiconjuntos donde la multiplicidad es cero para todos excepto un número finito de elementos.

Definición 11 Dado un conjunto S, un *multiconjunto finito* sobre S es una función $A : S \to \mathbb{N}$ tal que el conjunto $\{s \in S \mid A(s) \neq 0\}$ es finito.

Sean A, B dos multiconjuntos sobre S.

La *unión* de A y B, denotada $A \otimes B$, es el multiconjunto dado por $(A \otimes B)(s) = A(s) + B(s)$ para todo $s \in S$. La operación $\otimes$ es asociativa y conmutativa porque la adición de números naturales lo es.

Decimos que A *está incluido en* B y escribimos $A \subseteq B$ si $A(s) \leq B(s)$ para todo $s \in S$.

Si $A \subseteq B$, la *diferencia* $B - A$ se define como el multiconjunto dado por $(B - A)(s) = B(s) - A(s)$ para todo $s \in S$.

Si $p \in \mathbb{N}$, la *p-ésima potencia* de un multiconjunto A, denotada A^p, es el multiconjunto definido por $A^p(s) = pA(s)$ para todo $s \in S$.

Si $s \in S$, su multiconjunto asociado *unitario*, también denotado s, está dado por $s(s) = 1$ y $s(s') = 0$ para todo $s' \in S$ tal que $s' \neq s$. □

Si A es un multiconjunto finito sobre S, A puede expresarse como unión de potencias de multiconjuntos unitarios $A = \bigotimes_{s \in S} s^{A(s)}$ de forma única, no importando el orden de los factores. Cuando todos los exponentes son cero, obtenemos el multiconjunto *vacío*, denotado I.

El conjunto de todos los multiconjuntos finitos sobre S se denota $S^{\otimes}$.

Dada una K-familia $\{A_k\}_{k \in K}$ de multiconjuntos finitos sobre S y un multiconjunto finito $P = \bigotimes_{j=1}^{l} k_j^{n_j}$ sobre K, escribimos $\bigotimes_{k \in K} A_k^{P(k)}$ para denotar el multiconjunto $A_{k_1}^{n_1} \otimes \cdots \otimes A_{k_l}^{n_l}$.

Del mismo modo que el conjunto de listas finitas sobre un conjunto S junto con la lista vacía y la concatenación constituye un monoide libre sobre S, el conjunto de bolsas finitas sobre S junto con el multiconjunto vacío y la operación de unión constituye un monoide conmutativo libre sobre S.

Proposición 12 Si S es un conjunto, el conjunto $S^{\otimes}$ de multiconjuntos finitos sobre S, junto con la unión $\otimes$ y el elemento I, constituye un monoide conmutativo libre sobre S. □

Nota: En el resto de este trabajo, *multiconjunto* significará siempre un multiconjunto *finito*.

2.2. Enfoque clásico de las redes de Petri

En el enfoque usual de la teoría de redes de Petri [134], una red de Petri con lugares y transiciones consiste en un conjunto de lugares y un conjunto disjunto de transiciones, junto con una relación de causalidad entre ellos. A cada transición se le asocian dos multiconjuntos de lugares llamados preconjunto y postconjunto. Los estados globales consisten en multiconjuntos de lugares llamados marcados. Más formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 13 Una *red de Petri con lugares y transiciones*, o brevemente una *red de Petri*, es un triple (S, T, F) donde:

1. S es un conjunto de *lugares*,
2. T es un conjunto disjunto de *transiciones*, y
3. F es un multiconjunto sobre $(S \times T) + (T \times S)$ llamado la *relación de dependencia causal* (aquí el símbolo + denota la unión disjunta de conjuntos).

Dada una transición $t \in T$, el *preconjunto* asociado es el multiconjunto ${}^{\bullet}t$ sobre S definido por ${}^{\bullet}t(s) = F(s, t)$ para todo $s \in S$. Análogamente, el *postconjunto* asociado es el multiconjunto $t^{\bullet}$ tal que $t^{\bullet}(s) = F(t, s)$ para todo $s \in S$.

Finalmente, un *marcado* es un multiconjunto sobre S. □

A partir de esta definición de preconjunto y postconjunto, debería estar claro que la relación F de dependencia causal por un lado, y los preconjuntos y postconjuntos para todo $t \in T$ por otro, se determinan entre sí biunívocamente. Por lo tanto, una red de Petri se caracteriza por los conjuntos S, T y los multiconjuntos ${}^\bullet t, t^\bullet$ para todo $t \in T$.

Dada una red de Petri y un marcado M, el número de *marcas* almacenado en un lugar $s \in S$ por el marcado M es $M(s)$. El estado global dado por este marcado puede cambiarse por medio del *disparo* de una transición $t \in T$. Este disparo reduce el número de marcas en un lugar s en ${}^\bullet t(s)$, el número de marcas en s consumido por t, y lo aumenta en $t^\bullet(s)$, el número de marcas en s creado por t. Por lo tanto, para que el disparo de t pueda tener lugar bajo un marcado M, el número de marcas almacenado en cada lugar s por M debe ser mayor o igual que el número de marcas consumido por t en s; en tal caso, decimos que M *dispone* el disparo de t.

Ejemplo 14 Consideremos la red de Petri dibujada en la Figura 2.1, que representa una máquina para comprar pasteles y manzanas. Un pastel cuesta un dólar y un cuarto; una manzana cuesta tres cuartos, y puede comprarse también usando un dólar, en cuyo caso la máquina devuelve un cuarto; finalmente, un dólar se puede cambiar en cuatro cuartos. Esta red de Petri tiene un conjunto de lugares $S = \{\$, q, c, a\}$ y un conjunto de transiciones $T = \{\mathit{cmp\text{-}c}, \mathit{cmp\text{-}a}, \mathit{cmp\text{-}a'}, \mathit{cambio}\}$, cuyo significado intuitivo acabamos de explicar. Las flechas que entran y salen de una transición y los números asociados especifican los preconjuntos y postconjuntos, y por supuesto también la relación de dependencia causal. Tenemos

$$\begin{array}{ll} {}^\bullet \mathit{cmp\text{-}c} = q \otimes \$ & \mathit{cmp\text{-}c}^\bullet = c \\ {}^\bullet \mathit{cmp\text{-}a} = \$ & \mathit{cmp\text{-}a}^\bullet = a \otimes q \\ {}^\bullet \mathit{cmp\text{-}a'} = q^3 & \mathit{cmp\text{-}a'}^\bullet = a \\ {}^\bullet \mathit{cambio} = \$ & \mathit{cambio}^\bullet = q^4. \end{array}$$

La Figura 2.1 muestra un marcado $M = \$ \otimes q^2$, o sea un marcado que almacena dos marcas en el lugar q, y una en el lugar \$.

El marcado M dispone el disparo de *cmp-c*, de *cmp-a* y de *cambio* porque ${}^\bullet \mathit{cmp\text{-}c} \subseteq M$, ${}^\bullet \mathit{cmp\text{-}a} \subseteq M$ y ${}^\bullet \mathit{cambio} \subseteq M$. Sin embargo, el disparo de la transición $\mathit{cmp\text{-}a'}$ no es dispuesto, porque no hay bastantes marcas en el lugar q. $\Box$

El disparo de una sola transición puede considerarse como el paso computacional más simple en una red de Petri. Más generalmente, como las marcas están distribuidas por varios lugares, suponiendo que un marcado M tiene suficientes marcas, es perfectamente posible que unas cuantas transiciones se disparen *concurrentemente*, o incluso que una transición sea disparada concurrentemente *consigo misma*. Por lo tanto, podemos considerar computaciones consistentes en una sucesión de disparos donde cada disparo involucra un *multiconjunto* de transiciones.

Definición 15 Dada una red de Petri (S, T, F), un marcado M y un multiconjunto U sobre T, el *disparo paralelo o concurrente* de U es *dispuesto* si $\bigotimes_{t \in T} {}^\bullet t^{U(t)} \subseteq M$. En este caso un *paso* $M \stackrel{U}{\Longrightarrow} M'$ puede tener lugar, siendo M' el nuevo marcado o estado global

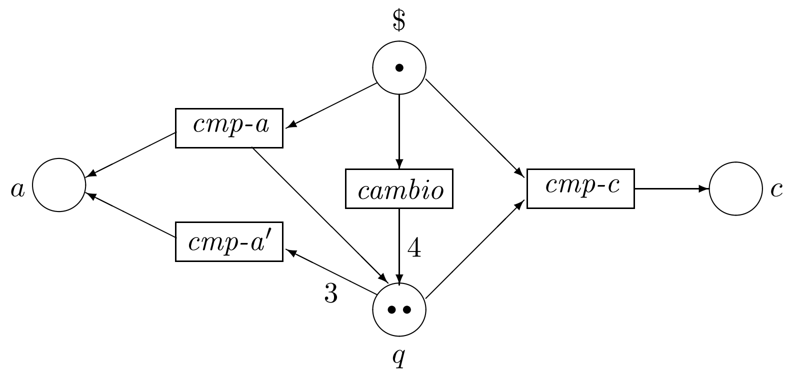


Figura 2.1: Una red de Petri para comprar pasteles y manzanas.

dado por

$$M' = (M - \bigotimes_{t \in T} {}^{\bullet}t^{U(t)}) \otimes \bigotimes_{t \in T} t^{\bullet U(t)}.$$

Denotamos por $M \overset{U_1;\ldots;U_k}{\Longrightarrow^*} M'$ la existencia de marcados $M_1, \ldots, M_{k-1}$ tales que $M \overset{U_1}{\Longrightarrow} M_1, \ldots, M_{k-1} \overset{U_k}{\Longrightarrow} M'$, es decir, el disparo secuencial de los multiconjuntos de transiciones $U_1, \ldots, U_k$.

La notación $M \Longrightarrow M'$ indica la existencia de un multiconjunto U de transiciones tal que $M \overset{U}{\Longrightarrow} M'$, y $\Longrightarrow^*$ denota la clausura reflexiva y transitiva de la relación $\Longrightarrow$ entre marcados. $\square$

Si sólo nos interesa el efecto final de una computación, es decir, el estado global resultante al final, y no la estructura concurrente de las computaciones, basta considerar sucesiones de disparos consistentes cada uno en una *única* transición (véanse [36] y la Sección 2.5 para más discusión de este tema). Sin embargo, la anterior definición es más general, expresa la concurrencia inherente a las redes de Petri, y se corresponde muy bien con el enfoque categórico de la Sección 2.3.

Ejemplo 16 Consideremos de nuevo la red del Ejemplo 14 con el marcado $M = \$ \otimes q^2$ representado en la Figura 2.1. La Figura 2.2 describe el estado $M' = a^2$ alcanzado tras el disparo de *cmp-a* seguido por el disparo de *cmp-a′*, es decir, tras el disparo secuencial $M \overset{\textit{cmp-a};\textit{cmp-a}'}{\Longrightarrow^*} M'$.

Nótese que *cmp-a* y *cmp-a′* no podían ser disparadas concurrentemente, porque $\$ \otimes q^3 \not\subseteq \$ \otimes q^2$. En cambio, si consideramos el marcado $M_1 = \$ \otimes q^4$, sí que pueden ser disparadas en paralelo pues ahora $\$ \otimes q^3 \subseteq \$ \otimes q^4$, alcanzando un marcado $M_1' = a^2 \otimes q^2$; este disparo corresponde al paso $M_1 \overset{\textit{cmp-a} \otimes \textit{cmp-a}'}{\Longrightarrow} M_1'$. Con el marcado M_1, las transiciones *cmp-c* y *cmp-a′* pueden asimismo dispararse en paralelo, resultando en el paso $M_1 \overset{\textit{cmp-c} \otimes \textit{cmp-a}'}{\Longrightarrow} a \otimes c$. $\square$

Aunque en esta sección hemos presentado las redes de Petri con un enfoque clásico, ya hemos introducido una notación especial para multiconjuntos que será muy útil en la

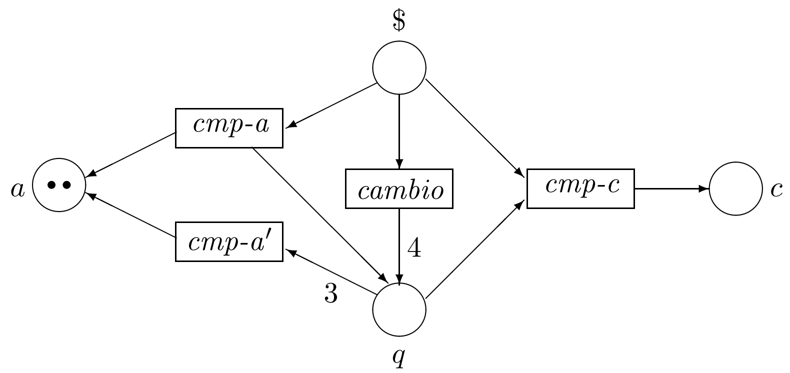


Figura 2.2: La misma red de Petri tras el disparo secuencial de *cmp-a* y *cmp-a′*.

presentación más algebraica y categórica dada en la sección siguiente.

2.3. Redes de Petri como categorías monoidales

En esta sección repasamos el enfoque categórico de las redes de Petri desarrollado en [116, 117], y en particular la construcción de la categoría de Petri $\mathcal{T}[N]$ asociada a una red N.

Hemos visto cómo una red de Petri viene dada por dos conjuntos disjuntos S, T y los preconjuntos y postconjuntos asociados con cada transición $t \in T$. Si pensamos en una transición t como una flecha $t : {}^\bullet t \longrightarrow t^\bullet$ y recordamos que el conjunto $S^\otimes$ de multiconjuntos sobre S es un monoide conmutativo libre sobre S, es natural definir una red de Petri como un *grafo* cuyo conjunto de nodos es un monoide conmutativo libre. Aunque más simple, esta definición es equivalente a la Definición 13.

Definición 17 [116, 117] Una *red de Petri* $N = (S^\otimes, T, \partial_0, \partial_1)$ consta de un monoide conmutativo libre $S^\otimes$ de *nodos* sobre un conjunto S de *lugares*, un conjunto T de *transiciones*, y dos funciones $\partial_0, \partial_1 : T \longrightarrow S^\otimes$ que asocian a cada transición t su *origen* $\partial_0(t) = {}^\bullet t$ y su *destino* $\partial_1(t) = t^\bullet$, respectivamente. □

Como es habitual, si para $t \in T$, $\partial_0(t) = A$ y $\partial_1(t) = B$, escribimos $t : A \longrightarrow B$.

Ejemplo 18 Desde este punto de vista, la red de la Figura 2.1 se representa como un grafo cuyo conjunto de nodos es $\{\$, q, c, a\}^\otimes$ y cuyas transiciones son

$$\begin{array}{ll} \mathit{cmp\text{-}c} : \$ \otimes q \longrightarrow c & \mathit{cmp\text{-}a} : \$ \longrightarrow a \otimes q \\ \mathit{cmp\text{-}a'} : q^3 \longrightarrow a & \mathit{cambio} : \$ \longrightarrow q^4. \ \square \end{array}$$

Observación 19 Habiendo definido una red de Petri como un grafo con estructura algebraica adicional, un morfismo entre dos redes de Petri es simplemente un morfismo de grafos que conserva esa estructura. Así pues, un *morfismo de redes de Petri* de $N = (S^\otimes, T, \partial_0, \partial_1)$ en $N' = (S'^\otimes, T', \partial'_0, \partial'_1)$ es un par $\langle f, g\rangle$ siendo $f : T \longrightarrow T'$ una función y $g : S^{\otimes} \to S'^{\otimes}$ un homomorfismo de monoides[1] y tal que para todo $t \in T$, $g(\partial_i(t)) = \partial'_i(f(t))$ $(i = 0, 1)$.

Esto define una categoría <u>*Petri*</u> que tiene productos y coproductos (véase [117]). $\square$

Cuando consideramos la computación consistente en el disparo paralelo de *cmp-a* y *cmp-a'* encontramos el multiconjunto $U = \mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{cmp\text{-}a'}$. ¿Podemos extender el punto de vista de una red de Petri como un grafo para incluir estas computaciones? ¿Cuál es entonces el origen y el destino de $t \otimes t'$? Si el origen de t es ${}^{\bullet}t$ y su destino es $t^{\bullet}$, que podemos interpretar como el número global de marcas producidas y consumidas por t, respectivamente, es natural ver $t \otimes t'$ como una flecha ${}^{\bullet}t \otimes {}^{\bullet}t' \longrightarrow t^{\bullet} \otimes t'^{\bullet}$.

Ejemplo 20 En los Ejemplos 14 y 18, tenemos $\mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{cmp\text{-}a'} : \$ \otimes q^3 \to a^2 \otimes q$, y también $\mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{cmp\text{-}c} : \$^2 \otimes q \to a \otimes q \otimes c$. $\square$

De este modo podemos generar nuevas flechas como multiconjuntos sobre el conjunto original de flechas T, de tal forma que si $U : A \to B$, $V : A' \to B'$ son flechas con $U, V \in T^{\otimes}$, entonces $U \otimes V$ es también una flecha $U \otimes V : A \otimes A' \to B \otimes B'$. En particular, introducimos una flecha $I : I \to I$. Nótese que ∂_0 y ∂_1 se extienden entonces de forma única a homomorfismos de monoides $\partial_0, \partial_1 : T^{\otimes} \to S^{\otimes}$, y la red de Petri extendida así puede verse como un grafo en la categoría de monoides conmutativos, o equivalentemente, como una estructura de monoide conmutativo sobre un grafo, tal que sus monoides de nodos y morfismos son libres.

Avanzando un poco más, podemos considerar también transiciones *inactivas*, representadas como flechas identidad. Por ejemplo, la identidad $id_{a\otimes b} : a \otimes b \to a \otimes b$ se interpreta como la inactividad de una marca en el lugar a y una marca en el lugar b.

Estas operaciones nos permiten interpretar algebraicamente la relación $M \overset{U}{\Longrightarrow} M'$ entre marcados definida en la Sección 2.2. Si U es un multiconjunto de transiciones, su origen es $\partial_0(U) = \bigotimes_{t\in T} {}^{\bullet}t^{U(t)}$ y su destino es $\partial_1(U) = \bigotimes_{t\in T} t^{\bullet U(t)}$. Entonces $M \overset{U}{\Longrightarrow} M'$ si y sólo si $\partial_0(U) \subseteq M$ y $M' = M - \partial_0(U) \otimes \partial_1(U)$. Si $A = M - \partial_0(U)$, entonces $M = \partial_0(U) \otimes A$ y $M' = \partial_1(U) \otimes A$, es decir, escribiendo $id_A : A \to A$ para la correspondiente identidad o transición inactiva, tenemos $M \overset{U}{\Longrightarrow} M'$ si y sólo si $U \otimes id_A : M \to M'$.

Además, deseamos disponer de una noción de *composición secuencial* de computaciones[2] denotada por ";"[3]. Específicamente, si $\alpha : A \to B$ y $\beta : B \to C$ son computaciones, entonces $\alpha; \beta : A \to C$ es asimismo una computación. Obsérvese que el destino de α y el origen de β deben coincidir. Es natural suponer que esta composición secuencial es asociativa. Por otra parte, dada una computación $\alpha : A \to B$, es también natural ver las transiciones inactivas id_A y id_B como sus identidades a izquierda y derecha, respectivamente.

[1] Es decir, $g(I) = I$ y para todo $A, B \in S^{\otimes}$, $g(A \otimes B) = g(A) \otimes g(B)$.

[2] Donde por una *computación* entendemos intuitivamente una combinación posiblemente compleja de composiciones paralelas y secuenciales de transiciones básicas.

[3] Nótese que usamos siempre notación diagramática para denotar la composición de morfismos; así pues, $f; g : A \to C$ denota la composición de $f : A \to B$ seguido de $g : B \to C$.

Entonces podemos imponer una ecuación que convierte a $\otimes$ en una operación funtorial[4]: dadas $\alpha : A \to B,\ \ \alpha' : A' \to B',\ \ \beta : B \to C,\ \ \beta' : B' \to C'$, tenemos

$$(\alpha;\beta) \otimes (\alpha';\beta') = (\alpha \otimes \alpha');(\beta \otimes \beta').$$

El significado intuitivo de esta ecuación es que la composición concurrente o paralela de dos computaciones independientes dadas tiene el mismo efecto que la computación secuencial cuyas componentes son las composiciones paralelas de los pasos de las computaciones dadas.

La estructura resultante al combinar las dos operaciones anteriores de composición paralela ($\otimes$) y secuencial (;) de computaciones es una categoría con una estructura de monoide conmutativo, que llamamos una categoría de Petri.

Definición 21 [116, 117] Una *categoría de Petri* es una categoría $\mathcal{C} = (S^{\otimes}, R, \partial_0, \partial_1, ;, id)$ tal que

- el conjunto de objetos $S^{\otimes}$ es un monoide conmutativo libre sobre el conjunto S,
- el conjunto de morfismos R tiene una estructura de monoide conmutativo $(R, \otimes, id_I)$ que *no* es necesariamente libre,
- las funciones de origen y destino $\partial_0, \partial_1 : R \to S^{\otimes}$ son homomorfismos de monoides,
- la estructura de monoide sobre los morfismos es compatible con la estructura categórica en el sentido de que $\otimes$ conserva la composición y las identidades: si $\alpha : A \to B$, $\alpha' : A' \to B'$, $\beta : B \to C$, $\beta' : B' \to C'$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} (\alpha;\beta) \otimes (\alpha';\beta') & = & (\alpha \otimes \alpha');(\beta \otimes \beta') \\ id_{A\otimes B} & = & id_A \otimes id_B. \end{array}$$

Dadas dos categorías de Petri $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, un *morfismo de categorías de Petri* es un funtor que es un homomorfismo de monoides al restringirlo tanto a objetos como a morfismos. Esto determina una categoría <u>*CatPetri*</u>. $\Box$

Es muy importante observar que en esta definición usamos el mismo símbolo $\otimes$ para denotar dos estructuras de monoide diferentes: sobre los objetos y sobre los morfismos. Esto no debería confundir en absoluto y de hecho lo que $\_\otimes\_$ denota es un funtor de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$; en efecto, éste es precisamente el significado de las dos ecuaciones. Además, por definición, este funtor satisface ecuaciones de asociatividad, conmutatividad e identidad. Por lo tanto, una categoría de Petri es justamente una categoría estricta monoidal estrictamente simétrica en la cual el monoide de objetos es libre (véase la Definición 78 en el Apéndice A).

Nótese también que el elemento neutro para $(R, \otimes)$ es id_I. La razón para esto es que, si I' denota tal elemento neutro, de las otras ecuaciones se deduce que $I' = id_I$.

[4] Sin embargo, cuando la estructura interna de la computación se toma en consideración, imponer tal funtorialidad puede suponer demasiadas identificaciones en algunas situaciones. Véase la Sección 2.5 para una discusión de diferentes axiomatizaciones alternativas.

Tenemos un obvio funtor de olvido $\mathcal{U} : \underline{CatPetri} \longrightarrow \underline{Petri}$ que olvida la estructura categórica y la estructura de monoide sobre los morfismos. Este funtor tiene un adjunto a izquierda $\mathcal{T}[\_] : \underline{Petri} \longrightarrow \underline{CatPetri}$ que pasamos a describir con detalle.

Dada una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$, la categoría de Petri $\mathcal{T}[N]$ se define por medio de las siguientes reglas de generación:

$$(id)\ \frac{A\ \in\ S^{\otimes}}{id_A : A \to A\ en\ \mathcal{T}[N]} \qquad \frac{t : A \to B\ en\ N}{t : A \to B\ en\ \mathcal{T}[N]}$$

$$(;)\ \frac{\alpha : A \to B,\ \beta : B \to C\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha;\beta : A \to C\ en\ \mathcal{T}[N]}$$

$$(\otimes)\ \frac{\alpha : A \to B,\ \beta : C \to D\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha \otimes \beta : A \otimes C \to B \otimes D\ en\ \mathcal{T}[N]}$$

junto con las siguientes reglas ecuacionales:

$$\frac{\alpha : A \to B,\ \beta : B \to C,\ \gamma : C \to D\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha; (\beta;\gamma) = (\alpha;\beta);\gamma}$$

$$\frac{\alpha : A \to B\ en\ \mathcal{T}[N]}{id_A; \alpha = \alpha} \qquad \frac{\alpha : A \to B\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha; id_B = \alpha}$$

$$\frac{\alpha : A \to B,\ \beta : B \to C,\ \alpha' : A' \to B',\ \beta' : B' \to C'\ en\ \mathcal{T}[N]}{(\alpha;\beta) \otimes (\alpha';\beta') = (\alpha \otimes \alpha'); (\beta \otimes \beta')}$$

$$\frac{A, B\ \in\ S^{\otimes}}{id_A \otimes id_B = id_{A\otimes B}}$$

$$\frac{\alpha : A \to B,\ \alpha' : A' \to B',\ \alpha'' : A'' \to B''\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha \otimes (\alpha' \otimes \alpha'') = (\alpha \otimes \alpha') \otimes \alpha''}$$

$$\frac{\alpha : A \to B,\ \alpha' : A' \to B'\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha \otimes \alpha' = \alpha' \otimes \alpha} \qquad \frac{\alpha : A \to B\ en\ \mathcal{T}[N]}{\alpha \otimes id_I = \alpha}$$

Los objetos de $\mathcal{T}[N]$ son los nodos de N, es decir, los elementos del monoide conmutativo $S^{\otimes}$, y los morfismos de $\mathcal{T}[N]$ se obtienen a partir de las transiciones T de N añadiendo para cada objeto A un morfismo identidad id_A y cerrando libremente con respecto a las operaciones de *composición paralela* $\_ \otimes \_$ y de *composición secuencial* $\_;\_$, y después imponiendo las ecuaciones anteriores (asociatividad e identidades para ambas operaciones, funtorialidad y conmutatividad para $\_ \otimes \_$). Las propiedades de las funciones de origen y destino están implícitas en la notación que hemos usado para presentar las reglas. Denotamos por $[\alpha] : A \to B$ la clase de equivalencia de una expresión de morfismo $\alpha : A \to B$ con respecto a la relación de equivalencia generada por las anteriores reglas ecuacionales.

Teorema 22 [117] El funtor de olvido $\mathcal{U} : \underline{CatPetri} \longrightarrow \underline{Petri}$ que ve una categoría de Petri como una red de Petri tiene un adjunto a izquierda $\mathcal{T}[\_] : \underline{Petri} \longrightarrow \underline{CatPetri}$, es decir, la anterior construcción de $\mathcal{T}[N]$ define la *categoría de Petri libre* generada por una red de Petri N. $\Box$

Como ya hemos discutido, el significado intuitivo de la operación monoidal $\_ \otimes \_$ es composición paralela, y naturalmente el significado de la operación categórica $\_;\_$ es composición secuencial. Como los morfismos generadores son las transiciones de N, al cerrar con respecto a estas operaciones obtenemos la noción general de *computación en una red*.

Teorema 23 Dada una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$, marcados M y M' en N, y multiconjuntos $U, U_1, \ldots, U_k$ sobre T,

1. $M \stackrel{U}{\Longrightarrow} M'$ si y sólo si existe $A \in S^{\otimes}$ tal que $[U \otimes id_A] : M \to M'$ es un morfismo en $\mathcal{T}[N]$.

2. $M \stackrel{U_1;\ldots;U_k}{\Longrightarrow^*} M'$ si y sólo si existen $A_1, \ldots, A_k \in S^{\otimes}$ tales que $[(U_1 \otimes id_{A_1}); \cdots ; (U_k \otimes id_{A_k})] : M \to M'$ es un morfismo en $\mathcal{T}[N]$.

3. $M \Longrightarrow^* M'$ si y sólo si existe un morfismo $M \to M'$ en $\mathcal{T}[N]$.

Demostración: Tras la anterior discusión, la única parte que hay que probar es $3(\Leftarrow)$. En efecto, es una consecuencia directa, usando $2(\Leftarrow)$, del Lema 7 en [117], según el cual todo morfismo $M \to M'$ en $\mathcal{T}[N]$ puede escribirse de la forma

$$[(U_1 \otimes id_{A_1}); \cdots ; (U_k \otimes id_{A_k})] : M \to M'$$

para algunos $A_1, \ldots, A_k \in S^{\otimes}$ y $U_1, \ldots, U_k \in T^{\otimes}$. $\square$

Los morfismos de la categoría $\mathcal{T}[N]$ proporcionan una noción abstracta de computación en una red de Petri. La misma computation puede tener una variedad de descripciones diferentes más concretas que se hacen iguales por medio de los axiomas ecuacionales de $\mathcal{T}[N]$. Sin embargo, otras axiomatizaciones que permiten distinciones más finas entre computaciones pueden definirse en el mismo espíritu [36], como se discute en la Sección 2.5.

2.4. Redes de Petri como teorías

La lógica lineal de Girard [49, 50, 51] se presenta explícitamente como una lógica de interacción concurrente en la cual los recursos son limitados y son consumidos en tales interacciones. Esta idea es por supuesto muy semejante a la de redes de Petri, donde los recursos se representan mediante marcas que son consumidas por las transiciones. Al nivel de teoría de pruebas, la limitación de recursos se expresa mediante la prohibición de las reglas estructurales de debilitamiento (*weakening* o *thinning*)

$$\frac{A \vdash B}{A, C \vdash B}$$

(que permite obtener nuevos recursos de forma ilimitada) y de contracción

$$\frac{A, A \vdash B}{A \vdash B}$$

(que elimina de forma arbitraria recursos duplicados). Así, la conjunción $\otimes$ de Girard no es idempotente, es decir, no satisface $A \otimes A = A$. En efecto, si pensamos en un multiconjunto sobre S como una "proposición consciente de los recursos," la conjunción de Girard corresponde exactamente a la operación de unión $A \otimes B$ de dos multiconjuntos, y las reglas lógicas para la conjunción van a reflejar las propiedades de la composición concurrente de computaciones en redes de Petri. Esta correspondencia de la conjunción de Girard con computación concurrente en redes de Petri fue descubierta primero por Asperti [6], quien demostró que una red de Petri puede verse como una teoría de forma que, identificando proposiciones con marcados, existe una correspondencia exacta entre secuentes derivables $A \vdash B$ y la relación $A \Longrightarrow^* B$ de la Definición 15. Gunter y Gehlot también han desarrollado esta idea en su artículo [65] y nosotros desarrollamos las conexiones con la semántica categórica en [104].

Una de las cuestiones fundamentales en teoría de pruebas es: "¿Cuándo son dos pruebas iguales?". Para lógica intuicionista, el trabajo de Prawitz [132] ha hecho contribuciones de gran importancia a este problema. Para Girard, ésta es también una cuestión clave en el contexto de lógica lineal. Girard habla de una "geometría de la interacción" [51] para salvar distinciones sintácticas innecesarias y llegar a la noción correcta de prueba. En el contexto limitado del fragmento de lógica lineal que usa solamente la conectiva de conjunción $\otimes$, el enfoque categórico de redes de Petri esbozado en la Sección 2.3 proporciona un marco algebraico en el cual se puede discutir de forma natural la cuestión de equivalencia entre pruebas. Esto clarifica más la relación entre redes de Petri y lógica lineal tratada por Asperti [6] y por Gunter y Gehlot [65] en términos de la relación de derivabilidad $\vdash$. En efecto, como el artículo [36] muestra, distintas nociones de equivalencia entre computaciones (y consecuentemente entre pruebas) son posibles. Aquí nos limitaremos a discutir la equivalencia generada por las reglas ecuacionales que definen $\mathcal{T}[N]$, y discutiremos brevemente otras equivalencias posibles en la Sección 2.5. Tanto el artículo [36] como el elegante y general enfoque de la coherencia recientemente propuesto por Joyal y Street [76, 77] ponen énfasis en una interpretación geométrica de los morfismos que parece muy prometedora de cara al estudio de nociones adecuadas de equivalencia entre pruebas.

Un ejemplo sencillo puede ayudar a aclarar estas ideas sobre esta "lógica consciente de los recursos." Consideremos las dos acciones de comprar una manzana a pagando un dólar \$, y de comprar un pastel c pagando también un dólar \$. En lógica lineal, podemos expresar estas dos acciones como axiomas

$$\mathit{cmp\text{-}a} : \ \$ \vdash a \qquad\qquad \mathit{cmp\text{-}c} : \ \$ \vdash c$$

y entonces las reglas de la conjunción $\otimes$ nos permiten derivar el secuente

$$\$ \otimes \$ \vdash a \otimes c$$

pero *no podemos* derivar el secuente $\$ \vdash a \otimes c$, debido a la ausencia de las reglas de debilitamiento y contracción.

La red de Petri describiendo esta situación aparece en la Figura 2.3, donde necesitamos *dos* marcas en el lugar \$ para poder obtener una manzana y un pastel mediante la computación concurrente

$$\mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{cmp\text{-}c} : \ \$ \otimes \$ \to a \otimes c.$$

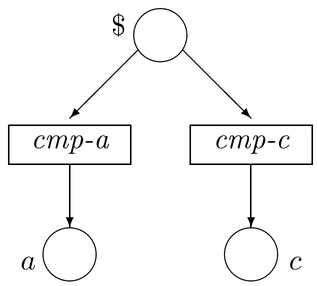


Figura 2.3: Una red de Petri más simple para comprar manzanas y pasteles.

Naturalmente, las reglas ecuacionales para $\mathcal{T}[N]$ hacen que esta computación sea equivalente a comprar primero la manzana y luego el pastel, o viceversa, es decir, tenemos:

$$(\mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{id}_\$);(\mathit{id}_a \otimes \mathit{cmp\text{-}c}) = (\mathit{id}_\$ \otimes \mathit{cmp\text{-}c});(\mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{id}_c) = \mathit{cmp\text{-}a} \otimes \mathit{cmp\text{-}c}.$$

Considerando un conjunto S de *proposiciones constantes*, las *fórmulas* proposicionales generadas por S usando sólo la conectiva de conjunción $\otimes$, que se supone asociativa y conmutativa pero *no* idempotente, son exactamente los elementos del monoide conmutativo libre $S^\otimes$ de multiconjuntos sobre S. Entonces formalizamos las anteriores ideas intuitivas como sigue.

Definición 24 Una *teoría tensorial* o *$\otimes$-teoría* T consiste en un conjunto de constantes S y un conjunto Ax de secuentes[5] de la forma $\alpha : A \vdash B$ con $A, B \in S^\otimes$ llamados los *axiomas* de T.

Dadas $\otimes$-teorías $T = (S, Ax)$ y $T' = (S', Ax')$ un *morfismo de $\otimes$-teorías* $L : T \to T'$ lleva fórmulas sobre S a fórmulas sobre S' conservando la operación $\otimes$, es decir, es un homomorfismo de monoides sobre fórmulas, y lleva un secuente $\alpha : A \vdash B \ \in \ Ax$ a un secuente $L(\alpha) : L(A) \vdash L(B) \ \in \ Ax'$.

Esto define una categoría $\underline{\otimes\text{-}Th}$ con $\otimes$-teorías como objetos y morfismos de $\otimes$-teorías como morfismos. $\square$

La correspondencia entre redes de Petri y $\otimes$-teorías, como por ejemplo entre la red de Petri en la Figura 2.3 y la $\otimes$-teoría con constantes $\$, a, c$, y con los dos axiomas *cmp-a* y *cmp-c*, puede hacerse ahora precisa.

Proposición 25 Si N es una red de Petri con conjunto de lugares S y conjunto de transiciones T, la $\otimes$-teoría asociada a N está dada por el conjunto de constantes S y para cada $t \in T$, un axioma $t : {}^\bullet t \vdash t^\bullet$.

Recíprocamente, si $T = (S, Ax)$ es una $\otimes$-teoría, la correspondiente red de Petri tiene S como conjunto de lugares y para cada axioma $\alpha : A \vdash B \ \in \ Ax$ una transición α con ${}^\bullet\alpha = A$ y $\alpha^\bullet = B$.

[5]Nótese que nuestros secuentes llevan asociado un nombre α. Esto es importante para nuestra formalización posterior de pruebas, y hace que la correspondencia entre pruebas y computaciones en una red de Petri sea particularmente clara. De ese modo, el hecho de que una red de Petri puede pasar de un estado A a un estado B por medio de varias computaciones diferentes se refleja directamente en el hecho de que el secuente lineal $A \vdash B$ puede tener diferentes pruebas.

Entonces $\otimes$-morfismos de $\otimes$-teorías corresponden exactamente a morfismos de redes de Petri, y tenemos un isomorfismo entre las categorías $\underline{Petri}$ y $\underline{\otimes\text{-}Th}$. □

Debido a este isomorfismo, usamos también N para denotar la $\otimes$-teoría asociada a la red de Petri N.

Definición 26 Dada una $\otimes$-teoría $T = (S, Ax)$, una *expresión de prueba* derivable a partir de T es un secuente $\alpha : A \vdash B$ con $A, B \in S^{\otimes}$ y α generado inductivamente a partir de los axiomas Ax y el esquema de axioma

$$(id) \;\; id_A : A \vdash A$$

mediante las reglas

$$(corte) \;\; \frac{\alpha : A \vdash B, \;\beta : B \vdash C}{\alpha ; \beta : A \vdash C}$$

$$(\otimes) \;\; \frac{\alpha : A \vdash B, \;\beta : C \vdash D}{\alpha \otimes \beta : A \otimes C \vdash B \otimes D}$$

La *clausura* $T^{\diamond}$ de T es la $\otimes$-teoría con constantes S y con axiomas el conjunto de todas las expresiones de prueba derivables a partir de T, por lo que hay un morfismo de inclusión obvio $T \hookrightarrow T^{\diamond}$ en $\underline{\otimes\text{-}Th}$. □

Es muy importante observar que, salvo el ligero cambio en notación de $\alpha : A \to B$ a $\alpha : A \vdash B$, las reglas de generación de la categoría $\mathcal{T}[T]$ asociada a T (al verla como red de Petri) son exactamente las mismas que las de $T^{\diamond}$, es decir, empezamos con los axiomas (transiciones) y las identidades, y generamos todas las expresiones de prueba mediante las reglas ($corte$), correspondiente a la regla $(;)$ en $\mathcal{T}[T]$, y $(\otimes)$, denotada igual en ambos casos. Por construcción, expresiones de prueba en $T^{\diamond}$ y expresiones de morfismo en $\mathcal{T}[T]$ son sintácticamente idénticas. Como en $\mathcal{T}[T]$ tales expresiones se identifican mediante las reglas ecuacionales de su definición, podemos definir una *prueba* $[\alpha] : A \vdash B$ como la clase de equivalencia de todas las expresiones de prueba $\alpha : A \vdash B$ que son identificadas por esas reglas ecuacionales; de esta forma, pruebas y computaciones en redes de Petri se hacen formalmente idénticas.

Teorema 27 Dada una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$ y marcados M, M' en N, existe un morfismo $[\alpha] : M \to M'$ en $\mathcal{T}[N]$ si y sólo si existe una prueba $[\alpha] : M \vdash M'$ a partir de los axiomas de la $\otimes$-teoría N. □

Finalmente, podemos establecer la conexión con la notación más clásica de la Definición 15.

Corolario 28 Dada una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$, marcados M y M' en N, y multiconjuntos $U, U_1, \ldots, U_k$ sobre T,

1. $M \stackrel{U}{\Longrightarrow} M'$ si y sólo si existe $A \in S^{\otimes}$ tal que hay una prueba $[U \otimes id_A] : M \vdash M'$ a partir de los axiomas de la $\otimes$-teoría N.

2. $M \stackrel{U_1;\ldots;U_k}{\Longrightarrow^*} M'$ si y sólo si existen $A_1, \ldots, A_k \in S^{\otimes}$ tales que tenemos una prueba $[(U_1 \otimes id_{A_1}); \cdots; (U_k \otimes id_{A_k})] : M \vdash M'$ a partir de los axiomas de la $\otimes$-teoría N.

3. $M \Longrightarrow^* M'$ si y sólo si existe una prueba $[\alpha] : M \vdash M'$ a partir de los axiomas de la $\otimes$-teoría N. $\square$

Este resultado es llamado "Teorema de Corrección y Completitud" por Gunter y Gehlot en [65, 44]. El lector debe notar que Gunter y Gehlot usan una presentación ligeramente diferente; sus secuentes son de la forma $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ con varias fórmulas a la izquierda, y sin un nombre para el secuente. Además, nuestra regla $(\otimes)$ se separa en dos:

$$(\otimes L)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \qquad\qquad (\otimes R)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$$

Aunque estas diferencias no importan mucho en lo concerniente a secuentes derivables (identificando la coma en el lado izquierdo de los secuentes con la conectiva $\otimes$) ni tampoco en lo concerniente a los resultados anteriores sobre su relación con computaciones en redes de Petri, sí que adquieren importancia al tomar en consideración la estructura de las pruebas.

En las secciones posteriores consideraremos también secuentes de la forma más general $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, pero en esta sección hemos preferido tratar secuentes de la forma $\alpha : A \vdash B$ porque creemos que de este modo la correspondencia entre pruebas, computaciones y morfismos en la categoría $\mathcal{T}[N]$ se hace más clara y fácil de entender.

2.5. Otras categorías (monoidales) para redes

En la Sección 2.3 hemos asociado a una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$ una categoría de Petri $\mathcal{T}[N]$, los morfismos de la cual se interpretan como computaciones en N, obtenidas al cerrar el conjunto de transiciones T y computaciones inactivas con respecto a las operaciones de composición paralela $\_ \otimes \_$ y de composición secuencial $\_;\_$, y luego imponiendo un conjunto de ecuaciones. Sin embargo, ya hemos señalado varias veces que este conjunto de ecuaciones no está unívocamente determinado y que se pueden considerar diversas variaciones. Aquí repasamos algunas de ellas, siguiendo el trabajo presentado en [36].

Tres importantes descripciones de las computaciones en redes de Petri son las siguientes:

1. *Sucesiones de pasos* $M \stackrel{U_1;\ldots;U_k}{\Longrightarrow^*} M'$, donde cada U_i es un multiconjunto de transiciones no vacío, tal y como se definió en la Definición 15.

2. *Sucesiones de ocurrencias*, el caso particular de sucesiones de pasos $M \stackrel{U_1;\ldots;U_k}{\Longrightarrow^*} M'$, donde cada U_i consiste en una única transición.

3. *Procesos*, definidos como morfismos desde *redes de ocurrencias*[6] en la red de Petri dada.

En la categoría $\mathcal{T}[N]$, usando la ecuación de funtorialidad

$$(\alpha;\beta)\otimes(\alpha';\beta') = (\alpha\otimes\alpha');(\beta\otimes\beta'),$$

todo morfismo $\alpha : M \to M'$ puede descomponerse como una composición secuencial

$$(t_1 \otimes id_{A_1});\cdots;(t_k \otimes id_{A_k}) : M \to M'$$

con $t_i \in T$ y $A_i \in S^{\otimes}$ $(i = 1,\ldots,k)$, correspondiente a la sucesión de ocurrencias $M \overset{t_1;\ldots;t_k}{\Longrightarrow^*} M'$ [117, Corolario 8].

Ahora vamos a definir otras categorías—relacionadas con $\mathcal{T}[N]$ pero diferentes—cuyos objetos son marcados en $S^{\otimes}$ y cuyos morfismos corresponden a sucesiones de pasos y procesos. La primera categoría, $\mathcal{K}[N]$, representa una noción de computación más concreta que sucesiones de pasos y procesos. Contiene una subcategoría de *simetrías* que permiten la permutación de marcas en un lugar (éstas son útiles para el tratamiento de procesos). Dado un marcado $M = s_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes s_k^{n_k} \in S^{\otimes}$, una simetría $p : M \to M$ se define como un vector $\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_k\rangle$ tal que σ_i es una permutación de n_i elementos $(i = 1,\ldots,k)$. Estas simetrías se dotan de operaciones de composición paralela y secuencial y forman una categoría estricta monoidal simétrica (remitimos al lector al artículo [36] para los detalles).

Los morfismos en $\mathcal{K}[N]$ se generan a partir de transiciones básicas y simetrías (éstas incluyen las identidades) cerrando con respecto a las operaciones de composición paralela $\_\otimes\_$ y de composición secuencial $\_;\_$. Estos morfismos están sujetos a ecuaciones que expresan las propiedades de asociatividad e identidad de $\_;\_$ (es decir, que $\mathcal{K}[N]$ es una categoría), y de $\_\otimes\_$ (es decir, que los morfismos forman también un monoide); además, hay dos ecuaciones que involucran simetrías:

1. Las transiciones básicas son simétricas: Para $t : {}^{\bullet}t \to t^{\bullet}$ y simetrías $p : {}^{\bullet}t \to {}^{\bullet}t$ y $q : t^{\bullet} \to t^{\bullet}$, tenemos $p;t;q = t$.

2. Un "axioma de coherencia" expresando la propiedad de que los factores pueden intercambiarse en una composición paralela, supuesto que simetrías apropiadas se compongan secuencialmente: Si $\alpha_i : M_i \to M_i'$ $(i = 1,\ldots,k)$ y π es una permutación de k elementos, tenemos

$$p;(\alpha_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\pi(k)}) = (\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_k);q$$

donde p y q son *simetrías de intercambio* definidas en términos de π (véase de nuevo [36] para los detalles).

[6]Una *red de ocurrencias* es una red de Petri (S,T,F) tal que: (i) para cada $t \in T$, el preconjunto ${}^{\bullet}t$ y el postconjunto $t^{\bullet}$ son conjuntos (por lo tanto, F es una relación), (ii) la clausura reflexiva y transitiva de la relación F es un orden parcial, y (iii) para cada lugar $s \in S$, los conjuntos $\{t \in T \mid F(t,s)\}$ y $\{t \in T \mid F(s,t)\}$ contienen como mucho un elemento.

Nótese que la ecuación de funtorialidad para $\otimes$ se ha omitido, y por lo tanto $\mathcal{K}[N]$ *no* es una categoría monoidal.

La categoría $\mathcal{S}[N]$ se obtiene a partir de $\mathcal{K}[N]$ al identificar todas las simetrías, es decir, al imponer el siguiente axioma adicional: si $p : M \to M$ es una simetría, entonces $p = id_M$. Por el axioma de coherencia, una presentación equivalente de $\mathcal{S}[N]$ consiste en omitir del todo las simetrías (excepto las identidades) y el axioma de coherencia, y postular en cambio la conmutatividad de $\otimes$. El siguiente teorema que identifica sucesiones de pasos y ocurrencias con ciertos morfismos en $\mathcal{S}[N]$ se demuestra en [36].

Teorema 29 [36] Las siguientes expresiones son canónicas en $\mathcal{S}[N]$, es decir, términos diferentes denotan morfismos diferentes (salvo asociatividad de ; y conmutatividad de $\otimes$):

$$(id_{A_1} \otimes t_1); \ldots ; (id_{A_n} \otimes t_n) \ : \ A_1 \otimes {}^\bullet t_1 \longrightarrow A_n \otimes t_n^\bullet$$

$$(id_{A_1} \otimes \textstyle\bigotimes_j t_{1j}); \ldots ; (id_{A_n} \otimes \textstyle\bigotimes_j t_{nj}) \ : \ A_1 \otimes \textstyle\bigotimes_j {}^\bullet t_{1j} \longrightarrow A_n \otimes \textstyle\bigotimes_j t_{nj}^\bullet.$$

Además, están en biyección con las sucesiones de ocurrencias y pasos para N, respectivamente. $\square$

En $\mathcal{S}[N]$ hay morfismos adicionales, correspondientes a expresiones donde composiciones secuenciales y paralelas se mezclan de forma más compleja.

La cuarta categoría, $\mathcal{P}[N]$, se obtiene a partir de $\mathcal{K}[N]$ imponiendo la ecuación de funtorialidad

$$(\alpha; \beta) \otimes (\alpha'; \beta') = (\alpha \otimes \alpha'); (\beta \otimes \beta').$$

Ésta convierte a $\mathcal{P}[N]$ en una categoría estricta monoidal simétrica, si bien no es la tal categoría libre generada por la red de Petri N, ya que satisface ecuaciones adicionales. Un resultado importante en [36] es que los morfismos en $\mathcal{P}[N]$ coinciden con un refinamiento de procesos llamados *procesos concatenables*. Éstos se obtienen a partir de los procesos usuales al imponer un orden total en aquellos lugares minimales (u "orígenes") de un proceso que son instancias del mismo lugar, y un orden similar para los lugares maximales (o "destinos"); esto permite, por un lado, la definición de una noción general nueva de composición secuencial de procesos, y por otra parte, una axiomatización completamente algebraica de procesos.

Finalmente, la categoría $\mathcal{T}[N]$ puede obtenerse o bien añadiendo la ecuación de funtorialidad a $\mathcal{S}[N]$, o bien añadiendo la identificación de simetrías a $\mathcal{P}[N]$. En [36] se demuestra que los morfismos de $\mathcal{T}[N]$ coinciden con los procesos conmutativos definidos por Best y Devillers [16]; éstos constituyen el menos abstracto modelo de computación que es más abstracto que sucesiones de ocurrencias y que procesos. Una forma equivalente de decir esto es que el diagrama en forma de diamante en la Figura 2.4, que resume esta discusión, es una suma fibrada (*pushout*) de categorías con estructura algebraica dada por la operación $\otimes$.

Pasamos a discutir ahora el trabajo de Gehlot y Gunter sobre "reducción de cortes" [65, 44] y su relación con las categorías anteriores, establecida en [45, 44].

La lógica lineal posee la propiedad de *eliminación del corte*, es decir, cualquier secuente que se puede probar usando el axioma de identidad, la regla de corte y las restantes reglas

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{procesos conmutativos} & & \\
 & & \mathcal{T}[N] & & \\
\text{procesos concatenables} & \mathcal{P}[N] \arrow[ur, "\textit{conmutatividad de } \otimes"] & & \mathcal{S}[N] \arrow[ul, "\textit{funtorialidad de } \otimes"'] & \text{sucesiones de ocurrencias y pasos} \\
 & & \mathcal{K}[N] \arrow[ul, "\textit{funtorialidad de } \otimes"] \arrow[ur, "\textit{conmutatividad de } \otimes"'] & & \\
 & & \text{computaciones en redes} & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4: Un diamante de categorías para una red N.

lógicas, puede probarse también sin usar la regla de corte [49]. Sin embargo, en presencia de axiomas extra-lógicos, como por ejemplo los correspondientes a las transiciones de una red de Petri, la propiedad de eliminación del corte obviamente se pierde. No obstante, es aún posible "reducir" a un mínimo el uso de la regla de corte en las pruebas. Además, como hemos visto en la Sección 2.4, la regla de corte corresponde a la composición secuencial de computaciones; por lo tanto, desde un punto de vista computacional, la eliminación del uso de la regla de corte corresponde a la eliminación de secuencializaciones innecesarias en una computación, es decir, a maximizar la concurrencia. Ésta es la idea básica desarrollada en el trabajo de Gunter y Gehlot. Ellos dan una colección de reglas de reducción de la forma $\Pi \Rightarrow_{cr} \Pi'$ donde Π y Π' denotan pruebas del mismo secuente $\Gamma \vdash A$, que, al aplicarlas a una prueba de un secuente, producen una prueba del mismo secuente que es intuitivamente más concurrente. Esta intuición sobre la correspondencia entre reducción del corte y maximización de la concurrencia se formaliza mediante una semántica de pruebas en términos de conjuntos parcialmente ordenados, en la que las dependencias secuenciales introducidas por el uso de la regla de corte se hacen explícitas (véase [44] para los detalles).

El principal resultado sobre la relación de reducción $\Rightarrow_{cr}$ es que es normalizante: dada una prueba Π de un secuente $\Gamma \vdash A$, hay una sucesión de reducciones $\Pi \Rightarrow_{cr}^{*} \Pi'$ tal que Π' es normal con respecto a $\Rightarrow_{cr}$.

Hemos observado en la Sección 2.4 que hay una estrecha conexión entre las reglas del fragmento tensorial de lógica lineal y las reglas que generan la categoría $\mathcal{T}[N]$, así como otras categorías $\mathcal{K}[N]$, $\mathcal{P}[N]$ y $\mathcal{S}[N]$ descritas más arriba. El conjunto de ecuaciones impuesto en cada caso para definir la respectiva categoría induce una equivalencia entre pruebas que puede asimismo expresarse directamente mediante ecuaciones entre pruebas de la forma $\Pi =_{\mathcal{E}} \Pi'$, donde Π y Π' denotan pruebas del mismo secuente $\Gamma \vdash A$ y $\mathcal{E} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{S}, \mathcal{T}\}$. Este último es el punto de vista considerado en [44, 45][7]. La relación de reducción $\Rightarrow_{cr}$ induce una relación de reducción $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ sobre clases de $\mathcal{E}$-equivalencia de prue-

[7]Hablando estrictamente, hay una pequeña diferencia relativa a la distinción entre coma y tensor en el lado izquierdo de los secuentes.

bas. El siguiente teorema enumera algunas propiedades importantes que estas relaciones de reducción satisfacen.

Teorema 30 [44]

1. Las equivalencias $=_{\mathcal{K}}$ y $=_{\mathcal{S}}$ son correctas con respecto a la semántica de conjuntos parcialmente ordenados mencionada antes.

2. La relación de reducción $\Rightarrow_{\mathcal{S}}$ es fuertemente normalizante, pero *no* Church-Rosser.

3. La relación de reducción $\Rightarrow_{\mathcal{K}}$ es fuertemente normalizante y Church-Rosser.

4. La relación de reducción $\Rightarrow_{cr}$ respeta $=_{\mathcal{P}}$ (y por lo tanto también $=_{\mathcal{T}}$): si $\Pi \Rightarrow_{cr} \Pi'$, entonces existe Π'' tal que $\Pi =_{\mathcal{P}} \Pi''$ y $\Pi' =_{\mathcal{P}} \Pi''$.

5. La relación de reducción $\Rightarrow_{\mathcal{K}}$ respeta $=_{\mathcal{P}}$. (Éste es un corolario de la propiedad anterior.)

6. En cada clase de $\mathcal{P}$-equivalencia existe una única clase de $\mathcal{K}$-equivalencia que es normal con respecto a $\Rightarrow_{\mathcal{K}}$ ("único representante de procesos" en la terminología de [45, 44])[8]. □

Con esto acabamos nuestra detallada discusión de la conectiva $\otimes$ de la lógica lineal y de su relación con el punto de vista de "redes de Petri como monoides" desarrollado en [116, 117, 36]. En las siguientes secciones vamos a ver las restantes conectivas de la lógica lineal y discutimos su posible interpretación computacional.

2.6. Implicación lineal y estados condicionales

Hasta ahora hemos estudiado el fragmento de lógica lineal consistente en el esquema de axioma (id) $A \vdash A$, la regla $(corte)$, cuya forma general[9] es

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B},$$

y sólo la conectiva lógica $\otimes$ cuyas reglas se pueden generalizar a

$$(\otimes L)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \qquad\qquad (\otimes R)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B}.$$

Hemos visto que las categorías monoidales simétricas proporcionan una semántica muy general para este fragmento, y que sus pruebas están estrechamente relacionadas con computaciones en redes de Petri. Antes hemos supuesto que la conectiva $\otimes$ era asociativa y conmutativa pero no hay ningún problema en generalizar este supuesto a una regla

$$(perm)\ \frac{A_1, \ldots, A_n \vdash B}{A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)} \vdash B} \text{ para toda permutación } \sigma \text{ de } n \text{ elementos}$$

[8] Este resultado se afirmaba equivocadamente en [45] para $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$ en vez de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{K}$, respectivamente.

[9] En las discusiones que siguen vamos a considerar secuentes sin nombres asociados.

en cuyo caso algunas identidades se relajan a isomorfismos. De esta forma, en vez de considerar categorías estrictas monoidales estrictamente simétricas, podemos dar una semántica en términos de categorías monoidales simétricas en general.

Por supuesto, la lógica lineal es mucho más rica que este minúsculo fragmento. Una de sus conectivas más interesantes es la implicación lineal $\multimap$, caracterizada por las reglas

$$(\multimap L)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash C} \qquad\qquad (\multimap R)\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B},$$

que son enteramente análogas a las reglas para la conectiva de implicación en lógica clásica e intuicionista.

Desde un punto de vista categórico, la regla $(\multimap R)$ indica la existencia de un morfismo $f^{\dagger} : G \to A \multimap B$ para cada morfismo $f : G \otimes A \to B$. Y, particularizando las premisas de la regla $(\multimap L)$ a identidades $A \vdash A$ y $B \vdash B$, su conclusión sugiere la existencia de un morfismo de evaluación $\varepsilon_{A,B} : (A \multimap B) \otimes A \longrightarrow B$. Estas ideas motivan el marco de las categorías monoidales simétricas cerradas (véase la Sección A.1 del Apéndice A) como la semántica adecuada para este fragmento; ésta es una simple generalización del hecho bien conocido de que las categorías cartesianas cerradas constituyen la semántica adecuada para lógica intuicionista proposicional.

Ahora, pasando a la tercera parte de nuestra correspondencia triangular, la pregunta que se plantea es: ¿Cuál es la interpretación computacional de la implicación lineal? En principio, en teoría de redes de Petri no hay nada que corresponda directamente a esta conectiva. Por lo tanto, la categoría $\mathcal{T}[N]$ (o cualquiera de las posibles variaciones discutidas en la Sección 2.5) no contiene ningún objeto correspondiente a implicaciones, y naturalmente no es una categoría cerrada. Para obtener una extensión de $\mathcal{T}[N]$ a una categoría con una estructura cerrada podemos considerar la siguiente situación.

Tenemos un funtor de olvido obvio $\underline{CMonCat} \longrightarrow \underline{MonCat}$ de la categoría de categorías monoidales simétricas cerradas en la categoría de categorías monoidales simétricas (estas categorías se definen en la Sección A.1 del Apéndice A). Por resultados generales sobre teorías esencialmente algebraicas (véase por ejemplo [13, Teorema 4.4.1]), este funtor tiene un adjunto a izquierda

$$\mathcal{M}[\_] : \underline{MonCat} \longrightarrow \underline{CMonCat}$$

que lleva una categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ a la categoría monoidal simétrica cerrada libre $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ generada por $\mathcal{C}$. Una forma más elemental y explícita de construir esta categoría, sin tener que recurrir a ningún resultado general, es considerar la construcción dada por las reglas en el Apéndice C, excepto las reglas de productos finitos y del objeto dualizante, y sustituir en todas partes $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ por $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$. Los objetos de $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ están generados libremente por los de $\mathcal{C}$ cerrando con respecto a las operaciones $\otimes$ y $\multimap$; y los morfismos de $\mathcal{M}[\mathcal{C}]$ se obtienen a partir de los de $\mathcal{C}$ y familias de morfismos $id, a, a^{-1}, c, e, e^{-1}, \varepsilon$ cerrando libremente con respecto a las operaciones $\_;\_$, $\_\otimes\_$, $(\_)^{\dagger}$ e imponiendo sobre ellos las ecuaciones que una categoría necesita satisfacer para ser una categoría monoidal simétrica cerrada (véase también la explicación en la Sección 3.3).

Usando el funtor $\mathcal{M}[\_]$ podemos considerar la categoría monoidal simétrica cerrada libre $\mathcal{G}[N] = \mathcal{M}[\mathcal{T}[N]]$ generada por $\mathcal{T}[N]$ (y similarmente, la categoría $\mathcal{M}[\mathcal{P}[N]]$ generada por $\mathcal{P}[N]$). La categoría $\mathcal{G}[N]$ contiene todos los objetos y morfismos de $\mathcal{T}[N]$—correspondientes a marcados y computaciones de la red N—así como nuevos objetos y morfismos adicionales proporcionados por la estructura suplementaria. Estos nuevos objetos y morfismos no tienen equivalentes "reales" como estados o procesos en la red, y por lo tanto, podemos pensar en ellos como estados y procesos *ideales o gedanken* que pueden ser útiles para propósitos de especificación o razonamiento. En [103] propusimos interpretar un estado de la forma $A \multimap B$ como un estado *condicional* con el significado "*si* los recursos A estuvieran disponibles, *entonces* la computación podría seguir al estado B." Esta idea ha sido continuada por Asperti, Ferrari y Gorrieri en su artículo [7].

Consideremos de nuevo la red de la Figura 2.1, cuyos axiomas como teoría tensorial incluyen la siguiente transición (vamos a identificar secuentes derivables, computaciones y morfismos en $\mathcal{G}[N]$, generalizando los resultados del Teorema 23 y Corolario 28):

$$\mathit{cmp\text{-}c}: \quad q \otimes \$ \vdash c,$$

con el significado intuitivo de que con un dólar y un cuarto se puede comprar un pastel, y consideremos el marcado q consistente únicamente en un cuarto. Siguiendo la definición usual de disparo y paso de una computación (Definición 15), no puede suceder nada en este estado, ya que cada transición necesita recursos que por el momento no están disponibles; por ejemplo, el disparo de la transición $\mathit{cmp\text{-}a'}$ necesita tres cuartos para ser dispuesto, y el disparo de la transición $\mathit{cmp\text{-}a}$ necesita un cuarto y un dólar. Sin embargo, usando la regla $(\multimap R)$, a partir del anterior axioma podemos derivar el secuente

$$q \vdash \$ \multimap c,$$

correspondiente a una transición derivada cuyo disparo sí es dispuesto en el estado representado por el marcado q. El disparo de esta computación resulta en un estado condicional $\$ \multimap c$. Tales estados son llamados *inconclusos* en [7], siguiendo la idea de que aunque algunos recursos se han consumido, aún son necesarios otros recursos (\$ en este ejemplo particular) para que la transición básica $\mathit{cmp\text{-}c}$ pueda completarse del todo mediante la computación $(\$ \multimap c) \otimes \$ \longrightarrow c$, correspondiente a un morfismo de evaluación $\varepsilon_{\$,c}$.

Estos nuevos estados inconclusos, junto con sus computaciones asociadas, permiten la observación de computaciones a un nivel más bajo de atomicidad, donde cualquier marca puede ser consumida independientemente de la disponibilidad de otras marcas para completar una transición básica. Por ejemplo, en la misma situación que antes, la marca en el lugar q puede asimismo ser consumida por la transición $\mathit{cmp\text{-}a'}$, dando lugar a un estado inconcluso $q^2 \multimap a$, con el significado intuitivo de que *si* yo tuviera dos cuartos más, *entonces* podría comprar una manzana.

Como hemos mencionado arriba, cuando los recursos restantes están disponibles, la transición básica puede completarse; sin embargo, también puede darse ahora una situación de punto muerto. Consideremos por ejemplo un marcado q^3 en la red de la Figura 2.1; en este estado, el disparo de la transición básica $\mathit{cmp\text{-}a'}$ está dispuesto, y tal disparo daría lugar al marcado a. Supongamos en cambio que sólo se usan dos cuartos, resultando en el estado inconcluso $q \otimes (q \multimap a)$; en esta situación, la transición básica $\mathit{cmp\text{-}a'}$ podría aún completarse, pero supongamos en cambio que el cuarto restante es consumido por la transición $\mathit{cmp\text{-}c}$ dando un estado $(\$ \multimap c) \otimes (q \multimap a)$, en el que ambas transiciones básicas están incompletas, y además han llegado a un punto muerto ya que no hay más recursos disponibles. Los autores de [7] dan un interesante ejemplo de punto muerto usando el famoso ejemplo de la cena de los filósofos [37].

El principal resultado de [7] es un resultado de conservatividad, demostrado mediante un procedimiento de eliminación de cortes, que podemos enunciar como sigue:

Teorema 31 [7] Si $A_1, \dots, A_n, B$ son fórmulas usando sólo la conectiva $\otimes$, y el secuente $A_1, \dots, A_n \vdash B$ es derivable a partir de una teoría tensorial T usando (*corte*) y las reglas para $\otimes$ y $\multimap$, entonces este secuente se puede derivar asimismo a partir de T mediante (*corte*) y las reglas para $\otimes$. Además, ambas derivaciones tienen la misma semántica categórica, es decir, describen el mismo proceso. $\square$

Como consecuencia de este resultado, para una red $(\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$, la relación de alcanzabilidad $\Longrightarrow^*$ sobre $S^{\otimes}$ no cambia con la generalización del juego de marcas según las ideas desarrolladas antes.

2.7. Las conectivas aditivas y elección

Entre las presentaciones usuales del cálculo de secuentes para lógica intuicionista, distintos autores usan dos reglas diferentes para la conjunción $\wedge$, una en la cual el contexto se reparte entre las dos premisas y otra en la que el mismo contexto aparece en ambas premisas:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}.$$

Usando las reglas estructurales de debilitamiento y contracción, es muy fácil demostrar que estas dos reglas son equivalentes. Sin embargo, una de las características más importantes de la lógica lineal es precisamente la ausencia de tales reglas estructurales, y por lo tanto esas dos reglas no son equivalentes en lógica lineal. Por esta razón, la conjunción $\wedge$ se separa en dos conectivas diferentes. Ya hemos estudiado la conectiva “multiplicativa” $\otimes$ introducida por las reglas

$$(\otimes L)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \qquad\qquad (\otimes R)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B}.$$

La otra conectiva es la conjunción “aditiva” & (pronunciada *con*) introducida por las reglas

$$(\& Li)\ \frac{\Gamma, A_i \vdash C}{\Gamma, A_1 \& A_2 \vdash C}\ (i = 1, 2) \qquad\qquad (\& R)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}.$$

De la misma forma, la disyunción $\vee$ se separa en una “aditiva” $\oplus$ (pronunciada *más*) con reglas

$$(\oplus L)\ \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \oplus B \vdash C} \qquad\qquad (\oplus Ri)\ \frac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_1 \oplus A_2}\ (i = 1, 2),$$

y una “multiplicativa” $⅋$ (pronunciada *par*), cuyas reglas correspondientes son

$$(⅋ L)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A ⅋ B \vdash \Delta, \Delta'} \qquad\qquad (⅋ R)\ \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A ⅋ B, \Delta}.$$

Ésta es la primera vez que hemos usado secuentes con una lista de fórmulas en el lado derecho, donde, como la regla ($\parr R$) sugiere, la coma se interpreta como la conectiva $\parr$, de la misma forma que la coma en el lado izquierdo se interpreta como la conectiva $\otimes$ debido a la regla ($\otimes L$). Todas las reglas anteriores se generalizan fácilmente a esta clase de presentación; por ejemplo, la regla ($\multimap L$) se convierte en

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash \Delta', \Delta}$$

(véase la Sección 3.2).

Las conectivas $\parr$ y $\oplus$ son *duales* de $\otimes$ y &, respectivamente, en el sentido de que a través de la negación se relacionan mediante leyes de De Morgan, de forma completamente análoga a la dualidad entre $\wedge$ y $\vee$ en lógica clásica; por ejemplo, $(A \parr B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp$.

El lector puede convencerse fácilmente de que la interpretación categórica natural de las conectivas & y $\oplus$ viene dada por productos y coproductos, respectivamente.

Discutiremos más la negación y $\parr$ en la siguiente sección y su semántica categórica en la Sección 3.1, y dedicamos el resto de esta sección a mostrar la interpretación computacional de las conectivas aditivas & y $\oplus$.

Volvamos de nuevo a la trivial red de Petri de la Figura 2.3, con axiomas

$$\textit{cmp-a}: \ \$ \vdash a \qquad\qquad \textit{cmp-c}: \ \$ \vdash c.$$

Intuitivamente, estos axiomas dicen que con un dólar se puede comprar una manzana y que también con un dólar se puede comprar un pastel. Hemos visto cómo podemos derivar el secuente

$$\$ \otimes \$ \vdash a \otimes c,$$

con el significado de que con *dos* dólares se puede comprar la manzana *y* el pastel, pero *no* el secuente $\$ \vdash a \otimes c$, que indica la posibilidad de comprar ambas cosas con un único dólar.

Ahora bien, usando la regla ($\&R$) podemos derivar a partir de los axiomas *cmp-a* y *cmp-c* el secuente

$$\$ \vdash a \& c.$$

Una atractiva interpretación de este secuente es que indica la posibilidad de una *elección* entre comprar la manzana o comprar el pastel, pero no ambos. Además, esta elección es *externa* en el sentido de que en este ejemplo es el usuario de la máquina vendedora quien toma la decisión. Por otra parte, la regla ($\oplus R$) permite la derivación del secuente

$$\$ \vdash a \oplus c^3.$$

Este secuente puede interpretarse asimismo como la posibilidad de elegir entre una manzana y tres pasteles, pero ahora la elección es *interna* en el sentido de que la máquina "decide" mientras que el usuario no puede tomar ninguna decisión; en este ejemplo trivial, es fácil ver que el usuario siempre recibirá la manzana, y nunca los tres pasteles. Estas interpretaciones intuitivas de estas conectivas de la lógica lineal ya fueron propuestas por Girard en [51], y también aparecen en [65, 103].

