

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**



**TEORÍA DE CAMPOS FUERA DEL EQUILIBRIO Y  
COSMOLOGÍA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR**

Francisco Javier Cao García

**Madrid, 2004**

**ISBN: 978-84-669-1727-8**

**©Francisco Javier Cao García, 2001**

# Teoría de Campos fuera del equilibrio y Cosmología

Francisco Javier Cao García



# Índice General

Abstract	7
Resumen	9
Introducción	11
<b>I Teoría Cuántica de Campos fuera del equilibrio</b>	<b>15</b>
<b>1 Dinámica no perturbativa en Minkowski</b>	<b>17</b>
1.1 El límite de $N$ grande	17
1.2 El modelo $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$ en el límite de $N$ grande	20
1.2.1 Soluciones con invariancia translacional	23
1.3 Funcional de onda	24
1.3.1 El funcional de onda (imagen de Schrödinger)	26
1.3.2 Los modos del campo (imagen de Heisenberg)	28
1.4 Ecuaciones de evolución y condiciones iniciales	29
1.5 El tensor energía-momento	30
1.6 Renormalización	31
1.7 Adimensionalización	33
1.8 Implementación numérica	35
1.9 Conclusiones	36
1.A Demostración de algunas relaciones utilizadas	36
1.A.1 Demostración de (1.15)	36
1.A.2 Demostración de (1.16)	37
<b>2 Evolución de estados tsunami</b>	<b>39</b>
2.1 Definición de número de partículas	40

2.2	Condiciones iniciales y ecs. de evolución . . . . .	40
2.3	Dinámica inicial . . . . .	44
2.3.1	Caso I [ $g\Sigma(0) \simeq 0$ ] . . . . .	44
2.3.2	Caso II [ $g\Sigma(0) = g\Sigma_{max}$ ] . . . . .	48
2.4	Dinámica a tiempos intermedios y grandes . . . . .	51
2.4.1	$m_R^2 > 0$ ( $\alpha = +1$ ) . . . . .	51
2.4.2	$m_R^2 < 0$ ( $\alpha = -1$ ) . . . . .	52
2.5	Energía . . . . .	55
2.5.1	Caso I [ $g\Sigma(0) \simeq 0$ ] . . . . .	56
2.5.2	Caso II [ $g\Sigma(0) = g\Sigma_{max}$ ] . . . . .	57
2.5.3	$g\Sigma_{max}$ en función de la energía . . . . .	57
2.6	Ecuación de estado . . . . .	57
2.6.1	Regla de suma . . . . .	58
2.6.2	Presión y ecuación de estado . . . . .	58
2.7	El límite de tiempo infinito . . . . .	60
2.8	Funciones de correlación y condensado de Bose . . . . .	61
2.8.1	Dinámica inicial . . . . .	62
2.8.2	Dinámica asintótica . . . . .	63
2.9	Conclusiones . . . . .	70
2.A	Aproximación adiabática para los modos . . . . .	71
2.B	Parámetros de variación asintótica lenta . . . . .	73
2.C	Tiempo espinodal en presencia del tsunami . . . . .	74
2.D	Cálculo de $g\Sigma(0)$ en el caso II . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Evolución en presencia de campo externo</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Dinámica clásica . . . . .	80
3.1.1	Ecuaciones de evolución clásica y condiciones iniciales . . . . .	80
3.1.2	La dinámica clásica . . . . .	83
3.2	Dinámica cuántica . . . . .	85
3.2.1	Ecuaciones de movimiento cuánticas y condiciones iniciales . . . . .	86
3.2.2	Dinámica cuántica inicial . . . . .	89
3.2.3	Dinámica cuántica a tiempos intermedios . . . . .	92
3.2.4	Restricciones en la trayectoria debidas a la conservación de la energía . . . . .	98
3.3	Conclusiones . . . . .	99
3.A	Inestabilidades espinodales . . . . .	100

<b>II</b>	<b>Teoría Cuántica de Campos fuera del equilibrio en Cosmología</b>	<b>103</b>
<b>4</b>	<b>Teoría del Big Bang e Inflación</b>	<b>105</b>
4.1	La teoría del Big Bang . . . . .	105
4.2	Limitaciones de la teoría del Big Bang . . . . .	107
4.3	Inflación . . . . .	108
4.3.1	Nueva inflación . . . . .	110
4.3.2	Inflación caótica . . . . .	111
4.4	Conclusiones . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Inflación caótica tsunami</b>	<b>113</b>
5.1	Estado inicial y ecuaciones de movimiento . . . . .	114
5.1.1	Estados iniciales tsunami . . . . .	117
5.1.2	Reexpresión en tiempo comóvil: ecuaciones de movimiento renormalizadas . . . . .	122
5.2	Inflación caótica tsunami . . . . .	125
5.2.1	Estudio analítico: el tsunami estrecho . . . . .	126
5.2.2	Ejemplos numéricos . . . . .	137
5.2.3	Otras distribuciones y otros estados . . . . .	140
5.3	Inflación caótica generalizada . . . . .	144
5.4	Conclusiones . . . . .	148
5.A	El límite de $N$ grande: Ecs. de mov. y estados iniciales . . . . .	149
<b>III</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>155</b>
	<b>Conclusiones</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>161</b>



# Abstract

This work is devoted to the research in quantum field dynamics for out of equilibrium systems with nonperturbatively large energy density. The main applications of the results are the ultrarelativistic heavy ion collisions and the evolution of the early Universe.

The large  $N$  limit is used to solve the dynamics of the  $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$  model. We find analytic solutions for several regimes. We show that the dynamics is characterized by decoherence phenomena, parametric resonances, spinodal instabilities and creation of out of equilibrium Goldstone bosons. We also analyze the correlation function evolution and we find a generalized scaling behavior (for broken symmetry). In the broken symmetry case the effective mass goes to zero asymptotically in the absence of external fields, while in their presence the asymptotic mass squared is of the order of the external field.

We also study the quantum field dynamics in the FRW space-time self-consistently. This allows to give a consistent quantum treatment for the inflaton field in chaotic inflation (opposite to the usual classical treatment). This novel treatment gives a microscopic justification of classical chaotic inflation. We find a class of initial quantum states (pure and mixed) leading to chaotic inflation and we provide a quantum generalization of the slow-roll condition.



# Resumen

En este trabajo se investiga la dinámica cuántica de los campos para sistemas fuera del equilibrio con densidad de energía no perturbativamente grande. Las principales aplicaciones de los resultados son las colisiones ultrarelativistas de iones pesados y la evolución del Universo primordial.

Se usa el límite de  $N$  grande para resolver la dinámica del modelo  $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$ . Se obtienen soluciones analíticas para varios regímenes. Se muestra que la dinámica está caracterizada por fenómenos de decoherencia, resonancia paramétrica, restauración dinámica de la simetría, rotura dinámica de la simetría, inestabilidad espinodal y creación de bosones de Goldstone fuera del equilibrio. Se analiza también la evolución de la función de correlación para la que se encuentra un comportamiento de scaling generalizado (para simetría rota). En el caso de simetría rota la masa efectiva tiende asintóticamente a cero en ausencia de campo externo, mientras que en su presencia la masa al cuadrado asintótica es del orden del campo externo.

También se ha estudiado la dinámica de campos cuánticos en el espacio-tiempo FRW de forma consistente. Lo que nos ha permitido dar un tratamiento cuántico consistente al campo del inflatón en el escenario de inflación caótica (frente a los habituales tratamientos clásicos). Este tratamiento da una justificación microscópica de la inflación caótica clásica. Encontramos una clase de estados iniciales cuánticos (tanto puros como mezcla) que dan lugar a inflación caótica y proporcionamos una generalización cuántica de las condiciones de deslizamiento lento.



# Introducción

La comprensión de importantes fenómenos físicos requiere considerar la dinámica de campos cuánticos fuera del equilibrio. Entre ellos podemos destacar las colisiones ultrarelativistas de iones pesados, y los fenómenos que tuvieron lugar en el Universo primordial.

Estos fenómenos están caracterizados por estados cuánticos fuera del equilibrio con densidades de energía no perturbativamente grandes. El objetivo de esta tesis es estudiar estos fenómenos de una forma consistente, para comprender y predecir su dinámica.

Las experiencias de colisión de iones pesados en RHIC y en el LHC están comenzando a dar y darán datos experimentales sobre la dinámica en situaciones fuera del equilibrio con densidad de energía no perturbativa. En este contexto cabe preguntarse hasta que punto son ciertos los resultados obtenidos a partir de suposiciones como equilibrio térmico, respuesta lineal o dinámica clásica. También cabe preguntarse cuales son las características propias de estos procesos fuera del equilibrio [1].

Por otro lado en la dinámica del Universo primordial también aparecen situaciones de alta densidad fuera del equilibrio (inflación, bariogénesis, ...). En particular en los modelos inflacionarios el campo del inflatón durante el periodo inflacionario está típicamente en estados lejanos al equilibrio termodinámico y lejanos al estado de vacío [2, 3, 4, 5].

Otro fenómeno en el que es importante la dinámica no perturbativa fuera del equilibrio es la formación y evolución de condensados de Bose-Einstein. Dentro de este contexto hay que destacar la condensación de gases atómicos conseguida recientemente [6, 7, 8].

Para el estudio de estos fenómenos aunque la constante de acoplo sea pequeña no se puede desarrollar perturbativamente en torno a ella, ya que está multiplicada por campos de amplitud no perturbativamente grande. Por lo que no podemos utilizar los métodos perturbativos tradicionales para campos

cuánticos. Tampoco podemos recurrir a los métodos para el estudio de situaciones de equilibrio, ya que en estos fenómenos el sistema alcanza estados muy alejados del equilibrio. Todo ello hace que sea necesario un tratamiento cuántico dentro de un esquema apropiado para situaciones no perturbativas fuera del equilibrio.

En esta tesis utilizaremos la aproximación de  $N$  grande [9, 10], ya que proporciona un esquema consistente para tratar la dinámica de situaciones fuera del equilibrio con densidades de energía no perturbativamente grandes. La aproximación de  $N$  grande permite tratar de forma sistemática fenómenos no perturbativos, tiene en cuenta los efectos cuánticos, es renormalizable, respeta las leyes de conservación, es implementable numéricamente, y se puede mejorar consistentemente incluyendo órdenes superiores en  $1/N$ .

Otros métodos no perturbativos no reúnen todas estas características, por ejemplo, los métodos no perturbativos sobre retículo (Monte Carlo, desarrollo de acoplo fuerte) no permiten tratar estados no estacionarios. Por otro lado para el método de Hartree, que sí permite tratar la dinámica de los estados, no está claro como se puede mejorar de forma consistente (lo que además dificulta la estimación del error cometido). Todo ello sitúa a la aproximación de  $N$  grande como uno de los métodos más poderosos para el estudio de la dinámica fuera del equilibrio de los fenómenos no perturbativos.

La tesis está estructurada en tres partes:

- En la primera parte se estudia la dinámica de campos fuera del equilibrio en el espacio-tiempo de Minkowski. Esta parte consta de tres capítulos:
  - En el capítulo 1 se obtienen las ecuaciones de movimiento en el límite de  $N$  grande y se obtienen las expresiones en ese límite para la energía y la presión del sistema. Se muestra que el esquema es renormalizable, conserva la energía, tiene en cuenta la interacción entre las partículas y se puede implementar numéricamente.
  - En el capítulo 2 usamos las ecuaciones de movimiento en el límite de  $N$  grande para estudiar la dinámica de estados con un gran número de partículas en el estado inicial (tsunami). Este estudio muestra la influencia en la dinámica de fenómenos físicos interesantes: decoherencia, restauración dinámica de la simetría, rotura espontánea de la simetría, aparición de bosones de Goldstone fuera del equilibrio, scaling de las correlaciones.

- En el capítulo 3 investigamos la dinámica de estados fuera del equilibrio en presencia de campo externo. En el vemos como la presencia del campo externo modifica la dinámica, y como aparece un régimen cuasi-periódico.
- En la segunda parte se estudia la dinámica de campos fuera del equilibrio en el espacio-tiempo de FRW. El objetivo es dar un tratamiento consistente a la Cosmología dentro de la teoría cuántica de campos. En particular al escenario de inflación caótica. Esta parte consta de dos capítulos.
  - En el capítulo 4 se presenta brevemente la teoría del Big Bang y la inflación, en particular los escenarios de inflación nueva e inflación caótica.
  - En el capítulo 5 se presenta la extensión del límite de  $N$  grande para tratar la dinámica de campos cuánticos en el espacio-tiempo de FRW de forma autoconsistente. Aplicando esta extensión investigamos (por primera vez) la inflación caótica dentro de la teoría cuántica de campos de forma consistente. Como resultado de esta investigación se han generalizado los estados iniciales que dan lugar a inflación caótica, así como las condiciones de deslizamiento lento (slow-roll). Este marco permite dar una explicación microscópica de la inflación caótica.
- En la tercera parte se exponen las conclusiones de la tesis, haciendo balance de los resultados obtenidos y apuntando las posibles líneas de investigación futuras

Conviene resaltar que los capítulos 2, 3 y 5 son los que contienen los resultados originales de esta tesis.



# Parte I

## Teoría Cuántica de Campos fuera del equilibrio



# Capítulo 1

## Dinámica no perturbativa en el espacio-tiempo de Minkowski

En este capítulo deducimos las ecuaciones de evolución en el límite de  $N$  grande, las renormalizamos y describimos su implementación numérica.

Además de la deducción rigurosa usando la acción efectiva, se mostrará que se pueden obtener las mismas ecuaciones de evolución haciendo el *ansatz* de tomar un funcional de onda gaussiano. Esta deducción alternativa contribuye a esclarecer otros aspectos del significado físico del límite de  $N$  grande.

Se obtienen también las expresiones en el límite de  $N$  grande para la energía y la presión del sistema.

### 1.1 El límite de $N$ grande

En esta sección se expone la aplicación del límite de  $N$  grande (o aproximación  $1/N$  al orden dominante) a  $N$  campos escalares reales con una autointeracción invariante  $O(N)$  [9, 10, 11, 12, 13, 15]. La acción y la densidad lagrangiana invariante  $O(N)$  son

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \partial \vec{\Phi}(x) \right]^2 - N V\left(\frac{1}{N} \vec{\Phi}^2(x)\right). \quad (1.1)$$

Esta dependencia de la interacción con  $N$  garantiza la existencia del límite de  $N$  grande. (Hace que el término cinético y el de interacción sean del mismo orden en ese límite.)

El funcional generador está dado por

$$\mathcal{Z}[\vec{J}(\cdot)] = \int D\vec{\Phi} e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + \vec{\Phi}(x) \cdot \vec{J}(x)]} \quad (1.2)$$

donde  $\vec{J}(x)$  es la corriente asociada al campo  $\vec{\Phi}(x)$ . Se puede obtener el valor medio del campo de la forma,

$$\langle \Phi_a(x) \rangle = i^{-1} \frac{\delta}{\delta J_a(x)} \log \mathcal{Z}[\vec{J}(\cdot)] . \quad (1.3)$$

Para calcular el límite de  $N$  grande es conveniente reescribir el término de interacción de la forma

$$\begin{aligned} e^{[-iN \int d^4x V(\frac{1}{N}\vec{\Phi}^2(x))]} &= \int Dz \Pi_x \delta \left( z(x) - \frac{1}{N} \vec{\Phi}^2(x) \right) e^{-iN \int d^4x V(z(x))} \\ &= \int Dz D\sigma e^{iN \int d^4x [\frac{1}{2}\sigma(x) (z(x) - \frac{1}{N} \vec{\Phi}^2(x)) - V(z(x))]} \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $\sigma(x)$  juega el papel de un multiplicador de Lagrange. Así, la integral en  $\vec{\Phi}$  pasa a ser gaussiana,

$$\mathcal{Z}[\vec{J}(\cdot)] = \int D\vec{\Phi} Dz D\sigma e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}[\partial\vec{\Phi}(x)]^2 + \frac{N}{2}\sigma(x) z(x) - \frac{1}{2}\sigma(x) \vec{\Phi}^2(x) - N V(z(x)) + \vec{\Phi}(x) \cdot \vec{J}(x)]} \quad (1.5)$$

por lo que la podemos calcular de forma exacta

$$\begin{aligned} \int D\vec{\Phi} e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}(\partial\vec{\Phi})^2 - \frac{1}{2}\sigma \vec{\Phi}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Phi} \cdot \vec{J}]} &= \int D\vec{\Phi} e^{-i \int d^4x (\vec{\Phi} \partial^2 \vec{\Phi} + \sigma \vec{\Phi}^2)} \\ &= [\text{Det}(\partial^2 + \sigma(\cdot))]^{-\frac{N}{2}} . \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde hemos usado que en el punto estacionario  $\vec{J}(x) = [\partial^2 + \sigma(x)]\vec{\Phi}(x)$ . Definiendo  $G(x, y; \sigma(\cdot))$  como el operador inverso de  $\partial^2 + \sigma(\cdot)$ ,

$$[\partial^2 + \sigma(x)] G(x, y; \sigma(\cdot)) = \delta(x - y) , \quad (1.7)$$

tras hacer la integración en  $\vec{\Phi}$  tenemos,

$$\mathcal{Z}[\vec{J}(\cdot), K(\cdot)] = \int Dz D\sigma \{ \text{Det} [\partial^2 + \sigma(\cdot)] \}^{-\frac{N}{2}} e^{iN \int d^4x [\frac{1}{2}\sigma(x) z(x) - V(z(x))]}$$

$$e^{\frac{i}{2} \sum_{a=1}^N \int d^4x d^4y J_a(x) G(x,y;\sigma(\cdot)) J_a(y) + iN \int d^4x K(x) z(x)}. \quad (1.8)$$

Se ha introducido para el campo  $z(x)$  la fuente  $NK(x)$  (que anularemos al final), lo que da una forma sencilla de calcular el valor esperado de  $\vec{\Phi}^2$ ,

$$\frac{1}{N} \langle \vec{\Phi}^2(x) \rangle = \frac{1}{iN} \frac{\delta}{\delta K(x)} \log \mathcal{Z}[\vec{J}(\cdot), K(\cdot)]. \quad (1.9)$$

Ahora, podemos reexpresar  $\mathcal{Z}[\vec{J}, K]$  de la forma,

$$\mathcal{Z}[\vec{J}, K] = \int Dz D\sigma e^{iN\mathcal{S}[z,\sigma,\vec{J},K]} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[z,\sigma,\vec{J},K] &\equiv \frac{i}{2} \log \text{Det} [\partial^2 + \sigma] \\ &+ \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sigma(x) z(x) - V(z(x)) + K(x) z(x) \right] \\ &+ \frac{1}{2N} \sum_{a=1}^N \int d^4x d^4y G(x,y;\sigma) J_a(x) J_a(y). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Todos los términos en  $\mathcal{S}$  son de orden cero en el desarrollo  $1/N$ , ya que tomamos  $K(x)$  de orden cero y  $|\vec{J}|^2 \sim N$ .

En (1.10) vemos que para  $N$  grande la principal contribución a  $\mathcal{Z}$  viene del punto estacionario de la acción,  $z_0, \sigma_0$  dado por

$$\left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta z} \right|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ z=z_0}} = 0, \quad \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ z=z_0}} = 0. \quad (1.12)$$

Con lo que obtenemos

$$\frac{1}{2} \sigma_0(x) - V'(z_0(x)) + K(x) = 0, \quad (1.13)$$

$$i G(x,x;\sigma_0) + z_0(x) - \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \left[ \int d^4y G(x,y;\sigma_0) J_a(y) \right]^2 = 0, \quad (1.14)$$

donde hemos usado las relaciones:

$$\frac{\delta \log \text{Det} [\partial^2 + \sigma]}{\delta \sigma(x)} = G(x,x;\sigma), \quad (1.15)$$

$$\frac{\delta G(\tilde{x}, \tilde{y}; \sigma)}{\delta \sigma(x)} = -G(\tilde{x}, x; \sigma) G(x, \tilde{y}; \sigma), \quad (1.16)$$

deducidas en el apéndice. Las ecuaciones (1.13), (1.14), definen el punto de silla  $\sigma_0, z_0$  como un funcional de las fuentes  $\vec{J}, K$ . Es decir,  $\sigma_0 = \sigma_0[\vec{J}, K]$  y  $z_0 = z_0[\vec{J}, K]$ . Así, para  $N$  grande,

$$\mathcal{Z}[\vec{J}, K] \simeq e^{iN\mathcal{S}_0[\vec{J}, K]}, \quad (1.17)$$

con  $\mathcal{S}_0[\vec{J}, K] = \mathcal{S}[z_0, \sigma_0, \vec{J}, K]$ . Relación que es exacta en el límite  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{Z}[\vec{J}, K] = i \mathcal{S}_0[\vec{J}, K]. \quad (1.18)$$

## 1.2 El modelo $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$ en el límite de $N$ grande

En particular estamos interesados en el potencial

$$\begin{aligned} N V \left( \frac{1}{N} \vec{\Phi}^2(x) \right) &= N \frac{\lambda}{8} \left( \frac{1}{N} \vec{\Phi}^2 + \frac{2m^2}{\lambda} \right)^2 - \frac{m^4}{2\lambda} + \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} \\ &= \frac{m^2}{2} \vec{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{8N} (\vec{\Phi}^2)^2 + \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\alpha \equiv \text{signo}(m^2) = \pm 1 \quad (1.20)$$

Para este potencial, que tiene

$$V(z) = \frac{\lambda}{8} z^2 + \frac{m^2}{2} z + \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2}; \quad (1.21)$$

la ecuación (1.13) nos da

$$z_0(x) = \frac{2}{\lambda} [\sigma_0(x) + 2K(x) - m^2], \quad (1.22)$$

que nos permite eliminar  $z_0(x)$  en función de  $\sigma_0(x)$ . La ecuación para obtener  $\sigma_0(x)$ , ec. (1.14), pasa a ser

$$i G(x, x; \sigma_0) + \frac{2}{\lambda} [\sigma_0(x) + 2K(x) - m^2] - \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \left[ \int d^4 y G(x, y; \sigma_0) J_a(y) \right]^2 = 0 \quad (1.23)$$

(donde la dependencia de  $G$  en  $\sigma_0$  es funcional).

Para las aplicaciones que trataremos basta considerar el caso  $J_a(x) = J(x)$  para  $a = 1, \dots, N$ . Ahora, vamos a calcular la acción efectiva. Para

ello hemos de hacer una transformada de Legendre de forma que los valores esperados del campo  $\phi(x)$ , y del cuadrado del campo  $\rho(x)$ , pasen a ser las variables funcionales independientes.

$$\begin{aligned}\phi(x) &\equiv \frac{1}{N} \langle \Phi_a(x) \rangle = \frac{1}{iN} \frac{\delta \log \mathcal{Z}[J, K]}{\delta J(x)} = \frac{\delta \mathcal{S}_0[J, K]}{\delta J(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \\ \rho(x) &\equiv \frac{1}{N} \langle \vec{\Phi}^2 \rangle = \frac{1}{iN} \frac{\delta \log \mathcal{Z}[J, K]}{\delta K(x)} = \frac{\delta \mathcal{S}_0[J, K]}{\delta K(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right),\end{aligned}\quad (1.24)$$

se han usado las ecuaciones (1.3), (1.9) y (1.18).

Para hallar  $\frac{\delta \mathcal{S}_0}{\delta J}$ ,  $\frac{\delta \mathcal{S}_0}{\delta K}$  usaremos que  $\mathcal{S}_0[J, K] = \mathcal{S}[z_0[J, K], \sigma_0[J, K], J, K]$  y que  $z_0, \sigma_0$  es un punto de silla de  $\mathcal{S}$  (1.12). Así como la ecuación de  $\mathcal{S}$  (1.11) y (1.22).

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{S}_0}{\delta J(x)} &= \int d^4y \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta z(y)} \right|_{\sigma=\sigma_0} \frac{\delta z_0(y)}{\delta J(x)} + \int d^4y \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma(y)} \right|_{\sigma=\sigma_0} \frac{\delta \sigma_0(y)}{\delta J(x)} + \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta J(x)} \right|_{\sigma=\sigma_0} \\ &= \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta J(x)} \right|_{\sigma=\sigma_0} = \int_{z=z_0} d^4y G(x, y; \sigma_0) J(y).\end{aligned}\quad (1.25)$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}_0}{\delta K(x)} = \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta K(x)} \right|_{\sigma=\sigma_0} = z_0 \quad (1.26)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d^4y G(x, y; \sigma_0) J(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \\ \rho(x) &= z_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{2}{\lambda} [\sigma_0(x) + 2K(x) - m^2] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right).\end{aligned}\quad (1.27)$$

La acción efectiva es

$$\Gamma[\phi, \rho] = \frac{1}{iN} \log \mathcal{Z}[J, K] - \int d^4x [J(x) \phi(x) + K(x) \rho(x)] \quad (1.28)$$

y en el límite de  $N \rightarrow \infty$  está dada por

$$\Gamma[\phi, \rho] = \frac{i}{2} \log \text{Det} \left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho - 2K \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \int d^4x \left[ \frac{\lambda}{8} \rho^2(x) - K(x) \rho(x) - \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} \right] \\
 & - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y G\left(x, y; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho - 2K\right) J(x) J(y), \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

donde hemos usado (1.11), (1.18), (1.22) y (1.27). Usando (1.7) y (1.27) podemos expresar  $J(x)$  en función de  $\phi(x)$  y  $\rho(x)$ ,

$$J(x) = [\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(x) - 2K(x)] \phi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.30)$$

Por lo que la acción efectiva es,

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\phi, \rho] & = \frac{i}{2} \log \text{Det} \left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho - 2K \right] \\
 & + \int d^4x \left[ \frac{\lambda}{8} \rho^2(x) - K(x) \rho(x) - \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} \right] \\
 & - \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(x) - 2K(x) \right] \phi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos  $\phi(x)$  y  $\rho(x)$  se obtienen a partir de la acción efectiva ( $\delta\Gamma/\delta\phi = -J$  y  $\delta\Gamma/\delta\rho = -K$ ),

$$\begin{aligned}
 & \left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(x) - 2K(x) \right] \phi(x) = J(x), \\
 & \frac{i\lambda}{4} G\left(x, x; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho - 2K\right) - \frac{\lambda}{4} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4} \rho(x) - K(x) = -K(x). \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

donde la segunda ecuación es una ligadura para  $\rho(x)$ .

Recordando que tenemos que hacer  $K(x) = 0$  tenemos,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(x) \right] \phi(x) = J(x), \\
 & \frac{i\lambda}{2} G\left(x, x; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(\cdot)\right) - \frac{1}{2} \phi^2(x) + \frac{1}{2} \rho(x) = 0. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

Poniendo las ecuaciones de forma más explícita y usando la definición de la función de Green (1.7),

$$\left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2(x) - \frac{i\lambda}{2} G_s(x, x) \right] \phi(x) = J(x), \quad (1.34)$$

$$\left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2(x) - \frac{i\lambda}{2} G_s(x, x) \right] G_s(x, y) = \delta(x - y). \quad (1.35)$$

$$G_s(x, y) \equiv G(x, y; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(\cdot)). \quad (1.36)$$

### 1.2.1 Soluciones con invariancia translacional

Si consideramos estados con invariancia translacional, las ecuaciones (1.34) se simplifican considerablemente; ya que los campos  $\phi(x)$ ,  $\rho(x)$  sólo dependen del tiempo.

Así podemos desarrollar  $G(x, y; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho)$  en integral de Fourier,

$$G\left(x, y; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho\right) = \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} g_k(t, t') \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (1.37)$$

donde los tiempos  $t$  y  $t'$  son las componentes temporales de  $x$  e  $y$ . La definición de  $G(x, y; \sigma)$ , ec. (1.7), implica que  $g_k(t, t')$  ha de satisfacer la ecuación,

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(t) \right] g_k(t, t') = \delta(t - t'). \quad (1.38)$$

Esta función de Green unidimensional se puede expresar en función de las soluciones de la ecuación homogénea,

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho(t) \right] \varphi_k(t) = 0, \quad (1.39)$$

en la forma:

$$g_k(t, t') = \frac{\varphi_k^<(t_<) \varphi_k^>(t_>)}{W_k} = \begin{cases} \frac{\varphi_k^<(t) \varphi_k^>(t')}{W_k} & \text{para } t < t' \\ \frac{\varphi_k^<(t') \varphi_k^>(t)}{W_k} & \text{para } t > t' \end{cases}, \quad (1.40)$$

donde  $t_< = \min(t, t')$ ,  $t_> = \max(t, t')$  y con  $\varphi_k^<(t)$ ,  $\varphi_k^>(t)$  soluciones independientes de (1.39) siendo  $W_k$  su wronskiano  $W_k \equiv W[\varphi_k^<(t), \varphi_k^>(t)]$ .

Una posible elección es  $\varphi_k^>(t) = [\varphi_k^<(t)]^*$  con la que obtenemos,

$$G\left(x, x; m^2 + \frac{\lambda}{2} \rho\right) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\varphi_k(t)|^2}{W_k}. \quad (1.41)$$

y  $W_k$  imaginario puro.

Así, las ecuaciones (1.34) antes de renormalizarlas pasan a ser,

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi(t)^2 - \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\varphi_k(t)|^2}{W_k} \right] \phi(t) = J \quad (1.42)$$

y las funciones de modo  $\varphi_k(t)$  cumplen,

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi(t)^2 - \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\varphi_k(t)|^2}{W_k} \right] \varphi_k(t) = 0 . \quad (1.43)$$

Hemos obtenido infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para  $\phi(t)$ ,  $\varphi_k(t)$  con  $0 \leq k < \infty$ . (Estas ecuaciones son locales en el tiempo.)

La importancia de estas ecuaciones está en que con ellas se pueden estudiar fenómenos no perturbativos (en el límite de  $N$  grande); ya que en su deducción, el parametro usado para hacer teoría de perturbaciones no ha sido  $\lambda$ , sino  $\frac{1}{N}$ . Ver por ejemplo [12] y [13].

En [9, 10, 14] se puede ver que la aproximación de  $N$  grande a orden dominante resume un conjunto infinito de diagramas (diagramas tipo burbuja).

### 1.3 Funcional de onda

Hay una forma alternativa de hallar las ecuaciones de evolución en el límite de  $N$  grande, que vamos a exponer en esta sección. Consiste en hacer el *ansatz* de tomar un funcional de onda gaussiano y calcular sus ecuaciones de evolución a partir del Hamiltoniano del sistema en el límite de  $N$  grande. Las ecuaciones de evolución son las mismas, pero éste método nos servirá para conocer otros aspectos y entender mejor el significado físico del límite de  $N$  grande.

Consideramos un campo escalar en la representación vectorial de  $O(N)$  con interacción  $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$  [que es invariante  $O(N)$ ] [16, 17, 18]. La acción y la densidad lagrangiana son,

$$S = \int d^4x \mathcal{L} , \quad (1.44)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \vec{\Phi}(x) \right]^2 - \frac{1}{2} m^2 \vec{\Phi}^2 - \frac{\lambda}{8N} \left( \vec{\Phi}^2 \right)^2 - \frac{Nm^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} + \vec{J} \cdot \vec{\Phi} \quad (1.45)$$

$$\alpha \equiv \text{signo}(m^2) = \pm 1 . \quad (1.46)$$

El momento canónico conjugado de  $\vec{\Phi}(x)$  es,

$$\vec{\Pi}(x) = \dot{\vec{\Phi}}(x), \quad (1.47)$$

y el Hamiltoniano,

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla \vec{\Phi}(x)]^2 + \frac{1}{2} m^2 \vec{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{8N} (\vec{\Phi}^2)^2 + \frac{Nm^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} - \vec{J} \cdot \vec{\Phi} \right\}.$$

Nos vamos a limitar (por simplicidad) a estudiar situaciones con invariancia traslacional, *i.e.*, autoestados del operador momento total. En este caso los valores esperados como  $\langle \vec{\Phi}(\vec{x}, t) \rangle$  son independientes de las coordenadas espaciales  $\vec{x}$  y sólo dependen de la temporal.

Las ecuaciones de Heisenberg para el operador campo son

$$\left[ \partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2N} \vec{\Phi}^2(x) \right] \vec{\Phi}(x) = \vec{J} \quad (1.48)$$

Para las aplicaciones que se tratarán basta considerar el caso en que el campo externo  $\vec{J}$  y el valor esperado del campo  $\langle \vec{\Phi} \rangle$  tienen la misma dirección. Por simplicidad elegiremos el primer eje del espacio interno en esa dirección. Así

$$\vec{J} = (\sqrt{N} J, 0, \dots, 0),$$

y para el campo será conveniente hacer la siguiente descomposición

$$\vec{\Phi}(x) = (\sigma(x), \vec{\pi}(x)) = (\sqrt{N}\phi(x) + \chi(x), \vec{\pi}(x)) \quad (1.49)$$

con  $\langle \vec{\pi}(x) \rangle = 0$  donde  $\vec{\pi}$  representa a los  $N - 1$  'piones', y  $\phi(x) = \langle \sigma(x) \rangle$ . Por lo que,  $\langle \chi(x) \rangle = 0$ . Los efectos de las fluctuaciones cuánticas en torno al valor esperado están dominados por la contribución de  $\vec{\pi}$  en el límite de  $N$  grande (siempre que  $\langle \chi^2 \rangle \sim \langle \pi_a^2 \rangle$  o menor, como ocurre en todos los casos que se estudiarán). Por lo que para especificar la parte relevante del estado daremos el valor esperado, su derivada y el funcional de onda para el campo  $\vec{\pi}$  en el instante inicial.

### 1.3.1 El funcional de onda (imagen de Schrödinger)

Consideraremos funcionales de onda gaussianos de la forma [16, 18, 9, 10, 19, 20]

$$\Psi[\vec{\Phi}(., t)] = \mathcal{N}^{1/2}(t) \prod_{\vec{k}} \exp \left[ -\frac{A_{\vec{k}}(t)}{2} \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \right] . \quad (1.50)$$

donde

$$\vec{\pi}_{\vec{k}}(t) = \int d^3x \vec{\pi}(\vec{x}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (1.51)$$

[Por tanto, podemos suponer  $A_{-\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}(t)$  sin pérdida de generalidad]. Como se muestra más adelante, estos funcionales de onda gaussianos son soluciones de las ecuaciones de Schrödinger en el límite  $N \rightarrow \infty$ .

El hamiltoniano (1.48) en el límite de  $N$  grande es principalmente el hamiltoniano de un oscilador armónico con una frecuencia dependiente del tiempo determinada autoconsistentemente:

$$\begin{aligned} H(t) = & NV h_{cl}(t) - \frac{\lambda}{8N} \left( \sum_{\vec{k}} \langle \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \rangle \right)^2 \\ & + \sum_{\vec{k}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \delta \vec{\pi}_{-\vec{k}}} + \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}}^2(t) \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \right] , \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$h_{cl}(t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(t) + \frac{\lambda}{8} \phi^4(t) + \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} - J\phi , \quad (1.53)$$

$$\mathcal{M}_d^2(t) \equiv m^2 + \frac{\lambda}{2} \left[ \phi^2(t) + \frac{1}{N} \langle \vec{\pi}^2(x) \rangle \right] , \quad (1.54)$$

$$\omega_{\vec{k}}^2(t) \equiv k^2 + \mathcal{M}_d^2(t) , \quad (1.55)$$

donde  $h_{cl}(t)$  es el hamiltoniano clásico, y  $\mathcal{M}_d^2$  tiene el papel de una masa efectiva.

La ecuación de Schrödinger funcional es ( $\hbar = 1$ )

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi . \quad (1.56)$$

Más explícitamente,

$$i \dot{\Psi}[\vec{\Phi}] = \left\{ NV h_{cl}(t) - \frac{\lambda}{8N} \left( \sum_{\vec{k}} \langle \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \rangle \right)^2 \right.$$

$$+ \sum_{\vec{k}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \delta \vec{\pi}_{-\vec{k}}} + \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}}^2(t) \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \right] \Psi[\vec{\Phi}], \quad (1.57)$$

de donde vamos a hallar las ecuaciones de evolución para  $A_{\vec{k}}(t)$  y  $\mathcal{N}(t)$ , tomando las derivadas funcionales y comparando potencias de  $\pi_{\vec{k}}$  en ambos lados. Obtenemos, así las siguientes ecuaciones de evolución

$$i\dot{A}_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}^2(t) - \omega_{\vec{k}}^2(t), \quad (1.58)$$

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(0) e^{-i \int_0^t dt' [2NV h_{cl}(t') - \frac{\lambda}{4N} (\sum_{\vec{k}} \langle \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \rangle (t'))^2 + N \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(t')]} , \quad (1.59)$$

con  $A_{\vec{k}}(t) = A_{R\vec{k}}(t) + i A_{I\vec{k}}(t)$ . La dependencia temporal del factor de normalización  $\mathcal{N}(t)$  está totalmente determinada por la de  $A_{\vec{k}}(t)$ , como consecuencia de la unitariedad de la evolución temporal.

Usando la expresion para el funcional de onda (1.50) tenemos,

$$\langle \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{\vec{k}'} \rangle = \langle \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \rangle \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \quad ; \quad (1.60)$$

$$\langle \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \rangle = \frac{\int \int \prod_{\vec{q}} \mathcal{D}\vec{\pi}_{\vec{q}} e^{-A_{R\vec{q}}(t) \vec{\pi}_{\vec{q}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{q}}} (\vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}})}{\int \int \prod_{\vec{q}} \mathcal{D}\vec{\pi}_{\vec{q}} e^{-A_{R\vec{q}}(t) \vec{\pi}_{\vec{q}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{q}}}} = \frac{N}{2 A_{R\vec{k}}(t)}, \quad (1.61)$$

lo que en el límite de volumen infinito nos da siguiente condición de auto-consistencia,

$$\frac{\langle \vec{\pi}^2(x) \rangle}{N} = \frac{1}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \vec{\pi}_{\vec{k}}(t) \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}}(t) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2A_{R\vec{k}}(t)}. \quad (1.62)$$

El valor esperado de la ecuación de movimiento de Heisenberg (1.48) nos da la evolución del parametro de orden  $\phi(t)$  [16]:

$$\ddot{\phi}(t) + m^2 \phi(t) + \frac{\lambda}{2} \left[ \phi^2(t) + \frac{1}{N} \langle \vec{\pi}^2(x) \rangle \right] \phi(t) = J \quad (1.63)$$

donde se ha usado que  $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$  y que  $\langle \vec{\pi}^2 \vec{\pi} \rangle = 0$  (por ser el funcional de onda gaussiano).

Las ecs. (1.58)-(1.59) junto con la ec. (1.63) dan la evolución temporal de ese estado cuántico en el límite de  $N$  grande.

### 1.3.2 Los modos del campo (imagen de Heisenberg)

La ecuación de Ricatti (1.58) se puede linearizar escribiendo  $A_{\vec{k}}(t)$  en función de  $\varphi_{\vec{k}}(t)$  de la forma

$$A_{\vec{k}}(t) = -i \frac{\dot{\varphi}_{\vec{k}}^*(t)}{\varphi_{\vec{k}}^*(t)}, \quad (1.64)$$

se obtienen así las ecuaciones para los modos

$$\ddot{\varphi}_{\vec{k}}^* + \omega_{\vec{k}}^2(t) \varphi_{\vec{k}}^* = 0. \quad (1.65)$$

La relación (1.64) define las funciones de modo  $\varphi_{\vec{k}}$  salvo una constante multiplicativa arbitraria, elegiremos esa constante de forma que el wronskiano tenga el valor,

$$\mathcal{W}_{\vec{k}} \equiv \varphi_{\vec{k}} \dot{\varphi}_{\vec{k}}^* - \dot{\varphi}_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^* = 2i. \quad (1.66)$$

Las funciones  $\varphi_{\vec{k}}$  tienen una interpretación sencilla: obedecen las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para el campo  $\vec{\pi}$  obtenidas del hamiltoniano (1.52). Por tanto, podemos escribir el operador campo de Heisenberg como

$$\vec{\pi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left[ \vec{a}_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_{\vec{k}}^\dagger \varphi_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (1.67)$$

donde  $\vec{a}_{\vec{k}}$ ,  $\vec{a}_{\vec{k}}^\dagger$  son los operadores de creación y aniquilación con las reglas de conmutación canónicas habituales. Por lo que, las funciones  $\varphi_{\vec{k}}(t)$  son las funciones de modo o componentes de Fourier del campo.

De la ec. (1.64) podemos obtener las siguientes relaciones utiles

$$A_{R\vec{k}}(t) = \frac{1}{|\varphi_{\vec{k}}(t)|^2}, \quad A_{I\vec{k}}(t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln |\varphi_{\vec{k}}(t)|^2. \quad (1.68)$$

Usando estas relaciones y la ec. (1.62) podemos expresar las fluctuaciones en términos de las funciones de modo:

$$\frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle(t)}{N} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\varphi_{\vec{k}}(t)|^2. \quad (1.69)$$

## 1.4 Ecuaciones de evolución y condiciones iniciales

Las ecuaciones de evolución para el valor esperado del campo  $\phi(t)$  y para las funciones de modo  $\varphi_k(t)$ , ec. (1.63) y ec. (1.65) respectivamente, son

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \left\{ m_B^2 + \frac{\lambda_B}{2} \left[ \phi^2(t) + \frac{1}{N} \langle \pi^2 \rangle_B(t) \right] \right\} \phi(t) = J, \quad (1.70)$$

$$\frac{d^2\varphi_k(t)}{dt^2} + \left\{ k^2 + m_B^2 + \frac{\lambda_B}{2} \left[ \phi^2(t) + \frac{1}{N} \langle \pi^2 \rangle_B(t) \right] \right\} \varphi_k(t) = 0 \quad (1.71)$$

Hemos visto que la amplitud de las fluctuaciones cuánticas  $\langle \pi^2 \rangle_B(t)/N$  está dada por la ec. (1.69). Esta cantidad es divergente en el límite ultravioleta, por lo que para cancelar la divergencia debemos renormalizar los parámetros y magnitudes del modelo. Esta cuestión se abordará en la sección 1.6. (El subíndice  $B$  se ha explicitado para recalcar que son los parámetros y magnitudes sin renormalizar.)

Para el valor esperado del campo tomaremos condiciones iniciales de la forma,

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = 0, \quad (1.72)$$

ya que siempre podemos conseguir anular  $\dot{\phi}(0)$  con un desplazamiento temporal.

Para las fluctuaciones cuánticas el estado inicial definido por la ec. (1.50) se determina dando  $A_{R\vec{k}}(0)$  y  $A_{I\vec{k}}(0)$  para todo  $\vec{k}$ . Estas condiciones iniciales las parametrizaremos de la forma

$$A_{R\vec{k}}(0) = \Omega_{\vec{k}}, \quad A_{I\vec{k}}(0) = \omega_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}. \quad (1.73)$$

donde  $\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}(0)$  mientras que  $\Omega_{\vec{k}}$  y  $\delta_{\vec{k}}$  son funciones que determinan el estado inicial.

Las condiciones iniciales en las funciones de modo se obtienen a partir de la relación (1.64) y las condiciones iniciales sobre  $A_{\vec{k}}(t)$  más el valor del wronskiano (1.66). Por tanto, las condiciones iniciales para las funciones de modo son:

$$\varphi_{\vec{k}}(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\vec{k}}}}, \quad \dot{\varphi}_{\vec{k}}(0) = -\frac{i\Omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}}}{\sqrt{\Omega_{\vec{k}}}}, \quad (1.74)$$

Para un estado inicial sin partículas ( $\Omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}, \delta_{\vec{k}} = 0$ ), las condiciones iniciales serían:  $\varphi_{\vec{k}}(0) = 1/\sqrt{\omega_{\vec{k}}}$  y  $\dot{\varphi}_{\vec{k}}(0) = -i\sqrt{\omega_{\vec{k}}}$ . Estas fueron las condiciones iniciales usadas en [19, 20, 21, 22].

## 1.5 El tensor energía-momento

En esta sección vamos a calcular el tensor energía-momento, y a partir de su valor esperado en el estado del sistema definiremos la energía y la presión del sistema.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi^a)} \partial^\alpha \phi^a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (1.75)$$

El lagrangiano del sistema está dado por la ec. (1.45), por lo que

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\nu \vec{\Phi} - g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \vec{\Phi} \cdot \partial^\alpha \vec{\Phi} - V(\vec{\Phi}^2) + \vec{J} \cdot \vec{\Phi} \right] . \quad (1.76)$$

Como consideramos estados invariantes bajo traslaciones y rotaciones, el valor esperado de  $T^{\mu\nu}$  toma la forma de un fluido ideal,

$$\langle T^{00} \rangle = E , \quad \langle T^{ij} \rangle = P \delta^{ij} , \quad \langle T^{i0} \rangle = 0 . \quad (1.77)$$

Teniendo en cuenta las descomposiciones

$$\vec{J} = (\sqrt{N}J, 0, \dots, 0) , \quad (1.78)$$

$$\vec{\Phi} = (\sqrt{N}\phi + \chi, \vec{\pi}) , \quad (1.79)$$

con  $\langle \chi \rangle = 0$  y  $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$ ,

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2N} \langle \dot{\vec{\pi}}^2 \rangle + \frac{1}{2N} \langle \vec{\nabla} \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} \vec{\pi} \rangle + \frac{\langle V \rangle}{N} - J\phi + O\left(\frac{1}{N}\right) . \quad (1.80)$$

La expresión para el valor esperado del potencial, se simplifica al tener en cuenta que el estado para el campo  $\vec{\pi}$  es un funcional de onda gaussiano,

$$\frac{\langle V \rangle}{N} = \frac{1}{2} m^2 \left( \phi^2 + \frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N} \right) + \frac{\lambda}{8} \left( \phi^2 + \frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N} \right)^2 + \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right) . \quad (1.81)$$

Usando la expansion del campo  $\vec{\pi}$  en función de sus modos [ec. (1.67)], obtenemos los otros valores esperados

$$\frac{1}{N} \langle \dot{\vec{\pi}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\dot{\varphi}_{\vec{k}}|^2 , \quad (1.82)$$

$$\frac{1}{N} \langle \vec{\nabla} \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^2 |\varphi_{\vec{k}}|^2 . \quad (1.83)$$

Así la energía del sistema es

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} = & \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m^2 \left( \phi^2 + \frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N} \right) + \frac{\lambda}{8} \left( \phi^2 + \frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N} \right)^2 + \frac{m^4}{2\lambda} \frac{1-\alpha}{2} - J\phi \\ & + \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (|\dot{\varphi}_{\vec{k}}|^2 + k^2 |\varphi_{\vec{k}}|^2) . \end{aligned} \quad (1.84)$$

donde  $\langle \vec{\pi}^2 \rangle$  está dado por la ec. (1.69). Para  $J$  independiente del tiempo la invariancia bajo translaciones temporales garantiza que esta energía es una cantidad conservada. Con un cálculo análogo obtenemos para la presión

$$\frac{P}{N} = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ |\dot{\varphi}_{\vec{k}}|^2 + \frac{1}{3} k^2 |\varphi_{\vec{k}}|^2 \right] - \frac{E}{N} . \quad (1.85)$$

Estas expresiones para la energía y la presión son divergentes en el ultravioleta al igual que lo es  $\langle \vec{\pi}^2 \rangle_B$ . En la siguiente sección cuantificaremos estas divergencias, expondremos un esquema de renormalización que las elimina y obtendremos las substracciones que aparecen en estas magnitudes.

