UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE BELLAS ARTES
Departamento de Dibujo I

ESTRUCTURAS LÓGICAS EN LAS ARTES PLASTICAS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

María del Mar Cuevas Riaño

Bajo la dirección del doctor:
Julián Gil Martínez

Madrid, 2007

- **ISBN: 978-84-669-3083-3**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE BELLAS ARTES
DEPARTAMENTO DE DIBUJO I

ESTRUCTURAS LÓGICAS EN LAS ARTES PLÁSTICAS

MARÍA DEL MAR CUEVAS RIAÑO

DIRECTOR DE TESIS: D. JULIÁN GIL MARTÍNEZ

MADRID
MARZO, 2007

AGRADECIMIENTOS

A Julián Gil, mi director de tesis, mi profesor y la persona que me introdujo en estos temas. Mi deuda con él es enorme no sólo por las conversaciones, el material que ha compartido conmigo y la información que me ha facilitado continuamente, sino por el aliento, confianza y apoyo que durante tantos años me ha demostrado.

A Ángeles Vian, por toda la ayuda que me ha facilitado en la búsqueda de información y por toda la valiosa y útil correspondencia, mantenida durante tantos años, manteniéndome al día de la publicación de libros relacionados con el tema de la tesis.

A mis alumnos, que han sido testigos de la puesta en práctica de la trama de mi discurso, por su paciencia y generosidad.

A Tom Johnson a quién conocí en el Taller de Arte Actual "Formas Racionales / Arte Lógico" impartido en el Círculo de BB. AA. de Madrid en 1995, por su valiosísima aportación al concepto de serie.

A todos los artistas cuya obra me ha ayudado a configurar y a desarrollar todo el trabajo de investigación de la tesis.

Karl-Heinz Adler	Yaacov Agam	Douglas Allsop	Vincenzo Arena	Elena Asins
Joost Baljeu	Max Bill	Hartmut Böhm	Hellmut Bruch	John Carter
Nathan Cohen	Hans Günter Dienst	Rita Ernst	Helmut Federle	Kunibert Fritz
Günter Fruhtrunk	Tibor Gáyor	Kart Gerstner	Julián Gil	Ingo Glass
José Luis Gómez Perales	Hans Grosch	Urs Hanselmann	Gottfried Honegger	Malcolm Hughes
Jose María Iglesias	Jerzy Kalucki	Michael Kidner	Imi Knoebel	Jan Kubicek
Matti Kujasalo	Horst Linn	Josef Linschinger	Richard Paul Lohse	Peter Lowe
Kenneth Martin	Dóra Maurer	Jean-Pierre Maury	Jan Meyer-Rogge	Manfred Mohr
Véra Molnar	François Morellet	Tadeusz Myslowski	Aurelie Nemours	Ulrich Otto
Pablo Palazuelo	Georg Karl Pfahler	Horst Rave	Torsten Ridell	Bridget Riley
Albert Rubens	Diet Sayler	Peter Staechelin	Heiner Thiel	Norbert Thomas
Philippe Vacher	Dirk Verhaegen	Ryszard Winiarski	Shizuko Yoshikawa	

Por último, gracias a mi familia, que ha convivido conmigo todas mis inquietudes y trayectos.

ÍNDICE

12.- Series numéricas

13.- Operaciones sobre series

14.- Permutaciones

15.- Combinaciones

16.- Recursividad

INTRODUCCIÓN

El título de la tesis *Estructuras Lógicas en las Artes Plásticas*, combina dos ámbitos de estudio o investigación: el de las estructuras lógicas y el de las artes plásticas para generar una visión nueva de análisis de las obras plásticas que sirva tanto de referencia a un observador patrón interesado en adentrarse en los procesos generativos de un cierto tipo de obras de arte como al artista o mejor, autor, que le sea útil para reflexionar sobre su propio quehacer y enriquecerse con las propuestas de otros artistas.

¿Por qué estructuras lógicas? Estructuras porque lo que se estudia aquí es el flujo que subyace a las obras; y lógicas porque hace alusión al pensamiento, a lo que circula detrás de la generación de las obras. Es el previo o prólogo a su generación y muchas veces, es la propia razón de ser de las obras, que recogen en su título alusiones al propio proceso generativo. Son obras producto de una forma de pensar las cosas y de pensar el mundo que nos rodea. Son el resultado de sistemas; entendidos desde perspectivas muy diferentes.

Estructuras Lógicas en las Artes Plásticas, es una tesis de carácter teórico-práctico. Teórico porque recoge un conjunto de conceptos ordenados para enmarcar este tipo de forma de operar en el mundo del arte y práctico porque busca describir y recopilar una serie de procesos sobre la construcción de obras de arte.

Los objetivos de la tesis son tres. En primer lugar, busca reunir una serie de conocimientos teóricos que permitan a un posible lector interesado introducirse en el mundo complejo del quehacer artístico considerado como producto de una forma de pensar sistémica. Estos conocimientos son una herramienta que le puede ser útil para emprender un recorrido artístico a través de la obra de una serie de autores y comprender su forma de trabajo y sus compromisos estéticos y creativos. Es un compromiso con educar la visión para hacerla más ávida, más exigente y para que el placer de la contemplación o lectura de las obras sea mayor. En segundo lugar, el discurso de la tesis se elabora desde el punto de vista del ámbito creativo: de la generación, por parte de un autor, de obras de arte. En este aspecto, no pretende la tesis desarrollar un discurso enmarcado en el campo de lo filosófico, estético o histórico, sino desde el conocimiento de la exigencia que supone para un autor crear una obra de arte; ahondar en los procesos de desarrollo y en la toma de decisiones que llevan a la conclusión de una obra. Es este trayecto creativo lo que da sentido a esta tesis. Si se lee desde el punto de vista del creador, porque puede ayudar a mejorar y enriquecer la forma de abordar un proceso creativo y, si se lee, desde el punto de vista del espectador porque puede servir para mejorar la comprensión de un tipo de arte exigente con el propio proceso constructivo.

En este sentido, la tesis tiene por objeto establecer una relación entre los elementos gráficos (elementos morfológicos, dinámicos y escalares) propios de las obras de arte plásticas considerados aquí como datos o información a tratar y los posibles programas (pensamiento sistémico) a que pueden ser sometidos estos elementos para producir una obra comunicativa o expresiva. Es un estudio de procesos generativos de obras plásticas. Una reflexión sobre los conjuntos de familias o tipos de estructuras que permiten articular los diferentes elementos o datos a tratar.

Es el análisis de las posibles estructuras de relación que se pueden dar entre los datos, elementos plásticos, que son objeto de tratamiento y las instrucciones de un sistema, para resolver un determinado planteamiento expresivo. Consiste en el estudio de diferentes diseños de procesos para resolver un concepto, con todos los pasos que esto implica: formulación y especificación del concepto, diseño de la solución, su implantación, prueba y documentación, y la evaluación de la solución.

Es el estudio de todo proceso de pensamiento que llegue, expresándose por sí mismo, a justificar el desarrollo de una obra plástica. Se trata de enfocar el trabajo en la idea generativa y en el concepto de proceso planificado. Pensar el desarrollo de la obra como resultado de la tensión que se produce entre su concepción y su ejecución. Pensar en los sistemas y códigos que estructuran un tipo de obras. Es el estudio de una obra de arte, como reflexión sobre el proceso que la ha generado. Analizar sus presupuestos productivos. Es percibir la obra concreta actualizando los conceptos teóricos anteriores a la misma.

En este proceso, el conocimiento parte directa o indirectamente de unas reglas y métodos propios de un autor, con un código personal, y cuya misión no es conseguir la objetividad del resultado, sino expresar una particular visión del mundo y cuyo efecto consiste en ampliar la percepción habitual.

Es una forma de hacer y de enfocar una serie de obras que tienen su origen en la formulación de un proceso y en una indicación de cómo desarrollarlo, sin que esto suponga un uso restrictivo de las reglas a emplear, sino que éste sea capaz de hacerse concreto e independiente al ir generando un resultado final. Es buscar formas de trabajar precisas y controlables, pero sin perder de vista la posibilidad de lo no previsto.

El objetivo de esta investigación consiste en definir teóricamente las ideas generativas o los principios ordenadores útiles para implantar un cierto orden en el proceso de construcción de una secuencia o serie de obras plásticas. Se trata de analizar las posibles herramientas o jerarquías estructurales disponibles para realizar todo tipo de programas destinados a generar obra plástica secuencial o seriada.

Como resultado, la tesis aporta un dominio de explicaciones acerca de cómo un autor define y construye una obra. Explica la praxis de la obra de arte, la formulación práctica que la configura y el dominio de experiencia del autor.

Finalmente, en tercer lugar, sirve también para mostrar la obra de una serie de artistas de la Unión Europea de reconocido prestigio internacional cuyo trabajo, independientemente de si pertenecen a un tipo de movimiento artístico u otro, responde a una misma actitud y discurso artístico: el pensamiento sistémico.

Para cumplir estos objetivos, se ha dividido el trabajo de tesis en dos grandes partes: I y II. La parte I, es una introducción a las estructuras lógicas y un homenaje al pensamiento sistémico y los presupuestos teóricos en los que se apoya. En esta parte, se estudian las características conceptuales del pensamiento sistémico.

En el desarrollo de la investigación, se ha comprobado que en los discursos generados en los catálogos leídos en torno a la serie de artistas escogidos, se repiten conceptos relacionados con el pensamiento sistémico aunque nunca se agrupan bajo este título probablemente por falta de tradición en el mundo del pensamiento de aplicar un lenguaje adquirido en el campo de la ciencia o de la técnica al de las humanidades. Era importante para mí agruparlos para buscar relaciones discursivas entre ellos y para comprender las constantes que se producen en la forma de enfrentarse a elaborar o concebir una obra de arte. Es un homenaje o tributo que he querido rendir a este tipo de arte que, muy cercano a la poesía, está directamente relacionado con el mundo del pensamiento en toda su complejidad.

Este apartado ha supuesto un trabajo arduo en la lectura de libros relacionados con estos temas que al ser tratados en ámbitos diferentes al artístico hacían dificultosa en algunos momentos la claridad de la exposición literal de los conceptos, así como de los ejemplos aplicados al discurso, pero espero que a través de la ayuda de las ilustraciones que acompañan a este texto se pueda seguir con claridad y sirva para describir los elementos implicados en todo este discurso. Quisiera, no obstante, rendir gratitud a algunos teóricos que me han acompañado de una forma continua en el desarrollo de la tesis. A Niklas Luhmann por su concepción contemporánea de sistema basada no en los elementos que lo componen y en la relación que se establece entre ellos sino en una unidad conceptual compuesta de elementos, relaciones, y límites. Describe Luhman, además, todos aquellos términos que sirven para configurar el pensamiento sistémico: autorreferencia, observador, complejidad, circularidad,… A Humberto Maturana por su exposición clarificadora sobre el concepto de realidad porque creo que toda obra de arte es un concepto de realidad y he creído importante diferenciar maneras de concebirla o configurarla. A David Bohm por su concepto de orden y su clasificación en categorías de menor a mayor complejidad: descriptivo, generativo, azar, caos,…

Ha sido para mí muy importante el desarrollo de estos capítulos porque he intentado buscar una teoría útil capaz de proporcionar las claves adecuadas para la comprensión y valoración de este tipo de obras.

La tarea constructiva de estos capítulos ha consistido en recopilar, interpretar y combinar los textos teóricos propuestos en la bibliografía, para proponer una teoría capaz de integrar la pluralidad de tendencias y enfoques que se dan en las obras propuestas en la investigación de esta tesis. Una construcción teórica de este tipo no pretende reclamar la verdad en exclusiva de esta tesis frente a otros trabajos realizados en este mismo campo temático ni agotar todas las posibilidades de su conocimiento, sino que lo que propone es captar la teoría de una forma universal en el sentido que sea aplicable a la totalidad de las obras realizadas bajo estos conceptos y no sólo a algunas de ellas.

Esta parte de la tesis, esta dividida en dos temas. En el capítulo 1, se abordan los conceptos de sistemas, algoritmos y programas. Se trata de presentar las características y representación gráfica de cada uno de ellos, para acabar haciendo una propuesta de requisitos que un autor debe plantearse para trabajar con cualquiera de estos conceptos.

En el capítulo 2, se describe el concepto de pensamiento sistémico y todos los términos relacionados con su constitución. Es un apartado muy importante en el desarrollo de la tesis porque sirve para enmarcar formas de trabajo, objetivos comunes, actitudes, selecciones comunes pero dispersas que se dan en el tipo de obras que se van a analizar. En este capítulo debido a la complejidad del tema, se han utilizado a lo largo de la exposición del capítulo, numerosos textos representativos de los conceptos señalados. El orden expositivo de los conceptos no es significativo. Todos tienen la misma prioridad solo que en una narración lineal es obligado secuenciar el orden de su aparición. Esto hace que a veces, haya sido necesario, introducir términos no explicados que se completarán en apartados posteriores. Espero, no obstante, que a pesar de estos problemas, la exposición sea lo suficientemente inteligible como para comprender con claridad lo planteado.

En la parte II, *Aplicación de las estructuras lógicas a las artes plásticas*, se trata de reflejar cómo se aplica el pensamiento sistémico en la generación de las obras de arte. Este apartado está dividido en 14 temas dobles: uno de carácter teórico y otro de carácter práctico. La forma de diferenciarlos es porque, el tema de carácter práctico aparece al final del tema de carácter teórico, bajo el epígrafe: *Análisis de obras*.

En los temas de carácter teórico se han abordado conceptos utilizados frecuentemente por este tipo de artistas en la elaboración de sus obras: estructuras, orden, estructuras dinámicas, estructuras estáticas, poliominós, permutaciones, combinaciones, operaciones geométricas con el cuadrado,… Se ha recopilado la información necesaria para poder articular un lenguaje plástico. Se han definido aquellos conocimientos que se manejan o que sirven de marco de referencia para comprender obras de resultados muy diferentes pero que responden al mismo ámbito de investigación teórica. En este apartado la bibliografía empleada ha sido muy amplia. Quisiera recordar algunos autores que me han servido para estructurar el discurso: René Descombes, por sus aportaciones conceptuales y sus visiones complejas sobre el cuadrado. La lectura de sus libros: *La Magie du Carré: Le Carré dans Tous ses Éclats* y *Les Carrés Magiques: Histoire, Théorie et Technique du Carré Magique*, ha sido en todo momento un estímulo de ideas y de relaciones entre ellas muy positivo. A André Sainte-Laguë, por sus investigaciones sobre las permutaciones, desde el punto de vista conceptual y visual; a Émile Fourrey, por sus estudios prácticos sobre geometría; a Jinny Beyer porque su ayuda para comprender el mundo de la simetría y el trabajo de los entrelazados de formas ha sido fundamental para poder analizar las obras basadas en módulos. A Jay Hambidge, por sus valiosos conocimientos sobre estructuras dinámicas; a

Wucius Wong, que me enseñó cómo clasificar el mundo de las estructuras; a Attilio Marcolli, por su recopilación y exposición sobre las estructuras portadora, modular y de proyección interna del cuadrado, el triángulo y el círculo.

En los temas de carácter práctico, mi principal interés ha sido el de comprender la naturaleza constructora de cada una de las obras analizadas, la realidad que reflejan y particularmente la coherencia y sentido impartidas por el autor. Este enfoque aplicado al estudio de las obras de arte plantea una visión inter, multi y transdisciplinar, que permite analizar las obras de una forma integral permitiendo identificar y comprender con mayor profundidad y claridad todos los problemas relacionados con la organización de una obra: las partes de que está compuesta, los elementos que la configuran, las interrelaciones que se producen entre ellos y la estructura que los soporta.

Los autores de las obras analizadas, todos ellos de la Unión Europea, han sido seleccionados después de realizar un estudio de campo abierto en extensión y geografía. Los criterios han sido, en primer lugar, elegir autores de reconocido prestigio internacional que estuviesen avalados por su obra; y en segundo lugar, cubrir el mayor número posible de países de la Unión Europea. No están ni todos los autores que podrían estar, ni todos los países igual representados, pero los que están creo que están bien elegidos. Hay que decir en este punto que la búsqueda de catálogos relacionada con el trabajo de estos autores ha sido muy laboriosa. Algunas veces limitada por la lengua comunitaria empleada: húngaro,… y otras por la falta de disponibilidad de catálogos de artistas contemporáneos de un tipo de expresión artística probablemente tan minoritaria.

En el análisis de las obras ha habido autores que ofrecían una gran variedad de propuestas creativas que respondían a temas muy diferentes y que por lo tanto aparecerán en más de un capítulo de la tesis, y autores cuya obra está centrada en un ámbito expresivo muy concreto y que por lo tanto, aparecerán sólo puntualmente. Hay otros autores que después de investigar su obra he considerado que por su trayectoria han aportado claridad y profundidad en el discurso teórico pero no los he utilizado en la parte del análisis plástico.

Quisiera, antes de dar paso al contenido de la tesis hacer un recorrido por los temas de esta segunda parte para anticipar su contenido conceptual. El capítulo 3, está dedicado al concepto de orden; a la capacidad del hombre de experimentarlo bajo situaciones muy diferentes y de percibirlo siempre que hace el esfuerzo por organizar, desde un punto de vista determinado, un conjunto de objetos, conocimientos, intuiciones,… El orden es un referente que se utiliza con fines muy diferentes. Desde un punto de vista muy básico, se utiliza para agrupar objetos que comparten unas mismas características frente a un entorno con propiedades distintas. Desde un punto de vista más sofisticado, el orden es un modelo teórico que ayuda a pensar las cosas del mundo real, dándolas coherencia y sentido. Entre un tipo de orden y otro, hay todo un abanico de usos, propiedades y funciones que se van a estudiar en este capítulo.

En el capítulo 4, se plantean diferentes formas de interpretar el término estructura: en primer lugar, se utiliza para describir cómo se organizan los elementos dentro de un sistema y que conexiones se pueden dar entre ellos. En segundo lugar, para definir un concepto de realidad, una forma de ver el mundo; de seleccionar partes de la realidad y establecer relaciones entre ellas. Finalmente, desde el punto de vista operativo, una estructura es un conjunto de líneas significativas relacionadas entre sí, que dividen el espacio según un criterio lógico y que como resultado de esta división surgen dos elementos significativos: los módulos o espacios entre líneas estructurales y los nodos o puntos de intersección entre líneas estructurales. Es este punto de vista, el punto fuerte del capítulo. El que se va a utilizar para clasificar las estructuras y ahondar en ellas lo más posible para ver los conceptos que están en juego cuando se trabaja con este tipo planteamientos. En este sentido, se ha adoptado la clasificación de Wucius, Wong por considerar que su forma de operar con las estructuras permite al artista moverse dentro de este campo expresivo con un gran rigor y libertad para abordar proyectos de una gran complejidad.

En el capítulo 5, se estudian las estructuras más significativas de las formas geométricas básicas: cuadrado, triángulo y círculo y se muestra la cantidad de posibilidades expresivas que permite trabajar con ellas. Se muestra cómo se conciben, cómo se generan y finalmente, cómo a partir de ellas, por su articulación, se generan proyectos plásticos de una gran riqueza conceptual y gráfica.

En el capítulo 6, se trata un tema de una gran tradición teórica y práctica en el mundo del arte: las estructuras dinámicas. En este capítulo se recopilan y se ordenan una serie de conceptos necesarios para entender este tipo de estructuras y para poder operar con ellas de una forma sistemática.

El capítulo 7, rinde un homenaje geométrico al cuadrado y a todas sus posibilidades expresivas por ser una figura geométrica que se ha utilizado en muchas propuestas de los artistas estudiados. Se recogen estrategias para descomponerlos, superponerlos, girarlos, y operar con ellos con un cierto control y sentido. Además, se analizan obras muy sutiles que se obtienen a partir de trabajos con presupuestos teóricos de este tipo.

El capítulo 8, a diferencia del 6, muestra una serie de conceptos poco tradicionales en el mundo del arte y que, incluso en el mundo de las matemáticas, de donde proceden, están ligados al divertimento o al ocio: los poliominós. Sin embargo se han incluido como un tema más del proyecto, porque son muchos los artistas que, desde estrategias operativas muy diferentes, los utilizan para generar sus obras. Unas veces como protagonistas exclusivos de su expresión plástica; otras como módulos, que por una serie de operaciones que se realizan sobre ellos, son capaces de generar obras de mayor complejidad. Se trata también en este capítulo el problema de la cuadratura de los poliominós, es decir, la capacidad que tienen de completar superficies sin agujeros ni vacíos.

En el capítulo 9, se abordan dos conceptos fundamentales de la expresión artística: la simetría y los entrelazados de formas. Se describen en el capítulo los diferentes grupos de simetría en el plano y las operaciones que hay que realizar a los módulos para generar con ellos patrones o para poder entrelazar formas, sin espacios vacíos entre ellas. La razón de recopilar estos conceptos en este capítulo se debe a que, en las obras mostradas por los artistas seleccionados que utilizan esta manera de trabajo para desarrollar sus proyectos, se han limitado a utilizar las operaciones de simetría básicas: traslación, giro alrededor de uno de los vértices del módulo, simetrías verticales y horizontales, y poco más. Quisiera contribuir a ampliar esta forma sistemática de trabajos, organizando los contenidos teóricos que están en juego.

En el capítulo 10 se inician una serie de contenidos y conocimientos que están relacionados con el concepto de serie, y que se irán desarrollando en los capítulos siguientes. Aquí se abordan las series creadas por el ejercicio de establecer una acción de contar con una cierta lógica y unos ciertos límites. Se proponen diferentes formas de realizar esta acción tan simple y tan asimilada, cotidianamente, por el hombre.

