# UNIVERSIDAD DE MADRID
## FACULTAD DE CIENCIAS


TESIS DOCTORAL

# Introducción a la teoría de semimódulos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR


**Francisco Poyatos Suárez**


**Madrid, 2015**

# UNIVERSIDAD DE MADRID

## FACULTAD DE CIENCIAS



Serie A-n.° 62 SECCION DE MATEMATICAS



# INTRODUCCION A LA TEORIA DE SEMIMODULOS



TESIS DOCTORAL

por

FRANCISCO POYATOS SUAREZ



Publicaciones de la Facultad de Ciencias
MADRID, 1967

NC: x-53-166595-9

Depósito **Legal**: M. 6284 - 1967
**Impreso por el Servicio de Publicaciones de la Facultad de Ciencias**
**Universidad de Madrid**

A ELISABETH BORGWARTH, con afecto.

Esta Memoria ha sido realizada bajo la dirección del Profesor Dr. D. PEDRO ABELLANAS CEBOLLERO, a quien expreso mi agradecimiento por su entusiasta ayuda y apoyo constante.

# I N D I C E

# PROLOGO

Una vez constituidas la teoría de grupos abelianos y la teoría de espacios vectoriales, se sintió la necesidad de generalizar ambas estructuras. De esta suerte se desarrolló la teoría de módulos sobre anillos. Con ella, al mismo tiempo que se ordena y sistematiza una zona importante del Algebra, se alcanzan resultados de aplicación fecundísima en la Matemática.

Desde mediados de este siglo han aparecido artículos y memorias acerca de la teoría de semigrupos en número creciente. Rees, Dubreil, Clifford, Croisot, Schutzenberger, Green, Lyapin, entre otros muchos, han contribuido a dicha teoría, la cual, según afirma Rédei en su Theorie der endlich erzeugbaren Kommutativen Halbgruppen "adquiere tanto en la Matemática pura como en la aplicada cada vez mayor importancia y significación".

Construidas ya hasta cierto punto la teoría de módulos sobre anillos, de un lado, y de otro, la teoría de semigrupos, nos hemos encontrado en situación análoga a la anteriormente descrita. Hemos juzgado oportuno y conveniente generalizar estas dos estructuras, convencidos de que, al combinar los métodos del Algebra lineal con los de la teoría de semigrupos, se abre a la investigación de esta parte del Algebra un camino lleno de posibilidades.

En el párrafo 2 se establecen los axiomas de semimódulo de tal manera que cualquiera semigrupo abeliano sea (o sea sumergible en) un semimódulo sobre el semianillo de los enteros no negativos, y de moto tal que cualquier semimódulo que tenga por dominio de operadores un anillo con elemento unidad sea un módulo. De esta suerte, tanto la teoría de módulos como la teoría de semigrupos abelianos quedan subsumidas bajo la presente teoría.

Algunos autores han usado ya el término "semimódulo", pero con él han expresado un concepto que viene a ser caso particular del nuestro. Redei, Wiegandt y Hancock han entendido por semimódulo, o un semigrupo conmutativo con neutro, o un semigrupo conmutativo y cancelativo con neutro, lo que para nosotros es, respectivamente, un $N_o$-semimódulo y un $N_o$-semimódulo simplificable.

No hemos hallado en la literatura ningún antecedente directo de la cuestión que aquí tratamos: semimódulos sobre semianillos cualesquiera. Por ello, dedicamos el presente trabajo casi exclusivamente a fundamentar esta teoría, en la opinión de que cuanto más se afiancen sus bases tanto más se facilitará el desarrollo ulterior de la misma.

Comentemos a continuación, muy sucintamente, algunos puntos de la presente tesis:

En el párrafo 1 se define semianillo como ya es habitual en el Algebra. Dadas tres propiedades, que denominamos SA4, SA5, SA6, se muestra que si bien no todo semianillo verifica dichas propiedades, aquéllos que no las cumplan pueden ser sumergidos en otros que las satisfagan. Debido a lo cual, a lo largo de esta obra se trata sólo de semianillos que verifiquen las antedichas propiedades. Analizamos también en el primer párrafo aquellas cuestiones relacionadas con las congruencias, homomorfismos, ideales de un semianillo que serán de uso frecuente en el resto de la obra.

En el segundo parágrafo se dan los axiomas SM0 —— SM5 de semimódulo. Los axiomas SM4, SM5 son independientes de los restantes; pero cualquier estructura algebraica que satisfaga los axiomas SM0, SM1, SM2, SM3, y deje de cumplir los SM4, SM5, puede ser sumergida en otra estructura algebraica que verifique todos los axiomas SM0 —— SM5 de semimódulo. Las dos inmersiones citadas facilitan notablemente el desarrollo posterior de la teoría. En este mismo parágrafo se comprueba que:

a) Cualquier semigrupo abeliano es (o es sumergible en) un $N_o$-semimódulo.

b) Si A es un anillo con elemento unidad, todo A-semimódulo es un A-módulo; consecuencia de ello es que

c) Cualquier semiretículo es (o es sumergible en) un $N_o$-semimódulo.

d) Si A es un cuerpo (no necesariamente conmutativo), todo A-semimódulo es un A-espacio vectorial.

Como es bien sabido, existe una correspondencia biunívoca entre los submódulos de un módulo E y las congruencias en E. Esta biyección queda establecida al hacer corresponder a cada submódulo de E la congruencia cuya clase cero es dicho submódulo. En la teoría de semimódulos la cuestión es más compleja. En primer lugar, la clase cero de una congruencia en un semimódulo no es un subsemimódulo cualquiera, sino un subsemimódulo que verifica una propiedad específica. A este tipo de subsemimódulos les llamamos "cerrados".

En segundo lugar, no existe una correspondencia biunívoca, sino multívoca, entre los subsemimódulos cerrados y las congruencias en un semimódulo, ya que a un mismo subsemimódulo cerrado le pueden corresponder varias congruencias, diferentes entre sí, que tengan por clase cero dicho subsemimódulo. A estudiar estas cuestiones se dedica el § 3. En él destacamos un tipo de congruencias, que denominamos "normales", y que se muestran significativas por estas razones:

I) El conjunto de todas las congruencias normales en un semimódulo E forma un retículo isomorfo al retículo completo de los subsemimódulos cerrados de E.

II) Dado un subsemimódulo cerrado M de E, se puede construir de un modo efectivo la única congruencia normal que tiene a M por clase cero.

III) El conjunto de todas las congruencias en E que tienen por clase cero un cierto subsemimódulo cerrado M de E constituye un subretículo del retículo completo de las congruencias en E. La congruencia mínima de dicho subretículo es precisamente la única congruencia normal que tiene por clase cero M.

En la presente teoría carecen de sentido, por lo antedicho, expresiones como ésta: "semimódulo cociente E/M de E por un subsemimódulo M de E". Demostradas la existencia y unicidad de $\overline{M}$ y de $N(\overline{M})$, damos sentido a esas expresiones imponiendo $E/M = E/N(\overline{M})$, en donde $\overline{M}$ significa el mínimo subsemimódulo cerrado de E que contiene a M, y en donde $N(\overline{M})$ denota la congruencia normal en E que tiene a $\overline{M}$ por clase cero.

Una vez analizadas las congruencias, se estudian los homomorfismos de A-semimódulos, deduciéndose, entre otros, los teoremas de la "descomposición de un homomorfismo", del "homomorfisfo inducido", del "homomorfismo que tiene por imagen un A-sa-módulo". Cuanto exponemos en §3 desempeña un papel decisivo en el resto de la tesis.

En §4 se estudian los subconjuntos saturados de un A-semimódulo E por un homomorfismo f de E en E', lo cual permite establecer los teoremas primero y segundo de isomorfía para semimódulos y prepara el camino al § 5, principalmente.

Con objeto de definir "longitud de un A-semimódulo E", se parte (en § 5) del análisis del retículo de los subsemimódulos cerrados de E. Llamamos "sucesión distinguida" de E a una cadena finita estrictamente creciente de subsemimódulos cerrados de E que tenga por extremos 0 y E y que no admita ningún refinamiento propio. Llamamos dimensión de una cadena al número de elementos diferentes de que consta, supuesto finito, disminuido en una unidad. El retículo C(E) de los subsemimódulos cerrados de E satisface, como es obvio, a una y sólo una de estas propiedades:

a) existe en C(E) una cadena estrictamente creciente, que une 0 con E, de infinitos elementos,

b) toda cadena estrictamente creciente de C(E) consta de un número finito de elementos.

En este último caso puede ocurrir que el conjunto D formado por las dimensiones de todas las sucesiones distinguidas de E, $b_1$) no esté acotado superiormente ó $b_2$) esté superiormente acotado. En los casos a) y $b_1$) decimos de E que no tiene longitud; en el caso $b_2$) decimos que E posee longitud ó que es de longitud finita y llamamos long(E) = máx(D), según el orden natural.

Los A-semimódulos de longitud finita no verifican, en general, tal como nosotros lo enunciamos, el teorema de Jordan-Hölder, ni tampoco una condición más débil que dicho teorema, que denominamos condición de Jordan-Hölder. Sin embargo, hemos dado la definición de "longitud de un semimódulo" de manera tal que cuando E sea un A-módulo de longitud finita, la longitud de E en tanto que semimódulo coincida con la longitud de E en tanto que módulo, y de modo tal que de las proposiciones §5, 15, §6, 12,13,14 y §9, 12, se obtengan, en el caso particular de que los A-semimódulos en cuestión sean A-módulos, las proposiciones correspondientes de la teoría de módulos. En efecto, todo A-módulo E de longitud finita es un semimódulo tal que el retículo C(E) de los subsemimódulos cerrados de E coincide con el retículo de los submódulos de E, el cual es modular; de la proposición §5, 14, se desprende que todos los A-módulos de longitud finita son semimódulos que verifican la condición de Jordan-Hölder y para todos éstos son válidas las igualdades expresadas en las proposiciones antedichas.

Definimos en §6 sucesión "regular", "normal", "cerrada" y "exacta" de homomorfismos de A-semimódulos. Todos estos tipos son casos particulares de sucesiones nulas de homomorfismos de A-semimódulos. La justificación de dichas definiciones se basa, a nuestro juicio en:

1°) Las equivalencias enunciadas en las proposiciones 2,3,4,5 y 6) de §6.

2°) Caso de que el dominio de operadores A de los semimódulos sea un anillo con elto. unidad, los cuatro tipos de sucesiones coinciden con el concepto de sucesión exacta de homomorfismos de A-módulos.

3°) Las cuatro definiciones se muestran, cada cual con autonomía, útiles a lo largo de la obra. Proposiciones cuya demostración sería de otro modo laboriosa, se obtienen fácilmente con ayuda de estos conceptos.

Los §§7 y 8 se dirigen, principalmente, a demostrar que el carácter (regular, normal, etc.) de las sucesiones de homomorfismos de A-semimódulos se preserva mediante el producto y la suma directos. Consecuencia de ello es la serie de proposiciones 5,6,7,8 de §7, y de la 6,7,8,9, de §8, respectivamente.

Se analizan en §9 las descomposiciones de un A-semimódulo E en suma directa de subsemimódulos. Definidos "proyector" y "familia ortogonal de proyectores" de E, se muestra en §9, entre otras cuestiones, que la existencia de una descomposición de E en suma directa de una familia de subsemimódulos equivale a la existencia de una familia ortogonal de proyectores de E que cumpla ciertas propiedades (3). Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en la teoría de módulos, la existencia de un proyector f de E tal que E sea suma lineal del núcleo y la imagen de f, es condición necesaria, pero no suficiente, para que el endomorfismo f descomponga a E en suma directa del núcleo y la imagen de f (8). Por ello se buscan condiciones suficientes para que esto último ocurra 9 y 10. Se usan en otros parágrafos algunas proposiciones deducidas en el §9, el cual es, sobre todo, preparatorio del §17.

Dada una familia de elementos S de un A-semimódulo cualquiera E decimos en §10, que S es un "sistema de generadores", una "familia libre", una "base" de E, según que el "homomorfismo determinado" por S sea un epimorfismo, un monomorfismo o un isomorfismo, respectivamente. Se obtienen nueve propiedades de las familias libres de los A-semimódulos y se estudian también las familias ligadas. En los semimódulos cabe distinguir entre dos tipos, que se excluyen entre sí, de familia ligada. Damos condiciones necesarias y suficientes para que una familia de elementos S de E pertenezca a cada uno de dichos tipos. Acerca de los A-semimódulos libres -esto es, de aquellos que admiten una base- se deducen en 10 proposiciones de interés en la teoría, así 6,7,8,10 son de uso frecuente en la misma.

Se define y analiza en §10 tanto la relación de equivalencia "similitud de familias de elementos de un A-semimódulo E" como el grupo de los "$\beta$-automorfismos de un A-semimódulo libre E relativos a una base X de E", que designamos "$\beta$-$\mathrm{Aut}_A(E,X)$", con objeto de poder expresar de modo sencillo la proposición 13. Esta afirma que si A es un semianillo sin opuestos y sin divisores de cero, todas las bases de un A-semimódulo libre son similares entre sí y el grupo $\mathrm{Aut}_A(E)$ coincide con cualquiera de los grupos $\beta$-$\mathrm{Aut}_A(E,X)$, al recorrer X todas las bases de E.

En §12 se comprueba que $Hom_A(E,F)$ es un funtor, contravariante en E y covariante en F, de la categoría de los {A-semimódulos, A-homomorfismos} en la categoría de los {$N_o$-semimódulos, $N_o$-homomorfismos}. Las proposiciones §12, 4 y 5, relacionan ciertas sucesiones de homomorfismos de A-semimódulos con las sucesiones transformadas de aquéllas mediante el antedicho funtor. Con ellas se extienden a la estructura de semimódulos teoremas de la teoría de módulos. Los resultados obtenidos en §§6 y 12 nos han impulsado a efectuar el estudio, ya en preparación, de los semimódulos desde un punto de vista homológico.

El conjunto $E' = Hom_A(E,A_i)$, en donde E designa un A-semimódulo a la izquierda y $A_i$ el A-semimódulo A a la izquierda, dotado de la operación "adición de homomorfismos" y de una ley externa sobre A impuesta de modo adecuado, posee estructura de A-semimódulo a la derecha, que denominamos "semimódulo dual de E". Este hecho, determinado en §13, permite introducir en la teoría de semimódulos los conceptos de "elementos de E y de E' ortogonales entre sí", "subsemimódulos de E' ortogonal a un subconjunto, de E", "homomorfismo traspuesto de un homomorfismo de semimódulos", "isomorfismo contragradiente de un isomorfismo de A-semimódulos" y establecer las proposiciones 6, 10 acerca de los semimódulos duales de ciertos semimódulos dados.

Se demuestra en §14 que $Dim_p(E_A,F_B)$ (dimorfismos de primera componente p del A-semimódulo E en el B-semimódulo F) es un funtor de la categoría {semimódulos sobre semianillos cualesquiera, dimorfismos} en la categoría {$N_o$-semimódulos, $N_o$-homomorfismos}, contravariante en $E_A$, covariante en $F_B$, y condicionado por la conmutatividad de los diagramas formados por las primeras componentes (5). Los análisis efectuados en §14 conducen a dos generalizaciones: se extienden los enunciados 4, y 5 establecidos en §12 a sucesiones de dimorfismos de semimódulos y sus transformadas mediante el funtor $Dim_p$ (6), y se amplía el concepto de "semimódulo dual de un A-semimódulo E" (7), dado en §13.

Apoyándonos, entre otros, en el concepto de "congruencia en un A-semimódulo T engendrada por una relación binaria en T" y en la proposición 24, expuestos en §3, conseguimos definir en §16 de un modo extremadamente sencillo "producto tensorial relativo a A de un A-semimódulo a la derecha E por un A-semimódulo a la izquierda F". Una vez mostrado que el producto tensorial $E\otimes_A F$ y la aplicación tensa canónica de ExF en $E\otimes_A F$ forman un par que es solución de un problema de aplicación universal, se deducen en §16 las proposiciones 3,8, relativas al producto tensorial de semimódulos.

En §17 se aplican múltiples proposiciones obtenidas en los parágrafos precedentes, lo que muestra que el desarrollo de la teoría general era imprescindible para poder tratar con amplitud el tema de este parágrafo. El objeto primordial de §17 consiste en dar condiciones bajo las cuales exista y sea única la descomposición irreducible de un A-semimódulo en suma directa de subsemimódulos.

Designe $\Theta(A)$,$Z(E)$, respectivamente, el conjunto formado por todos los elementos del semianillo A, del A-semimódulo E que son simetrizables respecto al "o". $\Theta(A)$ es el máximo ideal fuerte bilátero contenido en A; $Z(E)$ el máximo grupo contenido en E que es estable respecto a la ley externa de E. Decimos de un semianillo A(de un A-semimódulo E) que es "sin opuestos" si $\Theta(A) = 0$ ($Z(E) = 0$).

De la proposición 5 de §17, se deduce que

a) la descomposición irreducible de un A-semimódulo sin opuestos, caso de que exista, es única, salvo en el orden de los sumandos.

El anterior teorema de unicidad nos ha impulsado a buscar un teorema de existencia de la descomposición irreducible de los A-semimódulos sin opuestos. En primer lugar, se comprueba que no todo A-semimódulo sin opuestos admite descomposición irreducible. Así ocurre, por ejemplo con $N_o^I = \prod_{i \in I} (N_o)_i$, en donde $\mathrm{card}(I) > \mathrm{card}(N)$. En segundo lugar, se ha encontrado que un A-semimódulo E admite descomposición irreducible en los siguientes casos:

b) E es libre de n-torsión y de tipo finito.

c) E es sin opuestos y de longitud finita.

d) E es libre a la izquierda sobre un semianillo A tal que $A_i$ admite descomposición irreducible.

En especial, como consecuencia de a) y de b), resulta que :

e) todo semigrupo abeliano con neutro y sin opuestos de tipo finito admite una única descomposición irreducible en suma directa de subsemigrupos,

f) todo semigrupo abeliano sin neutro(1) es sumergible de un modo elemental en un semigrupo que admite una única descomposición irreducible.

De los teoremas de existencia y unicidad de la descomposición irreducible (6, se deduce el teorema 7, que denominamos "de la descomposición canónica de A-semimódulos" (sólo aplicable a aquellos que admitan una única descomposición irreducible), el cual es formalmente idéntico al teorema fundamental

(1) de tipo finito

de la Aritmética.

De los teoremas 6 y 7 se obtienen numerosas consecuencias 8 - 24. Los enunciados 8-20 se refieren a A-semimódulos que admitan una única descomposición irreducible; los 20-24 se refieren a A-semimódulos cualesquiera que cumplan Z(E) $\neq$ E (esto es, que no sean módulos).

Solo señalaremos aquí las consecuencias 20-24, resumiéndolas en el siguiente enunciado:

La condición necesaria y suficiente para que exista una descomposición maximal del A-semimódulo E (Z(E) $\neq$ E) en álgebra de Boole generada por una familia distinguida de E es que el A-semimódulo sin opuestos E/Z(E) admita descomposición irreducible (lo cual viene determinado por la proposición 6).

Si esa descomposición maximal existe, es única.

## § 1. S E M I A N I L L O S

Decimos de un conjunto A que es un semianillo, si en A se han definido dos leyes de composición interna, que designaremos con los símbolos "+", "." y denominaremos "adición" y "multiplicación", de modo que:

SA1 : A es un semigrupo abeliano respecto a "+"

SA2 : A es un semigrupo respecto a "."

SA3 : distributividad de "." respecto a "+" a izquierda y derecha.

Decimos que el semianillo A posee neutro (+), posee neutro (.) o cumple SA6, si en A se verifica respectivamente:

SA4 : $\exists\, o \in A / \forall\; a \in A : a+o = a$

SA5 : $\exists\, 1 \in A / \forall\; a \in A : 1.a = a.1 = a$

SA6 : $\forall\, a \in A : a.o = o.a = 0$

<u>La proposición SA6 es independiente de SA1 SA5.</u>

Sean R(E) el retículo de las partes de un conjunto $E \neq \emptyset$, $\emptyset$, vacío; $N_o$ el conjunto de todos los números enteros no negativos; y $C = \{(n,a)/n \in N_o;\ a \in R(E)\}$ . Definimos en C dos leyes internas L1, L2:

L1 $(n,a) + (m,b) = (n+m, a \cup b)$; "n+m" suma en $N_o$; "aUb" reunión en R(E)

L2 $(n,a) \,.\, (m,b) = (n.m, a \cup b)$; "n.m" producto en $N_o$.

C,L1, L2, verifican SA1--SA5; los neutros (+),(.) de C son respectivamente $(o,\emptyset)$, $(1,\emptyset)$. En C no es válida la proposición SA6: $(o,\emptyset).(n,a)=(o,a)$, si $a \neq \emptyset$, entonces $(o,a) \neq (o,\emptyset)$.

<u>Definiciones</u>

Exponemos a continuación las definiciones de los conceptos que serán de uso más frecuente en lo sucesivo. Sea S un semigrupo respecto de la operación "$\perp$", y sea $a \in S$.

<u>a</u> es elemento simplificable ($\perp$) a la izquierda $\iff a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$ $\forall\, x,y \in S$.

S es simplificable ($\perp$) a la izquierda $\iff \forall\, a \in S$: a es simplificable ($\perp$) a la izquierda.

a es simetrizable $(\perp)$ a la izquierda <=> $\exists$ $\ddot{a} \in S / \ddot{a} \perp a = n$; n, neutro de S. Al elto. $\ddot{a}$ lo denominamos simétrico $(\perp)$ a la izquierda del elto. a.

a es simplificable $(\perp)$ <=> a es simplificable $(\perp)$ a izquierda y a derecha. Análogamente en todos los otros casos.

Las siguientes proposiciones son inmediatas:

1) Si "a" es simetrizable $(\perp)$ a la izquierda, entonces es también simplificable $(\perp)$ a la izquierda.

2) Si "a" es simplificable $(\perp)$ a la derecha y simetrizable $(\perp)$ a la izquierda, entonces "a" posee un único simétrico a la izquierda.

3) Si "a" posee simétricos a izquierda y derecha, estos coinciden. Es decir, si "a" es simetrizable $(\perp)$, entonces posee un único simétrico $(\perp)$.

Definiciones

L es ideal a la izquierda del semigrupo $S(\perp)$ <=> $\{S \perp L \subseteq L$. Sea A un semianillo (+,.) y L un subconjunto de A. Decimos que:

L es ideal a la izquierda de A <=> 1) L es subsemigrupo del semigrupo aditivo de A y 2) L es ideal a la izquierda del semigrupo multiplicativo de A.

L es ideal fuerte a la izquierda del semianillo A <=> 1) L es subgrupo del semigrupo aditivo de A, y 2) L es ideal a la izquierda del semigrupo multiplicativo de A.

Ideal bilátero o ideal (simplemente) <=> ideal a la izquierda y a la derecha. Llamaremos a los elementos simetrizables (+), simétricos (+), simetrizables (.), simétricos (.), respectivamente, elementos con opuestos, opuestos, elementos con inverso (o inversibles), inversos.

Evidentemente se cumple:

4) Todo ideal a la izquierda (o a la derecha) del semianillo A es un subsemianillo de A, pero no viceversa.

5) Todo ideal fuerte a la izquierda (o a la derecha) del semianillo A es un anillo contenido en A (subanillo de A), pero no viceversa.

6) El conjunto $\theta$ de todos los elementos simetrizables (+) de un semianillo A (+,.) con neutros (+,.) que satisface SA6 es un ideal fuerte bilátero de A.

Definiciones

C es una congruencia en A, conjunto dotado de una estructura algebraica <=> C es una relación de equivalencia entre eltos de A, compatible con la estructura algebraica de A. Si A es un semianillo y C una congruencia en A, designamos por A/C al conjunto de las clases de A módulo C, dotado de las leyes $\beta$ $\{a\} + \{b\} = \{a+b\}$, $\{a\} . \{b\} = \{a.b\}$, siendo $\{a\}$ la clase de A módulo C que contiene al elto $a \in A$. Se verifica:

7) Si A es un semianillo y C una congruencia en A, entonces A/C es un semianillo al que llamaremos semianillo cociente. Si A satisface SA4, SA5, SA6 ó es abeliano, entonces A/C satisface también SA4,SA5,SA6, o es abeliano, respectivamente.

8) Si A es un semianillo (+,.) con neutros que cumple SA6 y C es una congruencia en A, entonces la clase cero de A módulo C es un ideal bilátero de A. $\{o\} \cap \Theta$ ($\Theta$ significa lo mismo que en la proposición 6) es un ideal fuerte bilátero de A.

Definiciones

A y B son dos semianillos. $h: A \rightarrow B$ es un homomorfismo de A en B = (i) h es una aplicación de A en B; (ii) $h(a+b) = h(a) + h(b)$, , $\forall$ $a,b \in A$; (iii) $h(a.b) =$ $= h(a).h(b)$, , $\forall$ $a,b \in A$.

Imagen de h <=> Im h = h(A) = H $\{h(a) \ / \ a \in A\}$

Núcleo de h = Ker h = $\{a \in A / h(a) = h(o)\}$ , siendo "o" el neutro (+) de A.

Es inmediato que:

9) Im h es subsemianillo de B. Si A posee neutro "o", "1", satisface SA6 o es abeliano, entonces Im h posee neutro h(o), h(1), cumple SA6 o es abeliano, respectivamente. Si L es un ideal (fuerte) a la izquierda de A, h(L) es ideal (fuerte) de la izquierda de h(A).

10) Ker h es un subsemigrupo de A. Si A verifica SA6, Ker h es un ideal bilátero de A.

11) Puede ocurrir que h de A en B, semianillos que satisfacen SA6, sea un homomorfismo y sin embargo $h(o) \neq o \in B$, $h(1) \neq 1 \in B$, como nos lo muestra el ejemplo siguiente:

A=B=R(E), retículo de las partes de $E \neq \emptyset$, + reunión,. = intersección. Sean $a,b \in R(E)$ tales que $\emptyset \subset a \subset b \subset E$, estrictamente. Sea $h(x) = (a \cup x) \cap b =$ $= (a \cap b) \cup (x \cap b) = a \cup (x \cap b) = a \cup x \cap b$ , , $\forall$ $x \in A$ Se verifica : $h(x \cup y) = a \cup (x \cup y) \cap b =$ $= (a \cup x \cap b) \cup (a \cup y \cap b) = h(x) \cup h(y)$.

$h(x \cap y) = a \cup (x \cap y) \cap b = (a \cup x \cap b) \cap (a \cup y \cap b) = h(x) \cap h(y)$. h es por tanto un homomorfismo de A en B, semianillos que cumplen SA6, sin embargo $h(\emptyset) = a \neq \emptyset$,

$h(E)=b\neq E$. Esto justifica la primera de las siguientes definiciones

Definiciones

$h : A \to B$ homomorfismo fuerte de semianillos SA6 <=> h es un homomorfismo y cumple (iv) ; $h(o) = o\in B$; $h(1) = 1\in B$.

Si C es una congruencia en el semianillo A, la aplicación $c: A \to A/C$, $c(a) = \{a\}.\forall\ a\in A$, es un homomorfismo al que llamaremos natural o canónico. Si el semianillo A esta contenido en el B, denominaremos al homomorfismo $i(a)=a\in B, \forall\ a\in A$, inmersión de A en B.

La relación H: aHb <=> h(a)=h(b), siendo h homomorfismo de A en B, es una congruencia en A, que llamaremos congruencia asociada por h en A. Es evidente que:

12) En el caso de que h sea un homomorfismo suprayectivo de A en B, semianillos SA6, y en el caso de que, no siendo h suprayectivo, sea B simplificable (+) y (.), entonces h es homomorfismo fuerte.

13) Todo homomorfismo h de A en B, semianillos, se puede descomponer de modo único $h:A \xrightarrow{c} A/H \xrightarrow{b} \mathrm{Im}\ h \xrightarrow{i} B$, $h = ibc$, siendo H la congruencia asociada por h en A, c homomorfismo natural, b homomorfismo biyectivo (isomorfismo) $b(\{a\}) = h(a), \forall\ a\in A$, i inmersión. Si A,B satisfacen SA6, c es homomorfismo fuerte y se cumple que "i es homomorfismo fuerte<=>h homomorfismo fuerte".

14) Si h y h' son respectivamente homomorfismos de A en B y de A en C, semianillos, tales que coinciden las congruencias asociadas por h y h' en A: H=H', entonces $\mathrm{Im}\ h \simeq \mathrm{Im}\ h'$.

15) Existen sendas correspondencias biunívocas entre estos cuatro conjuntos: congruencias en el semianillo A, homomorfismos naturales de A, semianillos cocientes de A, todos los homomorfismos posibles de original A -salvo isomorfismos de las imágenes, véase 14)-. Como el conjunto de las congruencias en A posee estructura reticular, podemos adjudicar -en virtud de dichas biyecciones- estructura de retículo a los otros tres conjuntos.

Ideales en un semianillo con neutros que cumple SA6

En los semigrupos se verifica: La intersección de cualquier número de subsemigrupos (subgrupos) del semigrupo S es $\emptyset$ ó un subsemigrupo (subgrupo) de S. La intersección de cualquier número de ideales a la izquierda de S es $\emptyset$ ,o un ideal a la izquierda de S.

Designen $J_i$, $J_d$, $J$ , $H_i$, $H_d$, $H$ los conjuntos formados respectivamente por todos los ideales a la izquierda, ideales a la derecha, biláteros, ideales fuertes a la izquierda, a la derecha, fuertes biláteros de un semianillo A que cumple SA4 - SA5 - SA6. Cualquier ideal de A -sea del tipo que fuere- contiene al neutro (+) o de A; por tanto,

16) La intersección de cualquier número de ideales (fuertes) a la izquierda de A es un ideal (fuerte) a la izquierda de A. La intersección de un ideal (fuerte) a la izquierda de A con un ideal (fuerte) a la derecha de A es un ideal (fuerte) bilátero de A.

Cada uno de los conjuntos $J_i$-$H$ verifica las condiciones de Moore. Así $J_i$, porque A es un ideal a la izquierda de A y por 16; así $H_i$, porque todo ideal fuerte a la izquierda de A está contenido en $\Theta$ ($\Theta$ significa lo mismo que en 6)y por 16, etc. Consecuencia de ello es que

17) Los conjuntos $J_i$, $J_d$, $J$, $H_i$, $H_d$, $H$ , son retículos completos contenidos en el retículo de las partes de A. Además, el retículo $J$ está contenido en los $J_i$, $J_d$; el $H$ está contenido en los $J$, $H_i$, $H_d$, etc.

<u>Inmersión de un semianillo sin neutros A en otro A* con neutros que satisfaga SA6</u>

Es interesante considerar este tema debido a la definición de A-semimódulo que daremos en el próximo capítulo.

Sea A un semianillo sin neutros. Llamemos $A' = A \cup \{o\}$, y dotemos a A' de las leyes

L' 1 $\quad a + b$ en $A' = a + b$ en $A$; $\forall\ a,b \in A$

$\quad a + o = 0 + a = a, \forall\ a \in A; \quad o + o = 0$

L'2 $\quad a \,.\, b$ en $A' = a \,.\, b$ en $A$, $\forall\ a,b \in A$

$\quad a \,.\, o = o.a = o, \forall\ a \in A; \quad o \,.\, o = o$

Es fácil comprobar que A', dotado de las operaciones L'1, L'2 es un semianillo que satisface SA4 y SA6

Definimos en A'

$$ma = am = \overbrace{a + \ldots + a}^{m}, \ \forall\ m \in N(\text{naturales}), \ \forall\ a \in A'$$

y establecemos, por convenio, oa = o (significando el primer "o" el $o \in N_o$ -enteros no negativos-, y el segundo "o" al $o \in A'$), ao = o.

En A' se cumple $\forall$ m,n $\in N_o$ , $\forall$ a,b $\in$ A':

$$m(na) = (mn)a \quad ; \quad m(a.b) = (ma).b = a.(mb)$$

$$(m + n)a = ma + na \quad ; \quad m(a + b) = ma + mb$$

Como, por hipótesis, A no contiene elemento neutro respecto de la multiplicación, tampoco A' ; efectuemos una segunda inmersión. Llamemos $A^* = A' \times N_0$ (producto de conjuntos), siendo $N_o$ el conjunto de los enteros no negativos dotado de las leyes "adición" y "multiplicación" de enteros (así dotado, $N_o$ es un semianillo que cumple SA4, SA5, SA6). Impongamos en A* las operaciones

$$L^*1 : (a,m) + (b,n) = (a + b, m + n)$$

$$L^*2 : (a,m) . (b,n) = (a.b + mb + na, mn)$$

$(A^*, L^*1, L^*2)$ es un semianillo cuyo neutro respecto a $L^*1$ es (o,0), cuyo neutro respecto a $L^*2$ es (o,1), que verifica SA6 y contiene un subsemianillo $M^* = \{(a,o)\}_{a \in A}$ isomorfo a A.

En el caso de que A contenga un neutro "u" respecto de la adición y que no se cumpla SA6, sumergimos A en el conjunto A' = A $\cup$ {o}, dotado de las leyes L'1, L'2, dadas anteriormente, y, en donde o $\neq$ u, por L' 1. Efectuando la segunda inmersión de igual manera que antes, llegamos al mismo resultado

Si A contiene un neutro respecto a "." y no contiene uno respecto a "+", basta efectuar la primera inmersión.

Podemos, pues, asegurar

Los axiomas SA4, SA5, SA6 de semianillo son inesenciales en el sentido de que cualquier semianillo que no los satisfaga puede ser sumergido en otro que cumpla dichos axiomas.

Llamaremos a $A^*$ "extensión natural" de A.

## § 2. INTRODUCCION

Sea A un semianillo (+,.) con neutros "o", "1", que satisface SA6. Decimos que E es un A-semimódulo a la izquierda, si E está dotado de dos leyes de composición, una interna "+", adición, respecto a de la cual:

SMO ; E es un semigrupo abeliano;

y otra externa sobre A como domino de multiplicadores, de modo que se verifica:

| | | |
|---|---|---|
| SM1 | : $a(\underline{x}+\underline{y}) = a\underline{x}+a\underline{y}$ | $\forall\, a \in A$ ,, $\forall\, \underline{x},\underline{y} \in E$ |
| SM2 | : $(a+b)\underline{x}=a\underline{x}+b\underline{x}$ | $\forall\, a,b \in A$ ,,$\forall\, \underline{x} \in E$ |
| SM3 | : $a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}$ | idem. |
| SM4 | : $1\underline{x} = \underline{x}$ | $\forall\, \underline{x} \in E$ |
| SM5 | : $o\underline{x} = \underline{o}$ | $\forall\, \underline{x} \in E$ ; $\underline{o}$, neutro (+) de E. |

Diremos que F es un A-semimódulo a la derecha, si F en lugar de verificar SM3, satisface

SM3': $a(b\underline{x}) = (ba)\underline{x}$ $\quad \forall\, ab \in A$,, $\forall\, \underline{x} \in E$

cumpliendo, además, los restantes axiomas SMO-SM5.

1) El axioma SM5 es independiente de los axiomas SMO-SM4

Observemos en primer lugar que SM5 postula 1° la existencia en E de un neutro (+):$\underline{o}$; y 2° que para todo $\underline{x} \in E$ : $o\underline{x}=\underline{o}$. Construiremos un modelo C de SMO-SM4 que satisfaga la primera parte de SM5 y no satisfaga la segunda parte de SM5; de este modo quedará probado el enunciado.

$N_o$ designara en lo sucesivo siempre al conjunto de los enteros no negativos, juntamente con la adición y multiplicación de enteros. $N_o$ es un semianillo con neutros que cumple SA6. Sea C el conjunto de todas las partes de un conjunto no vacío T. Definamos en C dos leyes, una interna LI, y otra externa LE sobre el semianillo $N_o$:

LI : $\forall$ x,y $\epsilon$ C , x+y = xUy ; "U", reunión conjuntista

LE : $\forall$ n $\epsilon$ $N_o$ ; $\forall$ x $\epsilon$ C, nx = x

C dotado de las leyes LI,LE satisface SM0-SM4 y la primera parte de SM5, pero no la segunda parte de SM5, puesto que LE postula también ox=x $\forall$ x $\epsilon$ C.

2) En todo A-semimódulo E se verifica: $a\underline{o} = \underline{o}$ $\forall$ a $\epsilon$ A.

$$a\underline{o} = a(o\underline{x}) = (ao)\underline{x} = o\underline{x} = \underline{o}$$

Definiciones.- Sea E un A-semimódulo.

S, subsemimódulo de E <=> 1: S $\subseteq$ E; 2: $\underline{x},\underline{y}$ $\epsilon$ S $\Rightarrow$ $\underline{x}+\underline{y}$ $\epsilon$ S; 3:x $\epsilon$ S => $a\underline{x}$ $\epsilon$ S, $\forall$ a $\epsilon$ A. Los subsemimódulos de E son, por tanto, los subsemigrupos de E estables respecto de la ley externa definida en E.

Sea, para todo i $\epsilon$ I, $x_i$ $\epsilon$ E, y $\epsilon$ E; se dice que

y depende linealmente-A de $\{x_i\}_{i \in I}$ $\Leftrightarrow \exists a_i \in A$, $\forall$ i $\epsilon$ I, familia de soporte finito/ $\underline{y} = \sum_{i \in I} a_i \underline{x}_i$

3°) $\underline{o}$ depende linealmente de $\{x_i\}_{i \in I}$, familia arbitraria de E.

En efecto, $\exists a_i = 0 \in A$, $\forall_{i \in I}$ / $\underline{o} = \sum_{i \in I} o\, \underline{x}_i = \Sigma \underline{o}$

4°) Si k $\epsilon$ I, $\underline{x}_k$ dep- lin-A de $\{x_i\}_{i \in I}$ ya que

$\exists a_i = \delta_{ki}$(delta de Kronecker) $\epsilon$ A/$x_k = \sum_i a_i x_i$.

5) Transitividad de la dependencia lineal

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z} \text{ dep. lin-A de } \{x_i\}_{i \in I} \\ \forall\, i \quad I,\ \underline{x}_i \text{ dep. lin-A de } \{\underline{y}_j\}_{j \in J} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{z} \text{ dep lin-A de } \{\underline{y}_j\}_{j \in J}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z} = \Sigma\, a_i x_i,\ ,a_i \in A \\ \forall\, i \in I:\ \underline{x}_i = \sum_j b_{ij}\underline{y}_j,\ ,b_{ij} \in A \end{array}\right] \Longrightarrow \underline{z} = \sum_i a_i(\sum_j b_{ij}\underline{y}_j) = \sum_j(\sum_i a_i b_{ij})\underline{y}_j,\ ,a_i b_{ij} \in A, \forall j \in J$$

6)El conjunto $\underline{M} = \{x \in E/x \text{ dep. lin-A de } \{x_i\}_{i \in I} \wedge x_i \in E\}$, es un semimódulo de E, y $\underline{o}$ $\epsilon$ M

$x,y \in M \Rightarrow x=\sum_i a_i x_i,, y = \sum b_i x_i,, a_i, b_i \quad A \Rightarrow x+y = \sum_i (a_i+b_i) x_i,, a_i+b_i \quad A \Rightarrow x+y \in M$

$x \in M \Rightarrow x = \sum_i a_i x_i,, a_i \in A,, \Rightarrow \underline{\forall} a \in A \ \underline{ax} = \sum (aa_i) \underline{x_i},, aa_i \in A \Rightarrow ax \in M,, \underline{\forall} a \in A.$

Por 3 sabemos que $\underline{o} \in M$; es más, el neutro $\underline{o} \in E$ pertenece a todo subsemimódulo de E, pues $\underline{o}x = \underline{o}$, por SM5. Diremos de M que es el subsemimódulo de E engendrado por la familia $Q = \{x_i\}_{i \in I}$ de eltos de E, y lo representaremos $M=L(Q)=L((x_i)_{i \in I})$, o bien, $M=(Q)=(x_i)_{i \in I}$, si no da lugar a confusión. Llamaremos a Q sistema de generadores de M.

7) Si M y N son subsemimódulos de E, entonces su intersección $M \cap N$ es también un subsemimódulo de E.

$x,y \in M \cap N \Rightarrow x,y \in M,, x,y \in N \Rightarrow x+y \in M,, x+y \in N \Rightarrow x+y \in M \cap N$

$x \in M \cap N \Rightarrow ax \in M; \ ax \in N,, \underline{\forall} \ a \in A \Rightarrow ax \in M \cap N \ ,, \underline{\forall} a \in A.$

Se demuestra análogamente que la intersección de cualquier número de subsemimódulos de E es un subsemimódulo de E.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los subsemimódulos de E. $\mathcal{F}$ verifica las condiciones de Moore:

a) El elemento universal E de R(E) -retículo de las partes de E- pertenece a $\mathcal{F}$.

b) La intersección de cualquier número de elementos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$, entonces -P. Dubreil, Algebre 3 ed. pág. 52.

8) El conjunto $\mathcal{F}$ de todos los subsemimódulos de E es un retículo completo $(\cap,\Sigma)$ contenido en el retículo R(E), $(\cup,\cap)$. La unión,$\Sigma$, en $\mathcal{F}$ queda establecida de la siguiente manera: $M_k \in \mathcal{F},, \underline{\forall} \ k \in K$ ,,

$$\sum_k M_k = \bigcap_{N \in Q} N, \quad \text{siendo } Q = \{N \in \mathcal{F} \ / M_k \subseteq N \ ,, \forall \ k \in K\}$$

Sea $\{M_k\}_{k \in K}$ una familia de subsemimódulos de E, $M = \sum_k M_k$ la unión definida en 8); $T_k$ sistema de generadores de $M_k$. Se verifica:

9) El conjunto $P = \{x \in E / x = \sum_k m_k$, suma de soporte finito$\}$; $m_k \in M_k\}$ es un subsemimódulo de E, al que designamos $P = \sum_k'' M_k$. Se cumplen las igualdades:

$$M = P = L(\bigcup_k T_k)$$

$$\sum_k M_k = \sum_k'' M_k = L(\bigcup_k T_k)$$

lo cual nos conduce a identificar $\Sigma$ y $\Sigma''$ en el retículo de los subsemimódulos de E y a llamar a $\Sigma$ "unión lineal de subsemimódulos".

Todas las sumas que escribamos serán supuestas de soporte finito. P es subsemimódulo de E: $x, y \in P \Rightarrow x = \sum_k m_k$, $y = \sum_k m'_k$ ,, $m_k, m'_k \in M_k \Rightarrow$ $x+y = \sum_k (m_k + m'_k)$ ,, $m_k + m'_k \in M_k \Rightarrow x + y \in P$.- $x \in P \Rightarrow x = \sum_k m_k \Rightarrow \forall\, a \in A$ $a\underline{x} = \sum_k a m_k$,, $am_k \in M_k \Longrightarrow \forall\, a \in A$, $a\underline{x} \in P$.

$M = P$ : $M_k \subseteq P$, $k \in K$, en virtud de la definición de P. Como M es,, por definición - véase 8-, el mínimo subsemimódulo de E que contiene a todo $M_k$, $\forall\, k \in K$, -resulta $M \subseteq P$. -- $x \in P \Rightarrow x = \sum_k m_k$ ,, $m_k \in M_k \Longrightarrow m_k \in M$ ,, $\forall\, k \in K \Longrightarrow x = \sum_k m_k \in M$; es decir $P \subseteq M$, esto es $M = P$.

La igualdad $P = L(\bigcup_k T_k)$ es de obtención inmediata. Como $M_k = L(T_k)$, resulta:

$$\sum_k L(T_k) = L(\bigcup_k T_k) \tag{1}$$

Haciendo uso de la segunda parte del teorema de Moore, concluimos que:

10) La aplicación $L : T \to L(T)$ ,, $\forall\, T \in R(E)$, es una cerradura en el retículo R(E) de las partes del A-semimódulo E. Por consiguiente

$$L(\bigcap_k T_k) \subseteq \bigcap_k L(T_k)$$

$$\bigcup_k L(T_k) \subseteq L(\bigcup_k T_k) = L(\bigcup_k L(T_k)),,\ \forall\, k \in K,\ T_k \in R(E)$$

11) a) El retículo $\mathcal{F}$ de los subsemimódulos del A-semimódulo E verifica la condición de cadena ascendente si y solamente si todo subsemimódulo de E es de tipo finito (esto es, posee un sistema de generadores finito).

b) $\mathcal{F}$ no es, en general, ni modular, ni complementario, ni atómico.

c) En $\mathcal{F}$ se verifica:

$$\sum_k (R \cap M_k) \subseteq R \cap (\sum_k M_k)$$

a): Supongamos que existe un subsemimódulo Q de E (posiblemente Q=E) que no es de tipo finito. Sea Q=L(T); Sea $T_1=\{t_1\}$,, $t_1\in T, \exists t_2 \in T/t_2 \notin L(T_1)$ sea $T_2 = T_1 \cup \{t_2\}$, .... $\exists t_p \in T/\ t_p \notin L(T_{p-1})$, sea $T_p = T_{p-1} \cup \{t_p\}$

La cadena infinita $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_p \subset \ldots$ da lugar a una cadena infinita estrictamente creciente de subsemimódulos de E, si $M_p = L(T_p)$, entonces $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_p \subset \ldots \subset Q$. Esto significa: si no todo subsemimódulo de E es de tipo finito, $\mathcal{F}$ no satisface la condición de cadena ascendente.

Sea todo subsemimódulo de E de tipo finito y sea $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_p \subset \ldots$ una cadena infinita estrictamente creciente de subsemimódulos de E; $G_p$ sea sistema de generadores finito de $M_p$. Construyamos $T_1 = G_1, T_2 = G_1 \cup G_2$ ; $T_3 = T_2 \cup G_3; \ldots; T_p = T_{p-1} \cup G_p; \ldots,$. Se verifica $M_p = L(T_p)$ y $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_p \subset \ldots$, estrictamente (1). El subsemimódulo de E: $M = \Sigma M_p$ posee como sistema de generadores el conjunto infinito $T = \cup T_p$. Por hipótesis existe un sistema finito de generadores P de M, $P \subset L(T)$, luego P depende lin-A de una parte finita T' de T==>M==>L(T') . En la cadena (1) existe un subíndice k tal que $T_{k+r} = T_k$, $\forall\ r > 1$, contradicción con (1). Esto significa, si todo subsemimódulo de E es de tipo finito, $\mathcal{F}$ satisface la condición de cadena ascendente. Hemos probado la equivalencia expresada en a).

Para mostrar b) nos basta exponer un ejemplo adecuado. Elijamos el $N_o$-semimódulo $E = \{n\underline{u} \ / \ n \in N_o\}$. $\mathcal{F}$ no es modular: sea $R = L(5\underline{u}, 7\underline{u})$, $M=L(3\underline{u})$ , $N = L(10u)$; no es verdad que "$R \supseteq N ==> R \cap (M+N) = (R \cap M) + N$"; en efecto, $19\underline{u} = 5\underline{u} + 2(7\underline{u}) \in R$, $19\underline{u} = 3\ (3\underline{u}) + 10\underline{u} \in M + N$,==> $19\underline{u} \in R \cap (M+N)$; $19\underline{u} \notin (R \cap M) + N$. Al no ser $\mathcal{F}$ modular, tampoco es distributivo.

$\mathcal{F}$ no es complementario: $G = L(3\underline{u}, 5\underline{u})$ contiene todos los elementos de E excepto $\underline{u}$, $2\underline{u}$, $4\underline{u}$, $7\underline{u}$; no existe ningún subsemimódulo H de E tal que $H \cap G = 0$, (0, subsemimódulo nulo de E, $0 = L(\underline{o})$ contiene sólo al neutro de E, por 2). y $H + G = E$.

$\mathcal{F}$, en general no es atómico. Decimos de un retículo $\mathcal{R}$ que es atómico si en él se verifica $\exists\ P \in \mathcal{F}$ ; $0 \subset P \ / \ \forall\ P' \in \mathcal{F} : 0 \subset P' \subseteq P \Longrightarrow P' = P$. Sea M un subsemimódulo cualquier de $E = \{n\underline{u} \ / \ n \in N_o\}$ . Sea $\underline{x} \in M$, como $\underline{x} \notin L(2\underline{x})$ ==>$L(2\underline{x} \subset M$. luego $\mathcal{F}$ no es atómico. Al no ser atómico $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ tampoco satisface la condición de cadena descendente.

Por fin mostremos c): en $\mathcal{F}(E)$, cualquiera que sea E, se verifica $\Sigma_k (R \cap M_k) \subset R \cap (\Sigma_k M_k)$, $\forall\ R, M_k \in \mathcal{F}$ . $z \in \Sigma_k (R \cap M_k) ==> z = \Sigma_k m_k$ (de sop. finito), $m_k \in R \cap M_k ==> z \in R$; $z \in \Sigma_k M_k ==> z \in R \cap (\Sigma_k M_k)$ , c.q.d.

12) Todo semigrupo abeliano puede ser considerado como un $N_o$-semimódulo. $N_o$ designa al conjunto de los enteros no negativos, dotado de las leyes "adición" y "multiplicación" de enteros. $N_o$ es, pues, un semianillo con neutros "o", "1", que satisface SA6 ( 1).

Sea "S" el semigrupo conmutativo dado. La operación definida en S la denotaremos aditivamente. Si S no posee elemento neutro "e", lo adjuntamos (como hicimos en 1,18). Definamos en S la ley externa LE sobre $N_o$

| | | | |
|---|---|---|---|
| LE1 | $oa = e$ | $\forall\, a \in S$ | |
| LE2 | $1a = a$ | $\forall\, a \in S$ | |
| LE3 | $na = a + \overset{n}{\ldots} + a$ | | $\forall\, n \in N_o - \{o,1\}$ , $\forall\, a \in S$ |

S, dotado de las leyes de composición "+", "LE", satisface los axiomas SM1-SM5, luego es un $N_o$ semimódulo.

En particular, los semiretículos -que son semigrupos abelianos- pueden ser tratados como $N_o$-semimódulos. Precisemos, sin embargo, más. Sea P el conjunto $N_o$, dotado de las operaciones LA, LM.

LA : $o + n = n + o = n$ , $\forall\, n \in N_o$ , LM : "multiplicación" de enteros
$1 + 1 = 1$

P es un semianillo con neutros que cumple SA6 y en P se verifica: todo elemento de P que sea distinto de "o" es igual a "1". Se cumple que

13). Todo semiretículo es un P-semimódulo.

14). Todo semianillo A puede ser considerado, de un modo canónico, como un $A^*$-semimódulo a la izquierda (o un $A^*$ -semimódulo a la derecha).

Sea A un semianillo (+,.) SA4, SA5, SA6. A es respecto a "+" un semigrupo abeliano con neutro "o". Definamos en A la ley externa LE sobre A como dominio de multiplicadores. LE : $\forall\, a,b \in A$ $ba = b.a$.

A, "+", "LE" es un A-semimódulo a la izquierda que designaremos $A_i$. Si definimos en A en lugar de LE, la ley externa LE' $ba = a.\, b$, entonces A, "+", LE'", posee estructura de A-semimódulo a la derecha, que designaremos $A_d$.

En el caso de que el semianillo A no cumpliese alguna o ninguna de las propiedades SA4, SA5, SA6, pasaríamos a su extensión elemental o natural $A^*$, la cual satisface dichas propiedades (§ 1, 18) y 19). En $A^*$ podemos defi

LE("LE') sobre A*. A* "+", "LE", ("LE'") es un A*-semimódulo a la izquierda (a la derecha) que contiene a A.

En particular, un retículo R, en donde es válida una de las leyes distributivas, puede ser considerado como un R* -semimódulo a la izquierda o la derecha. Por lo tanto, un álgebra de Boole B puede ser considerada canónicamente como un B-semimódulo a la izquierda o a la derecha.

15). Sea A un anillo con elemento unidad 1 (neutro "."). Todo A-semimódulo E es un A-módulo.

Sea 1' el opuesto de 1. Todo elemento x de E posee opuesto, el 1'x, ya que $x + 1'x = 1x + 1'x = (1 + 1')x = ox=o$. E es, por consiguiente, un grupo aditivo abeliano que tiene por dominio de operadores un anillo A con elemento 1; la ley de composición externa de E satisface SM1-SM5, y por lo tanto E verifica todos los axiomas de A-módulo.