## 1.6 Renormalización

Las magnitudes  $\langle \vec{\pi}^2 \rangle$ ,  $\langle \dot{\vec{\pi}}^2 \rangle$  y  $\langle \vec{\nabla} \vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} \vec{\pi} \rangle$  son divergentes en el ultravioleta. Estas magnitudes aparecen en las expresiones de la energía y la presión;  $\langle \vec{\pi}^2 \rangle$  aparece también en la ecuación de movimiento. Regularizaremos las expresiones integrales de estas magnitudes introduciendo un cutoff ultravioleta de regularización  $\Lambda_r$ , lo que hará finitas las integrales, luego veremos que se pueden eliminar las dependencias cuadráticas y logarítmicas en el cutoff renormalizando los parámetros de la teoría. Tras sustraer esos términos podemos hacer el cutoff  $\Lambda_r$  infinito, y las magnitudes que resulten serán finitas y físicas.

Primero obtendremos el comportamiento ultravioleta de los modos. Para ello haremos uso del análisis WBK, expresando los modos del campo  $\varphi_k$  en función de los modos WBK  $D_k$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_k}} [(1 + \gamma_k) D_k(t) + (1 - \gamma_k) D_k^*(t)] \quad (1.86)$$

$$D_k \equiv e^{\int_0^t R_k(t') dt'} \quad (1.87)$$

donde se ha tenido en cuenta que las condiciones iniciales de  $\varphi_k$  para  $k$  grande son las del vacío:  $\varphi_k(0) = 1/\sqrt{\omega_k}$  y  $\dot{\varphi}_k(0) = i\sqrt{\omega_k}$  (esta última fija  $\gamma_k$ ).

Los modos  $D_k$  satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento que los  $\varphi_k$ , lo que implica que  $R_k$  ha de cumplir la ecuación de Riccati

$$\dot{R}_k(t) + R_k^2(t) + k^2 + \mathcal{M}_d^2(t) = 0. \quad (1.88)$$

Para hallar el comportamiento a  $k$  grande desarrollamos  $R_k$  en potencias de  $1/k$

$$R_k(t) = -ik + R_{0,k}(t) - i\frac{R_{1,k}(t)}{k} + \frac{R_{2,k}(t)}{k^2} - i\frac{R_{3,k}(t)}{k^3} + \frac{R_{4,k}(t)}{k^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^5}\right) \quad (1.89)$$

los coeficientes están determinados por la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} R_{0,k} &= 0; \quad R_{1,k} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_d^2(t); \quad R_{2,k} = -\frac{1}{2} \dot{R}_{1,k} \\ R_{3,k} &= \frac{1}{2} \left( \dot{R}_{2,k} - R_{1,k}^2 \right); \quad R_{4,k} = -\frac{1}{2} \left( \dot{R}_{3,k} + 2R_{1,k}R_{2,k} \right). \end{aligned} \quad (1.90)$$

El coeficiente  $\gamma_k$  se obtiene a partir de la condición inicial  $\dot{\varphi}_k(0) = i\sqrt{\omega_k}$  (que es consecuencia de que a  $k$  grande las condiciones iniciales son las del vacío). Así la parte real y la imaginaria de  $\gamma_k$  son

$$\gamma_{Rk} = 1 + \mathcal{O}(1/k^4); \quad \gamma_{Ik} = \mathcal{O}(1/k^3). \quad (1.91)$$

Ahora que ya hemos obtenido el comportamiento a  $k$  grande del modo  $\varphi_k$  basta usar este resultado para obtener el comportamiento ultravioleta de las integrales que queremos regularizar.

$$\begin{aligned} |\varphi_k|^2 &= \frac{1}{k} - \frac{\mathcal{M}_d^2(t)}{2k^2} + \frac{1}{8k^5} \left\{ 3[\mathcal{M}_d^2(t)]^2 + \frac{d^2\mathcal{M}_d^2(t)}{dt^2} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^7}\right), \\ |\dot{\varphi}_k|^2 &= k + \frac{\mathcal{M}_d^2(t)}{2k} - \frac{1}{8k^3} \left\{ [\mathcal{M}_d^2(t)]^2 + \frac{d^2\mathcal{M}_d^2(t)}{dt^2} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^5}\right). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Comenzaremos por  $\langle \vec{\pi}^2 \rangle$  que aparece en las ecuaciones de movimiento

Las condiciones de renormalización se obtienen imponiendo que las frecuencias que aparecen en las ecuaciones de evolución de los modos sean finitas [9, 10, 20]. Lo que nos da la renormalización siguiente

$$m_R^2 = m_B^2 + \lambda_R \frac{\Lambda_r^2}{(4\pi)^2} - \lambda_R m_R^2 \frac{\ln(\Lambda_r/\kappa)}{(4\pi)^2},$$

$$\begin{aligned}\lambda_R &= \lambda_B - \lambda_R \frac{\ln(\Lambda_r/\kappa)}{(4\pi)^2}, \\ \frac{\langle \bar{\pi}^2(t) \rangle_R}{N} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ |\varphi_k(t)|^2 - \frac{1}{k} + \frac{\Theta(k-\kappa)}{2k^3} \mathcal{M}_d^2(t) \right].\end{aligned}\quad (1.93)$$

donde  $\kappa$  es el punto de renormalización, elegiremos  $\kappa = |m_R|$  por simplicidad.

Las expresiones para la energía y la presión renormalizadas son

$$\begin{aligned}\frac{E_R}{N} &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_R^2 \left( \phi^2 + \frac{\langle \bar{\pi}^2 \rangle_R}{N} \right) + \frac{\lambda_R}{8} \left( \phi^2 + \frac{\langle \bar{\pi}^2 \rangle_R}{N} \right)^2 + \frac{m_R^4}{2\lambda_R} \frac{1-\alpha}{2} - J\phi \\ &\quad + \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [|\dot{\varphi}_{\vec{k}}|^2 - \mathcal{S}_1 + k^2 (|\varphi_{\vec{k}}|^2 - \mathcal{S}_2)].\end{aligned}\quad (1.94)$$

$$\frac{P_R}{N} = \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ |\dot{\varphi}_{\vec{k}}|^2 - \mathcal{S}_1 + \frac{1}{3} k^2 (|\varphi_{\vec{k}}|^2 - \mathcal{S}_2) \right] - \frac{E_R}{N},\quad (1.95)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &\equiv k + \frac{\mathcal{M}_d^2(t)}{2k} - \frac{\theta(q-1)}{8k^3} \left\{ [\mathcal{M}_d^2(t)]^2 + \frac{d^2 \mathcal{M}_d^2(t)}{dt^2} \right\}, \\ \mathcal{S}_2 &\equiv \frac{1}{k} - \frac{\mathcal{M}_d^2(t)}{2k^2} + \frac{\theta(q-1)}{8k^5} \left\{ 3[\mathcal{M}_d^2(t)]^2 + \frac{d^2 \mathcal{M}_d^2(t)}{dt^2} \right\},\end{aligned}\quad (1.96)$$

Si  $J$  es independiente del tiempo la energía renormalizada es una cantidad conservada, como se puede comprobar usando las ecuaciones de movimiento.

Para simplificar la notación de aquí en adelante omitiremos el subíndice  $R$  y nos referiremos sólo a los parámetros y magnitudes ya renormalizados.

## 1.7 Adimensionalización

Definimos ahora variables adimensionales eligiendo la masa física en el vacío,  $|m_R|$ , como unidad de masa

$$\begin{aligned}q &\equiv \frac{k}{|m_R|}; \quad \tau \equiv |m_R| t; \quad \eta^2(\tau) \equiv \frac{\lambda_R \phi^2(t)}{2|m_R|^2}; \quad \varphi_q(\tau) \equiv \sqrt{|m_R|} \varphi_k(t); \\ g &\equiv \frac{\lambda_R}{8\pi^2}; \quad \omega_q(\tau) \equiv \frac{\omega_k(t)}{|m_R|}; \quad \Omega_q \equiv \frac{\Omega_k}{|m_R|}; \quad j \equiv \frac{\sqrt{2\lambda}}{2|m_R|^3} J \\ g\Sigma(\tau) &\equiv \frac{\lambda_R}{2|m_R|^2} \langle \bar{\pi}^2 \rangle_R(t); \quad \mathcal{M}^2(\tau) \equiv \frac{\mathcal{M}_d^2(\tau)}{|m_R|^2}; \\ \epsilon &\equiv \frac{\lambda}{2N|m_R|^4} E; \quad p \equiv \frac{\lambda}{2N|m_R|^4} P.\end{aligned}\quad (1.97)$$

En función de las variables adimensionales las ecuaciones de movimiento (1.70)-(1.71) son

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + \alpha + \eta^2(\tau) + g\Sigma(\tau) \right] \eta(\tau) = j, \quad (1.98)$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + q^2 + \alpha + \eta^2(\tau) + g\Sigma(\tau) \right] \varphi_q(\tau) = 0; \quad (1.99)$$

$$\alpha \equiv \text{signo}(m_R^2) = \pm 1, \quad (1.100)$$

$$g\Sigma(\tau) = g \int_0^\infty q^2 dq [|\varphi_q(\tau)|^2 - S_\Sigma], \quad (1.101)$$

$$S_\Sigma \equiv \frac{1}{q} - \frac{\theta(q-1)}{2q^3} \mathcal{M}^2(\tau) \quad (1.102)$$

En estas ecuaciones

$$\mathcal{M}^2(\tau) = \alpha + \eta^2(\tau) + g\Sigma(\tau) \quad (1.103)$$

juega el papel de una masa cuadrado efectiva dependiente del tiempo.

Las condiciones iniciales en variables adimensionales son

$$\eta(0) = \eta_0, \quad \dot{\eta}(0) = 0, \quad (1.104)$$

$$\varphi_q(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_q}}, \quad \dot{\varphi}_q(0) = -\frac{i\Omega_q + \omega_q \delta_q}{\sqrt{\Omega_q}}, \quad (1.105)$$

con

$$\omega_q = \sqrt{q^2 + \mathcal{M}^2(0)}, \quad (1.106)$$

para  $\mathcal{M}^2(0) > 0$ . En el caso de simetría inicialmente rota ( $\mathcal{M}^2(0) < 0$ ) el único cambio es que las frecuencias iniciales  $\omega_q$  se modifican para  $q$  pequeño de la siguiente forma [21]:

$$\omega_q = \begin{cases} \sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} & \text{para } q^2 < 1 + |\mathcal{M}^2(0)| \\ \sqrt{q^2 + \mathcal{M}^2(0)} & \text{para } q^2 > 1 + |\mathcal{M}^2(0)| \end{cases} \quad (1.107)$$

Las expresiones para la energía y la presión adimensionalizadas son

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau) &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} (\eta^2 + g\Sigma) + \frac{1}{4} (\eta^2 + g\Sigma)^2 + \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} - j\eta \\ &+ \frac{g}{2} \int q^2 dq [|\dot{\varphi}_q|^2 - S_1 + q^2 (|\varphi_q|^2 - S_2)], \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned}
(p + \epsilon)(\tau) &= \dot{\eta}^2 + g \int q^2 dq \left[ |\dot{\varphi}_q|^2 - S_1 + \frac{q^2}{3} (|\varphi_q|^2 - S_2) \right]. \quad (1.109) \\
S_1 &\equiv q + \frac{\mathcal{M}^2(t)}{2q} - \frac{\theta(q-1)}{8q^3} \left\{ [\mathcal{M}^2(t)]^2 + \frac{d^2 \mathcal{M}^2(t)}{dt^2} \right\}, \\
S_2 &\equiv \frac{1}{q} - \frac{\mathcal{M}^2(t)}{2q^2} + \frac{\theta(q-1)}{8q^5} \left\{ 3[\mathcal{M}^2(t)]^2 + \frac{d^2 \mathcal{M}^2(t)}{dt^2} \right\},
\end{aligned}$$

Recordemos que si  $j$  es independiente del tiempo la energía es una cantidad conservada.

En [16] se usó una definición diferente para la unidad de masa y para  $\Sigma(\tau)$ . La ventaja de usar  $|m_R|$  es que es independiente del número de partículas inicial; lo que hace que esta elección de expresiones sea mucho más sencilla para los resultados.

## 1.8 Implementación numérica

La implementación numérica del conjunto de infinitas ecuaciones integro-diferenciales acopladas [ec. (1.98)-(1.99)], que dan la evolución del sistema, requiere discretizar tanto el tiempo como el momento.

Para el cálculo numérico de la evolución temporal del sistema se ha usado el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden (se comprobó la independencia de los resultados numéricos respecto al paso temporal).

El cálculo de la evolución temporal requiere evaluar la integral en momento de  $g\Sigma$  a cada instante de tiempo, para ello se introdujo un cutoff numérico en momento  $\Lambda$ , se dividió  $[0, \Lambda]$  en varios intervalos de integración (determinados por el paso de integración elegido), y se calculó la integral usando el algoritmo de Gauss de 16 puntos en cada intervalo de integración (se comprobó la independencia de los resultados numéricos respecto al paso de integración en momento y al cutoff numérico). De la introducción del cutoff numérico  $\Lambda$  resulta la siguiente fórmula para el cálculo de las fluctuaciones cuánticas

$$g\Sigma = \frac{1}{1 - \frac{g}{2} \log \Lambda} \left[ \int_0^\Lambda q^2 dq |\varphi_q|^2 - \frac{g\Lambda^2}{2} + \frac{g \log \Lambda}{2} (\alpha + \eta^2) \right] + O\left(\frac{g}{\Lambda^2}\right). \quad (1.110)$$

La energía y la presión se han calculado usando los mismos métodos numéricos que los descritos para  $g\Sigma$ .

La precisión de los cálculos numéricos se ha controlado comprobando la conservación de la energía y del wronskiano; así como la independencia de los resultados numéricos respecto al paso temporal, al paso de integración en momento y al cutoff numérico en momento  $\Lambda$ .

## 1.9 Conclusiones

En este capítulo hemos visto que la aproximación de  $N$  grande permite tratar la dinámica de los campos cuánticos en el régimen **no** perturbativo.

Se han obtenido las ecuaciones de evolución al orden dominante para  $N$  grande en el modelo  $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$ . Estas ecuaciones de evolución son implementables numéricamente y proporcionan un buen método para estudiar la dinámica no perturbativa de las magnitudes renormalizadas.

Este estudio ha dado lugar a nuevos e importantes resultados, ver por ejemplo [11, 21, 22, 23, 51, 52, 53] y los capítulos 2, 3 y 5 de esta tesis

## 1.A Demostración de algunas relaciones utilizadas

### 1.A.1 Demostración de (1.15)

Usaremos la relación:

$$\frac{\partial \text{Tr}[f(A_\lambda)]}{\partial \lambda} = \text{Tr} \left[ f'(A_\lambda) \frac{dA_\lambda}{d\lambda} \right], \quad (1.111)$$

donde  $f$  es una función y  $A$  un operador que depende de un parámetro  $\lambda$ . (Esta relación es cierta gracias a la ciclicidad de la traza.)

Definiendo el operador:

$$M_\sigma(x, y) = \delta(x - y)[\partial_y^2 + \sigma(y)], \quad (1.112)$$

la función de Green  $G(x, y; \sigma(\cdot))$  es su operador inverso  $M_\sigma^{-1}(x, y)$ , en el sentido de que:

$$\int d^4y M_\sigma(x, y)G(y, z; \sigma(\cdot)) = \delta(x - z). \quad (1.113)$$

Así,

$$\frac{\delta \log \text{Det}[\partial^2 + \sigma(\cdot)]}{\delta \sigma(x)} = \frac{\delta \text{Tr} \log[\partial^2 + \sigma(\cdot)]}{\delta \sigma(x)} = \frac{\delta \text{Tr} \log M_\sigma}{\delta \sigma(x)} \quad (1.114)$$

Usando la relación (1.111)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \text{Tr} \log M_\sigma}{\delta \sigma(x)} &= \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int d^4 y d^4 z \delta(y-z) (\log M_\sigma)(y, z) \\ &= \int d^4 y d^4 z \delta(y-z) \int d^4 u M_\sigma^{-1}(y, u) \frac{\delta M_\sigma}{\delta \sigma(x)}(u, z) \end{aligned} \quad (1.115)$$

Siendo,

$$\frac{\delta M_\sigma(u, z)}{\delta \sigma(x)} = \delta(u-z) \frac{\delta \sigma(z)}{\delta \sigma(x)} = \delta(u-z) \delta(z-x) . \quad (1.116)$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \text{Tr} \log M_\sigma}{\delta \sigma(x)} &= \int d^4 y d^4 z d^4 u \delta(y-z) M_\sigma^{-1}(y, u) \delta(u-z) \delta(z-x) \\ &= M_\sigma^{-1}(x, x) = G(x, x; \sigma(\cdot)) , \end{aligned} \quad (1.117)$$

es decir,

$$\frac{\delta \log \text{Det}[\partial^2 + \sigma(\cdot)]}{\delta \sigma(x)} = G(x, x; \sigma(\cdot)) . \quad (1.118)$$

### 1.A.2 Demostración de (1.16)

La definición de  $G(x, y; \sigma(\cdot))$  (1.7) es,

$$[\partial^2 + \sigma(x)] G(x, y; \sigma(\cdot)) = \delta(x-y) . \quad (1.119)$$

Derivando funcionalmente respecto a  $\sigma(z)$ ,

$$[\partial^2 + \sigma(x)] \frac{\delta G(x, y; \sigma(\cdot))}{\delta \sigma(z)} = -\delta(x-z) G(x, y; \sigma(\cdot)) . \quad (1.120)$$

Resolviendo la ecuación teniendo en cuenta que  $G$  es la función de Green de la ecuación diferencial, (y que si  $G$  se anula en el infinito, también se anula su derivada funcional respecto a  $\sigma$ ).

$$\begin{aligned} \frac{\delta G(x, y; \sigma(\cdot))}{\delta \sigma(z)} &= - \int d^4 u G(x, u; \sigma(\cdot)) \delta(u-z) G(u, y; \sigma(\cdot)) \\ &= -G(x, z; \sigma(\cdot)) G(z, y; \sigma(\cdot)) . \end{aligned} \quad (1.121)$$



## Capítulo 2

# Evolución de estados tsunami

En este capítulo vamos a estudiar la dinámica (en ausencia de campo externo) de estados con una densidad de energía **no** perturbativa, debida a la presencia de un gran número de partículas; a este tipo de estados se les ha dado el nombre de estados tsunami [17]. (El caso en el que la densidad de energía no perturbativa se debía a un valor elevado del valor esperado del campo ya ha sido estudiado en [21].)

Para este estudio usaremos los métodos descritos en el capítulo anterior. Estos métodos nos permiten calcular la evolución no lineal de las distribuciones de partículas (teniendo en cuenta la interacción entre ellas). Comenzaremos explicitando la definición del número de partículas, lo que nos permitirá reexpresar las condiciones iniciales en función de la distribución del número de partículas (aunque veremos que no determina completamente el estado inicial). A continuación introduciremos la aproximación de un modo, gracias a la cual podremos obtener una buena aproximación para la dinámica inicial del sistema. Veremos que la dinámica de estos estados tsunami da lugar a importantes fenómenos físicos: cambio de la masa efectiva debido a que las partículas están en un medio denso, restauración de la simetría, rotura espontánea de la simetría, scaling en las correlaciones.

Consideraremos valores pequeños para la constante de acoplo  $\lambda \ll 1$  para separar más nítidamente las diferentes escalas de tiempo de la evolución.

## 2.1 Definición de número de partículas

Como en una situación con dependencia temporal la definición de número de partículas no es única, elegimos *definir* el número de partículas respecto a los autoestados instantáneos del Hamiltoniano (1.52) en el *instante inicial*, *i.e.*

$$\hat{n}_{\vec{k}} = \frac{1}{N\omega_{\vec{k}}} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \delta\vec{\pi}_{-\vec{k}}} + \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}}^2 \vec{\pi}_{\vec{k}} \cdot \vec{\pi}_{-\vec{k}} \right] - \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

donde  $\omega_{\vec{k}}$  es la frecuencia (1.55) evaluada en  $t = 0$ .

El valor esperado de este operador número tras la evolución temporal es

$$n_{\vec{k}}(t) = \langle \Psi | \hat{n}_{\vec{k}} | \Psi \rangle = \frac{[A_{R\vec{k}}(t) - \omega_{\vec{k}}]^2 + A_{I\vec{k}}^2(t)}{4\omega_{\vec{k}} A_{R\vec{k}}(t)} = \frac{\Delta_{\vec{k}}^2(t) + \delta_{\vec{k}}^2(t)}{4[1 + \Delta_{\vec{k}}(t)]}, \quad (2.2)$$

donde  $\Delta_{\vec{k}}(t)$  y  $\delta_{\vec{k}}(t)$  están definidas a través de las relaciones,

$$A_{R\vec{k}}(t) = \omega_{\vec{k}} [1 + \Delta_{\vec{k}}(t)] \quad , \quad A_{I\vec{k}}(t) = \omega_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}(t). \quad (2.3)$$

En términos de las funciones de modo  $\varphi_{\vec{k}}(t)$  y de  $\dot{\varphi}_{\vec{k}}(t)$ , el valor esperado del operador número está dado por

$$n_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{4\omega_{\vec{k}}} \left[ |\dot{\varphi}_{\vec{k}}(t)|^2 + \omega_{\vec{k}}^2 |\varphi_{\vec{k}}(t)|^2 \right] - \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Para simetría inicialmente rota las frecuencias en la ec. (2.1) se modificaron para  $k$  pequeño según la siguiente ecuación [21]

$$\omega_k = \begin{cases} \sqrt{k^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} & \text{para } k^2 < 1 + |\mathcal{M}^2(0)| \\ \sqrt{k^2 + \mathcal{M}^2(0)} & \text{para } k^2 > 1 + |\mathcal{M}^2(0)| \end{cases} \quad (2.5)$$

para que  $\omega_k$  sea real para todo  $k$ .

## 2.2 Condiciones iniciales y ecs. de evolución

Para el valor esperado del campo tomaremos condiciones iniciales de la forma,

$$\phi(0) = \phi_0 \quad , \quad \dot{\phi}(0) = 0, \quad (2.6)$$

ya que siempre podemos conseguir anular  $\dot{\phi}(0)$  con un desplazamiento temporal.

El estado cuántico inicial definido por la ec. (1.50) se determina dando  $A_{R\vec{k}}(0)$  y  $A_{I\vec{k}}(0)$  para todo  $\vec{k}$ ; o equivalentemente usando las relaciones (2.3), dando  $\Delta_{\vec{k}} \equiv \Delta_{\vec{k}}(0)$  y  $\delta_{\vec{k}} \equiv \delta_{\vec{k}}(0)$ .

$$A_{R\vec{k}}(0) = \omega_{\vec{k}} [1 + \Delta_{\vec{k}}] \quad , \quad A_{I\vec{k}}(0) = \omega_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} . \quad (2.7)$$

Podemos invertir la relación (2.2) y expresar  $\Delta_{\vec{k}}(t)$  en función de  $\delta_{\vec{k}}(t)$  y el número de partículas  $n_{\vec{k}}(t)$ ,

$$\Delta_{\vec{k}}(t) = 2 \left[ n_{\vec{k}}(t) \pm \sqrt{n_{\vec{k}}^2(t) + n_{\vec{k}}(t) - \frac{\delta_{\vec{k}}^2(t)}{4}} \right] . \quad (2.8)$$

[Esta fórmula fue obtenida en [16] para el caso particular de  $\delta_{\vec{k}}(t) \equiv 0$ ].

La posibilidad  $\pm$  se debe a que los valores de  $n_{\vec{k}} \neq 0$  y  $\delta_{\vec{k}}$  no fijan completamente el estado inicial para los modos; así, aún fijando  $n_{\vec{k}} \neq 0$  y  $\delta_{\vec{k}}$  quedan dos estados posibles. Llamaremos **caso I** al que corresponde al **signo superior** en la ec. (2.8) y **caso II** al correspondiente al **signo inferior**. Por tanto, podemos expresar las condiciones iniciales en función de la distribución inicial de partículas  $n_{\vec{k}}(0)$ , la fase del funcional de onda  $\delta_{\vec{k}}$  y la elección del signo en la ec. (2.8).

Consideraremos (por simplicidad) distribuciones de partículas con simetría esférica y forma gaussiana

$$n_{\vec{k}}(0) = \frac{\hat{N}_0}{I} \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{\hat{\sigma}^2} \right] , \quad (2.9)$$

donde  $\hat{N}_0$  es el número total de partículas por unidad de volumen y  $I$  es un factor de normalización. Como estamos interesados en estudiar la dinámica no perturbativa del sistema deberemos considerar  $\hat{N}_0 \sim m^3/g$  (ver subsección 2.3.1).

Es decir, la distribución inicial de partículas es una capa esférica de partículas concentrada alrededor de un momento  $k_0$ . Veremos que ya para este problema simplificado la dinámica contiene ingredientes esenciales. [Dentro de este esquema se pueden tratar también distribuciones sin simetría esférica. Simplemente el número de ecuaciones de movimiento se ve elevado a una potencia dos o tres, y las integrales en el momento ec. (1.69) pasan a ser integrales dobles o triples que han de calcularse numéricamente en cada paso temporal.]

Como las condiciones iniciales tienen simetría esférica y las ecuaciones de evolución son invariantes bajo rotaciones, las soluciones tendrán simetría esférica. Por lo que la dependencia en  $\vec{k}$  es únicamente a través de su módulo  $k$ .

Las condiciones iniciales para las funciones de modo se obtienen a partir de la relación (1.64) y las condiciones iniciales (2.7) sobre  $A_k(t)$  más el valor del wronskiano (1.66). Por tanto, las condiciones iniciales en las funciones de modo son:

$$\varphi_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \quad , \quad \dot{\varphi}_k(0) = -\frac{i\Omega_k + \omega_k \delta_k}{\sqrt{\Omega_k}} \quad , \quad (2.10)$$

con  $\Omega_k$  definido por:

$$\Omega_k \equiv A_{Rk}(0) = \omega_k [1 + \Delta_k] \quad . \quad (2.11)$$

Consideraremos condiciones iniciales con

$$\delta_k(0) = 0 \quad . \quad (2.12)$$

(El efecto de tomar  $\delta_k \neq 0$  se discute más adelante.) Vemos entonces a partir de la ec. (2.8) que para modos con un número de ocupación elevado ( $n_k \gg 1$ ), el caso I corresponde a condiciones iniciales con  $|\varphi_k(0)| \ll 1$  y  $|\dot{\varphi}_k(0)| \gg 1$ ; mientras que el caso II corresponde a  $|\varphi_k(0)| \gg 1$  y  $|\dot{\varphi}_k(0)| \ll 1$ . Para más detalles ver secciones 2.3.1 y 2.3.2.

Es decir, el significado físico de los signos  $\pm$  la ec. (2.8) para  $n_k \gg 1$  y  $\delta_k = 0$  es el siguiente. El signo superior (+) corresponde a modos  $k$  iniciales con una amplitud pequeña y una gran velocidad inicial y viceversa para el signo inferior (-).

Cuando la interacción es despreciable durante la dinámica inicial podemos escribir

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \cos(\omega_k t) - i \frac{\sqrt{\Omega_k}}{\omega_k} \sin(\omega_k t)$$

que describe una elipse en el plano complejo  $\varphi_k$  (plano de configuración) [ver fig.2.1]. El cociente de los ejes de la elipse es

$$\frac{\omega_k}{\Omega_k} = \frac{1}{1 + \Delta_k}$$

Este cociente es  $\ll 1$  ( $\gg 1$ ) en el caso I (II) cuando  $n_k \gg 1$  como se deduce de la ec. (2.8) y como se puede ver en la fig.2.1.

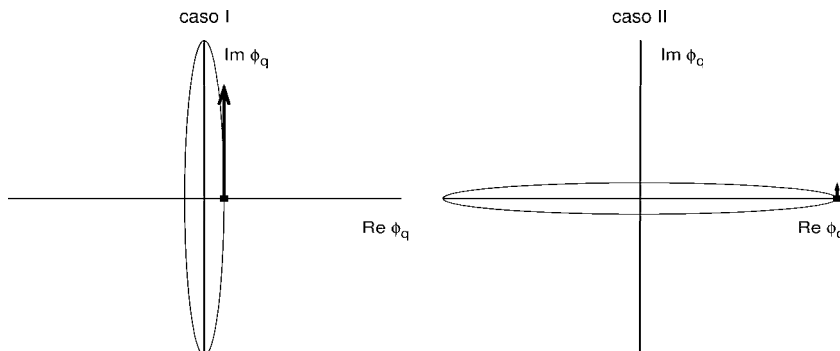


Figura 2.1: Dinámica inicial de las funciones de modo en el plano complejo  $\varphi$  para condiciones iniciales  $n_{\vec{k}} \sim 1/g \gg 1$ ,  $\delta_{\vec{k}} = 0$ . Caso I a la izquierda y caso II a la derecha. El punto y la flecha representan el valor inicial de  $\varphi_k$  y su derivada, respectivamente.

Tomar  $\delta_k \neq 0$  mantiene la elipticidad de la trayectoria, pero la rota en el sentido de las agujas del reloj para  $\delta_k$  creciente.

Para un estado inicial sin partículas ( $\Delta_k = 0$ ,  $\delta_k = 0$ ), las condiciones iniciales serían:  $\varphi_k(0) = 1/\sqrt{\omega_k}$  y  $\dot{\varphi}_k(0) = -i\sqrt{\omega_k}$ . Estas fueron las condiciones iniciales usadas en [19, 20, 21, 22].

Las condiciones iniciales en variables adimensionales para  $\mathcal{M}^2(0) > 0$  son:

$$\eta(0) = \eta_0 \quad , \quad \dot{\eta}(0) = 0 \quad , \quad (2.13)$$

$$\varphi_q(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_q}} \quad , \quad \dot{\varphi}_q(0) = -\frac{i\Omega_q + \omega_q \delta_q}{\sqrt{\Omega_q}} \quad , \quad (2.14)$$

con

$$\begin{aligned} \Omega_q &\equiv \omega_q [1 + \Delta_q] \quad , \quad \omega_q = \sqrt{q^2 + \mathcal{M}^2(0)} \quad , \\ \Delta_q &= 2 \left[ n_q(0) \pm \sqrt{n_q^2(0) + n_q(0) - \frac{\delta_q^2}{4}} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

De (2.9) y (2.12) tenemos

$$\delta_q = 0 \quad , \quad n_q(0) = \frac{N_0}{I} \exp \left[ -\frac{(q - q_0)^2}{\sigma^2} \right] . \quad (2.16)$$

con  $N_0 = \frac{\hat{N}_0}{|m_R|^3}$  y  $\sigma = \frac{\hat{\sigma}}{|m_R|}$ .

Para el caso en el que la simetría está inicialmente rota ( $\mathcal{M}^2(0) < 0$ ), el único cambio es que para las condiciones iniciales anteriores las frecuencias iniciales  $\omega_q$  se modifican para  $q$  pequeño de la forma indicada en la ec. 2.5.

Las ecuaciones de evolución son las ecs. (1.98)-(1.101) particularizadas para  $j = 0$ .

## 2.3 Dinámica inicial

Vamos a estudiar la dinámica de una distribución estrecha de partículas  $n_q(0)$  centrada en  $q = q_0$ . Como veremos podemos aproximar la dinámica inicial usando un **solo** modo  $\varphi_{eff}(\tau)$ . Resolveremos la evolución temporal de  $\varphi_{eff}(\tau)$  que quedará expresado en términos de funciones elípticas. Se compararán estos resultados analíticos con la solución numérica del sistema completo de ecuaciones (1.98)-(1.101).

Para  $m_R^2 < 0$ , sólo consideraremos distribuciones centradas en  $q_0$  con  $q_0^2 > 2$ . Por lo que estarán claramente fuera de posibles bandas de inestabilidad espinodal.

Por simplicidad, consideraremos  $\eta_0 = 0$  en esta sección y en las secciones 2.4, 2.5 y 2.6,

### 2.3.1 Caso I [ $g\Sigma(0) \simeq 0$ ]

Para este caso tenemos:  $\Delta_q = 2 \left[ n_q(0) + \sqrt{n_q^2(0) + n_q(0)} \right]$ .

Vemos de la ec. (2.15) que los modos con  $n_q(0) \ll 1$  tienen  $\Omega_q \simeq \omega_q$ . Por lo que  $\varphi_q(0)$  y  $\dot{\varphi}_q(0)$  son de orden  $g^0$  [ver ec. (2.14)]. Por tanto, sus contribuciones a  $g\Sigma(\tau)$  serán de orden  $g$  para el intervalo de tiempo inicial.

Por otro lado, para los modos con  $n_q(0) = O(1/g)$  (como  $g \ll 1$  implica  $n_q(0) \gg 1$ ) tenemos

$$\Delta_q \simeq 4 n_q(0) \gg 1 \quad , \quad \Omega_q \simeq 4 \omega_q n_q(0) \gg 1 . \quad (2.17)$$

Así, las ecs. (2.14) implican que estos modos tienen  $|\varphi_q(0)| \ll 1$ . Resultando

$$g\Sigma_I(0) = O(g) . \quad (2.18)$$

$$\mathcal{M}^2(0) = \alpha + O(g) = \pm 1 + O(g) . \quad (2.19)$$

donde  $\alpha = \text{signo}(m_R^2) = \pm 1$ .

Para estos modos con  $n_q(0) = O(1/g)$ ,  $|\dot{\varphi}_q(0)| \gg 1$ . Luego, estos modos crecerán y su contribución será la que domine  $g\Sigma(\tau)$  durante la dinámica inicial.

Siempre consideraremos distribuciones con  $n_q(0) = O(1/g)$  para algún intervalo en  $q$ . Por tanto, su contribución a  $g\Sigma(\tau)$  será de orden uno y tendrá un efecto importante en la dinámica. Para estas condiciones, el número total de partículas  $N_0$  por unidad de volumen es también de orden  $O(1/g)$ .

Para las condiciones iniciales consideradas (2.16), los modos dominantes están en un pequeño intervalo centrado en  $q = q_0$ , y están en fase al menos durante un corto intervalo de tiempo. Más precisamente, un modo  $q$  estará en fase mientras que  $(q - q_0)\tau \ll 2\pi$ . Los modos que están en fase contribuyen coherentemente a  $g\Sigma(\tau)$  (cada uno con una contribución proporcional a su número de ocupación).

Así, para  $\tau$  pequeño se puede considerar en buena aproximación que todas las partículas están en un único modo con  $q = q_0$ . Esta aproximación será válida mientras que los modos con números de ocupación elevado se mantengan en fase. En estas condiciones la ec. (1.110) nos da,

$$g\Sigma(\tau) = g q_0^2 |\varphi_{eff}(\tau)|^2 \Delta q + O(g) + O(g\sigma) , \quad (2.20)$$

donde  $\Delta q \approx \sigma$  [ver ec. (2.16)]. Por tanto,

$$\frac{d^2\varphi_{eff}}{d\tau^2} + \omega_{q_0}^2 \varphi_{eff}(\tau) + g \Delta q q_0^2 |\varphi_{eff}(\tau)|^2 \varphi_{eff}(\tau) = 0 , \quad (2.21)$$

con  $\omega_{q_0} = \sqrt{q_0^2 + \alpha}$  [recuerde  $\alpha = \text{signo}(m_R^2) = \pm 1$  y hemos escogido  $q_0^2 > 2$ ]. También tenemos,

$$N_0 = 4\pi q_0^2 \Delta q n_{eff} \quad \Rightarrow \quad \Omega_{eff} = \frac{N_0 \omega_{q_0}}{\pi q_0^2 \Delta q} . \quad (2.22)$$

Resolviendo la ecuación diferencial no lineal (2.21) con las condiciones

iniciales (2.14) y (2.22), obtenemos  $\varphi_{eff}(\tau)$ . De la ec. (2.20),

$$g\Sigma_I(\tau) = (q_0^2 + \alpha) \left(1 + \frac{1}{1 - 2k^2}\right) \left[ \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{q_0^2 + \alpha}{1 - 2k^2}} \tau, k\right)} - 1 \right], \quad (2.23)$$

donde  $\operatorname{sn}(z, k)$  es el seno de Jacobi con módulo elíptico

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{g\Sigma_{I \max}}{q_0^2 + \alpha}}\right)}. \quad (2.24)$$

La función (2.23) es positiva y oscila entre cero y

$$g\Sigma_{I \max} = (q_0^2 + \alpha) \left[ \sqrt{1 + \frac{2gN_0}{\pi (q_0^2 + \alpha)^{3/2}}} - 1 \right], \quad (2.25)$$

con periodo

$$T = 2\sqrt{\frac{1 - 2k^2}{q_0^2 + \alpha}} K(k), \quad (2.26)$$

donde  $K(k)$  es la integral elíptica completa de primera especie. [Notar que la ec. (2.24) implica  $1 - 2k^2 > 0$ ].

Siempre que la distribución inicial no sea muy ancha, la amplitud de la solución numérica está bien reproducida por la solución elíptica (2.23) hasta que el amortiguamiento se hace importante. El periodo de oscilación está bien predicho por la ec. (2.23) para tiempos más largos que la amplitud. [Ver fig. 2.2]. En la solución numérica de las ecuaciones exactas (1.98)–(1.101) vemos que las oscilaciones de  $g\Sigma(\tau)$  se amortiguan de forma significativa tras unos pocos periodos.

La integral en  $q$  para  $g\Sigma(\tau)$  [ec. (1.101)] se amortigua con el paso del tiempo debido a la **perdida de coherencia** entre los diferentes modos  $q$  del pico de la distribución. Cuando la decoherencia es grande podemos aplicar la aproximación adiabática (ver apéndice 2.A), y obtenemos que en el límite de tiempo infinito,  $g\Sigma(\tau)$  tiende a  $g\Sigma_{I \max}/2$ .

La escala de tiempo en que las soluciones numérica y analítica comienzan a diferir en amplitud, depende esencialmente de la anchura  $\sigma$  de la distribución inicial. Cuanto más pequeño es  $\sigma$ , más tiempo la solución analítica

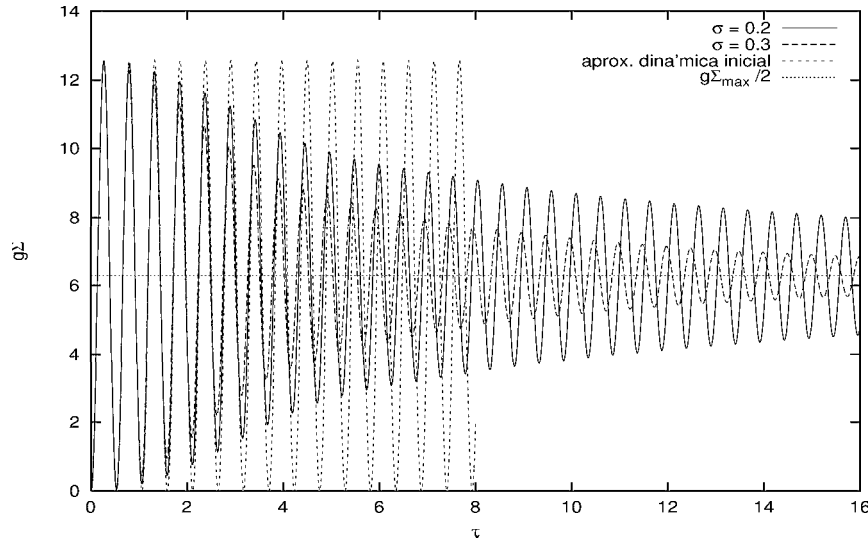


Figura 2.2: Caso I.  $m_R^2 > 0$ .  $g\Sigma(\tau)$  en función de  $\tau$ . Simetría no rota,  $gN_0 = 250$ ,  $q_0 = 5$ ,  $\eta_0 = 0$ ,  $g = 10^{-7}$ . Comparación entre los resultados numéricos y la aproximación para la dinámica inicial (2.23).

(2.23) es válida. Ver fig. 2.2. Esto se debe a que la ec. (2.23) da  $g\Sigma(\tau)$  a orden cero en  $\sigma$ , mientras que el amortiguamiento de las oscilaciones está dado por órdenes superiores en  $\sigma$ .

Hemos visto además, a partir de la resolución numérica que la dinámica inicial depende de  $g$  sólo a través de  $gN_0$  como predicen las ecs. (2.23)-(2.25).

Las oscilaciones de  $g\Sigma(\tau)$  pueden dar lugar a resonancias paramétricas. Cuando hay creación de partículas debido a una resonancia paramétrica, se aniquilan partículas del pico inicial de la distribución (para conservar la energía total). Esto reduce la contribución del pico inicial de partículas a  $g\Sigma(\tau)$  mientras que las oscilaciones debidas a las partículas creadas dan una nueva contribución a  $g\Sigma(\tau)$ . Estas oscilaciones se deben a la coherencia entre las partículas creadas.

Estos cambios en la distribución de partículas influyen el valor asintótico de  $g\Sigma(\tau)$  para tiempos grandes. La resonancia paramétrica se para debido a la amortiguación de las oscilaciones; al contrario de lo que sucede para condiciones iniciales de vacío, para las que la resonancia paramétrica se paraba debido a la retroalimentación de las partículas creadas (ver refs. [19, 20]). Por lo tanto, para  $g$  pequeño la influencia de las resonancias paramétrica

está altamente suprimida. Si por el contrario las resonancias paramétricas son apreciables, la dinámica depende explícitamente de  $g$  y *no sólo* a través de la combinación  $gN_0$ .

En el caso I, como  $\mathcal{M}^2(0) = \alpha = \text{signo}(m_R^2) = \pm 1$ . La simetría está inicialmente espontáneamente rota si y sólo si  $m_R^2$  (la masa cuadrado a nivel árbol) es negativa.

### 2.3.2 Caso II [ $g\Sigma(0) = g\Sigma_{max}$ ]

Para este caso:  $\Delta_q = 2 \left[ n_q(0) - \sqrt{n_q^2(0) + n_q(0)} \right]$ .

Como en el caso I, inicialmente  $g\Sigma(\tau)$  está dominada por los modos con número de ocupación elevado, que inicialmente están todos en fase debido a las condiciones iniciales (2.16). Así, podemos usar la misma aproximación que el caso I, y considerar que todas las partículas están en un único modo con  $q = q_0$ .

Para los modos con  $q \simeq q_0$  tenemos  $n_q(0) = O(1/g) \gg 1$  y

$$\Delta_q \simeq -1 + \frac{1}{4n_q(0)} \quad , \quad \Omega_q \simeq \frac{\omega_q}{4n_q(0)} \ll 1 \quad . \quad (2.27)$$

Por lo que para  $\tau = 0$ ,

$$g\Sigma_{II}(0) = \frac{gN_0}{\pi \omega_{q_0}} + O(g) + O(g\sigma) \quad , \quad (2.28)$$

$$\mathcal{M}^2(0) = \alpha + g\Sigma_{II}(0) \quad , \quad (2.29)$$

donde  $\alpha = \text{signo}(m_R^2) = \pm 1$ .

La ec. (2.28) es una ecuación de tercer grado en  $g\Sigma_{II}(0)$ , ya que  $\omega_{q_0} = \sqrt{q_0^2 + \alpha + g\Sigma_{II}(0)}$ . La solución explícita está dada en el apéndice 2.D. En los casos límite tenemos

$$\begin{aligned} g\Sigma_{II}(0) \quad gN_0 \gg (q_0^2 + \alpha)^{3/2} & \quad \left( \frac{gN_0}{\pi} \right)^{2/3} - \frac{1}{3}(q_0^2 + \alpha) + \mathcal{O} \left( \frac{q_0^2 + \alpha}{gN_0} \right)^{2/3} \\ g\Sigma_{II}(0) \quad gN_0 \ll (q_0^2 + \alpha)^{3/2} & \quad \frac{gN_0}{\pi \sqrt{q_0^2 + \alpha}} + \mathcal{O} \left( \frac{gN_0}{q_0^2 + \alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Inicialmente la ec. (1.110) es

$$g\Sigma(\tau) = g q_0^2 \Delta q |\varphi_{eff}(\tau)|^2 + O(g) + O(g\sigma) \quad . \quad (2.31)$$

Por lo que

$$\frac{d^2 \varphi_{eff}}{d\tau^2} + (q_0^2 + \alpha) \varphi_{eff}(\tau) + g q_0^2 \Delta q |\varphi_{eff}(\tau)|^2 \varphi_{eff}(\tau) = 0, \quad (2.32)$$

Usando las condiciones iniciales dadas por (2.14) y  $\delta_{eff}(0) = 0$ , de (2.27) obtenemos,

$$\Omega_{eff} = \frac{\pi q_0^2 \Delta q \omega_{q_0}}{N_0}, \quad (2.33)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $n_{eff} = \frac{N_0}{4\pi q_0^2 \Delta q}$ .