En el capítulo 11, se muestra cómo a partir de patrones previamente conocidos se pueden, por reglas de analogía, construir series relacionadas con ellos. Los modelos que se utilizan para generar las series, son de tipos muy diferentes y proceden de ámbitos de conocimiento muy dispares: patrones geométricos, patrones de tejidos, juegos (Torres de Hanoi), triángulo de Pascal, cuadrados mágicos, cuadrados naturales, cuadrado mágico de Durero,…

En el capítulo 12, se estudian series numéricas conocidas: series poligonales, series de números especiales, series geométricas, hexagramas,… Es un hábito en el mundo artístico contemporáneo apropiarse de obras y modelos de otros campos de conocimiento para utilizarlos como material expresivo. En este sentido este capítulo aporta una gran información. No obstante, no es su objetivo ahondar en los conocimientos profundos de la construcción de cada una de estas series, sino de ver cuáles son, qué datos pueden ser interesantes de ellas, y ponerlas en circulación para su uso.

En el capítulo 13, se introducen una serie de estrategias para manipular y transformar series previamente creadas, de forma que los resultados obtenidos después de estos cambios, mantengan las mismas relaciones de orden que tenían las series antes de aplicarlos. En algunos casos se trabaja a partir de elementos muy simples, un único número, y por medio de sistemas generativos muy potentes, autómatas finitos e infinitos, se construyen series de una forma muy dinámica. Se muestra un mundo operativo muy potente lleno de resultados muy curiosos que modifican y amplían la visión previa que se pueda tener sobre una serie concreta.

En el capítulo 14, se inicia un conjunto de dos capítulos dedicados a la combinatoria. En éste se estudian las variaciones y, sobre todo, las permutaciones. Igual que en otros muchos capítulos de este trabajo, el punto de vista desde el que se estudian las permutaciones es buscando siempre su repercusión visual. Se muestra cómo trabajar con las permutaciones sin repetición y con repetición; y dentro de las primeras, con las permutaciones circulares o poligonales, y las ordinarias o geométricas.

El capítulo 15 está dedicado a las combinaciones y a sus posibilidades expresivas. Se trata de mostrar desarrollos completos de combinaciones para ver las simetrías que se obtienen en los resultados y poder discriminar aquellas que son fundamentales o significativas.

Finalmente, el capítulo 16, recoge una forma de trabajo frecuente en este tipo de artistas que es el de la recursividad. Se muestra, operativamente, como desarrollar obras basadas en este principio y las implicaciones conceptuales y el tipo de obras que se genera con esta manera de operar. Se muestran los trabajos creados por procedimientos conocidos como la curva de Hilbert, los árboles de Pitágoras, el conjunto de Cantor,…

En las conclusiones se hace una revisión de los objetivos marcados en el desarrollo de la tesis y se puntualizan y valoran los logros obtenidos. Se aporta también una reseña que muestra aquellas partes pendientes de plantear.

La bibliografía está organizada en torno a los dos grandes apartados de la tesis: la parte práctica, con catálogos y la parte teórica, con libros. Los catálogos que se han utilizado para desarrollar el análisis de obras que acompaña a cada capítulo teórico, son tanto de exposiciones individuales como colectivas. El número de catálogos consultados ha sido muy amplio. El motivo principal de este hecho, ha sido, por un lado, el de intentar que la parte teórica cubriese las expectativas del mayor número posible de estrategias creativas, y por otro, conocer de una forma lo más equilibrada posible la trayectoria de cada uno de los autores propuestos con el objeto de situar su obra en el lugar más adecuado dentro de la tesis. En este punto hay que decir, que se han quedado muchos artistas y muchos análisis de obras sin mostrar, debido a la extensión del proyecto, que día a día crecía de una forma desorbitada, y porque, además, muchas de las obras consultadas están enmarcadas en el planteamiento tridimensional, tema que ha quedado excluido de la tesis. Los libros utilizados, sin embargo, en menor cantidad, han servido para desarrollar los temas teóricos de la tesis. Algunos de ellos se han utilizado de forma muy puntual, para explicar temas muy concretos y otros han servido para configurar un carácter y una forma de organizar todos los contenidos teóricos expuestos. De aquellos autores, cuyas teorías me resultaban más difíciles de asimilar, he procurado leer varios de sus libros con el objeto de buscar el mejor punto de vista para aproximarme a sus propuestas. Hay otros autores, cuyos libros se han utilizado en momentos concretos del desarrollo de la tesis y que no aparecen en la bibliografía. De casi todos ellos he procurado nombrarles en las notas a pie de página o en algunos de los resúmenes que he hecho en partes específicas de la tesis para agradecer las aportaciones externas que he recibido de ellos.

Los apéndices que se aportan, completan el contenido teórico de la tesis. En el apéndice A, se incluye un listado de los artistas que han servido como referente para elaborar el discurso teórico de la tesis y cuyas obras se han utilizado como fuente de análisis de la parte práctica. En este apéndice están organizados por orden alfabético.

En el apéndice B, los artistas aparecen listados por países de origen, es decir, el lugar donde ha nacido cada uno de ellos. Aunque en este sentido hay algunas excepciones y se han adoptado personas por lugar de residencia durante los años que han desarrollado su actividad profesional. Un ejemplo de ellos es Shizuko Yoshikawa, que aunque de nacimiento es japonesa, ha desarrollado su vida profesional en Zürich. Algunos de ellos, aún siendo oriundos de algún país de la Unión Europea, viven o han vivido en Estados Unidos. Un ejemplo es Manfred Mohr que habiendo nacido en Alemania vive y trabaja en Nueva York.

En el apéndice C, se muestra un listado de las obras analizadas por capítulos. Creo que esta información es útil para ver, de una forma global, los artistas cuya obra, finalmente, ha contribuido a definir la parte práctica de la tesis. En este sentido, hay que añadir además, lo valioso de disponer de un listado con los títulos de las obras para, de un golpe de vista, poder apreciar los enfoques personales y las diferentes problemáticas que plantean sus obras.

En el apéndice D, el listado de las obras analizadas en la parte práctica de la tesis, se clasifica por autores. Su utilidad está en poder ver el alcance creativo de cada uno de ellos: los campos de interés a los que han dedicado su actividad profesional.

PARTE I

INTRODUCCIÓN A LAS ESTRUCTURAS LÓGICAS

HOMENAJE AL PENSAMIENTO SISTÉMICO

1.- INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO SISTÉMICO

Este capítulo es una introducción al pensamiento sistémico. Describe los instrumentos necesarios para iniciarse en el estudio del pensamiento sistémico: qué son los sistemas, los algoritmos y los programas. Sus ideas principales, cómo pensar con ellos y por qué son importantes.

1.1.- CONCEPTO DE SISTEMA

En este capítulo se va a tratar una concepción sistémica del concepto de sistema. Según esta concepción, un sistema es un conjunto de partes relacionadas entre sí que forman una unidad. Los elementos básicos en esta concepción de sistema son las partes y la interacción entre ellas. Un sistema se manifiesta como una entidad dotada de una cierta complejidad precisamente por estar formada por partes en interacción. Javier Aracil en su libro *Dinámica de Sistemas*, realiza la siguiente afirmación: "Un sistema se percibe como algo que posee una entidad que lo distingue de su entorno, aunque mantiene interacción con él. Esta identidad permanece a lo largo del tiempo y bajo entornos cambiantes".[1]

Esta acepción del término sistema se aplica en muchos campos. Por ejemplo, se habla del sistema solar, como el conjunto de planetas relacionados que se organizan en torno al sol; o de sistemas financieros, como el conjunto de todas aquellas actividades relacionadas con las cuestiones bancarias, bursátiles o los grandes negocios mercantiles;… La lista de ejemplos se podría ampliar tanto como se quisiese, ya que casi todo lo que nos rodea forma parte de un sistema.

En este sentido, un sistema refleja un cierto aspecto de la realidad, y se puede describir con un conjunto de partes relacionadas entre sí y vinculadas por un concepto que las organiza y crea con ellas una unidad de sentido.

La descripción más sencilla que se puede hacer de un sistema es enunciarlo como un conjunto C formado por sus partes componentes y una relación R, que, por un lado, establece la relación que existe entre ellas y, por otro, describe el vínculo que las organiza como una unidad. Es decir, un sistema es un objeto que se puede describir como un conjunto C y una relación R entre los elementos de C. Por lo tanto, cualquier elemento del sistema está definido por un par (C, R). A esta descripción se le puede añadir la imagen gráfica de un grafo, cuyos nodos representen las partes del sistema y cuyas aristas muestren las relaciones que se producen entre ellas. Este tipo de esquema sirve para describir la naturaleza estructural del sistema y se dice que representa su estructura.

En este punto, conviene observar que existen dos usos habituales del término sistema. Por una parte, se emplea para describir un tipo de sistemas que forman parte del mundo real, de una manera material o concreta; por ejemplo, el sistema solar, los sistemas sociales,… Por otra, se utiliza para referirse a sistemas que están formados por objetos abstractos (símbolos y relaciones) que representan a los sistemas concretos descritos anteriormente. Esta distinción no es exclusivamente terminológica, sino que surge por la necesidad de distinguir entre un objeto S que representa el mundo real que se trata de estudiar, y su representación mediante un objeto matemático adecuado (C, R), al que

[1] Javier Aracil et al., *Dinámica de Sistemas*, Alianza Editorial, Madrid, 2002, p. 12.

se puede hacer referencia como un modelo M. A veces, se confunden las dos acepciones y esto conduce a identificar la representación con lo representado. Hay que tener en cuenta que un modelo se construye para poder tener una representación que sea una réplica lo más exacta posible de lo representado pero que nunca puede agotar un cierto aspecto de la realidad con su representación. En este sentido, hay que añadir que el objetivo del constructor de sistemas será el producir estos modelos, sistemas formales, con los que representar los sistemas del mundo real.

Desde el punto de vista sistémico, Aracíl realiza la siguiente descripción del término modelo: se puede decir que "para un observador O, un objeto M es un modelo de un objeto S (un sistema), si O se puede servir de M para responder a cuestiones que le importan con relación a S. Es decir, un modelo M es un instrumento que ayuda a O a responder preguntas acerca de un aspecto de la realidad al que convenimos en considerar un sistema concreto S. Conviene resaltar el carácter de instrumento del modelo. Es un medio para algo (habitualmente una ayuda a la toma de decisiones, en un sentido amplio) y no un fin en si. Sirve, aquí y ahora, para ayudar a resolver un problema concreto, que ha motivado su construcción. Normalmente no tiene un carácter definitivo".[2]

En esta definición es importante, desde el punto de vista sistémico, la presencia del observador O. El observador es el que elige un cierto aspecto de su entorno y con los elementos y relaciones que establece entre ellos, y con ellos construye un modelo que representa una determinada forma de ver e interpretar su entorno. En él recoge sólo aquellos aspectos que, en su opinión, resulten importantes con relación a su entorno, S. Esto supone un criterio selectivo por parte del observador; selecciona lo que va a estar dentro y fuera del modelo.

En el proceso de construcción del modelo M, por parte del observador O, hay que tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. Todo modelo surge como resultado de plantear un problema. A partir de ese instante, se trata de decidir una serie de acciones que se van a realizar sobre el sistema S, para alcanzar unas metas concretas: solucionar el problema. En este sentido, un modelo no puede agotar nunca la realidad S, sino que, en una situación determinada, elige determinados aspectos de la realidad que necesita para resolver un problema y llevarlo a buen término.

2. La experiencia propia o ajena sobre la construcción previa de otros sistemas análogos a aquél que se quiere construir. Se trata de disponer de toda la información necesaria para que el desarrollo del modelo se realice de la forma más eficaz y de la mejor manera posible.

3. Necesidad de un lenguaje, conceptos y símbolos, que permita al observador construir el modelo M. Este lenguaje le facilita al observador un repertorio de posibilidades de representación de la realidad S entre las que tendrá que elegir aquellas que se ajusten mejor al tipo de modelo que conceptualmente quiere representar. Construir el modelo significa organizar los conceptos y símbolos necesarios para conseguir un objetivo determinado, de un cierto aspecto del mundo real.

Para terminar, conviene señalar que, en todo sistema S:

1. Las partes del sistema se caracterizan mediante unos atributos, de forma que, cuando se establecen relaciones entre las partes, lo que se realiza son relaciones entre los atributos que las caracterizan.

---

[2] Javier Aracil et al., *op. cit.,* p. 17.

2. Las propiedades que se atribuyen a un sistema pueden deberse a dos factores:

    1. Propiedades que dependan de la naturaleza de los elementos que forman el sistema.
    2. Propiedades que dependan de la forma en que se organizan los elementos en el sistema, es decir, propiedades asociadas a la relación, R, que establecen entre ellos. Estas propiedades son las propiamente sistémicas.

1.1.1.- Características de los sistemas

Todo sistema se puede caracterizar por las siguientes propiedades o principios:

1. Un sistema es un conjunto de partes relacionadas entre sí que funciona como un todo. Todas y cada una de las partes de un sistema influyen en el sistema entero. Cuando se cambia algún elemento del sistema, se producen en él efectos secundarios. Si se quitan o añaden elementos al sistema, o si se modifica su disposición dentro del sistema, éste cambia, ya que las partes están conectadas entre sí y funcionan todas juntas creando una unidad. Hay que tener en cuenta que el comportamiento de un sistema depende más de cómo se relacionen sus partes entre sí, que de las propias partes en sí. La estructura global de un sistema depende de cómo se relacionen las partes entre sí. Todo sistema se resiste a los cambios debido a la interconexión que existe entre sus partes. No obstante, un sistema puede cambiar cuando se conoce y se actúa sobre puntos concretos de sus componentes o de su organización. Sin embargo, hay que tener en cuenta que si se cambia la estructura de un sistema, se modifica su comportamiento debido a que éste depende de la estructura global del sistema. Cuando en un sistema se observan los patrones que existen para conectar las partes del sistema y no sólo las partes que lo constituyen, se descubre que algunos sistemas formados por partes muy distintas y con funciones completamente diferentes pueden estar organizados de la misma forma, es decir, según el mismo conjunto de principios o reglas constitutivas. De este modo, es posible comprender sistemas muy diferentes (el propio cuerpo, una empresa, la contabilidad personal o las relaciones) e influir sobre ellos utilizando los mismos principios. En todos estos casos, en vez de observar por separado cada una de las partes del sistema, se estudia la conexión que existe entre ellas para predecir su comportamiento.

2. Los sistemas forman parte de subsistemas mayores y están compuestos, a su vez, de sistemas más pequeños.

3. Las propiedades de un sistema son las propiedades del conjunto: no están en ninguna parte concreta. Cuanto más complejo es un sistema, mayor es la dificultad que existe para definir las propiedades del conjunto. Estas propiedades del sistema como un todo se denominan propiedades emergentes, porque emergen sólo cuando el sistema está en funcionamiento.

4. En todo sistema se puede realizar un análisis y una síntesis. El análisis de un sistema se realiza descomponiendo el todo en las partes que lo constituyen. Mediante el análisis se obtiene un conocimiento del sistema: cuáles son los elementos que lo constituyen, sus propiedades o atributos y cuáles son las relaciones que se establecen entre ellos. La síntesis de un sistema se realiza creando un todo con la unión de sus partes. Mediante la síntesis se comprende el sistema: cómo se comporta el sistema cuando los elementos están en relación. En todo sistema, hay que tener en cuenta que cuando se descompone y se analiza, éste pierde sus propiedades, y que por lo tanto, para comprenderlo, hay que verlo en síntesis, como un todo.

5. En todo sistema se pueden distinguir dos tipos de complejidad: la complejidad de detalle y la complejidad dinámica. La complejidad de detalle implica que el sistema está formado por un gran número de partes distintas, y la complejidad dinámica, que hay un gran número de conexiones posibles entre las partes.

6. Si se divide un sistema en dos, no se consiguen dos sistemas más pequeños, sino un sistema defectuoso que probablemente no funcionará.

1.1.2.- Representación esquemática de sistemas

Un sistema se puede asociar a una descripción mínima, que se reduce a identificar un par (C, R) que se puede representar mediante un grafo donde sus nodos o vértices representan los elementos del sistema, y sus arcos o, líneas entre nodos, representan las relaciones que existen entre ellos. Aunque el grafo da una información cualitativa muy elemental del sistema, sin embargo, suministra una visión de la organización global del sistema muy interesante. Además, de esa información se pueden obtener otras, relacionadas con el lenguaje sistémico, que hacen referencia a los modos de comportamiento del sistema.

Al tratar de describir un sistema S, mediante el lenguaje sistémico, es necesario incluir un observador O al sistema, que sea capaz de atribuirle un conjunto de atributos o características $\{X_i\}$. Sobre este aspecto, Aracil realiza la siguiente definición sobre el concepto de atributo: "… se puede decir que un atributo X_i representa una cualidad perceptible de S, que da lugar a una unidad conceptual de representación. Los atributos son los perceptos mediante los cuales vemos, entramos en relación con un determinado objeto S. Por tanto, al mundo de S nos asomamos por medio de los atributos $\{X_i\}$, que se asocian a las distintas partes de S".[3] Con esta definición, Aracil está describiendo las propiedades del sistema dependiendo de la naturaleza de los elementos que lo constituyen. Pero ya se adelantó antes que las propiedades de un sistema también pueden depender de la forma en que se organizan y se relacionan los elementos del sistema entre sí, es decir, son propiedades que están asociadas a la relación, R del sistema.

En este sentido hay que añadir que entre los elementos del sistema existe algún tipo de relación, es decir, no se comportan de una forma autónoma e independiente unos de otros, sino que establecen vínculos entre ellos para crear una unidad de sentido en el sistema. De este modo, entre ellos se dan relaciones de dependencia o correlación. Así, los distintos atributos X_i que se dan en el sistema, no son independientes entre ellos, sino que, de alguna manera, entre ellos existirán relaciones de dependencia. A esta relación de dependencia de unos atributos con respecto a otros, se le denomina relación de influencia entre atributos y es un concepto útil para establecer la estructura de un sistema.

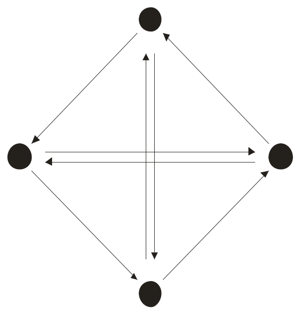
La relación de influencia es importante para comprender en profundidad el concepto de sistema. Cada parte de un sistema, para poder ser descrita, necesita estar asociada con unos determinados atributos. Por ejemplo, si a la parte A del sistema se le asocia el atributo X_1 y a la B el X_2. Si el atributo X_1 tiene una relación de influencia sobre el atributo X_2, se dice que 'A actúa sobre B', es decir, los conceptos de influencia entre atributos y articulación entre las partes son sinónimos. Por esto, es importante el concepto de influencia en el diseño conceptual de un sistema.

[3] Javier Aracil, *op. cit.,* p. 25.

Hasta ahora se ha mostrado una relación de influencia unívoca, es decir, a cada elemento se le asocia una relación de influencia, pero la relación de influencia puede ser multívoca, es decir, a un elemento se le pueden asociar varias relaciones de influencias simultáneas. En este caso la relación de influencia se lee: X_1, X_2,... y X_n influyen sobre X_k.

En cualquier caso, independientemente de la naturaleza y la cantidad de relaciones de influencia que exista entre los elementos de un sistema, su conocimiento constituye una información valiosa para conocer la clase de sistema S a la que pertenece un elemento determinado, y además facilita datos sobre la naturaleza estructural del sistema.

Para realizar su representación, se crea un dibujo esquemático con los elementos que constituyen el sistema y se unen entre sí, por medio de flechas, aquellos entre los que existe una relación. El diagrama que se obtiene por este procedimiento, se denomina diagrama de influencias.



Grafo

Con este diagrama, se tiene una descripción del sistema S, que puede servir de base para construir un modelo M del sistema. En esta representación debe haber, por lo menos, una relación de influencia para cada elemento de S. Esta descripción, gráficamente, se puede asociar a un grafo, que suministre información estructural sobre cómo se articulan las partes que dan lugar a la unidad del sistema. En este sentido, la estructura del sistema, recoge lo que según Aracil, se puede llamar "su forma sistémica".[4] Es decir, las propiedades del sistema dependen, en este caso, de la forma en que se organizan y se relacionan sus elementos: son propiedades que están asociadas a la relación, R del sistema. Aracil realiza las siguientes aclaraciones sobre este punto: "La forma sistémica es responsable de aquellas propiedades del sistema asociadas a sus manifestaciones como tal sistema y no relativas a las partes consideradas aisladamente".[5]

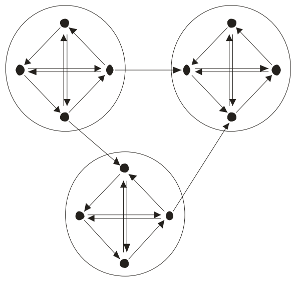
Este lenguaje a través de grafos permite no sólo realizar determinadas descripciones de los sistemas, sino que suministra los elementos necesarios para realizar una primera organización de la percepción que se tiene de esos objetos. En cierto sentido, ayuda a ver cosas que sin él no se verían.

A partir de los grafos, se pueden hacer algunas caracterizaciones elementales de los modos de comportamiento de los sistemas, añadiendo bucles de realimentación a los sistemas, que permitan describir influencias circulares dentro del propio sistema. Sobre este tema, se hablará en el próximo capítulo, pero es importante señalar aquí, que esta forma de representar los sistemas es la forma característica del lenguaje sistémico.

[4] Javier Aracil, *op. cit.,* p. 28.
[5] Javier Aracil, *ibidem.*

Si mediante un grafo se describe la estructura de un sistema, mediante un modelo se pretende, entre otras cosas, explicar su comportamiento.