Definición

E es un A-semianillo-módulo<=>E es un conjunto no vacío, dotado de dos leyes de composición, una interna respecto de la cual E es un grupo abeliano, y otra externa sobre el semianillo A que cumple los axiomas SM1-SM5.

16). Sea Z el subconjunto del A-semimódulo E formado por todos los elementos simetrizables de E. Z es el máximo A-semianillo-módulo contenido en E.

Z es evidentemente subgrupo del semigrupo aditivo abeliano E.

Z es estable respecto de la ley externa definida en E: si $x \in Z$, x posee opuesto x' ; $x + x' = o \Rightarrow \forall a \in A,\ a(x + x') = ao \Longrightarrow ax + ax' = o \Longrightarrow ax \in Z$. Por tanto Z es un A-semianillo-módulo y, debido a su construcción, el máximo contenido en E.

"$\theta$" designara el conjunto de los elementos simetrizables "+" de A, semianillos. Sea E un A-semimódulo y $\theta E = \{tx/t \in \theta;\ x \in E\}$.

17). L($\theta$E) es un A-semianillo-módulo contenido en Z. L($\theta$E) es un $\theta$-pseudomódulo.

$y \in L(OE) \Longrightarrow y = \sum_i t_i x_i,\quad t_i \in \theta$ ; el opuesto de y es $y' = \sum_i t_i' x_i$, siendo $t_i'$ el opuesto en A de $t_i$, $t_i' \in \theta \Longrightarrow y' \in L(\theta E)$. Si $a \in A$, $ay= \sum_i at_i x_i$, $at_i \in \theta$ , por ser $\theta$ ideal fuerte bilátero de A (§1, 6) $\Longrightarrow ay \in L(\theta E)$. $L(\theta E) \subseteq Z$, por ser este el máximo (16).

L($\theta$E) es un $\theta$-pseudomódulo, puesto que $\theta$ es un anillo contenido en A, que no contiene a 1. Si $1 \in \theta$, $\theta = A$ (por ser $\theta$ ideal fuerte de A) y $L(\theta E)=Z=E$, A anillo con elemento unidad 1 y E A-módulo. Por tanto: L(ΘE) es un Θ-módulo $\Leftrightarrow$ E es un A-módulo.

18). <u>Sea A un cuerpo. Todo A-semimódulo E es un A-espacio vectorial.</u>

Si A es cuerpo, es anillo con elemento unidad y E es A-módulo, por 15. Si E es A-módulo y A es cuerpo, E es A-espacio vectorial, N. Bourbaki, Algebre, chap 2, 1, definición 2.

El conjunto de todos los A-semianillos-módulos contenidos en el A-semimódulo E es un retículo en el que la intersección coincide con la interacción conjuntista. Llamémosle $M(E)$. Todo ideal a la izquierda del semianillo es un subsemimódulo de $A_i$(14) y viceversa. Todo ideal fuerte a la izquierda de A da lugar a un A-semianillo-módulo contenido en $A_i$ y viceversa.

19). <u>Pseudo-semimódulos. Inmersión de un pseudo-semimódulo en un semimódulo.</u>

Sea A un semianillo. Admitimos la posibilidad de que A no satisfaga las propiedades SA4, SA5, SA6. Diremos que E es un A-pseudo-semimódulo a la izquierda si en E están definidas dos leyes de composición, una interna "+", respecto a la cual, SM0:E es un semigrupo abeliano (eventualmente, sin neutro); y otra ley externa sobre A como dominio de multiplicadores, de modo que se verifica:

SM1, SM2, SM3.

(véase al principio de este parágrafo).

Se trata de comprobar aquí que un A-pseudo-semimódulo a la izquierda cualquiera E puede ser sumergido en un A*-semimódulo E' a la izquierda.

Supongamos, en primer lugar, que ni A ni E poseen neutro respecto a la adición. Llamemos $E' = E \cup \{o\}$, y sea $A' = A \cup \{o'\}$, dotado este último conjunto de las leyes L' 1, L' 2 dadas en §1 (véase: inmersión de un semianillo ...). Imponemos en E' la operación P1 y la ley externa P2 sobre A'. :

P1 $x + y$ en $E' = x + y$ en $E$, $\forall x, y \in E$
$x + \underline{o} = \underline{o} + x = x$, $\forall x \in E$; $\underline{o} + \underline{o} = \underline{o}$

P2 $ax$ en $E' = ax$ en $E$, $\forall a \in A$, $\forall x \in E$
$a\underline{o} = \underline{o}$, $\forall a \in A$; $o'x = \underline{o}$, $\forall x \in E$; $o'\underline{o} = \underline{o}$

Al definir en E'

$$P3 \quad nx = x + \overset{n}{\overbrace{\dots}} + x \; ; \; 1x = x \; ; \; ox = \underline{o}$$
$$\text{para } n \in N_o - \{o,1\},\ o \in N_o,\ 1 \in N_o,\ \forall\, x \in E';$$

se cumple (4) $a(nx) = n(ax) = (na)x$, $\forall\, a \in A'$, $\forall n \in N_o$, $\forall\, x \in E'$.

Dotemos a E' de la ley interna P1 y de la ley externa Q2 sobre A* (extensión natural de A, ver §1):

$$Q2 \quad (a,n)x = ax + nx \;,\quad \forall\, a \in A' \;,\ \forall\, n \in N_o,\ \forall\, x \in E';$$

en donde "ax" viene dado por P2, "nx" por P3.

Se comprueba sin dificultad, teniendo en cuenta las igualdades (4) que E', dotado de las leyes P1, Q2, posee estructura de A*-semimódulo a la izquierda.

En el caso de que el semianillo A posea neutros respecto a "+" y ".", llamémosles "u" y "e", respectivamente, tales que no cumplan SA6, y de que el A-pseudo-semimódulo dado E tenga neutro respecto a "+", sea "$\underline{u}$" de modo que no se verifiquen los axiomas SM4, SM5, de semimódulo (o en cualquier otro caso que resulte de combinar hipótesis de este tipo), seguimos el siguiente proceso de inmersión:

Sea o' un elemento $\notin$ A; dotamos a $A' = A \cup \{o'\}$ de las leyes L'1, L'2 dadas en §1. Sea o $\notin$ E; dotamos a $E' = E \cup \{o\}$ de las leyes P1, P2, dadas anteriormente. Designando (véase §1) $A^* = \{A' x N_o \,, L^* 1, L^* 2\}$, fácilmente se comprueba que éste es un semianillo que cumple SA4, SA5, SA6, siendo sus neutros "+", ".", respectivamente, $u^* = (o', o)$, $e^* = (o', 1)$. También se comprueba con facilidad que {E' , P1, Q2} es un A*-semimódulo que contiene un A-pseudo-semimódulo isomorfo a E.

## § 3. CONGRUENCIAS EN UN SEMIMODULO

Subsemimódulos cerrados del A-semimódulo E.

Definición.

M es subsemimódulo cerrado de E $\iff$ en M se verifica: si las ecuaciones de la forma $x + m = m'$, $m, m' \in M$, tienen soluciones x en E, dichas soluciones x pertenecen a M. Simbólicamente:

$$(\forall x \in E)\ (\exists\ m, m' \in M)\ \left[(x + m = m') \implies x \in M\right].$$

Los subsemimódulos impropios 0 y E, son evidentemente subsemimódulos cerrados de E.

1). Sea M un subsemimódulo arbitrario de E. Sea $\bar{M} = \{x \in E/\ x + m = m';\ m, m' \in M\}$. $\bar{M}$ es un subsemimódulo de E y la aplicación $c: M \to \bar{M}$ es una cerradura algebráica en el retículo $F(E)$ de los subsemimódulos de E.

I) Es inmediato que $\bar{M}$ es subsemimódulo de E.

II) $M \subseteq \bar{M}$, $\forall M \in F(E)$, como fácilmente se comprueba.

III) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$. Llamemos $\bar{M} = P$; $\bar{\bar{M}} = \bar{P} = T$.

$t \in T \implies t + p = p'$ , $p, p' \in P. \implies p + m = m'$ ; $p' + n = n'$, $m, m', n, n' \in M$ $\implies t + p + m + n = p' + m + n \implies t + m' + n = m + n' \implies t \in P$. Es decir, $\bar{\bar{M}} \subseteq \bar{M}$; como (II) nos asegura $\bar{M} \subseteq \bar{\bar{M}}$, obtenemos $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$.

IV) Es inmediato que $M, N \in F(E)$; $M \subseteq N \implies \bar{M} \subseteq \bar{N}$ c.q.d.

Los elementos imagen de esta cerradura "c" coinciden con los subsemimódulos cerrados de E, tal como los hemos definido al principio, lo cual justifica la denominación que hemos dado a dichos subsemimódulos.

Consecuencia inmediata de 1 es que

2). El conjunto $C(E)$ de todos los subsemimódulos cerrados de E es un retículo completo contenido en el retículo $F(E)$. La intersección en $C(E)$ coincide con la intersección en $F(E)$ y, por lo tanto, con la intersección conjuntista.

Definiciones

$\mathcal{R}$ es una congruencia en el A-semimódulo E <==> $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia entre elementos de E, que es compatible con la estructura algebraica de semimódulo de E. $\mathcal{R}_o$ es la clase cero de la congruencia R <==> $\mathcal{R}_o$ es la clase de E que contiene al elemento o de E.

3). La clase cero $\mathcal{R}_o$ de cualquier congruencia $\mathcal{R}$ en E es un subsemimódulo cerrado de E.

Es evidente que $\mathcal{R}_o$ es subsemimódulo de E.

$x \in \bar{\mathcal{R}}_o \Longrightarrow x + r = r'$, $\quad r,r' \in \mathcal{R}_o \Longrightarrow r \equiv r' \equiv o\ (\mathcal{R}) \Longrightarrow x + r \equiv o(\mathcal{R})$ $x + r \equiv x\ (\mathcal{R}) \Longrightarrow x \equiv o\ (\mathcal{R}) \Longrightarrow x \in \mathcal{R}_o$, es decir $\bar{\mathcal{R}}_o \subseteq \mathcal{R}_o$ que con 1 (II) $\mathcal{R}_o \subseteq \bar{\mathcal{R}}_o$ nos da $\bar{\mathcal{R}}_o = \mathcal{R}_o$ c.q.d.

El conjunto de las relaciones de equivalencia definibles en E(A-semimódulo) es un retículo completo, donde la intersección y la unión quedan establecidas de la siguiente manera. Sea $\psi = \{R_i\}_{i \in I}$ una familia de relaciones de equivalencia en E.

(i) $\bigcap_{i \in I} R_i = T$, $\quad x,y \in E \quad xTy \Longleftrightarrow xR_iy \quad \forall\ i \in I$.

(ii) $\bigcup_{i \in I} R_i = P$, $\quad xPy \Longleftrightarrow$ existe una sucesión finita de elementos de E $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ tal que $x_i \equiv x_{i+1}\ (R_k)$, $\quad R_k \in \psi$

Se demuestra -Dubreil, Algebre, pág. 61- que T (P) es la máxima (mínima) relación de equivalencia en E contenida (que contiene a) en todo $R_i$ ($\forall$ i  I). A P se le llama unión de relación de equivalencia o producto transitivo.

Pues bien, fácilmente se comprueba que si para todo $i \in I$, $R_i$ es una congruencia en E, entonces también son congruencias en E T y P, lo cual nos muestra que

4) El conjunto $\mathcal{K}(E)$ de las congruencias en E es un retículo completo, subretículo del retículo de las relaciones de equivalencia en E. La intersección y la unión en $\mathcal{K}(E)$ vienen dadas por (i),(ii), respectivamente. A esta última la podemos llamar también producto transitivo de congruencias en E.

Congruencias normales en un A-semimódulo E.

A continuación destacaremos unas congruencias en E, que desempeñaran un papel especial en la teoría de semimódulos.

5). Sea M un subsemimódulo arbitrario de E (A-semimódulo) y sea $N$ la siguiente relación binaria entre elementos de E:

$$x \, N \, y \iff (\exists m,m' \in M)(x + m = y + m')$$

$N$ es una congruencia en E y su clase cero $N_o = \bar{M}$ ($\bar{M}$, cerrado de M; véase 1).

$N$ es una relación reflexiva: $\forall x \in E \quad x \, N \, x$, ya que $x + o = x + o$, $o \in M$, porque todo subsemimódulo de E contiene al $o \in E$. $N$ es relación simétrica, trivial. $N$ cumple la propiedad transitiva: $x \, N \, y$; $y \, N \, z \implies x+m=y+m'$; $y + n = z + n'$, $m,m',n,n' \in M \implies x + m + n = z + n' + m'$,, $m+n, n'+m' \in M \implies x \, N \, z$. Por lo tanto $N$ es una relación de equivalencia en E; veamos que es compatible con la estructura de E.

$x \, N \, y \implies x + m = y + m'$,, $m,m' \in M \implies \forall z \in E$, $z + x + m = z + y + m'$ $\implies \forall z \in E$, $(z + x) \, N (z + y)$.

$x \, N \, y \implies x + m = y + m'$,, $m,m' \in M \implies \forall a \in A$, $ax + am = ay + am'$,, $am,am' \in M \implies \forall a \in A \; (ax) \, N \, (ay)$. $N$ es una congruencia en E.

Su clase cero $N_o$ es $\{x \in E / \exists \, m,m' \in M, x + m = o + m' = m'\}$ es decir, -véase 1- $\bar{M}$. c.q.d.

Definiciones

Diremos de la relación $N$, tal como ha sido establecida en la proposición 5, que es la congruencia en E normalizada por el subsemimódulo M de E. Diremos de una congruencia en E que es normal si y solo si es congruencia normalizada por algún subsemimódulo de E.

Sea $N$ la congruencia en E normalizada por el subsemimódulo M de E. Cualquier otra congruencia $R$ en E que tenga la misma clase cero que $N$ (esto es $R_o = N_o = \bar{M}$), vérifica $N \subseteq R$.

En efecto $x \, N \, y \implies x + m = y + m'$,, $m,m' \in M$; como M esta contenido en $R_o = \bar{M} \implies m \equiv m' \equiv o \; (R) \implies x \equiv y \; (R)$.

Consecuencias inmediatas de 6 son:

7) Si M,N son dos subsemimódulos de E tales que $\bar{M} = \bar{N}$ y $M,N$ son las congruencias en E normalizadas por M y N, respectivamente, entonces $M = N$.

Un enunciado equivalente a 7 es:

7') Todos los subsemimódulos de E que mediante la cerradura "c" -véase 1 *les corresponde el mismo subsemimódulo cerrado M de E, engendran la misma congruencia normal en E, la normalizada por M.*

8). *El conjunto de todas las congruencias normales $\mathcal{N}(E)$ en E es un retículo completo contenido en $K(E)$, retículo de las congruencias en E. La unión en $\mathcal{N}(E)$ coincide con la unión en $K(E)$. La aplicación $\mathcal{N} : R \to \mathcal{N}(R)$, $R \in K(E)$; $\mathcal{N}(R)$, congruencia normalizada por la clase cero de R, es una abertura algebraica en el retículo $K(E)$.*

a) La identidad en E es la congruencia normal en E de clase cero el subsemimódulo nulo 0 de E.

b) Si $\{\mathcal{N}_k\}_{k \in K}$ es una familia arbitraria de congruencias normales en E, *entonces* $\mathcal{N} = \bigcup_{k \in K} \mathcal{N}_k$ es una congruencia normal en E. La clase cero de $\mathcal{N}$ es $\sum_{k K} N_k$, siendo $N_k$ la clase cero de $\mathcal{N}_k$. En efecto:

$x \mathcal{N} y \iff \exists \{x_i\}_{i \in I} \subseteq E;\ I = \{1, \dots, m\}\ ;\ x = x_1,\ \ y = x_m,$

$x_i \equiv x_{i+1}\ (\mathcal{N}_{k(i)}) \implies x_i + n_{k(i)} = x_{i+1} + n'_{k(i)}\ ,,\ n_{k(i)}, n'_{k(i)} \in N_{k(i)},,$

$\forall\ i \in \{1, \dots, m-1\} \implies$ , mediante sustituciones,

$x_1 + \sum_{i=1}^{m-1} n_{k(i)} = x_m + \sum_{i=1}^{m-1} n'_{k(i)}$ , esto es $\mathcal{N}$ es normal de clase cero $\overline{\sum_{k K} N_k}$,

con lo que queda demostrado el enunciado.

9). El conjunto Q de todas las congruencias en E que tienen por clase cero M es un subretículo completo del retículo de las congruencias en E. Mínimo de Q = congruencia normalizada por M.

Evidentemente la intersección de cualquier número de elementos de Q es un elemento de Q. Sea $\forall\ j \in J$, $R_j \in Q$, $\bigcup_{j \in J} R_j = U$. $z \equiv o\ (U) \implies$

$\implies \exists \{x_i\}_{i \in I} \subseteq E;\ \ I = \{1, \dots, m\}\ ;\ x_1 = o,\ x_m = z;\ x_i \equiv x_{i+1}\ (R_{k(i)}) \implies$

$x_2 \in M,\ x_3 \in M, \dots, x_m = z \in M \implies U \in Q$ c.q.d. Q posee, pues, máximo y mínimo; la congruencia mínima de Q es -en virtud de 6- la normalizada por M.

10). *La aplicación* $\beta : M \in C(E): M \to \beta(M)$, *congruencia normalizada por M, es un isomorfismo del retículo $C(E)$, de los subsemimódulos cerrados de E, sobre el retículo $\mathcal{N}(E)$, de las congruencias normales en E.*

Por 5 y por 9 sabemos que $\beta$ es una correspondencia biunívoca entre dichos retículos. Además $\beta$ deja invariante el orden parcial en esos retículos, pues, $M, N \in C(E)$ y $M \subseteq N \implies \beta(M) \subseteq \beta(N)$. Una biyección entre retículos que preserva el orden parcial de estos es un isomorfismo; en efecto, sea $h : R \to R'$ una biyección entre retículos que preserve el orden, y sea $r_i \in R \Longrightarrow r_i \subseteq \bigcup_{i\in I} r_i$, $\forall\, i \in I \Longrightarrow h(r_i) \subseteq h(\bigcup_{i\in I} r_i)$, $\forall\, i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} h(r_i) \subseteq h(\bigcup_{i\in I} r_i)$; supongamos $h(t) = \bigcup_{i\in I} h(r_i) \subset h(\bigcup_{i\in I} r_i)$(estrictamente esto implicaría $t \subset \bigcup_{i\in I} r_i$ (estrictamente); como $h(r_i) \subseteq h(t)$, $\forall\, i \in I$, resulta $r_i \subseteq t$, $\forall\, i \in I$, y por tanto $\bigcup_{i\in I} r_i \subseteq t$, contradicción. Luego $h(\bigcup_{i\in I} r_i) = \bigcup_{i\in I} h(r_i)$. Dualmente , $h(\bigcap_{i\in I} r_i) = \bigcap_{i\in I} h(r_i)$, c.q.d.

Reuniendo estos resultados obtenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} F(E) & & K(E) \\ c \downarrow & & \downarrow N \\ C(E) & \xleftrightarrow{\ \beta\ } & N(E) \end{array}$$

donde $F(E)$, $C(E)$, $K(E)$, $N(E)$ son los retículos de los subsemimódulos, subsemimódulos cerrados, congruencias, congruencias normales del A-semimódulo E, "c" es una cerradura -1-, $N$ es una abertura -8-, y "β" es un isomorfismo de retículos -10-.

Definición

A una congruencia en un A-semimódulo E que no sea normal la llamaremos anormal. De 6. y de 10 resulta:

11). La condición necesaria y suficiente para que una congruencia R en E sea anormal es que exista un par de elementos x e y de E relacionados por R tales que para todo $m, m' \in R_o$ (clase cero de R) $x + m \neq y + m'$.

Definición

Entenderemos en los sucesivo por congruencia reductiva en E a una congruencia anormal en E- A-semimódulo- cuya clase cero sea el subsemimódulo nulo O de E.

Congruencias anormales en un A-semimódulo E.

Rees descubrió en 1940 unas congruencias en los semigrupos no conmutativos, que desde entonces llevan su nombre. Sea I un ideal del semigrupo no conmutativo S. R es una congruencia de Rees en S si,

$$\forall\, a,b \in S \quad aRb \Longleftrightarrow a = b \vee a,b \in I.$$

Es decir, todo elemento de S-I retiene su identidad en S/R, en tanto que todo elemento de I se transforma en el elemento permitido de S/R mediante el homomorfismo canónico asociado a R.

A continuación generalizaremos este tipo de congruencias a los A-semimódulos.

Decimos que C es subsemimódulo circular (sin cero) del A-semimódulo E si C es un subconjunto de E que verifica (i) $o \notin C$; (ii) $\forall a \in A, a \neq o; \forall c \in C, ac \in C$ (iii) $E + C \subseteq C$, $\forall x \in E, \forall c \in C, x + c \in C$, -simbólicamente.

Cualquier subsemimódulo circular C del A-semimódulo E permite establecer una congruencia R en E, del siguiente modo $\forall x,y \in E$

$$xRy \iff x = y \vee x,y \in C \quad (\vee, \text{ disyunción})$$

R es una relación de equivalencia en E por originar en E la clasificación $\{\{x\}_{x \in C}, C\}$. R es compatible con la estructura de A-semimódulo de E:

a) $xRy \implies (z + x)R(z + y), \quad \forall z \in E$

$xRy \implies x=y \vee x,y \in C \implies z+x=z+y \vee z+x,z+y \in C \implies (z+x)R(z+y)$

b) $xRy \implies (ax)R(ay), \quad \forall a \in A.$

$xRy \implies x=y \vee x,y \in C \implies \forall a \in A, a \neq o; ax=ay \vee ax,ay \in C;$

para $a = o$; $ax = ay = o \implies (ax)R(ay) \quad \forall a \in A.$

R es por tanto una congruencia en E, a la que llamaremos "generalizada de Rees". Obtenemos:

12). Todo subsemimódulo circular de E determina una única congruencia generalizada de Rees en E. Toda congruencia de Rees en E, que no sea la congruencia idéntica, es reductiva y por lo tanto anormal.

La primera parte de este enunciado queda probada más arriba. Sea R una congruencia generalizada de Rees en E, distinta de la congruencia idéntica I, determinada por el subsemimódulo circular C de E. La clase cero de R consta de un solo elemento, el o de E, puesto que $o \notin C$ y entonces el "o" solo es congruente consigo mismo módulo R. En C existe, por lo menos, dos elementos distintos entre sí, pues de lo contrario R = I, contra lo supuesto. Sean $c, c' \in C$ y $c \neq c'$. Se verifica $\forall m,m' \in R_o$ (clase cero de R) $c+m \neq c'+m'$.

R es anormal -véase 11, de clase cero 0, el subsemimódulo nulo de E; por tanto es reductiva.

13). Si R es la congruencia generalizada de Rees en E determinada por C, $\mathcal{N}$ es la congruencia normal en E de clase cero, $N \neq 0$, y si $C \cap N = \emptyset$ y $R \not\subseteq \mathcal{N}$ entonces $R \cup \mathcal{N}$ es una congruencia anormal no reductiva.

De $C \cap N = \emptyset$ se deduce que la clase cero de $R \cup \mathcal{N}$ es N. De $R \not\subset \mathcal{N}$ se deduce $\mathcal{N} \subset R \cup \mathcal{N}$ (estrictamente). Como, por hipótesis, $\mathcal{N}$ es la congruencia normalizada por N, $R \cup \mathcal{N}$ es anormal de clase cero $N \neq 0$ y por tanto anormal no reductiva. _

14). La unión de una congruencia reductiva con una congruencia anormal de clase cero $M \neq 0$ es una congruencia de clase cero M, también anormal.

Resulta inmediato, porque la unión de una congruencia de clase cero N con otra clase cero M, $N \subset M$, es una congruencia de clase cero M y porque si R es la reductiva y R' es la anormal de clase cero M se cumple $R' \subseteq R \cup R'$, $R \cup R'$ contiene estrictamente a la congruencia normalizada por M, por tanto es anormal.

Semimódulos cocientes

Sea E un A-semimódulo a la izquierda y R una congruencia en E. El conjunto $E/R = \{\{x\}_{x \in E}\}$, en donde $\{x\}$ significa la clase de E módulo R que contiene al elemento x de E,dotado de las leyes de composición:

$$\{x\} + \{y\} = \{x+y\} , \quad \forall\, x,y \in E$$

$$a\,\{x\} = \{ax\} , \quad \forall\, a \in A, \ \forall\, x \in E$$

es un A-semimódulo a la izquierda, que denominamos semimódulo cociente de E por R, o de E módulo R. Si R designa la congruencia idéntica, entonces E/R=E; si R designa la congruencia universal, entonces E/R consta de un solo elemento: la clase cero y llamamos a E/R = 0 semimódulo nulo.

Acabamos de ver que una congruencia R en E no queda univocamente determinada por su clase cero M -subsemimódulo cerrado de E-; de ahí que E/M signifique en un principio múltiples semimódulos cocientes, a saber, todos aquellos posibles E/R en que R recorre todas las congruencias en E de clase cero M. No obstante, si elegimos $E/M = E/\mathcal{M}$ , siendo $\mathcal{M}$ la congruencia en E normalizada por M, fijamos el sentido de E/M. Podemos ir más lejos, con ayuda de la cerradura "c" -1, y establecer la siguiente:

Definición

$$\forall\, N \in \mathcal{F}(E) : E/N = E/\beta c(N)$$

Creemos que la anterior definición está justificada por dos razones, 1) dado el subsemimódulo N de E, podemos construir la congruencia $\beta c(N)$ y por lo tanto E/N; 2) $\beta c(N)$ es la mínima congruencia en E de clase cero c(N), el cual, a su vez, es el mínimo subsemimódulo cerrado de E que contiene a N.

Homomorfismos de A-semimódulos

Sean E,F dos A-semimódulos a la izquierda. Decimos que $f: E \to F$ es un A-homomorfismo (u homomorfismo, simplemente) ó una aplicación A-lineal de E en F si "f" es una aplicación de E en F que cumple:

$$\text{(i) } f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x,y \in E; \quad \text{(ii) } f(ax) = af(x) \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, x \in E$$

El "o" de E se transforma mediante cualquier homomorfismo $f: E \to F$ en el "o" de F. $f(o) = f(ox) = of(x) = o$. Llamamos imagen, núcleo del homomorfismo f -que designamos abreviadamente Imf, Kerf- a los siguientes conjuntos:

$$\mathrm{Imf} = \{f(x)\}_{x \in E} \quad ; \quad \mathrm{Kerf} = \{x \in E/f(x) = o\}$$

Imf es un subsemimódulo de F; Kerf es un subsemimódulo cerrado de E.

La relación binaria en E $x \,^F\, y \iff f(x) = f(y)$ es una congruencia en E que llamaremos "asociada" al homomorfismo f. Recíprocamente, dada una congruencia arbitraria R en E, la aplicación $c: E \to E/R$, $c(x) = \{x\}$, es un A-homomorfismo que llamaremos canónico o natural. Si $E \subseteq F$, la aplicación $i: E \to F$, $i(x) = x \in F$ es un homomorfismo que denominamos inmersión.

Definiciónes

Dado el A-homomorfismo $f: E \to F$, E,F son A-semimódulos, decimos que:

f es un homomorfismo suprayectivo (o sobre) o un epimorfismo $\iff$ Imf=F

f es un homomorfismo inyectivo o un monomorfismo $\iff \forall x,y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$.

f es un isomorfismo $\iff$ f es epimorfismo y monomorfismo.

f es un homomorfismo normal (reductivo, de Rees, anormal no reductivo) $\iff$ la congruencia en E asociada a f es normal (reductiva, de Rees, anormal no reductiva, respectivamente).

15). (Teorema del producto de homomorfismos)

Sean E,F,G A-semimódulos y $f: E \to F$, , $g: F \to G$ A-homomorfismos de

E en F y de F en G. Se cumple:

(i) La aplicación compuesta $p = gf$ es un A-homomorfismo de E en G, a la que llamamos homomorfismo producto de f por g.

(ii) El producto de dos homomorfismos normales f y g, tales que $\mathrm{Kerg} \subseteq \mathrm{Imf}$, es un homomorfismo normal.

(iii) El producto $p = gf$ de un epimorfismo f por un homomorfismo anormal g es un homomorfismo anormal.

(i) p es un homomorfismo de E en G:

$$\forall\, x,y \in E\ ,,\ p(x + y) = gf(x + y) = g(fx + fy) = px + py.$$

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, a \in A,\quad p(ax) = gf(ax) = g(afx) = apx.$$

(ii) $\forall\, x,y \in E$, $px = py \Longrightarrow gfx = gfy \Longrightarrow$ (por ser g normal) $\exists n,n' \in \mathrm{Kerg}$; $fx + n = fy + n' \Longrightarrow$ (por estar $\mathrm{Kerg} \subseteq \mathrm{Imf}$) $\exists r,r' \in f^{-1}(\mathrm{Kerg})$; $fx + fr = fy + fr' \Longrightarrow f(x+r) = f(y+r') \Longrightarrow$ (por ser f normal) $\exists m,m' \in \mathrm{Kerf}$; $x+r+m = y+r' + m'$.

Como $f^{-1}(\mathrm{Kerg}) = \mathrm{Kerp}$; $\mathrm{Kerf} \subset \mathrm{Kerp}$; luego p es normal.

(iii) Por ser g anormal $\exists u,v \in F /\ gu = gv$, $\forall\, n,n' \in \mathrm{Kerg}$, $u + n \neq v + n' \Longrightarrow$ (por ser f epimorfismo) $\exists x,y \in E$; $fx=u$, $fy = v \Longrightarrow$ $\Longrightarrow fx + n \neq fy + n'$, $\forall\, n, n' \in \mathrm{Kerg}$. Como $f(\mathrm{Kerp}) = \mathrm{Kerg}$, $n = fm$, $n'=fm'$, recorriendo $m,m'$ todo Kerp $\Longrightarrow f(x+m) \neq f(y+m')$, $\forall\, m, m' \in \mathrm{Kerp} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \exists x,y \in E/\ px = py$; $\forall\, m,m' \in \mathrm{Kerp}$, $x+m \neq y+m'$, esto es, p es anormal.

16). (Teorema del homomorfismo inducido)

Sean $f: E \to F$ un epimorfismo y $g: E \to G$ un homomorfismo de A-semimódulos tales que las congruencias asociadas en E por f y g verifican $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Se cumple:

(i) Existe un único A-homomorfismo $h: F \to G$ tal que $hf = g$.
(ii) Si g es normal, entonces h es normal.
(iii) Si f es epimorfismo normal y g es anormal, entonces h es anormal.

(i) Por la Teoría de Conjuntos sabemos que existe una única aplicación $h: F \to G$ tal que $hf = g$. Esta aplicación h es un A-homomorfismo:

En efecto, por ser f homomorfismo suprayectivo $\forall\, u,v \in F$, $\exists x,y \in E/$ $fx = u$, $fy = v \Longrightarrow h(u+v)=h(fx+fy)=hf(x+y)=g(x+y)=gx+gy=hu+hv$, $\forall\, u, v \in F$

$h(au)=h(afx)=hf(ax)=g(ax)=agx=ahu$, $\forall\, a \in A$, $\forall\, u \in F$, c.q.d.

(ii) Si h fuese anormal, como f es epimorfismo y hf = g, por 15 (iii), deduciríamos que g sería anormal, contra la hipótesis, luego h es normal.

(iii) Supongamos que h fuese normal; por el teorema 15 (ii), resultaría que hf = g sería normal, contradicción con la hipótesis, por tanto h es anormal.

17). Si R,R' son dos congruencias en el A-semimódulo E, tales que $R \subseteq R'$ entonces existe un único A-homomorfismo $k : E/R \to E/R'$ tal que kc=c'; siendo c,c' los homomorfismos canónicos de $E \to E/R$, $E \to E/R'$, respectivamente.

Esta proposición se obtiene inmediatamente de 16 (i).

18). (Teorema principal de homomorfismos)

Sea $f: E \to F$ un A-homomorfismo cualquiera de E en F y $\mathcal{F}$ la congruencia asociada por f en E. f se descompone de un modo único f = ibkc

$$f : E \xrightarrow{c} E/\mathrm{Kerf} \xrightarrow{k} E/\mathcal{F} \xleftrightarrow{b} \mathrm{Imf} \xrightarrow{i} F,$$

siendo c homomorfismo canónico normal, k homomorfismo canónico reductivo (eventualmente, la identidad), b, isomorfismo, i inmersión. Si f es un homomorfismo normal, entonces k es la identidad. Si f es un homomorfismo reductivo, entonces c es la identidad.

Sabemos, por la Teoría de Conjuntos, que toda aplicación $f: E \to F$ se descompone de modo único en el producto $E \xrightarrow{c'} E/\mathcal{F} \xleftrightarrow{b} \mathrm{Imf} \xrightarrow{i} F$. En nuestro caso, $\mathcal{F}$ es la congruencia asociada por f en E; $E/\mathcal{F}$ , Imf son A-semimódulos c' homomorfismo canónico; b,i los homomorfismos señalados en el enunciado. Como $N(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ -véase 8- para toda congruencia $\mathcal{F}$ en E, aplicamos la proposición 17 y obtenemos que c' se descompone de modo único c' = kc. Además, $E/N(\mathcal{F})$ = E/Kerf ==> c es homomorfismo normal. Kerc' = Kerc ==> Kerk = 0. Si f es anormal, sabemos por 16 (iii) que k es anormal y, por tanto, reductivo; si f es normal, 16 (ii) nos dice que k es normal y Kerk = 0, luego k es la identidad. c.q.d.

Consecuencias:

19). Todo homomorfismo anormal se descompone de un modo único en el producto de un homomorfismo normal por un homomorfismo reductivo.

Según 18, $f = (ibk)c = rc$, donde $c$ es normal y $r$ es reductivo, por ser $k$ reductivo. En particular, todo homomorfismo canónico anormal se descompone de un modo único en el producto de un homomorfismo canónico normal por un epimorfismo reductivo.

Congruencias "sa"

Trataremos a continuación de un tipo especial de congruencias normales a las que, debido al importante papel que desempeñan, les asignamos un nombre específico: congruencias "sa". Seguimos suponiendo que A es un semianillo y que E es un A-semimódulo. Diremos que T es un complejo de E, si T es un subconjunto no vacío de E. Con objeto de abreviar, de ahora en adelante llamaremos a los semianillos-módulos (definición en 2, 15) simplemente "sa-módulos", y si tienen por dominio de operadores el semianillo A, les llamaremos también "A-sa-módulos".

20). Definiciones

Sea T un complejo de E y $p \in E$, se entiende por (P. Dubreil, Algebre, 3a ed., pág. 92).

$T-p$ = diferencia de T por $p \Longleftrightarrow \{x \in E / p + x \in T\}$

T es complejo neto de E $\Longleftrightarrow \forall p \in E : T - p \neq \emptyset$

$W_T$ = residuo de $T \Longleftrightarrow \{w \in E / T - w = \emptyset\}$

Se comprueba inmediatamente que:

(i) $w \in W_T \Longleftrightarrow (x+E) \cap T = \emptyset$

(ii) T es complejo neto de $E \Longleftrightarrow W_T = \emptyset$

(iii) $W_T \neq \emptyset \Longrightarrow W_T$ es un ideal de E que no contiene $o \in E$.

(iv) Cualquier complejo de E que contenga a un complejo neto de E, es, a su vez, neto; en efecto $T \subseteq V \Longrightarrow T-p \subseteq V-p$, $\forall p \in E$, si T es neto, V es neto también.

Definición

Dado el A-semimódulo E puede ocurrir que exista o no un epimorfismo f de E sobre un A-sa-módulo M. Si existe un tal f, llamaremos a f "homomorfismo-sa" y a la congruencia asociada por f en E "congruencia-sa" en E.

21). Todas las congruencias-sa de un semimódulo E son congruencias normales. Las clases de E módulo una congruencia-sa son, todas ellas, complejos netos de E.

Sea F una congruencia-sa en E, esto significa que existen un A-sa-módulo M y un epimorfismo $f: E \to M$ tal que $F$ es la congruencia asociada por $f$ en E. $u \equiv v\ (F) \implies fu = fv = u'$; sea $r'$ el opuesto de $u'$ en M y sea $r \in f^{-1}(r')$, entonces $f(u+r)=f(v+r)=o \implies u+r=t \in T=f^{-1}(o)$, $v+r=s \in T \implies$ $\implies \exists t,s \in T /\ u+s = v+t\ (=u+v+r)$, por tanto $F$ es normal.

Sea H una clase de E módulo $F$, congruencia-sa y sea $p \in E$, $f(H) = h' \in M$, $f(p) = p'$. Se verifica $H-p = f^{-1}(h'-p') \neq \emptyset$, $\forall\, p \in E$, ya que:

$$x \in f^{-1}(h'-p') \iff fx=h'-p' \iff f(p+x) = p'+h'-p'=h' \iff p+x \in H \iff x \in H-p$$

Como $h',p' \in M$ y M es un A-sa-módulo, el elemento $h'-p'$ existe en M y como f es un epimorfismo, el conjunto $f^{-1}(h'-p')$ no es vacío y por tanto H es complejo neto de E.

22). <u>Para todo A-semimódulo E, las proposiciones a),b) y c) son equivalentes</u>.

a) <u>En E existe, por lo menos, una congruencia sa</u> (distinta de la congruencia universal).

b) <u>En E existen, al menos, un complejo neto T tal que $\overline{L(T)} \neq E$</u>.

c) <u>En E existe, al menos, un subsemimódulo neto S tal que $\bar{S} \neq E$</u>

22). (ii) Si S es un subsemimódulo de E tal que $\bar{S} \neq E$ es neto, entonces E/S es un A-sa-módulo $\neq 0$, y recíprocamente.

(iii) Existen sendas correspondencias biunívocas entre los subsemimódulos cerrados y netos de E, las congruencias sa de E y los A-sa-módulos homomorfos a E (salvo isomorfismo).

En 21 se ha mostrado a) ==> b, a) ==> c); probemos ahora c) ==> a) y (ii). Sea S un subsemimódulo de E tal que $\bar{S}$ es neto $\neq E$; $f: \to E/S = E/\bar{S} = E/N(S)$ el homomorfismo canónico, $p'$ elemento arbitrario de E/S; $p \in f^{-1}(p')$, $x \in \bar{S}-p$, entonces fx es el opuesto de $p'$ en E/S y por consiguiente E/S es un A-samódulo $\neq 0$. Queda así probado (ii) y c) ==> a), teniendo en cuenta 20 (iv).

La equivalencia c) <==> b) es de inmediata comprobación, ya que si T es complejo neto de E tal que $\overline{L(T)} \neq E$, entonces $S = L(T)$ es subsemimódulo neto 20 (iv) tal que $\bar{S} \neq E$. Por tanto, a) <==> b) <==> c).

En el razonamiento anterior se ponen de manifiesto las siguientes equivalencias:

$\overline{S}$ es subsemimódulo cerrado y neto de E <==> $N(\overline{S})$ es congruencia sa en E <==> $E/\overline{S}$ es un A-sa-módulo, que aseguran la validez de (iii).

Las proposiciones 21,22 generalizan los teoremas 1 y 2, P. Dubriel, Algebre 3a ed, págs 220-224, relativos a semigrupos abelianos, pues si hacemos $A = N_o$, obtenemos dichos teoremas como un caso particular.

23). Toda congruencia en E que contenga a una congruencia sa en E es también congruencia sa.

(ii) El conjunto $SA(E)$ de todas las congruencias sa en E es un $\cup$-sub-semiretículo de $N(E)$ y de $K(E)$.

(iii) La unión de una congruencia sa en E con otra cualquiera en E es la congruencia universal u otra congruencia sa en E.

Sea $R \supseteq S$, siendo S una congruencia sa en E, entonces existe un epimorfismo g (§3, 16)y un epimorfismo canónico f tales que $E \xrightarrow{f} E/S \xrightarrow{g} E/R$, esto implica que E/S es un A-sa-módulo, ahora bien, un A-sa-módulo sólo puede tener por imagen homomórfica un A-sa-módulo, luego E/R es un A-sa-módulo y la congruencia asociada a $gf: E \to E/R$, que es R, es sa.

Sean $R,T \in SA(E)$, si $R \cup T = P$, entonces $P \supseteq R$ y P es(23), congruencia sa en E, de donde (ii). Por la misma razón obtenemos (iii), c.q.d.

Conviene observar que en cualquier A-samódulo M todo complejo es neto, todos los subsemimódulos cerrados de M son A-sub-sa-módulos de M y viceversa, y que las únicas congruencias posibles en M son las congruencias sa.

24). Congruencia engendrada por una relación binaria en E.

Sea r una relación binaria entre elementos de E (A-semimódulo no necesariamente libre)

$$r : x_i r y_i, \quad i \in I,\ x_i,\ y_i \in E \quad (I, \text{ conjunto finito o infinito})$$

Las relaciones binarias en E pueden ser consideradas como partes de ExE. En el retículo de las partes de ExE, la intersección de todas las congruencias que contienen a r, es, a su vez, una congruencia que contiene a r; así pues, dada una relación binaria cualquiera r en E, existe siempre una mínima congruencia que la contiene.

A partir de "r" construimos una nueva relación "p" que contenga a "r" y sea reflexiva, compatible con la estructura de E y simétrica, imponiendo estas condiciones:

1. $x_i r y_i \Longrightarrow x_i p y_i \qquad \forall\, i \in I$

2. $xpx \qquad \forall\, x \in E$

3. $xpy \Longrightarrow (x+z)p(y+z) \qquad \forall\, z \in E$

4. $xpy \Longrightarrow (ax)p(ay) \qquad \forall\, a \in A$

5. $xpy \Longrightarrow ypx$

Ahora definiremos una nueva relación C en E de este modo:
$xCy \Longleftrightarrow_{def}$ existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in E$, $(n \geq 2)$ tales que:

$$z_1 = x,\ z_n = y\ , \quad z_j p z_{j+1}\ , \quad \forall\, j \in [1;n-1]$$

Se verifica:

24) (i). La relación C es la mínima congruencia en E que contiene a r. Llamaremos a "C" congruencia engendrada por "r" y la designaremos también C(r). La aplicación C: $r \to C(r)$ es una cerradura en el retículo de las partes de ExE.

La demostración de este enunciado no ofrece dificultad.

## § 4. TEOREMAS DE ISOMORFIA

Saturación

Sea f un homomorfismo de E en E'; A-semimódulos a la izquierda. A $f^{-1}f(T)$ le llamamos el conjunto saturado de T por f - $\forall$ T $\in$ R(E), retículo de las partes de E- y lo representaremos también Sf(T). Denominamos a la aplicación Sf: R(E) $\to$ R(E) "saturación por f".

1). Sf es una cerradura algebraica en el retículo R(E)

En efecto, se verifica:

a) $\forall\ T \in R(E) \quad T \subseteq Sf(T)$

b) $\forall\ T \in R(E) \quad Sf(Sf(T))=(f^{-1}f)(f^{-1}f(T))=f^{-1}(ff^{-1})f(T)=f^{-1}f(T) =$ $= Sf(T)$, ya que $ff^{-1}\ x' = x'$ para todo $x' \in f(E)$.

c) $T \subseteq V \Longrightarrow Sf(T) \subseteq Sf(V)$.

Decimos de un subconjunto T de E que es "saturado" módulo f o que esta saturado por f cuando y solo cuando Sf(T) = T; por tanto, los saturados módulo f son justamente los cerrados de R(E) por la cerradura Sf.

2). Sea f: E $\to$ E' un homomorfismo de A-semimódulos y $F(E)$ el retículo de los subsemimódulos de E.

(i) Si T es subsemimódulo de E, entonces f(T) es subsemimódulo de E'.

(ii) Si T' es subsemimódulo de E', entonces $f^{-1}(T')$ es un subsemimódulo de E que contiene a Kerf.

(iii) La aplicación Sf retringida a $F(E)$ es una cerradura algebraica en $F(E)$.

(iv) Si K' es subsemimódulo cerrado (definición en §3,1) de E', entonces $f^{-1}(K')$ es un subsemimódulo cerrado de E que contiene a Kerf.

(i) $x', y' \in f(T) \Longrightarrow \exists x,y \in T$ tales que $fx=x'$, $fy=y' \Longrightarrow x'+y'=f(x+y)$ $\in f(T)$, ya que $x+y \in T$; $\forall\ a \in A \Longrightarrow ax'=f(ax) \in f(T)$, ya que $ax \in T$.

(ii) $x,y \in f^{-1}(T') \Longrightarrow fx,fy \in T' \Longrightarrow f(x+y) \in T' \Longrightarrow x+y \in f^{-1}(T')$. Si $a \in A$, $x \in f^{-1}(T') \Longrightarrow fx \in T' \Longrightarrow f(ax) = afx \in T' \Longrightarrow ax \in f^{-1}(T)$.

(iii) resulta inmediatamente de 1 y de 2 (i),(ii).

(iv) Sea $f^{-1}(K') = K$ y sea $x \in E$ tal que existe un par de elementos $k,l$ de $K$ que cumplen $x+k = l \implies f(x+k) = fx + fk = fl$; como $fx,fl \in K'$ y éste es subsemimódulo cerrado de $E'$ $\implies fx \in K' \implies x \in K$, luego $K$ es subsemimódulo cerrado de $E$, c.q.d.

3). Si $f: E \to E'$ es un homomorfismo normal de núcleo $H$ y $T$ es un subsemimódulo de $E$, entonces:

(i) $f^{-1}(\overline{f(T)}) = \overline{T + H}$

(ii) $T + H \subseteq Sf(T) \subseteq \overline{T + H}$

(iii) $Sf(T) = \overline{T + H}$, <u>esto último bajo el supuesto de que $Sf(T)$ sea subsemimódulo cerrado de $E$ ó de que $f(T)$ sea subsemimódulo cerrado de $E'$.</u>

Demostremos 3 (i): sabemos ya por 2 (i) que $\overline{f(T)}$ es subsemimódulo de $E'$.

$$x \in f^{-1}(\overline{f(T)}) \implies fx \in \overline{f(T)} \implies \exists\, t,t' \in T / fx + ft = ft' \implies f(x+t)=ft'$$

y por ser $f$ normal de núcleo $H$,

$$\exists\, h,h' \in H / x+t+h = t' + h' \implies x \in \overline{T+H}$$

$$x \in \overline{T+H} \implies x+t+h = t'+h' \implies fx+ft = ft' \implies fx \in \overline{f(T)} \implies x \in f^{-1}(\overline{f(T)})$$

c.q.d.

La demostración de (ii) es inmediata: $t+h \in T+H \implies f(t+h)=ft \in f(T) \implies$ $\implies t+h \in Sf(T)$, es decir $T+H \subseteq Sf(T)$. $f(T) \subseteq \overline{f(T)} \implies Sf(T) \subseteq f^{-1}(\overline{f(T)})$ $= \overline{T+H}$, según 3, (i); es decir, $T+H \subseteq Sf(T) \subseteq \overline{T+H}$.

Si $Sf(T)$ es subsemimódulo cerrado de $E$, como en el intervalo $[T+H, \overline{T+H}]$ no existe ningún subsemimódulo cerrado de $E$ salvo el $\overline{T+H}$, entonces ha de ser $Sf(T) = \overline{T+H}$. Por otra parte, si $f(T)$ es subsemimódulo cerrado de $E'$ entonces $Sf(T)$ es según 2 (iv), subsemimódulo cerrado de $E$ que contiene a $T$ y a $H$; por la misma razón de antes $Sf(T)=\overline{T+H}$ y de este modo queda probado 3. (iii).

3). (iv) <u>Bajo las hipótesis de 3: todos los subsemimódulos cerrados de $E$ que contienen a $Kerf=H$ están saturados por $f$.</u>

Sea $K$ subsemimódulo cerrado de $E$ tal que $K \supseteq H \implies \overline{K+H}=\overline{K}=K=K+H$; por 3 (ii) obtenemos $Sf(K) = K$.

4) (i) Si $f: E \to E'$ es un epimorfismo (arbitrario) y $K$ es un subsemimódulo cerrado de $E$ que está saturado por $f$, entonces $f(K)$ es subsemimódulo cerrado de $E'$.

(ii) Todo subsemimódulo cerrado de $E$ que contenga a $\mathrm{Ker} f=H$, siendo $f: E \to E'$ un epimorfismo normal, se transforma mediante $f$ en un subsemimódulo cerrado de $E'$.

(i) Supongamos que $f(K)$ no es subsemimódulo cerrado de $E'$. En tal caso existirian unos elementos $x' \in E'$, $k', l' \in K' = f(K)$ que cumplirían:

a) $x' + k' = l' \wedge x' \notin K'$ ( $\wedge$, conjunción).

Sea $x \in f^{-1}(x')$; para todo $k \in K$: $x+k \notin K$, ya que si $x+k$ perteneciese a $K$ entonces $x$ pertenecería $K$ (por ser $K$ subsemimódulo cerrado de $E$) y $x' = fx$ sería elemento de $K'$, lo cual estaría en contradicción con (a). Hemos obtenido:

b) $x + k = m \in K$, para todo $k \in K$.

Tomemos en (b) $k \in f^{-1}(k')$ y apliquemos $f$ a los dos miembros de (b), entonces $x' + k' = fm$, de donde $fm = l' \in K'$; como $K$ está saturado por $f$, resu taría que $m \in K$, contradicción con (b).

(ii) Sea $K$ subsemimódulo cerrado de $E$ y $K \supseteq H$; en virtud de 3 (iv) $Sf(K) = K$; por 4 (i), $f(K)$ es subsemimódulo cerrado de $E'$. c.q.d.

5). (<u>Primer teorema de isomorfia</u>)

Sea $E$ un $A$-semimódulo y $R$ una congruencia en $E$,

(i) cualquier congruencia $S$ en $E/R$ es de la forma $T/R$ , siendo $T$ una congruencia en $E$ que contiene a $R$. Recíprocamente, cualquier congruencia $T$ en $E$ que contenga a $R$ da lugar a una congruencia $S$ en $E/R$ de la forma $T/R$.

La aplicación canónica $E/T \to (E/R)/(T/R)$ es un isomorfismo.

(ii) Dada la congruencia $R$ en $E$, existe una correspondencia biunívoca $C_R$ entre las congruencias $T$ de $E$ que contienen a $R$ y las congruencias $S$ de $E/R$ , de modo que $S = T/R$.

Si $R$ es congruencia normal, $C_R$ relaciona congruencias normales, congruencias sa, congruencias anormales de $E$ y de $E/R$ entre sí.

(iii) Sea $R$ una congruencia normal en $E$ y sea $T C_R S$, <u>entonces para todo par de subsemimódulos $R,T$ de $E$ tales que $\bar{R} = R_0$, $\bar{T} = T_0$. y para todos subsemimódulo $S$ de $E/R$ tal que $\bar{S} = S_0$, se verifica que la aplicación canónica</u> $E/T \to (E/R)/S$ <u>es un isomorfismo.</u>

Recíprocamente, Si R y T son subsemimódulos de E, y S es subsemimódulo de E/R tales que $E/T \approx (E/R)/S$, entonces $\mathcal{N}(T)\ C_{\mathcal{N}(R)}\ \mathcal{N}(S)$.

(iv) Dado el epimorfismo normal $f: E \to E'$ y el subsemimódulo K' de E', entonces $K = f^{-1}(K')$ es subsemimódulo de E, y $E/K \approx E'/K'$. Si K es subsemimódulo de E que contiene a Kerf, entonces $K' = f(K)$ es subsemimódulo de E' y $E/K \approx E'/K'$.

Demostración: (i) resulta de particularizar para los A-semimódulos el primer teorema de isomorfia válido para cualquier estructura algebraica, -véase N. Bourbaki, Algebre ch 1, §4-. Sin embargo esbozaremos su desmostración con objeto de encauzar la deducción de las otras partes del teorema, que enuncian ya peculiaridades de los A-semimódulos.

Sean f y g, respectivamente, los homomorfismos canónicos $E \to E/\mathcal{R}$, $E/\mathcal{R} \to (E/\mathcal{R})/\mathcal{S}$. $p = gf$ es un epimorfismo de $E \to (E/\mathcal{R})/\mathcal{S}$, en virtud del teorema del producto de homomorfismos (§3,15). Sea $\mathcal{T}$ la congruencia asociada a p en E; considerando el teorema principal de homomorfismos (§3,18), $b: E/\mathcal{T} \to Im(gf)$ es un isomorfismo; esto es, la aplicación canónica $b: E/\mathcal{T} \to (E/\mathcal{R})/(\mathcal{T}/\mathcal{R})$ es un isomorfismo. La recíproca es inmediata en virtud del teorema del homomorfismo inducido (§3,16).