Así, la solución de la ec. (2.32) con las condiciones iniciales especificadas es

$$\begin{aligned} g\Sigma_{II}(\tau) &= g\Sigma_I(\tau + T/2) \\ &= (q_0^2 + \alpha) \left(1 + \frac{1}{1 - 2k^2}\right) \left[ \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{q_0^2 + \alpha}{1 - 2k^2}}(\tau + T/2), k\right)} - 1 \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $\operatorname{sn}(z, k)$  es el seno de Jacobi,  $T$  el periodo real

$$T = 2\sqrt{\frac{1 - 2k^2}{q_0^2 + \alpha}} K(k),$$

$K(k)$  la integral elíptica completa de primera especie y

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{g\Sigma_{II\max}}{q_0^2 + \alpha}}\right)}. \quad (2.35)$$

La expresión para  $g\Sigma_{II\max}$  es en este caso

$$g\Sigma_{II\max} = g\Sigma_{II}(0) = \frac{gN_0}{\pi \sqrt{q_0^2 + \alpha + g\Sigma_{II}(0)}}. \quad (2.36)$$

Nótese que la relación  $g\Sigma_{II}(\tau) = g\Sigma_I(\tau + T/2)$  es cierta para valores fijos de  $q_0$ ,  $\alpha$  y  $k$ .  $g\Sigma(\tau)$  oscila entre cero y  $g\Sigma_{II\max}$ . Mientras que la masa efectiva

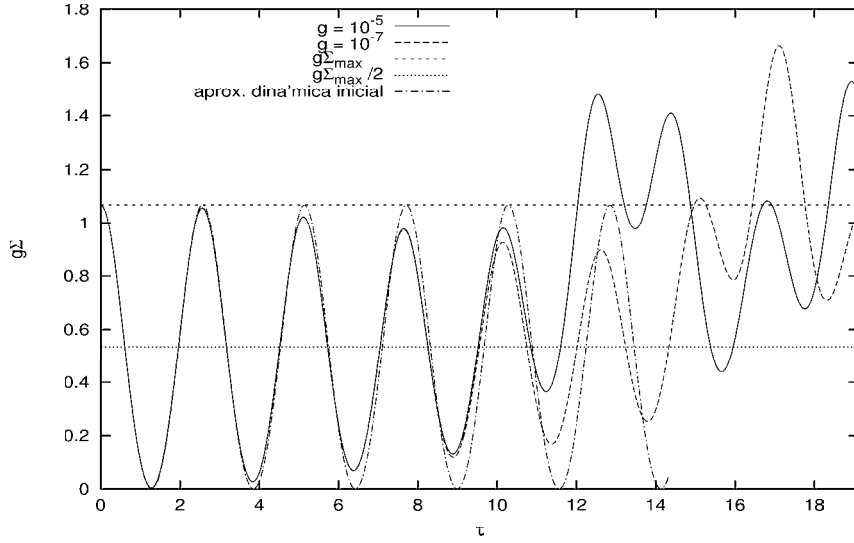


Figura 2.3: Caso II.  $m_R^2 < 0$ .  $g\Sigma(\tau)$  en función de  $\tau$ . Rotura dinámica de simetría,  $gN_0 = 4.478$ ,  $q_0 = 1.3083$ ,  $\sigma = 0.05233$ ,  $\eta_0 = 0$ . Comparación entre los resultados numéricos y la aproximación para la dinámica inicial (2.34).  $g\Sigma(\tau)$  tiende asintóticamente a 1, luego  $\mathcal{M}_\infty^2 = 0$  [ver fig. (2.6)].

$\mathcal{M}^2(\tau)$  oscila entre su valor inicial  $\mathcal{M}^2(0) = \pm 1 + g\Sigma_{II\max}$  y su valor a nivel árbol  $\pm 1$  (en los mínimos de  $g\Sigma(\tau)$ ).

Esta aproximación nos da correctamente la amplitud de la primera oscilación y el periodo de oscilación (ver figs. 2.2 y 2.3); pero no el amortiguamiento de las oscilaciones que se debe al desfase entre los modos dominantes en la distribución inicial de partículas. Como en el caso I, cuanto más ancha es la distribución inicial de partículas, más rápido es el desfase y mayor el amortiguamiento. Por lo que, cuanto más pequeño es  $\sigma$  (la anchura de la distribución inicial de partículas), más tiempo es válida la solución (2.34) obtenida con la aproximación de un solo modo (ver figuras 2 y 3). Recordemos que el amortiguamiento de las oscilaciones está dado por órdenes superiores en  $\sigma$  mientras que la ec. (2.34) da  $g\Sigma(\tau)$  a orden cero en  $\sigma$ . Estos órdenes superiores en  $\sigma$  romperán también la relación:  $g\Sigma_{II}(\tau) = g\Sigma_I(\tau + T/2)$ ; que hemos encontrado a orden cero.

En el caso II,  $\mathcal{M}^2(0) = \alpha + g\Sigma_{II\max}$ . [Recordemos  $\alpha = \text{signo}(m_R^2) = \pm 1$ .] Como  $g\Sigma_{II\max} \geq 0$ , para  $m_R^2 > 0$  la simetría *no* está inicialmente rota. Por el contrario, para  $m_R^2 < 0$ , la simetría *no* está rota si  $g\Sigma_{II\max} > 1$ ; pero para  $g\Sigma_{II\max} < 1$  la simetría está inicialmente rota espontáneamente.

## 2.4 Dinámica a tiempos intermedios y grandes

En esta sección trataremos la dinámica a tiempos intermedios y grandes de las fluctuaciones cuánticas y de la masa cuadrado efectiva. Con tiempos intermedios nos referimos a tiempos menores o del orden del tiempo espinodal o del tiempo de amortiguamiento. Con tiempos grandes nos referiremos a tiempos mayores que el tiempo espinodal y que el tiempo de amortiguamiento. Consideraremos  $\eta_0 = 0$ .

Para un amplio rango de condiciones iniciales los resultados numéricos presentan las siguientes características comunes:

Los valores asintóticos constantes de las magnitudes (masa, presión, número de partículas) dependen de  $g$ , para  $g$  pequeño, sólo a través de la combinación  $gN_0$ . (Salvo cuando la resonancia paramétrica es importante).

La energía se conserva salvo variaciones de uno sobre  $10^7$  confirmando la precisión de los resultados numéricos.

También hemos visto que la masa tiende a su valor asintótico oscilando con una amplitud que decrece al menos como  $\sim 1/\tau$ . Este decrecimiento es similar al que se halló en este modelo para una distribución inicial sin partículas y con  $\eta(0) \neq 0$ , ver ref. [21].

En la sección 2.6 se obtendrá la ecuación de estado.

### 2.4.1 $m_R^2 > 0$ ( $\alpha = +1$ )

Para los casos I y II tenemos,

$$\mathcal{M}^2(\tau) = 1 + g\Sigma(\tau) , \quad (2.37)$$

aunque la expresión de  $g\Sigma(\tau)$  es diferente en cada caso. Como  $g\Sigma(\tau) \geq 0$  la simetría no está **nunca rota**.

Como la resonancia paramétrica es despreciable para acoplamiento débil (que es el considerado aquí) podemos aplicar la aproximación adiabática (ver apéndice 2.A). Por lo que el valor asintótico de  $g\Sigma(\tau)$  es  $\frac{g\Sigma_{max}}{2}$  y la masa cuadrado asintótica tiende a (ver fig. 2.2)

$$\mathcal{M}_\infty^2 = 1 + \frac{g\Sigma_{max}}{2} > 0 . \quad (2.38)$$

Este resultado concuerda bien con los resultados numéricos. La masa tiende a ese valor oscilando con una amplitud que decrece al menos como  $\sim 1/\tau$ .

El pico inicial de la distribución de partículas decrece y se ensancha, y el número total de partículas disminuye ligeramente en comparación con su valor inicial.

$m_R^2 > 0$	Caso I	Caso II
$\mathcal{M}^2(0)$	+1	+1 + $g\Sigma_{II\max}$
simetría inicial	no rota	
$\mathcal{M}_\infty^2$	$+1 + \frac{g\Sigma_{I\max}}{2}$	
simetría asintótica	no rota	

Tabla 2.1: Masa cuadrado efectiva inicial y asintótica para  $m_R^2 > 0$ .

### 2.4.2 $m_R^2 < 0$ ( $\alpha = -1$ )

Tanto para el caso I como para el II tenemos,

$$\mathcal{M}^2(\tau) = -1 + g\Sigma(\tau). \quad (2.39)$$

Recordemos que en el caso I la simetría está inicialmente rota ya que  $\Sigma_I(0) = 0$ . En el caso II,  $\Sigma_{II}(0) = \Sigma_{II\max}$  y la simetría está inicialmente rota (no rota) para  $g\Sigma_{II\max} < 1$  ( $g\Sigma_{II\max} > 1$ ).

Tenemos dos regímenes asintóticos diferentes:

- $\frac{g\Sigma_{\max}}{2} > 1$ : simetría no rota asintóticamente.

$m_R^2 < 0$	Caso I		Caso II		
$\mathcal{M}^2(0)$	-1		$-1 + g\Sigma_{II\ max}$		
simetría inicial	rota		si $g\Sigma_{II\ max} < 1$ rota	si $g\Sigma_{II\ max} > 1$ no rota	
$\mathcal{M}^2_\infty$	si $\frac{g\Sigma_{I\ max}}{2} < 1$ 0	si $\frac{g\Sigma_{I\ max}}{2} > 1$ $-1 + \frac{g\Sigma_{I\ max}}{2}$	si $\frac{g\Sigma_{II\ max}}{2} < 1$ 0	si $\frac{g\Sigma_{II\ max}}{2} > 1$ $-1 + \frac{g\Sigma_{II\ max}}{2}$	
simetría asintótica	rota	no rota	rota		no rota
cambio de simetría	sin cambio	restauración dinámica de simetría	sin cambio	rotura dinámica de simetría	sin cambio

 Tabla 2.2: Masa efectiva y simetría inicial y asintótica para  $m_R^2 < 0$ .

En este régimen los resultados son similares a los de la subsección anterior 2.4.1, con

$$\mathcal{M}^2_\infty = -1 + \frac{g\Sigma_{max}}{2} > 0. \quad (2.40)$$

Numéricamente se obtiene también este valor (ver fig. 2.4).

En este caso para  $g$  pequeño la inestabilidad espinodal no es apreciable. Esto se debe a que  $\mathcal{M}^2(\tau)$  oscila entorno a un valor positivo  $\mathcal{M}^2_\infty$ , aunque para algunos intervalos temporales  $\mathcal{M}^2(\tau) < 0$ .

En este régimen la simetría está **restaurada** para tiempos grandes debido a la presencia de una elevada densidad de partículas.

- $\frac{g\Sigma_{max}}{2} < 1$  simetría rota asintóticamente.

En este régimen para tiempos intermedios (tiempos menores que el tiempo espinodal  $\tau_s$ )  $\mathcal{M}^2(\tau)$  oscila entorno al valor negativo,

$$-\mu^2 = -1 + \frac{g\Sigma_{max}}{2} < 0. \quad (2.41)$$

dando lugar a **inestabilidades espinodales**. (Ver figs. 2.3, 2.5 y 2.6.)

La dinámica es similar a la producida por una masa cuadrado constante negativa  $-\mu^2$ . Es decir, la banda de inestabilidad espinodal está en el intervalo de  $q = 0$  a  $q = \mu$  y el tiempo espinodal  $\tau_s$  es el mismo que para una masa cuadrado constante  $-\mu^2$  (ver apéndice 2.C).

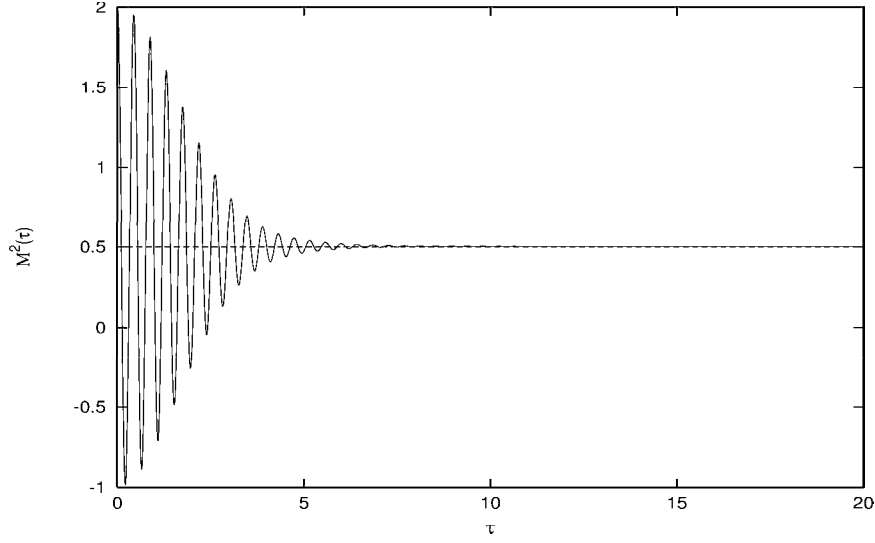


Figura 2.4: Caso II.  $m_R^2 < 0$ .  $\mathcal{M}^2(\tau)$  en función de  $\tau$ . La simetría no está rota.  $gN_0 = 67.96$ ,  $q_0 = 7.071$ ,  $\sigma = 0.4243$ ,  $\eta_0 = 0$ . Así,  $g\Sigma_{II\max} = 3.000$  [ver ec. (2.36)] y  $\mathcal{M}_\infty^2 = -1 + \frac{g\Sigma_{II\max}}{2} = 0.5000$  [ver ec. (2.40)].

Podemos distinguir además:

1. cuando  $g\Sigma_{\max} < 1$ ,  $\mathcal{M}^2(\tau)$  es siempre negativa para tiempos  $\tau < \tau_s$ .
2. cuando  $g\Sigma_{\max} > 1$ ,  $\mathcal{M}^2(\tau)$  puede ser temporalmente positivo debido a las oscilaciones. Esto ocurre en el caso I donde  $\mathcal{M}^2(0) = -1$ .

En el caso II,  $\mathcal{M}^2(0) = -1 + g\Sigma_{\max} > 0$ , pero después de un tiempo del orden de  $T/2$  tenemos  $\mathcal{M}^2(\tau) < 0$ , y  $\mathcal{M}^2(\tau)$  continua oscilando entorno al valor negativo dado por la ec. (2.41). Por lo que **en el caso II hay rotura dinámica de simetría**.

En un tiempo  $\tau_s$  la inestabilidad espinodal ha creado un número suficiente de partículas (del orden de  $1/g$ ) como para que su contribución a  $g\Sigma(\tau)$  sea importante. Eso hace que  $g\Sigma(\tau)$  finalmente oscile entorno a 1. Así,  $\mathcal{M}^2(\tau)$  oscila entorno a cero y la inestabilidad espinodal cesa. El conjunto de partículas creadas por la inestabilidad espinodal es coherente, lo que da lugar a nuevas oscilaciones en  $\mathcal{M}^2(\tau)$ . Estas osci-

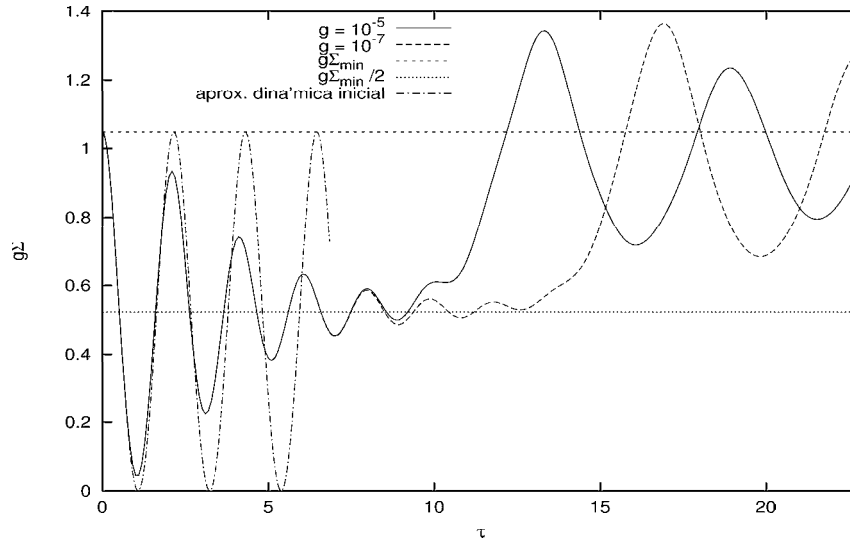


Figura 2.5: Caso II.  $m_R^2 < 0$ .  $g\Sigma(\tau)$  en función de  $\tau$ . Rotura dinámica de simetría,  $gN_0 = 5.101$ ,  $q_0 = 1.5336$ ,  $\sigma = 0.2191$ ,  $\eta_0 = 0$ . Comparación entre los resultados numéricos y la aproximación para la dinámica inicial (2.34).  $g\Sigma(\tau)$  tiende asintóticamente a 1 (no mostrado en la figura).

laciones se amortiguan y la masa cuadrado tiende a su valor asintótico,

$$\mathcal{M}_\infty^2 = 0. \quad (2.42)$$

La anulación de la masa efectiva está acompañada de la presencia de bosones de Goldstone fuera del equilibrio como en las refs. [16, 19, 20].

Las partículas creadas por inestabilidad espinodal permanecen en el intervalo de  $q$  de 0 a  $\mu$ . Esta creación de partículas reduce el pico inicial de partículas manteniendo la energía total conservada.

Para  $\tau < \tau_s$  la dinámica depende de  $g$ , para  $g$  pequeño, sólo a través de la combinación  $gN_0$ . Sin embargo,  $\tau_s$  depende explícitamente de  $g$ .

## 2.5 Energía

Tras renormalizar y tomar un cutoff numérico en momento, la energía en función de las variables adimensionales es [19, 20]

$$E_{ren} = \frac{2|m_R|^4}{\lambda_R} \epsilon,$$

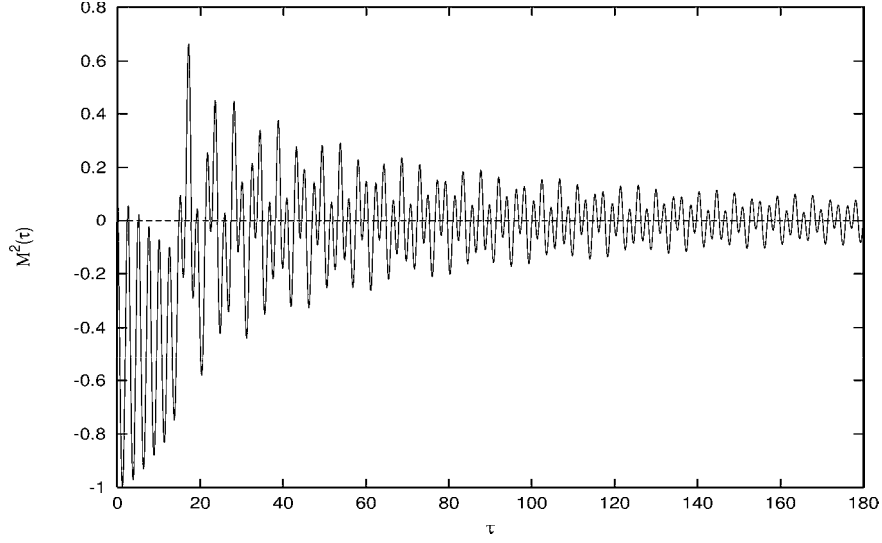


Figura 2.6: Caso II.  $m_R^2 < 0$ .  $\mathcal{M}^2(\tau)$  en función de  $\tau$ . La simetría se rompe dinámicamente.  $gN_0 = 4.478$ ,  $q_0 = 1.3083$ ,  $\sigma = 0.05233$ ,  $\eta_0 = 0$ . (Las mismas condiciones iniciales y  $g$  que en la fig. 2.3.)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^2(\tau) + \frac{\alpha}{2} \eta^2(\tau) + \frac{\lambda}{4} \eta^4(\tau) + \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} \\ &+ \frac{g}{2} \int_0^\Lambda q^2 dq [|\dot{\varphi}_q(\tau)|^2 + \omega_q^2(\tau) |\varphi_q(\tau)|^2] - \frac{1}{4} [g\Sigma(\tau)]^2 + O(g), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde  $\alpha = \text{signo}(m_R^2)$ . Se puede comprobar con las ecuaciones de movimiento (1.98)-(1.101) que la energía se conserva.

Usando las condiciones iniciales (2.13), (2.14), (2.16) y  $\eta_0 = 0$  obtenemos la energía en  $\tau = 0$

$$\epsilon = \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} + \frac{g}{2} \int_0^\Lambda q^2 dq \left( \Omega_q + \frac{\omega_q^2}{\Omega_q} \right) - \frac{1}{4} [g\Sigma(0)]^2 + O(g). \quad (2.44)$$

Esta ecuación da la energía en términos de los datos iniciales.  $\epsilon - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2}$  es siempre positivo porque consideramos  $\eta_0 = 0$  y  $\dot{\eta}_0 = 0$ .

### 2.5.1 Caso I [ $g\Sigma(0) \simeq 0$ ]

Consideremos una distribución de partículas inicial estrecha centrada en  $q = q_0$ . Entonces podremos usar las ecs. (2.17) y (2.44) y considerar todas las

partículas en un solo modo con  $q = q_0$  como en las secciones anteriores. (Recordar que en este caso  $\omega_{q_0}^2 = q_0^2 + \alpha$ .)

La energía está entonces dada por:

$$\epsilon = \frac{gN_0}{2\pi} (q_0^2 + \alpha) + \frac{1}{4} \frac{1 - \alpha}{2} + O(g) + O(g\sigma). \quad (2.45)$$

### 2.5.2 Caso II [ $g\Sigma(0) = g\Sigma_{max}$ ]

Haciendo la misma aproximación [en este caso usando la ec. (2.27)], la energía está dada por:

$$\epsilon = (q_0^2 + \alpha) \frac{g\Sigma_{II}(0)}{2} + \left[ \frac{g\Sigma_{II}(0)}{2} \right]^2 + \frac{1}{4} \frac{1 - \alpha}{2} + O(g) + O(g\sigma), \quad (2.46)$$

donde  $\omega_{q_0}^2 = q_0^2 + \alpha + g\Sigma(0)$ , y  $g\Sigma_{II}(0)$  está dada por la relación (2.28), *i.e.*,  $g\Sigma_{II}(0) = \frac{gN_0}{\pi \sqrt{q_0^2 + \alpha + g\Sigma_{II}(0)}}$ .

### 2.5.3 $g\Sigma_{max}$ en función de la energía

La energía y  $g\Sigma_{max}$  tienen expresiones diferentes para los casos I y II [ver ec. (2.25) *vs.* ec. (2.36)]. Sin embargo, es importante destacar que la expresión de  $g\Sigma_{max}$  en función de la energía es la **misma** para el caso I y el II,

$$g\Sigma_{max} = \sqrt{(q_0^2 + \alpha)^2 + 4 \left( \epsilon - \frac{1}{4} \frac{1 - \alpha}{2} \right)} - (q_0^2 + \alpha). \quad (2.47)$$

Hemos comprobado numéricamente que las ecs. (2.45)-(2.47) son válidas para distribuciones con anchura  $\sigma < 1$ .

## 2.6 Ecuación de estado

En esta sección obtendremos la ecuación de estado (*i.e.* la presión como función de la energía) para tiempos asintóticos. Como mostramos más adelante, la ecuación de estado asintótica **depende del estado inicial**.

Consideraremos  $\eta_0 = 0$  y  $\delta_q = 0$ . Nótese que  $\eta_0 = 0$  y  $\dot{\eta}_0 = 0$  implica  $\eta(\tau) = 0$  para todo  $\tau$ .

### 2.6.1 Regla de suma

Evaluando la energía (2.43) en el límite  $\tau \rightarrow \infty$  obtenemos otra expresión para la energía, usando las ecs. (2.88) y (2.91)

$$\epsilon = \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} + \int_0^\Lambda q^4 dq M_q^2(\infty) + \mathcal{M}_\infty^2 g \Sigma_\infty - \frac{1}{4} (g \Sigma_\infty)^2 + O(g). \quad (2.48)$$

[El término con el coseno en las ecs. (2.88) y (2.91) para tiempos grandes oscila rápidamente con  $q$  y por tanto no contribuye a la integral en  $q$  en el límite de tiempo infinito.]

La ecuación (2.48) nos permite expresar la integral en  $M_q^2(\infty)$  en función de cantidades conocidas: los datos iniciales y  $\mathcal{M}_\infty^2$ ,

$$\int_0^\Lambda q^4 dq M_q^2(\infty) = \epsilon - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} - \mathcal{M}_\infty^2 g \Sigma_\infty + \frac{1}{4} (g \Sigma_\infty)^2 + O(g). \quad (2.49)$$

Esta regla de suma se cumple para  $\eta_0 = 0$  y  $\delta_q = 0$ .

### 2.6.2 Presión y ecuación de estado

La presión renormalizada tiene la expresión

$$P_{ren}(\tau) = \frac{2|m_R|^4}{\lambda_R} p(\tau), \quad (2.50)$$

$$p(\tau) = -\epsilon + \dot{\eta}^2 + g \int_0^\Lambda q^2 dq \left[ |\dot{\varphi}_q(\tau)|^2 + \frac{q^2}{3} |\varphi_q(\tau)|^2 \right] + O(g). \quad (2.51)$$

Análogamente evaluando la presión en el límite de tiempo infinito obtenemos,

$$p_\infty = -\epsilon + \frac{4}{3} \int_0^\Lambda q^4 dq M_q^2(\infty) + \mathcal{M}_\infty^2 g \Sigma_\infty. \quad (2.52)$$

Usando la regla de suma (2.49) y  $\mathcal{M}_\infty^2 = \alpha + g \Sigma_\infty$  obtenemos

$$p_\infty = \frac{1}{3} \epsilon - \frac{\alpha}{3} g \Sigma_\infty - \frac{1}{3} \frac{1-\alpha}{2}. \quad (2.53)$$

[Recordemos que  $\alpha = \text{signo}(m_R^2)$ .]

Consideraremos distribuciones estrechas de partículas centradas en  $q = q_0$ . Para obtener la ecuación de estado, haremos la aproximación de considerar todas las partículas en un solo modo con  $q = q_0$ , y expresaremos la presión en función de la energía.

La ecuación de estado asintótica es **la misma para el caso I y el caso II**. Aunque es distinta para simetría rota y no rota:

1.  $\mathcal{M}_\infty^2 > 0$

En este régimen  $g\Sigma_\infty = \frac{g\Sigma_{max}}{2}$  con  $g\Sigma_{max}$  dado por la ec. (2.47). Por lo que la ecuación de estado (2.53) es

$$p_\infty = \frac{1}{3}\epsilon - \frac{\alpha}{6} \left[ \sqrt{(q_0^2 + \alpha)^2 + 4 \left( \epsilon - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} \right) - (q_0^2 + \alpha)} \right] - \frac{1}{3} \frac{1-\alpha}{2}. \quad (2.54)$$

Esta ecuación da  $p_\infty$  en función de  $\epsilon$  para una distribución inicial centrada en  $q_0$ . Por tanto, la ecuación de estado depende explícitamente de las condiciones iniciales.

Consideremos algunos casos límite

- En el límite  $\epsilon - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} \ll (q_0^2 + \alpha)^2$ , tenemos la ecuación de estado,

$$p_\infty = \frac{1}{3} \left( \epsilon - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} \right) \left( 1 - \frac{\alpha}{q_0^2 + \alpha} \right) - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2}. \quad (2.55)$$

Para  $\alpha = +1$  ( $m_R^2 > 0$ ) esta ecuación se reduce a

$$p_\infty = \frac{\epsilon}{3} \left( 1 - \frac{1}{q_0^2 + 1} \right), \quad (2.56)$$

que interpola entre la ecuación de estado de materia fría (para  $q_0 \ll 1$ ), y la de radiación (para  $q_0 \gg 1$ ).

- En el límite opuesto  $\epsilon - \frac{1}{4} \frac{1-\alpha}{2} \gg (q_0^2 + \alpha)^2 > 1$  tenemos una ecuación de estado de tipo radiación  $p_\infty = \frac{1}{3}\epsilon$ .

2.  $\mathcal{M}_\infty^2 = 0$

Esto sólo ocurre si  $\alpha = -1$  ( $m_R^2 < 0$ ).  $\mathcal{M}_\infty^2 = -1 + g\Sigma_\infty = 0$  implica  $g\Sigma_\infty = 1$  y tenemos una ecuación de estado de tipo radiación,

$$p_\infty = \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.57)$$

La presión es continua en la frontera entre simetría rota y no rota, pero su derivada con respecto a la energía tiene una discontinuidad  $\frac{1}{3} \frac{1}{q_0^2+1}$ . [Ver ec. (2.57) vs. ec. (2.54).]

Vemos que la ecuación de estado está determinada por la energía, el momento  $q_0$  entorno al cual está centrado el pico de partículas inicial y el signo de la masa física en el vacío  $m_R^2$ . Pero **no** depende de si estamos en el caso I o en el II.

	ecuación de estado
$\mathcal{M}_\infty^2 = 0$	$p_\infty = \frac{\epsilon}{3}$
$\mathcal{M}_\infty^2 > 0$ $m_R^2 < 0$	$p_\infty = \frac{\epsilon}{3} + \frac{q_0^2-1}{6} \left[ \sqrt{1 + \frac{4(\epsilon-\frac{1}{4})}{(q_0^2-1)^2}} - 1 \right] - \frac{1}{3}$
$\mathcal{M}_\infty^2 > 0$ $m_R^2 > 0$	$p_\infty = \frac{\epsilon}{3} + \frac{q_0^2+1}{6} \left[ \sqrt{1 + \frac{4\epsilon}{(q_0^2+1)^2}} - 1 \right]$

Tabla 2.3: Ecuación asintótica de estado en diferentes situaciones

## 2.7 El límite de tiempo infinito

La distribución espectral no toma la forma de Bose-Einstein en el límite de tiempo infinito con las ecuaciones de evolución obtenidas para el límite de  $N$  grande. Este era también el caso en las refs. [16, 19, 20, 21, 22].

En las situaciones de alta densidad consideradas aquí y en las refs. [16, 19, 20, 21, 22] los modos cuánticos interaccionan entre ellos para todo tiempo. Pero esta interacción no es suficiente para termalizar el sistema, por lo que quizás el sistema termalize al añadir interacciones subdominantes en el límite  $N$  grande. Eso indica un reciente trabajo [25] en el que se afirma que en  $1+1$  dimensiones para situaciones de alta densidad hay termalización si se incluyen las correcciones  $1/N$ .

También se puede pensar que la falta de termalización asintótica está ligada a la invariancia bajo translaciones de los estados considerados ya que en esta situación hay un número infinito de cantidades conservadas [26]. Entonces, puede ser necesario un tiempo infinito para alcanzar el equilibrio en el límite de  $N$  grande. Es decir el tiempo requerido puede aumentar con  $N$ , y ser infinito para  $N = \infty$ , por lo que quizás podría no ser recuperado por las correcciones  $1/N$ .

Sin embargo, en una teoría clásica de campos con dos campos escalares se ha observado que promediando espacialmente soluciones tipo onda plana se obtienen también distribuciones no térmicas para tiempo infinito [27]. Estas distribuciones recuerdan cualitativamente a las obtenidas en el límite de  $N$  grande [19, 20, 21, 22]. Por otro lado, cálculos cuánticos en  $1+1$  dimensiones con fermiones en estados inhomogéneos han dado distribuciones semejantes a la de Fermi-Dirac [29]. Sin embargo, como se ha destacado en otro contexto, el que la distribución tenga una forma semejante a la de Boltzman, no implica necesariamente que se haya alcanzado el equilibrio térmico [30].

Por último, un modelo puede alcanzar para tiempos grandes un estado estacionario que no sea térmico sino turbulento, como se muestra explícitamente en ref. [28].

La importante cuestión de la termalización o no termalización aun no está resuelta y esperamos tratarla en el futuro.

## 2.8 Funciones de correlación y condensado de Bose

La función de correlación para un tiempo  $\tau$  está dada por

$$\begin{aligned} \langle \eta^a(\vec{r}, \tau) \eta^b(\vec{0}, \tau) \rangle - \langle \eta^a(\vec{r}, \tau) \rangle \langle \eta^b(\vec{0}, \tau) \rangle &= \delta^{a,b} C(\vec{r}, \tau) \\ &= \delta^{a,b} \int \frac{d^3 q}{2(2\pi)^3} |\varphi_q(\tau)|^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Las condiciones iniciales están especificadas por las ecs. (2.13)–(2.16); y ser invariantes bajo rotaciones resulta,

$$C(r, \tau) = \frac{1}{4\pi r} \int_0^\infty q dq |\varphi_q(\tau)|^2 \sin(qr) . \quad (2.59)$$

En esta sección consideraremos  $\eta_0 = 0$  y  $\eta_0 \neq 0$  con  $\eta_0 \ll 1$ .

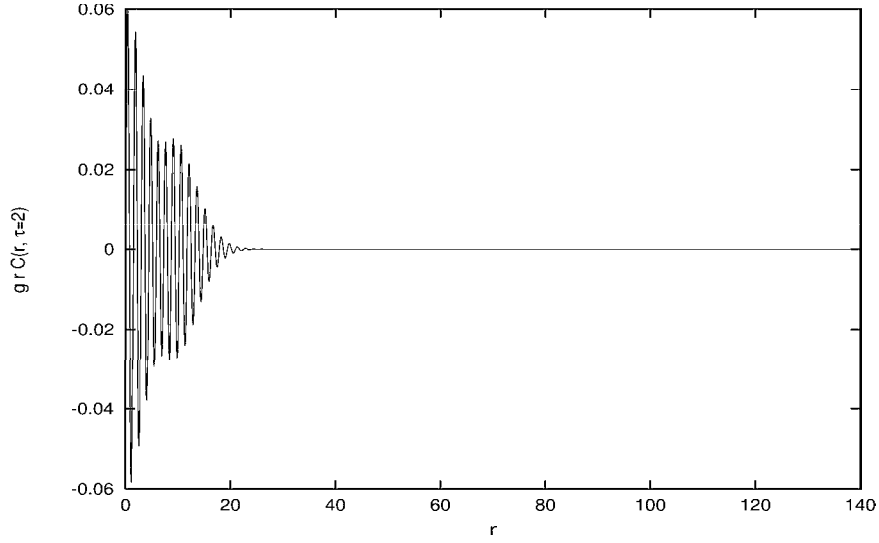


Figura 2.7: Caso I.  $m_R^2 > 0$ . Simetría no rota.  $grC(r, \tau = 2)$  para  $g = 10^{-7}$  y condiciones iniciales:  $\eta_0 = 0$ ,  $gN_0 = 250$ ,  $q_0 = 4.0$ ,  $\sigma = 0.3$ .

### 2.8.1 Dinámica inicial

Se obtienen los mismos resultados para  $\eta_0 = 0$  y para  $\eta_0 \ll 1$ .

#### Caso I [ $g\Sigma(0) \simeq 0$ ]

En  $\tau = 0$  la función de correlación es de orden uno, porque  $|\varphi_q(0)|^2 \leq 1$ . [ $|\varphi_q(0)|^2 \sim 1$  para los modos no ocupados y  $|\varphi_q(0)|^2 \ll 1$  para los modos altamente ocupados, ver ecs. (2.17).] Para los modos altamente ocupados tenemos  $|\dot{\varphi}_q(0)|^2 = O(1/g)$ . Así, para tiempos pequeños  $\tau = \mathcal{O}(1)$  estos modos tendrán  $|\varphi_q(\tau)|^2 = O(1/g)$ . Esto hace que la función de correlación sea de orden  $1/g$  cerca del origen para tiempos pequeños, como vemos en la fig. 2.7.

#### Caso II [ $g\Sigma(0) = g\Sigma_{max}$ ]

En este caso en  $\tau = 0$ , los modos tienen  $|\varphi_q(0)|^2 = O(1/g)$ . Esto hace que la función de correlación sea de orden  $1/g$  cerca del origen para  $\tau = 0$ , como vemos en las figs. 2.10 y 2.12.

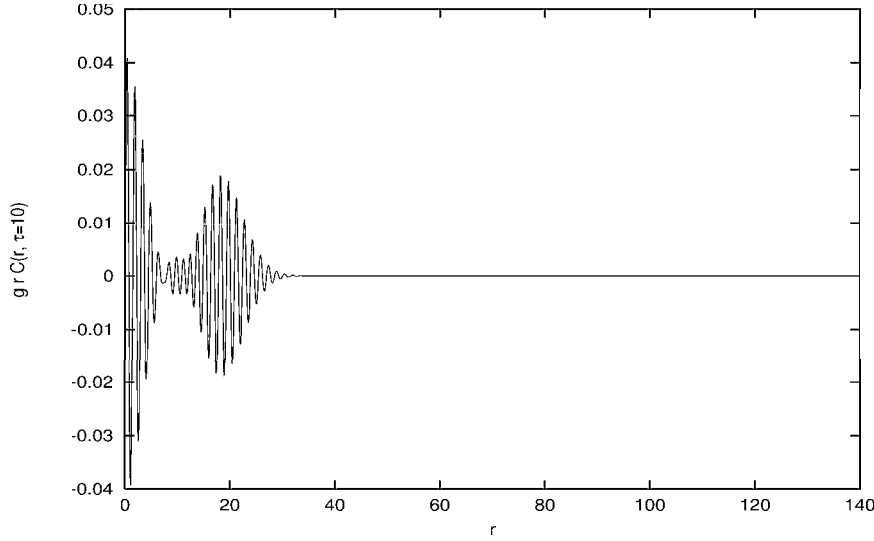


Figura 2.8: Caso I.  $m_R^2 > 0$ . Simetría no rota.  $grC(r, \tau = 10)$  con las mismas  $g$  y condiciones iniciales que en la fig. 2.7 .

## 2.8.2 Dinámica asintótica

El comportamiento asintótico de la correlación depende de si la simetría está dinámicamente rota o no. Sin embargo, el comportamiento es el mismo para el caso I y el II.

Se distinguen dos regímenes:

$$\mathcal{M}_\infty^2 > 0$$

En este régimen tenemos los mismos resultados para  $\eta_0 = 0$  y para  $\eta_0 \ll 1$ .

Observamos que para tiempos intermedios se desarrolla un pulso esférico. Este pulso esférico se propaga con una velocidad radial constante dada por la velocidad de grupo radial para  $q = q_0$  y con una amplitud que decrece con  $1/r$ . La anchura radial del pulso,  $L$ , permanece aproximadamente constante (ver figs. 2.8 y 2.9).

La velocidad de grupo está asintóticamente dada por,

$$v_g = \left. \frac{d\omega_{q\infty}}{dq} \right|_{q=q_0} = \left. \frac{d}{dq} \sqrt{q^2 + \mathcal{M}_\infty^2} \right|_{q=q_0} = \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 + \mathcal{M}_\infty^2}}. \quad (2.60)$$

Recordemos que  $\mathcal{M}_\infty^2 = \alpha + \frac{g\Sigma_{max}}{2} > 1$  [ver ecs. (2.38) y (2.40)]. [ $\alpha = \text{signo}(m_R^2) = \pm 1$ .]

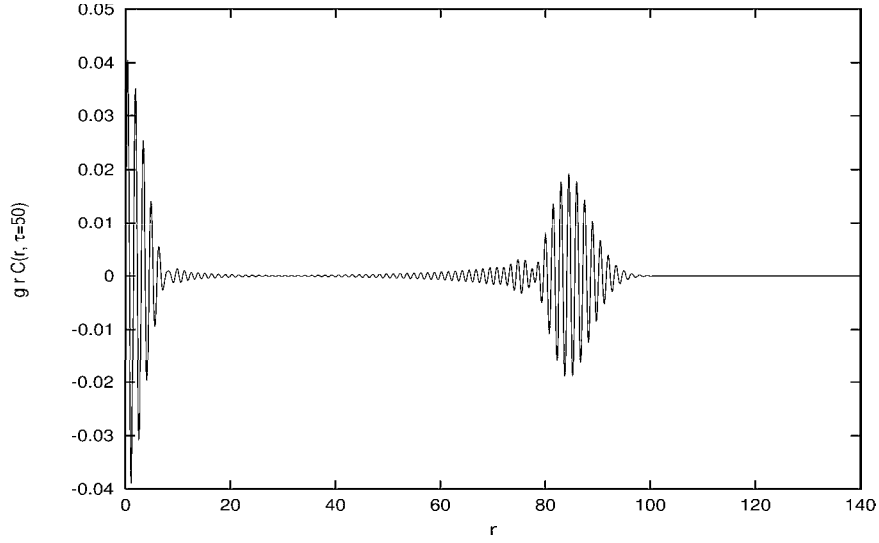


Figura 2.9: Caso I.  $m_R^2 > 0$ . Simetría no rota.  $grC(r, \tau = 50)$  con las mismas  $g$  y condiciones iniciales que en la fig. 2.7 .

Asintóticamente, la función de correlación es la suma de dos términos

$$C(r, \tau) = C_{origen}(r) + C_p(r, \tau) , \quad (2.61)$$

donde  $C_{origen}(r)$  es la función de correlación cerca del origen. Asintóticamente este término es independiente del tiempo.

La contribución del pulso a la función de correlación,  $C_p(r, \tau)$ , tiene aproximadamente la forma asintótica,

$$C_p(r, \tau) = \frac{1}{gr} P(r - 2v_g\tau - c) , \quad (2.62)$$

aquí  $c$  es una constante de orden uno, y  $P(u)$  es de orden  $\mathcal{O}(1)$  sólo para  $-L/2 < u < L/2$  donde  $L$  es la anchura del pulso (*i.e.* el pulso está localizado entorno a  $r \simeq 2v_g\tau + c$ ).

La contribución del pulso proviene de las partículas en la distribución inicial que se propagan de forma efectiva como partículas libres. Esto es así debido a que la masa efectiva en las ecuaciones de movimiento de los modos es asintóticamente constante por lo que los modos se desacoplan entre si de forma efectiva. La contribución del pulso no está presente cuando no hay partículas en el estado inicial [22].

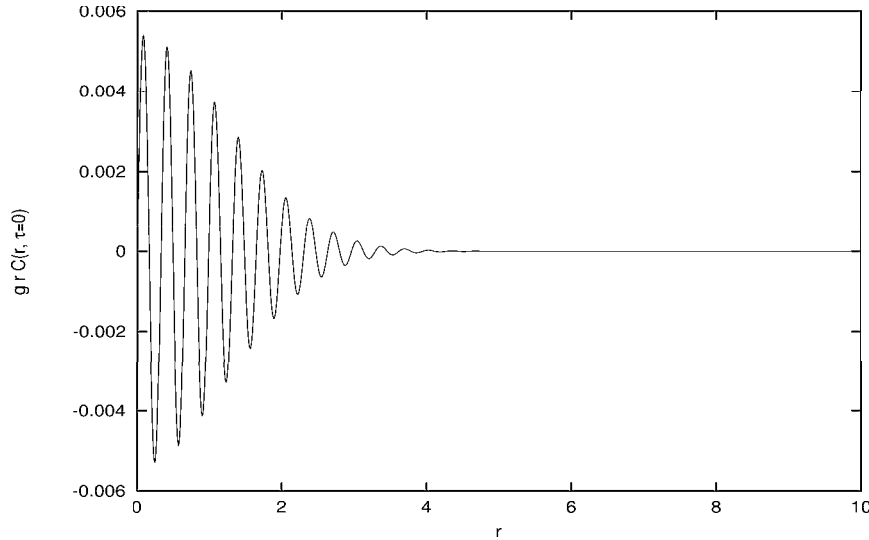


Figura 2.10: Caso II.  $m_R^2 < 0$ . Rotura dinámica de simetría.  $grC(r, \tau = 0)$  para  $g = 10^{-7}$  y condiciones iniciales:  $\eta_0 = 0$ ,  $gN_0 = 4.478$ ,  $q_0 = 1.3083$ ,  $\sigma = 0.07850$ . Para  $r > 5$ , tenemos  $grC(r, \tau = 0) \simeq 0$ .

En resumen, la correlación es de orden  $\mathcal{O}(1/g) \gg 1$  para  $2v_g\tau + c - L/2 < r < 2v_g\tau + c + L/2$  mientras que la causalidad hace que decaiga a valores  $\mathcal{O}(1)$  para  $r > 2v_g\tau + c + L/2$ .

$$\mathcal{M}_\infty^z = 0$$

En este régimen la simetría está rota y ha habido inestabilidades espinodales durante la dinámica inicial.

Como la masa efectiva se anula asintóticamente el modo con  $q = 0$  se comporta de la forma

$$\varphi_0(\tau) \stackrel{\tau \rightarrow \infty}{=} L + K\tau \quad (2.63)$$

La conservación del Wronskiano garantiza que ninguno de los coeficientes complejos  $L$ ,  $K$  se pueden anular [22]. Este crecimiento lineal con el tiempo se puede interpretar como una nueva forma de condensación de Bose-Einstein fuera del equilibrio. Más adelante analizamos la contribución  $C_s(r, \tau)$  de este condensado a la función de correlación.

Hemos estudiado tanto  $\eta_0 = 0$  como  $\eta_0 \neq 0$  (con  $\eta_0 \ll 1$ ).