Una forma de trabajo intuitiva, porque es visual, que no sólo permite representar el sistema que está «ahí fuera», sino que también muestra la interpretación que de él hace cada uno de los autores que lo han generado (modelo). Representa los procesos de sus propios pensamientos, los diagramas de sus modelos mentales. En estos diagramas se pueden ver los puntos de partida de cada uno, en las situaciones que representan, cómo se han ido formando los sistemas y los supuestos en los que se basan. Realizar la representación gráfica de un sistema es como contar una historia en dibujos de su concepción y funcionamiento.



Estructura de un sistema complejo

1.2.- CONCEPTO DE ALGORITMO

La palabra algoritmo toma su nombre del famoso matemático y astrónomo persa Mohammed al-Khowârizmî que vivió durante el siglo IX y que escribió un conocido tratado sobre manipulación de números y ecuaciones titulado *Kitab al-jabr w'almugabala,* en el que enunciaba las reglas paso a paso para sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales. La traducción al latín del apellido en la palabra *algorismus* derivó posteriormente en *algoritmo.* Euclides, el gran matemático griego (del siglo IV a.c.) que inventó un *método* para encontrar el máximo común divisor de dos números, se considera con al-Khowârizmî el otro padre de la ciencia de los algoritmos o algoritmia.

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones o instrucciones que permite la solución de un problema. La solución de un problema exige el diseño de un algoritmo. Estas instrucciones deben ser lo bastante claras para comprender el razonamiento empleado para solucionar el problema.

1.2.1.- Características de los algoritmos

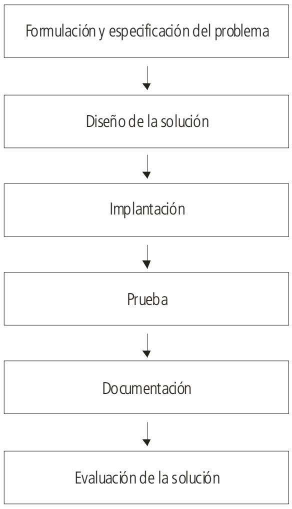
La idea de algoritmo, como una secuencia de pasos concretos para solucionar un problema, está presente en todas las actividades que se realizan en la vida cotidiana: hacer una tortilla, lavar el coche, ir al cine,… Sin embargo, no todos los algoritmos están bien diseñados y por lo tanto no son eficaces. Para que un algoritmo sea eficaz, debe presentar las siguientes características:

1. Debe ser preciso: indicar el orden de realización de cada paso.

2. Debe estar definido: si se siguen los pasos de un algoritmo dos o más veces, se tiene que obtener el mismo resultado.

3. Debe ser finito: debe tener un número finito de pasos o acciones.

Para diseñar un algoritmo que resuelva un problema hay que realizar una serie de pasos sucesivos que se detallan a continuación:



El primer paso para resolver un problema es analizar cuidadosamente el problema con el objeto de identificar lo mejor posible todos y cada uno de los elementos que forman parte de él y qué tipo de solución se quiere dar. Esta fase es muy creativa y requiere mucha imaginación por parte del programador o diseñador de algoritmos. A continuación, el programador, propone una solución, algoritmo, que, con los datos facilitados, y paso a paso, produzca los resultados deseados. Esta etapa, diseño de la solución, proporciona una primera secuencia de pasos a realizar. Con la implementación, se completa la primera descripción del algoritmo, añadiendo más detalles a cada uno de los pasos a realizar hasta obtener la secuencia definitiva de todas las órdenes que hay que realizar para solucionar un determinado problema y obtener los resultados deseados. Después se prueba que el algoritmo funcione correctamente, es decir, que produzca los resultados deseados. Cuando esto ocurre, se documenta el proceso con todos los datos utilizados para implementar el algoritmo y finalmente se evalúa la eficacia de esa propuesta y su capacidad de crecer o poder ser modificada en el futuro.

1.2.2.- Representación gráfica de algoritmos

Los algoritmos se representan por métodos independientes a los lenguajes de programación. Esto permite que un mismo algoritmo se pueda codificar indistintamente en cualquier lenguaje de programación. Para conseguir este objetivo, es necesario que el algoritmo se represente gráficamente, de modo que la descripción del conjunto de acciones que necesita desarrollar para resolver un problema, sea lo suficientemente clara y eficaz para que se pueda transformar a cualquier lenguaje de programación. La fase de conversión de un algoritmo en un lenguaje específico de programación se denomina codificación; esto se debe a que cuando un algoritmo está escrito en un lenguaje específico de programación se denomina, en vez de algoritmo, código.

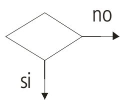
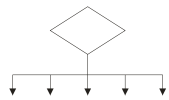
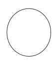
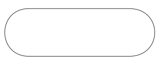
Los algoritmos se pueden representar por medio de tres métodos diferentes:

1. **Diagrama de flujo:** utiliza símbolos o cajas estándar, para cada uno de los pasos del algoritmo y los une por medio de flechas que indican las líneas de flujo de los pasos a realizar en el algoritmo.

   Cada símbolo indica el tipo de operación que realiza y el diagrama de flujo ilustra gráficamente, el orden o la secuencia en la que se ejecutan todas las operaciones.

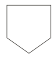
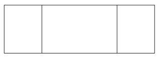
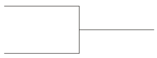
   El diagrama de flujo se inicia con una caja de tipo elíptico a la que se etiqueta con la palabra *inicio,* y termina con otra caja igual, etiquetada con la palabra *fin*. Entre estas dos cajas se incluyen otras, normalmente rectangulares, de tipo rombo o paralelogramo, que indican todas las instrucciones que se tienen que realizar para solucionar un problema.

   Los símbolos estándar normalizados que se utilizan para diseñar cualquier diagrama de flujo (ANSI (American Nacional Standard Institute) / ISO (Internacional Standard Organization))[6] son los siguientes:

	Decisión	Indica operaciones lógicas o de comparación entre datos -normalmente dos- y en función del resultado de la misma determina cuál de los distintos caminos alternativos del programa se debe seguir. Es una caja de decisión que representa respuestas si / no.
 Salidas múltiples	Decisión múltiple	En función del resultado de la comparación se seguirá uno de los diferentes caminos de acuerdo con dicho resultado. Es una caja de decisión que representa diferentes alternativas como respuesta.
	Conector	Sirve para enlazar dos partes cualesquiera de un diagrama de flujo que se ha roto previamente, por medio de un conector en la salida y otro conector en la entrada. Se refiere a una conexión que se realiza en la misma página del diagrama.
	Terminal	Representa el comienzo "inicio" y el final "fin" de un programa. Puede representar también una parada o interrupción programada que sea necesario realizar en un programa. Cada diagrama de flujo comienza y termina con un símbolo terminal.
	Entrada / Salida de datos	Representa cualquier tipo de entrada o salida de datos, a o desde, el programa.
	Proceso	Cualquier tipo de operación que pueda originar cambio de valor, formato oposición de la información almacenada; operaciones aritméticas, de transferencia, ... Representa acciones a realizar.

---

[6] Luis Joyanes, *Problemas de Metodología de la Programación*, McGraw-Hill, Madrid, 1990, pp. 8-9.

→ ↓ ↑ ←	Indicador de dirección o línea de flujo	Indica el sentido de ejecución de las operaciones. Representa el flujo secuencial de la lógica del programa.
	Linea conectora	Sirve de unión entre dos símbolos.
	Conector	Sirve para conectar dos puntos cualesquiera del organigrama situados en páginas diferentes.
	Llamada a un proceso predeterminado	Es una llamada a un módulo independiente del programa principal, que recibe una entrada o datos que proceden del programa principal, realiza una tarea determinada y regresa, cuando finaliza, al programa principal.
	Comentarios	Se utiliza para añadir comentarios clarificadores a otros símbolos del diagrama de flujo. Se pueden dibujar a cualquier lado del símbolo.

2. **Diagrama N-S (Nassi-Schneiderman):** es como un diagrama de flujo en el que se han suprimido las flechas de unión y las cajas son contiguas. Este diagrama utiliza cajas contiguas para escribir en ellas el conjunto de acciones sucesivas que son necesarias para solucionar un problema.

   La representación de un algoritmo, según este modo de representación, se realiza de la siguiente forma:

nombre del algoritmo
<acción 1>
<acción 2>
<acción 3>
…
fin

3. **Pseudocódigo:** es un lenguaje específico para describir algoritmos que se creó para superar las desventajas de uso que producían los diagramas de flujo: eran muy laboriosos de diseñar; y realizar cambios en su diseño era muy costoso porque había que rediseñar cada vez todo el diagrama.

   El pseudocódigo nació como un lenguaje similar a los lenguajes de programación, para escribir un primer borrador de un programa con una serie de estructuras de control que pudieran traducirse con cierta facilidad a un lenguaje de programación. Aunque no existe un conjunto de reglas determinadas que definan exactamente lo que es un pseudocódigo, el pseudocódigo mezcla lenguaje natural, símbolos y términos como, *inicio*, *fin*, *si-entonces-sino*, *mientras*, *fin_mientras*, *repetir*, *hasta_que*, que son parecidos a los utilizados en los lenguajes de alto nivel.

La ventaja que tiene el pseudocódigo frente a los lenguajes de programación es que, al utilizar un lenguaje, sin reglas fijas, el programador se puede centrar en la lógica y en las estructuras del programa sin tener que preocuparse de una sintaxis de programación rígida, propia de un lenguaje de alto nivel.

El pseudocódigo utiliza palabras reservadas para representar las acciones sucesivas que se desarrollan en el algoritmo. Todo algoritmo comienza con la palabra reservada *inicio* y termina con la palabra *fin*. Entre estas palabras se escribe todo el conjunto de instrucciones, una por línea, necesarias para solucionar el problema para el que se haya escrito el algoritmo.

En el pseudocódigo se utilizan nombres simbólicos o identificadores para representar el título del algoritmo, o nombrar a todos aquellos datos, variables o constantes, que son procesados por el programa.

Para realizar comentarios sobre algunas de las órdenes o instrucciones a ejecutar, se utilizan los llaves { } o los corchetes [ ].

Todo algoritmo está compuesto de dos partes: una cabecera y un cuerpo del algoritmo.

En la cabecera del algoritmo, se especifica el nombre del algoritmo; para ello se utiliza la palabra reservada *algoritmo* seguida del identificador o nombre del programa. Un ejemplo sería la cabecera para un algoritmo cuyo objetivo es construir geométricamente un cubo.

algoritmo Construcción de un cubo

El cuerpo del algoritmo está compuesto de dos secciones: una sección de declaraciones y otra de acciones ejecutables.

En la sección de declaraciones, se declaran o describen todas las variables y constantes que se van a utilizar en el desarrollo del algoritmo. La forma de declararlas consiste en hacer un listado con sus nombres y especificando el tipo de datos que cada una representa. Siguiendo con el ejemplo del cubo, se puede declarar como constante la medida de los lados del cubo y como datos variables, la posición que ocupan los vértices para la construcción de una de sus representaciones:

```
var     vértice_1: entero
        vértice_2: entero
        vértice_3: entero,…
const   lado_cubo = 20
```

En la sección de acciones ejecutables, se incluyen todas aquellas acciones que deberá realizar el programa cuando se ejecute. Todas estas instrucciones se colocan entre las palabras reservadas *inicio* y *fin*:

```
inicio

    <sentencia S1>
    <sentencia S2>,…
fin
```

Uniendo todas estas partes constitutivas de un algoritmo, la representación estándar de un algoritmo se puede realizar según el siguiente pseudocódigo:

```
algoritmo   identificador           {cabecera}
{sección de declaraciones}
var         lista de identificadores: tipos de datos
const       lista de identificadores = valor
inicio
    <sentencia S1>
    <sentencia S2>                  {cuerpo del algoritmo}
         .
         .
         .
    <sentencia Sn>
fin
```

Luis Joyanes en su libro *Problemas de Metodología de la Programación*, propone el siguiente algoritmo diseñado para cruzar una calle por un paso de peatones:[7]

```
algoritmo   Cruzar paso de peatones
inicio
    Mirar a la derecha y a la izquierda
    mientras pasen coches
            esperar
            mirar a la derecha y a la izquierda
    fin_mientras
    Cruzar la calle
fin
```

Se inicia el pseudocódigo con la palabra reservada *algoritmo* y un identificador, *cruzar paso de peatones*, formado por una frase o término que sintetiza la función que va a realizar el algoritmo. El contenido del algoritmo, las instrucciones que se van a ejecutar para conseguir cruzar el paso de peatones, se coloca entre dos palabras reservadas, características también del pseudocódigo, *inicio – fin*. La primera instrucción a realizar cuando se quiere cruzar un paso de peatones es situarse en el lugar del cruce y mirar a la derecha e izquierda de la calzada para ver si vienen coches. Dependiendo de cual sea el resultado de la observación se realizarán una serie de instrucciones u otras. La situación más habitual en los pasos de cebra es que estén pasando coches, por lo tanto, en el algoritmo, se realiza un bucle que compruebe continuamente la carretera, a derecha e izquierda, hasta que dejen de pasar coches y así, en ese preciso momento, poder cruzar la calzada. Este bucle se realiza con la instrucción *mientras – fin_mientras*. Todas las instrucciones que están dentro de este bucle se ejecutarán de forma secuencial hasta que se deje de cumplir la condición de que pasen coches. La forma de leer el bucle sería: mientras pasen coches, espere y mire a la derecha e izquierda del cruce. Cuando la condición de salida del bucle se cumpla: no pasen coches, continúe con las instrucciones del algoritmo, es decir, cruce la calle.

[7] Luis Joyanes, *op. cit.,* p. 26.

1.3.- CONCEPTO DE PROGRAMA

Un programa, como un algoritmo, es una secuencia de instrucciones, sentencias o proposiciones necesarias para solucionar un problema. Se utiliza para pasar del esbozo informal de un algoritmo a un modelo formal de instrucciones detallado que se realiza en un lenguaje de programación. Para elaborar un programa es necesario conocer todo el repertorio de palabras reservadas, instrucciones y reglas gramaticales del lenguaje de programación que se va a utilizar.

Luis Joyanes en su libro *Fundamentos de Programación* define de este modo el concepto de programa: "En esencia, un programa es un medio para conseguir un fin. El fin será normalmente definido como la información necesaria para solucionar un problema".[8]

El proceso para realizar un programa es muy complejo y está, básicamente, compuesto por las siguientes etapas:

1. Definición y análisis del problema:

Define el problema en términos detallados para que pueda ser comprendido con claridad por la persona que va a desarrollar el programa de ordenador. Requiere, además, que se especifiquen con precisión cuáles son los datos de entrada y salida que se van a facilitar al programa.

2. Diseño de algoritmos:

Una vez analizado el problema con todo detalle, se desarrolla el algoritmo. En el algoritmo se describen, como se ha visto antes, todos los pasos que hay que dar y en el orden adecuado para solucionar el problema. El algoritmo se realiza con cualquiera de los métodos o procedimientos descritos anteriormente:

1. Diagrama de flujo
2. Diagrama N-S (Nassi-Schneiderman)
3. Pseudocódigo

3. Codificación del programa:

Por último, para que el algoritmo se pueda ejecutar en un ordenador, se codifica en un lenguaje de programación: Basic, C++, Pascal,…, que sea comprensible para la máquina; es decir, se traducen las instrucciones del algoritmo, a las instrucciones adecuadas al lenguaje de programación elegido, utilizando las palabras reservadas correspondientes, y respetando la sintaxis que propone cada uno de ellos.

4. Depuración y verificación del programa:

Una vez que el algoritmo ha sido diseñado y codificado en un lenguaje de programación, se ejecuta el programa y se corrigen todos los errores de sintaxis y de lógica que se han cometido, y se comprueba que los resultados obtenidos sean los deseados.

---

[8] Luis Joyanes, *Fundamentos de Programación: Algoritmos y Estructuras de Datos*, McGraw-Hill, Madrid, 1990, p. 75.

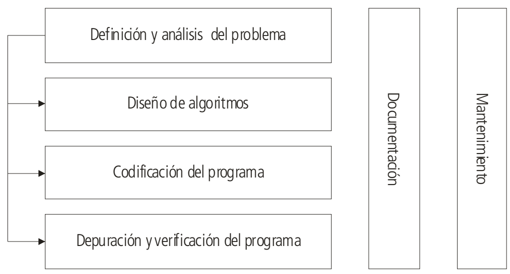
5. Documentación:

Esta etapa se realiza una vez que se ha comprobado que el programa se ejecuta correctamente y los resultados responden a las necesidades que se requerían para resolver el problema que se había planteado. En esta etapa se especifica todo el proceso descrito hasta ahora, paso a paso, y se incluyen todas las especificaciones necesarias para que cualquier persona ajena al desarrollo del programa realizado, pueda comprenderlo y, si fuera necesario, porque se dan nuevas especificaciones, corregirlo de forma adecuada.

6. Mantenimiento:

Con el mantenimiento se comprueba, de tiempo en tiempo, que los resultados que se obtienen en la ejecución del programa, son los correctos.

Todas las etapas propuestas, se pueden resumir en el siguiente esquema:[9]



Todas estas etapas, según las funciones que se realizan en cada una de ellas, se pueden agrupar en torno a dos grandes fases, relacionadas entre sí, que una vez definido y analizado el problema, se ejecutan simultáneamente, hasta que se resuelve el programa:

1. **Fase de resolución del problema:** el resultado de esta primera fase es el realizar el diseño de un algoritmo capaz de resolver el problema planteado.

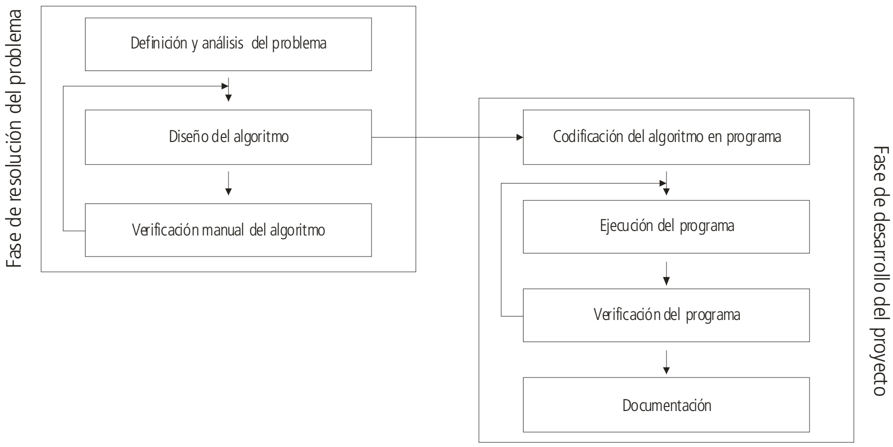
2. **Fase de desarrollo del proyecto:** el objetivo de la segunda fase, es codificar el algoritmo en un lenguaje de programación de alto nivel que sea comprensible por el ordenador. Es decir, en esta etapa, se implementa el programa, se ejecuta y se verifica si cumple los requisitos para los que había sido diseñado y si lógica y gramaticalmente está bien escrito. Finalmente si todo el proceso es correcto, se documenta con toda la información y datos que se han utilizado para su construcción con el objeto de que, en el futuro, pueda modificarse o corregirse, si fuera necesario.

---

[9] Luis Joyanes, *op. cit.,* p. 76.

Estas fases se pueden representar gráficamente en el siguiente esquema:[10]

Etapas en el desarrollo de un programa



Es necesario destacar que, en el desarrollo de un programa, hay dos etapas recursivas importantes: una, en el diseño del algoritmo; y otra, en el diseño del programa, que responden a la necesidad de que cada uno de ellos se adapte y ajuste a los requisitos, tanto de lógica como de sintaxis, del programa, y además, asegurarse que cubren todas las espectativas necesarias para resolver el problema planteado.

1.3.1.- Características de los programas

La escritura de un programa debe ser lo más clara y estructurada posible. Todo programa debe ser fácil de leer, de escribir, de verificar y de mantener. En resumen, todo programa para que sea eficaz debe reunir las siguientes características:

1. Ser correcto / fiel: tiene que ser capaz de producir los resultados esperados.

2. Ser legible: debe poder ser entendido por cualquier persona iniciada en el lenguaje de programación.

3. Ser modificable: un programa no es un diseño definitivo y cerrado sino que debe permitir realizar modificaciones y nuevas interpretaciones del programa con facilidad.

4. Ser depurable: debe poder ser capaz de localizar errores en el transcurso del programa y poder corregirlos.

5. Ser eficiente: debe saber utilizar óptimamente los recursos del sistema.

6. Ser portable: debe poder exportar sus funciones a otros sistemas.

7. Poder mantenerse: debe poder corregir los errores que surjan de su uso.

[10] Luis Joyanes, *Problemas de Metodología de la Programación*, McGraw-Hill, Madrid, 1990, p. 2.

1.3.2.- Representación gráfica de los programas

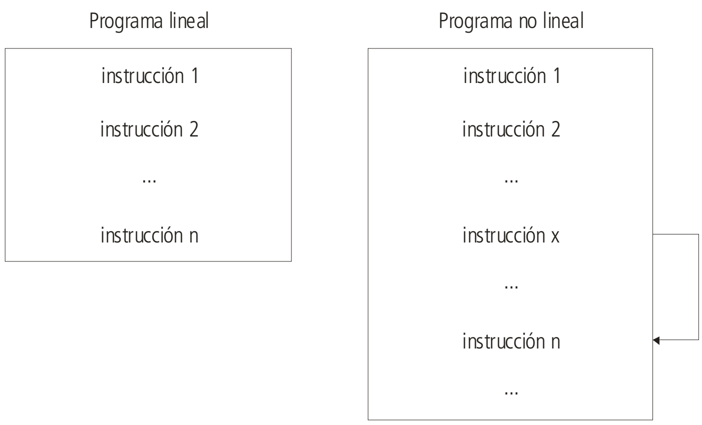
Para desarrollar un programa, el programador debe especificar el conjunto de datos e instrucciones que necesita para obtener los resultados deseados. Estas especificaciones deben contener la siguiente información: qué datos van a entrar al programa para procesarse; qué datos se desean obtener como resultado de ejecutar el programa; y qué conjunto de instrucciones se va a utilizar en el programa para, a partir de los datos de entrada, conseguir esos resultados.

