

CONSECUENCIAS PARA LA PREDICCIÓN DE LA EXISTENCIA DE CAOS UTILIZANDO MODELOS TAR

R. Gimenoⁱ, P. Grauⁱⁱ, L. Escotⁱⁱⁱ, R. Mateos^{iv} y E. Olmedo^v

ABSTRACT

En el presente trabajo se analizan las consecuencias que tiene para la predicción de datos de coyuntura española, en concreto para las importaciones nominales de bienes intermedios, la detección de indicios de comportamiento caótico. Para esta detección se ha utilizado una estimación de un modelo tipo umbral autorregresivo (TAR) y se ha representado gráficamente su diagrama de bifurcación. En concreto, se analizan las diferencias cuando el modelo presenta dinámica caótica y cuando no las presenta tanto en la estimación de los parámetros como en los errores de predicción.

ⁱ Departamento de Métodos Cuantitativos
Universidad Pontificia Comillas de Madrid
C/ Alberto Aguilera 23, 28015, Madrid, Spain
Correo Electrónico: rgimeno@upco.es

ⁱⁱ Departamento de Economía
Universidad Rey Juan Carlos
Campus de Vicálvaro, Paseo Artilleros, s/n, 28032, Madrid, Spain
Correo Electrónico: grau@fcsj.urj.es

ⁱⁱⁱ Departamento de Economía Aplicada III
Universidad Complutense
Campus de Somosaguas, 28223, Pozuelo de Alarcón, Madrid, Spain
Correo Electrónico: escot@ccee.ucm.es

^{iv} Departamento de Empresa
Universidad San Pablo-CEU
C/ Julián Romea, 23, 28003, Madrid, Spain
Correo Electrónico: matcab@ceu.es

^v Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla
Avda. Ramón y Cajal 1, 41018 Sevilla, Spain
Correo Electrónico: olmedo@us.es

1. INTRODUCCIÓN: MODELIZACIÓN NO LINEAL EN ECONOMÍA

Tradicionalmente, la Teoría Económica ha intentado explicar el complejo comportamiento de la realidad utilizando modelos lineales, sin embargo, no eran capaces de captar la riqueza de la dinámica observada. Además en estos modelos jugaban un papel fundamental las perturbaciones o shocks aleatorios ya que, sin su presencia, el comportamiento del modelo tendía a una situación de equilibrio estacionario o bien a una situación explosiva, ambas excesivamente simples. Por otro lado, los intentos de algunos autores (Karl Marx, J.M. Keynes, H. Minsky...) de proporcionar una explicación endógena al comportamiento de la economía no pasaron de ser meros apuntes en un plano teórico, ya que eran modelos demasiado complicados para su tratamiento mediante sistemas de ecuaciones tradicionales.

Pero la idea de una explicación endógena sigue siendo extremadamente atractiva. De esta manera se podrían explicar los cambios económicos de comportamiento en campos tan diversos como finanzas, inversión, empleo, nueva economía, etc. como consecuencia de la estructura económica, las instituciones, los usos y costumbres sociales, además de simplemente a través de shocks exógenos o cambios en los parámetros. La idea es introducir estas perturbaciones o cambios estructurales como explicación a crisis, pero sólo porque el sistema evoluciona hacia una situación de “fragilidad” que lo hace vulnerable a su presencia.

Para recoger la posible endogeneidad del comportamiento económico es necesario recurrir al empleo de sistemas de ecuaciones no lineales, en las que se ha producido un gran avance en los últimos años. Así, se han propuesto nuevos modelos, cada uno de ellos apropiado para diferentes situaciones. Como ejemplos se pueden citar:

- Modelos de Heterocedasticidad Condicional (ARCH y GARCH) de Engle [Engle, 1982] y Bollerslev [Bollerslev, 1986] usados para la modelización de volatilidades de los activos financieros.
- Modelos Estocásticos Fraccionalmente Integrados (ARFIMA) propuestos por Granger y Joyeux [Granger y Joyeux, 1980] y Hosking [Hosking, 1981] para la modelización de procesos con memoria a largo plazo.
- Modelos con Umbral (TAR) de Tong [Tong, 1990] empleados para describir cambios de régimen.
- Redes Neuronales como las usadas por White [White, 1989] como modelo global no paramétrico.
- Modelos de Predicción por Ocurrencias Análogas (vecinos próximos) desarrollados por Eckmann y Ruelle [Eckman y Ruelle, 1985] y Farmer y Sidorowich [Farmer y Sidorowich, 1987] para realizar predicciones a corto plazo a partir de comportamientos pasados similares
- Funciones *Wavelets* propuestas por Argoul et al. [Argoul et al., 1989] para intentar revelar estructuras mediante la adición de funciones de onda.
- Funciones de Base Radial introducidas por Broomhead y Lowe [Bromead y Lowe, 1988] para realizar predicciones globales a partir de combinaciones lineales de funciones campaniformes.
- Métodos de Ajuste Polinómico basados en la aproximación de los datos mediante polinomios de diversos órdenes.

En el presente trabajo se utiliza el modelo umbral TAR de Tong, ya que las series de coyuntura se utilizan frecuentemente para intentar predecir cambios de régimen, para lo cual resulta apropiado utilizar modelos tipo umbral.

Independientemente del modelo no lineal utilizado para describir la realidad que se está estudiando, a todos resulta aplicable la posibilidad de surgimiento de un comportamiento caótico, cuestión frecuentemente olvidada cuando se utilizan estos modelos, a pesar de que era tenida bien presente por los autores que los introdujeron (Es el caso de Tong, Eckmann y Ruelle o Farmer y Sidorowich). Y es que conviene recordar que virtualmente cualquier modelo dinámico no lineal es potencialmente caótico bajo determinadas condiciones.

En esencia, la teoría del caos muestra que una relación simple determinista, pero no lineal puede producir un comportamiento extremadamente complejo (para definiciones, consultar, por ejemplo, [Medio, 1992], [Shaffer, 1996], [Blank, 1996], [Yang y Brorsen, 1996], [Baumol y Quandt, 1996] y [Barnett y Choi, 1989]). La dinámica de estos sistemas puede presentar una apariencia de perturbaciones por *shocks* aleatorios y producir violentos y abruptos cambios cualitativos tanto con el paso del tiempo como a través de pequeños cambios en los valores de los parámetros. El movimiento caótico presenta, entre otros, los siguientes atributos,

- a) Una evolución temporal que muestra cambios bruscos cualitativos como los asociados a la presencia de perturbaciones aleatorias, de forma que al menos algunos de los contrastes de aleatoriedad estándar no pueden distinguir tales modelos caóticos de aquel comportamiento auténticamente aleatorio.

- b) Una trayectoria es extremadamente sensible a cambios microscópicos en los valores de los parámetros (un cambio en, por ejemplo, en el quinto lugar decimal de un parámetro puede cambiar el carácter cualitativo de la trayectoria)

- c) Las trayectorias nunca regresan a un punto por el que han pasado previamente, pero muestran en una región acotada un comportamiento casi oscilatorio que es, en consecuencia, muy desordenado.

Cuando aparece el caos la predicción económica se convierte en extremadamente difícil. La extrapolación y la predicción a través de la estimación de un modelo estructural, son cuestionables por las siguientes razones:

- Mientras que en un modelo lineal la precisión en la estimación de los parámetros tenía unas consecuencias muy limitadas, en los modelos no lineales, un pequeño error en dicha estimación puede cambiar el carácter cualitativo de la predicción hasta tal punto que sea imposible reconocer el comportamiento original del sistema.
- Incluso aún no teniendo error en la estimación de los parámetros (algo imposible con las herramientas econométricas) un pequeño error de medición de las variables explicativas, se amplifica de forma exponencial con el transcurso del tiempo hasta dar lugar a un resultado completamente diferente del previsto por el modelo.

Por ello, resulta imprescindible conocer si nuestro modelo no lineal puede presentar un comportamiento de tipo caótico o no, pues las predicciones derivadas de un sistema caótico no tendrían las mismas características que las predicciones que realizaríamos en el caso de que nuestro modelo no fuera caótico.

2. RELACIÓN ENTRE EL MODELO TAR Y LA FUNCIÓN TIENDA DE CAMPAÑA

Comencemos analizando la relación entre el modelo Threshold Autorregresivo (TAR) y la función tienda de campaña (tent map).

La noción de umbral [Tong, 1993] ha sido muy utilizada en numerosas disciplinas, y siempre asociada a la existencia de niveles de saturación. Como señala el mismo autor:

“Existen numerosos ejemplos de diversas disciplinas en los que es dominante la noción de un umbral: radio-ingeniería, ingeniería marina, servo-sistemas, oceanografía, biología de poblaciones, economía, hidrología, ingeniería, médica... Estos ejemplos muestran una característica común, que no es otra que la predominancia de un umbral, que es simplemente una reflexión acerca del hecho de que ‘la saturación está presente en todos sitios’.

“La idea básica de estos modelos es la aproximación local, es decir, la introducción de diferentes regímenes vía umbrales. Por conveniencia, nos referimos a esta idea como ‘principio umbral’, que permite el análisis de un sistema complejo descomponiéndolo en subsistemas más simples.”

El modelo umbral general se basa, por tanto, en el tratamiento del problema bajo un punto de vista no lineal, introduciendo la no linealidad a través de aproximaciones locales, considerando diferentes tipos de comportamiento dependiendo de la pertenencia a distintas situaciones. En concreto, el modelo umbral autorregresivo más sencillo distingue dos comportamientos autorregresivos con un retardo dependiendo de si los

valores anteriores de la variable analizada superan o no un determinado nivel (umbral).

En concreto, la formalización matemática de este modelo TAR sería la siguiente:

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 y_{t-1} + u_t & \text{si } y_{t-1} < \text{umbral} \\ \alpha_2 + \beta_2 y_{t-1} + u_t & \text{si } y_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

donde x_t y u_t denotan, respectivamente, los valor que toman la variable x y la perturbación aleatoria en el instante t , teniendo las perturbaciones las propiedades usuales.

Este modelo es muy similar a la función tienda de campaña

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} < \text{umbral} \\ \alpha_2 + \beta_2 y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

Resulta interesante considerar el modelo TAR como una generalización econométrica de la función tienda de campaña. De hecho, si las variables aleatorias a_t fueran degeneradas y tomaran el valor nulo con probabilidad unidad, ambos modelos serían iguales con probabilidad 1. Se puede comparar la dinámica generada por ambos sistemas (el tienda de campaña y el TAR) mediante sus correspondientes gráficos de telaraña (ver Figura 1 y Figura 2) para los modelos:

$$x_t = \begin{cases} 2 \cdot \beta \cdot x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} < \text{umbral} \\ 2 \cdot \beta - 2 \cdot \beta \cdot x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

tomando $\beta = 0.99$ y $\text{umbral} = 0.5$ el resultado es el de la Figura 1 y para su generalización TAR (con desviación típica 0.01 para la perturbación) es el mostrado en la Figura 2:

En ambos gráficos se percibe claramente la existencia de una dinámica compleja. La relación entre la complicación observada y los valores que toma el parámetro β puede

analizarse utilizando el diagrama de bifurcación o diagrama de Feigenbaum, en el que en el eje de abscisas los valores del parámetro β y en el eje de ordenadas el espacio de fases y para cada valor de β los puntos (β, x_k) correspondientes a puntos suficientemente avanzados de la órbita de un punto x_0 que se elige de forma arbitraria. en el sistema dinámico analizado. Este gráfico proporciona una idea muy clara de la dinámica del sistema y por este motivo, debido a su poder de síntesis ha sido muy utilizado para el análisis de modelos teóricos, como es el caso de Hommes [Hommes, 1994 y 1996].