Estas posibilidades de elección no están presentes explícitamente en el habitual juego de marcas en redes de Petri, si bien aparecen en otros modelos de concurrencia como por ejemplo el lenguaje CSP [70]. Podríamos seguir aquí el camino tomado en la Sección 2.6, considerando la categoría con productos y coproductos libre generada por $\mathcal{T}[N]$, e identificando sus morfismos con computaciones generalizadas sobre la red N que incluyen las posibilidades de elección discutidas arriba, correspondientes a pruebas en el fragmento de lógica lineal con las conectivas & y $\oplus$. Sin embargo, en vez de dar los detalles de esta construcción libre[10], vamos a examinar aquí los interesantes resultados obtenidos recientemente por Lincoln, Mitchell, Scedrov y Shankar en [97], donde el modelo de computación cambia de redes de Petri a una clase de máquinas con dos contadores, obteniendo una buena relación entre computaciones en estas máquinas y el fragmento de lógica lineal que incluye las conectivas $\otimes$ y $\oplus$. Lo que sigue es un resumen de las Secciones 3.4–3.6 de [97], con algunos pequeños cambios en la notación.

Lincoln, Mitchell, Scedrov y Shankar [97] usan máquinas nodeterminísticas con $\wedge$-ramificación y dos contadores, pero sin test de cero. Estas máquinas sustituyen una transición explícita de test de cero por transiciones de "bifurcación"; una instrucción de "bifurcación" (Q_i **Bifurcar** Q_j, Q_k) permite que una máquina en estado Q_i continúe la computación desde ambos estados Q_j y Q_k, cada computación con los valores actuales en los contadores.

Una *Máquina con $\wedge$-Ramificación y Dos Contadores sin Test de Cero*, abreviado por ACM, N consiste en un conjunto finito Q de estados, un conjunto finito T de transiciones de la forma descrita a continuación, y un estado final distinguido Q_F.

Una *descripción instantánea*, o ID, de una ACM N es una *lista finita de triples* $\langle Q_i, A, B\rangle$, donde $Q_i \in Q$, y A y B son números naturales correspondientes a los *dos contadores* de la máquina. Una ID corresponde intuitivamente a un estado distribuido de la máquina. Una ID *aceptante* es una ID cuyos elementos son todos instancias del triple *aceptante* $\langle Q_F, 0, 0\rangle$. Por ejemplo, $\{\langle Q_F,0,0\rangle, \langle Q_F,0,0\rangle, \langle Q_F,0,0\rangle\}$ es una ID aceptante. Por último, una ACM N *acepta* una ID s si y sólo si existe alguna computación de s en una ID aceptante. Intuitivamente, una computación de una ACM es una clase de computación paralela que termina con éxito sólo cuando todas sus ramas de computación concurrentes terminan con éxito, o sea, cada $\wedge$-rama termina en el estado Q_F con ambos contadores puestos a cero, alcanzando de esta forma el triple aceptante.

Las transiciones en T pueden tener las siguientes formas:

$$\begin{array}{rlcll}
(Q_i\ \textbf{Incrementar}\ A\ Q_j) & \text{pasando de} & \langle Q_i, A, B\rangle & \text{a} & \langle Q_j, A+1, B\rangle \\
(Q_i\ \textbf{Incrementar}\ B\ Q_j) & \text{pasando de} & \langle Q_i, A, B\rangle & \text{a} & \langle Q_j, A, B+1\rangle \\
(Q_i\ \textbf{Decrementar}\ A\ Q_j) & \text{pasando de} & \langle Q_i, A+1, B\rangle & \text{a} & \langle Q_j, A, B\rangle \\
(Q_i\ \textbf{Decrementar}\ B\ Q_j) & \text{pasando de} & \langle Q_i, A, B+1\rangle & \text{a} & \langle Q_j, A, B\rangle \\
(Q_i\ \textbf{Bifurcar}\ Q_j, Q_k) & \text{pasando de} & \langle Q_i, A, B\rangle & \text{a} & (\langle Q_j, A, B\rangle, \langle Q_k, A, B\rangle)
\end{array}$$

donde Q_i, Q_j, y Q_k son estados en Q, y $Q_i \neq Q_F$.

[10] Animamos al lector interesado a que desarrolle él mismo la construcción de esa categoría libre usando las técnicas del Apéndice C.

Las instrucciones **Decrementar** sólo pueden ejecutarse cuando el contador correspondiente es diferente de cero, mientras que las otras instrucciones se pueden ejecutar en cualquier momento.

La $\{\otimes, \oplus\}$-teoría asociada a una ACM se define como sigue. Primero, dada una ACM $N = (Q, T, Q_F)$, el conjunto de constantes no lógicas es $\{q_i \mid Q_i \in Q\} \cup \{a, b\}$; entonces, los axiomas correspondientes a las transiciones en T son

$$\begin{array}{rcl}
(Q_i\ \textbf{Incrementar}\ A\ Q_j) & \longmapsto & q_i \vdash q_j \otimes a \\
(Q_i\ \textbf{Incrementar}\ B\ Q_j) & \longmapsto & q_i \vdash q_j \otimes b \\
(Q_i\ \textbf{Decrementar}\ A\ Q_j) & \longmapsto & q_i, a \vdash q_j \\
(Q_i\ \textbf{Decrementar}\ B\ Q_j) & \longmapsto & q_i, b \vdash q_j \\
(Q_i\ \textbf{Bifurcar}\ Q_j, Q_k) & \longmapsto & q_i \vdash q_j \oplus q_k
\end{array}$$

El secuente correspondiente a un triple $\langle Q_i, n, m\rangle$ de una ACM se define por

$$\theta(\langle Q_i, n, m\rangle) \;=\; q_i, a^n, b^m \vdash q_F.$$

Con esto, los autores de [97] prueban el siguiente interesante teorema.

Teorema 32 [97] Una ACM N acepta una ID s si y sólo si para todo elemento E en s, el secuente $\theta(E)$ es derivable a partir de la teoría asociada a N. □

Esta correspondencia entre teorías y máquinas es usada para probar el siguiente importante resultado de indecidibilidad.

Teorema 33 [97] El problema de derivabilidad para lógica lineal proposicional (intuicionista) es recursivamente indecidible. □

Otros resultados importantes en [97] son la indecidibilidad de varios fragmentos de lógica lineal *no conmutativa* (es decir, la conectiva $\otimes$ no es conmutativa), y la PSPACE-completitud del fragmento consistente en las conectivas multiplicativas y aditivas sin axiomas extra-lógicos.

Terminamos esta sección con el ejemplo siguiente, tomado de [97], que ilustra la correspondencia entre computaciones de una ACM y pruebas en el fragmento $\{\otimes, \oplus\}$ de la lógica lineal.

Ejemplo 34 [97] Consideremos la ACM dada por el conjunto de estados $\{Q_1, Q_2, Q_3, Z_B, Q_F\}$ y las transiciones en la primera columna de la tabla siguiente. La segunda columna muestra la $\{\otimes, \oplus\}$-teoría asociada a esta ACM.

	Transiciones	*Axiomas*
δ_1 =	$(Q_1$ **Incrementar** $A\ Q_2)$	$q_1 \vdash q_2 \otimes a$
δ_2 =	$(Q_3$ **Decrementar** $A\ Q_F)$	$q_3, a \vdash q_F$
δ_3 =	$(Q_2$ **Bifurcar** $Z_B, Q_3)$	$q_2 \vdash z_B \oplus q_3$
δ_4 =	$(Z_B$ **Decrementar** $A\ Z_B)$	$z_B, a \vdash z_B$
δ_5 =	$(Z_B$ **Bifurcar** $Q_F, Q_F)$	$z_B \vdash q_F \oplus q_F$

$$\dfrac{\dfrac{}{z_B, a \vdash z_B}\,\delta_4 \qquad \dfrac{\dfrac{}{z_B \vdash q_F \oplus q_F}\,\delta_5 \qquad \dfrac{\dfrac{}{q_F \vdash q_F}\,id \quad \dfrac{}{q_F \vdash q_F}\,id}{q_F \oplus q_F \vdash q_F}\,\oplus L}{z_B \vdash q_F}\,corte}{z_B, a \vdash q_F}\,corte$$

Figura 2.5: Un fragmento de la derivación.

$$\dfrac{\dfrac{}{q_1 \vdash q_2 \otimes a}\,\delta_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q_2 \vdash z_B \oplus q_3}\,\delta_3 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ z_B, a \vdash q_F\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{}{q_3, a \vdash q_F}\,\delta_2 \quad \dfrac{}{q_F \vdash q_F}\,id}{q_3, a \vdash q_F}\,corte}{z_B \oplus q_3, a \vdash q_F}\,\oplus L}{q_2, a \vdash q_F}\,corte}{q_2 \otimes a \vdash q_F}\,\otimes L}{q_1 \vdash q_F}\,corte$$

Figura 2.6: Una derivación correspondiente a una computación.

Una posible computación de esta ACM viene dada por la sucesión de transiciones

$$\{\langle Q_1, 0, 0\rangle\} \xrightarrow{\delta_1} \{\langle Q_2, 1, 0\rangle\} \xrightarrow{\delta_3} \{\langle Z_B, 1, 0\rangle, \langle Q_3, 1, 0\rangle\} \xrightarrow{\delta_4} \{\langle Z_B, 0, 0\rangle, \langle Q_3, 1, 0\rangle\} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\delta_5} \{\langle Q_F, 0, 0\rangle, \langle Q_F, 0, 0\rangle, \langle Q_3, 1, 0\rangle\} \xrightarrow{\delta_2} \{\langle Q_F, 0, 0\rangle, \langle Q_F, 0, 0\rangle, \langle Q_F, 0, 0\rangle\}$$

Esta computación empieza en el estado Q_1, incrementa el contador A (δ_1) y pasa a Q_2. Entonces se "bifurca" en dos computaciones separadas (δ_3), una que comprueba que el contador B está a cero, y la otra que pasa a Q_3. Como el contador B está en efecto puesto a cero, esa rama de la computación decrementa el contador A a cero (δ_4), y salta al estado final Q_F (δ_5). La otra rama de esta computación decrementa A y se mueve del estado Q_3 a Q_F (δ_2). Así pues, todas las ramas terminan en Q_F con ambos contadores puestos a cero, y la ID $\{\langle Q_1, 0, 0\rangle\}$ es por lo tanto aceptada por esta ACM.

La derivación del secuente $q_1 \vdash q_F$ correspondiente a la computación de arriba aparece en las Figuras 2.5 y 2.6. En la primera figura tenemos la subderivación del secuente $z_B, a \vdash q_F$ que debe sustituirse por los puntos $\vdots$ en la segunda figura de cara a obtener la derivación completa. Para una discusión más detallada de este ejemplo, remitimos al lector a la Sección 3.6 de [97]. $\square$

2.8. Lógica lineal cancelativa

La lógica lineal incluye entre sus conectivas la negación, denotada $(\_)^\perp$, que es "clásica" en el sentido de que satisface la ley de la doble negación $A^{\perp\perp} \cong A$. Además, hay una constante de "falsedad" $\perp$ tal que la negación $(\_)^\perp$ es equivalente a $\_ \multimap \perp$. Las reglas para la negación incluyen los axiomas $A \vdash A^{\perp\perp}$, $A^{\perp\perp} \vdash A$ y la regla

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma, B^\perp \vdash A^\perp, \Delta}.$$

Usando axiomas que aquí omitimos pero aparecen en la Sección 3.2, es fácil ver que esta regla es equivalente al par de reglas

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^\perp, \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, B^\perp \vdash \Delta}.$$

Nuestra presentación aquí es algo diferente de la de [49] y otros artículos sobre lógica lineal, donde la negación está integrada en la sintaxis de las fórmulas y se consideran secuentes unilaterales de la forma $\vdash \Delta$. Como en el artículo de Seely [143], preferimos usar secuentes normales de la forma $\Gamma \vdash \Delta$ porque se adaptan mejor a un tratamiento categórico del tema.

La semántica categórica de la negación en lógica lineal se caracteriza por la noción de *categoría con un objeto dualizante*, que estudiamos detalladamente en el Capítulo 3. Esencialmente, una categoría con un objeto dualizante es una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$ junto con un objeto especial $\perp$ tal que para todo objeto A en $\mathcal{C}$ existe un isomorfismo canónico $A \cong (A \multimap \perp) \multimap \perp$, correspondiente a la ley de doble negación. En tal categoría la conectiva $\parr$ es interpretada por el funtor $A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$, donde $(\_)^\perp$ denota $\_ \multimap \perp$ (véase la Proposición 41); el objeto dualizante $\perp$ es entonces la unidad de $\parr$ de la misma forma que I es la unidad de $\otimes$. Una *categoría lineal* se define como una categoría con un objeto dualizante y productos (coproductos existen entonces automáticamente; véase la Proposición 42) y proporciona el marco categórico adecuado para la semántica de la lógica lineal tal y como veremos en la Sección 3.2. Éste es un refinamiento de la definición original de categoría lineal dada por Seely [143].

Tenemos un funtor de olvido $\mathcal{V} : \underline{\mathit{LinCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{MonCat}}$ de la categoría de categorías lineales en la categoría de categorías monoidales simétricas, que tiene un adjunto a izquierda

$$\mathcal{D}[\_] : \underline{\mathit{MonCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{LinCat}}$$

llevando una categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ a la categoría lineal libre $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ generada por $\mathcal{C}$ (Teorema 60). La construcción de esta categoría está dada por las reglas en el Apéndice C y se explica en la Sección 3.3.

Dada una red de Petri N, extendiendo las ideas en la Sección 2.6, consideramos la categoría lineal libre $\mathcal{L}[N] = \mathcal{D}[\mathcal{T}[N]]$ generada por $\mathcal{T}[N]$, y observamos sus objetos y morfismos como estados y procesos ideales o *gedanken*, respectivamente, que no tienen un equivalente "real" en el habitual juego de marcas en N, pero pueden utilizarse para expresar otras propiedades de una red. En la Sección 2.6 hemos visto la interpretación de $A \multimap B$ como estados inconclusos, y en la Sección 2.7 hemos interpretado las conectivas aditivas

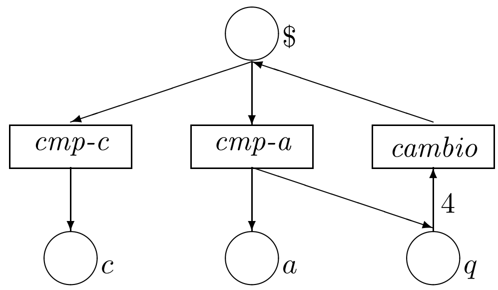


Figura 2.7: Otra red de Petri para comprar manzanas y pasteles.

& y $\oplus$ como elección externa e interna, respectivamente. En [103] propusimos interpretar la negación lineal $(\_)^\perp$ como una *deuda* de marcas o recursos, y $\parr$ como acumulación de deudas, de la misma forma que $\otimes$ se interpreta como acumulación de recursos. Sin embargo, la interacción entre recursos y deudas se complica, así como este significado intuitivo de $\otimes$ o $\parr$ cuando ambos se mezclan.

Examinemos un ejemplo. La red de Petri en la Figura 2.7 representa otra máquina para comprar pasteles y manzanas; un pastel cuesta un dólar y una manzana tres cuartos. Debido a un diseño desafortunado, la máquina sólo acepta dólares, y devuelve un cuarto cuando el usuario compra una manzana; para aliviar en parte este problema, la máquina cambia cuatro cuartos en un dólar.

La $\otimes$-teoría asociada a esta red consta de los siguientes axiomas

$$\textit{cmp-c} : \$ \vdash c \qquad \textit{cmp-a} : \$ \vdash a \otimes q \qquad \textit{cambio} : q^4 \vdash \$.$$

Consideremos un usuario que quiere comprar una manzana pero sólo tiene tres cuartos. Como la categoría $\mathcal{L}[N]$ representa todas las computaciones de la máquina junto con las más generales computaciones "ideales," el usuario puede realizar un *Gedankenexperiment* en $\mathcal{L}[N]$ para ver cómo podría conseguir una manzana con sus tres cuartos. Usando la idea de las deudas, podría tomar prestado un cuarto, creando simultáneamente la correspondiente deuda; esto queda reflejado en $\mathcal{L}[N]$ en la existencia de un morfismo $I \longrightarrow q \parr q^\perp$. Entonces podría cambiar los cuatro cuartos en un dólar, comprar una manzana, y cancelar la deuda con el cuarto devuelto; este último paso queda reflejado en el morfismo $q \otimes q^\perp \longrightarrow \perp$, dual del anterior. Si intentamos hacer esto en $\mathcal{L}[N]$, podemos tratar de realizar la siguiente composición:

$$q^3 \longrightarrow q^3 \otimes I \longrightarrow q^3 \otimes (q \parr q^\perp) \longrightarrow (q^3 \otimes q) \parr q^\perp \longrightarrow \$ \parr q^\perp \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (a \otimes q) \parr q^\perp \xrightarrow{?} a \parr (q \otimes q^\perp) \longrightarrow a \parr \perp \longrightarrow a$$

Todo funciona bien, excepto el morfismo señalado con ? porque simplemente *no existe* en $\mathcal{L}[N]$. Obsérvese que este problema está relacionado con la reorganización de los recursos y las deudas; aparte de eso, la deuda se mantiene hasta que uno consigue los recursos necesarios para cancelarla. Otro problema relacionado es la asimetría entre $I \longrightarrow q \parr q^\perp$ y $q \otimes q^\perp \longrightarrow \perp$; en el primero la ausencia de recursos y deudas se indica con I, y la composición de un recurso con la deuda correspondiente se representa con $\parr$, mientras que en el segundo se representan con $\perp$ y $\otimes$, respectivamente.

El problema es que en la lógica lineal usual, como $\otimes$ y $\parr$ son conectivas diferentes, la idea de *cancelar una deuda* no puede llevarse a cabo en general. Podríamos haber previsto esto desde el principio, ya que el usuario no puede conseguir la manzana en la máquina original, cuyas computaciones corresponden a deducciones en el fragmento $\otimes$, y la extensión a la lógica lineal completa es conservativa sobre este fragmento [7, 8].

Nuestra solución a este problema es muy simple. Basta identificar las conectivas $\otimes$ y $\parr$ y sus respectivas unidades I y $\perp$. Entonces la asimetría que hemos señalado arriba desaparece y la reorganización de recursos es simplemente asociatividad de $\otimes$. La computación que nos interesaba se convierte en (olvidando morfismos de asociatividad)

$$(\dagger) \quad q^3 \longrightarrow q^3 \otimes I \longrightarrow q^3 \otimes q \otimes q^\perp \longrightarrow \$ \otimes q^\perp \longrightarrow a \otimes q \otimes q^\perp \longrightarrow a \otimes I \longrightarrow a.$$

Llamamos *lógica lineal cancelativa* a la lógica lineal junto con las identificaciones $I = \perp$, $\otimes = \parr$. Las reglas para esta lógica pueden obtenerse a partir de las reglas usuales de la lógica lineal sustituyendo I por $\perp$ y $\otimes$ por $\parr$ en las reglas correspondientes. En particular, las dos reglas que resultan al hacer esta sustitución en las reglas $(\otimes R)$ y $(\parr L)$ son equivalentes a la regla

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

llamada (*mix*) por Girard en [49, 51]. Esta regla dice que $\otimes$ es más fuerte que $\parr$, lo cual es cierto en <u>*Cohl*</u>, la categoría lineal de espacios coherentes (véase el Ejemplo 44); sin embargo, probaremos más adelante en el Ejemplo 65 que <u>*Cohl*</u> *no* es un modelo de la lógica lineal cancelativa.

Los modelos categóricos de lógica lineal cancelativa son categorías lineales con isomorfismos naturales $(A \otimes B)^\perp \cong A^\perp \otimes B^\perp$ y $I \cong \perp$ que hacen las estructuras monoidales simétricas $\otimes$ y $\parr$ isomorfas. Por lo tanto, constituyen una clase de modelos axiomatizable ecuacionalmente que llamamos *categorías lineales cancelativas* y que estudiamos en la Sección 3.6. Robert Seely nos ha señalado que estas categorías ya aparecen en el libro de Barr [9], donde se las denomina *compactas*.

Usando resultados generales sobre teorías esencialmente algebraicas ([13, Teorema 4.4.1] por ejemplo), o añadiendo simplemente reglas apropiadas a las del Apéndice C, tenemos un adjunto a izquierda

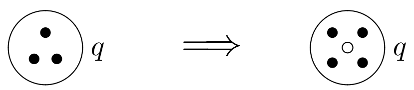
$$\mathcal{H}[\_] : \underline{\mathit{LinCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{CLinCat}}$$

del funtor de olvido $\underline{\mathit{CLinCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{LinCat}}$, donde $\underline{\mathit{CLinCat}}$ denota la categoría de categorías lineales cancelativas y funtores que conservan la estructura.

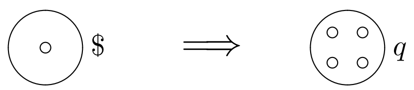
Consideremos la categoría lineal cancelativa $\mathcal{C}[N] = \mathcal{H}[\mathcal{T}[N]]$ asociada a una red de Petri N. En esta categoría disponemos de los morfismos deseados $I \longrightarrow a \otimes a^\perp$ y $a \otimes a^\perp \longrightarrow I$ para todo lugar a en la red N; tales morfismos corresponden a computaciones que “toman prestada” una marca creando simultáneamente la deuda correspondiente, y “cancelan una deuda” con la correspondente marca, respectivamente. Por supuesto, disponemos también de las computaciones básicas $t : {}^\bullet t \longrightarrow t^\bullet$ para cada transición t. Y además, tenemos computaciones que "transfieren una deuda" $t^\perp : (t^\bullet)^\perp \longrightarrow ({}^\bullet t)^\perp$; por ejemplo, en la situación anterior la transición *cambio* : $q^4 \longrightarrow \$$ da lugar a una computación $cambio^\perp : \$^\perp \longrightarrow (q^4)^\perp$ que transfiere una deuda de un dólar a una deuda de cuatro cuartos (o equivalentemente a cuatro deudas de un cuarto cada una, debido a la condición $(A \otimes B)^\perp \cong A^\perp \otimes B^\perp$).

Esto sugiere una noción generalizada del juego de marcas que llamamos un *juego financiero*. Aparte de los movimientos habituales en el juego normal, también se puede:

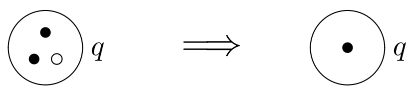
1. *Crear una deuda*, obteniendo simultáneamente una marca positiva ($\bullet$) y una marca negativa ($\circ$) en el lugar deseado. Por ejemplo, si empezamos con tres cuartos, podemos tomar prestado otro creando una deuda:



2. *Transferir una deuda*, jugando el juego de marcas a la inversa para marcas negativas. Por ejemplo, podemos transformar una deuda de un dólar en una deuda de cuatro cuartos al disparar la transición *cambio* a la inversa:



3. *Cancelar una deuda*, aniquilando marcas positivas y negativas en el mismo lugar, como por ejemplo



Por lo tanto, aunque el usuario de nuestro ejemplo no podría nunca comprar una manzana en la máquina original, sí que podría conseguir una en una máquina más sofisticada que permitiera juegos financieros. En la Figura 2.8 mostramos unas instantáneas del juego financiero en el que la manzana se compra tomando prestado un dólar, que corresponde al siguiente morfismo[11] en $\mathcal{C}[N]$ (olvidamos de nuevo morfismos de asociatividad y conmutatividad):

$$q^3 \longrightarrow q^3 \otimes \$ \otimes \$^\perp \xrightarrow{id \otimes cmp\text{-}a \otimes cambio^\perp} q^4 \otimes a \otimes (q^4)^\perp \longrightarrow a.$$

Un modelo categórico de los juegos financieros para una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^\otimes)$ viene dado por la subcategoría de $\mathcal{C}[N]$ consistente en los objetos y morfismos generados sólo por $\otimes$ y $(\_)^\perp$ a partir del conjunto original de lugares y de transiciones básicas en N; para evitar la estructura suplementaria creada por los isomorfismos de coherencia, sería conveniente considerar una categoría *estricta* donde estos isomorfismos son simplemente

[11] El lector puede jugar por sí mismo el juego para el morfismo (†) presentado antes.

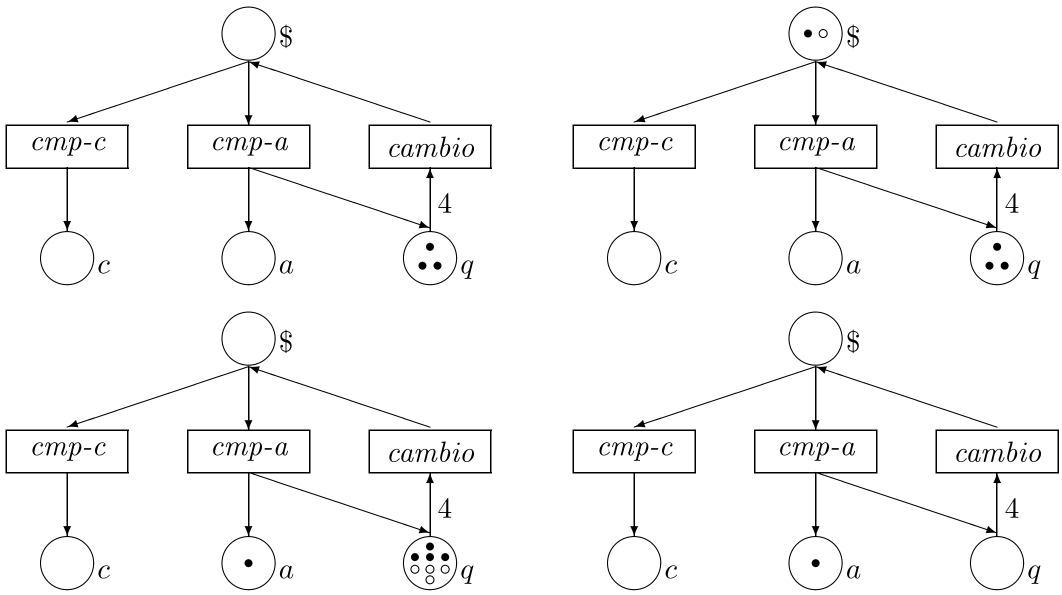


Figura 2.8: Unas instantáneas de un juego financiero.

identidades, como hicimos con la categoría $\mathcal{T}[N]$. Es importante observar que, como los ejemplos anteriores demuestran, la lógica lineal cancelativa *no* es conservativa sobre la lógica lineal normal y por lo tanto la relación de alcanzabilidad $\Longrightarrow^*$ sobre $S^{\otimes}$ cambia con la generalización del juego de marcas a los juegos financieros.

Otra posible interpretación de la negación en una red ha sido propuesta por Engberg y Winskel en [41]; ésta les permite especificar información negativa interesante sobre la red como, por ejemplo, la satisfacción de una propiedad de exclusión mutua.

2.9. Las modalidades

Al omitir las reglas estructurales de debilitamiento y contracción el poder expresivo de la lógica lineal disminuye sobremanera (véase [54] para una clara exposición de esta cuestión). Para poder recuperar el poder expresivo perdido, estas reglas estructurales se reintroducen de forma controlada mediante las *modalidades* (también denominadas *exponenciales*) !, llamada *por supuesto* (*of course*) y ?, llamada *por qué no* (*why not*). Brevemente, una fórmula puede ser "contraída" o "debilitada" sólo cuando tal posibilidad está indicada por medio de estas modalidades. Las reglas para la modalidad *por supuesto* (!) son las siguientes:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{!A_1, \ldots, !A_n \vdash A}{!A_1, \ldots, !A_n \vdash !A}$$

Las reglas para la modalidad *por qué no* (?) son análogas, pero con las fórmulas relevantes en el lado derecho del secuente. Ambas modalidades son una dual de la otra, de la misma forma que los cuantificadores habituales $\forall$ y $\exists$ lo son; así $!(A^\perp) = (?A)^\perp$.

La interpretación intuitiva de $!A$ es la posibilidad de disponer del recurso A de forma ilimitada. Una conveniente metáfora usada normalmente para hablar sobre esto es el hecho de almacenar un dato en la memoria de un ordenador, donde puede usarse tantas veces como sea necesario.

La interpretación categórica de la lógica lineal puede extenderse para incluir también las exponenciales, tanto en el caso intuicionista (sin negación) como en el caso clásico, siguiendo las ideas de los trabajos de Lafont [82], De Paiva [127] y Seely [143].

Sin entrar en detalles, la interpretación de la conectiva ! consiste en una *comónada* $! : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que lleva la estructura de *comonoide* $\top \longleftarrow A \longrightarrow A\&A$ (dada por el morfismo "diagonal" $\Delta : A \to A\&A$) en una estructura de *comonoide* $I \longleftarrow !A \longrightarrow !A \otimes !A$ a través de isomorfismos $!\top \cong I$ y $!(A\&A) \cong !A \otimes !A$. Lafont [82] también requiere que esta estructura de comonoide sea *colibre*. Para obtener la interpretación de la modalidad dual ? basta aplicar la dualidad $(\_)^\perp$. Remitimos al lector al libro de Mac Lane [99] para las definiciones de los conceptos de comónada, comonoide, colibre, etc. y a los artículos citados anteriormente para estudios más detallados de esta estructura categórica. Lo que tiene interés es darse cuenta que esto equivale a añadir más estructura a una categoría lineal, y que esto puede hacerse ecuacionalmente. Por lo tanto, nuestro marco de trabajo puede extenderse para incluir las conectivas exponenciales sin ningún cambio en el punto de vista algebraico. En los artículos relacionados [12, 11], M. Barr estudia bajo qué condiciones sobre la categoría $\mathcal{C}$ la categoría lineal $\mathcal{C}_K$ definida por Chu en el Apéndice de [9] (véase también el Ejemplo 45) está dotada de esta estructura adicional para interpretar las modalidades.

Es fácil ver que un secuente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ es derivable en lógica lineal a partir de un conjunto de axiomas si y sólo si el secuente $\vdash (A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) \multimap (B_1 \parr \ldots \parr B_m)$ lo es. Si $\Gamma \vdash \Delta$ denota un secuente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, entonces denotamos por $\Gamma \multimap \Delta$ la fórmula $(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) \multimap (B_1 \parr \ldots \parr B_m)$. Por otra parte, al derivar un secuente a partir de una teoría T, los axiomas en T se usan tantas veces como sea necesario. Por lo tanto, el siguiente "teorema de deducción" es intuitivamente claro:

Teorema 35 [97] Dada una teoría $T = (S, \{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n\})$, un secuente $\Gamma' \vdash \Delta'$ es derivable a partir de T si y sólo si el secuente

$$!(\Gamma_1 \multimap \Delta_1), \ldots, !(\Gamma_n \multimap \Delta_n), \Gamma' \vdash \Delta'$$

es derivable a partir de la teoría $(S, \emptyset)$, es decir, sin el uso de ningún axioma extra-lógico. $\square$

Particularizando la teoría T de arriba a la teoría tensorial asociada a una red de Petri, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 36 Dada una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^\otimes)$ con $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, y marcados $M, M' \in S^\otimes$, tenemos $M \Longrightarrow^* M'$ sii el secuente

$$!({}^\bullet t_1 \multimap t_1^\bullet), \ldots, !({}^\bullet t_n \multimap t_n^\bullet), M \vdash M'$$

es derivable en lógica lineal pura, es decir, sin usar ningún axioma extra-lógico. □

Éste es esencialmente el enfoque de la relación entre redes de Petri y lógica lineal considerado por C. Brown en [21].

Ahora que ya hemos examinado todas las conectivas de la lógica lineal, vamos a terminar esta sección con un bonito ejemplo debido a Yves Lafont.

Ejemplo 37 [53] Consideremos la siguiente fórmula de lógica lineal

$$\$^{20} \multimap ((ensalada \& sopa) \otimes (salm\acute{o}n \oplus emperador) \otimes !(patatas\ fritas) \otimes (pastel \& fruta)).$$

Esta fórmula representa un menú que cuesta 20 dólares, y contiene un primer plato, un plato principal, patatas fritas y postre. Para el primer plato, el cliente debe elegir entre ensalada o sopa; el plato principal consiste en emperador o salmón, según la temporada, y por lo tanto, desde el punto de vista del cliente, es el cocinero quien realiza la elección, pero no el mismo cliente; éste puede comer todas las patatas fritas que desee, y finalmente debe elegir de nuevo entre el pastel o la fruta para el postre. Si aplicamos la negación $(\_)^{\perp}$ a esta fórmula, las conectivas duales & y $\oplus$ son intercambiadas; esto puede interpretarse como un cambio en el punto de vista del cliente al cocinero. Éste debe elegir entre el salmón y el emperador, pero no puede hacerlo entre la ensalada y la sopa. □

Capítulo 3

Lógica lineal y categorías lineales

En este capítulo presentamos una semántica categórica simple para la lógica lineal, basada en la noción de objeto dualizante en una categoría monoidal simétrica cerrada. Una categoría lineal es justamente una categoría con un objeto dualizante y productos finitos. Esta nueva axiomatización es considerablemente más simple que una previa, desarrollada primero por R. Seely [143] y explicada un poco más en [103], que se basaba en la noción debida a M. Barr de categoría $*$-autónoma [9]. En la Sección 3.1 revisamos algunas de las propiedades básicas de una categoría con un objeto dualizante que necesitaremos luego en la sección siguiente para establecer la semántica categórica de la lógica lineal (una exposición detallada con demostraciones completas de estas propiedades está en el Apéndice A), y damos varios ejemplos de categorías lineales. En la Sección 3.2 damos definiciones precisas de la categoría de teorías lineales y de los modelos de una teoría lineal, hacemos explícitos los detalles de la adjunción entre teorías lineales y categorías lineales, definimos satisfacción de un secuente en un modelo, y demostramos las esperadas propiedades de corrección y completitud de la lógica lineal con respecto a los modelos en categorías lineales.

3.1. Objetos dualizantes y categorías lineales

Una categoría con un objeto dualizante es una categoría monoidal simétrica cerrada junto con un objeto que satisface una condición especial. A pesar de su definición más simple, este concepto es equivalente a la noción de categoría $*$-autónoma [9], más exactamente, a la definición ligeramente más fuerte de este concepto que presentamos por primera vez en [103]; un estudio detallado de esta equivalencia es realizado en el Apéndice B.

Recordamos brevemente aquí la noción de *categoría monoidal simétrica* $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e)$ sin dar todos los detalles que pueden encontrarse en [99] y también en la Sección A.1 del Apéndice A. La idea básica es que tenemos un "producto binario" $\_ \otimes \_$ definido como un funtor $\_ \otimes \_ : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}$ y un "objeto unidad" I en $\mathcal{C}$ convirtiendo a $\mathcal{C}$ en un monoide conmutativo "salvo isomorfismos de coherencia" a, c y e. Éstos son isomorfismos naturales

$$\begin{array}{rccc} a_{A,B,C}: & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\simeq} & (A \otimes B) \otimes C \\ c_{A,B}: & A \otimes B & \xrightarrow{\simeq} & B \otimes A \\ e_A: & I \otimes A & \xrightarrow{\simeq} & A \end{array}$$

expresando asociatividad, conmutatividad e identidad "salvo coherencia," respectivamente.

Toda categoría $\mathcal{C}$ con productos finitos es un ejemplo de categoría monoidal simétrica, pero en otros ejemplos $A \otimes B$ no es un producto categórico; el producto tensorial de espacios vectoriales es uno de tales ejemplos. Como veremos más adelante, la conectiva $\otimes$ de la lógica lineal se interpreta en los modelos como un producto monoidal de esta clase, mientras que la conectiva & se interpreta como un producto categórico.

El conocido concepto de categoría cartesiana cerrada puede recobrarse a partir del concepto más general de categoría monoidal simétrica cerrada definido a continuación exigiendo que $\_ \otimes \_$ sea un producto categórico e I un objeto final. Una *categoría monoidal simétrica cerrada* es una categoría monoidal simétrica $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e)$ tal que para todo objeto A de $\mathcal{C}$, el funtor $\_ \otimes A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene un adjunto a derecha $A \multimap \_ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, o sea, para todos los objetos A, B, C en $\mathcal{C}$ tenemos un isomorfismo natural

$$\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(B \otimes A, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, A \multimap C).$$

La interpretación intuitiva de $A \multimap B$ es la internalización de la colección de morfismos de A en B como un objeto de $\mathcal{C}$. La notación $A \multimap B$ ha sido elegida para sugerir que la implicación lineal será interpretada en los modelos por el funtor $\_ \multimap \_$.

El ejemplo clásico de categoría monoidal simétrica cerrada es la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo K con aplicaciones lineales como morfismos, donde $A \otimes B$ es el producto tensorial usual, $I = K$, y $A \multimap B$ es el espacio de aplicaciones lineales de A en B.

Si $f : B \otimes A \to C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, $f^\dagger$ denota el morfismo $\varphi(f) : B \to (A \multimap C)$, llamado la *Curry-conversión* de f. La counidad de esta adjunción es un morfismo denotado

$$\varepsilon_{A,C} : (A \multimap C) \otimes A \longrightarrow C,$$

y llamado *evaluación*.

Este morfismo de evaluación da lugar, por Curry-conversión, a un morfismo

$$d_{A,C} = (c_{A,A \multimap C}; \varepsilon_{A,C})^\dagger : A \longrightarrow (A \multimap C) \multimap C.$$

Intuitivamente, este morfismo corresponde a la función expresada en la notación del lambda cálculo como $\lambda x.\lambda f.f(x)$.

En el caso de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K, la instancia particular del morfismo $d_{A,C}$ donde C es el cuerpo K es un isomorfismo natural (en A), denotado normalmente

$$A \xrightarrow{\simeq} A^{**},$$

donde A^* es el espacio vectorial $A \multimap K$ *dual* de A. Este isomorfismo expresa la conocida *dualidad* de los espacios vectoriales de dimensión finita [102, por ejemplo]. Es importante observar que aunque A y A^* tienen la misma dimensión, *no* son isomorfos de forma natural. Esta dualidad se expresa también mediante otro isomorfismo natural

$$A \multimap B \xrightarrow{\simeq} B^* \multimap A^*.$$

que asigna a una aplicación lineal $f : A \to B$ su dual $f^* : B^* \to A^*$, definida por $f^*(g) = f; g$, donde g es una forma lineal $g : B \to K$. Al nivel de matrices, este morfismo es exactamente la transposición de matrices.

En general, en una categoría monoidal simétrica cerrada arbitraria tenemos un morfismo natural (en A y B)

$$s_{A,B,C} : A \multimap B \longrightarrow (B \multimap C) \multimap (A \multimap C)$$

definido por la expresión

$$s_{A,B,C} = (c_{A \multimap B, B \multimap C}; (a^{-1}_{B \multimap C, A \multimap B, A}; (id_{B \multimap C} \otimes \varepsilon_{A,B}); \varepsilon_{B,C})^\dagger)^\dagger.$$

Este morfismo es la Curry-conversión de la internalización de la composición en la categoría (véase la Sección A.2 del Apéndice A para los detalles) y su instancia para $C = K$ proporciona el isomorfismo de arriba para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K.

Dado un objeto C en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, la relación precisa entre el hecho de que $d_{A,C}$ sea un isomorfismo para todo objeto A en $\mathcal{C}$, y el hecho de que $s_{A,B,C}$ sea un isomorfismo para todos los objetos A, B en $\mathcal{C}$ es la siguiente:

Teorema 38 Dado un objeto C en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, el morfismo

$$d_{A,C} : A \longrightarrow (A \multimap C) \multimap C$$

es un isomorfismo para todo objeto A en $\mathcal{C}$ si y sólo si el morfismo

$$s_{A,B,C} : (A \multimap B) \longrightarrow ((B \multimap C) \multimap (A \multimap C))$$

es un isomorfismo para todos los objetos A, B en $\mathcal{C}$.

Demostración: Véase la Sección A.5 en el Apéndice A. □

La dualidad de los espacios vectoriales se generaliza a categorías monoidales simétricas cerradas como sigue:

Definición 39 Dada una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$, un objeto $\bot$ en $\mathcal{C}$ es un *objeto dualizante* si, para todo objeto A en $\mathcal{C}$, el morfismo natural (en A)

$$d_{A,\bot} = (c_{A, A \multimap \bot}; \varepsilon_{A,\bot})^\dagger : A \longrightarrow (A \multimap \bot) \multimap \bot$$

es un isomorfismo.

Entonces decimos que $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \bot)$ es una *categoría con un objeto dualizante.*
□

Corolario 40 En una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$, un objeto $\perp$ es un objeto dualizante si y sólo si, para todos los objetos A, B en $\mathcal{C}$, el morfismo natural (en A y B)

$$s_{A,B,\perp} : (A \multimap B) \longrightarrow ((B \multimap \perp) \multimap (A \multimap \perp))$$

es un isomorfismo. □

En una categoría $\mathcal{C}$ con un objeto dualizante $\perp$, escribimos d_A y $s_{A,B}$ para denotar $d_{A,\perp}$ y $s_{A,B,\perp}$, respectivamente, y denotamos por $(\_)^\perp$ el funtor $\_ \multimap \perp : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$. Con esta notación tenemos

$$d_A : A \xrightarrow{\simeq} A^{\perp\perp}$$
$$s_{A,B} : A \multimap B \xrightarrow{\simeq} B^\perp \multimap A^\perp.$$

La elección de notación se justifica por la íntima conexión entre dualización y negación en lógica lineal, así como por la relación con categorías $*$-autónomas estudiada en el Apéndice B.

Motivados por la correspondencia con lógica lineal, nos interesa la conectiva $\parr$, dual de $\otimes$.

Proposición 41 Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp)$ una categoría con un objeto dualizante. Si definimos:

1. $A \parr B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$ para objetos A, B
2. $f \parr g = (f^\perp \otimes g^\perp)^\perp$ para morfismos f, g
3. $a'_{A,B,C} = (id_{A^\perp} \otimes d_{B^\perp \otimes C^\perp})^\perp; (a^{-1}_{A^\perp,B^\perp,C^\perp})^\perp; (d^{-1}_{A^\perp \otimes B^\perp} \otimes id_{C^\perp})^\perp$
4. $c'_{A,B} = (c_{B^\perp,A^\perp})^\perp$
5. $e'_A = (e^\dagger_\perp \otimes id_{A^\perp})^\perp; (e^{-1}_{A^\perp})^\perp; d^{-1}_A$

entonces $(\mathcal{C}, \parr, \perp, a', c', e')$ es una categoría monoidal simétrica.

Demostración: Véase la Sección A.5 en el Apéndice A. □

De nuevo hemos elegido la notación para sugerir que la conectiva $\parr$ se interpreta en los modelos por el funtor $\_ \parr \_$.

Proposición 42 En una categoría con un objeto dualizante $\mathcal{C}$, el funtor $(\_)^\perp : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ es una *equivalencia* de categorías, y por tanto conserva límites y colímites [99]. Por consiguiente, $\mathcal{C}$ is (finitamente) completa si y sólo si es (finitamente) cocompleta, es decir, $\mathcal{C}$ tiene todos los límites (finitos) sii tiene todos los colímites (finitos).

En particular, si $A \& B$ es un producto en $\mathcal{C}$, y $\top$ es un objeto final en $\mathcal{C}$, y definimos $A \oplus B = (A^\perp \& B^\perp)^\perp$ para objetos A, B en $\mathcal{C}$, y $0 = \top^\perp$, entonces $A \oplus B$ es un coproducto en $\mathcal{C}$ y 0 es un objeto inicial en $\mathcal{C}$. Ésta es una versión categórica de las leyes de De Morgan.

Demostración: Basta observar que la equivalencia "inversa" de $(\_)^\perp : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ es $(\_)^{\perp op} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$, y que ambos funtores están relacionados por medio del isomorfismo natural $d_A : A \xrightarrow{\simeq} A^{\perp\perp}$.

El producto $A^\perp \& B^\perp$ en $\mathcal{C}$ es un coproducto en $\mathcal{C}^{op}$ y, como $(\_)^\perp$ conserva colímites, obtenemos que $A \oplus B$ es un coproducto en $\mathcal{C}$. □

Como hemos ido señalando, nuestra elección de notación ha sido motivada en todo momento por el deseo de acentuar las conexiones con la lógica lineal. En efecto, una semántica categórica natural para la lógica lineal interpreta la conjunción $\otimes$ y la implicación lineal $\multimap$ como producto tensorial y hom interno, respectivamente, en una categoría monoidal simétrica cerrada. La negación clásica $(\_)^\perp$ se interpreta entonces como dualización por medio de un objeto dualizante $\perp$. Similarmente, las conectivas aditivas $\&$ y $\oplus$ se interpretan como productos y coproductos, respectivamente. Esto motiva nuestra definición de una categoría lineal a continuación como la noción natural de modelo para la lógica lineal clásica[1]. Nuestra definición es un refinamiento de la de Seely [143], cuyas ideas sobre los modelos categóricos de la lógica lineal seguimos en [103].

Definición 43 Una *categoría lineal* es una categoría con un objeto dualizante $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp)$ y con productos finitos (elegidos[2]), es decir, un objeto final $\top$ y para objetos cualesquiera A, B, un producto binario denotado $A\&B$ (por lo tanto, por la Proposición 42, $\mathcal{C}$ también tiene coproductos finitos).

Un *funtor lineal* entre dos categorías lineales $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp, \top, \&)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', \perp', \top', \&')$ es un funtor monoidal simétrico cerrado $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$ en $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap')$ que conserva la estructura adicional en la categoría, es decir, $\mathcal{F}(\perp) = \perp'$, $\mathcal{F}(\top) = \top'$ y $\mathcal{F}(A\&B) = \mathcal{F}(A)\&'\mathcal{F}(B)$.

La categoría $\underline{\mathit{LinCat}}$ tiene categorías lineales como objetos y funtores lineales como morfismos. □

Discutimos ahora varios ejemplos de categorías lineales, que también son, por supuesto, ejemplos de categorías con un objeto dualizante.

Ejemplo 44 Sea R un semianillo conmutativo. La categoría $\underline{\mathit{FSmod}}_R$, cuyos objetos son R-semimódulos libres sobre conjuntos finitos y cuyos morfismos son aplicaciones lineales, es una categoría lineal. Como una aplicación lineal está completamente determinada por su acción sobre los elementos de una base, una aplicación lineal del R-semimódulo libre sobre X, denotado $R(X)$, en el R-semimódulo libre sobre Y, $R(Y)$, es lo mismo que una función $X \to R(Y)$, que podemos ver como una R-matriz de dimensión $|X| \times |Y|$, donde $|X|$ denota la cardinalidad del conjunto X. Por lo tanto, $\underline{\mathit{FSmod}}_R$ es equivalente a la categoría con conjuntos finitos como objetos y "R-matrices" (funciones $X \to R(Y)$) como morfismos.

Particularizando el semianillo R, obtenemos los siguientes ejemplos de categorías lineales:

[1]No incluimos las exponenciales ! y ?; sin embargo, su tratamiento es perfectamente compatible con este enfoque y sólo requiere proporcionar la adecuada estructura categórica suplementaria discutida en la Sección 2.9.

[2]La definición categórica de productos y otras construcciones universales sólo los determina salvo isomorfismo; como necesitamos fijar la estructura, suponemos que se ha realizado una elección arbitraria pero fija.

1. Para R el álgebra de Boole $\{0,1\}$, la categoría de conjuntos finitos y relaciones ("$\{0,1\}$-matrices"),
2. Para R el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales, la categoría de conjuntos finitos y multirrelaciones ("$\mathbb{N}$-matrices"), equivalente a la categoría de monoides conmutativos libres sobre conjuntos finitos y homomorfismos,
3. Para R un cuerpo K, la categoría de conjuntos finitos y "K-matrices," equivalente a la categoría $\underline{\mathit{FdVect}}_K$ de espacios vectoriales de dimensión finita sobre K y aplicaciones lineales.

Para todas estas categorías, la involución $(\_)^\perp$ es la conocida dualidad del álgebra lineal, donde el objeto dualizante es el semianillo R. Al nivel de matrices, la dual de una $|X|\times|Y|$-matriz es su traspuesta $|Y|\times|X|$-matriz.

Un ejemplo muy importante de categoría lineal es la categoría $\underline{\mathit{Cohl}}$ de espacios coherentes y funciones lineales [49], que proporcionó la primera semántica de la lógica lineal. Para una exposición de $\underline{\mathit{Cohl}}$ como categoría lineal remitimos al lector a [143], y para una buena introducción a los espacios coherentes a [84]. El espacio coherente dualizante $\perp$ viene dado por un conjunto unitario con la relación de coherencia obvia.

Todas estas categorías, incluyendo $\underline{\mathit{Cohl}}$, tienen en común la propiedad de que sus morfismos pueden verse como *matrices* (llamadas *trazas* en $\underline{\mathit{Cohl}}$). Sin embargo, al nivel de objetos (espacios coherentes) la involución $(\_)^\perp$ en $\underline{\mathit{Cohl}}$ es de un tipo diferente al de la dualidad del álgebra lineal y da más la idea de una complementación; al nivel de morfismos, si $f : A \to B$ es una función lineal, entonces $f^\perp : B^\perp \to A^\perp$ se define por

$$(x,y) \in \mathit{Traza}(f^\perp) \iff (y,x) \in \mathit{Traza}(f).$$

Una clase interesante de categorías lineales se obtiene cuando la categoría es un conjunto parcialmente ordenado; denominamos a tales conjuntos parcialmente ordenados *álgebras de Girard*. Éstas son para lógica lineal lo que las álgebras de Boole son para lógica clásica. Los trabajos sobre modelos en cuantales [2, 152], que generalizan la semántica de fases de Girard [49], se encuadran en este marco. Discutimos este tema más detalladamente en el Capítulo 4. □

Ejemplo 45 En el Apéndice del libro de M. Barr [9], su estudiante Po-Hsiang Chu muestra una forma general de construir una categoría con un objeto dualizante $\mathcal{C}_K$ a partir de una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$ que tiene productos fibrados (*pullbacks*), y un objeto fijo K de $\mathcal{C}$.

Los objetos de $\mathcal{C}_K$ son triples $\langle X, Y, e : X\otimes Y \to K\rangle$, donde X e Y son objetos de $\mathcal{C}$, y e es un morfismo en $\mathcal{C}$. Un morfismo de $\langle X, Y, e : X\otimes Y \to K\rangle$ en $\langle X', Y', e' : X'\otimes Y' \to K\rangle$ consiste en un par de morfismos $f : X \to X'$ y $g : Y' \to Y$ en $\mathcal{C}$ tales que $(id_X \otimes g); e = (f \otimes id_{Y'}); e'$, es decir, tales que el siguiente diagrama de morfismos en $\mathcal{C}$ conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y' \arrow[r, "id_X \otimes g"] \arrow[d, "f \otimes id_{Y'}"'] & X\otimes Y \arrow[d, "e"] \\
X'\otimes Y' \arrow[r, "e'"] & K
\end{tikzcd}$$

Los productos fibrados se usan para definir el funtor de hom interno $\_\multimap\_$ en $\mathcal{C}_K$. El objeto unidad para el producto tensorial es $\langle I, K, e_K : I \otimes K \to K\rangle$, y el objeto dualizante es $\langle K, I, c_{K,I}; e_K : K \otimes I \to K\rangle$. En general, para un objeto $\langle X, Y, e : X \otimes Y \to K\rangle$ en $\mathcal{C}_K$, su objeto dual está dado por $\langle Y, X, c_{Y,X}; e : Y \otimes X \to K\rangle$.

Si la categoría $\mathcal{C}$ es (finitamente) completa y cocompleta, es decir, tiene todos los límites y colímites (finitos), entonces $\mathcal{C}_K$ es asimismo (finitamente) completa y cocompleta para cualquier K [12]. Por la Proposición 42 ya sabemos que $\mathcal{C}_K$ es (finitamente) completa sii es (finitamente) cocompleta.

La categoría $\underline{\mathit{Games}}_K$ definida por Lafont en [85] es la especialización de la construcción de Chu a la categoría $\underline{\mathit{Set}}$ de conjuntos y funciones. La categoría $\underline{\mathit{Vect}}_K$ de espacios vectoriales sobre un cuerpo K y aplicaciones lineales es (isomorfa a) una subcategoría plena de $\underline{\mathit{Games}}_K$; y $\underline{\mathit{Top}}$, la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, y $\underline{\mathit{Cohl}}$ son (isomorfas a) subcategorías plenas de $\underline{\mathit{Games}}_{\{0,1\}}$ (véase también [87]). $\Box$

Como ya hemos señalado en su definición, en una categoría lineal tenemos coproductos finitos: un objeto inicial 0 y coproductos binarios denotados $A \oplus B$.

La siguiente proposición enumera varios morfismos naturales, la mayoría de los cuales son isomorfismos, que existen siempre en una categoría lineal, y que jugarán un importante papel en la siguiente sección; algunos de ellos existen en cualquier categoría monoidal simétrica cerrada.

Proposición 46 Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \bot, \top, \&)$ una categoría lineal. Entonces,

1. $A\multimap(B\multimap C) \;\cong\; (A \otimes B)\multimap C$
2. $I\multimap A \;\cong\; A$
3. $A \;\cong\; A^{\bot\bot}$
4. $A\multimap B \;\cong\; B^{\bot}\multimap A^{\bot}$
5. $I \;\cong\; \bot^{\bot}$
6. $A \parr B \;\cong\; A^{\bot}\multimap B \;\cong\; (A^{\bot} \otimes B^{\bot})^{\bot}$
7. $A \otimes B \;\cong\; (A\multimap B^{\bot})^{\bot} \;\cong\; (A^{\bot} \parr B^{\bot})^{\bot}$
8. $A\multimap(B \parr C) \;\cong\; (A\multimap B) \parr C$
9. $A \otimes (B \oplus C) \;\cong\; (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ y $A \otimes 0 \;\cong\; 0$
10. $A \parr (B \& C) \;\cong\; (A \parr B)\&(A \parr C)$ y $A \parr \top \;\cong\; \top$
11. $A\multimap(B\&C) \;\cong\; (A\multimap B)\&(A\multimap C)$ y $A\multimap\top \;\cong\; \top$
12. $(A \oplus B)\multimap C \;\cong\; (A\multimap C)\&(B\multimap C)$ y $0\multimap C \;\cong\; \top$
13. $A \otimes (B \parr C) \longrightarrow (A \otimes B) \parr C$ y dualmente, $(A \parr B) \otimes C \longrightarrow A \parr (B \otimes C)$

14. $(A \otimes A') \otimes (B \parr C) \longrightarrow (A \otimes B) \parr (A' \otimes C)$ y dualmente,
$(A \parr B) \otimes (A' \parr C) \longrightarrow (A \parr A') \parr (B \otimes C)$

Demostración: El isomorfismo en 1 viene dado por $(a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon)^\dagger$ con inverso $(a^{-1}; \varepsilon)^{\dagger\dagger}$ (véase el Lema 94 en el Apéndice A).

Para 2, usamos $n = e^{-1}; c; \varepsilon$, con inverso $(c; e)^\dagger$ (véase el Lema 93 en el Apéndice A).

El isomorfismo para 3 es $d_A : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$, proporcionado por la Definición 39 de objeto dualizante.

Para 4, tenemos el isomorfismo $s_{A,B} : A \multimap B \longrightarrow B^\perp \multimap A^\perp$ presentado en el Corolario 40.

Para 5, tenemos el morfismo $e_\perp^\dagger : I \longrightarrow \perp \multimap \perp$ que es un isomorfismo porque coincide con la siguiente composición, donde usamos 2 y 3:

$$I \overset{d_I}{\cong} (I \multimap \perp) \multimap \perp \overset{n_\perp^{-1} \multimap id}{\cong} \perp \multimap \perp.$$

Para obtener 6 y el dual 7, basta usar el isomorfismo

$$(A \otimes B)^\perp = (A \otimes B) \multimap \perp \overset{1}{\cong} A \multimap (B \multimap \perp) = A \multimap B^\perp.$$

El isomorfismo en 8 se sigue de 6 y 1.

El isomorfismo de distributividad en 9 se deduce a partir del hecho de que el funtor $A \otimes \_$ conserva colímites puesto que tiene un adjunto a derecha [99]. Análogamente, $A \multimap \_$ y $A \parr \_$ ($\cong A^\perp \multimap \_$ por 6) conservan límites porque tienen un adjunto a izquierda. Además, $\_ \multimap C$ transforma colímites en límites porque $\_ \multimap C \cong C^\perp \multimap (\_)^\perp$. Esto justifica 10, 11 y 12.

Para obtener los morfismos en la primera mitad de 13 y 14, aplicamos φ^{-1} a las siguientes composiciones, donde η denota la unidad de la adjunción $\_ \otimes A \dashv A \multimap \_$:

$$B \parr C \xrightarrow{\eta \parr id} (A \multimap (A \otimes B)) \parr C \overset{8}{\cong} A \multimap ((A \otimes B) \parr C)$$

$$A' \otimes (B \parr C) \cong A' \otimes (C \parr B) \xrightarrow{13} (A' \otimes C) \parr B \xrightarrow{id \parr \eta} (A' \otimes C) \parr (A \multimap (A \otimes B)) \cong$$
$$\cong (A \multimap (A \otimes B)) \parr (A' \otimes C) \overset{8}{\cong} A \multimap ((A \otimes B) \parr (A' \otimes C)).$$

Aplicando el funtor $(\_)^\perp$ a estos morfismos se obtienen los morfismos duales en la segunda mitad de 13 y 14. □

3.2. Interpretación categórica de la lógica lineal

En esta sección realizamos un análisis detallado de la semántica de la lógica lineal en términos de categorías lineales. Nuestra presentación puede verse como el desarrollo posterior de ideas iniciadas o implícitas en el trabajo de Seely [143]. No obstante, como ya hemos mencionado, en este trabajo adoptamos una axiomatización de categorías lineales que es mucho más simple que una basada en categorías $*$-autónomas. Nos restringimos a *lógica lineal proposicional, sin las modalidades, pero incluyendo la negación*[3]. De ahora en

[3] Éste es el fragmento de la lógica lineal llamado MALL en [97].

adelante llamamos a este fragmento *lógica lineal*. En vez de adoptar las reglas originales de Girard [49], usamos con ligeras modificaciones las de Seely [143], puesto que secuentes convencionales de la forma $\Gamma \vdash \Delta$ son más convenientes para un tratamiento categórico que secuentes de la forma $\vdash \Delta$. Definimos modelos de una teoría lineal en categorías lineales, y probamos la corrección y completitud de la lógica lineal con respecto a modelos en categorías lineales.

Una *fórmula lineal* es generada por las conectivas binarias $\otimes, \parr, \&, \oplus$ y $\multimap$ y por la operación unaria $(\_)^\perp$ a partir de una colección de constantes proposicionales, que incluye las constantes lógicas $I, \perp, \top, 0$.

Un *secuente lineal* consiste en un par ordenado de listas finitas de fórmulas lineales (aunque el orden de las fórmulas en ambos lados va a ser indiferente debido a la regla (*perm*) que presentamos más adelante), junto con un *nombre* para distinguir diferentes derivaciones del mismo secuente; en particular, este nombre nos permite distinguir axiomas con las mismas fórmulas, si bien no vamos a desarrollar un lenguaje de pruebas[4]. De este modo, un secuente lineal tiene la forma

$$f : A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$$

donde, a la vista de las reglas $(\otimes L)$ y $(\parr R)$ que presentamos más adelante, las comas en la izquierda deben verse como conjunción $\otimes$ y las de la derecha como disyunción $\parr$.

En general, no escribiremos el nombre de una derivación y sólo lo haremos explícito en algunas ocasiones, sobre todo cuando sea importante distinguir entre dos axiomas con las mismas fórmulas.

Dada una colección S de constantes proposicionales no lógicas, una *S-fórmula* es una fórmula lineal construida a partir de las constantes en S y las constantes lógicas, y un *S-secuente* es un secuente lineal cuyas fórmulas son S-fórmulas.

Una *teoría lineal* T viene dada por una colección S de constantes proposicionales (no lógicas) y una colección Ax de S-secuentes llamados *axiomas*.

Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$, un S-secuente $\Gamma \vdash \Delta$ pertenece a la *clausura de* T, denotada $T^\star$, si puede derivarse (del modo habitual, usando árboles finitos) a partir de los axiomas Ax y S-secuentes que son instancias de los esquemas de axiomas:

$$(id)\ \ A \vdash A$$

$$(IR)\ \ \vdash I \qquad\qquad (\perp L)\ \ \perp\ \vdash$$

$$(\top R)\ \ \Gamma \vdash \top, \Delta \qquad\qquad (0L)\ \ \Gamma, 0 \vdash \Delta$$

$$(neg1)\ \ A \vdash A^{\perp\perp} \qquad\qquad (neg2)\ \ A^{\perp\perp} \vdash A$$

$$(neg\perp)\ \ I \vdash \perp^\perp \qquad\qquad (negI)\ \ I^\perp \vdash \perp$$

usando las siguientes reglas de inferencia:

[4] Ésta no es una tarea sencilla en absoluto y en este sentido el reciente trabajo de Abramsky [1] es una contribución muy importante.

Reglas estructurales

$$(perm)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma\Gamma \vdash \tau\Delta} \text{ para permutaciones cualesquiera } \sigma \text{ y } \tau$$

$$(corte)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta', \Delta}$$

Reglas lógicas

(Negación)

$$(\bot var)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma, B^{\bot} \vdash A^{\bot}, \Delta}$$

(Multiplicativas)

$$(IL)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, I \vdash \Delta} \qquad (\bot R)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}$$

$$(\otimes L)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta} \qquad (\otimes R)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B, \Delta, \Delta'}$$

$$(⅋ L)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A ⅋ B \vdash \Delta, \Delta'} \qquad (⅋ R)\ \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A ⅋ B, \Delta}$$

$$(\multimap L)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash \Delta', \Delta} \qquad (\multimap R)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta}$$

(Aditivas)

$$(\& L1)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \qquad (\& L2)\ \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}$$

$$(\& R)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}$$

$$(\oplus L)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}$$

$$(\oplus R1)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta} \qquad (\oplus R2)\ \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}$$

Como ya hemos señalado anteriormente, estamos interesados no sólo en saber si un secuente pertenece a la clausura de una teoría o no, sino también en conocer su derivación.

La notación categórica que hemos venido usando está de acuerdo con la notación lógica introducida por Girard; en nuestra presentación de fórmulas y secuentes lineales, el único cambio respecto de la notación utilizada por Girard es el uso de I en vez de $\mathbf{1}$ para la unidad del producto tensorial $\otimes$.

Una vez presentadas la sintaxis y la teoría de pruebas de la lógica lineal, podemos discutir su semántica categórica. Dada una categoría lineal $\mathcal{C}$, una teoría lineal $T = (S, Ax)$

y una asignación de un objeto $|s|$ en $\mathcal{C}$ a cada constante $s \in S$, es claro que podemos interpretar cualquier S-fórmula A como un objeto $|A|$ en $\mathcal{C}$. Luego, podemos asociar a una derivación de un S-secuente $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ un morfismo $|A_1| \otimes \cdots \otimes |A_n| \longrightarrow |B_1| \parr \cdots \parr |B_m|$ en $\mathcal{C}$. Si $n = 0$, $|A_1| \otimes \cdots \otimes |A_n|$ se reduce a I, y si $m = 0$, $|B_1| \parr \cdots \parr |B_m|$ se reduce a $\perp$.

Así pues, una interpretación de una teoría lineal T en una categoría lineal $\mathcal{C}$ viene dada por la asignación de un objeto $|s| \in Ob(\mathcal{C})$ a cada constante $s \in S$, extendida libremente a S-fórmulas, y de un morfismo $|f| : |A_1| \otimes \cdots \otimes |A_n| \longrightarrow |B_1| \parr \cdots \parr |B_m|$ en $\mathcal{C}$ a cada S-secuente $f : A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ en Ax. Sin embargo, este concepto puede definirse de una forma más categórica y elegante mediante el uso de morfismos de teorías lineales.

Definición 47 Dadas dos teorías lineales $T = (S, Ax)$ y $T' = (S', Ax')$, un *morfismo de teorías lineales* $L : T \to T'$ lleva S-fórmulas a S'-fórmulas, conservando todas las operaciones, es decir, $L(I) = I$, $L(A \otimes B) = L(A) \otimes L(B)$, $L(A^\perp) = L(A)^\perp$, etc., y lleva un S-secuente

$$f : A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m \;\in\; Ax$$

a un S'-secuente

$$L(f) : L(A_1), \dots, L(A_n) \vdash L(B_1), \dots, L(B_m) \;\in\; Ax'.$$

De este modo se define una categoría $\underline{LinTh}$ con teorías lineales como objetos y morfismos de teorías lineales como morfismos. $\square$

Es claro que una $\otimes$-teoría es un caso especial de teoría lineal[5] y que un morfismo $L : T \to T'$ de $\otimes$-teorías es asimismo un morfismo de teorías lineales cuando consideramos T y T' como teorías lineales. Por lo tanto, tenemos un funtor inclusión de $\underline{\otimes\text{-}Th}$ en $\underline{LinTh}$. Además, como la regla $(\otimes)$ de la Definición 26 es una regla derivada en lógica lineal, dada una $\otimes$-teoría T tenemos $T^\diamond \subseteq T^\star$.

Definición 48 Dada una categoría lineal $\mathcal{C}$, se define una teoría lineal $\mathcal{C}^\circ$ cuyas constantes son los objetos de $\mathcal{C}$ y tal que

$$f : A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$$

es un axioma de $\mathcal{C}^\circ$ si y sólo si $f : A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \longrightarrow B_1 \parr \cdots \parr B_m$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. $\square$

Obviamente, un funtor lineal $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ induce un morfismo de teorías lineales $\mathcal{F}^\circ : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}'^\circ$, y por lo tanto hay un "funtor de olvido" $(\_)^\circ : \underline{LinCat} \longrightarrow \underline{LinTh}$.

Ahora una *interpretación* de una teoría T en una categoría lineal $\mathcal{C}$ es justamente un morfismo de teorías lineales $T \to \mathcal{C}^\circ$ en $\underline{LinTh}$, y un *modelo* de T va a consistir en una categoría lineal $\mathcal{C}$ junto con una interpretación de T en $\mathcal{C}$.

[5] Hablando estrictamente, esto no es completamente preciso, ya que en el caso de $\otimes$-teorías hemos supuesto que $\otimes$ es asociativo y conmutativo, mientras que en el caso de teorías lineales no estamos haciendo ninguna identificación sintáctica. No obstante, éste es un detalle técnico de poca importancia cuya corrección se deja como ejercicio.

Definición 49 Dada una teoría lineal T, un *modelo* de T consiste en una categoría lineal $\mathcal{C}$ y un morfismo de teorías lineales $\mathcal{I} : T \to \mathcal{C}^\circ$.

Un morfismo[6] entre dos modelos $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{I}')$ de T es un funtor lineal $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tal que $\mathcal{I}; \mathcal{F}^\circ = \mathcal{I}'$ en $\underline{\mathit{LinTh}}$.

De esta forma se define la categoría $\underline{\mathit{Mod}}(T)$ de modelos de T. $\square$

La demostración del siguiente teorema es una generalización de la Proposición 13 en el Capítulo III de la tesis doctoral de V. de Paiva [127]. De Paiva considera interpretaciones de la lógica lineal en un marco categórico ligeramente diferente que no es completamente compatible con categorías lineales.

Teorema 50 Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$ y un modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ de T, para cada derivación de un S-secuente

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m \quad \in \quad T^\star$$

existe en $\mathcal{C}$ un morfismo

$$\mathcal{I}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}(A_n) \longrightarrow \mathcal{I}(B_1) \parr \cdots \parr \mathcal{I}(B_m).$$

Demostración: Si Γ es una lista $A_1, \ldots, A_n$ a la izquierda de un secuente, denotamos por G el objeto $\mathcal{I}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}(A_n)$, y análogamente, si Δ es una lista $B_1, \ldots, B_m$ a la derecha de un secuente, denotamos por D el objeto $\mathcal{I}(B_1) \parr \cdots \parr \mathcal{I}(B_m)$ (incluyendo los casos $n = 0$ y $m = 0$). En la demostración, omitimos $\mathcal{I}$ para facilitar la notación.

Los esquemas de axiomas $(id), (IR), (\bot L), (neg1)$ y $(neg2)$ así como las reglas $(perm)$, (IL), $(\bot R)$, $(\otimes L)$ y $(\parr R)$ son obvios. Para los esquemas de axiomas $(\top R), (0L), (neg\bot)$ y $(negI)$, basta considerar los isomorfismos $\top \parr D \cong \top$, $G \otimes 0 \cong 0$, $I \cong \bot^\perp$ y $I^\perp \cong \bot$, respectivamente.