Conceptualmente, todo programa está constituido de las siguientes partes:

1. **Entrada de datos:** abarca toda la información que se proporciona al programa para su correcto funcionamiento. Estos datos proceden de distintos dispositivos de entrada. Es una operación de lectura.

2. **Salida de datos:** comprende toda la información que produce o genera el programa en su ejecución. Es una operación de escritura.

3. **Programa:** especifica el conjunto de instrucciones que ejecuta el programa para conseguir su objetivo. Las acciones deben escribirse en el orden en que van a ser ejecutadas. Si las instrucciones se ejecutan secuencialmente sin ninguna interrupción, la programación es lineal. Si la secuencia de ejecución se interrumpe mediante instrucciones de bifurcación o salto, la programación es no lineal.



El proceso de codificación de un programa consiste en definir todos los datos y todas las instrucciones necesarias para resolver un problema. Las instrucciones y los tipos de datos disponibles en un lenguaje de programación dependen del tipo de lenguaje que se utilice para su codificación. No obstante, existen una serie de tipos de datos e instrucciones básicas, que se pueden implementar en cualquier lenguaje de programación.

La clasificación más usual, para abarcar tanto los tipos de datos como las instrucciones disponibles, es la siguiente:

1. **Palabras reservadas:** son nombres que se utilizan para identificar a los objetos que se desea manipular: variables, constantes, funciones,…

2. **Identificadores:** son los nombres que se dan a los programas, las variables, las constantes, las funciones,…

3. **Caracteres especiales:** son símbolos: corchetes, punto y coma,…, que se utilizan a lo largo del programa para realizar funciones especiales como: inicio de comentario, fin de una instrucción,…

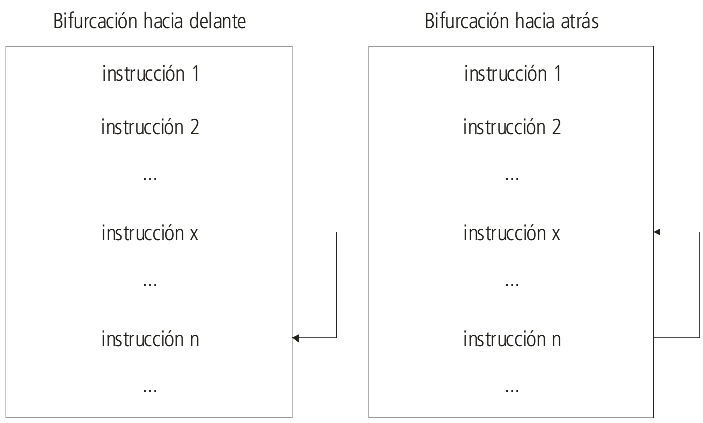
4. **Constantes:** son datos cuyo valor no cambia durante la ejecución del programa.

5. **Variables:** son datos que pueden cambiar durante la ejecución del programa.

6. **Expresiones:** son combinaciones de constantes, variables y símbolos de operaciones. Una expresión consta de operandos y operadores. Según el tipo de operadores que utilicen, pueden ser: aritméticas, relacionales, lógicas o de carácter.

7. **Instrucciones:** en un programa existen varios tipos de instrucciones:

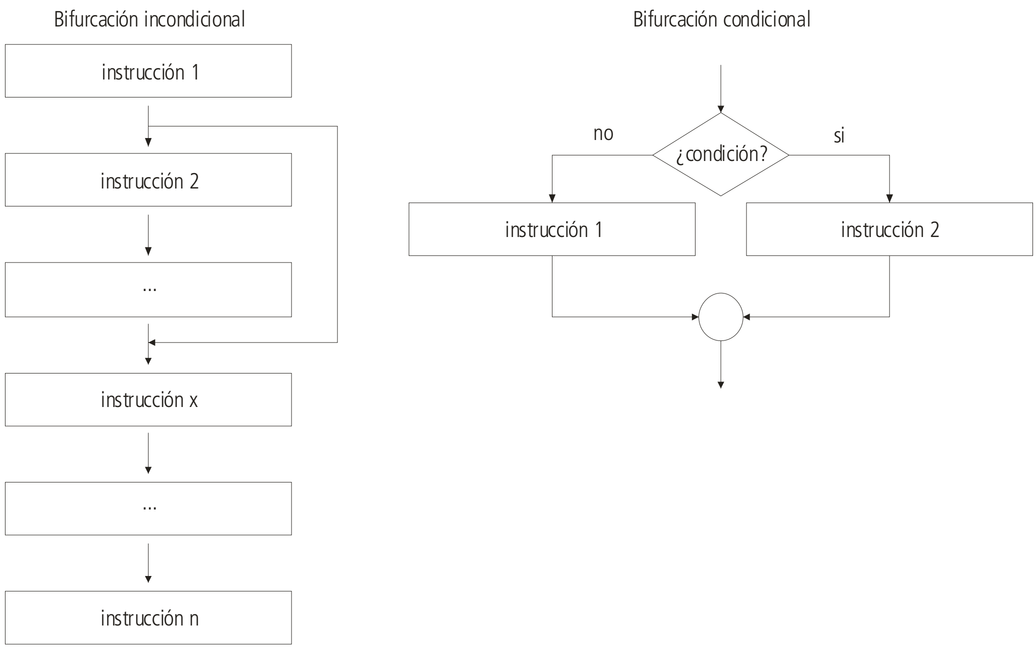
    1. Instrucciones de inicio / fin: indican el comienzo y el final del programa.
    2. Instrucciones de asignación: se utilizan para dar valores a las variables del programa.
    3. Instrucciones de entrada / salida de datos: leen y escriben datos en dispositivos de entrada y salida.
    4. Instrucciones aritmético-lógicas: ejecutan operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación) y lógicas (and, or, not,…)
    5. Instrucciones selectivas: permiten la selección, durante la ejecución del programa, de tareas alternativas en función de los resultados de diferentes expresiones condicionales.
    6. Instrucciones repetitivas: permiten la repetición de secuencias de instrucciones un número determinado de veces o un número indeterminado de veces dependiendo de que se cumpla o no una determinada condición de salida.
    7. Instrucciones de bifurcación o salto: interrumpen el desarrollo lineal de un programa y pueden ir hacia delante o hacia atrás.



Pueden ser de dos tipos:

1. **Bifurcación condicional:** la bifurcación se realiza en función del resultado que se obtenga de la evaluación de una condición.

2. **Bifurcación incondicional:** se produce cuando se pasa de una instrucción determinada a otra sin ningún tipo de condición.



8. **Contadores:** son variables que controlan el número de acciones internas que se realizan dentro de un bucle. Se incrementan y decrementan en una cantidad constante en cada iteracción.

9. **Acumuladores:** son variables que almacenan cantidades variables que proceden de sumas sucesivas. Realizan las mismas funciones que los contadores pero, en este caso, el incremento y decremento de cada número que se almacena, es variable en lugar de constante.

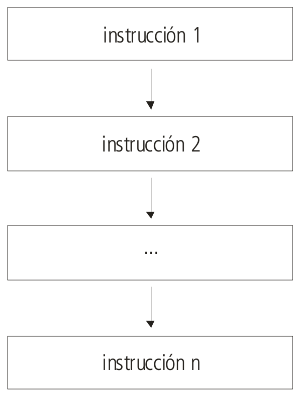
10. **Interruptores:** son variables que pueden tomar dos valores distintos, 0 y 1, a lo largo de la ejecución del programa.

11. **Bucles:** son segmentos del programa cuyas instrucciones se repiten un número determinado de veces mientras se cumple una determinada condición.

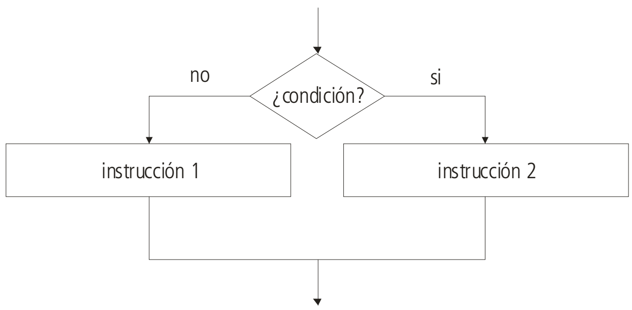
12. **Estructuras:** son un conjunto de estructuras de control que forman una unidad lógica de sentido dentro del programa.

Pueden ser de tres tipos: secuenciales, selectivas y repetitivas.

1. **Secuenciales:** es una estructura en la que una instrucción sigue a otra instrucción. La salida de una instrucción es la entrada de la siguiente y así sucesivamente hasta el final del programa.



2. **Selectivas:** evalúan una condición y en función del resultado obtenido, realizan una instrucción u otra.



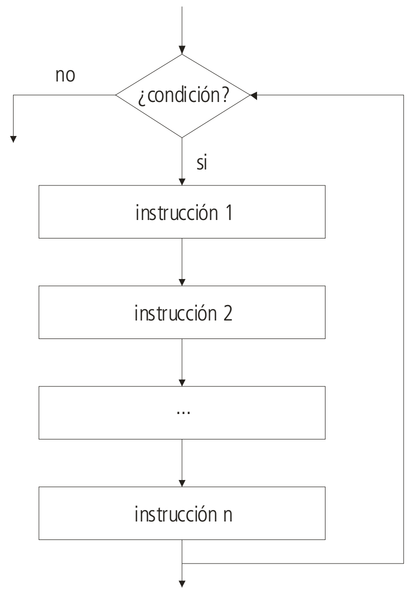
3. **Repetitivas:** repite una o varias instrucciones un número determinado de veces. Para detener la ejecución de los bucles, se utiliza una condición de salida. La condición de salida se puede indicar al principio o al final del bucle.

   Existen tres tipos de estructuras repetitivas:

   1. ***mientras***: el cuerpo del bucle se repite mientras se cumpla una determinada condición.

   2. ***repetir***: el bucle se ejecuta al menos una vez antes de comprobar la condición de repetición. El bucle se ejecuta hasta que se cumpla una condición determinada que se comprueba al final del bucle.

   3. ***desde***: ejecuta las acciones del cuerpo del bucle un número específico de veces. Controla las repeticiones de las acciones de un modo automático.



Estructura repetitiva "mientras"

1.4.- DIRECTRICES PARA GENERAR SISTEMAS, ALGORITMOS Y PROGRAMAS

Las teorías generales de sistemas, de algoritmos y de programas, plantean características comunes que se encuentran sin excepción en todas ellas. Utilizan un lenguaje conceptual basado en el planteamiento de problemas y solución de los mismos. La diferencia de estos lenguajes hace posible que para determinados problemas se puedan dar soluciones funcionalmente diferentes. Aquí se introduce, de una forma global, un conjunto de directrices que, una vez estudiados los lenguajes que aportan los sistemas, los algoritmos y los programas, sirvan para generar, como autores, sistemas, algoritmos y programas que puedan ser útliles para expresarse gráfica y conceptualmente.

1. El creador del sistema es el autor de la obra. Cada artista elabora la representación del sistema desde su punto de vista y su experiencia personal.

2. El punto de partida para generar un sistema es marcarse unos objetivos, conceptuales u operativos, a alcanzar.

3. El artista elige el punto de partida desde el que se va a generar el sistema.

4. En la creación de los sistemas es importante incluir, además de los elementos que lo definen, todas aquellas apreciaciones que se observan tanto en el proceso de ideación del sistema como en el de implantación; todas aquellas opiniones que se escuchan en torno al sistema y lo que se siente, tanto en su elaboración como en los resultados que produce.

5. Es importante establecer los límites del sistema según sea el objetivo que se quiera alcanzar. Entre los límites se incluyen: elegir los elementos que forman parte del sistema, definir las relaciones entre los elementos del sistema y las operaciones que soporta dicho sistema, y, si fuese necesario, establecer un marco temporal que indique la validez del sistema o simplemente el tiempo necesario para construirlo e implantarlo.

6. En el diseño de sistemas nuevos se pueden utilizar sistemas creados con anterioridad, bien en su totalidad, o parcialmente.

7. Cada sistema realizado tiene una gran variedad de usos y aplicaciones.

8. Es importante encapsular el contenido de un sistema bajo un concepto determinado que avale o anticipe las funciones que realiza ya que para diseñar uno nuevo se pueden conectar varios programas previos a través de determinadas órdenes o instrucciones.

1.5.- ANÁLISIS DE OBRAS

1.5.1.- MANFRED MOHR

Manfred Mohr, en el periodo que va de 1969 – 72, tiene una etapa creativa en la que emplea el ordenador para resolver problemas estéticos, es decir, integra el ordenador a su sistema estético. Se introduce en la construcción lógica y automática del cuadro. Su actividad artística consiste en escribir algoritmos y programas que reflejen su pensamiento formal y estético. Los algoritmos se construyen a partir de principios selectivos tanto lógicos como aleatorios que el artista llama filtros estéticos.

Para Mohr,[1] las obras generadas por ordenador están definidas por las siguientes características:

1. Reflejan una idea precisa de un problema estético.
2. Utilizan ideas capaces de ser codificadas por un algoritmo. Mohr conceptualiza la idea fragmentándola en módulos o subprogramas capaces de unirse para, juntos, formar un programa que refleje un objetivo estético.
3. Exigen que el artista tenga un control de todas y cada una de las máquinas: ordenadores, plotter, impresoras,…, que se utilizan para generar la obra, con el único objetivo de aprovechar todas las ventajas que le puedan aportar a su proceso creativo.
4. Obligan a conocer la lógica y metodología de la programación para poder hacer perceptibles todas aquellas características expresivas importantes para generar su trabajo.
5. Utilizan lo aleatorio como generador de elementos de la obra que luego el artista selecciona según sus objetivos y criterios estéticos.
6. Favorecen un tipo de trabajo basado en un sistema generativo que produce series de obra que dan sentido al programa que las genera. Se necesita la totalidad del trabajo realizado para comprender el objetivo estético del proyecto.

En este tipo de obras, la concentración creativa se centra en establecer la lógica de una obra, escribiendo un programa, lo que significa definir todas las instrucciones que tiene que realizar el ordenador para generar la obra. El resultado de este procedimiento refleja una construcción clara que puede ser entendida por todo el mundo iniciado en los lenguajes de programación. En este punto, hay que señalar que en esta forma de proceder hay una desmistificación de la obra de arte y del artista, ya que reduce las barreras detrás de las que se pueda ocultar el artista.

Por otro lado, la lógica construida en un programa hace posible crear un casi infinito número de situaciones nuevas, ya que un mismo procedimiento se puede aplicar a diferentes obras de forma que genere respuestas distintas.

Con este sistema de trabajo, el artista tiene que desarrollar una gran capacidad para saber elegir lo que es válido y lo que ha sido útil para conseguir una obra pero que no funciona como obra autónoma por sí misma. En este punto, el criterio estético de Manfred Mohr está determinado por una decisión de no crear obras únicas sino series de obras. El valor está en la relación entre las obras y no se asocia ningún valor estético a una obra en particular. Así se suprime la necesidad de elegir entre esta o aquella obra y poner el peso de la decisión estética en el interés y lo que conceptualmente aporta el propio procedimiento creativo. La consecuencia fundamental de esta actitud es que,

[1] Manfred Mohr, *Manfred Mohr: Computer Graphics. Une Esthétique Programmée*, Musée d´Art Moderne de la Ville de París, París, 1971, p. 38.

después de un periodo de muestreo, modificaciones de la lógica del programa y cambios en los parámetros de los algortimos, todos los resultados posibles de un programa tienen que ser rigurosamente aceptados como respuesta final.

Es importante destacar que en las obras de Manfred Mohr realizadas en este periodo, se dan unas características comunes. La primera característica a destacar es la ruptura con el campo cromático. Todas las obras de este periodo se desarrollan en blanco y negro. Esta elección refleja una codificación de la obra acorde con el lenguaje binario digital: 0, 1, que utiliza para generarlas, y le sirve para construir, a partir de lo simple, obras de una gran complejidad.

La segunda característica importante de este periodo es que sus obras no transmiten, a través del trazo, emociones espontáneas, sino lógica y precisión. Su arte es resultado de una exploración sistemática del mundo de la geometría. Las obras muestran conjuntos de superficies geométricas estructuradas, relacionadas entre sí desde un punto de vista cuantitativo. Manfred Mohr crea un conjunto de formas geométricas, que utiliza a modo de biblioteca de formas o de base de datos, que contienen información que utiliza cuando y como quiere.

La tercera característica de las obras de Mohr es que los algortimos que utiliza para generar sus obras reflejan sus aspiraciones estéticas. Matiza las posiciones de los elementos, sus características físicas, sus capacidades de desplazamiento, sus objetivos. Utiliza todas las variables necesarias para que la obra realizada refleje su concepción estética del arte. Los programas son para él, propuestas objetivas de instrucciones que actúan como filtro de todas las posibilidades de formas que el ordenador es capaz de generar. La elección refleja su estética, su estilo, su pensamiento. Thomas Kurtz,[2] en su artículo, «*El Valor de Obrar de Acuerdo con su conciencia*»,[3] recoge unas palabras de Manfred Mohr que reflejan su compromiso estético con este medio de expresión: "Si no puedo formular algo por mí mismo, el ordenador tampoco lo puede hacer".[4] El proceso de su obra consiste en formular las reglas y los procedimientos matemáticos para su representación visual. Es importante señalar que el artista comienza con unas ideas visuales vagas, después crea los algoritmos y se deja sorprender por los resultados obtenidos. En otra parte del artículo citado, Mohr señala "Mi arte no es matemático sino una declaración basada en mi experiencia. No intento ilustrar las frias matemáticas, sino una filosofía vital".[5]

En resumen, se puede decir que su arte es resultado de una exploración sistemática del mundo de la geometría, la línea, con un instrumento muy potente: el ordenador, capaz de realizar muchas y muy diferentes operaciones y de generar una gran variedad de sus representaciones visuales.

1. P–21, Programa 21 – Estructuras en bandas, 1969[6]

Este programa construye líneas continuas generadas por una ley aleatoria y filtradas después por criterios estéticos que establecen las probabilidades de aparición de determinadas estructuras elementales: líneas, unidades periódicas en zig-zag de diferentes tamaños, ondas rectangulares,..., donde las longitudes, anchuras y direcciones son parámetros variables que se utilizan en dominios limitados. La estructura lógica de este programa consiste en gestionar otros subprogramas que realizan funciones particulares de la obra. Entre éstos se encuentran los

[2] Manfred Mohr, *Manfred Mohr*, Waser Verlag, Zürich, 1994, p. 16.

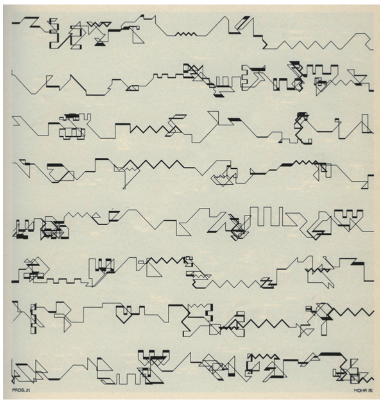
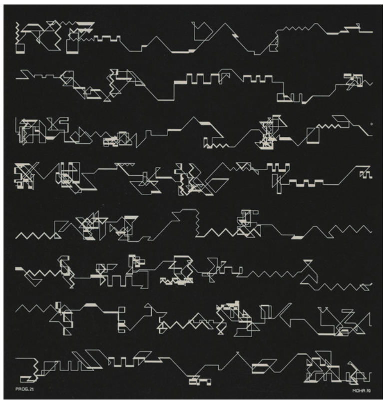
[3] "*The Courage of One's Convections*".

[4] Manfred Mohr, *op. cit.*, "*If I can't formulate something myself, the computer can't do it either*", p. 22.

[5] Manfred Mohr, *op. cit.*, "*My art is not mathematicas but is a statement shaped out of my experience. I am not trying to illustrate cold mathematics, but a vital philosophy*", p. 22.

[6] P–21, Programme 21 – Band-Structures, 1969.

programas 10, 11, 18, 26, 28, 35, 36, 48, 49, 50 y otros. Se puede decir que este program muestra de una forma muy clara el interés por los procedimientos o por las llamadas a otros programas.

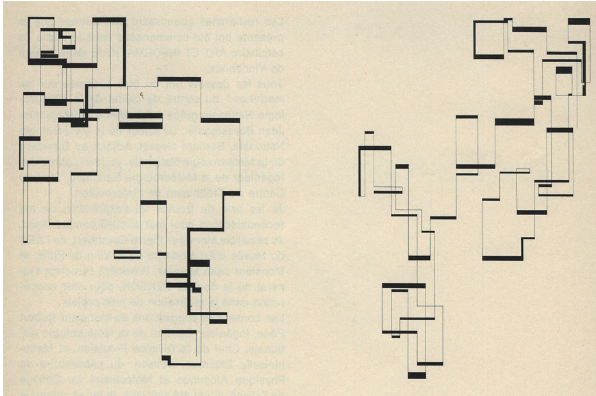



La obra está constituida por 8 bandas horizontales donde, en cada una de ellas, se generan secuencias continuas de líneas con trayectorias a 0º, 45º y 90º. Mohr crea una obra compleja introduciendo trazos de línea de diferente anchura, recorridos en zig-zag,… y trabajando para que lo aleatorio sirva para conseguir un mayor equilibrio compositivo en la obra y tratando de elimiar efectos visuales no deseados. Utiliza lo aleatorio como filtro estético, como una técnica que permite al artista dialogar con el ordenador: el ordenador le propone una serie de alternativas generadas objetivamente al azar, y el artista elige cuáles de ellas son importantes para redirigir su obra en una determinada dirección estética. Esta objetividad da a la obra una apariencia de mecanismo reproductible que no podría generarse por ningún otro medio. Permite, además, crear una serie de obras, que perteneciendo a una misma familia o conjunto gráfico (un mismo programa de ordenador), presentan un aspecto visual completamente diferente. Desde el punto de vista teórico, este hecho, tiene unas consecuencias interesantes: el hecho creador interviene sólo una vez para generar el programa y las reglas del juego de los procesos de construcción de la obra y definir los elementos gráficos que se van a utilizar, y como consecuencia de este hecho, surgen una serie de obras diferentes con la misma validez estética.