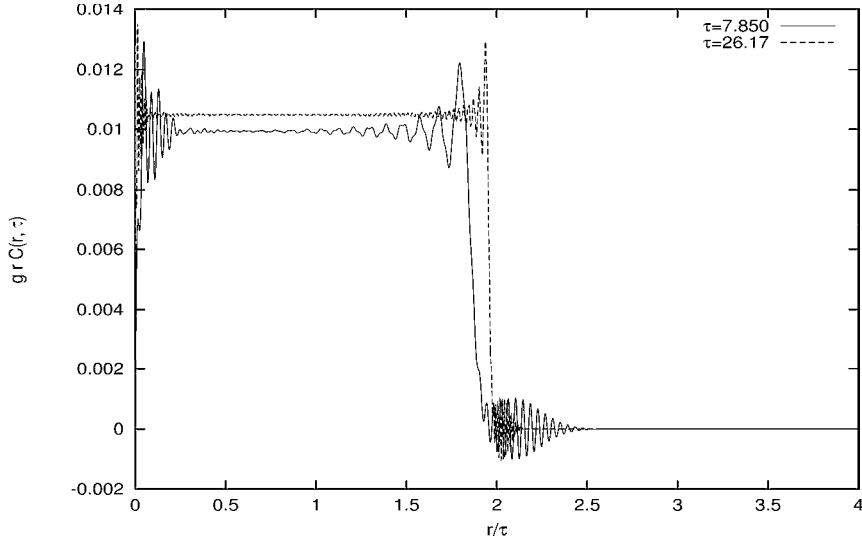


Figura 2.11: Caso II.  $m_R^2 < 0$ . Rotura dinámica de simetría.  $grC(r, \tau)$  para  $\tau = 7.850$  y  $\tau = 26.17$  con las mismas  $g$  y condiciones iniciales que en la fig. 2.10. Vemos que para tiempos grandes  $grC_s(r, \tau) \simeq K \theta(1 - \frac{r}{2\tau})$  [ver ec. (2.66)].

$\eta_0 = 0$ . Para tiempos grandes ( $\tau \gg \tau_s$ ), las partículas creadas por la inestabilidad espínodal dan una contribución  $C_s(r, \tau)$  de orden  $1/g$  a la correlación, donde  $r$  está en el intervalo  $(0, 2\tau)$ . Este término decrece con  $1/r$ .

Hay además una contribución en la correlación debida a un pulso,  $C_p(r, \tau)$ ; está se aleja del origen con velocidad uno (recordar la ec. (2.60) y que  $\mathcal{M}_\infty^2 = 0$ ). Ver figs. 2.10-2.11.

Así, la correlación está dada asintóticamente por

$$C(r, \tau) = C_{origen}(r) + C_s(r, \tau) + C_p(r, \tau) \quad (2.64)$$

$C_{origen}(r)$ , la correlación cerca del origen asintóticamente es independiente del tiempo.

La contribución del pulso,  $C_p(r, \tau)$ , tiene la forma,

$$C_p(r, \tau) = \frac{1}{gr} P(r - 2\tau - c), \quad (2.65)$$

La contribución de las partículas creadas por la inestabilidad espínodal,

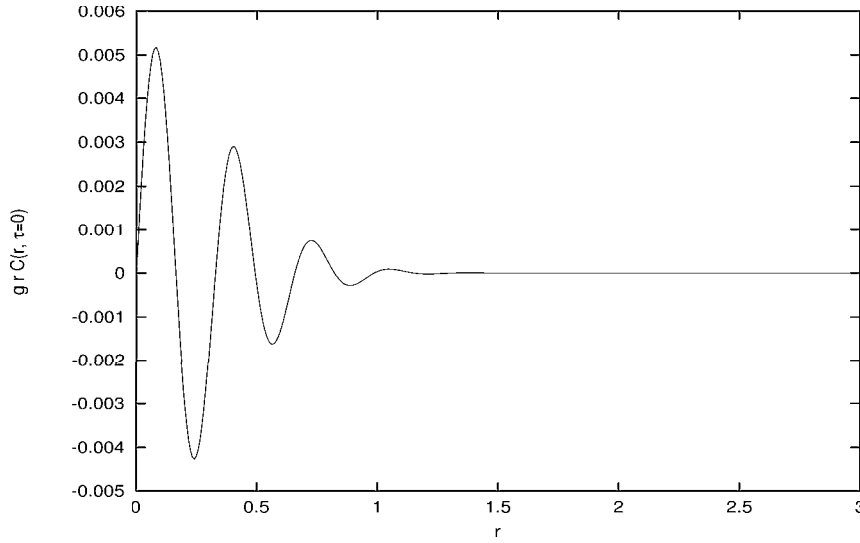


Figura 2.12: Caso II.  $m_R^2 < 0$ . Rotura dinámica de simetría.  $grC(r, \tau = 0)$  para  $g = 10^{-7}$  y condiciones iniciales:  $\eta_0 = 0.2617 \cdot 10^{-5}$ ,  $gN_0 = 4.478$ ,  $q_0 = 1.3083$ ,  $\sigma = 0.2617$ . Para  $r > 1.5$ , tenemos  $grC(r, \tau = 0) \simeq 0$ .

$C_s(r, \tau)$ , es de la forma:

$$C_s(r, \tau) = \frac{K}{gr} Q\left(\frac{r}{2\tau}\right). \quad (2.66)$$

donde  $K$  es una constante y  $Q(u) = \theta(1 - u)$ .

Introduciendo una longitud de correlación dinámica  $\xi(\tau) \sim 2\tau$  y definiendo la variable  $u = \frac{r}{\xi(\tau)}$ ,  $C_s(r, \tau)$  se puede escribir como,

$$C_s(r, \tau) = \frac{K}{gu\xi(\tau)} \theta(1 - u). \quad (2.67)$$

Usando la notación habitual para el régimen de scaling

$$C_s(r, \tau) = \frac{1}{[\xi(\tau)]^{2(1-z)}} I(u), \quad (2.68)$$

con el exponente anómalo  $z = 1/2$  (la dimensión naive de longitud de scaling del campo es 1). En este caso la función de scaling está dada por,

$$I(u) = \frac{K}{gu} \theta(1 - u). \quad (2.69)$$

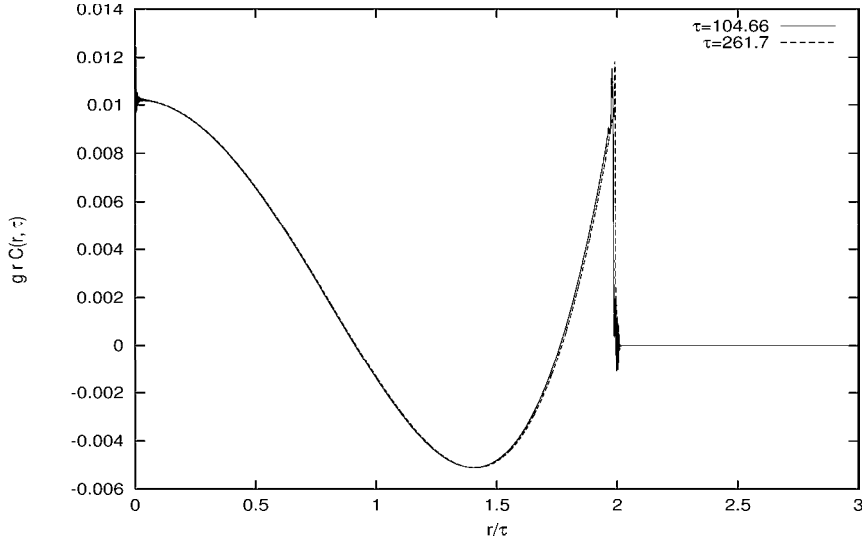


Figura 2.13: Caso II.  $m_R^2 < 0$ . Rotura dinámica de simetría.  $grC(r, \tau)$  para  $\tau = 104.66$  y  $\tau = 261.7$  con las mismas  $g$  y condiciones iniciales que en la fig. 2.12. Para tiempos  $\tau$  tales que  $\eta(\tau) \simeq 0$  vemos que  $grC_s(r, \tau) \simeq K Q_\tau(\frac{r}{2\tau})$  [ver ec. (2.72)].

Un término espinodal análogo  $C_s(r, \tau)$  en la correlación se obtuvo para simetría inicialmente rota y estados iniciales sin partículas [22].

El término espinodal  $C_s(r, \tau)$  se puede interpretar como sigue. Para tiempos  $\tau$  posteriores a  $\tau_s$  hay un condensado de momento cero formado por bosones de Goldstone viajando a la velocidad de la luz en direcciones opuestas. Así, partículas sin masa emitidas desde los puntos  $(0, \tau)$  y  $(r, \tau)$  forman frentes que se propagan, y que en  $\tau$  estarán a una distancia  $\tau - \tau_s$  del origen y de  $r$ , respectivamente. Estos puntos espacio-temporales estarán conectados causalmente para  $2(\tau - \tau_s) \geq r$ . Si no es así  $C_s(r, \tau)$  no será de orden  $1/g$  sino de orden uno.

Una interpretación alternativa de la función paso debida a la causalidad es la siguiente. Desde todos los puntos del condensado se emiten señales que viajan a la velocidad de la luz. Dos puntos  $0$  y  $r$  están conectados causalmente cuando las señales emitidas por cualquier punto llegan a los dos puntos. Esto pasa antes para las señales emitidas por el punto a mitad de camino, en  $r/2$ . Estas señales necesitan un tiempo  $\tau = r/2$  para alcanzar ambos puntos. Por tanto, la correlación sólo será de orden  $1/g$  para  $2\tau > r$ .

La deducción analítica de la ec. (2.69) a partir del comportamiento de

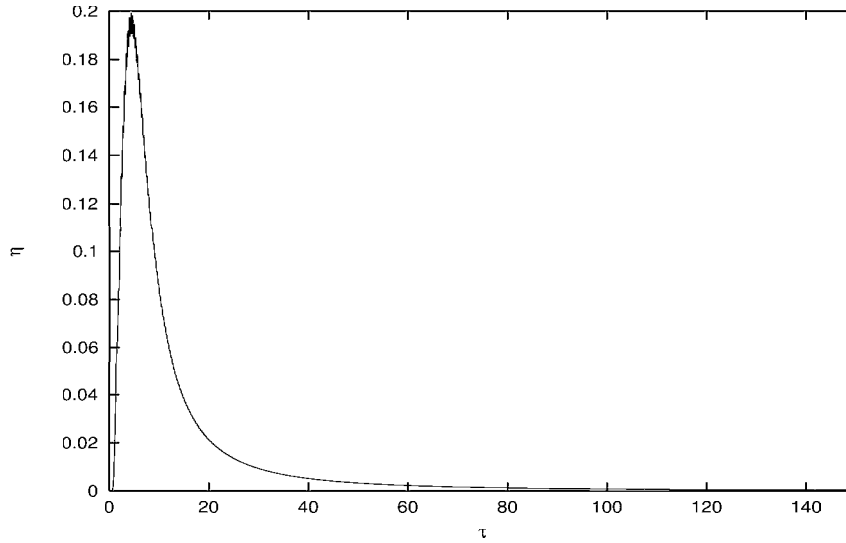


Figura 2.14: Caso II.  $m_R^2 < 0$ . Rotura dinámica de simetría.  $\eta(\tau)$  con las mismas  $g$  y condiciones iniciales que en la fig. 2.12 . Para  $\tau \in [100, 262]$ ,  $\eta(\tau) \simeq 0$ .

los modos a  $q$  pequeño también es válida para los casos considerados aquí.

Por otro lado, nótese que la contribución de scaling a la correlación de los bosones de Goldstone es **diferente** del propagador para partículas sin masa. En este caso hemos observado un decrecimiento de la correlación con la distancia de  $1/r$ , mientras que un campo escalar sin masa decrece como  $1/r^2$ .

$\eta_0 \neq 0$  (con  $\eta_0 \ll 1$ ). Para tiempos grandes ( $\tau \gg \tau_s$ ), las partículas creadas por inestabilidad espinodal dan una contribución  $C_s(r, \tau)$  de orden  $1/g$  a la función de correlación en el intervalo  $0 < r < 2\tau$ . Ver figs. 2.12-2.14.

Asintóticamente la correlación está dada por

$$C(r, \tau) = C_{origen}(r) + C_s(r, \tau) + C_p(r, \tau), \quad (2.70)$$

donde la contribución independiente del tiempo  $C_{origen}(r)$  es la correlación cerca del origen.  $C_p(r, \tau)$  es la contribución del pulso,

$$C_p(r, \tau) = \frac{1}{gr} P(r - 2\tau - c), \quad (2.71)$$

y  $C_s(r, \tau)$  es la contribución de las partículas creadas por la inestabilidad espinodal,

$$C_s(r, \tau) = \frac{1}{[\xi(\tau)]^{2(1-z)}} I_\tau(u), \quad (2.72)$$

con  $\xi(\tau) \sim 2\tau$  la longitud de correlación,  $u = \frac{r}{\xi(\tau)}$ , y  $z = 1/2$ .

Para  $\eta_0 \neq 0$   $I_\tau(u)$  ya no está dado por la ec. (2.69).  $Q_\tau(u) = u I_\tau(u)$  ahora oscila con  $u$ . En un determinado instante  $\tau$ , el número de oscilaciones de  $Q_\tau(u)$  en el intervalo  $0 < u < 1$  es igual al número de oscilaciones que ha tenido el parámetro de orden  $\eta(\tau)$  desde  $\tau = 0$  hasta un tiempo  $\tau$ . Es decir, el scaling existe para  $\eta_0 \neq 0$  en un sentido generalizado ya que la función  $Q_\tau(u)$  cambia cada vez que  $\eta(\tau)$  realiza una oscilación. Esto se debe a la aparición de una escala de longitud extra  $\eta_0$ . Ver figs. 2.12-2.14.

Como en el caso de simetría rota, la contribución del pulso proviene de las partículas de la distribución inicial que asintóticamente se propagan de forma efectiva como si fueran libres.

Tanto para  $\eta_0 = 0$  como para  $\eta_0 \neq 0$  la causalidad hace que la correlación sea  $\mathcal{O}(1)$  para  $r > 2\tau + c$ . Para  $r < 2\tau + c$  la correlación es  $O(1/g) \gg 1$ .

## 2.9 Conclusiones

Hemos estudiado la evolución temporal de estados fuera del equilibrio con una alta densidad de energía en teoría cuántica de campos. Para ello hemos estudiado la dinámica de distribuciones de partículas con forma de capa esférica en el espacio de momentos (tsunami estrecho), dentro de la teoría  $(\vec{\Phi}^2)^2$  en el límite de  $N$  grande.

Hemos explorado numéricamente la dinámica en función del estado inicial y de la masa a nivel árbol. Además se ha encontrado una nueva solución analítica para la dinámica inicial. Esta solución se expresa en términos de funciones elípticas y es válida hasta que los efectos de la decoherencia se hacen importantes. Hay una gran variedad de patrones de evolución que incluye rotura dinámica de la simetría y restauración dinámica de la simetría como se muestra en las tablas 2.1 y 2.2. Otro importante fenómeno físico que tiene lugar es la producción de partículas debida a inestabilidades espinodales.

La gran variedad de evoluciones físicas cubierta proporciona un mecanismo nuevo y no perturbativo para la producción de partículas y la relajación a través de procesos fuera del equilibrio que no pueden ser descritos por una

evolución hidrodinámica. Estos nuevos mecanismos son de potencial interés para la física de colisiones ultrarelativistas de iones pesados.

Especialmente interesante en este contexto es la presencia de comportamientos de scaling generalizado en la función de correlación asintótica como huella de una abundante producción de bosones de Goldstone fuera del equilibrio (debido a la rotura de la simetría y a la anulación de la masa efectiva asintótica). Estos nuevos comportamientos de scaling generalizan el comportamiento estándar de scaling encontrado en trabajos anteriores [22] y puede ser una señal de la presencia de bosones de Goldstone de masa nula producidos por inestabilidad espínodal en estas situaciones fuera del equilibrio.

Otro fenómeno destacable es que a pesar de que las ecuaciones de evolución tienen simetría bajo inversión temporal, hay una irreversibilidad efectiva debido al desfase de los modos [31].

Esta investigación complementa el estudio realizado en [21] para estados iniciales con valor esperado no nulo pero sin partículas. Tanto en el capítulo 2 como en la ref. [21] se ha observado que en *ausencia de campo externo* en el caso de simetría rota para estados con energía menor que la del falso vacío la masa efectiva cuadrado tiende asintóticamente a cero.

Otra cuestión importante es la no termalización en la aproximación de  $N$  grande a orden dominante. Actualmente algunos trabajos sugieren que incluyendo correcciones  $1/N$  el sistema termalizaría [25], mientras que otros sugieren que basta considerar estados inhomogéneos [29]. El estudio de estados inhomogéneos es además interesante en si mismo, ya que proporciona estados más realistas para describir colisiones.

A pesar de que estas investigaciones con estados invariantes bajo translaciones muestran una rica variedad de fenómenos físicos, es necesario usar estados más realistas para describir colisiones. El enorme trabajo numérico necesario para tratar dichos estados se hará en futuras investigaciones.

## 2.A Aproximación adiabática para los modos

En este apéndice usamos la forma adiabática de los modos para evaluar las fluctuaciones cuánticas  $\Sigma(\tau)$ .

Los modos  $\varphi_q(\tau)$  se pueden expresar [10]

$$\varphi_q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_q(\tau)}} \left[ a_q e^{-i \int_0^\tau dx \mathcal{P}_q(x)} + b_q e^{i \int_0^\tau dx \mathcal{P}_q(x)} \right] \quad (2.73)$$

donde  $a_q$  y  $b_q$  son constantes y  $\mathcal{P}_q(\tau)$  depende del tiempo. Sustituyendo la ec. (2.73) en la ec. (1.99) se obtiene la siguiente ecuación diferencial no lineal para  $\mathcal{P}_q(\tau)$

$$\frac{\ddot{\mathcal{P}}_q(\tau)}{2\mathcal{P}_q(\tau)} - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{\mathcal{P}}_q(\tau)}{\mathcal{P}_q(\tau)} \right)^2 + \mathcal{P}_q^2(\tau) = q^2 + \mathcal{M}^2(\tau) \quad (2.74)$$

Las condiciones iniciales (2.14) junto con la conservación del Wronskiano nos dan

$$|a_q|^2 - |b_q|^2 = 1. \quad (2.75)$$

Cuando  $\mathcal{P}_q(\tau)$  es una función **real**, el módulo cuadrado de los modos es

$$|\varphi_q(\tau)|^2 = \frac{1}{\mathcal{P}_q(\tau)} \left[ |a_q|^2 + |b_q|^2 + 2|a_q b_q| \cos \left( 2 \int_0^\tau dx \mathcal{P}_q(x) + \alpha_q \right) \right] \quad (2.76)$$

donde  $\alpha_q$  es una fase independiente del tiempo.

Cuando  $q$  está en una banda de resonancia paramétrica  $\mathcal{P}_q(\tau)$  adquiere parte imaginaria. Consideramos sólo los casos en que tienen un efecto despreciable, por lo que nos limitaremos al caso en que  $\mathcal{P}_q(\tau)$  es real.

Estamos interesados en los modos con gran amplitud  $|a_q| \gg 1$ ,  $|b_q| \gg 1$ . Es decir, aquellos en un intervalo de anchura  $\sigma$  entorno al centro  $q_0$  del pico de la distribución. Para esos modos, gracias a la ec. (2.75) podemos hacer la aproximación  $|a_q| \simeq |b_q|$ . Sustituyendo la ec. (2.76) en la integral (1.101) para  $\Sigma(\tau)$ , y aproximando el factor de variación lenta  $\frac{1}{\mathcal{P}_q(\tau)}$  por su valor medio en un periodo (que denotaremos  $\frac{1}{\widehat{\mathcal{P}}_q}$ ) da

$$\Sigma(\tau) \simeq 2 \int \frac{q^2 dq}{\widehat{\mathcal{P}}_q} |a_q|^2 \left[ 1 + \cos \left( 2 \int_0^\tau dx \mathcal{P}_q(x) + \alpha_q \right) \right] \quad (2.77)$$

De donde obtenemos las cotas

$$0 \leq \Sigma(\tau) \leq 4 \int \frac{q^2 dq}{\widehat{\mathcal{P}}_q} |a_q|^2 \equiv \Sigma_{max}$$

Para tiempos grandes se anula la integral de los términos oscilatorios (cosenos) de la ec. (2.77). Por lo que

$$\Sigma(\infty) = 2 \int \frac{q^2 dq}{\widehat{\mathcal{P}}_q} |a_q|^2$$

y

$$\Sigma(\infty) = \frac{1}{2} \Sigma_{max}. \quad (2.78)$$

## 2.B Parámetros de variación asintótica lenta

Definamos los siguientes parámetros de variación lenta [21]:

$$A_q(\tau) \equiv \frac{1}{2} e^{-i\omega_{q\infty}\tau} \left[ \varphi_q(\tau) - \frac{i}{\omega_{q\infty}} \dot{\varphi}_q(\tau) \right], \quad (2.79)$$

$$B_q(\tau) \equiv \frac{1}{2} e^{+i\omega_{q\infty}\tau} \left[ \varphi_q(\tau) + \frac{i}{\omega_{q\infty}} \dot{\varphi}_q(\tau) \right], \quad (2.80)$$

con,

$$\omega_{q\infty} \equiv \sqrt{q^2 + \mathcal{M}_\infty^2} \quad ; \quad \mathcal{M}_\infty^2 \equiv \mathcal{M}^2(\infty) . \quad (2.81)$$

Estos parámetros de variación lenta son asintóticamente constantes.

Podemos expresar las funciones de modo en función de ellos como sigue:

$$\varphi_q(\tau) = A_q(\tau) e^{i\omega_{q\infty}\tau} + B_q(\tau) e^{-i\omega_{q\infty}\tau} . \quad (2.82)$$

Así, el módulo cuadrado es,

$$|\varphi_q(\tau)|^2 = |A_q(\tau)|^2 + |B_q(\tau)|^2 + 2|A_q(\tau)B_q(\tau)| \cos[2\omega_{q\infty}\tau + \phi_q(\tau)], \quad (2.83)$$

donde

$$A_q(\tau)B_q(\tau)^* = |A_q(\tau)B_q(\tau)| e^{i\phi_q(\tau)} . \quad (2.84)$$

La conservación del wronskiano implica:

$$|B_q(\tau)|^2 - |A_q(\tau)|^2 = \frac{1}{\omega_{q\infty}} , \quad (2.85)$$

más términos con derivadas de los parámetros de variación lenta (estas se anularán asintóticamente).

Definimos un módulo de variación lenta [21],

$$M_q(\tau) \equiv \sqrt{g} \sqrt{|A_q(\tau)|^2 + |B_q(\tau)|^2} . \quad (2.86)$$

La principal contribución a las cantidades físicas proviene de los modos con número de ocupación de orden  $1/g$ , para esos modos  $|A_q(\tau)|$  y  $|B_q(\tau)|$  son de orden  $1/\sqrt{g}$ . Por tanto,  $M_q(\tau)$  es de orden 1 para estos modos. Por otro lado, la ec. (2.85) implica que,

$$|B_q(\tau)|^2 = |A_q(\tau)|^2 [1 + O(g)] , \quad (2.87)$$

y podemos hacer la siguiente aproximación para el módulo cuadrado

$$g|\varphi_q(\tau)|^2 = M_q(\tau)^2 \{1 + \cos[2\omega_{q\infty}\tau + \phi_q(\tau)]\} [1 + O(g)]. \quad (2.88)$$

De (2.82) obtenemos una fórmula similar para el módulo cuadrado de la derivada de la función de modo,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_q(\tau) &= i\omega_{q\infty} [A_q(\tau) e^{i\omega_{q\infty}\tau} - B_q(\tau) e^{-i\omega_{q\infty}\tau}] \\ &+ \dot{A}_q(\tau) e^{i\omega_{q\infty}\tau} + \dot{B}_q(\tau) e^{-i\omega_{q\infty}\tau}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Usando que  $\dot{A}_q(\infty) = \dot{B}_q(\infty) = 0$  y el mismo procedimiento que para el módulo cuadrado, obtenemos

$$g|\dot{\varphi}_q(\tau)|^2 = \omega_{q\infty}^2 M_q^2(\infty) \{1 - \cos[2\omega_{q\infty}\tau + \phi_q(\tau)]\} [1 + O(g)][1 + O(\tau^{-1})]. \quad (2.90)$$

O equivalentemente,

$$g|\dot{\varphi}_q(\tau)|^2 = \omega_{q\infty}^2 \{g|\varphi_q(\tau)|^2 - 2M_q^2(\tau) \cos[2\omega_{q\infty}\tau + \phi_q(\tau)]\} [1 + O(g)][1 + O(\tau^{-1})]. \quad (2.91)$$

## 2.C Tiempo espinodal en presencia del tsunami

En este apéndice se obtiene la dinámica inicial para los modos en la banda de inestabilidad espinodal, y se estima el tiempo espinodal,  $\tau_s$ , tanto en el caso I como en el II.

Recordemos que tendremos resonancia espinodal si  $m_R^2 < 0$  y  $g\Sigma_{max} < 2$ . Supongamos que la escala de tiempo de desarrollo de la inestabilidad espinodal,  $\tau_s$ , es mayor que la escala de tiempo de amortiguamiento de las oscilaciones de  $g\Sigma(\tau)$ ,  $\tau_d$ . Esto ocurre cuando la distribución de partículas es suficientemente ancha. Antes de entrar en el cálculo de  $\tau_s$ , resaltaremos que los cálculos numéricos muestran que el principal efecto de  $g\Sigma(\tau)$  para  $\tau < \tau_s$  (y  $g$  pequeño) es dar un término constante positivo a la masa efectiva cuadrado. De hecho, esto resulta ser cierto en general, *no sólo* cuando las oscilaciones de  $g\Sigma(\tau)$  se amortiguan antes de  $\tau_s$ .

Para  $\tau_d < \tau < \tau_s$  tenemos:

$$-\mu^2 \equiv M_{eff}^2(\tau) \approx 1 + \frac{g\Sigma_{max}}{2} < 0. \quad (2.92)$$

Con lo que una buena ecuación de evolución aproximada para los modos es,

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + q^2 - \mu^2 \right) \varphi_q(\tau) = 0. \quad (2.93)$$

Así, los modos con  $q$  en el intervalo entre 0 y  $\mu$  están dentro de la banda de inestabilidad espinodal.

Consideramos picos de partículas iniciales situados claramente fuera de las posibles bandas de resonancia. Así, para una distribución de partículas suficientemente estrecha inicialmente no habrá partículas dentro de la banda resonante. Por lo que las condiciones iniciales de los modos dentro de la banda de inestabilidad espinodal son:

$$\varphi_q(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_q}} = (q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|)^{-1/4}, \quad \dot{\varphi}_q(0) = -i\sqrt{\Omega_q} = -i(q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|)^{1/4}. \quad (2.94)$$

La solución de la ec. (2.92) para estos modos es:

$$\varphi_q(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\mu^2 - q^2}(q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|)^{1/4}} \left[ \left( \sqrt{\mu^2 - q^2} - i\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} \right) e^{\tau\sqrt{\mu^2 - q^2}} + \left( \sqrt{\mu^2 - q^2} + i\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} \right) e^{-\tau\sqrt{\mu^2 - q^2}} \right] \quad (2.95)$$

Despreciando los términos con exponenciales decrecientes obtenemos para el módulo cuadrado

$$\begin{aligned} |\varphi_q(\tau)|^2 &\approx \frac{1 + \mu^2}{4(\mu^2 - q^2)\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}} e^{2\tau\sqrt{\mu^2 - q^2}} \\ &= \frac{1 + \mu^2}{4\mu^2 \left(1 - \frac{q^2}{\mu^2}\right) \sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}} e^{2\tau\mu^2\sqrt{1 - \frac{q^2}{\mu^2}}}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

La contribución de la banda espinodal a  $g\Sigma(\tau)$  está dada por,

$$\Sigma_s(\tau) = \int_0^\mu q^2 dq |\varphi_q(\tau)|^2. \quad (2.97)$$

Sustituyendo la ec. (2.96) en la ec. (2.97) obtenemos una estimación del crecimiento espinodal de las fluctuaciones cuánticas.

Para evaluar de forma aproximada esta integral, podemos hacer otras simplificaciones en la ec. (2.96). Como  $q/\mu < 1$  y la contribución de los

modos con  $q \approx \mu$  está suprimida exponencialmente, podemos desarrollar hasta segundo orden en  $q/\mu$  en el exponente y a orden cero fuera de la exponencial.

$$|\varphi_q(\tau)|^2 \approx \frac{1 + \mu^2}{4\mu^2 \sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}} e^{2\tau\mu} e^{-\tau \frac{q^2}{\mu^2}} . \quad (2.98)$$

Además el integrando tiene su máximo en  $q = O(0.1\mu)$  y  $0 < \mu < 1$ . Por lo tanto podemos hacer las aproximaciones  $1 + \mu^2 \sim 1$  y  $\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} \sim 1$  (tanto para el caso I como para el II). Así

$$|\varphi_q(\tau)|^2 \approx \frac{1}{4\mu^2} e^{2\tau\mu} e^{-\tau \frac{q^2}{\mu^2}} . \quad (2.99)$$

Entonces la integral en  $q$  resulta

$$\Sigma_s(\tau) \approx \frac{\sqrt{\pi} \mu}{16} \frac{e^{2\tau\mu}}{\tau^{3/2}} . \quad (2.100)$$

El tiempo espinodal  $\tau_s$  es por definición el tiempo en que cesan las inestabilidades espinodales para todo el intervalo de momentos  $0 \leq q \leq \mu$ . Esto ocurre cuando la contribución de los modos espinodales  $\Sigma_s(\tau)$  compensa el valor inicial (negativo) de  $M_{eff}^2(\tau)$  [ver ec. (2.92)].

$$g\Sigma_s(\tau_s) \approx \mu^2 \quad (2.101)$$

Por tanto  $\tau_s$  está determinado por la siguiente ecuación implícita,

$$\tau_s = \frac{1}{2\mu} \log \left[ \frac{16}{g \sqrt{\pi} \mu} \right] + \frac{3}{4\mu} \log(\mu\tau_s) . \quad (2.102)$$

Los tiempos espinodales obtenidos con esta fórmula analítica concuerdan correctamente con los valores obtenidos numéricamente.

## 2.D Cálculo de $g\Sigma(0)$ en el caso II

Las fluctuaciones cuánticas iniciales en el caso II están relacionadas con las condiciones iniciales a través de la ec. (2.28)

$$[g\Sigma_{II}(0)]^3 + (g_0^2 + \alpha)[g\Sigma_{II}(0)]^2 - \left( \frac{gN_0}{\pi} \right)^2 = 0 \quad .$$

Para  $\frac{gN_0}{2\pi} > \left(\frac{q_0^2 + \alpha}{3}\right)^{3/2}$  la solución positiva de la ecuación tiene la forma,

$$g\Sigma_{II}(0) = -\frac{q_0^2 + \alpha}{3} + s_+ + s_-$$

donde

$$s_{\pm} = \frac{1}{2^{1/3}} \left(\frac{gN_0}{\pi}\right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{gN_0}\right)^2 \left(\frac{q_0^2 + \alpha}{3}\right)^3 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{gN_0}\right)^2 \left(\frac{q_0^2 + \alpha}{3}\right)^3} \right]^{1/3}$$

Para  $\frac{gN_0}{2\pi} < \left(\frac{q_0^2 + \alpha}{3}\right)^{3/2}$  la solución positiva de la ecuación se puede escribir como,

$$g\Sigma_{II}(0) = \frac{q_0^2 + \alpha}{3} (2 \cos \beta - 1)$$

con

$$\cos 3\beta = 2 \left(\frac{3}{q_0^2 + \alpha}\right)^3 \left(\frac{gN_0}{2\pi}\right)^2 - 1 \quad .$$

En los casos límite recuperamos las expresiones de la ec. (2.30).



## Capítulo 3

# Evolución en presencia de campo externo

En este capítulo estudiamos los efectos de la presencia de un campo externo en la dinámica no perturbativa de un campo cuántico, usando el método de  $N$  grande.

El potencial clásico de la teoría  $\vec{\Phi}^4 O(N)$  con simetría rota tiene dos mínimos degenerados en ausencia de campo externo. La presencia de un campo externo  $\vec{J}$  pequeño modifica el potencial y desaparece la degeneración de mínimos. El mínimo absoluto pasa a ser el vacío mientras que el otro mínimo se convierte en un falso vacío.

Tomamos como estado inicial el estado fundamental. Es decir, el valor esperado inicial del campo está en el mínimo absoluto. Entonces, en un instante determinado invertimos el signo del campo externo:  $\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$ . Invertir el signo del campo externo intercambia los mínimos locales. Así, el mínimo absoluto pasa a ser el mínimo relativo y viceversa. Esto hace que el estado del sistema sea ahora próximo al mínimo relativo, lo que da lugar a inestabilidades espinodales y resonancias paramétricas.

Veremos que para tiempos intermedios la dinámica es cuasi-periódica y la masa cuadrado efectiva del campo  $\vec{\Phi}$  es de orden  $J$ .

Consideraremos valores pequeños para la constante de acoplo  $\lambda \ll 1$  para separar más nítidamente las diferentes escalas de tiempo de la evolución.

### 3.1 Dinámica clásica

Primero plantearemos y resolveremos el problema en teoría clásica de campos para mostrar resultados que usaremos luego para comparar. Consideramos el modelo de campo escalar con autointeracción cuártica invariante  $O(N)$  [32] en presencia de un campo externo homogéneo  $\vec{J}$ . Estudiaremos en ese modelo la evolución del estado fundamental tras un cambio  $\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$  en el campo externo.

#### 3.1.1 Ecuaciones de evolución clásica y condiciones iniciales

La acción y la densidad lagrangiana son,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \mathcal{L} , \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \vec{\Phi}(x) \right]^2 - \frac{1}{2} m^2 \vec{\Phi}^2 - \frac{\lambda}{8N} \left( \vec{\Phi}^2 \right)^2 + \vec{J} \cdot \vec{\Phi} . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Estudiaremos situaciones invariantes bajo translaciones. En este caso el campo  $\vec{\Phi}$  y el campo externo  $\vec{J}$  son independientes de las coordenadas espaciales  $\vec{x}$  y sólo dependen del tiempo. Las ecuaciones de evolución son entonces

$$\ddot{\vec{\Phi}}(t) + \left( m^2 + \frac{\lambda}{2N} \vec{\Phi}^2(t) \right) \vec{\Phi}(t) = \vec{J}(t) \quad (3.2)$$

y el potencial clásico

$$V(\vec{\Phi}) = \frac{1}{2} m^2 \vec{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{8N} \left( \vec{\Phi}^2 \right)^2 - \vec{J} \cdot \vec{\Phi} . \quad (3.3)$$

Consideraremos el caso de simetría rota ( $m^2 < 0$ ).

Eligiendo como primer eje del espacio interno la dirección del campo externo  $\vec{J}$ , sus componentes son  $\vec{J} = (\sqrt{N}J, 0, \dots, 0)$ . Y el campo  $\vec{\Phi}$  se puede expresar como  $\vec{\Phi} = (\sqrt{N}\phi, \vec{\phi}_\pi)$ . Con lo que el potencial pasa a ser:

$$V(\vec{\Phi}) = N V_J(\phi) + V_\pi(\vec{\phi}_\pi) \quad (3.4)$$

$$V_J(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{8} \phi^4 - J \phi \quad (3.5)$$

$$V_\pi(\phi, \vec{\phi}_\pi) = \frac{1}{2} m^2 \vec{\phi}_\pi^2 + \frac{\lambda}{8N} \left[ 2 \phi^2 \vec{\phi}_\pi^2 + \left( \vec{\phi}_\pi^2 \right)^2 \right] . \quad (3.6)$$

Elegimos el *estado fundamental como estado inicial* que, como se ve a partir de la ecuación anterior, tiene la forma

$$\begin{aligned}\phi(t_i) &= \phi_0 \quad ; \quad \dot{\phi}(t_i) = 0 \\ \vec{\phi}_\pi(t_i) &= 0 \quad ; \quad \dot{\vec{\phi}}_\pi(t_i) = 0\end{aligned}\quad (3.7)$$

donde  $\phi_0$  es el mínimo global de  $V_J(\phi)$ .

Las ecuaciones de evolución para  $\vec{\phi}_\pi$  son

$$\ddot{\vec{\phi}}_\pi(t) + \left[ m^2 + \frac{\lambda}{2N} \left( \phi^2(t) + \vec{\phi}_\pi^2(t) \right) \right] \vec{\phi}_\pi(t) = 0, \quad (3.8)$$

y para las condiciones iniciales consideradas, *independientemente* del valor de  $J$ , la solución es simplemente

$$\vec{\phi}_\pi(t) = 0. \quad (3.9)$$

Por tanto, el problema *clásico* se reduce al siguiente problema para un campo de *una componente*  $\phi$  con ecuación de evolución

$$\ddot{\phi}(t) + \left[ m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2(t) \right] \phi(t) = +J, \quad (3.10)$$

Como es de esperar, el estado fundamental  $\phi_0$  es una solución constante de esta ecuación. Vemos de la ec. (3.5) que  $\phi_0$ , el mínimo global de  $V_J(\phi_0)$  verifica la ec. (3.10).

Introducimos las variables adimensionales

$$\begin{aligned}\tau &\equiv |m|t \quad ; \quad \eta \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{2|m|}} \phi, \quad V_{\tau \leq 0} \equiv \frac{\lambda}{2m^4} V_J, \\ j &\equiv \sqrt{\frac{\lambda}{2|m|^3}} J, \quad \vec{j} \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{2N|m|^3}} \vec{J}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Por tanto,

$$V_{\tau \leq 0}(\eta) = -\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{4} \eta^4 - j\eta,$$

ya que estamos considerando  $m^2 < 0$ . Ver fig. 3.1.

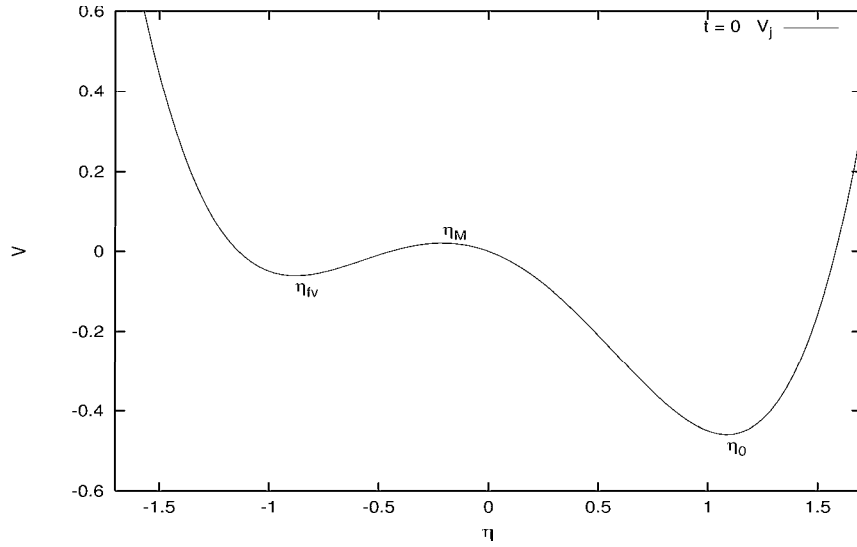


Figura 3.1: Potencial clásico en  $\tau \leq 0$  para campo pequeño ( $j = 0.20 < 2/\sqrt{27}$ ). El potencial tiene dos mínimos, el estado fundamental  $\eta_0$ , y un estado metaestable de falso vacío  $\eta_{fv}$  separados por una barrera de potencial.

Así, los vacíos clásicos son las soluciones de la ecuación cúbica  $V'_{\tau \leq 0}(\eta) = 0$ ,

$$\eta^3 - \eta - j = 0 \quad (3.12)$$

Para campo pequeño  $j < \frac{2}{\sqrt{27}} = 0.3849002\dots$  la ec. (3.12) tiene tres raíces reales. El estado fundamental (el mínimo global) del potencial está en

$$\eta = \eta_0 \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{\sqrt{27} j}{2} \right) \right] = 1 + \frac{1}{2}j - \frac{3}{8}j^2 + \frac{1}{2}j^3 - \frac{105}{128}j^4 + O(j^5) \quad (3.13)$$

Hay otro mínimo local (falso vacío) en

$$\eta_{fv} \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{\sqrt{27} j}{2} \right) + \frac{2\pi}{3} \right] = -1 + \frac{1}{2}j + \frac{3}{8}j^2 + \frac{1}{2}j^3 + \frac{105}{128}j^4 + O(j^5) \quad (3.14)$$

y el máximo local en

$$\eta_M \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{\sqrt{27} j}{2} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] = -j - j^3 + O(j^5) \quad (3.15)$$

Para campos externos grandes  $j > \frac{2}{\sqrt{27}}$  sólo hay un mínimo real, (el mínimo absoluto) en

$$\begin{aligned} \eta = \eta_0 &\equiv \left(\frac{j}{2}\right)^{1/3} \left[ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{27j^2}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27j^2}}\right)^{1/3} \right] \\ &= j^{1/3} + \frac{1}{3j^{1/3}} - \frac{1}{81j^{5/3}} + O(j^{-7/3}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nos concentraremos en el caso más interesante que es  $j < \frac{2}{\sqrt{27}}$ .

El campo comienza a evolucionar en un tiempo negativo  $\tau_i$  a partir del estado fundamental  $\eta_0$  con  $j > 0$ . Y permanece en ese estado hasta  $\tau = 0$  cuando bruscamente se invierte el signo del campo externo  $j$ . Es decir, la dependencia temporal para el campo externo es

$$\vec{j} = \begin{cases} (j, 0, \dots, 0) & \text{para } \tau \leq 0 \\ (-j, 0, \dots, 0) & \text{para } \tau > 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Como se mostró anteriormente el problema se reduce a un problema de un campo con una sola componente (independientemente del valor de  $j$ ). Por tanto, el potencial en variables adimensionales es (ver fig. 3.2, 3.3)

$$V(\eta) = \begin{cases} V_{\tau \leq 0}(\eta) &\equiv -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^4 - j\eta & \text{para } \tau \leq 0 \\ V_{\tau > 0}(\eta) &\equiv -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^4 + j\eta & \text{para } \tau > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

La ecuación de movimiento para  $\tau > 0$  es

$$\ddot{\eta} + (-1 + \eta^2)\eta = -j, \quad (3.19)$$

donde  $-1 + \eta^2$  juega el papel de una masa efectiva. El estado inicial en  $\tau = 0$  es el estado fundamental para  $\tau \leq 0$  que tiene la forma

$$\eta(0) = \eta_0 \quad ; \quad \dot{\eta}(0) = 0. \quad (3.20)$$

### 3.1.2 La dinámica clásica

Hemos visto que el estado inicial (el estado fundamental para campo externo  $j$ ) es un estado estacionario de las ecuaciones de evolución para  $\tau \leq 0$ . El cambio  $j \rightarrow -j$  en  $\tau = 0$  rompe esta estacionariedad, y el sistema pasa a estar cerca de un estado metaestable (debido al cambio en el potencial).

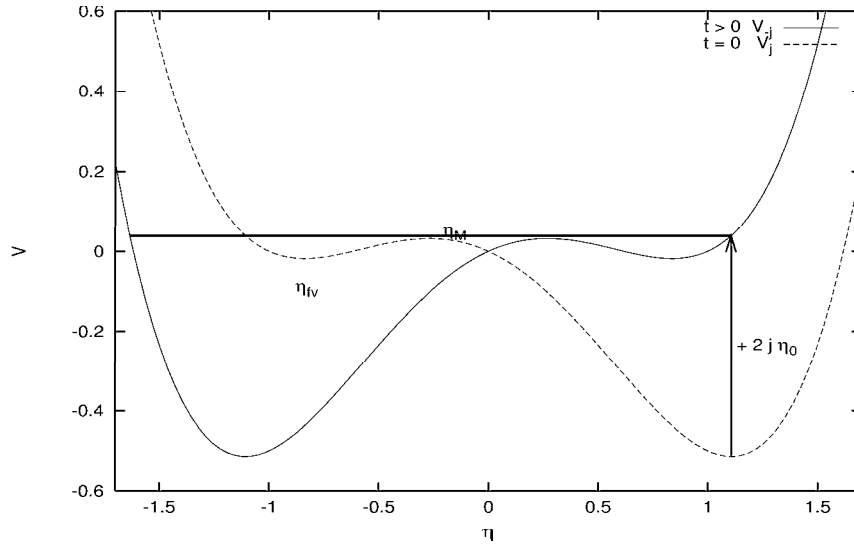


Figura 3.2:  $j = 0.25 > j_c$ . Potencial clásico en  $\tau = 0$  y para  $\tau > 0$ . El cambio en el signo del campo externo en  $\tau = 0$  aumenta la energía del sistema en una cantidad  $2j\eta_0$ , y el sistema tiene suficiente energía para saltar la barrera.

Consideramos  $j < \frac{2}{\sqrt{27}}$ , que es cuando hay una barrera de potencial. Ver figs. 3.2, 3.3. Este cambio en el signo del campo externo  $j$ , aumenta la densidad de energía del sistema en  $V_{\tau>0}(\eta_0) - V_{\tau\leq 0}(\eta_0) = 2j\eta_0$ . Sin embargo, aunque el sistema está cerca del mínimo metaestable, puede tener energía suficiente para saltar la barrera de potencial e ir hacia el mínimo global del potencial. Como la altura de la barrera es  $V_{\tau>0}(\eta_{M'})$  la condición para poder saltar la barrera es

$$V_{\tau>0}(\eta_0) > V_{\tau>0}(\eta_{M'}) , \quad (3.21)$$

donde  $\eta_{M'}$  es el máximo local del potencial  $V_{\tau>0}(\eta)$ .

Resolviendo esta ecuación se obtiene que el sistema salta la barrera si  $|j| > j_c$  con

$$j_c = \sqrt{2 \frac{(13^2 + 15\sqrt{5})}{19^3}} = 0.243019 \dots \quad (3.22)$$

[Nótese que  $j_c < \frac{2}{\sqrt{27}}$  y que por tanto hay barrera para  $j \leq j_c$ .]