Para $(corte)$, si $f : G \longrightarrow A \parr D, g : A \otimes G' \longrightarrow D'$, tenemos

$$G' \otimes G \stackrel{id \otimes f}{\longrightarrow} G' \otimes (A \parr D) \longrightarrow (G' \otimes A) \parr D \stackrel{g \otimes id}{\longrightarrow} D' \parr D.$$

Para $(\bot var)$, de un morfismo $G \otimes A \longrightarrow B \parr D$ obtenemos mediante la adjunción un morfismo $G \longrightarrow A \multimap (B \parr D)$. Usando el isomorfismo

$$A \multimap (B \parr D) \cong (A \multimap B) \parr D \cong (B^\perp \multimap A^\perp) \parr D \cong B^\perp \multimap (A^\perp \parr D)$$

y la adjunción de nuevo obtenemos un morfismo $G \otimes B^\perp \longrightarrow A^\perp \parr D$.

Para $(\otimes R)$, si $f : G \longrightarrow A \parr D, g : G' \longrightarrow B \parr D'$, componemos $f \otimes g$ con el morfismo

$$(D \parr A) \otimes (D' \parr B) \longrightarrow (D \parr D') \parr (A \otimes B).$$

Para $(\parr L)$, si $f : G \otimes A \longrightarrow D, g : G' \otimes B \longrightarrow D'$, componemos el morfismo

$$(G \otimes G') \otimes (A \parr B) \longrightarrow (G \otimes A) \parr (G' \otimes B)$$

[6] Ésta no es la definición más general posible de morfismo. Una definición más general supondría el uso de transformaciones naturales, cuando se ven las interpretaciones como funtores lineales (véase el Teorema 53).

con $f \parr g$.

Para $(\multimap L)$, si $f : G \longrightarrow A \parr D, g : G' \otimes B \longrightarrow D'$, tenemos la composición:

$$G \otimes G' \otimes (A \multimap B) \xrightarrow{f \otimes id} (G' \otimes (A \multimap B)) \otimes (A \parr D) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (G' \otimes (A \multimap B) \otimes A) \parr D \xrightarrow{(id \otimes \varepsilon) \parr id} (G' \otimes B) \parr D \xrightarrow{g \parr id} D' \parr D.$$

Para $(\multimap R)$, el resultado se sigue de la adjunción y el isomorfismo

$$A \multimap (B \parr D) \cong (A \multimap B) \parr D.$$

$(\& L1), (\& L2)$ y $(\oplus R1), (\oplus R2)$ usan las proyecciones del producto y las inyecciones del coproducto, respectivamente.

Finalmente, para $(\& R)$ y $(\oplus L)$ se usan los isomorfismos

$$(A \& B) \parr D \cong (A \parr D) \& (B \parr D), \qquad G \otimes (A \oplus B) \cong (G \otimes A) \oplus (G \otimes B)$$

respectivamente. □

Hemos visto cómo una categoría lineal da lugar a una teoría lineal. Recíprocamente, a una teoría lineal se le asocia una categoría lineal "libre."

Definición 51 Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$, existe una categoría lineal $\mathcal{L}[T]$ cuyos objetos son las S-fórmulas, y cuyos morfismos son clases de equivalencia de derivaciones de S-secuentes $\Gamma \vdash \Delta \in T^\star$ con respecto a la congruencia generada por la colección de ecuaciones que una categoría necesita satisfacer para ser una categoría lineal. Esta colección puede obtenerse seleccionando todas las reglas ecuacionales del Apéndice C. □

Ejemplo 52 Dadas fórmulas A, B, C, D y morfismos $f : A \to B, \quad g : C \to D$ correspondientes a derivaciones de los secuentes $A \vdash B$ y $C \vdash D$ respectivamente, el morfismo $f \otimes g : A \otimes C \longrightarrow B \otimes D$ es la clase de equivalencia de la derivación

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ A \vdash B & C \vdash D \end{array}}{A, C \vdash B \otimes D}}{A \otimes C \vdash B \otimes D}$$

obtenida usando las reglas $(\otimes R)$ y $(\otimes L)$. (De paso, este ejemplo demuestra nuestra afirmación de que la regla $(\otimes)$ de la Definición 26 es una regla derivada en lógica lineal.)

Otros ejemplos pueden encontrarse en el artículo de Seely [143]. □

Esta discusión sugiere que una interpretación $\mathcal{I} : T \to \mathcal{C}^\circ$ de T en $\mathcal{C}$ puede extenderse de forma única a un funtor lineal $\mathcal{L}[T] \to \mathcal{C}$.

Teorema 53 Dada una categoría lineal $\mathcal{C}$ y una teoría lineal T existe una biyección natural entre funtores lineales de $\mathcal{L}[T]$ en $\mathcal{C}$ y morfismos de teorías lineales $T \to \mathcal{C}^\circ$. En otras palabras, el funtor $\mathcal{L}[\_] : \underline{LinTh} \longrightarrow \underline{LinCat}$ es adjunto a izquierda del funtor $(\_)^\circ : \underline{LinCat} \longrightarrow \underline{LinTh}$.

Además, existe un isomorfismo de categorías

$$\underline{Mod}(T) \simeq \mathcal{L}[T]/\underline{LinCat},$$

entre la categoría de modelos de T y la categoría de objetos bajo $\mathcal{L}[T]$ (*slice category*) $\mathcal{L}[T]/\underline{LinCat}$ cuyos objetos son funtores lineales $\mathcal{J} : \mathcal{L}[T] \longrightarrow \mathcal{C}$ y cuyos morfismos $\mathcal{F} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ son funtores lineales $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tales que $\mathcal{J}; \mathcal{F} = \mathcal{J}'$.

Demostración: Un morfismo de teorías lineales $T \to \mathcal{C}^\circ$ o interpretación de T en $\mathcal{C}$ se extiende libremente a fórmulas, es decir, objetos de $\mathcal{L}[T]$, y usando el Teorema 50 a (clases de equivalencia de) derivaciones, que son los morfismos en $\mathcal{L}[T]$, dando lugar a un funtor lineal $\mathcal{L}[T] \to \mathcal{C}$. Recíprocamente, es obvio que la restricción de un funtor lineal $\mathcal{L}[T] \to \mathcal{C}$ a las fórmulas que son las constantes proposicionales en la teoría lineal T da lugar a una interpretación de T en $\mathcal{C}$. Y estos dos procedimientos son uno inverso del otro.

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un morfismo entre los modelos $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{I}')$ de T, o sea, $\mathcal{F}$ es un funtor lineal tal que $\mathcal{I}; \mathcal{F}^\circ = \mathcal{I}'$ en $\underline{LinTh}$. Entonces, si $\tilde{\mathcal{I}}$ e $\tilde{\mathcal{I}}'$ son los funtores lineales correspondientes a $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ respectivamente bajo la biyección de arriba, es fácil ver que $\tilde{\mathcal{I}}; \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{I}}'$; por lo tanto, $\mathcal{F}$ es también un morfismo entre $\tilde{\mathcal{I}}$ e $\tilde{\mathcal{I}}'$ en $\mathcal{L}[T]/\underline{LinCat}$. De esta forma, la biyección anterior ha sido extendida a un isomorfismo de categorías. $\Box$

Corolario 54 El modelo $(\mathcal{L}[T], T \hookrightarrow \mathcal{L}[T]^\circ)$ es inicial en la categoría $\underline{Mod}(T)$, donde $T \hookrightarrow \mathcal{L}[T]^\circ$ es la inclusión obvia de teorías proporcionando la unidad de la adjunción $\mathcal{L}[\_] \dashv (\_)^\circ$.

Demostración: El modelo $(\mathcal{L}[T], T \hookrightarrow \mathcal{L}[T]^\circ)$ corresponde, bajo el isomorfismo de categorías del Teorema 53, al funtor identidad $1_{\mathcal{L}[T]} : \mathcal{L}[T] \to \mathcal{L}[T]$, que es el objeto inicial en la categoría $\mathcal{L}[T]/\underline{LinCat}$. $\Box$

Corolario 55 Si $T = (\emptyset, \emptyset)$ es la teoría lineal *pura*, la categoría lineal $\mathcal{L}[T]$ es un objeto inicial en la categoría $\underline{LinCat}$.

Demostración: Basta notar que para T la teoría lineal pura, la categoría $\underline{Mod}(T)$ de modelos de T puede identificarse con $\underline{LinCat}$. $\Box$

Estos resultados, así como los ejemplos de categorías lineales presentados en el Ejemplo 44, sugieren que las categorías lineales constituyen una noción de "modelo" muy general para la lógica lineal[7]. Este punto de vista es completamente análogo a la forma en que categorías cartesianas cerradas proporcionan una noción de modelo muy general para el lambda cálculo con tipos.

Definición 56 Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$, un modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ de T y un S-secuente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, decimos que $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ *satisface* este secuente y escribimos

$$(\mathcal{C}, \mathcal{I}) \models \quad A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$$

si existe en $\mathcal{C}$ un morfismo $\mathcal{I}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}(A_n) \longrightarrow \mathcal{I}(B_1) ⅋ \cdots ⅋ \mathcal{I}(B_m)$.

Similarmente, $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ satisface una colección Q de S-secuentes, denotado $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) \models Q$, si $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ satisface todos los secuentes en Q. $\Box$

[7]Naturalmente, para interpretar las conectivas exponenciales se necesita estructura adicional.

Desde este punto de vista, el Teorema 50 afirma la corrección de las reglas de inferencia con respecto a esta noción de satisfacción. También obtenemos fácilmente un resultado de completitud:

Teorema 57 (*Completitud*) Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$ y un S-secuente $\Gamma \vdash \Delta$,

$$\Gamma \vdash \Delta \ \in \ T^{\star} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{L}[T], T \hookrightarrow \mathcal{L}[T]^{\circ}) \models \ \Gamma \vdash \Delta.$$

Demostración: Basta notar que la interpretación $T \hookrightarrow \mathcal{L}[T]^{\circ}$ asigna a una fórmula A ella misma como objecto de $\mathcal{L}[T]$, y que los morfismos en $\mathcal{L}[T]$ son clases de equivalencia de pruebas. Por lo tanto, el secuente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ tiene una prueba si y sólo si hay un morfismo $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \longrightarrow B_1 \parr \cdots \parr B_m$ en $\mathcal{L}[T]$. $\square$

Corolario 58 Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$ y una colección Q de S-secuentes,

$$Q \subseteq T^{\star} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{L}[T], T \hookrightarrow \mathcal{L}[T]^{\circ}) \models Q. \square$$

Observación 59 Los resultados en los Teoremas 53 y 57 muestran que la lógica lineal es una lógica categórica en el sentido de la Definición 9 en la Introducción sobre lógicas categóricas (Capítulo 0). $\square$

3.3. Relaciones funtoriales entre redes de Petri y lógica lineal

En la Sección 2.3 hemos hecho notar que una categoría de Petri es un caso especial de categoría monoidal simétrica; por lo tanto, hay un funtor inclusión de la categoría $\underline{\mathit{PetriCat}}$ de categorías de Petri en la categoría $\underline{\mathit{MonCat}}$ cuyos objetos son categorías monoidales simétricas y cuyos morfismos son funtores monoidales simétricos. Como una categoría lineal es una categoría monoidal simétrica, también hay un funtor de olvido $\mathcal{V} : \underline{\mathit{LinCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{MonCat}}$. Tomando en consideración las categorías $\underline{\mathit{Petri}}$, $\underline{\otimes\text{-}\mathit{Th}}$ y $\underline{\mathit{LinTh}}$, nos encontramos con la situación descrita en el siguiente diagrama de funtores:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathit{Petri}} \arrow[r, shift left, "\mathcal{T}[_]"] \arrow[d, dash, "\wr"'] & \underline{\mathit{PetriCat}} \arrow[l, shift left, "\mathcal{U}"] \arrow[r, hook] & \underline{\mathit{MonCat}} \arrow[d, shift left, "\mathcal{D}[_]"] \\
\underline{\otimes\text{-}\mathit{Th}} \arrow[r, hook] & \underline{\mathit{LinTh}} \arrow[r, shift left, "\mathcal{L}[_]"] & \underline{\mathit{LinCat}} \arrow[l, shift left, "(_)^{\circ}"] \arrow[u, shift left, "\mathcal{V}"]
\end{tikzcd}$$

En este diagrama las flechas $\hookrightarrow$ denotan funtores inclusión, $\simeq$ denota un isomorfismo de categorías, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son funtores de olvido, $\mathcal{T}[\_]$ es adjunto a izquierda de $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}[\_]$ es adjunto a izquierda de $(\_)^{\circ}$, y el funtor $\mathcal{D}[\_] : \underline{\mathit{MonCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{LinCat}}$ es el adjunto a izquierda del funtor de olvido $\mathcal{V} : \underline{LinCat} \longrightarrow \underline{MonCat}$ definido a continuación. La intención de este diagrama es que, tras descartar los funtores de olvido $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ y $(\_)^\circ$, deberíamos obtener un diagrama conmutativo salvo isomorfismo, es decir, dada una red de Petri N nos gustaría tener el isomorfismo $\mathcal{D}[\mathcal{T}[N]] \simeq \mathcal{L}[N]$. Sin embargo, esto no es cierto debido al desacuerdo entre el tratamiento estricto de $\otimes$ en $\mathcal{T}[N]$ y el tratamiento no estricto de $\otimes$ en $\mathcal{L}[N]$. Éste no es un obstáculo serio en absoluto, y el deseado isomorfismo puede obtenerse adoptando simplemente un tratamiento no estricto desde el principio.

Dada una categoría monoidal simétrica $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e)$, construimos una *categoría lineal libre* $(\mathcal{D}[\mathcal{C}], \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp, \top, \&)$ generada por $\mathcal{C}$. Nótese el reúso de los símbolos $\otimes, I, a, c, e$. Esto nos permite simplificar la notación así como disminuir el número de reglas necesarias para definir $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$, porque evitamos tener que escribir las reglas que dicen que las nuevas operaciones coinciden con las viejas al restringirlas a $\mathcal{C}$.

Los objetos de $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ se generan libremente a partir de los objetos de $\mathcal{C}$ y nuevos objetos $\perp, \top$, cerrando con respecto a las operaciones $\otimes$, $\multimap$ y $\&$. Los morfismos de $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ se obtienen a partir de los morfismos de $\mathcal{C}$ y familias de morfismos $id, a, a^{-1}, c, e, e^{-1}, \varepsilon, \pi, \pi', \langle\rangle, d^{-1}$, cerrando libremente con respecto a las operaciones $\_;\_$, $\_\otimes\_$, $(\_)^\dagger$, $\langle\_,\_\rangle$ e imponiendo la colección de ecuaciones que una categoría necesita satisfacer para ser una categoría lineal.

El conjunto completo de reglas de inferencia que definen $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ aparece en el Apéndice C, clasificado de acuerdo a la estructura categórica que cada subconjunto de reglas le proporciona a $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$:

- $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$: cada objeto y morfismo de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$.
- $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es una categoría: composición $\_;\_$, identidades id y las esperadas ecuaciones de asociatividad e identidades.
- $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es monoidal simétrica: el funtor $\_\otimes\_$ y los isomorfismos naturales a, c, e satisfaciendo las condiciones de coherencia de Mac Lane-Kelly; el objeto I está en $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ pues ya pertenecía a $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es monoidal cerrada: $\_\multimap\_$ sobre objetos, el morfismo evaluación ε y la función $f \mapsto f^\dagger$ que constituyen la adjunción
$$Hom_{\mathcal{D}[\mathcal{C}]}(B \otimes A, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}[\mathcal{C}]}(B, A \multimap C).$$
- $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ tiene productos finitos: un objeto final $\top$ y para cada par de objetos A, B un objeto $A\&B$ y proyecciones π, π', sujetas a la correspondiente condición universal.
- $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ tiene un objeto dualizante: un objeto $\perp$, y para cada objeto A un inverso $d_A^{-1} : (A \multimap \perp) \multimap \perp \longrightarrow A$ del morfismo
$$(c_{A, A\multimap\perp}; \varepsilon_{A,\perp})^\dagger : A \longrightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp.$$

Con la detallada presentación de la construcción de $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ tal y como aparece en el Apéndice C, es rutinario completar la demostración del siguiente

Teorema 60 El funtor de olvido $\underline{LinCat} \longrightarrow \underline{MonCat}$ tiene un adjunto a izquierda $\mathcal{D}[\_] : \underline{MonCat} \longrightarrow \underline{LinCat}$, es decir, dada una categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es la *categoría lineal libre* generada por $\mathcal{C}$. $\square$

3.4. Combinadores categóricos

En su artículo [82], Lafont presentó una semántica categórica de la lógica lineal intuicionista en términos de categorías monoidales simétricas cerradas, y la usó para desarrollar una *Máquina Lineal Abstracta*. La idea general de este paso de lógica a categorías y de categorías a código de máquina es como sigue. Primero se define una traducción de un cálculo lógico a una colección de morfismos especiales, llamados *combinadores categóricos*, sujetos a un conjunto de ecuaciones que definen una clase de categorías; luego se define una máquina abstracta cuyos programas son expresiones que denotan morfismos en una categoría libre y cuya computación es reducción de tales expresiones a forma canónica usando las ecuaciones. Esto generaliza a categorías monoidales simétricas cerradas la traducción entre pruebas de deducción natural, escritas como términos del lambda cálculo con tipos, y combinadores categóricos para categorías cartesianas cerradas estudiada por Curien [34] y usada en la *Máquina Categórica Abstracta* [33]. El paralelismo entre ambas ideas está hecho mucho más explícito en la tesis doctoral de Lafont [83].

Nuestra construcción de una categoría lineal libre, presentada en detalle en el Apéndice C, puede verse desde esta perspectiva como una extensión del trabajo de Lafont que proporciona combinadores categóricos para categorías lineales, o sea, para lógica lineal incluyendo negación[8]. Sin embargo, nuestra primera presentación en términos de categorías $*$-autónomas [103] era excesivamente complicada: aparte de los combinadores categóricos que definen una categoría monoidal simétrica cerrada, necesitábamos una negación explícita $(\_)^\perp$ sobre los objetos, e isomorfismos naturales $s_{A,B} : (A \multimap B) \longrightarrow (B^\perp \multimap A^\perp)$ y $d_A : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$ sujetos a cuatro ecuaciones nada intuitivas. La axiomatización en términos de un objeto dualizante presentada en este trabajo proporciona un conjunto equivalente de combinadores mucho más simple. *Sólo* necesitamos añadir un objeto especial $\perp$ (el objeto dualizante) y un inverso para el morfismo ya presente $(c;\varepsilon)^\dagger : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$ donde $A^\perp = A \multimap \perp$. Un aspecto interesante que valdría la pena investigar es la noción apropiada de reducción para estos combinadores así como también la posibilidad de extender la Máquina Lineal Abstracta a este contexto más general.

3.5. Especificación de concurrencia mediante lógica lineal

Ésta es naturalmente una de las intenciones explícitas de la lógica lineal. Sin embargo, queda mucho por hacer para aprovechar completamente las prometedoras conexiones entre lógica lineal y concurrencia. En este trabajo hemos tendido un puente entre redes de Petri y lógica lineal al nivel de su teoría de modelos en términos de su semántica categórica. Un beneficio inmediato de tal conexión es una definición precisa de *satisfacción* de una fórmula de lógica lineal por una red de Petri, como se describe a continuación.

En general, un buen método para considerar los posibles usos de (diferentes variantes de) la lógica lineal para sistemas concurrentes es la noción de cálculo de concurrencia introducida por Milner en [119]. De forma muy breve, tal cálculo consiste en una lógica $\mathcal{L}$ usada para escribir especificaciones y una clase de sistemas concurrentes $\mathcal{C}$, junto con una

[8] Aunque nosotros no tratamos la conectiva exponencial !, tratada en [82], ésta puede integrarse en nuestro marco mediante la adición de la estructura categórica discutida en la Sección 2.9.

relación $Q \models \varphi$ que afirma que un sistema concurrente Q en $\mathcal{C}$ satisface una especificación φ en $\mathcal{L}$. Milner [119] da varios ejemplos, incluyendo el conocido caso en que $\mathcal{C}$ es CCS y $\mathcal{L}$ es la lógica de Hennessy-Milner. El caso en que $\mathcal{L}$ es lógica lineal proposicional y $\mathcal{C}$ es la clase de redes de Petri se hace explícito en la siguiente definición.

Definición 61 Dada una red de Petri $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^{\otimes})$, y un S-secuente $\Gamma \vdash \Delta$, decimos que N *satisface* $\Gamma \vdash \Delta$ y escribimos $N \models \Gamma \vdash \Delta$ si y sólo si $(\mathcal{L}[N], N \hookrightarrow \mathcal{L}[N]^\circ) \models \Gamma \vdash \Delta$. $\Box$

Por el Teorema 57 de completitud, sabemos que $N \models \Gamma \vdash \Delta$ si y sólo si $\Gamma \vdash \Delta$ pertenece a la clausura $N^\star$, es decir, sii tal secuente es derivable a partir de los axiomas $\{t : {}^\bullet t \vdash t^\bullet \mid t \in T\}$ mediante los axiomas y reglas de la lógica lineal presentados en la Sección 3.2. Por lo tanto, podemos considerar $N^\star$ como la colección de todas las especificaciones escritas como S-secuentes de lógica lineal que la red de Petri N satisface, y $\mathcal{L}[N]$ como el modelo categórico apropiado[9] en el cual se pueden interpretar tales especificaciones.

Como ya hemos visto en el Capítulo 2, la interpretación intuitiva de las conectivas & y $\oplus$ es elección externa e interna, respectivamente. Una fórmula escrita usando solamente la conectiva $\otimes$ corresponde a los recursos disponibles, con $\otimes$ significando la acumulación de recursos; la negación de tal fórmula mediante $(\_)^\perp$ corresponde a una "deuda" de recursos, y $⅋$, siendo dual de $\otimes$, corresponde a la acumulación de deudas; esta interpretación intuitiva está de acuerdo con la dualidad $(A \otimes B)^\perp \cong (A^\perp ⅋ B^\perp)$. La conectiva $\multimap$ de implicación lineal expresa estados condicionales donde una transición ha sido empezada consumiendo algunos de los recursos que necesita, pero aún no ha sido concluida debido a la falta de los recursos restantes.

Ejemplo 62 La red de Petri en la Figura 3.1 extiende la de la Figura 2.3 añadiendo las posibilidades de comprar una manzana o un pastel con cuatro cuartos en vez de un dólar, y de cambiar un dólar en cuatro cuartos. Esta red satisface, entre otras, las siguientes especificaciones:

1. $\$ \vdash a \,\&\, c \,\&\, q^4$
2. $q^4 \vdash a \,\&\, c$
3. $\$^2 \vdash a \otimes c$
4. $\$ \otimes q^4 \vdash q^8$
5. $\$ \oplus q^4 \vdash a$
6. $\$ \oplus q^4 \vdash q^4$
7. $\$ \oplus q^4 \vdash a \oplus c$
8. $\$^3 \vdash (a \otimes c \otimes q^4) \,\&\, q^{12} \,\&\, c^3 \,\&\, (c^2 \otimes \$)$

[9] Como ya hemos señalado varias veces en este trabajo, $\mathcal{L}[N]$ contiene todas las computaciones de la red de Petri N así como las adicionales "computaciones idealizadas" correspondientes por ejemplo a posibilidades de elección externa (&), a inversiones de causalidad ($(\_)^\perp$), etc.

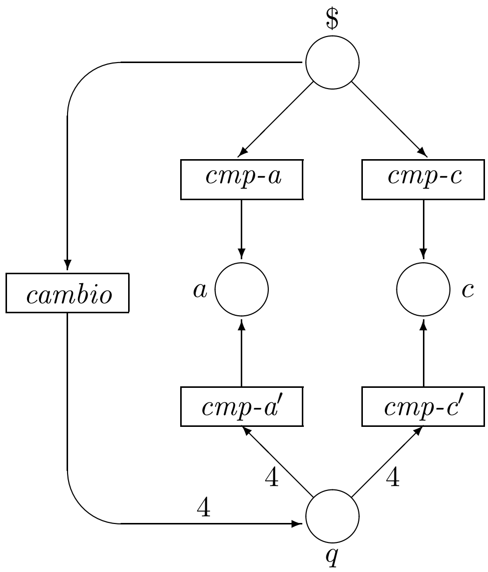


Figura 3.1: La cuarta red de Petri para comprar manzanas y pasteles.

9. $\$ \vdash a \oplus \$^{1000}$
10. $a^{\perp} \vdash \$^{\perp}$
11. $a^{\perp} \parr c^{\perp} \vdash \$^{\perp} \parr \$^{\perp}$
12. $a^{\perp} \oplus c^{\perp} \vdash \$^{\perp}$
13. $\$ \vdash \$ \multimap (a \otimes c)$

El significado intuitivo de las anteriores especificaciones es:

1. Con un dólar, se puede *elegir* entre comprar una manzana *y* (&) comprar un pastel *y* (&) cambiarlo en cuatro cuartos.
2. Con cuatro cuartos, se puede *elegir* entre comprar una manzana *y* (&) comprar un pastel.
3. Con *dos* dólares, se puede comprar una manzana *y* ($\otimes$) un pastel.
4. Con un dólar *y* ($\otimes$) cuatro cuartos se pueden conseguir ocho cuartos.
5. Con bien un dólar *o* ($\oplus$) bien cuatro cuartos, se puede comprar una manzana.
6. Con bien un dólar *o* ($\oplus$) bien cuatro cuartos, se puede conseguir cuatro cuartos.
7. Con bien un dólar *o* ($\oplus$) bien cuatro cuartos, se puede comprar bien una manzana *o* ($\oplus$) bien un pastel.

8. Con *tres* dólares, se puede *elegir* entre: (*i*) comprar una manzana *y* ($\otimes$) un pastel *y* ($\otimes$) conseguir cuatro cuartos, *y* (&) (*ii*) cambiarlos en doce cuartos, *y* (&) (*iii*) comprar tres pasteles, *y* (&) (*iv*) comprar sólo dos pasteles *y* ($\otimes$) ahorrar un dólar.

9. Con un dólar, podemos conseguir una manzana *o* ($\oplus$) mil dólares. Éste es un ejemplo de elección *interna* que, en esta red de Petri, siempre se lleva a cabo mediante la elección de la primera posibilidad.

10. Se puede sustituir una *deuda* ($(\_)^\perp$) de una manzana por una *deuda* ($(\_)^\perp$) de un dólar.

11. Se puede sustituir una *deuda* ($(\_)^\perp$) de una manzana *y* ($\invamp$) un pastel por una *deuda* ($(\_)^\perp$) de *dos* dólares.

12. Se puede sustituir una *deuda* ($(\_)^\perp$) de bien una manzana *o* ($\oplus$) bien un pastel por una *deuda* ($(\_)^\perp$) de un dólar.

13. Teniendo un dólar, *si* uno tuviera otro dólar, *entonces* ($\multimap$) se *podría* comprar una manzana *y* ($\otimes$) también un pastel. $\square$

El objetivo de usar axiomas de lógica lineal para especificar propiedades de concurrencia aparece también explícitamente en los trabajos de Asperti [6], Gunter y Gehlot [65], y Engberg y Winskel [41]. En particular, Asperti [6] sugiere que axiomas al nivel de lógica de predicados de primer orden podrían ser de utilidad y corresponderían en general a descripciones al nivel de redes de predicados/eventos [134, 46] (un trabajo relacionado es [108]).

Nuestra opinión es que axiomas de lógica lineal proposicional de segundo orden podrían ser útiles para especificar propiedades globales de un sistema concurrente, ya que cuantificación de segundo orden corresponde intuitivamente a cuantificar sobre todos los estados de un sistema. No obstante, debería ser importante distinguir entre cuantificación sobre estados "reales" e "ideales," y esto podría hacer la lógica más complicada de lo esperado; la forma precisa y el significado de tales especificaciones requieren más investigación en este tema. Engberg y Winskel [41] consideran también la posibilidad de añadir recursión a la lógica.

3.6. Categorías (lineales) cancelativas

En la Sección 2.8 hemos introducido la lógica lineal cancelativa, obtenida a partir de la lógica lineal mediante la identificación de las conectivas $\otimes$ y $\invamp$ y sus respectivos elementos neutros I y $\perp$, como una lógica en la cual se puede expresar una noción extendida del juego de marcas en redes de Petri, llamado juego financiero, donde la negación se interpreta como una deuda de recursos.

Los modelos categóricos de esta lógica son categorías lineales cancelativas, llamadas compactas en [9]. Ahora vamos a explicar en detalle esta noción; más en general, podemos prescindir de los productos, y hablar de categorías con un objeto dualizante que son cancelativas.

Aunque nuestra motivación original para definir categorías cancelativas viene de nuestro trabajo sobre la relación entre lógica lineal y concurrencia, esta noción puede verse también como una axiomatización de un *grado de dualidad más completo*, en el cual se dispone de isomorfismos adicionales

$$(A \otimes B)^{\perp} \cong A^{\perp} \otimes B^{\perp}, \qquad I \cong \perp.$$

Más adelante demostraremos que los espacios vectoriales de dimensión finita, o más generalmente los semimódulos libres finitamente generados sobre un semianillo conmutativo, forman una categoría lineal cancelativa. Por lo tanto, la dualidad del álgebra lineal es estrictamente más rica que otras dualidades más débiles que no son cancelativas.

Definición 63 Una *categoría cancelativa* es una categoría con un objeto dualizante $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp)$ e isomorfismos naturales $\nu_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow A \parr B$ y $\lambda : I \to \perp$ que hacen que las estructuras monoidales simétricas $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e)$ y $(\mathcal{C}, \parr, \perp, a', c', e')$, definida esta última en la Proposición 41, sean isomorfas, es decir, los diagramas en la Figura 3.2 deben conmutar.

Una *categoría lineal cancelativa* es una categoría cancelativa que tiene productos finitos.
□

Ejemplo 64 La categoría lineal $\underline{\mathit{FdVect}}_K$ de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K y las aplicaciones lineales es cancelativa. Más generalmente, la misma propiedad es satisfecha por la categoría $\underline{\mathit{FSmod}}_R$, cuyos objetos son los R-semimódulos libres finitamente generados sobre un semianillo conmutativo R y cuyos morfismos son aplicaciones lineales.

El isomorfismo $\nu_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow A \parr B$ se define como sigue. Dada una base $\{a_i \mid i \in I\}$ de A y una base $\{b_j \mid j \in J\}$ de B, una base para $A \otimes B$ es $\{a_i \otimes b_j \mid i \in I, j \in J\}$, y por linearidad basta dar el resultado de aplicar ν a los miembros de una base. En este caso, $\nu(a_i \otimes b_j)$ es la forma lineal

$$\begin{array}{rccl} \nu(a_i \otimes b_j) : & A^* \otimes B^* & \longrightarrow & K \\ & \sum_k \alpha_k (f_k \otimes h_k) & \longmapsto & \sum_k \alpha_k (f_k(a_i) \cdot h_k(b_j)) \end{array}$$

donde $\cdot$ denota el producto en el cuerpo K.

Supóngase que $\{p_i \mid i \in I\}$ es la base de A^* dual de $\{a_i \mid i \in I\}$, es decir, $p_i(a_{i'}) = \delta_{i,i'}$ (donde, como es habitual, $\delta_{i,i'}$ denota la delta de Kronecker definida por $\delta_{i,i'} = 1$ si $i = i'$ y $\delta_{i,i'} = 0$ si $i \neq i'$), y análogamente $\{q_j \mid j \in J\}$ es la base de B^* dual de $\{b_j \mid j \in J\}$; una forma lineal $l \in (A^* \otimes B^*)^*$ se caracteriza por los elementos $\{l(p_i \otimes q_j) \mid i \in I, j \in J\}$, y la aplicación inversa de ν asigna a l el elemento $\sum_{i,j} l(p_i \otimes q_j)(a_i \otimes b_j)$ de $A \otimes B$. No es difícil probar que estas aplicaciones son efectivamente una inversa de la otra, que $\nu_{A,B}$ es natural (en A y B), y que ν hace conmutar los diagramas de la Figura 3.2. Por supuesto, en el caso de espacios vectoriales $I = K = \perp$, y entonces $\lambda = id_K$. □

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\nu"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "\nu"] \\
A \parr (B \otimes C) \arrow[d, "id \parr \nu"'] & (A \otimes B) \parr C \arrow[d, "\nu \parr id"] \\
A \parr (B \parr C) \arrow[r, "a'"] & (A \parr B) \parr C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\nu"'] & B \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
A \parr B \arrow[r, "c'"] & B \parr A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\nu"'] & A \\
I \parr A \arrow[r, "\lambda \parr id"] & \perp \parr A \arrow[u, "e'"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Diagramas conmutativos para una categoría cancelativa.

Ejemplo 65 La categoría <u>*Cohl*</u> de espacios coherentes y funciones lineales es un ejemplo de categoría lineal *no* cancelativa, si bien en este caso $I = \perp$. Recordemos que un espacio coherente X se caracteriza por un grafo reflexivo no orientado, llamado la *red de coherencia* (*web*) de X, que representa la relación de coherencia sobre el conjunto subyacente $|X|$; es más, si dos espacios coherentes son isomorfos en <u>*Cohl*</u>, sus correspondientes redes de coherencia son isomorfas como grafos. Sabiendo esto, si X se representa por
$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \bullet 2 & \\
1 \bullet \arrow[rr, dash] & & \bullet 3
\end{tikzcd}$$
e Y es el espacio discreto $1\bullet \quad \bullet 2$ tenemos

$$X \otimes Y = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & (1{,}1) \bullet \arrow[dd, dash] & \bullet (1{,}2) \arrow[dd, dash] & \\
(2{,}1) \bullet & & & \bullet (2{,}2) \\
 & (3{,}1) \bullet & \bullet (3{,}2) &
\end{tikzcd}
\quad \text{mientras que} \quad
X \parr Y = \begin{tikzcd}[row sep=small]
 & (1{,}1) \bullet \arrow[dd, dash] \arrow[ddr, dash] & \bullet (1{,}2) \arrow[dd, dash] \arrow[ddl, dash] & \\
(2{,}1) \bullet & & & \bullet (2{,}2) \\
 & (3{,}1) \bullet & \bullet (3{,}2) &
\end{tikzcd}$$

Resumiendo, en general, $X \otimes Y \ncong X \parr Y$ en <u>*Cohl*</u>. $\square$

Para una categoría con un objeto dualizante queremos expresar la condición de ser

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes (B \otimes C))^\perp \arrow[d, "\mu"'] & ((A \otimes B) \otimes C)^\perp \arrow[l, "a^\perp"'] \arrow[d, "\mu"] \\
A^\perp \otimes (B \otimes C)^\perp \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & (A \otimes B)^\perp \otimes C^\perp \arrow[d, "\mu \otimes id"] \\
A^\perp \otimes (B^\perp \otimes C^\perp) \arrow[r, "a"] & (A^\perp \otimes B^\perp) \otimes C^\perp
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B)^\perp \arrow[d, "\mu"'] & (B \otimes A)^\perp \arrow[l, "c^\perp"'] \arrow[d, "\mu"] \\
A^\perp \otimes B^\perp \arrow[r, "c"] & B^\perp \otimes A^\perp
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes A)^\perp \arrow[d, "\mu"'] & A^\perp \arrow[l, "e^\perp"'] \arrow[d, "e^{-1}"] \\
I^\perp \otimes A^\perp & I \otimes A^\perp \arrow[l, "(j;\lambda^\perp) \otimes id"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.3: Diagramas alternativos para una categoría cancelativa.

cancelativa en términos de $\otimes$ y $(\_)^\perp$ en vez de $\otimes$ y $\parr$ como antes, para eludir así la complicada definición de los isomorfismos de coherencia a', c' y e'. Para esto usamos el funtor $(\_)^\perp$ y el isomorfismo $d_A : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$ para definir un isomorfismo

$$\mu_{A,B} : (A \otimes B)^\perp \longrightarrow A^\perp \otimes B^\perp$$

mediante la expresión $\mu_{A,B} = (\nu^{-1}_{A,B})^\perp; d^{-1}_{A^\perp \otimes B^\perp}$. De esta forma obtenemos una biyección entre las dos clases de isomorfismos, ya que ν se puede recuperar por medio de la definición $\nu_{A,B} = d_{A \otimes B}; (\mu^{-1}_{A,B})^\perp$. Entonces, los diagramas de la Figura 3.2 se transforman en los de la Figura 3.3 y obtenemos la siguiente caracterización de una categoría cancelativa.

Proposición 66 Una categoría cancelativa es una categoría con un objeto dualizante $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp)$ junto con isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}
\mu_{A,B} &: (A \otimes B)^\perp \longrightarrow A^\perp \otimes B^\perp \\
\lambda &: I \rightarrow \perp
\end{aligned}$$

satisfaciendo las ecuaciones:

$$\mu_{A \otimes B,C}; (\mu_{A,B} \otimes id_{C^\perp}) \quad = \quad a^\perp_{A,B,C}; \mu_{A,B \otimes C}; (id_{A^\perp} \otimes \mu_{B,C}); a_{A^\perp,B^\perp,C^\perp}$$

$$\begin{aligned} \mu_{B,A} &= c^{\perp}_{A,B}; \mu_{A,B}; c_{A^\perp,B^\perp} \\ e^{\perp}_{A}; \mu_{I,A} &= e^{-1}_{A^\perp}; ((j_\perp; \lambda^\perp) \otimes id_{A^\perp}).\square \end{aligned}$$

Es interesante observar que la composición $(j_\perp; \lambda^\perp) : I \to I^\perp$ que aparece en la última ecuación es igual a $\lambda; n^{-1}_{\perp}$.

Añadiendo a las reglas en el Apéndice C reglas generadoras para los isomorfismos μ y λ y reglas ecuacionales para las ecuaciones de la Proposición 66, y sustituyendo en todas partes $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ por $\mathcal{H}[\mathcal{C}]$, se prueba el siguiente resultado.

Proposición 67 Si $\underline{CLinCat}$ denota la categoría de categorías lineales cancelativas y funtores que conservan toda la estructura, el funtor de olvido $\underline{CLinCat} \longrightarrow \underline{LinCat}$ tiene un adjunto a izquierda

$$\mathcal{H}[\_] : \underline{LinCat} \longrightarrow \underline{CLinCat}. \ \square$$

Denotamos por $\mathcal{C}[T]$ la imagen bajo este adjunto a izquierda de la categoría lineal $\mathcal{L}[T]$ asociada a una teoría lineal T.

Un *modelo cancelativo* de una teoría T es un modelo $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ de T, como en la Definición 49, tal que $\mathcal{C}$ es una categoría lineal cancelativa. Con una noción de satisfacción análoga a la de la Definición 56, tenemos un teorema de corrección y completitud:

Teorema 68 Un secuente $\Gamma \vdash \Delta$ es satisfecho por todos los modelos cancelativos de una teoría T si y sólo si es derivable a partir de T mediante los axiomas y las reglas de lógica lineal cancelativa. $\square$

Como antes, la completitud se demuestra usando la categoría $\mathcal{C}[T]$.

Capítulo 4

Álgebras de Girard y modelos en cuantales

Consideramos importante insistir en que, como las categorías lineales son simplemente categorías con estructura algebraica adicional, pueden axiomatizarse completamente de una forma finitaria, ecuacional y de primer orden. Esto es bien sabido en lógica categórica y remitimos, entre otros, a los trabajos [42, 93, 13] para más detalles sobre este tipo de axiomatizaciones. Este argumento tiene gran importancia puesto que, al usar categorías lineales como modelos de lógica lineal, podemos entender mejor y clasificar tales modelos (e incluso encontrar otros nuevos) teniendo en cuenta axiomas ecuacionales adicionales que se pueden imponer.

Una clase de modelos para la lógica lineal basada en conjuntos parcialmente ordenados ha sido propuesta en la forma de cuantales [2, 152] (en las referencias en estos artículos el lector encontrará más información sobre el tema de los cuantales), que también son adecuados para el caso no conmutativo [152]. De hecho, la semántica original de fases para la lógica lineal descrita por Girard en [49] se basa en el cuantal libre sobre un monoide. En este capítulo relacionamos esta clase de modelos con los modelos categóricos presentados en el Capítulo 3. Nos restringimos al caso conmutativo. La relación es muy simple: es meramente una inclusión en el sentido de que los cuantales de Girard constituyen un caso especial de categorías lineales cuya estructura de categoría[1] es un conjunto parcialmente ordenado, que nosotros denominamos álgebras de Girard.

Definición 69 Un *álgebra de Girard* es una categoría lineal que es un conjunto parcialmente ordenado. $\Box$

Esta noción corresponde a restringirnos a la clase ecuacional de modelos definida mediante las dos ecuaciones (condicionales) adicionales:

$$\forall f, g \in Mor,\ dom(f) = dom(g) \wedge cod(f) = cod(g) \implies f = g$$

$$\forall f, g \in Mor,\ dom(f) = cod(g) \wedge cod(f) = dom(g) \implies f = g.$$

[1] Cualquier conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ puede verse como una categoría cuyos objetos son los elementos de P y donde hay un único morfismo $a \to b$ si y sólo si $a \leq b$ en $(P, \leq)$.

La primera ecuación obliga a una categoría a ser un preorden, y al añadir la segunda este preorden tiene que ser antisimétrico, dando lugar a un conjunto parcialmente ordenado.

Como es habitual en álgebra universal (véase por ejemplo [13, Teorema 4.4.1]), cuando tenemos una subcategoría plena definida por una colección de ecuaciones, esa subcategoría es *reflectiva* dentro de la mayor que la contiene, es decir, su funtor inclusión tiene un adjunto a izquierda llamado *reflexión* [99]. En nuestro caso, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 70 Si $\underline{GirAlg}$ denota la subcategoría plena de $\underline{LinCat}$ cuyos objetos son las álgebras de Girard, entonces el funtor inclusión $\underline{GirAlg} \hookrightarrow \underline{LinCat}$ tiene una reflexión

$$\mathcal{Q}[\_] : \underline{LinCat} \longrightarrow \underline{GirAlg}. \ \Box$$

En una categoría que es un conjunto parcialmente ordenado, productos y coproductos corresponden a ínfimos y supremos, respectivamente; en particular, los objetos final e inicial corresponden a los elementos máximo y mínimo. Un funtor $\_ \otimes \_ : P^2 \to P$ es exactamente una función monótona, y dota a P de una estructura monoidal simétrica si existe un elemento $I \in P$ tal que $(P, \otimes, I)$ es un monoide conmutativo. Dado un elemento $a \in P$, un adjunto a derecha $a \multimap \_$ de $\_ \otimes a$ es una función monótona $a \multimap \_ : P \to P$ tal que

$$c \otimes a \ \leq b \iff c \leq \ a \multimap b.$$

Por último, un elemento $\bot \in P$ es dualizante si y sólo si, para todo $a \in P$, $(a \multimap \bot) \multimap \bot = a$.

Por lo tanto, un álgebra de Girard puede caracterizarse equivalentemente como un retículo $(P, \oplus, \&)$ con máximo $\top$ y mínimo 0, junto con una estructura de monoide conmutativo $(\otimes, I)$, una operación de "pseudo-complemento relativo" $\multimap$ y un elemento dualizante $\bot$. Ésta es una generalización del hecho bien conocido que un álgebra de Heyting es una categoría cartesiana cerrada con coproductos finitos que es un conjunto parcialmente ordenado. De hecho, como la negación lineal es clásica, las álgebras de Girard generalizan las álgebras de Boole, que pueden caracterizarse ecuacionalmente como sigue:

Proposición 71 La categoría $\underline{BoolAlg}$ de álgebras de Boole es la subcategoría plena de $\underline{GirAlg}$ definida por las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} (i) & X \otimes Y = X \& Y \\ (ii) & I = \top. \end{array}$$

Además, cualquier categoría lineal $\mathcal{C}$ que satisface las ecuaciones (i) y (ii) es un preorden, equivalente como categoría a un álgebra de Boole.

Demostración: Observemos primero que imponer las ecuaciones (i) y (ii) significa que la categoría lineal es una categoría cartesiana cerrada con coproductos finitos en la cual el objeto dualizante es inicial. Entonces, tenemos

$$Hom(A, B) \cong Hom(A, B^{\bot\bot}) \cong Hom(A \otimes B^{\bot}, \bot)$$

y, como $\bot$ es inicial, el último conjunto de morfismos tiene como mucho un morfismo [93, Proposición I.8.3]; de aquí se deduce que la categoría es un preorden y todo preorden es equivalente, como categoría, a un conjunto parcialmente ordenado. Por supuesto, una categoría que es un conjunto parcialmente ordenado, es cartesiana cerrada, tiene coproductos finitos y un objeto dualizante inicial es exactamente un álgebra de Boole. $\Box$

Del mismo modo que un álgebra de Heyting completa es una categoría cartesiana cerrada que es un conjunto parcialmente ordenado y tiene todos los productos y coproductos (no sólo los finitos), podemos definir

Definición 72 Un álgebra de Girard es *completa* si tiene todos los productos (coproductos existen automáticamente por la Proposición 42, así como por argumentos generales en teoría de retículos; denotamos el coproducto de $\{a_i\}$ por $\bigoplus\{a_i\}$). $\square$

Análogamente a la forma en que la implicación se define en un álgebra de Heyting completa, en un álgebra de Girard completa la implicación lineal $\multimap$ puede definirse como $a \multimap b = \bigoplus\{c \mid c \otimes a \leq b\}$. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 73 Un álgebra de Girard completa es un sup-semirretículo completo $(Q, \bigoplus)$, equipado con una estructura de monoide conmutativo $(\otimes, I)$ que es distributiva sobre supremos arbitrarios:

$$\forall a \in Q\ \forall S \subseteq Q,\ a \otimes (\bigoplus S) = \bigoplus\{a \otimes b \mid b \in S\}$$

y con un objeto dualizante $\perp$. Por lo tanto, un álgebra de Girard completa es exactamente un cuantal de Girard tal y como se define en [152]. $\square$

Por supuesto, como un álgebra de Girard es un caso particular de categoría lineal, podemos dar una semántica a la lógica lineal en este marco. Yetter demuestra en [152] que la semántica en cuantales es correcta y completa para el cálculo de secuentes lineal. En este caso, la satisfacción de un secuente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ significa que

$$\mathcal{I}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{I}(A_n) \quad \leq \quad \mathcal{I}(B_1) \parr \cdots \parr \mathcal{I}(B_m).$$

Componiendo las adjunciones [99, Teorema IV.8.1] $\mathcal{L}[\_] \dashv (\_)^\circ : \underline{\mathit{LinCat}} \longrightarrow \underline{\mathit{LinTh}}$ y $\mathcal{Q}[\_] \dashv \hookrightarrow : \underline{\mathit{GirAlg}} \longrightarrow \underline{\mathit{LinCat}}$, y denotando por $\underline{\mathit{GMod}}(T)$ los modelos de la teoría lineal T en álgebras de Girard, obtenemos, a partir del Teorema 53, un isomorfismo

$$\underline{\mathit{GMod}}(T) \simeq \mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]]/\underline{\mathit{GirAlg}},$$

entre la categoría de modelos de T en álgebras de Girard y la categoría de objetos bajo $\mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]]$ (*slice category*) $\mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]]/\underline{\mathit{GirAlg}}$ cuyos objetos son funtores lineales $\mathcal{J} : \mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]] \longrightarrow Q$ en un álgebra de Girard Q, y cuyos morfismos $\mathcal{F} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ son funtores lineales $\mathcal{F} : Q \to Q'$ tales que $\mathcal{J}; \mathcal{F} = \mathcal{J}'$.

Corolario 74 El modelo $(\mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]], T \hookrightarrow \mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]]^\circ)$ es inicial en la categoría $\underline{\mathit{GMod}}(T)$. $\square$

Teorema 75 Dada una teoría lineal $T = (S, Ax)$ y un S-secuente $\Gamma \vdash \Delta$,

$$\Gamma \vdash \Delta \ \in \ T^\star \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]], T \hookrightarrow \mathcal{Q}[\mathcal{L}[T]]^\circ) \models \ \ \Gamma \vdash \Delta.\ \square$$

Si omitimos el requisito de un objeto dualizante en la definición de un álgebra de Girard completa obtenemos un cuantal tal y como se define en [2, 152].

Observación 76 A partir de un cuantal $(Q, \bigoplus, \otimes, I)$ y un elemento arbitrario $d \in Q$ se obtiene un cuantal de Girard al restringirse al conjunto de elementos $a \in Q$ que satisfacen $(a \multimap d) \multimap d = a$. $\square$

Tiene interés señalar que en un cuantal arbitrario se puede dar semántica a la lógica lineal *intuicionista*, es decir, al fragmento de lógica lineal que no incluye la negación $(\_)^\perp$ ni $\invamp$. Es precisamente el objeto dualizante el que permite la interpretación clásica de la negación; naturalmente, esta observación es igualmente válida en la semántica categórica.

Dado un monoide conmutativo $(M, \cdot, i)$, el *cuantal libre* sobre M es el retículo $\mathcal{P}(M)$ junto con la operación $\otimes$ definida sobre conjuntos $A, B \subseteq M$ por $A \otimes B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$. Si aplicamos el método general indicado en la Observación 76 para conseguir un cuantal de Girard, se obtiene la semántica de fases en términos de *hechos* definida por Girard en [49].

Otras axiomatizaciones ecuacionales de modelos para lógica lineal en conjuntos parcialmente ordenados pueden encontrarse en [68, 74].

En su artículo [41], Engberg y Winskel asocian a una red de Petri N un cuantal $Q[N]$ cuyos elementos son los conjuntos de marcados cerrados hacia abajo con respecto a la relación de alcanzabilidad. Más explícitamente, si $N = (\partial_0, \partial_1 : T \to S^\otimes)$, un conjunto de marcados $P \subseteq S^\otimes$ es *cerrado hacia abajo* sii satisface la siguiente propiedad: $M \in P$ y $M' \Longrightarrow M$ implican $M' \in P$. Entonces, el cuantal $Q[N]$ es el conjunto

$$\{P \subseteq S^\otimes \mid P \ \textit{es cerrado hacia abajo}\}$$

ordenado por inclusión, con supremo e ínfimo dados por unión e intersección respectivamente, y el producto tensorial definido por

$$P \otimes Q = \{M \in S^\otimes \mid \exists M_1 \in P. \exists M_2 \in Q. M \Longrightarrow^* M_1 \otimes M_2\},$$

donde $M_1 \otimes M_2$ denota la unión de multiconjuntos (Definición 11).

Esto les permite definir una interpretación de la lógica lineal intuicionista, y consecuentemente una relación de satisfacción de un secuente de dicha lógica por una red de Petri. Sin embargo, esta relación de satisfacción no es completa con respecto a las reglas de inferencia para el cálculo de secuentes lineal: hay secuentes satisfechos por la red que no son derivables en el cálculo a partir de los axiomas asociados a la red. Este enfoque puede extenderse para tratar la negación intuicionísticamente fijando un elemento del cuantal como la interpretación de $\perp$; ellos eligen como $\perp$ el conjunto de marcados no alcanzables a partir del marcado inicial vacío. De esta forma, pueden especificar información negativa interesante sobre la red como, por ejemplo, la satisfacción de una propiedad de exclusión mutua. No obstante, el elemento elegido como $\perp$ no es dualizante y no parece que exista una forma fácil de recobrar la dualidad en esta situación; por ejemplo, la restricción a un cuantal de Girard en la Observación 76 no parece dar lugar a una interpretación significativa.

Una construcción completamente similar es llevada a cabo por C. Brown en [22], siendo la principal diferencia que ella considera conjuntos de marcados cerrados *hacia arriba* con respecto a la relación de alcanzabilidad.

Capítulo 5

Conclusiones finales (Parte I)

Las aplicaciones de la lógica lineal en informática son muchas y variadas. Sin intentar en ningún modo dar una lista completa, podemos mencionar por ejemplo las aplicaciones en:

- programación funcional, por ejemplo [1, 66, 82, 149, 150];
- programación lógica, por ejemplo [5, 31, 67, 71];
- teoría de la complejidad, por ejemplo [54].

En este trabajo nos hemos restringido a un campo más limitado, la relación entre lógica lineal y la concurrencia—destacando en especial la teoría de redes de Petri—, sin intentar cubrir otras áreas. No obstante, queremos hacer notar la existencia de un contexto más amplio y mencionar unas pocas referencias relevantes, tales como las anteriores, para el lector interesado. Incluso dentro del campo de las aplicaciones en concurrencia no hemos pretendido ser exhaustivos. Existen por ejemplo otros trabajos cuyo tema es asimismo la relación entre lógica lineal y concurrencia, si bien desde un punto de vista diferente al que nosotros hemos adoptado. Podemos mencionar brevemente los trabajos de Abramsky y Vickers [3], quienes clasifican varias equivalencias para lenguajes del estilo de CCS en un marco algebraico uniforme de cuantales, y de Brown y Gurr [23], quienes siguiendo ideas en [127] construyen una categoría lineal cuyos objetos son redes de Petri elementales.

Otra limitación consciente del tratamiento dado en este trabajo es la restricción a lógica lineal *conmutativa*. Una interesante generalización de lógica lineal que ha sido mencionada [51, 152, 97] pero que aún no ha sido estudiada en profundidad es la lógica lineal *no conmutativa*, donde la conectiva $\otimes$ deja de ser conmutativa. Yetter [152] considera una variante donde algunas permutaciones son válidas y otras condiciones son exigidas, pero no incluye la conectiva $\multimap$ en su sistema. Para el estudio de la semántica categórica de la lógica lineal no conmutativa necesitaríamos una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ (nótese la omisión de la condición de simetría) junto con *dos* adjuntos a derecha $\_\multimap A$ de $\_\otimes A$ y $A \multimapinv \_$ de $A \otimes \_$, puesto que en esta situación ya no disponemos del isomorfismo $\_ \otimes A \cong A \otimes \_$. Tales categorías ya han sido estudiadas por Lambek [92]. Un problema interesante es encontrar la noción adecuada de objeto dualizante en este marco. Otro aspecto que vale la pena investigar es la relación con la noción de *categoría monoidal trenzada* estudiada por Joyal y Street [76, 77].

Vamos a resumir las principales ideas que hemos presentado. Hemos hecho explícita una correspondencia triangular entre redes de Petri, lógica lineal y categorías que proporciona una conexión formal sistemática entre estos tres campos. Bajo esta correspondencia, una red de Petri puede reinterpretarse como una teoría de lógica lineal que tiene una categoría lineal como su modelo inicial asociado. Los estados de la red de Petri se convierten en proposiciones de lógica lineal y se interpretan como objetos en esta categoría lineal; las computaciones de la red de Petri se convierten en deducciones en lógica lineal y se interpretan como morfismos en la semántica categórica. Esta semántica categórica tiene particular importancia puesto que permite la identificación de computaciones concurrentes y deducciones lógicas, no a un nivel meramente sintáctico, sino de una forma más abstracta en la que descripciones sintácticas equivalentes de una "misma" computación se reinterpretan como descripciones sintácticas equivalentes de una "misma" prueba. Siguiendo el trabajo [36], también hemos señalado cómo existen varias nociones diferentes de equivalencia entre computaciones concurrentes y entre pruebas, y hemos discutido algunas de ellas, explicando su caracterización de una forma axiomática abstracta. Cambiando el modelo de computación, la correspondencia con la lógica lineal de las redes de Petri se puede extender a otras interpretaciones computacionales. Este aspecto ha sido ilustrado mediante nuestra discusión de la interpretación lógica de máquinas con $\wedge$-ramificación y dos contadores obtenida en el trabajo [97].

Otro aspecto importante que hemos tratado en este trabajo ha sido un estudio detallado de una noción axiomática general de *modelo* para la lógica lineal proposicional. En este sentido, la teoría de categorías constituye una poderosa herramienta que permite unificar y relacionar un amplio espectro de modelos aparentemente diferentes (basta pensar por ejemplo en lo diferentes que parecen la semántica de espacios coherentes y la semántica de fases, ambas introducidas por Girard en [49]). Así pues, las nociones categóricas nos han ayudado a extraer las características abstractas esenciales de un modelo e identificar de esta forma las similitudes existentes entre diferentes modelos[1]. Nuestro trabajo en este tema debe mucho al trabajo anterior de Seely [143] y otros autores; sin embargo, la axiomatización que proponemos en términos de objetos dualizantes es considerablemente más simple que axiomatizaciones previas usando categorías $*$-autónomas (la relación exacta con tales axiomatizaciones previas se explica en detalle en el Apéndice B). También hemos estudiado clases de modelos definidas ecuacionalmente tales como modelos en conjuntos parcialmente ordenados (álgebras de Girard) y modelos de lógica lineal cancelativa, y hemos mostrado cómo los modelos en diferentes clases se relacionan mediante adjunciones.

Desearíamos concluir con algunas consideraciones que, aunque dentro del espíritu de las conexiones entre lógica y concurrencia estudiadas en este trabajo, ilustran desarrollos posteriores que van más allá del caso de la lógica lineal aquí presentado. Meseguer y Montanari propusieron en su trabajo [116, 117] categorías con una estructura de monoide conmutativo como la semántica categórica para computaciones en redes de Petri. Como

[1] Aunque nuestra noción de modelo es muy general y cubre muchos de los modelos existentes, deseamos señalar que los modelos descritos en términos de operadores en espacios de Hilbert por Girard en [52] no parecen encajar en el marco propuesto en este trabajo.

hemos visto, la operación monoidal $\otimes$ tiene una interpretación natural como conjunción lineal de forma que esta semántica categórica se puede reinterpretar como una semántica lógica. Los recientes trabajos de Meseguer [111, 112, 113] han generalizado esta idea a estructuras algebraicas arbitrarias sobre una categoría, mostrando que esta generalización cubre una extensa variedad de importantes modelos de concurrencia. La lógica correspondiente, que generaliza ampliamente el fragmento $\otimes$ de la lógica lineal, se llama *lógica de reescritura*. Esta lógica permite la identificación de computaciones de reescritura concurrente de términos (módulo un conjunto E de axiomas estructurales) con deducción lógica. Desde un punto de vista práctico, se adquiere de esta forma una gran flexibilidad y expresividad para estructurar el estado distribuido de un sistema concurrente y para describir sus transiciones; el fragmento $\otimes$ de lógica lineal aparece como el caso particular en que el estado distribuido se estructura como un multiconjunto. La correspondencia triangular que hemos estudiado en este trabajo se extiende a una correspondencia triangular mucho más general entre lógica de reescritura, sistemas concurrentes y categorías con estructura algebraica. Un importante beneficio del marco más amplio que la lógica de reescritura proporciona es que los paradigmas de programación funcional y programación concurrente dirigida a objetos surgen como casos especiales; esto ha sido explotado en el diseño de un lenguaje multiparadigma en el que los módulos de programas son teorías en lógica de reescritura [112, 113].

Apéndice A

Categorías monoidales simétricas cerradas

Comenzamos con una revisión de las propiedades básicas de las categorías monoidales simétricas cerradas, dirigida a lectores que no están familiarizados con este tema, para el cual la referencia básica es el artículo de Eilenberg y Kelly [40]. Después de revisar las definiciones básicas, pasamos a internalizar conceptos categóricos tales como identidades y composición como morfismos en una categoría monoidal simétrica cerrada. La internalización de funtores y transformaciones naturales da lugar a las nociones de funtor fuerte y transformación natural fuerte, respectivamente. Finalmente, demostramos algunas propiedades usadas en el Capítulo 3 para la semántica categórica de la lógica lineal, y en el Apéndice B para la equivalencia entre categorías con un objeto dualizante y categorías $*$-autónomas.

A.1. Definiciones básicas

La idea básica es que tenemos una categoría $\mathcal{C}$ con un producto tensorial $\_\otimes\_$ definido como un funtor $\_\otimes\_ : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}$ y un objeto unidad I en $\mathcal{C}$ de forma que $\mathcal{C}$ es un monoide conmutativo "salvo isomorfismos de coherencia" a, c y e.

Definición 77 [99] Una *categoría monoidal simétrica* consiste en los siguientes datos:

- Una categoría $\mathcal{C}$
- Un funtor $\_\otimes\_ : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ (producto tensorial)
- Un objeto I en $\mathcal{C}$ (unidad)
- Tres isomorfismos naturales:

  Asociatividad $\quad a_{A,B,C} : A\otimes(B\otimes C) \longrightarrow (A\otimes B)\otimes C$ (natural en A, B y C)

  Conmutatividad $\quad c_{A,B} : A\otimes B \longrightarrow B\otimes A$ (natural en A y B)

  Identidad $\quad e_A : I\otimes A \longrightarrow A$ (natural en A)

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes a"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "a"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "a"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "a \otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes c"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "c"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "a"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "a"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "c \otimes id"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "id"'] & B \otimes A \arrow[d, "c"] \\
& A \otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes (A \otimes B) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "e"'] & (I \otimes A) \otimes B \arrow[d, "e \otimes id"] \\
& A \otimes B
\end{tikzcd}
$$

Figura A.1: Condiciones de coherencia de Mac Lane-Kelly.

sujetos a las condiciones de coherencia de Mac Lane-Kelly, presentadas en los diagramas de la Figura A.1. □

Para saber más sobre el papel que las condiciones de coherencia de Mac Lane-Kelly desempeñan en la definición anterior, remitimos al lector al Capítulo VII del libro de Mac Lane [99].

Un ejemplo sencillo de una categoría monoidal simétrica lo constituye la categoría $\underline{Set}$ de conjuntos y funciones junto con el producto cartesiano de conjuntos usual; en efecto, este producto es asociativo y conmutativo salvo isomorfismo, en el sentido de que tenemos biyecciones naturales

$$a_{A,B,C} : A \times (B \times C) \xrightarrow{\simeq} (A \times B) \times C$$

$$c_{A,B} : A \times B \xrightarrow{\simeq} B \times A.$$

El conjunto unitario 1 actúa como elemento neutro salvo isomorfismo mediante una biyección natural

$$e_A : 1 \times A \xrightarrow{\simeq} A.$$

Es muy fácil comprobar que estos isomorfismos satisfacen las condiciones de coherencia descritas en la Figura A.1.

En general cualquier categoría con productos o coproductos finitos es una categoría monoidal simétrica.

Definición 78 Cuando $a = id$ y $e = id$, decimos que $(\mathcal{C}, \otimes, I, id, c, id)$ es una *categoría estricta monoidal simétrica.*

Cuando $c = id$, decimos que $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, id, e)$ es una *categoría monoidal estrictamente simétrica.*

Finalmente, cuando los tres isomorfismos naturales son identidades, $(\mathcal{C}, \otimes, I, id, id, id)$ se llama una *categoría estricta monoidal estrictamente simétrica.* □

Una estructura estricta monoidal estrictamente simétrica sobre una categoría $\mathcal{C}$ es simplemente una forma algo complicada de decir que $\mathcal{C}$ tiene una estructura de *monoide conmutativo* en la categoría $\underline{Cat}$ de categorías pequeñas. Para darse cuenta de esto, basta notar que un monoide conmutativo puede definirse como un conjunto M junto con funciones $\otimes : M \times M \to M$ e $I : 1 \to M$ que satisfacen las correspondientes ecuaciones de asociatividad, conmutatividad e identidad, que pueden expresarse como diagramas conmutativos en la categoría $\underline{Set}$. Esta definición tiene sentido en cualquier categoría con productos finitos y, particularizándola a la categoría $\underline{Cat}$, coincide con la noción de categoría estricta monoidal estrictamente simétrica: una categoría $\mathcal{C}$ (o sea, un objeto de $\underline{Cat}$) junto con funtores $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ e $I : \underline{1} \to \mathcal{C}$ (morfismos en $\underline{Cat}$[1]) satisfaciendo las ecuaciones de asociatividad, conmutatividad e identidad, expresadas como diagramas conmutativos en $\underline{Cat}$.

Una categoría de Petri (véase la Definición 21) es un caso especial de una categoría estricta monoidal estrictamente simétrica, en la cual la estructura de monoide conmutativo sobre los objetos es libre.

Definición 79 Dadas categorías monoidales simétricas $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e')$, un *funtor monoidal siḿetrico*[2] entre ellas es un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ que conserva toda la estructura adicional, es decir, $\mathcal{F}(A \otimes B) = \mathcal{F}(A) \otimes' \mathcal{F}(B)$, $\mathcal{F}(I) = I'$, $\mathcal{F}(a) = a'$, $\mathcal{F}(c) = c'$, y $\mathcal{F}(e) = e'$.

De esta forma se define una categoría $\underline{MonCat}$ cuyos objetos son categorías monoidales simétricas y cuyos morfismos son funtores monoidales simétricos. □

El bien conocido concepto de categoría cartesiana cerrada puede obtenerse a partir del concepto más general de categoría monoidal simétrica cerrada definido a continuación imponiendo simplemente los requisitos adicionales de que el producto tensorial $\_ \otimes \_$ sea un producto categórico y de que el objeto unidad I sea un objeto final.

Definición 80 Una *categoría monoidal simétrica cerrada* es una categoría monoidal simétrica $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e)$ tal que además, para todo objeto A en $\mathcal{C}$, el funtor $\_ \otimes A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene un adjunto a derecha (elegido[3]) $A \multimap \_ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, es decir, para todos los objetos

[1]Nótese que funtores de la categoría $\underline{1}$ con sólo un objeto y un morfismo identidad en $\mathcal{C}$ pueden identificarse con objetos de $\mathcal{C}$, de la misma forma que funciones $1 \to M$ se identifican con elementos de M.

[2]Ésta no es en absoluto la noción más general posible. Para cubrir algunos ejemplos importantes es necesario hacer el concepto "laxo." Por ejemplo, en vez de una igualdad $\mathcal{F}(A \otimes B) = \mathcal{F}(A) \otimes' \mathcal{F}(B)$, se puede relajar la condición a tener una transformación natural $\mathcal{F}(A) \otimes' \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(A \otimes B)$. Véase [40] para los detalles de esta noción más general.

[3]De nuevo, la definición de adjunto sólo lo determina salvo isomorfismo y, para fijar la estructura, realizamos una elección arbitraria pero fija.

A, B, C en $\mathcal{C}$ se tiene un isomorfismo natural (en B y C)

$$\varphi^A_{B,C} : Hom_{\mathcal{C}}(B \otimes A, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, A \multimap C).\Box$$

La interpretación intuitiva del objeto $A \multimap B$ es la internalización de la colección de morfismos de A en B como un objeto de $\mathcal{C}$, una idea a la que dedicaremos más atención en la Sección A.2.

El artículo [117] estudia la estructura monoidal simétrica cerrada de varias categorías cuyos objetos son redes de Petri.

Dada una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$, si $f : B \otimes A \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, denotamos por $f^\dagger$ el morfismo $\varphi^A_{B,C}(f)$, llamado la *Curry-conversión* de f, y

$$\varepsilon_{A,C} = (\varphi^A_{A \multimap C, C})^{-1}(id_{A \multimap C}) : (A \multimap C) \otimes A \longrightarrow C$$

denota la counidad de esta adjunción, llamada *evaluación*; por tanto, si $g : B \longrightarrow (A \multimap C)$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, $(\varphi^A_{B,C})^{-1}(g) = (g \otimes id_A); \varepsilon_{A,C}$. En esta notación, la propiedad de que $\varphi^A_{B,C}$ sea un isomorfismo se expresa mediante las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} (f^\dagger \otimes id_A); \varepsilon_{A,B} &= f \\ ((g \otimes id_A); \varepsilon_{A,B})^\dagger &= g. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, siempre que sea conveniente, omitiremos los subíndices y superíndices, que pueden inferirse por el contexto.

Definición 81 Dadas categorías monoidales simétricas cerradas $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap')$, un *funtor monoidal simétrico cerrado* entre ellas es un funtor monoidal simétrico $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ que también conserva la estructura adicional, es decir, $\mathcal{F}(A \multimap B) = \mathcal{F}(A) \multimap' \mathcal{F}(B)$ y $\mathcal{F}(\varepsilon) = \varepsilon'$. En este caso, se deduce también $\mathcal{F}(f^\dagger) = \mathcal{F}(f)^{\dagger'}$.

De esta forma se define la categoría *CMonCat* cuyos objetos son categorías monoidales simétricas cerradas y cuyos morfismos son funtores monoidales simétricos cerrados. $\Box$

Como antes, conviene notar que ésta no es la definición más general posible de un funtor monoidal simétrico cerrado; véase [40] para una versión "laxa" de este concepto.