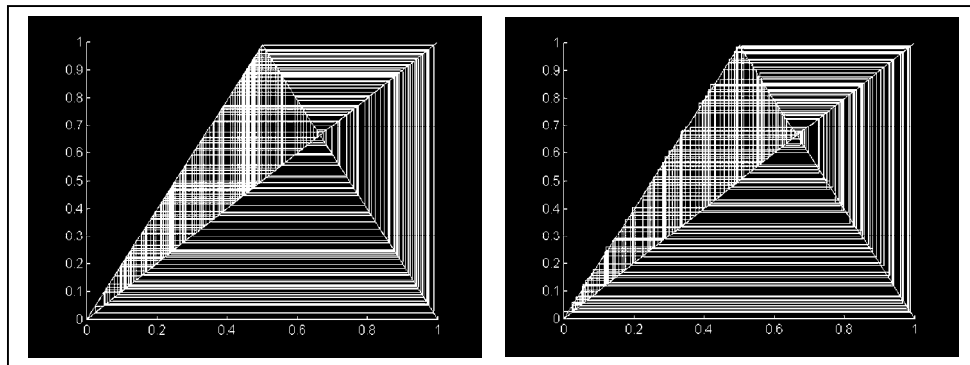


Figura 1. Gráficos de telaraña de la función tienda de campaña y de un modelo TAR

Para comprender el significado de este diagrama suele ser útil trabajar con la función logística $f(x) = \beta x(1-x)$, cuyo diagrama de bifurcación se representa en la Figura 2.



Figura 2. Diagrama de bifurcación de la función logística

Los puntos de corte de la gráfica obtenida con la vertical levantada sobre cierto valor de β corresponden a los puntos límites de la órbita de casi todos los puntos del intervalo $(0,1)$ en el sistema dinámico $((0,1), f_\beta(x))$. De esta forma, la recta levantada sobre cualquier valor de β anterior al que produce la primera bifurcación corta a la gráfica en un único punto, lo cual quiere decir que casi todos los puntos iniciales que pertenecen al intervalo $(0,1)$ se ven atraídos hacia este punto que será un punto fijo. La recta levantada sobre un valor de β situado entre los necesarios para la primera y segunda bifurcación corta a la gráfica en dos puntos, lo que significa que la órbita de casi todos los puntos pertenecientes al intervalo $(0,1)$ convergen a la órbita periódica de período 2 constituida por este par de puntos, y así sucesivamente. Para los valores de β para los que la recta vertical corta a la gráfica en una nube de puntos que llena un subintervalo de $(0,1)$ lo que ocurre es que la órbita de casi todos los puntos de $(0,1)$, en el sistema dinámico asociado a este valor del parámetro, vaga de forma errática llenando densamente este subintervalo. En otras palabras, se produce una dinámica caótica.

El diagrama de bifurcación correspondiente a la función tienda de campaña muestra un comportamiento caótico para valores del parámetro superiores a 0.5; en caso contrario la dinámica converge a un punto fijo estable igual a 0 (ver Figura 3).



Figura 3. Diagrama de bifurcación de la función tienda de campaña

3. CONSECUENCIAS PARA LA ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN DE LA EXISTENCIA DE CAOS EN EL MODELO TAR ESTIMADO

3.1. METODOLOGÍA

Partimos del modelo umbral correspondiente a la estimación del comportamiento de la serie mensual de Importaciones Nominales de Bienes Intermedios, desde enero de 1986 a diciembre de 1997). El modelo propuesto será:

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 y_{t-1} + u_t & \text{si } y_{t-1} < \text{umbral} \\ \alpha_2 + \beta_2 y_{t-1} + u_t & \text{si } y_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

donde y_t y a_t denotan, respectivamente, los valor que toman la variable x y la perturbación aleatoria en el instante t , teniendo las perturbaciones las propiedades usuales. El modelo estimado es:

$$\left. \begin{aligned} y_t &= -0.0119 - 0.6036y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} < c \\ y_t &= 0.3488 - 2.1274y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} \geq c \end{aligned} \right\}$$

y el diagrama de bifurcación de dicho modelo respecto al umbral c tiene la forma:

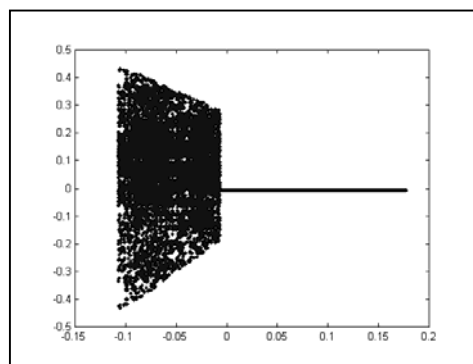


Figura 4. Diagrama de bifurcación del modelo TAR

En este diagrama de bifurcación existen claros indicios de comportamiento caótico. Por ejemplo, si el umbral es $c = 0$ la dinámica del sistema corresponde a la de un atractor puntual:

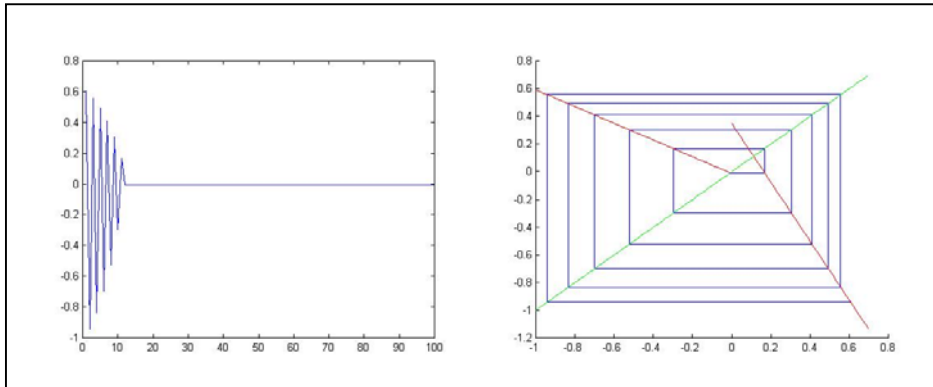


Figura 5. Dinámica simple generada en el modelo TAR en régimen no caótico

Sin embargo, si hacemos que el umbral sea $c = 0.01$, observamos que la dinámica del sistema corresponde con un atractor caótico:

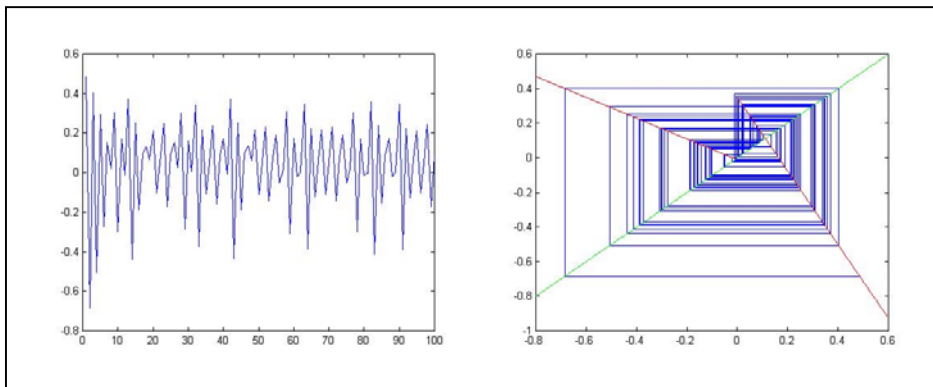


Figura 6. Dinámica compleja generada en el modelo TAR en régimen caótico

Partimos de estos dos modelos como base:

$$\left. \begin{aligned} y_t &= -0.0119 - 0.6036y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} < 0 \\ y_t &= 0.3488 - 2.1274y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{[No caos]}$$

$$\left. \begin{aligned} y_t &= -0.0119 - 0.6036y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} < -0.01 \\ y_t &= 0.3488 - 2.1274y_{t-1} & \text{si } y_{t-1} \geq -0.01 \end{aligned} \right\} \quad \text{[Caos]}$$

Y a continuación tratamos de analizar las consecuencias que tiene para la estimación y predicción del sistema que la existencia de caos en la ecuación base (sin perturbación aleatoria) del sistema dinámico.

Para ello se van a realizar 15000 simulaciones de la serie de perturbaciones u_t y a partir de ellas vamos a construir dos series de y_t , cada una de ellas con 300 valores:

$$\left. \begin{aligned} y_t^1 &= -0.0119 - 0.6036y_{t-1}^1 + u_t && \text{si } y_{t-1}^1 < 0 \\ y_t^1 &= 0.3488 - 2.1274y_{t-1}^1 + u_t && \text{si } y_{t-1}^1 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{[No caos]}$$

$$\left. \begin{aligned} y_t^2 &= -0.0119 - 0.6036y_{t-1}^2 + u_t && \text{si } y_{t-1}^2 < -0.01 \\ y_t^2 &= 0.3488 - 2.1274y_{t-1}^2 + u_t && \text{si } y_{t-1}^2 \geq -0.01 \end{aligned} \right\} \quad \text{[Caos]}$$

Estas series las utilizamos, una vez comprobado que no escapan a infinito, para estimar el modelo y para verificar la capacidad de predicción del mismo. Estas series las utilizamos para calcular:

1. La varianza de la serie de valores $\{y_t\}$, para comprobar si un modelo caótico añade más variabilidad a la serie o no.
2. La dispersión de estas varianzas de Y , para ver la precisión de esta cifra.
3. La estimación del umbral y los parámetros α_1 , β_1 , α_2 y β_2 , con sus correspondientes varianzas. Esto nos permite estudiar las repercusiones sobre la eficiencia de la estimación de los parámetros.
4. La varianza del error de estimación en relación con la varianza de la perturbación.
5. La varianza del error que cometemos al intentar el valor que va a tomar la serie con horizontes de predicción: 1, 2, 3, ..., 100, que se utiliza para estudiar la calidad de las predicciones para ambos modelos.

Estos cálculos se han repetido para diferentes valores de la varianza de las perturbaciones, para lo cual se han utilizado 166 valores distintos de dicha varianza.

3.2. RESULTADOS

Vamos a representar gráficamente los resultados obtenidos en cuanto a la esperanza de los estimadores de los cinco coeficientes implicados (ver Figura 7, Figura 8, Figura 9, Figura 10 y Figura 11).