Si $C_{\mathcal{R}}$ relaciona las congruencias $\mathcal{T}$ de E con las congruencias $\mathcal{S}$ de $E/\mathcal{R}$ tales que $\mathcal{S} = \mathcal{T}/\mathcal{R}$, entonces resulta, sin más, de (i) que $C_{\mathcal{R}}$ es una correspondencia biunívoca. §3,15 (ii), y 16 (ii) nos aseguran, caso de que $\mathcal{R}$ sea normal, "g normal <==> p = gf normal". Es inmediato que "g, homomorfismo-sa <==> p, homomorfismo sa", de donde (ii)

(iii) se desprende de (ii) y de la definición de semimódulo cociente, (§3,14).

(iv) Sea g el homomorfismo canónico $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E'/K'$, $g: E' \to E'/K'$ es evidentemente un epimorfismo normal y, por tanto, $p = gf$ es también (§3,15) (ii) un epimorfismo normal; de §3, 18, deducimos $E/Kerp \approx Imp$. Ahora bien, como $f(K) = K'$, entonces, según §4, 3 (i),

$$Kerp = f^{-1}(g^{-1}(o)) = f^{-1}(K') = f^{-1}\overline{(f(K))} = \overline{K + Kerf} = \overline{K};$$

por consiguiente,

$$E/Kerp = E/\overline{K} = E/K \approx Imp = E'/K',\ \text{c.q.d.}$$

Mostremos la recíproca, si K es subsemimódulo de E que contiene a Kerf, entonces f(K) = K' es, según §4, 2 (i), subsemimódulo de E'. Por el mismo razonamiento de antes, llegamos a la misma conclusión.

Si T y K son dos subsemimódulos de E tales que $T \supseteq \bar{K} \supseteq Kerf$, (f, epimorfismo normal $E \to E'$), entonces la restricción h de f a T es un epimorfismo normal $h = f/T : T \to f(T)$. Aplicando a h el teorema precedente (iv), obtenemos:

5). (v). Sea f un epimorfismo normal $E \to E'$. Para todo par de subsemimódulos T y K de E tales que $T \supseteq \bar{K} \supseteq Kerf$, se verifica:

$$T/K \approx f(T)/f(K)$$

6). (<u>Segundo teorema de isomorfia</u>)

(i) Sea $f: E \to E'$ un epimorfismo entre A-semimódulos, $F$ la congruencia asociada por f en E, $F_M$ la congruencia subordinada por $F$ en M, subsemimódulo de E, entonces:

$$M/F_M \approx Sf(M)/F_{Sf(M)}$$

(ii) <u>Para todo par de subsemimódulos cerrados M y H de E, es válido:</u>

$$M/(N(H))_M \approx (M+H)/H$$

Si $N(H)$ subordina en M la congruencia normalizada por $M \cap H$, entonces:

$$M/M \cap H \approx M + H/H$$

caso contrario, existe un epimorfismo reductivo t:

$$t: M/M \cap H \to M + N/H$$

(iii) Sea $f: E \to E'$ un epimorfismo normal de núcleo H, K' subsemimódulo de E', $K = f^{-1}(K')$, entonces $K/H \approx K'$. Reciprocamente, para todo subsemimódulo $K \supseteq H$ de E, se cumple:

$$Sf(K)/H \approx K/H \approx f(K)$$

(i) es evidente, puesto que si g y h son $g = f/M : M \to f(M)$, $h = f/Sf(M) : Sf(M) \to f(M)$, entonces, aplicando el teorema principal de homomorfismos -§3, 18, a g y a h, resulta $M/F_M \approx f(M)$, $Sf(M)/F_{Sf(M)} \approx f(M)$ esto es, resulta (i),

(ii) : de (i) se deduce inmediatamente que para todo par de subsemimódulos M y N de E que tengan el mismo saturado módulo f, se verifica:

$$(i)' : M/F_M \approx N/F_N \quad (\approx Sf(M)/F_{Sf(M)})$$

M y M+H poseen el mismo saturado módulo p: $E \to E/H$, que es Sp(M); la congruencia asociada a p en E es $N(H)$ y la congruencia subordinada por esta en M+H es también $N(H)$; de (i)' se obtiene $M/(N(H))_M \approx (M+H)/H$,c.q.d.

Ahora bien, clase cero de $(N(H))_M$ -congruencia subordinada en M por $N(H)$- es igual a clase cero de $N(H \cap M) = H \cap M$; sabemos por §3, 6 que $N(H \cap M) \subseteq (N(H))_M$; en virtud del teorema principal de homomorfismos §3, 18 concluimos que existe un epimorfismo reductivo t

$$M/H \cap M \to M/(N(H))_M$$

el cual, en el caso de que $N(H \cap M) = (N(H))_M$, es la identidad; con esto queda probado (ii).

(iii) $K = f^{-1}(K')$ es un subsemimódulo de E que contiene a H, según §4, 2 (ii); sea $r = f/K : K \to K'$, r es un epimorfismo normal de núcleo H, por consiguiente §3, 18, $K/H \approx K'$. La recíproca se demuestra análogamente.

## § 5. LONGITUD DE UN SEMIMODULO

En este parágrafo usaremos conceptos de la Teoría de Retículos, cuyas definiciones -véase G. Birkhoff, Lattice Theory, 1948, págs, 10-11- expondremos a continuación.

1). Sea R ($\leq$) un conjunto parcialmente ordenado respecto a "$\leq$". Se dice que:

T es una cadena de R <==> T es un subconjunto no vacío de R totalmente ordenado respecto a "<".

d(T), dimensión de una cadena T de R <==> número de elementos diferentes de que consta T menos 1, (suponiendo que T conste de un número finito de elementos diferentes).

d(x), dimensión de un elemento $x \in R$ <==> máxima dimensión de todas las cadenas de R que tengan a x por elemento máximo.

d(R), dimensión de R <==> máxima dimensión de todas las cadenas contenidas en R.

Dados dos elementos, a,b de R,b cubre a "a" <==> $a < b$ y no existe ningún elemento x de R tal que $a < x < b$.

T, cadena conectada o maximal de R <==> T, cadena estrictamente creciente de R en la que cada elemento de T cubre a su precedente en T.

<u>Nota</u>: A la dimensión de una cadena T de R, de un elemento x de R, y de R, se le llama también "longitud" de la cadena T, de x, y de R, respectivamente. Nosotros no emplearemos aquí este segunde término con objeto de evitar cualquier posible confusión.

<u>Sucesiones de composición de un A-semimódulo E.</u>

2). <u>Definición I</u>

(e): $(E_i)_{o \leq i \leq n}$ es sucesión de composición de E <==>

a) es una sucesión finita $E_o, E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n$ de subsemimódulos cerrados de E, tal que:

b) $E_o = E$, $E_n = 0$ (subsemimódulo nulo de E); y

c) $E_i \subseteq E_{i-1}$ , para todo $i \in [1,n]$.

Definiciones

Decimos que la sucesión de composición (f) : $(F_j)_{o \leq j \leq m}$, es más fina que la sucesión de composición (e) o que (f) es un refinamiento de la sucesión de composición (e) si todo elemento de la sucesión (e) es también elemento de la sucesión (f). Decimos que (f) es un refinamiento propio de la sucesión de composición (e) si (f) es un refinamiento de (e) tal que en (f) existe, al menos, un elemento que no es elemento de (e).

(e) es sucesión de composición estricta de E <==> (e) cumple las propiedades a) y b) de la definición I y en lugar de c) cumple c') $E_i \subset E_{i-1}$ , $\forall\ i \in [1,n]$ (estrictamente).

(e) : $(E_i)_{o \leq i \leq n}$ es sucesión distinguida de E <==> (e) es sucesión de composición estricta de E tal que no admite ningún refinamiento propio.

a((e)), amplitud de (e) : $(E_i)_{o < i < n}$, sucesión de composición de E <==> número de elementos de que consta (e) menos 1 = n.

(e) : $(E_i)_{o \leq i \leq n}$ es sucesión de Jordan-Holder de E <==>

1° (e) es sucesión distinguida de E,

2° no existe ninguna sucesión distinguida (f) de E tal que a((f)) > a((e))

3° no existe ninguna sucesión infinita entrictamente creciente en C(E)

Sucesión de cocientes de (e) : $(E_i)_{o \leq i \leq n}$ sucesión de composición de E, <==> .

$$(E_{i-1}/E_i)_{1 \leq i \leq n}$$

S, A-semimódulo simple <==> S $\neq$ 0 (semimódulo nulo) y S no posee ningún subsemimódulo cerrado distinto de S y de 0 (subsemimódulo nulo).

Dadas dos sucesiónes de composición de E, (e): $(E_i)_{o \leq i \leq n}$, (f) : : $(F_j)_{o \leq j \leq m}$ decimos que:

(e) y (f) son equivalentes <==> 1° a((e)) =a((f)) y 2°existe una biyección (permutación) p : $[1,n] \to [1,m]$ tal que:

$$E_{i-1}/E_i \approx F_{p(i)-1}/F_{p(i)} \text{ , para todo } i \in [1,n].$$

Decimos de un A-semimódulo E que posee "longitud" si y solo si existe una sucesión de Jordan-Hölder de E. Definimos

$l(E)$, longitud del A-semimódulo E $\Longleftrightarrow l(E) = a((e))$, siendo (e) una sucesión de Jordan-Hölder de E.

Definición II de sucesión de composición del A-semimódulo E.

$(E_i)_{o \leq i \leq n}$ es sucesión de composición de E $\Longleftrightarrow$

a') $E_i$ es subsemimódulo cerrado de $E_{i-1}$, $\forall\, i \in [1,n]$ ; y

b') $E_o = E$, $E_n = 0$.

3). Las definiciones I y II de sucesión de composición de E son equivalentes.

La validez de esta proposición resulta de 4) (ii):

(4) Sea F un subsemimódulo cerrado del A-semimódulo E

(i) El subsemimódulo cerrado en F, $S^F$, de un subsemimódulo cualquiera S de F coincide con $\bar{S}$, subsemimódulo cerrado de S en E.

(ii) Todos los subsemimódulos cerrados de F son subsemimódulos cerrados de E y, recíprocamente, todos los subsemimódulos cerrados de E contenidos en F son subsemimódulos cerrados de F.

(iii) El conjunto de todos los subsemimódulos cerrados de F constituyen una sección inicial del retículo $C(E)$ -retículo de los subsemimódulos cerrados de E -cuyo máximo es F.

Demostración de 4), (i): por hipótesis $S \subseteq F$; por ser F subsemimódulo cerrado de E y en virtud de una de las propiedades de las cerraduras, obtenemos (1) $\bar{S} \subseteq \bar{F} = F$; si $x \in \bar{S}$, entonces $x \in E \wedge \exists\, s,s' \in S / x+s=s'$, pero según (1) $x \in F$, luego $x \in S^F$, es decir $\bar{S} \subseteq S^F$; evidentemente, $S^F \subseteq \bar{S}$, y por tanto, $S^F = \bar{S}$ c.q.d.

(ii) Sea S un subsemimódulo cerrado de F, esto es, $S^F = S$; como $\bar{S} = S^F = S$, resulta que S es también subsemimódulo cerrado de E. La recíproca es evidente.

(iii) Se obtiene de un modo inmediato a partir de (ii).

Dado el A-semimódulo E, $C(E)$ y $N(E)$ designarán, al igual que antes, los retículos de los subsemimódulos cerrados de E y de las congruencias normales de E, respectivamente. Sabemos que estos dos retículos son isomorfos §3,10. Si S es un subsemimódulo de E, $N(S)$ significará la congruencia normalizada por

S en E o en cualquier subsemimódulo cerrado F de E que contenga a S.

Si $\mathcal{R}$ es una congruencia en E, $\mathcal{R}_o$ designará a la clase cero de dicha congruencia.

Observemos que dar la sucesión de composición de E, (e) : $(E_i)_{o\leqslant i\leqslant n}$ es tanto como dar una cadena de $\mathcal{C}(E)$ que tenga por extremos E y 0. Llamamos a esta cadena "asociada a (e) en $\mathcal{C}(E)$" y la designamos (e') y viceversa. Por otra parte, dar la sucesión de composición de E: (e), es tanto como dar la cadena (e'') : $(\mathcal{N}(E_i))_{o\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathcal{N}(E)$ que tiene por extremos $\mathcal{N}(E_o)=\mathcal{U}$ , $\mathcal{N}(E_n) = \mathcal{I}$ , ($\mathcal{U}$, $\mathcal{J}$, congruencia universal y congruencia idéntica en E; máximo y mínimo de $\mathcal{N}(E)$, respectivamente). Recíprocamente, dar una cadena (e'') : $(\mathcal{N}_i)_{o\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathcal{N}(E)$ que tenga por extremos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{I}$, es tanto como dar la sucesión de composición de E: (e) $((\mathcal{N}_i)_o)_{o\leqslant i\leqslant n}$. Llamamos a (e'') cadena asociada a (e) y llamamos a (e) sucesión de composición de E asociada a (e''). (e) $\approx$ (e''), en virtud de §3,10).

5). Sea (e) una suecesión de composición de E y sean (e') y (e'') las cadenas asociadas a (e) en $\mathcal{C}(E)$ y $\mathcal{N}(E)$. Se verifica:

(i) $a((e)) \geqslant d(e') = d(e'')$

(ii) La condición necesaria y suficiente para que (e) sea sucesión de composición estricta de E es que $a((e)) = d(e')$.

(iii) (e) <u>es sucesión distinguida de</u> E <==> (e') <u>es cadena maximal de $\mathcal{C}(E)$</u>

(iv) (e) <u>es sucesión de Jordan-Hölder de</u> E <==> <u>es cadena maximal de</u> $\mathcal{C}(E)$ y $d(e') = d(\mathcal{C}(E))$.

(v) $l(E) = d(\mathcal{C}(E)) = d(\mathcal{N}(E))$.

Para comprobar 5 basta recurrir a las definiciones dadas en 1 y 2.

6). Sean F,G,H subsemimódulos cerrados de E tales que $F \supset G \supset H$ y sea p el homomorfismo canónico $F \to F/H = M$, entonces p(G) es subsemimódulo cerrado de M que cumple $0 \subset p(G) \subset M$. Recíprocamente, si T es subsemimódulo cerrado de M tal que $0 \subset T \subset M$, entonces $p^{-1}(T)$ es subsemimódulo cerrado de E que verifica $F \supset p^{-1}(T) \supset H$.

(ii) Sean F y H dos sobsemimódulos cerrados de E. La condición necesaria y suficiente para que el semimódulo F/H sea simple es que F cubra a H en el retículo $\mathcal{C}(E)$.

(iii) La condición necesaria y suficiente para que la sucesión de composición (e) de E sea distinguida es que todos los semimódulos de la sucesión de cocientes de (e) sean simples.

Demostración (i): $p: F \to F/H = M$ es un epimorfismo normal. Sabemos por §4,4(ii) que $p(G)$ es subsemimódulo cerrado de M. En virtud de §4,5 (v):

$$F/G \approx p(F)/p(G) = M/p(G) \; ; \; G/H \approx p(G)/p(H) = p(G);$$

como,

$$F \supset G \Longrightarrow F/G \neq 0 \Longrightarrow M/p(G) \neq 0 \Longrightarrow M \supset p(G)$$

y como,

$$G \supset H \Longrightarrow G/H \neq 0 \Longrightarrow p(G) \neq 0, \text{ es decir } p(G) \supset 0$$

Si T es subsemimódulo cerrado de M tal que (1): $M \supset T \supset 0$, entonces, según §4,2 (iv), $p^{-1}(T) = G$ es subsemimódulo cerrado de F, y, por tanto §5,4 (ii), subsemimódulo cerrado de E. Además se ha de cumplir $F \supset G \supset H$, pues caso de que supusieramos lo contrario, aplicando el mismo razonamiento de antes, llegaríamos a contradicción con (1).

(ii) (i) afirma que si F no cubre a H en $C(E)$, entonces F/H no es simple y que si F/H no es simple, F no cubre a H en $C(E)$; es decir (ii).

(iii) En virtud de §5,5 (iii) y de §5,6) (ii) se cumplen las equivalencias:

(e) sucesión distinguida de E <==> (e') cadena maximal de $C(E)$ de extremos E y 0 <==> cada elemento de (e') (excepto el último) cubre a su siguiente en (e') <==> todos los semimódulos de la sucesión de cocientes de (e) son simples.

Estas equivalencias prueban (iii).

De 6 (iii) resulta:

6). (iv) Es condición necesaria pero no suficiente para que la sucesión de composición (e) de E sea sucesión de Jordan-Hölder de E que todos los semimódulos de la sucesión de cocientes de (e) sean simples.

Dado un subsemimódulo cerrado F de E, puede ocurrir que :

1° (a) exista o (b) no exista una sucesión de Jordan-Hölder de E que contenga a F como elemento.

2° Bajo el supuesto 1° (b), puede suceder que existan sucesiones distinguidas de E que contengan a F como elemento.

3° Bajo el supuesto 2°, puede acontecer (a) que entre todas las sucesiones distinguidas de E que contengan a F como elemento exista una o varias de máxima amplitud, o bien (b) que no exista ninguna de máxima amplitud.

El antecedente de la proposición 7 (i) que pasamos a enunciar presupone 3° (a), ó 1° (a)

7). (i) Si Kerh - h: $E \to E'$, epimorfismo normal- ocupa el lugar (p+1)-esimo de una sucesión distinguida de E de máxima amplitud, entonces:

$$l(E') = p$$

(ii) Si h: $E \to E'$ <u>es un epimorfismo normal</u>, $l(E) = n$, $d(\mathrm{Kerh}) = m$ (en $C(E)$), entonces:

$$l(E') \leqslant n-m$$

<u>La condición necesaria y suficiente para que $l(E') = n-m$, es que Kerh pertenezca a una sucesión de Jorda-Hölder de E.</u>

(iii) Cualquier sucesión de composición (e) de E se transforma mediante un isomorfismo $\beta$: $E \to E'$ en una sucesión de composición de E' equivalente a (e).

(iv) La longitud de un semimódulo es invariante respecto a los isomorfismos.

Demostración (i): Sea (e): $(E_i)_{o \leqslant i \leqslant n}$ una sucesión distinguida de E de máxima amplitud que contiene a Kerh = $E_p$ ($p \leqslant n$). En virtud de §5,6 (iii), todos los semimódulos de la sucesión de cocientes de (e) son simples. Según §4,5) (v), $E_{i-1}/E_i \approx h(E_{i-1})/h(E_i)$ ($o < i \leqslant p$), luego todos los semimódulos de la sucesión de cocientes de (e)' : $(h(E_i))_{o \leqslant i \leqslant p}$ son simples y, según §5,6) (iii), (e)' es sucesión distinguida de E'. Supongamos que existe una sucesión distinguida (f)' : $(F_i')_{o \leqslant i \leqslant q}$ de E' que tenga mayor amplitud que (e)': $q > p$. En tal caso:

$$(h^{-1}(F_i'))_{o \leqslant i \leqslant q}, \quad (E_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$$

sería una sucesión distinguida de E que contendría a $h^{-1}(F'_q)$ = Kerh y cuya amplitud sería q+n-p > n; contradicción con la hipótesis; luego (e)' es una sucesión de Jordan-Holder de E' y $l(E') = p$, c.q.d.

Demostración de 7, (ii)

h: E → E', epimorfismo normal; l(E) = n; d(Kerh) = m.

d(Kerh) = m significa que existe una cadena maximal de C(E) de dimensión m: (1); Kerh, $T_1, \ldots, T_m = 0$ y que cualquier otra cadena maximal de C(E) que una Kerh con 0 es de dimensión igual o menor que m.

Sea (e): $E_o, E_1, \ldots, E_{t-1}$, Kerh. $P_1, \ldots, P_s = 0$ una sucesión de Jordan-Hölder de E que contenga a Kerh. Supongamos s < m, en este caso (f): $E_o, E_1, \ldots, E_{t-1}$, Kerh, $T_1, \ldots, T_m$ sería una sucesión distinguida de E tal que a ((f)) > a((e)); contradicción con la hipótesis de que (e) es sucesión de Jordan-Hölder de E. Supongamos s > m, en este otro caso (2) Kerh, $P_1, \ldots, P_2$ sería una cadena maximal de C(E) que une Kerh con 0 de dimensión s > m; contradicción con (1). Por consiguiente s = m.

Como (e) es sucesión de J-H de E, t + s = n; de donde t = n-m y Kerh ocupa el lugar (n-m+1)-esimo de (e); de (i) deducimos l(E') = n-m,

Si Kerh no pertenece a ninguna sucesión de J-H de E, entonces t < n-m (ya que si t = n-m, (f) sería sucesión de J-H de E que contendría a Kerh) y, por tanto, Kerh ocupa el lugar t+1 (t < n-m) de una sucesión distinguida de E; en virtud de (i), l(E') = t < n-m, c.q.d.

(iii) Sea $(E_i)_{o < i < n}$ una sucesión de composición de E y $\beta$: E → E' un isomorfismo. $\beta(E_i) = E'_i$ es subsemimódulo cerrado de E', $\forall$ i $\in$ |o,n|, §4,4 (ii) $E'_o = E'$, $E'_n = 0$ (subsemimódulo nulo de E'). Además §4,5, (v) afirma:

$$E_{i-1}/E_i \approx E'_{i-1}/E'_i, \quad \forall\ i \in |1,n| \text{ , c.q.d.}$$

(iv) Sea $\beta$: E → E' un isomorfismo, entonces $\beta$ es un epimorfismo normal y Ker$\beta$ = 0; si l(E) = n, Ker$\beta$ ocupa el lugar (n+1)-esimo de una sucesión de Jordan-Holder de E; por (i), l(E') = n,c,q,d.

Notas.- 1ª. El antecedente de 7 (i) no exige que E posea longitud. 2ª 7(iii) carece de sentido a no ser que ampliemos el significado de "sucesiones de composición equivalentes" dado en §5,2, permitiendo que (e) sea una sucesión de composición de E, (f) sea sucesión de composición de F, E ≠ F, y dejando, por lo demás, invariable dicha definición.

8). Sea E un A-semimódulo de longitud finita, F un subsemimódulo cerrado de E; se verifica:

$$\text{(i)} \quad \text{long}(F) + \text{long}(E/F) = a,$$

designando "a" la máxima amplitud de todas las sucesiones distinguidas de E que contienen a F como elemento:

$$\text{(ii)} \quad \text{long}(F) + \text{long}(E/F) \leqslant \text{long}(E)$$

(iii) La condición necesaria y suficiente para que:

$$\text{log}(F) + \text{long}(E/F) = \text{long}(E)$$

<u>es que F pertenezca a una sucesión de Jordan-Hölder de E.</u>

Si $(E_i)_{o \leqslant i \leqslant a}$ es una sucesión distinguida de E de máxima amplitud que contiene a $F = E_p$, $(o \leqslant p \leqslant a)$, entonces $(E_i)_{p \leqslant i \leqslant a}$ forma una sucesión de Jordan-Hölder de F; de donde, long(F) = a - p. Como, a su vez, $(E_i/F)_{o < i < p}$ forma una sucesión de Jordan-Hölder de E/F (en virtud de §4, 2 (iv) para c: E → E/F), resulta long(E/F) = p, y de aquí 8 (i). De (8) (i) obtenemos inmediatamente 8 (ii) y (iii), c.q.d.

Haciendo uso del teorema principal de homomorfismos §3, 18 y de 7 (iv), hallamos como corolario del teorema 8, la proposición:

9). <u>Sea</u> u: E → <u>F un homomorfismo normal de A-semimódulos y posea E longitud finita, entonces</u>:

(i) long(Keru) + long(Imu) = a,

<u>siendo "a" la máxima amplitud de todas las sucesiones distinguidas de E que contienen a Keru como elemento.</u>

(ii) long(Keru) + long(Imu) $\leqslant$ long(E)

(iii) <u>La condición necesaria y suficiente para que</u>:

$$\text{long}(\text{Keru}) + \text{Long}(\text{Imu}) = \text{long}(E)$$

<u>es que exista una sucesión de Jordan-Hölder de E que contenga a Keru como</u>

elemento.

Llamamos conúcleo de un homomorfismo u: $E \to F$ de A-semimódulos, que designaremos Cokeru, al A-semimódulo cociente F/Imu. Obtenemos entonces, sin más, como corolario de la proposición 8 la 10 que exponemos a continuación.

10). Si F es A-semimódulo de longitud finita y u : $E \to F$ es un homomorfismo arbitrario de A-semimódulos tal que Imu es subsemimódulo cerrado de F, entonces se verifica:

$$\text{(i)}\ \text{long}(\text{Imu}) + \text{long}(\text{Cokeru}) = a$$

siendo "a" la máxima amplitud de todas las sucesiones distinguidas de F que contienen a Imu como elemento.

$$\text{(ii)}\ \text{long}(\text{Imu}) + \text{long}(\text{Cokeru}) \leqslant \text{long}(F)$$

(iii) Para que se cumpla:

$$\text{long}(\text{Imu}) + \text{long}(\text{Cokeru}) = \text{long}(F)$$

es necesario y suficiente que Imu figura en una sucesión de Jordan-Hölder de F.

Otra secuencia inmediata de 8 es la proposición:

11) Sea E un A-semimódulo de longitud finita y F un subsemimódulo cerrado de E, se verifica:

$$F = E \Longleftrightarrow \text{long}(F) = \text{long}(E)$$

La condición de Jordan-Hölder

Definición

Diremos que un A-semimódulo E de longitud finita cumple la condición de Jordan-Hölder sí y sólo si todas las sucesiones distinguidas de E son sucesiones de Jordan-Hölder de E.

Existen semimódulos que cumplen la condición de J-H, en tanto que otr no la satisfacen, como se pondrá de manifiesto en una nota posterior. Creemos que esta condición no carece de interés en la teoría de semimódulos; por ello la hemos destacado y nos disponemos a analizarla.

Afirmar que un semimódulo E cumple la condición de Jordan-Hölder es tanto como indicar que en el retículo de los subsemimódulos cerrados de E, C(E), todas las cadenas conectadas que unen E con 0 poseenn la misma dimensión (finita). En un retículo de dimensión finita la propiedad antedicha equivale a esta otra: todas las cadenas conectadas que unen dos elementos fijos cualesquiera del retículo C(E) poseen la misma dimensión. Como esta última propiedad expresa justamente la condición de cadena de Jordan-Dedekind referida al retículo C(E), -supuesto C(E) de dimensión finita-, véase G. Birkhoff, Lattice Theory, pág. 11, obtenemos:

12). El A-semimódulo E cumple la condición de Jordan-Hölder cuando y solo cuando el retículo C(E) es de dimensión finita y satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind.

Sabemos que en todo retículo P de dimensión finita es válida la equivalencia: P satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind si y solo si la función d(x) -dimensión de $x \in P$- verifica:

$$(\forall\, x,y \in P)\ (x \text{ cubre a } y \iff x > y \wedge d(x) = d(y) + 1)$$

Trasladada esta propiedad a nuestro caso, obtenemos:

13). El A-semimódulo E cumple la condición de Jordan-Hölder si y solo si E es de longitud finita y para todo par de subsemimódulos cerrados M y N de E se verifica:

$$M \text{ cubre a } N \iff M \supset N \wedge \text{long}(M) = \text{long}(N) + 1$$

Por otra parte, el teorema 3 del capítulo V de la Teoría de Retículos de G. Birkhoff -pág. 68- afirma que, en el supuesto de que un retículo L sea de dimensión finita, las condiciones (a) y (b) que enunciamos a continuación son equivalentes.

a) La identidad modular en L

b) La condición de cadena de Jordan-Dedekind en L, juntamente con:

$$d(x) + d(y) = d(x \cap y) + d(x \cup y) \ ,, \quad \forall\, x,y \in L.$$

Apoyándose en este teorema, podemos enunciar.

14). Sea E un A-semimódulo de longitud finita. El retículo de los subsemimódulos cerrados de E, C(E), es modular si y solo si E verifica la condición de Jordan-Hölder juntamente con la propiedad (i)

(i) para todo par de subsemimódulos cerrados M,N de E se cumple:

$$\text{logn}(M) + \text{long}(N) = \text{long}(M \cap N) + \text{long}(\overline{M+N})$$

Según hemos visto en el capítulo anterior, M+N significa el mínimo subsemimódulo de E que contiene a M y a N, mientras que $\overline{M+N}$ designa al mínimo subsemimódulo cerrado de E que contiene a M y a N, esto es, la unión en C(E) de M con N.

15). (i) Sea E un A-semimódulo que cumple la condición de Jordan-Hölder. Para que una sucesión de composición estricta (e) de E sea sucesión distinguida de E es necesario y suficiente que:

$$a((e)) = \text{long}(E)$$

(ii) Si E cumple la condición de J-H, entonces todo subsemimódulo cerrado F de E verifica:

$$\text{long}(F) + \text{long}(E/F) = \text{long}(E)$$

15) (iii) Si u : E $\to$ F es un homomorfismo normal de A-semimódulos y E satisface la condición de J-H, entonces:

$$\text{long}(\text{Ker}u) + \text{long}(\text{Im}u) = \text{long}(E)$$

(iv) Si u: E $\to$ F es un A-homomorfismo tal que Imu es subsemimódulo cerrado de F, A-semimódulo que satisface la condición de J-H, entonces:

$$\text{long}(\text{Im}u) + \text{long}(\text{Coker}u) = \text{long}(F)$$

(v) Cualquier imagen homomorfica-normal de un semimódulo que verifique la condición de Jordan-Holder es otro semimódulo que también la satisface.

(i) se desprende, sin más, de las definiciones.

(ii), (iii), (iv) resultan respectivamente de las proposiciones 8, 9,10 de este parágrafo y de considerar que todo subsemimódulo cerrado de un semimódulo que cumple la condición de Jordan-Hölder figura siempre en una sucesión de Jordan-Hölder de dicho semimódulo.

(v) resulta por reducción al absurdo: si u: E → F es un epimorfismo normal y suponemos que existen dos sucesiones distinguidas de F de distinta amplitud, entonces llegaríamos, mediante las imágenes recíprocas, a la conclusión de que en E existirían también dos sucesiones distinguidas de amplitud diferente; lo cual estaría en contradicción con la hipótesis de que E satisface la condición de J-H.

El teorema de Jordan-Hölder

Queremos enunciar ahora el teorema de Jordan-Hölder para semimódulos del mismo modo que lo hace G. Birkhoff- L.T. cap. VI, teor. 6, pág. 88- para un álgebra cualquiera.

Decimos que un A-semimódulo E de longitud finita verifica el teorema de Jordan-Hölder si y solo si todas las sucesiones distinguidas de E son equivalentes entre sí.

Evidentemente, el teorema de Jordan-Hölder implica la condición de Jordan-Hölder, pero no recíprocamente. En una nota al final de este parágrafo mostramos que existen semimódulos que no cumplen la condición de J-H; de donde,

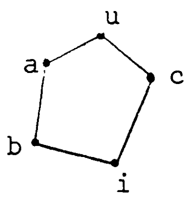
16). No todo semimódulo verifica el teorema de Jordan-Hölder

Aunque no se verifique de un modo general el teorema de Jordan-Hölder para semimódulos, hemos podido definir la longitud de un semimódulo y hemos obtenido propiedades interesantes de ella que generalizan las propiedades de la longitud de los módulos. Y es curioso que hayamos encontrado dichas propiedades independientemente del teorema de Jordan-Hölder.

Nota

Vamos a construir a continuación un semimódulo que no cumpla la condición de Jordan-Hölder y otro que no sólo la cumpla sino también el teorema de J.H. Consideremos el U-semiretículo dibujado a la izquierda, en donde la relación de orden parcial viene dada por los segmentos, (así u > a , u > b, etc.)

S:

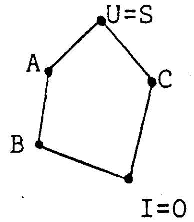



como un P-semimódulo -véase §2,13 en el que la adición es igual a la unión.

Los únicos subsemimódulos cerrados del P-semimódulo S son I = {i} , B = {b,i}, A = {a,b,i} , C = {c,i} , U = S.

Estos son elementos del retículo C(S), representado también a la izquierda, en donde la relación de orden parcial es la inclusión. Este re-

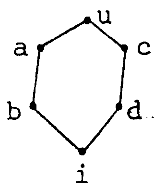
C(S):




tículo posee dos cadenas conectadas que unen U con I de distinta dimensión, esto es, S posee dos sucesiones distinguidas de amplitud diferente; por tanto, S no satisface la condición de Jordan-Hölder.

Por el contrario, el P-semimódulo T construido de manera análoga al

T:




S, a partir de la figura adyacente, no sólo verifica la condición de J-H, sino también el teorema del mismo nombre, tal como lo hemos enunciado.

## § 6. SUCESIONES DE HOMOMORFISMOS

Definiciones

Dada la sucesión de A-homomorfismos de A-semimódulos:

$$(1)\ f_i : F_i \to F_{i+1}\ ,\ i \in [1,n]\ ,\ n \geqslant 2,$$

decimos que dicha sucesión (1) es:

regular si $\overline{f_i(F_i)} = f_{i+1}^{-1}(o)$, para todo $i \in [1,n-1]$;

normal si (1) es regular y para todo $i \in [1,n]$, $f_i$ es normal;

cerrada si (1) verifica $f_i(F_i) = f_{i+1}^{-1}(o)$, para todo $i \in [1,n-1]$;

exacta si (1) es normal y cerrada.

Se comprueba fácilmente a partir de las propiedades de las cerraduras y de las definiciones anteriores que:

1) (i) Toda sucesión cerrada es regular.

(ii) La condición necesaria y suficiente para que la sucesión regular (1) sea cerrada es que $f_i(F_i)$ sea subsemimódulo cerrado de $F_{i+1}$ para todo $i \in [1,n-1]$.

Obtenemos, pues, el siguiente esquema:

sucesión regular

sucesión normal      sucesión cerrada

sucesión exacta

siendo cada una un caso particular de la ó de las sucesiones que figuran en el esquema en los renglones superiores a ella.

Definiciones

Sea (2) $f: E \to F$ un homomorfismo de A-semimódulos; entendemos por conúcleo de f = Cokerf == F/Imf; coimagen de f = Coimf == E/kerf

f es un homomorfismo reducido <==> Kerf = 0 (def.)

f es un homomorfismo pleno <==> Cokerf = 0 (def,)

Entendemos por biyección (isomorfismo) asociada a f, al isomorfismo b: $E/F \to$ Imf, determinado por el teorema principal de homomorfismos - véase §3,18- en donde $F$ significa la congruencia asociada en E por f.

Se verifican las equivalencias siguientes:

2). (i) f es homomorfismo reductivo <==> f es homomorfismo reducido y anormal ( véase la definición de congruencia reductiva en §3,11).

(ii) f es homomorfismo reducido <==> f es homomorfismo reductivo o bien monomorfismo.

(iii) f es monomorfismo <==> f es reducido y normal.

(iv) f es epimorfismo <==> f es homomorfismo pleno e Imf es subsemimódulo cerrado de F.

(v) f es homomorfismo anormal <==> existe un epimorfismo reductivo k: Coimf $\to$ Imf.

(vi) f es homomorfismo normal <==> existe un isomorfismo $\beta$: Coimf$\to$ Imf.

(v) y (vi) resultan del teorema principal de homomorfismos §3,18- y de las definiciones dadas.

En las proposiciones 3,4,5,y 6, que exponemos a continuación, supondremos siempre que E,F,G son A-semimódulos y que f y g designan A-homomorfismos.

3). La sucesión de homomorfismos (3): $0 \to E \xrightarrow{f} F$

(3) es regular <==> 0 = Kerf <==> f es homomorfismo reducido <==> (3) es cerrada

(3) es normal <==> f es monomorfismo <==> (3) es exacta.

4). Dada la sucesión (4): $F \xrightarrow{g} G \to 0$

(4) es regular <==> $\overline{\text{Img}}$ = G <==>Cokerf = 0 <==> g es homomorfismo pleno.

(4) es cerrada <==> Img = G <==> g es epimorfismo.

(4) es normal <==> Cokerg = 0 y g es normal <==> g es un homomorfismo pleno y n

(4) es exacta <==> g es epimorfismo normal.

5). Dada la sucesión (5) : $0 \to E \xrightarrow{f} F \to 0$

(5) es regular <==> Kerf = 0 y Cokerf = 0 <==> f es homomorfismo reducido y pleno.

(5) es cerrada <==> f es epimorfismo reducido.

(5) es normal <==> f es monomorfismo pleno.

(5) es exacta <==> f es isomorfismo.

(6). La sucesión (6): $0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$

(6) es regular <==> f es reducido, g es pleno y $\overline{\mathrm{Imf}} = \mathrm{Kerg}$.

(6) es cerrada <==> f es reducido, g es epimorfismo e Imf = Kerg.

(6) es normal <==> f es monomorfismo, g es pleno normal e $\overline{\mathrm{Imf}} = \mathrm{Kerg}$.

(6) es exacta <==> f es monomorfismo, g es epimorfismo normal e Imf = Kerg.

En virtud de la última proposición dada en 6, cabe enunciar:

6). (i) Si la sucesión de homomorfismos (6) es exacta, entonces f es un monomorfismo, g es epimorfismo y la biyección asociada a g es un isomorfismo

$$F/f(E) \to G$$

(ii) Es condición necesaria y suficiente para que la sucesión de homomorfismos (6) sea exacta que f sea un monomorfismo, f(E) sea subsemimódulo cerrado de F, g sea epimorfismo y que la biyección asociada a g sea un isomorfismo:

$$F/f(E) \to G$$

También son inmediatas las proposiciones que siguen:

7). Si F es subsemimódulo de E, la sucesión de homomorfismos

$$(7) : \quad 0 \to F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{n} E/F \to 0 \qquad \begin{cases} i, \text{ inmersión} \\ n, \text{ homomorfismo natural} \end{cases}$$

es normal. Para que la sucesión (7) sea exacta es necesario y suficiente que F sea subsemimódulo cerrado de E.

Consecuencia de 7 es

7'). Cualquiera que sea el homomorfismo f: E → F, la sucesión:

$$0 \to \mathrm{Kerf} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{n} \mathrm{Coimf} \to 0$$

es exacta.

Designe $f: E \to F$ un homomorfismo de A-semimódulos y sea $m=bkc:E \to Imf$ ver §3,18, entonces:

8) La sucesión de homomorfismos

$$8).\ 0 \to Kerf \xrightarrow{i} E \xrightarrow{m} Imf \to 0$$

es cerrada, cualquiera que sea f. Para que la sucesión (8) sea exacta es necesario y suficiente que f sea un homomorfismo normal.

9). La sucesión

$$9)\ :\ 0 \to Kerf \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{n} Cokerf \to 0$$

es regular, cualquiera que sea el homomorfismo $f: E \to F$. La sucesión (9) es cerrada si y solo si Imf es subsemimódulo cerrado de F. (9) es sucesión normal si y solo si f es homomorfismo nomral. La condición necesaria y suficiente para que (9) sea exacta es, pues, que f sea normal y f(E) sea subsemimódulo cerrado de F.

10). Dada las sucesión de homomorfismos de A-semimódulos

$$10)\quad E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G,,$$

(10) es regular si y solo si existen dos A-semimódulos K y L y existen unos homomorfismos $m: E \to K$, $n: K \to F$, $p: F \to L$, $q; L \to G$ tales que $f = nm$, $g = qp$ y tales que la sucesión:

$$(i)\quad E \xrightarrow{m} K \to 0$$

$$(ii)\quad 0 \to L \xrightarrow{q} G$$

$$(iii)\quad 0 \to K \xrightarrow{n} F \xrightarrow{p} L \to 0$$

(i) es cerrada, la (ii) exacta y la (iii) es regular. La sucesión (10) es cerrada si y solo si se cumplen las condiciones anteriores y la sucesión (i) es cerrada, la (ii) exacta y la (iii) cerrada. (10) es sucesión normal solo si (i) es exacta, (ii) es también exacta y (iii) es normal. Por fin, (10) es exacta si y solo si (i), (ii) y (iii) son exactas.

Para comprobar el enunciado nos basta tomar $K = f(E)$, $L = g(F)$, $n,q$ inmersiones, $m,p$ homomorfismos tales que las congruencias asociadas a ellos en $E$ y $F$, respectivamente, sean las mismas que las asociadas a $f$ y $g$. Observamos, además, que (i) es siempre cerrada, y tan solo es exacta si $f$ es normal; que (ii) es siempre exacta; y que por cumplirse las igualdades:

$$f(E) = nm(E) = n(K)$$
$$g^{-1}(o) = p^{-1}(q^{-1}(o)) = p^{-1}(o)$$

y verificarse las equivalencias "$f$ $(g)$, normal <==> $m(p)$, normal", resulta, ya sin más, el enunciado.

11). Sea la sucesión de homomorfismos de A-semimódulos

$$(11) \qquad f_i : F_i \to F_{i+1}\ , \quad i \in [1,n]\ , \ n \geqslant 3$$

y sea $\mathcal{F}_i$ la congruencia asociada a $f_i$ en $F_i$.

Si (11) es sucesión normal, entonces (I) la biyección asociada a $f_i$ es un isomorfismo $\mathrm{Cokerf}_{i-1} \to \mathrm{Imf}_i$, para todo $i \in [2,n]$.

Si (11) es sucesión cerrada, entonces (II) la biyección asociada a $f_i$ es un isomorfismo $F_i/\mathcal{F}_i \to \mathrm{Kerf}_{i+1}$, para todo $i \in [1,n-1]$.

Si (11) es sucesión exacta, entonces (III) la biyección asociada a $f_i$ es un isomorfismo $\mathrm{Cokerf}_{i-1} \to \mathrm{Kerf}_{i+1}$ , para todo $i \in [2,n-1]$.

La biyección asociada a $f_i$ es $F_i/\mathcal{F}_i \approx \mathrm{Imf}_i$ , $\forall\ i \in [1,n]$ (a); ahora bien, si (11) es normal, entonces $f_i$ es normal y $\overline{\mathrm{Imf}_{i-1}} = \mathrm{Kerf}_i$; de donde, $F_i/\mathcal{F}_i = F_i/\mathrm{Kerf}_i = F_i/\mathrm{Imf}_{i-1} = \mathrm{Cokerf}_{i-1}$, con lo cual obtenemos (I).

Si (11) es cerrada, entonces $\mathrm{Imf}_i = \mathrm{Kerf}_{i+1}$, $\forall\ i \in [1,n-1]$ ; considerando (a) y estas igualdades deducimos (II).

Sea (11) exacta; por ser normal, se verifica (I): $\mathrm{Cokerf}_{i-1} \approx \mathrm{Imf}_i$, $\forall\ i \in [2,n]$ ; por ser cerrada, se cumple (II): $F_i/\mathcal{F}_i \approx \mathrm{Kerf}_{i+1}$, $\forall\ i \in [1,n-1]$ como $F_i/\mathcal{F}_i \approx \mathrm{Imf}_i$, $\forall\ i \in [1,n]$, resulta (III), esto es, que son isomorfos $\mathrm{Cokerf}_{i-1} \approx \mathrm{Kerf}_{i+1}$, para todo $i \in [2,n-1]$.

Recíprocamente, si la sucesión (11) ; es regular y se satisface (I), siendo $f_1$ normal, entonces (11) es normal;

satisface (II), entonces (11) es cerrada;

satisface (I) y (II), siendo $f_1$ normal, entonces (11) es exacta.

En efecto, al ser (11) regular y verificarse (I), se obtiene $\mathrm{Cokerf}_{i-1} = F_i/\mathrm{Imf}_{i-1} = F_i/\mathrm{Kerf}_i \approx \mathrm{Imf}_i$, esto es, $f_i$ homomorfismo normal para todo $i \in [2,n]$; de donde se deduce que la sucesión (11) es normal.

Supongamos que (11) es regular y se cumple (II); por ser regular (11), $\overline{\mathrm{Imf}_i} = \mathrm{Kerf}_{i+1}$ $\forall\, i \in [1,n-1]$, lo que implica $\mathrm{Imf}_i \subseteq \mathrm{Kerf}_{i+1}$ $\forall\, i \in [1,n-1]$ esto es, que existan unas inmersiones $j_i : \mathrm{Imf} \to \mathrm{Kerf}_{i+1}$ $\forall\, i \in [1,n-1]$; en virtud de (II) y de la biyección asociada a $f_i$, resultan ser estas $j_i$ identidades y, por consiguiente, (11) sucesión cerrada.

12). Si la sucesión de homomorfismos de A-semimódulos

$$0 \to E \overset{u}{\to} F \overset{v}{\to} G \to 0 \qquad (1)$$

es exacta y F es de longitud finita, entonces E y G son de longitud finita y se cumple:

$$\mathrm{long}(F) \geqslant \mathrm{long}(E) + \mathrm{long}(G) \qquad (2)$$

Si F satisface la condición de Jordan-Hölder, entonces E y G la verifican también, y se cumple:

$$\mathrm{long}\ (F) = \mathrm{long}\ (E) + \mathrm{long}\ (G) \qquad (3)$$

Demostración: Kerv es subsemimódulo cerrado de F; en virtud de §5,8) (ii), se obtiene:

$$\mathrm{long}\ (F) > \mathrm{long}\ (\mathrm{Kerv}) + \mathrm{long}\ (F/\mathrm{Kerv}) \qquad (4)$$

por ser la sucesión (1) exacta: $F/\mathrm{Kerv} \approx G$ (5), $E \approx \mathrm{Imu} = \mathrm{Kerv}$ (6); como la longitud es invariante respecto de los isomorfismos (§5,7)(iv), de (5) y (6) se deduce $\mathrm{long}(F/\mathrm{Kerv}) = \mathrm{long}(G)$, $\mathrm{long}(\mathrm{Kerv}) = \mathrm{long}\ (E)$; y de aquí, juntamente con (4), resulta (2).

Si F satisface la condición de Jordan-Hölder, todo subsemimódulo cerrado M de F la satisface también en virtud de §5,12, así como todo semimódulo cociente de la forma F/M §5,12, §4,4 (ii), 4,2 (iv); la condición de J-H se mantiene por isomorfismo. La fórmula (3) es consecuencia de §5,15(ii).

13) Sea F un A-semimódulo de longitud finita y sea:

$$F_o = 0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = F \qquad (1)$$

una sucesión de composición estricta de F, se verifica:

$$\mathrm{long}(F) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{long}(F_i/F_{i-1}) \qquad (2)$$

Si F cumple la condición de Jordan-Hölder, entonces:

$$\mathrm{long}(F) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{long}(F_i/F_{i-1}) \quad (3)$$

Demostración: Las sucesiones,

$$0 \to F_{i-1} \to F_i \to F_i/F_{i-1} \to 0$$

son $\forall\ i \in [1,n]$, exactas y en virtud de 12:

$$\mathrm{long}(F_i) \geq \mathrm{long}(F_{i-1}) + \mathrm{long}(F_i/F_{i-1}),\ \forall\ i\in[1,n] \qquad (4)$$

sumando miembro a miembro todas las desigualdades (4) y simplificando, resulta (2). Si F cumple la condición de J-H, todas las expresiones (4) son igualdades 12, por lo que se obtiene, en tal caso,(3).

Nota: Fácilmente se comprueba que las fórmulas (2) y (3) son también válidas aunque la sucesión de composición de F dada (1) no sea estricta.

14). Si:

$$0 \to F_1 \xrightarrow{u_1} F_2 \xrightarrow{u_2} \dots \to F_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} F_n \xrightarrow{u_n} 0$$

<u>es una sucesión exacta de A-semimódulos que cumplen la condición de Jordan-Hölder, entonces se verifica:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{long}(F_i) = o$$

En efecto, las sucesiones:

$$0 \to \operatorname{Keru}_i \to F_i \to F_i/\operatorname{Keru}_i \to 0, \quad \forall \; i \in [1,n]$$

son exactas, y según 12:

$$\operatorname{long}(F_i) = \operatorname{long}(\operatorname{Keru}_i) + \operatorname{long}(F_i/\operatorname{Keru}_i), \quad \forall \; i \in [1,n];$$

en virtud de la exactitud de la sucesión dada:

$$F_i/\operatorname{Keru} \approx \operatorname{Imu}_i = \operatorname{Keru}_{i+1}, \quad \forall \; i \in [1,n-1]$$

$$F_n/\operatorname{Keru}_n = 0; \quad \operatorname{Keru}_1 = 0$$

de donde resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{long}(F_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{long}(\operatorname{Keru}_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \operatorname{long}(\operatorname{Keru}_{i+1}) = o.$$

## § 7. PRODUCTO DE SEMIMODULOS

Sea A un semianillo, $E_i$ un A-semimódulo a la izquierda para todo $i \in I$, y sea E el conjunto producto $E = \prod_{i \in I} E_i$.

Definimos en E una ley de composición interna y otra externa sobre A, del siguiente modo:

$$(1) \quad \begin{aligned} (x_i) + (y_i) &= (x_i + y_i), \quad x_i, y_i \in E_i, \quad \forall\, i \in I \\ a\,(x_i) &= (ax_i), \quad x_i \in E_i, \quad \forall\, i \in I, \quad \forall\, a \in A \end{aligned}$$

Fácilmente se comprueba que el conjunto E, <u>dotado de las leyes (1), es un A-semimódulo a la izquierda, al que denominaremos semimódulo producto de la familia</u> $(E_i)_{i \in I}$.

Las aplicaciones: $pr_i : E \to E_i, \quad \forall\, i \in I$

$$(x_i) \to x_i$$

son en virtud de (1) y de $Impr_i = E_i$, epimorfismos, a los que llamamos proyecciones.

1). Sea $(E_i)_{i \in I}$ una familia de A-semimódulos a la izquierda, F un A-semimódulo a la izquierda, $f_i : F \to E_i$ una familia de A-homomorfismos, $E = \prod_{i \in I} E_i$ el semimódulo producto de la familia $(E_i)_{i \in I}$. <u>Existe un único homomorfismo</u>, f: F → E, <u>tal que</u> $pr_i f = f_i$, <u>para todo</u> $i \in I$.

Efectivamente, si para $x \in F$ es $f_i x = x_i \quad E_i$, construimos la aplicación $fx = (X_i)$, la cual es única. Se verifica, además:

$$\text{si } x,y \in F,\ f(x+y) = (f_i(x+y)) = (f_i x + f_i y) = (f_i x)+(f_i y) = fx + fy\ ;$$

$$\text{si } x \in F,\ a \in A,\ f(ax) = (f_i(ax)) = (af_i x)=a(f_i x) = afx;$$

$$pr_i f = f_i, \text{ para todo } i \in I; \text{ c.q.d.}$$

Se comprueba, también sin dificultad, que el producto de semimódulos goza de la propiedad asociativa.

2). Sean $(E_i)_{i \in I}$, $(F_i)_{i \in I}$ dos familias de A-semimódulos a la izquierda que poseen el mismo conjunto I de subíndices. Sean E y F los semimódulos productos de dichas familias, respectivamente. Sean $f_i: E_i \to F_i$ una familia de A-homomorfismos. <u>La aplicación</u>:

$$f : (x_i) \to (f_i x_i)$$

<u>es un homomorfismo de E en F</u>.

Para probar 2 basta tener presente que f es una aplicación que cumple:

$$f((x_i) + (y_i)) = f((x_i+y_i)) = (f_i(x_i+y_i)) = (f_i x_i + f_i y_i) = f((x_i)) + f((y_i))$$

$$\forall\ a \in A,\ f(a(x_i)) = (f_i(ax_i)) = (af_i x_i) = af((x_i))$$

A f la designaremos $f = \prod_{i \in I} f_i$

Exponemos y mostramos ahora unos lemas, que posteriormente utilizaremos para deducir la proposición 3.

3). (I) (LEMA I)

Sea $(E_i)_{i \in I}$ una familia de A-semimódulos a la izquierda y $M_i$ subconjunto no vacío de $E_i$ ($\forall\ i \in I$); sea $E = \prod_{i \in I} E_i$ -semimódulo producto-, $M = \prod_{i \in I} M_i$ -conjunto producto-.