Este valor crítico  $j_c$  del campo externo separa la dinámica en dos regímenes:

- $|j| > j_c$ . El sistema salta la barrera y alcanza la región del mínimo global. Después, el sistema continua saltando la barrera hacia adelan-

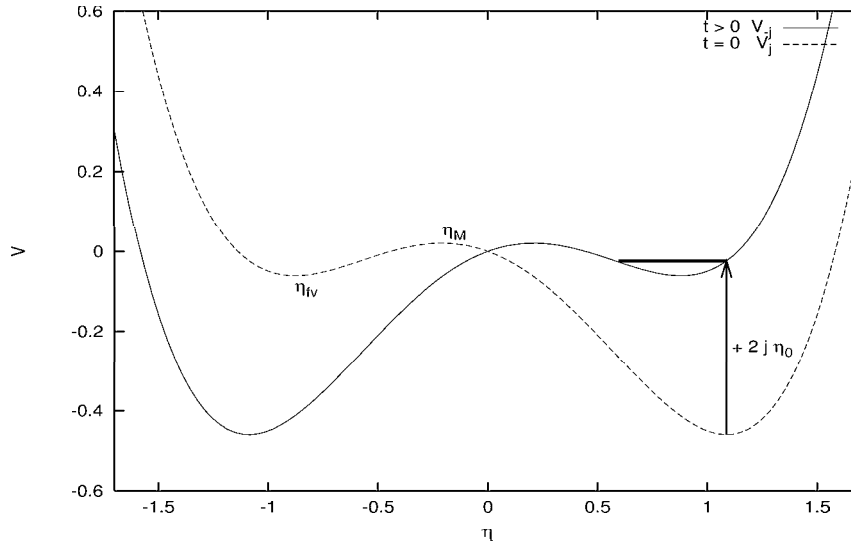


Figura 3.3:  $j = 0.20 < j_c$ . Potencial clásico en  $\tau = 0$  y para  $\tau > 0$ . El cambio en el signo del campo externo en  $\tau = 0$  aumenta la energía del sistema en una cantidad  $2j\eta_0$ , pero el sistema **no** tiene suficiente energía para saltar la barrera.

te y hacia atrás con oscilaciones periódicas. Ver fig. 3.2 y la línea discontinua de la fig. 3.4.

- $|j| < j_c$ . El sistema *no* salta la barrera, y oscila periódicamente en torno al mínimo metaestable, entre los puntos de retorno del movimiento:  $\eta_0$  dado por la ec. (3.13) y  $\eta_t$  solución de la ecuación

$$V_{\tau>0}(\eta_t) = V_{\tau>0}(\eta_0)$$

de donde hallamos,

$$\eta_t = 1 - \frac{3}{2}j - \frac{11}{8}j^2 - \frac{7}{2}j^3 - \frac{1049}{128}j^4 + O(j^5) \quad (3.23)$$

Como ambos  $\eta_t$  y  $\eta_0$  son positivos,  $\eta$  es siempre positivo. Ver fig. 3.3 y la línea discontinua de la fig. 3.7.

## 3.2 Dinámica cuántica

En esta sección calcularemos la dinámica cuántica usando el límite de  $N$  grande. Como en la sección anterior, consideraremos el modelo escalar con

autoacoplo cuártico invariante  $O(N)$  [32] en presencia de un campo externo homogéneo  $\vec{J}$ . Estudiaremos en este modelo la evolución del estado fundamental tras un cambio  $\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$  en el campo externo.

### 3.2.1 Ecuaciones de movimiento cuánticas y condiciones iniciales

La acción y la densidad lagrangiana son,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \mathcal{L} , \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \vec{\Phi}(x) \right]^2 - \frac{1}{2} m^2 \vec{\Phi}^2 - \frac{\lambda}{8N} \left( \vec{\Phi}^2 \right)^2 - \vec{J} \cdot \vec{\Phi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $\vec{\Phi}$  es ahora un operador cuántico.

Estudiaremos situaciones invariantes bajo translaciones. En este caso el parámetro de orden  $\langle \vec{\Phi}(\vec{x}, t) \rangle$  y el campo externo  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  son independientes de las coordenadas espaciales  $\vec{x}$  y sólo dependen del tiempo. Además, elegimos la dirección de  $\vec{J}(t)$  independiente del tiempo. Con lo que podemos elegir esa dirección como el primer eje del espacio interno  $N$ -dimensional.

$$\vec{J} = \begin{cases} (J, 0, \dots, 0) & \text{para } t \leq 0 \\ (-J, 0, \dots, 0) & \text{para } t > 0 \end{cases} . \quad (3.25)$$

En el problema que estamos estudiando el valor esperado del campo es paralelo al campo externo:

$$\vec{\Phi}(x) = (\sigma(x), \vec{\pi}(x)) = (\sqrt{N}\phi(t) + \chi(x), \vec{\pi}(x)) \quad (3.26)$$

con  $\phi(t) = \langle \sigma(x) \rangle$ ; así,  $\langle \chi(x) \rangle = 0$ . Mientras que en las  $N - 1$  direcciones transversales al valor esperado tenemos  $\langle \vec{\pi}(\vec{x}, t) \rangle = 0$ .

La deducción de las ecuaciones de movimiento en el límite de  $N$  grande se explicó con detalle en el capítulo 1. Por lo que aquí haremos sólo un recordatorio de los principales conceptos y ecuaciones.

Tenemos una dirección paralela al valor esperado, y  $N - 1$  direcciones transversas. Las fluctuaciones transversas dominan en el límite de  $N$  grande mientras que las fluctuaciones longitudinales sólo dan correcciones  $1/N$  a las ecuaciones de movimiento.

La ecuación de evolución del valor esperado para  $t > 0$  es

$$\ddot{\phi}(t) + \left\{ m^2 + \frac{\lambda}{2} \left[ \phi^2(t) + \frac{\langle \vec{\pi}^2(x) \rangle}{N} \right] \right\} \phi(t) = -J \quad (3.27)$$

donde el punto denota derivada respecto al tiempo. En esta ecuación de evolución vemos que

$$\mathcal{M}_d^2(t) \equiv m^2 + \frac{\lambda}{2} \left[ \phi^2(t) + \frac{\langle \vec{\pi}^2(x) \rangle}{N} \right]$$

tiene el papel de una masa efectiva. El último término en  $\mathcal{M}_d^2(t)$  es de origen cuántico y está ausente en la masa efectiva clásica. Se puede interpretar como un efecto del medio debido a la presencia de partículas  $\vec{\pi}$ .

En imagen de Heisenberg podemos escribir

$$\vec{\pi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left[ \vec{a}_k \varphi_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^\dagger \varphi_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (3.28)$$

donde  $\vec{a}_k$ ,  $\vec{a}_k^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación con las relaciones de conmutación canónicas. Así,  $\varphi_k(t)$  son las funciones de modo del campo y podemos expresar  $\langle \vec{\pi}^2(x) \rangle$  como

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{\pi}^2(x) \rangle}{N} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [|\varphi_k(t)|^2 - \mathcal{S}_d] . \\ \mathcal{S}_d &= \frac{1}{k} - \frac{\theta(k - \kappa)}{2k^3} \mathcal{M}_d^2(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $\kappa$  es una escala arbitraria de renormalización, y tomaremos  $\kappa = |m_R|$ . (Los detalles del proceso de renormalización que dan la substracción  $\mathcal{S}_d$  se pueden ver en el capítulo 1 y en la ref. [20].)

En las expresiones anteriores se escribió  $k$ , en vez de  $\vec{k}$ , ya que consideramos condiciones iniciales de simetría esférica (y la evolución preserva esta simetría).

Las funciones de modo tienen las siguientes ecuaciones de evolución

$$\ddot{\varphi}_k(t) + \omega_k^2(t) \varphi_k(t) = 0 \quad , \quad \omega_k^2(t) \equiv k^2 + \mathcal{M}_d^2(t) . \quad (3.30)$$

Consideramos valores del campo externo con  $|J| < \frac{2}{\sqrt{27}} (|m|^3 \sqrt{\frac{2}{\lambda}})$ , para ellos el potencial  $V_J$  tiene dos mínimos locales. Como estado inicial tomamos el estado fundamental para  $t \leq 0$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad ; \quad \dot{\phi}(0) = 0$$

$$\varphi_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(0)}} \quad ; \quad \dot{\varphi}_k(0) = -i \sqrt{\omega_k(0)}. \quad (3.31)$$

donde  $\phi_0$  es el mínimo global de  $V_J(\phi)$  [dado por las ecs. (3.11), (3.13)] y  $\omega_k(0) = \sqrt{k^2 + m^2 + (\lambda/2)\phi_0^2}$  (la raíz cuadrada es real para todo  $k$ , ya que  $m^2 + (\lambda/2)\phi_0^2 > 0$ ). Estas condiciones iniciales corresponden al vacío cuántico (ausencia de excitaciones)

Es conveniente introducir las siguientes cantidades adimensionalizadas [además de las ya introducidas en la ec. (3.11)],

$$q \equiv \frac{k}{|m|} \quad ; \quad g \equiv \frac{\lambda}{8\pi^2} \quad ; \quad \mathcal{M} \equiv \frac{\mathcal{M}_d}{|m|} \quad ;$$

$$\varphi_q(\tau) \equiv \sqrt{|m|} \varphi_k(t) \quad ; \quad g\Sigma(\tau) \equiv \frac{\lambda}{2|m|^2} \langle \pi^2(t) \rangle_R \quad ; \quad (3.32)$$

donde  $m$  y  $\lambda$  son la masa y la constante de acoplo renormalizadas, respectivamente [15, 18].

Las ecuaciones de evolución cuánticas en variables adimensionales son

$$\ddot{\eta}(\tau) + \mathcal{M}^2(\tau) \eta(\tau) = -j \quad ; \quad \ddot{\varphi}_q(\tau) + \omega_q^2(\tau) \varphi_q(\tau) = 0 \quad (3.33)$$

con

$$\mathcal{M}^2(\tau) = -1 + \eta^2(\tau) + g\Sigma(\tau) \quad ; \quad \omega_q^2 = q^2 + \mathcal{M}^2(\tau)$$

$$g\Sigma(\tau) = g \int q^2 dq [|\varphi_q(\tau)|^2 - \mathcal{S}(\tau)] \quad ; \quad \mathcal{S}(\tau) = \frac{1}{q} - \frac{\theta(q-1)}{2q^3} \frac{\mathcal{M}_d^2(\tau)}{|m|^2} \quad (3.34)$$

Y las condiciones iniciales son

$$\eta(0) = \eta_0 \quad ; \quad \dot{\eta}(0) = 0$$

$$\varphi_q(0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_q(0)}} \quad ; \quad \dot{\varphi}_q(0) = -i \sqrt{\omega_q(0)}. \quad (3.35)$$

donde  $\eta_0$  está dado por la ec. (3.13) y  $\omega_q(0) = \sqrt{q^2 - 1 + \eta_0^2}$  (la raíz cuadrada es real para todo  $q$ , ya que  $\eta_0^2 > 1$ ).

Es importante comentar que la masa efectiva cuántica es igual a la masa efectiva clásica más un término cuántico adicional,  $g\Sigma(\tau)$ . Este término proviene de los efectos del medio debidos a la presencia de partículas  $\vec{\pi}$ .

### 3.2.2 Dinámica cuántica inicial

Inicialmente,  $g\Sigma(\tau)$  es despreciable en la ecuación de evolución de  $\eta$  ya que  $g\Sigma(0) = O(g) \ll 1$ . Así, la dinámica cuántica inicial del valor esperado  $\eta(\tau)$  es la misma que la dinámica del campo clásico mostrada en la sección 3.1. Esto se ha verificado explícitamente a partir de la solución numérica del conjunto completo de ecuaciones cuánticas (3.33)–(3.35). Igual que en el caso clásico, podemos distinguir dos regímenes dinámicos en función del valor de  $j$  comparado con  $j_c$ .

Posteriormente, esta descripción se modifica debido a los efectos de las inestabilidades espinodales y las resonancias paramétricas. Estas hacen crecer exponencialmente los modos cuánticos, y por tanto también  $g\Sigma(\tau)$ . Las resonancias paramétricas provienen de las oscilaciones temporales de  $\mathcal{M}^2(\tau)$ . Por otro lado, se producen inestabilidades espinodales en los intervalos temporales en que  $\mathcal{M}^2(\tau) < 0$ .

Estos efectos son de naturaleza cuántica, y modifican la dinámica del valor esperado  $\eta(\tau)$  debido a su acoplo con los modos cuánticos a través de  $g\Sigma(\tau)$ .  $g\Sigma(\tau)$  da la anchura del funcional de onda en las direcciones transversales como muestra la ec. (3.32) (recuérdese que las componentes transversas tienen valor esperado nulo). A continuación comentamos los efectos de estos fenómenos en la dinámica.

$$j > j_c$$

La dinámica inicial del valor esperado es análoga a la dinámica clásica del campo. Así, el sistema en este caso tiene suficiente energía para saltar la barrera y alcanzar la región del mínimo global del potencial (ver fig. 3.1). El sistema continua saltando la barrera hacia adelante y hacia atrás hasta que los efectos de los cuantos creados por inestabilidad espinodal y resonancia paramétrica se hacen importantes, *i.e.*,  $g\Sigma(\tau) \sim 1$  (ver figs. 3.4-3.6).

El sistema es espinodalmente inestable cuando  $\mathcal{M}^2(\tau) < 0$ , *i.e.*, para  $\eta^2(\tau) + g\Sigma(\tau) < 1$ , lo que para la dinámica inicial ( $g\Sigma \simeq 0$ ) se reduce a  $|\eta(\tau)| < 1$ . También hay resonancia paramétrica debida a las oscilaciones de  $\mathcal{M}^2(\tau)$ . Ambos mecanismos dan lugar a una abundante creación de cuantos transfiriendo energía de  $\eta$  a las fluctuaciones cuánticas  $\varphi_k(\tau)$ . Por tanto,  $g\Sigma(\tau)$  aumenta mientras que la amplitud de las oscilaciones de  $\eta(\tau)$  disminuye.

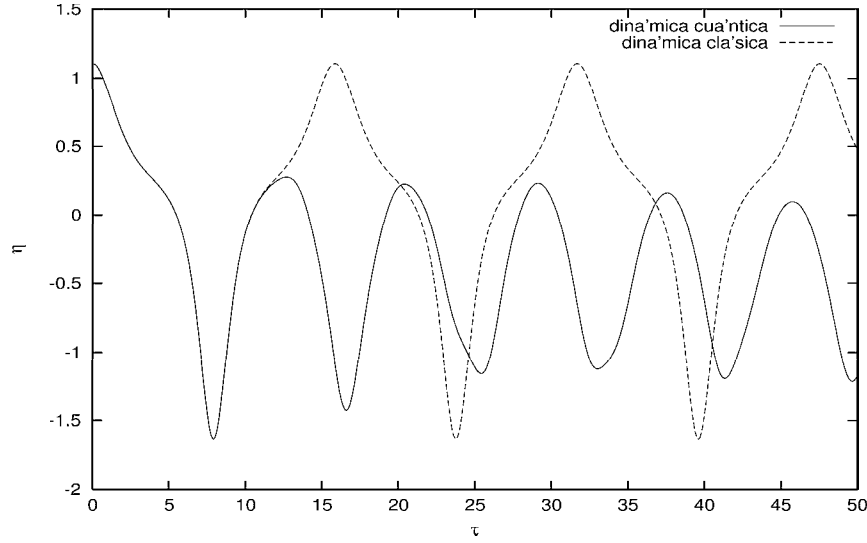


Figura 3.4:  $j = 0.25 > j_c$ .  $\eta(\tau)$  para la evolución cuántica (línea continua) y la clásica (línea discontinua).

$$j < j_c$$

La dinámica inicial del valor esperado es también análoga a la dinámica clásica del campo. Para  $j < j_c$  el sistema no tiene suficiente energía para saltar la barrera y alcanzar el mínimo global, por lo que oscila entorno al mínimo metaestable (falso vacío). (Ver fig. 3.3).

El campo puede ir clásicamente a la región del mínimo global moviéndose a través de las direcciones transversales. Pero esta posibilidad está excluida debido a las condiciones iniciales ec. (3.7), ya que las componentes transversales del campo y sus derivadas son nulas inicialmente y se mantienen nulas por la evolución clásica. Ver sección 3.1.

Cuánticamente hay en general otras dos formas de alcanzar la región del mínimo global: una es mediante efecto túnel a través de la barrera y la segunda es permitir rodear el máximo del potencial incrementando la probabilidad cuántica de encontrar valores grandes para las componentes transversales. El efecto túnel está suprimido en el límite de  $N$  grande pues la probabilidad de atravesar el potencial está dada por  $\exp(-N S_{cl})$ . Esto está relacionado con que en el límite de  $N$  grande los efectos cuánticos en la dirección longitudinal son subdominantes; y las contribuciones cuánticas dominantes provienen de las componentes transversales del campo (ver comentarios de la sección 3.2.1).

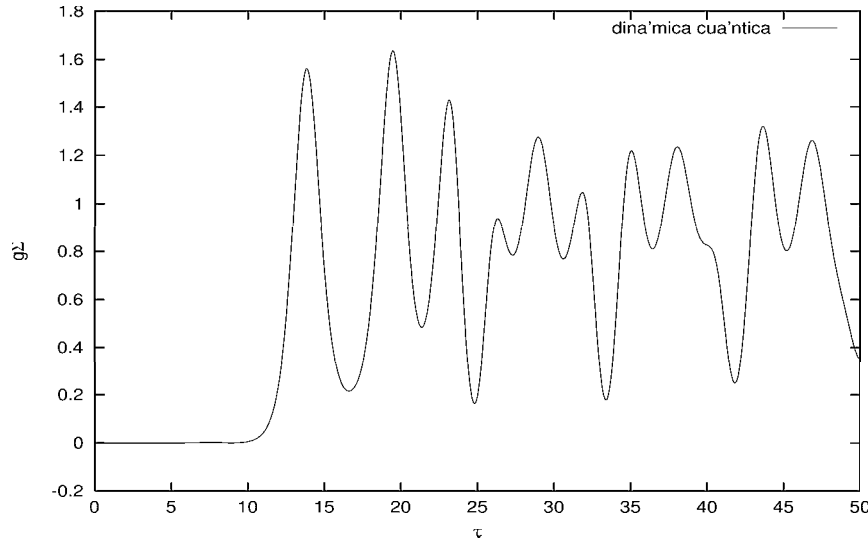


Figura 3.5:  $j = 0.25 > j_c$ .  $g\Sigma(\tau)$ .

En la dinámica inicial (análoga a la clásica),  $\eta(\tau)$  oscila entre  $\eta_0$  y  $\eta_t$  dados por las ec. (3.23) (ver fig. 3.7). Así, como  $g\Sigma(\tau) = 0$  la masa efectiva oscila entre los valores (ver figs. 3.8, 3.9),

$$\mathcal{M}_{max}^2 = -1 + \eta_0^2 = j - \frac{1}{2}j^2 + \frac{5}{8}j^3 - j^4 + O(j^5) > 0 \quad (3.36)$$

$$\mathcal{M}_{min}^2 = -1 + \eta_t^2 = -3j - \frac{1}{2}j^2 - \frac{23}{8}j^3 - 4j^4 + O(j^5) < 0 \quad (3.37)$$

Por tanto, los momentos pequeños crecen exponencialmente en los intervalos temporales para los que la masa efectiva es negativa. Esta inestabilidad espinodal incrementa  $g\Sigma(\tau)$  dando una probabilidad no nula para componentes transversas del campo grande.

Estas inestabilidades se aproximan bien considerando una masa al cuadrado negativa constante  $-\mu^2$  dada por el promedio

$$-\mu^2 \simeq \frac{\mathcal{M}_{min}^2 + \mathcal{M}_{max}^2}{2} = -j - \frac{1}{2}j^2 - \frac{9}{8}j^3 - \frac{5}{2}j^4 + O(j^5) \quad (3.38)$$

Esta aproximación reproduce el crecimiento de  $g\Sigma(\tau)$  estando en buen acuerdo con la solución numérica del conjunto completo de ecs. (3.33) -(3.35) (ver apéndice 3.A)

$$g\Sigma(\tau) \approx \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8} \frac{e^{2\tau\mu}}{\tau^{3/2}}. \quad (3.39)$$

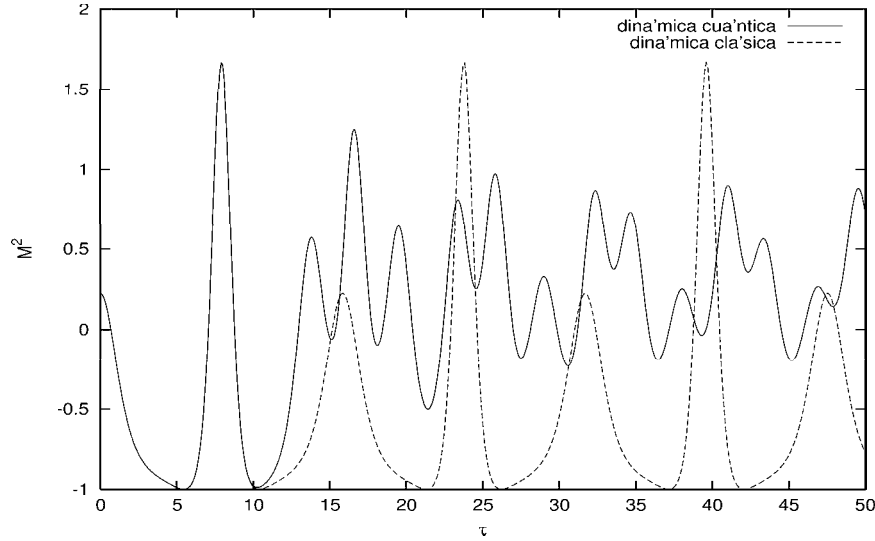


Figura 3.6:  $j = 0.25 > j_c$ . Masa cuadrada efectiva  $\mathcal{M}^2(\tau)$  para la evolución cuántica (línea continua) y la clásica (línea discontinua).

Así la probabilidad de encontrar valores grandes para las componentes transversas del campo aumenta con el tiempo.

Esta solución se cumple hasta un tiempo  $\tau_s$  (tiempo espinodal) en el que  $g\Sigma(\tau_s) \sim \mu^2$ , esta condición da  $\tau_s$  como solución de

$$\tau_s \approx \frac{1}{2\mu} \log\left(\frac{8}{g\sqrt{\pi}}\right) + \frac{3}{4\mu} \log(\mu\tau_s) \quad (3.40)$$

Tras  $\tau_s$  el efecto de  $g\Sigma(\tau)$  en las ecuaciones de evolución se hace fundamental.

Poco después de  $\tau = \tau_s$  el parámetro de orden  $\eta(\tau)$  hace un salto espectacular y comienza a oscilar en torno al mínimo global [ver figs. 3.3 y 3.7]. Esta transición se explica por el hecho de que  $g\Sigma(\tau) = \frac{\lambda}{2|m|^2} \langle \pi^2(t) \rangle_R \sim 1$  implica componentes transversas del campo de orden  $|m|/\sqrt{\lambda}$ . Estas componentes transversas del campo grandes permiten al sistema rodear el máximo en  $\vec{\Phi} = (\sqrt{N}\phi, \vec{\phi}_\pi) = (|m|\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \eta_{M'}, \vec{0})$  y alcanzar la región en torno al mínimo global donde oscila cuasi-periódicamente (ver figs. 3.3, 3.6-3.10).

### 3.2.3 Dinámica cuántica a tiempos intermedios

Tras el periodo inicial descrito en la sección anterior, el sistema entra en un régimen cuasi-periódico. Recuérdese que para diferentes condiciones iniciales

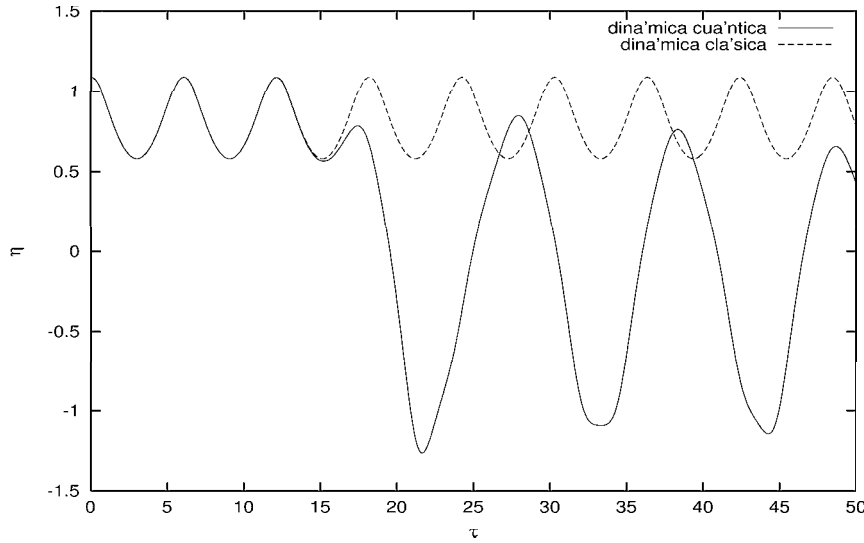


Figura 3.7:  $j = 0.20 < j_c$ .  $\eta(\tau)$  para la evolución cuántica (línea continua) y la clásica (línea discontinua).

y en ausencia de campo externo las oscilaciones se amortiguan mucho más rápido [32, 21].

El comportamiento cuasi-periódico encontrado para  $\eta(\tau)$  y  $g\Sigma(\tau)$  sugiere que la dinámica de estas cantidades está aproximadamente descrita por un hamiltoniano efectivo con pocos grados de libertad. De hecho, observamos a partir de la solución numérica completa de las ecs. (3.33)-(3.35) que  $g\Sigma(\tau)$  y  $\eta(\tau)$  están aproximadamente relacionados por

$$g\Sigma(\tau) = 1 + c_1 j - (1 - c_2 j)[\eta(\tau) + j]^2 \quad (3.41)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son números positivos de orden  $j^0$  y  $g^0$  para  $j$  y  $g$  pequeños. Esta ecuación indica que  $g\Sigma$  y  $\eta$  oscilan en oposición de fase. Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  se obtienen ajustando a la solución numérica. Ver tabla 3.1.

$j$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.24	0.25	0.30
$c_1$	0.74	0.67	0.60	0.56	0.35	0.29	0.18
$c_2$	1.36	0.91	0.60	0.40	0.42	0.49	0.43

Tabla 3.1: Valores de  $c_1$  y  $c_2$  obtenidos ajustando  $g\Sigma(\eta)$  en el intervalo temporal  $\tau \in [800, 1000]$  para  $g = 10^{-6}$  y diferentes valores de  $j$ .

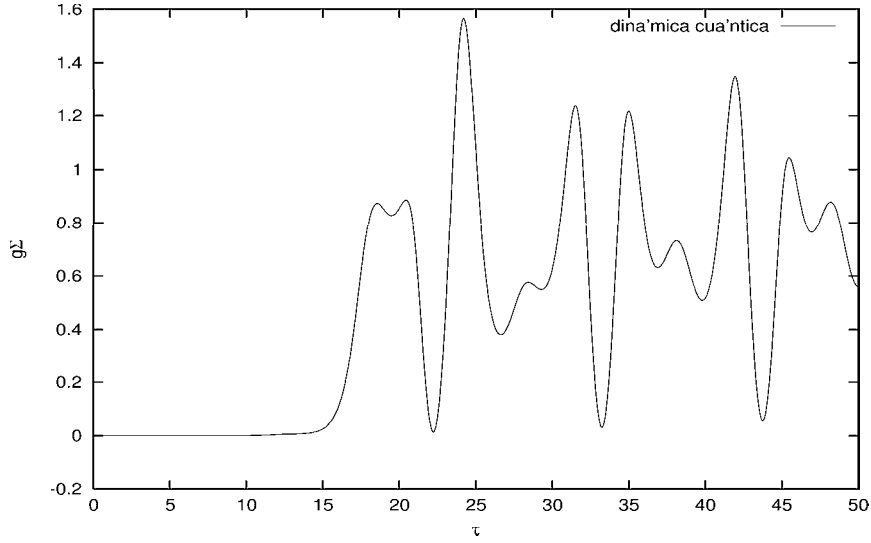


Figura 3.8:  $j = 0.20 < j_c$ .  $g\Sigma(\tau)$ .

Así para la masa al cuadrado efectiva tenemos,

$$\mathcal{M}^2(\eta) = -1 + \eta^2 + g\Sigma(\eta) = j [c_1 - j + c_2 j^2 - 2(1 - c_2 j) \eta + c_2 \eta^2] \quad (3.42)$$

La ecuación de evolución (3.33)-(3.34) con esta aproximación es,

$$\ddot{\eta} + \mathcal{M}^2(\eta) \eta = -j \quad (3.43)$$

Integrando para  $\eta$ ,

$$\frac{1}{2} \dot{\eta}^2 + j V_{int}(\eta) = j E_{int} \quad (3.44)$$

donde,

$$V_{int}(\eta) = \eta + \frac{1}{2}(c_1 - j + c_2 j^2) \eta^2 - \frac{2}{3}(1 - c_2 j) \eta^3 + \frac{c_2}{4} \eta^4, \quad (3.45)$$

$$E_{int} = V_{int}(\eta_1) \quad (3.46)$$

Nótese que  $\eta_1$  es un punto de retorno de las ecuaciones de movimiento y que  $E_{int}$  depende de las condiciones iniciales. La ec. (3.44) se puede integrar de la siguiente forma

$$\sqrt{2j} (\tau - \tau_1) = \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{E_{int} - V_{int}(\eta)}} \quad (3.47)$$

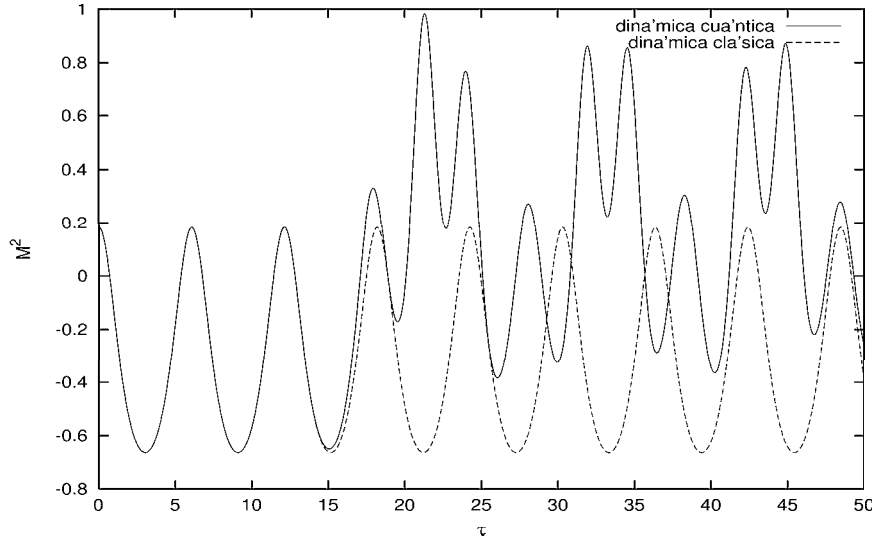


Figura 3.9:  $j = 0.20 < j_c$ . Masa cuadrado efectiva  $\mathcal{M}^2(\tau)$  para la evolución cuántica (línea continua) y la clásica (línea discontinua).

con  $\eta_1 = \eta(\tau_1)$ .

El polinomio de cuarto orden  $E_{int} - V_{int}(\eta)$  tiene siempre dos raíces reales  $\eta_1 < \eta_2$  que corresponden a los puntos de retorno. Dependiendo del valor de  $j$ , las otras dos raíces son un par de raíces complejas conjugadas o dos raíces reales más:

- i) un par de raíces complejas conjugadas  $\eta_R \pm i\eta_I$ . Entonces definimos:

$$a \equiv \frac{\eta_R - \eta_1}{(\eta_R - \eta_1)^2 + \eta_I^2}; \quad b \equiv \frac{\eta_I}{(\eta_R - \eta_1)^2 + \eta_I^2}. \quad (3.48)$$

- ii) un par de raíces reales  $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \eta_4$ . Entonces definimos:

$$a \equiv \frac{2}{\eta_3 - \eta_1} - \frac{1}{\eta_4 - \eta_1}; \quad b^2 \equiv \frac{4(\eta_3 - \eta_2)(\eta_4 - \eta_3)}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_4 - \eta_1)(\eta_3 - \eta_1)^2}. \quad (3.49)$$

Introducimos también otras dos cantidades para simplificar las fórmulas:

$$d \equiv \frac{1}{\eta_2 - \eta_1}; \quad X \equiv [(a - d)^2 + b^2]^{1/4}; \quad C \equiv X \sqrt{2|\mathcal{M}^2(\eta_1)\eta_1 + j|} \quad (3.50)$$

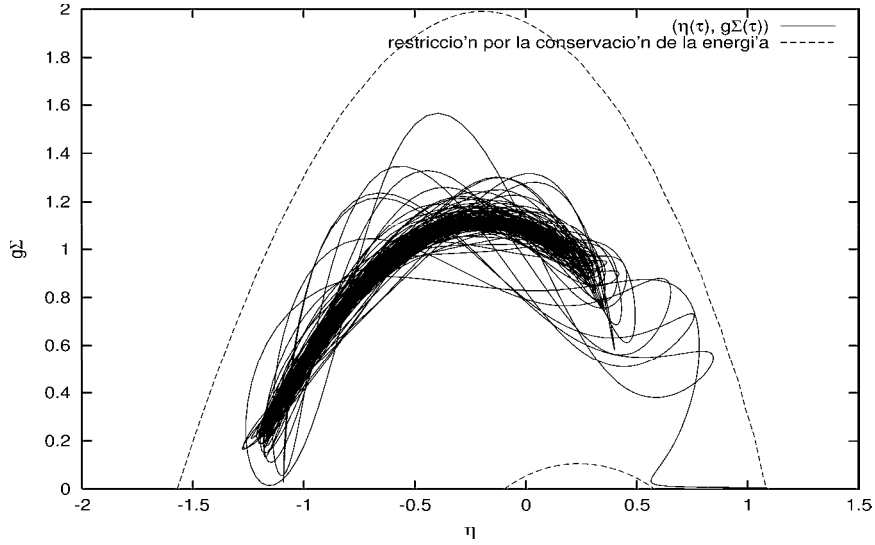


Figura 3.10:  $j = 0.20 < j_c$ . Línea continua: trayectoria en el plano  $(\eta, g\Sigma)$ . Línea discontinua: restricción en la trayectoria debida a la conservación de la energía. Ver ec. 3.55 y fig. 3.12.

La solución de la ec. (3.47) se puede expresar en la forma

$$\eta(\tau) = \eta_1 + \frac{(\eta_2 - \eta_1)[1 - \text{cn}(C(\tau - \tau_1), k)]}{1 + (\eta_2 - \eta_1)X^2 - [1 - (\eta_2 - \eta_1)X^2] \text{cn}(C(\tau - \tau_1), k)}, \quad (3.51)$$

donde  $\text{cn}(z, k)$  es el coseno de Jacobi, y

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{a-d}{X^2}} \quad (3.52)$$

La solución (3.51) oscila entre  $\eta_1$  y  $\eta_2$  con periodo

$$T = \frac{2}{C} K(k) \quad (3.53)$$

donde  $K(k)$  es la integral elíptica de primera especie y  $C$  está dado por la ec. (3.50). En la fig. 3.11 se comparan las soluciones analítica y numéricas.

La solución numérica sería exactamente periódica si  $E_{int}$  se conservara exactamente; sin embargo decrece lentamente. El decrecimiento es más lento para menor  $j$ . Ver tabla 3.2.

Por lo que vemos que el comportamiento a tiempos intermedios presenta una clara separación entre variables lentas y variables rápidas. Se ha hallado

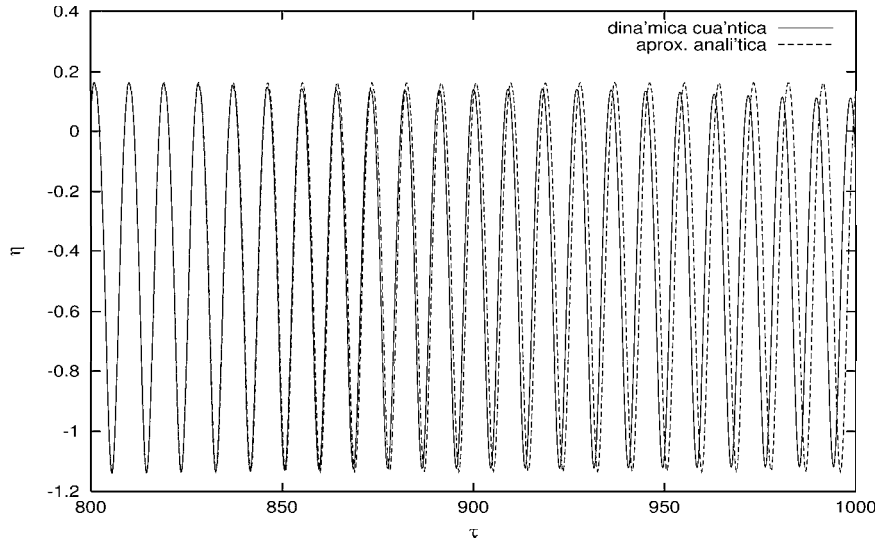


Figura 3.11:  $j = 0.20 < j_c$ . Evolución cuántica para el valor esperado  $\eta(\tau)$  (línea continua) comparada con la aproximación analítica para tiempos intermedios (línea discontinua).

$\tau$	500	1000	1500	2000
$j E_{int}(j = 0.05)$	0.02	0.016	0.014	0.011
$j E_{int}(j = 0.20)$	0.04	0.025	0.015	0.010

Tabla 3.2:  $E_{int}$  para  $g = 10^{-6}$  y  $j = 0.05, 0.20$

explícitamente la dependencia temporal rápida del parámetro de orden y las fluctuaciones cuánticas. La comparación con la solución numérica completa muestra que las ecs. (3.51) y (3.41) reproducen exactamente la dinámica si los parámetros de la ec. (3.51) se sustituyen por funciones de variación lenta con el tiempo. Por ejemplo, los parámetros mostrados en la tabla 3.1 cambian un 3 – 4% entre  $\tau = 500$  y  $\tau = 1000$ . El estudio de esta dinámica lenta es un problema muy interesante más allá del objetivo de este capítulo que puede resolverse utilizando los métodos de Whithman [34].

También se pueden obtener expresiones analíticas para  $g\Sigma(\tau)$  y  $\mathcal{M}^2(\tau)$  a partir de las relaciones  $g\Sigma(\eta)$  [ec. (3.41)] y  $\mathcal{M}^2(\eta)$  [ec. (3.42)], simplemente sustituyendo la solución analítica para  $\eta(\tau)$  [ec. 3.51]. La relación  $g\Sigma(\eta)$  indica que  $g\Sigma$  y  $\eta$  oscilan en oposición de fase, salvo términos de orden  $j$ ;  $g\Sigma(\eta) = 1 - \eta^2 + O(j)$ . Estos términos de orden  $j$  son muy importantes

porque en la masa los términos de orden  $j^0$  se cancelan, y los términos de orden  $j$  hacen que la masa sea distinta de cero. Esto tiene la importante consecuencia de hacer que la masa cuadrado sea positiva. Así el promedio de la masa cuadrado asintótica tiende a un valor positivo. [Recuérdese que para  $j = 0$  en el caso de simetría rota la masa cuadrado va a cero para energías iniciales menores que la energía potencial del máximo local ( $\eta = 0$ ), ver refs. [21, 32]. ]

La masa efectiva asintótica se anula para  $j \rightarrow 0$ , ya que  $\mathcal{M}^2(\tau = \infty) = \mathcal{O}(j)$  para  $j$  pequeño [como indica la ec. (3.42)].

### 3.2.4 Restricciones en la trayectoria debidas a la conservación de la energía

Como los estados considerados son homogéneos e isotrópicos, el sistema tiene un tensor energía-momento con la forma del fluido ideal. Por lo que podemos definir una energía adimensional como

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{\lambda}{2N|m|^4} \langle T^{00} \rangle \\ &= -\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4} + \frac{1}{2} \eta^2 g\Sigma - \frac{g\Sigma}{2} + \frac{(g\Sigma)^2}{4} + \frac{1}{4} - j\eta \\ &\quad + \frac{\dot{\eta}^2}{2} + \frac{g}{2} \int q^2 dq |\dot{\varphi}_q|^2 + \frac{g}{2} \int q^2 dq q^2 |\varphi_q|^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

La conservación de la energía (para campo externo constante) nos da la siguiente restricción en el plano  $(\eta, g\Sigma)$

$$\epsilon_0 \geq -\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4} + \frac{1}{2} \eta^2 g\Sigma - \frac{g\Sigma}{2} + \frac{(g\Sigma)^2}{4} + \frac{1}{4} - j\eta. \quad (3.55)$$

donde  $\epsilon_0 = V_{\tau \leq 0}(\eta_0) + 2j\eta_0 = V_{\tau > 0}(\eta_0)$  es la energía tras el cambio de signo en el campo externo  $j$ .

Esta restricción se representa en la fig. 3.10 con una línea discontinua. En ella se ve como la conservación de la energía restringe la trayectoria en el plano  $(\eta, g\Sigma)$ . En la fig. 3.12 se representa el miembro de la derecha de la ec. (3.55) para  $j = 0.20$ .

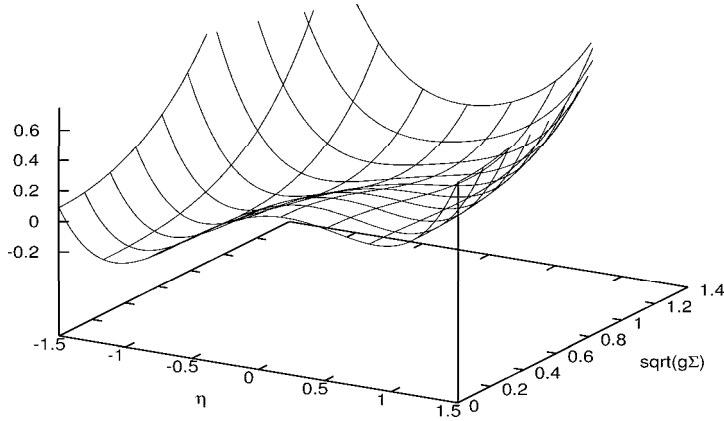


Figura 3.12:  $j = 0.20 < j_c$ . Gráfica del miembro de la derecha de la ec. 3.55 que está acotado superiormente por la energía, lo que da la restricción en la trayectoria que se muestra en la fig. 3.10.

### 3.3 Conclusiones

Hemos investigado los efectos de los campos externos en la dinámica no perturbativa de un campo cuántico en el límite de  $N$  grande.

Se ha estudiado la evolución del estado fundamental en un campo externo uniforme  $\vec{J}$  tras cambiar su signo:  $\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$ . Hemos considerado casos con simetría rota en campos externos pequeños; para ellos el potencial tiene dos mínimos locales, dando lugar a importantes fenómenos físicos. El cambio de signo del campo externo provoca inestabilidades espinodales y resonancias paramétricas que producen un abundante número de partículas (del orden de  $1/\lambda$ ). Esto hace que el funcional de onda se ensanche permitiendo valores grandes para las componentes del campo transversas a  $\vec{J}$ . En el caso en que la zona del mínimo global está clásicamente prohibida gracias a estos valores grandes de las fluctuaciones transversas del campo, el sistema rodea el máximo del potencial y alcanza la zona del mínimo global sin necesidad de efecto túnel. Posteriormente el sistema oscila entrando en un régimen cuasiperiódico. Es decir, las variables rápidas (cuya dinámica obtenemos explícitamente) oscilan periódicamente mientras las otras variables cambian lentamente.

Incluso cuando el sistema tiene energía menor que la del falso vacío, la masa cuadrado efectiva es positiva y de orden  $J$ . Por lo que en el límite  $J \rightarrow 0$  recuperamos una masa efectiva nula consistentemente con los resultados ya conocidos para  $J = 0$  donde aparecen bosones de Goldstone fuera del equilibrio [32, 21].

El amortiguamiento de las oscilaciones rápidas para estas condiciones iniciales es mucho más lento que para las que se consideraron para  $J = 0$ .

Por otro lado, mientras que en el caso de  $J = 0$  las oscilaciones de  $\mathcal{M}^2(t) - \mathcal{M}^2(\infty)$  se amortiguan con  $1/t$  [32, 21]; en el caso con  $J \neq 0$  la amortiguación es significativamente más lenta.

### 3.A Inestabilidades espinodales

En este apéndice resolvemos la dinámica inicial para los modos en la banda de inestabilidad espinodal, y estimamos el tiempo espinodal,  $\tau_s$ .

Antes de entrar en el cálculo de  $\tau_s$ , recordemos que la contribución de la banda espinodal se puede estimar usando una masa promedio para la evolución. Los cálculos numéricos muestran que esta estimación es correcta, hasta que la contribución es de orden uno.