A.2. Internalización de morfismos, identidades y composición

En una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, tenemos el siguiente isomorfismo natural:

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{Hom(e,id)} Hom_{\mathcal{C}}(I \otimes A, B) \xrightarrow{\varphi} Hom_{\mathcal{C}}(I, A \multimap B),$$

denotado $(\_)^\sharp$ (y su inverso $(\_)^\flat$), que da lugar a una representación interna de los morfismos en $\mathcal{C}$, siguiendo la idea de que el objeto $A \multimap B$ es una representación interna del conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

$$\begin{tikzcd}
I \otimes (A \multimap B) \arrow[r, "j \otimes id"] \arrow[dr, "e"'] & (B \multimap B) \otimes (A \multimap B) \arrow[d, "m"] \\
& A \multimap B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \multimap C) \otimes I \arrow[r, "id \otimes j"] \arrow[d, "c"'] & (A \multimap C) \otimes (A \multimap A) \arrow[d, "m"] \\
I \otimes (A \multimap C) \arrow[r, "e"] & A \multimap C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((C \multimap D) \otimes (B \multimap C)) \otimes (A \multimap B) \arrow[d, "m \otimes id"'] & & (C \multimap D) \otimes ((B \multimap C) \otimes (A \multimap B)) \arrow[ll, "a"'] \arrow[d, "id \otimes m"] \\
(B \multimap D) \otimes (A \multimap B) \arrow[dr, "m"'] & & (C \multimap D) \otimes (A \multimap C) \arrow[dl, "m"] \\
& A \multimap D &
\end{tikzcd}$$

Figura A.2: Representación interna de las identidades y la composición.

En particular, tenemos representaciones internas de las identidades:

$$j_A = (id_A)^{\sharp} = e_A^{\dagger} : I \longrightarrow (A \multimap A).$$

Y también tenemos un morfismo que internaliza la composición:

$$m_{A,B,C} : (B \multimap C) \otimes (A \multimap B) \longrightarrow (A \multimap C),$$

definido por $m_{A,B,C} = (a^{-1}_{B \multimap C, A \multimap B, A}; (id_{B \multimap C} \otimes \varepsilon_{A,B}); \varepsilon_{B,C})^{\dagger}$.

En efecto, que estos morfismos corresponden internamente a las identidades y la composición es confirmado por la conmutatividad de los diagramas en la Figura A.2 (véase la Proposición 82 a continuación), que expresan en términos de morfismos en $\mathcal{C}$ las propiedades que definen una categoría: identidades y asociatividad. Estas propiedades demuestran que una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$ es una *categoría enriquecida sobre sí misma* o categoría $\mathcal{C}$-enriquecida. Esto significa que las colecciones de morfismos son objetos en la categoría $\mathcal{C}$ y que las funciones que definen la estructura categórica son asimismo morfismos en $\mathcal{C}$ satisfaciendo las propiedades esperadas. Para la definición general de una categoría enriquecida, véase el libro de Kelly sobre este tema [78]; el artículo [30] estudia el tiempo en sistemas concurrentes desde un punto de vista abstracto usando categorías enriquecidas.

Proposición 82 [78] Si $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, -\!\circ)$ es una categoría monoidal simétrica cerrada y se define $j_A = e_A^\dagger$ y $m_{A,B,C} = (a^{-1}_{B-\circ C, A-\circ B, A}; (id_{B-\circ C} \otimes \varepsilon_{A,B}); \varepsilon_{B,C})^\dagger$, entonces, para todos los objetos A, B, C, D en $\mathcal{C}$, se tienen las siguientes igualdades:

1. $(j_B \otimes id_{A-\circ B}); m_{A,B,B} = e_{A-\circ B}$.
2. $(id_{A-\circ C} \otimes j_A); m_{A,A,C} = c_{A-\circ C,I}; e_{A-\circ C}$.
3. $(id_{C-\circ D} \otimes m_{A,B,C}); m_{A,C,D} = a_{C-\circ D, B-\circ C, A-\circ B}; (m_{B,C,D} \otimes id_{A-\circ B}); m_{A,B,D}$.

Demostración: Como φ es un isomorfismo, un método muy útil para probar que dos morfismos $k, l : D \longrightarrow E-\!\circ F$ son iguales consiste en demostrar que $\varphi^{-1}(k) = \varphi^{-1}(l)$. Demostramos las igualdades 1 y 3 usando este método; la otra igualdad 2 se demuestra de la misma forma.

Para la igualdad 1, tenemos

$$\varphi^{-1}((j_B \otimes id_{A-\circ B}); m_{A,B,B}) = (((j \otimes id); m) \otimes id); \varepsilon =$$
$$((j \otimes id) \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon = a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); (j \otimes id); \varepsilon =$$
$$a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); e = a^{-1}; e; \varepsilon = (e \otimes id); \varepsilon = \varphi^{-1}(e_{A-\circ B}).$$

Y para la 3,

$$\varphi^{-1}((id_{C-\circ D} \otimes m_{A,B,C}); m_{A,C,D}) =$$
$$(((id \otimes m); m) \otimes id); \varepsilon = ((id \otimes m) \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$
$$a^{-1}; (id \otimes ((m \otimes id); \varepsilon)); \varepsilon = a^{-1}; (id \otimes a^{-1}); (id \otimes (id \otimes \varepsilon)); (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$
$$(a \otimes id); a^{-1}; a^{-1}; (id \otimes (id \otimes \varepsilon)); (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$
$$(a \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon = (a \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); (m \otimes id); \varepsilon =$$
$$((a; (m \otimes id)) \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon = ((a; (m \otimes id); m) \otimes id); \varepsilon =$$
$$\varphi^{-1}(a_{C-\circ D, B-\circ C, A-\circ B}; (m_{B,C,D} \otimes id_{A-\circ B}); m_{A,B,D}).\square$$

Dado un objeto A en $\mathcal{C}$, tenemos el funtor $A-\!\circ\_ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. Podemos considerar también $-\!\circ$ como un funtor contravariante en la primera componente; si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son morfismos en $\mathcal{C}$, se define $g-\!\circ f : (D-\!\circ A) \longrightarrow (C-\!\circ B)$ mediante la expresión

$$g-\!\circ f = ((id_{D-\circ A} \otimes g); \varepsilon_{D,A}; f)^\dagger.$$

Si vemos el objeto $A-\!\circ B$ como la representación interna del conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g-\!\circ f$ se convierte en la representación interna de la función $Hom_{\mathcal{C}}(g, f)$ que lleva un morfismo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(D, A)$ a la composición $g; h; f \in Hom_{\mathcal{C}}(C, B)$.

Algunas de las relaciones intuitivamente esperadas entre todas estas representaciones internas se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 83 Sean $f : A \to B$, $g : C \to D$, $h : D \to A$ morfismos en una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, -\!\circ)$; entonces,

1. La definición anterior de $g \multimap f$ da lugar a un funtor $\_\multimap\_ : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ de forma que el isomorfismo $\varphi^{A}_{B,C}$ también es natural en A.

2. $(g;h)^{\sharp} = e_I^{-1}; (h^{\sharp} \otimes g^{\sharp}); m_{C,D,A}$.

3. $h^{\sharp}; (g \multimap f) = (g;h;f)^{\sharp}$.

4. $id_C \multimap f = e^{-1}_{C\multimap A}; (f^{\sharp} \otimes id_{C\multimap A}); m_{C,A,B}$.

5. $g \multimap id_A = e^{-1}_{D\multimap A}; c_{I,D\multimap A}; (id_{D\multimap A} \otimes g^{\sharp}); m_{C,D,A}$.

Demostración: Primero probamos que $\_\multimap\_$ es un funtor; conserva identidades porque $\varepsilon^{\dagger} = id$. Y asimismo conserva la composición:

$$\varphi^{-1}((g\multimap f);(g'\multimap f')) = (((g\multimap f);(g'\multimap f')) \otimes id); \varepsilon =$$
$$((g\multimap f) \otimes id); (id \otimes g'); \varepsilon; f' = (id \otimes g'); ((g\multimap f) \otimes id); \varepsilon; f' =$$
$$(id \otimes g'); (id \otimes g); \varepsilon; f; f' = \varphi^{-1}((g';g)\multimap(f;f')).$$

Para demostrar que φ es natural en A debemos probar que si $l : A \to A'$ y $k : B \otimes A' \to C$ entonces $k^{\dagger}; (l\multimap id) = ((id \otimes l); k)^{\dagger}$; esta igualdad se sigue de

$$((k^{\dagger}; (l\multimap id)) \otimes id); \varepsilon = (k^{\dagger} \otimes id); (id \otimes l); \varepsilon =$$
$$(id \otimes l); (k^{\dagger} \otimes id); \varepsilon = (id \otimes l); k.$$

Para demostrar la igualdad 2, tenemos

$$\varphi^{-1}(e_I^{-1}; (h^{\sharp} \otimes g^{\sharp}); m_{C,D,A}) =$$
$$((e^{-1}; (h^{\sharp} \otimes g^{\sharp}); m) \otimes id); \varepsilon = (e^{-1} \otimes id); ((h^{\sharp} \otimes g^{\sharp}) \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$
$$(e^{-1} \otimes id); a^{-1}; (h^{\sharp} \otimes ((g^{\sharp} \otimes id); \varepsilon)); \varepsilon = e^{-1}; (h^{\sharp} \otimes (e;g)); \varepsilon =$$
$$e^{-1}; (id \otimes (e;g)); e; h = e; g; h = \varphi^{-1}((g;h)^{\sharp}).$$

La igualdad 3 se demuestra como sigue:

$$\varphi^{-1}(h^{\sharp}; (g\multimap f)) = (((e;h)^{\dagger}; ((id \otimes g); \varepsilon; f)^{\dagger}) \otimes id); \varepsilon =$$
$$((e;h)^{\dagger} \otimes id); (id \otimes g); \varepsilon; f = (id \otimes g); ((e;h)^{\dagger} \otimes id); \varepsilon; f =$$
$$(id \otimes g); e; h; f = e; g; h; f = \varphi^{-1}((g;h;f)^{\sharp}).$$

Las dos igualdades restantes en 4 y 5 se demuestran de forma completamente similar.
□

$$
\begin{tikzcd}
(B \multimap C) \otimes (A \multimap B) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F \otimes F"'] & A \multimap C \arrow[dd, "F"] \\
(F(C) \multimap F(B)) \otimes (F(B) \multimap F(A)) \arrow[d, "c"'] & \\
(F(B) \multimap F(A)) \otimes (F(C) \multimap F(B)) \arrow[r, "m"] & F(C) \multimap F(A)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & A \multimap A \arrow[d, "F"] \\
& F(A) \multimap F(A)
\end{tikzcd}
$$

Figura A.3: Diagramas conmutativos para un funtor fuerte.

A.3. Funtores y transformaciones naturales fuertes

Habiendo visto en la sección anterior cómo en una categoría monoidal simétrica cerrada podemos internalizar morfismos, identidades y composición, no resulta nada extraño que consideremos también la internalización de un funtor. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es *fuerte* si su componente sobre los morfismos puede internalizarse mediante una familia de morfismos $F_{A,B} : (A \multimap B) \longrightarrow (F(A) \multimap F(B))$ satisfaciendo las esperadas propiedades de funtorialidad con respecto a las representaciones internas de morfismos, identidades y composición tal y como detallamos más adelante; por ejemplo, si $f : A \to B,\ F(f)^\sharp = f^\sharp ; F_{A,B}$. En la sección anterior ya hemos visto que $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{C}$-enriquecida; entonces, desde este punto de vista, un funtor fuerte es simplemente un funtor $\mathcal{C}$-enriquecido, un caso particular de la noción general de funtor enriquecido que puede encontrarse en [78].

Como estamos interesados especialmente en el caso de un funtor contravariante, damos los detalles para este caso; los detalles para el caso covariante son completamente análogos.

Definición 84 Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$ una categoría monoidal simétrica cerrada.

Un *funtor (contravariante) fuerte* de $\mathcal{C}$ en sí misma consiste en una función F sobre los objetos de $\mathcal{C}$ y una familia de morfismos $\{F_{A,B} : A \multimap B \longrightarrow F(B) \multimap F(A) \mid A, B \in Ob(\mathcal{C})\}$ en $\mathcal{C}$, satisfaciendo los diagramas conmutativos de la Figura A.3, que expresan internamente la conservación de las identidades y la composición, es decir,

$$j_A ; F_{A,A} = j_{F(A)}$$

$$m_{A,B,C} ; F_{A,C} = (F_{B,C} \otimes F_{A,B}) ; c_{F(C) \multimap F(B), F(B) \multimap F(A)} ; m_{F(C),F(B),F(A)} . \square$$

Un funtor fuerte puede externalizarse para obtener un funtor ordinario como muestra la siguiente proposición.

Proposición 85 Supóngase que $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$ es una categoría monoidal simétrica cerrada y que $(F, \{F_{A,B}\}_{A,B \in Ob(\mathcal{C})})$ es un funtor (contravariante) fuerte de $\mathcal{C}$ en sí misma.

Si, para un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, definimos $F(f) = (f^\sharp; F_{A,B})^\flat$, obtenemos un funtor (contravariante) $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$, llamado la *externalización* de $(F, \{F_{A,B}\}_{A,B \in Ob(\mathcal{C})})$.

Además, la familia de morfismos $F_{A,B} : A \multimap B \longrightarrow F(B) \multimap F(A)$ es natural en A y B.

Demostración: En primer lugar, como $F(id)^\sharp = id^\sharp; F = j; F = j = id^\sharp$, sabemos que F conserva las identidades.

En segundo lugar, F también conserva la composición pues

$$
\begin{aligned}
&F(f;g)^\sharp = (f;g)^\sharp; F = e^{-1}; (g^\sharp \otimes f^\sharp); m; F = \\
&e^{-1}; (g^\sharp \otimes f^\sharp); (F \otimes F); c; m = e^{-1}; (F(g)^\sharp \otimes F(f)^\sharp); c; m = \\
&e^{-1}; (F(f)^\sharp \otimes F(g)^\sharp); m = (F(g); F(f))^\sharp.
\end{aligned}
$$

En lo que respecta a la naturalidad de $F_{A,B}$, debemos probar que si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ entonces

$$F_{D,A}; (F(f) \multimap F(g)) = (g \multimap f); F_{C,B} : D \multimap A \longrightarrow F(B) \multimap F(C),$$

es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
D & A & D \multimap A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g \multimap f"'] & F(A) \multimap F(D) \arrow[d, "F(f) \multimap F(g)"] \\
C \arrow[u, "g"] & B \arrow[from=u, "f"'] & C \multimap B \arrow[r, "F"] & F(B) \multimap F(C)
\end{tikzcd}
$$

Efectivamente,

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(F_{D,A}; (F(f) \multimap F(g))) = \\
&((F; (F(f) \multimap F(g))) \otimes id); \varepsilon = (F \otimes id); (id \otimes (f^\sharp; F)^\flat); \varepsilon; (g^\sharp; F)^\flat = \\
&(F \otimes id); (id \otimes (e^{-1}; ((f^\sharp; F) \otimes id); \varepsilon)); \varepsilon; e^{-1}; ((g^\sharp; F) \otimes id); \varepsilon = \\
&(id \otimes (e^{-1}; (f^\sharp \otimes id))); (F \otimes (F \otimes id)); (id \otimes \varepsilon); \varepsilon; e^{-1}; ((g^\sharp; F) \otimes id); \varepsilon = \\
&(id \otimes (e^{-1}; (f^\sharp \otimes id))); a; ((F \otimes F) \otimes id); (m \otimes id); \varepsilon; e^{-1}; ((g^\sharp; F) \otimes id); \varepsilon = \\
&(id \otimes e^{-1}); (id \otimes (f^\sharp \otimes id)); a; ((c; m; F) \otimes id); \varepsilon; e^{-1}; ((g^\sharp; F) \otimes id); \varepsilon = \\
&(id \otimes e^{-1}); a; (c \otimes id); ((f^\sharp \otimes id) \otimes id); ((m; F) \otimes id); e^{-1}; (id \otimes \varepsilon); ((g^\sharp; F) \otimes id); \varepsilon = \\
&(e^{-1} \otimes id); (((f^\sharp \otimes id); m; F) \otimes id); e^{-1}; ((g^\sharp; F) \otimes (id \otimes id)); (id \otimes \varepsilon); \varepsilon = \\
&((e^{-1}; (f^\sharp \otimes id); m; F) \otimes id); e^{-1}; a; (((g^\sharp; F) \otimes id) \otimes id); (m \otimes id); \varepsilon = \\
&((e^{-1}; (f^\sharp \otimes id); m; F; e^{-1}; ((g^\sharp; F) \otimes id); m) \otimes id); \varepsilon = \\
&((e^{-1}; (id \otimes (e^{-1}; (f^\sharp \otimes id); m; F)); ((g^\sharp; F) \otimes id); m) \otimes id); \varepsilon = \\
&((e^{-1}; (id \otimes e^{-1}); (g^\sharp \otimes ((f^\sharp \otimes id); m)); (F \otimes F); m) \otimes id); \varepsilon =
\end{aligned}
$$

$((e^{-1}; (id \otimes e^{-1}); c; (((f^\sharp \otimes id); m) \otimes g^\sharp); m; F) \otimes id); \varepsilon =$

$((e^{-1}; c; (e^{-1} \otimes id); ((f^\sharp \otimes id) \otimes g^\sharp); (m \otimes id); m; F) \otimes id); \varepsilon =$

$((e^{-1}; c; (e^{-1} \otimes id); a^{-1}; (f^\sharp \otimes (id \otimes g^\sharp)); (id \otimes m); m; F) \otimes id); \varepsilon =$

$((e^{-1}; c; e^{-1}; (id \otimes ((id \otimes g^\sharp); m)); (f^\sharp \otimes id); m; F) \otimes id); \varepsilon =$

$((e^{-1}; c; (id \otimes g^\sharp); m; e^{-1}; (f^\sharp \otimes id); m; F) \otimes id); \varepsilon =$

$(((g\multimap id); (id\multimap f); F) \otimes id); \varepsilon = (((g\multimap f); F) \otimes id); \varepsilon =$

$\varphi^{-1}((g\multimap f); F_{C,B}).\square$

A continuación presentamos un ejemplo importante de funtor fuerte. Dado un objeto C en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, consideramos el funtor contravariante $\_\multimap C : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$, obtenido al fijar la segunda componente en el funtor $\_\multimap\_ : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. Tomemos en consideración el siguiente morfismo, que puede verse como la Curry-conversión de la composición $m_{A,B,C}$:

$$s_{A,B,C} = (c_{A\multimap B,B\multimap C}; m_{A,B,C})^\dagger : (A\multimap B) \longrightarrow ((B\multimap C)\multimap(A\multimap C)).$$

Vamos a demostrar que la restricción de $\_\multimap C$ a objetos junto con la familia de morfismos $\{s_{A,B,C}\}_{A,B\in Ob(\mathcal{C})}$ constituye un funtor fuerte, cuya externalización es precisamente $\_\multimap C : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Proposición 86 Dado un objeto C en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, la función $\_\multimap C$ sobre objetos y la familia de morfismos $\{s_{A,B,C}\}_{A,B\in Ob(\mathcal{C})}$ definen un funtor contravariante fuerte de $\mathcal{C}$ en sí misma, cuya externalización coincide con $\_\multimap C$.

Demostración: Primero probamos que $j; s = j$. En efecto,

$$\varphi^{-1}(j; (c; m)^\dagger) = (j \otimes id); c; m = c; (id \otimes j); m = c; c; e = e = \varphi^{-1}(j).$$

Luego, $(s \otimes s); c; m = m; s$, pues

$\varphi^{-1}(((c; m)^\dagger \otimes (c; m)^\dagger); m) =$

$(((c; m)^\dagger \otimes (c; m)^\dagger) \otimes id); (c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$

$(c \otimes id); a^{-1}; ((c; m)^\dagger \otimes ((c; m)^\dagger \otimes id)); (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$

$(c \otimes id); a^{-1}; ((c; m)^\dagger \otimes (c; m)); \varepsilon =$

$(c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes (c; m)); c; m =$

$(c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes c); c; (m \otimes id); m =$

$(c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes c); c; a^{-1}; (id \otimes m); m =$

$c; (id \otimes m); m = (m \otimes id); c; m =$

$\varphi^{-1}(m; (c; m)^\dagger)$.

Finalmente, para un morfismo f en $\mathcal{C}$, tenemos

$(f^\sharp; (c; m)^\dagger)^\flat = e^{-1}; (((e; f)^\dagger; (c; m)^\dagger) \otimes id); \varepsilon =$

$e^{-1}; ((e; f)^\dagger \otimes id); c; m = e^{-1}; c; (id \otimes (e; f)^\dagger); m = f\multimap id.\square$

Nótese que, por la Proposición 85, $s_{A,B,C}$ es natural en A y B.

Por supuesto, el siguiente paso es la internalización de una transformación natural.

Definición 87 Supóngase que $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$ es una categoría monoidal simétrica cerrada, y que $(F, \{F_{A,B}\})$ y $(G, \{G_{A,B}\})$ son funtores (contravariantes) fuertes de $\mathcal{C}$ en sí misma.

Una *transformación natural fuerte* β de $(F, \{F_{A,B}\})$ en $(G, \{G_{A,B}\})$ consiste en una familia de morfismos $\{\beta_A : F(A) \to G(A) \mid A \in Ob(\mathcal{C})\}$ en $\mathcal{C}$ tal que, para todos los objetos A, B en $\mathcal{C}$,

$$F_{A,B}; (id_{F(B)} \multimap \beta_A) = G_{A,B}; (\beta_B \multimap id_{G(A)}),$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \multimap B \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & F(B) \multimap F(A) \arrow[d, "id \multimap \beta"] \\
G(B) \multimap G(A) \arrow[r, "\beta \multimap id"] & F(B) \multimap G(A)
\end{tikzcd}$$

□

La motivación detrás de esta definición es simplemente el enunciado de la condición habitual de naturalidad en términos del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom(A, B) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & Hom(F(B), F(A)) \arrow[d, "Hom(id, \beta)"] \\
Hom(G(B), G(A)) \arrow[r, "Hom(\beta, id)"] & Hom(F(B), G(A))
\end{tikzcd}$$

Como era de esperar, tras la externalización de los correspondientes funtores fuertes, se obtiene una transformación natural ordinaria:

Proposición 88 Sean $(F, \{F_{A,B}\})$ y $(G, \{G_{A,B}\})$ funtores contravariantes fuertes de la categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$ en sí misma, y denotemos también por F y G sus respectivas externalizaciones. Entonces, una transformación natural fuerte β de $(F, \{F_{A,B}\})$ en $(G, \{G_{A,B}\})$ se convierte en una transformación natural ordinaria entre las externalizaciones F y G.

Demostración: Dado un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, tenemos por las Proposiciones 85 y 83.3,

$$(F(f); \beta_A)^\sharp = F(f)^\sharp; (id_{F(B)} \multimap \beta_A) = f^\sharp; F_{A,B}; (id_{F(B)} \multimap \beta_A) =$$

$$f^\sharp; G_{A,B}; (\beta_B \multimap id_{G(A)}) = G(f)^\sharp; (\beta_B \multimap id_{G(A)}) = (\beta_B; G(f))^\sharp,$$

de donde se sigue que $F(f); \beta_A = \beta_B; G(f)$ y por tanto β es natural. □

De la misma forma que un funtor fuerte es un caso particular de funtor $\mathcal{C}$-enriquecido, una transformación natural fuerte es simplemente un caso particular de la noción general de transformación natural $\mathcal{C}$-enriquecida [78].

Transformaciones naturales fuertes se componen de la forma obvia, dando lugar a una categoría cuyos objetos son funtores fuertes $(F, \{F_{A,B}\}) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales fuertes.

De nuevo hemos enunciado la definición de transformación natural fuerte para el caso de funtores contravariantes fuertes; el caso covariante es completamente análogo. En particular, un funtor fuerte $(F, \{F_{A,B}\}) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ puede verse también como un funtor fuerte $(F, \{F_{A,B}\}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$. En este caso, si tenemos otro funtor fuerte $(G, \{G_{A,B}\}) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$, podemos componerlos, obteniendo así un funtor *covariante* fuerte

$$(F; G, \{F_{A,B}; G_{F(B),F(A)}\}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Vamos a discutir ahora un ejemplo de transformación natural fuerte. Denotemos por $d_{A,C}$ la Curry-conversión de la evaluación $\varepsilon_{A,C}$ en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$,

$$d_{A,C} = (c_{A,A\multimap C}; \varepsilon_{A,C})^{\dagger} : A \longrightarrow (A\multimap C)\multimap C.$$

Entonces, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 89 Dado un objeto C en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, las familias de morfismos $\{s_{A,B,C}\}_{A,B\in Ob(\mathcal{C})}$ y $\{d_{A,C}\}_{A\in Ob(\mathcal{C})}$ satisfacen

$$id_A \multimap d_{B,C} = s_{A,B,C}; s_{B\multimap C,A\multimap C,C}; (d_{A,C} \multimap id_{(B\multimap C)\multimap C}).$$

$$\begin{tikzcd}
A\multimap B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "id\multimap d"'] & ((B\multimap C)\multimap(A\multimap C)) \arrow[d, "s"] \\
A\multimap((B\multimap C)\multimap C) & ((A\multimap C)\multimap C)\multimap((B\multimap C)\multimap C) \arrow[l, "d\multimap id"']
\end{tikzcd}$$

Por tanto, d es una transformación natural fuerte entre los dos funtores (covariantes) fuertes $(Id, \{id_{A\multimap B}\})$ y $((\_\multimap C); (\_\multimap C), \{s_{A,B,C}; s_{B\multimap C,A\multimap C,C}\})$ (el primero es por supuesto el funtor identidad $1_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ en sí misma).

Demostración: La igualdad en el enunciado es equivalente a

$$\varepsilon; d = \varphi^{-1}(id\multimap d) = \varphi^{-1}(s; s; d\multimap id) = (s \otimes d); c; m.$$

Probamos esta igualdad aplicando de nuevo la adjunción φ^{-1} a ambos miembros. Por un lado, obtenemos $\varphi^{-1}(\varepsilon; d) = (\varepsilon \otimes id); c; \varepsilon = c; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon$.

Por otra parte,

$$\varphi^{-1}((s \otimes d); c; m) = (c \otimes id); ((d \otimes s) \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$

$$(c \otimes id); a^{-1}; (d \otimes (c; m)); \varepsilon = (c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes (c; m)); (d \otimes id); \varepsilon =$$

$$(c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes (c; m)); c; \varepsilon = (c \otimes id); a^{-1}; (id \otimes c); c; a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$

$$c; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon. \square$$

En nuestro estudio de categorías $*$-autónomas en el Apéndice B, necesitamos una generalización del concepto de transformación natural fuerte. Esta generalización consiste en *hacer relativa* la noción de transformación natural fuerte con respecto a un cambio de categoría de base a través de un funtor monoidal simétrico cerrado.

Definición 90 Supóngase que $\mathcal{F} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor monoidal simétrico cerrado entre las categorías monoidales simétricas cerradas $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap')$ y $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$, y que $(F, \{F_{A,B}\}) : \mathcal{C}'^{op} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y $(G, \{G_{A,B}\}) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ son dos funtores (contravariantes) fuertes.

Una *transformación natural fuerte* β de $(F, \{F_{A,B}\})$ en $(G, \{G_{A,B}\})$ *relativa a* $\mathcal{F}$ consiste en una familia de morfismos $\{\beta_A : \mathcal{F}(F(A)) \to G(\mathcal{F}(A)) \mid A \in Ob(\mathcal{C}')\}$ en $\mathcal{C}$ tal que, para todos los objetos A, B en $\mathcal{C}'$,

$$\mathcal{F}(F_{A,B}); (id_{\mathcal{F}(F(B))} \multimap \beta_A) = G_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B)}; (\beta_B \multimap id_{G(\mathcal{F}(A))}),$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \multimap \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\mathcal{F}(F)"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{F}(F(B)) \multimap \mathcal{F}(F(A)) \arrow[d, "id \multimap \beta"] \\
G(\mathcal{F}(B)) \multimap G(\mathcal{F}(A)) \arrow[r, "\beta \multimap id"] & \mathcal{F}(F(B)) \multimap G(\mathcal{F}(A))
\end{tikzcd}$$

□

Nótese que una transformación natural fuerte es justamente una transformación natural fuerte relativa al funtor identidad. Como antes, el proceso de externalización produce una transformación natural ordinaria, pero ahora el funtor $\mathcal{F}$ debe tenerse en cuenta.

Proposición 91 Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un funtor monoidal simétrico cerrado entre dos categorías monoidales simétricas cerradas, y sea β una transformación natural fuerte relativa a $\mathcal{F}$ entre los funtores fuertes $(F, \{F_{A,B}\}) : \mathcal{C}'^{op} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y $(G, \{G_{A,B}\}) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$. Si denotamos también por F y G sus respectivas externalizaciones, β se convierte en una transformación natural ordinaria entre los funtores $F; \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{op}; G : \mathcal{C}'^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Demostración: Completamente análoga a la demostración de la Proposición 88, teniendo en cuenta que $\mathcal{F}(f^\sharp) = \mathcal{F}(f)^\sharp$ porque $\mathcal{F}$ conserva la estructura monoidal simétrica cerrada. □

Observación 92 Se puede definir una categoría cuyos objetos son pares $\langle \mathcal{C}, F \rangle$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal simétrica cerrada y F es un funtor (contravariante) fuerte de $\mathcal{C}$ en sí misma, y cuyos morfismos son pares $\langle \mathcal{F}, \beta \rangle$, donde $\mathcal{F}$ es un funtor monoidal simétrico cerrado y β es una transformación natural fuerte relativa a $\mathcal{F}$. La composición de dos morfismos $\langle \mathcal{G}, \beta' \rangle : \langle \mathcal{C}'', H \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{C}', G \rangle$ y $\langle \mathcal{F}, \beta \rangle : \langle \mathcal{C}', G \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{C}, F \rangle$ viene dada por $\langle \mathcal{G}; \mathcal{F}, \mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}} \rangle$ donde para un objeto A en $\mathcal{C}''$

$$(\mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}})_A = \mathcal{F}(\beta'_A); \beta_{\mathcal{G}(A)} : \mathcal{F}\mathcal{G}(H(A)) \longrightarrow F(\mathcal{F}\mathcal{G}(A)).\square$$

El concepto de funtor fuerte también puede generalizarse, haciéndolo relativo con respecto a un funtor monoidal simétrico cerrado. Así se obtiene la situación más equilibrada de una categoría en la cual tanto funtores fuertes como transformaciones naturales fuertes (en una versión un poco más general) son *ambos relativos*. Además todos estos conceptos pueden hacerse aun más generales a lo largo de las líneas descritas después de las Definiciones 79 y 81.

A.4. Algunas propiedades útiles

En esta sección enunciamos y probamos una serie de lemas válidos en una categoría monoidal simétrica cerrada arbitraria que son importantes para los resultados en el Capítulo 3 y el Apéndice B. Las propiedades que demostramos hacen explícitas varias transformaciones naturales interesantes que existen en cualquier categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$ y establecen unas cuantas igualdades algebraicas útiles entre ellas.

Lema 93 El morfismo $n_A = (e^{-1}_{I\multimap A}; c_{I,I\multimap A}; \varepsilon_{I,A}) : I\multimap A \longrightarrow A$ es un isomorfismo, con inverso $n_A^{-1} = (c_{A,I}; e_A)^\dagger : A \longrightarrow I\multimap A$.

Demostración: Por un lado,

$$n^{-1}; n = (c; e)^\dagger; e^{-1}; c; \varepsilon = e^{-1}; c; ((c; e)^\dagger) \otimes id; \varepsilon = e^{-1}; c; c; e = id.$$

Por otra parte,

$$\varphi^{-1}(n; n^{-1}) = ((e^{-1}; c; \varepsilon) \otimes id); ((c; e)^\dagger \otimes id); \varepsilon =$$
$$c; (id \otimes (e^{-1}; c; \varepsilon)); e = c; e; e^{-1}; c; \varepsilon = \varepsilon = \varphi^{-1}(id),$$

y en consecuencia, $n; n^{-1} = id$. $\square$

El siguiente lema proporciona un morfismo $b_{A,B,D} : (A\multimap(B\multimap D)) \longrightarrow ((A \otimes B)\multimap D)$ que puede verse como la internalización de la "Curry-reconversión."

Lema 94 El morfismo $b_{A,B,D} : (A\multimap(B\multimap D)) \longrightarrow ((A \otimes B)\multimap D)$ definido mediante

$$b_{A,B,D} = (a_{A\multimap(B\multimap D),A,B}; (\varepsilon_{A,B\multimap D} \otimes id_B); \varepsilon_{B,D})^\dagger$$

es un isomorfismo, con inverso

$$b^{-1}_{A,B,D} = (a^{-1}_{(A\otimes B)\multimap D,A,B}; \varepsilon_{A\otimes B,D})^{\dagger\dagger}.$$

Demostración: Por una parte tenemos

$$\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(b; b^{-1})) = \varphi^{-1}(((a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon)^\dagger \otimes id); (a^{-1}; \varepsilon)^\dagger) =$$
$$(((a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon)^\dagger \otimes id) \otimes id); a^{-1}; \varepsilon = a^{-1}; ((a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon)^\dagger \otimes id); \varepsilon =$$
$$a^{-1}; a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon = (\varepsilon \otimes id); \varepsilon = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(id)),$$

de donde deducimos que $b; b^{-1} = id$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(b^{-1}; b) = ((a^{-1}; \varepsilon)^{\dagger\dagger} \otimes id); a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon = \\
&a; (((a^{-1}; \varepsilon)^{\dagger\dagger} \otimes id) \otimes id); (\varepsilon \otimes id); \varepsilon = \\
&a; ((a^{-1}; \varepsilon)^{\dagger} \otimes id); \varepsilon = a; a^{-1}; \varepsilon = \varphi^{-1}(id),
\end{aligned}$$

de donde $b^{-1}; b = id$. $\Box$

Como antes, $d_{A,C}$ denota la Curry-conversión $(c_{A,A\multimap C}; \varepsilon_{A,C})^{\dagger}$ de la evaluación $\varepsilon_{A,C}$. Entonces d satisface la ecuación mostrada en el siguiente lema.

Lema 95

$$d_{A\multimap C,C}; (d_{A,C} \multimap id_C) = id_{A\multimap C}.$$

$$\begin{tikzcd}
A\multimap C \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "id"'] & ((A\multimap C)\multimap C)\multimap C \arrow[d, "d\multimap id"] \\
 & A\multimap C
\end{tikzcd}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(d; (d\multimap id)) = (((c; \varepsilon)^{\dagger}; ((c; \varepsilon)^{\dagger} \multimap id)) \otimes id); \varepsilon = \\
&(((c; \varepsilon)^{\dagger}; ((id \otimes (c; \varepsilon)^{\dagger}); \varepsilon)^{\dagger}) \otimes id); \varepsilon = ((c; \varepsilon)^{\dagger} \otimes id); (id \otimes (c; \varepsilon)^{\dagger}); \varepsilon = \\
&(id \otimes (c; \varepsilon)^{\dagger}); c; \varepsilon = c; ((c; \varepsilon)^{\dagger} \otimes id); \varepsilon = c; c; \varepsilon = \varepsilon = \varphi^{-1}(id). \Box
\end{aligned}$$

Como antes, denotamos por $s_{A,B,C}$ la Curry-conversión $(c_{A\multimap B,B\multimap C}; m_{A,B,C})^{\dagger}$ de la composición $m_{A,B,C}$. El siguiente lema muestra que d puede expresarse en términos de n (véase el Lema 93) y s.

Lema 96

$$d_{A,C} = n_A^{-1}; s_{I,A,C}; (id_{A\multimap C} \multimap n_C).$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "n^{-1}"] \arrow[d, "d"'] & I\multimap A \arrow[d, "s"] \\
(A\multimap C)\multimap C & (A\multimap C)\multimap(I\multimap C) \arrow[l, "id\multimap n"']
\end{tikzcd}$$

Demostración:

$$\varphi^{-1}(n^{-1}; s; id\multimap n) = ((c;e)^\dagger \otimes id); ((c;m)^\dagger \otimes id); ((\varepsilon;n)^\dagger \otimes id); \varepsilon =$$
$$((c;e)^\dagger \otimes id); c; m; e^{-1}; c; \varepsilon = c; (id \otimes (c;e)^\dagger); e^{-1}; c; a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$$
$$c; e^{-1}; c; a^{-1}; (id \otimes (c;e)); \varepsilon = c; \varepsilon.\square$$

Lema 97 El morfismo $u_{A,C} : A\multimap(I\multimap C) \longrightarrow (A\multimap C)$ definido por la expresión

$$u_{A,C} = s_{A,I\multimap C,C}; (d_{I,C}\multimap id_{A\multimap C}); n_{A\multimap C}$$

es un isomorfismo, cuyo inverso viene dado por

$$u^{-1}_{A,C} = n^{-1}_{A\multimap C}; s_{I,A\multimap C,C}; (d_{A,C}\multimap id_{I\multimap C}).$$

Además,

$$u_{A,C} = id_A\multimap n_C = b_{A,I,C}; ((e^{-1}_A; c_{I,A})\multimap id_C).$$

$$\begin{tikzcd}
 & ((I\multimap C)\multimap C)\multimap(A\multimap C) \arrow[dr, "d\multimap id"] & & \\
A\multimap(I\multimap C) \arrow[ur, "s"] \arrow[rrr, bend left=60, "id\multimap n"] \arrow[dr, bend right=50, "b"'] & & I\multimap(A\multimap C) \arrow[r, "n"] \arrow[dl, "s"] & A\multimap C \\
 & ((A\multimap C)\multimap C)\multimap(I\multimap C) \arrow[ul, "d\multimap id"] & & \\
 & (A\otimes I)\multimap C \arrow[uurr, bend right=40, "(e^{-1};c)\multimap id"'] & &
\end{tikzcd}$$

Demostración: En primer lugar, demostramos que $u_{A,C}; u^{-1}_{A,C} = id_{A\multimap(I\multimap C)}$ usando la naturalidad de $s_{A,B,C}$ en A y B, la Proposición 89 y el Lema 95.

$$u; u^{-1} = s; (d\multimap id); n; n^{-1}; s; (d\multimap id) = s; (d\multimap id); s; (d\multimap id) =$$
$$s; s; (id\multimap(d\multimap id)); (d\multimap id) = s; s; (d\multimap id); (id\multimap(d\multimap id)) =$$
$$(id\multimap d); (id\multimap(d\multimap id)) = id\multimap(d; (d\multimap id)) = id\multimap id = id.$$

La prueba de la igualdad $u^{-1}_{A,C}; u_{A,C} = id_{A\multimap C}$ es completamente análoga. Con respecto a las otras dos igualdades, aplicamos la adjunción φ^{-1} a los tres morfismos, obteniendo el mismo resultado:

$$\varphi^{-1}(u) = \varphi^{-1}((c; (a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon)^\dagger)^\dagger; ((id \otimes (c;\varepsilon)^\dagger); \varepsilon)^\dagger; e^{-1}; c; \varepsilon) =$$
$$\varphi^{-1}(e^{-1}; c; ((c; (a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon)^\dagger)^\dagger \otimes id); (id \otimes (c;\varepsilon)^\dagger); \varepsilon) =$$
$$\varphi^{-1}(e^{-1}; ((c;\varepsilon)^\dagger \otimes id); (a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon)^\dagger) =$$

$(e^{-1} \otimes id); (((c; \varepsilon)^{\dagger} \otimes id) \otimes id); a^{-1}; (id \otimes \varepsilon); \varepsilon =$
$e^{-1}; a; a^{-1}; ((c; \varepsilon)^{\dagger} \otimes id); (id \otimes \varepsilon); \varepsilon = e^{-1}; c; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon.$

$\varphi^{-1}(id \multimap n) = \varepsilon; n = \varepsilon; e^{-1}; c; \varepsilon = e^{-1}; c; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon.$

$\varphi^{-1}(b; ((e^{-1}; c) \multimap id)) =$
$(((a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon)^{\dagger}; ((id \otimes (e^{-1}; c)); \varepsilon)^{\dagger}) \otimes id); \varepsilon =$
$((a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon)^{\dagger} \otimes id); (id \otimes (e^{-1}; c)); \varepsilon =$
$(id \otimes (e^{-1}; c)); a; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon =$
$e^{-1}; c; (\varepsilon \otimes id); \varepsilon.\square$

Por último vamos a probar que d también puede expresarse en términos del morfismo u definido en el lema anterior.

Lema 98

$$d_{A,C} = (c_{A,A \multimap C}; (u^{-1}_{A,C} \otimes id_A); \varepsilon_{A,I \multimap C})^{\dagger}; u_{A \multimap C,C}.$$

Demostración: Sabemos por el Lema 97 que $u_{A,C} = id_A \multimap n_C$, y en consecuencia el miembro derecho de la igualdad del enunciado es igual a

$$(c; ((id \multimap n^{-1}) \otimes id); \varepsilon)^{\dagger}; (id \multimap n) = (c; \varepsilon; n^{-1})^{\dagger}; (\varepsilon; n)^{\dagger} = e^{\dagger}; (\varepsilon; n)^{\dagger}.$$

Aplicando φ^{-1} a la última expresión, obtenemos:

$$(e^{\dagger} \otimes id); \varepsilon; n = e; e^{-1}; c; \varepsilon = c; \varepsilon = \varphi^{-1}(d).\square$$

A.5. Dos demostraciones

Demostración del Teorema 38
Dado un objeto C en una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, el morfismo

$$d_{A,C} : A \longrightarrow (A \multimap C) \multimap C$$

es un isomorfismo para todo objeto A en $\mathcal{C}$ si y sólo si el morfismo

$$s_{A,B,C} : (A \multimap B) \longrightarrow ((B \multimap C) \multimap (A \multimap C))$$

es un isomorfismo para todos los objetos A, B en $\mathcal{C}$.

Demostración: Si $s_{A,B,C}$ es un isomorfismo, entonces $d_{A,C}$ también lo es, puesto que por el Lema 96 tenemos

$$d_{A,C} = n_A^{-1}; s_{I,A,C}; (id_{A \multimap C} \multimap n_C)$$

y la expresión de la derecha, siendo una composición de isomorfismos, es asimismo un isomorfismo.

Recíprocamente, si $d_{A,C}$ es un isomorfismo, entonces $s_{B\multimap C,A\multimap C,C}$ también lo es, porque por la Proposición 89

$$((d_{A,C}\multimap d^{-1}_{B,C}); s_{A,B,C}); s_{B\multimap C,A\multimap C,C} = id_{((A\multimap C)\multimap C)\multimap((B\multimap C)\multimap C)}$$

$$s_{B\multimap C,A\multimap C,C}; (s_{(A\multimap C)\multimap C,(B\multimap C)\multimap C,C}; (d_{B\multimap C,C}\multimap d^{-1}_{A\multimap C,C})) = id_{(B\multimap C)\multimap(A\multimap C)},$$

y de aquí, usando de nuevo la Proposición 89, $s_{A,B,C} = (d^{-1}_{A,C}\multimap d_{B,C}); s^{-1}_{B\multimap C,A\multimap C,C}$. Por tanto, $s_{A,B,C}$, siendo una composición de isomorfismos, es asimismo un isomorfismo. □

Demostración de la Proposición 41

Sea $(\mathcal{C},\otimes,I,a,c,e,\multimap,\perp)$ una categoría con un objeto dualizante. Definimos:

1. $A⅋B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$ para objetos A, B
2. $f⅋g = (f^\perp \otimes g^\perp)^\perp$ para morfismos f, g
3. $a'_{A,B,C} = (id_{A^\perp} \otimes d_{B^\perp\otimes C^\perp})^\perp; (a^{-1}_{A^\perp,B^\perp,C^\perp})^\perp; (d^{-1}_{A^\perp\otimes B^\perp} \otimes id_{C^\perp})^\perp$
4. $c'_{A,B} = (c_{B^\perp,A^\perp})^\perp$
5. $e'_A = (e^\dagger_\perp \otimes id_{A^\perp})^\perp; (e^{-1}_{A^\perp})^\perp; d^{-1}_A$

donde $(\_)^\perp$ denota el funtor $\_\multimap\perp$; entonces, $(\mathcal{C},⅋,\perp,a',c',e')$ es una categoría monoidal simétrica.

Demostración: Para empezar, $\_⅋\_ : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor, puesto que viene dado por la siguiente composición de funtores:

$$\mathcal{C}\times\mathcal{C} \xrightarrow{(\_)^{\perp op}\times(\_)^{\perp op}} \mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\otimes^{op}} \mathcal{C}^{op} \xrightarrow{(\_)^\perp} \mathcal{C}.$$

Tenemos que demostrar que a', c' y e' son isomorfismos naturales que satisfacen las condiciones de coherencia de Mac Lane-Kelly presentadas en la Figura A.1. Algunas igualdades son inmediatas como por ejemplo $c'; c' = id$ o probar que a', e' son isomorfismos. Vamos a comprobar dos condiciones de coherencia y dejamos la restante condición de coherencia como ejercicio para el lector.

La siguiente sucesión de igualdades muestra que $a'; c'; a' = (id⅋c'); a'; (c'⅋id)$.

$$\begin{aligned}
&a'_{A,B,C}; c'_{A⅋B,C}; a'_{C,A,B} = \\
&(id\otimes d)^\perp; (a^{-1})^\perp; (d^{-1}\otimes id)^\perp; c^\perp; (id\otimes d)^\perp; (a^{-1})^\perp; (d^{-1}\otimes id)^\perp = \\
&(id\otimes d)^\perp; (a^{-1})^\perp; c^\perp; (a^{-1})^\perp; (d^{-1}\otimes id)^\perp = \\
&(id\otimes d)^\perp; (id\otimes c)^\perp; (a^{-1})^\perp; (c\otimes id)^\perp; (d^{-1}\otimes id)^\perp = \\
&(id\otimes c^{\perp\perp})^\perp; (id\otimes d)^\perp; (a^{-1})^\perp; (d^{-1}\otimes id)^\perp; (c^{\perp\perp}\otimes id)^\perp = \\
&(id_A⅋c'_{B,C}); a'_{A,C,B}; (c'_{A,C}⅋id_B).
\end{aligned}$$

Finalmente, probamos $a'; (e' \parr id) = e'$, usando la igualdad $d_{A^\perp}; d_A^\perp = id_{A^\perp}$ del Lema 95.

$a'_{\perp,A,B}; (e'_A \parr id) =$

$(id \otimes d)^\perp; (a^{-1})^\perp; (d^{-1} \otimes id)^\perp; ((e^\dagger \otimes id)^{\perp\perp} \otimes id)^\perp; ((e^{-1})^{\perp\perp} \otimes id)^\perp; ((d_A^{-1})^\perp \otimes id)^\perp =$

$(id \otimes d)^\perp; (a^{-1})^\perp; ((e^\dagger \otimes id) \otimes id)^\perp; (d^{-1} \otimes id)^\perp; ((e^{-1})^{\perp\perp} \otimes id)^\perp; (d_{A^\perp} \otimes id)^\perp =$

$(id \otimes d)^\perp; (e^\dagger \otimes id)^\perp; (a^{-1})^\perp; (e^{-1} \otimes id)^\perp =$

$(e^\dagger \otimes id)^\perp; (id \otimes d)^\perp; (e^{-1})^\perp = (e^\dagger \otimes id)^\perp; (e^{-1})^\perp; d^\perp_{A^\perp \otimes B^\perp} =$

$(e^\dagger \otimes id)^\perp; (e^{-1})^\perp; d^{-1}_{(A^\perp \otimes B^\perp)^\perp} = e'_{A \parr B}$.$\square$

Apéndice B

Categorías $*$-autónomas

En este apéndice realizamos una comparación detallada entre los conceptos de categoría con un objeto dualizante y categoría $*$-autónoma. Primero analizamos el concepto de categoría $*$-autónoma y presentamos buenas razones para añadir una condición adicional; de esta forma obtenemos una noción más fuerte que denominamos categoría $*$-autónoma *canónica*. Luego probamos que los conceptos de categoría con un objeto dualizante y de categoría $*$-autónoma canónica son equivalentes. Esta equivalencia se encuentra implícita en algunos pasajes del libro de Barr [9], pero ni la equivalencia ni la condición adicional son hechos explícitos en ningún momento en tal libro. La prueba de equivalencia que presentamos más adelante supone la definición de adecuadas categorías $\underline{CatDualObj}$ y $\underline{Can{*}\text{-}AutCat}$, y la construcción de la equivalencia entre ellas. Por otro lado, en su reciente artículo [12], Barr usa nuestra Definición 39 de una categoría con un objeto dualizante como su definición de una categoría $*$-autónoma.

B.1. Categorías $*$-autónomas

Esencialmente, una categoría $*$-autónoma es una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$ con una involución $(\_)^{\perp} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$. Dada una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, una *involución* es un funtor (contravariante) fuerte $(\_)^{\perp} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ junto con un isomorfismo natural $d_A : A \to A^{\perp\perp}$ sujeto a unas condiciones que detallamos más adelante. Es importante observar, sin embargo, que aunque estemos usando notaciones tales como $(\_)^{\perp}$, d, s, y u, que son *reminiscentes de conceptos previamente introducidos* en este trabajo, en esta sección *no se asume absolutamente nada* acerca de tales funtores y morfismos, *excepto lo que se diga explícitamente sobre ellos*. De hecho, la intención principal de toda nuestra discusión es precisamente la de caracterizar las condiciones bajo las cuales el uso de la misma notación tanto para categorías $*$-autónomas como para categorías con un objeto dualizante está plenamente justificado.

La siguiente definición se debe a Michael Barr [9]:

Definición 99 Una *categoría $*$-autónoma* consiste en

1. Una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$,

2. Un funtor (contravariante) fuerte de $\mathcal{C}$ en sí misma, llamado *involución*, dado por una función $(\_)^\perp$ sobre los objetos y una familia de morfismos $s_{A,B} : A \multimap B \longrightarrow B^\perp \multimap A^\perp$,

3. Una familia de isomorfismos $d_A : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$, llamada *isomorfismo de la involución*,

tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \multimap B \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "d^{-1} \multimap d"'] & B^\perp \multimap A^\perp \arrow[d, "s"] \\ & A^{\perp\perp} \multimap B^{\perp\perp} \end{tikzcd}$$

es decir, estos datos deben satisfacer la ecuación

$$d_A^{-1} \multimap d_B = s_{A,B}; s_{B^\perp, A^\perp}. \square$$

El lector puede reconocer en el diagrama triangular de esta definición la propiedad análoga a la demostrada en la Proposición 89 del Apéndice A, para el caso en que $d_{A,C}$ es un isomorfismo; por tanto, esta condición simplemente afirma que d es un isomorfismo natural fuerte entre los funtores (covariantes) fuertes $(Id, \{id_{A \multimap B}\})$ y $((\_)^\perp; (\_)^\perp, \{s_{A,B}; s_{B^\perp, A^\perp}\})$. La primera consecuencia es que, por la Proposición 88 en el Apéndice A, d es una transformación natural ordinaria. Además, del diagrama conmutativo en la definición anterior también se deduce que $s_{A,B}$ es un isomorfismo para todos los objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, siguiendo la demostración del Teorema 38 (véase la Sección A.5 en el Apéndice A).

Luego, usando el isomorfismo $n_A = (e^{-1}_{I \multimap A}; c_{I, I \multimap A}; \varepsilon_{I,A}) : I \multimap A \longrightarrow A$ (véase el Lema 93 en el Apéndice A), existe un isomorfismo natural

$$(\ddagger) \qquad A \multimap I^\perp \xrightarrow{s} I^{\perp\perp} \multimap A^\perp \xrightarrow{d \multimap id} I \multimap A^\perp \xrightarrow{n} A^\perp$$

denotado u_A, que va a jugar un papel importante en la discusión que sigue; en particular, su papel será fundamental en la Proposición 102 de cara a probar que, dadas las condiciones adecuadas, $I^\perp$ es un objeto dualizante.

Usando este isomorfismo, tenemos el siguiente isomorfismo natural:

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B^\perp) \xrightarrow{Hom(id, u^{-1})} Hom_{\mathcal{C}}(A, B \multimap I^\perp) \xrightarrow{\varphi^{-1}} Hom_{\mathcal{C}}(A \otimes B, I^\perp) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{Hom(c, id)} Hom_{\mathcal{C}}(B \otimes A, I^\perp) \xrightarrow{\varphi} Hom_{\mathcal{C}}(B, A \multimap I^\perp) \xrightarrow{Hom(id, u)} Hom_{\mathcal{C}}(B, A^\perp)$$

es decir, tenemos una adjunción

$$\psi_{B,A} : Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B^\perp, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, A^\perp)$$

"del funtor $(\_)^\perp$ consigo mismo." (Para ser completamente precisos, deberíamos decir que la adjunción es entre $(\_)^\perp : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ y $(\_)^{\perp op} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$.)

¿Cuál es el objetivo de esta discusión? Podemos definir, como en la Proposición 41, un funtor $\_ ⅋ \_ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ mediante la igualdad $A ⅋ B = (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp$ sobre objetos y una expresión similar para los morfismos, un objeto $\perp = I^\perp$, y correspondientes isomorfismos naturales a', c', e', y queremos que $(\mathcal{C}, \invamp, \perp, a', c', e')$ sea también una categoría *monoidal simétrica*. Para que esto sea verdad necesitamos la igualdad $d_{A^\perp}; d_A^\perp = id_{A^\perp}$ que en general no se deduce de las suposiciones en la Definición 99, como el siguiente ejemplo debido a Michael Barr [10] demuestra. Es importante darse cuenta de que esta propiedad es la análoga a la demostrada en el Lema 95 del Apéndice A, y que la hemos usado en la demostración de la Proposición 41 (en la Sección A.5 del Apéndice A) así como en otros lugares, para probar algunas propiedades de categorías monoidales simétricas cerradas.

Ejemplo 100 Sea $(M, \cdot, i)$ un monoide conmutativo con un elemento invertible d tal que $i \neq d^{-1} \neq d$. Y sea $\mathcal{C}$ la categoría con un único objeto, denotado I, y M su monoide de endomorfismos. Si definimos $I \otimes I = I \multimap I = I$ para el objeto I, y $x \otimes y = x \multimap y = x \cdot y$ para los morfismos, entonces $(\mathcal{C}, \otimes, I, i, i, i, \multimap)$ es una categoría monoidal simétrica cerrada.

En esta situación, el funtor identidad sobre $\mathcal{C}$ es un funtor fuerte $(\_)^\perp$, con $s = id : I \to I$, puesto que $j = m = id$. Ahora bien, $d : I \to I^{\perp\perp}$ es un isomorfismo natural satisfaciendo $d^{-1} \multimap d = id = s; s$, pero sin embargo $d^\perp = d \neq d^{-1}$. □

Por otra parte, el isomorfismo u_A también puede definirse mediante la composición

$$A \multimap I^\perp \xrightarrow{d^{-1} \multimap id} A^{\perp\perp} \multimap I^\perp \xrightarrow{s^{-1}} I \multimap A^\perp \xrightarrow{n} A^\perp$$

y naturalmente desearíamos que esta definición coincidiera con la dada anteriormente en la expresión (‡) (véase el diagrama en el Lema 97 del Apéndice A). Para que esto sea cierto, necesitamos de nuevo la igualdad $d_{A^\perp}; d_A^\perp = id_{A^\perp}$.

Si d es la unidad (y la counidad por razones de simetría, ya que $\psi_{B,A}^{-1} = \psi_{A,B}$) de la adjunción definida por ψ, entonces la igualdad $d_{A^\perp}; d_A^\perp = id_{A^\perp}$ es una de las "ecuaciones triangulares" válidas en cualquier adjunción [99]. Esta condición es muy natural y, aunque no se exigiera en la definición original de categoría $*$-autónoma citada antes, la incluimos en nuestra definición revisada de este concepto. En efecto, el mismo Michael Barr dice [10],

> "La definición de [categoría] $*$-autónoma exige que *este* d sea un isomorfismo, no que simplemente exista un isomorfismo natural cualquiera. [...] ésa es—o debería ser—la definición."

Por lo tanto, nuestra definición revisada del concepto de categoría $*$-autónoma es la siguiente:

Definición 101 Una *categoría $*$-autónoma canónica* consiste en

1. Una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap)$,

2. Un funtor (contravariante) fuerte de $\mathcal{C}$ en sí misma, llamado *involución*, dado por una función $(\_)^\perp$ sobre los objetos y una familia de morfismos $s_{A,B} : A \multimap B \longrightarrow B^\perp \multimap A^\perp$,

3. Una familia de isomorfismos $d_A : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$, llamada *isomorfismo de la involución*, sujetos a las ecuaciones

a) $$d_A^{-1} \multimap d_B = s_{A,B}; s_{B^\perp, A^\perp},$$

que dice precisamente que d es un isomorfismo natural fuerte entre los funtores (covariantes) fuertes $(Id, \{id_{A\multimap B}\})$ y $((\_)^\perp; (\_)^\perp, \{s_{A,B}; s_{B^\perp,A^\perp}\})$.

b) $$d_B = (c_{B,B^\perp}; (u_B^{-1} \otimes id_B); \varepsilon_{B,I^\perp})^\dagger; u_{B^\perp},$$

que expresa la propiedad de que d es la unidad (y counidad) de la adjunción

$$\psi_{B,A} : Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B^\perp, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, A^\perp)$$

definida por

$$\psi_{B,A} = Hom_{\mathcal{C}}(id_A, u_B^{-1}); (\varphi^B_{A,I^\perp})^{-1}; Hom_{\mathcal{C}}(c_{B,A}, id_{I^\perp}); \varphi^A_{B,I^\perp}; Hom_{\mathcal{C}}(id_B, u_A)$$

donde u_A es el isomorfismo $(A \multimap I^\perp) \longrightarrow A^\perp$ descrito en (‡). □

B.2. Categorías ∗-autónomas y categorías con un objeto dualizante

Está claro que una categoría ∗-autónoma es bastante similar a una categoría con un objeto dualizante. A primera vista la principal diferencia es que en una categoría ∗-autónoma los isomorfismos d y s son *datos básicos* dados en su definición, sujetos a tres ecuaciones nada intuitivas, es decir, no está claro si pueden reducirse a datos más elementales en la categoría; no obstante, el objeto $I^\perp$ parece comportarse como un objeto dualizante. Por otro lado, en una categoría con un objeto dualizante podemos definir los isomorfismos d (la Curry-conversión del morfismo evaluación) y s (la Curry-conversión de la composición m) que satisfacen varias ecuaciones (como se demuestra en la Sección A.4 del Apéndice A), por lo que parece muy probable que tal categoría tiene una estructura ∗-autónoma de forma natural. De hecho todas estas impresiones son correctas. En general, la elección de s y d en una categoría ∗-autónoma no es reducible a datos más elementales; sin embargo, las categorías ∗-autónomas canónicas caracterizan el caso en que tal elección es reducible a datos más elementales. La correspondencia entre los dos conceptos se hace entonces muy clara: los conceptos de categoría con un objeto dualizante y de categoría ∗-autónoma canónica son equivalentes, en el sentido preciso de una equivalencia de categorías [99].

Primero demostramos que en una categoría ∗-autónoma $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (\_)^\perp, s, d)$ el objeto $I^\perp$ es un objeto dualizante, tal y como se ha sugerido antes. Es importante notar que en la siguiente proposición *no* hacemos uso de la propiedad adicional introducida en la Definición 101.

Proposición 102 Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (\_)^\perp, s, d)$ una categoría ∗-autónoma. Como antes, denotamos por $u_A : (A \multimap I^\perp) \longrightarrow A^\perp$ el isomorfismo definido en (‡) por la expresión

$$u_A = s_{A,I^\perp}; (d_I \multimap id_{A^\perp}); n_{A^\perp}.$$

Entonces

$$(c_{A\multimap B, B\multimap I^\perp}; m_{A,B,I^\perp})^\dagger; u_B^{-1} \multimap u_A = s_{A,B},$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & (B\multimap I^\perp)\multimap(A\multimap I^\perp) \arrow[d, "u^{-1}\multimap u"] \\ A\multimap B \arrow[ur, "(c;m)^\dagger"] \arrow[r, "s"'] & B^\perp\multimap A^\perp \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(c;m)^\dagger$ es un isomorfismo, y $I^\perp$ es un objeto dualizante.

Demostración: En el siguiente cálculo, vamos a usar la igualdad

$$(s\otimes d);\varepsilon = c;e;u$$

que es muy fácil de probar y se deja como ejercicio para el lector. La deseada conmutatividad del diagrama triangular se sigue de:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}((c;m)^\dagger;(u^{-1}\multimap u)) = \\
&((c;m)^\dagger\otimes id);(id\otimes u^{-1});\varepsilon;u = \\
&((c;m)^\dagger\otimes id);(id\otimes u^{-1});\varepsilon;s;d\multimap id;n = \\
&((c;m)^\dagger\otimes u^{-1});\varepsilon;s;d\multimap id;e^{-1};c;\varepsilon = \\
&(id\otimes u^{-1});c;m;s;e^{-1};c;((d\multimap id)\otimes id);\varepsilon = \\
&(id\otimes u^{-1});c;(s\otimes s);c;m;e^{-1};c;(id\otimes d);\varepsilon = \\
&(id\otimes u^{-1});(s\otimes s);e^{-1};c;(id\otimes d);(m\otimes id);\varepsilon = \\
&e^{-1};c;((id\otimes u^{-1})\otimes id);((s\otimes s)\otimes id);(id\otimes d);a^{-1};(id\otimes\varepsilon);\varepsilon = \\
&e^{-1};c;a^{-1};(id\otimes(u^{-1}\otimes id));(s\otimes(s\otimes d));(id\otimes\varepsilon);\varepsilon = \\
&(id\otimes(e^{-1};c;(u^{-1}\otimes id);(s\otimes d);\varepsilon));(s\otimes id);\varepsilon = \\
&(id\otimes(e^{-1};c;(u^{-1}\otimes id);c;e;u));(s\otimes id);\varepsilon = \\
&(s\otimes id);\varepsilon = \varphi^{-1}(s).\square
\end{aligned}$$

Vamos a ver ahora cómo una categoría con un objeto dualizante $(\mathcal{C},\otimes,I,a,c,e,\multimap,\perp)$ da lugar a una categoría $*$-autónoma *canónica*.

Proposición 103 Sea $(\mathcal{C},\otimes,I,a,c,e,\multimap,\perp)$ una categoría con un objeto dualizante. Para objetos A,B en $\mathcal{C}$, definimos

1. $A^\perp = A\multimap\perp$
2. $s_{A,B} = (c_{A\multimap B,B\multimap\perp};m_{A,B,\perp})^\dagger : A\multimap B \longrightarrow B^\perp\multimap A^\perp$
3. $d_A = (c_{A,A\multimap\perp};\varepsilon_{A,\perp})^\dagger : A \longrightarrow A^{\perp\perp}$

Entonces, $(\mathcal{C},\otimes,I,a,c,e,\multimap,(\_)^\perp,s,d)$ es una categoría $*$-autónoma canónica.

Demostración: En primer lugar, $(\_)^\perp$ y s definen un funtor contravariante fuerte, como se demuestra en la Proposición 86 del Apéndice A. En segundo lugar, en la Proposición 89 y el Lema 98 del Apéndice A demostramos que s y d satisfacen las dos ecuaciones requeridas por la definición de categoría $*$-autónoma canónica. $\square$

Queremos probar que las construcciones definidas en las dos proposiciones anteriores son funtoriales, o sea, que proporcionan funtores entre adecuadas categorías cuyos objetos son categorías $*$-autónomas y categorías con un objeto dualizante, respectivamente. Para esto necesitamos definir las nociones apropiadas de morfismo para estos objetos.

Comenzamos con la definición de la categoría *CatDualObj* cuyos objetos son categorías con un objeto dualizante.

Proposición 104 Dadas categorías con un objeto dualizante $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', \perp')$ y $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp)$, se define un morfismo[1] entre ellas como un par $\langle \mathcal{F}, \alpha \rangle$, donde $\mathcal{F} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor monoidal simétrico cerrado y $\alpha : \mathcal{F}(\perp') \longrightarrow \perp$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Esta definición proporciona una categoría *CatDualObj*.

Demostración: Las identidades son pares $\langle 1_{\mathcal{C}}, id_{\perp} \rangle$, y la composición de dos morfismos $\langle \mathcal{G}, \alpha' \rangle$ y $\langle \mathcal{F}, \alpha \rangle$ viene dada por el par $\langle \mathcal{G}; \mathcal{F}, \mathcal{F}(\alpha'); \alpha \rangle$. □

La definición de las categorías *$*$-AutCat* y *Can$*$-AutCat* es un poco más complicada. Éste es el momento en que la noción de transformación natural fuerte relativa a un funtor monoidal simétrico cerrado, introducida en la Sección A.3 del Apéndice A, nos va a ser muy útil.

Proposición 105 Dadas categorías $*$-autónomas $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', (\_)^{\perp'}, s', d')$ y $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (\_)^{\perp}, s, d)$, se define un morfismo entre ellas como un par $\langle \mathcal{F}, \beta \rangle$, donde $\mathcal{F} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor monoidal simétrico cerrado, y β es una transformación natural fuerte relativa a $\mathcal{F}$ entre los funtores fuertes $((\_)^{\perp'}, s')$ y $((\_)^{\perp}, s)$ que satisface además la ecuación

$$\mathcal{F}(d'_A); \beta_{A^{\perp'}} = d_{\mathcal{F}(A)}; \beta_A^{\perp},$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\mathcal{F}(d')"] \arrow[d, "d"'] & \mathcal{F}(A^{\perp'\perp'}) \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{F}(A)^{\perp\perp} \arrow[r, "\beta^{\perp}"] & (\mathcal{F}(A^{\perp'}))^{\perp}
\end{tikzcd}$$

Entonces esta definición proporciona una categoría *$*$-AutCat*. La categoría *Can$*$-AutCat* es la subcategoría plena de *$*$-AutCat* cuyos objetos son categorías $*$-autónomas canónicas.

Demostración: La composición de dos de tales morfismos se define como en la Observación 92 en el Apéndice A:

$$\langle \mathcal{G}, \beta' \rangle; \langle \mathcal{F}, \beta \rangle = \langle \mathcal{G}; \mathcal{F}, \mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}} \rangle$$

donde, para un objeto A en $\mathcal{C}''$,

$$(\mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}})_A = \mathcal{F}(\beta'_A); \beta_{\mathcal{G}(A)} : \mathcal{F}\mathcal{G}(A^{\perp''}) \longrightarrow (\mathcal{F}\mathcal{G}(A))^{\perp}.$$

[1]Por conveniencia de notación, aquí y en el resto de esta sección, usamos primas en el dominio de un morfismo en vez de seguir la convención habitual de usar primas en el codominio.

Para que la composición así definida sea un morfismo en $\underline{*\text{-}AutCat}$, necesitamos comprobar que la condición adicional es satisfecha. Para ello usamos la propiedad de que, por la Proposición 91 en el Apéndice A, β se externaliza a una transformación natural ordinaria entre los funtores $(\_)^{\perp'}; \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{op}; (\_)^{\perp}$. Por lo tanto, para un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}'$, tenemos

$$\mathcal{F}(f^{\perp'}); \beta_A = \beta_B; \mathcal{F}(f)^{\perp}.$$

En particular, para el morfismo $\beta'_A : \mathcal{G}(A^{\perp''}) \longrightarrow \mathcal{G}(A)^{\perp'}$, obtenemos la igualdad

$$\mathcal{F}((\beta'_A)^{\perp'}); \beta_{\mathcal{G}(A^{\perp''})} = \beta_{\mathcal{G}(A)^{\perp'}}; \mathcal{F}(\beta'_A)^{\perp}.$$

De modo que podemos realizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\mathcal{G}(d''_A); (\mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}})_{A^{\perp''}} = \mathcal{F}\mathcal{G}(d''_A); \mathcal{F}(\beta'_{A^{\perp''}}); \beta_{\mathcal{G}(A^{\perp''})} = \\
&\mathcal{F}(d'_{\mathcal{G}(A)}); \mathcal{F}((\beta'_A)^{\perp'}); \beta_{\mathcal{G}(A^{\perp''})} = \mathcal{F}(d'_{\mathcal{G}(A)}); \beta_{\mathcal{G}(A)^{\perp'}}; \mathcal{F}(\beta'_A)^{\perp} = \\
&d_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}; \beta^{\perp}_{\mathcal{G}(A)}; \mathcal{F}(\beta'_A)^{\perp} = d_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}; (\mathcal{F}(\beta'_A); \beta_{\mathcal{G}(A)})^{\perp} = \\
&d_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}; (\mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}})^{\perp}_A. \square
\end{aligned}$$

Una vez tenemos definidas las categorías que nos interesaban, podemos probar que las construcciones hechas en las Proposiciones 102 y 103 son funtoriales:

Proposición 106 Las asignaciones

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (_)^{\perp}, s, d) &\longmapsto (\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, I^{\perp}) \\
(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp) &\longmapsto (\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, _\multimap\perp, (c; m)^{\dagger}, (c; \varepsilon)^{\dagger})
\end{aligned}$$

se extienden respectivamente a funtores

$$\begin{aligned}
DO : \quad & \underline{*\text{-}AutCat} \longrightarrow \underline{CatDualObj} \\
AC : \quad & \underline{CatDualObj} \longrightarrow \underline{Can*\text{-}AutCat}.
\end{aligned}$$

Demostración: Dado un morfismo en $\underline{*\text{-}AutCat}$

$$\langle \mathcal{F}, \beta \rangle : (\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', (\_)^{\perp'}, s', d') \longrightarrow (\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (\_)^{\perp}, s, d),$$

como $\beta_{I'} : \mathcal{F}(I'^{\perp'}) \longrightarrow \mathcal{F}(I')^{\perp}$ y $\mathcal{F}(I') = I$, el morfismo en $\underline{CatDualObj}$

$$DO\langle \mathcal{F}, \beta \rangle : (\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', I'^{\perp'}) \longrightarrow (\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, I^{\perp})$$

se define mediante

$$DO\langle \mathcal{F}, \beta \rangle = \langle \mathcal{F}, \beta_{I'} : \mathcal{F}(I'^{\perp'}) \longrightarrow I^{\perp} \rangle.$$

Es obvio que DO conserva identidades, y también conserva la composición, pues

$$DO\langle \mathcal{G}; \mathcal{F}, \mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}} \rangle = \langle \mathcal{G}; \mathcal{F}, (\mathcal{F}\beta'; \beta_{\mathcal{G}})_{I''} \rangle$$

y $(\mathcal{F}\beta';\beta_{\mathcal{G}})_{I''} = \mathcal{F}(\beta'_{I''});\beta_{I'}$.