Para que M sea subsemimódulo de E es necesario y suficiente que $M_i$ sea subsemimódulo de $E_i$, para todo $i \in I$.

Para que M sea subsemimódulo cerrado de E es necesario y suficiente que $M_i$ sea subsemimódulo cerrado de $E_i$, para todo $i \in I$.

Si $M_i$ es subsemimódulo de $E_i$ ($\forall\ i \in I$), entonces:

$$\overline{\prod_{i \in I} M_i} = \prod_{i \in I} \overline{M}_i$$

La primera parte del enunciado es evidente. Se puede comprobar la segunda parte de esta manera: si existe un $i \in I$ tal que $M_i$ no es subsemimódulo cerrado de $E_i$, entonces tampoco es M subsemimódulo cerrado de E y viceversa. Mostremos la tercera parte del enunciado, sea $M = \prod_{i \in I} M_i$, se verifica:

$$s \in \overline{M} \iff s \in E \wedge \exists m,n \in M/\ s+m = n \iff pr_i s \in \overline{M}_i,\ \forall i \in I \iff s \in \prod_{i \in I} \overline{M}_i$$

3). (II) (LEMA II)

Sea $f_i : E_i \to F_i$, $\forall i \in I$, una familia de homomorfismos de A-semimódulos a la izquierda y sea $E = \prod_{i \in I} E_i$, $F = \prod_{i \in I} F_i$, $f = \prod_{i \in I} f_i$.

Para que el homomorfismo f sea normal es necesario y suficiente que, para todo $i \in I$, $f_i$ sea normal.

Mostremos primero que $\mathrm{Kerf} = \prod_{i \in I} \mathrm{Kerf}_i$:

$$m \in \mathrm{Kerf} \iff fm = (f_i m_i) = (o) = o \in F \iff f_i m_i = o \in F_i\ ,\ \forall i \in I \iff$$

$$\iff m_i \in \mathrm{Kerf}_i\ ,\ \forall i \in I \iff m \in \prod_{i \in I} \mathrm{Kerf}_i$$

Si existe un $k \in I$ tal que $f_k$ es homomorfismo anormal, entonces existe un par de elementos $x_k, y_k$ de $E_k$ de modo que:

$$f_k x_k = f_k y_k \wedge \forall\ m_k, n_k \in \mathrm{Kerf}_k : x_k + m_k \neq y_k + n_k$$

Tomemos aquellos x,y de E tales que: $\forall i \in I$, $pr_i x = x_k$ si $i = k$, $pr_i x = 0$, si $i \neq k$.

Análogamente elegimos y. Se cumple:

$$fx = fy \wedge \forall\ m,n \in \mathrm{Kerf} : x + m \neq y + n$$

lo cual significa que f es normal.

Supongamos ahora que $f_i$ es normal para todo $i \in I$; sea $x = (x_i)$, $y = (y_i)$. Obtenemos:

$$fx = fy \implies f_i x_i = f_i y_i,\ \forall i \in I \implies \exists\ m_i, n_i \in \mathrm{Kerf}_i / x_i + m_i = y_i + n_i\ ,$$

$$\forall i \in I \implies \exists\ m,n \in \prod_{i \in I} \mathrm{Kerf}_i / x+m = y + n$$

siendo $m = (m_i)$, $n = (n_i)$; como $m,n \in \prod_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Ker} f$, resulta que $f$ es homomorfismo normal, c.q.d.

3). (III) (LEMA III)

Los mismos supuestos y notaciones que en el lema II.

<u>Se cumple</u>:

$$\operatorname{Ker} f = \prod_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i$$

$$\operatorname{Im} f = \prod_{i \in I} \operatorname{Im} f_i$$

La primera igualdad ha quedado probada al demostrar el lema II y la segunda es inmediata, pues:

$$\operatorname{Im} f = \{fx / x \in E\} = \{(f_i x_i)/x_i \in E_i,\ i \in I\} = \prod_{i \in I} \operatorname{Im} f_i$$

Con la ayuda de estos tres lemas podemos deducir de un modo rápido la proposición 3, que enunciamos a continuación.

3). (Proposición)

Sean $(E_i)_{i \in I}$, $(F_i)_{i \in I}$, $(G_i)_{i \in I}$ tres familias de A-semimódulos a la izquierda, que poseen el mismo conjunto I de subíndices. Sea:

$$(s_i) : E_i \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{g_i} G_i$$

una familia de sucesiones de homomorfismos, ($\forall\ i \in I$). Sabemos (por 2) que:

$$(s) : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

en donde, $E = \prod_{i \in I} E_i$, $F = \prod_{i \in I} F_i$; $G = \prod_{i \in I} G_i$, $f = \prod_{i \in I} f_i$, $g = \prod_{i \in I} g_i$ es una sucesión de homomorfismos. <u>Se verifican las equivalencias</u>:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (s) | <u>es sucesión regular</u> | <==> | $(s_i)$ | <u>es sucesión regular para todo</u> $i \in I$ |
| | <u>cerrada</u> | <==> | | <u>cerrada</u> |
| | <u>normal</u> | <==> | | <u>normal</u> |
| | <u>exacta</u> | <==> | | <u>exacta</u> |

Supongamos que $(s_i)$ es sucesión regular, $\forall\, i \in I$, esto es, $\forall\, i \in I$: $\overline{Imf_i} = Kerg_i$; como $Imf = \prod_{i \in I} Imf_i$ en virtud del lema III, entonces: $\overline{Imf} = \overline{\prod_{i \in I} Imf_i} = \prod_{i \in I} \overline{Imf_i}$ (por el lema I) $= \prod_{i \in I} Kerg_i = Kerg$, (según el lema III), es decir, (s) es sucesión regular.

(s) es sucesión regular si $\overline{Imf} = Kerg$, lo que implica $\overline{Imf_i} = Kerg_i$ $\forall\, i \in I$; esto es, que toda sucesión $(s_i)$ sea regular. Hemos mostrado la primera equivalencia.

La segunda equivalencia resulta de la primera y del lema I que nos asegura que Imf es subsemimódulo cerrado de F si y solo si $Imf_i$ es subsemimódulo cerrado de $F_i$, (véase §6,1 (ii)),$\forall\, i \in I$.

La tercera equivalencia del enunciado es consecuencia inmedita de la primera y del lema II.

Obtenidas la segunda y tercera equivalencias, de ellas se deduce sin dificultad la última del enunciado.

Un razonamiento similar al efectuado para probar la proposición 3, nos conduce a 4.

4). Sea:

$$(s_k) : f_i^{(k} : E_i^{(k} \to E_{i+1}^{(k}, \; i \in [1,n] \;, \; n > 2$$

una sucesión de homomorfismos de A-semimódulos a la izqüierda, para todo $k \in K$. Si $E_i = \prod_{k \in K} E_i^{(k}$, para todo $i \in [1,n+1]$, y si $f_i = \prod_{k \in K} f_i^{(k}$, para todo $i \in [1,n]$, entonces:

$$(s) : f_i : E_i \to E_{i+1}, \quad i \in [1,n]$$

es una sucesión de homomorfismos de A-semimódulos y se verifica:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (s) es sucesión | regular | <==> $(s_k)$ es sucesión | regular, para todo $k \in K$ |
| | cerrada | <==> | cerrada |
| | normal | <==> | normal |
| | exacta | <==> | exacta |

La proposición 4 contiene, como un caso particular suyo, para n = 2, a la proposición 3.

5). Dada la familia de A-semimódulos a la izquierda $(E_i)_{i \in I}$ y la congruencia $F_i$ en $E_i$, para cada $i \in I$, definimos la relación binaria $F$ en el A-semimódulo $E = \prod_{i \in I} E_i$, del siguiente modo:

$$x,y \in E, \quad x \, F \, y \iff pr_i x \, F_i \, pr_i y \ , \quad \forall \, i \in I$$

Se comprueba fácilmente que $F$ es una congruencia en $E$, a la que designamos $F = \prod_{i \in I} F_i$.

Existe un isomorfismo :

$$(\prod_{i \in I} E_i)/(\prod_{i \in I} F_i) \rightarrow \prod_{i \in I} (E_i/F_i)$$

En efecto, la sucesión:

$$(s_i) \ ; \ E_i \xrightarrow{f_i} E_i/F_i \rightarrow 0$$

en la que $f_i$ significa el homomorfismo canónico o natural, es cerrada, para todo $i \in I$. Llamando $E = \prod_{i \in I} E_i$, $f = \prod_{i \in I} f_i$, sabemos, en virtud de la proposición 3, que la sucesión:

$$(s) \ : \ E \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} (E_i/F_i) \rightarrow 0$$

es también cerrada, y f, por consiguiente, un epimorfismo. La congruencia asociada a f en E es precisamente $F = \prod_{i \in I} F_i$; por tanto, la biyección asociada a f es un isomorfismo

de:

$$E/F = (\prod_{i \in I} E_i)/(\prod_{i \in I} F_i)$$

sobre $\operatorname{Imf} = \prod_{i \in I} (E_i/F_i)$, c.q.d.

6). Dado, para cada $i \in I$, un subsemimódulo arbitrario $M_i$ del A-semimódulo $E_i$, existe un isomorfismo:

$$(\prod_{i \in I} E_i)/(\prod_{i \in I} M_i) \rightarrow \prod_{i \in I} (E_i/M_i)$$

La sucesión:

$$(s_i) : E_i \xrightarrow{f_i} E_i/M_i \to 0$$

$f_i$ homomorfismo natural, es exacta, $\forall\ i \in I$; de 3, se deduce, llamando $E = \prod_{i \in I} E_i$, $f = \prod_{i \in I} f_i$, que:

$$(s) : E \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} (E_i/M_i) \to 0$$

es sucesión exacta; por consiguiente, f es epimorfismo normal. El isomorfismo asociado a f es E/kerf → Imf. $\mathrm{Kerf} = \prod_{i \in I} \mathrm{Kerf}_i = \prod_{i \in I} \bar{M}_i = \overline{\prod_{i \in I} M_i}$; por tanto, $E/\mathrm{Kerf} = E/\overline{\prod_{i \in I} M_i}$, c.q.d.

7). Bajo los supuestos de la proposición 2, resulta, como corolario de 6, que:

existe un isomorfismo $\quad \mathrm{Coimf} \to \prod_{i \in I} \mathrm{Coimf}_i$

existe un isomorfismo $\quad \mathrm{Cokerf} \to \prod_{i \in I} \mathrm{Cokerf}_i$

independientemente de la naturaleza del homomorfismo $f_i$, $\forall\ i \in I$.

8). Impongamos las mismas hipótesis y notaciones que en la proposición 4).

Designe $F_i^{(k}$ la congruencia asociada a $f_i^{(k}$ en $E_i^{(k}$, $\forall\ i \in [1,n]$ y para todo $k \in K$. Se verifica

Si $(s_k)$ es sucesión normal, para todo $k \in K$, entonces existe un isomorfismo:

$$\prod_{k \in K} \mathrm{Cokerf}_{i-1}^{(k} \to \prod_{k \in K} \mathrm{Imf}_i^{(k}, \text{ para todo } i \in [2,n]$$

Si $(s_k)$ es sucesión cerrada, para todo $k \in K$, entonces existe un isomorfismo

$$\prod_{k \in K} (E_i^{(k}/F_i^{(k)}) \to \prod_{k \in K} \mathrm{Kerf}_{i+1}^{(k}, \text{ para todo } i \in [1,n-1]$$

Si $(s_k)$ es sucesión exacta, para todo $k \in K$, y si $n \geqslant 3$, entonces existe un isomorfismo:

$$\prod_{k \in K} \mathrm{Cokerf}_{i-1}^{(k} \to \prod_{k \in K} \mathrm{Kerf}_{i+1}^{(k}, \quad \forall\, i \in [2,n-1]$$

Estos enunciados son consecuencias de la proposición 11 del parágrafo §6, y de §7, 4.

## § 8. SUMA DIRECTA DE SEMIMODULOS

Sea $(E_i)_{i \in I}$ una familia de A-semimódulos a la izquierda y sea $P = \prod_{i \in I} E_i$ el semimódulo producto de dicha familia. Llamaremos "soporte" de $x \in P$ al conjunto de todos los subíndices $i \in I$ para los que $pr_i x \neq o$.

El conjunto E, formado por todos los elementos de P que sean de "soporte finito", es un subsemimódulo cerrado de P, al que denominamos suma directa (externa) de la familia $(E_i)_{i \in I}$; abreviadamente, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Que E es subsemimódulo de P, resulta obvio; mostremos que, además, es cerrado: si no lo fuera, existirían $m,n \in E$, $x \in P$, $x \notin E$ tales que $x + m = n$; de $x \in P-E$ (complemento de E en P) y de $m \in E$, se deduce $x + m \in P-E$, contradicción con $x + m = n \in E$.

(Caso de que I sea conjunto finito, $E = P$, y por tanto E es también subsemimódulo cerrado de P).

Designe $j_k : E_k \to E$ la siguiente aplicación:

$$j_k(x_k) = x \in E/pr_i x = o, \text{ si } i \neq k; \quad pr_i x = x_k, \text{ si } i = k$$

Evidentemente $j_k$ es un monomorfismo de semimódulos que llamaremos inyección canónica ; $j_k(E_k) = \text{Im} j_k$ es un subsemimódulo cerrado de E isomorfo a $E_k$, al que denominaremos subsemimódulo componente de E de índice k. Es inmediato que todo elemento x de E se puede poner $x = \sum_{i \in I} j_i(pr_i x)$, siendo esta una suma de soporte finito.

1). Sea $f_i : E_i \to F$, $\forall\, i \in I$, una familia de homomorfismos de A-semimódulos a la izquierda y sea $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Existe un único homomorfismo $f : E \to F$ tal que $fj_i = f_i$, $\forall\, i \in I$.

En efecto, la aplicación $fx = \sum_{i \in I} f_i(pr_i x)$ cumple los requisitos del enunciado. En lo sucesivo, designaremos a $f = \sum_{i \in I} f_i$.

2). Dada $f_i : E_i \to F$, $i \in I$, familia de homomorfismos de A-semimódulos a la izquierda; para que $f = \sum_{i \in I} f_i$ sea un isomorfismo es necesario y suficiente que exista, para cada $i \in I$, un homomorfismo $h_i : F \to E_i$ de modo que:

(i) $h_i f_k = 1_{E_i}$ , si $k = i$, $\forall\, i \in I$

$h_i f_k = o$ , si $k \neq i$

(ii) todo elemento y de F se ha de poder expresar $y = \sum_{i \in I} f_i(h_i y)$, siendo ésta una suma de soporte finito.

Si f es un isomorfismo de $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ sobre F, entonces las aplicaciones $h_i = pr_i f^{-1}$ son homomorfismos $F \to E_i$ que cumplen:

$$(i) : h_i f_k = pr_i f^{-1} f j_k = pr_i j_k = \begin{cases} 1_{E_i} , & \text{si } k = i \\ o & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

(ii) sabemos por 1) que $\forall\, x \in E$, $fx = \sum_{i \in I} f_i(pr_i x)$, sea $fx = y \in F$, como $pr_i = h_i f$, obtenemos $fx = \sum_{i \in I} f_i(h_i fx)$, es decir $\forall\, y \in F$: $y = \sum_{i \in I} f_i(h_i y)$.

Recíprocamente, si existen los homomorfismos $h_i$ que verifican (i) y (ii), entonces la aplicación $hy = \sum_{i \in I} j_i h_i y$, $\forall\, y \in F$, es un homomorfismo de F en E que cumple:

$$fhy = f(\sum_{i \in I} j_i h_i y) = \sum_{i \in I} f_i h_i y = y, \quad \forall y \in F, \text{ en virtud de (ii)}$$

$$hfx = \sum_{i \in I} j_i h_i (\sum_{k \in I} f_k pr_k x) = \sum_{i \in I} j_i pr_i x = x, \ \forall\, x \in E, \text{ por (i);}$$

por consiguiente f es un isomorfismo.

3). Sean $(E_i)_{i \in I}$, $(F_i)_{i \in I}$ dos familias de A-semimódulos a la izquierda que tienen el mismo conjunto I de subíndices; sea $f_i : E_i \to F_i$, $i \in I$, una familia de homomorfismos. La restricción del homomorfismo $\prod_{i \in I} f_i$ a $\bigoplus_{i \in I} E_i$ es un homomorfismo de $\bigoplus_{i \in I} E_i$ en $\bigoplus_{i \in I} F_i$, que designaremos $\bigoplus_{i \in I} f_i$.

A continuación deducimos unos lemas que serán útiles para demostrar la proposición 5, principalmente.

4)(I) (LEMA I)

Sea $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ suma directa de la familia de A-semimódulos a la izquierda $(E_i)_{i \in I}$. Si M es subsemimódulo de E de la forma $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $M_i \subseteq E_i$, entonces $M_i$ es subsemimódulo de $E_i$ para todo $i \in I$. Recíprocamente, si $\forall\, i \in I$, $M_i$ es subsemimódulo de $E_i$, entonces M es subsemimódulo de E.

Como la imagen del homomorfismo $pr_i$ restringido a M es precisamente $M_i$, $M_i$ es subsemimódulo de $E_i$ ($\forall\, i \in I$). La recíproca es también evidente. Nótese que en el enunciado hemos supuesto que M es subsemimódulo de E de la forma $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $M_i \subseteq E_i$, y que no todo subsemimódulo de E es de esta forma.

4). (II) (LEMA II)

Las mismas hipótesis que en el lema I.

Si M es subsemimódulo cerrado de E de la forma $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, entonces $M_i$ es subsemimódulo cerrado de $E_i$ para todo $i \in I$, y recíprocamente.

Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ un subsemimódulo no cerrado de E; esto significa:

$$(1) \qquad \exists\, x \in E \wedge x \notin M \wedge \exists\, m,n \in M \;/\; x + m = n$$

lo cual implica que existe, al menos, un $k \in I$ tal que las proyecciones de índice k de esos elementos, sean $x_k = pr_k x$, etc., satisfacen:

$$(2) \qquad x_k \in E_k \wedge x_k \notin M_k \wedge m_k\,,\, n_k \in M_k \wedge x_k + m_k = n_k$$

pues de lo contrario no se verificaría (1). Ahora bien, (2) afirma que $M_k$ es subsemimódulo no cerrado de $E_k$.

Recíprocamente, si $M_k$ ($k \in I$) es subsemimódulo no cerrado de $E_k$, entonces existen $x_k$, $m_k$, $n_k$, que cumplen (2). Los elementos $x = j_k(x_k)$, $m = j_k(m_k)$, $n = j_k(n_k)$ verifican (1), luego M es subsemimódulo no cerrado de E, c.q.d.

4). (III) (LEMA III)

Las mismas hipótesis eque en el lema I.

Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ es subsemimódulo de E, se verifica:

$$\overline{M} = \overline{\bigoplus_{i \in I} M_i} = \bigoplus_{i \in I} \overline{M_i}$$

En efecto, $s \in \bar{M} \Longrightarrow s \in E \wedge \exists\ m,n \in M /\ s + m = n \Longrightarrow s \in E \wedge pr_i\, s \in$ $\in \bar{M}_i,\ \forall\ i \in I \Longrightarrow s \in \bigoplus_{i \in I} \bar{M}_i$

Recíprocamente,

$$s \in \bigoplus_{i \in I} \bar{M}_i \Longrightarrow pr_i s \in \bar{M}_i \wedge (pr_i s) \text{ es de soporte finito} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow pr_i s + m_i = n_i,\ m_i,\ n_i \in M_i,\ \forall\ i \in I \Longrightarrow \Sigma\ j_i pr_i s + \Sigma\ j_i m_i = \Sigma j_i n_i,$$

$$s = \Sigma\ j_i pr_i s,\quad \Sigma\ j_i m_i,\ \Sigma\ j_i n_i \in \bigoplus_{i \in I} M_i \Longrightarrow s \in \overline{\bigoplus_{i \in I} M_i}$$

Se comprueba fácilmente que:

4). (IV) (LEMA IV)

<u>Si $f_i : E_i \to F_i$ es una familia de homomorfismos de A-semimódulo a la izquierda, entonces:</u>

$$\operatorname{Ker} \bigoplus_{i \in I} f_i = \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i$$

$$\operatorname{Im} \bigoplus_{i \in I} f_i = \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Im} f_i$$

4). (V) (LEMA V)

<u>Sea $f_i : E_i \to F_i$</u>, $i \in I$, una familia de homomorfismos de A-semimódulos <u>a la izquierda y sean</u> $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$, $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$.

<u>f es homomorfismo normal sí y sólo si $f_i$ es normal para todo</u> $i \in I$.

Si existe un $k \in I$ tal que $f_k$ es anormal, entonces demostramos que f es anormal de la misma manera que lo hicimos en §7, lema II. Supongamos ahora que $f_i$ es normal para todo $i \in I$, y sean x,y dos elementos de E tales que $fx = fy$, llamemos $pr_i x = x_i$, $pr_i y = y_i$; se cumple, $fx = fy \Longrightarrow f_i x_i = f_i y_i$, $\forall\ i \in I \Longrightarrow \exists\ m_i,\ n_i \in \operatorname{Ker} f_i /\ x_i + m_i = y_i + n_i$, para un número finito de subíndices $\Longrightarrow \exists m,n \in \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Ker} f / x + m = y + n$, en donde $m = \Sigma\ j_i(m_i)$ $n = \sum_{i \in I} j_i(n_i)$; por consiguiente, f es normal, c.q.d.

Una vez establecidos los lemas precedentes I-V, obtenemos, siguiendo una proceso demostrativo formalmente idéntico al efectuado en §7,3,4,5,6 y §7, 7, respectivamente, las proposiciones que enunciamos a continuación.

5). Sean $(E_i)_{i \in I}$, $(F_i)_{i \in I}$, $(G_i)_{i \in I}$ tres familias de A-semimódulos a la izquierda, que poseen el mismo conjunto I de subîdncies; Sea:

$$(s_i) : E_i \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{g_i} G_i$$

una familia de sucesiones de homomorfismos, $(\forall\, i \in I)$; y sea:

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i \ , \ F = \bigoplus_{i \in I} F_i \ , \ G = \bigoplus_{i \in I} G_i \ , \ f = \bigoplus_{i \in I} f_i \ , \ g = \bigoplus_{i \in I} g_i$$

Entonces:

$$(s) : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

es una sucesión de homomorfismos y se verifican las equivalencias·

(s) <u>es sucesión regular</u> <==> $(s_i)$ <u>es sucesión regular para todo</u> $i \in I$
<u>cerrada</u> <==> <u>cerrada</u>
<u>normal</u> <==> <u>normal</u>
<u>exacta</u> <==> <u>exacta</u>

Esta proposición 5 puede ser generalizada, como es natural, al caso de que el número de homomorfismos de que conste cada sucesión $(s_i)$ sea mayor que dos.

Dada la congruencia $\mathcal{F}_i$ en el A-semimódulo $E_i$, $\forall\, i \in I$, en §7,5 hemos definido la congruencia $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ en $\prod_{i \in I} E_i$. $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ subordina en $\bigoplus_{i \in I} E_i$ una congruencia que designaremos $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Se cumple:

6). Dada la familia de A-semimódulos $(E_i)_{i \in I}$ y dada la congruencia $\mathcal{F}_i$ en $E_i$, para cada $i \in I$, existe un isomorfismo:

$$\left(\bigoplus_{i \in I} E_i\right) / \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i\right) \to \bigoplus_{i \in I} (E_i / \mathcal{F}_i)$$

7). Si $M_i$ es subsemimódulo del A-semimódulo $E_i$, para todo $i \in I$, entonces existe un isomorfismo:

$$(\bigoplus_{i \in I} E_i) / (\bigoplus_{i \in I} M_i) \to \bigoplus_{i \in I} (E_i/M_i)$$

8). Sea $f_i : E_i \to F_i$ una familia de homomorfismos de A-semimódulos $(i \in I)$, entonces:

existe un isomorfismo $\quad \mathrm{Coim} \bigoplus_{i \in I} f_i \to \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Coimf}_i$

existe un isomorfismo $\quad \mathrm{Coker}_{\bigoplus_{i \in I}} f_i \to \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Coker}_i$

9). Sea :

$$(s_k) : E_i^{(k} \xrightarrow{f_i^{(k}} E_{i+1}^{(k} \quad , \quad i \in [1,n] \ , \ n \geq 2$$

una sucesión de homomorfismos de A-semimódulos a la izquierda, para todo $k \in K$. Designe $F_i^{(k}$ la congruencia asociada a $f_i^{(k}$ en $E_i^{(k}$, $\forall\, i \in [1,n]$, $\forall\, k \in K$. Se verifica:

Si $(s_k)$ es sucesión normal, para todo $k \in K$, entonces, para cada $i \in [2,n]$, existe un isomorfismo:

$$\bigoplus_{k \in K} \mathrm{Cokerf}_{i-1}^{(k} \to \bigoplus_{k \in K} \mathrm{Imf}_i^{(k}$$

Si $(s_k)$ es sucesión cerrada, para todo $k \in K$, entonces, para cada $i \in [1,n-1]$, existe un isomorfismo:

$$\bigoplus_{k \in K} (E_i^{(k}/F_i^{(k}) \to \bigoplus_{k \in K} \mathrm{Kerf}_{i+1}^{(k}$$

Si $(s_k)$ es sucesión exacta para todo $k \in K$, y si $n > 2$, entonces, para cada $i \in [2,n-1]$, existe un isomorfismo:

$$\bigoplus_{k \in K} \mathrm{Cokerf}_{i-1}^{(k} \to \bigoplus_{k \in K} \mathrm{Kerf}_{i+1}^{(k}$$

## § 9. SUMA DIRECTA DE SUBSEMIMODULOS

Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia de subsemimódulos del A-semimódulo E; designe $m_i : F_i \to E$ la inmersión correspondiente a $i \in I$; sea m el homomorfismo $m = \sum_{i \in I} m_i : \bigoplus_{i \in I} F_i \to E$ (véase §8,1).

<u>Definición</u>

Diremos que E es suma directa de la familia $(F_i)_{i \in I}$ de subsemimódulos de E si y sólo si "m" es un isomorfismo.

1). Las proposiciones (I), (II), (III) y (IV), que enunciamos a continuación, son equivalentes entre sí.

(I) E es suma directa de $(F_i)_{i \in I}$ , familia de subsemimódulos

(II) Todo elemento x de E se puede poner de un modo único como suma de soporte finito: $x = \sum_{i \in I} x_i$, siendo $x_i \in F_i$, $\forall\, i \in I$.

(III) 1. El homomorfismo m es normal

2. Kerm = 0

y 3. Imm ( $= \sum_{i \in I} F_i$) = E

(IV) Existe una familia de homomorfismos $(h_i)_{i \in I}$, $h_i : E \to F_i$, de modo que:

$$1. \begin{cases} h_i m_i = 1_{F_i} \text{ , para todo } i \in I \\ h_i m_k = o, \text{ si } i \neq k \end{cases}$$

y

2. todo elemento x de E puede ser expresado $x = \sum_{i \in I} h_i(x)$ (suma de soporte finito).

(I) <==>(II), (I) <==> (III) , son consecuencias de las definiciones;

(I) <==>(IV) , en virtud de la proposición §8,2.

<u>Definición</u>

Caso de que se cumpla 1 (II), x sea elemento de E, $x = \sum_{i \in I} x_i$, siendo $x_i \in F_i$, llamaremos a $x_i$ <u>componente</u> de x de índice i

Sea $(F_i)_{i \in I}$ una familia arbitraria de subsemimódulos del A-semimódulo E y tengan $m_i$, $\forall i \in I$, m, el mismo significado que al principio de este parágrafo, $m: \bigoplus_{i \in I} F_i \to \sum_{i \in I} F_i$ es, cualquiera que sea la familia dada un epimorfismo (§2,8) y 9. Si m es, además, un monomorfismo, entonces el subsemimódulo $S = \sum_{i \in I} F_i$ de E es suma directa de la familia $(F_i)_{i \in I}$ de subsemimódulos de S, y recíprocamente, ahora bien, para que m sea monomorfismo es necesario y suficiente que m sea normal y que Kerm = 0; de donde:

2). El subsemimódulo $\sum_{i \in I} F_i$ de E es suma directa de la familia $(F_i)_{i \in I}$ de subsemimódulos de E si y solo si se verifican (I) y (II).

(I) m es <u>homomorfismo normal</u>

(II) De $\sum_{i \in I} x_i = o$, donde $x_i \in F_i$, $\forall i \in I$, se deduce $x_i = o$, para todo $i \in I$.

Por tanto, la condición (II) es necesaria, pero no suficiente, para que $\sum_{i \in I} F_i$ sea suma directa de la familia de subsemimódulos $(F_i)_{i \in I}$.

Designe End(E) el conjunto de todos los A-endomorfismos del A-semimódulo E, dotado de las leyes "adición de homomorfismos" y "composición de homomorfismos". End(E) es un semianillo con neutros (o, homomorfismos cero; $1_E$, identidad) que satisface SA6 (fo = o,, of = o, $\forall f \in$ End(E)).

<u>Definiciones</u>

"e" proyector del A-semimódulo E <==> "e" endomorfismo idempotente de E.$(e_i)_{i \in I}$ familia ortogonal de proyectores de E <==> para todo $i \in I$, $e_i$ es proyector de E y si $j,i \in I$ y $j \neq i$, entonces $e_j e_i = o$

3). (i) Si el A-semimódulo E es suma directa de la familia de subsemimódulos $(F_i)_{i \in I}$ entonces existe una familia ortogonal de proyectores de E, $(e_i)_{i \in I}$, tal que $e_i(E) = F_i$ para todo $i \in I$.

(ii) Recíprocamente, si existe una familia ortogonal de proyectores de E, $(e_i)_{i \in I}$, tal que para todo $x \in E$, $x = \sum_{i \in I} e_i(x)$, entonces E es suma directa de la familia de subsemimódulos $(e_i(E))_{i \in I}$

Probemos (i), sea $\forall x \in E$, $e_i x = x_i$, $x_i$ componente de índice i de x; $e_i \in$ End(E), $\forall i \in I$, y se verifica:

$$\forall i \in I \ , \ e_i e_i x = e_i x_i = x_i = e_i x \ ;$$

si

$$j,i \in I, \ j \neq i,$$

entonces :

$$e_j e_i x = e_j x_i = o$$

Demostración de (ii): llamemos $e_i(E) = F_i$, $m_i$: $F_i \to E$, inmersión.

Si:

$$e_i x = x_i \in F_i$$

como:

$$e_i e_i x = e_i x \ , \ \forall\ x \in E$$

resulta:

$$e_i x_i = x_i \ , \ \forall\ x_i \in F_i$$

es decir:

$$e_i / F_i = 1_{F_i}$$

de donde:

$$e_i m_i = 1_{F_i} \ , \ \forall\ i \in I \ .$$

si $j, i \in I$, $j \neq i$, entonces: $e_j m_i = e_j(e_i/F_i) = o$, luego la familia $(e_i)_{i \in I}$ verifica todas las condiciones expresadas en 1. (IV); según dicha proposición 1, (IV)<==> (I), por consiguiente E es suma directa de la familia $(F_i)_{i \in I}$, c.q.d.

4). Si $(e_l)_{i \in L}$ es una familia ortogonal de proyectores de E tal que $E = \sum_{i \in L} e_l(E)$, entonces:

(i) para todo $l \in L$, $e_l$ es un endomorfismo normal de E.

(ii) si $(L_r)_{r \in R}$ es una partición de L y $e_r = \sum_{i \in L_r} e_l$, entonces $(e_r)_{r \in R}$ es una familia ortogonal de proyectores de E tal que $E = \sum_{r \in R} e_r(E)$.

4). (i): llamemos $e_l(E) = S_l$, $\forall\, l$ L; evidentemente, $Ker e_l = \sum_{j \in L, j \neq l} S_l$; sean x, y dos elementos de E tales que (1) $e_l x = e_l y$; en virtud de 3 (ii) y de 1 (I) <==> (II), sabemos que x e y se pueden expresar de un modo único $x = (\sum_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} x_j) + x_l$, $y = (\sum_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} y_j) + y_l$; como (1)

$e_l x = x_l = e_l y = y_l$, llamando $\sum_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} x_j = m \in Ker e_l$, $\sum_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} y_j = n \in Ker e_l$, resulta obvio que $x + n = y + m$, y por consiguiente, $e_l$ $(\forall\, l \in L)$ es un homomorfismo $E \rightarrow E$ normal, c.q.d.

4). (ii): End(E) es un semianillo que satisface SA4, SA5, SA6; por ello:

$$e_r e_r = (\sum_{l \in L_r} e_l)(\sum_{s \in L_r} e_s) = \sum_{(l,s) \in L_r x L_s} e_l e_s = \sum_{l \in L_r} e_l = e_r$$

si $r \neq s$, r, s $\in$ R, entonces:

$$e_r e_s = (\sum_{l \in L_r} e_l)(\sum_{p \in L_s} e_p) = \sum_{(l,p) \in L_r x L_s} e_l e_p = \Sigma\, o = o \text{ , c.q.d.}$$

5). Si E es suma directa de la familia de subsemimódulos $(F_i)_{i \in I}$, entonces:

(i) para todo subconjunto J de I, $\sum_{i \in J} F_i$ es subsemimódulo cerrado de E;

(ii) dada cualquier partición $(I_r)_{r \in R}$ de I, E es suma directa de la familia de subsemimódulos $(S_r)_{r \in R}$, en donde $S_r = \sum_{i \in I_r} F_i$;

(iii) para cualquier partición $(I_r)_{r \in R}$ de I, $S_p \cap S_q = 0$, en donde, $p, q \in R$, $p \neq q$, $S_r = \sum_{i \in I_r} F_i$, $\forall\, r \in R$.

5). (i): Caso de que $J \neq \emptyset$ o bien $J = I$, el enunciado se vuelve trivial; supongamos que $J \subset I$, estrictamente, sea $T = I - J$, sea $S_1 = \sum_{i \in J} F_i$,

$S_2 = \sum_{i \in T} F_i$ y sea $(e_1, e_2)$ la familia ortogonal de proyectores de E tal que $e_p(E) = S_p$, $p = 1,2$, (véase 3) y 4 (ii); $Ker e_2 = S_1 = \sum_{i \in J} F_i$, $e_2$ es un endomorfismo de E y su núcleo es (§ 3, 3)un subsemimódulo cerrado de E, c.q.d.

5) (ii) y (iii) son consecuencias inmediatas de 1 (I) <==> (II)

6) Sea E suma directa de la familia de subsemimódulos $(F_i)_{i \in I}$, designe $(e_i)_{i \in I}$ la familia ortogonal de proyectores de E tal que $e_i(E)=F_i$ designe $m_i$ la inmersión de $F_i$ en E, $\forall\, i \in I$; para toda partición (J,T) de I, la sucesión de homomorfismos:

$$0 \longrightarrow \sum_{i \in J} F_i \xrightarrow{\sum_{i \in J} m_i} E \xrightarrow{\sum_{i \in T} e_i} \sum_{i \in T} F_i \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sigamos, para probar 6, el mismo razonamiento y la misma notación que en 5 (i); la sucesión de homomorfismos:

$$(1) : 0 \longrightarrow S_1 \xrightarrow{m_1} E \xrightarrow{e_2} S_2 \longrightarrow 0$$

en donde, $m_1$ significa la inmersión de $S_1$ en E, es exacta, pues $Ker e_2 = S_1$, $m_1$ es monomorfismo y $e_2$ (por ser elemento de un par ortogonal de proyectores de E, 4 (i))es epimorfismo normal; ahora bien $m_1 = \sum_{i \in J} m_i$, $e_2 = \sum_{i \in T} e_i$, con lo que queda demostrado el enunciado. Obsérvese que aquí damos sentido a $\sum_{i \in T} e_i$, aunque no sea suma de soporte finito.

Subsemimódulos suplementarios

Definiciones

Decimos que los subsemimódulos F, G del A-semimódulo E son suplementarios si y solo si E es suma directa de F y G.

Decimos que el subsemimódulo F de E es sumando (factor) directo de E si y solo si F admite un subsemimódulo suplementario en E.

Son condiciones necesarias (pero, en general, no suficientes) para que F y G sean subsemimódulos suplementarios en E que:

(I) F, G sean subsemimódulos cerrados de E (en virtud de 5, (i)).

(II) $F + G = E$ (en virtud de 1 (III) 3)

(III) $F \cap G = 0$ (en virtud de 5) (iii))

7). Si $F$, $G$ son subsemimódulos suplementarios en $E$ y $c$ es el homomorfismo canónico $c: E \to E/F$, entonces $p = c/G$, es un isomorfismo $p: G \to E/F$

(ii) Si un subsemimódulo $F$ de $E$ admite dos o más subsemimódulos suplementarios en $E$, sean $G,H,L$ etc., entonces éstos son isomorfos entre sí.

Sea $x$ un elemento arbitrario de $E$, sabemos que $x$ se puede expresar de un modo único $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$, $x_2 \in G$; se verifica $cx=c(x_1+x_2)=cx_2=px_2$; esto quiere decir que para $x \in E$, esto es, $\forall\, cx \in E/F$ existe un único $x_2 \in G$ (la componente de índice 2 de $x$) tal que $px_2 = cx$, por consiguiente, $p$ es un isomorfismo

(ii): sea $c : E \to E/F$ el homomorfismo canónico, la proposición anterior afirma que:

$$\begin{cases} c/G = g \text{ es un isomorfismo } G \to E/F \\ c/H = h \text{ es un isomorfismo } H \to E/F, \text{ etc.} \end{cases}$$

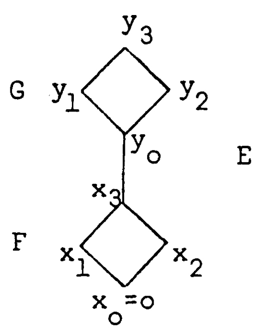
por tanto, $h^{-1}g$ es un isomorfismo $G \to H$, c.q.d.

Es sabido (N. Bourbaki, Algebre, chap. 2 §1, núm. 8) que la existencia de un proyector "e" de un módulo $M$ es condición necesaria y suficiente para que $M$ sea suma directa de $\mathrm{Ker}e$, $\mathrm{Im}e$. No ocurre lo mismo en todos los A-semimódulos, como pondremos de manifiesto a continuación.

8). La existencia de un proyector "e" de un A-semimódulo $E$ tal que $E = \mathrm{Ker}e + \mathrm{Im}e$, es condición necesaria, pero no suficiente para que $E$ sea suma directa de $\mathrm{Ker}e$, $\mathrm{Im}e$.

Es condición necesaria: sea $E$ suma directa de $F,G$; por 3 (I) existe un par ortogonal de proyectores $(e_1,e_2)$ de $E$ tal que $e_1(E) = F$, $e_2(E)=G$, $E=F+G$; ahora bien, $\mathrm{Ker}e_1 = G$, $\mathrm{Ker}e_2 = F$, luego tanto $e_1$ como $e_2$ son proyectores de $E$ que cumplen $E = \mathrm{Ker}e_i + \mathrm{Im}e_i$, $i = 1,2$.

No es condición suficiente: sea $E$ el U-semiretículo con mínimo $x_o=o$, representado a la izquierda; sean $i,j,k \in [o,1,2,3]$, y sea "e" la aplicación $E \to E$, $ex_i = o$, $\forall\, i \in [o,1,2,3]$ $ey_i = y_i$, idem . Si $x_i \cup x_j = x_k$, $y_i \cup y_j = y_k$, Entonces se verifica:




$$e(x_i \cup x_j) = ex_k = o = ex_i \cup ex_j$$

$$e(y_i \cup y_j) = ey_k = y_k = y_i \cup y_j = ey_i \cup ey_j,$$

$$e(x_i \cup y_j) = ey_j = y_j = ex_i \cup ey_j$$

luego "e" es un endomorfismo de E. Kere = F = $\{x_i\}$ , Ime = G = $\{y_i, 0\}$ , $i \in [o,1,2,3]$ ; E = F + G; "e" es proyector de E tal que E = Kere + Ime y, sin embargo, E no es suma directa de Kere, Ime, puesto que:

$$y_1 = y_1 \cup x_2$$

$$y_1 = y_1 \cup x_3 \ , \ x_2 \neq x_3$$

Como en este ejemplo, F y G son subsemimódulos cerrados de E, tales que E = F + G y $F \cap G = 0$, y, sin embargo, E no es suma directa de F y G, podemos enunciar

Las condiciones (I), (II), (III)

(I) F,G son subsemimódulos cerrados de E,

(II) F + G = E

(III) $F \cap G = 0$

no son suficientes para que E sea suma directa de F y G.

La proposición 8 nos da la condición necesaria para que E sea suma directa de dos subsemimódulos F y G; se trata, pues, ahora de buscar condiciones suficientes para que esto ocurra.

Definición.- Sea E un A-semimódulo y S un subsemimódulo de E; decimos que S es simplificable en E si toda igualdad de la forma:

$$x + s = y + s \ , \ x,y \in E, \ s \in S \ , \ \text{implica } x = y$$

Si E es simplificable en E, entonces decimos simplemente que E es simplificable, y esta definición coincide con la dada en §1. Si S es simplificable en E, entonces S es simplificable.

9). Si e es un proyector de E tal que E = Kere + Ime y que Ime es subsemimódulo simplificable en E, entonces E es suma directa de Kere, Ime.

Por ser "e" proyector de E, se cumple ez = z, $\forall$ z $\in$ Ime, ya que si z = ex entonces ez = eex = ex = z. Sea x $\in$ E tal que $x = x_1 + x_2$, $x=y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in$ Kere, $x_2, y_2 \in$ Ime. Evidentemente, $ex = ex_2 = x_2 = ey_2 = y_2$; en virtud de lo cual se puede escribir $x = x_1 + x_2 = y_1 + x_2$; como Ime es simplificable en E, de la última igualdad deducimos $x_1 = y_1$, esto es, que E es suma directa de Kere, Ime. c.q.d.

10) (Corolario de 9)

Si "e" es un proyector del A-semimódulo E tal que E = Kere + Ime y (I) Ime $\subseteq$ Z (significado de Z en §2,16) o bien (II) E es semimódulo simplificable, o bien (III) E es sa-módulo (o un A-módulo), entonces "e" descompone a E en suma directa de Kere, Ime.

Para probar 10 basta tener en cuenta 9 y que Z es subsemimódulo simplificable en E.

11). Sea "e" un proyector del A-semimódulo (arbitrario) E (i). Puede ocurrir a) que E $\neq$ Kere + Ime, y b) que "e" sea endomorfismo anormal.

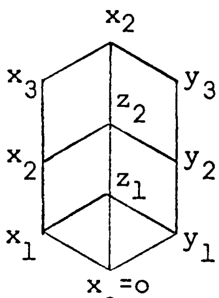
(ii). Si E = Kere + Ime, entonces "e" es endomorfismo normal. Si "e" es proyector normal de E, entonces E = $\overline{\text{Kere + Ime}}$.

(iii) La sucesión de homomorfismos (m, inmersión).

$$(s) : 0 \to \text{Kere} \xrightarrow{m} E \xrightarrow{e} \text{Ime} \to 0$$

es cerrada. Si E = Kere + Ime, entonces (s) es exacta. Si (s) es exacta, entonces E = $\overline{\text{Kere + Ime}}$.

Mostremos 11 (i) con ayuda del U-semiretículo con mínimo $x_o = o$ representado a la izquierda. Definimos la aplicación $e : E \to E$ siguiente $ep_i = x_i$, $ex_o = x_o$, en donde p designa indistintamente a los elementos x,y,z de E y en donde $i \in [1,2,3]$ "e" es un proyector de E, puesto que si $i,j \in [o,1,2,3]$, $i \leq j$, entonces $e(p_i \cup p_j) = ep_j = x_j = x_i \cup x_j = ep_i \cup e$ además, $eep_j = ex_j = x_j = ep_j$. Evidentemente, Kere = 0, Ime = $\{x_i\}$, $i \in [o,1,2,3]$, por tanto E $\neq$ Kere + Ime; "e' es anormal ya que $ez_2 = ey_2 = x_2$, y para todo m,n $\in$ Kere = 0: $z_2 \cup m \neq y_2 \cup n$.




(ii) Sean x,y $\in$ E tales que ex = ey = z; con las hipótesis dadas esto implica x = z + m, y = z + n, m,n $\in$ Kere; de aquí, $\exists$ m,n $\in$ Kere/ x+n=y+m(=z+m+n por consiguiente "e" es endomorfismo normal.

Sea "e" proyector normal de E y sea x $\in$ E, ex = z; como ez = z = ex, y es normal, deducimos $\exists$ m,n $\in$ Kere/x + m = z + n, es decir, x $\in$ $\overline{\text{Kere + Ime}}$.

(iii) expresa de manera diferente lo mismo que afirma (ii).

12). Si E es un A-semimódulo de longitud finita, suma directa de subsemimódulos $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, entonces el conjunto $J = \{i \in I / E_i \neq 0\}$ es finito y se verifica:

$$\text{long}(E) \geq \sum_{j \in J} \text{long}(E_j) = \sum_{i \in I} \text{long}(E_i) \qquad (1)$$

Si E cumple la condición de Jordan-Hölder, entonces:

$$\text{long}(E) = \sum_{i \in I} \text{long}(E_i) \qquad (2)$$

En efecto, sea $J = [1,n]$, y llamemos $F_r = \bigoplus_{j=1}^{r} E_j$, $r \in [1,n]$.

Evidentemente:

$$F_r = F_{r-1} \oplus E_r \text{ , } r \in [1,n] \text{ ; } F_n = E \text{ ; } F_1 = E_1 \qquad (3)$$

Como:

$$0 \to F_{r-1} \to F_r \to E_r \to 0, \quad \forall\, r \in [1,n]$$

es sucesión exacta (ver 6 (convención, $F_o = 0$)) hacemos uso de la proposición §6, 12:

$$\text{long}(F_r) \geq \text{long}(F_{r-1}) + \text{long}(E_r) \text{ , } \forall\, r \in [1,n] \qquad (4)$$

Sumando miembro a miembro todas las expresiones (4) y simplificando, resulta (1), c.q.d.

En el caso de que E cumpla la condición de Jordan-Hölder, por ser $\forall\, r \in [1,n]$ , $F_r$ subsemimódulo cerrado de E 5 (i), $F_r$ la satisface también, y, por consiguiente, todas las expresiones (4) son igualdades, de donde se deduce (2),

Otra demostración de (1): Tenga $F_r$ el mismo significado de antes, la sucesión:

$$F_o = 0 \subset F_1 = E_1 \subset F_2 \subset \ldots\ldots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$$

es de composición de E; en virtud de §6,13, se cumple long(E) $\geqslant \sum_{i=1}^{n}$ long($F_i$/ /$F_{i-1}$). Según 7, $F_i/F_{i-1} \approx E_i$, de donde, long($F_i/F_{i-1}$) = long($E_i$), $\forall\ i \in [1,n]$, con lo que se obtiene (1).

## § 10. SEMIMODULOS LIBRES

En este parágrafo, salvo indicación expresa de lo contrario, supondremos que A es un semianillo $\neq 0$ con neutros que satisface SA6. Sea $A_i$ el A-semimódulo A a la izquierda, T un conjunto cualquiera.

$A_i^{(T)}$ será, por definición, $\underset{t \in T}{\oplus} H_t$, en donde $H_t = A_i$, para todo $t \in T$. Sea $j_t : A_i \to A_i^{(T)}$ la inyección canónica correspondiente a t (§8), y llamemos $j_t 1 = e_t$; evidentemente $e_t = (\delta_{tp})_{p \in T}$ ($\delta$, delta de Kronecker). Todo elemento s de $A_i^{(T)}$, $s = (a_t)_{t \in T}$, y por tanto, se puede poner en la forma $s = \sum_{t \in T} a_t e_t$, suma de soporte finito, de un modo único.

Sea k la aplicación (inyectiva) $k: t \to e_t$ de T en $A_i^{(T)}$. Llamamos a k aplicación canónica.

1). El par $(A_i^{(T)}, k)$ es solución de un problema de aplicación universal; esto es, para todo A-semimódulo E a la izquierda y para toda aplicación $f : T \to E$, existe un único homomorfismo $l : A_i^{(T)} \to E$ tal que $lk = f$.

Sea $ft = x_t \in E$, $\forall\, t \in T$, la aplicación $f: T \to E$ dada. Consideremos para toda $t \in T$ el homomorfismo $l_t$, $l_t a = ax_t$, de $A_i$ en E. §8,1) nos asegura que existe un único homomorfismo $l: A_i^{(T)} \to E$, $l = \sum_{t \in T} l_t$, tal que $lj_t a = l_t a$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, a \in A$. Para $a = 1$ obtenemos $lj_t 1 = le_t = l_t 1 = x_t$, es decir, $lk=f$.

Si hubiese otro homomorfismo $l' : A_i^{(T)} \to E$ tal que $l'k = f$, esto es, tal que $l'e_t = x_t$, $\forall\, t \in T$, entonces $l'(ae_t) = al'e_t = ax_t$, es decir, $l'j_t a = l_t a$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, a \in A$; en virtud de §8,1 $l' = l$, de ahí la unicidad de dicho homomorfismo.

Se verifica:

$$l((a_t)_{t \in T}) = l(\sum_{t \in T} a_t e_t) = \sum_{t \in T} l_t a_t = \sum_{t \in T} a_t x_t$$

Dada una familia $S = (x_t)_{t \in T}$ de elementos del A-semimódulo a la izquierda E, conocemos $A_i^{(T)}$, la aplicación canónica k, y la aplicación $f: T \to E$, $ft = x_t$; 1) nos asegura la existencia de un único homomorfismo $l: A_i^{(T)} \to E$ tal que:

$$l(\sum_{t \in T} a_t e_t) = \sum_{t \in T} a_t x_t \ , \ a_t \in A$$

por ello llamaremos a "l" <u>homomorfismo determinado</u> por la familia S de E, y diremos que la sucesión cerrada:

$$0 \to \mathrm{Kerl} \to A_i^{(T)} \xrightarrow{l} E$$

está determinada por la fámilia S de E.

Evidentemente:

$$\mathrm{Iml} = \{x \in E / x \text{ dep. A-lin. de } S\} = L(S)$$

$$\mathrm{Kerl} = \{(a_t)_{t \in T} \in A_i^{(T)} / \sum_{t \in T} a_t x_t = o\}$$

Consecuencia de la primera de estas dos igualdades es que 2) $S = (x_t)_{t \in T}$ es sistema de generadores del A-semimódulo E <==> l, homomorfismo determinado por S, es un epimorfismo <==> la sucesión:

$$0 \to \mathrm{Kerl} \to A_i^{(T)} \xrightarrow{l} E \to 0 \quad \text{es cerrada}$$

Sea $S = (x_t)_{t \in T}$ una familia de elementos del A-semimódulo E y l el homomorfismo determinado por S. Decimos de un elemento x de E que depende linealmente-A de S de un modo único si x depende linealmente -A de S (§2,2) y toda relación de la forma $x = \sum_{t \in T} a_t x_t = \sum_{t \in T} b_t x_t$ implica $a_t = b_t$, $\forall\ t \in T$

<u>Definiciones</u>

S es familia libre de E <==> l es un monomorfismo.

S es base de E <==> l es un isomorfismo.

Resultan inmediatamente las siguientes equivalencias:

3). S es familia libre de E <==> todo elemento de L(S) depende linealmente A de S. de un modo único.

S es base de <==> todo elemento de E depende linealmente A de S de un modo único <==> S es sistema de generadores y familia libre de E.

Definición.- E es un A-semimódulo libre <==> E posee una base.

Sean $N_o$, P, Z, el semianillo de los enteros no negativos, el semianillo definido en §2,13, el anillo de los enteros, respectivamente. De 3) y de las definiciones correspondientes, se deduce:

4) Un $N_o$-semimódulo libre E(en donde $nx = x + \overset{n}{\smile\!\!\ldots} + x$, $n \in N$, $x \in E$ es un semigrupo abeliano con neutro libre.

Un P-semimódulo libre es un ∪-semiretículo con mínimo (un ∩-semiretículo con máximo) libre.

Un A-semimódulo libre, en donde A es un anillo con elemento unidad, es un A-módulo libre ( 2, 15 y N. Bourbaki, Alg,ch 2, 1, n11).

Un Z-semimódulo libre E (en donde $nx = x + \overset{n}{\smile\!\!\ldots} + x$, $n \in N$, $x \in E$), es un grupo abeliano libre.