Por lo que la ecuación aproximada para los modos es

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + q^2 - \mu^2 \right) \varphi_q(\tau) = 0. \quad (3.56)$$

Los modos con  $q$  en el intervalo entre 0 y  $\mu$  son espinodalmente resonantes. Inicialmente no hay partículas en la banda espinodalmente inestable. Por tanto las condiciones iniciales para los modos de la banda inestable son:

$$\begin{aligned} \varphi_q(0) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_q}} = (q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|)^{-1/4}, \\ \dot{\varphi}_q(0) &= -i\sqrt{\Omega_q} = -i(q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|)^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La solución de la ec. (3.56) para estos modos es:

$$\begin{aligned} \varphi_q(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\mu^2 - q^2}(q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|)^{1/4}} & \left[ \left( \sqrt{\mu^2 - q^2} - i\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} \right) e^{\tau\sqrt{\mu^2 - q^2}} \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{\mu^2 - q^2} + i\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} \right) e^{-\tau\sqrt{\mu^2 - q^2}} \right]. \end{aligned}$$

(3.58)

Por lo que despreciando los términos exponencialmente decrecientes, obtenemos para el módulo cuadrado

$$\begin{aligned} |\varphi_q(\tau)|^2 &\approx \frac{\mu^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}{4(\mu^2 - q^2)\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}} e^{2\tau\sqrt{\mu^2 - q^2}} \\ &= \frac{\mu^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}{4\mu^2 \left(1 - \frac{q^2}{\mu^2}\right) \sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}} e^{2\tau\mu\sqrt{1 - \frac{q^2}{\mu^2}}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

La contribución de la banda espinodal a  $g\Sigma(\tau)$  está dada por,

$$\Sigma_s(\tau) = \int_0^\mu q^2 dq |\varphi_q(\tau)|^2. \quad (3.60)$$

Sustituyendo la ec. (3.59) en la ec. (3.60) obtenemos una estimación del crecimiento espinodal de las fluctuaciones cuánticas. Para evaluar aproximadamente esta integral, se pueden hacer algunas simplificaciones adicionales en la ec. (3.59). Como  $q/\mu < 1$  y la contribución de los modos con  $q \approx \mu$  esta exponencialmente suprimida, podemos desarrollar en potencias de  $q/\mu$  a segundo orden en la exponencial y a orden cero en el factor fuera de la exponencial.

$$|\varphi_q(\tau)|^2 \approx \frac{\mu^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}{4\mu^2 \sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|}} e^{2\tau\mu} e^{-\tau\frac{q^2}{\mu}}. \quad (3.61)$$

Además, el integrando tiene su máximo en  $q = O(0.1\mu)$  y  $0 < \mu < 1$ . Por lo que podemos hacer las aproximaciones  $\mu^2 + |\mathcal{M}^2(0)| \sim 2\mu^2$  y  $\sqrt{q^2 + |\mathcal{M}^2(0)|} \sim \mu$ . Así

$$|\varphi_q(\tau)|^2 \approx \frac{1}{2\mu} e^{2\tau\mu} e^{-\tau\frac{q^2}{\mu}}. \quad (3.62)$$

Integrando en  $q$  y usando  $\int_0^1 v^2 dv \exp(-v^2 r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\pi/(16r^3)}$ ,

$$g\Sigma(\tau) \approx \frac{g\sqrt{\pi\mu}}{8} \frac{e^{2\tau\mu}}{\tau^{3/2}}. \quad (3.63)$$

El tiempo espinodal  $\tau_s$  es por definición, el tiempo para el que deja de haber inestabilidades para todo el intervalo  $0 \leq q \leq \mu$ . Esto ocurre cuando la contribución de los modos espinodales  $g\Sigma_s(\tau)$  compensa el valor negativo inicial de  $M_{eff}^2(\tau) = -\mu^2$ .

$$g\Sigma_s(\tau_s) \approx \mu^2 \quad (3.64)$$

Por lo que  $\tau_s$  está dado por la siguiente ecuación implícita,

$$\tau_s = \frac{1}{2\mu} \log \left[ \frac{8}{g\sqrt{\pi}} \right] + \frac{3}{4\mu} \log(\mu\tau_s) . \quad (3.65)$$

El tiempo espinodal dado por esta ecuación concuerda bien con los resultados numéricos.

## Parte II

# Teoría Cuántica de Campos fuera del equilibrio en Cosmología



# Capítulo 4

## Teoría del Big Bang e Inflación

En este capítulo presentamos brevemente la teoría del Big Bang, sus limitaciones y como éstas dieron lugar a la teoría de la inflación.

### 4.1 La teoría del Big Bang

La teoría del Big Bang se basa principalmente en la afirmación:

*El Universo es homogéneo e isótropo a gran escala.*

Esta afirmación en el contexto de la relatividad general nos restringe enormemente la métrica, que ha de tener la forma FRW [35]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4.1)$$

donde  $K = +1, -1$  ó  $0$  corresponde a un universo cerrado, abierto o plano respectivamente.

La homogeneidad e isotropía restringen también la forma del tensor energía-momento,  $T^{\mu\nu}$ , a la de un fluido ideal [35]. Así en un sistema comóvil de coordenadas  $T^{\mu\nu}$  es diagonal y además  $T_j^i = P\delta_j^i$  donde  $P$  es la presión. La energía está dada por  $E = T_0^0$ .

Las ecuaciones de Einstein-Friedmann nos dan la evolución del factor de escala  $a(t)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (E + 3P) \quad (4.2)$$

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} E \quad (4.3)$$

donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es el parámetro de Hubble, y  $G = M_{Pl}^{-2}$  la constante gravitatoria. Vemos que la expansión se decelera si la ecuación de estado cumple  $P > -\frac{E}{3}$ , y que es acelerada si  $P < -\frac{E}{3}$ . Las ecuaciones de evolución nos dan la siguiente ley de conservación para la energía

$$\dot{E} + 3H(E + P) = 0 \quad (4.4)$$

Si la ecuación de estado es

$$P = wE \implies E = E_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \implies a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (4.5)$$

(donde  $w$  es una constante) en particular cuando la energía está dominada por la

$$\text{radiación} \implies P = \frac{E}{3} \implies E = E_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} \implies a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

$$\text{materia} \implies P = 0 \implies E = E_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \implies a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.7)$$

Si estamos en un universo plano, como las observaciones recientes indican [41, 42], la métrica se simplifica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2 \quad (4.8)$$

y las ecuaciones de movimiento son la ec. (4.2) y

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} E \quad (4.9)$$

En la teoría del Big Bang el Universo comienza en un estado muy denso y caliente que se va rarificando y enfriando al expandirse, pasando por una etapa dominada por la radiación y luego a otra dominada por la materia. Esa rarificación y enfriamiento, aumenta el recorrido libre medio de las partículas y disminuye su energía cinética; lo que permite la formación de protones, neutrones y posteriormente de átomos, y el desacoplo de la radiación de fondo.

Por otro lado los cúmulos, las galaxias y las estrellas surgen por amplificación gravitatoria de pequeñas inhomogeneidades.

Hay importantes observaciones experimentales a favor de la teoría del Big Bang, entre las que podemos destacar la expansión del Universo medida por Hubble [36], pero sobre todo la observación del fondo cósmico de radiación [37] y su gran homogeneidad [38]. (Este es una reliquia de la época densa del Universo.)

## 4.2 Limitaciones de la teoría del Big Bang

A pesar de ser un modelo cuyas consecuencias están ampliamente respaldadas por las observaciones, hay cuestiones importantes a las que la teoría del Big Bang no da respuesta [3, 4, 5].

- *La homogeneidad del Universo.* Las regiones causalmente conexas cuando la radiación se desacoplo subtienden hoy en día un ángulo menor de un grado en el cielo. Por lo que en principio cabría esperar variaciones en el fondo cósmico de microondas de una a otra de esas regiones. Experimentalmente se observa en cambio un fondo uniforme en todas las direcciones, lo que apoya la teoría del Big Bang, pero requiere asumir para el Universo un estado inicial altamente homogéneo. La teoría del Big Bang no nos da un mecanismo que explique esa homogeneidad a gran escala.
- *La planitud del Universo.* Definiendo la densidad crítica de energía  $E_c$  y su cociente  $\Omega$  con la densidad de energía  $E$

$$E_c(t) \equiv \frac{2H^2(t)}{8\pi G}, \quad \Omega(t) \equiv \frac{E(t)}{E_c(t)} \quad (4.10)$$

se puede ver que: El Universo es plano ( $K = 0$ ) si y sólo si  $\Omega(t) = 1$ .

De las ecuaciones de evolución de la métrica obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d|\Omega(t) - 1|}{dt} = |K| \frac{4\pi G a^2(t)}{3H^3(t)} (E(t) + 3P(t)). \quad (4.11)$$

Por tanto,  $\Omega = 1$  es un punto estacionario inestable si la ecuación de estado cumple  $P > -\frac{E}{3}$ , como ocurre en los universos dominados por la radiación ( $P = \frac{E}{3}$ ) o por la materia ( $P = 0$ ). Esa inestabilidad hace que tener en la actualidad  $0.1 \leq \Omega_0 \leq 2$ , requiera unas condiciones iniciales muy particulares  $\Omega(t_{Pl} \simeq 10^{-43} s.) = 1 \pm 10^{-60}$ .

- *La formación de las galaxias.* La creación de cúmulos, galaxias y estrellas tiene su origen en la amplificación gravitatoria de pequeñas inhomogeneidades iniciales. La teoría del Big Bang no clarifica cual sería el origen de estas pequeñas inhomogeneidades en un universo inicialmente extremadamente homogéneo.

Estos interrogantes no invalidan la teoría del Big Bang, simplemente no encuentran explicación dentro de ella.

### 4.3 Inflación

La inflación es actualmente la mejor candidata para dar respuesta a los interrogantes planteados en la sección anterior.

La inflación es un periodo de expansión acelerada del Universo

$$\ddot{a} > 0 \quad (4.12)$$

esto requiere que la ecuación de estado cumpla

$$P < -\frac{E}{3} \quad (4.13)$$

A primera vista parece difícil encontrar sistemas cuya ecuación de estado cumpla esta restricción. Sin embargo, dentro de la teoría de campos es fácil obtener situaciones con ese tipo de ecuaciones de estado. Para un sistema con lagrangiano (en un espacio con métrica de FRW plana)

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V(\phi) \quad (4.14)$$

la ecuación de evolución es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\vec{\nabla}^2 \phi}{a^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (4.15)$$

la densidad de energía es

$$E = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{a^2} + V(\phi) \quad (4.16)$$

y la presión

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6} \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{a^2} - V(\phi) \quad (4.17)$$

Así, vemos que cuando domina la contribución del potencial la ecuación de estado es  $P = -E$  ( $\Rightarrow E = \text{cte.}$  y  $a(t) = a_0 e^{H(t-t_0)}$ , espacio-tiempo de De Sitter). Esta situación ocurre cuando el campo es suficientemente homogéneo y su variación es lenta. Para un campo homogéneo la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (4.18)$$

Para garantizar que la variación del campo sea lenta se impone la condición de deslizamiento lento (slow-roll)

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi). \quad (4.19)$$

Esta condición se verifica si  $H$  es muy grande, o si el potencial es muy plano. El periodo inflacionario finaliza cuando la transferencia de energía potencial a energía cinética hace que ambas contribuciones sean del mismo orden de magnitud.

Suponiendo que el Universo pasó por un periodo inflacionario se puede dar respuesta a las cuestiones que deja abiertas la teoría del Big Bang.

- *La homogeneidad del Universo.* Durante esta expansión acelerada el Universo se expande mucho más rápido que el horizonte cosmológico (radio de Hubble  $R_c = 1/H$ ). Esto hace que el Universo pase a ser homogéneo a una escala más grande que el horizonte cosmológico. Si el periodo inflacionario fue suficientemente largo explicaría la homogeneidad actual del Universo a gran escala (Para De Sitter,  $P = -E$ , la condición es  $N_e \equiv \ln(a(t_f)/a(t_i)) > 60$ .)
- *La planitud del Universo.* Durante el periodo inflacionario ( $P < -E/3$ )  $\Omega = 1$  es un atractor [ver ec. (4.11)]. Por lo que al final del periodo inflacionario (si este ha sido suficientemente largo) el valor de  $\Omega$  será enormemente próximo a 1.
- *La formación de galaxias.* La expansión acelerada del Universo amplifica las fluctuaciones cuánticas, dando lugar a las pequeñas inhomogeneidades iniciales [39, 40]. Estas, tras el final de la inflación, serán amplificadas gravitacionalmente dando lugar a cúmulos, galaxias y estrellas.

La inflación tiene además la virtud de que la historia anterior a la época inflacionaria pasa a ser irrelevante (salvo por el hecho de que debe dar lugar a una época inflacionaria).

Las observaciones experimentales sobre las homogeneidades del fondo de microondas [38, 41, 42] son compatibles con los modelos inflacionarios más sencillos, y sitúan a la inflación como la mejor candidata para explicar el origen de la estructura actual del Universo.

Guth en 1981 [2] propuso por primera vez usar un modelo inflacionario para dar respuesta a las cuestiones que hemos expuesto. Actualmente existen un gran número de modelos inflacionarios, a continuación describimos dos de los más utilizados.

### 4.3.1 Nueva inflación

En este modelo se asume que la disminución de la densidad de energía debido a la expansión da lugar a una transición de fase de segundo orden. El campo originalmente en el falso vacío  $\phi = 0$  comienza a evolucionar hacia el conjunto de mínimos degenerados del potencial. (Ver fig. 4.1).

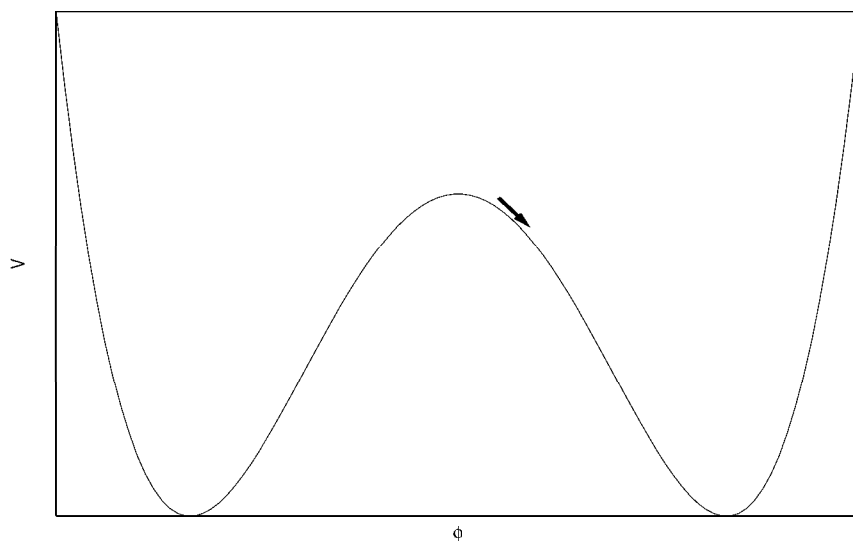


Figura 4.1: Nueva inflación

El periodo inflacionario comienza cuando la expansión hace que la contribución dominante en la energía sea la energía potencial del falso vacío, y termina cuando la energía cinética del campo es del orden de la potencial. Posteriormente el campo oscila entorno al mínimo del potencial y estas oscilaciones dan lugar a la creación de partículas más ligeras, recalentando

(reheating) el Universo (tras el enorme enfriamiento debido a la expansión inflacionaria).

Los primeros trabajos sobre este modelo inflacionario calcularon la dinámica del campo del inflatón, usando las ecuaciones de evolución clásicas [3, 5, 4, 40].

En [13] se hizo por primera vez un tratamiento cuántico consistente de este modelo (usando  $N$  grande), lo que permitió tratar de forma apropiada los efectos de la creación de cuantos debidos a la inestabilidad espinodal (esta es debida a la inestabilidad del estado de falso vacío). (Ver también [11].)

### 4.3.2 Inflación caótica

Este modelo fue propuesto por Linde en 1983 [43].

En este modelo se supone que en un tiempo inicial (quizás cuando la densidad de energía era del orden de la de Planck), la principal contribución a la energía venía de un campo  $\phi$  uniforme en una región mayor que el radio de Hubble.

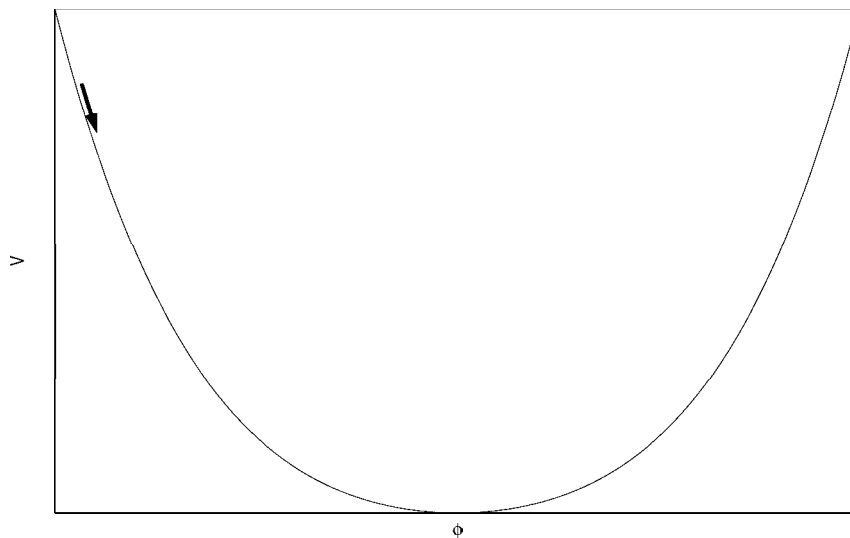


Figura 4.2: Inflación caótica clásica

El tratamiento usual que se hace de la inflación caótica es calcular la dinámica del campo usando las ecuaciones de movimiento clásicas. Para justificar este tratamiento clásico la contribución dominante a la energía debe provenir del valor esperado, lo que requiere que este tenga una amplitud muy

grande (esto obliga a que el estado inicial rompa la posible simetría  $\phi \rightarrow -\phi$  del potencial), y que por el contrario la contribución de los cuantos sea muy pequeña (para poder despreciar su efecto).

Por lo que la pregunta que surge es: ¿Se puede obtener inflación caótica a partir de estados excitados más generales?

En esta tesis se expone el primer tratamiento cuántico consistente de la inflación caótica (capítulo 5). Lo que nos permitirá afirmar que SÍ se puede obtener inflación caótica a partir de estados excitados más generales (toda una nueva clase de estados cuánticos tanto puros como mixtos), obtener su dinámica, y formular una condición suficiente para tener inflación (esta es el análogo cuántico de la condición clásica de deslizamiento lento, *slow-roll*). Este tratamiento cuántico define el ámbito de validez del tratamiento clásico, a partir de una justificación microscópica.

## 4.4 Conclusiones

Las limitaciones de la teoría del Big Bang dieron lugar a la teoría de la inflación. Las observaciones experimentales han situado a la teoría de la inflación (complementando a la teoría del Big Bang) como una seria candidata para explicar la estructura y el estado actual del Universo.

Por otro lado, usualmente en inflación caótica se calcula la dinámica del inflatón usando las ecuaciones de movimiento clásicas. En el próximo capítulo se hace un tratamiento cuántico consistente de la inflación caótica. Lo que permite considerar estados iniciales más generales, generalizar la condición de deslizamiento lento (*slow-roll*) y dar una justificación microscópica a este escenario.

# Capítulo 5

## Inflación caótica tsunami

Los estudios habituales sobre inflación utilizan para el inflatón las ecuaciones clásicas de movimiento de un campo escalar homogéneo, ignorando el carácter cuántico de la dinámica del inflatón a las escalas de energía del Universo primordial. La interpretación desde la teoría cuántica de campos es que este campo clásico homogéneo es el valor esperado del operador cuántico del campo en un estado invariante bajo translaciones.

El objetivo de este capítulo es proporcionar un tratamiento cuántico para los modelos cuya contrapartida clásica son los modelos de inflación caótica clásica. Para ello adaptaremos los métodos y conceptos de los capítulo 1 y 2, y de las refs. [17, 16, 51] para estudiar la dinámica autoconsistente de la métrica y de un estado cuántico altamente excitado.

Este tratamiento cuántico proporciona desde la teoría cuántica de campos una justificación microscópica de la inflación caótica clásica. Además, permite demostrar que el conjunto de estados iniciales a partir de los que se obtiene inflación es mucho más amplio que el considerado en los escenarios clásicos, e incluye toda una nueva clase de estados cuánticos iniciales (tanto puros como mixtos).

Primero introducimos el estado cuántico y presentamos las ecuaciones de movimiento renormalizadas para la evolución autoconsistente del estado cuántico y el factor de escala. Luego hacemos el estudio analítico y numérico detallado de la evolución resaltando las diferentes épocas inflacionarias. Finalmente discutimos escenarios generalizados. En las conclusiones presentamos un resumen de los resultados y sus implicaciones. Se dedica un apéndice a los detalles técnicos sobre las ecuaciones de evolución de estados mezcla.

## 5.1 Estado inicial y ecuaciones de movimiento

Como hemos resaltado en la introducción, mientras que la mayoría de los trabajos sobre inflación tratan la dinámica del inflatón clásicamente, nosotros usaremos una descripción cuántica del inflatón.

Nos centraremos en la posibilidad de obtener inflación a partir de la dinámica **cuántica** de un estado inicial altamente excitado con una gran densidad de energía. Trataremos el campo del inflatón que describe la materia como un campo cuántico mientras que se tratará la gravitación clásicamente, lo que es consistente con considerar procesos inflacionarios a escalas inferiores a la energía de Planck.

La dinámica de la métrica del espacio-tiempo está determinada por las ecuaciones de Einstein semiclásicas cuya fuente es el valor esperado del tensor energía-momento del campo cuántico del inflatón. Mientras que la evolución del campo cuántico se calcula en la métrica resultante. Por tanto resolvemos **autoconsistentemente** las ecuaciones de evolución acopladas para la métrica clásica y el campo cuántico del inflatón.

Asumimos que el Universo es homogéneo, isótropo y espacialmente plano, por tanto descrito por la métrica,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2 . \quad (5.1)$$

Anticipando la necesidad de un tratamiento no perturbativo de la evolución del estado cuántico, consideraremos un modelo en el que el inflatón es un campo escalar  $N$  componentes  $\vec{\Phi}(x)$  con un autoacoplo cuártico. Entonces podremos usar el límite de  $N$  grande como un método no perturbativo para estudiar la dinámica [15, 18, 13, 16, 17, 9, 10]. Esta elección no está sólo motivada por la necesidad de un tratamiento no perturbativo consistente, sino también porque las teorías de gran unificación contienen un gran número de campos, lo que justifica considerar el límite de  $N$  grande desde un punto de vista físico.

La acción para la materia y su densidad lagrangiana son

$$S[\vec{\Phi}] = \int d^4x \mathcal{L}_m = \int d^4x a^3(t) \left[ \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}^2(x) - \frac{1}{2} \frac{(\vec{\nabla}\vec{\Phi}(x))^2}{a^2(t)} - V(\vec{\Phi}(x)) \right] , \quad (5.2)$$

$$V(\vec{\Phi}) = \frac{m^2}{2} \vec{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{8N} (\vec{\Phi}^2)^2 + \frac{1}{2} \xi \mathcal{R} \vec{\Phi}^2 , \quad (5.3)$$

consideraremos  $m^2 > 0$ , posponiendo la discusión del caso  $m^2 < 0$  para un futuro trabajo.

Aquí  $\mathcal{R}(t)$  es la curvatura escalar

$$\mathcal{R}(t) = 6 \left( \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right), \quad (5.4)$$

El acoplo  $\xi$  de  $\vec{\Phi}^2(x)$  a la curvatura escalar  $\mathcal{R}(t)$  se ha incluido en el lagrangiano ya que es necesario para la renormalizabilidad de la teoría.

La discusión del mecanismo inflacionario alternativo que proponemos y de los estados cuánticos es más clara en tiempo conforme

$$\mathcal{T} = \int^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (5.5)$$

en términos del cual la métrica es conforme a la de Minkowski

$$ds^2 = a^2(\mathcal{T}) (d\mathcal{T}^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (5.6)$$

Introducimos el campo conformemente reescalado

$$\vec{\Upsilon}(\mathcal{T}, \mathbf{x}) = a(t) \vec{\Phi}(t, \mathbf{x}) \quad (5.7)$$

en función del cual la acción de la materia es

$$\mathcal{S}[\vec{\Upsilon}] = \int d\mathcal{T} d^3x \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_{\mathcal{T}} \vec{\Upsilon})^2 - (\nabla \vec{\Upsilon})^2] - a^4(\mathcal{T}) V \left[ \frac{\vec{\Upsilon}}{a(\mathcal{T})} \right] + a^2(\mathcal{T}) \frac{\mathcal{R}}{12} \vec{\Upsilon}^2 \right\}. \quad (5.8)$$

Como estamos interesados en describir la evolución de un estado cuántico inicial, cambiaremos a la descripción hamiltoniana en imagen de Schrödinger. Este procedimiento comienza obteniendo el momento canónico conjugado del campo cuántico,  $\vec{\Pi}(\mathcal{T}, \mathbf{x})$ , y la densidad hamiltoniana  $\mathcal{H}(\mathcal{T}, \mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(\mathcal{T}, \mathbf{x}) &= \vec{\Upsilon}'(\mathcal{T}, \mathbf{x}), \\ \mathcal{H}(\mathcal{T}, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \vec{\Upsilon})^2 + a^4(\mathcal{T}) V \left[ \frac{\vec{\Upsilon}}{a(\mathcal{T})} \right] - a^2(\mathcal{T}) \frac{\mathcal{R}}{12} \vec{\Upsilon}^2, \\ H(\mathcal{T}) &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\mathcal{T}, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde la prima denota derivada respecto al tiempo conforme  $\mathcal{T}$ .

En la imagen de Schrödinger el momento canónico está dado por

$$\Pi^a(\mathcal{T}, \mathbf{x}) = -i \frac{\delta}{\delta \Upsilon^a(\mathcal{T}, \mathbf{x})} \quad ; \quad a = 1, \dots, N. \quad (5.10)$$

La evolución temporal de la función de onda  $\Psi[\vec{\Upsilon}; \mathcal{T}]$  se obtiene a partir de la ecuación funcional de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} \Psi[\vec{\Upsilon}; \mathcal{T}] = H \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{\Upsilon}}; \vec{\Upsilon} \right] \Psi[\vec{\Upsilon}; \mathcal{T}] \quad (5.11)$$

Análogamente a como hicimos en Minkowski, escribimos el campo de la forma

$$\begin{aligned} \vec{\Upsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{T}) &= (\sigma(\mathbf{x}, \mathcal{T}), \vec{\pi}(\mathbf{x}, \mathcal{T})) \\ &= (\sqrt{N}v(\mathcal{T}) + \chi(\mathbf{x}, \mathcal{T}), \vec{\pi}(\mathbf{x}, \mathcal{T})), \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde hemos elegido el eje '1' en la dirección del valor esperado del campo y llamado  $\vec{\pi}$  las  $N - 1$  componentes del campo en las direcciones perpendiculares.

$$\begin{aligned} v(\mathcal{T}) &= \langle \sigma(\mathbf{x}, \mathcal{T}) \rangle \\ \langle \vec{\pi}(\mathbf{x}, \mathcal{T}) \rangle &= \langle \chi(\mathbf{x}, \mathcal{T}) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde los valores esperados se obtienen en el estado dado por el funcional de onda  $\Psi[\vec{\Upsilon}; \mathcal{T}]$  especificado anteriormente.

El orden dominante en el límite de  $N$  grande se puede obtener por métodos funcionales (ver capítulo 1 y refs.[15, 18, 13, 16, 51, 9, 10] y las referencias que contienen). Las contribuciones de  $\chi$  a las ecuaciones de movimiento son subdominantes (de orden  $1/N$ ) en el límite de  $N$  grande [15, 18, 9, 10].

Es conveniente introducir la transformada de Fourier espacial del campo cuántico

$$\vec{\pi}_k(\mathcal{T}) = \int d^3x \vec{\pi}(\mathbf{x}, \mathcal{T}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.14)$$

Al orden dominante en el límite de  $N$  grande, la forma explícita del hamiltoniano es [15, 18, 13, 16, 51, 9, 10]

$$H(\mathcal{T}) = N \mathcal{V} h_{cl}(\mathcal{T}) - \frac{\lambda}{8N} \left( \sum_k \langle \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \rangle \right)^2 + \sum_k H_k(\mathcal{T}),$$

$$h_{cl}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} v'^2(\mathcal{T}) + \frac{a^2(\mathcal{T})}{2} m^2 v^2(\mathcal{T}) + \frac{\lambda}{8} v^4(\mathcal{T}),$$

$$H_k(\mathcal{T}) \equiv -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \vec{\pi}_k \cdot \delta \vec{\pi}_{-k}} + \frac{1}{2} \omega_k^2(\mathcal{T}) \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \quad (5.15)$$

$$\omega_k^2(\mathcal{T}) \equiv k^2 + a^2(\mathcal{T}) \left[ \mathcal{M}^2(\mathcal{T}) - \frac{\mathcal{R}(\mathcal{T})}{6} \right], \quad (5.16)$$

$$\mathcal{M}^2(\mathcal{T}) \equiv m^2 + \xi \mathcal{R} + \frac{\lambda}{2} \frac{v^2}{a^2(\mathcal{T})} + \frac{\lambda}{2} \frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N a^2(\mathcal{T})}. \quad (5.17)$$

donde  $\mathcal{V}$  es el volumen comóvil. Consideraremos distribuciones con simetría esférica en el espacio de momentos.

Vemos que en el límite de  $N$  grande el operador hamiltoniano (5.9) pasa a ser un c-número independiente del tiempo más una contribución cuántica,  $\sum_k H_k(\mathcal{T})$ , dada por una colección de osciladores armónicos con frecuencias dependientes del tiempo, acoplados sólo a través de las fluctuaciones cuánticas  $\langle \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \rangle$ .

En las ecs. (5.15)-(5.17) el factor de escala  $a(\mathcal{T})$  está determinado auto-consistentemente por las ecuaciones de Einstein-Friedmann.

### 5.1.1 Estados iniciales tsunami

Para destacar los principales aspectos del escenario inflacionario que proponemos, y para que quede más clara la diferencia con los escenarios convencionales, por el momento centraremos nuestra discusión en el caso de un *estado cuántico puro* con valor esperado nulo, *i.e.*,  $v(\mathcal{T}) = 0$ . Los casos más generales de estados mezcla descritos por matrices densidad y de valor esperado no nulo se discuten en detalle en las secciones 5.2.3 y 5.3 y en el apéndice 5.A.

Para  $v(\mathcal{T}) = 0$  el hamiltoniano cuántico (5.15) es una suma de osciladores armónicos con frecuencias dependientes del tiempo que son función de las fluctuaciones cuánticas. Por tanto, proponemos un funcional gaussiano de la forma,

$$\Psi \left[ \vec{\Upsilon}; \mathcal{T} \right] = \mathcal{N}_\Psi(\mathcal{T}) \prod_k e^{-\frac{A_k(\mathcal{T})}{2} \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k}}. \quad (5.18)$$

La ecuación de Schrödinger funcional (5.11) nos da las ecuaciones de evolución para el factor de normalización  $\mathcal{N}_\Psi(\mathcal{T})$  y para el núcleo de covarianza  $A_k(\mathcal{T})$  cuya forma general está en el apéndice 5.A (ver también [15, 18]). La

evolución del factor de normalización está determinada por la de  $A_k$ , mientras que la ecuación para  $A_k$  es

$$iA'_k(\mathcal{T}) = A_k^2 - \omega_k^2(\mathcal{T}), \quad (5.19)$$

donde la prima denota derivada respecto al tiempo conforme. Como se describe en el apéndice 5.A para el caso general, la ecuación anterior se puede linearizar definiendo

$$A_k(\mathcal{T}) \equiv -i \frac{\varphi_k'^*(\mathcal{T})}{\varphi_k^*(\mathcal{T})}, \quad (5.20)$$

donde las funciones de modo  $\varphi_k$  cumplen la ecuación

$$\varphi_k'' + \omega_k^2(\mathcal{T}) \varphi_k = 0 \quad (5.21)$$

En función de estas funciones de modo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N} &= \frac{1}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \rangle \\ \langle \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \rangle &= \frac{N}{2A_{R,k}} = \frac{N}{2} |\varphi_k|^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para especificar la dinámica de forma completa hemos de dar ahora las condiciones iniciales para el funcional de onda. Eligiendo como tiempo (conforme) inicial  $\mathcal{T} = 0$  con  $a(\mathcal{T} = 0) = 1$ , el estado inicial queda completamente especificado dando la parte real e imaginaria de la covarianza  $A_k$  en el instante inicial. Parametrizamos estos valores de la forma <sup>1</sup>

$$A_{R,k}(0) = \Omega_k \quad ; \quad A_{I,k}(0) = \omega_k(0) \delta_k \quad (5.23)$$

Eligiendo el wronskiano de la función de modo  $\varphi_k(\mathcal{T})$  y su complejo conjugado para que sea

$$\varphi_k \varphi_k'^* - \varphi_k' \varphi_k^* = 2i \quad (5.24)$$

da las siguientes condiciones iniciales para las funciones de modo (ver apéndice 5.A)

$$\varphi_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \quad ; \quad \varphi_k'(0) = -[\omega_k(0)\delta_k + i\Omega_k] \varphi_k(0). \quad (5.25)$$

---

<sup>1</sup>En el caso en que  $\omega_k^2(0) < 0$  elegimos  $\omega_k(0) = \sqrt{k^2 + |\mathcal{M}^2(0) - \mathcal{R}(0)/6|}$ .

donde hemos usado las ecs. (5.20) y (5.23).

Una interpretación alternativa importante de estas funciones de modo es que son una base para desarrollar los operadores de Heisenberg del campo, ya que son solución de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$\vec{\pi}(\vec{x}, \mathcal{T}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \vec{a}_k \varphi_k(\mathcal{T}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^\dagger \varphi_k^*(\mathcal{T}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right], \quad (5.26)$$

con  $\vec{a}_k; \vec{a}_k^\dagger$  los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, con las relaciones de conmutación canónicas. La condición de wronskiano (5.24) asegura que los campos  $\vec{\pi}(\vec{x}, \mathcal{T})$  y sus momentos conjugados verifican las relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales.

La interpretación física de los estados iniciales es más clara al considerar el número de ocupación adiabático [50] y la distribución de probabilidad para las configuraciones del campo

- **Número de ocupación:** es aquí cuando la descripción en términos del tiempo conforme resulta más útil. En tiempo conforme el Hamiltoniano en el límite de  $N$  grande es el de un conjunto de osciladores armónicos con frecuencias dependientes del tiempo. Resulta por tanto pertinente introducir el operador número adiabático

$$\hat{n}_k(\mathcal{T}) = \frac{1}{N} \left[ \frac{H_k(\mathcal{T})}{\omega_k(\mathcal{T})} - \frac{1}{2} \right], \quad (5.27)$$

con  $H_k$  dado por la ec. (5.15).

En particular el número de ocupación inicial está dado por (ver apéndice 5.A)

$$n_k \equiv \langle \hat{n}_k(0) \rangle = \frac{[\omega_k(0) - \Omega_k]^2 + \omega_k^2(0) \delta_k^2}{4 \omega_k(0) \Omega_k}. \quad (5.28)$$

Aquí, el caso especial con  $\Omega_k = \omega_k(0)$  y  $\delta_k = 0$  corresponde al vacío adiabático ( $n_k = 0$ ). Por el contrario, el estado inicial que estudiaremos tiene una banda de vectores de onda **poblada con un número no perturbativo de partículas**. Más en concreto, consideraremos estados iniciales para los que

$$n_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{dentro de la banda excitada,}$$

$$n_k = 0 \quad \text{fuera de la banda excitada.} \quad (5.29)$$

donde  $\lambda$  es el autoacoplo cuadrático.

Esto se consigue si,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_k} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda \omega_k(0)}\right) && \text{dentro de la banda excitada,} \\ \frac{1}{\Omega_k} &= \frac{1}{\omega_k(0)} \quad \text{y} \quad \delta_k = 0 && \text{fuera de la banda excitada.} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Estos estados iniciales están altamente excitados, el valor esperado del tensor energía momento en estos estados da una densidad de energía  $\sim 1/\lambda$  y son, por tanto, estados no perturbativos. Nos referiremos al caso particular en que la banda excitada es estrecha como tsunami estrecho.

Hay que resaltar que la distribución de partículas  $n_k$  sólo determina *parcialmente* el estado inicial. Como vemos en la ec. (5.25), el estado inicial está completamente determinado especificando *dos* funciones de  $k$ :  $\Omega_k$  y  $\delta_k$ .

- **Distribución de probabilidad:** una interpretación alternativa de estos estados iniciales se obtiene a partir de la distribución de probabilidad para las configuraciones del campo en el tiempo inicial. Esta es

$$\mathcal{P}[\vec{\pi}] = \left| \Psi \left[ \vec{\Upsilon}; \mathcal{T} = 0 \right] \right|^2 = \mathcal{N}_{\Psi}^2(0) \prod_k e^{-\Omega_k \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k}} \quad (5.31)$$

Una interpretación cuántica intuitiva de la función de onda para los modos de la banda excitada es la siguiente. En el tiempo inicial el Hamiltoniano instantáneo corresponde a un conjunto de osciladores armónicos con frecuencias  $\omega_k(0)$ , mientras que la anchura en el espacio de configuraciones del campo del estado gaussiano inicial está dada por  $1/\sqrt{\Omega_k}$ . Para un modo en el vacío  $1/\sqrt{\Omega_k} \sim 1/\sqrt{\omega_k(0)}$  y las amplitudes típicas del campo son  $\vec{\pi}_k \sim 1/\sqrt{\omega_k(0)}$  que es la anchura característica del pozo de potencial. Mientras que para un modo dentro de la banda excitada la anchura en el espacio de configuraciones del campo es  $1/\sqrt{\Omega_k} \sim 1/\sqrt{\lambda \omega_k(0)}$  [ver ec. (5.30)]. Por lo que configuraciones del campo con  $\vec{\pi}_k \sim 1/\sqrt{\lambda \omega_k(0)} \gg 1/\sqrt{\omega_k(0)}$  tienen una probabilidad de

$\mathcal{O}(1)$ , *i.e.*, dentro de la banda de momentos excitados las configuraciones con gran amplitud *no* están suprimidas. Es decir, la anchura de la distribución de probabilidad para esos modos es mucho mayor que el tamaño característico del pozo de potencial y hay una probabilidad no despreciable de tener configuraciones del campo con amplitudes de  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ .

Estos estados iniciales altamente excitados han sido propuestos previamente como modelos para describir las etapas iniciales de una colisión ultrarelativista de iones pesados, y han recibido el nombre de estados tsunami [17, 16, 51].

Para destacar las diferencias entre estos estados y otras propuestas de inflación, resumimos los aspectos más destacables de los estados tsunami antes de pasar a estudiar las condiciones en las que estos estados dan lugar a inflación.

### Propiedades de los estados tsunami

- **Estados puros:** Los estados considerados, definidos por funcionales de onda de la forma (5.18), son *estados puros* frente a otras propuestas que parten de distribuciones térmicas de partículas (por tanto estados mezcla).
- **Valor esperado del campo escalar nulo:** Frente a los modelos de inflación caótica clásica en los que el campo escalar tiene un valor esperado grande, considerado como un campo clásico, el valor esperado del campo escalar en los estados tsunami dados por el funcional de onda (5.18) es *nulo*. [Ver también la sec. 5.3].
- **Modos altamente excitados:** El estado tsunami descrito por la ec. (5.18) con el núcleo de covarianza dado por las ecs. (5.23), (5.30) describe un estado en el cual los modos *dentro* de la banda excitada están ocupados con un número (adiabático) de cuantos no perturbativamente grande  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ . Es importante destacar que los modos de gran momento, que cruzaran el horizonte durante los últimos diez e-folds, y que por tanto hoy en día tienen consecuencias cosmológicas observables han de estar en el vacío para que no den lugar a grandes perturbaciones escalares de densidad [4, 48, 15, 18].

Este tipo de *estados cuánticos* es claramente un nuevo concepto, y representa una alternativa a los escenarios inflacionarios típicos que utilizan la dinámica de un campo escalar *clásico* que ignora la dinámica cuántica.

Los estados tsunami descritos son los más simples y serán los primeros que estudiaremos. Estos estados se pueden generalizar a estados mezcla (descritos por matrices densidad) y también a estados con valor esperado del campo escalar no nulo. Estas generalizaciones se describirán en las secciones 5.2.3 y 5.3 y en el apéndice 5.A; y veremos que presentan las mismas características cuantitativas que los estados puros más simples.

### 5.1.2 Reexpresión en tiempo comóvil: ecuaciones de movimiento renormalizadas

Tras haber establecido el estado inicial en función de los funcionales de onda tsunami iniciales, la dinámica está completamente determinada por el conjunto de ecuaciones de modo (5.21) con (5.16)-(5.17) y las condiciones iniciales (5.25). Sin embargo, para comparar con los resultados anteriores sobre el tema, es conveniente reescribir las ecuaciones de movimiento en tiempo comóvil. Para ello hemos de reescalar el campo según la ec. (5.7) lo que implica introducir unas funciones de modo en tiempo comóvil  $f_k(t)$  relacionadas con las de tiempo conforme  $\varphi_k(\mathcal{T})$  mediante

$$f_k(t) = \frac{\varphi_k(\mathcal{T})}{a(t)} \quad (5.32)$$

Las ecuaciones de movimiento en tiempo comóvil para estas funciones de modo son

$$\ddot{f}_k(t) + 3H(t)\dot{f}_k(t) + \left[ \frac{k^2}{a^2(t)} + \mathcal{M}^2(t) \right] f_k(t) = 0 \quad (5.33)$$

$$\mathcal{M}^2(t) = m^2 + \xi \mathcal{R}(t) + \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f_k(t)|^2 \quad (5.34)$$

$$f_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}}; \quad \dot{f}_k(0) = -[\omega_k(0)\delta_k + H(0) + i\Omega_k] f_k(0). \quad (5.35)$$

Las ecuaciones de Einstein-Friedmann son,

$$H^2(t) = \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi\rho_0}{3M_{Pl}^2}, \quad \rho_0 = \langle T_{00} \rangle, \quad (5.36)$$

donde el valor de expectación está tomado en el estado cuántico evolucionado. Como consecuencia de la homogeneidad y la isotropía del sistema el tensor de energía momento tiene la forma de un fluido perfecto [15, 18, 13].

Por tanto el conjunto de ecuaciones (5.33)-(5.36) nos proporcionan un conjunto cerrado de ecuaciones autoconsistentes para la dinámica del estado cuántico y la métrica del espacio-tiempo.

### Ecuaciones de movimiento renormalizadas en el límite de $N$ grande

Hay que renormalizar el conjunto de ecuaciones que determina la dinámica del estado cuántico  $y$  del factor de escala. Las fluctuaciones cuánticas del campo

$$\frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle}{N} = \int \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3} |f_k(t)|^2,$$

requieren sustracciones que son absorbidas en la renormalización de la masa, la constante de acoplo al escalar de Ricci y la constante de autoacoplo del campo. El valor esperado del tensor energía-momento también necesita sustracciones (pero no renormalizaciones multiplicativas). Como la estructura de las divergencias está determinada por el comportamiento a alta energía (cortas distancias), la banda de momentos excitados no influye en la renormalización. Por tanto, usaremos los resultados de los trabajos sobre renormalización de estas ecuaciones [15, 18, 13], a los que remitimos al lector para más detalles. Aquí resumiremos los aspectos más relevantes para la esta discusión.

Primero, resulta conveniente introducir las siguientes variables adimensionales,

$$\begin{aligned} \tau = m t \quad ; \quad h(\tau) = \frac{H(t)}{m} \quad ; \quad q = \frac{k}{m} \quad ; \\ \omega_q = \frac{\omega_k}{m} \quad ; \quad \Omega_q = \frac{\Omega_k}{m} \quad ; \quad g = \frac{\lambda}{8\pi^2} \quad ; \quad f_q(\tau) = \sqrt{m} f_k(t), \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde  $m$  y  $\lambda$  son la masa del inflatón renormalizada y la constante de autoacoplo renormalizada, respectivamente [15, 18]. En función de estas cantidades adimensionalizadas, las fluctuaciones cuánticas renormalizadas y adimensionalizadas son

$$\begin{aligned} g\Sigma(\tau) &\equiv \frac{\lambda}{2m^2} \langle \pi^2(t) \rangle_R \\ \Sigma(\tau) &= \int_0^\infty q^2 dq \left[ |f_q(\tau)|^2 - \frac{1}{q a(\tau)^2} + \frac{\Theta(q-1)}{2q^3} \left( \frac{\mathcal{M}^2(\tau)}{m^2} - \frac{\mathcal{R}(\tau)}{6m^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde los términos sustraídos dentro del integrando renormalizan la masa, la constante de acoplo al escalar de Ricci y la constante de autoacoplo del campo [15, 18, 13]. Las expresiones renormalizadas adimensionales para la densidad de energía  $\epsilon$  y la presión  $p$  son

$$\begin{aligned}
\epsilon(\tau) &\equiv \frac{\lambda}{2N m^4} \langle T^{00} \rangle_R = \\
&= \frac{g\Sigma(\tau)}{2} + \frac{[g\Sigma(\tau)]^2}{4} + \frac{g}{2} \int q^2 dq \left\{ |\dot{f}_q(\tau)|^2 - S_1(q, \tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{q^2}{a^2(\tau)} [ |f_q(\tau)|^2 - S_2(q, \tau) ] \right\} \\
p(\tau) &\equiv \frac{\lambda}{2N m^4} \langle T^{ii} \rangle_R \\
(p + \epsilon)(\tau) &= g \int q^2 dq \left\{ |\dot{f}_q(\tau)|^2 - S_1(q, \tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{q^2}{3a^2(\tau)} [ |f_q(\tau)|^2 - S_2(q, \tau) ] \right\} .
\end{aligned}$$

Donde las substracciones  $S_1$  y  $S_2$  están dadas por, [15, 18, 13]

$$\begin{aligned}
S_1(q, \tau) &= \frac{q}{a^4(\tau)} + \frac{1}{2qa^4(\tau)} [B(\tau) + 2\dot{a}^2] \\
&\quad + \frac{\Theta(q-1)}{8q^3 a^4(\tau)} [-B(\tau)^2 - a(\tau)^2 \ddot{B}(\tau) + 3a(\tau)\dot{a}(\tau)\dot{B}(\tau) - 4\dot{a}^2(\tau)B(\tau)] , \\
S_2(q, \tau) &= \frac{1}{qa^2(\tau)} - \frac{1}{2q^3a^2(\tau)} B(\tau) \\
&\quad + \frac{\Theta(q-1)}{8q^5 a^2(\tau)} \left\{ 3B(\tau)^2 + a(\tau) \frac{d}{d\tau} [a(\tau)\dot{B}(\tau)] \right\} , \\
B(\tau) &\equiv a^2(\tau) [1 + g\Sigma(\tau)] . \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Elegimos  $\xi = 0$  (acoplo mínimo al Ricci), el punto de renormalización en  $\kappa = |m|$  y  $a(0) = 1$ .