Recíprocamente, dado un morfismo en CatDualObj

$$\langle \mathcal{F}, \alpha \rangle : (\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', \perp') \longrightarrow (\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp),$$

el morfismo en Can∗-AutCat

$$AC\langle \mathcal{F}, \alpha \rangle : (\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', \_\multimap'\perp', (c';m')^{\dagger'}, (c';\varepsilon')^{\dagger'}) \longrightarrow$$
$$(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \_\multimap\perp, (c;m)^{\dagger}, (c;\varepsilon)^{\dagger})$$

se define como sigue.

Primero recordemos la notación usada en la Sección A.4 del Apéndice A, y denotemos por $s_{A,B,\perp}$ y $d_{A,\perp}$ los morfismos $(c;m)^{\dagger}$ y $(c;\varepsilon)^{\dagger}$, respectivamente, y análogamente con $s'_{A,B,\perp'}$ y $d'_{A,\perp'}$. Como $\mathcal{F}$ conserva la estructura monoidal simétrica cerrada, tenemos las igualdades

$$\mathcal{F}(s'_{A,B,\perp'}) = s_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(\perp')}$$
$$\mathcal{F}(d'_{A,\perp'}) = d_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(\perp')}.$$

Queremos definir una familia de morfismos $\beta_A : \mathcal{F}(A\multimap'\perp') \longrightarrow (\mathcal{F}(A)\multimap\perp)$ usando el morfismo dado $\alpha : \mathcal{F}(\perp') \longrightarrow \perp$; para esto, usamos la propiedad de que $\mathcal{F}$ conserva la estructura monoidal simétrica cerrada, y definimos

$$\beta_A = id_{\mathcal{F}(A)}\multimap\alpha : (\mathcal{F}(A)\multimap\mathcal{F}(\perp')) \longrightarrow (\mathcal{F}(A)\multimap\perp).$$

Debemos demostrar que $\langle \mathcal{F}, \beta \rangle$ satisface las dos condiciones requeridas para ser un morfismo en Can∗-AutCat. La primera condición es

$$\mathcal{F}(s'_{A,B,\perp'});(id_{\mathcal{F}(B\multimap'\perp')}\multimap\beta_A) = s_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B),\perp};(\beta_B\multimap id_{\mathcal{F}(A)\multimap\perp}),$$

que es equivalente a

$$s_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(\perp')};(id_{\mathcal{F}(B\multimap'\perp')}\multimap(id_{\mathcal{F}(A)}\multimap\alpha)) = s_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B),\perp};((id_{\mathcal{F}(B)}\multimap\alpha)\multimap id_{\mathcal{F}(A)\multimap\perp}).$$

Aplicando la adjunción φ^{-1}, esta última igualdad se reduce a la naturalidad de $m_{A,B,C}$ en C.

La segunda condición es

$$\mathcal{F}(d'_{A,\perp'});\beta_{A\multimap'\perp'} = d_{\mathcal{F}(A),\perp};(\beta_A\multimap id_{\perp}),$$

o equivalentemente,

$$d_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(\perp')};(id_{\mathcal{F}(A\multimap'\perp')}\multimap\alpha) = d_{\mathcal{F}(A),\perp};((id_{\mathcal{F}(A)}\multimap\alpha)\multimap id_{\perp}).$$

Esta igualdad se reduce de nuevo, aplicando la adjunción φ^{-1}, a la naturalidad de $\varepsilon_{A,B}$ en B.

Que AC conserva identidades es obvio, y que conserva la composición se sigue de

$$(\mathcal{F}\beta';\beta_{\mathcal{G}})_A = \mathcal{F}(id_{\mathcal{G}(A)}\multimap'\alpha');(id_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}\multimap\alpha) =$$

$$(id_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}\multimap\mathcal{F}(\alpha'));(id_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}\multimap\alpha) = id_{\mathcal{F}\mathcal{G}(A)}\multimap(\mathcal{F}(\alpha');\alpha).\square$$

Finalmente podemos demostrar nuestro resultado principal, a saber, que las nociones de categoría $*$-autónoma canónica y de categoría con un objeto dualizante son equivalentes en el sentido preciso de la existencia de una equivalencia entre las correspondientes categorías.

Teorema 107 Los dos funtores

$$\begin{array}{rccc} DO|_{\underline{Can*\text{-}AutCat}}: & \underline{Can*\text{-}AutCat} & \longrightarrow & \underline{CatDualObj} \\ AC: & \underline{CatDualObj} & \longrightarrow & \underline{Can*\text{-}AutCat} \end{array}$$

constituyen una equivalencia de categorías.

Demostración: Dada una categoría con un objeto dualizante $\mathcal{C}$ debemos probar que existe un isomorfismo natural $DO(AC(\mathcal{C})) \cong \mathcal{C}$ en $\underline{CatDualObj}$, y dada una categoría $*$-autónoma canónica $\mathcal{C}'$, tenemos que demostrar la existencia de un isomorfismo natural $AC(DO(\mathcal{C}')) \cong \mathcal{C}'$ en $\underline{Can*\text{-}AutCat}$.

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \perp)$ una categoría con un objeto dualizante. La categoría con un objeto dualizante que se obtiene tras aplicar el funtor $AC;DO$ es $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, I\multimap\perp)$. Usando el isomorfismo $n_A = (e^{-1}_{I\multimap A}; c_{I,I\multimap A}; \varepsilon_{I,A}) : I\multimap A \longrightarrow A$ (véase el Lema 93 en el Apéndice A), se tiene el isomorfismo $\langle 1_{\mathcal{C}}, n_\perp\rangle$. Es fácil ver que la naturalidad de este isomorfismo se reduce a la naturalidad de n_A.

Por otro lado, sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (\_)^\perp, s, d)$ una categoría $*$-autónoma canónica. Tras la aplicación del funtor $DO;AC$ tenemos la categoría $*$-autónoma canónica $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, \_\multimap I^\perp, (c;m)^\dagger, (c;\varepsilon)^\dagger)$, y disponemos del isomorfismo $\langle 1_{\mathcal{C}}, u_A\rangle$, donde $u_A : A\multimap I^\perp \longrightarrow A^\perp$ fue definido mediante la expresión (‡) después de la Definición 99 (y en el enunciado de la Proposición 102). Tenemos que comprobar que éste es en efecto un morfismo en la categoría $\underline{Can*\text{-}AutCat}$.

El diagrama triangular conmutativo en la Proposición 102 muestra que u es un isomorfismo natural fuerte (relativo al funtor identidad $1_{\mathcal{C}}$) entre los funtores fuertes $(\_\multimap I^\perp, (c;m)^\dagger)$ y $((\_)^\perp, s)$. Necesitamos probar que u también satisface la segunda condición:

$$(c;\varepsilon)^\dagger; u_{A\multimap I^\perp} = d_A; u_A^\perp.$$

Éste es el preciso momento en el que vamos a usar la propiedad adicional introducida en la definición de categoría $*$-autónoma canónica. Como d es la unidad de la adjunción

$$\psi_{B,A} : Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B^\perp, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, A^\perp)$$

descrita en la Definición 101, la igualdad buscada es equivalente a

$$\psi((c;\varepsilon)^\dagger; u_{A\multimap I^\perp}) = u_A,$$

que es efectivamente satisfecha por u, puesto que

$$\psi((c;\varepsilon)^\dagger; u) = (c; (((c;\varepsilon)^\dagger; u; u^{-1}) \otimes id); \varepsilon)^\dagger; u = (c;c;\varepsilon)^\dagger; u = \varepsilon^\dagger; u = u.$$

Además, por la Proposición 88 en el Apéndice A, u es una transformación natural (ordinaria) entre los funtores (ordinarios) $\_\multimap I^\perp$ y $(\_)^\perp$; de aquí, en particular, u satisface la ecuación

$$u_{A^\perp}; u_A^\perp = (u_A \multimap id_{I^\perp}); u_{A\multimap I^\perp},$$

de la cual es fácil deducir que u^{-1} también satisface la segunda condición. Resumiendo, $\langle 1_{\mathcal{C}}, u_A\rangle$ es realmente un isomorfismo en la categoría $\underline{Can{*}\text{-}AutCat}$.

Nos queda por probar que este isomorfismo es natural. Dado un morfismo $\langle \mathcal{F}, \beta\rangle$ en $\underline{{*}\text{-}AutCat}$ de $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', c', e', \multimap', (\_)^{\perp'}, s', d')$ en $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, c, e, \multimap, (\_)^{\perp}, s, d)$, la condición de naturalidad se reduce a la igualdad

$$(id_{\mathcal{F}(A)} \multimap \beta_{I'}); u_{\mathcal{F}(A)} = \mathcal{F}(u'_A); \beta_A,$$

donde u' denota el correspondiente morfismo en $\mathcal{C}'$; en efecto,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(u'); \beta = \mathcal{F}(s'; (d' \multimap' id); n'); \beta = \mathcal{F}(s'); (\mathcal{F}(d') \multimap id); n; \beta = \\
&\mathcal{F}(s'); (\mathcal{F}(d') \multimap \beta); n = \mathcal{F}(s'); (id \multimap \beta); (\mathcal{F}(d') \multimap id); n = \\
&s; (\beta \multimap id); (\mathcal{F}(d') \multimap id); n = s; ((\mathcal{F}(d'); \beta) \multimap id); n = \\
&s; ((d; \beta^{\perp}) \multimap id); n = s; (\beta^{\perp} \multimap id); (d \multimap id); n = \\
&(id \multimap \beta); s; (d \multimap id); n = (id \multimap \beta); u.
\end{aligned}$$

En este cálculo hemos hecho uso de la naturalidad de s, garantizada por la Proposición 85 del Apéndice A. $\square$

Con esto hemos terminado nuestro estudio de la relación entre categorías $*$-autónomas y categorías con un objeto dualizante.

En nuestra opinión, los resultados en esta sección muestran que el concepto de categoría $*$-autónoma es en cierto sentido *demasiado general*. El problema consiste en que, como el Ejemplo 100 muestra, hay demasiada libertad en la elección de s y d de forma que, aunque una categoría $*$-autónoma siempre tiene asociado un objeto dualizante, las transformaciones naturales canónicas s y d asociadas a ese objeto dualizante no tienen ninguna relación sistemática con las transformaciones s y d elegidas originalmente. En cambio, el concepto de categoría $*$-autónoma canónica asegura que las transformaciones s y d elegidas coinciden salvo isomorfismo natural con las s y d canónicas. Como la noción de categoría con un objeto dualizante es considerablemente más simple, y no parece existir ninguna razón por la que no queramos que s y d sean canónicas en las aplicaciones, concluimos que categorías con un objeto dualizante proporcionan una base axiomática más simple sobre la cual pueden basarse posteriores estudios de lógica lineal y de dualidad. De hecho, ésta es la axiomatización usada por Michael Barr en su reciente artículo [12].

Apéndice C

Reglas de inferencia para $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$

$\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$

$$\frac{A \ \in \ Ob(\mathcal{C})}{A \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])} \qquad\qquad \frac{f : A \to B \ en \ \mathcal{C}}{f : A \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}$$

$\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es una categoría

$$\frac{f : A \to B, \ g : B \to C \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{f; g : A \to C \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (composición)$$

$$\frac{A \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{id_A : A \to A \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (identidades)$$

$$\frac{f : A \to B, \ g : B \to C, \ h : C \to D \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{f; (g; h) = (f; g); h} \ (asociatividad)$$

$$\frac{f : A \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{id_A; f = f} \ (id \ izquierda) \qquad\qquad \frac{f : A \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{f; id_B = f} \ (id \ derecha)$$

$\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es monoidal simétrica

$$\frac{A, B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{A \otimes B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}$$

$$\frac{f : A \to B, \ g : C \to D \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}$$

$$\frac{f : A \to B, \ g : B \to C, \ f' : A' \to B', \ g' : C' \to D' \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{(f; g) \otimes (f'; g') = (f \otimes f'); (g \otimes g')} \ (\otimes \ funtor\text{-}1)$$

$$\frac{A, B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{id_A \otimes id_B = id_{A \otimes B}} \ (\otimes \ funtor\text{-}2)$$

$$\frac{A, B, C \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \rightarrow (A \otimes B) \otimes C \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} (asociatividad)$$

$$\frac{A, B, C \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a^{-1}_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C) \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (inverso)$$

$$\frac{A, B, C \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a_{A,B,C}; a^{-1}_{A,B,C} = id_{A\otimes(B\otimes C)}} \qquad \frac{A, B, C \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a^{-1}_{A,B,C}; a_{A,B,C} = id_{(A\otimes B)\otimes C}}$$

$$\frac{f : A \rightarrow A', \ g : B \rightarrow B', \ h : C \rightarrow C' \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{a_{A,B,C}; (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h); a_{A',B',C'}} \ (naturalidad)$$

$$\frac{A, B \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{c_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (conmutatividad)$$

$$\frac{f : A \rightarrow A', \ g : B \rightarrow B' \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{c_{A,B}; g \otimes f = f \otimes g; c_{A',B'}} \ (naturalidad)$$

$$\frac{A \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{e_A : I \otimes A \rightarrow A \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (unidad)$$

$$\frac{A \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{e^{-1}_A : A \rightarrow I \otimes A \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (inverso)$$

$$\frac{A \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{e_A; e^{-1}_A = id_{I\otimes A}} \qquad \frac{A \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{e^{-1}_A; e_A = id_A}$$

$$\frac{f : A \rightarrow B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{e_A; f = (id_I \otimes f); e_B} \ (naturalidad)$$

$$\frac{A, B, C, D \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a_{A,B,C\otimes D}; a_{A\otimes B,C,D} = (id_A \otimes a_{B,C,D}); a_{A,B\otimes C,D}; (a_{A,B,C} \otimes id_D)} \ (coherencia\text{-}1)$$

$$\frac{A, B \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{c_{A,B}; c_{B,A} = id_{A\otimes B}} \ (coherencia\text{-}2)$$

$$\frac{A, B \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a_{I,A,B}; (e_A \otimes id_B) = e_{A\otimes B}} \ (coherencia\text{-}3)$$

$$\frac{A, B, D \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{a_{A,B,D}; c_{A\otimes B,D}; a_{D,A,B} = (id_A \otimes c_{B,D}); a_{A,D,B}; (c_{A,D} \otimes id_B)} \ (coherencia\text{-}4)$$

$\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ es cerrada

$$\frac{A, B \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{A \multimap B \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}$$

$$\frac{A, B \in Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{\varepsilon_{A,B} : (A \multimap B) \otimes A \rightarrow B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (counidad)$$

$$\frac{f : C \otimes A \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{f^{\dagger} : C \to (A \multimap B) \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} (biyección)$$

$$\frac{f : C \otimes A \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{(f^{\dagger} \otimes id_A); \varepsilon_{A,B} = f} \ (adjunción\text{-}1)$$

$$\frac{g : C \to (A \multimap B) \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{((g \otimes id_A); \varepsilon_{A,B})^{\dagger} = g} \ (adjunción\text{-}2)$$

$\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ tiene productos finitos

$$\frac{A, B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{A \& B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])} \ (objeto \ producto)$$

$$\frac{f : C \to A, \ g : C \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{\langle f, g \rangle : C \to A \& B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (morfismo \ inducido)$$

$$\frac{A, B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{\pi_{A,B} : A \& B \to A \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (proyección\text{-}1)$$

$$\frac{A, B \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{\pi'_{A,B} : A \& B \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (proyección\text{-}2)$$

$$\frac{f : C \to A, \ g : C \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{\langle f, g \rangle; \pi_{A,B} = f} \ (ecuación \ prod\text{-}1)$$

$$\frac{f : C \to A, \ g : C \to B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{\langle f, g \rangle; \pi'_{A,B} = g} \ (ecuación \ prod\text{-}2)$$

$$\frac{h : C \to A \& B \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{\langle h; \pi_{A,B} \ , \ h; \pi'_{A,B} \rangle = h} \ (ecuación \ prod\text{-}3)$$

$$\top \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}]) \ (objeto \ final)$$

$$\frac{A \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{\langle \rangle_A : A \to \top \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (existencia)$$

$$\frac{f : A \to \top \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]}{f = \langle \rangle_A} \ (unicidad)$$

$\mathcal{D}[\mathcal{C}]$ tiene un objeto dualizante

$$\bot \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}]) \ (objeto \ dualizante)$$

$$\frac{A \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{d_A^{-1} : (A \multimap \bot) \multimap \bot \ \to A \ en \ \mathcal{D}[\mathcal{C}]} \ (inverso)$$

$$\frac{A \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{(c_{A,A \multimap \bot}; \varepsilon_{A,\bot})^{\dagger}; d_A^{-1} = id_A} \qquad \frac{A \ \in \ Ob(\mathcal{D}[\mathcal{C}])}{d_A^{-1}; (c_{A,A \multimap \bot}; \varepsilon_{A,\bot})^{\dagger} = id_{(A \multimap \bot) \multimap \bot}}$$

Parte II

Álgebra con Tipos Ordenados

Capítulo 1

Introducción (Parte II)

A finales de los años 70 aparecieron dos artículos pioneros sobre la semántica de subtipos, escritos por Goguen [56] y por Reynolds [136]. Aunque ambos enfoques poseían algunas similitudes formales y compartían un punto de vista algebraico común, las intuiciones que formalizaban eran diferentes, a saber:

1. una noción de *subtipo como inclusión* en el artículo de Goguen, y

2. una noción de *conversión implícita* (o *coerción*) en el artículo de Reynolds.

La primera intuición ha sido seguida y desarrollada posteriormente por varios autores en un contexto de primer orden en tales trabajos como [55, 58, 129, 62, 115]; esta intuición ha dado lugar al diseño de lenguajes de programación funcionales [43, 59] y de lenguajes que combinan programación funcional con programación relacional, dirigida a objetos y concurrente [60, 144, 61, 112]. La segunda intuición ha sido asimismo objeto de investigación en un contexto de orden superior; desde la aparición de artículos como [122, 25, 138] mucho ha sido hecho por diversos autores, como explicaremos más tarde. Además, se han diseñado lenguajes basados en estas nociones como Fun [28] y Quest [26]; estas ideas también influenciarán futuras versiones de otros lenguajes funcionales existentes, como por ejemplo ML [120].

Sin embargo, estas dos líneas de trabajo han tenido escasa interacción mutua y—con pocas excepciones[1]—casi nada se ha hecho de cara a comparar sus relativos pros y contras. Creemos que de tal comparación se puede obtener un enriquecimiento mutuo y este trabajo debe verse como un primer paso en esa dirección[2]. Concretamente, argumentamos que ninguna de estas intuiciones es por sí sola suficiente para conseguir una semántica de subtipos completamente satisfactoria, y proponemos un marco semántico en el que ambas intuiciones pueden coexistir y al mismo tiempo ser legítimamente distinguidas.

Por ejemplo, una de las características más interesantes de la noción de "subtipo como inclusión" es que es *completamente seguro* mover datos y realizar operaciones desplazándo-

[1] Tales como [115] que discute inclusiones y coerciones en un contexto de primer orden, y [63] que compara propuestas para programación dirigida a objetos en ambos enfoques.

[2] Aunque muy diferente del nuestro en estilo y punto de vista semántico, el reciente trabajo de Z. Qian [133] tiene objetivos bastante semejantes; no obstante, sus definiciones nos parecen difíciles de comparar con los trabajos existentes en teoría de tipos de orden superior.

se arriba y abajo en la jerarquía de subtipos, por lo que se puede ignorar prácticamente en qué tipo se está trabajando. Esta noción de subtipo es probablemente la más natural y la más ampliamente afianzada, y está perfectamente de acuerdo con la práctica y notación tradicionales en matemáticas, donde por ejemplo podemos sumar el número 3 a la expresión compleja $(-i) * i$ y evaluar entonces la expresión resultante al número natural 4, o en cambio podemos evaluar primero $(-i) * i$ a 1 y después sumar los números naturales 3 y 1 para obtener el mismo resultado 4. Esta seguridad en el movimiento de datos arriba y abajo está garantizada por el siguiente axioma de "conservación de la información": si $\tau \leq \tau'$,

$$\forall x, y : \tau \qquad x =_{\tau} y \iff x =_{\tau'} y$$

que típicamente se encuentra implícito en trabajos como [62], donde la relación de igualdad se define de forma independiente del tipo.

En contraste, tal seguridad no es posible en el enfoque de conversiones implícitas, donde el anterior axioma no es cierto, incluso en el caso en que las relaciones de subtipo para los tipos básicos son todas inclusiones. Esta situación puede ilustrarse mediante la siguiente regla para espacios funcionales

$$(\Rightarrow) \quad \frac{\tau \leq \tau' \qquad \rho \leq \rho'}{(\tau' \Rightarrow \rho) \leq (\tau \Rightarrow \rho')}$$

debida a Reynolds [136], y que aparece en todos los trabajos sobre subtipos en un contexto de orden superior de los que somos conscientes. Consideremos, por ejemplo, los tipos básicos $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$, con constantes 1, 2 de tipo $\mathbf{2}$ y 1, 2, 3 de tipo $\mathbf{3}$, y una inclusión de subtipo $\mathbf{2} \leq \mathbf{3}$, y consideremos un tipo básico $\mathbb{R}$ de números reales. Entonces, en cualquier categoría semántica razonable, sea de conjuntos (intuicionistas o no), sea de espacios topológicos o sea de otra cosa, podemos aplicar la regla anterior con $\tau = \mathbf{2}$, $\tau' = \mathbf{3}$, y $\rho = \rho' = \mathbb{R}$ obteniendo

$$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbb{R}) \leq (\mathbf{2} \Rightarrow \mathbb{R}).$$

Así pues lo que esta regla nos dice es que el espacio euclídeo tridimensional es, desde este punto de vista, un subtipo (!) del plano euclídeo. Está claro que aquí por "subtipo" se entiende algo completamente diferente de una inclusión entre tipos. El significado real es que la inclusión $j : \mathbf{2} \hookrightarrow \mathbf{3}$ induce una *restricción*

$$(j \Rightarrow \mathbb{R}) : (\mathbf{3} \Rightarrow \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbf{2} \Rightarrow \mathbb{R})$$

que no es otra cosa que la proyección de un punto en el espacio a sus dos primeras coordenadas x, y en el plano. Esta conversión implícita de puntos en el espacio a puntos en el plano no cumple el axioma de "conservación de la información"; por ejemplo, los puntos $p = (1, 1, 1)$ y $q = (1, 1, 2)$ satisfacen $p \neq_{(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbb{R})} q$, pero por supuesto $p =_{(\mathbf{2} \Rightarrow \mathbb{R})} q$. Por lo tanto, tales conversiones implícitas son *inseguras* en el sentido de que, una vez la conversión ha sido aplicada, no hay en general ninguna forma de recuperar el dato original, porque información esencial puede haberse perdido. El caso extremo de pérdida de información aparece en el llamado *tipo universal Top*, presente en muchos de los trabajos existentes, y que contiene cualquier otro tipo τ como un subtipo $\tau \leq \mathit{Top}$, puesto que Top se interpreta como un objeto final 1, de forma que $x =_{\mathit{Top}} y$ para cualesquiera x, y. En consecuencia, ninguna información que entre en *Top* puede jamás salir; esto sugiere la imagen de un "agujero negro" como una intuición más adecuada para *Top* que pensar en él como el universo.

La principal cuestión que la anterior discusion intenta poner en claro es que *dos intuiciones semánticas completamente diferentes se confunden bajo la denominación de "subtipo,"* a saber, las nociones de inclusión y de conversión implícita. Creemos que sería una equivocación pensar que hay que *elegir* una de estas nociones a costa de la otra; efectivamente la anterior discusión muestra que cualquier elección tendría consecuencias indeseables. Por ejemplo, las buenas propiedades de conservación de información y las asociadas intuiciones y facilidad en la manipulación de datos que la noción de inclusión tiene se perderían al tomar partido por conversiones implícitas; pero por el otro lado insistir en inclusiones como la única noción pertinente también sería indeseable, pues se perdería la capacidad proporcionada por la regla ($\Rightarrow$) de pasar como argumentos funciones con un dominio de definición estrictamente mayor de lo exigido.

Nuestra propuesta es intentar conseguir lo mejor de ambos mundos *distinguiendo* ambas nociones tanto sintáctica como semánticamente. En nuestra opinión, la noción de inclusión es la más intuitiva, posee las propiedades más interesantes, y es la noción mejor entendida por los no especialistas; por lo tanto, usamos el nombre *subtipos* para tipos relacionados por inclusiones y la notación $\tau \leq \tau'$ sólo en este caso. Para la noción de conversión implícita usamos la terminología *subtipos generalizados* y la notación $\tau \leq: \tau'$. Ambas nociones se relacionan por medio de la regla

$$\frac{\tau \leq \tau'}{\tau \leq: \tau'}$$

que justifica asimismo nuestra terminología. De este modo, las interesantes ventajas de la noción de subtipo como inclusión se conservan y se hacen explícitas en la sintaxis y la semántica, sin perder los mecanismos adicionales que la noción de subtipo como conversión implícita proporciona. Un beneficio inmediato de este marco—ilustrado en detalle en algunos casos, pero válido también para otros constructores de tipos que no tratamos explícitamente en este trabajo—es la posibilidad de tener reglas más informativas para el *subtipado estructural* de diferentes constructores de tipos. Por ejemplo, la regla ($\Rightarrow$) es válida sólo para la relación $\leq:$; para la relación $\leq$ se requiere una versión más restringida. De la misma forma, reglas para vectores (*records*) necesitan restricciones análogas. En contraste con los casos que acabamos de mencionar, reglas de subtipado estructural para productos no necesitan ninguna restricción para la relación $\leq$.

Nuestra principal tarea en este trabajo es generalizar la semántica de primer orden de subtipos como inclusiones presentada en [62] a orden superior, consiguiendo de esta forma una teoría de orden superior de subtipos inclusivos con interesantes propiedades, incluyendo la de "conservación de la información," una lógica ecuacional completamente desarrollada (algo no disponible hasta ahora en otros enfoques de orden superior), una semántica categórica muy general, teoremas de completitud e inicialidad, así como la flexibilidad adicional en el tipado proporcionada por la técnica de los "retractos" [58, 62] que ha resultado ser muy útil y conveniente en las implementaciones de OBJ2 y OBJ3 [43, 59]. Además, también demostramos que nuestra lógica ecuacional de orden superior de subtipos es conservativa sobre la original lógica ecuacional de primer orden.

Nuestra intención en este trabajo es algo modesta en el sentido de que la teoría que desarrollamos es la más básica posible, o sea un lambda cálculo tipado con productos y subtipos como inclusiones. Sin embargo, la extensión a cálculos más ricos no debería presentar dificultades especiales siguiendo ideas análogas a las ya desarrolladas para la noción de subtipo como conversión implícita en trabajos tales como [28, 24, 18, 26, 35, 4, entre otros]. A pesar de restringirnos a un cálculo muy simple, permitimos la generalidad y conveniencia adicionales de tipos básicos definibles ecuacionalmente, para los cuales las relaciones de subtipo y operaciones ambiguas (o sobrecargadas) se pueden especificar como en [62]. Tales operaciones ambiguas soportan tanto *polimorfismo de subtipos*, como cuando $+$ se define para los números naturales, enteros, racionales y complejos, y también *polimorfismo ad hoc*, como cuando $+$ se define para tipos no relacionados entre sí como por ejemplo los valores de verdad y los números naturales.

Nuestra noción de subtipo como inclusión es muy general y puede interpretarse en muchas categorías, incluyendo categorías que son esencialmente “modelos de términos.” Por lo tanto, la primera tarea en este trabajo es generalizar la teoría de primer orden del álgebra con tipos ordenados [62] a modelos de primer orden en categorías generales siguiendo las ideas de la semántica funtorial de Lawvere para la lógica ecuacional [94]. En un segundo paso, generalizamos la semántica categórica de primer orden a orden superior.

La integración de las relaciones $\leq$ y $\leq$: se trata en el Capítulo 5, y discutimos un ejemplo muy natural de esta integración en modelos de relaciones de equivalencia parciales (*per's*); sin embargo, un tratamiento completo del sistema combinado de ambas relaciones tendrá que esperar una publicación futura. En las conclusiones finales discutimos posibles direcciones de investigación sugeridas por el presente trabajo que desearíamos explorar en el futuro.

Capítulo 2

Álgebra con tipos ordenados

El álgebra con tipos ordenados es una generalización muy expresiva del álgebra heterogénea obtenida al introducir una relación de orden en el conjunto de tipos, interpretada como inclusión, y permitir el uso de símbolos de operación ambiguos. En este capítulo repasamos las definiciones y resultados básicos del álgebra con tipos ordenados, incluyendo signatura, álgebra, homomorfismo, la construcción del álgebra de términos, deducción ecuacional, y los teoremas de corrección, completitud e inicialidad. Este capítulo es un breve resumen del material contenido en las Secciones 2 y 3 de [62], donde remitimos al lector para un tratamiento detallado, incluyendo demostraciones y aspectos aquí omitidos; un resumen más detallado de este material aparece también en [115].

Suponemos que el lector está familiarizado con el álgebra heterogénea, en particular con los conceptos de signatura, álgebra, homomorfismo y ecuación en ese marco (véase, por ejemplo, [114]).

Notación: Dado un conjunto S, denotamos por $\overline{s}$ una lista $s_1 \ldots s_n$ $(n \geq 0)$ en S^* cuya longitud n se deja a menudo implícita en el contexto; la lista vacía se denota ε.

Si $(S, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, el orden $\leq$ se extiende a listas de la misma longitud en S^* componente a componente, y se denota también $\leq$, es decir,

$$s_1 \ldots s_n \leq r_1 \ldots r_n \iff s_i \leq r_i \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Dado un S-conjunto $A = \{A_s \mid s \in S\}$, es decir una familia de conjuntos con índices en S, si $\overline{s} = s_1 \ldots s_n \neq \varepsilon$, escribimos $A_{\overline{s}}$ para denotar el producto cartesiano $A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$, y si $\overline{s}$ es la lista vacía ε, A_ε es un conjunto unitario denotado 1. De forma análoga, si $h = \{h_s : A_s \to B_s \mid s \in S\}$ es una S-función entre los S-conjuntos A y B, escribimos $h_{\overline{s}}$ para denotar $h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n} : A_{\overline{s}} \longrightarrow B_{\overline{s}}$, y h_ε es id_1.

En lo que sigue, abreviamos habitualmente la frase "con tipos ordenados" a "c.t.o.".

2.1. Signaturas, álgebras y homomorfismos

Definición 1 [62] Una *signatura con tipos ordenados*, abreviado a *signatura c.t.o.*, es un triple $(S, \leq, \Sigma)$ tal que (S, Σ) es una signatura heterogénea (es decir, un conjunto de tipos

S y un $S^* \times S$-conjunto $\Sigma = \{\Sigma_{\overline{s},s} \mid \overline{s} \in S^*, s \in S\}$ de símbolos de operación[1]), $(S, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y los símbolos de operación en la signatura satisfacen la siguiente *condición de monotonía*:

$$\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s} \cap \Sigma_{\overline{r},r} \ \text{ y } \ \overline{s} \leq \overline{r} \ \text{ implican } \ s \leq r. \ \square$$

Cuando el conjunto parcialmente ordenado de tipos está claro, escribimos simplemente Σ para denotar una signatura con tipos ordenados.

Conviene destacar el hecho de que, contrariamente a la práctica habitual en álgebra heterogénea, los conjuntos de símbolos de operación $\Sigma_{\overline{s},s}$ en una signatura c.t.o. no sólo no se suponen disjuntos dos a dos, sino que se dan condiciones explícitas para el caso en que el mismo símbolo de operación aparece con dos rangos distintos (un poco más adelante veremos la condición de regularidad que también se aplica en este caso). Esta situación se conoce como *ambigüedad* o *sobrecarga* (*overloading*) y se dice que el símbolo de operación es *ambiguo* o está *sobrecargado*. La posibilidad de operaciones ambiguas junto con la relación de subtipo constituye una de las características más interesantes y expresivas a la hora de escribir especificaciones usando álgebra con tipos ordenados. Por ejemplo, esto permite justificar dentro de un marco formal la práctica habitual de sobrecargar los símbolos de operaciones aritméticas en la jerarquía numérica. El Ejemplo 15 ilustra este caso.

Definición 2 [62] Sea $(S, \leq, \Sigma)$ una signatura c.t.o. Una $(S, \leq, \Sigma)$-*álgebra* $\mathbf{A}$ es una (S, Σ)-álgebra heterogénea $\mathbf{A}$ (es decir, para cada $s \in S$ un conjunto A_s y para cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$ una función $A_\sigma^{\overline{s},s} : A_{\overline{s}} \to A_s$) que satisface las siguientes *condiciones de monotonía*:

1. $s \leq s'$ en S implica $A_s \subseteq A_{s'}$, y
2. $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s} \cap \Sigma_{\overline{r},r}$ y $\overline{s} \leq \overline{r}$ implican que $A_\sigma^{\overline{s},s} : A_{\overline{s}} \to A_s$ y $A_\sigma^{\overline{r},r} : A_{\overline{r}} \to A_r$ coinciden en los elementos de $A_{\overline{s}}$. $\square$

Cuando el conjunto ordenado de tipos está claro, nos referimos a una $(S, \leq, \Sigma)$-álgebra $\mathbf{A}$ simplemente como una Σ-álgebra.

Definición 3 [62] Sea $(S, \leq, \Sigma)$ una signatura c.t.o. Dadas dos $(S, \leq, \Sigma)$-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, un $(S, \leq, \Sigma)$-*homomorfismo* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un (S, Σ)-homomorfismo heterogéneo (es decir, una S-función $h = \{h_s : A_s \to B_s \mid s \in S\}$ satisfaciendo la *condición de homomorfismo* $h_s(A_\sigma^{\overline{s},s}(a)) = B_\sigma^{\overline{s},s}(h_{\overline{s}}(a))$ para todo $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$ y $a \in A_{\overline{s}}$) que además satisface la siguiente *condición de restricción*:

$$s \leq s' \ \text{ y } \ a \in A_s \ \text{ implican } \ h_s(a) = h_{s'}(a). \ \square$$

Observación 4 Con estas definiciones de Σ-álgebra y Σ-homomorfismo c.t.o., tenemos una categoría denotada $\underline{OSAlg_\Sigma}$. $\square$

[1] Cuando $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$, decimos que σ tiene *rango* $\langle \overline{s}, s \rangle$, *aridad* $\overline{s}$ y *tipo* o *coaridad* s. A veces Σ también denota la unión $\bigcup_{\overline{s} \in S^*, s \in S} \Sigma_{\overline{s},s}$.

Observación 5 Por definición, toda $(S,\leq,\Sigma)$-álgebra es una (S,Σ)-álgebra y todo $(S,\leq,\Sigma)$-homomorfismo es un (S,Σ)-homomorfismo, por lo que, si $\underline{Alg}_\Sigma$ denota la categoría de Σ-álgebras y Σ-homomorfismos heterogéneos, tenemos un funtor de olvido $\underline{OSAlg}_\Sigma \longrightarrow \underline{Alg}_\Sigma$. Cuando el orden en S es el discreto, es decir, $s \leq s'$ sii $s = s'$, el anterior funtor de olvido se convierte en la identidad y obtenemos como caso especial de la definición con tipos ordenados la noción de álgebra heterogénea y la correspondiente categoría $\underline{Alg}_\Sigma$. □

2.2. Álgebras de términos e inicialidad

Construimos un álgebra de términos, inicial en la categoría $\underline{OSAlg}_\Sigma$, de la misma forma que el álgebra de términos heterogénea T_Σ es inicial en $\underline{Alg}_\Sigma$.

Definición 6 [62] Dada una signatura c.t.o. $(S,\leq,\Sigma)$, el álgebra de términos con tipos ordenados $\mathcal{T}_\Sigma$ se define como el menor S-conjunto $\mathcal{T}_\Sigma = \{\mathcal{T}_{\Sigma,s} \mid s \in S\}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\Sigma_{\varepsilon,s} \subseteq \mathcal{T}_{\Sigma,s}$ para $s \in S$.

2. $\mathcal{T}_{\Sigma,s} \subseteq \mathcal{T}_{\Sigma,s'}$ si $s \leq s'$.

3. Si $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$ y $t_i \in \mathcal{T}_{\Sigma,s_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$, con $\overline{s} = s_1 \ldots s_n \neq \varepsilon$, entonces $\sigma(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{T}_{\Sigma,s}$.

Además, para $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$, la función $\mathcal{T}_{\Sigma,\sigma}^{\overline{s},s} : \mathcal{T}_{\Sigma,\overline{s}} \to \mathcal{T}_{\Sigma,s}$ lleva $t_1,\ldots,t_n$ a $\sigma(t_1,\ldots,t_n)$. □

Obsérvese que la cláusula 2 en esta definición corresponde a la regla llamada de *subsunción* en la literatura sobre lambda cálculo con subtipos [35].

Obviamente, $\mathcal{T}_\Sigma$ es un álgebra con tipos ordenados. Es importante notar que en general $\mathcal{T}_{\Sigma,s}$ no es igual a $T_{\Sigma,s}$ ni tampoco a $\bigcup_{s'\leq s} T_{\Sigma,s'}$. Un término con tipos ordenados puede tener muchos tipos diferentes; en particular, si t tiene tipo s, entonces t también tiene tipo s' para todo $s' \geq s$. Es más, como un símbolo de operación σ puede tener varios rangos diferentes, un término $\sigma(t_1,\ldots,t_n)$ puede tener incluso tipos que no son directamente comparables. Debido a esta situación, el álgebra $\mathcal{T}_\Sigma$ no es inicial en general; para conseguir la inicialidad, exigimos la siguiente condición:

Definición 7 [62] Una signatura con tipos ordenados $(S,\leq,\Sigma)$ es *regular* sii dados $\sigma \in \Sigma_{\overline{r},r}$ y $\overline{s} \leq \overline{r}$ en S^*, el conjunto de rangos $\{\langle\overline{q},q\rangle \in S^* \times S \mid \overline{s} \leq \overline{q}$ *y* $\sigma \in \Sigma_{\overline{q},q}\}$ tiene un mínimo. □

Proposición 8 [62] Dada una signatura c.t.o. regular $(S,\leq,\Sigma)$, para cada término t en $\mathcal{T}_\Sigma$ existe un mínimo $s \in S$, llamado el *tipo mínimo* de t y denotado $ls(t)$, tal que $t \in \mathcal{T}_{\Sigma,s}$.

Demostración: Si $t = \sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$, $ls(t)$ es el mínimo s tal que $\sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$ (que existe por regularidad).

Si $t = \sigma(t_1,\ldots,t_n)$ donde $ls(t_i) = r_i$ (por hipótesis de inducción) y $\sigma \in \Sigma_{s_1\ldots s_n,s}$ con $r_i \leq s_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, el tipo mínimo de t es q tal que $\langle\overline{q},q\rangle$ es el mínimo rango con $\overline{r} \leq \overline{q}$ y $\sigma \in \Sigma_{\overline{q},q}$. □

Nótese que el algoritmo dado en la anterior demostración no sólo proporciona el tipo mínimo de un término t sino que también da lugar a un análisis sintáctico (*parsing*) canónico de t que es mínimo con respecto al orden apropiado (cada instancia de un símbolo de operación σ tiene un rango mínimo con respecto a los correspondientes argumentos); véase también el artículo [79].

Como en el caso heterogéneo, términos con variables pueden verse como un caso especial de términos básicos, usando el truco de aumentar la signatura con constantes adicionales correspondientes a las variables: dada una S-familia $X = \{X_s \mid s \in S\}$ de conjuntos de variables disjuntos dos a dos, y disjuntos de Σ, definimos la signatura c.t.o. $(S, \leq, \Sigma(X))$ mediante $\Sigma(X)_{\varepsilon,s} = \Sigma_{\varepsilon,s} \cup X_s$ y $\Sigma(X)_{\overline{s},s} = \Sigma_{\overline{s},s}$ para $\overline{s} \neq \varepsilon$. Nótese que $\Sigma(X)$ es regular si Σ lo es; en particular, el tipo mínimo de una variable es el único tipo que tiene asignado en el conjunto de variables. Entonces, construimos como antes $\mathcal{T}_{\Sigma(X)}$ y, olvidando las constantes en X, podemos verla como una Σ-álgebra c.t.o. denotada $\mathcal{T}_\Sigma(X)$.

Teorema 9 [62] Dada una signatura c.t.o. regular $(S, \leq, \Sigma)$, una $(S, \leq, \Sigma)$-álgebra $\mathbf{A}$, y una asignación f de X en $\mathbf{A}$ (es decir, una S-función $f : X \to A$), existe un único homomorfismo c.t.o. $f^* : \mathcal{T}_\Sigma(X) \to \mathbf{A}$ que extiende f, es decir, $f^*_s(x) = f_s(x)$ para todo $x \in X_s$ y para todo $s \in S$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_\Sigma(X)$ es la Σ-álgebra c.t.o. libre generada por X; en particular, $\mathcal{T}_\Sigma$ es el álgebra inicial en $\underline{OSAlg}_\Sigma$. $\Box$

En lo que sigue, adoptaremos las siguientes convenciones sobre la representación de conjuntos de variables y términos:

1. Escribimos $t : s$ para indicar que el término c.t.o. t tiene tipo s, es decir, que t pertenece a $\mathcal{T}_\Sigma(X)_s$ (recuérdese que un término c.t.o. puede tener varios tipos diferentes).

2. Un S-conjunto finito de variables X se representa como una lista $x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n$, o más brevemente $\overline{x} : \overline{s}$, *donde todas las variables x_i son distintas.*

3. La notación $t(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n)$, o $t(\overline{x} : \overline{s})$, se usa para representar un término t cuyas variables están incluidas en el conjunto $\overline{x} : \overline{s}$.

Si X e Y son conjuntos de variables, una asignación de la forma $f : X \to \mathcal{T}_\Sigma(Y)$ se llama una *sustitución*. Si $X = x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n$ y f lleva x_i a t_i $(i = 1, \ldots, n)$, entonces la sustitución lleva $t' \in \mathcal{T}_\Sigma(X)_s$ al término $f^*_s(t')$, donde f^* es el único homomorfismo c.t.o. $f^* : \mathcal{T}_\Sigma(X) \to \mathcal{T}_\Sigma(Y)$ que extiende f. El término $f^*_s(t')$ se denota $t'(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$ o más brevemente $t'(\overline{t}/\overline{x})$.

2.3. Ecuaciones, satisfacción y completitud

Consideramos la noción de ecuación en el marco del álgebra con tipos ordenados. En álgebra heterogénea, una ecuación está dada por un conjunto de variables y un par de términos del mismo tipo. En álgebra con tipos ordenados disponemos de más flexibilidad y simplemente requerimos que los dos términos tengan un supertipo común. Para que esto funcione adecuadamente con respecto a deducción ecuacional y satisfacción, necesitamos una condición de coherencia en signaturas con tipos ordenados.

Definición 10 Una signatura con tipos ordenados $(S, \leq, \Sigma)$ es *localmente filtrada* si y sólo si el conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ es localmente filtrado, o sea, cada componente conexa es filtrada[2].

Una signatura c.t.o. es *coherente* si y sólo si es regular y localmente filtrada. $\square$

Definición 11 [62] Dada una signatura c.t.o. coherente $(S, \leq, \Sigma)$, una Σ-*ecuación* es un triple $\langle \overline{x} : \overline{s}, t, t' \rangle$ donde $\overline{x} : \overline{s}$ es un conjunto (finito) de variables, y t y t' son términos en $\mathcal{T}_\Sigma(\overline{x} : \overline{s})$ tales que $ls(t)$ y $ls(t')$ están en la misma componente conexa de $(S, \leq)$. Denotaremos tal ecuación por $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$. Nótese que, al ser la signatura localmente filtrada, dada una ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ siempre existe un tipo s tal que $t : s$ y $t' : s$; si queremos hacer tal tipo explícito usamos la notación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t' : s$.

Una *teoría con tipos ordenados*, o *teoría c.t.o.*, consiste en una signatura c.t.o. coherente $(S, \leq, \Sigma)$ y un conjunto Γ de Σ-ecuaciones. $\square$

Definición 12 [62] Una Σ-álgebra $\mathbf{A}$ *satisface* una Σ-ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ si y sólo si $f^*_{ls(t)}(t) = f^*_{ls(t')}(t')$ en $\mathbf{A}$ para toda asignación $f : (\overline{x} : \overline{s}) \to A$.

Esta noción se extiende de la forma obvia a un conjunto Γ de Σ-ecuaciones y en este caso decimos que $\mathbf{A}$ es una (Σ, Γ)-álgebra. Denotamos por $\underline{OSAlg}_{\Sigma,\Gamma}$ la subcategoría plena de $\underline{OSAlg}_\Sigma$ cuyos objetos son las (Σ, Γ)-álgebras. $\square$

Dado un conjunto Γ de Σ-ecuaciones, escribimos $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ para denotar que la ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es *derivable a partir de* Γ mediante las siguientes reglas de deducción ecuacional con tipos ordenados (en la presentación de estas reglas, suponemos que todos los términos y ecuaciones c.t.o. que aparecen están bien formados):

Reflexividad: $$\frac{}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t}$$

Simetría: $$\frac{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t' = t}$$

Transitividad: $$\frac{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t' \qquad \Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t' = t''}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t''}$$

Congruencia: $$\frac{\Gamma \vdash (\overline{y} : \overline{r})\, t_i = t'_i : s_i \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad t''(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n) \in \mathcal{T}_\Sigma(\overline{x} : \overline{s})}{\Gamma \vdash (\overline{y} : \overline{r})\, t''(\overline{t}/\overline{x}) = t''(\overline{t'}/\overline{x})}$$

Sustitución: $$\frac{t_i : s_i \in \mathcal{T}_\Sigma(\overline{y} : \overline{r}) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n)\, t' = t'' \ \in \ \Gamma}{\Gamma \vdash (\overline{y} : \overline{r})\, t'(\overline{t}/\overline{x}) = t''(\overline{t}/\overline{x})}$$

Teorema 13 (*Corrección y Completitud*) [62] Dada una teoría con tipos ordenados $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ y términos $t, t' \in \mathcal{T}_\Sigma(\overline{x} : \overline{s})$, la ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es derivable a partir de Γ sii es satisfecha por todas las (Σ, Γ)-álgebras con tipos ordenados. $\square$

[2] Las *componentes conexas* de un conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ son las clases de equivalencia de la clausura transitiva y simétrica de $\leq$. Un conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ es *filtrado* sii para cualesquiera elementos $s, s' \in S$ existe $s'' \in S$ tal que $s \leq s''$ y $s' \leq s''$.

La completitud en este teorema se demuestra usando la (Σ,Γ)-álgebra $\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\overline{x} : \overline{s})$ obtenida al hacer el cociente de la Σ-álgebra $\mathcal{T}_{\Sigma}(\overline{x} : \overline{s})$ por la Σ-congruencia con tipos ordenados $\equiv_{\Gamma(\overline{x}:\overline{s})}$ definida por $t \equiv_{\Gamma(\overline{x}:\overline{s})} t'$ sii la ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es derivable a partir de Γ. Una Σ-*congruencia con tipos ordenados* sobre una Σ-álgebra $\mathbf{A}$ es una congruencia heterogénea $\equiv\, = \{\equiv_s \mid s \in S\}$ sobre $\mathbf{A}$ (es decir, una S-relación de equivalencia conservada por las operaciones en Σ) tal que si $s \leq s'$ y $a, a' \in A_s$, entonces $a \equiv_s a'$ sii $a \equiv_{s'} a'$. En el caso de $\equiv_{\Gamma(\overline{x}:\overline{s})}$ esto es cierto porque la derivabilidad es independiente de los tipos. Además, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 14 [62] Dada una teoría con tipos ordenados $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$, $\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(X)$ es la (Σ,Γ)-álgebra c.t.o. libre generada por X; en particular, $\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\emptyset)$ es una (Σ,Γ)-álgebra inicial. $\square$

La clase de equivalencia de un término c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{s})$ con respecto a la congruencia c.t.o. $\equiv_{\Gamma(\overline{x}:\overline{s})}$ se denota $[t]$, es decir, $[t] = \{t' \in \mathcal{T}_{\Sigma}(\overline{x} : \overline{s}) \mid \Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'\}$; a veces, si queremos hacer la teoría explícita, la clase de equivalencia $[t]$ se denota $[t]_{\Sigma,\Gamma}$.

Ejemplo 15 Supongamos que `INT` es una teoría con tipos ordenados que especifica los números enteros como su álgebra inicial; entonces, la siguiente teoría con tipos ordenados `RAT`—una ligera variante de una especificación incluida en un ejemplo mucho más completo de la jerarquía numérica que aparece en [62]—especifica los números racionales. Usamos la notación de OBJ [59] para presentarla; la línea `protecting INT` afirma que `INT` es una subteoría de `RAT`, y además que los enteros no son modificados en el sentido de que no se añaden datos de tipo `Int` y que números diferentes no se identifican por las nuevas ecuaciones en `RAT`. Las declaraciones `[assoc comm]` afirman que las operaciones `_+_` y `_*_` son ambas asociativas y conmutativas. Obsérvese que las operaciones `_/_`, `-_` y `_*_` son ambiguas, siguiendo el uso matemático habitual.

```
obj RAT is
  protecting INT .
  sorts NzRat Rat .
  subsorts Int < Rat .
  subsorts NzInt < NzRat < Rat .
  op _/_ : Rat NzRat -> Rat .
  op _/_ : NzRat NzRat -> NzRat .
  op -_  : Rat -> Rat .
  op -_  : NzRat -> NzRat .
  op _+_ : Rat Rat -> Rat [assoc comm] .
  op _*_ : Rat Rat -> Rat [assoc comm] .
  op _*_ : NzRat NzRat -> NzRat [assoc comm] .
  vars R S : Rat .
  vars R' S' T': NzRat .
  eq R / (R' / S') = (R * S') / R' .
  eq (R / R') / S' = R / (R' * S') .
  eq (R' * T') / (S' * T') = R' / S' .
```

```
  eq R / 1 = R .
  eq 0 / R' = 0 .
  eq R / (- R') = (- R) / R' .
  eq - (R / R') = (- R) / R' .
  eq R + (S / R') = ((R * R') + S) / R' .
  eq R * (S / R') = (R * S) / R' .
jbo
```

El álgebra inicial especificada por la teoría con tipos ordenados RAT es el álgebra de los números racionales. Este ejemplo ilustra la expresividad del álgebra con tipos ordenados y su flexibilidad para tratar operaciones parcialmente definidas. Nótese que, debido al problema ocasionado por la división por cero, este ejemplo no puede especificarse de forma realmente satisfactoria usando álgebra heterogénea, donde se requiere el uso de constantes de error y operaciones auxiliares (véase, por ejemplo, [39]). □

Capítulo 3

Semántica funtorial del álgebra con tipos ordenados

La lógica ecuacional fue el primer ejemplo de lógica categórica considerado por Lawvere en su tesis doctoral [94]. Dada una teoría ecuacional homogénea (Σ, Γ), Lawvere construyó una categoría con productos finitos $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ tal que (Σ, Γ)-álgebras $\mathbf{A}$ pueden ponerse en correspondencia biyectiva con funtores

$$\mathbf{A}^{\bullet} : \mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \underline{\mathit{Set}}$$

que conservan productos estrictamente, es decir, productos (elegidos[1]) en $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ son transformados en productos cartesianos en $\underline{\mathit{Set}}$. Esto puede generalizarse a (Σ, Γ)-álgebras en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ con productos finitos, que se pueden definir como funtores $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \mathcal{C}$ que conservan productos estrictamente.

La categoría $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ es fácil de describir. Sus objetos son los números naturales. Un morfismo $[t] : n \longrightarrow 1$ es la clase de equivalencia módulo las ecuaciones Γ de un Σ-término t cuyas variables están entre $x_1, \ldots, x_n$. Un morfismo $n \longrightarrow m$ es una m-tupla de morfismos $n \longrightarrow 1$. La composición de morfismos viene dada por sustitución en los términos. Por ejemplo, $\langle [x_7 * x_3], [x_4 + x_5] \rangle ; [x_2 + x_1] = [(x_4 + x_5) + (x_7 * x_3)]$ (para una signatura que incluye las operaciones aritméticas $+$ y $*$, y usando orden diagramático para la composición de morfismos en una categoría). Es fácil ver entonces que el objeto n es el n-ésimo producto del objeto 1 con proyecciones $[x_1], \ldots, [x_n]$, y, en general, que el producto de los objetos n y m es $n + m$. El funtor $\mathbf{A}^{\bullet}$ asociado con el álgebra $\mathbf{A}$ lleva el morfismo $[t] : n \longrightarrow 1$ a la operación derivada $t_A : \mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}$ asociada al término t en el álgebra $\mathbf{A}$. Bajo esta correspondencia entre álgebras y funtores, una ecuación $t = t'$ es satisfecha por una (Σ, Γ)-álgebra $\mathbf{A}$ sii $\mathbf{A}^{\bullet}([t]) = \mathbf{A}^{\bullet}([t'])$.

Lawvere también demostró que *cualquier* categoría con productos finitos y con los números naturales por objetos tal que n es el n-ésimo producto de 1 es isomorfa a $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ para una teoría ecuacional (Σ, Γ). De hecho, varias *presentaciones* equivalentes mediante operaciones y ecuaciones son posibles para un mismo concepto, como por ejemplo grupos.

[1] La definición categórica de productos y otras construcciones universales sólo los determina salvo isomorfismo; como necesitamos fijar la estructura, suponemos que se ha realizado una elección arbitraria pero fija.

Lo que la teoría de Lawvere proporciona es una descripción *independiente de presentaciones* del concepto, y considerando funtores que conservan productos en $\underline{Set}$, también de los modelos.

El caso análogo de lógica ecuacional heterogénea fue estudiado por Bénabou en su tesis doctoral [15]. La categoría $\mathcal{L}_{\Sigma,\Gamma}$ se construye como en el caso homogéneo, pero ahora tiene como conjunto de objetos el monoide libre S^* generado por el conjunto S de tipos[2]. Pitts realiza una detallada presentación de este caso en [128] junto con una extensión a tipos de orden superior; él considera el caso en que los funtores conservan la correspondiente estructura categórica salvo isomorfismo. En este capítulo desarrollamos una semántica funtorial para el álgebra con tipos ordenados, con funtores que conservan estrictamente la estructura categórica; y en el siguiente capítulo extenderemos nuestra semántica categórica a teorías de orden superior con tipos ordenados.

3.1. Álgebras, homomorfismos y satisfacción en categorías

El primer paso en este estudio es la axiomatización de la estructura que una categoría $\mathcal{C}$ debe poseer de cara a poder definir álgebras con tipos ordenados en ella. En el caso de álgebras heterogéneas basta disponer de productos finitos; en el caso de álgebras c.t.o. necesitamos productos finitos y además morfismos adecuados para poder interpretar las inclusiones entre los conjuntos subyacentes.

Notación: Dada una categoría con (una elección de) productos finitos $\mathcal{C}$, $A_1 \times A_2$ denota el producto binario de los objetos A_1 y A_2, y 1 denota el objeto final en $\mathcal{C}$.

Las proyecciones se denotan $\pi_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$ $(i = 1, 2)$. Si $f_i : C \to A_i$ $(i = 1, 2)$ son morfismos en $\mathcal{C}$, $\langle f_1, f_2 \rangle$ denota el único morfismo $f : C \longrightarrow A_1 \times A_2$ tal que $f;\pi_i = f_i$ $(i = 1, 2)$. El único morfismo $A \to 1$ se denota $\langle\rangle_A$, o a veces simplemente $\langle\rangle$.

En general, dados objetos $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ en $\mathcal{C}$, $A_1 \times \ldots \times A_n$ denota el producto iterado $(\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3)\ldots) \times A_n$, y, dados morfismos $f_i : C \to A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ en $\mathcal{C}$, $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ denota $\langle\langle \ldots \langle\langle f_1, f_2 \rangle, f_3 \rangle \ldots \rangle, f_n \rangle$. Finalmente, las proyecciones generalizadas $\pi_i : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow A_i$ se definen mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1; \overset{(n-1)}{\ldots}; \pi_1 \\ \pi_j &= \pi_1; \overset{(n-j)}{\ldots}; \pi_1; \pi_2 \quad (j = 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Por supuesto, el producto de un objeto A es él mismo, y el producto de 0 objetos es el objeto final 1.

Nótese el abuso de notación en $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ y π_i; los dominios y codominios están habitualmente determinados por el contexto.

En este marco podemos reusar la notación introducida anteriormente para conjuntos: si $\overline{s} = s_1 \ldots s_n \neq \varepsilon$, $A_{\overline{s}}$ denota $A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$, y $h_{\overline{s}}$ denota $h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n} : A_{\overline{s}} \longrightarrow B_{\overline{s}}$; asimismo, $A_\varepsilon = 1$ y $h_\varepsilon = id_1$.

Definición 16 Una *estructura de inclusiones en una categoría* $\mathcal{C}$ con (una elección de) productos finitos es una subcategoría $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$ tal que

[2]Como nos interesan funtores que conservan estrictamente la estructura categórica, vamos a considerar una construcción ligeramente refinada.

1. $\mathcal{J}$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$.

2. Todos los morfismos en $\mathcal{J}$ son monomorfismos en $\mathcal{C}$.

3. $\mathcal{J}$ es un conjunto parcialmente ordenado.

4. $\mathcal{J}$ es cerrada bajo la operación $\_ \times \_$ sobre morfismos, es decir, si $j_i : A_i \to B_i$ $(i = 1, 2)$ son morfismos en $\mathcal{J}$, entonces $j_1 \times j_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ es también un morfismo en $\mathcal{J}$[3].

Al par $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ lo llamamos una *PI-categoría.* □

Por la condición 3, la subcategoría $\mathcal{J}$ provee a $Ob(\mathcal{C})$ con un orden denotado $\leq_{\mathcal{J}}$ y definido por $A \leq_{\mathcal{J}} B$ sii hay un morfismo $j : A \to B$ en $\mathcal{J}$. La extensión componente a componente de este orden a tuplas de objetos de la misma longitud se denota también $\leq_{\mathcal{J}}$.

Ejemplo 17 Existen muchos ejemplos naturales de PI-categorías. El ejemplo más obvio es la categoría *Set* de conjuntos y funciones junto con la subcategoría *Inc* cuyos morfismos son las inclusiones entre conjuntos; en general, categorías de conjuntos con estructura tales como espacios topológicos, conjuntos parcialmente ordenados, grupos, etc. tienen normalmente una noción de "subestructura" (subespacio topológico, subconjunto parcialmente ordenado, subgrupo, etc.) que proporciona una estructura de inclusiones en el sentido de la definición anterior.

Nótese también que cualquier categoría $\mathcal{C}$ con productos finitos tiene una estructura de inclusiones trivial *Id* determinada por la subcategoría cuyos morfismos son justamente las identidades. □

Para el resto de esta sección fijamos una PI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$.

Dada una signatura c.t.o. $(S, \leq, \Sigma)$, definimos una Σ-álgebra en $\mathcal{C}$ como sigue:

Definición 18 Para una signatura c.t.o. $(S, \leq, \Sigma)$, una $(S, \leq, \Sigma)$-*álgebra* $\mathbf{A}$ *en* $\mathcal{C}$ está determinada por los siguientes datos:

1. Un objeto A_s en $\mathcal{C}$ para cada tipo $s \in S$,

2. Un morfismo $A_\sigma^{\overline{s},s} : A_{\overline{s}} \to A_s$ en $\mathcal{C}$ para cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$,

3. Si $s \leq s'$ en S, un morfismo $A_{s \leq s'} : A_s \to A_{s'}$ en $\mathcal{J}$[4],

sujetos a la siguiente condición de monotonía: $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s} \cap \Sigma_{\overline{r},r}$ y $\overline{s} \leq \overline{r}$ implican

$$A_{\overline{s} \leq \overline{r}}; A_\sigma^{\overline{r},r} = A_\sigma^{\overline{s},s}; A_{s \leq r} : A_{\overline{s}} \longrightarrow A_r.$$

[3] Si j_1 y j_2 son monomorfismos, entonces $j_1 \times j_2$ es asimismo un monomorfismo, porque el funtor $\_ \times \_$ es un adjunto a derecha y por tanto conserva límites.

[4] Como $\mathcal{J}$ es cerrada bajo productos de morfismos, si $\overline{s} \leq \overline{r}$ en S^*, tenemos entonces un morfismo $A_{\overline{s} \leq \overline{r}} : A_{\overline{s}} \longrightarrow A_{\overline{r}}$ en $\mathcal{J}$.

$$\begin{tikzcd}
A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \arrow[r, "A_\sigma^{\overline{s},s}"] \arrow[d, "A_{s_1 \leq r_1} \times \ldots \times A_{s_n \leq r_n}"'] & A_s \arrow[d, "A_{s \leq r}"] \\
A_{r_1} \times \ldots \times A_{r_n} \arrow[r, "A_\sigma^{\overline{r},r}"] & A_r
\end{tikzcd}$$

$\square$

Es importante observar que la Definición 2 es precisamente la especialización de esta definición al caso $(\mathcal{C}, \mathcal{J}) = (\underline{Set}, \underline{Inc})$.

La definición categórica de homomorfismo es bastante sencilla:

Definición 19 Dadas dos Σ-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$, un Σ-*homomorfismo* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ consiste en una S-familia de morfismos $\{h_s : A_s \to B_s \mid s \in S\}$ en $\mathcal{C}$ tal que

1. *Condición de homomorfismo*: Para todo $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$, $\quad A_\sigma^{\overline{s},s}; h_s = h_{\overline{s}}; B_\sigma^{\overline{s},s} : A_{\overline{s}} \to B_s$.

$$\begin{tikzcd}
A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \arrow[r, "A_\sigma^{\overline{s},s}"] \arrow[d, "h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n}"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\
B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n} \arrow[r, "B_\sigma^{\overline{s},s}"] & B_s
\end{tikzcd}$$

   En particular, $A_\sigma^{\varepsilon,s}; h_s = id_1; B_\sigma^{\varepsilon,s} = B_\sigma^{\varepsilon,s}$.

2. *Condición de restricción*: Si $s \leq s'$, $\quad h_s; B_{s \leq s'} = A_{s \leq s'}; h_{s'} : A_s \to B_{s'}$.

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "A_{s \leq s'}"] \arrow[d, "h_s"'] & A_{s'} \arrow[d, "h_{s'}"] \\
B_s \arrow[r, "B_{s \leq s'}"] & B_{s'}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Observación 20 Con estas definiciones de Σ-álgebra y Σ-homomorfismo en $\mathcal{C}$, tenemos una categoría denotada $\underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})_\Sigma}$. Es claro que $\underline{OSAlg_\Sigma} = \underline{OSAlg(Set,Inc)_\Sigma}$. $\square$

Dado un Σ-término c.t.o. $t(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n) : s$ y una Σ-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$, definimos el significado de t como un morfismo $[\![t : s]\!]_A : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s$ en $\mathcal{C}$. El morfismo $[\![t]\!]_A$ se define mediante inducción sobre la estructura de t; sin embargo, un término c.t.o. se puede construir de varias formas diferentes y, por lo tanto, para que ese morfismo esté bien definido, debemos probar que es independiente de la construcción de t. Para esto necesitamos la condición de regularidad en signaturas que garantiza que t posee un tipo mínimo $ls(t)$ así como un análisis sintáctico canónico (véase la demostración de la Proposición 8 y los comentarios que la siguen). Es importante notar también que, aunque no lo hagamos explícito para facilitar la notación, la definición del morfismo $[\![t : s]\!]_A$ depende de la lista de variables $x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n$ considerada. No obstante, hay que observar que $[\![t]\!]$ no depende de los *nombres* de las variables $\overline{x}$, sino sólo de sus tipos $\overline{s}$, porque las variables son simplemente proyecciones.

Definición 21 Dadas una signatura c.t.o. regular $(S, \leq, \Sigma)$ y una $(S, \leq, \Sigma)$-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$, la *operación derivada* asociada a un Σ-término $t(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n) : s$ es el morfismo $[\![t : s]\!]_A : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s$ en $\mathcal{C}$ definido como sigue:

1. Si $t : s$ es $x_i : s_i$, $[\![x_i : s_i]\!]_A = \pi_i$.
2. Si $t = \sigma$ con $\sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$, entonces $[\![t : s]\!]_A = \langle\rangle_{A_{\overline{s}}}; A_\sigma^{\varepsilon,s}$.
3. Si $t : s'$ con $s' \leq s$, entonces $[\![t : s]\!]_A = [\![t : s']\!]_A; A_{s' \leq s}$.
4. Si $t = \sigma(t_1, \ldots, t_k)$ con $\sigma \in \Sigma_{r_1 \ldots r_k, s}$ y $t_i : r_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, entonces

$$[\![t : s]\!]_A = \langle [\![t_1 : r_1]\!]_A, \ldots, [\![t_k : r_k]\!]_A \rangle; A_\sigma^{r_1 \ldots r_k, s}. \ \square$$

En la notación $[\![t : s]\!]_A$ omitimos s o A cuando estén claros por el contexto.

El siguiente resultado expresa la coherencia semántica de las posibles diferentes construcciones de un término c.t.o.

Lema 22 Dada una Σ-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$ y un Σ-término c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{s})$,

$$[\![t : s]\!]_A = [\![t : ls(t)]\!]_A; A_{ls(t) \leq s}.$$

Por lo tanto, el significado de t es independiente de la forma en que t se construye como término c.t.o.

Demostración: Si $t = x_i$ y $s = s_i$, sabemos que $ls(t) = s$ y $A_{ls(t) \leq s}$ es la identidad.

Si $t = \sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$, $ls(t)$ es el mínimo s tal que $\sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$, y entonces

$$[\![t : s]\!] = \langle\rangle_{A_{\overline{s}}}; A_\sigma^{\varepsilon,s} = \langle\rangle_{A_{\overline{s}}}; A_\sigma^{\varepsilon,ls(\sigma)}; A_{ls(\sigma) \leq s} = [\![t : ls(t)]\!]; A_{ls(t) \leq s},$$

debido a la condición de monotonía en la definición de Σ-álgebra.

Si $t : s \leq s'$, basta notar que $A_{ls(t) \leq s}; A_{s \leq s'} = A_{ls(t) \leq s'}$ porque $\mathcal{J}$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Si $t = \sigma(t_1, \ldots, t_n)$ donde $ls(t_i) = r_i$ y $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$ con $r_i \leq s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces $ls(t) = q$ tal que $\langle \overline{q}, q \rangle$ es el mínimo rango con $\sigma \in \Sigma_{\overline{q},q}$ y $\overline{r} \leq \overline{q}$. En este caso, por la hipótesis de la inducción y ser $\mathcal{J}$ un conjunto parcialmente ordenado, tenemos

$$[\![t_i : s_i]\!] = [\![t_i : r_i]\!]; A_{r_i \leq q_i}; A_{q_i \leq s_i}.$$

De aquí, haciendo nuevo uso de la condición de monotonía,

$$\begin{aligned}
[\![t : s]\!] &= \langle [\![t_1 : s_1]\!], \ldots, [\![t_n : s_n]\!] \rangle; A_\sigma^{\overline{s},s} = \\
&\langle [\![t_1 : r_1]\!], \ldots, [\![t_n : r_n]\!] \rangle; A_{\overline{r} \leq \overline{q}}; A_{\overline{q} \leq \overline{s}}; A_\sigma^{\overline{s},s} = \\
&\langle [\![t_1 : q_1]\!], \ldots, [\![t_n : q_n]\!] \rangle; A_\sigma^{\overline{q},q}; A_{q \leq s} = \\
&[\![t : ls(t)]\!]; A_{ls(t) \leq s}. \ \Box
\end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que sustitución de términos corresponde a composición en la categoría.