Definiciones

Diremos que un elemento x del A-semimódulo E es libre si la familia (x) de E es libre. Si $B = (x_t)_{t \in T}$ es una base de E y $x \in E$, $x = \sum_{t \in T} a_t x_t$ llamaremos a "$a_t$" componente o coordenada de índice t de x con respecto a B. La familia S de elementos de E es ligada si S no es familia libre de E.

5). Sea E un A-semimódulo, se cumple:

(i) Toda subfamilia de una familia libre de E es libre.

(ii) Para que S sea familia libre de E es necesario y suficiente que toda subfamilia finita de S sea libre.

(iii) Para que S sea familia libre de E es necesario y suficiente que $o \in E$ dependa linealmente A de S de un modo único y que el homomorfismo determinado por S sea normal.

(iv) Si la familia $(x_t)_{t \in T}$ de E es libre, entonces $x_t \neq \sum_{\substack{p \in T \\ p \neq t}} a_p x_p$ en particular $x_t \neq x_p$, $\forall\, t, p \in T$, $t \neq p$. La recíproca no es verdadera.

(v) El elemento x de E es libre si y sólo si toda relación de la forma $ax = bx$, $a,b \in A$, implica $a = b$.

(vi) El $o \in E$ no pertenece a ninguna familia libre de E.

(vii) Un A-semimódulo libre puede contener elementos que no sean libres.

(viii) Si ningún elemento de E es libre, entonces E no es libre.

(ix) Puede ocurrir que todos los elementos distintos de o de un A-semimódulo E sean libre, y, sin embargo, E no sea libre.

5). (i): Sea S una familia libre de E y W sub-familia de S. $\forall$ $x \in L(W)$ depende lin-A de S de un modo único, por tanto, depende lin-A de W de un modo único, esto es, W es familia libre de E.

(ii) : En (i) se ha probado que toda sub-familia de una familia libre S de E es libre, a fortiori, toda sub-familia finita de S es libre. Supongamos ahora que toda sub-familia finita de $S = (x_t)_{t \in T}$ es libre y que S no fuese libre. En tal caso existiría un $x \in L(S)$, de modo que

$$x = \sum_{t \in T} a_t x_t = \sum_{t \in T} b_t x_t \ , \ \exists \ k \in T / a_k \neq b_k$$

Sean:

$$U = \{x_t \in S / a_t \neq o\} \ , \ V = \{x_t \in S / b_t \neq o\}$$

U, V son sub-familias finitas de S, también $W = U \cup V$; $x \in L(W)$ y x no depende lin-A de W de un modo único, luego W sería familia ligada, contradicción.

(iii) $S = (x_t)_{t \in T}$ es familia libre de E $\iff$

$\iff$ l, homomorfismo determinado por S, es un monomorfismo $\iff$

$\iff$ Kerl = 0 y l es homomorfismo normal.

Ahora bien, Kerl = 0 $\iff$ toda relación de la forma $\sum_{t \in T} a_t x_t = o = \sum_{t \in T} o x_t$ implica $a_t = o \ \forall \ t \in T \iff o \in E$ depende lin-A de S de un modo único.

(iv) Dada $S = (x_t)_{t \in T}$, familia de E, si fuera $x_t = \sum_{\substack{p \in T \\ p \neq t}} a_p x_p$ , entonces $x_t$ no depende lin.-A de S de un modo único y S sería familia ligada de E, contra lo supuesto. La recíproca no es verdadera porque del hecho de que todo elemento de S dependa lin.-A de S de un modo único no se concluye que todo elemento de L(S) dependa lin.-A de S también de un modo único.

(v) Decir que $x \in E$ es libre es tanto como afirmar que $\forall$ $z \in L(x)$ depende lin.-A de (x) de un modo único, lo que equivale a esto otro: toda relación de la forma $z = ax = bx$ implica $a = b$.

(vi) El $o \in E$ no es elemento libre de E porque $\forall\, a,b \in A$, $a \neq b$ $ao = bo = o$ (v); un elemento no libre de E no puede pertenecer a ninguna familia libre de E (por i).

(vii) Sea A un semianillo con divisores de cero $nm = o$, $n \neq o$, $m \neq o$ $A_i$ es un A-semimódulo libre y m no es un elemento libre de $A_i$ ya que $nm=om$, $n \neq o$, (ver v).

(viii) Si E fuese libre, poseería una base B y todos los elementos de B serían libres, contra lo supuesto.

5). (ix) Sea R el semianillo de los números racionales no negativos. R es un $N_o$-semimódulo en el que cada elemento distinto de o es libre. R no es un $N_o$-semimódulo libre porque elegidos $p,q \in R$, $p \neq q$, $p = a/b$, $q = c/d$, $a,b,c,d \in N$, entonces $ac \in L(p,q)$ y $ac = bcp = adp$, es decir, $(p,q)$ es familia ligada; por otra parte $\forall\, p \in R$, $(p)$ no es base de R, ya que $L(p) \subset R$, estrictamente.

Convenimos $L(\emptyset) = 0$, $\prod_{t \in \emptyset} E_t = 0$; de aquí resulta que la sub-familia vacía de una familia libre S del A-semimódulo E es libre, ya que el homomorfismo determinado por la sub-familia vacía, $l: A_i^{(\emptyset)} = 0 \to E$ es un monomorfismo y un isomorfismo de 0 sobre $L(\emptyset) = 0$, por ello la sub-familia vacía es base del subsemimódulo 0 de E.

6). <u>Sea E un A-semimódulo libre de base</u> $B = (x_t)_{t \in T}$ <u>y sea</u> $S = (y_t)_{t \in T}$ <u>una familia de elementos del A-semimódulo F.</u>

<u>Existe un único homomorfismo</u> $f: E \to F$ <u>tal que</u> $f(\sum_{t \in T} a_t x_t) = \sum_{t \in T} a_t y_t$

$$\text{Si } f \text{ es } \begin{cases}\text{epimorfismo}\\ \text{monomorfismo,}\\ \text{isomorfismo}\end{cases} \text{entonces } S \text{ es } \begin{cases}\text{sistema de generadores}\\ \text{familia libre}\\ \text{base}\end{cases} \text{de } F$$

Sean $l$, $l'$ los homomorfismos determinados por B y S. Por ser $l$ un isomorfismo y en virtud de §3,16 existe un único homomorfismo $f: E \to F$ tal que $fl = l'$ esto es, tal que $f(\sum_{t \in T} a_t x_t) = \sum_{t \in T} a_t y_t$ . Como $fl = l'$ se verifican las equivalencias: f epimorfismo (monomorfismo) $\iff$ $l'$ epimorfismo (monomorfismo).

7). <u>Sea E suma directa de la familia de A-semimódulos a la izquierda</u> $(E_l)_{l \in L}$. <u>Si</u> $S_l$ <u>es sistema de generadores (familia libre, base) de</u> $E_l$ <u>pa-</u>

ra todo $l \in L$, entonces $S = \bigcup_{l \in L} j_l(S_l)$ (siendo $j_l : E_l \to E$, inyección canónica) es sistema de generadores (familia libre, base, respectivamente) de E y recíprocamente.

Si $g_l$ es el homomorfismo determinado por $S_l$, $g_l : A_i^{(S_l)} \to E_l$, entonces $g = \bigoplus_{l \in L} g_l$ es el homomorfismo determinado por S,

$$g : \bigoplus_{l \in L} A_i^{(S_l)} = A_i^{(S)} \to \bigoplus_{l \in L} E_l = E$$

y reciprocamente, como fácilmente se puede comprobar. Se cumplen las equivalemcias:

$$\forall\, l \in L,\ g_l \begin{cases} \text{epimorfismo} \\ \text{monomorfismo} \end{cases} \iff \forall\, l \in L, \text{ la sucesión} \begin{cases} A_i^{(S_l)} \xrightarrow{g_l} E_l \to 0, & \text{cerrada} \\ 0 \to A_i^{(S_l)} \xrightarrow{g_l} E_l, & \text{exacta} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A_i^{(S)} \xrightarrow{g} E \to 0\ , & \text{cerrada} \\ 0 \to A_i^{(S)} \xrightarrow{g} E\ , & \text{exacta} \end{cases} \iff g \text{ es} \begin{cases} \text{epimorfismo} \\ \text{monomorfismo} \end{cases}$$

Como el producto directo de un número finito de A-semimódulos a la izquierda es igual a la suma directa de dichos semimódulos, la proposición anterior es válida también si E es producto directo de la familia finita $(E_l)_{l \in L}$. Otra consecuencia de la proposición 7 es que la suma directa de una familia de A-semimódulos libres es un A-semimódulo libre.

8) Sea E suma directa de la familia de subsemimódulos $(F_l)_{l \in L}$. Si $S_l$ es, para todo $l \in L$, sistema de generadores (familia libre, base) de $F_l$, entonces $S = \bigcup_{l \in L} S_l$ es sistema de generadores (familia libre, base) de E y recíprocamente.

La demostración resulta de 7,6., y de considerar que el homomorfismo determinado por S es mg, en donde $g = \bigoplus_{l \in L} g_l$ ($g_l$, homomorfismo determinado por $S_l$), $m = \sum_{l \in L} m_l$ ($m_l : E_l \to E$, inmersión), siendo m un isomorfismo.

Notemos que los enunciados recíprocos de 7. y 8. presuponen que la familia S de E sea de la forma $\bigcup_{l \in L} j_l(S_l)$, $\bigcup_{l \in L} S_l$, en donde $S_l$ ha de ser familia de elementos de $E_l$, $F_l$, respectivamente. (Obsérvese que no toda familia de elementos S de E es de esa forma).

En los semimódulos cabe definir dos tipos diferentes entre sí de familias ligadas. Sea $(x_t)_{t \in T} = S$ una familia de elementos de E y l el homomorfismo determinado por S. Decimos que S es familia n-ligada si Ker$l \neq 0$; decimos que S es familia c-ligada si l es homomorfismo reductivo (esto es, Ker$l$=0 y l es anormal).

Evidentemente toda familia ligada de E o bien es n-ligada o bien c-ligada, no pudiendo ser ambas cosas a la vez; por ello estas definiciones originan una clasificación del conjunto de todas las familias ligadas de E. Se verifican las equivalencias:

S es familia n-ligada de E <==> o $\in$ E no depende lin-A de S de un modo único.

S es familia c-ligada de <==> o $\in$ E depende lin-A de S de un modo único y existe, al menos, un elemento $x \neq o$ de L(S) que no depende lin.A de S de un modo único.

9). Sea E suma directa de la familia de A-semimódulos $(E_l)_{l \in L}$, $(L \neq \emptyset$ , $E_l \neq 0)$, $S_l$ familia de elementos de $E_l$, $S = \bigcup_{l \in L} j_l(S_l)$,

$P = \{p \in L/S_p$ es familia libre de $E_p\}$

$Q = \{q \in L/S_q$ es familia n-ligada de $E_q\}$

$R = \{r \in L/S_r$ es familia c-ligada de $E_r\}$

(i) Para que S sea familia n-ligada de E es necesario y suficiente que $Q \neq \emptyset$ .

(ii) Para que S sea familia c-ligada de E es necesario y suficiente que $R \neq \emptyset$ y que $P + R = L$.

Llamemos $g_l$ al homomorfismo determinado por $S_l$; $g = \oplus_{l\, L}\, g_l$ es el homomorfismo determinado por S.

(i) Como Kerg = $\oplus_{l \in L}$ Ker$g_l$ (§8,4 (IV)), para que Kerg $\neq 0$ es necesario y suficiente que exista un $l \in L$ tal que Ker$g_l \neq 0$, esto es, $Q \neq \emptyset$.

(ii) Para que g sea anormal es necesario y suficiente que exista, al menos, un $l \in L$ tal que $g_l$ sea anormal (§8,4 (V));para que Kerg = 0 es necesario y suficiente que Ker$g_l = 0$, $\forall\, l \in L$, de aquí se deduce el enunciado.

La proposición anterior también es válida si E es suma directa de la familia de subsemimódulos $(E_l)_{l \in L}$ y si $S = \bigcup_{l \in L} S_l$

Según se ha dicho al principio de este parágrafo, caso de que A sea un semianillo con neutros que satisfacen SA6, todo elemento s del A-semimódulo a la izquierda $A_i^{(T)}$ se puede poner de un modo único $s = \sum_{t \in T} a_t e_t$, siendo $e_t = j_t 1$; esto quiere decir que cualquiera que sea el conjunto T, $A_i^{(T)}$ es A-semimódulo libre de base $(e_t)_{t \in T}$. Si en lugar de escribir los elementos de $A_i^{(T)}$ en la forma $\sum_{t \in T} a_t e_t$, los escribimos en esta otra $\sum_{t \in T} a_t t$, llamaremos a $A_i^{(T)}$ A-semimódulo (libre, a la izquierda) de las combinaciones lineales formales de los elementos de T con coeficientes en A, o' también le llamaremos A-semimódulo (libre) a la izquierda de base T.

Definiciones

E, A-semimódulo de tipo finito <==> E posee un sistema finito de generadores'

E, A-semimódulo noetheriano <==> todo subsemimódulo de E es de tipo finito.

A, semianillo noetheriano a la izquierda <==> $A_i$ es un A-semimódulo noetheriano.

Sabemos que un semigrupo abeliano S puede ser considerado como un $N_o$-semimódulo F (§2, 12); diremos que S es de tipo finito (noetheriano) si F es $N_o$-semimódulo de tipo finito (noetheriano, respectivamente). Estas dos últimas definiciones coinciden con las habituales porque todo subsemigrupo con neutro de S' (semigrupo que resulta de adjuntar el neutro a S) es subsemimódulo de F y recíprocamente.

10). Todo A-semimódulo E es isomorfo a un semimódulo cociente de un A-semimódulo libre L por una congruencia R en L: $E \approx L/R$. Si E es de tipo finito, entonces existe un A-semimódulo libre L de base finita tal que $E \approx L/R$ y recíprocamente.

Sea S un sistema de generadores de E, $g: A_i^{(S)} \to E$ el epimorfismo determinado por S y R la congruencia asociada a g en $A_i^{(S)}$; la biyección asociada a g es un isomorfismo $A_i^{(S)}/R \to E$.

Si E es de tipo finito y S es un sistema finito de generadores de E, $A_i^{(S)}$ posee una base finita; si L es semimódulo libre de base finita B y $L \xrightarrow{c} L/R \xrightarrow{\beta} E$, c es el homomorfismo canónico, $\beta$ isomorfismo, entonces $\beta c(B)$ es sistema finito de generadores de E.

Similitud de familias de E.

En lo que sigue y mientras no se haga mención expresa de lo contrario, supondremos que nos referimos a A-semimódulos no necesariamente libres. Se entenderá por "familia" del A-semimódulo E una familia de elementos de E no vacía. Sea I el conjunto de todos los elementos del semianillo SA4-SA6 A que poseen inverso en A, I no es vacío, puesto que por lo menos $1 \in L$; I es subgrupo del semigrupo multiplicativo A. A continuación introducimos conceptos que serán útiles para enunciar ciertas proposiciones.

Dadas dos familias $X = \{x_p\}_{p \in P}$, $Y = \{y_q\}_{q \in Q}$ de E, decimos que Y es similar a X o que X,Y son similares si y sólo si $\forall\, p \in P$:

$y_{s(p)} = a_p x_p$, $a_p \in I$, $s: P \to Q$, biyección de P sobre Q. En el caso particular de que $\forall\, p \in P$, $a_p = 1$, Y es una permutación de X o se obtiene por permutación de X. A la relación entre familias de E antes definida la llamaremos de similitud, YSY, significara que X,Y son similares. Se cumple.

11) (i) La relación de similitud entre familias de E es una relación de equivalencia.

(ii) Si $f: E \to F$ es un homomorfismo de A-semimódulos, X,Y son familias similares de E, entonces f(X), f(Y) son familias similares de F. Dicho brevemente, la similitud de familias se preserva mediante los homomorfismos.

(iii) Si X es $\begin{cases}\text{sistema de generadores de E, entonces}\\ \text{familia libre}\\ \text{base}\end{cases}$

cualquier otra familia Y de E que sea similar a X es $\begin{cases}\text{sistema de generadores de E}\\ \text{familia libre}\\ \text{base}\end{cases}$

Estas proposiciones pueden comprobarse directamente.

<u>β-automorfismos del A-semimódulo libre E.</u>

Consideraremos de ahora en adelante que $X = \{x_p\}_{p \in P}$ es una base de E; cualquier otra familia $Y = \{a_{s(p)} x_{s(p)}\}_{p \in P}$, (s permutación de P, $a_{s(p)} \in I$, $\forall\, p \in P$), es similar a X, y por tanto base de E; la aplicación $x_p \to a_{s(p)} x_p$; $\forall\, p \in P$, puede ser extendida, según §10, 6, a un A-automorfismo de E; a este automorfismo de E, que queda determinado por X, s, y la aplicación:

$$\pi : P \to I$$
$$\pi \quad p \to a_{s(p)}\ , \ \forall\, p \in P$$

le llamaremos β-automorfismo de E relativo a X, y lo designaremos $\pi_X$. En general, $\beta$-automorfismo de E será un A-automorfismo de E que transforme alguna base de E en otra similar a ella. (Obsérvese que los $\beta$-automorfismos de E forman tan sólo una parte del grupo $Aut_A(E)$).

12). Sea X una base de E; para todo $\beta$-automorfismo relativo a X, $\pi_X$, y para toda base Y similar a X, se cumple:

$$\pi_X(Y)SX \quad , \quad \pi_X(Y)SY$$

(ii) Si YSX y $\pi_X$ es un $\beta$-automorfismo de E relativo a X, existe un $\beta$-automorfismo de E relativo a Y, sea $\rho_Y$, tal que $\rho_Y = \pi_X$, $\forall\, x \in E$.

(iii) El conjunto de todos los $\beta$-automorfismos de E relativos a una base fija X de E es un grupo (respecto del producto de aplicaciones), que representaremos $\beta\text{-}Aut_A(E,X)$, subgrupo de $Aut_A(E)$.

(iv) Si YSX, entonces $\beta\text{-}Aut_A(E,Y) = \beta\text{-}Aut_A(E,X)$.

Probemos 12 (i): de YSX y de 11 (ii) se deduce $\pi_X(Y)S\,\pi_X$ como $\pi_X(X)SX$ y S es relación de equivalencia, se obtiene el enunciado.

12) (ii) resulta de lo anterior, pues si YSX, entonces $\pi_X(Y)SY$; existe, por consiguiente, un $\beta$-automorfismo relativo a Y, sea $\rho_Y$, tal que $\rho_Y(Y) = \pi_X(Y)$

(iii) la composición de dos $\beta$-automorfismos de E, relativos a X, $\lambda_X$, $\pi_X$, es otro $\beta$-automorfismo relativo a X, en efecto: Sea $\lambda_X(X) = Y$, entonces YSX, por (ii) sabemos que existe un $\rho_Y \in \beta\text{-}Aut_A(E,Y)$ tal que $\rho_Y = \pi_X$; así pues, $\pi_X \ \lambda_X(X) = \rho_Y \ \lambda_X(X) = \rho_Y(Y) = Z$, como ZSYSX, existe un $\beta$-automorfismo de E relativo a X, $\omega_X$, tal que $\omega_X(X) = Z$, es decir: $\omega_X = \pi_X \ \lambda_X$.

Razonando de un modo análogo se muestra que el automorfismo inverso de un $\beta$-automorfismo de E relativo a X es, a su vez, un $\beta$-automorfismo relativo a X, por tanto, $\beta\text{-}Aut_A(E,X)$ es un grupo. 12) (iv) es consecuencia de (ii).

C-automorfismos del A-semimódulo libre E.

Sea P el centro del semigrupo multiplicativo de A; $C = P \cap I$ es subgrupo abeliano de I, $(1 \in C)$; si $a \in C$, la aplicación $\pi_a : x \to ax$, $\forall\, x \in E$, transforma una base cualquiera de E en otra similar a ella; es, por consiguiente, un automorfismo de E, al que denominamos C-automorfismo de E. El conjunto $C\text{-}Aut_A(E)$ de todos los C-automorfismos de E es un grupo conmutativo, respecto al producto de aplicaciones, contenido en cada uno de los grupos $\beta\text{-}Aut_A(E,X)$, donde X recorre el conjunto B de todas las bases de E; es decir,

$C\text{-}Aut_A(E) \subseteq \bigcap_{X \in B} \beta\text{-}Aut_A(E,X)$.

Se verifica:

$$\pi_a \, , \, \pi_b \in C\text{-}Aut_A(E) \implies \pi_a \, \pi_b = \pi_{ab} \in C\text{-}Aut_A(E)$$

$$\pi_a \in A\text{-}Aut_A(E) \implies \pi_a^{-1} = \pi_{a^{-1}} \in C\text{-}Aut_A(E)$$

La primera de estas igualdades muestra que $h : C \to C\text{-}Aut_A(E)$, $a \to \pi_a$ es un epimorfismo de grupos; como $\pi_a = 1_E$ exige que $ax = x$ también para $x$ elemento libre de E, esto implica que $a = 1$, es decir $Kerh = 1$; o sea, h es isomorfismo de grupos, $C \approx C\text{-}Aut_A(E)$.

Diremos que un semianillo SA4-SA6 A es "sin opuestos" cuando ningún elemento de A, salvo el cero, posea opuesto en A.

13). Todas las bases de cualquier A-semimódulo libre E donde A es un semianillo sin opuestos y sin verdaderos divisores de cero son similares entre sí. En tal caso, $Aut_A(E) = \beta\text{-}Aut_A(E,X)$, cualquiera que sea la base X de E.

Demostración de 13). Sean $X = \{x_t\}_{t \in T}$ , $Y = \{y_l\}_{l \in L}$ dos bases de E y sean: $y_l = \sum_{t \in T} a_{lt} x_t$ (1) ; $x_t = \sum_{l \in L} b_{tl} y_l$ (2), las fórmulas del cambio de base. Se ha de cumplir:

$$\sum_{t \in T} a_{lt} \, b_{ts} = \delta_{ls} \, , \, \forall \, l,s \in L \qquad (3)$$

$$\sum_{l \in L} b_{ql} \, a_{lr} = \delta_{qr} \, , \, \forall \, q,r \in T \qquad (4)$$

Como A es semianillo sin opuestos, de (3) y (4) resulta respectivamente:

$$\forall \, l,s \in L, \, l \neq s \, , \, a_{lt} \, b_{ts} = o \, , \, \forall \, t \in T \qquad (5)$$

$$\forall \, q,r \in T, \, q \neq r \, , \, b_{ql} \, a_{lr} = o \, , \, \forall \, l \in L \qquad (6)$$

A carece de verdaderos divisores de cero; (5) y (6) implican, por consiguiente:

$$\forall\, l,s \in L,\ l \neq s,\ a_{lt} = o \vee b_{ts} = o\ ,\ \forall\, t \in T \tag{7}$$

$$\forall\, q,r \in T,\ q \neq r,\ b_{ql} = o \vee a_{lr} = o\ ,\ \forall\, l \in L \tag{8}$$

Construyamos una correspondencia f de L en T del siguiente modo, $l \in L$, $fl = \{t \in T / a_{lt} \neq o$ en la fórmula (1)$\}$ ; y otra correspondencia g de T en L, $t \in T$, $gt = \{l \in L / b_{tl} \neq o$ en la fórmula (2)$\}$ .

fl no es vacío, puesto que si lo fuera, $a_{lt} = o$, $\forall\, t \in T$, lo que significaría $y_l = o$, contra el supuesto de que Y es base de E.

Supongamos ahora que existe un $l \in L$, al que mediante f le corresponden dos elementos $t' \neq t''$ de T. De (7) se obtiene:

$$b_{t's} = o,\ \forall\, s \in L - \{l\} \tag{9}$$

de (8) se deduce:

$$b_{q'l} = o,\ \forall\, q' \in T - \{t''\} \tag{10}$$

como $t' \in T - \{t''\}$ , de (9) y (10) resulta $b_{t'l} = o$, $\forall\, l \in L$, y por consiguiente $x_{t'} = o$, contradicción con la hipótesis de que X es una base de E. Queda así probado que f es una aplicación de L en T; análogamente se muestra que g es una aplicación de T en L. En virtud de ello, se pueden escribir las fórmulas (1) y (2) de este modo:

$$y_l = a_{l,fl}\, x_{fl}\ ,\ \forall\, l \in L \tag{11}$$

$$x_t = b_{t,gt}\, y_{gt}\ ,\ \forall\, t \in T \tag{12}$$

f es aplicación suprayectiva; en efecto, si existiera un $q \in T$, $q \notin \mathrm{Im} f$, de (11) se deduciría que $\{x_{fl}\}_{l \in L}$ sería sistema de generadores de E, ya que Y es base de E; por tanto $x_q = \sum_{l \in L} m_l x_{fl}$, contradicción con el supuesto X base de E, análogamente se comprueba que g es aplicación suprayectiva.

De (11) y (12) se sigue:

$$y_l = a_{l,fl}\, b_{fl,gfl}\, y_{gfl}\ ,\ \forall\, l \in L$$

es decir, $gfl = l$, $\forall\, l \in L$, $a_{l,fl}b_{fl,l} = 1$; análogamente $fgt = t$, $\forall\, t \in T$, esto es $f$, $g$ son biyecciones, la una recíproca de la otra, todos los coeficientes de las fórmulas (11) y (12) pertenecen a $I$, por tanto, $Y$ es similar a $X$, c.q.d. Cualquier automorfismo $h$ de $E$ transforma una base $X$ en otra $Y$, por lo acabado de demostrar, sabemos que $Y$ es similar a $X$, es decir: $h \in \beta\text{-}Aut_A(E,X)$, o sea $Aut_A(E) = \beta\text{-}Aut_A(E,X)$, cualquiera que sea la base $X$ de $E$.

Consecuencia inmediata de la proposición 13) es:

Si $E$ es un $A$-semimódulo libre y $A$ semianillo sin opuestos, sin elementos inversibles (excepto el 1) y sin divisores de cero, entonces solo existe una base $X$ en $E$, salvo aquellas otras que se obtengan por permutación de los elementos de $X$, y los únicos automorfismos posibles de $E$ son los que transformen la base $X$ en $\pi(X)$, permutación de $X$.

En particular, todas las bases de un $Q_o^+$-semimódulo libre (o de un $R_o^+$-semimódulo libre) $E$ son similares entre sí; $Aut_A(E) = \beta\text{-}Aut_A(E,X)$. Un $N_o$-semimódulo libre, esto es, un semigrupo abeliano libre posee una única base, salvo permutaciones. $Q_o^+$ ($R_o^+$) designa al semianillo de los racionales (reales) no negativos.

## § 11. ANULADORES

Trataremos siempre, y mientras no se haga expresa mención de lo contrario, de semianillos que cumplen SA4-SA6.

Diremos que un subconjunto no vacio I del semianillo A es un ideal a la izquierda (a la derecha, bilátero) cerrado de A si 1. I es subsemigrupo (+) cerrado de A y 2 I es ideal (.) a la izquierda (derecha, bilátero) de A. Denominaremos a los ideales biláteros cerrados de A ideales distinguidos de A por ser ellos los núcleos de todos los homomorfismos posibles de semianillos que tengan a A por original.

Los ideales a la izquierda (derecha) de A pueden ser considerados como subsemimódulos de $A_i(A_d)$, los ideales a la izquierda (derecha) cerrados de A como subsemimódulos cerrados de $A_i$ $(A_d)$ y recíprocamente; si P es un ideal a la izquierda de A, entonces $\overline{P} = \{c \in A/\exists a,b \in P,\ a+c = b\}$ es el subsemimódulo cerrado de P en $A_i$, y, por consiguiente, el mínimo ideal a la izquierda cerrado de A que contiene a P; por tanto, la aplicación $P \to \overline{P}$ es también una cerradura en el retículo de los ideales a la izquierda de A. Consideraciones análogas son válidas también para los ideales a la derecha y los biláteros de A.

Se entenderá por anulador de P, parte no vacía del A-semimódulo E, el conjunto $An(P) = \{a \in A\ /ax = o,\ \forall\ x \in P\}$ . Se cumple:

1). (i) Si P es una parte no vacía de E, A-semimódulo a la izquierda (derecha), An(P) es un ideal a la izquierda (derecha) cerrado de A. Si M es subsemimódulo de E, An(M) es ideal distinguido de A.

(ii) Sea $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia de partes no vacías de E, y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de subsemimódulos de E, entonces:

$$An(\bigcup_{i \in I} P_i) = \bigcap_{i \in I} An(P_i)$$

$$An(\sum_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} An(M_i)$$

1). (i) se desprende fácilmente de las definiciones. Las igualdades expresadas en 1 (ii) resultan de las equivalencias:

$a \in An(\bigcup_{i \in I} P_i) \iff ax = o, \ \forall \ x \in \bigcup_{i \in I} P_i \iff ax = o, \ \forall \ x \in P_i,$

$\forall \ i \in I \iff a \in An(P_i), \ \forall \ i \in I \iff a \in \bigcap_{i \in I} An(P_i);$

$a \in An(\sum_{i \in I} M_i) \iff a(\sum_{i \in I} m_i) = o, \ m_i \in M_i$ suma de soporte finito $\iff$

$\iff am_i = o, \ \forall \ m_i \in M_i, \ \forall \ i \in I \iff a \in An(M_i), \ \forall \ i \in I \iff a \in \bigcap_{i \in I} An(M_i).$

Establezcamos el convenio (c): $An(\emptyset) = A$, de este modo se consigue que $An : T \rightarrow An(T)$ sea una aplicación de $\mathcal{R}(E)$, retículo de las partes del A-semimódulo a la izquierda (derecha) E en el retículo $\mathcal{H}_i(A)$ ($\mathcal{H}_d(A)$) de los ideales a la izquierda (derecha) cerrados de A. Por otra parte, la primera fórmula de 1 (ii) sigue siendo válida al aceptar el convenio (c) cualesquiera que sean las partes $P_i$ de E, vacías o no. Con lo cual, reuniendo 1 (i) y (ii) podemos afirmar

1) (iii) Admitido el convenio (c), "An" es un $\bigcup$-homomorfismo dual completo del retículo de las partes de E, A-semimódulo a la izquierda (derecha) en el retículo de los ideales a la izquierda (derecha) cerrados de A.

"An" es un $\Sigma$-homomorfismo dual completo del retículo de los subsemimódulos de E en el retículo de los ideales distinguidos de A.

De aquí se deduce, sin más, que:

1) (iv) Si P, Q son dos partes de E tales que $P \subseteq Q$, entonces:

$$An(P) \supseteq AN(Q)$$

1) (v)

$$An(\bigcap_{i \in I} P_i) \supseteq \sum_{i \in I} An(P_i)$$

siendo $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia de partes cualesquiera, vacías o no, de E.

Otras propiedades interesantes:

(vi) Para que el anulador de $\{x\}$, $x \in E$, sea el ideal nulo de A es necesario y suficiente que x sea elemento libre de E o que $\{x\}$ sea familia c-ligada (definición §10,8) de E.

De (vi) y (iv) resulta

1) (vii) El anulador de cualquier A-semimódulo E que contenga un elemento libre o un elemento que forme una familia c-ligada de E es el ideal nulo de A.

(viii) $An(T) = A \iff T = 0 \vee T = \emptyset$

Sea E un A-semimódulo a la izquierda, C el centro de A, es decir, $C = \{a \in A \ / \ ab = ba, \ \forall\, b \in A\}$, $End_{N_o}(E)$ el conjunto de todos los endomorfismos del semigrupo aditivo abeliano E, $End_A(E)$ el conjunto de todos los A-endomorfismos del semimódulo E, C es un semianillo conmutativo con neutros que satisface SA6 subsemianillo de A; $End_{N_o}(E)$, $End_A(E)$ son también respecto de la adición de homomorfismos y composición de aplicaciones, semianillos que cumplen SA4-SA6, siendo el segundo subsemianillo del primero.

Nótese que la aplicación $a \in A$, $h_a : x \to ax$, $\forall\, x \in E$, es un endomorfismo del semigrupo aditivo abeliano E y que si $a \in C$, entonces $h_a$ es A-endomorfismo del A-semimódulo E.

2) La aplicación de A en $End_{N_o}(E)$, $\pi : a \to h_a$ es un homomorfismo fuerte de semianillos que verifican SA4-SA6, el cual restringido a C es un homomorfismo fuerte de C en $End_A(E)$. $Ker\ \pi = An(E)$.

El enunciado 2 resulta de lo anteriormente expuesto y de las siguientes igualdades:

$$\pi(a+b) = h_{a+b} = h_a + h_b = \pi(a) + \pi(b)$$

$$\pi(ab) = h_{ab} = h_a h_b = \pi(a)\ \pi(b) ; \pi(o) = h_o = o_E$$

$$\pi(1) = h_1 = 1_E$$

$$Ker\ \pi = \{a \in A \ / \ h_a = o_E\} = \{a \in A \ / \ ax = o, \ \forall\, x \in E\} = An(E)$$

<u>Definiciones</u>

E, A-semimódulo <u>fiel</u> $\iff An(E) = \{o\}$, ideal nulo de A.

E, A-semimódulo monógeno $\iff$ E admite un sistema de generadores que consta de un solo elemento, al que llamaremos <u>generador</u> de E. Se verifica

3) (i) Si A es semianillo conmutativo, E es A-semimódulo monógeno, siendo "g" generador de E, entonces:

$$An(\{g\}) = An(E)$$

(ii) Todo semimódulo cociente de un A-semimódulo monógeno, es monógeno.

(iii) Si E es un A-semimódulo a la izquierda (derecha) monógeno, entonces:

$$E \approx A_i/R \ (\approx A_d/R)$$

siendo R una congruencia en $A_i$ ($A_d$).

Cualquier subsemimódulo M de E es isomorfo a un A-semimódulo cociente b'/R, siendo b' un ideal a la izquierda (derecha) de A. En el caso de que M sea subsemimódulo cerrado de E, b' es ideal a la izquierda (derecha) cerrado de A.

(iv) Si E es un A-semimódulo a la izquierda (derecha) monógeno que posee un generador "g" tal que el homomorfismo "s" determinado por "g" es normal, entonces:

$$E \approx A_i/c' \quad (\approx A_d/c') \ , \ c' = An(\{g\}),$$

siendo c' un ideal a la izquierda (derecha) cerrado de A.

En tal caso, cualquier subsemimódulo (cerrado) M de E es isomorfo a un A-semimódulo cociente b'/c', siendo b' ideal a la izquierda (derecha) (cerrado) de A que contiene a c'.

Probemos 3 (i): si A no es conmutativo y g,r son dos generadores diferentes del A-semimódulo monógeno E, en general, $An(\{g\}) \neq An(\{r\})$; pero si A es conmutativo, entonces:

$$a \in An(\{g\}) \Longrightarrow ag = o \Longrightarrow \forall\, b \in A,\ b(ag) = a(bg) = o \Longrightarrow a \in An(E);$$

por, otra parte, en virtud de 1 (iv) $An(E) \subseteq An(\{g\})$, de ahí la igualdad.

Mostremos 3 (ii), sea "g" generador del A-semimódulo monógeno E, C una congruencia cualquiera en E y sea $c : E \to E/C$ el homomorfismo canónico, evidentemente c(g) es generador de E/C, y por tanto, E/C es A-semimódulo monógeno. En particular, como $A_i(A_d)$ es A-semimódulo monógeno libre de base $\{1\}$, cualquier semimódulo cociente de $A_i$ $(A_d)$ es monógeno.

(iii): Sea "g" generador del A-semimódulo a la izquierda monógeno E, entonces el A-homomorfismo determinado por $\{g\}$ , $1: A_i \to E$, es, según 2 un epimorfismo, de donde, $E \approx A_i/R$, siendo R la congruencia asociada en $A_i$ por 1; además, la clase cero de la congruencia R es igual al anulador de $\{g\}$, $R_o = An(\{g\})$. Si M es subsemimódulo de E, entonces $1^{-1}(M) = b'$ es, según §4, 2. (ii), subsemimódulo de $A_i$ que contiene a $R_o$, esto es, es ideal a la izquierda de A; evidentemente $b'/R \approx M$. En el caso de que M fuese subsemimódulo cerrado de E, $1^{-1}(M) = b'$ sería (§4, 2) (iv) subsemimódulo cerrado de $A_i$, esto es, ideal a la izquierda cerrado de A.

Si el homomorfismo "1" determinado por $\{g\}$, "g" generador de E, es <u>normal</u>, entonces $E \approx A_i/c'$, en donde $c' = \mathrm{Ker}1 = An(\{g\})$ es subsemimódulo cerrado de $A_i$, esto es, ideal a la izquierda cerrado de A. A partir de aquí, siguiendo un proceso análogo al efectuado en (iii), se demuestra (iv).

4) Sea $S = (x_t)_{t \in T}$ familia de elementos del A-semimódulo E. Para que S sea base de E es necesario y suficiente:

1° que $L(x_t)$ sea A-semimódulo monógeno libre $\forall\, t \in T$, y

2° que $E = \bigoplus_{t \in T} L(x_t) = \bigoplus_{t \in T} Ax_t$

5) Sea E A-semimódulo suma directa de una familia infinita $(M_i)_{i \in I}$ de subsemimódulos monógenos no nulos, se cumple

(i) $\mathrm{Card}(S) \geqslant \mathrm{Card}(I)$, cualquiera que sea el sistema de generadores S de E,

(ii) si también $E = \bigoplus_{j \in J} N_j$ ($N_j$ subsemimódulo monógeno no nulo de E, $\forall\, j \in J$), entonces $\mathrm{Card}(J) = \mathrm{Card}\,(I)$.

(iii) Si un A-semimódulo libre posee bases diferentes, entonces o bien son todas finitas o bien son todas infinitas y en este último caso todas ellas son equipotentes entre sí.

Estas proposiciones 4 y 5 pueden ser demostradas sin dificultad.

<u>NOTA</u>.- Sea $r(m,n)$ la relación cuya gráfica esta formada por el solo par $(m,n)$, $m < n$, de elementos del semigrupo $N_o$, y sea $R_m^{n-m}$ la congruencia engendrada por $r(m,n)$ en $N_o$. $N_o/R_m^{n-m}$ es un semigrupo monógeno con neutro de índice m y período $(n-m)$. (Las definiciones de índice y período pueden verse en Clifford-Preston "Alg. Th. of Semigroups" §1, 6).

$R^1_m$ es para todo $m \in N_o$ , $m > o$, la congruencia de Rees cuyo homomorfismo canónico transforma todo elemento del ideal $\{n \in N_o / n \geq m\}$ en el elemento permitido $\{m\}$ de $N_o/R^1_m$ .

$R^p_m$ $(p > 1)$ es para todo $m \in N_o$, $m > o$, una congruencia reductiva (anormal) que no es de Rees, por no contener $N_o/R^p_m$ ningún elemento permitido.

$R^p_o$ es para todo $p \in N$ una congruencia "sa", puesto que $N_o/R^p_o$ es el grupo monógeno cíclico de orden p.

Consideremos la congruencia $T = R^p_o \times I$ (I, congruencia idéntica en $N_o$; > o) en $N_o \times N_o$. T es normal por serlo $R^p_o$ e I (véase §7,3 (VI); sin embargo no s congruencia "sa" en $N^2_o$ porque $N^2_o/(R^p_o \times I) = (N_o/R^p_o) \times N_o$ no es grupo.

Queda así probada la existencia en A-semimódulos de congruencias reductivas que no son de Rees y de congruencias normales que no son "sa".

## § 12. $\mathrm{Hom}_A(E,F)$

Sea T un conjunto cualquiera $\neq \emptyset$ y F un A-semimódulo a la izquierda, designe $\mathrm{Apl}(T,F) = F^T$ el conjunto de todas las aplicaciones de T en F; este conjunto coincide con $\prod_{t \in T} H_t$, $H_t = F$, $\forall\, t \in T$, el cual, dotado de las le= yes definidas en §7, (I), es un A-semimódulo a la izquierda.

Sean E,F dos A-semimódulos a la izquierda y denote $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ el conjunto de todos los homomorfismos de E en F, se cumple

1) (i) $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ es, respecto de la adición de homomorfismos, un semigrupo abeliano con neutro.

(ii) Si A es conmutativo, $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ es un A-semimódulo.

(iii) Si F es simplificable, $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ es semigrupo abeliano simplificable, subsemigrupo cerrado de Apl(E,F).

(iv) Si E es libre de base B, entonces

$$\mathrm{Hom}_A(E,F) \approx F^B$$

y podemos dotar a $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ de estructura de A-semimódulo a la izquierda siendo, además, subsemimódulo cerrado de Apl(E,F).

(v) Si E es libre de base finita B y F es libre, entonces $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ es A-semimódulo a la izquierda libre.

(vi) Si E,F son libres de base finita $B = \{u_i\}_{i \in I}$, $C = \{v_j\}_{j \in J}$ respectivamente, entonces $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ es libre de base finita $D = \{f_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}$ en donde:

$$f_{i,j}(u_k) = \delta_{ik} v_j \ , \ \forall\, k \in I$$

$$(\delta_{ik} = 1 \in A, \text{ si } i = k \ ; \ \delta_{ik} = o \in A \ , \text{ si } i \neq k)$$

(i) es de inmediata comprobación. (ii) : si A es semianillo conmutativo, podemos definir en $Hom_A(E,F)$ una ley externa sobre A de este modo:

$$LE : (af)(x) = a(f(x)) \ , \ \forall a \in A, \ \forall f \in Hom_A(E,F), \ \forall x \in E;$$

respecto a esta ley externa LE, el semigrupo abeliano con neutro $Hom_A(E,F)$ satisface los axiomas SM1 - SM5 (§2).

(iii) si F es A-semimódulo simplificable, fácilmente se comprueba que el semigrupo $Hom_A(E,F)$ es también simplificable.

Evidentemente, $Hom_A(E,F)$ forma un subsemigrupo del semigrupo aditivo abeliano Apl(E,F), cualesquiera que sean los A-semimódulos E y F; pero en el caso de que F sea semimódulo simplificable, $Hom_A(E,F)$ es subsemigrupo cerrado de Apl(E,F), en efecto, sean $f,g \in Hom_A(E,F)$, $h \in Apl(E,F)$ tales que $f+h = f+h = g$, entonces se cumple $\forall x,y \in E$ (1); $(f+h)(x+y) = fx+fy+h(x+y)=gx+gy$; (2): $fx+hx = gx$; (3): $fy+hy = gy$, sumando miembro a miembro (2) y (3), comparando con (1) y usando la ley de simplificación en F, se obtiene $h(x+y)=hx+hy$, $\forall x, y \in E$, Análogamente, $h(ax) = ahx$, $\forall a \in A$, $\forall x \in E$; de donde $h \in Hom_A(E,F)$, c.q.d.

(iv) : si E es un A-semimódulo libre de base $B = \{u_i\}_{i \in I}$, entonces existe un isomorfismo entre los semigrupos $Hom_A(E,F) \approx F^B$, como consecuencia de la proposición §10.6.Ahora bien, $F^B$ es un A-semimódulo a la izquierda cuya ley externa está definida en §7(1), y un elemento $f \in Hom_A(E,F)$ queda unívocamente determinado en cuanto se conozcan las imágenes mediante f de los elementos de B; así pues, imponiendo a $Hom_A(E,F)$ la ley externa sobre A:

LE' : si $f(u_i) = y_i \in F$, entonces $(af)(u_i) = ay_i \in F$. $Hom_A(E,F)$ es también un A-semimódulo a la izquierda.

(v) : en virtud de la anterior ley externa LE' los A-semimódulos $Hom_A(E,F) \approx F^B$ son isomorfos; por hipótesis, F es A-semimódulo libre, $F \approx A_i^{(P)}$ y B base finita de E; considerando todo esto y que la suma directa goza de la propiedad asociativa, se obtiene: $Hom_A(E,F) \approx F^B \approx (A_i^{(P)})^{(B)} \approx A_i^{(Q)}$, siendo $Q = \sum_{b \in B} (P)_b$, por tanto, $Hom_A(E,F)$ es A-semimódulo a la izquierda libre.

(vi) sea f un elemento arbitrario de $Hom_A(E,F)$; f queda unívocamente determinado en cuanto se dé $f(u_k) = y_k = \sum_{j \in J} a_{kj}v_j$, $\forall k \in I$, (§10,6). Sea $g = \sum_{ij \in I\times J} a_{ij}f_{ij} \in Hom_A(E,F)$; se verifica:

$$g(u_k) = \sum_{j \in J} a_{kj}f_{kj}(u_k) = \sum_{j \in J} a_{kj}v_j, \ \forall k \in I$$

por tanto $g = f$, y D es base de $Hom_A(E,F)$, c.q.d.

Sean E,F dos A-semimódulos a la izquierda, entonces

2) (i) $Hom_A(E,E) = End_A(E)$ es, respecto de la adición de homomorfismos y composición de aplicaciones, un semianillo que satisface SA4-SA6.

(ii) $Hom_A(E,F)$ es un $End_A(E)$-semimódulo a la derecha.

(iii) $Hom_A(E,F)$ es un $End_A(F)$-semimódulo a la izquierda.

El enunciado resulta de las fórmulas:

$$\forall\ f, f', f'' \in Hom_A(E,F)\ ,\ \forall\ e, e', e'' \in End_A(E)$$

$$(f'+f'')e = f'e + f''e\ ;\ f(e'+e'') = fe' + fe''$$

$$f(ee') = (fe)e'\ ;\ f1_E = f\ ;\ fo_E = o : E \to F$$

Análogamente se muestra (ii)

Sean E, E', F, F' cuatro A-semimódulos a la izquierda y sean $u: E' \to E$, $v: F \to F'$ dos A-homomorfismos, definimos:

$$Hom(u,v)(f) = vfu\ ,\ \forall\ f \in Hom_A(E,F)$$

3). (i) $Hom(u,v) : Hom_A(E,F) \to Hom_A(E',F')$ es un homomorfismo de $N_o$-semimódulos. Se verifica:

(ii) $Hom(u,v+v') = Hom(u,v) + Hom(u,v')$

(iii) $Hom(u+u',v) = Hom(u,v) + Hom(u',v)$

(iv) $Hom(uu',v'v) = Hom(u'v')\ Hom\ (u,v)$

Sean E, E', E'', F A-semimódulos; $u: E' \to E$, $v: E \to E''$, homomorfismos; designen $\bar{u} = Hom(u,1_F)$, $\bar{v} = Hom(v,1_F)$; consideremos las sucesiones (1) y (2):

$$(1)\ 0 \leftarrow E'' \overset{v}{\leftarrow} E \overset{u}{\leftarrow} E'$$

$$(2)\ 0 \to Hom_A(E'', F) \overset{\bar{v}}{\to} Hom_A(E,F) \overset{\bar{u}}{\to} Hom_A(E',F)$$

4) (i) Si la sucesión (1) es cerrada v es homomorfismo normal, enton-

ces, cualquiera que sea $F$, la sucesión (2) es cerrada y $\bar{v}$ es monomorfismo

4) (i): 1. $\bar{v}$ es un monomorfismo.

Sean $f,g \in \mathrm{Hom}_A(E'',F)$ tales que $\bar{v}(f) = \bar{v}(g)$, lo cual equivale a $fv(x) = gv(x)$, $\forall\, x \in E$, como $v$ es suprayectivo, podemos afirmar $f(x'')=g(x'')$ $\forall\, x'' \in E''$, es decir, $f = g$, $\bar{v}$ es monomorfismo.

2. $\mathrm{Im}\bar{v} = \mathrm{Ker}\bar{u}$

$\bar{u}\bar{v}(f) = \mathrm{Hom}(u,1_F)\ \mathrm{Hom}(v,1_F)(f) = fvu$, como $vu = o$, también $\bar{u}\bar{v} = o$, es decir, $\mathrm{Im}\bar{v} \subseteq \mathrm{Ker}\bar{u}$, cualquiera que sea $F$.

Sea $w \in \mathrm{Ker}\bar{u}$, entonces $\bar{u}(w) = wu = 0$, lo que implica $u(E') \subseteq \mathrm{Ker}w$, como $u(E') = \mathrm{Ker}v \subseteq \mathrm{Ker}w$ y $v$ ses, por hipótesis, epimorfismo <u>normal</u>, resulta $V \subseteq W$, designando $V(W)$ la congruencia asociada en $E$ por $v$ ($w$, respectivamente); en virtud del teorema del homomorfismo inducido (véase §3,16), existe un homomorfismos $t\colon E'' \to F$ tal que $w = tv = \bar{v}(t)$; por tanto $w \in \mathrm{Im}\bar{v}$, es decir, $\mathrm{Ker}\bar{u} \subseteq \mathrm{Im}\bar{v}$, con lo que se obtiene $\mathrm{Im}\bar{v} = \mathrm{Ker}\bar{u}$, c.q.d.

Obsérvese que la suposición "$v$, homomorfismo normal" es necesaria para poder concluir $V \subseteq W$, y por consiguiente, la existencia de un $t\colon E'' \to E$ tal que $w = tv$.

4) (ii) <u>Si la sucesión (2) es cerrada cualquiera que sea $F$, entonces (1) es sucesión regular.</u>

Por hipótesis, $\mathrm{Ker}\bar{v} = 0$, $\mathrm{Im}\bar{v} = \mathrm{Ker}\bar{u}$, para todo $F$.

1. $\overline{\mathrm{Imv}} = E''$.

Supongamos que $\overline{v(E)} \subset E''$, estrictamente, y elijamos $F = E''/\overline{v(E)}$, $f : E'' \to F$, el homomorfismo canónico; entonces, $f \neq o$, $\bar{v}(f) = fv = o$, por tanto, $\mathrm{Ker}\bar{v} \neq 0$, contradicción, luego $\overline{v(E)} = \overline{\mathrm{Imv}} = E''$.

2. $\overline{\mathrm{Imu}} = \mathrm{Kerv}$

Por ser $\mathrm{Im}\bar{v} = \mathrm{Ker}\bar{u}$, entonces $\bar{u}$, $\bar{v}(f) = fvu = o$, cualquiera que sea $F$, esto implica $vu = o$, es decir, $\mathrm{Imu} \subseteq \mathrm{Kerv}$ (3).

Como (2) es sucesión cerrada cualquiera que sea $F$, también lo es si elegimos $F = E/u(E')$, sea $g\colon E \to E/u(E')$ el homomorfismo canónico; se cumple $\bar{u}(g) = gu = o$, ya que $\mathrm{Imu} \subseteq \mathrm{Kerg} = \overline{u(E')}$ lo cual significa que $g \in \mathrm{Ker}\bar{u}=\mathrm{Im}\bar{v}$; por consiguiente existe un $t \in \mathrm{Hom}_A(E'',F)$ de modo que $g = \bar{v}(t) = tv$; de donde se deduce $\mathrm{Kerv} \subseteq \mathrm{Kerg} = \overline{u(E')}$ (4).

De (3) y (4) resulta $\mathrm{Imu} \subseteq \mathrm{Kerv} \subseteq \overline{\mathrm{Imu}}$, tomando cerrados en esta última expresión se obtiene $\overline{\mathrm{Imu}} \subseteq \mathrm{Kerv} \subseteq \overline{\mathrm{Imu}}$, esto es $\overline{\mathrm{Imu}} = \mathrm{Kerv}$, c.q.d.

Sean $E, E', E'', F$ A-semimódulos a la izquierda; $u: E' \to E$, $v: E \to E''$, homomorfismos, designen $\bar{u} = \mathrm{Hom}(1_F, u)$, $\bar{v} = \mathrm{Hom}(1_F, v)$ y consideremos las sucesiones (3) y (4)

$$(3)\quad 0 \to E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

$$(4)\quad 0 \to \mathrm{Hom}_A(F,E') \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}_A(F,E) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}_A(F,E'')$$

5) (i) <u>Si la sucesión (3) es cerrada y u es homomorfismo normal entonces, cualquiera que sea F, la sucesión (4) es cerrada y $\bar{u}$ es monomorfismo.</u>

1. $\bar{u}$ es monomorfismo.

Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_A(F,E')$ tales que $\bar{u}(f) = \bar{u}(g)$, es decir, tales que $uf = ug$, $u$ es, por hipótesis, monomorfismo, luego $f = g$.

2. $\mathrm{Im}\bar{u} = \mathrm{Ker}\bar{v}$.