En resumen, el conjunto de ecuaciones de movimiento acopladas (auto-consistente) para el estado cuántico y el factor de escala son

$$\left[ \frac{d^2}{d\tau^2} + 3h(\tau) \frac{d}{d\tau} + \frac{q^2}{a^2(\tau)} + 1 + g\Sigma(\tau) \right] f_q(\tau) = 0 \tag{5.40}$$

$$f_q(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_q}} \quad ; \quad \dot{f}_q(0) = -[\omega_q \delta_q + h(0) + i \Omega_q] f_q(0) \quad (5.41)$$

$$\omega_q = \sqrt{q^2 + \left| 1 + g\Sigma(0) - \frac{\mathcal{R}(0)}{6m^2} \right|}, \quad (5.42)$$

más la ecuación de movimiento de Einstein-Friedmann para el factor de escala.

$$h^2(\tau) = L^2 \epsilon(\tau) \quad , \quad \text{donde } L^2 \equiv \frac{16 \pi N m^2}{3 M_{Pl}^2 \lambda}. \quad (5.43)$$

donde  $g\Sigma(\tau)$  y  $\epsilon(\tau)$  dado por las ecs. (5.38) y (5.39) respectivamente.

La implementación numérica es análoga a la descrita para el espacio-tiempo de Minkowski en la sección 1.8, con la única diferencia que en el sistema de ecuaciones de evolución hay una ecuación más que nos da la dinámica del factor de escala. Así para implementar numéricamente el conjunto de ecs. (5.40)-(5.41), (5.38) y (5.43) introduciremos un cutoff ultravioleta en momentos  $\Lambda$ . Para los casos tratados en este capítulo se puede considerar y consideraremos  $\Lambda \sim 200$  encontrando que los resultados no dependen del cutoff numérico.

Por otro lado en un modelo inflacionario escalar, la amplitud de las perturbaciones de densidad restringen los posibles valores del autoacoplo escalar a  $\lambda \sim 10^{-12}$  [4, 3, 47] lo que implica que  $g < 10^{-13}$ . Por lo tanto, la contribución de las substracciones es despreciable ya que  $S_i \sim O(g\Lambda^4) < 10^{-4}$ .

El estado inicial se determina especificando  $\Omega_q$  y  $\delta_q$ . Determinaremos el rango de estos parámetros  $\Omega_q$  y  $\delta_q$  a partir del espectro inicial del estado tsunami y de las condiciones que den lugar a inflación. Esto se estudia en detalle en el siguiente apartado.

## 5.2 Inflación caótica tsunami

Como destacamos en la sección anterior, el escenario considerado es muy distinto de los tratamientos habituales de la inflación basados en la evolución **clásica** del campo escalar del inflatón [45, 4, 3, 47, 48]. En estos escenarios clásicos se asume que toda la energía está en un modo cero al comienzo de la inflación y se supone que las fluctuaciones cuánticas son perturbativamente pequeñas de forma que se pueda despreciar su contribución a la energía y a la evolución del factor de escala.

Frente a esta descripción clásica, nuestra propuesta destaca la dinámica de los **estados cuánticos** como mecanismos para dar lugar a inflación. Los estados cuánticos iniciales considerados corresponden a una banda de modos cuánticos en estados altamente excitados, de ahí el nombre de tsunami [17, 16, 51]. Estos estados iniciales modelizan unas condiciones iniciales cosmológicas en las que la densidad de energía es no perturbativamente grande, pero concentrada en los cuantos en vez de en el valor esperado (o modo cero).

Estudiaremos bajo que condiciones generales estos estados dan lugar a un periodo inflacionario que satisface las restricciones cosmológicas para resolver las limitaciones de la teoría del Big Bang; entre ellas la solución del problema del horizonte, que nos da la necesidad de tener al menos 60 e-folds de inflación.

Recordemos que tenemos un periodo inflacionario cuando la expansión del Universo es acelerada, *i.e.*,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{h}^2 + \dot{h} = -\frac{L^2}{2}[\epsilon + 3p] > 0, \quad (5.44)$$

con  $L$  dado por la ec. (5.43) y  $\epsilon$  y  $p$  dados por las ecs. (5.39).

Aunque trataremos el caso general, comenzaremos por un caso sencillo el *tsunami estrecho*; que luego se generaliza fácilmente a otras distribuciones.

### 5.2.1 Estudio analítico: el tsunami estrecho

Antes de resolver numéricamente el conjunto completo de ecuaciones de evolución, vamos a obtener una estimación analítica de las condiciones bajo las cuales un estado inicial tsunami da lugar a inflación.

Para que dicho estado inicial represente una excitación de alta energía el número de cuantos en la banda de modos excitados ha de ser de  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ . Este criterio, como se ha explicado, es equivalente a requerir que las configuraciones del campo con amplitud no perturbativa tengan probabilidad funcional no nula. Es más fácil obtener soluciones analíticas en el caso en que la banda de modos excitados es *estrecha*, *i.e.*, su anchura  $\Delta k$  es tal que  $\Delta k \ll k_0$  o en función de variables adimensionales  $\Delta q/q_0 \ll 1$ . Introduciremos las siguiente distribuciones suaves

$$\Omega_q = \frac{\omega_q}{1 + \frac{\mathcal{N}_\Omega}{g} e^{-\left[\frac{q-q_0}{\sqrt{2}\Delta q}\right]^2}}, \quad \text{con } \frac{\Delta q}{q_0} \ll 1, \quad (5.45)$$

con  $\omega_q$  dado por la ec. (5.42) y  $\mathcal{N}_\Omega$  una constante de normalización que fija el valor de la energía total.

Además, elegimos  $\delta_q = -h(0)/\omega_q$  por las razones que se discuten más adelante, ver ec. (5.56).

La distribución inicial posee las principales características del estado tsunami descrito en la sección anterior. Como  $g \ll 1$ , tenemos para  $q \sim q_0$ ,

$$\frac{1}{\Omega_q} \sim \frac{1}{g} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad n_q \sim \frac{1}{g} \gg 1 \quad (5.46)$$

que corresponde a estados altamente excitados. Mientras que para  $|q - q_0| \gg \Delta q$

$$\frac{1}{\Omega_q} \sim \frac{1}{\omega_q} \quad \Rightarrow \quad n_q \sim 0. \quad (5.47)$$

por lo que estos modos están inicialmente en estados cuánticos cercanos al vacío conforme (adiabático).  $n_q$  es el número de cuantos en función de las variables adimensionales definido por la ec. (5.28) Para estas distribuciones (tsunamis estrechos), la integral sobre las funciones de modo que da las fluctuaciones cuánticas  $g\Sigma(\tau)$  [ec. (5.38)] está dominada por la banda estrecha de estados excitados con modos de amplitud  $\sim 1/\sqrt{g}$  y se puede aproximar por

$$g\Sigma(\tau) = g \Delta q q_0^2 |f_{q_0}(\tau)|^2 + O(g) + O(g \Delta q) \simeq |\phi_{q_0}(\tau)|^2, \quad (5.48)$$

donde hemos introducido un modo  $q_0$  efectivo

$$\phi_{q_0}(\tau) \equiv \sqrt{g \Delta q} q_0 f_{q_0}(\tau). \quad (5.49)$$

nótese que la condición inicial (5.41) y la condición de tsunami (5.46) implica que a pesar de la presencia de la constante de acoplo en su definición la amplitud del modo efectivo  $q_0$  es de  $\mathcal{O}(1)$ .

La ecuación de movimiento para el modo efectivo  $q_0$  tiene la forma

$$\ddot{\phi}_{q_0}(\tau) + 3h(\tau)\dot{\phi}_{q_0}(\tau) + \left[ \frac{q_0^2}{a^2(\tau)} + 1 + |\phi_{q_0}(\tau)|^2 \right] \phi_{q_0}(\tau) = 0. \quad (5.50)$$

El factor de escala se obtiene de

$$h^2(\tau) = L^2 \epsilon(\tau), \quad (5.51)$$

con la energía y la presión dadas por

$$\epsilon(\tau) = \frac{1}{2} |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \frac{1}{2} |\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \frac{1}{4} |\phi_{q_0}(\tau)|^4 + \frac{q_0^2}{2a^2(\tau)} |\phi_{q_0}(\tau)|^2,$$

$$(p + \epsilon)(\tau) = |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \frac{q_0^2}{3a^2(\tau)} |\phi_{q_0}(\tau)|^2. \quad (5.52)$$

donde hemos despreciado términos de  $\mathcal{O}(g)$ .

Nos referiremos al conjunto de ecuaciones de evolución (5.50)-(5.52) como las ecuaciones de evolución de la aproximación de un solo modo.

En particular, dentro de esta aproximación de un solo modo, la aceleración del factor de escala cumple

$$\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)} = -L^2 \left[ |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 - \frac{|\phi_{q_0}(\tau)|^2}{2} - \frac{|\phi_{q_0}(\tau)|^4}{4} \right] \quad (5.53)$$

Por lo que la condición de inflación  $\ddot{a} > 0$ , pasa a ser

$$|\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 < \frac{1}{2} |\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \frac{1}{4} |\phi_{q_0}(\tau)|^4. \quad (5.54)$$

Una condición suficiente para garantizar inflación es la *condición de deslizamiento lento tsunami*

$$|\dot{\phi}_{q_0}(\tau)| \ll |\phi_{q_0}(\tau)| \quad (5.55)$$

La condición inicial (5.41) y la condición  $\Omega_{q_0} \sim g \ll 1$  implican que la dinámica inicial verifica la condición de deslizamiento lento tsunami (5.55) si  $\delta_{q_0}$  cumple

$$|\omega_{q_0} \delta_{q_0} + h(0)| \ll 1 \quad (5.56)$$

Por tanto los estados iniciales que satisfagan la condición de deslizamiento lento tsunami (5.56) dan lugar a una *época inflacionaria*.

Para tener deslizamiento lento (5.55) posteriormente, el coeficiente efectivo de amortiguamiento  $3h(\tau)$  ha de ser mayor que la frecuencia cuadrado en las ecuaciones de evolución (5.40),

$$\frac{q_0^2 + 1 + g\Sigma(0)}{3h(0)} \ll 1. \quad (5.57)$$

(i.e. el modo  $q_0$  debe estar bien dentro del régimen sobreamortiguado). La ec. (5.57) implica que  $h(0) \gg 1$  y esto junto con la ec. (5.56) implica que  $\delta_{q_0}$  ha de ser negativo.

Un aspecto destacable del estado de tsunami estrecho es que la dinámica de la métrica (como veremos más adelante) acaba siendo similar a la obtenida en la *inflación caótica clásica* en la aproximación de deslizamiento lento

[4, 3, 47]. En particular la expresión para la aceleración (5.53) y la condición de deslizamiento lento (5.55) son similares a las obtenidas para modelos de inflación caótica clásica dominados por un campo clásico homogéneo (modo cero). Sin embargo, veremos que la dinámica inicial es marcadamente diferente. No hay que olvidar que las condiciones iniciales de los estados tsunami y la condición de deslizamiento lento tsunami (5.55) garantizada por el valor inicial (5.56) son de origen puramente cuántico. Es más recordemos que en los estados que estamos considerando el valor esperado del vacío se anula.

### Dinámica inicial

Tomando un estado inicial tsunami que cumpla las condiciones de deslizamiento lento (5.55) la contribución  $\dot{\phi}_{q_0}(\tau)$  en la energía y en la presión [ver ec. (5.52)] se puede despreciar si

$$|\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 \ll \frac{q_0^2}{3a^2(\tau)} |\phi_{q_0}(\tau)|^2. \quad (5.58)$$

Denotaremos por  $\tau_A$  a la escala de tiempo a la cual la relación deja de cumplirse. Es más, podemos aproximar  $\phi_{q_0}(\tau)$  por  $\phi_{q_0}(0)$  si

$$\tau_A \ll \left| \frac{\phi_{q_0}(0)}{\dot{\phi}_{q_0}(0)} \right|. \quad (5.59)$$

Esta condición se verifica al menos para  $\tau_A \lesssim 1$  debido a la condición de deslizamiento lento (5.55).

Durante este intervalo la ecuación de Friedmann (5.51) tendrá la forma,

$$\left[ \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} \right]^2 = L^2 \left[ \frac{1}{2} |\phi_{q_0}(0)|^2 + \frac{1}{4} |\phi_{q_0}(0)|^4 + \frac{q_0^2}{2a^2(\tau)} |\phi_{q_0}(0)|^2 \right] = \frac{D}{a^2(\tau)} + E. \quad (5.60)$$

donde usamos que  $g\Sigma(0) = |\phi_{q_0}(0)|^2$ . Esta ecuación es válida mientras que la escala de tiempo de variación de la métrica sea menor que la de variación del modo  $\phi_{q_0}(\tau)$ .

La ecuación anterior se puede integrar resultando

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{D}{E}} \sinh(\sqrt{E}\tau + c), \quad \frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)} = E > 0,$$

$$h(\tau) = \sqrt{E} \coth(\sqrt{E}\tau + c) \quad , \quad \dot{h}(\tau) = -\frac{E}{\sinh^2(\sqrt{E}\tau + c)} \quad , \quad (5.61)$$

donde las constantes  $D$ ,  $E$  y  $c$  están dadas por,

$$D = L^2 \frac{q_0^2}{2} g_{\Sigma_0} \quad , \quad E = L^2 \left( \frac{g_{\Sigma_0}}{2} + \frac{g_{\Sigma_0}^2}{4} \right) \quad , \quad \sinh c = \sqrt{\frac{E}{D}} \quad , \quad (5.62)$$

y  $g_{\Sigma_0} \equiv g_{\Sigma}(0) = |\phi_{q_0}(0)|^2$ .

Vemos de las ecs. (5.61) que este intervalo es una época inflacionaria con expansión acelerada  $\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)} = E > 0$ . También vemos que  $h(\tau)$  decrece con el tiempo hasta que alcanza el valor constante  $\sqrt{E}$  que determina el comienzo de una época de inflación cuasi-De Sitter.

Vamos a estimar el rango de validez de la solución en las ecs. (5.61). La primera condición, ec. (5.58), es más restrictiva que la segunda, ec. (5.59), para la mayor parte del rango interesante de parámetros.

$\tau_A$  determina la escala a la cual la solución (5.61) deja de ser válida, ya que deja de cumplirse la condición (5.58), *i.e.*,

$$|\dot{\phi}_{q_0}(\tau_A)|^2 \sim \frac{q_0^2}{3 a^2(\tau_A)} |\phi_{q_0}(\tau_A)|^2 \quad . \quad (5.63)$$

Cuando se cumple esta última relación,  $p+\epsilon$  pasa a ser del orden de  $|\dot{\phi}_{q_0}(\tau_A)|^2$  [como vemos en la ec. (5.52)]. Es más, la condición anterior junto con la de deslizamiento lento, ec. (5.55), da

$$\frac{q_0^2}{a^2(\tau_A)} \ll 1 \quad . \quad (5.64)$$

Por tanto, de la ec. (5.60) vemos que  $h(\tau_A) \sim \sqrt{E}$ .

Como la condición de deslizamiento lento garantiza que  $|\ddot{\phi}_q(\tau_A)| \ll |\phi_q(\tau_A)|$ , podemos usar la ec. (5.48) junto con la ecuación de evolución (5.50) en la que tomando  $h = \sqrt{E}$  nos da la siguiente relación

$$\dot{\phi}_{q_0}(\tau_A) \simeq -\frac{1 + g_{\Sigma_0}}{3\sqrt{E}} \phi_{q_0}(\tau_A) \quad . \quad (5.65)$$

Usando la ec. (5.63) la escala de tiempo  $\tau_A$  resulta ser

$$\tau_A \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \left[ \text{ArgSinh} \left( \frac{\sqrt{3} q_0 E}{\sqrt{D}(1 + g_{\Sigma_0})} \right) - c \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E}} \left[ \text{ArgSinh} \left( \frac{L\sqrt{3g\Sigma_0}(1+g\Sigma_0/2)}{\sqrt{2}(1+g\Sigma_0)} \right) - c \right]. \quad (5.66)$$

Este periodo inflacionario con un parámetro de Hubble decreciente existe mientras que el miembro de la derecha de la ecuación anterior sea positivo, *i.e.*,

$$q_0 > \frac{1+g\Sigma_0}{\sqrt{3E}}. \quad (5.67)$$

Para distinguir este periodo de los posteriores, que describimos a continuación, nos referiremos al periodo inflacionario inicial como inflación caótica tsunami ya que la característica evolución del factor de escala es consecuencia de la presencia del tsunami.

En  $\tau = \tau_A$  tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{q_0}(\tau_A) \simeq \phi_{q_0}(0) = \sqrt{g\Sigma_0} & , & \dot{\phi}_{q_0}(\tau_A) \simeq -\frac{1+g\Sigma_0}{3h(\tau_A)} \phi_{q_0}(\tau_A) , \\ a(\tau_A) \simeq \frac{\sqrt{3E}q_0}{1+g\Sigma_0} & , & h(\tau_A) \simeq \sqrt{E} . \end{aligned} \quad (5.68)$$

Para  $\tau > \tau_A$ ,  $q_0/a(\tau) \ll 1$  y los vectores de onda físicos de la banda excitada han sufrido un corrimiento al rojo tan grande que todos los términos que contienen  $q_0$  en las ecuaciones de evolución han pasado a ser despreciables. Por tanto, todos los modos en la banda excitada evolucionan como un modo  $q = 0$  **efectivo**.

Por tanto para  $\tau > \tau_A$  la dinámica del factor de escala está descrita por un modo cero efectivo homogéneo y es un régimen dinámico distinto del expuesto más arriba. Este régimen es equivalente al escenario de inflación caótica clásica.

### La época de inflación caótica clásica efectiva

Para  $\tau \gg \tau_A$ , cuando  $q_0^2/a^2 \ll |\dot{\phi}_q|^2/|\phi_q|^2 \ll 1$  todos los momentos físicos correspondientes a los modos en la banda excitada han sufrido un corrimiento al rojo tan grande que la contribución de los momentos es despreciable en las ecuaciones de movimiento (todos los modos de la banda excitada se comportan como modos cero efectivos). La dinámica está determinada ahora por el siguiente conjunto de ecuaciones para el modo cero efectivo y el factor

de escala,

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_{q_0}(\tau) + 3h(\tau)\dot{\phi}_{q_0}(\tau) + [1 + |\phi_{q_0}(\tau)|^2]\phi_{q_0}(\tau) &= 0, \\ h^2(\tau) &= L^2 \epsilon(\tau),\end{aligned}\tag{5.69}$$

donde la energía y la presión están dadas por,

$$\begin{aligned}\epsilon(\tau) &= \frac{1}{2} |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \frac{1}{2} |\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \frac{1}{4} |\phi_{q_0}(\tau)|^4, \\ (p + \epsilon)(\tau) &= |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2.\end{aligned}\tag{5.70}$$

Las condiciones iniciales para  $\phi_{q_0}$  y  $\dot{\phi}_{q_0}$  se determinan a partir de sus valores en  $\tau_A$ , mientras que la condición de deslizamiento lento (5.55) implica que las partes *imaginarias* de  $\phi_{q_0}$  y  $\dot{\phi}_{q_0}$  son despreciables.

Por tanto, después de  $\tau_A$  la dinámica es idéntica a la de un modo clásico homogéneo (modo cero)

$$\eta_{eff}(\tau) = \text{Re}[\phi_{q_0}(\tau)],\tag{5.71}$$

que satisface la ecuación de movimiento,

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_{eff} + 3h\dot{\eta}_{eff} + (1 + \eta_{eff}^2)\eta_{eff} &= 0, \\ h^2(\tau) &= L^2 \epsilon(\tau).\end{aligned}\tag{5.72}$$

con energía y presión,

$$\begin{aligned}\epsilon(\tau) &= \frac{1}{2} \dot{\eta}_{eff}^2 + \frac{1}{2} \eta_{eff}^2 + \frac{1}{4} \eta_{eff}^4, \\ (p + \epsilon)(\tau) &= \dot{\eta}_{eff}^2,\end{aligned}\tag{5.73}$$

y condiciones iniciales [usando la ec. (5.68)],

$$\begin{aligned}\eta_{eff}(\tau_A) &= \phi_{q_0}(\tau_A) = \phi_{q_0}(0) = \sqrt{g\Sigma_0}, \\ \dot{\eta}_{eff}(\tau_A) &= \dot{\phi}_{q_0}(\tau_A) = -\frac{1 + g\Sigma_0}{3h(\tau_A)} \eta_{eff}(\tau_A).\end{aligned}\tag{5.74}$$

Donde el valor de  $\dot{\eta}_{eff}(\tau_A)$  está determinado por la condición de deslizamiento lento ( $\Rightarrow \ddot{\phi}_{q_0}(\tau_A) \simeq 0$ ), las ecuaciones de evolución (5.50) y (5.64), y  $a(\tau_A)$  y  $h(\tau_A)$  están dados por la ec. (5.68).

Cuando  $g\Sigma_0 \ll 1$ , el término cuadrático en el potencial domina, y podemos integrar la ecuación anterior para obtener

$$\eta_{eff}(\tau) = \eta_{eff}(\tau_A) - \frac{\sqrt{2}}{3L}(\tau - \tau_A), \quad (\text{para } g\Sigma_0 \ll 1). \quad (5.75)$$

Esta evolución es similar a la de la inflación caótica clásica [4, 3, 47]. Por tanto, para  $\tau > \tau_A$  los momentos físicos en la banda excitada han sufrido un corrimiento al rojo tan grande que sus contribuciones a las ecuaciones de movimiento de los modos cuánticos y de la energía y la presión pasan a ser despreciables. Por lo que la evolución de los modos cuánticos y la de la métrica son equivalentes a las obtenidas con un escenario inflacionario caótico clásico dominado por un campo escalar clásico homogéneo. Esta equivalencia nos permite usar los resultados obtenidos para inflación caótica clásica. Por tanto, mientras que la condición de deslizamiento lento clásica ( $|\dot{\eta}_{eff}| \ll |\eta_{eff}|$ ) se cumpla, la evolución del campo escalar efectivo estará sobreamortiguada y el sistema entrará en una época de inflación cuasi-De Sitter. Este periodo inflacionario finaliza cuando el parámetro de Hubble que decrece lentamente llega a ser de del orden de la masa del inflatón, *i.e.*,  $3h \sim 1 + \eta_{eff}^2$ . En este momento el campo clásico efectivo sale del régimen sobreamortiguado y empieza a oscilar, la condición de deslizamiento lento deja de cumplirse y comienza una época dominada por la materia ( $|\dot{\eta}_{eff}| \sim |\eta_{eff}| \implies p \sim 0$ ).

Sin embargo, hay que destacar que aunque el modo cero efectivo  $\eta_{eff}$  cumpla una ecuación de movimiento clásica y las componentes del tensor energía-momento ec. (5.73) sean las de un campo clásico, este modo efectivo tiene un **origen puramente cuántico**. De la igualdad (5.74) y la ec. (5.48) está claro que el modo cero efectivo es una superposición colectiva de modos en la banda altamente excitada. Las condiciones iniciales del tsunami  $f_{q_0}(\tau_A) \sim 1/\sqrt{\Omega_{q_0}} \sim 1/\sqrt{g}$  implican que la amplitud del modo cero efectivo es  $\eta_{eff}(\tau_A) \sim 1$ . Restaurando las dimensiones y las potencias del acoplo que fueron absorbidas en la constante  $L$  de la ecuación de Friedmann encontramos que las ecuaciones de movimiento (5.72) con la energía y presión (5.73) son las de un campo clásico homogéneo (con dimensiones)  $\varphi_{eff}(t)$  con un potencial clásico  $V(\varphi_{eff})$  dado por

$$\begin{aligned} \varphi_{eff}(t) &= \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \eta_{eff}(\tau) \\ V(\varphi_{eff}) &= \frac{m^2}{2} \varphi_{eff}^2 + \frac{\lambda}{8} \varphi_{eff}^4 \end{aligned} \quad (5.76)$$

con el valor inicial en  $t_A = \tau_A/m$

$$\varphi_{eff}(t_A) \sim \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (5.77)$$

Así, la amplitud no perturbativa del modo cero efectivo es una consecuencia de la amplitud no perturbativa de los modos *cuánticos* excitados con un número de cuantos de  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ .

### Número de efolds

El número total de efolds es una importante magnitud cosmológica. Como hemos discutido anteriormente, hay dos etapas inflacionarias distintas, la primera está determinada por las ecuaciones (5.60)-(5.61) y caracterizada por una rápida disminución del parámetro de Hubble que finalmente tiende a una constante lo que conduce a una segunda época que será cuasi-De Sitter. Al primer periodo nos referimos como época de inflación tsunami para destacar que la dinámica está determinada por las características del estado tsunami inicial.

El segundo periodo está descrito por un modo cero efectivo y las ecuaciones de evolución (5.72), (5.73); y es análogo a un periodo de inflación caótica dominado por un campo escalar clásico homogéneo. La transición entre los dos regímenes ocurre en un tiempo  $\tau_A$  (en unidades de masa inversa del inflatón) dado por la ec. (5.66) en el que las contribuciones del término  $q_0^2/a^2(\tau)$  a las ecuaciones de movimiento pasan a ser despreciables. Por tanto hay dos contribuciones al número total de efolds, que está dado por

$$N_e(q_0, h(0)) = \log a(\tau_A) + N_e(0, h(\tau_A)) , \quad (5.78)$$

donde  $a(\tau_A)$  está dado por la ec. (5.68) y  $N_e(0, h(\tau_A))$  es el número de efolds de inflación caótica clásica si el valor inicial del parámetro de Hubble es  $h(\tau_A)$ . Se puede expresar  $h(\tau_A)$  como una función de  $q_0$  y  $h(0)$ ,

$$h(\tau_A) = L \sqrt{\frac{g\Sigma_0}{2} + \frac{(g\Sigma_0)^2}{4}} = \sqrt{h^2(0) - L^2 \frac{q_0^2}{2} g\Sigma_0} . \quad (5.79)$$

El número de efolds durante la primera época está dado por

$$\log a(\tau_A) \sim \log \left[ \frac{\sqrt{3E} q_0}{1 + g\Sigma_0} \right] \quad (5.80)$$

La expresión para el número de efolds durante el periodo de inflación caótica subsiguiente se simplifica cuando  $g\Sigma_0 \ll 1$ . En este caso el término cuadrático en el potencial domina, y podemos obtener una expresión analítica sencilla

$$N_e(0, h(\tau_A)) = \frac{3L^2}{4} \eta_{eff}^2(\tau_A) = \frac{3L^2}{4} g\Sigma_0 = \frac{3L^2}{2} \frac{\epsilon_0}{1+q_0^2}, \quad (\text{para } g\Sigma_0 \ll 1). \quad (5.81)$$

Vemos que para energía inicial  $\epsilon_0$  fija el número de efolds crece para  $q_0$  decreciente. Es decir, hay más efolds cuando la energía está concentrada en momentos pequeños. Ver fig. 1.

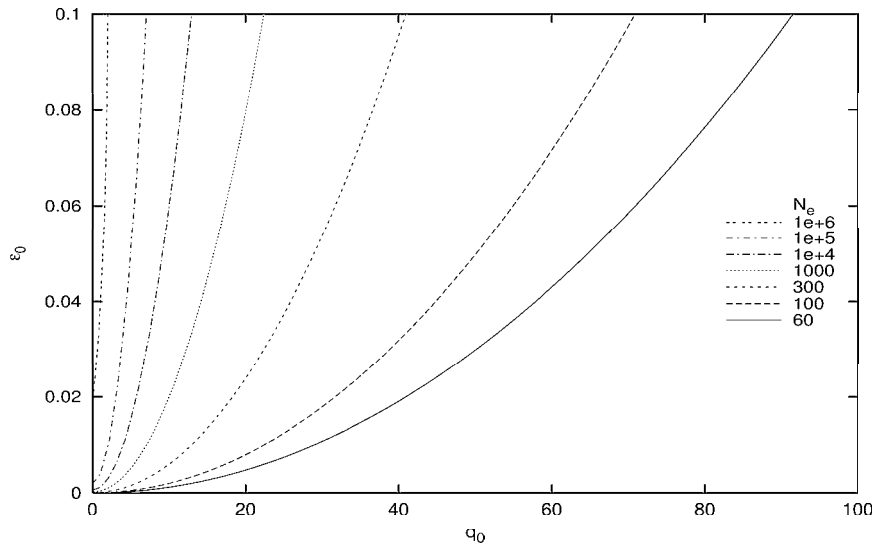


Figura 5.1: Isoclinas para número de efolds constante obtenidas de la ec. (5.81) (válida para  $g\Sigma_0 \ll 1$ ), para  $m = 10^{-4}M_{Pl}$ ,  $\lambda = 10^{-12}$  y  $N = 20$ .

### En resumen

Antes de mostrar los resultados del análisis numérico del conjunto completo de ecuaciones de evolución, vamos a resumir las principales características de la dinámica que se deducen del estudio del tsunami estrecho para compararlas con los resultados numéricos.

- Las condiciones para inflación tsunami son **i)** una banda de estados excitados centrada en un momento  $k_0$  con un número de cuantos no

perturbativo  $\mathcal{O}(1/g)$  en esa banda, y **ii**) la condición de deslizamiento lento tsunami ec. (5.55). Estos requerimientos están garantizados para las condiciones iniciales en las funciones de modo dadas por la ec.(5.41) con las distribuciones tsunami de la forma dada por las ecs. (5.45), (5.56).

- Hay dos periodos inflacionarios sucesivos. Durante el primero, descrito en la sec. 5.2.1, la dinámica está completamente caracterizada por las propiedades del estado inicial tsunami, el parámetro de Hubble decrece rápidamente y alcanza un valor aproximadamente constante  $\sqrt{E}$  que caracteriza la época inflacionaria cuasi-De Sitter del segundo periodo. La segunda época, descrita en la sec. 5.2.1 está dominada por un modo cero clásico efectivo y la evolución de este modo efectivo y del parámetro de Hubble son idénticas a las que se tienen en el escenario de inflación caótica clásica.
- El estado inicial tsunami se puede interpretar como una justificación *microscópica* del escenario caótico clásico descrito por un modo cero clásico efectivo de gran amplitud. La amplitud de este modo efectivo es *no perturbativa* como consecuencia del número no perturbativo  $\mathcal{O}(1/\lambda)$  de cuantos en la banda de modos excitados. Por lo que el valor inicial del modo cero clásico efectivo que describe el segundo periodo inflacionario está completamente determinado por el estado cuántico inicial.
- Un punto importante para la formación de estructura es que la banda de momentos excitada centrada en  $q_0$  está fuera del horizonte antes de que comience el segundo periodo inflacionario (de hecho lo está ya inicialmente debido a la condición de deslizamiento lento). Esto es importante ya que garantiza que los modos son superhorizonte mucho antes de los últimos diez efolds de inflación, y que por tanto no afectarán al espectro de potencia de las anisotropías del fondo cósmico de microondas. El hecho de que el estado inicial tsunami tenga en el vacío los modos de alta energía (necesariamente trans-Planckianos) que cruzan el horizonte durante los últimos diez efolds de inflación y que son por tanto los que tienen importancia cosmológica hoy, hace que los espectros de potencia sean análogos a los se obtienen para la inflación caótica clásica habitual.

A pesar de que estas conclusiones están basadas en el caso del tsunami estrecho, veremos que la integración numérica del conjunto completo de ecuaciones de movimiento confirma este esquema.

En las secciones 5.2.3 y 5.3 mostraremos como estos resultados se pueden extender fácilmente a *distribuciones de partículas más generales y estados iniciales más generales*.

### 5.2.2 Ejemplos numéricos

Para comparar con los modelos familiares de inflación que tienen un inflatón cuya masa está en la escala de gran unificación, escogeremos los siguientes valores de los parámetros:

$$\frac{m}{M_{Pl}} = 10^{-4} , \quad \lambda = 10^{-12} , \quad N = 20 \quad (5.82)$$

donde el número de campos escalares  $N = 20$  se ha elegido como uno genérico representativo de una teoría de gran unificación. Para estos valores tenemos

$$L^2 \equiv \frac{16 \pi N m^2}{3 M_{Pl}^2 \lambda} = 3.35 \cdot 10^6 .$$

Como ejemplo consideraremos una densidad de energía inicial  $\rho_0 = \langle T_{00} \rangle = 10^{-2} M_{Pl}^4$ . Así, el valor inicial del parámetro de Hubble es  $H_0 = \sqrt{8\pi\rho_0/3} M_{Pl} = 3.53 \cdot 10^{18} \text{ GeV} (= 1.654 \cdot 10^{52} \text{ km/s/Mpc})$ . En variables adimensionales estas condiciones iniciales son  $\epsilon_0 = 2.50$  y  $h(0) = 2890$ .

Además, las condiciones de deslizamiento lento (5.57) implican:

$$\frac{q_0^2 + 1 + g\Sigma_0}{3 h(0)} \ll 1$$

que en este caso implica

$$q_0 \ll 95 .$$

Elegiremos  $q_0 = 80.0$ , y las condiciones iniciales de la ec. (5.41) con  $\Omega_q$  y  $\delta_q$  dadas por la ec. (5.45) y (5.56). Estas condiciones iniciales cumplen las condiciones de deslizamiento lento tsunami,

$$|\omega_q \delta_q + h(0)| \ll 1 \quad (5.83)$$

Además, tomaremos  $\Delta q = 0.1$ .  $\mathcal{N}_\Omega$  se fija a partir del valor de  $g\Sigma(0) = g\Sigma_0$  que para los valores elegidos para  $\epsilon_0$  y por las ecuaciones (5.39) y (5.48), y (5.55) es  $g\Sigma_0 = 7.81 \cdot 10^{-4}$ .

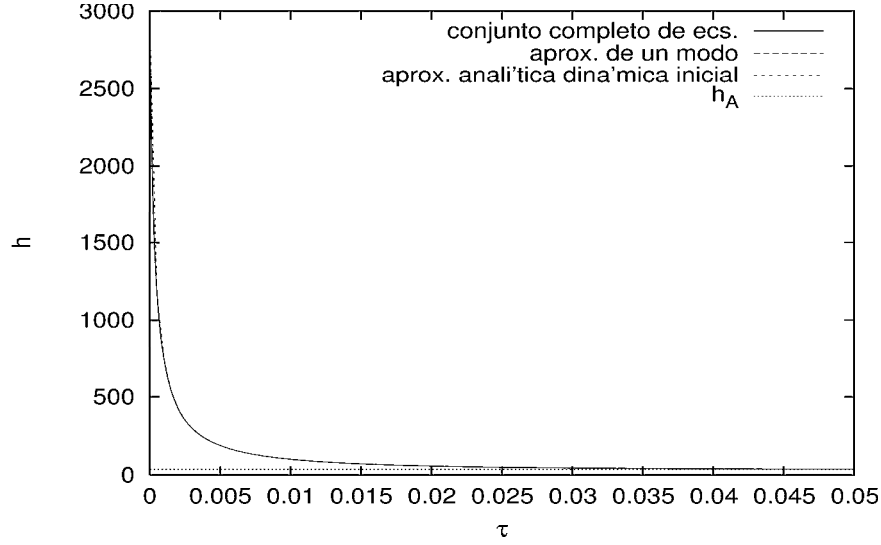


Figura 5.2: Dinámica inicial de  $h(\tau)$ .  $h_A \equiv h(\tau_A)$  es el valor asintótico para la dinámica inicial que termina a un tiempo  $\tau_A \sim 0.133$ . Para  $m = 10^{-4} M_{Planck}$ ,  $\lambda = 10^{-12}$  y  $N = 20$ . Condiciones iniciales:  $\rho_0 = 10^{-2} M_{Pl}^4$ ,  $q_0 = 80.0$  y  $\Delta q = 0.1q_0$ .

La figura 5.1 muestra las isoclinas de número de efolds en el plano  $(q_0, \epsilon_0)$ , mientras que las figuras 5.2-5.7 muestran la solución numérica del conjunto completo de ecuaciones de evolución (5.40)-(5.43) con (5.39). Una consecuencia importante que se deduce de estas figuras es que para el conjunto de parámetros típicos de inflación aunque el valor de  $q_0 = k_0/m$  sea grande el número de efolds obtenido es más que suficiente como se puede ver en la fig. 5.6.

También vemos que la dinámica del conjunto completo de ecuaciones de evolución (5.40)-(5.43) con (5.39) está bien reproducida por las ecuaciones obtenidas para el caso del tsunami estrecho estudiado en las subsecciones anteriores: la aproximación de un solo modo [ecs. (5.48)-(5.52)], la aproximación analítica para la dinámica inicial (para  $\tau \leq \tau_A$ ) [ecs. (5.61)-(5.62)], y el campo clásico efectivo (para  $\tau > \tau_A$ ) [ecs. (5.73)]. El buen acuerdo entre el tratamiento analítico y la evolución numérica completa se puede ver en las figuras 5.2-5.7.

La aproximación analítica para la dinámica inicial predice un periodo inflacionario durante el cual el parámetro de Hubble decae rápidamente, que

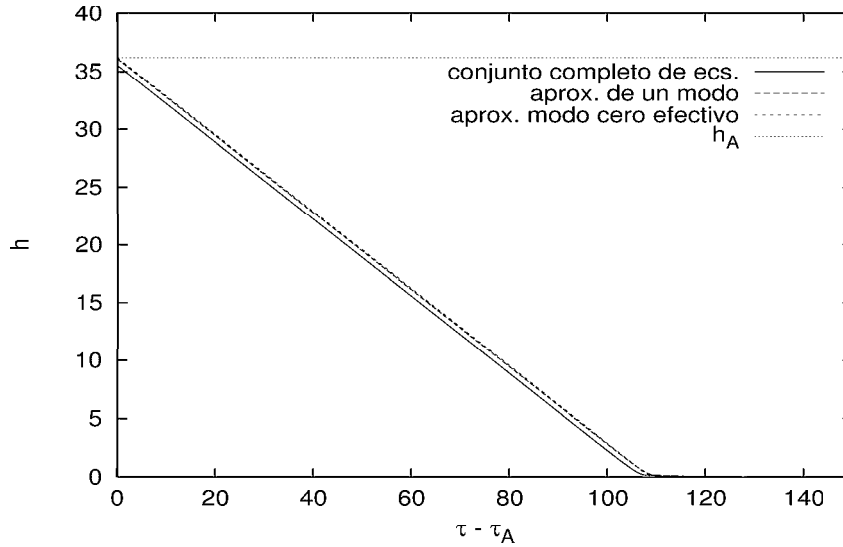


Figura 5.3:  $h(\tau)$  para  $\tau > \tau_A$ . La aproximación analítica para la dinámica inicial da  $h_A = 36.1$  (también la aprox. de un solo modo), numéricamente se obtiene  $h(\tau_A) = 35.5$ . Los parámetros y las condiciones iniciales son las mismas que en la fig. 5.2.

dura hasta  $\tau_A \sim 0.133$  [ec. (5.66)] yendo a un valor asintótico  $h(\tau_A) = 36.2$  [ecs. (5.62) y (5.68)]. La aproximación de un solo modo da la misma predicción  $h(\tau_A) = 36.1$ , y de la evolución numérica del conjunto completo de ecuaciones de movimiento tenemos  $h(\tau_A) = 35.5$ . Así, vemos de estos valores y de las figuras 5.2 y 5.3 que ambas aproximaciones son bastante precisas para la dinámica inicial.

Tras  $\tau_A$ , la métrica entra en una época cuasi-De Sitter. Hemos visto en la sección anterior que tras el tiempo  $\tau_A$  las ecuaciones de evolución para la aproximación de un modo se reducen a las de un campo clásico efectivo. La aproximación del modo cero efectivo predice correctamente la dinámica de esta época como se puede ver en las gráficas 5.3-5.6.

Mientras que la época inicial de inflación tsunami que dura hasta  $\tau_A$  nos da sólo 8.5 efolds, la siguiente época cuasi-De Sitter descrita por el campo escalar clásico efectivo dura hasta alcanzar un total de 1900 efolds. Para los valores de los parámetros elegidos (como ejemplo),  $g\Sigma_0 \ll 1$ , por tanto podemos estimar el número de efolds con la ec. (5.81). Usando la ec. (5.78) obtenemos un total de 1970 efolds mientras que la aproximación de un solo

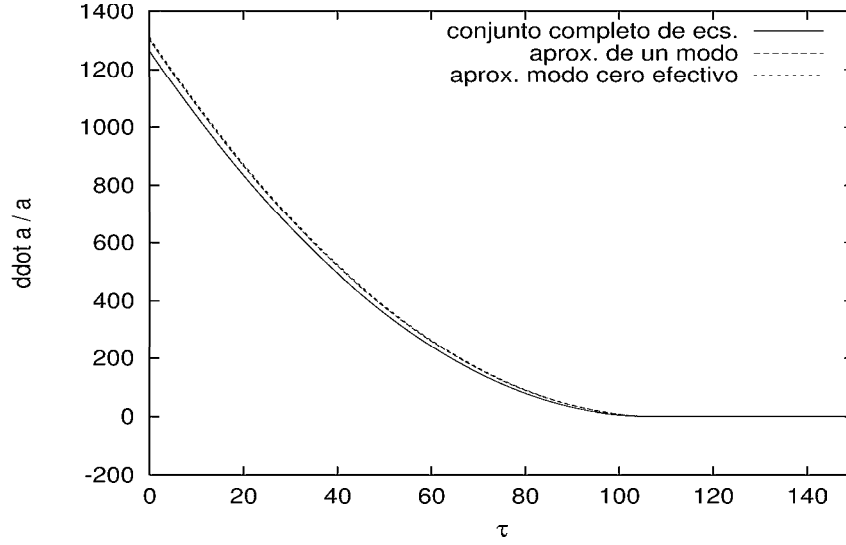


Figura 5.4:  $\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)}$ , muestra que la expansión es acelerada (inflación) hasta tiempos  $\tau \sim 109$ . Los parámetros y las condiciones iniciales son las mismas que en la fig. 5.2.

modo da 1960 efolds. Ambos resultados concuerdan con la solución numérica completa de las ecuaciones (ver fig. 5.6).

Es más, como hemos afirmado antes la inflación acaba cuando  $h \sim \frac{1+\eta_{eff}^2}{3} \sim \frac{1}{3}$ , tras lo cual comienza un época dominada por la materia.

### 5.2.3 Otras distribuciones y otros estados

En este apartado mostraremos como se generalizan los resultados previos para distribuciones genéricas en  $q$  y estados mezcla. Esta generalización muestra que el comportamiento para casos más genéricos es cualitativamente análogo.

#### Otras distribuciones:

El caso del tsunami estrecho, en el que un solo modo cuántico  $q_0$  domina, ha sido muy útil para estudiar la dinámica. La generalización para el caso de una distribución continua general de modos  $q$  se puede obtener fácilmente

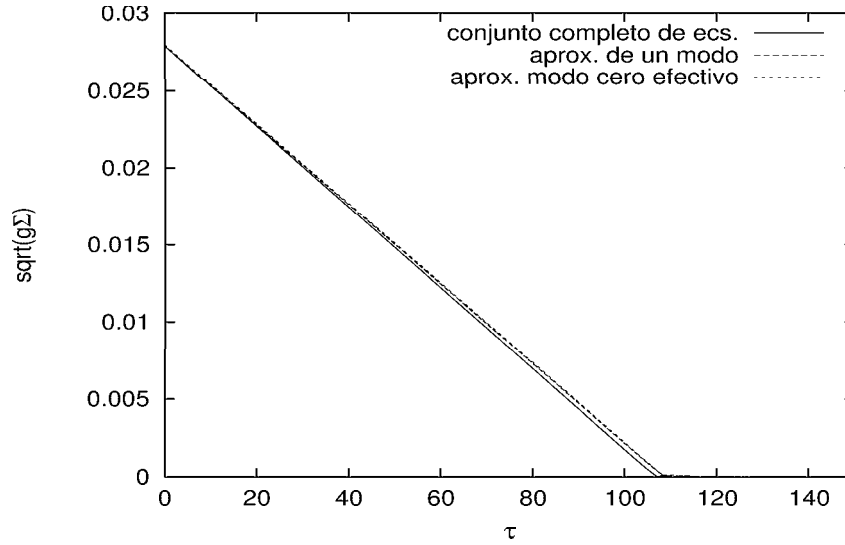


Figura 5.5:  $\sqrt{g\Sigma(\tau)}$ , tras  $\tau_A \sim 0.133$ , juega el papel de un campo clásico efectivo. Los parámetros y las condiciones iniciales son las mismas que en la fig. 5.2.

haciendo los cambios:

$$\begin{aligned}
 |\phi_{q_0}(\tau)|^2 &\rightarrow g \int q^2 dq |f_q(\tau)|^2, \\
 |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 &\rightarrow g \int q^2 dq |\dot{f}_q(\tau)|^2, \\
 q_0^2 |\phi_{q_0}(\tau)|^2 &\rightarrow g \int q^2 dq q^2 |f_q(\tau)|^2.
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

Los dos periodos de inflación siguen estando presentes para cualquier distribución continua de modos, siempre que satisfaga la siguiente condición de deslizamiento lento tsunami

$$g \int q^2 dq |\dot{f}_q(\tau)|^2 \ll g \int q^2 dq |f_q(\tau)|^2 \tag{5.85}$$

que impone sobre  $\delta_q$  la condición  $|\omega_q \delta_q + h(0)| \ll 1$ .