2. P–10/I, P–10/II, Programa 10 – Líneas continuas – Estudios (primer nivel) para el programa 21, 1969[7]

Este programa es un estudio previo a la realización del programa 21 que le sirve para investigar las posibilidades de realizar líneas continuas a lo largo de un trayecto. En estas líneas ortogonales, se experimenta con la anchura, longitud y ubicación de las líneas. La variación de anchos afecta sólo a los trazos horizontales de la línea; los trazos verticales se mantienen, salvo alguna excepción, constantes en esta propiedad. Es importante apreciar la creación de ritmos de trazos de líneas horizontales distribuidos a diferentes alturas. Un recorrido, desde el inicio al final del trayecto, complicado, lleno de idas y venidas controladas, de desplazamientos horizontales y verticales aleatorios,…, pero que al final consigue completar el espacio: realizar un recorrido diagonal, descendente, desde el vértice superior izquierdo al vértice inferior derecho, en P–10/I, y ascendente, desde el vértice inferior izquierda al vértice superior derecha, en P–10/II.

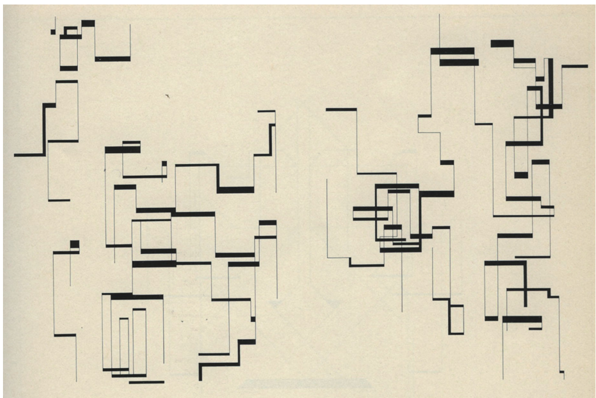
[7] P–10/I, P–10/II, Programme 10 – Lignes continues – Etudes (premier niveau) pour le programme 21, 1969.



P - 10 / I P - 10 / II

3. P–11, Programa 11 – Líneas discontinuas - Estudios (primer nivel) para el programa 21[8]

Este programa, previo también a la realización del programa 21, es un estudio de las posibilidades de realizar recorridos a base de unir visualmente pequeños módulos con trayectos de líneas ortogonales de diferente número de tramos. El tratamiento de las líneas verticales y horizontales es igual que el caso de los programas anteriores, P–10/I y P–10/II. Al ser módulos aislados, los que se utilizan en esta obra para componer el espacio, aparecen, a veces, superpuestos creando la sensación visual de concentración y la aparición de algunas estructuras concéntricas, y a veces, aislados, sin conexión con ningún otro elemento del sistema. En la obra se aprecia, igual que en los estudios anteriores, un predominio de las líneas horizontales sobre las vérticales y un ritmo visual muy potente creado por las distintas anchuras y ubicaciones de las líneas.



4. P–18, Programa 18 – Paseo aleatorio - Estudios (segundo nivel) para el programa 21, 1969[9]

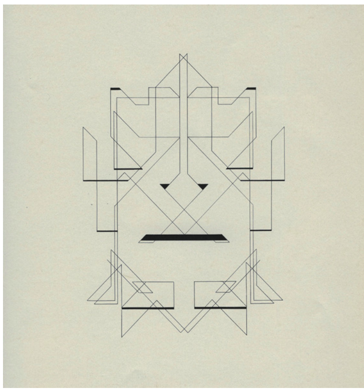
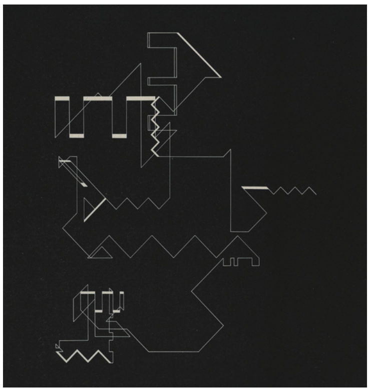
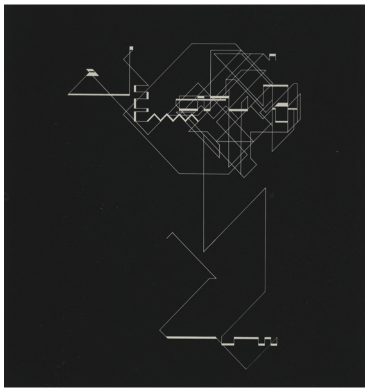
En este programa se realiza un estudio de un recorrido aleatorio de una línea con capacidad para desplazarse ortogonalmente, 0º - 90º, o en escuadra, 45º. Las líneas, igual que en los estudios anteriores, pueden variar su anchura, longitud y ubicación. A diferencia de las otras obras, aquí predominan los trazos neutros frente a los

---

[8] P–11, Programme 11 – Lignes discontinues - Etudes (premier niveau) pour le programme 21.

[9] P–18, Programme 18 – Random Walk - Etudes (deuxième niveau) pour le programme 21, 1969.

enfatizados por un aumento de anchura. Parece que la secuencia de los ángulos de los tramos de la línea sea aleatorio ya que, observando la obra, no aparece níngún patrón lógico que se repita. En la ilustración de la izquierda, se produce un paseo simétrico: dos puntos de partida, dos recorridos y dos puntos de llegada simétricos.

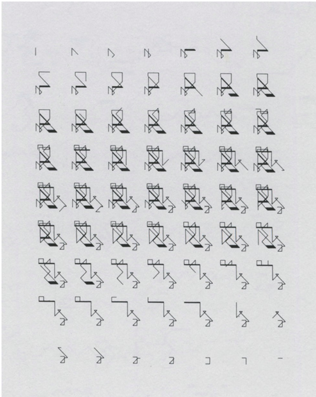
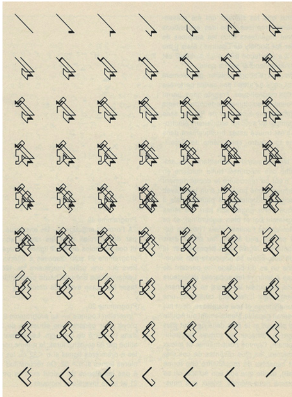
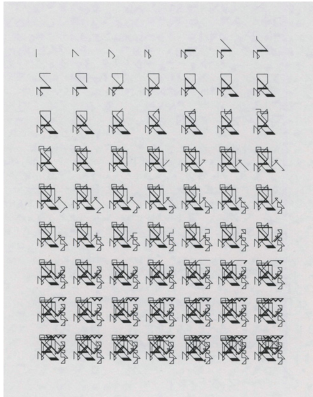
5. P–26, Programa 26 – Inversión Lógica, 1970 y P–28, Programa 28, 1970[10]

Geométricamente, la estructura visual de las obras que resultan de ejecutar los Programas 26 y 28, es de una matriz rectangular de 9 x 7 = 63 cuadrados de 3 x 3 cm. cada uno.

El programa 26 se emplea para generar, secuencial y progresivamente, una estructura contínua de una línea formada por 32 tramos de líneas rectas. La secuencia generativa del crecimiento de la línea hasta alcanzar los 32 tramos queda recogida en cada uno de los cuadrados de la matriz de 9 x 7 = 63 cuadrados, paso a paso, empezando por la esquina superior izquierda y avanzando de izquierda a derecha y de abajo arriba, hasta alcanzar la casilla 32. De la casilla 33 a la 63 se produce la secuencia inversa: cómo ir, progresiva y secuencialmente, perdiendo tramos de línea hasta quedarse simplemente con una única línea en la última casilla. Aunque el proceso es de inversión lógica, visualmente, no es simétrico porque la deconstrucción de la línea no sigue una secuencia paralela a su construcción sino que cambia la elección de los tramos que, uno a uno, van desapareciendo de la estructura, manteniendo, eso si, igual que en el proceso constructivo, una continuidad de trazo entre todas las líneas que en un momento dado están presentes. La obra, en su totalidad, está formada por 63 subestructuras: la n-ésima estará entre las n primeras líneas si n < 32, o entre las 64 –n últimas líneas si n > 32.

El programa 28 reconstruye, paso a paso, las etapas de cálculo que se necesitan para crear una estructura lineal continua de 63 tramos, con el mismo criterio constructivo que en los programas anteriores: sólo se pueden utilizar líneas ortogonales (0º - 90º) o en escuadra (45º). Además, las líneas pueden variar, durante el proceso, su anchura y longitud.

[10] P–26, Programme 26 – Inversion Logique, 1970 y P–28, Programme 28 , 1970.

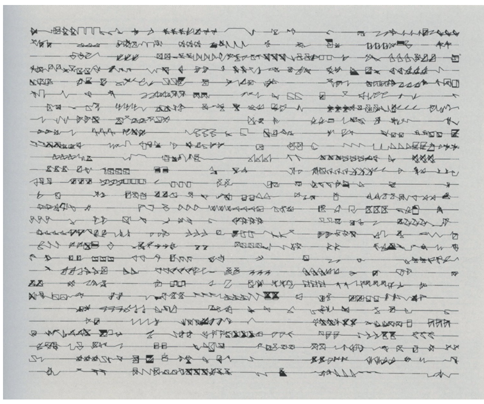
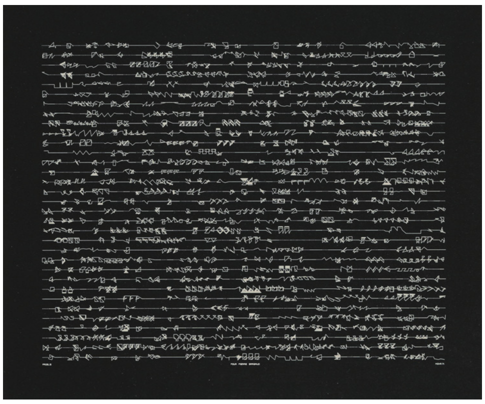
P - 26 P - 26 P - 28

6. P–35, Programa 35 y P–36 Programa 36 – Ruido blanco, 1971[11]

Este programa es un sistema generador de signos: crea conjuntos de líneas, entre 1 y 7 líneas, que se pueden utilizar para ejecutar el programa 21 o para el programa 38.

El criterio compositivo de la obra se basa en la capacidad para elegir el signo adecuado en el momento oportuno y en contabilizar la frecuencia relativa de estos elementos en el repertorio de la obra. Las unidades lineales generadas se sitúan sobre los puntos de una matriz y se unen entre sí a través de líneas rectas o puntos horizontales.

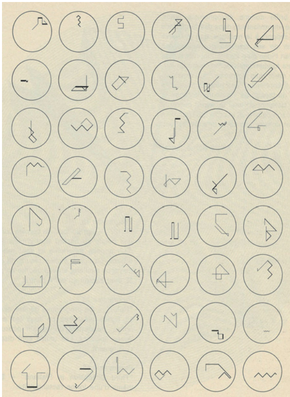
Visualmente, la obra genera secuencias de líneas horizontales, que van de lado a lado del soporte, formadas por unidades compositivas enlazadas.

[11] P–35, Programme 35 y P–36, Programme 36 – White Noise, 1971.

7. P–48, Programa 48 – UHF 81[12]

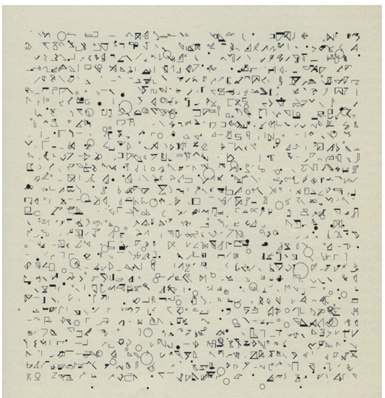
Esta obra está formada por una matriz de 8 x 6 = 48 casillas, en las que, en cada una de ellas, se ha dibujado un módulo circular. Cada círculo contiene un elemento gráfico compuesto de 6 líneas.



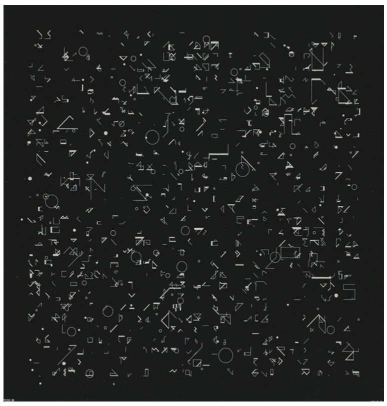
Los tramos de cada uno de estos elementos tienen características constantes: sólo utilizan líneas ortogonales (0º - 90º) o en escuadra (45º), y además, las líneas pueden variar, durante el proceso, su anchura, longitud y ubicación siempre que el resultado del cálculo correspondendite, las mantenga, geométricamente, dentro del círculo.

8. P–49, Programa 49 y P–50, Programa 50 – Un lenguaje formal, 1970[13]

En una estructura imaginaria de 1280 casillas, se sitúan, a intervalos regulares, dos sistemas superpuestos: un conjunto formado por círculos con radios de longitud limitada y otro, formado por elementos gráficos, generados arbitrariamente, creados con secuenciencias de líneas enlazadas, de 0 a 7 tramos. Las direcciones de las líneas pueden ser ortogonales (0º - 90º) o en escuadra (45º), e igual que en muchos programas anteriores, pueden variar en anchura, longitud (hasta un cierto límite) y posición. Existe, en el programa, un probabilidad alta de que los símbolos compartan su casilla con los círculos. Es importante destacar, sobre la estructura imaginaria, la existencia de símbolos de 0 líneas: espacios vacíos.



P - 49



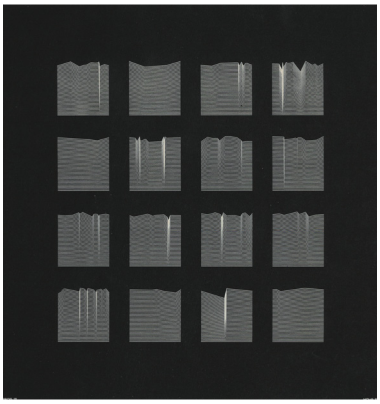
P - 50

[12] P–48, Programme 48 – UHF 81.

[13] P–49, Programme 49 y P–50, Programme 50 – A Formal Lenguaje, 1970.

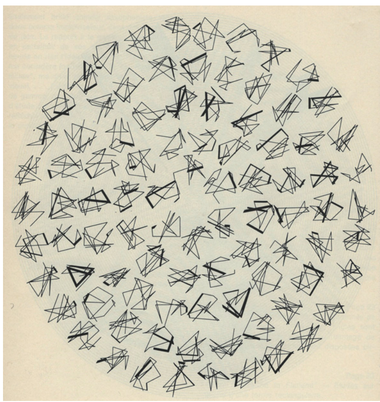
9. P–32, Programa 32 – Elementos de la matriz[14]

La estructura formal de esta obra es una matriz cuadrada de 4 x 4 = 16 casillas. En cada una de estas casillas de 5 x 5 cm, se trazan 40 líneas. El procedimiento que genera este programa tiene por objeto realizar una gradación o transformación de la estructura líneal de cada una de las casillas de manera que exista un movimiento entre la línea superior de la estructura y la inferior. Para realizar esta progresión, se construye la línea superior de cada una de las casillas de manera que la forma que adquiera se refleje secuencial y progresivamente sobre las otras líneas hasta alcanzar la horizontalidad en la línea inferior. Para construir la línea superior, elige, en cada una de las casillas de la matriz, un número de puntos al azar, entre 3 y 12, que están situados a determinadas distancias horizontales y verticales, de manera que no excedan la superficie de cada uno de los cuadrados de la matriz y unos determinados parámetros que definen la banda o superficie sobre la que deben situarse. Una vez construida la línea superior, el resto de las líneas de los cuadrados se calculan de modo que alcancen, de una forma gradual y homogénea, a una línea horizontal en la posición 40: línea inferior.



10. P–38, Programa 38 – Rotor[15]

Este programa genera unidades de 15 líneas continuas generadas aleatoriatoriamente y dispuestas sobre un círculo. Para generar las líneas se admiten todos los ángulos posibles y se permite un cierto porcentaje de líneas gruesas.

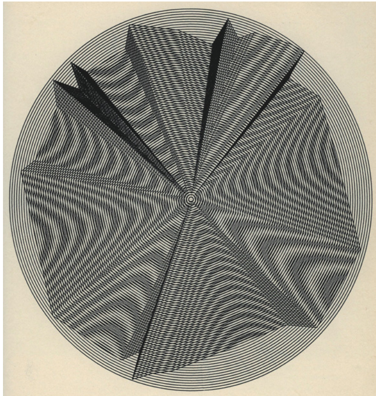


[14] P–32, Programme 32 – Matriz Elements.

[15] P–38, Programme 38 – Rotor.

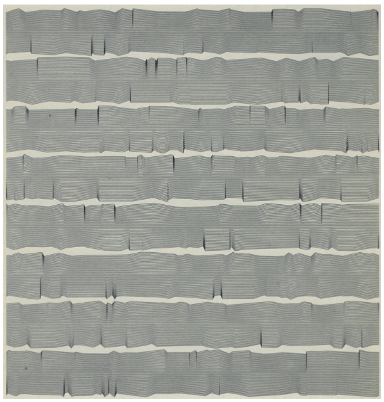
11. P–40, Programa 40 – F 107[16]

Sobre un fondo de círculos concéntricos, se eligen puntos al azar y se conectan con líneas rectas hasta formar un polígono cerrado estrellado. La figura en forma de estrella obtenida se repite concéntricamente, de modo similar a como se realizó en el Programa 32 hasta llegar al punto central.



12. P–52, Programa 52 – Líneas Quark[17]

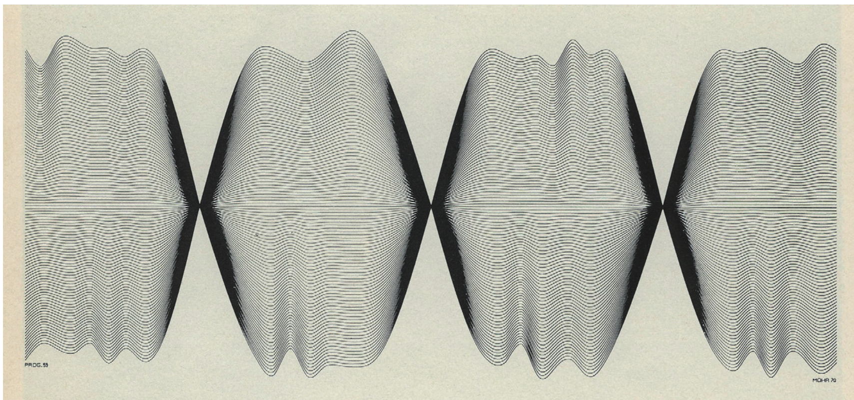
Este programa es una extensión del Programa 32. Su estructura geométrica básica es un cuadrado dividido, horizontalmente, en 8 bandas iguales. Sobre cada una de las bandas se va a repetir el mismo algoritmo con una serie de parámetros y variables diferentes. El programa consiste en dividir, horizontalmente, cada una de las bandas en dos partes iguales de forma que se pueda, a su vez, aplicar el mismo procedimiento, con diferentes parámetros, sobre los dos lados de la banda. El proceso consiste en generar dos transformaciones de líneas sobre cada una de las bandas de forma que, cada una de ellas tenga su origen en una posicion diferente de la banda: una se origina en la parte superior y otra, en la inferior; pero las dos tienden a la línea horizontal central. Para generar las líneas extremas de la banda se eligen entre 12 y 35 puntos aleatorios por línea y se unen formando dos líneas quebradas. El resto de las líneas de las bandas se calculan de modo que alcancen, de una forma gradual y homogénea, a una línea horizontal situada en el centro de la banda. Es importante en este algoritmo definir el número de pasos que se tienen que dar hasta alcanzar a la línea central porque visualmente dará una visión de espaciamiento o concentración de líneas.



[16] P–40, Programme 40 – F 107.
[17] P–52, Programme 52 – Quark-Lines.

13. P–59, Programa 59 – N +3 Hz[18]

Este estudio, cuyo método de trazado es similar al del programa 52, permite que una curva continua pase a través de ciertos puntos predeterminados y de otros elegidos al azar. Su estructura geométrica básica es una banda rectangular dividida, horizontalmente, en 2 partes iguales. Sobre cada una de las partes de la banda se va a repetir el mismo algoritmo con una serie de parámetros y variables diferentes. El proceso consiste en generar dos transformaciones lineas sobre cada una de las partes de la banda de forma que, cada una de ellas tenga su origen en una posicion diferente de la banda: una se origina en la parte superior y otra, en la inferior; pero las dos tienden a la línea horizontal central. Para generar las líneas extremas de la banda se eligen una serie de puntos aleatorios por línea y se unen formando dos líneas quebradas. Hay que tener en cuenta que tanto la línea superior como la inferior de la banda tienen establecidos unos puntos determinados comunes sobre la línea intermedia horizontal de la banda que hay que respetar. El resto de las líneas de las bandas se calculan de modo que alcancen, de una forma gradual y homogénea, a una línea horizontal situada en el centro de la banda. Igual que en el programa anterior, en este algoritmo es importante definir el número de pasos que se tienen que dar hasta alcanzar a la línea central porque visualmente dará una visión de espaciamiento o concentración de líneas.