Proposición 23 Dada una Σ-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$ y Σ-términos $t'(x_1 : s_1, \ldots, x_n : s_n) : s'$ y $t_i(y_1 : r_1, \ldots, y_k : r_k) : s_i \quad (i = 1, \ldots, n)$, tenemos

$$[\![t'(\overline{t}/\overline{x}) : s']\!] = \langle [\![t_1 : s_1]\!], \ldots, [\![t_n : s_n]\!] \rangle; [\![t' : s']\!] : A_{r_1} \times \ldots \times A_{r_k} \longrightarrow A_{s'}.$$

Demostración: Si $t' = x_i$,

$$[\![t'(\overline{t}/\overline{x})]\!] = [\![t_i]\!] = \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; \pi_i = \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t']\!].$$

Si $t' = \sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s'}$,

$$\begin{aligned}
&[\![t'(\overline{t}/\overline{x})]\!] = [\![\sigma]\!] = \langle\rangle_{A_{r_1} \times \ldots \times A_{r_k}}; A_\sigma^{\varepsilon,s'} = \\
&\langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; \langle\rangle_{A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}}; A_\sigma^{\varepsilon,s'} = \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t']\!].
\end{aligned}$$

Si $t' : s'' \leq s'$,

$$\begin{aligned}
&[\![t'(\overline{t}/\overline{x}) : s']\!] = [\![t'(\overline{t}/\overline{x}) : s'']\!]; A_{s'' \leq s'} = \\
&\langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t' : s'']\!]; A_{s'' \leq s'} = \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t' : s']\!].
\end{aligned}$$

Si $t' = \sigma(t'_1, \ldots, t'_k)$ donde $t'_i : q_i \ \ (i = 1, \ldots, k)$ y $\sigma \in \Sigma_{q_1 \ldots q_k, s'}$,

$$\begin{aligned}
[\![t'(\overline{t}/\overline{x})]\!] &= [\![\sigma(t'_1(\overline{t}/\overline{x}), \ldots, t'_k(\overline{t}/\overline{x}))]\!] = \\
&\langle [\![t'_1(\overline{t}/\overline{x})]\!], \ldots, [\![t'_k(\overline{t}/\overline{x})]\!] \rangle; A_\sigma^{\overline{q},s'} = \\
&\langle \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t'_1]\!], \ldots, \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t'_k]\!] \rangle; A_\sigma^{\overline{q},s'} = \\
&\langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; \langle [\![t'_1]\!], \ldots, [\![t'_k]\!] \rangle; A_\sigma^{\overline{q},s'} = \\
&\langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle; [\![t']\!]. \ \Box
\end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que los homomorfismos conservan no sólo las operaciones básicas, sino también las operaciones derivadas.

Lema 24 Dado un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre dos Σ-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$, y un Σ-término c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{s}) : s$, tenemos

$$h_{\overline{s}}; [\![t : s]\!]_B = [\![t : s]\!]_A; h_s.$$

Demostración: Si $t = x_i : s_i$,

$$h_{\overline{s}}; [\![t]\!]_B = (h_{s_1} \times \ldots \times h_{s_n}); \pi_i = \pi_i; h_{s_i} = [\![t]\!]_A; h_{s_i}.$$

Si $t = \sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$,

$$h_{\overline{s}}; [\![t]\!]_B = h_{\overline{s}}; \langle\rangle_{B_{\overline{s}}}; B_\sigma^{\varepsilon,s} = \langle\rangle_{A_{\overline{s}}}; id_1; B_\sigma^{\varepsilon,s} = \langle\rangle_{A_{\overline{s}}}; A_\sigma^{\varepsilon,s}; h_s = [\![t]\!]_A; h_s.$$

Si $t : s' \leq s$,

$$\begin{array}{l} h_{\overline{s}}; [\![t : s]\!]_B = h_{\overline{s}}; [\![t : s']\!]_B; B_{s' \leq s} = \\ [\![t : s']\!]_A; h_{s'}; B_{s' \leq s} = [\![t : s']\!]_A; A_{s' \leq s}; h_s = [\![t : s]\!]_A; h_s. \end{array}$$

Si $t = \sigma(t_1, \ldots, t_k)$ donde $t_i : r_i \ \ (i = 1, \ldots, k)$ y $\sigma \in \Sigma_{r_1 \ldots r_k, s}$,

$$\begin{array}{rcl} h_{\overline{s}}; [\![t]\!]_B & = & h_{\overline{s}}; \langle [\![t_1]\!]_B, \ldots, [\![t_k]\!]_B \rangle; B_\sigma^{\overline{r},s} = \\ & & \langle h_{\overline{s}}; [\![t_1]\!]_B, \ldots, h_{\overline{s}}; [\![t_k]\!]_B \rangle; B_\sigma^{\overline{r},s} = \\ & & \langle [\![t_1]\!]_A; h_{r_1}, \ldots, [\![t_k]\!]_A; h_{r_k} \rangle; B_\sigma^{\overline{r},s} = \\ & & \langle [\![t_1]\!]_A, \ldots, [\![t_k]\!]_A \rangle; (h_{r_1} \times \ldots \times h_{r_k}); B_\sigma^{\overline{r},s} = \\ & & \langle [\![t_1]\!]_A, \ldots, [\![t_k]\!]_A \rangle; A_\sigma^{\overline{r},s}; h_s = [\![t]\!]_A; h_s. \ \Box \end{array}$$

Ahora pasamos a definir la noción de satisfacción en este marco categórico mucho más general. De ahora en adelante, suponemos que nuestra signatura c.t.o. $(S, \leq, \Sigma)$ es coherente.

Definición 25 Dada una signatura c.t.o. coherente $(S, \leq, \Sigma)$, una $(S, \leq, \Sigma)$-álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$ *satisface* una Σ-ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, denotado $\mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, si y sólo si

$$[\![t : s]\!]_A = [\![t' : s]\!]_A$$

para un tipo s común a t y t' (que existe por la Definición 11 de ecuación). $\Box$

Lema 26 La noción de satisfacción definida arriba es independiente del tipo común s de t y t' considerado.

Demostración: Supóngase que s y s' son ambos tipos comunes de t and t'; entonces, como S es localmente filtrada y s, s' están en la misma componente conexa, existe $s'' \in S$ tal que $s \leq s''$ y $s' \leq s''$.

Si $[\![t : s]\!] = [\![t' : s]\!]$, usando el Lema 22, tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$[\![t : s']\!]; A_{s' \leq s''} = [\![t : s'']\!] = [\![t : s]\!]; A_{s \leq s''} = [\![t' : s]\!]; A_{s \leq s''} = [\![t' : s'']\!] = [\![t' : s']\!]; A_{s' \leq s''}$$

de la cual se deduce $[\![t : s']\!] = [\![t' : s']\!]$ como se deseaba, ya que $A_{s' \leq s''}$ es un monomorfismo. $\Box$

Observación 27 Dada una teoría c.t.o. $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$, denotamos por $\underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma}$ la subcategoría plena de $\underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{\Sigma}$ cuyos objetos son las (Σ, Γ)-álgebras en $\mathcal{C}$, es decir, las Σ-álgebras en $\mathcal{C}$ que satisfacen todas las ecuaciones en Γ. Está claro que $\underline{OSAlg}_{\Sigma,\Gamma} = \underline{OSAlg(Set,Inc)}_{\Sigma,\Gamma}$. $\Box$

Proposición 28 (*Corrección*) Sea $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ una teoría c.t.o. y $\mathbf{A}$ una (Σ,Γ)-álgebra en $\mathcal{C}$. Si $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, entonces $\mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$.

Demostración: La corrección de las reglas **Reflexividad** y **Simetría** es obvia, y la de la regla **Transitividad** también es trivial al considerar un tipo común para t, t' y t''.

Para la corrección de la regla **Congruencia**, supóngase que s_i es un tipo común de t_i y t'_i, y que $[\![t_i : s_i]\!] = [\![t'_i : s_i]\!]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Entonces, por la Proposición 23,

$$\begin{aligned}[\![t''(\overline{t}/\overline{x})]\!] &= \langle [\![t_1 : s_1]\!], \ldots, [\![t_n : s_n]\!]\rangle ; [\![t'' : s']\!] = \\ &\quad \langle [\![t'_1 : s_1]\!], \ldots, [\![t'_n : s_n]\!]\rangle ; [\![t'' : s']\!] = \\ &\quad [\![t''(\overline{t'}/\overline{x})]\!].\end{aligned}$$

El caso de la regla **Sustitución** es muy similar:

$$\begin{aligned}[\![t'(\overline{t}/\overline{x})]\!] &= \langle [\![t_1 : s_1]\!], \ldots, [\![t_n : s_n]\!]\rangle ; [\![t' : s']\!] = \\ &\quad \langle [\![t_1 : s_1]\!], \ldots, [\![t_n : s_n]\!]\rangle ; [\![t'' : s']\!] = \\ &\quad [\![t''(\overline{t}/\overline{x})]\!]. \ \square\end{aligned}$$

3.2. Categorías clasificantes para teorías con tipos ordenados

Definición 29 Dadas PI-categorías $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$, un *funtor que conserva productos e inclusiones*, o brevemente un *PI-funtor*, $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ es un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ que conserva productos finitos estrictamente[5] y tal que $F(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}'$, es decir, si j es un morfismo en $\mathcal{J}$ entonces $F(j)$ es un morfismo en $\mathcal{J}'$.

Denotamos por $\underline{PI((\mathcal{C}, \mathcal{J}), (\mathcal{C}', \mathcal{J}'))}$ la categoría cuyos objetos son PI-funtores entre $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales entre tales funtores. $\square$

Proposición 30 Un PI-funtor $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ determina un funtor

$$F^\star : \underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})_\Sigma} \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')_\Sigma}$$

definido por

1. $(F^\star\mathbf{A})_s = F(A_s)$.
2. $(F^\star\mathbf{A})^{\overline{s},s}_\sigma = F(A^{\overline{s},s}_\sigma)$.
3. $(F^\star\mathbf{A})_{s\leq s'} = F(A_{s\leq s'})$.
4. $(F^\star h)_s = F(h_s)$ para un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ en $\underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})_\Sigma}$.

Demostración: Como F conserva productos finitos e inclusiones, los datos en el enunciado satisfacen las condiciones exigidas en las Definiciones 18 y 19. $\square$

[5] Es decir, $F(A_1 \times A_2) = F(A_1) \times F(A_2)$, $F(1) = 1$ y $F(\pi_i) = \pi_i$ $(i = 1, 2)$. Entonces, se deduce también $F(\langle\rangle_A) = \langle\rangle_{F(A)}$ y $F(\langle f_1, f_2\rangle) = \langle F(f_1), F(f_2)\rangle$.

Lema 31 Si $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ es un PI-funtor, $\mathbf{A}$ es una Σ-álgebra en $\mathcal{C}$, y $t(\overline{x} : \overline{s}) : s$ es un Σ-término c.t.o., tenemos

$$[\![t : s]\!]_{F^\star A} = F([\![t : s]\!]_A).$$

Demostración: Si $t = x_i : s_i$,

$$[\![t]\!]_{F^\star A} = \pi_i = F(\pi_i) = F([\![t]\!]_A).$$

Si $t = \sigma \in \Sigma_{\varepsilon,s}$,

$$[\![t]\!]_{F^\star A} = \langle\rangle_{F(A_{\overline{s}})}; (F^\star A)^{\varepsilon,s}_\sigma = F(\langle\rangle_{A_{\overline{s}}}); F(A^{\varepsilon,s}_\sigma) = F([\![t]\!]_A).$$

Si $t : s' \leq s$,

$$\begin{aligned} [\![t : s]\!]_{F^\star A} = [\![t : s']\!]_{F^\star A}; (F^\star A)_{s' \leq s} = \\ F([\![t : s']\!]_A); F(A_{s' \leq s}) = F([\![t : s]\!]_A). \end{aligned}$$

Si $t = \sigma(t_1, \ldots, t_k)$ donde $t_i : r_i \ \ (i = 1, \ldots, k)$ y $\sigma \in \Sigma_{r_1 \ldots r_k, s}$,

$$\begin{aligned} [\![t]\!]_{F^\star A} &= \langle [\![t_1]\!]_{F^\star A}, \ldots, [\![t_k]\!]_{F^\star A} \rangle; (F^\star A)^{\overline{r},s}_\sigma = \\ & \langle F([\![t_1]\!]_A), \ldots, F([\![t_k]\!]_A) \rangle; F(A^{\overline{r},s}_\sigma) = \\ & F(\langle [\![t_1]\!]_A, \ldots, [\![t_k]\!]_A \rangle); F(A^{\overline{r},s}_\sigma) = \\ & F([\![t]\!]_A). \ \square \end{aligned}$$

Una fácil consecuencia de este lema es que el funtor $F^\star$ conserva satisfacción:

Proposición 32 Si $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ es un PI-funtor y $\mathbf{A}$ es una Σ-álgebra en $\mathcal{C}$ tal que $\mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, entonces $F^\star \mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$. Por lo tanto, dada una teoría c.t.o. $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$,

$$F^\star : \underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_\Sigma \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')}_\Sigma$$

se restringe a un funtor

$$F^\star : \underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma}.$$

Demostración: Si $\mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, tenemos $[\![t : s]\!]_A = [\![t' : s]\!]_A$. De aquí,

$$[\![t : s]\!]_{F^\star A} = F([\![t : s]\!]_A) = F([\![t' : s]\!]_A) = [\![t' : s]\!]_{F^\star A}. \ \square$$

Proposición 33 Sea η una transformación natural entre PI-funtores $F, G : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ y $\mathbf{A}$ una Σ-álgebra en $\mathcal{C}$; entonces $\eta^\star_A = \{\eta_{A_s} : F(A_s) \to G(A_s) \mid s \in S\}$ es un Σ-homomorfismo entre $F^\star \mathbf{A}$ y $G^\star \mathbf{A}$ en $\mathcal{C}'$.

Demostración: Debemos probar que $\eta^\star_A$ satisface las condiciones:

1. Para todo $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$, $\quad (F^\star \mathbf{A})^{\overline{s},s}_\sigma; (\eta^\star_A)_s = (\eta^\star_A)_{\overline{s}}; (G^\star \mathbf{A})^{\overline{s},s}_\sigma$,

2. Si $s \leq s'$, $\quad (F^\star \mathbf{A})_{s \leq s'}; (\eta^\star_A)_{s'} = (\eta^\star_A)_s; (G^\star \mathbf{A})_{s \leq s'}$.

Al ser una transformación natural entre funtores que conservan productos, η satisface

$$\eta_{A_1\times\ldots\times A_n} = \eta_{A_1} \times \ldots \times \eta_{A_n}.$$

Por lo tanto, $(\eta^\star_A)_{\overline{s}} = \eta_{A_{\overline{s}}}$ y las anteriores condiciones pueden reescribirse como sigue:

1. Para todo $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$, $\quad F(A^{\overline{s},s}_\sigma);\eta_{A_s} = \eta_{A_{\overline{s}}};G(A^{\overline{s},s}_\sigma)$,
2. Si $s \leq s'$, $\quad F(A_{s\leq s'});\eta_{A_{s'}} = \eta_{A_s};G(A_{s\leq s'})$,

las cuales son ambas casos particulares de la naturalidad de η. □

Proposición 34 Sean $(\mathcal{C},\mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}',\mathcal{J}')$ dos PI-categorías y $\mathbf{A}$ una (Σ,Γ)-álgebra en $\mathcal{C}$. Entonces las asignaciones

$$\begin{array}{rcl} F & \longmapsto & F^\star\mathbf{A} \\ \eta & \longmapsto & \eta^\star_A \end{array}$$

definen un funtor $\mathbf{A}^\# : \underline{PI((\mathcal{C},\mathcal{J}),(\mathcal{C}',\mathcal{J}'))} \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}',\mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma}$.

Demostración: Ya hemos visto que estas asignaciones están bien definidas, y es obvio que la segunda conserva identidades y composición. □

Esta proposición muestra cómo cualquier (Σ,Γ)-álgebra c.t.o. $\mathbf{A}$ en cualquier PI-categoría $(\mathcal{C},\mathcal{J})$ da lugar a un funtor

$$\mathbf{A}^\# : \underline{PI((\mathcal{C},\mathcal{J}),(\mathcal{C}',\mathcal{J}'))} \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}',\mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma};$$

este funtor transforma PI-funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ en álgebras en $\mathcal{C}'$ y transformaciones naturales en homomorfismos. Nos interesa el caso en que esta correspondencia es biyectiva, de forma que podamos identificar álgebras con PI-funtores y homomorfismos con transformaciones naturales:

Definición 35 Dada una teoría c.t.o. $T = (S,\leq,\Sigma,\Gamma)$, una PI-categoría $(\mathcal{C},\mathcal{J})$ se llama una *categoría clasificante* de T si existe una Σ-álgebra $\mathbf{G}$ en $\mathcal{C}$, llamada *álgebra genérica*, tal que para toda PI-categoría $(\mathcal{C}',\mathcal{J}')$ el funtor

$$\mathbf{G}^\# : \underline{PI((\mathcal{C},\mathcal{J}),(\mathcal{C}',\mathcal{J}'))} \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}',\mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma}$$

es un isomorfismo. □

Proposición 36 Si dos PI-categorías $(\mathcal{C},\mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}',\mathcal{J}')$ son categorías clasificantes para una teoría c.t.o. $(S,\leq,\Sigma,\Gamma)$, con respectivas álgebras genéricas $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}'$, entonces existe un PI-funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ que es un isomorfismo y tal que $F^\star\mathbf{G} = \mathbf{G}'$.

Demostración: Por definición de categoría clasificante, disponemos de isomorfismos

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{G}^\# : & \underline{PI((\mathcal{C},\mathcal{J}),(\mathcal{C}',\mathcal{J}'))} & \longrightarrow & \underline{OSAlg(\mathcal{C}',\mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma} \\ \mathbf{G}'^\# : & \underline{PI((\mathcal{C}',\mathcal{J}'),(\mathcal{C},\mathcal{J}))} & \longrightarrow & \underline{OSAlg(\mathcal{C},\mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma}. \end{array}$$

Por lo tanto, existen PI-funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y $H : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que $\mathbf{G}^{\#}(F) = \mathbf{G}'$ y $\mathbf{G}'^{\#}(H) = \mathbf{G}$, respectivamente; o lo que es equivalente, $F^{\star}\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ y $H^{\star}\mathbf{G}' = \mathbf{G}$. Entonces,

$$\mathbf{G}^{\#}(F;H) = (F;H)^{\star}\mathbf{G} = H^{\star}(F^{\star}\mathbf{G}) = H^{\star}\mathbf{G}' = \mathbf{G} = \mathbf{G}^{\#}(1_{\mathcal{C}})$$

y de aquí $F;H = 1_{\mathcal{C}}$ pues $\mathbf{G}^{\#}$ es un isomorfismo. Análogamente $H;F = 1_{\mathcal{C}'}$ y por consiguiente el funtor F es un isomorfismo. □

En consecuencia, teniendo en cuenta la unicidad salvo isomorfismo de categorías clasificantes y de álgebras genéricas para una teoría T, se puede hablar de *la* categoría clasificante de T, denotada $\mathcal{L}_T$, y de *el* álgebra genérica de T, denotada $\mathbf{G}_T$.

Teorema 37 (*Existencia de categorías clasificantes para teorías con tipos ordenados*)
Dada una teoría c.t.o. $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$, existen una categoría clasificante $\mathcal{L}_T$ y un álgebra genérica $\mathbf{G}_T$.

Demostración:

1. La categoría $\mathcal{L}_T$ se construye como sigue:

   Objetos: Productos finitos formales de elementos de S; o sea, el conjunto $S^{\times}$ de objetos se define inductivamente por:

   a) $S \subseteq S^{\times}$.

   b) Un símbolo especial $1 \in S^{\times}$.

   c) Si $\alpha_1, \alpha_2 \in S^{\times}$, entonces $\alpha_1 \times \alpha_2 \in S^{\times}$.

   Nótese que tenemos una función (cociente) $\lceil \_ \rceil : S^{\times} \to S^*$ definida por $\lceil s \rceil = s$, $\lceil 1 \rceil = \varepsilon$ y $\lceil \alpha_1 \times \alpha_2 \rceil = \lceil \alpha_1 \rceil \lceil \alpha_2 \rceil$.

   Morfismos: Según el codominio tenemos los siguientes casos:

   a) Los morfismos con dominio $\alpha \in S^{\times}$ tal que $\lceil \alpha \rceil = \overline{r}$ y codominio $s \in S$ son generados por términos $t(\overline{x} : \overline{r}) : s$ en $\mathcal{T}_{\Sigma}(\overline{x} : \overline{r})$ sujetos a la relación de igualdad

   $$t(\overline{x} : \overline{r}) : s \equiv t'(\overline{y} : \overline{r}) : s \iff \Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{r})\, t = t'(\overline{x}/\overline{y}).$$

   De este modo, si olvidamos los nombres de las variables usadas para escribir los términos, un morfismo $\alpha \to s$ corresponde a una clase de equivalencia $[t]$ en $\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\overline{x} : \overline{r})$ junto con la especificación de su dominio α y codominio s. Abusando de la notación, usaremos $[t]$ para denotar también la clase de equivalencia de t con respecto a la relación de equivalencia anterior, o sea, como morfismo en $\mathcal{L}_T$.

   b) Para cada $\alpha \in S^{\times}$, hay un único morfismo $\alpha \to 1$, denotado $\langle\rangle$.

   c) Para $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in S^{\times}$, los morfismos $\beta \to \alpha_1 \times \alpha_2$ son de la forma $\langle f_1, f_2 \rangle$ con $f_i : \beta \to \alpha_i$ $(i = 1, 2)$.

Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in S^\times$ con $\lceil\alpha_1\rceil = \overline{r}$ y $\lceil\alpha_2\rceil = s_1 \dots s_k$, y una lista

$$[t_1(\overline{x} : \overline{r})] \dots [t_k(\overline{x} : \overline{r})]$$

tal que $t_i : s_i \quad (i = 1, \dots, n)$, hay una única forma de construir un morfismo $\alpha_1 \to \alpha_2$ a partir de esta lista (manteniendo el orden) y morfismos $\langle\rangle$ mediante la operación $\langle\_,\_\rangle$; en efecto, es fácil ver cómo la forma del codominio determina la construcción de este morfismo. Por ejemplo, supóngase que $\alpha_2 = (s_1 \times s_2) \times (1 \times s_3)$ y $t_i : s_i \quad (i = 1, 2, 3)$; entonces, el correspondiente morfismo $\alpha_1 \to \alpha_2$ viene dado por la expresión

$$\langle\langle[t_1], [t_2]\rangle, \langle\langle\rangle, [t_3]\rangle\rangle.$$

Por consiguiente, si tenemos en cuenta esta propiedad, un morfismo con dominio α_1 y codominio α_2 puede representarse como una lista

$$[t_1(\overline{x} : \overline{r})] \dots [t_k(\overline{x} : \overline{r})]$$

junto con la especificación de su dominio α_1 y codominio α_2.

Identidades: La identidad para 1 es $\langle\rangle : 1 \to 1$, y para α con $\lceil\alpha\rceil = s_1 \dots s_n$ viene dada por $[x_1(\overline{x} : \overline{s})] \dots [x_n(\overline{x} : \overline{s})] : \alpha \to \alpha$.

Composición: Usamos sustitución para definir la composición. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in S^\times$ con $\lceil\alpha\rceil = \overline{r}$, $\lceil\beta\rceil = \overline{s}$, y $\lceil\gamma\rceil = \overline{q}$, la composición de

$$[t_1(\overline{x} : \overline{r})] \dots [t_n(\overline{x} : \overline{r})] : \alpha \to \beta$$

con

$$[u_1(\overline{y} : \overline{q})] \dots [u_k(\overline{y} : \overline{q})] : \gamma \to \alpha$$

se define como

$$[t_1(\overline{u}/\overline{r})] \dots [t_n(\overline{u}/\overline{r})] : \gamma \to \beta.$$

En particular, si $\lceil\alpha\rceil = \overline{r}$, la composición de $\langle\rangle : \alpha \to 1$ con $[t]_s : 1 \to s$ da $[t(\overline{x} : \overline{r})] : \alpha \to s$, es decir, la sustitución no afecta al término básico t, pero el conjunto de variables considerado cambia de la forma adecuada; por último, $([u_1] \dots [u_k]); \langle\rangle = \langle\rangle$.

Productos: El objeto final es 1. El producto de α_1 y α_2 es $\alpha_1 \times \alpha_2$.

Dados $\alpha, \beta \in S^\times$ con $\lceil\alpha\rceil = \overline{r}$ y $\lceil\beta\rceil = \overline{s}$, las proyecciones tienen la forma

$$[x_1(\overline{x} : \overline{s}, \overline{y} : \overline{r})] \dots [x_n(\overline{x} : \overline{s}, \overline{y} : \overline{r})] : \beta \times \alpha \longrightarrow \beta.$$

En particular, si $\beta = 1$, la proyección correspondiente es $\langle\rangle$.

Dados $\gamma \in S^\times$, $[t_1] \dots [t_n] : \gamma \longrightarrow \beta$ y $[t'_1] \dots [t'_k] : \gamma \longrightarrow \alpha$, el morfismo inducido $\langle[t_1] \dots [t_n], [t'_1] \dots [t'_k]\rangle : \gamma \longrightarrow \beta \times \alpha$ está determinado por la "concatenación de listas"

$$[t_1] \dots [t_n][t'_1] \dots [t'_k] : \gamma \longrightarrow \beta \times \alpha.$$

Estructura de inclusiones: Los morfismos en $\mathcal{J}_T$ se generan a partir de $\langle\rangle : 1 \to 1$ y

$$[x(x : s)] : s \to r$$

con $s \leq r$ mediante la operación $\_ \times \_$ sobre morfismos (que por supuesto puede definirse en términos de $\langle\_,\_\rangle$, composición y proyecciones).

Es sencillo comprobar que toda esta construcción define una PI-categoría. Un aspecto que merece ser destacado es que, para probar que los morfismos en $\mathcal{J}_T$ son monomorfismos, usamos la propiedad de que derivabilidad de una ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es independiente de los tipos considerados para t y t'.

2. El álgebra genérica $\mathbf{G}_T$ se define por:

   a) $(\mathbf{G}_T)_s = s$.

   b) $(\mathbf{G}_T)_\sigma^{\varepsilon,s} = [\sigma] : 1 \to s$.

   c) $(\mathbf{G}_T)_\sigma^{s_1 \ldots s_n,s} = [\sigma(x_1, \ldots, x_n)\ (\overline{x} : \overline{s})] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s$.

   d) $(\mathbf{G}_T)_{s \leq s'} = [x\ (x : s)] : s \to s'$.

   La condición de monotonía se reduce a $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, \sigma(x_1, \ldots, x_n) = \sigma(x_1, \ldots, x_n)$ que es obviamente cierto por **Reflexividad**.

   Es también fácil probar que $[\![t(\overline{x} : \overline{s}) : s]\!]_{G_T} = [t] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s$, por inducción sobre la estructura de t, y en consecuencia $\mathbf{G}_T$ es una (Σ, Γ)-álgebra.

3. Vamos a definir un funtor

$$(\_)^\bullet : \underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})_{\Sigma,\Gamma}} \longrightarrow \underline{PI((\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T), (\mathcal{C}, \mathcal{J}))}.$$

   Dada una (Σ, Γ)-álgebra $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$, el funtor asociado $\mathbf{B}^\bullet : \mathcal{L}_T \longrightarrow \mathcal{C}$ se define como sigue:

   a) $\mathbf{B}^\bullet(s) = B_s$.

   b) $\mathbf{B}^\bullet(1) = 1$.

   c) $\mathbf{B}^\bullet(\alpha_1 \times \alpha_2) = \mathbf{B}^\bullet(\alpha_1) \times \mathbf{B}^\bullet(\alpha_2)$.

   d) $\mathbf{B}^\bullet([t(\overline{x} : \overline{s})]_s : \alpha \to s) = (\Pi; [\![t : s]\!]_B) : \mathbf{B}^\bullet(\alpha) \longrightarrow B_s$, donde $\lceil \alpha \rceil = \overline{s}$ y Π es el único isomorfismo de asociatividad $\mathbf{B}^\bullet(\alpha) \longrightarrow (B_{s_1} \times \ldots \times B_{s_n})$ que "empuja paréntesis hacia delante" y es natural en cada componente B_{s_i}[6].

   e) $\mathbf{B}^\bullet(\langle\rangle) = \langle\rangle$.

   f) $\mathbf{B}^\bullet(\langle f_1, f_2 \rangle) = \langle \mathbf{B}^\bullet(f_1), \mathbf{B}^\bullet(f_2) \rangle$.

[6] Para $n \leq 2$, Π es siempre la identidad. Si n=3 y $\pi_i' : B_1 \times (B_2 \times B_3) \longrightarrow B_i \quad (i = 1, 2, 3)$ son las proyecciones generalizadas definidas por $\pi_1' = \pi_1, \pi_2' = \pi_2; \pi_1$ y $\pi_3' = \pi_2; \pi_2$, entonces $\Pi : B_1 \times (B_2 \times B_3) \longrightarrow (B_1 \times B_2) \times B_3$ se define por $\langle \pi_1', \pi_2', \pi_3' \rangle$. En general, $\Pi = \langle \pi_1', \ldots, \pi_n' \rangle$ para apropiadas proyecciones generalizadas $\pi_i' : \mathbf{B}^\bullet(\alpha) \longrightarrow B_{s_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Como $\mathbf{B}$ es una (Σ, Γ)-álgebra, $\mathbf{B}^\bullet$ está bien definido sobre los morfismos. Además, por la Definición 21, la Proposición 23 y la naturalidad de Π, $\mathbf{B}^\bullet$ es un PI-funtor $\mathcal{L}_T \longrightarrow \mathcal{C}$.

Dado un homomorfismo $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ entre las (Σ, Γ)-álgebras $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, definimos una transformación natural $h^\bullet$ entre $\mathbf{B}^\bullet$ y $\mathbf{C}^\bullet$ por

a) $h_s^\bullet = h_s : B_s \longrightarrow C_s$.

b) $h_1^\bullet = id_1$.

c) $h_{\alpha_1 \times \alpha_2}^\bullet = h_{\alpha_1}^\bullet \times h_{\alpha_2}^\bullet$.

Es realmente una transformación natural por el Lema 24 y la naturalidad del isomorfismo Π.

Es obvio que $(\_)^\bullet$ es un funtor.

4. Finalmente, demostramos que el funtor

$$\mathbf{G}_T^{\#} : \underline{PI((\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T), (\mathcal{C}, \mathcal{J}))} \longrightarrow \underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma}$$

es un isomorfismo, con inverso $(\_)^\bullet$. Por una parte, tenemos

a) $(\mathbf{G}_T^{\#}(\mathbf{B}^\bullet))_s = \mathbf{B}^\bullet(s) = B_s$.

b) $(\mathbf{G}_T^{\#}(\mathbf{B}^\bullet))_\sigma^{\varepsilon,s} = \mathbf{B}^\bullet([\sigma]) = id_1; [\![\sigma : s]\!]_B = B_\sigma^{\varepsilon,s}$.

c) $(\mathbf{G}_T^{\#}(\mathbf{B}^\bullet))_\sigma^{s_1\ldots s_n,s} = \mathbf{B}^\bullet([\sigma(x_1, \ldots, x_n)]) = id; [\![\sigma(x_1, \ldots, x_n) : s]\!]_B = B_\sigma^{s_1\ldots s_n,s}$.

d) $(\mathbf{G}_T^{\#}(\mathbf{B}^\bullet))_{s \leq s'} = \mathbf{B}^\bullet([x : s]) = id; [\![x : s']\!]_B = B_{s \leq s'}$.

e) $(\mathbf{G}_T^{\#}(h^\bullet))_s = h_{(G_T)_s}^\bullet = h_s$.

Por la otra parte,

a) $\mathbf{G}_T^{\#}(F)^\bullet(s) = (F^\star \mathbf{G}_T)_s = F(s)$ y ambos funtores coinciden sobre todos los objetos porque conservan productos.

b) $\mathbf{G}_T^{\#}(F)^\bullet([t] : \alpha \to s) = \Pi; [\![t : s]\!]_{F^\star \mathbf{G}_T} = F(\Pi); F([\![t : s]\!]_{G_T}) =$

$F(\Pi; ([t] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s)) = F([t] : \alpha \to s)$,

usando el Lema 31, $[\![t : s]\!]_{G_T} = [t]$, y la propiedad de que el isomorfismo Π en $\mathcal{L}_T$ está determinado por la lista $[x_1(\overline{x} : \overline{s})] \ldots [x_n(\overline{x} : \overline{s})]$. De nuevo, ambos funtores coinciden sobre todos los morfismos porque conservan productos.

c) $\mathbf{G}_T^{\#}(\eta)_s^\bullet = (\eta_{G_T}^\star)_s^\bullet = \eta_s$ y de aquí ambas transformaciones naturales coinciden porque η es una transformación natural entre funtores que conservan productos y satisface $\eta_{\alpha \times \beta} = \eta_\alpha \times \eta_\beta$. $\square$

Así pues, después de haber probado este resultado, podemos identificar álgebras c.t.o. con PI-funtores y homomorfismos con transformaciones naturales, exactamente de la misma forma que Lawvere hizo para la lógica ecuacional homogénea. Siguiendo la Observación 5, cuando el orden en S es el discreto, obtenemos como caso especial la correspondiente categoría clasificante y el álgebra genérica para una teoría heterogénea.

El primer beneficio de esta semántica funtorial para el álgebra con tipos ordenados es un fácil resultado de completitud. En la Proposición 28 ya hemos visto un resultado de corrección. Completitud es una consecuencia directa de la existencia de categorías clasificantes y álgebras genéricas:

Proposición 38 (*Completitud*) Dada una teoría con tipos ordenados $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$,

$$\mathbf{G}_T \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t' \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'.$$

Demostración: En el sentido ($\Leftarrow$) basta aplicar corrección (Proposición 28).

En lo que respecta al sentido($\Rightarrow$), por definición de satisfacción, $\mathbf{G}_T \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ sii $[\![t : s]\!]_{G_T} = [\![t' : s]\!]_{G_T}$ para un tipo s común a t y t'; esto es equivalente a $[t] = [t']$ como morfismos en $\mathcal{L}_T$. Por lo tanto, como t y t' son términos sobre el mismo conjunto de variables $\overline{x} : \overline{s}$, obtenemos $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ tal y como deseábamos. $\Box$

Otro beneficio es un resultado de inicialidad:

Proposición 39 Dada una teoría con tipos ordenados $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$, definimos la categoría $\underline{\mathit{FunctOSAlg}}_{\Sigma,\Gamma}$ que tiene como objetos PI-funtores $F : (\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ (es decir, (Σ, Γ)-álgebras en cualquier PI-categoría), y en la que un morfismo de $F : (\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ en $F' : (\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ es un PI-funtor $H : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ tal que $F; H = F'$. Entonces, el PI-funtor $1_{\mathcal{L}_T}$ correspondiente al álgebra genérica $\mathbf{G}_T$ es inicial en la categoría $\underline{\mathit{FunctOSAlg}}_{\Sigma,\Gamma}$.

Si consideramos la categoría $\underline{\mathit{GralOSAlg}}_{\Sigma,\Gamma}$ con los mismos objetos que $\underline{\mathit{FunctOSAlg}}_{\Sigma,\Gamma}$, pero con un morfismo de $F : (\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ en $F' : (\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ dado por un PI-funtor $H : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ junto con una transformación natural θ entre $F; H$ y F', entonces el PI-funtor $1_{\mathcal{L}_T}$ correspondiente al álgebra genérica $\mathbf{G}_T$ es débilmente inicial [99, p. 231] en $\underline{\mathit{GralOSAlg}}_{\Sigma,\Gamma}$. $\Box$

3.3. La adjunción entre teorías y categorías

Dada una PI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, ¿existe una teoría c.t.o. T tal que $\mathcal{C}$ es (equivalente a) la categoría clasificante de T? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, supuesto que la categoría $\mathcal{C}$ sea *pequeña*, es decir, sus colecciones de objetos y morfismos sean conjuntos (pues asumimos que las colecciones de tipos S y de símbolos de operación Σ para una teoría T son conjuntos), y que la subcategoría $\mathcal{J}$ como conjunto parcialmente ordenado sea localmente filtrada (pues $\mathcal{J}$ determinará el orden en el conjunto de tipos). Sin embargo, para que esta asignación sea funtorial, la ambigüedad o sobrecarga de los símbolos de operación, que juega un importante papel en la expresividad del álgebra con tipos ordenados, debe ser tomada en consideración y esto supone un tratamiento más sutil. Nuestra solución se basa en la idea de que la ambigüedad depende de un punto de vista concreto y de ninguna forma es algo intrínseco al nivel semántico; por lo tanto, para tomar la ambigüedad en consideración, en el paso de categorías a teorías, debemos hacerla explícita, en el sentido de la Definición 42.

Necesitamos las siguientes definiciones auxiliares que proporcionan al nivel semántico la propiedad correspondiente a la condición sintáctica de regularidad en signaturas con tipos ordenados.

Definición 40 Dada una categoría con productos $\mathcal{C}$, denotamos por $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ o bien $f_{A_1,\ldots,A_n}$ un morfismo en $\mathcal{C}$ junto con una descomposición de su dominio como un producto de n factores $A_1, \ldots, A_n$. Y denotamos por $DMor(\mathcal{C})$ la colección de tales morfismos con dominios descompuestos. $\Box$

Por supuesto, un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ tiene al menos una factorización de su dominio como un producto unario; pero si es posible descomponer su dominio en más de una factorización, entonces el morfismo junto con cada descomposición da lugar a diferentes elementos de $DMor(\mathcal{C})$.

Una signatura c.t.o. $(S, \leq, \Sigma)$ es regular sii cada símbolo de operación (ambiguo) $\sigma \in \Sigma$ satisface cierta propiedad, a saber, que si $\sigma \in \Sigma_{\overline{r},r}$ y $\overline{s} \leq \overline{r}$ en S^* el conjunto de rangos $\{\langle \overline{q}, q \rangle \in S^* \times S \mid \overline{s} \leq \overline{q} \ y \ \sigma \in \Sigma_{\overline{q},q}\}$ tiene un mínimo; en este caso, podemos decir que σ satisface la condición de regularidad, o que σ es regular. Naturalmente, una signatura es regular sii cada símbolo de operación en ella es regular. La siguiente definición captura semánticamente la noción sintáctica de símbolo de operación ambiguo regular.

Definición 41 Una familia de morfismos $\mathcal{F} \subseteq DMor(\mathcal{C})$ en una PI-categoría pequeña $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ es *regular* si y sólo si satisface las dos condiciones siguientes:

1. Si $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ y $g : A'_1 \times \ldots \times A'_n \longrightarrow B'$ son morfismos en $\mathcal{F}$ y $A_l \leq_{\mathcal{J}} A'_l$ (con un morfismo correspondiente $j_l : A_l \to A'_l$ en $\mathcal{J}$) $(l = 1, \ldots, n)$, entonces $B \leq_{\mathcal{J}} B'$ (con $j' : B \to B'$ en $\mathcal{J}$) y además $(j_1 \times \ldots \times j_n); g = f; j'$.

2. Dados objetos $C_1, \ldots, C_n$ en $\mathcal{C}$ y un morfismo $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ en $\mathcal{F}$ tal que $C_l \leq_{\mathcal{J}} A_l$ $(l = 1, \ldots, n)$, el conjunto
$$\{(D_1, \ldots, D_n) \mid \exists g : D_1 \times \ldots \times D_n \longrightarrow B \in \mathcal{F} \ \ y \ \ C_l \leq_{\mathcal{J}} D_l \ (l = 1, \ldots, n)\}$$
tiene un mínimo con respecto al orden $\leq_{\mathcal{J}}$ sobre tuplas $(D_1, \ldots, D_n)$. $\Box$

Obsérvese que una familia que es o bien vacía o bien de cardinalidad 1 es siempre regular.

Definición 42 Dada una PI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ pequeña, un *etiquetado* para ella consiste en un conjunto Σ y una función $l : DMor(\mathcal{C}) \to \Sigma$ tal que para cada $\sigma \in \Sigma$ la familia $l^{-1}(\sigma)$ de morfismos es regular.

Una PI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ pequeña tal que $\mathcal{J}$ es localmente filtrada junto con un etiquetado l para ella se llama una *LPI-categoría.* $\Box$

Teorema 43 Dada una LPI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$, existe una teoría c.t.o. $T_{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría clasificante $\mathcal{L}_{T_{\mathcal{C}}}$ de $T_{\mathcal{C}}$.

Demostración: La teoría c.t.o. $T_{\mathcal{C}} = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ se define como sigue:

Tipos: El conjunto $S = Ob(\mathcal{C})$ parcialmente ordenado por el orden $\leq_{\mathcal{J}}$. Es localmente filtrado por la hipótesis sobre $\mathcal{J}$.

Símbolos de operación: Para cada $\sigma \in \Sigma$ y morfismo $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ en $l^{-1}(\sigma)$ ponemos un símbolo de operación (ambiguo) $\sigma \in \Sigma_{A_1 \ldots A_n, B}$. Nótese que las condiciones de monotonía y regularidad se cumplen porque $l^{-1}(\sigma)$ es una familia regular.

Ecuaciones: Todas las Σ-ecuaciones satisfechas por la Σ-álgebra $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}$ que asigna a cada tipo A el objeto A y a cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{A_1 \ldots A_n, B}$ correspondiente a un morfismo $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ con $l(f_{A_1,\ldots,A_n}) = \sigma$ el morfismo f. De nuevo, la condición de monotonía para álgebras se cumple porque $l^{-1}(\sigma)$ es regular.

Por el Teorema 37 existe un PI-funtor

$$F = \mathbf{D}^{\bullet}_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}_{T_{\mathcal{C}}} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Tenemos una función de "interpretación" obvia $|\_| : Ob(\mathcal{C})^{\times} \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$, y el funtor F está definido sobre objetos por $F(A) = |A|$, y sobre morfismos por la extensión del caso básico $F([t] : \alpha \to A) = \Pi; [\![t : A]\!]_{D_{\mathcal{C}}}$, donde $\alpha \in Ob(\mathcal{C})^{\times}$, $A \in Ob(\mathcal{C})$ y Π es el isomorfismo natural de asociatividad que "empuja paréntesis hacia delante."

El funtor "inverso" de F es $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}_{T_{\mathcal{C}}}$ definido por $G(A) = A$ para un objeto A en $\mathcal{C}$ y $G(f) = [l(f_A)(x)]$ con $x : A$ para un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, usando la propiedad $l(f_A) \in \Sigma_{A,B}$.

Como $[\![l(f_A)(x)]\!]_{D_{\mathcal{C}}} = f$, es fácil comprobar que G es realmente un funtor y $G; F = 1_{\mathcal{C}}$. Por otra parte, $F; G$ no es el funtor identidad sobre $\mathcal{L}_{T_{\mathcal{C}}}$, ya que $G(F(\alpha)) = |\alpha|$; no obstante, hay un isomorfismo natural entre ellos, definido como sigue: dado un objeto α en $\mathcal{L}_{T_{\mathcal{C}}}$ con $\lceil \alpha \rceil = A_1 \ldots A_n$, tenemos proyecciones generalizadas $\pi'_i : |\alpha| \to A_i$ y el isomorfismo de asociatividad $\Pi : |\alpha| \longrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_n)$ tal que $\Pi = \langle \pi'_1, \ldots, \pi'_n \rangle$ (las proyecciones π'_i pueden definirse en términos de π_i; véase por ejemplo la nota a pie de página 6). Entonces,

$$\begin{array}{rccc} [l((\pi'_1)_{|\alpha|})(x)] \ldots [l((\pi'_n)_{|\alpha|})(x)] : & |\alpha| & \longrightarrow & \alpha \\ [l(\Pi^{-1}_{A_1,\ldots,A_n})(y_1, \ldots, y_n)] : & \alpha & \longrightarrow & |\alpha|. \end{array}$$

En efecto, éstos son uno inverso del otro: en primer lugar,

$$[l(\Pi^{-1})(l(\pi'_1)(x), \ldots, l(\pi'_n)(x))] = [x] : |\alpha| \to |\alpha|$$

porque $\langle \pi'_1, \ldots, \pi'_n \rangle; \Pi^{-1} = id$ en $\mathcal{C}$; recíprocamente,

$$[l(\pi'_i)(l(\Pi^{-1})(y_1, \ldots, y_n))] = [y_i]$$

porque $\langle \pi_1, \ldots, \pi_n \rangle; \Pi^{-1}; \pi'_i = \pi_i \;\; (i = 1, \ldots, n)$ en $\mathcal{C}$.

La naturalidad de $[l(\Pi^{-1})(y_1, \ldots, y_n)]$ se reduce a

$$[l(\Pi; \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_m]\!] \rangle; \Pi^{-1})(l(\Pi^{-1})(y_1, \ldots, y_n))] = [l(\Pi^{-1})(t_1, \ldots, t_m)]$$

donde $[\![t]\!]$ denota el significado de t en $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}$. Esta igualdad es válida porque los morfismos correspondientes que interpretan ambos miembros de la igualdad coinciden en $\mathcal{C}$:

$$\langle \pi_1, \ldots, \pi_n \rangle; \Pi^{-1}; \Pi; \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_m]\!] \rangle; \Pi^{-1} = \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_m]\!] \rangle; \Pi^{-1}. \;\Box$$

Definición 44 Un morfismo H entre dos teorías con tipos ordenados $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ y $T' = (S', \leq', \Sigma', \Gamma')$ consiste en

1. Una función monótona $H : (S, \leq) \to (S', \leq')$ cuya extensión libre a S^* se denota asimismo H,

2. Una función $H : \Sigma \to \Sigma'$ tal que, si $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$, entonces $H(\sigma) \in \Sigma'_{H(\overline{s}),H(s)}$,

tales que, si $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es una ecuación en Γ, la ecuación $(\overline{x} : H(\overline{s}))\, H(t) = H(t')$ es derivable a partir de Γ', donde $H(t)$ denota la "traducción" de t inducida por H[7]. $\Box$

Es importante observar que si σ es una operación ambigua en Σ, entonces $H(\sigma)$ es asimismo ambigua en Σ'; por tanto, la traducción inducida por H está bien definida.

Observación 45 La condición impuesta sobre morfismos entre teorías con tipos ordenados implica:

$$\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t' \quad \Longrightarrow \quad \Gamma' \vdash (\overline{x} : H(\overline{s}))\, H(t) = H(t').$$

De este modo, tenemos una categoría denotada $\underline{OSTh}$. $\Box$

Definición 46 Un *LPI-funtor* entre LPI-categorías $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}', l' : DMor(\mathcal{C}') \to \Sigma')$ consiste en un PI-funtor $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ junto con una función $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ tal que para todo $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ en $DMor(\mathcal{C})$,

$$\phi(l(f_{A_1,\ldots,A_n})) = l'(F(f)_{F(A_1),\ldots,F(A_n)}).$$

Así se define una categoría denotada $\underline{LPICat}$. $\Box$

Proposición 47 La asignación de una teoría con tipos ordenados $T_{\mathcal{C}}$ a una LPI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$ se extiende a un funtor

$$T\_ : \underline{LPICat} \longrightarrow \underline{OSTh}.$$

Demostración: Sea (F, ϕ) un LPI-funtor de $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$ en $(\mathcal{C}', \mathcal{J}', l' : DMor(\mathcal{C}') \to \Sigma')$. Como F conserva inclusiones, su componente sobre los objetos es una función monótona entre los conjuntos ordenados de tipos de $T_{\mathcal{C}}$ y $T_{\mathcal{C}'}$.

Si $f : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow B$ es un morfismo en $DMor(\mathcal{C})$, proporcionando un símbolo de operación $l(f_{A_1,\ldots,A_n})$ con rango $\langle A_1 \ldots A_n, B \rangle$ en la signatura de $T_{\mathcal{C}}$, disponemos del correspondiente morfismo $F(f) : F(A_1) \times \ldots \times F(A_n) \longrightarrow F(B)$ en $DMor(\mathcal{C}')$, que da lugar a un símbolo de operación $l'(F(f)_{F(A_1),\ldots,F(A_n)}) = \phi(l(f_{A_1,\ldots,A_n}))$ con rango $\langle F(A_1) \ldots F(A_n), F(B) \rangle$ en la signatura de $T_{\mathcal{C}'}$. De esta forma, el efecto del morfismo de teorías T_F sobre los símbolos de operación viene dado precisamente por la función ϕ.

Usando la propiedad de que F es un LPI-funtor es fácil observar que, para un término t, $[\![T_F(t)]\!]_{D_{\mathcal{C}'}} = F([\![t]\!]_{D_{\mathcal{C}}})$; en consecuencia, si $\mathbf{D}_{\mathcal{C}}$ satisface una ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, la ecuación "traducida" $(\overline{x} : T_F(\overline{s}))\, T_F(t) = T_F(t')$ es satisfecha por $\mathbf{D}_{\mathcal{C}'}$.

Finalmente, es trivial ver que $T\_$ conserva identidades y composición. $\Box$

[7]La traducción inducida por H se define por $H(x) = x$ y $H(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = H(\sigma)(H(t_1), \ldots, H(t_n))$.

Teorema 48 La construcción de la categoría clasificante $\mathcal{L}_T$ para una teoría con tipos ordenados T es libre con respecto al funtor $T_{\_} : \underline{LPICat} \longrightarrow \underline{OSTh}$. Así tenemos un funtor

$$\mathcal{L}_{\_} : \underline{OSTh} \longrightarrow \underline{LPICat}$$

adjunto a izquierda de $T_{\_}$.

Demostración: En primer lugar, dada una teoría c.t.o. $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$, necesitamos un etiquetado para $(\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T)$ de cara a conseguir un objeto de la categoría $\underline{LPICat}$. Consideremos el conjunto

$$\Sigma_{\mathcal{L}} = DMor(\mathcal{L}_T) - \{[\sigma(x_1, \ldots, x_n)] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s \mid \sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}\} \cup \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma_{\overline{s}, s}\};$$

el etiquetado $l : DMor(\mathcal{L}_T) \rightarrow \Sigma_{\mathcal{L}}$ lleva $[\sigma(x_1, \ldots, x_n)]_{s_1, \ldots, s_n}$ a $\hat{\sigma}$ y es la identidad sobre los restantes elementos de $DMor(\mathcal{L}_T)$. Es claro que la familia $l^{-1}(\hat{\sigma})$ es regular, porque la signatura Σ es regular; para los otros elementos $[t]_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ de $DMor(\mathcal{L}_T)$, $l^{-1}([t]_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}) = \{[t]_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}\}$ que es asimismo una familia regular por ser de cardinalidad 1.

Tenemos un morfismo de teorías (que va a ser la unidad de la adjunción) $N : T \longrightarrow T_{\mathcal{L}_T}$ definido como sigue.

Primero, un tipo $s \in S$ es un objeto de $\mathcal{L}_T$, y por tanto también un tipo en $T_{\mathcal{L}_T}$; así pues, N lleva s a s y conserva trivialmente el orden $\leq$ en S.

Segundo, si $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$, disponemos del morfismo $[\sigma(x_1, \ldots, x_n)] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s$ en $\mathcal{L}_T$ y un correspondiente símbolo de operación $\hat{\sigma}$ con rango $\langle s_1 \ldots s_n, s \rangle$ en la signatura de $T_{\mathcal{L}_T}$. Así pues, N lleva σ a $\hat{\sigma}$.

Dado un término c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{s}) : s$, es sencillo probar mediante inducción sobre la estructura de t que

$$[\![N(t) : s]\!]_{D_{\mathcal{L}_T}} = [t] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s$$

(nótese la similaridad entre $\mathbf{G}_T$ y $\mathbf{D}_{\mathcal{L}_T}$). De aquí, si $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es una ecuación en Γ, $[\![N(t)]\!] = [\![N(t')]\!]$ como morfismos en $\mathcal{L}_T$, y la ecuación $(\overline{x} : N(\overline{s}))\, N(t) = N(t')$ pertenece a $T_{\mathcal{L}_T}$. Con esto se completa la definición del morfismo de teorías N.

Supongamos ahora que tenemos una LPI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l' : DMor(\mathcal{C}) \rightarrow \Sigma')$ y un morfismo de teorías $H : T \rightarrow T_{\mathcal{C}}$. Debemos encontrar un único LPI-funtor $(H^{\dagger}, \phi)$ de $(\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T, l : DMor(\mathcal{L}_T) \rightarrow \Sigma_{\mathcal{L}})$ en $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l' : DMor(\mathcal{C}) \rightarrow \Sigma')$ tal que $N; T_{H^{\dagger}} = H$.

La ecuación $N; T_{H^{\dagger}} = H$ implica $H^{\dagger}(s) = H(s)$ y la conservación de productos determina la acción de $H^{\dagger}$ en el resto de objetos. Por la misma razón, la acción del funtor $H^{\dagger}$ sobre morfismos está determinada a partir de su acción sobre los morfismos básicos de la forma $[t] : \alpha \rightarrow s$.

La anterior ecuación también implica que, si $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$, entonces tenemos $T_{H^{\dagger}}(\hat{\sigma}) = H(\sigma)$ con rango $\langle H(s_1) \ldots H(s_n), H(s) \rangle$ en la signatura de $T_{\mathcal{C}}$. De este modo, $H(\sigma) \in \Sigma'$ determina una familia regular $l'^{-1}(H(\sigma))$ en la cual hay únicamente un morfismo de la forma $h : H(s_1) \times \ldots \times H(s_n) \longrightarrow H(s)$, por lo que la única posibilidad que tenemos es definir

$$H^{\dagger}([\sigma(x_1, \ldots, x_n)] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s) = h.$$

El funtor $H^{\dagger}$ debe conservar productos e inclusiones, y esto determina su acción sobre los morfismos de la forma $[x_i\, (\overline{x} : \overline{s})]$ para x_i una variable, que representan en la categoría

$\mathcal{L}_T$ o bien inclusiones (identidades en particular) o bien proyecciones, dependiendo del contexto $\overline{x} : \overline{s}$. Cualquier morfismo $[t] : \alpha \to s$ en $\mathcal{L}_T$ es o bien de una de estas dos formas, o bien una composición $([t_1] \ldots [t_n]); [\sigma(x_1, \ldots, x_n)]$. Por lo tanto, $H^\dagger$ está únicamente determinado a partir de la condición $N; T_{H^\dagger} = H$. Efectivamente, su acción sobre morfismos básicos puede definirse en general como

$$H^\dagger([t(\overline{x} : \overline{s})] : \alpha \to s) = \Pi; [\![H(t)(\overline{x} : H(\overline{s})) : H(s)]\!]_{D_\mathcal{C}},$$

donde $\Pi : H^\dagger(\alpha) \longrightarrow (H(s_1) \times \ldots \times H(s_n))$ es el isomorfismo natural de asociatividad que “empuja paréntesis hacia delante,” y $\lceil \alpha \rceil = \overline{s}$.

Como H es un morfismo entre teorías, si $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, la ecuación “traducida” $(\overline{x} : H(\overline{s}))\, H(t) = H(t')$ es satisfecha por $\mathbf{D}_\mathcal{C}$; de aquí, $[\![H(t)]\!]_{D_\mathcal{C}} = [\![H(t')]\!]_{D_\mathcal{C}}$ y $H^\dagger$ está bien definido sobre morfismos. Es rutinario comprobar que con esta definición $H^\dagger$ satisface todas las propiedades exigidas.

Finalmente, la función $\phi : \Sigma_\mathcal{L} \to \Sigma'$ debe satisfacer $l; \phi = H^\dagger_m; l'$, donde $H^\dagger_m$ denota la componente sobre los morfismos del funtor $H^\dagger$. Esto determina el efecto de ϕ sobre el conjunto

$$DMor(\mathcal{L}_T) - \{[\sigma(x_1, \ldots, x_n)] : s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow s \mid \sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}\}.$$

Y la única definición posible para $\phi(\hat{\sigma})$ es $H(\sigma)$, ya que

$$l'(H^\dagger([\sigma(x_1, \ldots, x_n)])) = l'(h) = H(\sigma) = \phi(\hat{\sigma}) = \phi(l([\sigma(x_1, \ldots, x_n)]))$$

donde el morfismo h es como arriba. Esto completa la definición de $(H^\dagger, \phi)$ así como la demostración de su unicidad, y por lo tanto del teorema. □

Como ya hemos señalado, la presencia de operaciones ambiguas en la signatura de una teoría con tipos ordenados hace que todas estas construcciones sean algo complicadas. El caso especial de teorías c.t.o. *sin ambigüedad* admite un tratamiento más simple, más parecido al tratamiento usual de la semántica funtorial para el álgebra heterogénea; en efecto, como vamos a ver a continuación, una teoría c.t.o. admite una presentación sin ambigüedad porque la información suplementaria de las operaciones ambiguas puede expresarse por medio de ecuaciones. Sin embargo, conviene resaltar que el uso de operaciones ambiguas para expresar polimorfismo de subtipos es una de las características más interesantes del álgebra con tipos ordenados, y consecuentemente el esfuerzo adicional necesario para desarrollar su semántica funtorial está bien justificado.

Definición 49 Una teoría c.t.o. $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ se llama *desambiguada* si los conjuntos de símbolos de operación $\Sigma_{\overline{s},s}$ son disjuntos dos a dos, es decir, no hay ningún símbolo de operación ambiguo.

Denotamos por $\underline{DOSTh}$ la subcategoría plena de $\underline{OSTh}$ consistente en las teorías desambiguadas, y por $I : \underline{DOSTh} \longrightarrow \underline{OSTh}$ el funtor de inclusión. □

Nótese que para una teoría desambiguada las condiciones de monotonía y regularidad son triviales.

La siguiente proposición demuestra que la ambigüedad en los símbolos de operación es básicamente un mecanismo de abstracción muy útil que permite escribir especificaciones más simples y cortas, pero que, semánticamente, los modelos especificados de este modo pueden también ser especificados sin usar la ambigüedad.

Proposición 50 El *funtor de desambiguación* $D : \underline{OSTh} \longrightarrow \underline{DOSTh}$ se define sobre teorías c.t.o. por $D(S, \leq, \Sigma, \Gamma) = (S, \leq, \Sigma^d, \Gamma^d \cup M)$, donde

1. Σ^d es la familia de conjuntos Σ hechos disjuntos dos a dos por el método de decorar cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{\overline{s},s}$ con su correspondiente rango $\langle \overline{s}, s\rangle$, denotado $\sigma^{\overline{s},s}$.

2. Dado un Σ-término t, obtenemos un Σ^d-término t^d sustituyendo cada instancia de un símbolo de operación σ por $\sigma^{\overline{s},s}$, donde $\langle \overline{s}, s\rangle$ es el rango de σ en el análisis sintáctico mínimo de t (véanse los comentarios tras la demostración de la Proposición 8).

3. $\Gamma^d = \{(\overline{x} : \overline{s})\, t^d = t'^d \mid (\overline{x} : \overline{s})\, t = t' \in \Gamma\}$.

4. $M = \{(\overline{x} : \overline{s})\, \sigma^{\overline{s},s}(x_1, \ldots, x_n) = \sigma^{\overline{r},r}(x_1, \ldots, x_n) \mid \sigma \in \Sigma_{\overline{s},s} \cap \Sigma_{\overline{r},r},\ \overline{s} \leq \overline{r}\ y\ \overline{s} \neq \overline{r}\}$ es el conjunto de ecuaciones llamadas *reglas de morfismos*[8] en [79].

Si H es un morfismo de teorías en $\underline{OSTh}$, $D(H)$ lleva s a $H(s)$ y $\sigma^{\overline{s},s}$ a $H(\sigma)^{H(\overline{s}),H(s)}$.

Entonces, el funtor inclusión I es adjunto a izquierda de D.

Además, $\underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_T = \underline{OSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{I(D(T))}$ para toda teoría con tipos ordenados T y PI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$.

Demostración: No es difícil comprobar que D es efectivamente un funtor y que las categorías de álgebras coinciden. La unidad de la adjunción $\eta_{T_0} : T_0 \to D(I(T_0))$ para una teoría c.t.o. desambiguada T_0 es simplemente la identidad, y la counidad $\epsilon_T : I(D(T)) \to T$ para una teoría c.t.o. T es el morfismo de *ambiguación* que lleva $\sigma^{\overline{s},s}$ a σ. $\square$

El principal motivo de esta discusión es señalar que para teorías c.t.o. desambiguadas no necesitamos la noción de etiquetado para una PI-categoría. Es muy fácil probar el siguiente resultado, que demuestra que cualquier PI-categoría tiene un etiquetado trivial.

Proposición 51 Si $\underline{PICat}$ denota la categoría de PI-categorías pequeñas con una estructura de inclusiones localmente filtrada como objetos y PI-funtores como morfismos, tenemos un funtor proyección $P : \underline{LPICat} \longrightarrow \underline{PICat}$ que lleva $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l)$ a $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ y (F, ϕ) a F.

Entonces, el funtor $R : \underline{PICat} \longrightarrow \underline{LPICat}$ que lleva $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ a $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, id : DMor(\mathcal{C}) \to DMor(\mathcal{C}))$ y F a (F, ϕ) con $\phi(f_{A_1,\ldots,A_n}) = F(f)_{F(A_1),\ldots,F(A_n)}$ es adjunto a izquierda de P. $\square$

[8]Tales reglas de morfismos fueron primero introducidas en [58] como parte de una desambiguación heterogénea de álgebras con tipos ordenados.

Observación 52 Si olvidamos el etiquetado para $(\mathcal{L}_T, \mathcal{J}_T)$ definido en la demostración del Teorema 48, obtenemos un funtor

$$\mathcal{L}'_{\_} : \underline{\mathit{DOSTh}} \longrightarrow \underline{\mathit{PICat}}.$$

Por otro lado, descartando todas las referencias a familias regulares y etiquetados en el Teorema 43 (equivalentemente, considerando el etiquetado trivial definido en la proposición anterior), conseguimos un funtor

$$T'_{\_} : \underline{\mathit{PICat}} \longrightarrow \underline{\mathit{DOSTh}}.$$

Y una sencilla simplificación de la demostración del Teorema 48 muestra que $\mathcal{L}'_{\_}$ es adjunto a izquierda de $T'_{\_}$. $\Box$

Toda esta situación se resume en el siguiente diagrama de funtores adjuntos:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathit{LPICat}} \arrow[r, shift right, "T_{_}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, shift right, "P"'] \arrow[d, phantom, "\vdash"] & \underline{\mathit{OSTh}} \arrow[l, shift right, "\mathcal{L}_{_}"'] \arrow[d, shift right, "D"'] \arrow[d, phantom, "\vdash"] \\
\underline{\mathit{PICat}} \arrow[r, shift right, "T'_{_}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[u, shift right, "R"'] & \underline{\mathit{DOSTh}} \arrow[l, shift right, "\mathcal{L}'_{_}"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}$$

Cada uno de los cuatro cuadrados determinados por los funtores en el diagrama es conmutativo (salvo isomorfismo). Primero, la Observación 52 muestra que $\mathcal{L}'_{\_}; R \cong I; \mathcal{L}_{\_}$, y por tanto $P; T'_{\_} \cong T_{\_}; D$ porque adjuntos a derecha son únicos salvo isomorfismo. Por otra parte, por la Proposición 50, tenemos $\underline{\mathit{OSAlg}(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_T = \underline{\mathit{OSAlg}(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{I(D(T))}$, y la unicidad de categorías clasificantes implica $\mathcal{L}_T \cong \mathcal{L}_{I(D(T))}$; en términos de funtores, esta propiedad se expresa como $\mathcal{L}_{\_}; P \cong D; \mathcal{L}'_{\_}$. De nuevo, la Observación 52 implica $R; T_{\_} \cong T'_{\_}; I$.

Observación 53 Los resultados en la Observación 52, el Teorema 37 y las Proposiciones 38 y 39 muestran que el álgebra con tipos ordenados desambiguada es una lógica categórica en el sentido de la Definición 9 en la Introducción sobre lógicas categóricas (Capítulo 0).

En el caso general, la adjunción entre categorías y teorías del Teorema 48 requiere el uso de categorías con estructura adicional dada por los etiquetados, que no aparece en las categorías usadas para interpretar las álgebras; sin embargo, por la Proposición 51 ambos niveles se relacionan mediante una adjunción. Por lo tanto, en este caso tenemos una estructura de lógica categórica ligeramente más general que la dada en la Definición 9. $\Box$

Capítulo 4

Álgebra de orden superior con tipos ordenados

En esta sección, estudiamos una extensión del álgebra con tipos ordenados correspondiente al lambda cálculo con tipos (simples) con productos y subtipos. Obtenemos esta extensión admitiendo dos constructores de tipos: si τ y τ' son tipos, $\tau \times \tau'$ y $\tau \Rightarrow \tau'$ son asimismo tipos. Al mismo tiempo, introducimos nuevos constructores de términos para formar términos de los nuevos tipos: proyecciones y pares para productos, y lambda abstracción y aplicación para los espacios funcionales. Categóricamente, un tipo $\tau \Rightarrow \tau'$ se interpreta como el objeto exponencial o espacio funcional de los objetos que interpretan τ y τ'; así pues, pasamos de categorías con productos finitos a categorías cartesianas cerradas.

Este capítulo puede verse como una generalización de la bien conocida correspondencia entre el lambda cálculo tipado con productos y categorías cartesianas cerradas [93], que toma en consideración la relación de subtipo[1].

En lo que sigue, abreviamos normalmente la frase "de orden superior con tipos ordenados" a "d.o.s.c.t.o.".

4.1. Signaturas, términos, ecuaciones y deducción

Definición 54 Dado un conjunto S, denotamos por $S^{\bowtie}$ el conjunto generado a partir de S y la constante 1 por las operaciones $\times$ y $\Rightarrow$:

1. $S \subseteq S^{\bowtie}$.
2. Un símbolo especial $1 \in S^{\bowtie}$.
3. Si $\tau_1, \tau_2 \in S^{\bowtie}$, entonces $\tau_1 \times \tau_2 \in S^{\bowtie}$.
4. Si $\tau_1, \tau_2 \in S^{\bowtie}$, entonces $\tau_1 \Rightarrow \tau_2 \in S^{\bowtie}$.

[1] Aunque el siguiente estudio podría llevarse a cabo sin productos apareciendo explícitamente en los términos, la correspondencia entre categorías cartesianas cerradas y lambda cálculo con tipos se hace entonces mucho más confusa y difícil de expresar.

Si $(S, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie})$ es el conjunto parcialmente ordenado por el orden $\leq^{\bowtie}$ definido como sigue:

1. Si $s \leq s'$ en S, entonces $s \leq^{\bowtie} s'$ en $S^{\bowtie}$.
2. $1 \leq^{\bowtie} 1$.
3. Si $\tau_i \leq^{\bowtie} \tau_i'$ en $S^{\bowtie}$ $(i = 1, 2)$, entonces $\tau_1 \times \tau_2 \leq^{\bowtie} \tau_1' \times \tau_2'$ en $S^{\bowtie}$.
4. Si $\tau \leq^{\bowtie} \tau'$ en $S^{\bowtie}$ y $\tau'' \in S^{\bowtie}$, entonces $\tau'' \Rightarrow \tau \leq^{\bowtie} \tau'' \Rightarrow \tau'$.

Usaremos los nombres *tipos básicos* para los elementos de S y *tipos* para los elementos de $S^{\bowtie}$. $\Box$

La disponibilidad de productos al nivel de tipos permite considerar signaturas con solo operaciones "unarias."

Definición 55 Una *signatura de orden superior con tipos ordenados*, abreviado a *signatura d.o.s.c.t.o.*, consiste en un conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ junto con una signatura con tipos ordenados coherente $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$ tal que $\Sigma_{\overline{\tau},\tau} \neq \emptyset$ implica *longitud*$(\overline{\tau}) = 1$. $\Box$

Normalmente denotamos una signatura d.o.s.c.t.o. por $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$ o simplemente Σ si S y $\leq$ están claros; a menudo escribiremos sólo $\leq$ significando $\leq^{\bowtie}$.