El modo cero efectivo en el segundo periodo inflacionario está dado ahora por

$$\eta_{eff}^2(\tau) = g \int q^2 dq |f_q(\tau)|^2.$$

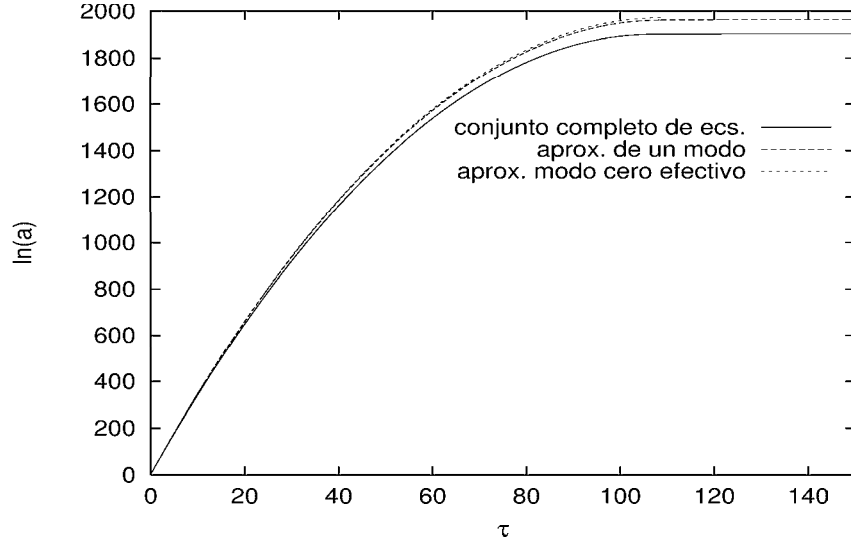


Figura 5.6:  $\ln[a(\tau)]$  vs.  $\tau$ . Los parámetros y las condiciones iniciales son las mismas que en la fig. 5.2.

El estudio numérico con distribuciones numéricas generales muestra que el esquema analítico obtenido haciendo las sustituciones (5.84) en la sec. 5.2.1 reproduce correctamente la dinámica.

### Otros estados (estados mezcla):

A pesar de que por simplicidad en las secciones anteriores nos hemos restringido a estados tsunami puros iniciales, también se ha investigado la posibilidad de estados mezcla. En el apéndice 5.A se discuten las matrices densidad consideradas y sus ecuaciones de evolución. La mezcla del estado se puede parametrizar en función de las variables  $\Theta_k$  como se muestra en la ec. (5.110). Por otro lado el número de cuantos (conformes) está dado por la ec. (5.124). El *único* cambio relevante es en las integrales para  $\Sigma(\tau)$ ;  $\varepsilon(\tau)$ ;  $p(\tau)$  en las cuales

$$|f_q(\tau)|^2 \rightarrow |f_q(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_q}{2} \right] \quad , \quad |\dot{f}_q(\tau)|^2 \rightarrow |\dot{f}_q(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_q}{2} \right] \quad (5.86)$$

Los estados tsunami (5.30) que cumplen la condición de deslizamiento lento tsunami (5.56) dan lugar a un periodo de inflación caótica tsunami seguido de otro de inflación caótica clásica (análogamente al caso del tsunami estrecho).

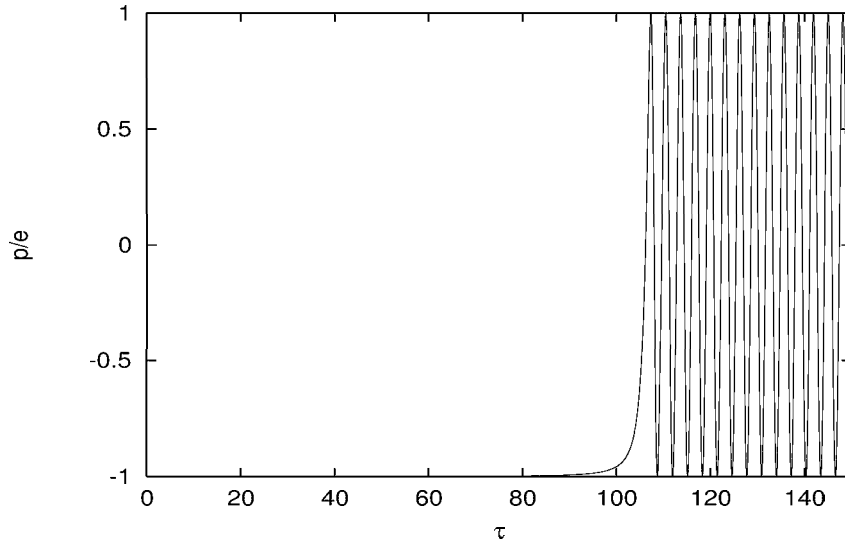


Figura 5.7:  $p(\tau)/\epsilon(\tau)$ . Muestra el comienzo de una época dominada por la materia tras la época cuasi-De Sitter. Los parámetros y las condiciones iniciales son las mismas que en la fig. 5.2.

El único cambio respecto del caso del tsunami estrecho puro es que el modo efectivo  $q_0$  se reescala por el factor de mezcla, *i.e.*,

$$|\phi_{q_0}(\tau)|^2 \rightarrow |\phi_{q_0}(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_{q_0}}{2} \right] , \quad |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 \rightarrow |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_{q_0}}{2} \right] \quad (5.87)$$

También es interesante comparar los estados mezcla tsunami con los más familiares estados mezcla *térmicos*. Estos últimos corresponden a la elección

$$\Omega_q = \omega_q ; \quad \delta_q = 0 ; \quad \Theta_q = \frac{\omega_q}{T} \quad (5.88)$$

donde  $T$  es el valor de la temperatura. Para estos estados es directo ver que la equipartición (cuántica) tiene como consecuencia que las contribuciones de los modos y de sus derivadas temporales a la energía y a la presión son del mismo orden ( $|\dot{f}_q(\tau)|^2 \sim [h(0)^2 + \omega_q^2] |f_q(\tau)|^2$ ). Así, los estados mezcla *térmicos* no verifican las condiciones de deslizamiento lento tsunami. Por lo que **no** es sorprendente que los estados *térmicos* den lugar a una época FRW no inflacionaria.

En resumen vemos que los **estados tsunami** que verifican la condición de deslizamiento lento tsunami dan lugar a **dos** épocas inflacionarias conse-

cutivas; (en marcado contraste con los familiares estados mezcla **térmicos**) que **no** dan lugar a inflación.

### 5.3 Inflación caótica generalizada

El análisis previo, confirmado por la evolución numérica del conjunto completo de ecuaciones lleva a una de las importantes conclusiones de este capítulo: los estados iniciales tsunami dan una justificación microscópica del escenario de inflación caótica.

En las secciones anteriores nos hemos centrado en la dinámica de estados iniciales con valor esperado nulo del campo escalar en los que la energía estaba concentrada en una banda de momento (estados iniciales tsunami). Esta elección resalta las diferencias de este nuevo **estado cuántico** y el tratamiento clásico usual de la inflación caótica.

Una pregunta interesante es como sería la dinámica si el estado inicial no tiene valor esperado nulo teniendo *además* parte de la energía inicial en cuantos de momento no nulo. En esta sección abordaremos esta cuestión estudiando en detalle este escenario alternativo, al que llamaremos inflación caótica generalizada para distinguirlo de la inflación caótica tsunami. Esta generalización incluye como casos límite: la inflación caótica clásica en el límite en que no hay modos excitados, y también la inflación caótica tsunami cuando toda la energía está en una banda de momento no nulo y el valor de expectación del campo se anula.

Las ecuaciones de movimiento en tiempo comóvil para los modos están dadas por la ec. (5.126) del apéndice 5.A. Además de las variables adimensionales (5.37) es también conveniente introducir un valor esperado adimensional

$$\eta^2(\tau) = \frac{\lambda}{2m^2} \phi^2(t) \quad (5.89)$$

En este caso generalizado con  $\eta \neq 0$  las ecuaciones de movimiento para las funciones de modo  $f_q(\tau)$  (en función de las variables adimensionales) son las mismas que en la ec. (5.40) tras la sustitución  $g\Sigma(\tau) \rightarrow g\Sigma(\tau) + \eta^2(\tau)$  y la ecuación de movimiento para  $\eta(\tau)$  es

$$\frac{d^2\eta(\tau)}{d\tau^2} + 3h(\tau)\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} + [1 + \eta^2(\tau) + g\Sigma(\tau)]\eta(\tau) = 0 \quad (5.90)$$

$$\eta(0) = \eta_0 \quad ; \quad \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 \quad (5.91)$$

La ecuación de Einstein-Friedmann es (5.43) pero con la energía y la presión dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau) &= \frac{1}{2}\dot{\eta}^2(\tau) + \frac{1}{2} (g\Sigma(\tau) + \eta^2(\tau)) + \frac{1}{4} (g\Sigma(\tau) + \eta^2(\tau))^2 + \\ &+ \frac{g}{2} \int q^2 dq \left\{ |\dot{f}_q(\tau)|^2 - S_1(q, \tau) + \frac{q^2}{a^2} [ |f_q(\tau)|^2 - S_2(q, \tau) ] \right\} \quad (5.92) \\ (p + \epsilon)(\tau) &= \dot{\eta}^2(\tau) + g \int q^2 dq \left\{ |\dot{f}_q(\tau)|^2 - S_1(q, \tau) + \frac{q^2}{3a^2} [ |f_q(\tau)|^2 - S_2(q, \tau) ] \right\}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

donde las substracciones de renormalización  $S_1$  ;  $S_2$  se obtienen a partir de las de la ec. (5.39) haciendo la sustitución  $g\Sigma \rightarrow g\Sigma + \eta^2$ .

A partir de está expresión vemos que para densidad de energía fija (grande) hay dos posibilidades; si el modo cero cuadrado  $\eta^2(0)$  es mayor que las fluctuaciones cuánticas  $g\Sigma(0)$  y que  $g \int q^4 dq |f_q(0)|^2$ , la dinámica es básicamente similar al escenario usual (clásico) de inflación caótica. A este caso corresponden estados iniciales en los que mayor parte de la densidad de energía inicial está en el modo cero y muy poca en la banda de modos excitados. Por otro lado, para  $\eta^2(0)$  pequeño la mayor parte de la densidad de energía inicial está en el estado cuántico tsunami y la dinámica es análoga a la del caso con  $\eta = 0$ . Para hacer estas afirmaciones más cuantitativas y clarificar los límites entre. volveremos a considerar el caso del tsunami estrecho, que contiene la física esencial.

Las ecuaciones importantes son las ecuaciones de evolución para el modo  $q_0$ - efectivo (5.49),

$$\ddot{\phi}_{q_0}(\tau) + 3h(\tau)\dot{\phi}_{q_0}(\tau) + \left[ \frac{q_0^2}{a^2(\tau)} + 1 + \eta^2(\tau) + |\phi_{q_0}(\tau)|^2 \right] \phi_{q_0}(\tau) = 0, \quad (5.94)$$

para el modo cero  $\eta$

$$\ddot{\eta}(\tau) + 3h(\tau)\dot{\eta}(\tau) + [1 + \eta^2(\tau) + |\phi_{q_0}(\tau)|^2] \eta(\tau) = 0 \quad (5.95)$$

y para el parámetro de Hubble dado por (5.51) donde la energía es

$$\epsilon(\tau) = \frac{1}{2} \left( |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \dot{\eta}^2(\tau) \right) + \frac{1}{2} (|\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau))$$

$$+\frac{1}{4} (|\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau))^2 + \frac{q_0^2}{2a^2(\tau)} |\phi_{q_0}(\tau)|^2. \quad (5.96)$$

La aceleración del factor de escala es ahora

$$\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)} = -L^2 \left[ |\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \dot{\eta}^2(\tau) - \frac{1}{2} (|\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau)) - \frac{1}{4} (|\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau))^2 \right] \quad (5.97)$$

donde hemos despreciado las contribuciones de las sustracciones de renormalización y otros términos de  $\mathcal{O}(g)$ , lo que es consistente ya que estamos en el límite de acoplamiento débil  $g \ll 1$ . De la ec. (5.97) la condición generalizada para que haya un periodo inflacionario (dentro del caso de tsunami estrecho) es

$$|\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \dot{\eta}^2(\tau) < \frac{1}{2} (|\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau)) + \frac{1}{4} (|\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau))^2 \quad (5.98)$$

que se cumple si se verifica la siguiente *condición de deslizamiento lento generalizada*

$$|\dot{\phi}_{q_0}(\tau)|^2 + \dot{\eta}^2(\tau) \ll |\phi_{q_0}(\tau)|^2 + \eta^2(\tau) \quad (5.99)$$

Para los casos en los que se verifica esta condición podemos distinguir los siguientes escenarios inflacionarios:

- **Dominado por el tsunami:** Cuando  $(q_0^2 + 1) |\phi_{q_0}(0)|^2 \gtrsim \eta^2(0)$  los estados excitados del tsunami contienen la mayor parte de la energía inicial. En este caso los resultados son los de la sección anterior 5.2, y el factor de escala tiene la forma dada en la ec. (5.60) con  $D$  dado por la ec. (5.62), y  $E$  dado por la ec. (5.62) pero con  $g\Sigma_0 \rightarrow g\Sigma_0 + \eta^2(0)$ . Hay **dos** épocas inflacionarias consecutivas como en la sección anterior. La primera descrita por la ec. (5.61), dura hasta un tiempo  $\tau_A$  definido por

$$\dot{\eta}^2(\tau_A) + |\dot{\phi}_{q_0}(\tau_A)|^2 \sim \frac{q_0^2}{3a^2(\tau_A)} |\phi_{q_0}(\tau_A)|^2 \quad (5.100)$$

al cual el corrimiento al rojo del momento  $q_0$  es tal que  $q_0/a(\tau_A) \ll 1$ . La segunda es una época inflacionaria clásica determinada por la dinámica de un modo cero efectivo dado por

$$\eta_{eff}^2(\tau) = \eta^2(\tau) + |\phi_{q_0}(\tau)|^2 \quad (5.101)$$

ya que para  $\tau > \tau_A$ ,  $q_0^2/a^2(\tau) \ll 1$  y la ecuación de movimiento efectiva para  $\phi_{q_0}(\tau)$  es la misma que para  $\eta(\tau)$ .

- **Dominado por el modo cero:** Cuando  $\eta^2(0) \gg (q_0^2 + 1) |\phi_{q_0}(0)|^2$  la densidad de energía contenida en el modo cero es mucho mayor que la contribución de los modos excitados del tsunami. En este caso la densidad de energía, ec. (5.96), está completamente dominada por el modo cero. La dinámica es la del familiar escenario de inflación caótica clásica dominado por un campo escalar clásico, *sin* un periodo inicial en que el factor de escala varía según la ec. (5.61) que es la característica de la dinámica del tsunami.

Este análisis en el caso de tsunami estrecho muestra los aspectos más importantes de la dinámica de forma clara, permitiendo una clara separación de los dos regímenes que hemos visto. La integración numérica del conjunto completo de ecuaciones de evolución reproduce los resultados descritos. El criterio para establecer la frontera entre inflación caótica tsunami y caótica clásica está determinado por las contribuciones relativas a la densidad de energía de las fluctuaciones cuánticas y del modo cero.

Los resultados previos [ecs.(5.89)-(5.101)] se pueden generalizar fácilmente a distribuciones continuas generales de partículas y para estados mixtos. Para ello basta hacer las sustituciones indicadas en la ec. (5.84) para distribuciones generales y en la ec. (5.86) para estados mixtos.

La condición de deslizamiento lento generalizada toma la forma:

$$\dot{\eta}^2(\tau) + g \int q^2 dq |\dot{f}_q(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_q}{2} \right] \ll \eta^2(\tau) + g \int q^2 dq |f_q(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_q}{2} \right] \quad (5.102)$$

durante el primer periodo inflacionario.

La dinámica está dominada por el tsunami si,

$$g \int q^2 dq (1 + q^2) |f_q(0)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_q}{2} \right] \gtrsim \eta^2(0) \quad (5.103)$$

El modo cero efectivo en el segundo periodo inflacionario ahora está dado por

$$\eta_{eff}^2(\tau) = \eta^2(\tau) + g \int q^2 dq |f_q(\tau)|^2 \coth \left[ \frac{\Theta_q}{2} \right]. \quad (5.104)$$

Estos resultados han sido verificados mediante integración numérica del conjunto completo de ecuaciones de evolución (5.39)-(5.43).

## 5.4 Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la inflación en una teoría de campos escalar como consecuencia de la evolución temporal de un novedoso estado cuántico. Este estado cuántico está caracterizado por un valor de expectación *nulo*, *i.e.*, un modo cero nulo, pero un número no perturbativo de cuantos en una banda de momentos, de ahí el nombre de estado tsunami.

Este estado posee una densidad de energía no perturbativamente grande que está localizada en una banda de modos excitados. Encontramos que las ecuaciones autoconsistentes para la evolución de este estado cuántico y del factor de escala dan lugar a inflación bajo condiciones que son el análogo cuántico del deslizamiento lento.

La evolución autoconsistente ha sido estudiada analítica y numéricamente en un amplio rango de parámetros para la forma y la posición de la distribución de cuantos excitados. Los resultados numéricos confirman todas las características obtenidas del tratamiento analítico.

Bajo las condiciones que garantizan la inflación, hay dos épocas inflacionarias distintas consecutivas. La primera muestra un rápido decrecimiento del parámetro de Hubble y está caracterizada por los aspectos cuánticos del estado. Durante el primer periodo el gran número de cuantos en la banda excitada se corren al rojo y forman un *condensado clásico homogéneo efectivo*. La amplitud de este condensado es no perturbativamente grande, de  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ , como consecuencia del número no perturbativamente grande de cuantos en el banda de modos excitados.

El segundo periodo inflacionario es similar al escenario caótico clásico y su dinámica está dominada por un condensado clásico efectivo, con valor esperado nulo del campo escalar. Bajo las condiciones de deslizamiento lento tsunami para el estado cuántico, el número total de e-folds es más que suficiente para satisfacer las restricciones de la cosmología inflacionaria. Antes de que comience el segundo periodo inflacionario, la banda de vectores de onda excitados está fuera del horizonte (de hecho lo está ya inicialmente debido a la condición de deslizamiento lento) por lo que estos modos excitados no modifican el espectro de potencias de las perturbaciones escalares de densidad para las longitudes de onda que hoy son de relevancia cosmológica.

Por tanto estos estados cuánticos tsunami dan una justificación desde la teoría cuántica de campos de los modelos de inflación caótica (o en general de campo grande), dando una explicación microscópica de la aparición de configuraciones de campos clásicos homogéneos con gran amplitud como un

modo colectivo efectivo que surge a partir de el gran número de cuantos en la banda excitada.

Además, en los escenarios de inflación caótica clásica [4, 5, 3] es necesario elegir un estado inicial que rompe la simetría  $\Phi \rightarrow -\Phi$ . Este **no** es el caso en el escenario que hemos presentado en este capítulo, ya que hemos mostrado que podemos tener inflación caótica incluso con un valor esperado **nulo** del campo escalar.

Por completitud también hemos estudiado estados más generales y hemos establecido la diferencia entre los estados cuánticos tsunami (puros o mixtos) que dan lugar a inflación (bajo ciertas condiciones), y los estados térmicos que no dan lugar a inflación.

## 5.A El límite de $N$ grande: Ecuaciones de movimiento y estados iniciales.

En este apéndice obtenemos las ecuaciones de movimiento en tiempo conforme para el caso general en el que el estado inicial es una matriz densidad. La evolución del funcional matriz densidad está dada por la ecuación de Liouville en tiempo conforme

$$i \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{T}} = [H, \rho] \implies$$

$$i \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} \rho[\vec{\Upsilon}, \vec{\Upsilon}; \mathcal{T}] = \left( H \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{\Upsilon}}; \vec{\Upsilon} \right] - H \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{\Upsilon}}; \vec{\Upsilon} \right] \right) \rho[\vec{\Upsilon}, \vec{\Upsilon}; \mathcal{T}] \quad (5.105)$$

donde el hamiltoniano  $H$  a orden dominante en límite de  $N$  grande está dado por la ec. (5.15). Consistentemente con el hecho de que en el límite de  $N$  grande el hamiltoniano describe una colección de osciladores armónicos, consideraremos matrices densidad gaussianas

$$\rho[\vec{\pi}, \vec{\pi}, \mathcal{T}] = \mathcal{N}_\rho(\mathcal{T}) \prod_k \exp \left\{ -\frac{A_k(\mathcal{T})}{2} \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} - \frac{A_k^*(\mathcal{T})}{2} \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} - B_k(\mathcal{T}) \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \right\} \quad (5.106)$$

La condición de hermiticidad  $\rho^\dagger = \rho$  de la matriz densidad impone que  $B_k$  sea real. Además, como  $\vec{\pi}(\mathbf{x}, \mathcal{T})$  es un campo real, sus componentes de Fourier cumplen la condición de hermiticidad  $\vec{\pi}_{-k}(\mathcal{T}) = \vec{\pi}_k^*(\mathcal{T})$ ; así, podemos tomar  $A_{-k}(\mathcal{T}) = A_k(\mathcal{T})$  sin pérdida de generalidad.

Las ecuaciones de evolución para  $A_k(\mathcal{T})$ ,  $\mathcal{N}(\mathcal{T})$  y  $B_k(\mathcal{T})$  se obtienen de la ecuación de Liouville (5.105) donde el hamiltoniano está dado por la ec. (5.15), y son

$$\begin{aligned} iA'_k &= A_k^2 - B_k^2 - a^2(\mathcal{T}) \omega_k^2(\mathcal{T}) \quad , \quad iB'_k = B_k (A_k - A_k^*) \\ \mathcal{N}_\rho(\mathcal{T}) &= \mathcal{N}_\rho(0) e^{-\frac{iN}{2} \int_0^\mathcal{T} d\tilde{\mathcal{T}} \sum_k [A_k(\tilde{\mathcal{T}}) - A_k^*(\tilde{\mathcal{T}})]} \quad , \end{aligned} \quad (5.107)$$

donde la prima denota derivada respecto al tiempo conforme  $\mathcal{T}$ .

El factor de normalización para los estados mixtos  $\mathcal{N}_\rho(\mathcal{T})$  está relacionado con el factor de normalización para los estados puros  $\mathcal{N}_\Psi(\mathcal{T})$  por

$$\mathcal{N}_\rho(\mathcal{T}) = \mathcal{N}_\Psi(\mathcal{T}) \mathcal{N}_\Psi(\mathcal{T})^* \quad (5.108)$$

donde

$$\mathcal{N}_\Psi(\mathcal{T}) = \mathcal{N}_\Psi(0) e^{-i \int_0^\mathcal{T} d\mathcal{T}' [NV h_{cl}(\mathcal{T}') - \frac{\lambda}{8N} (\sum_k (\bar{\pi}_k \cdot \bar{\pi}_{-k})(\mathcal{T}'))^2 + \frac{N}{2} \sum_k A_k(\mathcal{T}')] } \quad (5.109)$$

Escribiendo  $A_k$  en función de sus partes real e imaginaria  $A_k = A_{R,k} + iA_{I,k}$ , tenemos que  $B_k/A_{R,k}$  es una cantidad conservada. Así, podemos introducir sin pérdida de generalidad las variables  $\mathcal{A}_{R,k}(\mathcal{T})$ ,  $\mathcal{A}_{I,k}(\mathcal{T})$  y  $\Theta_k$  definidas por

$$\begin{aligned} A_{R,k}(\mathcal{T}) &\equiv \mathcal{A}_{R,k}(\mathcal{T}) \coth \Theta_k \quad , \quad A_{I,k}(\mathcal{T}) \equiv \mathcal{A}_{I,k}(\mathcal{T}) \\ B_k(\mathcal{T}) &\equiv - \frac{\mathcal{A}_{R,k}(\mathcal{T})}{\sinh \Theta_k} \end{aligned} \quad (5.110)$$

donde  $\Theta_k$  es una función real independiente del tiempo.

Introduciendo la variable compleja

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{R,k} + i\mathcal{A}_{I,k} \quad (5.111)$$

vemos que cumple la siguiente ecuación de Ricatti

$$i\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k^2 - a^2(\mathcal{T}) \omega_k^2(\mathcal{T}) \quad (5.112)$$

Esta ecuación se puede linearizar definiendo

$$\mathcal{A}_k(\mathcal{T}) \equiv -i \frac{\varphi'_k(\mathcal{T})}{\varphi_k(\mathcal{T})} \quad (5.113)$$

Entonces la ec. (5.112) implica que las funciones de modo  $\varphi_k$  cumplen

$$\begin{aligned}\varphi_k'' + \omega_k^2(\mathcal{T}) \varphi_k &= 0, \\ \omega_k^2(\mathcal{T}) &= k^2 + a^2(\mathcal{T}) \left[ \mathcal{M}^2(\mathcal{T}) - \frac{\mathcal{R}(\mathcal{T})}{6} \right],\end{aligned}\quad (5.114)$$

donde  $\mathcal{R}(\mathcal{T})$  es el escalar de Ricci.

La relación (5.113) define las funciones de modo  $\varphi_k(\mathcal{T})$  salvo una constante multiplicativa que elegimos de forma que el wronskiano tenga el valor,

$$\varphi_k \varphi_k'^* - \varphi_k' \varphi_k^* = 2i. \quad (5.115)$$

Para esta elección del wronskiano la definición (5.113) pasa a ser

$$\mathcal{A}_k = \frac{1}{|\varphi_k|^2} - \frac{i}{2} \frac{d}{d\mathcal{T}} \ln |\varphi_k|^2. \quad (5.116)$$

El término de masa en la ec. (5.114) está dado por la ec. (5.17) requiere conocer el valor esperado de las fluctuaciones cuánticas

$$\begin{aligned}\frac{\langle \vec{\pi}^2 \rangle_\rho}{N} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \rangle_\rho \\ \langle \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} \rangle_\rho &= \text{Tr} \rho \vec{\pi}_k \cdot \vec{\pi}_{-k} = \frac{1}{2 [A_{R,k} + B_k]} \\ &= \frac{1}{2 \mathcal{A}_{R,k}} \coth \left( \frac{\Theta_k}{2} \right) = \frac{1}{2} |\varphi_k|^2 \coth \left( \frac{\Theta_k}{2} \right)\end{aligned}\quad (5.117)$$

Así, las ecuaciones de evolución en función de las funciones de modo están dadas por la ec. (5.114) con

$$\mathcal{M}^2(\mathcal{T}) = m^2 + \xi \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \frac{\lambda}{2} \frac{v^2(\mathcal{T})}{a^2(\mathcal{T})} + \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\varphi_k(\mathcal{T})|^2}{a^2} \coth \left( \frac{\Theta_k}{2} \right) \quad (5.118)$$

Las ecuaciones de evolución para las funciones de modo  $\varphi_k(\mathcal{T})$  son las mismas que las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los campos, por lo que podemos escribir los operadores de campo de Heisenberg en función de las funciones de modo de la forma

$$\vec{\pi}(\mathbf{x}, \mathcal{T}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left[ \vec{a}_k \varphi_k(\mathcal{T}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \vec{a}_k^\dagger \varphi_k^*(\mathcal{T}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (5.119)$$

Por lo tanto la definición (5.113) da la relación entre la imagen de Schrödinger y la de Heisenberg, ya que la matriz densidad (5.106) está en imagen de Schrödinger.

El valor esperado  $v(\mathcal{T})$  [ver ec. (5.13)] en tiempo conforme cumple la siguiente ecuación de movimiento [15, 18]

$$v''(\mathcal{T}) + a^2(\mathcal{T}) \left[ \mathcal{M}^2(\mathcal{T}) - \frac{\mathcal{R}(\mathcal{T})}{6} \right] v(\mathcal{T}) = 0 \quad (5.120)$$

$$v(0) = v_0 \quad ; \quad v'(0) = v'_0 \quad (5.121)$$

Por lo que las ecuaciones de evolución son (5.114), (5.118) y (5.120) con (5.121).

La matriz densidad inicial en imagen de Schrödinger está determinada especificando los valores iniciales de  $\mathcal{A}_{R,k}$ ,  $\mathcal{A}_{I,k}$  y  $\Theta_k$ . Tomaremos  $a(0) = 1$  y parametrizaremos el valor inicial de  $\mathcal{A}_k$  de la siguiente forma,

$$\mathcal{A}_{R,k}(0) = \Omega_k \quad , \quad \mathcal{A}_{I,k}(0) = \omega_k(0) \delta_k \quad (5.122)$$

Las correspondientes condiciones iniciales para las funciones de modo se obtienen a partir de la ec. (5.122) usando la ec. (5.113) y la constancia de wronskiano ec. (5.115). Estas están dadas por

$$\varphi_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \quad ; \quad \varphi'_k(0) = -[\omega_k(0) \delta_k + i\Omega_k] \varphi_k(0) \quad (5.123)$$

Definiendo el número de partículas en función de los autoestados adiabáticos del hamiltoniano (5.15) como en la ec. (5.27), es directo obtener que los números de ocupación iniciales son

$$n_k(0) = \langle \hat{n}_k(0) \rangle_{\rho(0)} = \frac{\Omega_k^2 + \omega_k^2(0) + \omega_k^2(0) \delta_k^2}{4\omega_k \Omega_k} \coth\left(\frac{\Theta_k}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad (5.124)$$

Para todo valor del parámetro de mezcla  $\Theta_k \neq 0$  la matriz densidad representa un *estado mezcla* mientras que  $B_k \neq 0$ , un *estado puro* inicial se obtienen en el caso  $\Theta_k = \infty$ , en el cual  $B_k \rightarrow 0$  y la matriz densidad pasa a ser un producto de un funcional de onda y su complejo conjugado.

Es conveniente reexpresar las ecuaciones en tiempo comóvil, para ello hemos de reescalar los campos

$$v(\mathcal{T}(t)) = \phi(t) a(t) \quad , \quad \varphi_k(\mathcal{T}(t)) = f_k(t) a(t) \quad (5.125)$$

5.A. EL LÍMITE DE  $N$  GRANDE: ECS. DE MOV. Y ESTADOS INICIALES 153

en términos de ellos las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) + 3H(t)\dot{\phi}(t) + \mathcal{M}^2(t)\phi(t) &= 0 \\ \ddot{f}_k(t) + 3H(t)\dot{f}_k(t) + \left[ \frac{k^2}{a^2(t)} + \mathcal{M}^2(t) \right] f_k(t) &= 0 \\ \mathcal{M}^2(t) = m^2 + \xi \mathcal{R}(t) + \frac{\lambda}{2} \phi^2(t) + \frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f_k(t)|^2 \coth\left(\frac{\Theta_k}{2}\right) & \quad (5.126) \end{aligned}$$

donde los puntos denotan derivación respecto al tiempo comóvil  $t$ . Las condiciones iniciales para el parámetro de orden son: su valor inicial  $\phi(0)$ , y su derivada  $\dot{\phi}(0)$ . Para  $a(0) = 1$ , el valor inicial para las fluctuaciones está dado por  $\Theta_k$  y

$$f_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} ; \quad \dot{f}_k(0) = -[\omega_k(0) \delta_k + H(0) + i\Omega_k] f_k(0) \quad (5.127)$$

[Estas son las transformadas de las condiciones iniciales en tiempo conforme ec. (5.123).]



# Parte III

## Conclusiones



# Conclusiones

En esta tesis se ha investigado la dinámica de campos cuánticos fuera del equilibrio en modelos  $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$  (donde  $\vec{\Phi}$  tiene  $N$  componentes escalares). Para ello se ha utilizado la aproximación de  $N$  grande, que es un poderoso método para el estudio de la dinámica fuera del equilibrio de los fenómenos no perturbativos. La aproximación de  $N$  grande permite tratar de forma sistemática estos fenómenos, tiene en cuenta los efectos cuánticos, es renormalizable, respeta las leyes de conservación, es implementable numéricamente, y se puede mejorar consistentemente incluyendo órdenes superiores en  $1/N$ . Una comprobación de la bondad de la aproximación de  $N$  grande son los excelentes resultados para cantidades en equilibrio [14]. Pero como ya hemos resaltado (al contrario que para otros métodos) la validez de la aproximación de  $N$  grande es mayor y se puede utilizar para el cálculo de la dinámica de sistemas fuera del equilibrio.

Se ha comenzado estudiando la dinámica de estados cuánticos con un número no perturbativo de partículas (tsunami) *en ausencia de campo externo* (capítulo 2). Hemos descrito la importante influencia que tiene en la dinámica los efectos no lineales y la decoherencia, así como otros fenómenos físicos como la restauración dinámica de la simetría, la rotura dinámica de la simetría y la aparición de bosones de Goldstone fuera del equilibrio.

La gran variedad de evoluciones físicas cubierta proporciona un mecanismo nuevo y no perturbativo para la producción de partículas y la relajación a través de procesos fuera del equilibrio que no pueden ser descritos por una evolución hidrodinámica. Estos nuevos mecanismos son de potencial interés para la física de colisiones ultrarelativistas de iones pesados.

Especialmente interesante en este contexto es la presencia de comportamientos de scaling generalizado en la función de correlación asintótica como huella de una abundante producción de bosones de Goldstone fuera del equilibrio (debido a la rotura de la simetría y a la anulación de la masa efectiva

asintótica). Estos nuevos comportamientos de scaling generalizan el comportamiento estándar de scaling encontrado en trabajos anteriores [22] y se deben a la presencia de bosones de Goldstone de masa nula producidos por inestabilidad espinodal en estas situaciones fuera del equilibrio.

Otro fenómeno destacable es que a pesar de que las ecuaciones de evolución tienen simetría bajo inversión temporal, hay una irreversibilidad efectiva debido al desfase de los modos [31].

Se ha observado que en *ausencia de campo externo* en el caso de simetría rota para estados con energía menor que la del falso vacío la masa efectiva cuadrado tiende asintóticamente a cero. Ver capítulo 2, y para estados iniciales sin partículas ver ref. [21].

Otra cuestión importante es la no termalización en la aproximación de  $N$  grande a orden dominante. Actualmente algunos trabajos sugieren que incluyendo correcciones  $1/N$  el sistema termalizaría [25], mientras que otros sugieren que basta considerar estados inhomogéneos [29]. El estudio de estados inhomogéneos es además interesante en si mismo, ya que proporciona estados más realistas para describir colisiones.

Tanto el estudio de la termalización como el de estados inhomogéneos son importantes cuestiones que esperamos abordar en el futuro. (Ambos problemas requieren un gran trabajo numérico.)

En el capítulo 3 se ha estudiado la dinámica no perturbativa *en presencia de un campo externo*. En particular se ha estudiado la dinámica del estado fundamental para  $J > 0$  pequeño tras un cambio de signo en el campo externo ( $\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$ ). El cambio de signo del campo externo provoca inestabilidades espinodales y resonancias paramétricas que producen un abundante número de partículas (de orden  $1/\lambda$ ). Esto hace que el funcional de onda se ensanche permitiendo valores grandes para las componentes del campo transversas a  $\vec{J}$ . En el caso en que la zona del mínimo global está clásicamente prohibida gracias a estos valores grandes de las fluctuaciones transversas del campo el sistema rodea el máximo del potencial y alcanza la zona del mínimo global sin necesidad de efecto túnel.

Hemos obtenido también que la evolución de este estado presenta a tiempos intermedios un régimen cuasi-periódico de amortiguación lenta. Incluso cuando el sistema tiene energía menor que la del falso vacío, la masa efectiva cuadrado es positiva y de orden  $J$  (a diferencia de los casos con  $J = 0$  vistos en el capítulo 2).

En la segunda parte de esta tesis se han generalizado los métodos y los conceptos de los capítulos 1 y 2 para estudiar la posibilidad de obtener inflación caótica en el Universo primordial a partir de un estado cuántico altamente excitado. En particular hemos visto que se puede obtener inflación a partir de un estado cuántico con un gran número (no perturbativo) de cuantos (estado tsunami), aunque el valor esperado del campo en ese estado sea nulo. Hemos estudiado también el caso general en que parte de la energía está los cuantos y parte en el valor esperado. Ello nos ha permitido establecer una condición de deslizamiento lento generalizada, que es una condición suficiente para tener inflación.

En el caso más general, la evolución dentro del escenario de inflación caótica generalizada consta de dos periodos inflacionarios: El primero (inflación caótica tsunami) está caracterizado por las propiedades del estado tsunami inicial, los modos sufren un enorme corrimiento al rojo y el parámetro de Hubble un rápido decrecimiento, finalmente el corrimiento al rojo acaba provocando la formación de un condensado clásico homogéneo efectivo y la constante de Hubble alcanza un valor constante. La segunda época comienza tras la formación del condensado clásico homogéneo efectivo, esta época inflacionaria es análoga a la inflación caótica clásica (cuasi-De Sitter).

Así el escenario que hemos presentado da una justificación microscópica de la inflación, permite tener inflación caótica sin necesidad de romper la posible simetría  $\Phi \rightarrow -\Phi$  del potencial, proporciona unas condiciones de deslizamiento lento generalizadas (que son condiciones suficientes para tener inflación).

Dentro de las posibles líneas de investigación futuras además de las ya citadas:

- inclusión de correcciones  $1/N$  en las ecuaciones de movimiento (terminación, mejora de la aproximación),
- estudio de estados inhomogéneos (modelos más realistas para colisiones ultrarelativistas de iones pesados);

se pueden añadir:

- estudio de los estados que darían lugar a nueva inflación,
- estudio de la dinámica del inflatón en presencia de un campo electromagnético (campo magnético primordial).

- introducción de un segundo campo (estudio del recalentamiento posterior a inflación, inflación híbrida),
- aplicaciones a la formación y dinámica de los condensados de Bose-Einstein.

# Bibliografía

- [1] J. W. Harris, B. Muller, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **46**, 71 (1996).  
B. Muller in *Particle Production in Highly Excited Matter*, Eds. H.H. Gutbrod, J. Rafelski, NATO ASI series B, vol. 303 (1993).  
B. Muller, *The Physics of the Quark Gluon Plasma Lecture Notes in Physics*, Vol. 225 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985).  
K. Geiger, *Phys. Rep.* **258**, 237 (1995); *Phys. Rev.* **D46**, 4965 (1992); *Phys. Rev.* **D47**, 133 (1993); *Quark Gluon Plasma 2*, Ed. by R. C. Hwa, World Scientific, Singapore, 1995.  
X. N. Wang, *Phys. Rep.* **280**, 287 (1997).  
M. H. Thoma, in *Quark Gluon Plasma 2*, ed. by R. C. Hwa, World Scientific, Singapore, 1995.
- [2] A. H. Guth, *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981).
- [3] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, (Harwood Academic Publishers, London, 1990).
- [4] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, (Addison Wesley, Redwood City, C.A. 1990).
- [5] P. Coles, F. Lucchin, *Cosmology*, (John Wiley, Chichester, 1995).
- [6] G. Taubes, *Science* **269**, 152 (1995).
- [7] K. Burnett, *Science* **269**, 182 (1995).
- [8] M. H. Anderson *et al.*, *Science* **269**, 198 (1995).

- [9] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, Phys.Rev. **D55** 6471 (1997).  
F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz, P. R. Anderson, Phys. Rev. **D50**, 2848 (1994).  
F. Cooper, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz, Phys. Rev. **D51**, 2377 (1995).  
F. Cooper, S.-Y. Pi, P. N. Stancioff, Phys. Rev. **D34**, 3831 (1986).
- [10] F. Cooper, E. Mottola, Mod. Phys. Lett. **A 2**, 635 (1987); Phys. Rev. **D36**, 3114 (1987).
- [11] D. Cormier. Non-Equilibrium Field Theory Dynamics in Inflationary Cosmology. PhD thesis; hep-ph/9804449.
- [12] J. Baacke, K. Heitmann, C. Pätzold, Phys. Rev. **D58**, 125013 (1998).
- [13] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman et S. Prem Kumar, Phys. Rev. **D57**, 2166, (1998),  
D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, A. Singh, M. Srednicki; Phys. Rev. **D56** 1939 (1997).  
D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, Phys. Rev. **D55**, 3373 (1997).
- [14] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford Science Publications, 1989.
- [15] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, in the Proceedings of the VIIth. Erice Chalonge School on Astrofundamental Physics, N. Sánchez ed., Kluwer, Series C, 2000, astro-ph/0006446.
- [16] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, S. Prem Kumar, R. D. Pisarski, Phys. Rev. **D57**, 3653 (1998).
- [17] Robert D. Pisarski ‘Nonabelian Debye screening, tsunami waves, and worldline fermions’ in the Proceedings of the International School of Astrophysics ‘D. Chalonge’, Erice, Italy, Sept. 4-15, 1997, p. 195, editors N. Sánchez, A. Zichichi, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

- [18] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, Phys. Rev. **D49**, 2769 (1994).  
D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, A. Singh, M. Srednicki, Phys. Rev. **D56**, 1939 (1997).  
D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, Phys. Rev. **D55**, 3373 (1997).
- [19] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, D.-S. Lee, A. Singh, Phys. Rev. **D51**, 4419 (1995).  
D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, Proceedings of the Second Paris Cosmology Colloquium, Observatoire de Paris, June 1994, pp. 127-215, editores H. J. de Vega, N. Sánchez, World Scientific, 1995; Advances in Astrofundamental Physics, Erice Chalonge School, editores N. Sánchez, A. Zichichi, World Scientific, 1995.  
D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, Vth. Erice Chalonge School, Current Topics in Astrofundamental Physics, editores N. Sánchez, A. Zichichi, World Scientific, 1996, p. 183-270.  
D. Boyanovsky, M. D'Attanasio, H. J. de Vega, R. Holman, D. S. Lee, Phys. Rev. **D52**, 6805 (1995).
- [20] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, J. Salgado, Phys. Rev. **D54**, 7570 (1996).
- [21] D. Boyanovsky, H.J. de Vega, C. Destri, R. Holman, J. Salgado, Phys. Rev. **D57**, 7388 (1998).
- [22] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, J. Salgado, Phys. Rev. **D59**, 125009 (1999).
- [23] E. Manfredini. Aspects of Non-Equilibrium Dynamics in Quantum Field Theory. PhD thesis; hep-ph/0101202.  
C. Destri, E. Manfredini, Phys. Rev. **D62**, 025007 (2000)
- [24] P. J. Peebles, 'Principles of Physical Cosmology', Princenton Univ. Press, 1993;  
H. Heiselberg, 'Phases of Dense Matter in Neutron Stars', p. 129 in the Proceedings of the VI Paris Cosmology Colloquium, editores H J de Vega, N. Sánchez, Observatoire de Paris, 1999.

- [25] J. Berges, ‘Controlled nonperturbative dynamics of quantum fields out of equilibrium’, hep-ph/0105311.
- [26] J. Salgado, ‘A hierarchy of sum-rules in out of equilibrium QFT’, hep-th/9905106.
- [27] S. Yu. Khlebnikov, I. I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 1607.  
T. Prokopec, T. G. Roos, Phys. Rev. **D55** (1997) 3768.
- [28] V. E. Zakharov, V. S. L’vov, G. Falkovich, Kolmogorov spectra of turbulence I, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [29] G Aarts, J Smit, Phys.Rev. **D61** (2000) 025002.
- [30] J Hormuzdiar, S D H Hsu, G Mahlon, ‘Particle multiplicities and Thermalization in High Energy Collisions, nucl-th/0001044.
- [31] S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz, Phys. Rev. Lett. **76**, 4660 (1996).
- [32] F. J. Cao, H. J. de Vega, Phys. Rev. **D63**, 045021 (2001).
- [33] Sz. Borsányi, A. Pátkos, J. Polonyi, Zs. Szép, Phys. Rev. **D62**, 085013 (2000).
- [34] G. B. Whitham, ‘Linear and nonlinear waves’, John Wiley, 1974.
- [35] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, New York (1972).
- [36] E. P. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [37] A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419-421 (1965).
- [38] C. Bennett *et al.*, Astrophys. J. **464**, L1 (1996).
- [39] J. Bardeen, Phys. Rev. **D22**, 1882 (1980).
- [40] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 293 (1992).

- [41] P. de Bernardis *et al.*, ‘Multiple Peaks in the Angular Power Spectrum of the Cosmic Microwave Background: Significance and Consequences for Cosmology’, 2001. astro-ph/0105296.  
C.B. Netterfield *et al.*, ‘A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background’, 2001. astro-ph/0104460.  
<http://www.physics.ucsb.edu/boomerang/>
- [42] R. Stompor *et al.*, ‘Cosmological Implications of the MAXIMA-1 High Resolution Cosmic Microwave Background Anisotropy Measurement’, 2001. astro-ph/0105062.  
Lee, A.T. *et al.*, ‘A High Resolution Analysis of the MAXIMA-1 Cosmic Microwave Background Anisotropy Data’, 2001. astro-ph/0104459.  
<http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/index.html>
- [43] A. D. Linde, Nuovo Cimento, Lettere, Serie 2, vol. 39, April 28, 1984, p. 401-405.
- [44] M. S. Turner, J. A. Tyson, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) S145.
- [45] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49**, 77 (1999).  
A. H. Jaffe *et al.*, ‘Cosmology from Maxima-1, Boomerang and COBE/DMR CMB Observations’, astro-ph/0007333.
- [46] A. H. Guth, ‘Eternal Inflation’, astro-ph/0101507.
- [47] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, (Cambridge University Press, 2000)
- [48] A. R. Liddle, ‘The Early Universe’, in ‘*From quantum fluctuations to cosmological structures*’, eds D Valls-Gabaud, M A Hendry, P Molaro, K Chamcham, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. **126**, 31 (1997).
- [49] J. Lidsey, A. Liddle, E. Kolb, E. Copeland, T. Barreiro, M. Abney, Rev. of Mod. Phys. **69** 373, (1997).

- [50] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986).
- [51] F. J. Cao, H. J. de Vega, Phys. Rev. **D63**, 045021 (2001).
- [52] D. Boyanovsky, F. J. Cao, H. J. de Vega, *Inflation from tsunami-waves*, LPTHE/01-11, astro-ph/0102474, 42 pág., (2001).
- [53] F. J. Cao, H. J. de Vega, *Out of equilibrium quantum field dynamics with homogeneous external fields*, LPTHE/01-30, 35 pág., (2001).