1.5.2.- ELENA ASINS

Al hablar del uso de las Nuevas Tecnologías en el Arte, es obligado hablar de la experiencia que se llevó a cabo en el Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid, a finales de la década de los sesenta, con la colaboración de un grupo de artistas españoles que se agruparon en torno al *Seminario de Generación Automática de Formas Plásticas*. Entre ellos están: Eduardo Arrechea, Florentino Briones, Guillermo Searle, Javier Seguí de la Riva, Domingo Sarrey, José Luis Alexanco, Elena Asins, Manuel Barbadillo, Luís Lugán, Eduardo Sanz, Soledad Sevilla, Eusebio Sempere y José María López Yturralde. Muchos de estos artistas desarrollaron una forma de trabajo sistemática. Creaban sus propios algoritmos o programas de acuerdo a sus ideas estéticas y desarrollaban obras seriadas que reflejaban el mundo de posibilidades que ofrecía el nuevo medio. Aunque todos ellos son artistas de un gran prestigio internacional, en este trabajo se va a tratar la obra de Elena Asins.

[18] P–59, Programme 59 – N+3 Hz.

1. Cánones 22 #1 y #2, 1991 / 1995[19]

Cánones 22 es una obra estructurada en el ordenador que hace referencia a las formas canónicas de las fugas de J. S. Bach, especialmente de los cánones. El canon es una forma de composición musical de carácter polifónico que puede ser ejecutado simultáneamente por dos o más voces, que van entrando desplazadas equidistantemente o no. Según Llacer Pla en su libro *Guía Analítica de Formas Musicales para Estudiantes*, "la palabra «canon» equivale a «regla» y se refiere a las señales colocadas sobre el pentagrama para reglamentar la entrada de las voces".[20] Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, el canon es "*una composición de contrapunto en que sucesivamente van entrando las voces, repitiendo o imitando cada una el canto que le antecede*". En este tipo de obra la melodía se repite sucesivamente, a partir de un número de terminado de compases, siguiendo el tema original, por lo que se crea una policromía de tipo imitativo. La voces que van entrando para repetir el canto de la antecedente pueden estar en la misma o en otra altura. Hay que tener en cuenta que en este tipo de obras, cada una de las copias debe conservar toda la información que hay en el tema original de forma que se podría recuperar el tema principal a partir de cualquiera de sus copias.

Según la semejanza de la melodia de las diferentes voces que forman el canon, existen tres tipos de cánones: el canon directo, el canon con pequeñas variaciones del tema original y el canon libre.

En el primero, la voz primera y principal, llamada propuesta o antecedente, va seguida de otra, denominada respuesta o consecuente, que la repite; es decir, varias voces repiten la melodía nota por nota.

En el segundo, se rompe, en cierto modo, la rigidez de la forma canon, realizando en las copias pequeñas variaciones del tema original. Según sean las transformaciones que se realicen, los cánones se pueden clasificar según los siguientes criterios:

1. Según el intervalo que media entre las voces que forman el canon, los cánones pueden ser: a la segunda, a la tercera, a la cuarta,… Es decir, entra el tema de la primera voz y después de un lapso de tiempo medido, entra la segunda voz, después de otro tiempo igual al anterior, entra la tercera voz y así sucesivamente.

2. Según el intervalo tonal que media entre las voces que forman el canon: este canon se produce cuando las copias del tema se escalonan no sólo en el tiempo, sino también en el tono: es decir, si la primera voz canta el tema en do, la segunda después del tiempo de espera correspondiente, toca el mismo tema pero comenzando con un número determinado de notas más arriba, o sea en sol; y si hay una tercera voz, deberá a su vez comenzar, despúes del tiempo de retraso necesario, con el mismo número de notas arriba antes descrito y así sucesivamente.

3. Según la velocidad de las voces que forman el canon: en esta forma de canon la velocidad de una voz varía con respecto a la de otra: por ejemplo, la segunda voz canta el doble de rápido o lento que la voz inicial. A la primera variación se le llama disminución porque el tema parece encogerse, y a la segunda, aumentación porque el tema parece dilatarse.

4. Según la evolución de la melodía: en este tipo de cánones las voces secundarias invierten el tema del canon, es decir, elaboran una melodía que evoluciona descendentemente cuando el tema principal evoluciona

[19] Canons 22 #1 y #2, 1991 / 1995.

[20] Francisco Llacer Pla, *Guía Analítica de Formas Musicales para Estudiantes*, Real Musical Editores, Madrid, 1987.

ascendentemente pero haciendo que la evolución o desarrollo de la melodía en ambos casos mida exactamente el mismo número de semitonos.

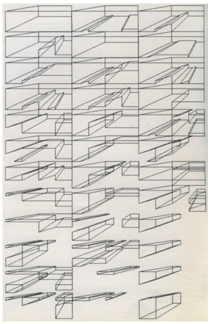
5. Según su forma de ejecución: en este tipo de cánones, llamados retrógrados, el tema se ejecuta al revés de cómo está escrito, es decir de atrás hacia delante. A este tipo de procedimiento se le llama familiarmente canon cangrejo debido a la características locomotoras de estos crustáceos.

En el tercero, el canon libre, las voces no utilizan el tema principal sino que sólo buscan armonizar agradablemente con el resto de las voces del canon.

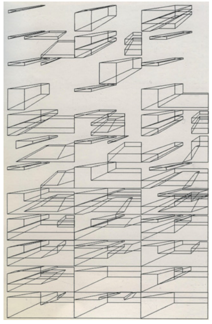
La palabra fuga es también una forma de imitación como el canon. Se basa en un tema que se va tocando en distintas voces y en distintos tonos, y a veces a distintas velocidades o con intervalos tonales invertidos o de atrás hacia adelante. Sin embargo, el principio de la fuga es menos rígido que el del canon, lo que hace que sea una forma más expresiva que éste. La estructura de la fuga es la siguiente: empieza con una voz sola que canta un tema. Después entra una segunda voz que comienza cuatro tonos por encima o por debajo de donde ha comenzado la primera. Mientras tanto, al tema de la primera le sigue el canto de un "contratema" o "contrasujeto", es decir, un tema secundario, cuyo objetivo es producir contraste rítmicos, armónicos o melódicos al tema. Cada una de las voces que entra en el momento adecuado, canta el tema y el contratema o contrasujeto. Cuando todas las voces están en juego, se acaban las reglas. Aunque hay ciertas cosas que normalmente se hacen en una fuga, no son reglas establecidas.

La obra Cánones 22 se desarrolla sobre una matriz de 12 x 3 = 36 casillas. El tema de la obra lo crea un módulo que parece la representación espacial de un cubo, sobre el que hay muchas variaciones. Cada una de estas variaciones tiene como tema ser una variante del módulo principal y de todos los recursos mencionados anteriormente. A veces se combinan varios recursos en el mismo canon. Los módulos, verticalmente, como los cánones entran a la vez pero con diferentes representaciones visuales. Horizontalmente entran en distintos tiempos.

Según palabras de Elena Asins en una fotocopia publicada con motivo de su exposición Cánones 22, "Mi obra es siempre una proposición lógica cuya esencia radica en la distribución y ordenación de objetos espaciales. Esta recíproca posición espacial de los unos con los otros y de unos hacia otros expresa así relaciones y esencias, de modo que en cualquier desarrollo o variación se entiende, que la complejidad viene debida de una determinada relación. Pongamos por caso: en aBc la relación de a con c viene dada por B y todas las características que le son propias. Estos desarrollos opcionales posiblitantes pueden ser acogidos de forma espacial o temporal por una virtualidad sígnica «hieroglyphics» de variaciones y fugas". Y continúa, "Dichos desarrollos son pensamientos matemáticos apreciables senso-perceptivamente por los gráficos,…". "El mundo en el que la obra se genera, desenvuelve y regenera es el mundo ordenado de la matemática, en este caso bajo el empleo de la imagen digital". "Enfatizo la digitalización binaria computable, porque aunque aquí no se haga presente de una forma tangible, debe el espectador estar en antecedentes que sin el uso de los computadores como herramientas que ayudan a pensar, fueron en primer y único lugar, las propias para hacer posible su posterior realización".



Canons 22 #1



Canons 22 #2

2. Menhires y Menhires Dos, 1995

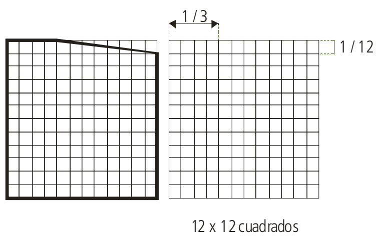
El conjunto de obras Menhires hace referencia a dos conceptos. En primer lugar, al concepto histórico y simbólico de la figura del menhir. En segundo lugar, a la reflexión que provoca la descontextualización de un megalito de su hábitat habitual, el arte primitivo, en el contexto del arte contemporáneo.

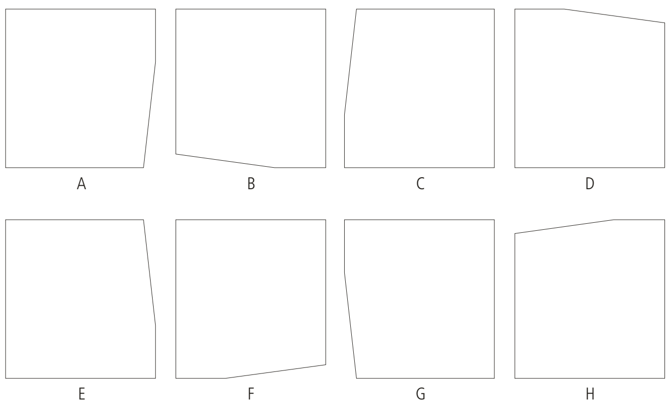
Para construir la obra trata de utilizar un lenguaje constructor que a partir de formas primarias vaya generando formas de relaciones más complejas que lleven al encuentro de significaciones y sugerencias conceptuales profundas. Es una búsqueda de lo esencial. Una búsqueda del sentido. Utiliza para ello un hacer normativo y combinatorio que conviven para dar respuestas estéticas a propuestas personales.

Andoni Alonso en el catálogo de la exposición *Menhir Dos*, en su presentación sobre la obra de Elena Asins bajo el título de "*Buscando a Wittgenstein… ",* realiza los siguientes comentarios sobre sus obras: "… una estética/ética… que se basa en el rigor intelectual, pero que existencialmente se traduce, en propuestas precisas y sinceras, en una forma de expresión rigurosa y sin ambigüedades… Otro de los aspectos más atractivos de su obra es su capacidad para poner de manifiesto, por medio de los sentidos, de manera visual, enunciados matemáticos, como permutaciones, variaciones y combinaciones de formas plásticas, acercando lo visual a la música,…; lo matemático convertido en sonido". De estas palabras que recogen una forma de hacer y de entender el proceso creativo, se puede señalar la importancia del proceso intelectual previo a la realización de la obra. El llegar a formular propuestas conceptuales compositivas concretas que lleven a realizaciones visuales como el trabajar a partir de un módulo básico y multiplicarlo generando obra seriada a través de operaciones como permutaciones, variaciones o combinaciones.

En el mismo catálogo Javier Maderuelo prologa bajo el título "*La Obra es Idea*", las siguientes afirmaciones que son muy sugerentes: "Elena Asins no tiene por finalidad materializar unos cuerpos concretos,…, sino establecer relaciones que, por su grado de abstracción, son ideas netamente conceptuales,… En este sentido, Elena Asins ha estado siempre más interesada en organizar intervalos proporcionales y relaciones armónicas, en establecer series o secuencias, que en su instrumentalización física, por eso su obra, como la de los matemáticos, se puede formular, es decir, expresar a través de fórmulas, sin materializarse. Su trabajo consiste en idear espacios, secuencias o ritmos en el ámbito de las posibilidades mentales,… De la misma manera que el trabajo del mátemático no consiste en caligrafiar fórmulas, sino en idear conceptos, siendo las fórmulas el testimonio y el resultado de esas ideas, el trabajo de Elena Asins no se reduce a producir los objetos gráficos y plásticos que contemplamos como obras de arte, sino que estos son documentos cartográficos que atestiguan el camino conceptual recorrido por la artista." Estas palabras discursivamente tan ricas en conceptos, indican el uso por parte de Elena Asins de sitemas, entendidos en sus dos versiones conceptuales: como conjunto de elementos relacionados y como elección por parte del autor de una serie de propiedades dentro de un entorno, que por su selección las diferencia del entorno y crea un límite entre este y el propio sistema, creando así un territorio de ideas comunes a partir de las cuales, por crecimiento y desarrollo autónomo, generan obras inscritas en el propio sistema.

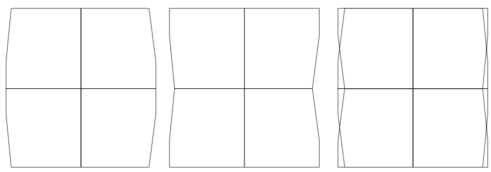
Para generar sus obras, Elena Asins parte de un cuadrado al que practica una línea sobre uno de sus lados que le permite modificar la configuración perfecta del cuadrado y dotarle de una forma particular a la que aplicará una serie de operaciones de simetría, que le dotará de configuraciones muy diferentes.





Javier Maderuelo en el mismo catálogo citado anteriormente afirma "se trata de una figura geométrica truncada, pero exacta, obtenida de un estudio minucioso de las proporciones, que conserva, a pesar del quiebro en uno de sus lados, la cualidad de ser percibida como una buena forma. Una forma que arriesga la belleza de la proporción perfecta del cuadrado para asumir un atisbo de complejidad. De esta manera consigue Elena Asins establecer un módulo con una contenida capacidad significativa".

Además de estas piezas individuales, en Menhires, aparecen también otras denominadas dólmenes que surgen de realizar operaciones de unión o superposición de varios de ellas:



1.5.3.- PABLO PALAZUELO

El tercer autor que se presenta dentro de este apartado, es Pablo Palazuelo. La razón de su inclusión dentro del tema *Sistemas, Algoritmos y Programas*, es por considerar que su obra reune las características propias de los sistemas. Respetando el silencio que a lo largo de toda su trayectoria profesional siempre ha querido mantener sobre sus procesos de trabajo, mirada con perspectiva, su obra responde a una forma de concebir el arte como resultado de un sistema generativo. Sistema que, por los comentarios y anotaciones personales que sobre su obra ha dejado escritos, no se puede deducir a ciencia cierta cuando lo define: si previo a la realizacion de la obra, durante o con posterioridad. Lo que sí es cierto, es que en toda su trayectoria genera ciclos o conjuntos de obras con características comunes en donde confluyen una serie de ideas, un punto de vista y una forma de plantearlas. Quizá lo característico de su concepción de sistema sea la concepción contemporánea que aporta Niklas Luhman, y que define como ese lugar diferente al entorno, por elección personal, con esas propiedades y características propias que permite generar a partir de él obras derivadas que reflejan el discurso y el lugar común del que parten. Es quizás el concepto de estructura entendido como hilo intelectual de sentido el que articula su obra.

En la descripción de sus obras, Palazuelo repite necesidades creativas ligadas a temas de vacío, orden, ritmos,… A él, le debemos muchos la lectura de autores como David Bohm[21] o Marie-Louise von Franz.[22] Los títulos de sus obras son nombres evocativos a lugares de significación, nunca sugerentes de procesos o de elementos. No obstante el orden que resulta de articular todos estos conceptos a su obra, visualmente genera una serie de regularidades, de estrategias y de hacer que recuerdan el ejercicio de aplicación de sistemas o de estructuras generativas para la toma de decisiones. Indican restricciones no para imporner reglas sino para, con lo mínimo, generar un máximo de libertad expresiva y creadora. Las obras, en este sentido, son itinerarios, que señalan recorridos desde un punto de partida a uno de llegada. Un recorrido lineal no directo. A veces el trayecto es tan complejo que se pierde la referencia del origen. Es como si el propio trayecto describiese lo complejo del tema a tratar. La trama del discurso generado se vuelve esquemática pero poliédrica, sintética pero múltiple, objetiva pero personal.

Pablo Palazuelo en el libro, *Escritos y Conversaciones* señala: "Mi intenciónn es penetrar cada vez más profundamente los, para mí, secretos de la formación y de la forma… a tal fin manipulo a mi manera lo que se puede llamar un código de órdenes preexistentes (la geometría sería una de las manifestaciones de ese código). No basta sin embargo, con decir que se trata de leyes de la naturaleza por las que uno se guía o que asimila uno transcribiéndolas. Se requiere, ante todo, un conocimiento en mayor o menor profundidad, una interiorización, de dichas leyes, un saber por experiencia cuáles son, qué son, cómo funcionan".[23] Añade, además, "…lo que me interesa no es la forma en sí, sino el proceso de la formación, es decir aquello que rige la función formante".[24]

1. Virtus Marin I, II, III, Tríptico, 1995

En el tríptico Virtus Marin I, II, III, Palazuelo utiliza estructuras geométricas para generar líneas quebradas, distribuidas verticalmente sobre un soporte, de forma que todas tienen su origen en el lado superior del rectángulo y su final, en el lado contrario. Entre el inicio y final, un trayecto complejo, lleno de movimientos quebrados, de

---

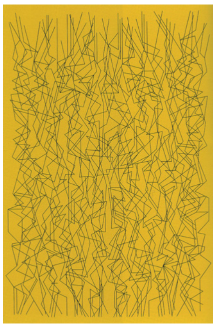
[21] David Bohm, *Ciencia, Orden y Creatividad: Las Raíces Creativas de la Ciencia y la Vida*, Editorial Kairós, Barcelona, 2003; *La Totalidad y el Orden Implicado*, Editorial Kairós, Barcelona, 2002; *Thought as a System*, Routledge, London; New York, 2005.

[22] Marie-Louise Von Franz, *Number and Time: Reflections Leading toward a Unification of Depth Psychology and Physics*, Northwestern University Press, Evanston, 1974.

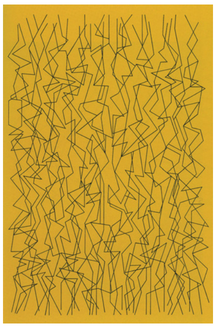
[23] Pablo Palazuelo, *Pablo Palazuelo: Escritos. Conversaciones*, Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos; Librería Yerba; CajaMurcia, Murcia, 1998, p. 19.

[24] Pablo Palazuelo, *op. cit.,* p. 75.

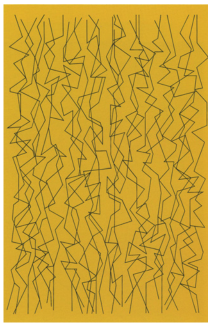
avances y retrocesos, de expansión y reducción, donde las velocidades parecen coincidir porque el tamaño de los trazos realizados comparativamente entre todas las líneas que forman parte del repertorio es repetitivo, independientemente de que cada una de ellas tenga aceleraciones y retardos en su propio recorrido. Recorridos y trayectos cruzados. En los recorridos surgen opciones y nacen nuevas líneas, o mejor dicho, algunos tramos se desdoblan y, en algunos casos, se vuelven a unir. Las líneas se desarrollan en formas y conformaciones rítmicas. Cada de ellas se mueve dentro de una banda vertical que, de alguna manera, marca el espacio de ocupación posible de cada una de ellas. La bandas, de distintas anchuras, conviven y se relacionan entre sí: unas veces se superponen, otras tienen recorridos paralelos que las hace próximas en algunos puntos y distantes en otras.



Virtus Marin I



Virtus Marin II



Virtus Marin III

Entre las tres obras que forman parte del tríptico, se puede apreciar una limplieza de líneas dede la I a la III. La obra se vacía de formas, su ritmo disminuye. Se hacen más patentes las tramas de cada uno de los recorridos. Aumenta ligeramente la escala; parece que las líneas se vuelven más próximas, más visibles.