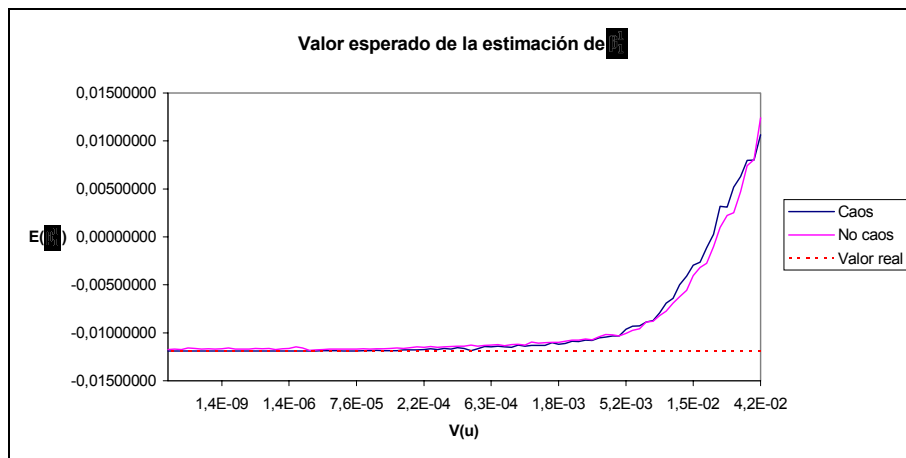


Figura 7

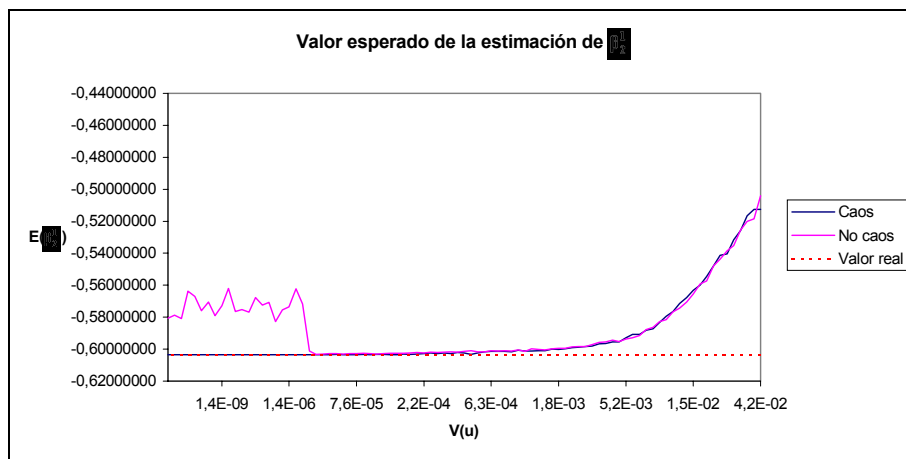


Figura 8

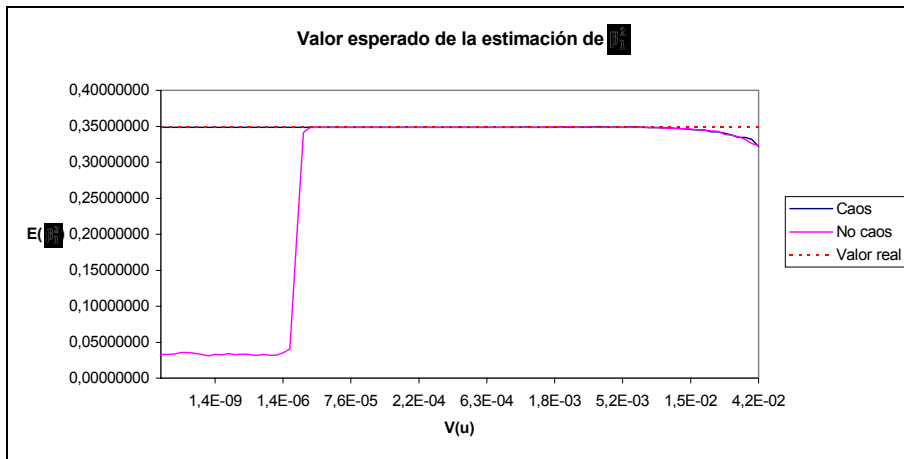


Figura 9

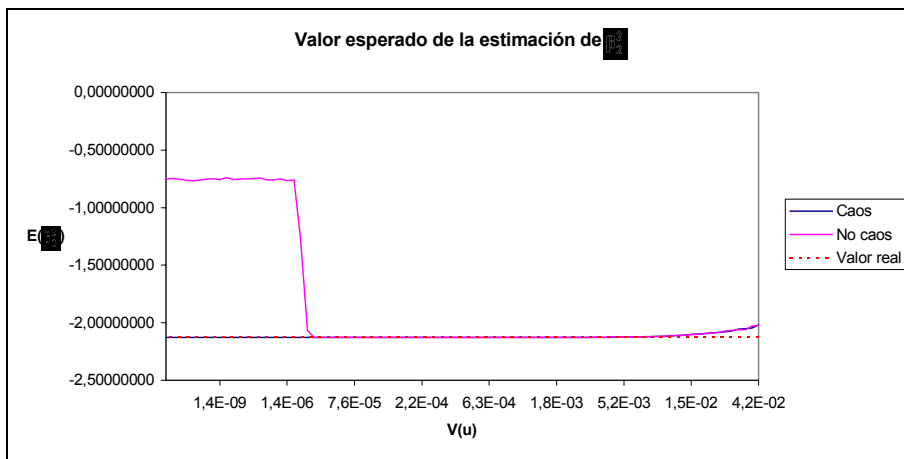


Figura 10

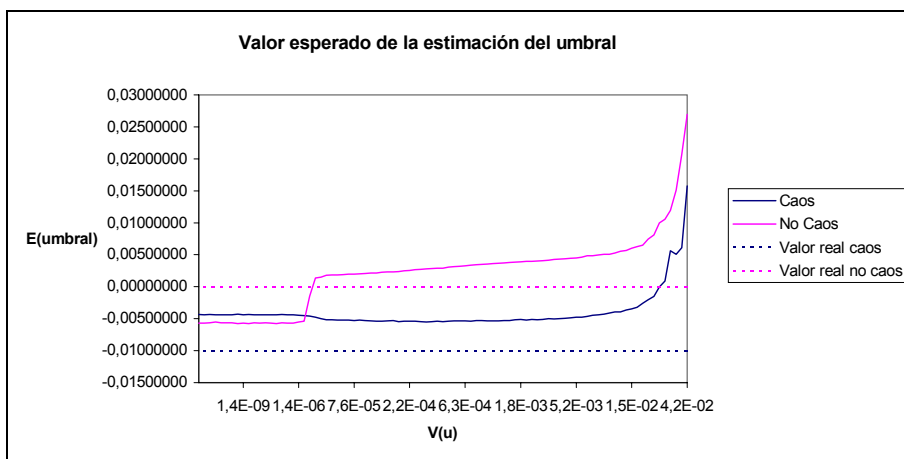


Figura 11

Como se observa, en todos los casos, salvo en el umbral, se obtienen unas buenas estimaciones de los parámetros, empeorando en algunos casos para los valores más elevados de la varianza de la perturbación, y en otros casos, y únicamente para el caso no caótico, para valores pequeños de dicha varianza.

Puede ayudar a entender estos resultados la representación gráfica de la varianza de dichas estimaciones:

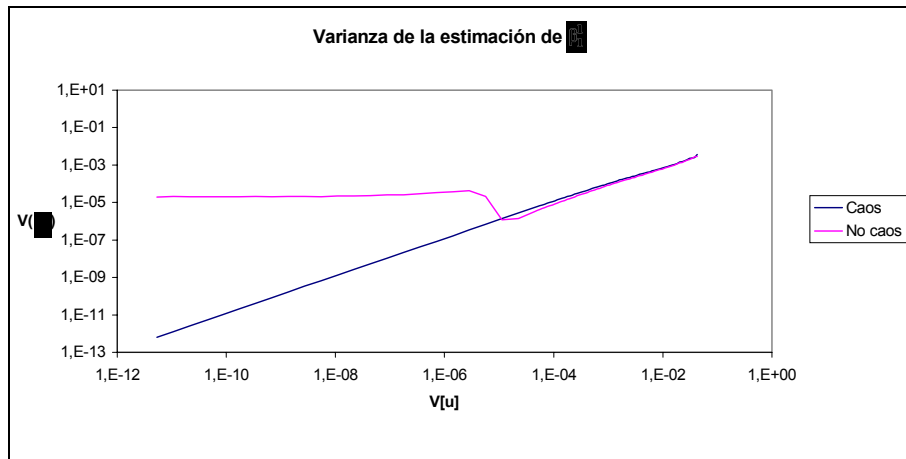


Figura 12

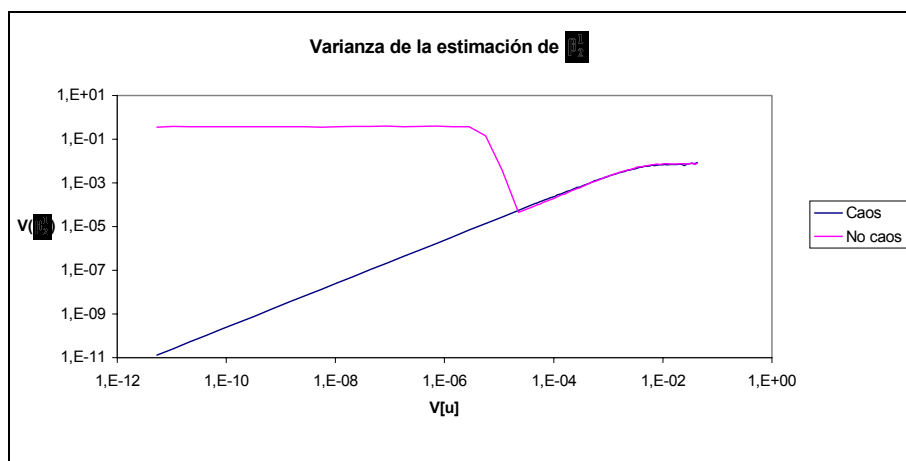


Figura 13

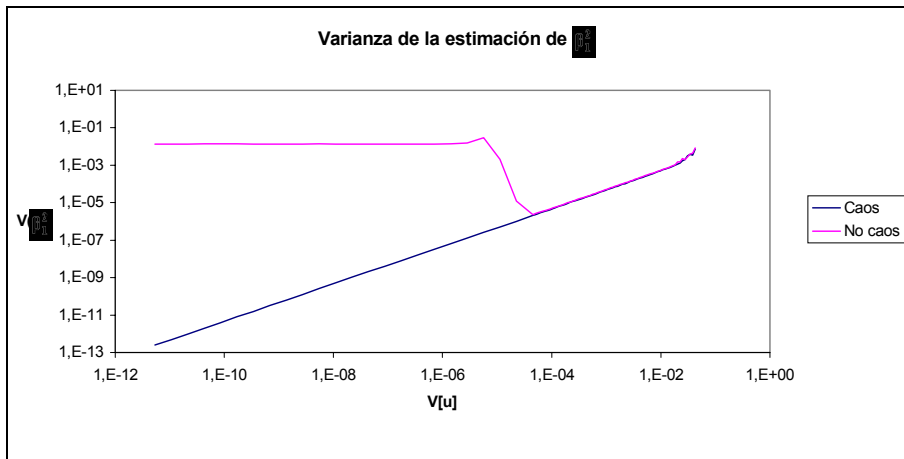


Figura 14

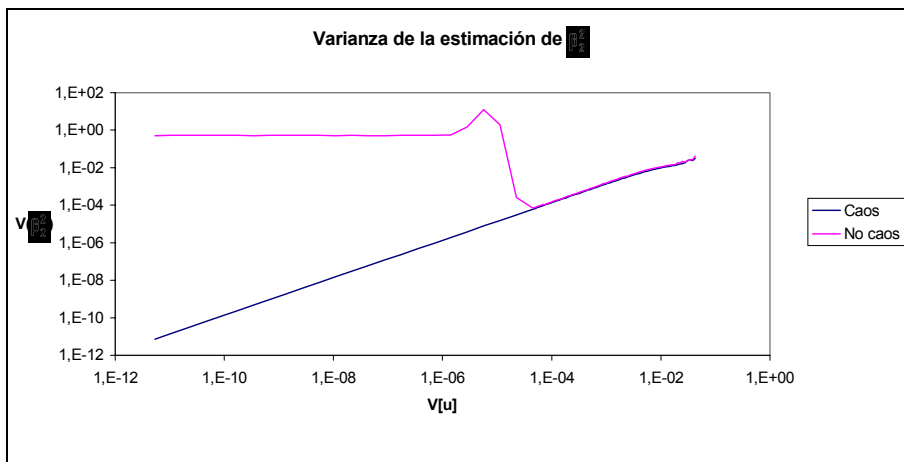


Figura 15

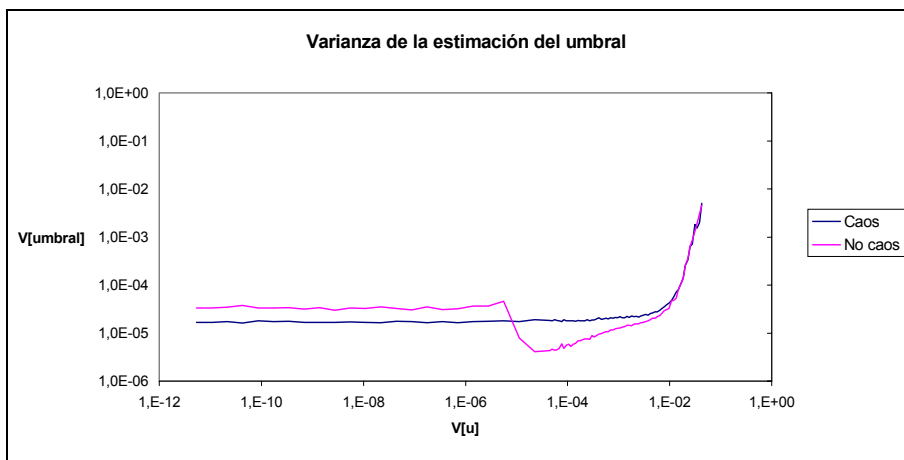


Figura 16

Estos comportamientos están muy relacionados con la varianza de la serie predicción ya que la precisión de la estimación mínimo-cuadrática está inversamente relacionada con la variabilidad de la variable dependiente. Por ese motivo, a continuación representamos gráficamente los resultados de la varianza de la serie de valores $\{y_t\}$ en función de la varianza de las perturbaciones.

En el gráfico de la Figura 17 se representa en azul el comportamiento de la varianza de la serie para el régimen caótico y en rojo para el régimen no caótico. En el primer caso se observa un comportamiento diferenciado según la varianza de la perturbación es baja o no: en el primer caso la varianza de la serie es constante y superior a la correspondiente al régimen no caótica. Por tanto, se puede concluir que está ocasionada por la sensibilidad a las condiciones iniciales. Para valores mayores de la varianza de la perturbación aleatoria esta misma variabilidad enmascara la propiedad de dependencia sensible, y la varianza de la serie crece pero pasa a tomar valores similares al caso no caótico.

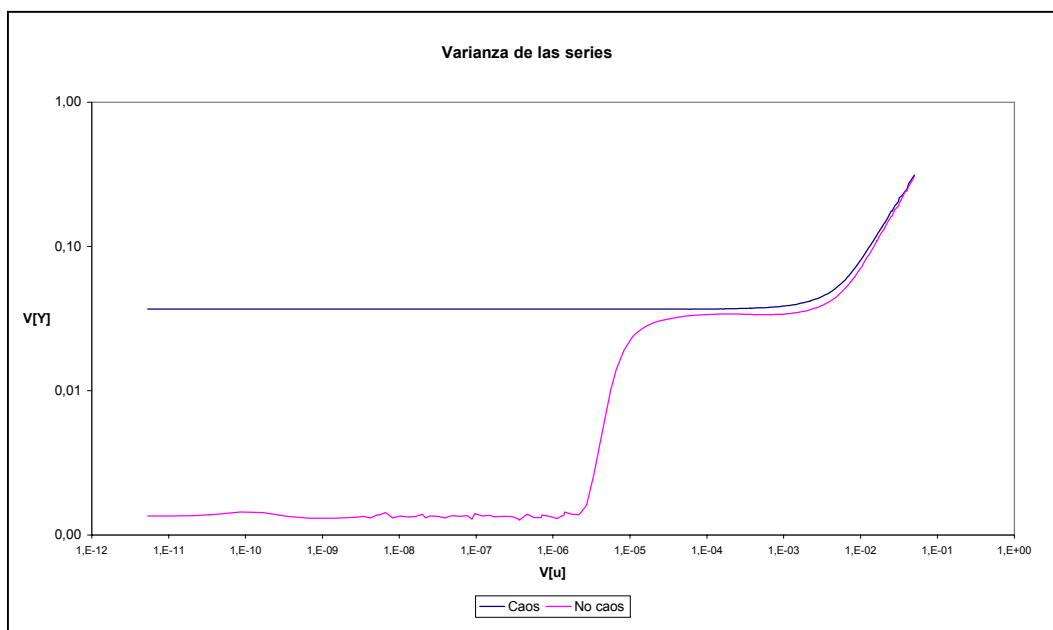


Figura 17. Varianza de la serie en función de la varianza de la perturbación

En cuanto al comportamiento de la varianza de la serie cuando el régimen del modelo es no caótico, se pueden diferenciar claramente tres regiones, que se muestran en la gráfica de la Figura 18:

1. La primera es básicamente igual que la caótica: la varianza de la perturbación es tan alta que el comportamiento de la serie es básicamente similar al comportamiento caótico.
2. En la segunda fase, la varianza de la perturbación es relativamente pequeña, por lo que el modelo se mueve en torno al valor del equilibrio. Las pequeñas variaciones experimentadas por la perturbación aleatoria son suficientes, sin embargo, para hacer saltar a la variable y de un régimen a otro del modelo. Por este motivo, el comportamiento no es del todo distinto al caótico.
3. En la tercera región, por el contrario, la varianza de la perturbación es tan pequeña que es muy poco probable el salto de una región a otra del modelo. Por este motivo, la variabilidad de la serie es muy baja.

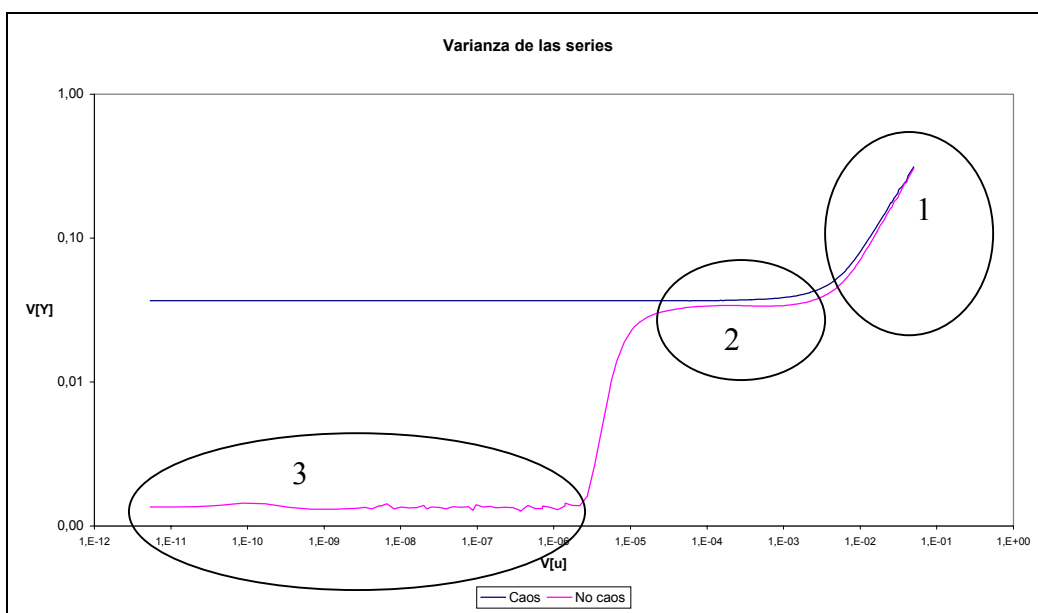


Figura 18: Tres regiones en la varianza de la serie no caótica

3.2.1. REGIÓN 1

La Región 1 corresponde a valores altos de la varianza de la perturbación, por lo que, al simular el comportamiento de la variable y en dicha región, se obtienen valores con una alta variabilidad, tanto en la región caótica como en la no caótica, como se observa en las siguientes gráficas:

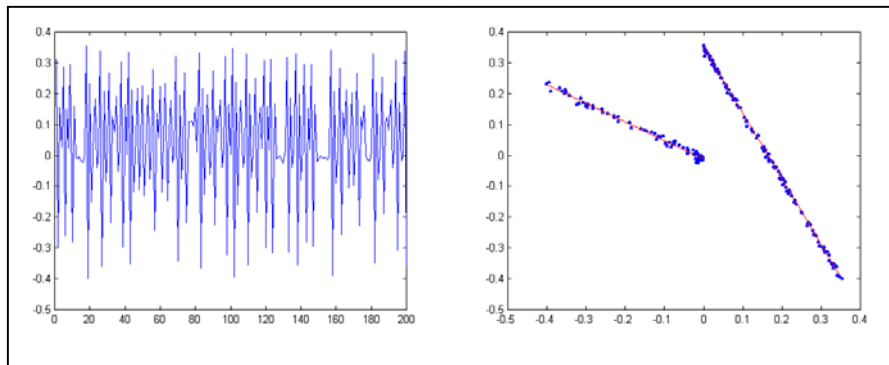


Figura 19. Comportamiento de la serie y del modelo estimado para la Región 1 en el régimen no caótico

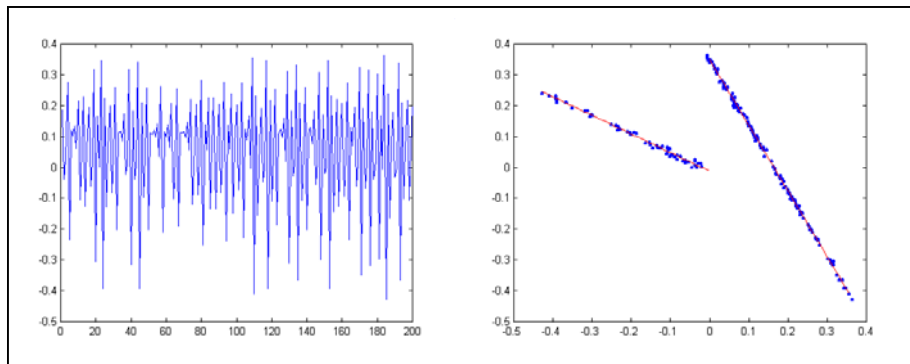


Figura 20. Comportamiento de la serie y del modelo estimado para la Región 1 en el régimen caótico

La semejanza entre estos dos tipos de comportamiento se explica, como ya se ha mencionado antes, por los valores excesivamente altos de la varianza de la perturbación. Su variabilidad es tanta que, por decirlo de alguna manera, cubre toda la variabilidad de la serie, y este fenómeno hace incapaz de distinguir el comportamiento bajo el régimen no caótico (Figura 19) del correspondiente al régimen caótico (Figura 20).