Es importante observar que el orden viene dado sólo para tipos básicos y se extiende "estructuralmente" a los tipos restantes; por lo tanto, si $\tau, \tau', \tau'' \in S$, *no* tenemos relaciones de subtipo de las formas $\tau'' \leq (\tau \Rightarrow \tau')$, $(\tau \times \tau') \leq (\tau \Rightarrow \tau')$ ó $\tau'' \leq (\tau \times \tau')$. Obsérvese también que hemos impuesto la restricción de coherencia desde el principio, pues la necesitamos para llevar a cabo un tratamiento de las ecuaciones similar al desarrollado en el caso del álgebra con tipos ordenados.

Como es bien sabido, una de las principales complicaciones sintácticas con las que hay que enfrentarse en el estudio de lambda cálculos es la distinción entre variables libres y ligadas. Por lo tanto, si deseamos usar la sintaxis habitual del lambda cálculo, no podemos aprovechar el anterior enfoque algebraico basado en definir primero términos básicos (sin variables) y definir después términos con variables agregando simplemente más "constantes" a la signatura. Para el tratamiento de orden superior, dado un conjunto S, consideramos fijado un $S^{\bowtie}$-conjunto V_S de variables tal que para cada tipo $\tau \in S^{\bowtie}$ el conjunto $V_{S,\tau}$ es infinito numerable.

Definición 56 Dada una signatura de orden superior con tipos ordenados $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$, el $S^{\bowtie}$-conjunto T_Σ de *términos d.o.s.c.t.o.* (con variables en V_S) se define como el menor $S^{\bowtie}$-conjunto que satisface las siguientes condiciones:

1. $V_{S,\tau} \subseteq \mathsf{T}_{\Sigma,\tau}$.
2. $\mathsf{T}_{\Sigma,\tau} \subseteq \mathsf{T}_{\Sigma,\tau'}$ si $\tau \leq^{\bowtie} \tau'$ en $S^{\bowtie}$.
3. Si $\sigma \in \Sigma_{\tau,\tau'}$ y $t \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau}$, entonces $\sigma(t) \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau'}$.

4. $\langle\rangle \in \mathsf{T}_{\Sigma,1}$.
5. Si $t_i \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau_i}$ $(i = 1, 2)$, entonces $\langle t_1, t_2\rangle \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau_1\times\tau_2}$.
6. Si $t \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau_1\times\tau_2}$, entonces $p_i(t) \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau_i}$ $(i = 1, 2)$.
7. Si $t \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau\Rightarrow\tau'}$ y $t' \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau}$, entonces $tt' \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau'}$.
8. Si $t \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau'}$ y $x \in V_{S,\tau}$, entonces $\lambda x{:}\tau.t \in \mathsf{T}_{\Sigma,\tau\Rightarrow\tau'}$. □

Habitualmente no hacemos explícito el conjunto de variables V_S.

Proposición 57 Dada una signatura d.o.s.c.t.o. $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$, cada término t en T_Σ tiene un *tipo mínimo* denotado $lt(t)$.

Demostración: A los casos en la demostración de la Proposición 8 hay que añadir los siguientes casos:

1. $lt(\langle\rangle) = 1$.
2. $lt(\langle t_1, t_2\rangle) = lt(t_1) \times lt(t_2)$.
3. $lt(p_i(t)) = \tau_i$ $(i = 1, 2)$ si $lt(t) = \tau_1 \times \tau_2$.
4. $lt(tt') = \tau$ si $lt(t) = \rho \Rightarrow \tau$.
5. $lt(\lambda x{:}\tau.t) = \tau \Rightarrow lt(t)$. □

La definición de (instancias de) variables *libres* y *ligadas* es la habitual. Vamos a seguir las mismas convenciones que antes en lo que respecta a la representación de términos; sin embargo, es importante notar que ahora $t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau$ denota un término t de tipo τ cuyas variables *libres* están incluidas en la lista $\overline{x} : \overline{\tau}$. La sustitución $t(t'/x)$ de t' por las instancias libres de x en t se define asimismo como es habitual en esta situación, requiriendo el renombramiento de variables ligadas en t para evitar la captura de variables libres en t'.

Cuando sea conveniente, adoptaremos las mismas convenciones con términos que con morfismos, escribiendo $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ y $p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ para tuplas y proyecciones generalizadas, respectivamente.

La definición de ecuación es como antes, es decir, una ecuación incluye un contexto de variables tipadas y relaciona términos cuyos tipos mínimos están en la misma componente conexa de $S^{\bowtie}$. Las reglas de deducción ecuacional a partir de un conjunto Γ de ecuaciones d.o.s.c.t.o. son **Reflexividad, Simetría, Transitividad, Congruencia** y **Sustitución** como antes, junto con las siguientes reglas (donde suponemos que todos los términos y ecuaciones d.o.s.c.t.o. que aparecen están siempre bien formados):

Final: $$\frac{}{\Gamma \vdash (x : 1)\, x = \langle\rangle}$$

Proyecciones: $$\frac{}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\, p_i(\langle t_1, t_2\rangle) = t_i} \quad (i = 1, 2)$$

Par: $$\frac{}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\ \langle p_1(t), p_2(t)\rangle = t}$$

Alfa: $$\frac{}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\ \lambda x\!:\!\tau.t = \lambda y\!:\!\tau.t(y/x)}$$ donde y no es libre en t.

Xi: $$\frac{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau}, y : \rho)\ t = t'}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\ \lambda y\!:\!\rho.t = \lambda y\!:\!\rho.t'}$$

Beta: $$\frac{}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\ (\lambda x\!:\!\tau.t)t' = t(t'/x)}$$

Eta: $$\frac{}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\ \lambda x\!:\!\tau.(tx) = t}$$ donde x no es libre en t y $t : \tau \Rightarrow \tau'$.

La condición adicional en la regla **Eta** sobre el tipo de t evita situaciones como la siguiente, que nos ha hecho notar Simone Martini.

Consideremos dos tipos diferentes σ, τ con $\sigma \leq \tau$ y variables $y : \sigma, x : \tau$. Entonces el término $\lambda y\!:\!\sigma.(\lambda x\!:\!\tau.x)y$ está bien formado y tiene tipo mínimo $\sigma \Rightarrow \tau$. Aplicando la regla **Beta** se obtiene el término $\lambda y\!:\!\sigma.y$ con tipo mínimo $(\sigma \Rightarrow \sigma) \leq (\sigma \Rightarrow \tau)$; así el tipo ha disminuido pero esto no causa ningún problema. Sin embargo, la aplicación de la regla **Eta** daría lugar al término $\lambda x\!:\!\tau.x$ cuyo tipo mínimo $\tau \Rightarrow \tau$ no está en la misma componente conexa que los otros tipos. La restricción en **Eta** elimina esta última posibilidad.

Definición 58 Una *teoría d.o.s.c.t.o.* consiste en una signatura d.o.s.c.t.o. $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$ y un conjunto Γ de Σ-ecuaciones d.o.s.c.t.o. $\Box$

4.2. Álgebras de orden superior en una categoría cartesiana cerrada

Dada una categoría cartesiana cerrada[2] $\mathcal{C}$, usamos la notación 1 para el objeto final, $\times$ para productos y π_i para proyecciones, como antes, con las mismas convenciones para productos, tuplas y proyecciones generalizados; además, usamos $\Rightarrow$ para denotar el funtor exponencial, $\Lambda_{A,B,C}(f) : A \longrightarrow (B \Rightarrow C)$ para denotar la Curry-conversión de $f : A \times B \to C$, y $ev_{A,B} : (A \Rightarrow B) \times A \longrightarrow B$ para el morfismo de evaluación. A veces omitimos los subíndices en $\Lambda_{A,B,C}$ y $ev_{A,B}$.

Definición 59 Una *estructura de inclusiones en una CCC* $\mathcal{C}$ es una estructura de inclusiones $\mathcal{J}$ en la categoría $\mathcal{C}$ que satisface además la siguiente condición: si $j : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{J}$ y C es un objeto, entonces $id_C \Rightarrow j : (C \Rightarrow A) \longrightarrow (C \Rightarrow B)$ es asimismo un morfismo en $\mathcal{J}$[3].

Al par $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ lo llamamos una *CCI-categoría.* $\Box$

Para el resto de esta sección fijamos una CCI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$.

Definición 60 Dada una signatura de orden superior con tipos ordenados $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$, una $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-*álgebra d.o.s.c.t.o. en* $\mathcal{C}$ es una $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-álgebra c.t.o. $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$ tal que

[2]Abreviado a *CCC* a partir de ahora.

[3]Si j es un monomorfismo, entonces $id_C \Rightarrow j$ es asimismo un monomorfismo, porque el funtor $C \Rightarrow \_$ es un adjunto a derecha y por tanto conserva límites.

1. $A_1 = 1$.
2. $A_{\tau_1 \times \tau_2} = A_{\tau_1} \times A_{\tau_2}$.
3. $A_{\tau \Rightarrow \tau'} = A_\tau \Rightarrow A_{\tau'}$. $\square$

Dado un Σ-término d.o.s.c.t.o. t y una Σ-álgebra d.o.s.c.t.o. **A** en $\mathcal{C}$, el significado de t se define como un morfismo $[\![t]\!]_A$ en $\mathcal{C}$, por inducción sobre la estructura de t. Como un término d.o.s.c.t.o. puede construirse de varias formas diferentes, tenemos que probar que $[\![t]\!]_A$ es independiente de la construcción de t.

Definición 61 Dada una $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-álgebra d.o.s.c.t.o. **A** en $\mathcal{C}$, la *operación derivada* asociada a un Σ-término d.o.s.c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau$ es el morfismo $[\![t : \tau]\!]_A : A_{\overline{\tau}} \longrightarrow A_\tau$ en $\mathcal{C}$ definido por las cláusulas en la Definición 21 junto con las siguientes cláusulas adicionales[4]:

1. Si $t = \langle\rangle$, $\quad [\![t : \tau]\!]_A = \langle\rangle_{A_{\overline{\tau}}}$.
2. Si $t = p_i(t')$ con $t' : \rho_1 \times \rho_2$, $\quad [\![t : \tau]\!]_A = [\![t' : \rho_1 \times \rho_2]\!]_A; \pi_i$.
3. Si $t = \langle t_1, t_2\rangle$, con $t_i : \rho_i \;\; (i = 1, 2)$, $\quad [\![t : \tau]\!]_A = \langle [\![t_1 : \rho_1]\!]_A, [\![t_2 : \rho_2]\!]_A\rangle$.
4. Si $t = t't''$ con $t' : \tau' \Rightarrow \tau$ y $t'' : \tau'$, entonces
$$[\![t : \tau]\!]_A = \langle [\![t' : \tau' \Rightarrow \tau]\!]_A, [\![t'' : \tau']\!]_A\rangle; ev_{A_{\tau'}, A_\tau}.$$
5. Si $t = \lambda x\!:\!\tau'.t'$ con $t' : \tau''$ y $\tau = \tau' \Rightarrow \tau''$, y el conjunto de variables $\overline{x} : \overline{\tau}$ es vacío, entonces
$$[\![t : \tau]\!]_A = \Lambda_{1, A_{\tau'}, A_{\tau''}}(\pi_2; [\![t'(x : \tau') : \tau'']\!]_A),$$
donde $\pi_2 : 1 \times A_{\tau'} \longrightarrow A_{\tau'}$ proporciona el esperado isomorfismo $1 \times A_{\tau'} \cong A_{\tau'}$ (con inverso $\langle \langle\rangle_{A_{\tau'}}, id_{A_{\tau'}}\rangle : A_{\tau'} \longrightarrow 1 \times A_{\tau'}$).
6. Si $t = \lambda x\!:\!\tau'.t'$ con $t' : \tau''$ y $\tau = \tau' \Rightarrow \tau''$, y el conjunto de variables $\overline{x} : \overline{\tau}$ no es vacío, entonces
$$[\![t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau]\!]_A = \Lambda_{A_{\overline{\tau}}, A_{\tau'}, A_{\tau''}}([\![t'(\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau') : \tau'']\!]_A). \;\square$$

De nuevo, es importante darse cuenta de que $[\![t]\!]$ no depende de los *nombres* de las variables que aparecen en t, sino sólo de sus tipos, porque las variables son simplemente proyecciones. Por lo tanto, la satisfacción del axioma **Alfa** va a ser trivial.

Lema 62 Dada una $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-álgebra d.o.s.c.t.o. **A** en $\mathcal{C}$ y un Σ-término d.o.s.c.t.o. t,
$$[\![t : \tau]\!]_A = [\![t : lt(t)]\!]_A; A_{lt(t) \leq \tau}.$$
Por lo tanto, el significado de t es independiente de su construcción como término.

Demostración: A los casos en la demostración del Lema 22 hay que añadir los siguientes casos:

[4]Como en la Definición 21, $[\![t : \tau]\!]_A$ depende de un contexto $\overline{x} : \overline{\tau}$ de variables libres para el término $t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau$, que se deja implícito.

Si $t = \langle\rangle$, $\tau = 1 = lt(t)$ pues 1 sólo se relaciona consigo mismo en el orden $\leq^{\bowtie}$, y en este caso $A_{lt(t)\leq\tau}$ es la identidad.

Si $t = p_i(t')$ con $\tau = \tau_i$, $lt(t') = \rho_1 \times \rho_2 \leq \tau_1 \times \tau_2$,

$$\begin{array}{rcl}
[\![t : \tau]\!] & = & [\![t' : \tau_1 \times \tau_2]\!]; \pi_i = \\
& & [\![t' : \rho_1 \times \rho_2]\!]; A_{\rho_1\times\rho_2\leq\tau_1\times\tau_2}; \pi_i = \\
& & [\![t' : \rho_1 \times \rho_2]\!]; (A_{\rho_1\leq\tau_1} \times A_{\rho_2\leq\tau_2}); \pi_i = \\
& & [\![t' : \rho_1 \times \rho_2]\!]; \pi_i; A_{\rho_i\leq\tau_i} = \\
& & [\![t : lt(t)]\!]; A_{lt(t)\leq\tau}.
\end{array}$$

Si $t = \langle t_1, t_2\rangle$ con $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ y $lt(t_i) = \rho_i \ \ (i = 1, 2)$,

$$\begin{array}{rcl}
[\![t : \tau]\!] & = & \langle [\![t_1 : \tau_1]\!], [\![t_2 : \tau_2]\!]\rangle = \\
& & \langle [\![t_1 : \rho_1]\!]; A_{\rho_1\leq\tau_1}, [\![t_2 : \rho_2]\!]; A_{\rho_2\leq\tau_2}\rangle = \\
& & \langle [\![t_1 : \rho_1]\!], [\![t_2 : \rho_2]\!]\rangle; (A_{\rho_1\leq\tau_1} \times A_{\rho_2\leq\tau_2}) = \\
& & \langle [\![t_1 : \rho_1]\!], [\![t_2 : \rho_2]\!]\rangle; A_{\rho_1\times\rho_2\leq\tau_1\times\tau_2} = \\
& & [\![t : lt(t)]\!]; A_{lt(t)\leq\tau}.
\end{array}$$

Si $t = t't''$ con $lt(t') = \rho \Rightarrow \tau' \leq \rho \Rightarrow \tau$ y $t'' : \rho$,

$$\begin{array}{rcl}
[\![t : \tau]\!] & = & \langle [\![t' : \rho \Rightarrow \tau]\!], [\![t'' : \rho]\!]\rangle; ev_{A_\rho, A_\tau} = \\
& & \langle [\![t' : \rho \Rightarrow \tau']\!]; A_{\rho\Rightarrow\tau'\leq\rho\Rightarrow\tau}, [\![t'' : \rho]\!]\rangle; ev = \\
& & \langle [\![t' : \rho \Rightarrow \tau']\!], [\![t'' : \rho]\!]\rangle; (A_{\rho\Rightarrow\tau'\leq\rho\Rightarrow\tau} \times id_{A_\rho}); ev = \\
& & \langle [\![t' : \rho \Rightarrow \tau']\!], [\![t'' : \rho]\!]\rangle; ((id_{A_\rho} \Rightarrow A_{\tau'\leq\tau}) \times id_{A_\rho}); ev_{A_\rho, A_\tau} = \\
& & \langle [\![t' : \rho \Rightarrow \tau']\!], [\![t'' : \rho]\!]\rangle; ev_{A_\rho, A_{\tau'}}; A_{\tau'\leq\tau} = \\
& & [\![t : lt(t)]\!]; A_{lt(t)\leq\tau}.
\end{array}$$

Si $t = \lambda x\!:\!\rho.t'$ con $\tau = \rho \Rightarrow \tau'$ y $lt(t') = \xi \leq \tau'$, y el conjunto de variables $\overline{x} : \overline{\tau}$ no es vacío,

$$\begin{array}{rcl}
[\![t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau]\!] & = & \Lambda_{A_{\overline{\tau}}, A_\rho, A_{\tau'}}([\![t'(\overline{x} : \overline{\tau}, x : \rho) : \tau']\!]) = \\
& & \Lambda([\![t'(\overline{x} : \overline{\tau}, x : \rho) : \xi]\!]; A_{\xi\leq\tau'}) = \\
& & \Lambda_{A_{\overline{\tau}}, A_\rho, A_\xi}([\![t'(\overline{x} : \overline{\tau}, x : \rho) : \xi]\!]); id_{A_\rho} \Rightarrow A_{\xi\leq\tau'} = \\
& & \Lambda([\![t'(\overline{x} : \overline{\tau}, x : \rho) : \xi]\!]); A_{\rho\Rightarrow\xi\leq\rho\Rightarrow\tau'} = \\
& & [\![t : lt(t)]\!]; A_{lt(t)\leq\tau}.
\end{array}$$

El caso en el cual el conjunto de variables $\overline{x} : \overline{\tau}$ es vacío es similar. □

Proposición 63 Dada una $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-álgebra d.o.s.c.t.o. $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$ y términos d.o.s.c.t.o. $t_i(y_1 : \rho_1, \ldots, y_k : \rho_k) : \tau_i \ \ (i = 1, \ldots, n)$ y $t'(x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n) : \tau'$, tenemos

$$[\![t'(\overline{t}/\overline{x}) : \tau']\!] = \langle [\![t_1 : \tau_1]\!], \ldots, [\![t_n : \tau_n]\!]\rangle; [\![t' : \tau']\!] : A_{\rho_1} \times \ldots \times A_{\rho_k} \longrightarrow A_{\tau'}.$$

Demostración: A los casos en la demostración de la Proposición 23 hay que añadir los siguientes casos:

Si $t' = \langle\rangle$,

$$[\![t'(\bar{t}/\bar{x})]\!] = [\![\langle\rangle]\!] = \langle\rangle_{A_{\overline{\rho}}} = \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; \langle\rangle_{A_{\overline{\tau}}} = \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t']\!].$$

Si $t' = p_i(t'')$,

$$\begin{aligned}[\![t'(\bar{t}/\bar{x})]\!] &= [\![p_i(t''(\bar{t}/\bar{x}))]\!] = \\ & [\![t''(\bar{t}/\bar{x})]\!]; \pi_i = \\ & \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t'']\!]; \pi_i = \\ & \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t']\!].\end{aligned}$$

Si $t' = \langle t'_1, t'_2\rangle$,

$$\begin{aligned}[\![t'(\bar{t}/\bar{x})]\!] &= [\![\langle t'_1(\bar{t}/\bar{x}), t'_2(\bar{t}/\bar{x})\rangle]\!] = \\ & \langle[\![t'_1(\bar{t}/\bar{x})]\!], [\![t'_2(\bar{t}/\bar{x})]\!]\rangle = \\ & \langle\langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t'_1]\!], \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t'_2]\!]\rangle = \\ & \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; \langle[\![t'_1]\!], [\![t'_2]\!]\rangle = \\ & \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t']\!].\end{aligned}$$

Si $t' = uv$,

$$\begin{aligned}[\![t'(\bar{t}/\bar{x})]\!] &= [\![u(\bar{t}/\bar{x})v(\bar{t}/\bar{x})]\!] = \\ & \langle[\![u(\bar{t}/\bar{x})]\!], [\![v(\bar{t}/\bar{x})]\!]\rangle; ev = \\ & \langle\langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![u]\!], \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![v]\!]\rangle; ev = \\ & \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; \langle[\![u]\!], [\![v]\!]\rangle; ev = \\ & \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t']\!].\end{aligned}$$

Finalmente, si $t' = \lambda z\!:\!\xi.u$ (donde podemos suponer que z no aparece ni en u ni en la lista de variables $(\overline{x} : \overline{\tau}, \overline{y} : \overline{\rho})$, ya que el significado de los términos no depende del nombre de las variables), tenemos

$$\begin{aligned}& [\![t'(\bar{t}/\bar{x})]\!] = \\ & \quad [\![\lambda z\!:\!\xi.u(\bar{t}/\bar{x})\ (\overline{y} : \overline{\rho})]\!] = \\ & \quad \Lambda_{A_{\overline{\rho}}, A_\xi, A_{\tau'}}([\![u(\bar{t}/\bar{x})\ (\overline{y} : \overline{\rho}, z : \xi)]\!]) = \\ & \quad \Lambda([\![u(\bar{t}/\bar{x}, z/z)\ (\overline{y} : \overline{\rho}, z : \xi)]\!]) = \\ & \quad \Lambda(\langle[\![t_1(\overline{y} : \overline{\rho}, z : \xi)]\!], \ldots, [\![t_n(\overline{y} : \overline{\rho}, z : \xi)]\!], [\![z(\overline{y} : \overline{\rho}, z : \xi)]\!]\rangle; [\![u(\overline{x} : \overline{\tau}, z : \xi)]\!]) = \\ & \quad \Lambda(\langle\langle\pi_1, \ldots, \pi_k\rangle; [\![t_1(\overline{y} : \overline{\rho})]\!], \ldots, \langle\pi_1, \ldots, \pi_k\rangle; [\![t_n(\overline{y} : \overline{\rho})]\!], \pi_{k+1}\rangle; [\![u(\overline{x} : \overline{\tau}, z : \xi)]\!]) = \\ & \quad \Lambda((\langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle \times id_{A_\xi}); [\![u(\overline{x} : \overline{\tau}, z : \xi)]\!]) = \\ & \quad \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; \Lambda_{A_{\overline{\tau}}, A_\xi, A_{\tau'}}([\![u(\overline{x} : \overline{\tau}, z : \xi)]\!]) = \\ & \quad \langle[\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle; [\![t']\!].\end{aligned}$$

Finalmente, basta notar que si el conjunto de variables $\overline{x} : \overline{\tau}$ es vacío, la ecuación del enunciado se hace trivial. $\Box$

La definición de satisfacción de una ecuación por un álgebra es como antes, y entonces podemos probar la siguiente

Proposición 64 (*Corrección*) Sea $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$ una teoría d.o.s.c.t.o. y $\mathbf{A}$ una (Σ, Γ)-álgebra d.o.s.c.t.o. en $\mathcal{C}$. Si $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\, t = t'$, entonces $\mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{\tau})\, t = t'$.

Demostración: A los casos en la demostración de la Proposición 28 hay que añadir los siguientes casos:

Final: $[\![\langle\rangle\ (x : 1)]\!] = \langle\rangle_1 = id_1 = [\![x\ (x : 1)]\!]$.

Proyecciones: $[\![p_i(\langle t_1, t_2\rangle)]\!] = \langle [\![t_1]\!], [\![t_2]\!]\rangle; \pi_i = [\![t_i]\!]$.

Par: $[\![\langle p_1(t), p_2(t)\rangle]\!] = \langle [\![t]\!]; \pi_1, [\![t]\!]; \pi_2\rangle = [\![t]\!]; \langle \pi_1, \pi_2\rangle = [\![t]\!]$.

Alfa: Ya hemos señalado que el significado de los términos es independiente de los nombres de las variables, pues las variables son proyecciones.

Xi: Obvio.

Beta: $\{(\overline{x} : \overline{\tau})\ \ \textit{no vacío}\}$

$$
\begin{aligned}
&[\![(\lambda x{:}\tau.t)t'\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!] = \\
&\langle \Lambda([\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau)]\!]), [\![t'\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!]\rangle; ev = \\
&\langle id, [\![t'\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!]\rangle; [\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau)]\!] = \\
&\langle \pi_1, \ldots, \pi_n, [\![t'\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!]\rangle; [\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau)]\!] = \\
&[\![t(\overline{x}/\overline{x}, t'/x)\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!] = \\
&[\![t(t'/x)\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!].
\end{aligned}
$$

$\{(\overline{x} : \overline{\tau})\ \ \textit{vacío}\}$

$$
\begin{aligned}
&[\![(\lambda x{:}\tau.t)t']\!] = \\
&\langle \Lambda(\pi_2; [\![t\ (x : \tau)]\!]), [\![t']\!]\rangle; ev = \\
&\langle id, [\![t']\!]\rangle; \pi_2; [\![t\ (x : \tau)]\!] = \\
&[\![t']\!]; [\![t\ (x : \tau)]\!] = \\
&[\![t(t'/x)]\!].
\end{aligned}
$$

Eta: $\{(\overline{x} : \overline{\tau})\ \ \textit{no vacío}\}$

$$
\begin{aligned}
&[\![\lambda x{:}\tau.(tx)\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!] = \\
&\Lambda([\![tx\ (\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau)]\!]) = \\
&\Lambda(\langle [\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau)]\!], [\![x\ (\overline{x} : \overline{\tau}, x : \tau)]\!]\rangle; ev) = \\
&\Lambda(\langle\langle \pi_1, \ldots, \pi_n\rangle; [\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!], \pi_{n+1}\rangle; ev) = \\
&\Lambda(([\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!] \times id); ev) = \\
&[\![t\ (\overline{x} : \overline{\tau})]\!].
\end{aligned}
$$

$\{(\overline{x} : \overline{\tau})\ \ \textit{vacío}\}$

$$
\begin{aligned}
&[\![\lambda x{:}\tau.(tx)]\!] = \\
&\Lambda(\pi_2; [\![tx\ (x : \tau)]\!]) = \\
&\Lambda(\pi_2; \langle [\![t\ (x : \tau)]\!], [\![x\ (x : \tau)]\!]\rangle; ev) = \\
&\Lambda(\pi_2; \langle \langle\rangle; [\![t]\!], id\rangle; ev) = \\
&\Lambda(\pi_2; \langle \langle\rangle, id\rangle; ([\![t]\!] \times id); ev) = \\
&\Lambda(([\![t]\!] \times id); ev) = \\
&[\![t]\!].\ \Box
\end{aligned}
$$

Todavía no hemos definido la noción de homomorfismo para álgebras d.o.s.c.t.o. Intuitivamente, un homomorfismo d.o.s.c.t.o. debería ser un homomorfismo con tipos ordenados que conserva además las nuevas operaciones sobre los términos. No hay ningún problema en lo que a productos o aplicación respecta; sin embargo, lambda abstracción requiere hacer referencia a términos arbitrarios[5]. Siguiendo una sugerencia de Val Breazu-Tannen, presentamos a continuación una formulación equivalente, pero más compacta, usando combinadores [69, 118]. Por supuesto, junto con los combinadores clásicos K y S, debemos usar combinadores correspondientes a las proyecciones, los pares y los símbolos de operación en la signatura.

Definición 65 Dada una signatura d.o.s.c.t.o. $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$, definimos las familias de *combinadores* $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$*-tipados*, o simplemente Σ*-combinadores*, como sigue:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{K}^{\rho,\tau} & = & \lambda x\!:\!\rho.\lambda y\!:\!\tau.x \\
\mathsf{S}^{\xi,\rho,\tau} & = & \lambda x\!:\!\xi \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho).\lambda y\!:\!\xi \Rightarrow \tau.\lambda z\!:\!\xi.(xz)(yz) \\
\mathsf{P}_1^{\rho,\tau} & = & \lambda x\!:\!\rho \times \tau.p_1(x) \\
\mathsf{P}_2^{\rho,\tau} & = & \lambda x\!:\!\rho \times \tau.p_2(x) \\
\mathsf{E}^{\rho,\tau} & = & \lambda x\!:\!\rho.\lambda y\!:\!\tau.\langle x, y\rangle \\
\mathsf{F}_\sigma^{\rho,\tau} & = & \lambda x\!:\!\rho.\sigma(x), \ \text{ para cada símbolo de operación } \sigma \in \Sigma_{\rho,\tau}. \ \Box
\end{array}
$$

Observación 66 Dada una Σ-álgebra d.o.s.c.t.o. $\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}$, es mera rutina seguir las Definiciones 61 y 65 para encontrar que las operaciones derivadas asociadas a los Σ-combinadores, en el conjunto vacío de variables, son las siguientes (donde por brevedad omitimos los tipos):

$$
\begin{array}{lcl}
[\![\mathsf{K}]\!]_A & = & \Lambda(\pi_2; \Lambda(\pi_1)) \\
[\![\mathsf{S}]\!]_A & = & \Lambda(\pi_2; \Lambda(\Lambda(\langle\langle \pi_1, \pi_3\rangle; ev, \langle \pi_2, \pi_3\rangle; ev\rangle; ev))) \\
[\![\mathsf{P}_i]\!]_A & = & \Lambda(\pi_2; \pi_i) \ \ (i = 1, 2) \\
[\![\mathsf{E}]\!]_A & = & \Lambda(\pi_2; \Lambda(id)) \\
[\![\mathsf{F}_\sigma^{\rho,\tau}]\!]_A & = & \Lambda(\pi_2; A_\sigma^{\rho,\tau}). \ \Box
\end{array}
$$

Definición 67 Decimos que un término d.o.s.c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau$ en T_Σ está en *forma combinatoria* si cae en uno de los siguientes casos:

1. Si t es $\langle\rangle$, una variable o un Σ-combinador, entonces está en forma combinatoria.

2. Si $t : \tau'$ está en forma combinatoria, y $\tau' \leq \tau$, entonces $t : \tau$ está en forma combinatoria.

3. Si $t' : \tau' \Rightarrow \tau$ y $t'' : \tau'$ están en forma combinatoria, entonces $t't'' : \tau$ está en forma combinatoria. $\Box$

Definición 68 [69, 118] Dado un término d.o.s.c.t.o. $t : \tau$ en forma combinatoria y una variable $x : \rho$, la *abstracción* de $t : \tau$ con respecto a $x : \rho$ es el término en forma combinatoria $\langle x : \rho\rangle t : \rho \Rightarrow \tau$ definido como sigue:

[5] Más exactamente, necesitamos una condición diciendo que un homomorfismo d.o.s.c.t.o. h debe satisfacer la ecuación $(h_{\tau_1} \times \ldots \times h_{\tau_n}); \Lambda([\![t : \tau]\!]_B) = \Lambda([\![t : \tau]\!]_A); h_{\rho \Rightarrow \tau}$ para todos los términos $t(\overline{x} : \overline{\tau}, y : \rho) : \tau$.

1. $\langle x:\rho\rangle t = \mathsf{K}^{\tau,\rho}t$ si la variable x no es libre en t.
2. $\langle x:\rho\rangle x = (\mathsf{S}^{\rho,\rho\Rightarrow\rho,\rho}\mathsf{K}^{\rho,\rho\Rightarrow\rho})\mathsf{K}^{\rho,\rho}$.
3. $\langle x:\rho\rangle t't'' = (\mathsf{S}^{\rho,\xi,\tau}\langle x:\rho\rangle t')\langle x:\rho\rangle t''$ si $t = t't''$ con $t' : \xi \Rightarrow \tau$ y $t'' : \xi$, y el caso 1 no se aplica. $\Box$

Lema 69 Para un término d.o.s.c.t.o. $t(\overline{x}:\overline{\tau})$ en forma combinatoria,

$$\vdash (\overline{x}:\overline{\tau})\,\langle x:\rho\rangle t = \lambda x{:}\rho.t.$$

Demostración: Omitiendo los tipos en términos y combinadores por brevedad, tenemos:

1. $\mathsf{K}t = (\lambda y.\lambda x.y)t = \lambda x.t.$
2. $(\mathsf{SK})\mathsf{K} = ((\lambda y.\lambda z.\lambda x.(yx)(zx))\mathsf{K})\mathsf{K} = \lambda x.(\mathsf{K}x)(\mathsf{K}x) = \lambda x.x.$
3. $(\mathsf{S}\langle x\rangle t')\langle x\rangle t'' = (\mathsf{S}(\lambda x.t'))(\lambda x.t'') = ((\lambda y.\lambda z.\lambda x.(yx)(zx))(\lambda x.t'))(\lambda x.t'') =$
   $\lambda x.((\lambda x.t')x)((\lambda x.t'')x) = \lambda x.t't''.$ $\Box$

Proposición 70 Dado un término d.o.s.c.t.o. $t(\overline{x}:\overline{\tau}) : \tau$ en T_Σ, existe un término d.o.s.c.t.o. en forma combinatoria $t_c(\overline{x}:\overline{\tau}) : \tau$ en T_Σ tal que $\vdash (\overline{x}:\overline{\tau})\,t = t_c$.

Demostración: Por inducción sobre la estructura de t, tenemos los siguientes casos (donde por brevedad omitimos los tipos en general):

$$\begin{array}{ll}
t = \langle\rangle & t_c = \langle\rangle \\
t = x & t_c = x \\
t : \tau' \leq \tau & t_c : \tau' \leq \tau \\
t = \sigma(t') & t_c = \mathsf{F}_\sigma t'_c \\
t = p_i(t') & t_c = \mathsf{P}_i t'_c \\
t = \langle t', t''\rangle & t_c = \mathsf{E}t'_c t''_c \\
t = t't'' & t_c = t'_c t''_c \\
t = \lambda x{:}\rho.t' & t_c = \langle x:\rho\rangle t'_c
\end{array}$$

Usando inducción y el Lema 69, es fácil comprobar que $\vdash (\overline{x}:\overline{\tau})\,t = t_c$. $\Box$

Definición 71 Sea $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$ una signatura d.o.s.c.t.o. Dadas dos Σ-álgebras d.o.s.c.t.o. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$, un Σ-*homomorfismo d.o.s.c.t.o.* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ viene dado por una $S^{\bowtie}$-familia de morfismos $\{h_\tau : A_\tau \to B_\tau \mid \tau \in S^{\bowtie}\}$ en $\mathcal{C}$ tal que

1. Si $\tau \leq \tau'$, $\quad h_\tau ; B_{\tau\leq\tau'} = A_{\tau\leq\tau'} ; h_{\tau'} : A_\tau \to B_{\tau'}$.

$$\begin{tikzcd}
A_\tau \arrow[r, "A_{\tau\leq\tau'}"] \arrow[d, "h_\tau"'] & A_{\tau'} \arrow[d, "h_{\tau'}"] \\
B_\tau \arrow[r, "B_{\tau\leq\tau'}"] & B_{\tau'}
\end{tikzcd}$$

2. $h_{\tau_1\times\tau_2};\pi_i = \pi_i; h_{\tau_i}$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{tikzcd} A_{\tau_1}\times A_{\tau_2} \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "h_{\tau_1\times\tau_2}"'] & A_{\tau_i} \arrow[d, "h_{\tau_i}"] \\ B_{\tau_1}\times B_{\tau_2} \arrow[r, "\pi_i"] & B_{\tau_i} \end{tikzcd}$$

(equivalentemente, $h_{\tau_1\times\tau_2} = h_{\tau_1}\times h_{\tau_2}$).

3. $(h_{\rho\Rightarrow\tau}\times h_\rho); ev_{B_\rho,B_\tau} = ev_{A_\rho,A_\tau}; h_\tau$

$$\begin{tikzcd} (A_\rho \Rightarrow A_\tau)\times A_\rho \arrow[r, "ev"] \arrow[d, "h_{\rho\Rightarrow\tau}\times h_\rho"'] & A_\tau \arrow[d, "h_\tau"] \\ (B_\rho \Rightarrow B_\tau)\times B_\rho \arrow[r, "ev"] & B_\tau \end{tikzcd}$$

(equivalentemente, $h_{\rho\Rightarrow\tau}; (h_\rho \Rightarrow id_{B_\tau}) = id_{A_\rho} \Rightarrow h_\tau$).

4. Para todo Σ-combinador C de tipo τ_{c}, $[\![\mathsf{C} : \tau_{\mathsf{c}}]\!]_A; h_{\tau_{\mathsf{c}}} = [\![\mathsf{C} : \tau_{\mathsf{c}}]\!]_B$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "{[\![\mathsf{C} : \tau_{\mathsf{c}}]\!]_A}"] \arrow[dr, "{[\![\mathsf{C} : \tau_{\mathsf{c}}]\!]_B}"'] & A_{\tau_{\mathsf{c}}} \arrow[d, "h_{\tau_{\mathsf{c}}}"] \\ & B_{\tau_{\mathsf{c}}} \end{tikzcd}$$

De esta forma se define una categoría denotada $\underline{HOSAlg(\mathcal{C},\mathcal{J})}_{\Sigma}$ así como subcategorías plenas $\underline{HOSAlg(\mathcal{C},\mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma}$. $\square$

Si cada h_τ es un isomorfismo, entonces $h_{\rho\Rightarrow\tau} = h_\rho^{-1} \Rightarrow h_\tau$; en este caso, un homomorfismo está completamente determinado a partir de sus componentes para tipos básicos $s \in S$. Éste es el caso particular de álgebra heterogénea de orden superior estudiado por Pitts en [128]. Que la definición anterior, aparte de ser completamente general, captura la evasiva noción de homomorfismo de orden superior es confirmado por el siguiente lema.

Lema 72 Dado un homomorfismo d.o.s.c.t.o. $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre dos Σ-álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$, y un Σ-término d.o.s.c.t.o. $t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau$, tenemos

$$(h_{\tau_1}\times \ldots \times h_{\tau_n}); [\![t : \tau]\!]_B = [\![t : \tau]\!]_A; h_\tau.$$

Demostración: Por las Proposiciones 70 y 64, para cada término d.o.s.c.t.o. t existe un término t_c en forma combinatoria tal que $[\![t]\!] = [\![t_c]\!]$; por lo tanto, basta probar el lema para términos en forma combinatoria.

Los casos básicos de combinadores, variables y $\langle\rangle$ son todos obvios a partir de la definición de homomorfismo d.o.s.c.t.o. Supongamos que $h_{\overline{\tau}}; [\![t' : \rho \Rightarrow \tau]\!]_B = [\![t' : \rho \Rightarrow \tau]\!]_A; h_{\rho\Rightarrow\tau}$ y $h_{\overline{\tau}}; [\![t'' : \rho]\!]_B = [\![t'' : \rho]\!]_A; h_\rho$, donde $h_{\overline{\tau}}$ denota $h_{\tau_1} \times \ldots \times h_{\tau_n}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
h_{\overline{\tau}}; [\![t't'' : \tau]\!]_B \quad = \quad & h_{\overline{\tau}}; \langle [\![t']\!]_B, [\![t'']\!]_B\rangle; ev_{B_\rho,B_\tau} = \\
& \langle h_{\overline{\tau}}; [\![t']\!]_B, h_{\overline{\tau}}; [\![t'']\!]_B\rangle; ev = \\
& \langle [\![t']\!]_A; h_{\rho\Rightarrow\tau}, [\![t'']\!]_A; h_\rho\rangle; ev = \\
& \langle [\![t']\!]_A, [\![t'']\!]_A\rangle; (h_{\rho\Rightarrow\tau} \times h_\rho); ev_{B_\rho,B_\tau} = \\
& \langle [\![t']\!]_A, [\![t'']\!]_A\rangle; ev_{A_\rho,A_\tau}; h_\tau = \\
& [\![t't'']\!]; h_\tau. \ \square
\end{aligned}$$

Corolario 73 Como un caso particular de este lema, obtenemos $h_\tau; B_\sigma^{\tau,\tau'} = A_\sigma^{\tau,\tau'}; h_{\tau'}$ para todo $\sigma \in \Sigma_{\tau,\tau'}$, pues $A_\sigma^{\tau,\tau'} = [\![\sigma(x)\,(x : \tau)]\!]_A$ y análogamente para $\mathbf{B}$. Por lo tanto, un Σ-homomorfismo d.o.s.c.t.o. $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un Σ-homomorfismo c.t.o. entre las $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-álgebras subyacentes. $\square$

Es interesante comparar nuestra definición de homomorfismo de orden superior, interpretada en categorías cuyos objetos son conjuntos, con la noción de *relación lógica* [137, 123]. Por un lado, nosotros estamos interesados en funciones en vez de relaciones, y desde este punto de vista nuestra noción de homomorfismo es más restrictiva que la de relación lógica. Por otra parte, las componentes de una relación lógica para tipos de orden superior están completamente determinadas a partir de sus componentes para tipos básicos, mientras que en nuestro enfoque esto no es cierto en general, si bien sí lo es en algunos casos particulares como, por ejemplo, el ya mencionado donde todas las componentes son isomorfismos; en este aspecto, nuestra noción es menos restrictiva. El Teorema 78 proporcionará más evidencia en el sentido de que nuestra noción de homomorfismo es muy natural, al demostrar que en la semántica funtorial los homomorfismos se corresponden exactamente con las transformaciones naturales.

4.3. Categorías clasificantes para teorías de orden superior

Definición 74 Un *CCI-funtor* $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ entre dos CCI-categorías $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ es un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ que conserva la estructura cartesiana cerrada de forma estricta[6] y tal que $F(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}'$.

Denotamos por $\underline{\mathit{CCI}((\mathcal{C}, \mathcal{J}), (\mathcal{C}', \mathcal{J}'))}$ la categoría cuyos objetos son CCI-funtores entre $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales entre tales funtores. $\square$

Con esta definición, tenemos los siguientes resultados.

[6] Es decir, F conserva productos finitos estrictamente y además $F(A \Rightarrow B) = F(A) \Rightarrow F(B)$ y $F(ev_{A,B}) = ev_{F(A),F(B)}$. En esta situación se deduce también $F(\Lambda_{A,B,C}(f)) = \Lambda_{F(A),F(B),F(C)}(F(f))$.

Proposición 75 Sea $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ un CCI-funtor. Entonces,

1. Como en la Proposición 30, la aplicación de F define un funtor
$$F^\star : \underline{HOSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_\Sigma \longrightarrow \underline{HOSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')}_\Sigma.$$

2. Si $\mathbf{A}$ es una Σ-álgebra d.o.s.c.t.o. en $\mathcal{C}$, y $t(\overline{x} : \overline{\tau}) : \tau$ es un Σ-término d.o.s.c.t.o.,
$$[\![t : \tau]\!]_{F^\star A} = F([\![t : \tau]\!]_A).$$

3. Dada una teoría d.o.s.c.t.o. $(S, \leq, \Sigma, \Gamma)$, $F^\star$ se restringe a un funtor
$$F^\star : \underline{HOSAlg(\mathcal{C}, \mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \underline{HOSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma}.$$

Demostración: Como F es un CCI-funtor, si $\mathbf{A}$ es una Σ-álgebra d.o.s.c.t.o., entonces $F^\star\mathbf{A}$ es asimismo una Σ-álgebra d.o.s.c.t.o. Es fácil probar que $[\![t : \tau]\!]_{F^\star A} = F([\![t : \tau]\!]_A)$ como en el Lema 31. Esta ecuación es necesaria para probar que si $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un Σ-homomorfismo d.o.s.c.t.o., entonces $F^\star h$ lo es también, debido a la condición sobre conservación de combinadores en la Definición 71: si $[\![\mathsf{C} : \tau_\mathsf{c}]\!]_B = [\![\mathsf{C} : \tau_\mathsf{c}]\!]_A; h_{\tau_\mathsf{c}}$, entonces $F([\![\mathsf{C} : \tau_\mathsf{c}]\!]_B) = F([\![\mathsf{C} : \tau_\mathsf{c}]\!]_A); F(h_{\tau_\mathsf{c}})$; equivalentemente, $[\![\mathsf{C} : \tau_\mathsf{c}]\!]_{F^\star B} = [\![\mathsf{C} : \tau_\mathsf{c}]\!]_{F^\star A}; (F^\star h)_{\tau_\mathsf{c}}$, como se desea.

El funtor $F^\star$ conserva satisfacción por 2, y 3 se obtiene como en la Proposición 32. □

Proposición 76 Sean $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ dos CCI-categorías y $\mathbf{A}$ una (Σ, Γ)-álgebra en $\mathcal{C}$.

1. Si η es una transformación natural entre CCI-funtores $F, G : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$, la familia $\eta^\star_A = \{\eta_{A_\tau} : F(A_\tau) \to G(A_\tau) \mid \tau \in S^{\bowtie}\}$ constituye un Σ-homomorfismo d.o.s.c.t.o. entre $F^\star\mathbf{A}$ y $G^\star\mathbf{A}$ en $\mathcal{C}'$.

2. Las asignaciones $F \longmapsto F^\star\mathbf{A}$ y $\eta \longmapsto \eta^\star_A$ definen un funtor
$$\mathbf{A}^\natural : \underline{CCI((\mathcal{C}, \mathcal{J}), (\mathcal{C}', \mathcal{J}'))} \longrightarrow \underline{HOSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma}.$$

Demostración: Como en la Proposición 33, las condiciones para que $\eta^\star_A$ sea un homomorfismo son casos particulares de la naturalidad de η. □

Definición 77 Dada una teoría d.o.s.c.t.o. $T = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$, una CCI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ se llama una *categoría clasificante* de T si existe una Σ-álgebra d.o.s.c.t.o. $\mathbf{G}$ en $\mathcal{C}$, llamada *álgebra genérica*, tal que para toda CCI-categoría $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ el funtor
$$\mathbf{G}^\natural : \underline{CCI((\mathcal{C}, \mathcal{J}), (\mathcal{C}', \mathcal{J}'))} \longrightarrow \underline{HOSAlg(\mathcal{C}', \mathcal{J}')}_{\Sigma,\Gamma}$$
es un isomorfismo. □

Categorías clasificantes para una teoría d.o.s.c.t.o. son de nuevo únicas salvo isomorfismo y podemos hablar de *la* categoría clasificante de T, denotada $\mathcal{L}^\flat_T$, y de *el* álgebra genérica de T, denotada $\mathbf{G}^\flat_T$.

Teorema 78 (*Existencia de categorías clasificantes para teorías d.o.s.c.t.o.*)
Dada una teoría d.o.s.c.t.o. $T = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$, existen una categoría clasificante $\mathcal{L}_T^{\flat}$ y un álgebra genérica $\mathbf{G}_T^{\flat}$.

Demostración: La demostración sigue exactamente los mismos pasos que la del Teorema 37.

1. La categoría $\mathcal{L}_T^{\flat}$ se construye como sigue:

   Objetos: Los elementos de $S^{\bowtie}$.

   Morfismos: Los morfismos con dominio τ y codominio τ' se generan a partir de términos $t(x:\tau):\tau'$, sujetos a la relación de igualdad

   $$t(x:\tau):\tau' \equiv t'(y:\tau):\tau' \iff \Gamma \vdash (x:\tau)\, t = t'(x/y).$$

   De este modo, excepto por el nombre de la variable, un morfismo con dominio τ y codominio τ' es una clase de equivalencia $[t(x:\tau)]$ junto con la especificación de su dominio y codominio.

   Identidades: La identidad para τ es $[x(x:\tau)]:\tau \to \tau$.

   Composición: La composición de $[t(x:\tau)]:\tau \to \rho$ y $[t'(y:\rho)]:\rho \to \xi$ viene dada por la sustitución

   $$[t'(t/y)\,(x:\tau)]:\tau \to \xi.$$

   Productos: El objeto final es 1, siendo el morfismo único de τ a 1

   $$[\langle\rangle(x:\tau)]:\tau \to 1.$$

   El producto de τ_1 y τ_2 es $\tau_1 \times \tau_2$. Las proyecciones son de la forma

   $$[p_i(x)\,(x:\tau_1\times\tau_2)]:(\tau_1\times\tau_2) \to \tau_i \quad (i=1,2).$$

   Dados $[t_i\,(x:\rho)]:\rho \to \tau_i$ $(i=1,2)$, el morfismo inducido es

   $$[\langle t_1, t_2\rangle\,(x:\rho)]:\rho \to (\tau_1\times\tau_2).$$

   Exponenciales: El objeto exponencial de τ y τ' es $\tau \Rightarrow \tau'$. El morfismo evaluación $(\tau \Rightarrow \tau')\times\tau \longrightarrow \tau'$ se define por

   $$[p_1(x)p_2(x)\,(x:(\tau\Rightarrow\tau')\times\tau)].$$

   Y la Curry-conversión de $[t\,(x:\tau\times\tau')]:(\tau\times\tau') \to \rho$ es el morfismo

   $$[\lambda z{:}\tau'.t(\langle y,z\rangle/x)\,(y:\tau)]:\tau \to (\tau'\Rightarrow\rho).$$

   Estructura de inclusiones: Los morfismos en $\mathcal{J}_T^{\flat}$ son de la forma $[x(x:\tau)]:\tau \to \tau'$ para $\tau \leq^{\bowtie} \tau'$ en $S^{\bowtie}$.

Es sencillo comprobar que estas construcciones definen una CCI-categoría. La parte más interesante es la que respecta al objeto exponencial. Primero, dados $[t(y:\tau)]:\tau\to\rho$ y $[t'(z:\tau')]:\tau'\to\rho'$, el morfismo $[t(y:\tau)]\times[t'(z:\tau')]:(\tau\times\tau')\longrightarrow(\rho\times\rho')$ está dado por

$$[\langle t(p_1(x)/y),t'(p_2(x)/z)\rangle\,(x:\tau\times\tau')].$$

Ahora, dado $[t(x:\rho\times\tau)]:(\rho\times\tau)\to\tau'$, tenemos que probar

$$(\Lambda_{\rho,\tau,\tau'}([t(x:\rho\times\tau)])\times id_\tau);ev_{\tau,\tau'}=[t(x:\rho\times\tau)] \qquad (\dagger)$$

equivalentemente

$$([\lambda z\!:\!\tau.t(\langle y,z\rangle/x)]\times[w]);[p_1(a)p_2(a)]=[t]$$

o sea

$$[\langle\lambda z\!:\!\tau.t(\langle p_1(x),z\rangle/x),p_2(x)\rangle];[p_1(a)p_2(a)]=[t].$$

Calculemos:

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{p_1(\langle\lambda z\!:\!\tau.t(\langle p_1(x),z\rangle/x),p_2(x)\rangle)p_2(\langle\lambda z\!:\!\tau.t(\langle p_1(x),z\rangle/x),p_2(x)\rangle)=}\\
\{\textbf{Proyecciones}\} & (\lambda z\!:\!\tau.t(\langle p_1(x),z\rangle/x))p_2(x)=\\
\{\textbf{Beta}\} & t(\langle p_1(x),z\rangle/x)(p_2(x)/z)=\\
 & t(\langle p_1(x),p_2(x)\rangle/x)=\\
\{\textbf{Par}\} & t(x/x)=t.
\end{array}$$

La unicidad de $\Lambda([t])$ con respecto a la propiedad $(\dagger)$ se demuestra como sigue. Supongamos que $[t'(y:\rho)]:\rho\to(\tau\Rightarrow\tau')$ también satisface $(\dagger)$; entonces,

$$[\langle t'(p_1(x)/y),p_2(x)\rangle];[p_1(a)p_2(a)]=[t],$$

o sea, usando la regla **Proyecciones**,

$$\Gamma\vdash(x:\rho\times\tau)\ (t'(p_1(x)/y))p_2(x)=t.$$

Aplicando la sustitución $x\mapsto\langle y,z\rangle$ y la regla **Proyecciones**, obtenemos

$$\Gamma\vdash(y:\rho,z:\tau)\ (t'(y/y))z=t(\langle y,z\rangle/x),$$

y por la regla **Xi**,

$$\Gamma\vdash(y:\rho)\ \lambda z\!:\!\tau.(t'z)=\lambda z\!:\!\tau.t(\langle y,z\rangle/x).$$

Finalmente, **Eta** nos da la ecuación deseada

$$\Gamma\vdash(y:\rho)\ t'=\lambda z\!:\!\tau.t(\langle y,z\rangle/x).$$

2. El álgebra genérica $\mathbf{G}^\flat_T$ se define por:

a) $(\mathbf{G}_T^\flat)_\tau = \tau$.

b) $(\mathbf{G}_T^\flat)_\sigma^{\tau,\tau'} = [\sigma(x)\,(x:\tau)] : \tau \to \tau'$.

c) $(\mathbf{G}_T^\flat)_{\tau \leq \tau'} = [x\,(x:\tau)] : \tau \to \tau'$.

La condición de monotonía es trivial de nuevo.

Es rutinario probar que

$$[\![t(\overline{x}:\overline{\tau}):\tau]\!]_{G_T^\flat} = [t(p_1(x)/x_1,\ldots,p_n(x)/x_n)\,(x:\tau_1\times\ldots\times\tau_n)],$$

mediante inducción sobre la estructura de t. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rcl} [\![\sigma(t)]\!] & = & [\![t]\!];(G_T^\flat)_\sigma^{\tau,\tau'} = \\ & & [t(p_1(x)/x_1,\ldots,p_n(x)/x_n)];[\sigma(y)] = \\ & & [\sigma(t(p_1(x)/x_1,\ldots,p_n(x)/x_n))] = \\ & & [\sigma(t)(p_1(x)/x_1,\ldots,p_n(x)/x_n)]. \end{array}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} [\![\lambda z\!:\!\rho.t\,(\overline{x}:\overline{\tau})]\!] & = & \Lambda([\![t\,(\overline{x}:\overline{\tau},z:\rho)]\!]) = \\ & & \Lambda([t(p_1(y)/x_1,\ldots,p_n(y)/x_n,p_{n+1}(y)/z)]) = \\ & & [\lambda z\!:\!\rho.t(p_1(\langle x,z\rangle)/x_1,\ldots,p_n(\langle x,z\rangle)/x_n,p_{n+1}(\langle x,z\rangle)/z)] = \\ & & [\lambda z\!:\!\rho.t(p_1(x)/x_1,\ldots,p_n(x)/x_n,z/z)] = \\ & & [(\lambda z\!:\!\rho.t)(p_1(x)/x_1,\ldots,p_n(x)/x_n)]. \end{array}$$

Por lo tanto, $\mathbf{G}_T^\flat$ satisface todas las ecuaciones en Γ.

3. Definimos un funtor $(\_)^\bullet : \underline{\mathit{HOSAlg}(\mathcal{C},\mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma} \longrightarrow \underline{\mathit{CCI}((\mathcal{L}_T^\flat,\mathcal{J}_T^\flat),(\mathcal{C},\mathcal{J}))}$.

   Dada una (Σ,Γ)-álgebra d.o.s.c.t.o. $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$, el funtor $\mathbf{B}^\bullet : \mathcal{L}_T^\flat \longrightarrow \mathcal{C}$ se define por $\mathbf{B}^\bullet(\tau) = B_\tau$ y $\mathbf{B}^\bullet([t(x:\tau)]:\tau\to\tau') = [\![t(x:\tau):\tau']\!]_B$.

   $\mathbf{B}^\bullet$ está bien definido sobre morfismos porque $\mathbf{B}$ es una (Σ,Γ)-álgebra, y es un CCI-funtor por la Definición 61 y la Proposición 63.

   Un homomorfismo $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ da lugar, por el Lema 72, a una transformación natural $h^\bullet$ entre $\mathbf{B}^\bullet$ y $\mathbf{C}^\bullet$, definida por $h_\tau^\bullet = h_\tau : B_\tau \longrightarrow C_\tau$.

4. Finalmente, el funtor $(\mathbf{G}_T^\flat)^\natural : \underline{\mathit{CCI}((\mathcal{L}_T^\flat,\mathcal{J}_T^\flat),(\mathcal{C},\mathcal{J}))} \longrightarrow \underline{\mathit{HOSAlg}(\mathcal{C},\mathcal{J})}_{\Sigma,\Gamma}$ es un isomorfismo, con inverso $(\_)^\bullet$ como en la demostración del Teorema 37. $\square$

Proposición 79 (*Completitud*) Dada una teoría d.o.s.c.t.o. $T = (S^{\bowtie},\leq^{\bowtie},\Sigma,\Gamma)$,

$$\mathbf{G}_T^\flat \models (\overline{x}:\overline{\tau})\,t = t' \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma \vdash (\overline{x}:\overline{\tau})\,t = t'.$$

Demostración: Corrección (Proposición 64) implica el sentido ($\Leftarrow$).

En el otro sentido, ($\Rightarrow$), por definición de satisfacción, $\mathbf{G}^{\flat}_{T} \models (\overline{x} : \overline{\tau})\, t = t'$ si y sólo si $[\![t : \tau]\!]_{G^{\flat}_{T}} = [\![t' : \tau]\!]_{G^{\flat}_{T}}$ siendo τ un tipo común de t y t'; esto es equivalente a

$$[t(p_i(x)/x_i)\,(x : \tau_1 \times \ldots \times \tau_n)] = [t'(p_i(x)/x_i)\,(x : \tau_1 \times \ldots \times \tau_n)]$$

como morfismos en $\mathcal{L}^{\flat}_{T}$. De aquí,

$$\Gamma \vdash (x : \tau_1 \times \ldots \times \tau_n)\; t(p_i(x)/x_i) = t'(p_i(x)/x_i).$$

Por lo tanto, usando la sustitución $x \mapsto \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ y la regla **Proyecciones**, obtenemos

$$\Gamma \vdash (x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n)\, t = t'. \;\square$$

Proposición 80 Dada una teoría d.o.s.c.t.o. $T = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$, consideremos la categoría $\underline{\mathit{FunctHOSAlg}_{\Sigma,\Gamma}}$ cuyos objetos son CCI-funtores $F : (\mathcal{L}^{\flat}_{T}, \mathcal{J}^{\flat}_{T}) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ (es decir, (Σ, Γ)-álgebras d.o.s.c.t.o. en cualquier CCI-categoría), y en la cual un morfismo de $F : (\mathcal{L}^{\flat}_{T}, \mathcal{J}^{\flat}_{T}) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ en $F' : (\mathcal{L}^{\flat}_{T}, \mathcal{J}^{\flat}_{T}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ es un CCI-funtor $H : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ tal que $F; H = F'$. Entonces, el CCI-funtor $1_{\mathcal{L}^{\flat}_{T}}$ correspondiente al álgebra genérica $\mathbf{G}^{\flat}_{T}$ es inicial en $\underline{\mathit{FunctHOSAlg}_{\Sigma,\Gamma}}$.

En la categoría $\underline{\mathit{GralHOSAlg}_{\Sigma,\Gamma}}$ con los mismos objetos que $\underline{\mathit{FunctHOSAlg}_{\Sigma,\Gamma}}$, pero con un morfismo de $F : (\mathcal{L}^{\flat}_{T}, \mathcal{J}^{\flat}_{T}) \longrightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{J})$ en $F' : (\mathcal{L}^{\flat}_{T}, \mathcal{J}^{\flat}_{T}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ dado por un CCI-funtor $H : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ junto con una transformación natural θ entre $F; H$ y F', el CCI-funtor $1_{\mathcal{L}^{\flat}_{T}}$ correspondiente al álgebra genérica $\mathbf{G}^{\flat}_{T}$ es débilmente inicial. $\square$

4.4. La adjunción entre teorías y categorías

Como en el caso de primer orden, dada una CCI-categoría pequeña $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ tal que $\mathcal{J}$ es localmente filtrada, podemos definir una teoría d.o.s.c.t.o. $T^{\flat}_{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C}$ es (equivalente a) la categoría clasificante de $T^{\flat}_{\mathcal{C}}$. Antes que nada tenemos que descomponer los dominios y codominios de los morfismos tomando en consideración la estructura cartesiana cerrada de la categoría, y tenemos que volver a formular la noción de familia regular y etiquetado en este marco.

Definición 81 Dada una CCC $\mathcal{C}$, al interpretar las operaciones formales $\times$ y $\Rightarrow$ en $\mathit{Ob}(\mathcal{C})^{\bowtie}$ mediante las operaciones correspondientes en la categoría $\mathcal{C}$, obtenemos una función de interpretación $|\_| : \mathit{Ob}(\mathcal{C})^{\bowtie} \longrightarrow \mathit{Ob}(\mathcal{C})$.

Para cada par τ, τ' de elementos de $\mathit{Ob}(\mathcal{C})^{\bowtie}$ y cada morfismo $f : |\tau| \to |\tau'|$ en $\mathcal{C}$ denotamos por $f_{\tau,\tau'}$ el morfismo f en $\mathcal{C}$ junto con las "descomposiciones" τ de su dominio y τ' de su codominio. $\mathit{DCMor}(\mathcal{C})$ denota la colección de tales morfismos. $\square$

Dada una CCI-categoría pequeña $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, el orden $\leq_{\mathcal{J}}$ en $\mathit{Ob}(\mathcal{C})$ se extiende a $\leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}}$ en $\mathit{Ob}(\mathcal{C})^{\bowtie}$; obsérvese que cuando $\tau \leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}} \tau'$ en $\mathit{Ob}(\mathcal{C})^{\bowtie}$, entonces hay un morfismo $j : |\tau| \to |\tau'|$ en $\mathcal{J}$.

Definición 82 Dada una CCI-categoría pequeña $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, una familia de morfismos $\mathcal{F} \subseteq \mathit{DCMor}(\mathcal{C})$ es *CCC-regular* si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

1. Si $f_{\tau,\tau'}$ y $g_{\rho,\rho'}$ son morfismos en $\mathcal{F}$ y $\tau \leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}} \rho$ (con $j : |\tau| \to |\rho|$ en $\mathcal{J}$), entonces $\tau' \leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}} \rho'$ (con $j' : |\tau'| \to |\rho'|$ en $\mathcal{J}$) y además $j; g = f; j'$.

2. Dados $\rho, \tau \in Ob(\mathcal{C})^{\bowtie}$ con $\rho \leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}} \tau$ y un morfismo $f_{\tau,\tau'}$ en $\mathcal{F}$, el conjunto

$$\{\xi \in Ob(\mathcal{C})^{\bowtie} \mid \rho \leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}} \xi \;\; y \;\; \exists g_{\xi,\xi'} \in \mathcal{F}\}$$

tiene un mínimo con respecto al orden $\leq^{\bowtie}_{\mathcal{J}}$. □

Definición 83 Dada una CCI-categoría pequeña $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, un *CCC-etiquetado* para ella viene dado por un conjunto Σ y una función $l : DCMor(\mathcal{C}) \to \Sigma$ tal que para cada $\sigma \in \Sigma$ la familia $l^{-1}(\sigma)$ de morfismos es CCC-regular.

Una CCI-categoría pequeña $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ tal que $\mathcal{J}$ es localmente filtrada junto con un CCC-etiquetado l para ella se llama una *LCCI-categoría*. □

Teorema 84 Dada una LCCI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DCMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$, existe una teoría de orden superior con tipos ordenados $T^{\flat}_{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría clasificante $\mathcal{L}^{\flat}_{T^{\flat}_{\mathcal{C}}}$ de $T^{\flat}_{\mathcal{C}}$.

Demostración: La teoría d.o.s.c.t.o. $T^{\flat}_{\mathcal{C}} = ((S, \leq), S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$ se define como sigue:

Tipos: Los tipos básicos son los objetos de $\mathcal{C}$, ordenados por $\mathcal{J}$.

Símbolos de operación: Para cada $\sigma \in \Sigma$ y morfismo $f_{\tau,\tau'}$ en $l^{-1}(\sigma)$ hay un símbolo de operación (ambiguo) $\sigma \in \Sigma_{\tau,\tau'}$. Las condiciones de monotonía y regularidad se satisfacen porque $l^{-1}(\sigma)$ es una familia CCC-regular.

Equaciones: Todas las Σ-ecuaciones satisfechas por la Σ-álgebra d.o.s.c.t.o. $\mathbf{D}^{\flat}_{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}$ que asigna a cada tipo τ el objeto $|\tau|$ y a cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{\tau,\tau'}$ correspondiente a un morfismo $f_{\tau,\tau'}$ con $l(f_{\tau,\tau'}) = \sigma$ el morfismo $f : |\tau| \to |\tau'|$.

Por el Teorema 78 tenemos un CCI-funtor

$$F = (\mathbf{D}^{\flat}_{\mathcal{C}})^{\bullet} : \mathcal{L}^{\flat}_{T^{\flat}_{\mathcal{C}}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

definido por $F(\tau) = |\tau|$ y $F([t\,(x : \tau)]) = [\![t]\!]_{D^{\flat}_{\mathcal{C}}}$.

El funtor "inverso" es $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}^{\flat}_{T^{\flat}_{\mathcal{C}}}$ definido por $G(A) = A$ para un objeto A en $\mathcal{C}$ y $G(f) = [l(f_{A,B})(x)]$ con $x : A$ para un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$.

El funtor $G; F$ es el funtor identidad sobre $\mathcal{C}$. Aunque $F; G$ no es el funtor identidad ya que $G(F(\tau)) = G(|\tau|) = |\tau|$, existe un isomorfismo natural dado por:

$$\begin{array}{rccc} [l(id_{\tau,|\tau|})(x)\,(x : \tau)] : & \tau & \longrightarrow & |\tau| \\ [l(id_{|\tau|,\tau})(y)\,(y : |\tau|)] : & |\tau| & \longrightarrow & \tau. \;\square \end{array}$$

Definición 85 Un morfismo H entre dos teorías d.o.s.c.t.o. $T = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$ y $T' = (S'^{\bowtie}, \leq'^{\bowtie}, \Sigma', \Gamma')$ consiste en

1. Una función monótona $H : (S, \leq) \to (S', \leq')$, extendida libremente a $H^{\bowtie} : (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}) \to (S'^{\bowtie}, \leq'^{\bowtie})$,

2. Una función $H : \Sigma \to \Sigma'$ tal que, si $\sigma \in \Sigma_{\tau,\tau'}$, entonces $H(\sigma) \in \Sigma'_{H^{\bowtie}(\tau),H^{\bowtie}(\tau')}$,

tales que, si $(\overline{x} : \overline{\tau})\, t = t'$ es una ecuación en Γ, la ecuación $(\overline{x} : H^{\bowtie}(\overline{\tau}))\, H(t) = H(t')$ es derivable a partir de Γ', donde $H(t)$ denota la "traducción" de t inducida por H[7].

Así se define una categoría denotada $\underline{HOSTh}$. □

Definición 86 Un *LCCI-funtor* entre las LCCI-categorías $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DCMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{J}', l' : DCMor(\mathcal{C}') \to \Sigma')$ consiste en un CCI-funtor $F : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \to (\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ y una función $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ tal que para todo $f_{\tau,\tau'}$ en $DCMor(\mathcal{C})$,

$$\phi(l(f_{\tau,\tau'})) = l'(F(f)_{F^{\bowtie}(\tau),F^{\bowtie}(\tau')}),$$

donde $F^{\bowtie} : Ob(\mathcal{C})^{\bowtie} \longrightarrow Ob(\mathcal{C}')^{\bowtie}$ denota la extensión libre de la componente de F sobre objetos, satisfaciendo $|F^{\bowtie}(\tau)| = F(|\tau|)$ ya que F es un CCI-funtor.

Esta definición proporciona una categoría denotada $\underline{LCCICat}$. □

Proposición 87 La función que asigna a una LCCI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DCMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$ una teoría d.o.s.c.t.o. $T^{\flat}_{\mathcal{C}}$ se extiende a un funtor

$$T^{\flat}_{\_} : \underline{LCCICat} \longrightarrow \underline{HOSTh}.$$

Demostración: Supongamos que (F, ϕ) es un LCCI-funtor de $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, l : DCMor(\mathcal{C}) \to \Sigma)$ en $(\mathcal{C}', \mathcal{J}', l' : DCMor(\mathcal{C}') \to \Sigma')$. Ya hemos señalado antes que la componente de F sobre los objetos (que es una función monótona con respecto a los órdenes inducidos por las estructuras de inclusiones) se extiende libremente a $F^{\bowtie} : Ob(\mathcal{C})^{\bowtie} \longrightarrow Ob(\mathcal{C}')^{\bowtie}$, satisfaciendo $|F^{\bowtie}(\tau)| = F(|\tau|)$.

La acción del morfismo de teorías T_F sobre los símbolos de operación está dada simplemente por la función ϕ.

Entonces, para un término d.o.s.c.t.o. t, $[\![T_F(t)]\!]_{D^{\flat}_{\mathcal{C}'}} = F([\![t]\!]_{D^{\flat}_{\mathcal{C}}})$ y esto implica que si $\mathbf{D}^{\flat}_{\mathcal{C}}$ satisface una ecuación $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, la ecuación "traducida" $(\overline{x} : T_F(\overline{s}))\, T_F(t) = T_F(t')$ es satisfecha por $\mathbf{D}^{\flat}_{\mathcal{C}'}$. □

Teorema 88 La construcción de la categoría clasificante $\mathcal{L}^{\flat}_T$ para una teoría d.o.s.c.t.o. T es libre con respecto al funtor $T^{\flat}_{\_} : \underline{LCCICat} \longrightarrow \underline{HOSTh}$. Por lo tanto, tenemos un funtor

$$\mathcal{L}^{\flat}_{\_} : \underline{HOSTh} \longrightarrow \underline{LCCICat}$$

adjunto a izquierda de $T^{\flat}_{\_}$.