En el libro *La Geometría y la Vida* que recopila textos de Palazuelo ordenados alfabéticamente en torno a conceptos descritos por Palazuelo a lo largo de su vida, se puede encontrar el término cifrar con la siguiente descripción "La operación de los puntos, líneas, superficies y colores es larga, lenta, tortuosa, llena de errores, de cegueras, de dudas, angustia y peligro, pero también se dan, a lo largo de ella, paz, equilibrio, profunda satisfacción, placer y libertad exhilarante, porque se trata de cifrar la convergencia del afecto del que pinta con el sentir de la naturaleza".[25]

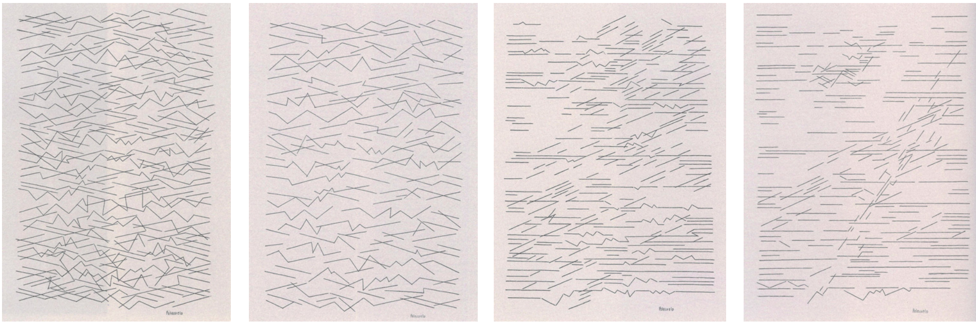
2. El número y las aguas VI, II, XIX y XVIII, 1993

A. El número y las aguas VI (2º periodo), 1993
B. El número y las aguas II, 1993
C. El número y las aguas XIX, 1993
D. El número y las aguas XVIII, 1993

La serie *El número y las aguas* se realiza sobre soportes rectángulares verticales y su estructura compositiva está formada por conjuntos de dos o más tramas superpuestas cuyos ángulos varían a lo largo de la serie y que se utizan como generadores de todos los signos, ritmos y formas que se encuentran en la obra. Unas veces en armonía, con ángulos de giro próximos, y otras en contraste, con ángulos de giro muy diferentes, las tramas permiten seleccionar todo un repertorio de trazos discontinuos y signos. Las estructuras se convierte así en un lugar capaz de configurar un número infinito de posibilidades de formas y signos. La imagen representada está formada por un conjunto de

[25] Carmen Bonell, *La Geometría y la Vida: Antología de Palazuelo*, Cendeac, Murcia, 2006, p. 39.

signos que se distribuyen por el espacio plástico generando ritmos muy diferentes: unas veces reproducen visualmente ritmos muy agitados; otras transmiten quietud; y otras, estados intermedios entre unos y otros. Entre los recursos visuales para marcar estos tiempos está el uso de líneas paralelas, más o menos distantes, que se reproducen con mayor o menor presencia en la composición. Predomina la horizontalidad de los trazados. La lectura de la obra, conduce a la mirada a realizar recorridos repetitivos de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.



A B C D

Palazuelo, en su libro "*Escritos y Conversaciones*", describe la obra de la siguiente forma: "La partitura de *El número y las aguas* es una estructura, un dibujo geométrico continuo concebido como un *sistema abierto*. Este *cuerpo geométrico* engloba en su unidad una multiplicidad perceptible. Desde el instante de su aprehensión, esta multiplicidad sugiere las modalidades de su transformación, que deberán ser respetadas por toda intervención exterior".[26] Añade más adelante que es el número el que realiza todos estos cambios y transformaciones en las formas, los signos y los ritmos: "…el número es el que sustenta, construye y transforma; es el número el que conduce las simetrías, las mutaciones y las metamorfosis geométricas".[27] Se puede deducir de esta exposición que es el número el que ayuda a definir los sistemas que permiten decidir sobre qué tramos y signos elegir en la composición y con qué ritmos.

En el libro *Geometría y Visión*, Palazuelo realiza las siguientes reflexiones sobre el proceso generativo de sus obras: "La visión encaja la realidad en unas estructuras o patrones formales coherentes,…, la contemplación prolongada de una determinada forma, o de una estructura coherente, provoca en mí inevitablemente una visión por la que percibo en la forma contemplada una impulsión latente, casi como una necesidad, un deseo de transformarse en otra forma o en las formas que ella contiene en potencia… Se trata de procesos metamórficos, de generaciones de formas que proceden unas de otras parentalmente como de padres a hijos, dando lugar a familias que, sospecho, podrían ser interminables si la capacidead del operador lo permitiera".[28] Se trata de un ciclo repetitivo que se recorre tantas veces como sea necesario para completar la obra y consiste en realizar una serie de trayectos cortos pero intensos, que se caracterizan por ser una serie de acciones sucesivas, todas ellas necesarias, para que en el proceso de construcción de la obra, vaya adquiriendo la coherencia y el sentido necesarios para formar parte de una serie o familia de obras relacionadas entre sí. Las acciones a ejecutar son las siguientes: creación de una estructura capaz de generar un número ilimitado de signos y formas; observación y contemplación simultánea de la propia estructura, los signos que se van generando y las relaciones que se establecen entre ellos y la estructura; y la elección, según un criterio estético personal, de todos y cada uno de los elementos de la obra.

[26] Pablo Palazuelo, *Pablo Palazuelo: Escritos. Conversaciones*, Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos; Librería Yerba; CajaMurcia, Murcia, 1998, p. 80.

[27] Pablo Palazuelo, *op, cit.,* p. 225.

[28] Pablo Palazuelo, *Pablo Palazuelo: Geometría y Visión. Una Conversación con Kevin Power*, Diputación Provincial, Granada, 1995, p. 50.

En el proceso de trabajo de Manfred Mohr, descrito anteriormente, la secuencia de ordenes que generaba una obra, adquiría sentido por la creación de un algoritmo, previo a la realización de la obra, que codificaba todas estas acciones de forma que el ordenador pudiera enterderlas y ejecutarlas. El proceso de Palazuelo es diferente. En su libro *Geometría y Visión* realiza las siguientes afirmaciones "Cuando hablo de órdenes me estoy refiriendo siempre a las relaciones e interacciones entre las figuras de la materia y las figuras de la energía en el mundo o en la parte del universo que creemos conocer".[29] No se especifica en este proceso, con exactitud, cuándo se definen las órdenes que llevan a la concreción de una obra; aunque sí queda claro que estas órdenes son fruto de una interacción creativa entre los elementos que van surgiendo como consecuencia del propio proceso creativo y la capacidad y energia propia del artista.

Detrás de cada una de estas decisiones, Palazuelo muestra una forma compleja de ver el mundo; de establecer un orden capaz de reflejar sus propuestas estéticas: "El concepto más elemental de orden es el de secuencia o sucesión. Partiendo de esta simple idea de orden se puede llegar a la concepción o descubrimiento de órdenes cada vez más sutiles y complejos, o lo que es lo mismo, de estructuras cada vez más sutiles y complejas. Estas estructuras proceden unas de otras como una superposición de envolturas innumerables, las cuales, por proceder parentalmete unas de otras, son transparentes. Así, de envoltura en envoltura, llegaríamos hasta allí donde el reflejo de estructuras aún más complejas, más lejanas tiende a desvanecerse cuando nuestra atención se aproxima a una especie de horizonte que limita la posibilidad de un conocimiento que es el nuestro".[30]

Es importante hacer referencia al sentido que Palazuelo da al concepto de estructuras abiertas como lugares capaces de generar un número ilimitado de signos: "...Siempre he hablado de las estructuras con las que trabajo como de estructuras «abiertas», las cuales no sólo permiten, sino que muestran energéticamente su impulso o su necesidad latente de desplegarse o desarrollarse, de «moverse»,...".[31]

Para terminar, es importante mostrar cómo Palazuelo, que utiliza en el título de esta serie de obras el término «*las aguas*», define la relación imitativa que realiza el artista sobre la naturaleza. En este sentido, Palazuelo, en unos apuntes para una conferencia en La Caixa publicadas en el libro *Escritos y Conversaciones* bajo el título "*La Coherencia en la Estructura Geométrica",* señala: "En el caso de mi trabajo... se trata de hacer funcionar un proceso estructurante semejante o equivalente a aquel que opera en el seno de la naturaleza. A fin de cuentas,... el artista imita a la naturaleza aunque en este caso se trate de imitar el proceso autocreador de la natura naturante".[32]

---

[29] Pablo Palazuelo, *Pablo Palazuelo: Geometría y Visión. Una Conversación con Kevin Power*, Diputación Provincial, Granada, 1995, p. 52.
[30] Carmen Bonell, *La Geometría y la Vida: Antología de Palazuelo*, Cendeac, Murcia, 2006, p. 144.
[31] Pablo Palazuelo, *Pablo Palazuelo: Geometría y Visión. Una Conversación con Kevin Power*, Diputación Provincial, Granada, 1995, p. 53.
[32] Pablo Palazuelo, *Pablo Palazuelo: Escritos. Conversaciones*, Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos; Librería Yerba; CajaMurcia, Murcia, 1998, p. 89.

2.- DEFINICIÓN Y PRESUPUESTOS TEÓRICOS DEL PENSAMIENTO SISTÉMICO

Este capítulo define los rasgos esenciales del pensamiento sistémico y los presupuestos teóricos que lo describen. Entre ellos es preciso destacar la autopoiesis, el observador, la realidad construida, el acoplamiento estructural, la clausura de operación, la complejidad, el funcionalismo estructural y el pensamiento en círculos. Todos y cada uno de estos términos hacen alusión a alguna concepción del pensar sistémico que he creído importante recopilar.

2.1.- DEFINICIÓN PENSAMIENTO SISTÉMICO

Actualmente, la definición de pensamiento sistémico no se puede presentar como un conjunto consolidado de conceptos básicos, axiomas y proposiciones, sino como una denominación común para investigaciones muy diferentes.

En este proyecto se aborda este concepto de forma esquemática, de modo que sirva de estudio de cuanto el pensamiento sistémico propone. De este modo se puede definir el pensamiento sistémico de acuerdo a los siguientes presupuestos:

1. Término globalizador y multidisciplinar: globalizador, porque tiene un carácter general ya que no especifica un campo de aplicación concreto y unos límites determinados, sino que se utiliza en ámbitos tan diferentes como la política, la sociología, el derecho, la biología o la economía. Multidisciplinar, porque se encuentra formado por aportaciones que proceden de campos muy diferentes como la cibernética, la neurociencia, la teoría de sistemas, la filosofía de la ciencia o el constructivismo.

2. Método práctico: el pensamiento sistémico es un método de pensamiento práctico que se ajusta a sistemas. Sirve para identificar los elementos del sistema, las relaciones que existen entre ellos, las estructuras que los soportan y las reglas y patrones que guían su comportamiento. También identifica el ámbito de operación, sus límites, su interacción con el entorno, sus protagonistas,…

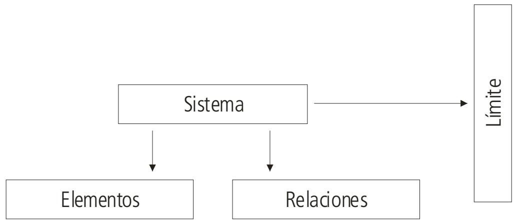
3. Funciona cuando lo que se maneja son sistemas. El pensamiento sistémico contempla el todo y las partes, así como las conexiones entre las partes, y estudia el todo para poder comprender las partes. El pensamiento sistémico es una disciplina para ver totalidades. Es un marco para ver interrelaciones en vez de cosas, para ver patrones de cambio, en lugar de instantáneas. Ve una combinación de factores que se influyen mutuamente.

4. Ofrece un lenguaje que comienza por la reestructuración del propio pensamiento: el pensamiento sistémico es la base de un razonamiento claro que muestra el modo en que un sistema piensa acerca de las cosas. Proporciona métodos eficaces para profundizar y ampliar el punto de vista sobre las cosas y para conocer nuevas estrategias de pensamiento. No sirve únicamente para resolver problemas, también para modificar el pensamiento que los origina.

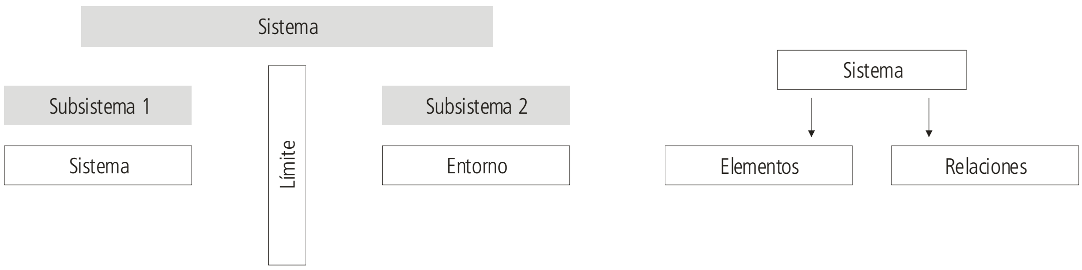
A continuación se va a realizar un resumen de los conceptos de los sistemas, vistos en el tema anterior, ya que éstos configuran los conceptos que utiliza el pensamiento sistémico para construir su discurso. El objetivo de esta presentación es agilizar y facilitar una herramienta que sea útil para desarrollar los planteamientos que se van a mostrar en los próximos puntos del capítulo.

Desde el punto de vista sistémico un sistema es un conjunto de elementos relacionados, que juntos forman una unidad que es el propio sistema. Pero los sistemas no están constituidos sólo por elementos relacionados, sino que también existen relaciones entre relaciones.

Los requisitos más importantes para la determinación de sistemas son: la constitución de elementos propios; la creación de relaciones entre los elementos; la creación de relaciones entre el sistema y el entorno; y la determinación de límites.



Un sistema se puede descomponer de dos formas. La primera forma, refrendada por la teoría de la diferenciación sistémica, divide el sistema en dos subsistemas: el sistema y el entorno, y crea relaciones entre ellos. La segunda forma, avalada por la teoría de la complejidad sistémica, divide al sistema entre elementos y relaciones.

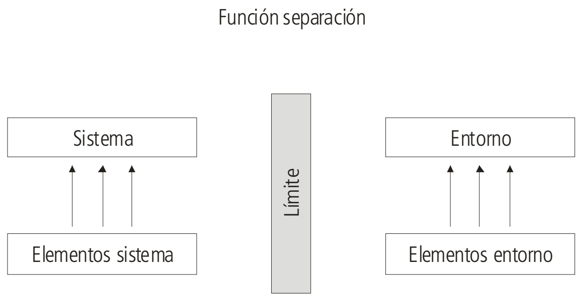


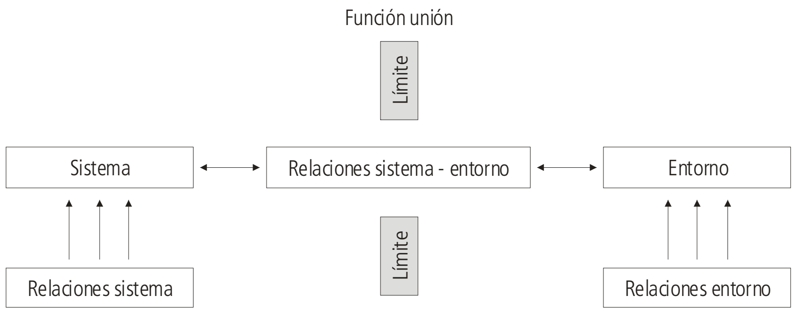
Teoría de la diferenciacion sistemica

Teoria de la complejidad sistemica

En la teoría de la complejidad de los sistemas, se entiende por complejidad la capacidad que tiene el sistema para establecer relaciones entre los elementos. Parte del supuesto de que en los sistemas con pocos elementos, todos los elementos se pueden relacionar entre sí; pero en los sistemas con un gran número de elementos, éstos, alcanzan un punto, en que es imposible establecer este tipo de relación. Debido a la incapacidad de conectarse todos con todos, es necesario realizar una selección de relaciones entre los elementos. La selección implica elegir, entre todas las posibilidades de relación unas determinadas. En este proceso se produce una reducción de complejidad; es decir, a partir de una estructura de relaciones de un sistema complejo, se produce una formación compleja con menos relaciones. En este sentido, hay que señalar que la pérdida de complejidad se compensa con una selectividad bien organizada.

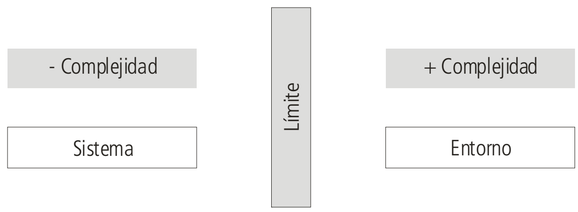
Además, en este resumen, hay que tener en cuenta, que los sistemas presentan límites, y que estos límites separan los elementos del sistema pero no necesariamente sus relaciones. Estos límites tienen una doble función, de separación y unión del sistema y el entorno. Los límites, además, pueden ser ambiguos o estar bien definidos. En este último caso, los límites obligan a los elementos a formar parte del sistema o del entorno.



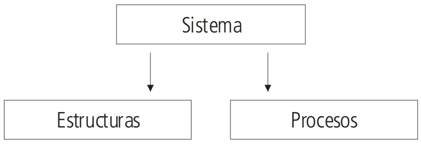


Los límites para desarrollar las funciones de unión y separación entre los subsistemas: sistema y entorno, utilizan unos dispositivos especiales, creados por el propio sistema, que realizan trabajos de selección. Por su función, no se puede especificar si los límites pertenecen al sistema o al entorno; desde un punto de vista lógico, serían un tercer elemento.

Hay que considerar, además que entre el desnivel de complejidad que existe entre sistema y entorno, se establece una relación de gradación. Se considera además que en el desnivel de complejidad que existe entre sistema y entorno, los límites juegan un papel estabilizador, a través de una serie de estrategias que desarrolla el propio sistema.



Todo sistema está dotado de dos formas de organización: las estructuras y los procesos. Las estructuras muestran la complejidad que ofrece la posibilidad de interrelacionar todos los elementos de un sistema. Permiten la selección de un repertorio restringido dentro de las todas posibilidades factibles. Los procesos se manifiestan cuando las selecciones se construyen sucesivamente en el tiempo. En este sentido, el sistema es capaz de cambiar el modelo de relacionarse si lo demandase el sistema o el entorno.



Formas de organizacion de un sistema

2.2.- PRESUPUESTOS TEÓRICOS DEL PENSAMIENTO SISTÉMICO

Existen una serie de conceptos que hacen referencia a rasgos constitutivos del pensamiento sistémico aplicado y que de una forma resumida se plantean a continuación:

1. Autopoiesis –autorreferencia: producen sus elementos
2. El observador
3. Realidad construida
4. Acoplamiento estructural: autoestructuras
5. Clausura de operación
6. Complejidad
7. Funcionalismo estructural – Dinámica de sistemas – Metodología
8. Pensamiento en círculos – recursividad

2.2.1.- Autopoiesis

El pensamiento sistémico amplía el concepto de sistema que se vio en el capítulo anterior y que lo definía como un conjunto de elementos relacionados entre sí. Para el pensamiento sistémico, un sistema, además de reunir las características anteriores, debe ser autorreferente, es decir, estos sistemas deben poseer un ámbito determinado de influencia, estar sujetos a un conjunto de operaciones específicas propias y estar limitados por un entorno.

Pero el pensamiento sistémico amplía todavía más el concepto de sistema. Además de ser autorreferente, un sistema tiene que ser autopoiético. Literalmente, autopoiesis tiene sus raíces en *auto*: a sí mismo; y *Poiesis*: en griego, creación, fabricación, construcción de algo. Este concepto que literalmente significa auto-organización, autocreación, nace en el campo de la biología de la mano de Humberto Maturana y Francisco Varela y señala que un sistema es autopoiético en tanto se construye a sí mismo: crea sus propias operaciones y los elementos de que se compone.

Los sistemas autopoiéticos están definidos por las siguientes propiedades o características:

1. Autonomía:

Un sistema autopoiético genera sus propios elementos constituyentes y sus propias operaciones, es decir, no requiere de la intervención externa para que el sistema produzca sus componentes. Sus componentes se reproducen en el interior del propio sistema por un proceso recursivo.

2. Emergencia:

El concepto de emergencia hace alusión a la aparición de un nuevo orden de realidad que surge como consecuencia de la generación, la estructura y organización del propio sistema. Es el propio sistema, con la elección de sus componentes y la definición de las relaciones que existen entre ellos, el que sugiere una nueva forma de ver el mundo.

3. Clausura de operación

Los sistemas autopoiéticos son sistemas operativamente cerrados. Generan todas aquellas operaciones que afectan a la organización de su sistema. Además en su forma de relacionarse sólo pueden utilizar sus propias operaciones o procedimientos.

4. Acoplamiento estructural:

Estos sistemas son capaces de construir sus propias estructuras mediante operaciones propias. Además, no pueden importar estructuras de otros sistemas: ellos mismos deben construirlas.

5. Reproducción autopoiética:

El fenómeno de la reproducción consiste en que, una unidad, mediante un proceso determinado, origina otra unidad de la misma clase, es decir, tiene la misma organización que la original. En este sentido, Maturana señala: "Para que haya una reproducción tienen que darse dos condiciones básicas: la unidad original y le proceso que la reproduce".[1] Es importante matizar que las unidades que se obtienen por este procedimiento son de la misma clase, del mismo tipo, pero no son idénticas a la original, ni idénticas entre sí.

El pensamiento sistémico al utilizar el concepto de autopoiesis como uno de sus presupuestos teóricos fundamentales, obliga a plantearse junto con el resto de los conceptos que lo configuran, cómo están reguladas las relaciones entre sistema y entorno y que herramientas conceptuales se necesitan para aprehender esta relación.

2.2.2.- El observador

Para entender el término observador, antes que nada, hay que tener en cuenta la diferencia entre observar y observador. Observar es una operación, una acción; y el observador es un sistema que utiliza las operaciones de observación de manera recursiva para realizar distinciones que produzcan la separación entre sistema y entorno.

Luhmann, en su libro *Introducción a la Teoría de Sistemas*, realiza los siguientes matices entre estos dos términos: observar es "una operación que sólo se lleva a efecto a la manera de un acontecimiento instantáneo, fugaz, y que necesita tiempo para enlazar operaciones de observación, con el objeto de lograr la diferencia con respecto al entorno".[2]
Según estas premisas, el observador no es un sujeto que observa el mundo desde fuera, sino que él mismo, es un sistema que está situado dentro del mundo que intenta observar o describir.

[1] Humberto Maturana et alt., *El Árbol del Conocimiento. Las Bases Biológicas del Entendimiento Humano,* Lumen, Buenos Aires, 2003, p. 37.
[2] Niklas Luhmann, *Introduzcción a la Teoría de Sistemas*, Anthropos Editorial; Universidad Iberoamericana, México, 1996, p. 116.