De $\bar{v}\bar{u}(f) = vuf$, $vu = o$, se deduce $\bar{v}\bar{u} = o$, cualquiera que sea $f$, es decir, $\mathrm{Im}\bar{u} \subseteq \mathrm{Ker}\bar{v}$.

Por ser $u$ monomorfismo, es un isomorfismo de $E' \to \mathrm{Im}u$; sea $u'$ su isomorfismo recíproco: $\mathrm{Im}u \to E'$. Para todo $f \in \mathrm{Ker}\bar{v}$, se cumple $vf = o$, esto es, $\mathrm{Im}f \subseteq \mathrm{Ker}v = \mathrm{Im}u$, llamemos $u'' = u'/\mathrm{Im}f$, evidentemente $u''f : F \to E'$ es un homomorfismo tal que $u(u''f) = f$, lo cual significa que $f \in \mathrm{Im}\bar{u}$, por tanto, $\mathrm{Ker}\bar{v} \subseteq \mathrm{Im}\bar{u}$, o sea, $\mathrm{Im}\bar{u} = \mathrm{Ker}\bar{v}$, c.q.d.

5) (ii) <u>Si la sucesión (4) es cerrada cualquiera que sea F, entonces la sucesión (3) es también cerrada.</u>

1. $\mathrm{Ker}u = 0$.

En efecto, si suponemos que $\mathrm{Ker}u \neq 0$, elegimos $F = \mathrm{Ker}u$ y llamamos $i: \mathrm{Ker}u \to E'$ a la inmersión, se cumple $ui = o = \bar{u}(i)$, $i \neq o$, esto es, $\mathrm{Ker}\bar{u} \neq 0$, contradicción, luego $\mathrm{Ker}u = 0$.

2. $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}v$:

Sabemos que $\bar{v}\bar{u}(f) = vuf = o$, $\forall f \in \mathrm{Hom}(F,E')$, por hipótesis; tomando $F = E'$, $f = 1_E$, se obtiene $vu1_{E'} = o$, o sea, $vu = o$, $\mathrm{Im}u \subseteq \mathrm{Ker}v$.

Eligiendo ahora $F = \mathrm{Ker}v$, $j: \mathrm{Ker}v \to E$, inmersión, resulta $vj=o=\bar{v}(j)$, esto es, $j \in \mathrm{Ker}\bar{v} = \mathrm{Im}\bar{u}$, por tanto existe un $p \in \mathrm{Hom}(F,E')$ tal que $\bar{u}(p)=j=up$; lo cual singinica que $\forall y \in \mathrm{Ker}v, j(y) = up(y) = y$; de esta última igualdad se deduce que si $y \in \mathrm{Ker}v$ entonces $y \in \mathrm{Im}u$, esto es, $\mathrm{Ker}v \subseteq \mathrm{Im}u$, por consiguiente, Imu = Kerv.

6) (i) Sean $(E_k)_{k \in K}$, $(F_l)_{l \in L}$ dos familias de A-semimódulos a la izquierda, la correspondencia:

$$\beta : \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{k \in K} E_k , \prod_{l \in L} F_l) \to \prod_{(k,l) \in K\times L} \mathrm{Hom}_A(E_k,F_l)$$

$$\beta : \quad f \quad \to \quad (pr_l f j_k)$$

es un isomorfismo de $N_o$-semimódulos.

(ii) Si $u_k : E'_k \to E_k$ $(k \in K)$, $v_l : F_l \to F'_l$ $(l \in L)$ son dos familias de homomorfismos de A-semimódulos a la izquierda, $\beta$, $\beta'$ denotan los isomorfismos establecidos en la proposición precedente, entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{k \in K} E_k, \prod_{l \in L} F_l) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\bigoplus_{k \in K} u_k, \prod_{l \in L} v_l)"'] & \prod_{(k,l) \in K\times L} \mathrm{Hom}_A(E_k, F_l) \arrow[d, "\prod_{(k,l) \in K\times L} \mathrm{Hom}(u_k, v_l)"] \\
\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{k \in K} E'_k, \prod_{l \in L} F'_l) \arrow[r, "\beta'"] & \prod_{(k,l) \in K\times L} \mathrm{Hom}_A(E'_k, F'_l)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(i): evidentemente $\beta$ es aplicación tal que:

$$\beta(f+f') = (pr_l(f+f')j_k) = (pr_l f j_k) + (pr_l f' j_k) = \beta(f) + \beta(f')$$

por consiguiente, homomorfismo de semigrupos. $\beta$ es biyección porque dado un elemento arbitrario $(h_{kl}) \in \prod_{(k,l)\in K\times L} \mathrm{Hom}_A(E_k,F_l)$, existe para cada $k \in K$ un único homomorfismo $g_k : E_k \to \prod_{l \in L} F_l = F$ tal que $pr_l g_k = h_{kl}$ (§7,1) y dado $(g_k) \in \prod_{k \in K} \mathrm{Hom}_A(E_k,F)$, en virtud de §8,1), existe también un único $f \in \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{k \in K} E_k,F)$ tal que $f j_k = g_k$, c.q.d.

La conmutatividad del diagrama (ii) es de comprobación inmediata.

## § 13. SEMIMODULO DUAL

1) Sea E un A-semimódulo a la izquierda (derecha), $\mathrm{Hom}_A(E, A_i)$ ($\mathrm{Hom}_A(E, A_d)$)es un A-semimódulo a la derecha (izquierda).

En virtud de §12, sabemos que $\mathrm{Hom}_A(E,A_i)$ es, respecto de la adición de homomorfismos, un semigrupo abeliano con neutro, definamos en el una ley externa sobre A, del siguiente modo:

$$LE : \forall f \in \mathrm{Hom}_A(E, A_i), \forall a \in A,\ fa(x) = f(x)a\ ,\ \forall x \in E.$$

fa es un homomorfismo de E en $A_i$, ya que es aplicación que satisface:

$$fa(x+y) = (f(x+y))a = (fx + fy)a = f(x)a + f(y)a = fa(x) + fa(y)$$

$$fa(bx) = f(bx)a = (bf(x))a = b(f(x)a) = bfa(x)\ ,\ \forall b \in A$$

La ley externa LE antes definida satisface los axiomas SM1, SM2, SM3', SM4, SM5, de semimódulo a la derecha.

Definiciones

A $E' = \mathrm{Hom}_A(E,A_i)$ ($= \mathrm{Hom}_A(E,A_d)$), siendo E A-semimódulo a la izquierda (derecha), le llamamos semimódulo dual de E, y a sus elementos formas lineales sobre E. Si $x \in E$, A-semimódulo a la izquierda, $x' \in E'$, entonces designamos al elemento $x'(x)$ de A también de este modo $\langle x,x'\rangle$.

Se verifica $\forall x, y \in E, \forall x',y' \in E'$, $\forall a \in A$

1. $\langle x+y,x'\rangle = \langle x,x'\rangle + \langle y,x'\rangle$
2. $\langle x,x'+y'\rangle = \langle x,x'\rangle + \langle x,y'\rangle$
3. $\langle ax,x'\rangle = a\langle x,x'\rangle$
4. $\langle x,x'a\rangle = \langle x,x'\rangle a$

Ortogonalidad.- Dados $x \in E$, A-semimódulo a la izquierda (derecha),

$x' \in E'$, decimos que $x,x'$ son ortogonales, $x \perp x'$, si y solo si $\langle x,x'\rangle = o$ ($\langle x',x\rangle = o$).

Sea:

$$w(P) = \{x' \in E' / \ x \perp x' \ , \ \forall \ x \in P\}$$

$$w(P') = \{x \in E / \ x \perp x' \ , \ \forall \ x' \in P'\}$$

2 2) Cualquiera que sea la parte no vacía P (P') de E (E'), w(P) (w(P')) es un subsemimódulo cerrado de E' (E), al que denominamos subsemimódulo ortogonal a P (P').

2) (ii) Se cumple:

$$w\Big(\bigcup_{i \in I} P_i\Big) = \bigcap_{i \in I} w(P_i)$$

$$w\Big(\sum_{i \in I} M_i\Big) = \bigcap_{i \in I} w(M_i)$$

cualquiera que sea la familia $\{P_i\}_{i \in I}$ de partes no vacías de E (E') y la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de subsemimódulos de E (E').

2) es de comprobación inmediata; 2) (ii) se demuestra de un modo análogo a §11, 1) (ii).

Si $\emptyset$ es la parte vacía de E, $w(\emptyset)$ carece de sentido; más si admitimos $w(\emptyset) = E'$, la primera igualdad de 2) (ii) sigue siendo válida y la correspondencia $w: P \to w(P)$ es una aplicación del retículo de las partes de E en el retículo de los subsemimódulos cerrados de E'. Una vez aceptado ese convenio se puede afirmar

3) (i) $w : P \to w(P)$ es un $\cup$-homomorfismo dual completo del retículo de las partes de E (E') en el retículo de los subsemimódulos cerrados de E' (E).

También es un $\Sigma$-homomorfismo dual completo del retículo de los subsemimódulos de E (E') en el retículo de los subsemimódulos cerrados de E' (E).

(ii) Si P,Q son dos partes, vacías o nó, de E (E') tales que $P \subseteq Q$, entonces $w(P) \supseteq w(Q)$

(iii) Se cumple:

$$w(\bigcap_{i \in I} P_i) \supseteq \overline{\sum_{i \in I} w(P_i)}$$

<u>cualquiera que sea la familia</u> $\{P_i\}_{i \in I}$ <u>de partes, vacías o no, de E (E').</u>

4) (i) <u>Cualquiera que sea la parte no vacía P de E', se verifica:</u>

$$w(P) = w(L(P)) = w(\overline{L(P)})$$

Sea $P = \{p_i\}_{i \in I}$ la parte no vacía dada de E (E'), como $P \subseteq L(P) \subseteq \subseteq \overline{L(P)}$, de 3). (ii) se deduce:

$$w(P) \supseteq w(L(P)) \supseteq w(\overline{L(P)})$$

Si $x' \in w(P)$, para todo $x \in L(P)$, $x = \sum_{i \in I} a_i p_i$, $\langle x,x'\rangle = \langle \sum_{i\in I} a_i p_i, x\rangle = \sum_{i \in I} a_i \langle p_i, x'\rangle = o$, esto es, $x' \in w(L(P))$,

Es decir, $w(P) \subseteq w(L(P))$.

Sea ahora $x' \in w(L(P))$; si $t \in \overline{L(P)}$, entonces existen $x,y \in L(P)$ tales que $x+t = y$; como $\langle x+t,x'\rangle = \langle x,x'\rangle + \langle t,x'\rangle = \langle y,x'\rangle$ y además $x \perp x'$, $y \perp x'$ resulta $\langle t,x'\rangle = o$, es decir, $x' \in w(\overline{L(P)})$, esto es, $w(L(P)) \subseteq w(\overline{L(P)})$, c.q.d.

Signifique $w^2(P) = w(w(P))$, $w^3(P) = w(w^2(P))$, etc.

4) (ii) <u>Es válida la igualdad</u>

$$w^3(P) = w(P)$$

<u>cualquiera que sea la parte no vacía P de E (E')</u>

Llamemos $Q = w(P)$, $R = w(Q) = w^2(P)$, $S = w(R) = w^3(P)$. En virtud de 4 (i) sabemos que:

$$Q = w(P) = w(L(P)) = w(\overline{L(P)})$$

esto nos asegura que los elementos de $\overline{L(P)}$ son ortogonales a todos los elementos de Q; pero como $R = w(Q)$ es el conjunto de <u>todos</u> los elementos de E que son ortogonales a todos los elementos de Q, evidentemente

(iii) $R = w^2(P) \supseteq \overline{L(P)} \supseteq L(P) \supseteq P$.

Ahora bien, de $R \supseteq P$, y de 3) (ii) resulta $S=w(R) \subseteq w(P) = Q$; según (iii) : $S = w^2(Q) \supseteq Q$, de donde:

$$S = w^3(P) = Q = w(P), \text{ c.q.d.}$$

4) (iv) La aplicación $w2 : P \to w^2(P)$ es una cerradura algebraica en el retículo de las partes de E (E').

En efecto,

a) $P \subseteq w^2(P)$, se ha mostrado en 4) (iii);

b) $P \subseteq Q \implies w^2(P) \subseteq w^2(Q)$, es consecuencia de 3) (ii);

c) $w^4(P) = w^2(P)$ , es consecuencia de 4) (ii).

Evidentemente, los "cerrados" por esta cerradura $w^2$ son subsemimódulos cerrados de E, pero, en general, no se cumple la recíproca, esto es, no todo subsemimódulo cerrado de E pertenece a la imagen de $w^2$.

Homomorfismo transpuesto.

Sean E,F dos A-semimódulos a la izquierda, u un A-homomorfismo de E en F, sean E', F' los semimódulos duales de E y F, definimos homomorfismo transpuesto de $u = u' = \mathrm{Hom}(u, 1_{A_i}) : F' \to E'$.

Hasta el final del presente parágrafo se usará la siguiente notación: si E, M, f designan respectivamente un A-semimódulo, un subsemimódulo de E, un homomorfismo de semimódulos, entonces E' denotará al semimódulo dual de E, w(M) al subsemimódulo de E' ortogonal a M, f' denotará al homomorfismo transpuesto de f.

5) (i) Si $u: E \to F$ es un homomorfismo de A-semimódulos a la izquierda entonces su homomorfismo traspuesto $u' : F' \to E'$ es efectivamente un A-homomorfismo de semimódulos tal que:

$$\langle u(x), y'\rangle = \langle x, u'(y')\rangle \quad , \forall\, x \in E, \forall\, y' \in F'$$

(ii) Para todo par de homomorfismos $u,v: E \to F$ de A-semimódulos, es válido

$$(u + v)' = u' + v'$$

(iii) Dados los homomorfismos $u: E \to F$, $v: F \to G$ de A-semimódulos se cumple:

$$(vu)' = u'v'$$

(iv) Cualquiera que sea el A-semimódulo E, se verifica:

$$(1_E)' = 1_{E'}$$

Sabemos ya - § ,3) (i) que $u'$ es un homomorfismo de semigrupos; en virtud de la ley externa LE (definida en 1) de $F'$:

$$(y'a)(y) = (y'(y))a \ , \ \forall\, y' \in F' \ , \ \forall\, y \in F, \ \ \forall\, a \in A$$

por consiguiente:

$$(y'a)(u(x)) = (y'(u(x)))a \ , \ \forall\, x \in E$$

de donde resulta:

$$u'(y'a) = (y'a)u = (y'u)a = u'(y')a$$

lo que demuestra que $u'$ es un A-homomorfismo de semimódulos a la derecha. Además:

$$\langle u(x),y'\rangle = y'(u(x)) = u'(y')(x) = \langle x, u'(y')\rangle \quad , \text{ c.q.d.}$$

5) (ii) y (iii) son consecuencias de §12, 3 (iii) y (iv) respectivamente. 5) (iv) es inmediato.

6) Sea $u: E \to F$ un homomorfismo de A-semimódulos, se cumple:

$$\text{(i)} \quad w(u(M)) = (u')^{-1}(w(M))$$

cualquiera que sea el subsemimódulo M de E.

(ii) <u>En particular,</u>

$$w(\mathrm{Imu}) = \mathrm{Ker}\ (u')$$

(i): obsérvese que $w(u(M)) = \{y' \in F' / \langle u(m),y'\rangle = o,\ \forall\, m \in M\}$ y que como $\langle u(m),y'\rangle = \langle m,u'(y')\rangle$ (5) (i), esta expresión vale cero para todo $m \in M$, solo cuando $u'(y') \in w(M)$, es decir, si y solo si $y' \in (u')^{-1}(w(M))$.

(ii) se deduce de (i), ya que:

$$w(\mathrm{Imu}) = (u')^{-1}(w(E)) = (u')^{-1}(o) = \mathrm{Ker}(u')$$

7) <u>Sea</u> $u: E \to F$ <u>un isomorfismo de A-semimódulos y sea</u> $u^{-1}$ <u>el isomorfismo recíproco de u; el homomorfismo traspuesto u' de u es, entonces, un isomorfismo</u> $F' \to E'$ <u>tal que</u>:

$$\text{(i)} \quad (u')^{-1} = (u^{-1})'$$

<u>Definición</u> : Llamamos, en tal caso, a $\tilde{u} = (u')^{-1}$ <u>isomorfismo contragradiente de u</u>. Se cumple:

$$\text{(ii)} \quad \langle u(x),\ \tilde{u}(x')\rangle = \langle x,x'\rangle\ ,\ \forall\, x \in E,\ \forall\, x' \in E'$$

(iii) <u>Si</u> $u: E \to F$, $v: F \to G$ <u>son dos isomorfismos de A-semimódulos, entonces</u>:

$$(\widetilde{vu}) = \tilde{v}\ \tilde{u}$$

En efecto, por hipótesis, $u^{-1}u = 1_E$; de 5) (iii) y (iv) se deduce $(u^{-1}u)' = u'(u^{-1})' = (1_E)' = 1_{E'}$, de igual modo $(u^{-1})'\ u' = 1_{F'}$, por lo que $u' : F' \to E'$ es un isomorfismo y $(u^{-1})'$ su recíproco. En virtud de 5) (i):

$$\langle u(x),\ \tilde{u}(x')\rangle = \langle x,\ u'((u')^{-1}(x'))\rangle = \langle x,x'\rangle$$

Además,

$$(\widetilde{vu}) = ((vu)^{-1})' = (u^{-1}\ v^{-1})' = (v^{-1})'\ (u^{-1})' = \tilde{v}\ \tilde{u}$$

8) Dada la sucesión cerrada de A-semimódulos:

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \rightarrow 0$$

en donde v es homomorfismo normal, entonces la sucesión:

$$0 \rightarrow G' \xrightarrow{v'} F' \xrightarrow{u'} E'$$

es cerrada y v' es un monomorfismo.

(ii) Si $v: F \rightarrow G$ es un epimorfismo normal de A-semimódulos, entonces el homomorfismo traspuesto v' de v es un monomorfismo $G' \rightarrow F'$, y un isomorfismo de G' sobre w(Kerv).

(iii) Si N es un subsemimódulo (arbitrario) de E y n: $E \rightarrow E/N$ es el homomorfismo canónico o natural, entonces el homomorfismo traspuesto n' de n es un isomorfismo de (E/N)' sobre w(N).

El primer enunciado de 8 se obtiene al particularizar la proposición §12,4(i). (ii) se deduce del hecho de que la sucesión $\mathrm{Kerv} \xrightarrow{m} F \xrightarrow{v} G \rightarrow 0$ (m, inmersión) es exacta, del primer enunciado de 8 y de Im(v') = Ker(m') = = w(Im m) = w(Kerv), -véase 6 (ii).

(iii) Supongamos en primer lugar que N es subsemimódulo cerrado de E. La sucesión:

$$N \xrightarrow{m} E \xrightarrow{n} E/N \rightarrow 0 \text{ (m, inmersión)}$$

es exacta; aplicando a ella 8 (i), sabemos que la sucesión:

$$0 \rightarrow (E/N)' \xrightarrow{n'} E' \xrightarrow{m'} N'$$

es cerrada y que n' es un monomorfismo; por tanto, n' es un isomorfismo de (E/N)' sobre Im(n') = Ker(m') = w(Im m) = w(N)., según 6) (ii).

En el caso de que N sea subsemimódulo no cerrado de E, el enunciado (iii) sigue siendo válido, puesto que:

$$(E/N)' = (E/\overline{N})' \ , \ w(\overline{N}) = w(N) \qquad \text{-véase } 4) \ (i)$$

9) (i) Si E es suma directa de la familia de A-semimódulos a la izquierda $(E_k)_{k \in K}$, $E = \bigoplus_{k \in K} E_k$, designa $j_k : E_k \to E$ la inyección canónica, E' es el dual de E, $E'_k$ el dual de $E_k$, entonces la aplicación:

$$\beta: E' \to \prod_{k \in K} E'_k$$

$$x' \to (j'_k(x'))$$

es un isomorfismo de A-semimódulos a la derecha.

(ii) Si $u_k : F_k \to E_k$ $(k \in K)$ es una familia de homomorfismos de A-semimódulos a la izquierda, $F = \bigoplus_{k \in K} F_k$ , $E = \bigoplus_{k \in K} E_k$, E' denota al dual de E, $u'_k$ al homomorfismo traspuesto de $u_k$, etc. y $\beta_1$ , $\beta_2$ son los isomorfismo establecidos en la proposición precedente (i), entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\beta_1} & \prod_{k \in K} E'_k \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (\bigoplus_{k \in K} u_k)'} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \prod_{k \in K} u'_k} \\ F' & \xrightarrow{\beta_2} & \prod_{k \in K} F'_k \end{array}$$

es conmutativo.

(iii) Si E es un A-semimódulo a la izquierda libre de base finita $B = \{u_i\}_{i \in I}$, entonces su dual E' es A-semimódulo a la derecha libre de base finita, y una base de E' es $B' = \{u'_i\}_{i \in I}$ tal que:

$$\langle u_i \ , \ u'_j \rangle = \delta_{ij} \ , \ \forall \ (i,j) \in I \times I$$

a la que denominaremos base dual de B.

(i) y (ii) son consecuencias, respectivamente, de §12,6 (i) y (ii) (iii): sea u' un elemento arbitrario de E', $u': E \to A_i$; según afirma la proposición §10,6), u' queda unívocamente determinado en cuanto se conozca $u'(u_i) = \langle u_i, u'\rangle = a_i \in A$, $\forall\, i \in I$; ahora bien, el elemento $v' = \Sigma\, u_i' a_i$ de E' da lugar a $\langle u_i\, , v'\rangle = a_i$, $\forall\, i \in I$, por tanto, u' se puede escribir de un modo único en la forma $u' = v' = \Sigma u_i' a_i$, y B' es, por consiguiente, base de E'.

10) Si el A-semimódulo E es suma directa de la familia finita $M_k)_{k\in K}$ de subsemimódulos, $p_k : E \to M_k$, $j_k : M_k \to E$ designan el proyector y la inyección canónica correspondientes, entonces:

(i) el semimódulo dual E' de E es suma directa de subsemimódulos:

$$E' = \bigoplus_{k\in K} p_k' (M_k')$$

(ii) $\sum\limits_{k\in K} p_k'$ es un isomorfismo $\bigoplus\limits_{k\in K} M_k' \to E'$

(iii):

$$M_k' \approx p_k' (M_k') = w(\sum_{\substack{j\in K\\ j\neq k}} M_j)\ ,\ \forall\, k \in K$$

Por hipótesis, (1) $p_k j_k = 1_{M_k}$ , $p_i j_k = o\ (i \neq k)$, $\sum\limits_{k\in K} j_k p_k = 1_E$ de donde, tomando traspuestos, resulta:

$$(2)\qquad j_k' p_k' = 1_{M_k'}\ ,\ j_k'\, p_i' = o\ ;\ \sum_{k\in K} p'_k j_k' = 1_{E'}$$

Llamemos:

$$r_k = p_k'\, j_k' : E' \to E'$$

de (2) se obtiene:

$$r_k r_k = p_k' (j_k'\, p_k') j_k' = p_k'\, 1_{M_k'}\, j_k' = r_k$$

Si:

$$i \neq k \ , \ r_k r_i = p'_k \ (j'_k \ p'_i) \ j'_i = o \ , \ \sum_{k \in K} r_k = 1_{E'}$$

por tanto, $\{r_k\}_{k \in K}$ forma un sistema ortogonal de proyectores de E' tal que $\sum_{k \in K} r_k(E') = E'$ , en virtud de la proposición §9,3 (ii) E' se descompone en suma directa de $r_k(E') = p'_k \ j'_k \ (E') = p'_k \ (M'_k)$. (Obsérvese que $j'_k : E' \to M'_k$ es epimorfismo en virtud de (2)).

(iii); Según §9,6), la sucesión:

$$\sum_{\substack{j \in K \\ j \neq k}} M_j \xrightarrow{m} E \xrightarrow{p_k} M_k \to 0 \text{ (m, inmersión)}$$

es exacta para todo $k \in K$; de 8 se deduce que la sucesión:

$$0 \to M'_k \xrightarrow{p'_k} E' \xrightarrow{m'} \Big( \sum_{\substack{j \in K \\ j \neq k}} M_j \Big)' \quad \text{es cerrada}$$

y $p'_k$ es monomorfismo $\forall \ k \in K$, por tanto, $M'_k \approx p'_k \ (M'_k) = \mathrm{Ker}(m') = w(\mathrm{Im}\ m) = $
$= w\Big( \sum_{\substack{j \in K \\ j \neq k}} M_j \Big)$

(ii) es consecuencia de las fórmulas (2) y de §8,2).

## § 14. DIMORFISMOS

Cambio del semianillo.

Sea $p: A \to B$ un homomorfismo fuerte de semianillos Sa4-SA6 y sea $F_B$ un B-semimódulo, podemos considerar a $F_B$ como un A-semimódulo, que designaremos $P_x(F_B)$ ó bien $F'_A$ (caso de que este último simbolismo no entrañe confusión), del siguiente modo:

1) $F'_A$ consta de los mismos elementos que $F_B$.

2) ley interna en $F'_A$ = ley interna en $F_B$.

3) $\forall\, a \in A$, $\forall\, x \in F'_A$ : $ax(\text{en } F'_A) = p(a)x \quad (\text{en } F_B)$.

Fácilmente se comprueba que si $F_B$ es un B-semimódulo a la izquierda (derecha) entonces $F'_A$ es un A-semimódulo a la izquierda (derecha), que llamaremos asociado a "p" y a "$F_B$". Se cumplen las siguientes propiedades:

1) (i) Si $M_B$ es subsemimódulo (cerrado) de $F_B$, entonces $P_x(M_B)$ es subsemimódulo (cerrado) de $p_x(F_B)$.

(ii) $\overline{p_x(M_B)} = p_x(\overline{M_B})$, cualquiera que sea, el subsemimódulo $M_B$ de $F_B$.

Dada una relación binaria R en $F_B$, se puede definir una relación en $F'_A$, que designaremos $p_x(R)$, de este modo:

$$\forall\, x,y \in F'_A \,,\; x p_x(R)\, y \iff xRy$$

(iii) Si R es congruencia normal (anormal) en $F_B$, $p_x(R)$ es congruencia normal (anormal respectivamente) en $F'_A$.

(iv) Cualquiera que sea la congruencia R o el subsemimódulo $M_B$ de $F_B$, se verifica:

$$p_x(F_B/R) = p_x(F_B)/p_x(R)$$

$$p_x(F_B/M_B) = p_x(F_B)/p_x(M_B)$$

Denote $T(F_B)$ indistintamente el retículo $F(F_B)$, $C(F_B)$, $K(F_B)$, $N(F_B)$, véase §3,10) de los subsemimódulos, subsemimódulos cerrados, congruencias, congruencias normales de $F_B$, y designe $p_T$ la aplicación correspondiente establecida en 1 (i) ó 1 (iii), entonces:

$$\text{(v)} \quad p_T : T(F_B) \to T(F'_A) \ , \ F'_A = p_x(F_B) \ , \ T = F, C, K, N$$

es un homomorfismo inyectivo (monomorfismo) de retículos completos.

Sean $F_B$, $G_B$ dos B-semimódulos, $p$: $A \to B$ un homomorfismo fuerte de semianillos, $u_B$: $F_B \to G_B$. un B-homomorfismo; podemos considerar a $u_B$ como un A-homomorfismo de $F'_A$ en $G'_A$; así considerado, le denominamos: $u'_A = p_x(u_B)$: $F'_A \to G'_A$.

(vi) La aplicación:

$$p_x : \mathrm{Hom}_B(F_B, G_B) \to \mathrm{Hom}_A(F'_A, G'_A)$$
$$u_B \to u'_A$$

es un monomorfismo de $N_o$-semimódulos.

En general, ni las aplicaciones enunciadas en (v), ni la establecida en (vi) son suprayectivas; sin embargo,

(vii) Si $p$: $A \to B$ es epimorfismo fuerte de semianillos, entonces $p_T$, $T = F, C, K, N$, es un isomorfismo de retículos completos y $p_x$(vi) es un isomorfismo de $N_o$-semimódulos.

(viii) Si $p$: $A \to B$ es epimorfismo, todo sistema de generadores de $F_B$ es también sistema de generadores de $F'_A$.

Si $p$ es monomorfismo, toda familia libre de $F_B$ es también familia libre de $F'_A$.

(ix) Sea $p$: $A \to B$ un homomorfismo fuerte de semianillos SA4-SA6.

Si $(b_l)_{l \in L}$ es $\left\{\begin{array}{l}\text{sistema de generadores}\\ \text{familia libre}\\ \text{base}\end{array}\right.$ de B considerado como A-semimódulo

a la izquierda, y si $(y_p)_{p \in P}$ es $\left\{\begin{array}{l}\text{sistema de generadores}\\ \text{familia libre}\\ \text{base.}\end{array}\right.$ del B-semimódulo a la izquierda $F_B$, entonces:

$$(b_1 y_p)_{(1,p)\, \in\, L\times P} \text{ es } \begin{cases} \text{sistema de generadores} \\ \text{familia libre} \\ \text{base} \end{cases} \text{ de } F'_A$$

A lo largo del presente parágrafo, para evitar confusiones, usaremos este simbolismo: considerado un A-semimódulo $E_A$ sólo como semigrupo aditivo abeliano con neutro, lo denotaremos simplemente "E" en lugar de "$E_A$"; considerado un A-homomorfismo $u_A$: $E_A \to F_A$ sólo como homomorfismo fuerte de semigrupos, lo denotaremos "u" en lugar de "$u_A$".

Definiciones

Sean $E_A$ un A-semimódulo, $F_B$ un B-semimódulo, p: A $\to$ B un homomorfismo fuerte de semianillos, f: E $\to$ F un homomorfismo fuerte de semigrupos; diremos que el par (p,f) es compatible si y solo si se verifica:

(1) $\qquad f(ax) = p(a)f(x) \;,\; \forall\, a \in A,\ \forall\, x \in E$

En el caso de que el par (p,f) sea compatible, llamamos a $(p,f) = f_p : E_A \to F_B$ dimorfismo de $E_A$ en $F_B$ y denominamos a "p" primera componente, a "f" segunda componente del dimorfismo $f_p = (p,f)$.

Decir que $f_A : E_A \to F_A$ es un A-homomorfismo equivale a decir que $1_A$: A $\to$ A, f: E $\to$ F es un par compatible, esto es, que $(1_A,f)$ es un dimorfismo $E_A \to F_A$ . Así pues, los A-homomorfismo de semimódulos resultan como un caso particular de los dimorfismos, son aquellos de la forma $(1_A,f) = f_{1_A}$ , que tambien denotaremos $(1_A,f) = f_1 = f_A$, si no se presta a confusión.

2)(i) Un dimorfismo $f_p : E_A \to F_B$ puede ser considerado como un A-homomorfismo $(1_A,f) : E_A \to F'_A = p_x(F_B)$, y recíprocamente.

(ii) Dado el diagrama conmutativo de homomorfismos fuertes de semianillos SA4-SA6:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "r"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

y el dimorfismo de semimódulos $g_q : F_B \to G_C$, podemos considerar a este último como un A-homomorfismo $g_A : F'_A \to G'_A$ , en donde: $F'_A = p_x(F_B)$ , $G'_A = p_x(q_x(G_C)) = r_x(G_C)$ , $g_A = p_x(g_B)$ , $g_B : F_B \to G'_B$ ($g_B = g_q$, según 2) (i)).

Expresamos el proceso seguido anteriormente, para considerar a $g_q$ como un A-homomorfismo, mediante el siguiente esquema:

$$
\begin{tikzcd}
F_B \arrow[r, "g_q"] & G_C \arrow[d, "q_x"] \\
F_B \arrow[r, "g_B"] \arrow[d, "p_x"'] & C'_B \arrow[d, "p_x"] \\
F'_A \arrow[r, "g_A"] & G'_A
\end{tikzcd}
\quad \text{o, bien brevemente,} \quad
\begin{tikzcd}
F_B \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "p_x"'] & G_C \arrow[d, "r_x"] \\
F'_A \arrow[r, "g_A"] & G'_A
\end{tikzcd}
$$

2) (iii) Dada una sucesión de dimorfismos de semimódulos:

$$(1) \quad E^1_A \xrightarrow{(p^1,f^1)} E^2_{A^2} \xrightarrow{(p^2,f^2)} \dots\dots \rightarrow E^n_{A^n} \xrightarrow{(p^n,f^n)} E^{n+1}_{A^{n+1}}$$

formemos la sucesión de sus primeras componentes:

$$A \xrightarrow{p^1} A^2 \xrightarrow{p^2} A^3 \rightarrow \dots\dots \rightarrow A^{n-1} \xrightarrow{p^{n-1}} A^n \xrightarrow{p^n} A^{n+1}$$

y construyamos el diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
A^{n+1} & & A \arrow[ll, "q^n"'] \arrow[rr, "p^1"] \arrow[dl, "q^{n-1}"'] \arrow[dr, "q^2"] & & A^2 \arrow[d, "p^2"] \\
A^n \arrow[u, "p^n"] & \phantom{x} & & \phantom{x} & A^3 \arrow[llll, dotted, bend left]
\end{tikzcd}
$$

haciendo $q^i = p^i \dots p^2 p^1$ , $\forall\ i \in [2,n]$ . Mediante el proceso establecido en la proposición precedente, podemos considerar la sucesión de dimorfismos (1) dada:

$$
\begin{tikzcd}
(1)\ E^1_A \arrow[r, "(p^1,f^1)"] & E^2_{A^2} \arrow[r] \arrow[d, "p^1_x"'] & \dots\dots \arrow[r] & E^n_{A^n} \arrow[r, "(p^n,f^n)"] \arrow[d, "q^{n-1}_x"'] & E^{n+1}_{A^{n+1}} \arrow[d, "q^n_x"'] \\
(2)\ E^1_A \arrow[r, "f^1_A"] & E^{2\prime}_A \arrow[r] & \dots\dots \arrow[r] & E^{n\prime}_A \arrow[r, "f^n_A"] & E^{n+1\prime}_A
\end{tikzcd}
$$

como una sucesión, la (2) de A-homomorfismos. Llamaremos a esta última la

A-sucesión homóloga de la (1).

Definición

Decimos que la sucesión de dimorfismos (1):

$$(1)\qquad E^1_{A^1} \xrightarrow{(p^1,\ f^1)} E^2_{A^2} \quad \ldots\ldots \quad E^n_{A^n} \xrightarrow{(p^n,\ f^n)} E^{n+1}_{A^{n+1}}$$

es regular (normal, cerrada, exacta, respectivamente), si y solo si la sucesión de homomorfismos de $N_o$-semimódulos formada por sus segundas componentes:

$$E^1 \xrightarrow{f^1} E^2 \to \ldots\ldots \to E^n \xrightarrow{f^n} E^{n+1}$$

es regular (normal, cerrada, exacta, respectivamente).

2) (iv) Si una sucesión de dimorfismos (1) es regular (normal, cerrada, exacta, entonces la sucesión de A-homomorfismos homologa (2) (véase 2) (iii) es regular (normal, cerrada, exacta, respectivamente).

En efecto, supongamos que $E_A \xrightarrow{f_p} F_B \xrightarrow{g_q} G_C$ , $qp = r$, es regular esto es, $\overline{f(E)} = \text{Kerg}$, y formemos su sucesión homologa:

$$\begin{tikzcd} E_A \arrow[r, "f_p"] & F_B \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "p_x"'] & G_C \arrow[d, "r_x"'] \\ E_A \arrow[r, "f_A"'] & F'_A \arrow[r, "g_A"'] & G'_A \end{tikzcd}$$

Si M es subsemigrupo de $F_B$ , $p_x(M)$ es subsemigrupo de $F'_A$ y se cumple $\overline{p_x(M)} = p_x(\overline{M})$; si, además, M ese estable respecto al semianillo p(A), también lo es $\overline{M}$ y $p_x(M)$, $p_x(\overline{M})$ son estables respecto al semianillo A. Evidentemente, $p_x(f(E)) = f_A(E_A)$, $p_x(\text{Kerg}) = \text{Ker}(g_A)$. Tomemos $M = f(E)$, se verifica:

$$\overline{f_A(E_A)} = \overline{p_x(f(E))} = p_x(\overline{f(E)}) = p_x(\text{Kerg}) = \text{Ker}(g_A)$$

lo que demuestra que la sucesión homologa de la dada es también regular. De un modo similar se demuestran los restantes casos.

3). Producto de dimorfismos.

Dados los dimorfismos $f_p : E_A \to F_B$ , $g_q : F_B \to G_C$, definamos el producto $g_q f_p = (gf)_{qp} : E_A \to G_C$ (p.d.)

Como qp (gf) es un homomorfismo fuerte de semianillos SA4-SA6 (de semigrupos, respectivamente) y el par (qp,gf) es compatible, el producto de dimorfismos es un dimorfismo. El producto de dimorfismos goza de la propiedad asociativa. $I_F = (1_B, 1_F) : F_B \to F_B$ es un dimorfismo; se cumple, $f_p : E_A \to F_B$ , $I_F f_p = f_p$, $f_p I_E = f_p$, de donde, los {semimódulos sobre semianillos, dimorfismos} forman una categoría.

4) Adición de dimorfismos

Designe $Dim_p(E_A, F_B)$el conjunto de todos los dimorfismos de $E_A$ en $F_B$ que tienen su primera componente "p". Este conjunto no es vacio, puesto que, por lo menos, contiene a $o_p$. Definamos la adición:

$$f_p, g_p \in Dim_p(E_A, F_B) \ , \ f_p + g_p = (f + g)_p \quad \text{(a.d.)}$$

$(f + g)_p$ es un dimorfismo $E_A \to F_B$, ya que "f+g" es un homomorfismo de semigrupos compatible con "p".

La adición de dimorfismos (a.d) goza de las propiedades asociativa y conmutativa.

$Dim_p(E_A, F_B)$, dotado de la ley (a.d), es un $N_o$-semimódulo.

Es fácil comprobar que si $f_p, k_p : E_A \to F_B$, $g_q, h_q : F_B \to G_C$ , se cumple:

$$g_q(f_p + k_p) = g_q f_p + g_q k_p, \ (g_q + h_q)f_p = g_q f_p + h_q f_p$$

es decir, el producto de dimorfismos goza de las propiedades distributivas a izquierda y derecha, respecto de la adición de dimorfismos.

Consecuencia de lo anterior es que si p: $A \to A$ es un endomorfismo idempotente de semianillos, entonces $Dim_p(E_A, F_A)$ es, respecto a las leyes (a.d), un semianillo SA4-SA6.

5) El functor $Dim_p(E_A, F_B)$

Sea el diagrama de homomorfismos fuertes de semianillos SA4-SA6

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ s \downarrow & & \downarrow q \\ D & \xleftarrow[r]{} & C \end{array} \quad \text{conmutativo,}$$

y sean $f_p : E_A \to F_B$, $h_r : G_C \to H_D$, dimorfismos dados de antemano, definimos:

$$\mathrm{Dim}(f_p,h_r) : \mathrm{Dim}_q(F_B,G_C) \to \mathrm{Dim}_s(E_A,H_D)$$

$$\mathrm{Dim}(f_p,h_r)(g_q) = h_r g_q f_p \ , \ \forall\ g_q \in \mathrm{Dim}_q(F_B,G_C)$$

$\mathrm{Dim}(f_p,n_r)$ <u>es un homomorfismo de $N_o$-semimódulos, ya que</u>:

$$\mathrm{Dim}(f_p,h_r)(g_q+k_q) = n_r(g_q+k_q)f_p = \mathrm{Dim}(f_p,h_r)g_q + \mathrm{Dim}(f_p,h_r)k_q$$

en virtud de la distributividad(4),y $\mathrm{Dim}(f_p,h_r)(o_q) = o_s$.

Se verifican las siguientes propiedades:

Si $I_E: E_A \to E_A$ , $I_G: G_C \to G_C$ son los respectivos dimorfismo idénti entonces $\mathrm{Dim}(I_E,I_G) : \mathrm{DIM}_q(E_A,G_C) \to \mathrm{Dim}_q(E_A,G_C)$ es el homomorfismo idéntico.

(b) Bajo las correspondientes hipótesis, se cumple:

$$\mathrm{Dim}(g_q f_p,I_H) = \mathrm{Dim}(f_p,I_H)\ \mathrm{Dim}(g_q,I_H)$$

$$\mathrm{Dim}(I_E,h_r k_s) = \mathrm{Dim}(I_E,h_r)\ \mathrm{Dim}(I_E,k_s)$$

en virtud de la asociatividad del producto (3).

(c) Bajo las correspondientes hipótesis, se cumple:

$$\mathrm{Dim}(f_p+k_p,I_G) = \mathrm{Dim}(f_p,I_G) + \mathrm{Dim}(k_p,I_G)$$

$$\mathrm{Dim}(I_E,h_r+m_r) = \mathrm{Dim}(I_E,h_r) + \mathrm{Dim}(I_E,m_r)$$

en virtud de la distributividad (4).

(d) Si es conmutativo el diagrama de homomorfismos fuertes de semianillos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "t"] & B \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "u"'] \\ D & C \arrow[l, "r"] \end{tikzcd} \quad , \ qp = t, \ rq = u$$

entonces el diagrama de homomorfismos de $N_o$-semimódulos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dim}_t(E_A,G_C) \arrow[d, "\mathrm{Dim}(I_E,h_r)"'] & \mathrm{Dim}_q(F_B,G_C) \arrow[l, "\mathrm{Dim}(f_p,I_G)"'] \arrow[d, "\mathrm{Dim}(I_F,h_r)"] \\ \mathrm{Dim}_s(E_A,H_D) & \mathrm{Dim}_u(F_B,H_D) \arrow[l, "\mathrm{Dim}(f_p,IH)"] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, ya que:

$$\mathrm{Dim}(f_p,h_r)(g_q) = h_r g_q f_p = \mathrm{Dim}(I_E,h_r)(g_q f_p) =$$

$$= \mathrm{Dim}(I_E,h_r)\ \mathrm{Dim}(f_p,I_G)(g_q)\ ,\ \forall\ g_q \in \mathrm{Dim}_q(F_B,G_C)$$

en virtud de la propiedad asociativa del producto de dimorfismos(3); análogamente,

$$\mathrm{Dim}(f_p,h_r)(g_q) = \mathrm{Dim}(f_p,I_H)\ \mathrm{Dim}(I_F,h_r)(g_q)\ ,\ \forall\ g_q \in \mathrm{Dim}_q(F_B,\ G_C)$$

Como el diagrama segundo es conmutativo en el caso de que lo sea el primero, diremos que la conmutatividad de este segundo diagrama está condicionada por la conmutatividad del diagrama de las primeras componentes de los dimorfismos.

De (a),(b),(c) y (d) se deduce que:

$\mathrm{Dim}_p(E_A,F_B)$ es un functor de la categoría {semimódulos sobre anillos; dimorfismos} en la categoría {$N_o$-semimódulos; $N_o$-homomorfismos} , contravariante en $E_A$, covariante en $F_B$, y condicionado por la conmutatividad de los diagramas formados por las primeras componentes.

6) Sucesiones de dimorfismos:

(a) Sea:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "s"] & C \arrow[d, "r"] \\ D & D \arrow[l, "1_D"'] & D \arrow[l, "1_D"'] \end{tikzcd}$$

un diag. ıma conmutativo de epimorfismos de semianillos SA4-SA6; <u>si la sucesión de dimorfismos de semimódulos es exacta</u>:

$$(1) \quad E_A \xrightarrow{f_p} F_B \xrightarrow{g_q} G_C \longrightarrow 0$$

<u>entonces la sucesión de homomorfismos de</u> $N_o$-<u>semimódulos</u>:

$$(2) \quad 0 \to Dim_r(G_C,H_D) \xrightarrow{Dim(g_q,I_H)} Dim_s(F_B,H_D) \xrightarrow{Dim(f_p,I_H)} Dim_t(E_A,H_D)$$

<u>es cerrada y Dim</u>$(g_q.I_H)$ <u>es un monomorfismo, cualquiera que sea el D-semimódulo</u> $H_D$.

(b) Sea:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "p"] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "s"] & A \arrow[d, "t"] \\ B \arrow[r, "q"] & C \arrow[r, "r"] & D \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de homomorfismos f. de semianillos SA4-SA6; <u>si la sucesión de dimorfismos de semimódulos</u>

$$(3) \quad 0 \to F_B \xrightarrow{g_q} G_C \xrightarrow{h_r} H_D$$

<u>es exacta, entonces la sucesión de homomorfismos de</u> $N_o$-<u>semimódulos</u>:

$$(4) \quad 0 \to Dim_p(E_A,F_B) \xrightarrow{Dim(I_E,g_q)} Dim_s(E_A,G_C) \xrightarrow{Dim(I_E,h_r)} Dim_t(E_A,H_D)$$

<u>es cerrada y Dim</u>$(I_E,g_q)$ <u>es monomorfismo, cualquiera que sea el A-semimódulo</u> $E_A$.

Para mostrar el enunciado (a) basta tener en cuenta que si (1) es exacta, entonces su sucesión homóloga 2, (iii):

$$E_A \xrightarrow{f_A} F'_A \xrightarrow{g_A} G'_A \longrightarrow 0$$

es exacta, según 2 (iv), por ser epimorfismos las primeras componentes de los dimorfismos dados, se puede identificar:

$$\mathrm{Dim}_r(G_C,H_D) = \mathrm{Hom}_A(G'_A,H'_A), \text{ etc.-ver 2.)(i)},$$

$$\mathrm{Dim}(g_q,I_H) = \mathrm{Hom}(g_A,1_{H'_A}), \text{ etc. y 1) (viii)}$$

De §12, 4 (i), resulta el enunciado. (b) se muestra de igual modo.

7). Semimódulo dual-p de $E_A$

Sea $E_A$ un A-semimódulo a la izquierda, p: $A \to B$ un homomorfismo fuerte de semianillos SA4-SA6, y sea $B_B$ el B-semimódulo B a la izquierda. Sabemos que $\mathrm{Dim}_p(E_A,B_B)$ es, respecto de la adición de dimorfismos, un $N_o$-semimódulo, definamos:

$$(1.e)\ \forall\ f_p \in \mathrm{Dim}_p(E_A,B_B),\ \forall\ b \in B : (f_p)b = (fb)_p$$

siendo:

$$fb(x) = f(x)b\ ,\ \forall\ x \in E$$

(1.e) es una ley de composición externa de $\mathrm{Dim}_p(E_A,F_B)$ sobre B, puesto que el par (p,fb) es compatible. Se comprueba sin dificultad que:

(i) $\mathrm{Dim}_p(E_A,B_B)$ es, respecto a (a.d) y (1.e), un B-semimódulo a la derecha).

Sea $E_A$ un A-semimódulo a la izquierda y sea P una congruencia en el semianillo A, p: $A \to A/P$ el homomorfismo canónico; en virtud de 7 (i), $\mathrm{Dim}(E_A, (A/P)_{(A/P)})$ es un (A/P)-semimódulo a la derecha; por consiguiente, $\mathrm{Dl}_p(E_A) = p_x(\mathrm{Dim}_p(E_A,(A/P)_{(A/P)}))$ es un A-semimódulo a la derecha, que llamamos semimódulo dual-p de $E_A$.

Existe, evidentemente, una biyección entre las congruencias P en A y los semimódulos duales-p de $E_A$, En esta biyección a la congruencia idéntica en A, le corresponde el semimódulo dual-$1_A$ de $E_A$, esto es, el semimódulo dual "ordinario" de $E_A$, tratado ya en un parágrafo anterior.

(ii) Si $x,y \in E_A$, $x',y' \in \mathrm{Dl}_p(E_A)$, $a \in A$, y denominamos $x'(x)=\langle x,x'\rangle$ , se cumple:

1. $\langle x + y, x' \rangle = \langle x,x' \rangle + \langle y,x' \rangle$
2. $\langle x, x' + y' \rangle = \langle x,x' \rangle + \langle x,y' \rangle$
3. $\langle ax, x' \rangle = p(a) \langle x,x' \rangle$
4. $\langle x, x'a \rangle = \langle x,x' \rangle p(a)$

Nota: Dimorfismos de módulos

Dado un dimorfismo de semimódulos $f_p : E_A \to F_B$, si A y B son anillos, entonces p es un homomorfismo de anillos, $E_A$, $F_B$ son respectivamente un A-módulo y un B-módulo, y $f_p$ es un dimorfismo de módulos. Cuanto hemos obtenido es válido, por consiguiente, para los dimorfismos de módulos; en dicho caso particular, $Dim_p(E_A,F_B)$ es un Z-módulo (Z, anillo de los enteros) y el functor $Dim_p(E_A,F_B)$ pasa de la categoría {módulos sobre anillos, dimorfismos} a la categoría {grupos abelianos, homomorfismos} con las mismas propiedades que en 5). Las proposiciones relativas a sucesiones expuestas en 6). siguen siendo válidas, con la variante de que ahora (2) y (4) son sucesiones cerradas, es decir, exactas de homomorfismos de Z-módulos. Por fin, si $E_A$ es un módulo sobre el anillo A a la izquierda, entonces $Dl_p(E_A)$ es un A-módulo a la derecha, y cuanto se ha enunciado en 7) permanece válido en este caso particular.

## § 15. MULTISEMIMODULO

En este parágrafo nos limitaremos a exponer las definiciones y enunciados de que haremos uso posterior; la deducción de dichas propiedades no ofrece dificultad.

Sea $(E,+)$ un semigrupo abeliano con neutro y sean $L_A: A\times E \to E$ $L_B : B\times E \to E$ dos leyes de composición externa definidas en $(E,+)$ sobre los semianillos $A,B$, de modo que $(E,+,LA)$ es un A-semimódulo y $(E,+,L_B)$ es un B-semimódulo. Diremos que las dos estructuras, de A-semimódulo y de B-semimódulo, definidas sobre E son <u>compatibles</u>, si se cumple:

$$(\varepsilon) \quad L_A(a,L_B(b,x)) = L_B(b,L_A(a,x)) \ , \ \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ \forall\, x \in E$$

Pueden presentarse varios casos, según que $(E,+,L_A)$, $(E,+,L_B)$ sean i) semimódulos a la izquierda, ii) semimódulos a la derecha iii) uno, por ejemplo, el primero, semimódulo a la izquierda, y el otro a la derecha; en cada uno de estos casos, la condición de compatibilidad $(\varepsilon)$ toma, de acuerdo con la notación más frecuentemente empleada hasta aquí, la forma:

i) $a(bx) = b(ax)$ , $\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ \forall\, x \in E$

ii) $(xb)a = (xa)b$ , idem

iii) $a(xb) = (ax)b$ , idem

Sean $\mathcal{A} = (A_r)_{r \in R}$, $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in S}$ dos familias de semianillos que cumplen SA4-SA6; se dirá que E es un $((A_r)_{r \in R}; (B_s)_{s \in S})$ <u>multisemimódulo</u> (o, más brevemente, un $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-multisemimódulo), si E está dotado

$\forall\, r \in R$ de una estructura de $A_r$-semimódulo a la izquierda,

$\forall\, s \in S$ de una estructura de $B_s$-semimódulo a la derecha,

todas ellas con la misma ley interna, siendo estas estructuras dos a dos compatibles.

Llamaremos a E $\mathcal{A}$-multisemimódulo a la izquierda ($\mathcal{B}$-multisemimódulo a la derecha) en el caso de que la familia $\mathcal{B}$ sea vacía ($\mathcal{A} = \emptyset$, respectivamente). Denominamos a E (A;B)-bisemimódulo, (A,B)-bisemimódulo a la izquierda) en el caso de que $\mathcal{A} = (A)$, $\mathcal{B} = (B)$ ($\mathcal{A} = (A,B)$, $\mathcal{B} = \emptyset$ respectivamente).