La similitud entre ambas series puede también verificarse comparando sus varianzas, que se muestran en la Figura 21.

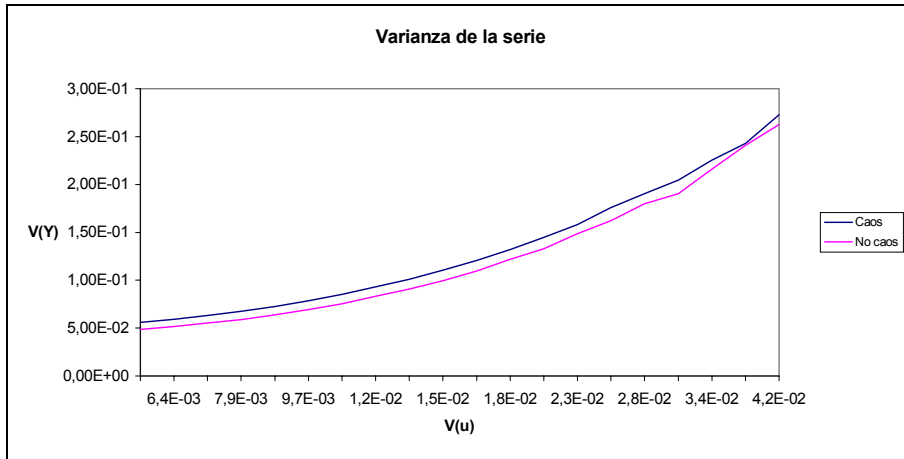


Figura 21. Comparación entre la varianza de la serie en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

Como consecuencia de esta similitud, tampoco diferirán en gran medida las estimaciones de los parámetros bajo uno u otro régimen en la Región 1, como se observa en las siguientes gráficas (Figura 22, Figura 23, Figura 24, Figura 25 y Figura 26).

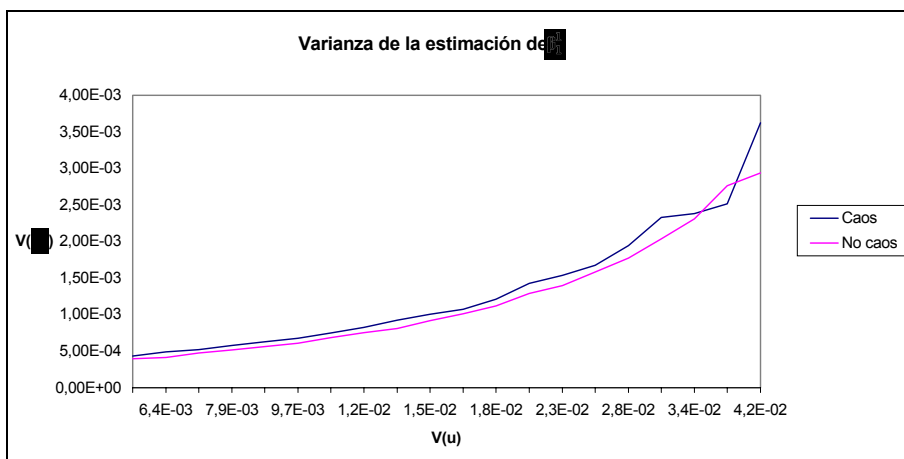


Figura 22. Comparación entre la varianza de la estimación de β_1^1 en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

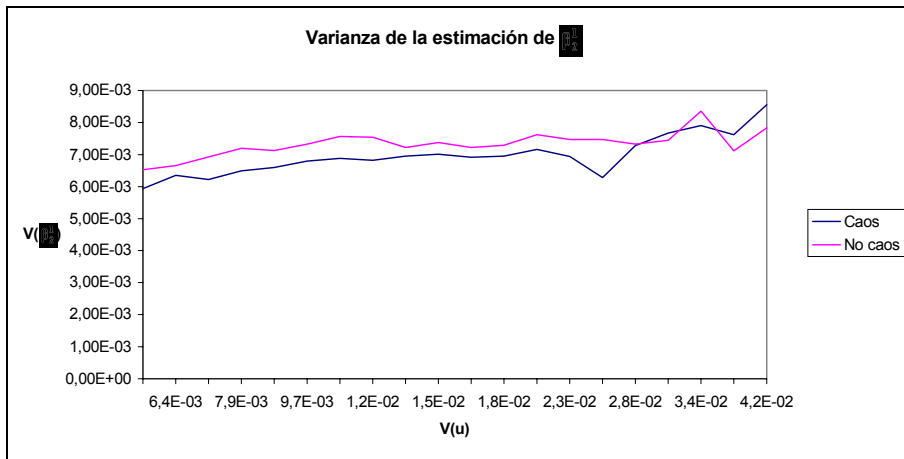


Figura 23. Comparación entre la varianza de la estimación de β_2^1 en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

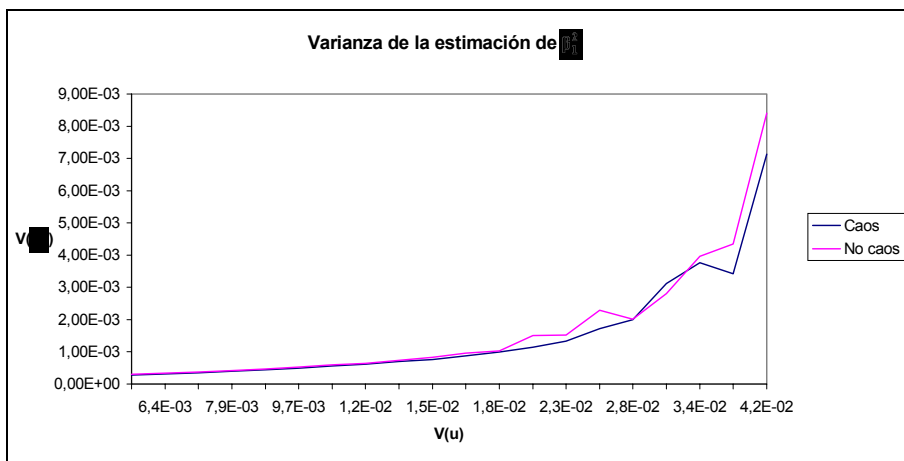


Figura 24. Comparación entre la varianza de la estimación de β_1^2 en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

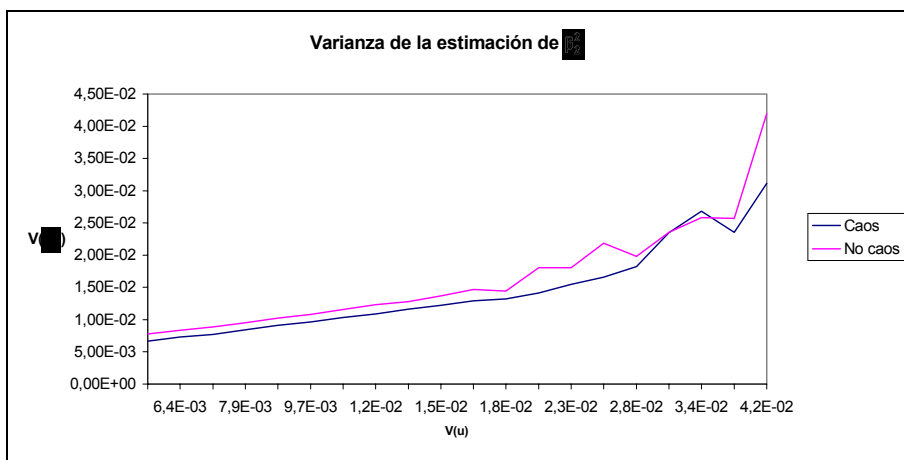


Figura 25. Comparación entre la varianza de la estimación de β_2^2 en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

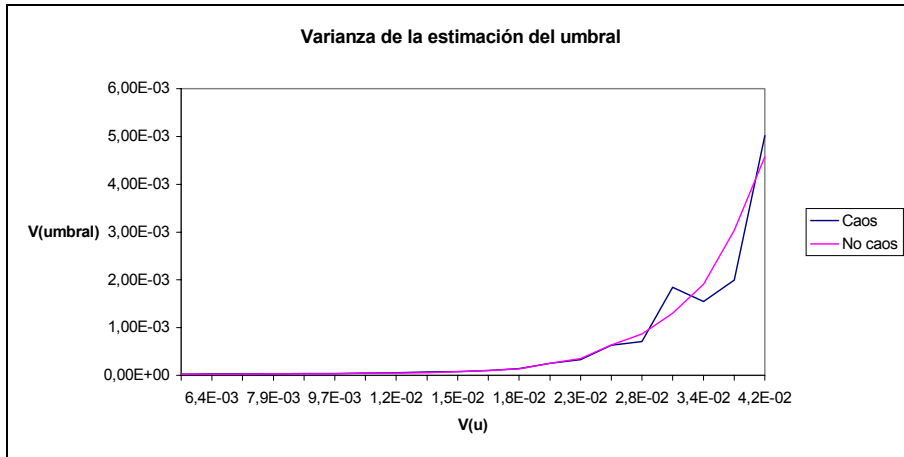


Figura 26. Comparación entre la varianza de la estimación del umbral en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

Por el mismo motivo, también se observará un gran parecido en el comportamiento de la varianza del error bajo los dos regímenes posibles (ver Figura 27).

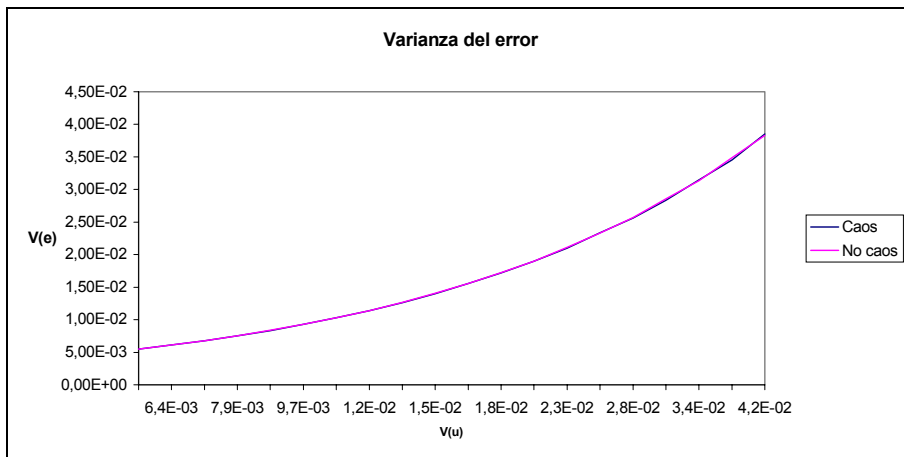


Figura 27. Comparación entre la varianza del error en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

Respecto al error de predicción (ver Figura 28), como consecuencia de lo anterior también se observa una gran similitud entre ambos regímenes, aunque en el caso del comportamiento caótico, en crecimiento del error conforme aumenta el horizonte de predicción se mantiene ligeramente por encima del observado en el caso no caótico. Este mayor crecimiento está explicado por la propiedad de dependencia sensible a las condiciones iniciales, característica de los sistemas caóticos.