Demostración: La demostración es esencialmente análoga a la del Teorema 48. Para ver que, dado $H : T \to T^{\flat}_{\mathcal{C}}$, el LCCI-funtor $H^{\dagger} : \mathcal{L}^{\flat}_T \longrightarrow \mathcal{C}$ está completamente determinado,

[7]Esta traducción está definida por $H(x) = x$, $H(\sigma(t)) = H(\sigma)(H(t))$, $H(p_i(t)) = p_i(H(t))$, $H(\lambda x{:}\tau.t) = \lambda x{:}H^{\bowtie}(\tau).H(t)$, etc.

se necesita comprobar más casos, debido a la estructura adicional en los términos; por ejemplo,

$$\begin{array}{rcl} H^\dagger([tt']) & = & H^\dagger([\langle t,t'\rangle];[p_1(x)p_2(x)]) = \\ & & H^\dagger([\langle t,t'\rangle]);H^\dagger([p_1(x)p_2(x)]) = \\ & & H^\dagger(\langle [t],[t']\rangle);ev = \\ & & \langle H^\dagger([t]),H^\dagger([t'])\rangle;ev. \end{array}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} H^\dagger([\lambda z\!:\!\tau.t\ (y:\tau')]) & = & H^\dagger(\Lambda([t(p_1(x)/y,p_2(x)/z)\ (x:\tau'\times\tau)])) = \\ & & \Lambda(H^\dagger([t(p_1(x)/y,p_2(x)/z)\ (x:\tau'\times\tau)])). \end{array}$$

Definiendo $H^\dagger([t]) = [\![H(t)]\!]_{D_{\mathcal{C}}}$, se comprueba que $H^\dagger$ satisface todas las propiedades exigidas. $\square$

La discusión al final de la Sección 3.3 sobre las simplificaciones—expresadas en la forma de un diagrama conmutativo de adjunciones—que son posibles para la anterior correspondencia entre teorías y categorías en el caso de teorías desambiguadas puede asimismo aplicarse aquí, *mutatis mutandis*.

4.5. Conservatividad de la lógica de orden superior con tipos ordenados sobre su versión de primer orden

Es claro que teorías con tipos ordenados constituyen un caso particular de teorías d.o.s.c.t.o.; hay, sin embargo, un pequeño detalle que debe ser aclarado, debido a nuestra presentación de signaturas d.o.s.c.t.o. con sólo símbolos de operaciones unarias. La idea es por supuesto codificar una operación n-aria en una teoría c.t.o. (cuyo lenguaje no incluye productos explícitamente) en una operación unaria en una teoría d.o.s.c.t.o. por medio de los productos (que forman parte de los tipos en este caso).

Definimos una función que transforma una signatura c.t.o. $(S,\leq,\Sigma)$ en una signatura d.o.s.c.t.o. $((S,\leq),S^{\bowtie},\leq^{\bowtie},\Sigma^p)$. Un símbolo de operación $\sigma\in\Sigma_{s_1\ldots s_n,s}$ se convierte en un símbolo de operación $\sigma^p\in\Sigma^p_{s_1\times\ldots\times s_n,s}$; en particular, en el caso de una constante $\sigma\in\Sigma_{\varepsilon,s}$, $\sigma^p\in\Sigma^p_{1,s}$. Los restantes conjuntos en Σ^p son vacíos.

Un Σ-término c.t.o. $t(\overline{x}:\overline{s}):s$ se convierte en un Σ^p-término d.o.s.c.t.o. t^p como sigue: si $t=x_i$ entonces $t^p=x_i$; en el caso de una constante $t=\sigma$ entonces $t^p=\sigma^p(\langle\rangle)$; y si $t=\sigma(t_1,\ldots,t_n)$, entonces $t^p=\sigma^p(\langle t_1^p,\ldots,t_n^p\rangle)$.

Como todas las reglas de deducción para la lógica ecuacional (de primer orden) con tipos ordenados son asimismo reglas de deducción para la lógica ecuacional de orden superior con tipos ordenados, el siguiente lema es obvio.

Lema 89 Si Γ es un conjunto de Σ-ecuaciones c.t.o. y $\Gamma\vdash(\overline{x}:\overline{s})\,t=t'$ usando deducción ecuacional c.t.o., entonces $\Gamma^p\vdash(\overline{x}:\overline{s})\,t^p=t'^p$ usando deducción ecuacional d.o.s.c.t.o., donde Γ^p es el conjunto de Σ^p-ecuaciones d.o.s.c.t.o. $\{(\overline{x}:\overline{s})\,t^p=t'^p \mid (\overline{x}:\overline{s})\,t=t'\in\Gamma\}$. $\square$

Proposición 90 La función

$$(S, \leq, \Sigma, \Gamma) \longmapsto ((S, \leq), S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma^p, \Gamma^p)$$

se extiende a un funtor $(\_)^p : \underline{OSTh} \longrightarrow \underline{HOSTh}$.

Demostración: Sea $H : (S, \leq, \Sigma, \Gamma) \longrightarrow (S', \leq', \Sigma', \Gamma')$ un morfismo de teorías en $\underline{OSTh}$. Entonces $H : (S, \leq) \to (S', \leq')$ se extiende libremente a $H^{\bowtie} : (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}) \to (S'^{\bowtie}, \leq'^{\bowtie})$ y ponemos $H^p = H$ sobre tipos.

Supongamos que $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$; entonces, por un lado, $\sigma^p \in \Sigma^p_{s_1 \times \ldots \times s_n, s}$; por el otro lado, $H(\sigma) \in \Sigma'_{H(s_1) \ldots H(s_n), H(s)}$. De aquí, $H(\sigma)^p \in \Sigma'^p_{H(s_1) \times \ldots \times H(s_n), H(s)}$ y definimos $H^p(\sigma^p) = H(\sigma)^p \in \Sigma'^p_{H^{\bowtie}(s_1 \times \ldots \times s_n), H^{\bowtie}(s)}$.

Sea $(\overline{x} : \overline{s})\, t^p = t'^p$ una ecuación d.o.s.c.t.o. en Γ^p. Tenemos que probar

$$\Gamma'^p \vdash (\overline{x} : H(\overline{s}))\, H^p(t^p) = H^p(t'^p).$$

Como H es un morfismo de teorías en $\underline{OSTh}$ y $(\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ es una ecuación c.t.o. en Γ, tenemos $\Gamma' \vdash (\overline{x} : H(\overline{s}))\, H(t) = H(t')$; por el Lema 89, obtenemos

$$\Gamma'^p \vdash (\overline{x} : H(\overline{s}))\, H(t)^p = H(t')^p,$$

que es el resultado deseado pues $H^p(t^p) = H(t)^p$ para todos los Σ-términos t. $\Box$

Vamos a probar el recíproco del Lema 89 mediante un argumento semántico, obteniendo de este modo un resultado de conservatividad. Dada una Σ-álgebra c.t.o. $\mathbf{A}$ en una CCI-categoría, la extendemos a una Σ^p-álgebra $\mathbf{A}^p$ definiendo

1. $A^p_s = A_s$.
2. $A^p_1 = 1$.
3. $A^p_{\tau_1 \times \tau_2} = A^p_{\tau_1} \times A^p_{\tau_2}$.
4. $A^p_{\tau \Rightarrow \tau'} = A^p_\tau \Rightarrow A^p_{\tau'}$.

Un símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{s_1 \ldots s_n, s}$ se interpreta como un morfismo

$$A^{\overline{s}, s}_\sigma : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s.$$

Por otra parte, al nivel de orden superior, tenemos $A^p_{s_1 \times \ldots \times s_n} = A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$, y la interpretación semántica de $\sigma^p \in \Sigma^p_{s_1 \times \ldots \times s_n, s}$ se define por $A^p_{\sigma^p} = A^{\overline{s}, s}_\sigma : A^p_{s_1 \times \ldots \times s_n} \longrightarrow A^p_s$. El caso de las constantes se trata de forma completamente similar. En esta situación, es fácil ver que $[\![t]\!]_A = [\![t^p]\!]_{A^p}$ y consecuentemente que $\mathbf{A} \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ sii $\mathbf{A}^p \models (\overline{x} : \overline{s})\, t^p = t'^p$.

Tras definir todas estas nociones, podemos probar nuestro resultado principal:

Teorema 91 El álgebra de orden superior con tipos ordenados es una extensión conservativa (módulo $(\_)^p$) del álgebra con tipos ordenados, es decir, dado un conjunto Γ de Σ-ecuaciones c.t.o., tenemos

$$\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t' \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma^p \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t^p = t'^p.$$

Demostración: El sentido ($\Rightarrow$) es el Lema 89.

Recíprocamente, para el sentido ($\Leftarrow$), supongamos que $\Gamma^p \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t^p = t'^p$ y consideremos la (Σ, Γ)-álgebra $\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\overline{x} : \overline{s})$ en $(\underline{Set}, \underline{Inc})$ (véanse los comentarios tras el Teorema 13 y el artículo [62] para una construcción detallada de esta álgebra).

Por el argumento anterior, $\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\overline{x} : \overline{s})^p$ es una (Σ^p, Γ^p)-álgebra d.o.s.c.t.o., y por la Proposición 64,

$$\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\overline{x} : \overline{s})^p \models (\overline{x} : \overline{s})\, t^p = t'^p.$$

De nuevo por el argumento anterior, esto es equivalente a

$$\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(\overline{x} : \overline{s}) \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$$

y, por (los comentarios después del) Teorema 13, esto es equivalente a $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, como deseábamos. $\Box$

Podemos resumir esta sección diciendo que hemos definido un morfismo entre lógicas

$$\mathit{OSEqtl} \longrightarrow \mathit{HOSEqtl}$$

de la lógica ecuacional (de primer orden) con tipos ordenados en la lógica ecuacional de orden superior con tipos ordenados, en el sentido preciso definido en [110], y además hemos probado que este morfismo es conservativo.

4.6. Retractos

Dado que en el álgebra de orden superior con tipos ordenados el tipo de un término puede variar sobre una variedad de subtipos, y que las funciones pueden poseer polimorfismo de subtipos, esta disciplina de tipos es intrínsecamente más flexible que el lambda cálculo con tipos que generaliza[8]. Sin embargo, puede haber expresiones que estrictamente hablando no se puedan tipar porque el tipo mínimo de un subtérmino es demasiado grande, pero que, no obstante, merecen el beneficio de la duda porque la reducción de tal subtérmino puede rebajar el tipo y dar lugar a un término bien formado. En álgebra con tipos ordenados, esto se consigue aumentando la signatura original con operaciones adicionales llamadas "retractos" que rellenan tales "huecos" en los tipos [58, 62] y ha sido implementado en los sistemas OBJ2 y OBJ3 [43, 59]. Bajo condiciones bastante débiles, tal extensión con retractos es conservativa y permite la evaluación de un término dudoso de forma que si el término tenía realmente sentido los retractos desaparecerán; en cambio, si el hueco era esencial, el retracto permanecerá proporcionando un informativo mensaje de error. Así pues, se obtiene un interesante mecanismo de recuperación de errores en tiempo de ejecución, al mismo tiempo que se aumenta la flexibilidad del tipado y se continúan descartando expresiones realmente sin sentido, tales como por ejemplo la división de un valor de verdad por un número, que no serán tipadas incluso al añadir retractos. Esta sección muestra que los interesantes resultados sobre retractos conocidos al nivel de primer orden se generalizan a orden superior, permitiendo que esas mismas técnicas se hagan disponibles en este contexto más general.

[8] Similarmente, añadiendo subtipos a cálculos más ricos da lugar a disciplinas de tipos más flexibles.

Consideremos por ejemplo una teoría para listas de números naturales con una signatura Σ que incluye tipos `Nat` para los números naturales, `List` para las listas y `NeList` para las listas no vacías, así como símbolos de operación $\mathtt{0} \in \Sigma_{\varepsilon,\mathtt{Nat}}$, $\mathtt{s} \in \Sigma_{\mathtt{Nat},\mathtt{Nat}}$, $\mathtt{empty} \in \Sigma_{\varepsilon,\mathtt{List}}$, $\mathtt{cons} \in \Sigma_{\mathtt{Nat\,List},\mathtt{NeList}}$, $\mathtt{head} \in \Sigma_{\mathtt{NeList},\mathtt{Nat}}$, y $\mathtt{tail} \in \Sigma_{\mathtt{NeList},\mathtt{List}}$. Entonces, el término

$$\mathtt{head(tail(cons(0,cons(s(0),empty))))}$$

no está bien formado porque `head` tiene aridad `NeList` mientras que el subtérmino

$$\mathtt{tail(cons(0,cons(s(0),empty)))}$$

tiene tipo `List`, a pesar de que el término completo tiene perfecto sentido.

Definición 92 [62] Dada una teoría c.t.o. $T = (S, \Sigma, \Gamma)$, definimos una nueva teoría $T^{\otimes} = (S, \Sigma^{\otimes}, \Gamma^{\otimes})$ aumentando Σ con nuevos símbolos de operación $r_{s',s} \in \Sigma^{\otimes}_{s',s}$ para $s \leq s'$ y $s \neq s'$, llamados *retractos*, y añadiendo a Γ las correspondientes *ecuaciones de retractos*

$$(x : s)\; r_{s',s}(x) = x. \;\Box$$

En el ejemplo anterior, el término que hemos considerado se convierte en bien formado al insertar el retracto $r_{\mathtt{List},\mathtt{NeList}}$, obteniendo

$$\mathtt{head}(r_{\mathtt{List},\mathtt{NeList}}\mathtt{(tail(cons(0,cons(s(0),empty)))))};$$

entonces tenemos la siguiente sucesión de reducciones

$$\begin{aligned} &\mathtt{head}(r_{\mathtt{List},\mathtt{NeList}}\mathtt{(tail(cons(0,cons(s(0),empty)))))} \longrightarrow \\ &\quad\longrightarrow \mathtt{head}(r_{\mathtt{List},\mathtt{NeList}}\mathtt{(cons(s(0),empty)))} \longrightarrow \\ &\qquad\longrightarrow \mathtt{head(cons(s(0),empty))} \longrightarrow \mathtt{s(0)}. \end{aligned}$$

Remitimos al lector al artículo [62] donde puede encontrar más motivación y detalles sobre retractos.

El principal resultado en [62] respecto a los retractos es que $T^{\otimes}$ es conservativa sobre T, en el sentido de la siguiente definición:

Definición 93 Dadas teorías con tipos ordenados $T = (S, \leq, \Sigma, \Gamma)$ y $T' = (S', \leq', \Sigma', \Gamma')$ tales que T está incluida en T' (es decir, $(S, \leq)$ es un subconjunto parcialmente ordenado de $(S', \leq')$, $\Sigma_{\overline{s},s} \subseteq \Sigma'_{\overline{s},s}$ para todo $\overline{s} \in S^*$ y $s \in S$, y $\Gamma \subseteq \Gamma'$), decimos que T' *es conservativa sobre* T si y sólo si para Σ-términos c.t.o. t y t' (y por tanto también Σ'-términos),

$$\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t' \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma' \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'.$$

La definición es completamente análoga para el caso de teorías d.o.s.c.t.o. $\Box$

Proposición 94 Si T está incluida en T', tenemos un morfismo inclusión $J : T \to T'$ en *OSTh*; este morfismo da lugar a un funtor $\mathcal{L}_J : \mathcal{L}_T \longrightarrow \mathcal{L}_{T'}$ transformando un morfismo $[t]_{\Sigma,\Gamma}$ en $\mathcal{L}_T$ en el morfismo $[t]_{\Sigma',\Gamma'}$ en $\mathcal{L}_{T'}$. Entonces, T' es conservativa sobre T si y sólo si el funtor $\mathcal{L}_J$ es fiel. (En el caso de orden superior se tiene un resultado análogo.)

Demostración: Dados Σ-términos t y t', por la Proposición 38, $\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$ si y sólo si $\mathbf{G}_T \models (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'$, es decir, sii $[t]_{\Sigma,\Gamma} = [t']_{\Sigma,\Gamma}$ como morfismos en $\mathcal{L}_T$; con esto, es muy fácil ver que la condición de conservatividad es equivalente a la fidelidad de $\mathcal{L}_J$. $\Box$

Para probar que $T^{\otimes}$ es conservativa sobre T es necesario añadir una débil condición a la teoría T, equivalente a la corrección de la siguiente regla de deducción: para Σ-términos $t(\overline{x} : \overline{s})$ y $t'(\overline{x} : \overline{s})$,

No-vacío: $$\frac{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s}, y : s')\, t = t'}{\Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{s})\, t = t'}.$$

Entonces, el resultado de conservatividad se prueba en [62] demostrando que el Σ-homomorfismo

$$\mathcal{T}_{\Sigma,\Gamma}(X) \longrightarrow \mathcal{T}_{\Sigma^{\otimes},\Gamma^{\otimes}}(X)$$

que es la identidad sobre X y lleva $[t]_{\Sigma,\Gamma}$ a $[t]_{\Sigma^{\otimes},\Gamma^{\otimes}}$ es inyectivo, siendo X un conjunto de variables tal que $X_s \neq \emptyset$ para todo $s \in S$.

En esta sección probamos un resultado análogo para el álgebra de orden superior con tipos ordenados, usando *modelos de Henkin* [123, 124], más exactamente una generalización de modelos de Henkin que tiene en cuenta la relación de subtipo. Los modelos de Henkin son más generales que las álgebras d.o.s.c.t.o. en ($\underline{Set}$,$\underline{Inc}$) porque, en vez de exigir las igualdades $A_{\tau_1\times\tau_2} = A_{\tau_1} \times A_{\tau_2}$ y $A_{\tau\Rightarrow\tau'} = A_\tau \Rightarrow A_{\tau'}$, simplemente se requieren inclusiones $A_{\tau_1\times\tau_2} \subseteq A_{\tau_1} \times A_{\tau_2}$ y $A_{\tau\Rightarrow\tau'} \subseteq A_\tau \Rightarrow A_{\tau'}$. Una definición equivalente (salvo isomorfismo) de modelo de Henkin es en términos de un $S^{\bowtie}$-conjunto $\mathbf{A} = \{A_\tau \mid \tau \in S^{\bowtie}\}$ y familias de funciones $app_{\tau,\tau'} : A_{(\tau\Rightarrow\tau')\times\tau} \longrightarrow A_{\tau'}$ y $proj^i_{\tau_1,\tau_2} : A_{\tau_1\times\tau_2} \longrightarrow A_{\tau_i}$ $(i = 1, 2)$ sujetas a las condiciones de extensionalidad y existencia de combinadores (véanse [123, 124] para más detalles). Lo que nos interesa a nosotros es que la construcción de un modelo de términos para una teoría tal que la regla **No-vacío** anterior es correcta y un conjunto de variables X suficientemente grande proporciona un modelo de Henkin libre sobre X [123, 124]. Estos resultados se generalizan al caso d.o.s.c.t.o. como sigue.

Primero, usando corrección (Proposición 64), completitud (Proposición 79) y el resultado análogo a la Proposición 50 para el caso de orden superior, podemos restringir nuestra atención sin pérdida de generalidad a teorías d.o.s.c.t.o. desambiguadas. Dada una teoría d.o.s.c.t.o. desambiguada $T = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$, definimos una teoría *con tipos ordenados* $T^h = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma^h, \Gamma^h)$, donde

1. Para cada par $\tau, \rho \in S^{\bowtie}$, tenemos un símbolo de operación ambiguo $app \in \Sigma^h_{\rho\Rightarrow\tau\ \rho,\tau}$ (es fácil ver que es regular). Normalmente escribimos tt' en vez de $app(t, t')$.

2. Para cada $\tau, \rho \in S^{\bowtie}$, $\mathsf{K}^{\rho,\tau} \in \Sigma^h_{\varepsilon,\rho\Rightarrow(\tau\Rightarrow\rho)}$.

3. Para cada $\tau, \rho, \xi \in S^{\bowtie}$, $\mathsf{S}^{\xi,\rho,\tau} \in \Sigma^h_{\varepsilon,(\xi\Rightarrow(\tau\Rightarrow\rho))\Rightarrow((\xi\Rightarrow\tau)\Rightarrow(\xi\Rightarrow\rho))}$.

4. Para cada $\tau, \rho \in S^{\bowtie}$, $\mathsf{P}^{\rho,\tau}_1 \in \Sigma^h_{\varepsilon,(\rho\times\tau)\Rightarrow\rho}$ y $\mathsf{P}^{\rho,\tau}_2 \in \Sigma^h_{\varepsilon,(\rho\times\tau)\Rightarrow\tau}$.

5. Para cada $\tau, \rho \in S^{\bowtie}$, $\mathsf{E}^{\rho,\tau} \in \Sigma^h_{\varepsilon,\rho\Rightarrow(\tau\Rightarrow(\rho\times\tau))}$.

6. Para cada símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_{\rho,\tau}$, $\mathsf{F}^{\rho,\tau}_\sigma \in \Sigma^h_{\varepsilon,\rho\Rightarrow\tau}$.

7. Hay una constante $\langle\rangle \in \Sigma^h_{\varepsilon,1}$.

8. El conjunto de Σ^h-ecuaciones c.t.o. Γ^h contiene las ecuaciones $(\overline{x} : \overline{\tau})\, t_c = t'_c$ para cada ecuación $(\overline{x} : \overline{\tau})\, t = t'$ en Γ, donde t_c se definió en la Proposición 70, junto con las siguientes familias de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&(x : \rho, y : \tau)\ (\mathsf{K}^{\rho,\tau} x)y = x \\
&(x : \xi \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho), y : \xi \Rightarrow \tau, z : \xi)\ ((\mathsf{S}^{\xi,\rho,\tau} x)y)z = (xz)(yz) \\
&(x : \rho, y : \tau)\ \mathsf{P}_1^{\rho,\tau}((\mathsf{E}^{\rho,\tau} x)y) = x \\
&(x : \rho, y : \tau)\ \mathsf{P}_2^{\rho,\tau}((\mathsf{E}^{\rho,\tau} x)y) = y \\
&(x : \rho \times \tau)\ (\mathsf{E}^{\rho,\tau}(\mathsf{P}_1^{\rho,\tau} x))(\mathsf{P}_2^{\rho,\tau} x) = x \\
&(x : 1)\ x = \langle\rangle.
\end{aligned}
$$

Un (Σ, Γ)-*modelo de Henkin d.o.s.c.t.o.* **H** es una (Σ^h, Γ^h)-álgebra c.t.o. **H** en $(\underline{Set}, \underline{Inc})$ que además satisface la siguiente condición de extensionalidad: dados $f, g \in H_{\rho \Rightarrow \tau}$, si para todo $a \in H_\rho$, $H_{app}(f, a) = H_{app}(g, a)$, entonces $f = g$. Usando el Teorema 14, para cualquier conjunto de variables X, tenemos una (Σ^h, Γ^h)-álgebra libre $\mathcal{T}_{\Sigma^h,\Gamma^h}(X)$; si $X_\tau \neq \emptyset$ para todo $\tau \in S^{\bowtie}$, obtenemos un (Σ, Γ)-modelo de Henkin libre al imponer la condición de extensionalidad sobre $\mathcal{T}_{\Sigma^h,\Gamma^h}(X)$. Una presentación isomorfa de este modelo de Henkin libre se consigue imponiendo sobre el $S^{\bowtie}$-conjunto T_Σ de Σ-términos con variables en X, introducido en la Definición 56, la siguiente relación de congruencia

$$t \sim_{\Sigma,\Gamma} t' \iff \Gamma \vdash (\overline{x} : \overline{\tau})\, t = t'$$

para algún conjunto finito de variables $\overline{x} : \overline{\tau}$ incluido en X (corrección con respecto a la regla **No-vacío** hace que esta definición sea independiente del conjunto finito de variables considerado). Denotamos por $[t]_{\Sigma,\Gamma}$ la clase de equivalencia de t con respecto a $\sim_{\Sigma,\Gamma}$, y por $\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(X)$ el cociente de T_Σ con respecto a la misma congruencia, que es la presentación del modelo de Henkin libre sobre X en la que estamos interesados.

La razón de nuestro interés en los modelos de Henkin como instrumento técnico para establecer el resultado de conservatividad buscado se puede resumir ahora claramente. De la anterior construcción del modelo libre de Henkin $\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(X)$ se sigue que, dada una inclusión $T \hookrightarrow T'$ de teorías d.o.s.c.t.o., T' es conservativa sobre T si y sólo si el Σ^h-homomorfismo

$$\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Sigma',\Gamma'}(X)$$

que es la identidad sobre X y lleva $[t]_{\Sigma,\Gamma}$ a $[t]_{\Sigma',\Gamma'}$ es inyectivo.

Teorema 95 Dada una teoría d.o.s.c.t.o. $T = (S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma, \Gamma)$ tal que la regla **No-vacío** es correcta, el homomorfismo

$$\psi : \mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Sigma^\otimes,\Gamma^\otimes}(V)$$

que es la identidad sobre V es inyectivo (recuérdese que V es un $S^{\bowtie}$-conjunto de variables tal que para cada tipo $\tau \in S^{\bowtie}$ el conjunto V_τ es infinito numerable).

Demostración: La idea clave es convertir el (Σ, Γ)-modelo $\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)$ en un $(\Sigma^\otimes, \Gamma^\otimes)$-modelo. En primer lugar, escogemos para cada $\tau \in S^{\bowtie}$ una variable x^0_τ. Entonces, para

$\tau < \tau'$, definimos una función $r_{\tau',\tau} : \mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)_{\tau'} \longrightarrow \mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)_\tau$ que lleva $[t] \in \mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)_\tau$ a sí mismo y los restantes elementos a x^0_τ; esta función satisface obviamente las ecuaciones de retractos. Por lo tanto, por ser $\mathcal{H}_{\Sigma^\otimes,\Gamma^\otimes}(V)$ libre, la inclusión de V en $\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)$ induce un homomorfismo

$$\chi : \mathcal{H}_{\Sigma^\otimes,\Gamma^\otimes}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)$$

que es la identidad sobre V.

Finalmente, la composición $\psi;\chi$ es un homomorfismo de $\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)$ en sí mismo que es la identidad sobre V y, por ser $\mathcal{H}_{\Sigma,\Gamma}(V)$ libre, debe ser la identidad. De aquí deducimos que ψ es inyectivo. $\square$

Capítulo 5

Subtipos generalizados

En este trabajo hemos estudiado en detalle la semántica categórica de subtipos como inclusiones, interpretando la relación de subtipo $\tau \leq \tau'$ como existencia de un monomorfismo canónico $A_{\tau \leq \tau'} : A_\tau \to A_{\tau'}$ en una subcategoría $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$. Hemos llegado a esta noción al generalizar la noción conjuntista de subtipo propuesta en álgebra con tipos ordenados [62] primero a categorías generales y luego a orden superior, manteniendo todas sus propiedades más interesantes. En particular, no se pierde información al mover un dato a un supertipo, y la igualdad de datos es independiente del tipo en el que se trabaje.

Como ya hemos mencionado en la Introducción de esta segunda parte, hay sin embargo situaciones en las cuales una noción más débil de "subtipo" es deseable y natural, a saber una correspondiente a una *conversión implícita* entre tipos que no necesita ser inyectiva. Tales conversiones implícitas pueden surgir en respuesta a la necesidad o conveniencia de convertir datos (quizás con alguna pérdida de información) entre tipos básicos, así como en el contexto de espacios funcionales al pasar funciones como argumentos de funciones de orden superior. Por ejemplo, una función de orden superior f puede requerir un argumento de tipo $\rho' \Rightarrow \tau$ pero en cambio recibir un argumento h de tipo $\rho \Rightarrow \tau$ con $\rho' \leq \rho$ (interpretado como antes por una inclusión canónica $j : \rho' \to \rho$). Esta situación se puede resolver fácilmente *restringiendo* h al dominio ρ', es decir, componiendo h con la inclusión j para tener $j; h : \rho' \Rightarrow \tau$; de este modo, obtenemos una conversión implícita

$$j \Rightarrow \tau : (\rho \Rightarrow \tau) \longrightarrow (\rho' \Rightarrow \tau)$$

que no es inyectiva en general.

Como ya hemos señalado, al comparar con el caso en el cual subtipos se interpretan como inclusiones, algunas buenas propiedades se pierden definitivamente; a saber, cierta información puede perderse de forma irreversible al mover un dato a un supertipo mediante una conversión implícita, y la igualdad de dos datos depende ahora crucialmente del tipo en que se considere.

Por lo tanto, sería una seria equivocación confundir las nociones de "subtipo como inclusión" y de "subtipo como conversión implícita" en una única noción de subtipo, puesto que las importantes ventajas e intuiciones adicionales del caso de "subtipo como inclusión" se perderían entonces. Nuestra propuesta consiste en *distinguir* y *relacionar* estas dos nociones en una semántica que conserva las ventajas de cada una. Para la noción de "subtipo como inclusión" mantenemos la relación de *subtipo* $\leq$ tal y como se ha formalizado en este trabajo; para la noción de "subtipo como conversión implícita" introducimos una relación de *subtipo generalizado* $\leq:$ diferente de la de subtipo $\leq$, pero conteniéndola como una subrelación, es decir, tenemos la siguiente regla

$$\frac{\tau \leq \tau'}{\tau \leq: \tau'}.$$

Para espacios funcionales, subtipos obedecen la regla limitada

$$\frac{\tau \leq \tau' \qquad \rho \ \mathit{tipo}}{\rho \Rightarrow \tau \leq \rho \Rightarrow \tau'}$$

mientras que para subtipos generalizados tenemos la regla más general

$$\frac{\tau \leq: \tau' \qquad \rho' \leq: \rho}{\rho \Rightarrow \tau \leq: \rho' \Rightarrow \tau'}.$$

Para productos, ambas relaciones se comportan de forma similar:

$$\frac{\tau \leq \tau' \qquad \rho \leq \rho'}{\rho \times \tau \leq \rho' \times \tau'} \qquad\qquad \frac{\tau \leq: \tau' \qquad \rho \leq: \rho'}{\rho \times \tau \leq: \rho' \times \tau'}.$$

La ventaja de estas reglas de tipado es que nos permiten discriminar entre las dos relaciones de subtipo y, en consecuencia, soportan razonamientos más cuidadosos y precisos de lo que sería posible en otro caso; la adición de otros constructores de tipos a este escenario es muy natural y conduce a similares reglas de tipado que discriminan entre las dos relaciones de subtipo para el constructor en cuestión.

Podemos definir signaturas y álgebras d.o.s.c.t.o. generalizadas en una forma que extiende naturalmente nuestro tratamiento de subtipos como inclusiones y satisface todas las reglas de tipado mencionadas anteriormente. Dado un conjunto S de tipos básicos, consideramos el conjunto $S^{\bowtie}$ de tipos generado a partir de S como antes (Definición 54). Dados dos preórdenes[1] $(S, \leq, \leq:)$ con $\leq \subseteq \leq:$ y $\leq$ un orden parcial, podemos extenderlos a preórdenes en $S^{\bowtie}$ extendiendo $\leq$ exactamente como antes (Definición 54), y añadiendo las siguientes cláusulas adicionales:

1. Si $\tau \leq^{\bowtie} \tau'$, entonces $\tau \leq:^{\bowtie} \tau'$.

2. Si $\tau_i \leq:^{\bowtie} \tau_i'$ $(i = 1, 2)$, entonces $\tau_1 \times \tau_2 \leq:^{\bowtie} \tau_1' \times \tau_2'$.

3. Si $\tau \leq:^{\bowtie} \tau'$ y $\rho' \leq:^{\bowtie} \rho$, entonces $\rho \Rightarrow \tau \leq:^{\bowtie} \rho' \Rightarrow \tau'$.

El preorden $\leq:^{\bowtie}$ en $S^{\bowtie}$ se denota también $\leq:$.

[1] La razón para admitir que $\leq:$ sea un preorden es que, mientras que las inclusiones entre tipos son naturalmente antisimétricas, parece bastante natural considerar conversiones implícitas que son bidireccionales. Por ejemplo, uno puede desear la flexibilidad de convertir implícitamente de coordenadas cartesianas a polares, y viceversa, al realizar cómputos con puntos en el plano.

Definición 96 Una *signatura generalizada de orden superior con tipos ordenados*, o *signatura g.d.o.s.c.t.o.* para abreviar, consiste en un par de estructuras de preorden $(S, \leq, \leq:)$ sobre un conjunto S tales que $\leq \subseteq \leq:$ y $\leq$ es un orden parcial, junto con una signatura con tipos ordenados $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$ que es regular y coherente para ambos preórdenes[2] $\leq^{\bowtie}$ y $\leq:^{\bowtie}$, y tal que $\Sigma_{\overline{\tau},\tau} \neq \emptyset$ implica $longitud(\overline{\tau}) = 1$. □

La semántica de tales signaturas g.d.o.s.c.t.o. viene dada por CCC's con estructuras de inclusiones y de conversiones implícitas, llamadas *CCIC-categorías* y definidas como sigue:

Definición 97 Una *CCIC-categoría* es un triple $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ tal que

1. $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ es una CCI-categoría.

2. $\mathcal{K}$ es una subcategoría preorden de $\mathcal{C}$ conteniendo $\mathcal{J}$, llamada la categoría de *conversiones implícitas*.

3. $\mathcal{K}$ es cerrada bajo $\_ \times \_$, es decir, si $k_i : A_i \to B_i \quad (i = 1, 2)$ son morfismos en $\mathcal{K}$, entonces $k_1 \times k_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ es asimismo un morfismo en $\mathcal{K}$.

4. $\mathcal{K}$ es cerrada bajo $\_ \Rightarrow \_$, es decir, si $k_i : A_i \to B_i \quad (i = 1, 2)$ son morfismos en $\mathcal{K}$, entonces $k_1 \Rightarrow k_2 : B_1 \Rightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \Rightarrow B_2$ es asimismo un morfismo en $\mathcal{K}$. □

Ejemplo 98 La categoría $\underline{Per}$ de relaciones de equivalencia parciales sobre los números naturales proporciona un interesante ejemplo de CCIC-categoría. La subcategoría de conversiones implícitas se obtiene como sigue: hay una conversión implícita $A \to B$ sii nAm implica nBm, es decir, $A \subseteq B$ como conjuntos de pares; esta estructura ha sido estudiada en [24, 26], donde remitimos al lector para más detalles. La subcategoría de inclusiones que nosotros queremos distinguir es la siguiente: hay una inclusión $A \to B$ sii dados números naturales n, m en el dominio de A, nAm sii nBm (esto no implica que $A = B$ porque B puede tener en su dominio elementos que no están en el dominio de A). □

En su tesis doctoral [147], P. Taylor define una estructura de coerciones en una CCC como una subcategoría preorden cerrada bajo $\_ \times \_$ y $\_ \Rightarrow \_$ (Definición 1.3.9). No obstante, él no distingue la subcategoría de inclusiones en la que nosotros ponemos énfasis en la anterior definición.

Definición 99 Para una signatura g.d.o.s.c.t.o. $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \leq:^{\bowtie}, \Sigma)$, un *álgebra g.d.o.s.c.t.o.* $\mathbf{A}$ en una CCIC-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ consiste en una $(S^{\bowtie}, \leq^{\bowtie}, \Sigma)$-álgebra d.o.s.c.t.o. $\mathbf{A}$ en la CCI-categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ junto con morfismos $A_{\tau \leq: \tau'} : A_\tau \to A_{\tau'}$ en $\mathcal{K}$ para $\tau \leq: \tau'$ en $S^{\bowtie}$, sujetos a la condición de monotonía: $\sigma \in \Sigma_{\tau,\tau'} \cap \Sigma_{\rho,\rho'}$ y $\tau \leq: \rho$ implican

$$A_{\tau \leq: \rho}; A_\sigma^{\rho,\rho'} = A_\sigma^{\tau,\tau'}; A_{\tau' \leq: \rho'} : A_\tau \longrightarrow A_{\rho'}. \ \Box$$

[2]Aunque las condiciones de regularidad y coherencia se han definido para un conjunto de tipos parcialmente ordenado, pueden generalizarse a un preorden.

Estas definiciones proporcionan una base sobre la cual extender la semántica categórica de subtipos propuesta en este trabajo a subtipos generalizados. Tenemos la intención de estudiar tal semántica en trabajos posteriores. Como subtipos generalizados constituyen una noción intrínsecamente más débil, algunas propiedades importantes como la de "conservación de la información" no se van a generalizar y serán ́validas sólo en la subcategoría de inclusiones.

Capítulo 6

Conclusiones finales (Parte II)

Hemos presentado un enfoque semántico de subtipos en el cual las dos nociones diferentes de subtipos como inclusiones y de subtipos (generalizados) como conversiones implícitas son al mismo tiempo distinguidas e integradas. Este enfoque permite exhibir los beneficios de ambas nociones eliminando las desventajas que la restricción a una de ellas con exclusión de la otra crearía. Este trabajo es un primer paso en la integración de ambas nociones y todavía queda mucho por hacer. A continuación enumeramos algunas direcciones de investigación que el trabajo presente sugiere y nosotros creemos que merecen ser seguidas:

1. *Lógica ecuacional para subtipos generalizados.* Tal lógica no está presente en actuales enfoques y es muy deseable; la necesidad de esta lógica también es señalada en [18] como una forma más directa de razonar sobre subtipos que traducciones en modelos con coerciones explícitas que pueden introducir supuestos adicionales. La teoría ecuacional que hemos desarrollado completamente para el caso $\leq$ debería servir como una base a partir de la cual tal teoría se obtiene como una generalización; esto también proporcionaría la construcción del modelo genérico adecuado para la semántica categórica esbozada en el Capítulo 5.

2. *Extensiones a lambda cálculos más ricos.* Como ya se ha mencionado en la Introducción, esto debería seguir las líneas de trabajo que otros investigadores han desarrollado para subtipos generalizados [28, 24, 18, 26, 35, 4]. Sin embargo, sería deseable realizar un tratamiento más axiomático mediante una semántica categórica general al estilo de la presentada en este trabajo. Por ejemplo, para tipos dependientes sería natural exigir inclusiones de subcategorías

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}$$

donde los morfismos en $\mathcal{J}$ son inclusiones, en $\mathcal{K}$ son conversiones implícitas, y en $\mathcal{D}$ son morfismos privilegiados (*display maps*) [147, 109, 38, 146], siendo cada una de las categorías estable bajo productos fibrados (*pullbacks*) a lo largo de morfismos arbitrarios en la categoría ambiente $\mathcal{C}$. Las reglas de subtipado estructural para diferentes constructores de tipos y para las diferentes relaciones ($\leq$ y $\leq$:) se derivarían entonces como consecuencias de los axiomas categóricos.

3. *Semántica operacional.* Con la excepción de [20], muy poco se ha hecho para desarrollar una semántica operacional para subtipos de orden superior. Este trabajo proporciona una nueva conexión con la completamente desarrollada teoría de la semántica operacional para subtipos como inclusiones [58, 79] que merece más investigación. A este respecto, los recientes resultados sobre la integración de reglas de reescritura con funciones de orden superior como los de [17, 19, 126] pueden ser muy útiles.

4. *Verificación de tipos.* El elegante trabajo de Curien y Ghelli [35], adecuadamente extendido al marco desarrollado en este trabajo, debería proporcionar una metodología general para derivar algoritmos de verificación de tipos para cálculos específicos. Una cuestión interesante es cómo hacer tales algoritmos aún más flexibles al permitir la inserción de retractos en los huecos apropiados.

5. *Diseño de lenguajes de programación.* El enfoque de subtipos como inclusiones a nivel de primer orden ha acumulado una rica experiencia en el diseño y la implementación de lenguajes funcionales que son muy expresivos y flexibles en su estructura de tipos [43, 59] y que proporcionan mecanismos muy útiles para tratar excepciones y parcialidad. Un tema de investigación de gran interés es la transferencia de tal experiencia a lenguajes de orden superior, así como su integración con las técnicas desarrolladas para lenguajes con conversiones implícitas. Asimismo, las extensiones de OBJ a programación relacional, dirigida a objetos y concurrente [60, 144, 61, 112] pueden sugerir similares extensiones para lenguajes de orden superior.

6. *Programación dirigida a objetos.* Como éste es un campo en el que aún existe gran desacuerdo sobre conceptos básicos como por ejemplo el de herencia, hemos preferido desarrollar nuestra teoría en un contexto puramente funcional, dejando abierta la cuestión de las aplicaciones a programación dirigida a objetos; no obstante, tales aplicaciones son de hecho relevantes e importantes. Varias propuestas semánticas han sido hechas, tanto desde teorías de tipos de orden superior [151, 27, 32, entre otros] como desde la teoría de subtipos de primer orden [61, 63, 112, por ejemplo]. El marco presente, al proporcionar un vínculo conceptual entre estas dos líneas de trabajo, puede ofrecer una buena base sobre la cual comparar y relacionar propuestas de esta clase, y por otro lado puede también sugerir nuevas soluciones al estimulante problema de encontrar una buena base semántica para la programación dirigida a objetos.

Bibliografía

[1] S. Abramsky, *Computational Interpretations of Linear Logic*, Informe técnico DOC 90/20, Imperial College, Octubre 1990.

[2] S. Abramsky y S. Vickers, *Linear Process Logic*, Notas por S. Vickers, Noviembre 1988.

[3] S. Abramsky y S. Vickers, *Quantales, Observational Logic, and Process Semantics*, Informe técnico DOC 90/1, Imperial College, Enero 1990.

[4] R. Amadio, *Formal Theories of Inheritance for Typed Functional Languages*, Informe técnico TR-28/89, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, Julio 1989.

[5] J.-M. Andreoli y R. Pareschi, Logic Programming with Sequent Systems, en: P. Schroeder-Heister (ed.), *Extensions of Logic Programming, Tübingen, FRG, December 1989*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 475, Springer-Verlag, 1991, páginas 1–30.

[6] A. Asperti, *A Logic for Concurrency*, manuscrito no publicado, Noviembre 1987.

[7] A. Asperti, G. L. Ferrari y R. Gorrieri, Implicative Formulae in the "Proofs as Computations" Analogy, en: *Proc. 17th. Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, San Francisco, California, Enero 1990, páginas 59–71.

[8] A. Asperti, Comunicación personal, Noviembre 1989.

[9] M. Barr, $*$-*Autonomous Categories*, LNM 752, Springer-Verlag, 1979.

[10] M. Barr, Comunicación personal, Diciembre 1988.

[11] M. Barr, Accessible Categories and Models of Linear Logic, manuscrito, Noviembre 1990.

[12] M. Barr, $*$-Autonomous Categories and Linear Logic, aparecerá en *Mathematical Structures in Computer Science* **1**, 1991.

[13] M. Barr y C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Springer-Verlag, 1985.

[14] J. L. Bell, *Toposes and Local Set Theories: An Introduction*, Oxford University Press, 1988.

[15] J. Bénabou, Structures Algébriques dans les Catégories, *Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle* **10**, 1968, páginas 1–126.

[16] E. Best y R. Devillers, Sequential and Concurrent Behaviour in Petri Net Theory, *Theoretical Computer Science* **55**, 1987, páginas 87–136.

[17] V. Breazu-Tannen, Combining Algebra and Higher-Order Types, en: *Proc. Third Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Edinburgh, Scotland, Julio 1988, páginas 82–90.

[18] V. Breazu-Tannen, T. Coquand, C. A. Gunter y A. Scedrov, *Inheritance as Implicit Coercion*, Informe técnico MS-CIS-89-01 Logic & Computation 1, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Noviembre 1989.

[19] V. Breazu-Tannen y J. Gallier, Polymorphic Rewriting Conserves Algebraic Strong Normalization and Confluence, en: G. Ausiello *et al.* (eds.), *ICALP'89*, LNCS 372, Springer-Verlag, 1989, páginas 137–150.

[20] V. Breazu-Tannen, C. A. Gunter y A. Scedrov, *Computing with Coercions*, Informe técnico MS-CIS-89-62 Logic & Computation 11, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Diciembre 1989.

[21] C. Brown, *Relating Petri Nets to Formulae of Linear Logic*, Informe técnico ECS-LFCS-89-87, Laboratory for Foundations of Computer Science, University of Edinburgh, Junio 1989.

[22] C. Brown, *Petri Nets as Quantales*, Informe técnico ECS-LFCS-89-96, Laboratory for Foundations of Computer Science, University of Edinburgh, Noviembre 1989.

[23] C. Brown y D. Gurr, A Categorical Linear Framework for Petri Nets, en: *Proc. Fifth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Philadelphia, Pennsylvania, Junio 1990, páginas 208–218.

[24] K. B. Bruce y G. Longo, A Modest Model of Records, Inheritance and Bounded Quantification, *Information and Computation* **87**, 1990, páginas 196–240.

[25] L. Cardelli, A Semantics of Multiple Inheritance, en: G. Kahn, D. B. MacQueen y G. Plotkin (eds.), *Semantics of Data Types*, LNCS 173, Springer-Verlag, 1984, páginas 51–68. Versión extendida: *Information and Computation* **76**, 1988, páginas 138–164.

[26] L. Cardelli y G. Longo, *A Semantic Basis for Quest*, Informe de investigación 55, Digital Systems Research Center, Febrero 1990.

[27] L. Cardelli y J. C. Mitchell, Operations on Records, en: M. Main *et al.* (eds.), *Mathematical Foundations of Programming Semantics*, LNCS 442, Springer-Verlag, 1990, páginas 22–52.

[28] L. Cardelli y P. Wegner, On Understanding Types, Data Abstraction and Polymorphism, *Computing Surveys* **17**, 1985, páginas 471–522.

[29] J. Cartmell, Generalized Algebraic Theories and Contextual Categories, *Annals of Pure and Applied Logic* **32**, 1986, páginas 209–243.

[30] R. Casley, R. F. Crew, J. Meseguer y V. Pratt, Temporal Structures, en: D. H. Pitt *et al.* (eds.), *Category Theory and Computer Science, Manchester, UK, September 1989*, LNCS 389, Springer-Verlag, 1989, páginas 21–51. Versión extendida: Informe técnico STAN-CS-89-1297, Department of Computer Science, Stanford University, Diciembre 1989.

[31] S. Cerrito, A Linear Semantics for Allowed Logic Programs, en: *Proc. Fifth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Philadelphia, Pennsylvania, Junio 1990, páginas 219–227.

[32] W. Cook, W. Hill y P. Canning, Inheritance is Not Subtyping, en: *Proc. 17th. Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, San Francisco, California, Enero 1990, páginas 125–135.

[33] G. Cousineau, P.-L. Curien y M. Mauny, The Categorical Abstract Machine, en: J.-P. Jouannaud (ed.), *Functional Programming Languages and Computer Architecture*, LNCS 201, Springer-Verlag, 1985, páginas 50–64.

[34] P.-L. Curien, *Categorical Combinators, Sequential Algorithms and Functional Programming*, Pitman, 1986.

[35] P.-L. Curien y G. Ghelli, *Coherence of Subsumption*, en: A. Arnold (ed.), *CAAP'90*, LNCS 431, Springer-Verlag, 1990, páginas 132–146. Versión extendida: Informe técnico TR-34/89, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, Octubre 1989.

[36] P. Degano, J. Meseguer y U. Montanari, *Axiomatizing the Algebra of Net Computations and Processes*, Informe técnico SRI-CSL-90-12, Computer Science Laboratory, SRI International, Noviembre 1990. Versión preliminar en: *Proc. Fourth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Asilomar, California, Junio 1989, páginas 175–185.

[37] E. W. Dijkstra, Hierarchical Ordering of Sequential Processes, en: C. A. R. Hoare y R. H. Perrot (eds.), *Operating Systems Techniques*, Academic Press, 1972, páginas 72–93.

[38] T. Ehrhard, *Une Sémantique Catégorique des Types Dépendants. Application au Calcul des Constructions*, Tesis doctoral, Université Paris VII, 1988.

[39] H. Ehrig y B. Mahr, *Fundamentals of Algebraic Specification 1: Equations and Initial Semantics*, Springer-Verlag, 1985.

[40] S. Eilenberg y G. M. Kelly, Closed Categories, en: S. Eilenberg *et al.* (eds.), *Proc. Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965*, Springer-Verlag, 1966, páginas 421–562.

[41] U. Engberg y G. Winskel, Petri Nets as Models of Linear Logic, en: A. Arnold (ed.), *CAAP'90*, LNCS 431, Springer-Verlag, 1990, páginas 147–161.

[42] P. Freyd, Aspects of Topoi, *Bulletin Australian Mathematical Society* **7**, 1972, páginas 1–76 y 467–480.

[43] K. Futatsugi, J. Goguen, J.-P. Jouannaud y J. Meseguer, Principles of OBJ2, en: *Conf. Record 12th. Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, New Orleans, Louisiana, Enero 1985, páginas 52–66.

[44] V. Gehlot, *A Proof-Theoretic Approach to the Semantics of Concurrency*, Tesis doctoral, University of Pennsylvania, 1991.

[45] V. Gehlot y C. Gunter, Normal Process Representatives, en: *Proc. Fifth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Philadelphia, Pennsylvania, Junio 1990, páginas 200–207.

[46] H. J. Genrich y K. Lautenbach, System Modelling with High-Level Petri Nets, *Theoretical Computer Science* **13**, 1981, páginas 109–136.

[47] J.-Y. Girard, *Interprétation Fonctionnelle et Élimination des Coupures de l'Arithmétique d'Ordre Supérieur*, Tesis doctoral, Université Paris VII, 1972.

[48] J.-Y. Girard, The System F of Variable Types, Fifteen Years Later, *Theoretical Computer Science* **45**, 1986, páginas 159–192.

[49] J.-Y. Girard, Linear Logic, *Theoretical Computer Science* **50**, 1987, páginas 1–102.

[50] J.-Y. Girard, Linear Logic and Parallelism, en: Marisa Venturini Zilli (ed.), *Mathematical Models for the Semantics of Parallelism*, LNCS 280, Springer-Verlag, 1987, páginas 166–182.

[51] J.-Y. Girard, Towards a Geometry of Interaction, en: J. W. Gray y A. Scedrov (eds.), *Categories in Computer Science and Logic, Boulder, June 1987*, Contemporary Mathematics 92, American Mathematical Society, 1989, páginas 69–108.

[52] J.-Y. Girard, Geometry of Interaction I: Interpretation of System F, en: R. Ferro *et al.* (eds.), *Logic Colloquium'88*, North-Holland, 1989, páginas 221–260.

[53] J.-Y. Girard, La Logique Linéaire, *Pour la Science (édition française de 'Scientific American')* **150**, 1990, páginas 74–85.

[54] J.-Y. Girard, A. Scedrov y P. J. Scott, Bounded Linear Logic: A Modular Approach to Polynomial Time Computability, en: S. R. Buss y P. J. Scott (eds.), *Proc. Mathematical Sciences Institute Workshop on Feasible Mathematics, Cornell Univ., June 1988*, Birkhauser, 1990.

[55] M. Gogolla, Partially Ordered Sorts in Algebraic Specifications, en: B. Courcelle (ed.), *Proc. 9th. CAAP*, Cambridge University Press, 1984, páginas 139–153.

[56] J. A. Goguen, *Order Sorted Algebra*, Informe técnico 14, UCLA Computer Science Department, Semantics and Theory of Computation Series, 1978.

[57] J. A. Goguen y R. Burstall, Introducing Institutions, en: E. Clarke y D. Kozen (eds.), *Logics of Programs*, LNCS 164, Springer-Verlag, 1984, páginas 221–256.

[58] J. Goguen, J.-P. Jouannaud y J. Meseguer, Operational Semantics of Order-Sorted Algebra, en: W. Brauer (ed.), *ICALP'85*, LNCS 194, Springer-Verlag, 1985, páginas 221–231.

[59] J. Goguen, C. Kirchner, H. Kirchner, A. Mégrelis, J. Meseguer y T. Winkler, An Introduction to OBJ3, en: S. Kaplan y J.-P. Jouannaud (eds.), *Conditional Term Rewriting Systems*, LNCS 308, Springer-Verlag, 1988, páginas 258–263.

[60] J. A. Goguen y J. Meseguer, Eqlog: Equality, Types, and Generic Modules for Logic Programming, en: D. DeGroot y G. Lindstrom (eds.), *Logic Programming: Functions, Relations, and Equations*, Prentice-Hall, 1986, páginas 295–363.

[61] J. A. Goguen y J. Meseguer, Unifying Functional, Object-Oriented and Relational Programming with Logical Semantics, en: B. Shriver y P. Wegner (eds.), *Research Directions in Object-Oriented Programming*, The MIT Press, 1987, páginas 417–477.

[62] J. A. Goguen y J. Meseguer, *Order-Sorted Algebra I: Equational Deduction for Multiple Inheritance, Overloading, Exceptions and Partial Operations*, Informe técnico SRI-CSL-89-10, Computer Science Laboratory, SRI International, Julio 1989.

[63] J. A. Goguen y D. Wolfram, On Types and FOOPS, en: *Proc. IFIP TC2 Working Conference on Database Semantics: Object Orientated Databases*, Windermere, UK, Julio 1990.

[64] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, revised edition, North-Holland, 1984.

[65] C. Gunter y V. Gehlot, *Nets as Tensor Theories*, Informe técnico MS-CIS-89-68 Logic & Computation 17, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Octubre 1989.

[66] J. C. Guzmán y P. Hudak, Single-Threaded Polymorphic Lambda Calculus, en: *Proc. Fifth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Philadelphia, Pennsylvania, Junio 1990, páginas 333–343.

[67] J. Harland y D. Pym, *The Uniform Proof-Theoretic Foundation of Linear Logic Programming*, Informe técnico ECS-LFCS-90-124, Laboratory for Foundations of Computer Science, University of Edinburgh, Noviembre 1990.

[68] W. H. Hesselink, Axioms and Models of Linear Logic, *Formal Aspects of Computing* **2**, 1990, páginas 139–166.

[69] J. R. Hindley y J. P. Seldin, *Introduction to Combinators and λ-Calculus*, Cambridge University Press, 1986.

[70] C. A. R. Hoare, *Communicating Sequential Proceses*, Prentice-Hall International, 1985.

[71] J. Hodas y D. Miller, Logic Programming in a Fragment of Intuitionistic Linear Logic, en: *Proc. Sixth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Amsterdam, The Netherlands, July 1991.

[72] W. A. Howard, The Formulae-as-Types Notion of Construction, en: J. P. Seldin y J. R. Hindley (eds.), *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press, 1980, páginas 479–490.

[73] G. Huet (ed.), *Logical Foundations of Functional Programming*, The University of Texas at Austin Year of Programming Series, Addison-Wesley, 1990.

[74] M. Hyland y V. de Paiva, *Lineales*, manuscrito, Octubre 1990.

[75] J. M. E. Hyland y A. M. Pitts, The Theory of Constructions: Categorical Semantics and Topos-Theoretic Models, en: J. W. Gray y A. Scedrov (eds.), *Categories in Computer Science and Logic, Boulder, June 1987*, Contemporary Mathematics 92, American Mathematical Society, 1989, páginas 137–199.

[76] A. Joyal y R. Street, *Braided Tensor Categories*, Macquarie Mathematics Reports, 1988.

[77] A. Joyal y R. Street, *The Geometry of Tensor Calculus I*, Macquarie Mathematics Reports, 1989.

[78] G. M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, Cambridge University Press, 1982.

[79] C. Kirchner, H. Kirchner y J. Meseguer, Operational Semantics of OBJ-3, en: T. Lepistö y A. Salomaa (eds.), *ICALP'88*, LNCS 317, Springer-Verlag, 1988, páginas 287–301.

[80] A. Kock y G. E. Reyes, Doctrines in Categorical Logic, en: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977, páginas 283–313.

[81] Y. Lafont, Linear Logic Programming, en: P. Dybjer *et al.* (eds.), *Proc. of the Workshop on Programming Logic*, Programming Methodology Group Report 37, Univ. of Göteborg and Chalmers Univ. of Technology, Octubre 1987, páginas 209–220.

[82] Y. Lafont, The Linear Abstract Machine, *Theoretical Computer Science* **59**, 1988, páginas 157–180.

[83] Y. Lafont, *Logiques, Catégories & Machines*, Tesis doctoral, Université Paris VII, Enero 1988.

[84] Y. Lafont, Introduction to Linear Logic, *Lecture notes for the Summer School on Constructive Logic and Category Theory*, Isle of Thorns, UK, Agosto 1988.

[85] Y. Lafont, *From Linear Algebra to Linear Logic*, manuscrito, Noviembre 1988.

[86] Y. Lafont, Interaction Nets, en: *Proc. 17th. Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, San Francisco, California, Enero 1990, páginas 95–108.

[87] Y. Lafont y T. Streicher, Games Semantics for Linear Logic, en: *Proc. Sixth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Amsterdam, The Netherlands, Julio 1991.

[88] J. Lambek, Deductive Systems and Categories I, *Mathematical Systems Theory* **2**, 1968, páginas 287–318.

[89] J. Lambek, Deductive Systems and Categories II, en: *Category Theory, Homology Theory and their Applications I*, LNM 86, Springer-Verlag, 1969, páginas 76–122.

[90] J. Lambek, Deductive Systems and Categories III, en: F. W. Lawvere (ed.), *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, LNM 274, Springer-Verlag, 1972, páginas 57–82.

[91] J. Lambek, On the Unity of Algebra and Logic, en: F. Borceaux (ed.), *Categorical Algebra and its Applications, Louvain-La-Neuve, 1987*, LNM 1348, Springer-Verlag, 1988, páginas 221–229.

[92] J. Lambek, Multicategories Revisited, en: J. W. Gray y A. Scedrov (eds.), *Categories in Computer Science and Logic, Boulder, June 1987*, Contemporary Mathematics 92, American Mathematical Society, 1989, páginas 217–239.

[93] J. Lambek y P. J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge University Press, 1986.

[94] F. W. Lawvere, Functorial Semantics of Algebraic Theories, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **50**, 1963, páginas 869–873.

[95] F. W. Lawvere, Adjointness in Foundations, *Dialectica* **23**, 1969, páginas 281-296.

[96] F. W. Lawvere, Equality in Hyperdoctrines and Comprehension Schema as an Adjoint Functor, en: A. Heller (ed.), *Proc. New York Symp. on Applications of Categorical Algebra*, American Mathematical Society, 1970, páginas 1–14.

[97] P. Lincoln, J. Mitchell, A. Scedrov y N. Shankar, *Decision Problems for Propositional Linear Logic*, Informe técnico SRI-CSL-90-08, Computer Science Laboratory, SRI International, Agosto 1990. Versión corta en: *Proc. 31st. Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, St. Louis, Missouri, Octubre 1990, páginas 662–671.

[98] S. Mac Lane, Natural Associativity and Commutativity, *Rice University Studies* **49**, 1963, páginas 28–46.

[99] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[100] S. Mac Lane (ed.), *Coherence in Categories*, LNM 281, Springer-Verlag, 1972.

[101] S. Mac Lane, Why Commutative Diagrams Coincide with Equivalent Proofs, en: S. A. Amitsur, D. J. Saltman y G. B. Seligman (eds.), *Algebraists' Homage: Papers in Ring Theory and Related Topics*, Contemporary Mathematics 13, American Mathematical Society, 1982, páginas 387–401.

[102] S. Mac Lane y G. Birkhoff, *Algebra*, The MacMillan Company, 1967.

[103] N. Martí-Oliet y J. Meseguer, From Petri Nets to Linear Logic, en: D. H. Pitt *et al.* (eds.), *Category Theory and Computer Science, Manchester, UK, September 1989*, LNCS 389, Springer-Verlag, 1989, páginas 313–340.

[104] N. Martí-Oliet y J. Meseguer, From Petri Nets to Linear Logic, *Mathematical Structures in Computer Science* **1**, 1991, páginas 69–101; versión extendida de [103].

[105] N. Martí-Oliet y J. Meseguer, An Algebraic Axiomatization of Linear Logic Models, en: G. M. Reed, A. W. Roscoe y R. Wachter (eds.), *Topology in Computer Science*, Oxford University Press, 1990.

[106] N. Martí-Oliet y J. Meseguer, *Duality in Closed and Linear Categories*, Informe técnico SRI-CSL-90-01, Computer Science Laboratory, SRI International, Febrero 1990.

[107] P. Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, 1984.

[108] M. Masseron, C. Tollu y J. Vauzeilles, Generating Plans in Linear Logic, en: K. V. Nori y C. E. Veni Madhavan (eds.), *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, Bangalore, India, December 1990*, LNCS 472, Springer-Verlag, 1990, páginas 63–75.

[109] J. Meseguer, Relating Models of Polymorphism, en: *Proc. 16th. Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, Austin, Texas, Enero 1989, páginas 228–241.

[110] J. Meseguer, General Logics, en: H.-D. Ebbinghaus *et al.* (eds.), *Logic Colloquium'87*, North-Holland, 1989, páginas 275–329.

[111] J. Meseguer, Rewriting as a Unified Model of Concurrency, en: J. C. M. Baeten y J. W. Klop (eds.), *CONCUR'90*, LNCS 458, Springer-Verlag, 1990, páginas 384–400.

[112] J. Meseguer, A Logical Theory of Concurrent Objects, en: N. Meyrowitz (ed.), *Proc. OOPSLA-ECOOP'90*, ACM Press, 1990, páginas 101–115.

[113] J. Meseguer, *Conditional Rewriting Logic as a Unified Model of Concurrency*, Informe técnico SRI-CSL-91-05, Computer Science Laboratory, SRI International, Febrero 1991; aparecerá en *Theoretical Computer Science*.

[114] J. Meseguer y J. A. Goguen, Initiality, Induction, and Computability, en: M. Nivat y J. C. Reynolds (eds.), *Algebraic Methods in Semantics*, Cambridge University Press, 1985, páginas 459–541.

[115] J. Meseguer y J. A. Goguen, *Order-Sorted Algebra Solves the Constructor-Selector, Multiple Representation and Coercion Problems*, Informe técnico SRI-CSL-90-06, Computer Science Laboratory, SRI International, Junio 1990, aparecerá en *Information and Computation*. Versión preliminar en: *Proc. Second Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Ithaca, New York, Junio 1987, páginas 18–29.

[116] J. Meseguer y U. Montanari, Petri Nets Are Monoids: A New Algebraic Foundation for Net Theory, en: *Proc. Third Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Edinburgh, Scotland, Julio 1988, páginas 155–164.

[117] J. Meseguer y U. Montanari, Petri Nets Are Monoids, *Information and Computation* **88**, 1990, páginas 105–155; fue publicado también como Informe técnico SRI-CSL-88-3, Computer Science Laboratory, SRI International, Enero 1988.

[118] A. R. Meyer, What Is a Model of the Lambda Calculus?, *Information and Control* **52**, 1982, páginas 87–122.

[119] R. Milner, Interpreting One Concurrent Calculus in Another, en: *Proc. Int. Conf. on Fifth Generation Computer Systems*, Tokyo, Japan, Noviembre 1988, páginas 321–326.

[120] R. Milner, M. Tofte y R. Harper, *The Definition of Standard ML*, The MIT Press, 1990.

[121] G. Mints, *Some Information on Linear Logic*, manuscrito, 1989.

[122] J. C. Mitchell, Coercion and Type Inference, en: *Conf. Record 11th. Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages*, Salt Lake City, Utah, Enero 1984, páginas 175–185.

[123] J. C. Mitchell, Type Systems for Programming Languages, en: J. van Leeuwen *et al.* (eds.), *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Semantics*, North-Holland, 1990, páginas 365–458.

[124] J. C. Mitchell y P. J. Scott, Typed Lambda Models and Cartesian Closed Categories, en: J. W. Gray y A. Scedrov (eds.), *Categories in Computer Science and Logic, Boulder, June 1987*, Contemporary Mathematics 92, American Mathematical Society, 1989, páginas 301–316.

[125] E. Moggi, Computational Lambda-Calculus and Monads, en: *Proc. 4th. Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Asilomar, California, Junio 1989, páginas 14–23.

[126] M. Okada, Strong Normalizability for the Combined System of the Typed Lambda Calculus and an Arbitrary Convergent Term Rewrite System, en: *Proc. ACM-SIGSAM Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation*, Portland, Oregon, Julio 1989, páginas 357–363.

[127] V. C. V. de Paiva, *The Dialectica Categories*, Tesis doctoral, University of Cambridge, 1988.

[128] A. Pitts, Lectures on Categories and Types, *Lecture Notes for the Summer School on Constructive Logic and Category Theory*, Isle of Thorns, UK, Agosto 1988.

[129] A. Poigné, Parametrization for Order-Sorted Algebraic Specification, *Journal of Computer and System Sciences* **40**, 1990, páginas 229–268.

[130] A. Poigné, Cartesian Closure—Higher Types in Categories, Algebra Categorically, y Category Theory and Logic, tres artículos de carácter introductorio en: D. Pitt *et al.* (eds.), *Category Theory and Computer Programming, Guildford, UK, September 1985*, LNCS 240, Springer-Verlag, 1986, páginas 58–142.

[131] V. Pratt, Event Spaces and their Linear Logic, en: *Proc. Second Int. Conf. on Algebraic Methods and Software Technology*, Iowa City, Iowa, Mayo 1991.

[132] D. Prawitz, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Almqvist and Wiksell, 1965.

[133] Z. Qian, Higher-Order Order-Sorted Algebras, en: H. Kirchner y W. Wechler (eds.), *Algebraic and Logic Programming*, LNCS 463, Springer-Verlag, 1990, páginas 86–100.

[134] W. Reisig, *Petri Nets: An Introduction*, Springer-Verlag, 1985.

[135] J. C. Reynolds, Towards a Theory of Type Structure, en: B. Robinet (ed.), *Proc. Colloque sur la Programmation*, LNCS 19, Springer-Verlag, 1974, páginas 408–425.

[136] J. C. Reynolds, Using Category Theory to Design Implicit Conversions and Generic Operators, en: N. D. Jones (ed.), *Semantics-Directed Compiler Generation*, LNCS 94, Springer-Verlag, 1980, páginas 211–258.

[137] J. C. Reynolds, Types, Abstraction and Parametric Polymorphism, en: R. E. A. Mason (ed.), *Information Processing 83*, North-Holland, 1983, páginas 513–523.

[138] J. C. Reynolds, Three Approaches to Type Structure, en: H. Ehrig *et al.* (eds.), *Mathematical Foundations of Software Development*, LNCS 185, Springer-Verlag, 1985, páginas 97–138.

[139] A. Scedrov, A Brief Guide to Linear Logic, *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science* **41**, 1990, páginas 154–165.

[140] R. A. G. Seely, Hyperdoctrines, Natural Deduction, and the Beck Condition, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **29**, 1983, páginas 505–542.

[141] R. A. G. Seely, Locally Cartesian Closed Categories and Type Theory, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **95**, 1984, páginas 33–48.

[142] R. A. G. Seely, Categorical Semantics for Higher Order Polymorphic Lambda Calculus, *Journal of Symbolic Logic* **52**, 1987, páginas 969–989.

[143] R. A. G. Seely, Linear Logic, $*$-Autonomous Categories and Cofree Coalgebras, en: J. W. Gray y A. Scedrov (eds.), *Categories in Computer Science and Logic, Boulder, June 1987*, Contemporary Mathematics 92, American Mathematical Society, 1989, páginas 371–382.

[144] G. Smolka, *TEL (Version 0.9), Report and User Manual*, Informe técnico SEKI SR-87-11, FB Informatik, Universität Kaiserslautern, Germany, 1988.

[145] R. Street, Comunicación personal, Agosto 1989.

[146] T. Streicher, *Correctness and Completeness of a Categorical Semantics of the Calculus of Constructions*, Tesis doctoral, Universität Passau, Germany, 1989.

[147] P. Taylor, *Recursive Domains, Indexed Category Theory and Polymorphism*, Tesis doctoral, University of Cambridge, UK, 1986.

[148] A. S. Troelstra, *Lectures on Linear Logic*, ITLL Prepublication Series X-90-15, Institute for Language, Logic and Information, University of Amsterdam, Diciembre 1990.

[149] N. Verwer, *A Computational Interpretation of Linear Logic*, manuscrito, Enero 1991.

[150] P. Wadler, Linear Types Can Change the World!, en: *Proc. IFIP TC2 Working Conference on Programming Concepts and Methods*, Sea of Gallilee, Israel, Abril 1990.

[151] M. Wand, Type Inference for Record Concatenation and Multiple Inheritance, en: *Proc. Fourth Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science*, Asilomar, California, Junio 1989, páginas 92–97.

[152] D. N. Yetter, Quantales and (Non-commutative) Linear Logic, *Journal of Symbolic Logic* **55**, 1990, páginas 41–64.