Sean $\mathcal{A} = (A_r)_{r \in R}$, $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in S}$ dos familias de semianillos SA4-SA6, y sean E, F dos $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-multisemimódulos, se dirá que f: E $\to$ F es un $(\mathcal{A};\mathcal{B}$ homomorfismo si:

$\forall$ r $\in$ R, f es un Ar-homomorfismo de E en F,

$\forall$ s $\in$ S, f es un $B_s$-homomorfismo de E en F

Entendemos que R es una congruencia en el $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-multisemimódulo E, si R es una relación de equivalencia en E compatible con la adición y con todas las leyes externas definidas en E. De un modo evidente se pueden definir también en los multisemimódulos los conceptos de congruencia normal, anormal, reductiva, de Rees, etc., siendo para ellos válidas las proposiciones establecidas en §3. Se dirá que M es un submultisemimódulo (cerrado) de $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-multisemimódulo E si M es subsemigrupo (cerrado) de E, estable respecto de todas las leyes externas definidas en E. Si f es un $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-homomorfismo de E en F, y $\mathcal{F}$ es la congruencia asociada por f en E, entonces Kerf es submultisemimódulo cerrado de E, Imf es submultisemimódulo de F, E/Kerf, E/$\mathcal{F}$ son $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-multisemimódulos, existe un epimorfismo reducido E/Kerf $\to$ E/$\mathcal{F}$, y un isomorfismo E/$\mathcal{F} \to$ Imf de multisemimódulos. La condición necesaria y suficiente para que E/Kerf = E/$\mathcal{F}$ es que f sea $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-homomorfismo normal. El conjunto $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-Hom(E,F de todos los $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-homomorfismos de E en F, dotado de la ley "adición de homomorfismos", es un $N_o$-semimódulo.

Cuanto se ha dicho en los parágrafos dedicados a producto directo y suma directa de semimódulos permanece válido para los multisemimódulos: si $(E_i)_{i \in I}$ es una familia de $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-multisemimódulos, entonces tanto $\prod_{i \in I} E_i$ como $\bigoplus_{i \in I} E_i$ son $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-multisemimódulos, si $f_i$: $E_i \to F_i$ es una familia de $(\mathcal{A};\mathcal{B})$ -homomorfismos, entonces tanto $\prod_{i \in I} f_i$ como $\bigoplus_{i \in I} f_i$ son $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-homomorfismos, etc

Sean $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}$, familias de semianillos SA4-SA6, si E es un $(\mathcal{A},\mathcal{L};\mathcal{B},\mathcal{M})$-multisemimódulo y F es un $(\mathcal{A},\mathcal{N};\mathcal{B},\mathcal{P})$ multisemimódulo, entonces $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-Hom(E,f) posee estructura de $(\mathcal{M},\mathcal{N};\mathcal{L},\mathcal{P})$-multisemimódulo. Si f:E $\to$ F es un $(\mathcal{A},\mathcal{L};\mathcal{B},\mathcal{M})$-homomorfismo y h: G $\to$ H es un $(\mathcal{A},\mathcal{N};\mathcal{B},\mathcal{P})$-homomorfismo, entonces:

$$\mathrm{Hom}(f,h)g = hgf \ , \ \forall\, g \in (\mathcal{A};\mathcal{B})\text{-}\mathrm{Hom}(F,G)$$
$$\mathrm{Hom}(f,h) \ : (\mathcal{A};\mathcal{B})\text{-}\mathrm{Hom}(F,G) \to (\mathcal{A};\mathcal{B})\text{-}\mathrm{Hom}(E,H)$$

es un $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-homomorfismo.

Dado el $(\mathcal{C};\mathcal{D})$-multisemimódulo E, $\mathcal{C} = (C_r)_{r \in R}$,$\mathcal{D} = (D_s)_{s \in S}$ y los homomorfismos fuertes de semianillos $p_r:A_r \to C_r$, $q_s:B_s \to D_s$, $\forall\, r \in R$ $\forall\, s \in S$, las estructuras de semimódulos $p_r(E)$, $q_s$ (E) definidas sobre E, $\forall\, r \in R$, $\forall\, s \in S$, (véase §14) son también compatibles dos a dos, por lo que podemos considerar a E como un $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-multisemimódulo, $\mathcal{A} = (A_r)_{r \in R}$, $\mathcal{B} = (B_s)_{s \in S}$, que llamaremos asociado a E y a $(p_r)_{r \in R}$, $(q_s)_{s \in S}$.

Dados $p_r$, $q_s$,$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$, con el mismo significado de antes, un $(\mathcal{A};\mathcal{B})$-multisemimódulo E, un $(\mathcal{C};\mathcal{D})$-multisemimódulo F, un $N_o$-homomorfismo f: E $\to$ F, decimos que $f_{(p_r;\, q_s)}$ es un multimorfismo de E en F si y sólo si:

$$f(a_r x) = p_r(a_r)f(x) \ , \ \forall\, x \in E, \ \forall\, a_r \in A_r, \ \forall\, r \in R$$

$$f(xb_s) = f(x)q_s(b_s) \ , \ \forall\, x \in E, \ \forall\, b_s \in B_s, \ \forall\, s \in S$$

La teoría expuesta acerca de dimorfismos de semimódulos se extiende sin dificultad a multimorfismos de multisemimódulos.

Nota.

1) Cualquier semianillo A que verifique SA4-SA6, puede ser considerado como un (A,A)-bisemimódulo, ya que posee estructuras de A-semimódulo a la izquierda, $A_i$, de A-semimódulo a la derecha $A_d$, y ambas son compatibles: $\forall\, a,b,c, \in A$, $a(cb) = (ac)b$; así considerado, denotamos a A: ${}_iA_d$. Un sub-bisemimódulo (cerrado) de ${}_iA_d$ es un ideal bilátero (cerrado) de A, y recíprocamente; una congruencia de bisemimódulo en ${}_iA_d$ es, a su vez, una congruencia de semianillo en A, y recíprocamente, un homomorfismo fuerte p: A $\to$ B de semianillos SA4-SA6, es, a su vez, un multimorfismo $p_{(p;p)}: {}_iA_d \to {}_iB_d$; lo cual nos indica que el estudio de los semianillos queda reducido al de los multisemimódulos. Así pues, definidos los conceptos de congruencia (homomorfismo) normal, anormal, reductiva, de Rees, etc. de un modo apropiado en semianillos, cuanto hemos obtenido en §3 es aplicable a semianillos sin más que sustituir los términos "semimódulo", "subsemimódulos" "subsemimódulo cerrado", "semimódulo cociente", etc. por semianillo", "ideal bilátero", "ideal bilátero cerrado" (=ideal distinguido), "semianillo cociente", respectivamente.

## § 16. PRODUCTO TENSORIAL

Sean E y F semimódulos a la derecha y a la izquierda, respectivamente, sobre el semianillo A, no necesariamente conmutativo. Consideremos el $N_o$-semimódulo libre $C = N_o^{(ExF)}$ cuyos elementos son las combinaciones lineales formales de elementos de ExF con coeficientes de $N_o$ (véase §10,9). ExF designará al producto directo de los conjuntos E,F.

Definimos una relación binaria entre elementos de la base de C, de este modo:

$$P_1 : \quad (x_1 + x_2, y) r ((x_1, y) + (x_2, y)) \ , \ \forall\, x_1, x_2 \in E, \ \forall\, y \in F$$

$$P_2 : \quad (x, y_1 + y_2) r ((x, y_1) + (x, y_2)) \ , \ \forall\, x \in E, \ \forall\, y_1, y_2 \in F$$

$$P_3 : \quad (xa, y) r (x, ay) \ , \ \forall\, x \in E, \ \forall\, y \in F, \ \forall\, a \in A$$

Sea R(r) la congruencia en C engendrada por la relación "r" definida esta última mediante $P_1, P_2 P_3$. Sabemos que (ver §3,24) R(r) es la mínima congruencia en C que satisface $P_1, P_2 P_3$.

Definiciones

Se llamará producto tensorial del A-semimódulo a la derecha E por el A-semimódulo a la izquierda F, que denotaremos $E \otimes_A F$, al $N_o$-semimódulo cociente C/R(r).

Sea $c: C \to C/R(r)$ el homomorfismo canónico, llamaremos a $c((x,y))$, $x \in E$, $y \in F$, producto tensorial de x por y, escribiendo "$x \otimes y$".

1) Resultan inmediatas las propiedades siguientes:

$$\text{(i)} : (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \ , \ \forall\, x_1, x_2 \in E, \ \forall\, y \in F$$

$$\text{(ii)} : x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$\text{(iii)} : \quad xa \otimes y = x \otimes ay$$

(iv) : $o \otimes y = o \otimes o = o \in C/R(r)$ , $\forall y \in F$

(v) : $nx \otimes y = n(x\, y) = x \otimes ny$, $\forall n \in N_o$

Mostremos únicamente (iv), de

$$o \otimes y = xo \otimes y = x \otimes oy = x \otimes o \;, \forall y \in F, \forall x \in E$$

se deduce:

$$o \otimes y + x \otimes z = x \otimes o + x \otimes z = x \otimes z \;, \forall x \in E, \forall z \in F$$

como $x \quad z$, $\forall x \in E$, $\forall z \in F$, es sistema de generadores de $E \otimes_A F$, la última igualdad indica que $o \otimes y$ es el elemento neutro de $C/R(r) = E \otimes_A F$, c.q.d.

2) Aplicaciones biaditivas; aplicaciones tensas.

Sean E,F A-semimódulos a la derecha y a la izquierda, respectivamente, sea S un $N_o$-semimódulo, decimos que la aplicación b: ExF → S es biaditiva o $N_o$-bilineal si y sólo si b satisface:

$B_1$ : $b(x_1 + x_2,y) = b(x_1,y) + b(x_2,y)$ , $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall y \in F$

$B_2$ : $b(x,y_1 + y_2) = b(x,y_1) + b(x,y_2)$ , $\forall x \in E$ , $\forall y_1,y_2 \in F$

Decimos que la aplicacíón t: ExF → S es tensa si y solo si t cumple $T_1$ y $T_2$:

$T_1$ : t es biaditiva,

$T_2$ : $t(xa,y) = t(x,ay)$ , $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $\forall a \in A$

Sabemos ya que el conjunto de todas las aplicaciones de ExF en S, dotado de la ley "adición de aplicaciones", es un $N_o$-semimódulo, al que hemos llamado Apl(ExF,S) = $S^{ExF}$. Sean Apl-b(ExF,S), Apl-t(ExF,S) los conjuntos de todas las aplicaciones biaditivas, tensas, respectivamente, de ExF en S; se verifica:

2) (i) Apl-b(ExF,S) es subsemimódulo de Apl(ExF,S), y a su vez Apl-t(ExF,S) es subsemimódulo de Apl-b(ExF,S).

En efecto, si $b_1,b_2 \in$ Apl-b(ExF,S) ($t_1,t_2 \in$ Apl-t(ExF,S)), entonces $b_1 + b_2$ ($t_1 + t_2$) satisface también las condiciones $B_1,B_2$ ($T_1,T_2$), esto es, $b_1 + b_2 \in$ Apl-b(ExF,S) ($t_1+t_2 \in$ Apl-t(ExF,S)).

3). Un problema de aplicación universal

Definición: Llamaremos p a la aplicación definida de este modo:

$$\begin{aligned} p : ExF &\to E \otimes_A F \\ (x,y) &\to x \otimes y \ , \ \forall x \in E, \ \forall y \in F \end{aligned}$$

la cual, evidentemente, pertenece a Apl-t(ExF,E $\otimes_A$F), aplicación tensa canónica de ExF en E $\otimes_A$F.

Mostramos a continuación que el par (E $\otimes_A$F, p) es solución de un problema de aplicación universal.

Designe $C(\theta,M)$ la categoría de los {$N_o$-semimódulos, homomorfismos,} se verifica:

3) (i)

$$\forall S \in \theta, \forall s \in Hom(E \otimes_A F,S) \ , \ \exists' f \in Apl\text{-}t(ExF,S) \ / \ f = sp$$

recíprocamente (ii):

$$\forall S \in \theta, \forall f \in Apl\text{-}t(ExF,S) \ , \ \exists' s \in Hom(E \otimes_A F,S) \ / \ f = sp$$

En la proposición anteriormente enunciada, el símbolo $\exists'$ significa "existe un único ..."

Desmostración, (i): el producto de dos aplicaciones p,s es una única aplicación f = sp, la cual ExF $\to$ S, cumple $T_1,T_2$:

$$sp(x_1 + x_2,y) = s(p(x_1,y) + p(x_2,y)) = sp(x_1,y) + sp(X_2,y), \text{ etc.}$$

(ii): Por ser ExF base de $C = N_o^{(ExF)}$, podemos extender la aplicación tensa dada $f: ExF \to S$ a un único homomorfismo $g: C \to S$ tal que $g/ExF = f$ (esto es, tal que $f = gm$, siendo $m$ la inmersión de $ExF$ en $C$) (véase, §10,1) y 6). Sea $G$ la congruencia asociada a $g$ en $C$; $G$ satisface $P_1, P_2, P_3$, de donde, $R(r) \subseteq G$ En virtud del teorema del homomorfismo inducido (§3, 16), existe un único homomorfismo $s: E \otimes_A F \to S$, tal que $g = sc$; por consiguiente, $g/ExF = sc/ExF$, esto es, $f = sp$, c.q.d.

Consecuencias inmediatas de las proposiciones 3 (i) y (ii) son las siguientes:

3) (iii) La aplicación

$$\begin{aligned} \beta: \mathrm{Hom}_{N_o}(E \otimes_A F, S) &\to \mathrm{Apl\text{-}t}(ExF, S) \\ s &\to f \end{aligned}$$

de modo que $f = sp$, es, cualquiera que sea el $N_o$-semimódulo $S$, un isomorfismo de $N_o$-semimódulos.



En particular,

(iv) La aplicación

$$\beta: \mathrm{End}_{N_o}(E \otimes_A F) \to \mathrm{Apl\text{-}t}(ExF, E \otimes_A F)$$

establecida de igual manera que en 3 (iii), es un isomorfismo de $N_o$-semimódulos.

Podemos establecer entre los elementos de $Apl(E,F)$, siendo $E,F$ dos conjuntos cualesquiera, una relación de orden (parcial) de este modo: Sean $p,q \in Apl(E,F)$ y sean $P,Q$ las relaciones de equivalencia asociadas a $p,q$ en $E$

$$\text{(or)} \quad p \leqslant q \iff P \subseteq Q$$

En virtud de (iv), se cumple:

(v) La aplicación tensa canónica $p: ExF \to E \otimes_A F$ es el elemento mínimo, respecto al orden (Or), en $\mathrm{Apl\text{-}t}(ExF, E \otimes_A F)$.

Otra consecuencia interesante de 3 (i) y (ii) es ésta:

3) (vi) Designe $p: ExF \to E \oplus_A F$ la aplicación tensa canónica; Si se cumple:

1. H es un $N_o$-semimódulo
2. h $\in$ Apl-t(ExF,H)
3. H = L(h(ExF))
4. Para todo $N_o$-semimódulo S y toda f $\in$ Apl-t(ExF,S) existe un s $\in$ $Hom_{N_o}$ (H,S) tal que f = sh, entonces, existe un isomorfismo único h' de $E \otimes_A F$ sobre H que cumple h = h'p.

Demostración de 3) (vi):

$$\begin{tikzcd}
E\times F \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "h"] \arrow[ddr, "f"'] & & E \otimes_A F \arrow[dl, "h'"'] \arrow[ddl, "f'"] \\
& H & \\
& S &
\end{tikzcd}$$

En virtud de 3) (ii) $\exists'$ h' $\in$ Hom(E $\oplus_A$F,H) tal que h = h'p ; $\exists'$ f' $\in$ Hom(E $\oplus_A$F,S) tal que f = f'p, $\forall$ f $\in$ Apl-t(ExF,S); según la hipótesis 4: f = sh, de donde, f = sh'p = f'p; y en virtud de la unicidad expresada en 3 (ii), se obtiene: sh' = f' (1).

Si $\mathcal{H}'$,$\mathcal{F}'$designan las congruencias asociadas a h', f' en E $\oplus_A$F, de la igualdad (1) se deduce: $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{F}'$ (2).

Al recorrer f todo Apl-t(ExF,S), recorre f' todo Hom(E $\oplus_A$ F,S) (según, 3(iii)),siendo S un $N_o$-semimódulo arbitrario, por tanto $\mathcal{F}'$ recorre todas las congruencias en E $\oplus_A$F; según (2), $\mathcal{H}'$ es la mínima congruencia en E $\oplus_A$F, esto es, es la congruencia idéntica, por consiguiente h' es un monomorfismo. De la hipótesis 3., juntamente con la ya obtenida igualdad h = h'p, se desprende que h' es un epimorfismo, c.q.d.

4). Conmutatividad del producto tensorial.

Si A es un semianillo SA4-SA6 y $A_o$ consta de los mismos elementos y la misma ley aditiva que A y está dotado de la ley multiplicativa "ab en $A_o$ = en A", entonces $A_o$ es también un semianillo SA4-SA6, que llamamos "opuesto" de A. Análogamente si E es un A-semimódulo a la derecha y $E_o$ consta de los mismos elementos y la misma ley interna que E y está dotado de la ley externa a $\in$ $A_o$, x $\in$ $E_o$, "ax en $E_o$ = xa en E", entonces $E_o$ es un $A_o$-semimódulo a la izquierda, que llamamos "opuesto" del E.

Sean E(F) un A-semimódulo a la derecha (a la izquierda), $A_o$ el semianillo opuesto de A, $E_o$, ($F_o$) el semimódulo opuesto de E (F),.

4) Existe un único isomorfismo

$$q : E \otimes_A F \to F_o \otimes_{A_o} E_o$$

tal que: $x \otimes y \to y \otimes x \ , \ \forall x \in E, \forall y \in F$

En efecto, basta comprobar que se cumplen las cuatro hipótesis de 3). (vi).

5) Producto tensorial de homomorfismos

Sean $e: E \to E'$, $f: F \to F'$ homomorfismos de A-semimódulos a la derecha y a la izquierda, respectivamente, La aplicación:

$$\begin{aligned} t : E\times F &\to E' \otimes_A F' \\ (x,y) &\to ex \otimes fy, \ \forall x \in E, \ \forall y \in F \end{aligned}$$

es tensa. En virtud de 3) (ii) existe un único homomorfismo $h: E \otimes_A F \to E' \otimes_A F'$ tal que $t = hp$, es decir, tal que:

$$h(x \otimes y) = ex \otimes fy \ , \ \forall x \in E \ , \ \forall y \in F$$

Definición

Llamamos al homomorfismo h producto tensorial de los homomorfismos e,f, y escribimos $h = e \otimes f$, de modo que:

$$h(x \otimes y) = (e \otimes f)(x \otimes y) = ex \otimes fy$$

5) (i) La aplicación:

$$\begin{aligned} : \mathrm{Hom}_A(E,E')\times\mathrm{Hom}_A(F,F') &\to \mathrm{Hom}_{N_o}(E \otimes_A F, E' \otimes_A F') \\ (e,f) &\to e \otimes f \end{aligned}$$

es biaditiva, ya que:

$$((e_1 + e_2) \otimes f)(x \otimes y) = (e_1 + e_2)(x) \otimes f(y) = (e_1x + e_2x) \otimes fy =$$

$$= e_1x \otimes fy + e_2x \otimes fy = (e_1 \otimes f + e_2 \otimes f)(x \otimes y)$$

análogamente:

$$e \otimes (f_1 + f_2) = e \otimes f_1 + e \otimes f_2$$

Haciendo, pues, de nuevo uso de la proposición 3 (ii), resulta:

5) (ii) Existe un homomorfismo:

$$\gamma : \mathrm{Hom}_A(E,E') \otimes_{N_o} \mathrm{Hom}_A(F,F') \to \mathrm{Hom}_{N_o}(E \otimes_A F, E' \otimes_A F')$$

tal que, $\beta = \gamma p'$ ($p'$ aplicación tensa canónica correspondiente).

Mediante el homomorfismo $\gamma$ a cada elemento $e \otimes f$ del producto tensorial de los $N_o$-semimódulos $\mathrm{Hom}_A(E,E')$, $\mathrm{Hom}_A(F,F')$, le corresponde el homomorfismo producto $h = e \otimes f : E \otimes_A F \to E' \otimes_A F'$ de los homomorfismos $e,f$.

Sean:

$$E \xrightarrow{e} E' \xrightarrow{e'} E'' \;,\; F \xrightarrow{f} F' \xrightarrow{f'} F''$$

dos sucesiones de homomorfismos de A-semimódulos, a la derecha y a la izquierda, respectivamente. Se verifica:

5) (iii)

$$(e'.e) \otimes (f'f) = (e' \otimes f')(e \otimes f)$$

ya que:

$$((e'e) \otimes (f'f))(x \otimes y) = e'e(x) \otimes f'f(y) = (e' \otimes f')(ex \otimes fy) =$$

$$= (e' \otimes f')(e \otimes f)(x \otimes y) \;,\; \forall x \in E, \forall y \in F$$

6). Cambio del semianillo

Sea p: $A \to B$ un homomorfismo fuerte de semianillos SA4-SA6, sea E(F) un B-semimódulo a la derecha (a la izquierda)

6). (i) Existe un único epimorfismo de $N_o$-semimódulos

$$\phi : p_x(E) \otimes_A p_x(F) \to E \otimes_B F$$

tal que: $x \otimes y \to x \otimes y, \ \forall\, x \in E, \ \forall\, y \in F$

En efecto, la aplicación:

$$f: \quad p_x(E) \times p_x(F) \to E \otimes_B F$$
$$(x,y) \to x \otimes y$$

es tensa, y en virtud de 3) (ii), existe un único homomorfismo $\phi$ de modo que $f = \phi p'$ ($p'$, aplicación tensa canónica $p_x(E) \times p_x(F) \to p(E) \otimes_A p_x(F)$).

Definición:

Sea E un A-semimódulo a la izquierda (o a la derecha), definimos una relación binaria entre elementos del semianillo A, de este modo:

$$\forall\, a, b \in A, \ a\, \chi_E b \iff ax = bx, \ \forall\, x \in E$$

Se verifica:

(iii) $\chi_E$ es una congruencia en el semianillo A, a la que denominamos "congruencia en A determinada por la ley externa de E".

Es fácil comprobar que $\chi_E$ es una relación de equivalencia en A compatible con la adición y la multiplicación en A.

Si $k: A \to A/\chi_E$ designa el homomorfismo natural de semianillos, entonces Kerk = clase cero de $\chi_E$ = An(E), ya que a Kerk $\iff a\, \chi_E o \iff ax = ox = o$, $\forall\, x \in E \iff a \in An(E)$. Obsérvese que $\chi_E$ puede ser una congruencia no normal en A, y, por lo tanto $A/\chi_E \neq A/\mathrm{Kerk}$ (en tal caso, existe un epimorfismo reductivo $A/\mathrm{Kerk} \to A/\chi_E$).

Diremos que un A-semimódulo a la izquierda (o a la derecha) E es reducido, si se cumple $\forall$ a,b $\in$ A, a $\neq$ b, $\exists$u $\in$ E/ au $\neq$ bu. Es inmediato que "Todo A-semimódulo reducido es fiel" y que la proposición recíproca de ésta no es incondicionalmente verdadera. De lo anteriormente expuesto se deduce:

6) (iii) Todo A-semimódulo E puede ser considerado (de un modo canónico) como un $A/\chi_E$-semimódulo reducido con la ley externa:

$$k(a)x = ax \ , \ \forall\, a \in A,\ \forall\, x \in E;\ k,\ \text{homom. natural } A \to A/\chi_E$$

siendo $\chi_E$ la congruencia en A determinada por la ley externa de E. E, así considerado es $A/\chi_E$-semimódulo fiel.

Si $P$ es una congruencia en A contenida en $\chi_E$, también se puede considerar a E como un $A/P$-semimódulo, que, en general, no es reducido.

Sean $\chi_E$, $\chi_F$ las congruencias en A determinadas por las leyes externa de los A-semimódulos a derecha e izquierda E y F. Designe $\chi = \chi_E \cup \chi_F$ la unión o cerradura transitiva de ambas congruencias. Se verifica:

6) (iv) Si a, b $\in$ A, a $\chi$ b, entonces:

$$xa \otimes y = x \otimes by \ , \ \forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F$$

Sabemos (§3) que $\chi$ es una congruencia en A que, por definición,

$$a\ \chi\ b \iff \exists (a_o, a_1, \ldots, a_n) \in A \ / \ a_{i-1}\ \chi_I\ a_i,\ \forall\, i \in [1,n]$$

$$a_o = a,\ a_n = b, n > 1 \quad \text{siendo} \quad I = E \text{ ó } F$$

Supongamos, para abreviar, que:

$$a\ \chi\ b \iff (a_o, a_1, a_2) \in A,\ \ /\ a_o\ \chi_E\ a_1\ ,\ a_1\ \chi_F\ a_2$$

$$a_o = a,\ a_2 = b$$

$$a_o\ \chi_E\ a_1 \iff xa_o = xa_1\ ,\ \forall\, x \in E$$

$$a_1\ \chi_F\ a_2 \iff a_1 y = a_2 y\ ,\ \forall\, y \in F$$

de donde:

$$xa_o \otimes y = xa_1 \otimes y \ , \ x \otimes a_1 y = x \otimes a_2 y$$

como $xa_1 \otimes y = x \otimes a_1 y$, de estas últimas igualdades resulta el enunciado.

Sea $P$ una congruencia arbitraria en el semianillo A, $P \in K(A)$; consideremos en $C = N_o^{(ExF)}$ la relación binaria $r_P$ que queda definida por $P_1, P_2$ (véase al principio de este parágrafo) y $P_3'$ (en lugar de $P_3$), siendo:

$$P_3' : (xa,y)r\,(x,by) \ , \ \forall\ x \in E,\ \forall\ y \in F,\ \forall\ a,b \in A/\ a \equiv b \ (\text{mód}\ P)$$

Obsérvese que la relación "r" -definida al comienzo del presente parágrafo- es precisamente $r_J$ , $J$, congruencia idéntica en A; evidentemente, $R(r) \subseteq R(r_P)$ , $\forall$ $P \in K(A)$, ya que $r \subseteq r_p$. Sin embargo, en virtud de la proposición 6(iv) se puede afirmar:

6)(v) $\quad R(r_P) = R(r) \ , \ \forall\ P \in K(A)\ /\ P \subseteq \chi_E \cup \chi_F$

Por otra parte, caso de que $P \in K(A)$, $P \subseteq \chi_E \cap \chi_F$, tiene sentido hablar de los $A/P$-semimódulos E y F (6)(iii), y entonces, en virtud de 6 (v), se puede enunciar.

6)(vi) <u>Sea $\chi_E$ ($\chi_F$) la congruencia en A determinada por la ley externa del A-semimódulo E (F) a la derecha (a la izquierda). Si $P$ es congruencia en A tal que $P \subseteq \chi_E \cap \chi_F$, entonces el epimorfismo $\phi$ establecido en 6 (i):</u>

$$\phi : E \otimes_A F \to E \otimes_{A/P} F$$

<u>es la identidad.</u>

En particular, si p es un ideal distinguido (ideal bilátero cerrado) de A tal que $p \subseteq \mathrm{Ker} k_E \cap \mathrm{Ker} k_F$, $K_E : A \to A/X_E$, $k_F : A \to A/X_F$, homomorfismos naturales, entonces también es $\phi$; $\phi : E \otimes_A F \to E \otimes_{A/p} F$ la identidad.

7) <u>Producto tensorial de dimorfismos</u>

En este número 7 usaremos las mismas notaciones que en el parágrafo dedicado a dimorfismos. Sean $p : A \to B$ un homomorfismo fuerte de semianillos SA4-SA6, $E_A$, $E_B^x$ un A-semimódulo, un B-semimódulo a la derecha; $F_A$, $F_B^x$ un A-, un B-semimódulo a la izquierda.;

Definición:

Dados $e_p \in \mathrm{Dim}_p(E_A,E_B^*)$ , $f_p \in \mathrm{Dim}_p(F_A,F_B^*)$, definimos:

$$e_p \otimes f_p = \phi.(e \otimes f)$$

siendo:

$$e : E_A \to p_*(E_B^*) \ , \ f: F_A \to p_*(F_B^*)$$

los A-homomorfismos correspondientes a los dimorfismos dados (§14,2)(i).

$e \otimes f$ el producto tensorial de los homomorfismos $e,f$ (5).

$\phi$ el epimorfismo establecido en la proposición 6 (i).

Así pues, $e_p \otimes f_p$ es un homomorfismo de $N_o$-semimódulos:

$$e_p \otimes f_p : E_A \otimes_A F_A \to E_B^* \otimes_B F_B^* \quad , \forall\, e_p \in \mathrm{Dim}_p(E_A,\ E_B^*)$$
$$\forall\, f_p \in \mathrm{Dim}_p(F_A,\ F_B^*)$$

De un modo similar al efectuado en 5 (i), se puede comprobar que;

7) (i) La aplicación

$$\beta' : \mathrm{Dim}_p(E_A,E_B^*) \times \mathrm{Dim}_p(F_A,F_B^*) \to \mathrm{Hom}_{N_o}(E_A \otimes_A F_A,\ E_B^* \otimes_B F_B^*)$$
$$(e_p\ ,\ f_p) \to e_p \otimes f_p$$

es biaditiva.

Consecuencia, pues de 7 (i) y 3 (ii) es que:

7)(ii) Existe un homomorfismo de $N_o$-semimódulos:

$$\gamma' : \mathrm{Dim}_p(E_A,E_B^*) \otimes_{N_o} \mathrm{Dim}_p(F_A,F_B^*) \to \mathrm{Hom}_{N_o}(E_A \oplus_A F_A,\ E_B^* \oplus_B F_B^*)$$

tal que $\beta' = \gamma'\, p'$, siendo $p'$ la aplicación tensa canónica:

$$p' : Dim_p(E_A,E_B^*) \times Dim_p(F_A,F_B^*) \rightarrow Dim_p(E_A,E_B^*) \otimes_{N_o} Dim_p(F_A,F_B^*)$$

8) <u>Producto tensorial de productos directos y sumas directas de semimódulos.</u>

Creemos que el presente parágrafo §16 admite un desarrollo más largo y detallado del que hemos efectuado; sin embargo, dejamos ese menester para otra ocasión, contentándonos aquí con señalar algunos conceptos básicos relativos al producto tensorial de semimódulos.

Enunciamos a continuación unas proposiciones que serán de utilidad en las demostraciones del próximo parágrafo.

8) Sea $(E_i)_{i \in I}$ una familia de A-semimódulos a la derecha, $(F_j)_{j \in J}$ una familia de A-semimódulo a la izquierda;

(i) <u>existe un homomorfismo de $N_o$-semimódulos:</u>

$$g : (\prod_{i \in I} E_i) \otimes_A (\prod_{j \in J} F_j) \rightarrow \prod_{(i,j) \in I\times J} (E_i \otimes_A F_j)$$

tal que:

$$g((x_i) \otimes (y_j)) = (x_i \otimes y_j)$$

(ii) <u>existe un isomorfismo de $N_o$-semimódulos:</u>

$$h : (\bigoplus_{i \in I} E_i) \otimes_A (\bigoplus_{j \in J} F_j) \rightarrow \bigoplus_{(i,j) \in I\times J} (E_i \otimes_A F_j)$$

tal que:

$$h((x_i) \otimes (y_j)) = (x_i \otimes y_j)$$

(iii) <u>Si</u> $f_i : E_i \rightarrow E'_i$ $(i \in I)$, $g_j : F_j \rightarrow F'_j$ $(j \in J)$

<u>son familias de homomorfismos de A-semimódulos a la derecha y a la izquierda, respectivamente, entonces el diagrama:</u>

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i\in I} E_i)\otimes_A(\bigoplus_{j\in J} F_j) & \xrightarrow{h} & \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}(E_i\otimes_A F_j) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\oplus f_i)\otimes(\oplus g_j)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \oplus(f_i\otimes g_j)} \\ (\bigoplus_{i\in I} E'_i)\otimes_A(\bigoplus_{j\in J} F'_j) & \xrightarrow{h'} & \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}(E'_i\otimes_A F'_j) \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración (i): la aplicación t de $(\prod E_i)\times(\prod F_j)$ en $\prod(E_i\otimes_A F_j)$ tal que $t((x_i),(y_j)) = (x_i\otimes y_j)$ es tensa, como fácilmente se comprueba; en virtud de 3 (ii), existe un homomorfismo g que cumple los requisitos del enunciado.

(ii) Denominemos, para abreviar, $E^* = \prod E_i$, $F^* = \prod F_j$, $E = \oplus E_i$, $F = \oplus F_j$, $T = \prod_{(i,j)}(E_i\otimes_A F_j)$, $W = \oplus(E_i\otimes_A F_j)$. Llamemos $e: E\to E^*$, $f: F\to F^*$ a las inmersiones de E (subsemimódulo de $E^*$) en $E^*$ y de F en $F^*$; sea g el homomorfismo establecido en la proposición precedente; $h = g(e\otimes f)$ es un homomorfismo de $E\otimes_A F$ en T tal que $h((x_i)\otimes(y_j)) = (x_i\otimes y_j)$; por ser las familias $(x_i)$, $(y_j)$ de soporte finito, también lo es la familia $(x_i\otimes y_j)$, esto es, $\mathrm{Im}\, h\subseteq W$; por ende, podemos decir que existe un homomorfismo $h: E\otimes_A F\to W$, que verifica la propiedad del enunciado.

Mostremos que h es un isomorfismo. Sean $iny_i: E_i\to E$, $iny_j: F_j\to F$ las inyecciones canónicas correspondientes, designe $k_{ij} = iny_i\otimes iny_j$ : $E_i\otimes_A F_j\to E\otimes_A F$; según la proposición §8,1), queda determinado mediante la familia $(k_{ij})$ un homomorfismo $k: W\to E\otimes_A F$ ($k = \sum_{(i,j)} k_{ij}$).

Es inmediato comprobar que:

$$kh((x_i)\otimes(y_j)) = k((x_i\otimes y_j)) = (x_i)\otimes(y_j)$$

$$hk((x_i\otimes y_j)) = h((x_i)\otimes(y_j)) = (x_i\otimes y_j)$$

Como estas igualdades son válidas para un sistema de generadores de $E\otimes_A F$, y un sistema de generadores de W, respectivamente, se puede afirmar $kh = 1_{E\otimes_A F}$, $hk = 1_W$, lo que significa que h y k son isomorfismos, el uno recíproco del otro.

(iii) La conmutatividad del diagrama expresado en (iii) es de comprobación inmediata.

## § 17. DESCOMPOSICIONES IRREDUCIBLES

Definiciones

I) E,A-semimódulo indescomponible <==> a) $E \neq 0$, y b) E no admite ningún sumando directo distinto de 0 y de E.

II) Designamos, según hemos hecho ya en parágrafos anteriores, por Z(E) el conjunto de todos los elementos simetrizables del A-semimódulo E, esto es, de todos los elementos de E que poseen opuesto respecto al "o" en E. Z(E) es un A-sa-módulo, el máximo contenido en E. Análogamente, $\theta(A)$ designará el conjunto de todos los elementos del semianillo A simerizables (+) en A, el cual, dotado de las leyes inducidas por A, es el máximo ideal fuerte bilátero de A.

A, semianillo sin opuestos <==> $\theta(A) = 0$

E, semimódulo sin opuestos <==> $Z(E) = 0$

III) En §10 se ha definido familia n-ligada (c-ligada) de un A-semimódulo E; diremos que $x \in E$ es elemento de n-torsión de E (c-torsión de E) si $\{x\}$ es familia n-ligada (c-ligada) de E.

E,A-semimódulo libre de n-torsión <==> Toda familia de E que no contenga al "o" es libre ó c-ligada <==> No existe en E una familia que no contenga al "o" y sea n-ligada.

IV) $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, descomposición irreducible del A-semimódulo E <==> $\forall\, i \in I$, $E_i$ es subsemimódulo indescomponible de E.

1) Sea E un A-semimódulo; se cumple:

$$Z(E) = 0 \implies \theta(A) \subseteq An(E)$$

En efecto, mostremos $\theta(A) \not\subseteq An(E) \implies Z(E) \neq 0$. Sea $T = \theta(A) \cap An(E)$ y sea $b \in \theta(A)-T \supset \emptyset$; entonces $b \neq o$, $b \notin An(E)$, por lo que existe un $x \in E$ tal que $bx \neq o$, también existe un $b' \in \theta(A)$ tal que $b + b' = 0$; de donde, $(b + b')x = o$ esto es, $bx \neq o$, $bx \in Z(E)$, c.q.d.

La proposición recíproca de la 1 no es, en general, verdadera, como lo prueba este ejemplo: sea $R_o^p$ la congruencia en el semigrupo $N_o$ establecida en la nota final del parágrafo §11, $S = N_o/R_o^p$, $(p > 1)$, es un $N_o$-semimódulo (grupo monógeno cíclico de orden p) cuyo anulador $An(S) = (p)$ es el ideal bilátero de $N_o$ engendrado por p. $\theta(N_o) = 0 \subseteq An(S) = (p)$ y, sin embargo, $Z(S) = S \neq 0$.

De la proposición 1) resulta, teniendo en cuenta las definiciones dadas en §16,6) y la proposición §16,6) (iii):

1) (i) Sea E un A-semimódulo, $\chi_E$ la congruencia en A determinada por la ley externa de E, entonces:

$$Z(E) = 0 \implies \theta(A/\chi_E) = 0$$

2) La fórmula $Z(E/Z(E)) = 0$ es válida para todo A-semimódulo E.

$Z(E)$ es subsemimódulo cerrado de E que satisface $x+y \in Z(E) \implies x, y \in Z(E)$ (1); en efecto, sea $x + y = z \in Z(E)$, sumando a los dos miembros el opuesto $z'$ de $z$, se obtiene $x + y + z' = o$, $x, y \in Z(E)$.

Por tanto, $\bar{x}, \bar{y} \in E/Z(E)$, $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} = \bar{o} \implies x+y \in Z(E) \implies x,y \in Z(E) \implies \bar{x} = \bar{y} = \bar{o} \implies Z(E/Z(E)) = 0$.

De 1) y 2) se obtiene, sin más,

2)(ii) $\theta(A/\chi_{E/Z(E)}) = 0$, cualquiera que sea el A-semimódulo E.

También es válida la fórmula $Z(E/R) = 0$, para toda congruencia $R$ en el A-semimódulo E que tenga por clase cero a $Z(E)$.

Se verifica la equivalencia

3). E, A-semimódulo libre de n-torsión $\iff$ $Z(E) = 0$, y ningún elemento de E (salvo el "o") es de n-torsión.

Mostremos $\implies$ ; si toda familia de E que no contenga al "o" es libre o c-ligada, entonces no existe ningún elemento $x \in E$, $x \neq o$ que posea opuesto $x' \in E$, pues si existiera, la familia $\{x,x'\}$ sería n-ligada; tampoco existe en E ningún elemento $x \neq o$ que sea de n-torsión, puesto que si existiese, la familia $\{x\}$ sería n-ligada.

Probemos $\Longleftarrow$ ; sea $(x_i)_{i \in I}$ familia de elementos de E no vacía y que no contiene al "o", y supongamos $\sum_i a_i x_i = o$, $a_i \in A$; por ser $Z(E) = 0$, de la anterior igualdad se deduce $a_i x_i = o$, $\forall\, i \in I$; como no existe en E ningún elemento de n-torsión $\neq o$, y $x_i \neq o$, $\forall\ i \in I$, se deduce $a_i = o$, $\forall\ i \in I$, esto es, la familia dada no es n-ligada, E es libre de n-torsión, c.q.d.

A continuación estudiamos un tema que consideramos central en esta teoría: existencia y unicidad de las descomposiciones irreducibles de los A-semimódulos. Analizamos, en primer lugar, bajo que condiciones la descomposición irreducible de un A-semimódulo es única, supuesta su existencia; posteriormente discutimos dicha existencia. Una vez probadas la unicidad y existencia, pasamos a definir "descomposición canónica" de ciertos semimódulos, lo que permite deducir una serie de teoremas.

5) Sean E y F A-semimódulos tales que $Z(E) = Z(F) = 0$, y sean $\underset{i \in I}{\oplus} E_i$, $\underset{j \in J}{\oplus} F_j$ descomposiciónes irreducibles de E y F, respectivamente; si existe un isomorfismo $f\colon E \to F$, entonces existe una biyección tal que para todo $i \quad I$:

$$f/E_i = f_i : E_i \to F_{p(i)}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $k \in J$, y llamemos $T_{ik} = f(E_i) \cap F_k$, el cual es, $\forall\ i \in I$, subsemimódulo cerrado de $F_k$; se cumple: si $i_1$ , $i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, entonces $T_{i_1k} \cap T_{i_2k} = 0$.

Efectuaremos la demostración con todo detalle en tres pasos; en el primero mostramos que:

I) $$F_k = \underset{i \in I}{\oplus} T_{ik}$$

Sea "y" un elemento arbitrario de $F_k$, entonces:

$$x = f^{-1}(y) \in E,\ x = \sum_{i \in I} x_i,\ x_i \in E_i$$

de un modo único; por tanto,

$$(1) \quad \forall\, y \in F_k : y = \sum_{i \in I} fx_i \ , fx_i \in fE_i$$

de un modo único.

Como $f(x_i) \in F$, se puede escribir, $\forall\, i \in I$,

$$(2)\ f(x_i) = \sum_{j \in J} m_{ij} \ , \ m_{ij} \in F_j$$

de un modo único,

de (1) y de (2), resulta:

$$(3) \quad y = \sum_{i \in I} f(x_i) = \sum_{i \in I} \Big( \sum_{j \in J} m_{ij} \Big) = \sum_{j \in J} \Big( \sum_{i \in I} m_{ij} \Big)$$

Ahora bien, por ser $y \in F_k$ , $F = \bigoplus_{j \in J} F_j$ , de (3) se deduce:

$$(4) \quad y = \sum_{i \in I} m_{ik} \ ; \ \sum_{i \in I} m_{ij} = o \ , \ \forall\, j \in J / j \neq k$$

De la hipótesis $Z(F) = 0$, y de (4), se obtiene:

$$(5) \quad \forall_{j \in J} \ , \ j \neq k, \ \forall\, i \in I : m_{ij} = 0$$

resultado éste, que llevado a (2), asegura:

$$(6) \quad f(x_i) = m_{ik} \in f(E_i) \cap F_k = T_{ik} \ , \ \forall\, i \in I.$$

Considerando (1) y (6), se concluye que $\forall\ y \in F_k$ se puede poner de un un modo único en la forma:

$$y = \sum_{i \in I} m_{ik} \ , \ m_{ik} \in T_{ik}$$

esto es:

$$\text{I)} \quad F_k = \bigoplus_{i \in I} T_{ik}$$

como queríamos mostrar.

II) Como $F_k$, $\forall\, k \in J$, es, por hipótesis, A-semimódulo indescomponible, no pueden presentarse los casos:

a) k,fijo, $\forall\, i \in I$, $T_{ik} = 0$, ya que esto implicaría $F_k = 0$

b) $\exists\, i_1, i_2 \in I$, , $i_1 \neq i_2$, $T_{i_1 k} \neq 0$, $T_{i_2 k} \neq 0$; por consiguiente, existe un único $i \in I$ tal que $T_{ik} \neq 0$ ($\forall\, k \in J$) y esto es tanto como afirmar que existe una aplicación $q: J \to I$ de modo que $T_{q(j)j} \neq 0$, $\forall\, j \in J$, ó, lo que es igual, tal que:

$$(7) \quad F_j \subseteq f(E_{q(j)}) \ , \ \forall\, j \in J$$

Llamando $g = f^{-1}$, y razonando de modo simétrico, sabemos que existe una aplicación $p: I \to J$ de manera que:

$$(8) \quad E_i \subseteq g(F_{p(i)}) \ , \ \forall\, i \in I$$

III) Apliquemos f a los dos miembros de (8), se obtiene:

$$(9) \quad f(E_i) \subseteq fg(F_{p(i)}) = F_{p(i)} \ , \ \forall\, i \in I$$

reuniendo (7), (8) y (9), se puede escribir:

$$(10) \quad \forall\, j \in J : F_j \subseteq f(E_{q(j)}) \subseteq fg(F_{pq(j)}) = F_{pq(j)}$$

lo cual implica que $pq : J \to J$ es la identidad;de un modo simétrico, se deduce que $qp : I \to I$ es la identidad; luego p, q son aplicaciones, la una recíproca de la otra, esto es, son biyecciones; de (10) se deduce también $f(E_{q(j)}) = F_j$, o sea:

$$f(E_i) = F_{p(i)} \ , \ \forall\, i \in I \ , \ \text{c.q.d.}$$

Una vez deducida la proposición 5, estamos en situación de obtener de un modo inmediato el

6) (i) (Teorema de unicidad de la descomposición irreducible)

Si un A-semimódulo sin opuestos posee descomposición irreducible, ésta es, salvo en el orden de los sumandos directos, única.

En efecto, sean $E = \bigoplus_{i \in I} E_i = \bigoplus_{j \in J} F_j$ dos descomposiciones irreducibles del A-semimódulo sin opuestos E; como $1_E : E \to E$ es un isomorfismo, haciendo uso de la proposición 5, sabemos que existe una biyección $p: I \to J$ tal que:

$$F_{p(i)} = 1_E(E_i) = E_i \;, \; \forall \; i \in I$$

por consiguiente, ambas descomposiciones sólo se diferencian en el orden de los sumandos.

Sobre la existencia de la descomposición irreducible.

Entendemos por descomposición propia de E, A-semimódulo no nulo, una descomposición de E en suma directa de subsemimódulos entre los que no figura el subsemimódulo nulo. Consideramos a E ($E \neq 0$) mismo como descomposición propia de E, por convenio, a la cual llamamos descomposición trivial de E. Asimismo, si E es indescomponible consideramos a E mismo como descomposición irreducible de E, también por convenio.

6) (ii) No todo A-semimódulo sin opuestos admite descomposición irreducible.

Sea $T = N_o^I = \prod_{i \in I} (N_o)_i$, en donde $\mathrm{card}(I) \geqslant \mathrm{card}(N_o)$.

Se trata de comprobar que T no posee descomposición irreducible. Sea $T = \bigoplus_{j \in J} T_j$ una descomposición propia arbitraria de T y llamemos:

$$e_i \in T / \; pr_i e_i = 1 \;, \; pr_k e_i = o \;, \; \forall \; k \in I \;, \; k \neq i$$

Puesto que no existe ningún par de elementos $x,y \in T$ tales que $x \neq o$, $y \neq o$, $e_i = x + y$, $e_i$ ha de pertenecer a algún $T_j$ en la descomposición dada; si $e_i \in T_j$, entonces $L(e_i) = (N_o)_i \subseteq T_j$. Designemos $I_j = \{i \in I / e_i \in T_j\}$; $\{I_j\}_{j \in J}$ es una partición de I, siendo $T_j = \prod_{i \in I_j} (N_o)_i = N_o^{I_j}$ . J no puede ser un conjunto infinito, porque si lo fuese, existiría un $x \in T$ tal que $pr_i x \neq o$, $\forall\, i \in I$, que no podría ponerse como suma de soporte finito: $x = \sum_{j \in J} x_j$, $x_j \in T_j$. Por consiguiente, toda descomposición propia de T es de la forma:

$$T = \bigoplus_{j \in J} T_j \ , \ T_j = iny_{I_j}(N_o^{I_j})$$

siendo $\{I_j\}_{j \in J}$ una partición de I, y siendo J un conjunto finito.

Esto significa que en cualquier descomposición propia de T figura, al menos, un sumando directo descomponible, c.q.d.

Nota: en la demostración anterior hemos puesto $L(e_i) = (N_o)_i$ en lugar de $L(e_i) = iny_i((N_o)_i)$ -significando $iny_i:(N_o)_i \to T$, la inyección canónica- etc., por brevedad y suponiendo que no da lugar a confusión.

Llamemos $\mathcal{D}_E$ al conjunto de las descomposiciones propias del A-semimódulo (a la izquierda) sin opuestos $E (E \neq 0)$. $\mathcal{D}_E$ es un conjunto no vacío por contener, al menos, la descomposición trivial de E. Definimos una relación de orden en $\mathcal{D}_E$ de este modo:

Dadas las descomposiciones propias de E, $E = \varepsilon = \bigoplus_{i \in I} E_i$, $E = \mathcal{F} = \bigoplus_{j \in J} F_j$, decimos que:

$$(\&) \quad \mathcal{F} \leqslant \varepsilon \iff \forall\, i \in I, \exists j \in J / E_i \subseteq F_j$$

Se verifica

6) (iii) <u>El conjunto $\mathcal{D}_E$ de las descomposiciones propias de un A-semimódulo (a la izquierda) sin opuestos $E(E \neq 0)$ es, respecto de la relación de orden " $\leqslant$ " definida mediante (&), un semiretículo.</u>

Con objeto de probar 6(iii), demostraremos primero que si $E = \varepsilon = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , $E = \mathcal{F} = \bigoplus_{j \in J} F_j$ son dos descomposiciones propias del A-semimódulo sin opuestos E, entonces:

$$(1) \quad E = \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (E_i \cap F_j)$$

es una descomposición de E.

Cualquier elemento x de $E_i$ se puede poner de un modo único en la forma (2) $x = \sum_{j \in J} x_j$, $x_j \in F_j$; como ε es otra descomposición de E, entonces:

$$(3) \quad \forall\, j \in J : x_j = \sum_{k \in I} m_{kj} \;,\; m_{kj} \in E_k$$

de un modo único.

Así pues,

$$x = \sum_j (\sum_k m_{kj}) = \sum_k (\sum_j m_{kj})$$

y como $x \in E_i$, se obtiene (4):

$$(4) \quad \forall\, k \in I,\ k \neq i : \sum_j m_{kj} = o$$

en virtud de la hipótesis Z(E) = 0, de (4) se deduce:

$$\forall\, k \in I,\ k \neq i \;,\; \forall\, j \in J :\ m_{kj} = o$$

Llevado este resultado a (3), se obtiene $x_j = m_{ij} \in E_i \cap F_j$, $\forall\, j \in J$, lo cual, juntamente con (2), permite afirmar que todo elemento $x \in E_i$ se puede poner de un modo único en la forma:

$$x = \sum_{j \in J} m_{ij} \;,\; m_{ij} \in E_i \cap F_j$$

por tanto,

$$E_i = \bigoplus_{j \in J} (E_i \cap F_j) \;,\; \forall\, i \in I$$

esto es,

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i = \bigoplus_{i \in I} \left( \bigoplus_{j \in J} (E_i \cap F_j) \right) = \bigoplus_{(i,j) \in I\times J} (E_i \cap F_j)$$

como queríamos probar.

Al suprimir en la descomposición (1) todos los sumandos directos nulos que figuren en ella, obtenemos una descomposición propia de E más fina que $\varepsilon$ y $F$, que denominamos $\varepsilon + F$; de este modo hemos definido una operación "+" entre descomposiciones propias de E, que goza de las propiedades conmutativa y asociativa, por lo que $(\mathcal{D}_E , + )$ es un semiretículo. Se verifica, evidentemente, $F \leqslant \varepsilon \iff F + \varepsilon = \varepsilon$, con lo que hemos mostrado 6 (iii).

Es inmediato que

6) (iv) La condición necesaria y suficiente para que el A-semimódulo E sin opuestos admita descomposición irreducible es que el semiretículo $\{\mathcal{D}_E, +\}$ posea elemento maximal. Todo elemento maximal de $\{\mathcal{D}_E , +\}$ es descomposición irreducible de E y viceversa.

Nota.- La unicidad de la descomposición irreducible de un A-semimódulo E sin opuestos es también consecuencia de 6 (iv), puesto que para todo + -semiretículo $\mathcal{D}_E$ es válido:

Si $\mathcal{D}_E$ contiene un elemento maximal, éste es único y máximo.

En efecto, supongamos que $M$ es elemento maximal de $\mathcal{D}_E$, y sea $X$ un elemento arbitrario de $\mathcal{D}_E$; se cumple $M \leqslant X + M$, y por ser $M$ maximal, $X + M = M$; de donde se deduce $X \leqslant M$, $\forall X \in \mathcal{D}_E$, esto es, $M$ es máximo en $\mathcal{D}_E$.

En virtud del lema de Zorn y de 6 (iv), se puede afirmar

6) (v) Para que el A-semimódulo sin opuestos E admita descomposición irreducible es necesario y suficiente que el conjunto ordenado $\{\mathcal{D}_E , \leqslant\}$ sea inductivo (toda cadena de elementos de $\mathcal{D}_E$ posea cota superior en $\mathcal{D}_E$).