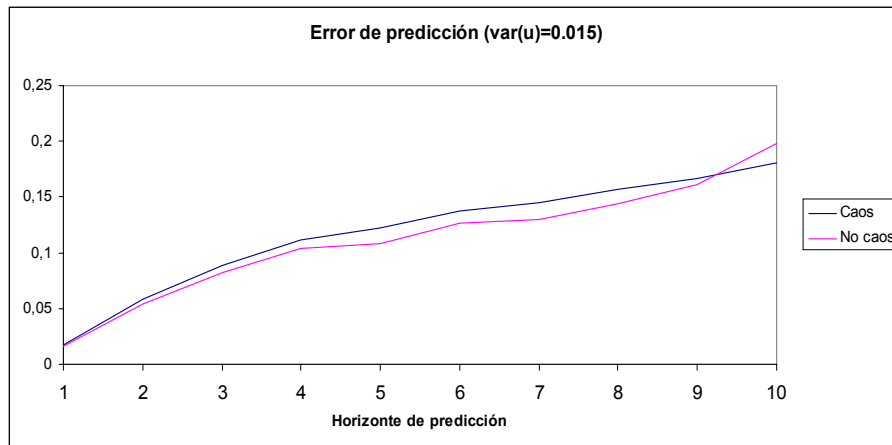


Figura 28. Comparación entre el error de predicción en el régimen caótico y no caótico para un horizonte de predicción igual a 10 en la Región 1

3.2.2. REGIÓN 2

La segunda región corresponde a valores menores de la varianza de la perturbación. Al ser menores los valores de la varianza, la serie no caótica tiende a estabilizarse en torno al valor nulo, con algún salto esporádico a la otra ecuación hasta que la serie alcanza un nuevo equilibrio, tal y como se muestra en la simulación de la Figura 29.

Sin embargo, en la serie caótica, el comportamiento es muy similar al original, ya que, aunque la varianza de la perturbación es pequeña, las pequeñas variaciones se amplifican debido a la propiedad de dependencia sensible a las condiciones iniciales (ver Figura 30).

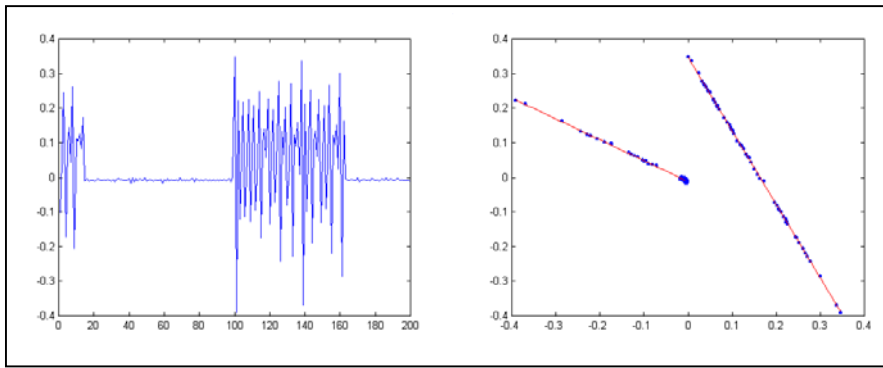


Figura 29. Comportamiento de la serie y del modelo estimado para la Región 1 en el régimen no caótico

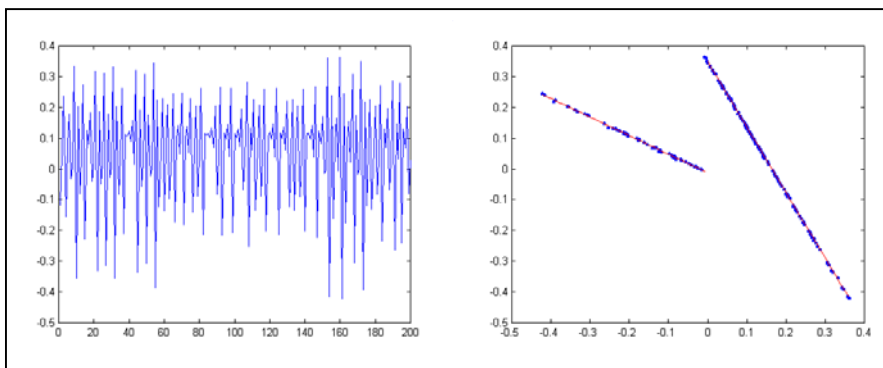


Figura 30. Comportamiento de la serie y del modelo estimado para la Región 1 en el régimen caótico

Este diferente comportamiento se percibe también en la varianza de la serie, que es superior bajo el régimen caótico, tal y como se muestra en la Figura 31.

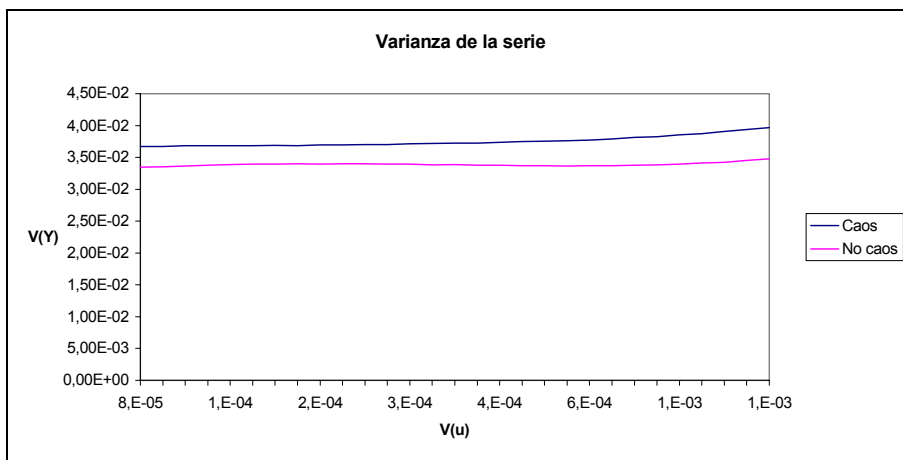


Figura 31. Comparación entre la varianza de la serie en el régimen caótico y no caótico en la Región 1

Este diferente comportamiento se percibe también en las estimaciones de los coeficientes del modelo, que presentan siempre mayor precisión que en la Región 1. En el caso caótico, según hemos visto en la simulación la mayoría de las observaciones están en equilibrio en torno a la primera ecuación, por lo que la estimación de esta ecuación será más precisa en este caso que en el caótico (ver Figura 32 y Figura 33). Por el mismo motivo, esta precisión se pierde en la segunda ecuación, cuya estimación será mejor en el caso caótico (ver Figura 34 y Figura 35).

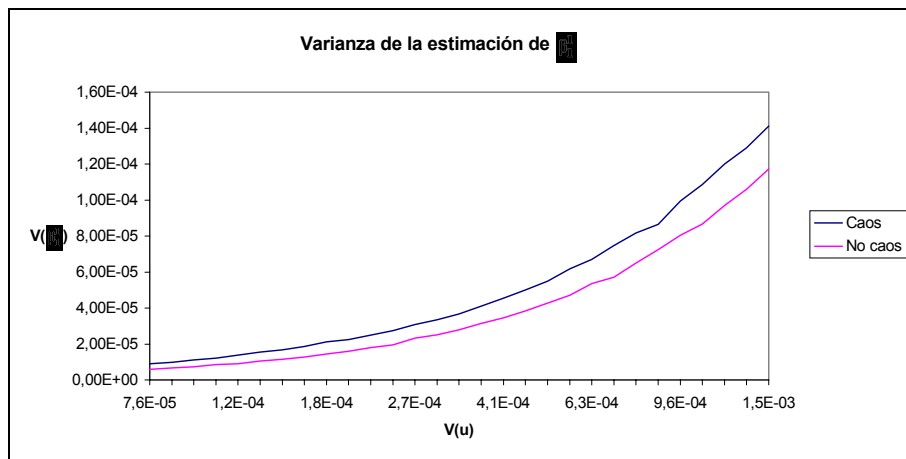


Figura 32. Comparación entre la varianza de la estimación de β_1^1 en el régimen caótico y no caótico en la Región 2

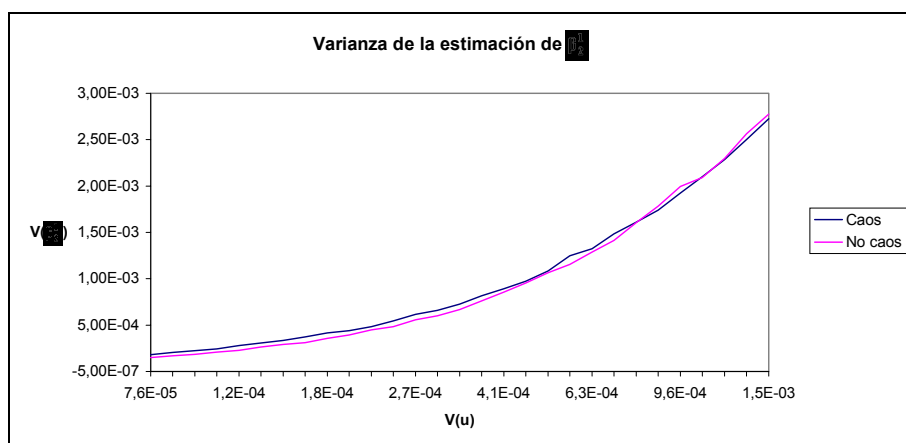


Figura 33. Comparación entre la varianza de la estimación de β_2^1 en el régimen caótico y no caótico en la Región 2

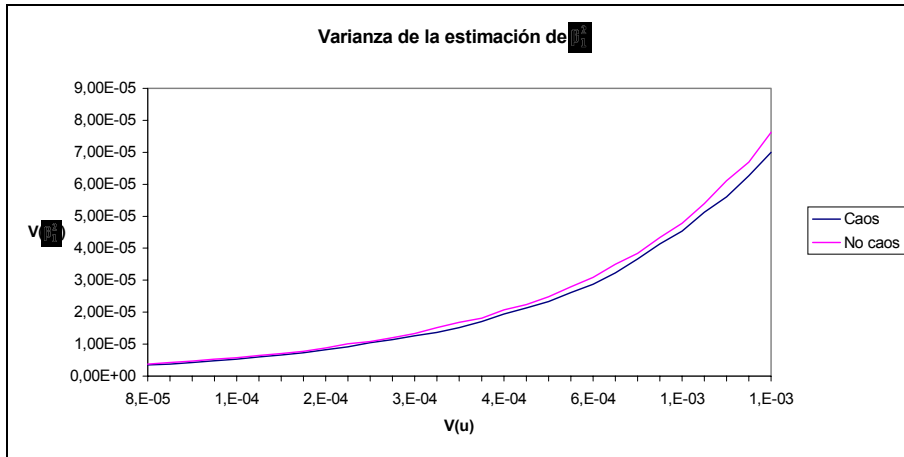


Figura 34. Comparación entre la varianza de la estimación de β_1^2 en el régimen caótico y no caótico en la Región 2

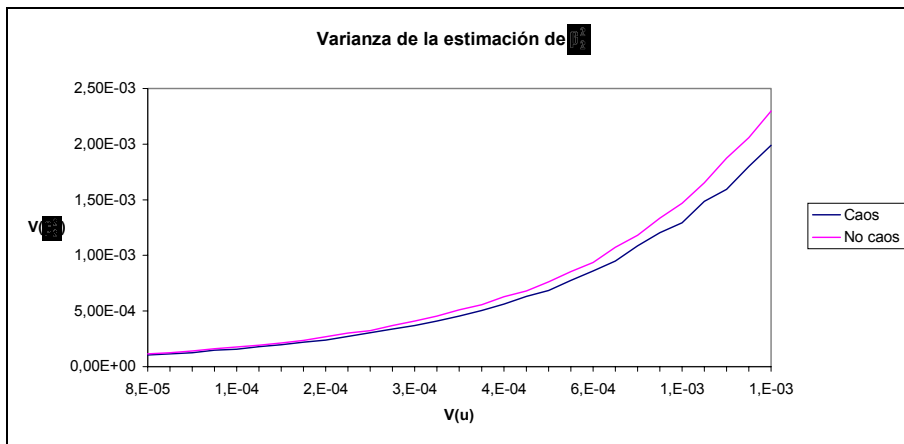


Figura 35. Comparación entre la varianza de la estimación de β_2^2 en el régimen caótico y no caótico en la Región 2

Respecto a la estimación del parámetro umbral, por el mismo motivo, es mejor en el caso no caótico que en el caótico, como se muestra en la Figura 36. Por último, la varianza del error (estimación de la varianza de la perturbación) es prácticamente igual en ambos casos (Figura 37).

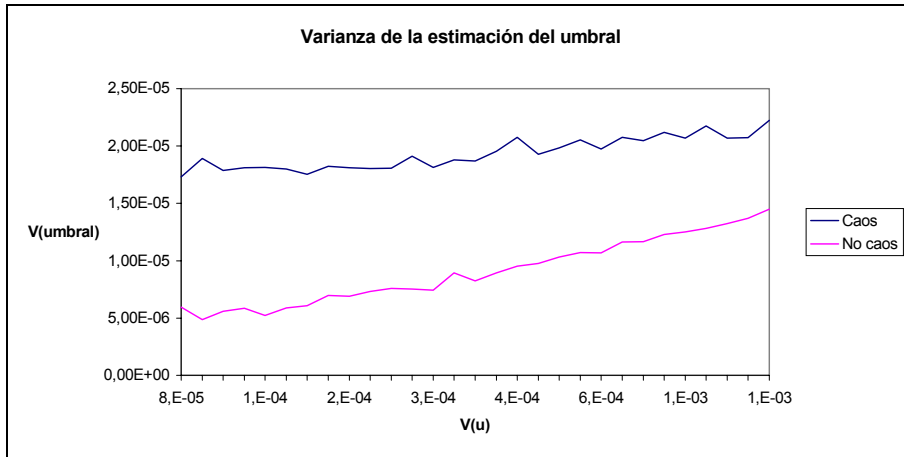


Figura 36. Comparación entre la varianza de la estimación del umbral en el régimen caótico y no caótico en la Región 2

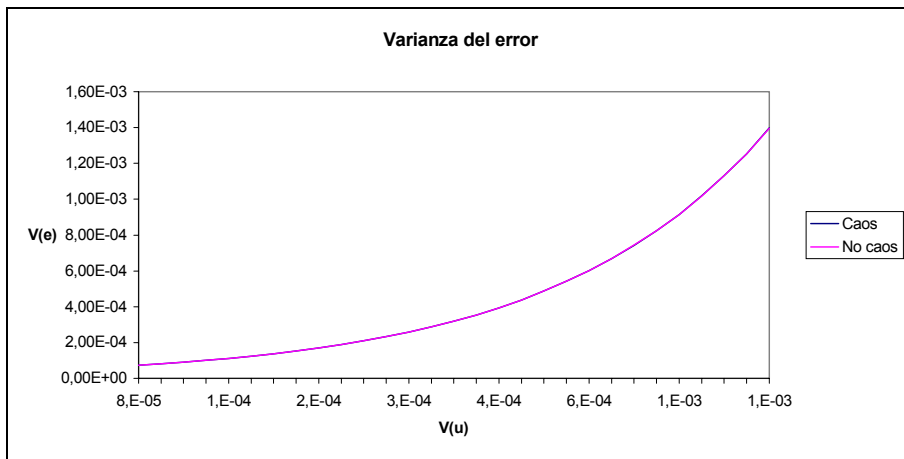


Figura 37. Comparación entre la varianza del error en el régimen caótico y no caótico en la Región 2

En cuanto a la varianza del error de predicción conforme aumenta el horizonte temporal considerado (ver Figura 38), es menor que en la Región 1, y similar bajo los dos regímenes (ligeramente inferior para el caso no caótico) hasta el horizonte de predicción igual a 3, a partir del cual se produce un mayor crecimiento en el caso del régimen caótico (consecuencia de la propiedad de dependencia sensible).

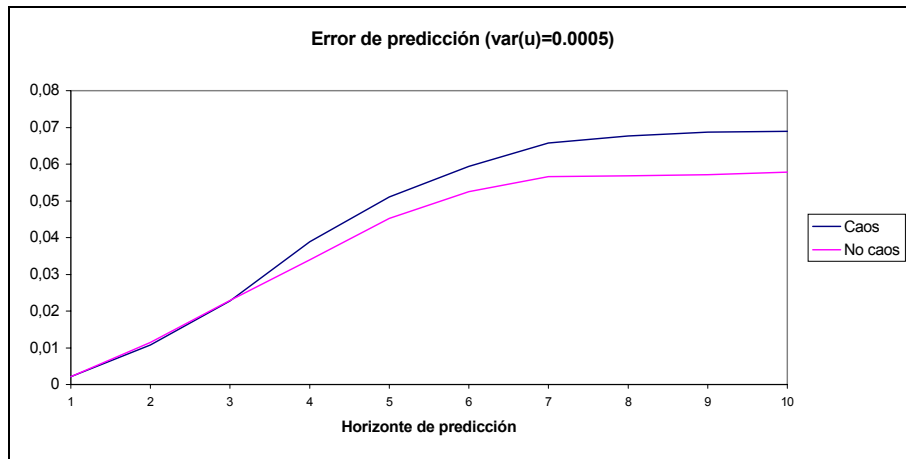
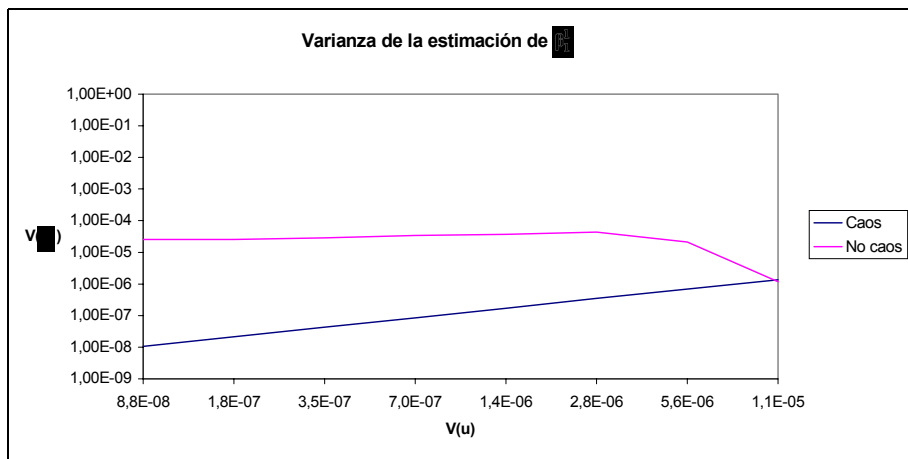
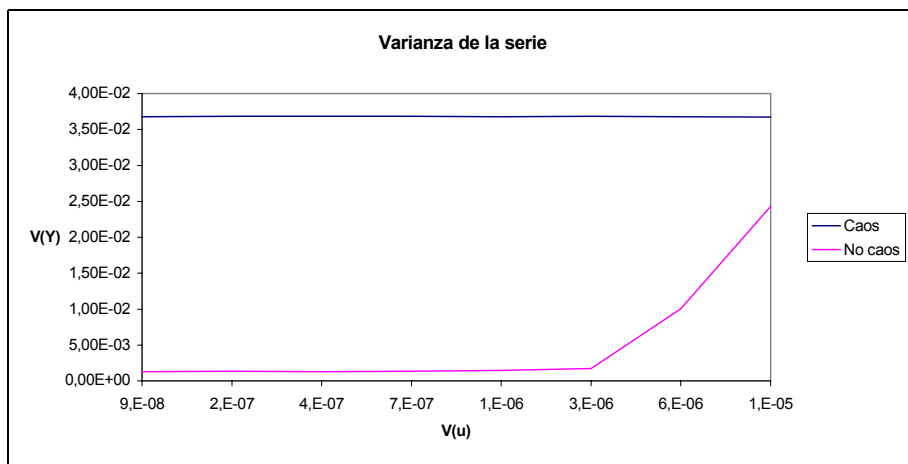
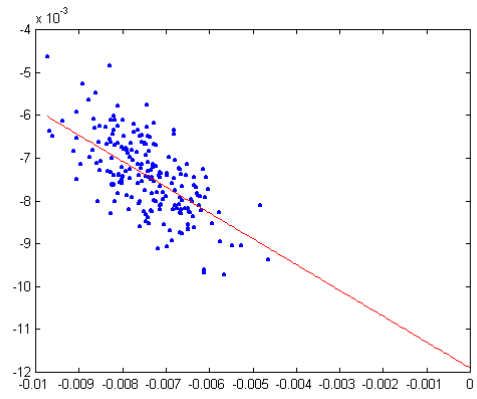
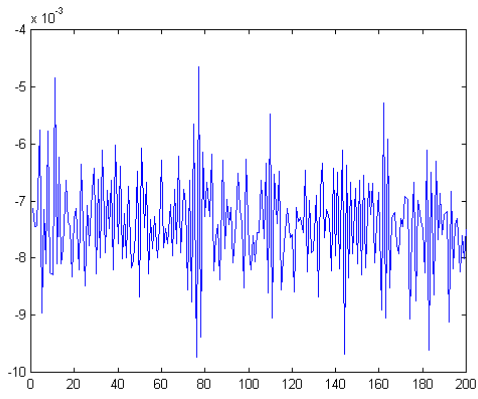
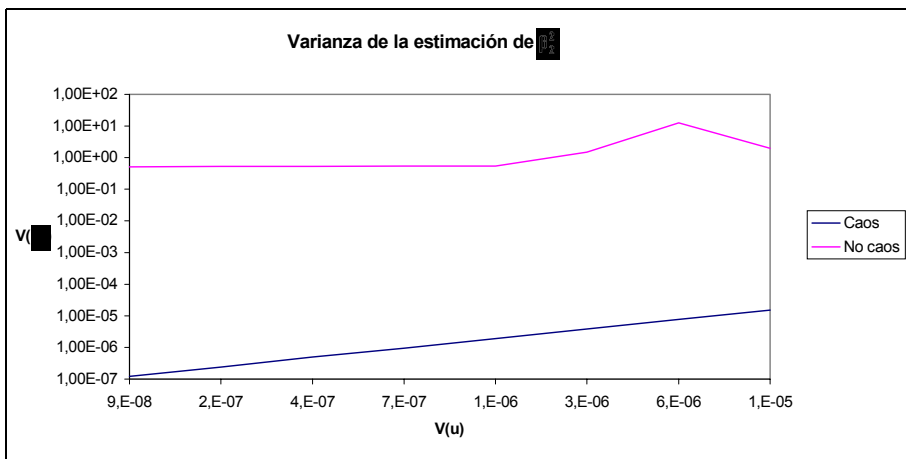
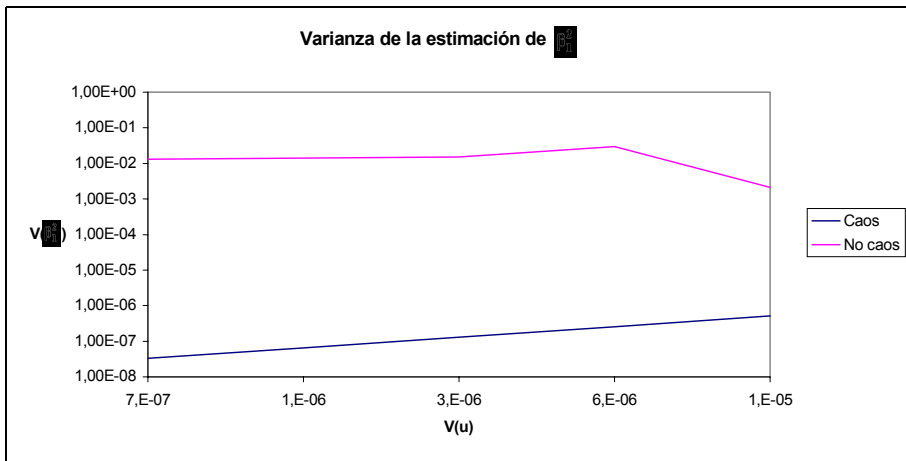
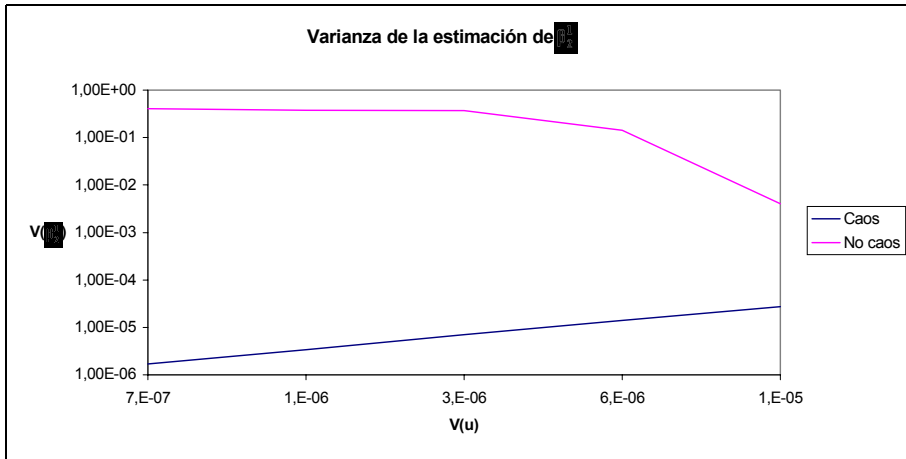