6)(vi) Un A-semimódulo (a la izquierda) sin opuestos E admite una única descomposición irreducible en los siguientes casos:

a) E es libre de n-torsión y de tipo finito.

b) E es de longitud finita.

c) E es libre sobre A y $A_1$ admite descomposición irreducible.

Para mostrar a) nos apoyaremos en el siguiente

Lema. Sea E un A-semimódulo libre de n-torsión, si $S = \{s_j\}_{j \in J}$ es sistema de generadores de E y $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ es una descomposición de E en suma directa de subsemimódulos, entonces, $M = \bigcup_{i \in I} M_i$, siendo $M_i = S \cap E_i$, es también sistema de generadores de E.

Desmostración del lema:

De $y \in E_k$, $y \neq o$, $y = \sum_{j \in J} a_j s_j$, $a_j \neq o$, se deduce $s_j \in M_k$.

Efectivamente, de:

$$s_j = \sum_i m_i^j \ , \ m_i^j \in E_i$$

resulta:

$$y = \sum_j a_j (\sum_i m_i^j) = \sum_i \sum_j a_j m_i^j$$

como $y \in E_k$, de la última igualdad se desprende:

$$\forall\, i \in I,\ i \neq k : \sum_j a_j m_i^j = o$$

de esto, por ser E libre de n-torsión y $a_j \neq o$, se deduce:

$$\forall\, i \in I,\ i \neq k : m_i^j = o$$

por tanto:

$$s_j = m_k^j \in E_k \cap S = M_k$$

Acabamos de mostrar que todo $y \in E_k$ depende linealmente de elementos de $M_k$, por ello, $M_k$ es sistema de generadores de $E_k$, $\forall\, k \in I$, y en virtud de la proposición §10,8, $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ es sistema de generadores de E.

Dada la descomposición propia de $E = \varepsilon = \bigoplus_{i \in I} E_i$, denominamos $\beta(\varepsilon) = \mathrm{card}(I)$; se verifica:

$$\beta(\varepsilon) \leqslant \sum_{i \in I} \operatorname{card}(M_i') \leqslant \operatorname{card}(S)$$

cualquiera que sea $\varepsilon \in \mathcal{D}_E$ y cualquiera que sea el sistema de generadores S de E, ya que si S no contiene al cero, llamando $M_i' = M_i = E_i \cap S$, y si S contiene al cero, llamando $M_i' = M_i - \{o\}$, $\{M_i'\}_{i \in I}$ es una partición de un subconjunto de S.

Como E es de tipo finito, $\beta(\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon \in \mathcal{D}_E$, se mantiene inferior o igual a un cierto número natural, por lo que $\{\mathcal{D}_E, \leqslant\}$ es conjunto inductivo; en virtud de 6 (v), E admite descomposición irreducible, c.q.d.

En el caso b) la demostración es análoga al final de la anterior, puesto que se cumple $\beta(\varepsilon) \leqslant \operatorname{long}(E)$, $\forall\, \varepsilon \in \mathcal{D}_E$.

Mostremos la existencia en el caso c): por ser E A-semimódulo a la izquierda libre, existe un isomorfismo $f: T = A_i^{(B)} \to E$; si $A_i = \bigoplus_{j \in J} Q_j$ es la descomposición irreducible de $A_i$, entonces la descomposición irreducible de T es $T = A_i^{(B)} = \bigoplus_{j \in J} Q_j^{(B)}$; en virtud de la proposición 4, E admite descomposición irreducible.

Consecuencia de 6 (v) a) es que <u>todo semigrupo abeliano sin opuestos de tipo finito admite una única descomposición irreducible</u>.

<u>Descomposiciones canónicas</u>

Quede bien claro que en este apartado nos referiremos siempre a A-semimódulos sin opuestos que posean descomposición irreducible.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los A-semimódulos a la izquierda sin opuestos e indescomponibles, sea $\mathcal{J}$ la relación de equivalencia "isomorfismo de A-semimódulos a la izquierda" restringida a $\mathcal{M}$, y consideremos el conjunto cociente:

$$\mathcal{M}/\mathcal{J} = \{\bar{P}_s\}_{s \in S}$$

en donde $\bar{P}_s$ denota una clase de $\mathcal{M}$ módulo $\mathcal{J}$, y, por tanto, $P_s$ designa un representante de dicha clase, y en donde elegimos el conjunto de subíndices S de modo que esté en correspondencia biunívoca con las clases de $\mathcal{M}$ módulo $\mathcal{J}$.

Dado un A-semimódulo a la izquierda sin opuestos E que tenga por descomposición irreducible $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, definimos;

$$I_s = \{i \in I / E_i \approx P_s\} \ , \ \forall \, s \in S$$

Evidentemente, $\{I_s\}_{s \in S}$ es una partición de I. Admitido el convenio $P_s^{(\emptyset)} = 0$, se puede escribir:

$$(1) \qquad E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)}$$

Denominamos a (1) descomposición canónica de E.

Obtenemos el

7) (Teorema de las descomposiciones canónicas)

(i) La descomposición canónica de un A-semimódulo sin opuestos que admita descomposición irreducible es única.

(ii) Sean E,F, A-semimódulos sin opuestos de descomposición canónica:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} \ , \ F \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)}$$

la condición necesaria y suficiente para que $E \approx F$ es que:

$$\operatorname{card}(I_s) = \operatorname{card}(J_s) \ , \ \forall \, s \in S$$

(iii) Todo sumando directo M de E tiene por descomposición canónica:

$$(2) \qquad M \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(L_s)}$$

tal que: $\qquad (3) \quad \operatorname{card}(L_s) \leq \operatorname{card}(I_s) \ , \ \forall \, s \in S$

Recíprocamente, todo A-semimódulo M ($Z(M) = 0$) de descomposición canónica (2) que satisfaga (3) es isomorfo a un sumando directo de E.

(i) es consecuencia inmediata de 6) y de la definición de descomposición canónica.

(ii) Sea $f: E \to F$ un isomorfismo; en virtud de la proposición 5 existe una biyección $p: I \to J$, tal que $F_{p(i)} = f(E_i)$; como

$$I_s = \{i \in I / E_i \approx P_s\} \quad , \quad J_s = \{j \in J / F_j \approx P_s\},$$

$p$ subordina una biyección $I_s \to J_s$ tal que $F_{p(i)} \approx E_i \approx P_s$, y esto para todo $s \in S$, por tanto:

$$\mathrm{card}(I_s) = \mathrm{card}(J_s) \ , \ \forall s \in S$$

De la proposición §8,5 resulta que (4) "si $f_i : E_i \to F_i$ es un isomorfismo, $\forall i \in I$, entonces $\bigoplus_{i \in I} f_i$ es un isomorfismo entre las respectivas sumas directas"; teniendo esto en cuenta, de:

$$\mathrm{card}(I_s) = \mathrm{card}(J_s) \ , \ \forall s \in S$$

se deduce:

$$P_s^{(I_s)} \approx P_s^{(J_s)} \ , \ \forall s \in S$$

y, por consiguiente:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)} \approx F, \text{ c.q.d.}$$

La demostración de (iii) es ya obvia.

Obsérvese que en la proposición 7 no hemos impuesto ninguna restricción a los conjuntos $I, J, I_s, J_s$; estos pueden ser infinitos.

8). <u>Si E es A-semimódulo sin opuestos de descomposición canónica:</u>

$$(1) \quad E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)}$$

entonces el grupo:

$$\mathrm{Aut}(E) \approx \prod_{s \in S} \mathrm{Aut}(P_s^{(I_s)})$$

En efecto, dado el isomorfismo de A-semimódulos $f: E \to F$, la aplicación $\beta(u) : \mathrm{Aut}(E) \to \mathrm{Aut}(F)$, $\beta(u) = fuf^{-1}$, $\forall\ u \in \mathrm{Aut}(E)$; es un isomorfismo de grupos. Por tanto, de (1) se deduce:

$$\mathrm{Aut}(E) \approx \mathrm{Aut}\Big( \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} \Big) = \prod_{s \in S} \mathrm{Aut}(P_s^{(I_s)})$$

debiéndose esta última igualdad a que, según la proposición 5), todo elemento $v \in \mathrm{Aut}( \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)})$ se descompone de un modo único:

$$v = \prod_{s \in S} v_s \ , \ v_s \in \mathrm{Aut}(P_s^{(I_s)})$$

Nótese que $v = \prod_{s \in S} v_s$ no tiene por qué ser de soporte finito; por ello hemos puesto en el enunciado el símbolo "$\prod$" en lugar del "$\oplus$ ".

Sea A un semianillo (SA4-SA6) sin opuestos, $A_i$ el A-semimódulo A a la izquierda y tenga $A_i$ la descomposición canónica:

$$(1) \quad A_i \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)}$$

Sólo pueden presentarse estos dos casos:

I) $\forall\ s \in S$ tal que $J_s \neq \emptyset$, es $J_s$ conjunto infinito;

II) $\exists s \in S$ tal que $J_s \neq \emptyset$, y $J_s$ es conjunto finito.

Se obtienen:

9) Sea A un semianillo $\theta(A) = 0$, que cumple I)

Todos los A-semimódulos a la izquierda libres de base finita son isomorfos entre sí.

10) Sea A un semianillo $\theta(A) = 0$, que cumple II);

Todas las bases de un A-semimódulo libre a la izquierda son equipotentes entre sí.

Demostración de 9.

Si E,F son dos A-semimódulos libres a la izquierda de bases finitas respectivas, B,C, y (1) es la descomposición canónica de $A_i$, entonces:

$$(2) \quad E \approx A_i^{(B)} \approx \left( \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)} \right)^{(B)} \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(K_s)}$$

siendo:

$$(3) \quad \mathrm{card}(K_s) = \mathrm{card}(J_s \times B) = \mathrm{card}(J_s) \times \mathrm{card}(B), \ \forall\, s \in S$$

Como $A_i$, por hipótesis, satisface I) y B es conjunto finito, se verifica (véase N. Bourbaki, Libro 1, ch 3, 2 ed., 6, n° 3 cor 2):

$$\mathrm{card}(K_s) = \mathrm{card}(J_s) \ , \ \forall\, s \in S$$

En virtud del teorema de la descomposición canónica 7, $E \approx A_i$; análogamente, $F \approx A_i$ , c.q.d.

Demostración de 10

Sea E un A-semimódulo libre a la izquierda, en donde $A_i$ cumple II). Sabemos ya (§11,5),(iii)) que o bien todas las bases de E son infinitas, y, en este caso, son equipotentes entre sí, o bien, son todas ellas finitas. Supongamos esto último y que B, C son dos bases de E. Elegimos un $1 \in S$ tal que $J_1$ sea conjunto finito en la descomposición canónica (1) de $A_i$ y usamos la misma nomenclatura que en la demostración de 9) Se tiene:

$$\mathrm{card}(K_1) = \mathrm{card}(J_1) \times \mathrm{card}(B)$$

análogamente:

$$\mathrm{card}(K_1) = \mathrm{card}(J_1) \times \mathrm{card}(C)$$

ya que es única la descomposición canónica de E; por consiguiente:

$$\text{card}(B) = \text{card}(K_1)/\text{card}(J_1) = \text{card}(C), \text{ c.q.d.}$$

Decimos que un A-semimódulo libre es dimensional si todas las bases de él son equipotentes entre sí. Mediante 9 y 10 queda totalmente analizada la dimensionalidad de un A-semimódulo libre (a la izquierda) E sin opuestos, sobre un semianillo A tal que $A_i$ admite descomposición irreducible. Por ser $An(E) = 0$, de la proposición 1, se deduce $\theta(A) = 0$, sea (1) la descomposició canónica de $A_i$, se verifica:

Si E posee una base infinita, E es dimensional.

Si E posee una base finita, entonces $A_i$ cumple I) o II);

Si $A_i$ cumple I), entonces E no es dimensional.

Si $A_i$ cumple II), entonces E es dimensional.

Por tanto,

11) La condición necesaria y suficiente para que un A-semimódulo a la izquierda (derecha) sin opuestos, sobre un semianillo A tal que $A_i$ admita descomposición irreducible, libre y de base finita sea dimensional es que $A_i(A_d)$ satisfaga la propiedad II).

12) Dado el semianillo A, $\theta(A) = 0$, y la descomposición canónica de:

$$A_i \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)} ;$$

sea E un A-semimódulo a la izquierda, de descomposición canónica $(Z(E) = 0)$:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(K_s)}$$

la condición necesaria y suficiente para que E sea libre es que exista un número cardinal $\beta > o$ tal que:

$$(\varepsilon) \qquad \text{card}(K_s) = \text{card}(J_s) \times \beta \quad , \forall\, s \in S$$

Si E es libre, se verifican las igualdades $(\varepsilon)$, siendo $\beta = \text{card}(B)$, y B una base de E, según se ha visto en 9.

Recíprocamente, si se verifican las igualdades (&), existe un conjunto B tal que card(B) = β; por tanto:

$$\mathrm{card}(K_s) = \mathrm{card}(J_s) \times \mathrm{card}(B) \ , \ \forall\, s \in S$$

en virtud del teorema de la descomposición canónica ( 7):

$$P_s^{(K_s)} \approx P_s^{(J_s \times B)} \approx (P_s^{(J_s)})^{(B)} \ , \ \forall\, s \in S$$

y por consiguiente:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(K_s)} \approx \bigoplus_{s \in S} (P_s^{(J_s)})^{(B)} \approx \Big( \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)} \Big)^{(B)} \approx A_i^{(B)}$$

puesto que la suma directa goza de la propiedad asociativa, c.q.d.

Definiciones:

Dado un A-semimódulo libre dimensional E, llamamos dimensión de E, dim(E) = card(B), siendo B una base cualquiera de E.

Denominamos amplitud de un A-semimódulo E con Z(E) = 0, amp(E) = = card (I), siendo I el conjunto de subíndices de la descomposición irreducible de E (Admitimos el convenio amp(0) = o).

Decimos de una sucesión exacta de homomorfismos de A-semimódulos:

$$E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} E_n$$

que es escindida si Im $u_i$ es sumando directo de $E_{i+1}$ para todo $i \in [1,n-1]$'

13) Sea $E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)}$ la descomposición canónica del A-semimódulo sin opuestos E; $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , su descomposición irreducible; llamemos $E_s = \bigoplus_{i \in I_s} E_i$ (sumando directo de E, $\forall\, s \in S$), se verifica:

$$\text{(i)} \quad \mathrm{amp}(E) = \sum_{s \in S} \mathrm{card}(I_s) = \sum_{s \in S} \mathrm{amp}(E_s)$$

(ii) amp(E) <u>es invariante respecto de los isomorfismos</u>.

(iii) <u>Si $\underset{q \in Q}{\oplus} E_q$ es una descomposición arbitraria (reducible o no) de E, entonces</u>:

$$\text{amp}(E) = \sum_{q \in Q} \text{amp}(E_q)$$

<u>En particular, dados los subsemimódulos suplementarios M, N de E, se cumple</u>:

$$\text{amp}(E) = \text{amp}(M) + \text{amp}(N)$$

(iv) <u>Si M es sumando directo de E, entonces</u> :

$$\text{amp}(E/M) + \text{amp}(M) = \text{amp}(E)$$

(v) <u>Dada la sucesión exacta y escindida de homomorfismos de A-semimódulos</u>:

$$0 \to F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \to 0$$

<u>en donde Z(E) = 0</u>, <u>entonces Z(F) = Z(G) = 0 y</u>

$$\text{amp}(E) = \text{amp}(F) + \text{amp}(G)$$

(vi) <u>Sea:</u>

$$E_o = 0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots\ldots \subseteq E_{n-1} \subseteq E_n = E$$

<u>una sucesión de sumandos directos del A-semimódulo</u> E, Z(E) = 0, <u>de amplitud finita; se cumple</u>:

$$\text{amp}(E) = \sum_{r=1}^{r=n} \text{amp}(E_r/E_{r-1})$$

(vii) Sea:

$$0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots\ldots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$$

una sucesión exacta y escindida de homomorfismos de A-semimódulos sin opuestos y de amplitud finita; se verifica:

$$\sum_{r=1}^{r=n} (-1)^r \operatorname{amp}(E_r) = o$$

Demostración de 13):

(i) y (ii):

$$\operatorname{amp}(E) = \operatorname{card}(I) = \sum_{s \in S} \operatorname{card}(I_s)$$

por ser $(I_s)_{s \in S}$ una partición de I.

De $E \approx F$, se deduce del teorema 7) de la descomposición canónica, y usando la misma nomenclatura que allí:

$$\operatorname{card}(I_s) = \operatorname{card}(J_s) \ , \ \forall\, s \in S$$

por lo que:

$$\operatorname{amp}(E) = \sum_{s \in S} \operatorname{card}(I_s) = \sum_{s \in S} \operatorname{card}(J_s) = \operatorname{amp}(F)$$

como:

$$\operatorname{amp}(E_s) = \operatorname{card}(I_s) \ , \ \forall\, s \in S$$

entonces:

$$\sum_{s \in S} \operatorname{card}(I_s) = \sum_{s \in S} \operatorname{amp}(E_s)$$

con lo que hemos obtenido (i) y (ii).

13)(iii):

Designe $E_q = \bigoplus_{i_q \in I_q} E_{i_q}$ la descomposición irreducible de $E_q$, $\forall\, q \in Q$; entonces:

$$E = \bigoplus_{q \in Q} E_q = \bigoplus_{q \in Q} \left( \bigoplus_{i_q \in I_q} E_{i_q} \right) = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

es la descomposición irreducible de E, por lo que $(I_q)_{q \in Q}$ constituye una partición de I; de lo cual se deduce:

$$\mathrm{amp}(E) = \mathrm{card}(I) = \sum_{q \in Q} \mathrm{card}(I_q) = \sum_{q \in Q} \mathrm{amp}(E_q), \text{ c.q.d.}$$

(iv) es consecuencia de §9,7), y de 13) (iii) y (II).

(v) Imf = Ker g es, por hipótesis, sumando directo de E, sea N un suplementario de Imf en E; se cumple:

$E/\mathrm{Imf} \approx$ [illegible] $\approx N \ , \ F \approx \mathrm{Imf}$

en virtud de (ii) y de (iii), se obtiene (v).

(vi) y (vii) se desprenden de (v), al seguir un proceso demostrativo formalmente idéntico al efectuado en §6,13) y 14), respectivamente, y considerando que las sucesiones que intervienen ahora en la demostración son exactas y escindidas.

Hemos definido, bajo hipótesis adecuadas, long(E). amp(E), dim(E); nos proponemos analizar qué relaciones existen entre estos números cardinales y en qué casos son iguales, Una vez efectuado este análisis, enunciaremos proposiciones acerca de dim(E).

14) Las mismas hipótesis y notaciones que en 13).

<u>Sea E de longitud finita, entonces</u>:

$$\text{(i) } \mathrm{long}(E) \geqslant \sum_{s \in S} \mathrm{amp}(E_s) \times \mathrm{long}(P_s) \geqslant \mathrm{amp}(E)$$

Si E cumple la condición de Jordan-Hölder, entonces (ii) y (iii):

(ii) $$\operatorname{long}(E) = \sum_{s \in S} \operatorname{amp}(E_s) \times \operatorname{long}(P_s) \geq \operatorname{amp}(E)$$

(iii) la condición necesaria y suficiente para que:

$$\operatorname{long}(E) = \operatorname{amp}(E)$$

es que todos los sumandos de la descomposición irreducible de E sean simples.

15) Las mismas hipótesis y notaciones que en 12).

Cumpla $A_i$ la propiedad II) (ver 9)), entonces todo A-semimódulo a la izquierda libre es dimensional que satisface:

(i) $$\operatorname{amp}(E) = \operatorname{amp}(A_i) \times \dim(E)$$

En particular, sea $A_i$ de longitud finita, E sea A-semimódulo a la izquierda libre; se verifica:

(ii) $$\operatorname{amp}(E) = \dim(E)$$

si y sólo si a) E es de dimensión infinita, o

b) E es de dimensión finita y $A_i$ es indescomponible.

16) Las mismas hipótesis y notaciones que en 12).

Si E es A-semimódulo a la izquierda libre y $A_i$, E satisfacen la condición de Jordan-Hölder, entonces:

$$\operatorname{long}(E) = \operatorname{long}(A_i) \times \dim(E)$$

17) Las mismas hipótesis y notaciones que en 12).

Sea $A_i$ indescomponible y consideremos en lo que sigue A-semimódulos "a la izquierda".

(i) Todo A-semimódulo libre E es dimensional que cumple:

$$\dim(E) = \operatorname{amp}(E)$$

(ii) dim (E) es invariante respecto de los isomorfismos.

Todo sumando directo de un A-semimódulo libre es libre.

(iii) Dada la descomposición $E = \bigoplus_{q \in Q} E_q$ (reducible o no) del A-semimódulo libre E, se verifica:

$$\dim(E) = \sum_{q \in Q} \dim(E_q)$$

(iv) Cualquiera que sea el sumando directo M del A-semimódulo libre E, se cumple:

$$\dim(M) + \dim(E/M) = \dim(E)$$

(v) Sea:

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

una sucesión exacta y escindida de homomorfismos de A-semimódulos; si E es libre, entonces F y G son libres, cumpliéndose:

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

(vi) Si:

$$E_o = 0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots\ldots \subseteq E_{n-1} \subseteq E_n = E$$

es una sucesión de sumandos directos del A-semimódulo libre E de dimensión finita, se cumple:

$$\dim(E) = \sum_{r=1}^{r=n} \dim(E_r/E_{r-1})$$

(vii) Sea:

$$0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots\ldots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$$

una sucesión exacta y escindida de homomorfismos de A-semimódulos libres de dimensión finita; se verifica:

$$\sum_{r=1}^{r=n} (-1)^r \dim(E_r) = o$$

Demostraciones:

14) (i): De §9,12 y de que la "long" es invariable respecto de los isomorfismos, se deduce:

$$\mathrm{long}(P_s^{(I_s)}) > \mathrm{card}(I_s) \times \mathrm{long}(P_s) \text{ , } \forall\, s \in S$$

por estas mismas razones, y teniendo en cuenta 13 (i), se obtiene:

$$\mathrm{long}(E) \geqslant \sum_{s \in S} \mathrm{long}(P_s^{(I_s)}) \geqslant \sum_{s \in S} \mathrm{amp}(E_s) \times \mathrm{long}(P_s) \geqslant \sum_{s \in S} \mathrm{amp}(E_s) = \mathrm{amp}(E)$$

c.q.d.

Para mostrar (ii), basta partir de la fórmula §9,12, (2) y seguir el mismo razonamiento de antes.

(iii) es consecuencia inmediata de (ii).

Demostración de 15):

Si $A_i$ cumple la propiedad (II), entonces, según 11) el A-semimódulo libre E es dimensional que satisface (véase 9)).

$$\mathrm{card}(K_s) = \mathrm{card}(J_s) \times \mathrm{card}(B), \ \forall\, s \in S$$

siendo B una base de E; sumando miembro a miembro, haciendo uso de la propiedad distributiva del producto respecto de la adición (de números cardinales) y de la fórmula 13 (i), resulta:

$$\sum_{s \in S} \operatorname{card}(K_s) = \left(\sum_{s \in S} \operatorname{card}(J_s)\right) \times \dim(E)$$

esto es, la igualdad 15 (i).

La equivalencia expresada en 15 (ii), se deduce de la fórmula acabada de demostrar y de las definiciones de los términos que intervienen en su enunciado.

Demostración de 16.

De:

$$\operatorname{card}(K_s) = \operatorname{card}(B) \times \operatorname{card}(J_s),\ \forall\ s \in S$$

siendo B base de E, se deduce:

$$\operatorname{card}(K_s) \times \operatorname{long}(P_s) = \operatorname{card}(B) \times \operatorname{card}(J_s) \times \operatorname{long}(P_s),\ \forall\ s \in S$$

sumando miembro a miembro, haciendo uso de la propiedad distributiva y dos veces de la fórmula 14 (ii), se obtiene:

$$\operatorname{long}(E) = \operatorname{long}(A_i) \times \dim(E)$$

Demostración de 17:

(i) es consecuencia de 15 (ii).

(ii): que dim(E) es invariante respecto de los isomorfismos es consecuencia de 17 (i) y de 13 (ii).

Sea:

$$A_i \approx P_m\ ,\ m,\ \text{fijo} \in S;\ E \approx A_i^{(B)} \approx P_m^{(B)}\ ;$$

un sumando directo cualquiera M del A-semimódulo libre E, tendra por descomposición canónica $M \approx P_m^{(L_m)}$ , $\operatorname{card}(L_m) \leqslant \operatorname{card}(B)$, según afirma la proposición 7, por tanto $M \approx A_i^{(L_m)}$, c.q.d.

(iii) - (vii) son consecuencias de (i), (ii) y 13).

Definiciones:

Dada la descomposición canónica de un A-semimódulo sin opuestos:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)}$$

llamamos $\exp_s(E) = \operatorname{card}(I_s)$. Decimos que $P_s$ es <u>elemento superfluo</u> en E si y solo si $\exp_s(E) = o$ (esto es, $I_s = \emptyset$).

18) <u>Sean E y F dos A-semimódulos a la izquierda sin opuestos y de descomposición canónica de amplitud finita</u>:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} , \; F \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(J_s)}$$

<u>Si, para todo par</u> $P_s$, $P_r$ <u>de elementos no superfluos de E y F respectivamente,</u> $\mathrm{Hom}_A(P_s,P_r)$ <u>admite descomposición canónica</u>:

$$\mathrm{Hom}_A(P_s, P_r) \approx \bigoplus_{u \in U} T_u^{(W_u^{sr})}$$

<u>siendo</u> $\{\bar{T}_u\}_{u \in U}$ <u>el conjunto cociente de los</u> $N_o$<u>-semimódulos sin opuestos indescomponibles respecto de la relación "isomorfia de semimódulos", entonces el</u> $N_o$<u>-semimódulo</u> $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ <u>es sin opuestos y tiene por descomposición canónica</u>:

$$\mathrm{Hom}_A(E,F) \approx \bigoplus_{u \in U} T_u^{\left(\sum_{(s,r) \in S\times S} W_u^{sr} \times I_s \times J_r\right)}$$

<u>esto es, se verifica:</u>

$$\forall u \in U: \exp_u(\mathrm{Hom}_A(E,F)) = \sum_{(s,r) \in S\times S} \exp_u(\mathrm{Hom}_A(P_s,P_r)) \times \exp_s(E) \times \exp_r(F)$$

Demostración: Es obvio que:

a) Si $Z(F) = 0$, entonces, $Z(\mathrm{Hom}_A(E,F)) = 0$

b) Si $E_1 \approx E_2$, $F_1 \approx F_2$, entonces $\mathrm{Hom}_A(E_1,F_1) \approx \mathrm{Hom}_A(E_2,F_2)$

c) Si $P_i \approx Q_i$, $\forall\, i \in I$, entonces $\bigoplus_{i \in I} P_i \approx \bigoplus_{i \in I} Q_i$ .

Apoyándonos en a), b), c), en la proposición §12,6 (i) (considerando que, por hipótesis, E y F son de amplitud finita) y en la asociatividad y conmutatividad de la suma directa de semimódulos, se obtiene:

$$\mathrm{Hom}_A(E,F) \approx \mathrm{Hom}_A\Big(\bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} , \bigoplus_{r \in S} P_r^{(J_r)}\Big) \approx$$

$$\approx \bigoplus_{(s,r) \in S\times S} \mathrm{Hom}_A(P_s^{(I_s)} , P_r^{(J_r)}) \approx \bigoplus_{(s,r) \in S\times S} (\mathrm{Hom}_A(P_s,P_r))^{(I_s \times J_r)} \approx$$

$$\approx \bigoplus_{(s,r) \in S\times S} \Big( \bigoplus_{u \in U} T_u^{(W_u^{sr})}\Big)^{(I_s \times J_r)} \approx \bigoplus_{u \in U} \Big( \bigoplus_{(s,r) \in S\times S} T_u^{(W_u^{sr} \times I_s \times J_r)}\Big) \approx$$

$$\approx \bigoplus_{u \in U} T_u^{\left(\sum_{(s,r) \in S\times S} W_u^{sr} \times I_s \times J_r\right)} \quad , \text{ c.q.d.}$$

19) <u>Sea $\theta(A) = 0$, E un A-semimódulo a la izquierda sin opuestos que posee descomposición canónica de amplitud finita:</u>

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)}$$

<u>Si el A-semimódulo dual $P'_s$ de todo elemento $P_s$ no superfluo en E, admite descomposición canónica:</u>

$$P'_s \approx \bigoplus_{r \in R} Q_r^{(J_r^s)}$$

<u>siendo $\{\overline{Q}_r\}_{r \in R}$ el conjunto de las clases de A-semimódulos a la derecha indescomponibles y sin opuestos módulo "isomorfia", entonces el A-semimódulo dual E' de E admite la descomposición canónica:</u>

$$E' \approx \bigoplus_{r \in R} Q_r^{(\sum_{s \in S} J_r^s \times I_s)}$$

esto es, se verifica:

$$\forall\ r \in R:\ \exp_r(E') = \sum_{s \in S} \exp_r(P'_s) \times \exp_s(E)$$

Para demostrar 19 nos apoyamos principalmente en §13, 10.

Sea $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ la descomposición irreducible de E; según §13,10, $E' = \bigoplus_{i \in I} p'_i(E'_i)$, siendo $p_i : E \to E_i$ el proyector de E correspondiente al índice i, $p'_i : E'_i \to E'$ el homomorfismo traspuesto de $p_i$. De acuerdo con esa misma proposición §13,10, $p'_i(E'_i) \approx E'_i$, por tanto $E' \approx \bigoplus_{i \in I} E'_i$ ; de $E_i \approx P_s$ se deduce $E'_i \approx P'_s$ (véase 18) b); por tanto:

$$E' \approx \bigoplus_{s \in S} {P'_s}^{(I_s)} \approx \bigoplus_{s \in S} \left( \bigoplus_{r \in R} Q_r^{(J_r^s)} \right)^{(I_s)} \approx$$

$$\approx \bigoplus_{r \in R} \left( \bigoplus_{s \in S} Q_r^{(J_r^s \times I_s)} \right) \approx \bigoplus_{r \in R} Q_r^{(\sum_{s \in S} J_r^s \times I_s)}\ , \text{ c.q.d.}$$

20) <u>Sea E un A-semimódulo a la derecha, F un A-semimódulo a la izquierda, ambos libres de n-torsión y de descomposición canónica</u>:

$$E \approx \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} \quad , \quad F \approx \bigoplus_{r \in R} Q_r^{(J_r)}$$

<u>sea</u> $\{\overline{T}_u\}_{u \in U}$ <u>el conjunto cociente de los $N_o$-semimódulos sin opuestos e indescomponibles por la relación "isomorfia"</u>.

<u>Si, para todo par</u> $P_s$, $Q_r$ <u>de elementos no superfluos en E y en F respectivamente,</u> $P_s \otimes_A Q_r$ <u>admite la descomposición canónica</u>:

$$P_s \otimes_A Q_r \approx \bigoplus_{u \in U} T_u^{(W_u^{sr})}$$

<u>entonces el $N_o$-semimódulo</u> $E \otimes_A F$ <u>es libre de n-torsión</u> (esto es $Z(E \otimes_A F) = 0$)

y tiene por descomposición canónica:

$$E \otimes_A F \approx \bigoplus_{u \in U} T_u^{(\sum_{(s,r) \in SxR} W_u^{sr} \times I_s \times J_r)}$$

cumpliéndose por consiguiente:

$$\forall\ u \in U : \exp_u(E \otimes_A F) = \sum_{(s,r) \in SxR} \exp_u(P_s \otimes_A Q_r) \times \exp_s(E) \times \exp_r(F)$$

Con objeto de demostrar 20, probemos antes:

a) Si E,F son libres de n-torsión, entonces $E \otimes_A F$ es libre de n-torsión.

b) Si $E_1 \approx E_2$, $F_1 \approx F_2$, entonces $E_1 \otimes_A F_1 \approx E_2 \otimes_A F_2$.

a) : Es evidente que para que un A-semimódulo E sea libre de n-torsión es necesario y suficiente que Z(E) = 0 y que $E^* = E - \{o\}$ sea subsemimódulo circular (definición en §3,12) de E.

Por ser E y F libres de n-torsión, existen sendas congruencias genaralizadas de Rees R, S en E y F determinadas respectivamente por $E^*$ y $F^*$ (§3,12); sean $m: E \to E/R$, $n: F \to F/S$ los homomorfismos canónicos correspondientes; E/R consta sólo de dos elementos distintos {o,u} que verifican:

$$o + u = u,\ u + u = u;\ \forall\ a \in A\ ,\ a \neq o\ :\ ua = u$$

analogamente, F/S consta sólo de dos elementos {o,v} que verifica propiedades similares.

En virtud de 16,5), existe un homomorfismo $f = m \oplus n$: $E \otimes_A F \to E/R \otimes_A F/S = T$ tal que $(m \otimes n)(x \otimes y) = mx \otimes ny$. El $N_o$-semimódulo T tiene por sistema de generadores:

$$\{o \otimes o\ ,\ u \otimes o\ ,\ o \otimes v\ ,\ u \otimes v\}\ ;$$

es fácil comprobar que, debido a la definición dada de producto tensorial de semimódulos y a §3,24 , en T se cumple:

$$o \otimes o = u \otimes o = o \otimes v; u \oplus v \neq o \oplus o;$$

$$n_1(o \otimes o) + n_2(u \otimes o) + n_3(o \otimes v) + n_4(u \otimes v) = u \oplus v \text{ , si } n_4 \neq o$$
$$= o \oplus o \text{ , si } n_4 = o$$

significando esto que T consta solo de dos elementos $\{o \oplus o, u \oplus v\}$ y que f es isomorfismo.

Como $f^{-1}(o \otimes o) = Z(E \otimes_A F) = 0$, y como $\{(u \otimes v)\}$ es subsemimódulo circular de T, su imagen recíproca $f^{-1}(u \otimes v)$ es subsemimódulo circular de $E \otimes_A F$, por consiguiente, $E \otimes_A F$ es libre de n-torsión.

b): Sean $f: E_1 \to E_2$, $g: F_1 \to F_2$ los isomorfismos dados, entonces:

$$h = f \otimes g : E_1 \otimes_A F_1 \to E_2 \otimes_A F_2$$
$$k = f^{-1} \otimes g^{-1} : E_2 \otimes_A F_2 \to E_1 \otimes_A F_1$$

son dos homomorfismos (§16,5) que cumplen ( §16,5) (iii):

$$kh = (f^{-1} \otimes g^{-1})(f \otimes g) = (f^{-1}f) \otimes (g^{-1}g) = 1_{E_1} \otimes 1_{F_1} = 1_{E_1 \otimes_A F_1}$$

$$hk = 1_{E_2 \otimes_A F_2}$$

por tanto h y k son isomorfismo, el uno recíproco del otro.

En virtud de a), b), la proposición §16,8 (ii) y de la asociatividad de la suma directa de semimódulos, se obtiene:

$$E \otimes_A F \approx \left( \bigoplus_{s \in S} P_s^{(I_s)} \right) \otimes_A \left( \bigoplus_{r \in R} Q_r^{(J_r)} \right) \approx \bigoplus_{(s,r) \in S\times R} (P_s \otimes_A Q_r)^{(I_s \times J_r)} \approx$$

$$\approx \bigoplus_{(s,r) \in S\times R} \left( \bigoplus_{u \in U} T_u^{(W_u^{sr})} \right)^{(I_s \times J_r)} \approx \bigoplus_{u \in U} \left( \bigoplus_{(s,r)} T_u^{(W_u^{sr} \times I_s \times J_r)} \right) \approx$$

$$\approx \bigoplus_{u \in U} T_u^{\left(\sum_{(s,r) \in S\times R} W_u^{sr} \times I_s \times J_r\right)} \text{ , c.q.d.}$$

Familias distinguidas.

Descomposición reticular de un A-semimódulo.

El propósito de este apartado consiste en analizar un A-semimódulo E a la luz de los teoremas de unicidad y existencia de la descomposición irreducible de E/Z(E), supuesto $Z(E) \neq E$.

Si I es un conjunto no vacío, Pf(I) designará en lo sucesivo el retículo de las partes finitas de I, y P(I) el álgebra de Boole de las partes de I.

Definiciones.

Dada una familia no vacía de subsemimódulos $M = \{Q_i\}_{i \in I}$ del A-semimódulo E, se puede construir a partir de ella una nueva familia de subsemimódulos de E, que llamaremos "Pf-generada por M" y designaremos $Pf(M) = \{Q_J\}_{J \in Pf(I)}$, del modo:

$$a) \quad Q_\emptyset = \bigcap_{i \in I} Q_i \quad ; \quad b) \; Q_J = \sum_{i \in J} Q_i \, , \quad \forall\, J \in Pf(I) \,/\, J \neq \emptyset$$

También se puede construir una segunda familia a partir de M (que, en general, será distinta de Pf(M)) a la que denominaremos "familia P-generada por M", $P(M) = \{Q_K\}_{K \in P(I)}$, de la siguiente manera:

$$a') \quad Q_\emptyset = \bigcap_{i \in I} Q_i \quad ; \quad b') \; Q_K = \sum_{i \in K} Q_i \, , \quad \forall\, K \in P(I) \,/\, K \neq \emptyset$$

Diremos que $D = \{Q_i\}_{i \in I}$ es familia distinguida de E si y solo si D es familia no vacía de subsemimódulos cerrados de E que verifica los axiomas I y II.

I. $\forall\, i \in I$, $Q_i$ contiene estrictamente a Z(E).

II. Para todo elemento $x \in E$ existe una familia de elementos de E de soporte finito $\{\{x_i\}_{i \in I}, m\}$ tal que:

$$a) \quad x_i \in Q_i \, , \; m \in Z(E) \, , \; x = \sum_{i \in I} x_i + m$$

y b) para cualquier otra familia de elementos de E de soporte finito $\{\{y_i\}_{i \in I}, n\}$ que satisfaga $y_i \in Q_i$ , $n \in Z(E)$, $x = \sum_{i \; I} y_i + n$ existe una familia $\{m_i\}_{i \in I}$ de elementos de Z(E) que cumple $y_i = x_i + m_i$.

21). Sea E un A-semimódulo $(Z(E) \neq E)$ y sea $c: E \to E/Z(E)$ el homomorfismo canónico:

Si $D = \{Q_i\}_{i \in I}$ es una familia distinguida de E, entonces $E/Z(E) = \bigoplus_{i \in I} c(Q_i)$ es descomposición propia de E/Z(E); recíprocamente, si $E/Z(E) = \bigoplus_{i \in I} F_i$ es una descomposición propia de E/Z(E), entonces $\{c^{-1}(F_i)\}_{i \in I}$ es familia distinguida de E.

Mostremos la primera parte del enunciado; llamemos $c(Q_i) = F_i$; en virtud del axioma I) de familia distinguida $F_i \neq 0$, $\forall\, i \in I$; sea $\bar{x}$ un elemento arbitrario de E/Z(E) y sea $x \in \bar{x}$, en virtud del axioma II) de familia distinguida, existe una familia de elementos de E de soporte finito $\{\{x_i\}_{i \in I}, m\}$ tal que $x = \sum_{i \in I} x_i + m$, $x_i \in Q_i$, $m \in Z(E)$, por tanto, $\bar{x} = \sum_{i\, I} \bar{x}_i$, $\bar{x}_i = c(x_i) \in F_i$, de soporte finito, lo que implica $E/Z(E) = \sum_{i \in I} F_i$. Sea $\bar{x} \in E/Z(E)$ tal que $\bar{x} = \sum \bar{x}_i = \sum \bar{y}_i$, $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i \in F_i$ (1) y sea $x \in \bar{x}$, $x_i \in \bar{x}_i$, $y_i \in \bar{y}_i$ ; de (1) se deduce $x \equiv \sum x_i \equiv \sum y_i$ módulo $N(Z(E))$, (véase la definición de congruencia normalizada en §3), y de aquí:

$x = \sum x_i + m = \sum y_i + n$, $m,n \in Z(E)$; en virtud del axioma II) b) existe una familia de elementos $\{m_i\}_{i \in I}$ de Z(E) tal que $y_i = x_i + m_i$ esto es, $\bar{x}_i = \bar{y}_i$, $\forall\, i \in I$, con lo que hemos mostrado que E/Z(E) es suma directa de la familia de subsemimódulos no nulos $\{F_i\}_{i \in I}$.

La segunda parte del enunciado se obtiene como consecuencia de §4,2) (iv) y de las definiciones dadas.

21) (ii) Toda familia distinguida $D = \{Q_i\}_{i \in I}$ de un A-semimódulo E satisface:

a) $E = \sum_{i \in I} Q_i$

b) Si card (I) > 1, entonces $\forall\, i,j \in I$, $i \neq j$, $Q_i \cap Q_j = Z(E)$.

a) es válido en virtud del axioma II) de familia distinguida.

b) Llamemos de nuevo $c(Q_i) = F_i$, $c: E \to E/Z(E)$; por ser $Q_i$ saturado de E por c (según la proposición §4,3) (iv)) se verifica:

$$Q_i = c^{-1}(F_i) \text{ , } \forall\, i \in I \text{ ;}$$

en virtud de la proposición 21) $F_i \cap F_j = 0$, $\forall\, i,j \in I$, $i \neq j$, luego:

$$Q_i \cap Q_j = c^{-1}(F_i) \cap c^{-1}(F_j) = c^{-1}(F_i \cap F_j) = Z(E) \text{ , c.q.d.}$$

22) La familia $\{Q_J\}_{J \in Pf(I)}$ Pf-generada por cualquier familia distinguida $D = \{Q_i\}_{i \in I}$ del A-semimódulo E satisface:

a) $E = \bigcup\limits_{J \in Pf(I)} Q_J$

b) $\forall\, J \in Pf(I)$ : $Q_J$ es subsemimódulo cerrado de E.

c) $Pf(D) = \{Q_J\}_{J \in Pf(I)}$ constituye respecto de la unión lineal y la intersección conjuntista un retículo isomorfo a $Pf(I)\{\,,\cup\,,\cap\,.\}$

23) La familia $\{Q_K\}_{K \in P(I)}$ P-generada por cualquier familia distinguida $D = \{Q_i\}_{i \in I}$ del A-semimódulo E satisface:

a) $E = \bigcup\limits_{K \in P(I)} Q_K$

b) $\forall\, K \in P(I)$ : $Q_K$ es subsemimódulo cerrado de E.

c) $P(D) = \{Q_K\}_{K \in P(I)}$ constituye respecto de la unión lineal y la intersección conjuntista un álgebra de Boole isomorfa a $\{P(I)\ ,\cup\,,\cap\}$

Tanto 22)a) como 23 a) son de comprobación inmediata: 22)a) en virtud del axioma II) de familia distinguida, 23)a) es válido puesto que:

$$E = \mathop{}_{J \in Pf(I)} Q_J \subseteq \mathop{}_{K \in P(I)} Q_K \subseteq E$$

Mostremos 23)b) y 22)b)

Sea $K \in P(I)$ y llamemos $c(Q_i) = F_i$, $F_K = \sum\limits_{i \in K} F_i$; demostraremos que $Q_K$ , $\forall\, K \in P(I)$ es subsemimódulo cerrado de E saturado por c. En efecto, se cumple:

(1) $c(Q_K) \subseteq F_K$ , ya que $x \in Q_K \Longrightarrow x = \sum\limits_{i \in K} x_i$ , $x_i \in Q_i$ , $i \in K \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow c(x) = \sum_{i \in K} c(x_i)\ ,\ c(x_i) \in F_i\ ,\ i \in K \Longrightarrow c(x) \in F_K$$

(2) $c^{-1}(F_K) \subseteq Q_K$ ya que $x \in c^{-1}(\bar{x})$ , $\bar{x} \in F_K$ ==>

$$==> x \equiv \sum_{i \in K} c^{-1}(\bar{x}_i) \text{ mód } N(Z(E)) \text{ , } \bar{x}_i \in F_i ==> x = \sum_{i \quad K} c^{-1}(\bar{x}_i) + m \text{ ,}$$

$$m \in Z(E) ==> x \in Q_K$$

De (1) y de (2) se deduce:

$$c^{-1}c(Q_K) \subseteq c^{-1}(F_K) \subseteq Q_K;$$

como: $Q_K \subseteq c^{-1}c(Q_K)$, se obtiene:

$$Q_K = c^{-1}(F_K) = c^{-1}c(Q_K) \text{ , } \forall K \in P(I) \text{ ;}$$

puesto que $F_K$ es subsemimódulo cerrado de E/Z(E), como es fácil comprobar, las igualdades anteriores y §4,2 (iv) aseguran que $Q_K$ es subsemimódulo cerrado de E saturado por c, cualquiera que sea $K \in P(I)$.

Probemos 23 c). Sigamos con la misma notación : $c(Q_i) = F_i$, sea:

$$F_K = \sum_{i \in K} F_i \text{ , } \forall K \in P(I) \ / \ K \neq \emptyset \text{ ; } F_\emptyset = 0 \text{ ;}$$

el conjunto $T = \{F_K\}_{K \in P(I)}$ cuyos elementos son subsemimódulos cerrados y no nulos de E/Z(E), forma un álgebra de Boole respecto a la unión lineal y la intersección isomorfa a $\{P(I) \ , \cup \ , \cap\}$, ya que $\beta$: $F_K \to K$ es una correspondencia biunívoca y se verifica:

$$\bigcap_{K \in L} F_K = F_{\bigcap_{K \in L} K} \text{ ; } \sum_{K \in L} F_K = F_{\bigcup_{K \in L} K}$$

cualquiera que sea la familia $L$ de partes de I.,

Por otra parte, la aplicación $c^{-1}$ : $T \to P(D)$ tal que $c^{-1}(F_K) = Q_K$ $\forall K \in P(I)$, es suprayectiva e inyectiva que cumple (i) y (ii):

$$\text{(i)}\quad c^{-1}\Big(\bigcap_{K\in L} F_K\Big) = \bigcap_{K\in L} c^{-1}(F_K)$$

$$\text{(ii)}\quad c^{-1}\Big(\sum_{K\in L} F_K\Big) = \sum_{K\in L} c^{-1}(F_K)$$

cualquiera que sea la familia $L$ de partes de I.

En efecto, (i) es válido en virtud de las equivalencias:

$$x \in c^{-1}\Big(\bigcap_{K\in L} F_K\Big) \iff c(x) \in \bigcap_{K\in L} F_K \iff c(x) \in F_K\ ,\ \forall\, K \in L \iff$$

$$\iff x \in c^{-1}(F_K)\ ,\ \forall\, K \in L \iff x \in \bigcap_{K\in L} c^{-1}(F_K)$$

(ii) Se verifica, puesto que:

$$x \in c^{-1}\Big(\sum_{K\in L} F_K\Big) \implies c(x) \in \sum_{K\in L} F_K \implies c(x) = \sum_{K\in L} f_K\ ,\ f_K \in F_K \implies$$

$$\implies x \equiv \sum_{K\in L} c^{-1}(f_K) \text{ mód } N(Z(E)) \implies x = \sum_{K\in L} c^{-1}(f_K) + m\ ,\qquad m \in Z(E) \implies$$

$$\implies x \in \sum_{K\in L} c^{-1}(F_K)$$

$$x \in \sum_{K\in L} c^{-1}(F_K) \implies x = \sum_{K\in L} x_K\ ,\ x_K \in c^{-1}(F_K) \implies c(x) = \sum_{K\in L} c(x_K)\ ,$$

$$,\ c(x_K) \in F_K \implies c(x) \in \sum_{K\in L} F_K \implies x \in c^{-1}\Big(\sum_{K\in L} F_K\Big)$$

Por consiguiente, $c^{-1}$: $T \to P(D)$ es un isomorfismo de álgebras de Boole; componiendo ambos isomorfismos $c^{-1}\cdot\beta^{-1}$ : $P(I) \to P(D)$, se obtiene 23) c). 22)c) se demuestra de modo análogo.

Por satisfacer Pf(D), siendo D familia distinguida del A-semimódulo E, las condiciones a), b) y c) de 22), decimos que Pf(D) es una descomposición reticular de E. Análogamente, en virtud de 23) a), b) y c), decimos que P(D) es una descomposición de E en un álgebra de Boole (cuyos elementos son subsemimódulos cerrados de E y cuyas operaciones son la unión lineal y la intersección conjunta).

Consideremos el conjunto $F_E$ de todas las familias distinguidas del A-semimódulo E ($Z(E) \neq E$), entre las cuales contamos también a la familia distinguida $\{E\}$, que llamaremos "trivial", y establezcamos una relación de orden entre los elementos de $F_E$ de este modo:

Sean $C = \{Q_i\}_{i \in I}$, $D = \{R_s\}_{s \in S}$ dos familias distinguidas de E, deducimos que:

$$(\mathcal{E}) \quad C \leqslant D \iff Q_i = \sum_{s \in S_i} R_s = R_{S_i}, \ \forall\, i \in I$$

siendo $\{S_i\}_{i \in I}$ una partición de S.;

24) (i) Si $C, D \in F_E$, entonces $C \leqslant D \iff P(C) \subseteq P(D)$.

$C \leqslant D \implies P(C) \subseteq P(D)$ es inmediato. Mostremos la recíproca. De $P(C) \subseteq P(D)$ se deduce $C \subseteq P(D)$. Sea $C = \{Q_i\}_{i \in I}$, $D = \{R_s\}_{s \in S}$, $Q_i = R_{K_i}$, $\forall\, i \in I$; las igualdades $Q_i \cap Q_j = Z(E) = R_{K_i} \cap R_{K_j} = R_{K_i \cap K_j} = R_\emptyset$ implican $K_i \cap K_j = \emptyset$; las igualdades $\sum_{i \in I} Q_i = E = \sum_{i \in I} R_{K_i} = R_{\bigcup_{i \in I} K_i} = R_S$ implican $\bigcup_{i \in I} K_i = S$; por consiguiente, $\{K_i\}_{i \in I}$ es una partición de S, y $C < D$, c.q.d.

Como consecuencia de 21 y de 6 (i) - (v), se obtiene

24 (ii) El conjunto $F_E$ de todas las familias distinguidas de E es un semi-retículo respecto de la relación ($\mathcal{E}$) isomorfo al semiretículo $\mathcal{D}_{E/Z(E)}$ de las descomposiciones propias de E/Z(E).

(iii) Si $C = \{Q_i\}_{i \in I}$, $D = \{P_j\}_{j \in J}$ son dos familias distinguidas de E, entonces, suprimiendo en el conjunto $\{Q_i \cap P_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ todos los subsemimódulos de E tales que $Q_i \cap P_j = Z(E)$, se obtiene la mínima familia distinguida de E que es igual o más fina que C y, D.

24 (iv) La condición necesaria y suficiente para que exista una familia distinguida maximal según el orden ($\mathcal{E}$) en E es que E/Z(E) posea descomposición irreducible.

Si existe una familia distinguida maximal en E, ésta es única y máxima.

La condición necesaria y suficiente para que sólo exista en E la familia distinguida trivial es que E/Z(E) sea indescomponible.

Las proposiciones 24 (ii) (iv) que hemos obtenido acerca de las familias distinguidas de un A-semimódulo E, se pueden extender sin dificultad a las descomposiciones en álgebras de Boole de E, generadas por las familias distinguidas de E, ya que:

$$\{P(D) \, , \subseteq \}_{D \in \mathcal{F}_E}$$

es, como consecuencia de 24 (i), un semiretículo isomorfo a $\{\mathcal{F}_E, \leq \}$, y, por consiguiente, también isomorfo a $\{\mathcal{D}_{E/Z(E)} \leq \}$.

## BIBLIOGRAFIA


Abellanas, P.- Estructura de semigrupos conmutativos. Revista Matem. Hispano-Americana. 1965. 4ª s. tXXV

Bourbaki, N. - Eléments de Mathematique. Theorie des Ensambles, ch 3. Algebre, ch 1, ch 2.

Birkhoff, G.- Lattice Theory (Am. Math. Soc. vol XXV, 2ª ed.).

Clifford, A.H & Preston, G.B The Algebraic Theory of Semigroups (Am. Math. Soc.).

Dubriel, P .- Algebre (3ª ed.)

Hancock, V.R.- On complete semimodules, Proc. Am. Math. Soc. 11 (1960).

Rêdei, L. .- Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen.Halbgruppen (1963).

Rees, D. .- On semi-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. 35 (1940).