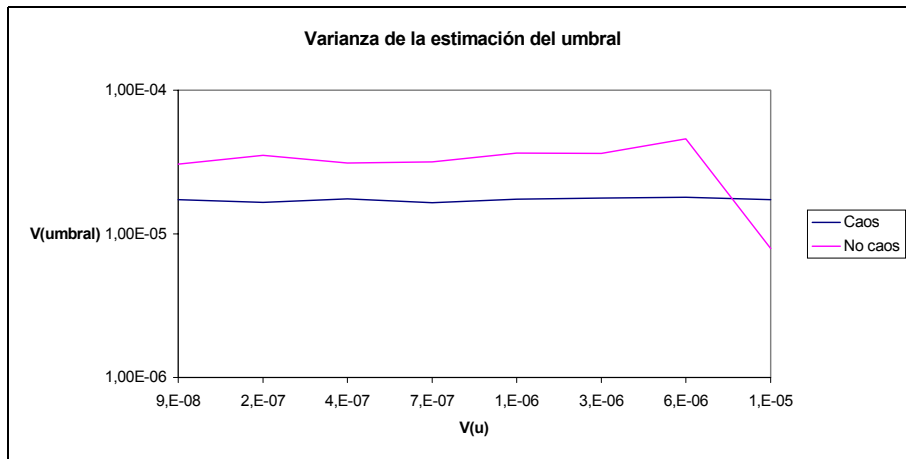
Figura 38. Comparación entre el error de predicción en el régimen caótico y no caótico para un horizonte de predicción igual a 10 en la Región 2

3.2.4. REGIÓN 3

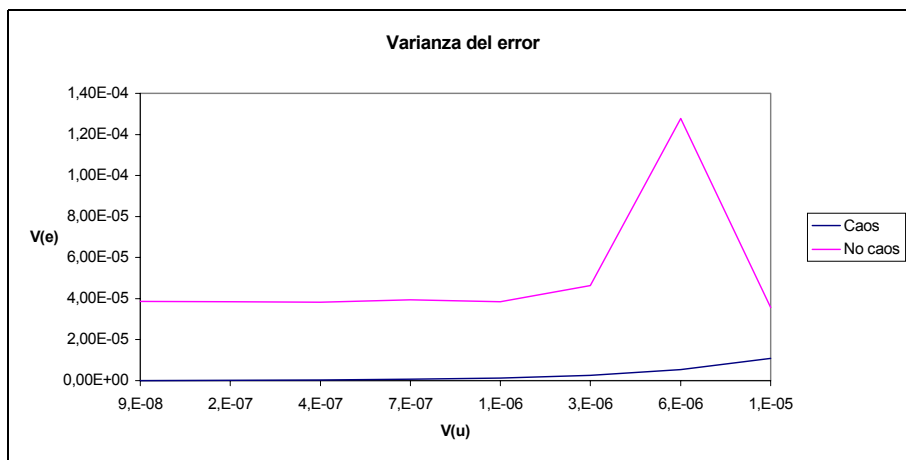
En la Región 3, la varianza de la serie es tan pequeña que, en el caso no caótico, la varianza de la serie es tan pequeña que resulta insuficiente para provocar el salto de la serie de una ecuación a otra, produciendo unas estimaciones sumamente imprecisas. Esta situación mejora claramente en el caso caótico, debido a la variabilidad intrínseca del modelo debida a la sensibilidad a las condiciones iniciales, que eleva la varianza de la serie (ver Figura 41 frente a Figura 42) y mejora las estimaciones de los coeficientes del modelo (ver Figura 43, Figura 44, Figura 45, Figura 46 y Figura 47).







Como consecuencia de lo anterior, la varianza del error también es más imprecisa en el caso no caótico, y los errores como



Aquí evidentemente, las estimaciones se van de madre para el sistema no caótico...

Por no ir bien, no lo hace ni la estimación de la varianza de las perturbaciones aleatorias...

En cuanto a la predicción, resulta imposible hacer una predicción medianamente buena con el sistema no caótico, mientras que el caótico sigue funcionando de una forma medianamente razonable...

CONCLUSIONES

Como conclusiones interesantes de este trabajo se pueden extraer las siguientes:

1. Existe una clara conexión entre el modelo umbral autorregresivo y la función tienda de campaña de la cual se conoce su comportamiento caótico.
2. Es posible realizar la estimación de los parámetros del modelo TAR por el método de mínimos cuadrados ordinarios, lo cual facilita la estimación, el contraste de hipótesis y permite además realizar un contraste de no linealidad.
3. Las estimaciones obtenidas siguen, en general, un buen comportamiento en cuanto a insesgadez.
4. Respecto al comportamiento de la varianza de las estimaciones de los coeficientes, de la varianza del error y de los errores cometidos conforme aumenta el error de predicción, se pueden distinguir tres regiones diferentes en función de la varianza de la perturbación. En todos los casos, la varianza de las estimaciones, en general, es mayor conforme aumenta la varianza de la perturbación.

5. En la Región 1, la de varianza de las perturbaciones mayor, la variabilidad de la serie es similar bajo el régimen caótico o no caótico, confundándose así la variabilidad intrínseca con la extrínseca. El comportamiento de las estimaciones es así similar bajo los dos regímenes, aunque cabe resaltar peores resultados en la predicción bajo el régimen caótico.
6. En la Región 2, al disminuir la varianza comienzan a distinguirse los regímenes caótico y no caótico ya que, en el segundo caso, los valores de la serie se concentran en torno a la primera ecuación del modelo que, por tanto, presenta mejores estimaciones que en el caso caótico, ocurriendo lo contrario para la segunda ecuación. En cuanto a la estimación del umbral, empeora mucho en el régimen no caótico frente al caótico, precisamente por el escaso número de valores que saltan de una ecuación a otra.
7. En la Región 3, al ser la varianza de la perturbación en el caso no caótico excesivamente pequeña, la variabilidad de la serie es demasiado baja para conseguir estimaciones precisas, cosa que no ocurre en el régimen caótico debido a la propiedad de dependencia sensible. En este caso, pues, sólo nos quedamos con la variabilidad que podemos calificar como de intrínseca al modelo.
8. En cuanto al error cometido en función del horizonte de predicción, es mayor conforme aumenta éste y además es creciente con la varianza de las perturbaciones. Por último, se mantiene por encima en el caso caótico, salvo en la Región 3, que recordemos que corresponde con estimaciones excesivamente imprecisas en el caso no caótico.

REFERENCIAS

Barnett, W.A. y S.S. Choi (1989): *A comparison between the conventional econometric approach to structural inference and the nonparametric chaotic attractor approach* en W.A. Barnett, J. Geweke, J. y K. Shell (eds.): *Economic complexity: chaos, sunspots, bubbles, and nonlinearity*; Cambridge University Press, pp. 141-212

Baumol, W.J. y R.E. Quandt (1996): *Chaos and their implications for forecasting* en Trippi, R.R. (ed.): *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing, pp. 71-86

Blank, S.C. (1996): "Chaos" in futures markets? *A nonlinear dynamical analysis* en Trippi, R.R. (ed.): *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing, pp. 199-223

Hommes, C.H. (1996): *Adaptative learning and roads to chaos: the case of the cobweb* en R.R. Trippi (ed.): *Chaos and nonlinear dynamics in the financial market*; Irwin Professional Publishing, pp. 63-70

Hommes, C.H. (1994): *Dynamics of the cobweb model with adaptative expectations and nonlinear supply and demand*; *Journal of Economic Behavior and Organizations*, vol. 24, pp. 315-335

Medio, A. (1992): *Chaotic dynamics. Theory and applications to Economics*; Cambridge University Press

Shaffer, S. (1996): *Structural shifts and the volatility of chaotic markets* en R.R. Trippi (ed.): *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing, pp. 87-102

Takens, F. (1986): *Detecting strange attractors in turbulence* en D.A. Rand y L.-S. Young (eds.): *Lecture Notes in Mathematics: Dynamical Systems and Turbulence*; Springer-Verlag, pp. 366-381

Yang, S.-R. y B.W. Brorsen (1996): *Nonlinear dynamics of daily futures prices: conditional heteroskedasticity or chaos* en R.R. Trippi (ed.): *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing, pp. 225-244

Tong, H. (1990). *Non-linear time series. A dynamical system approach*. Oxford: Clarendon Press Oxford