Según estas reflexiones, el mundo es experimentable bajo la forma de la observación. Sobre este aspecto de la observación, Luhmann señala: "la observación,…que es siempre una operación y tiene un radical carácter dinámico, se encuentra íntimamente relacionada con el concepto de diferencia". La operación de distinguir, de realizar una diferenciación, consiste en crear un límite: en diferenciar dos lados: lo observado y el entorno, de forma que una vez que se realiza la operación, no se puede pasar de un lado a otro sin cruzar el límite.

En este sentido, el concepto de observación, no implica acceder a una realidad exterior, sino que en su lugar se colocan distinciones. Es la operación de distinguir lo que sucede de lo que no sucede. Al realizar esta operación de una forma recursiva, se va desarrollando un límite del sistema que agrupa todo lo que ha sido observado en ese sistema. Queda, así, abierto el mundo a la observación.

La única restricción con respecto a la observación es que se debe operar con un punto ciego, con un punto de invisibilidad formado por lo que no se puede ver que es el que garantiza la unidad de la diferencia; y esto no importa de qué distinción se trate, dado que la unidad de la diferencia no es observable. Es imposible tratar de determinar ese punto ciego.

2.2.3.- Realidad construida

Humberto Maturana en sus libros *La Objetividad, un Argumento para Obligar* y *La Realidad: ¿Objetiva o Construida?,* aborda la pregunta sobre la realidad y diferencia entre dos tipos de realidades: la realidad objetiva y la realidad construida.

1. **Realidad objetiva:** en la realidad objetiva, el observador implícita o explícitamente, asume que la realidad tiene lugar con independencia de lo que él hace; que las cosas existen independientemente de si él las conoce a través de la percepción o la razón. En este camino explicativo, el observador usa una referencia a alguna entidad externa, independiente a él, como la materia, la energía, la mente, la conciencia, las ideas…, como su argumento final para validar y, por lo tanto, para explicar la realidad.

   En este camino explicativo, el observador no participa en la construcción de la realidad. Las entidades asumidas como existentes con independencia de lo que el observador hace, constituyen lo real y cualquier otra cosa es una ilusión. Por lo tanto, este camino explicativo lleva al observador a requerir un dominio único de realidad, un universo, una referencia trascendental, como el último recurso de validación para las explicaciones que él acepta, y, como consecuencia, a realizar un continuo intento para explicar todos los aspectos de su praxis de la realidad reduciéndolos a este camino explicativo.

   En este camino explicativo, las explicaciones que un observador puede dar acerca de la realidad suponen la posesión de un acceso privilegiado a una realidad objetiva independiente de él.

   La palabra realidad viene del latín res que significa objeto (cosa), y comúnmente se usa para dar a entender la realidad objetiva. Lo real, y a veces lo realmente real, tiene la intención de ser eso que existe independientemente del observador. Aun más, se habla y se actúa, tanto coloquial como técnicamente como si saber significara ser capaz de hacer referencia a tal entidad independiente. Parece como si estas entidades estuvieran ahí independientemente de los observadores.

2. **Realidad construida:** en la realidad construida, la realidad se construye con lo que el observador hace. El observador muestra los objetos o entidades que distingue con sus operaciones de distinción. Estos objetos surgen dotados con las propiedades que se le otorgan cuando se realizan las operaciones de observación.

   El observador crea la realidad con sus operaciones de distinción. Cada configuración de operaciones de distinciones que el observador ejecuta, especifica un dominio de realidad como un dominio de coherencias operacionales que ponen de manifiesto un tipo particular de objetos o entidades.
   Aunque todos los dominios de realidad creados son diferentes, ya que las operaciones de distinción que los constituyen son distintas, son todos igualmente legítimos como dominios de existencia, porque todos ellos surgen de la misma forma, al ser generados a través de la aplicación de operaciones coherentes de distinción por el observador.

   En el camino explicativo de la realidad construida, el observador es el generador de toda realidad a través de sus operaciones de distinción.

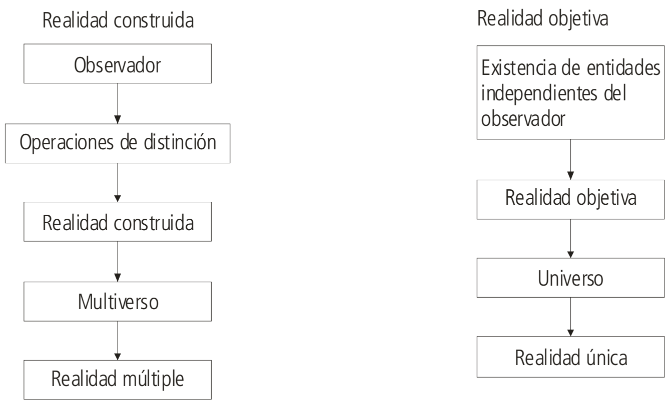
   El observador puede generar tantos dominios de realidad, igualmente legítimos, como diferentes tipos de operaciones de distinción pueda realizar.

   El observador puede usar cualquiera de estos diferentes dominios de realidad, como criterio argumentativo de la realidad construida.

   El observador es operacionalmente responsable de todos los dominios de realidad que crea y de todas las explicaciones que da de sus experiencias de la praxis de la realidad.

   En este camino explicativo, las explicaciones no son reduccionistas ni trascendentales porque no hay en ellas una búsqueda de una única explicación última para todo. Dos observadores que generan dos explicaciones que se excluyen mutuamente, frente a dos situaciones que para un tercer observador son la misma, no están dando diferentes explicaciones para la misma situación, sino que los tres están operando en distintos pero igualmente legítimos dominios de realidad, y están explicando diferentes aspectos de sus respectivas experiencias de la realidad. El observador vive en un multiverso, esto es, en distintas pero, igualmente legítimas, realidades explicativas.

   Se pueden describir estos dos conceptos de realidad con el siguiente diagrama:



En el dominio de la realidad objetiva, el observador valida sus explicaciones con respecto a la existencia de entidades (energía, mente, conciencia,…) que existen independientes de él. Puede haber tantas entidades diferentes, y por lo tanto, realidades objetivas, como diferentes observadores. Además, algunas realidades objetivas pueden ser exclusivas, es decir, mostrarse como si fueran el único dominio objetivo de realidad y por lo tanto, para un observador particular, cualquier afirmación que no pertenezca a este dominio, o que no sea sostenida por él, ser intrínsecamente falsa.

En el dominio de la realidad construida, el observador valida sus explicaciones como resultado de su coherencia operacional, independientemente del criterio de distinción que utilice para crear su concepto de realidad. En este dominio hay tantos conceptos de realidad válidos como operaciones de distinción coherentes pueda realizar un observador.

En definitiva, cada dominio de explicaciones está definido por el criterio de validación que utiliza el observador para aceptar un concepto de realidad. Hay tantos dominios de explicaciones como criterios de aceptación pueda generar un observador. El que un observador opere en un dominio de explicaciones o en otro, depende de sus preferencias operacionales: ciencia, juegos, sistemas filosóficos, religiones, ideologías,…

La realidad construida supone que la existencia se produce por medio de las distinciones del observador y que hay tantos dominios de existencia como tipos de distinciones pueda realizar el observador (multiverso). Cada realidad generada es igualmente válida.

2.2.4.- Acoplamiento estructural

El acoplamiento estructural afronta el problema de cómo se establecen la relaciones entre sistema y entorno; realiza una interpretación de la función de los límites del sistema. Los sistemas presentan límites. Los límites no se pueden pensar sin un afuera; suponen, por un lado, la existencia de una realidad más allá del propio sistema y, por otra parte, la posibilidad de franquearlos. Tienen por lo tanto, una doble función, la de separación y unión de sistema y entorno. Cuando los límites están bien definidos, los elementos deben formar parte o del sistema o del entorno. Las relaciones, no obstante, pueden existir también entre sistema y entorno. Un límite separa, pues, elementos, pero no necesariamente relaciones; separa acontecimientos, pero deja pasar efectos causales.

Bajo este concepto de límite, los sistemas ya no se conciben como una oposición entre sistemas cerrados y abiertos sino como una relación de gradación entre ellos. Con la ayuda de los límites, los sistemas pueden cerrarse y abrirse a la vez, utilizando, respectivamente, las relaciones internas del sistema o las relaciones entre sistema / entorno.

Para esta función de separar y unir, los límites pueden considerarse como dispositivos especiales cuya función principal es realizar trabajos específicos de selección. La selectividad propia de los dispositivos, las zonas, y los lugares de límite, reduce, pues, no sólo la complejidad externa del sistema, sino también la interna. Un contacto transmitido más allá de los límites, no proporciona a ningún sistema la plena complejidad del otro. En el caso del concepto abstracto de límite, o del concepto de una simple diferencia entre sistema y entorno, no se puede decidir si el límite pertenece al sistema o al entorno. Es un tercero. Si además se acepta el problema del desnivel de complejidad como ayuda para la interpenetración, los límites pueden referirse a la función de estabilización de dicho desnivel, y sólo el sistema puede desarrollar estrategias para ellos. Visto desde el sistema se trata de membranas, de pieles, de muros, de puertas, de puestos de fronteras, de lugares de contacto.

Aparte de la constitución de elementos propios del sistema, el requisito más importante para la diferenciación entre sistemas sería la determinación de los límites del sistema. Los límites se pueden considerar como suficientemente determinados cuando un sistema utiliza su propia manera de operar para discriminar según los efectos entre interno y externo. La formación de límites interrumpe la continuación de procesos que unen el sistema con su entorno.

El punto de vista desde el cual los límites se ven forzados a ser eficaces es resultado de la distinción entre el conjunto de los entornos y los sistemas en el entorno del sistema. Los límites del sistema excluyen siempre al entorno. En el caso más sencillo trata su entorno como otro sistema. Así las fronteras de estados se conciben, a menudo, como fronteras en relación a otros estados.

Los sistemas autorreferentes cerrados determinan sus límites mediante su modo operacional y establecen todos sus contactos con el entorno mediante otros niveles de realidad.

En la relación sistema y entorno, el sistema tiene que adaptarse al entorno y el entorno al sistema. Los sistemas complejos deben adaptarse a su entorno y a su propia complejidad.

La teoría de sistemas al trasladar su centro de gravedad al concepto de autopoiesis debe afrontar el problema de cómo están reguladas las relaciones entre sistema y entorno. Sobre todo cuando en la estrategia teórica la distinción entre sistema y entorno hace referencia a que el sistema lleva ya implícita la forma entorno. En otras palabras: ningún sistema puede evolucionar a partir de sí mismo. En todo proceso evolutivo la autopoiesis del sistema se reproduce y puede sobrevivir a la reproducción divergente que le ofrecen las estructuras. Y en esto el entorno juega un papel muy importante. Por lo demás, carece de sentido preguntar qué es más importante si el sistema o el entorno, ya que es precisamente esa diferencia la que hace posible al sistema.

Esto significa que las transformaciones de las estructuras, que sólo pueden efectuarse en el interior del sistema (de modo autopoiético), no se producen a discreción del sistema sino que deben afirmarse en un entorno que el mismo sistema no puede sondear en su totalidad, y que a fin de cuentas no puede incluir en sí mismo a través de la planificación.

El concepto de acoplamiento estructural, que procede de Humberto Maturana, especifica que, en las relaciones sistema y entorno, no puede haber ninguna aportación del entorno al sistema que vaya dirigida a mantener sus propios estados internos. Las aportaciones por parte del entorno al sistema son acoplamientos estructurales de distintos tipos que deben ser compatibles con la autonomía del sistema.

En este punto hay que señalar que, el acoplamiento estructural entre el sistema y el entorno debe reunir las siguientes características:

1. El acoplamiento estructural no se da con la totalidad del entorno, sino sólo con una parte de él, escogida de una manera muy selectiva.

2. Toda la parte del entorno que no se ha elegido para realizar el acoplamiento estructural, sólo puede influir en el sistema de manera destructiva.

En la relación sistema y entorno, hay que tener en cuenta que el sistema posee un conjunto de estructuras propias que determinan el tipo de operaciones que se pueden dar en el sistema. Cuando el entorno actúa sobre el sistema, de cualquiera de la dos formas que puede intervenir, estímulo o perturbación, el sistema puede reaccionar con aceptación o con rechazo.

Cuando reacciona con aceptación, el sistema se encuentra con la posibilidad de emprender acciones que eleven el grado de complejidad del sistema. Cuando reacciona con rechazo, se producen irritaciones en el sistema. En este sentido, hay que decir, que las irritaciones se refieren exclusivamente a las estructuras del sistema, orientadas hacia posibles expectativas de sentido

2.2.5.- Clausura de operación

La teoría de sistemas de Luhmann parte del principio de que un sistema no es simplemente un conjunto de elementos relacionados que forman una unidad, sino que un sistema es el resultado de realizar una operación de señalamiento o indicación, selección o distinción y diferenciación de una serie de elementos de un entorno. Elementos que al ser distinguidos comparten algunas características o propiedades que según el sistema que realiza la distinción, les confiere un carácter de unidad. En este sentido, se puede añadir que el sistema produce su propia unidad al realizar una operación de diferenciación sobre el entorno. Es decir, esta operación de diferenciación, produce dos efectos. Por un lado, genera una diferenciación entre sistema y entorno: separa de un entorno amplio, y lleno de posibilidades, unas cuantas propiedades que crean una unidad de sentido porque configuran una forma de ver y entender el mundo y por lo tanto se distancian del propio entorno más amplio y menos definido. Se puede decir que en esta operación, el sistema establece sus propios límites, mediante operaciones exclusivas de distinción. En este punto es importante señalar que cuando se trata de sistemas, se debe determinar cuáles son las operaciones de distinción que se llevan a cabo, e indicar que el que realiza estas operaciones de distinción es el sistema y no el entorno. Estas operaciones selectivas que configuran y ordenan el objeto, dependen de los intereses particulares del propio observador o del sistema, del tipo de observación que realiza, y del sistema de valores, capacidades y prioridades que le determinan (autorreferencia). En este aspecto, se puede decir que estos sistemas son sistemas orientados al sentido, tienen la particularidad de referirse al entorno y de reproducir el entorno dentro de ellos.

Por otro lado, el propio hecho de realizar la operación de diferenciación y obtener por ello unos resultados, constituye el propio sistema.

La clausura de operación es un problema que afecta a la caracterización propia del sistema y que plantea la diferencia entre sistemas abiertos y cerrados; los sistemas que necesitan mantener relaciones con su entorno para poder sobrevivir y aquellos que no precisan de estas relaciones con su entorno para mantenerse como tales.

El tema de la clausura de operación es muy importante en la teoría del pensamiento sistémico porque de este principio parten todos los enunciados que muestran todos los puntos en los que los sistemas no pueden mantener contacto con el entorno y, como consecuencia de esto, el sistema dependa de su propia organización. Las estructuras propias del sistema sólo se pueden construir y transformar por operaciones propias del sistema. La clausura de operación permite que un sistema ordenado y organizado según criterios propios, pueda convivir en entornos desordenados.

El concepto de clausura de operación está muy relacionado con los conceptos de autoorganización y autopoiesis. Cada uno de estos conceptos, hace alusión a algún aspecto de la clausura de operación. Los dos, aunque claramente diferenciados, se rigen por unos principios comunes: parten del mismo concepto de sistema entendido como un sistema que se genera al hacer una diferenciación entre sistema y entorno; y de que un sistema sólo puede disponer de sus operaciones propias.

En cuanto a sus diferencias, se puede decir, que la autoorganización es la responsable del sistema de crear o construir sus propias estructuras dentro del sistema; es decir, un sistema, por su clausura de operación, no puede importar estructuras de otros sistemas o del entorno. Si se une este concepto a los expuestos anteriormente, se puede decir que la autoorganización significa creación de estructuras propias mediante operaciones propias. Se puede añadir también que estas estructuras que se generan, limitan las relaciones posibles en el sistema

La autopoiesis en cambio, es la responsable del sistema de crear o construir sus propios elementos y sus propias operaciones dentro del sistema.

2.2.6.- Complejidad

El punto de partida para entender el concepto de complejidad se basa en un modelo teórico que parte de enfocar el problema según se establezca la relación sistema y entorno. Se entiende el entorno como una entidad dotada de mucha mayor complejidad que el sistema y, por lo tanto, entre los dos hay un gradiente de complejidad.

Niklas Luhmann en su libro *Sociedad y Sistema: la Ambición de Teoría,* señala las siguientes características de la complejidad: "hay una sobreabundancia de relaciones, de posibilidades, de conexiones, de modo que ya no sea posible plantear una correspondencia biunívoca y lineal de elemento con elemento".[3] En este sentido, el pensamiento sistémico, como unidad teórica, tiene que ser una herramienta válida para reducir la complejidad. Más adelante, en este mismo libro, Luhmann añade: "…la complejidad sólo podrá reducirse en tanto se dé una mayor complejidad. Sólo el aumento de complejidad puede llevar a una reducción de la complejidad… lo verdaderamente sencillo encierra, siempre, una enorme complejidad; y, por ello, puede permitir una reducción de la complejidad".[4] El pensamiento sistémico como instrumento de reducción de la complejidad es, en sí mismo, inmensamente complejo y debe dar cuenta de la sobreabundancia de relaciones y posibilidades que caracteriza a la realidad contemporánea.

Ante esta situación, el sistema no tiene la capacidad de responder punto por punto a todos los estímulos que proceden del entorno. Por lo tanto, tiene que desarrollar unos mecanismos que le permitan discriminar el volumen de información que recibe. A este mecanismo de selección se le ha llamado reducción de complejidad. Entre sistema y entorno debe existir algo intermedio capaz de realizar esta transformación.

La reducción de complejidad básicamente desarrolla dos funciones:

1. El sistema reacciona igual frente a datos distintos del entorno.
2. Frente a un mismo dato proveniente del entorno, el sistema puede reaccionar de diferente manera, dependiendo del estado en que se encuentre el sistema cuando reciba la información.

En todos estos casos, se puede decir que el sistema opera de modo selectivo tanto en el plano de las estructuras como en el de los procesos, teniendo en cuenta que siempre hay otras posibilidades que se pueden establecer para establecer nuevos órdenes. Se puede decir que, el sistema, al seleccionar un orden, se vuelve complejo ya que esta obligado a realizar una selección entre los elementos y en sus relaciones.

Desde este punto de vista, Luhmann señala: "el concepto de complejidad se define, entonces, mediante los términos de elemento y relación. El problema de la complejidad queda, así, caracterizado como aumento cuantitativo de los elementos: al aumentar el número de elementos que deben permanecer unidos en el sistema, aumenta en

---

[3] Niklas Luhmann, *Sociedad y Sistema: la Ambición de la Teoría*, Paidos Ibérica; I.C.E. de la Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1990, p. 16.
[4] Niklas Luhmann, *op. cit.,* p. 17.

proporción geométrica el número de las posibles relaciones, y esto conduce, entonces, a que el sistema se vea obligado a seleccionar la manera en que debe relacionar dichos elementos. Por complejo se designa, de esta manera, aquella suma de elementos que en razón de una limitación inmanente de capacidad de enlace del sistema, ya no resulta posible que cada elemento quede vinculado en todo momento".[5]

Se puede añadir que, desde este punto de vista, se pueden dar dos tipos de complejidad: la complejidad simple, que permite conectar simultáneamente todos los elementos; y, la complejidad compleja, que, ante la incapacidad de establecer relaciones puntuales, simultáneas, entre todos los elementos, tiene la necesidad de seleccionar algunos de ellos para poder realizar conexiones selectivas. Desde el punto de vista de los sistemas, la diferencia entre unos y otros está en que unos sistemas tienen la posibilidad de una relación completa entre sus elementos, y otros, sólo la posibilidad de una relación selectiva.

A esta forma de ver el concepto de complejidad hay que añadirle la posibilidad de que los elementos puedan cambiar sus formas de relación. En este sentido Luhmann hace las siguientes puntualizaciones: "los elementos se conciben con la posibilidad de cambiar su relación desde el momento en que se pueden enlazar selectivamente o que pueden quedar ensamblados de otra manera".[6]

De este modo, el concepto de complejidad tiene en cuenta: el número de elementos, el número de posibles relaciones entre ellos, y el tiempo específico en el que estos elementos están relacionados. Así, se llega a un concepto de complejidad más completo que no se reduzca a solucionar este problema simplemente por el número de elementos que componen los sistemas y por su capacidad de relacionarse puntualmente uno a uno, sino que, visto desde este punto de vista, un sistema puede ser más complejo que otro en una dimensión, y otro, más complejo en otra. Es decir, uno puede tener más elementos, más relaciones, o simplemente, más posibilidades de cambios en las relaciones de los elementos, que el otro. Se trata, en definitiva, de considerar que existen diferentes niveles de complejidad, y que cada uno de ellos desarrolla con mayor insistencia uno de los elementos que están en juego en el concepto de complejidad.

En este punto, es importante señalar que lo que puede ocurrir cuando dos sistemas complejos pretenden interactuar entre sí y acoplarse. En este sentido, Luhmann señala: "un sistema no tiene la capacidad de reproducir en sí mismo la complejidad del otro y que, por tanto, ninguno de los dos sistemas tendría la suficiente variedad requerida para integrar la complejidad del otro sistema dentro sí mismo".[7] Bajo estas condiciones, surge la libertad de elección para pactar las preferencias, dentro de la complejidad, que se pueden compartir, y aquellas que cada uno de los sistemas va a mantener como elementos determinantes de su propia complejidad.

Este concepto de complejidad deriva en preguntarse cómo un sistema complejo que maneja tal cantidad de variables puede establecer un orden.

2.2.7.- Funcionalismo estructural

El funcionalismo estructural es un método utilizado para obtener información, que se mueve con conceptos como complejidad, campo de posibilidades (contingencia) y selección. El análisis funcional utiliza el método de las

---

[5] Niklas Luhmann, *Introducción a la Teoría de Sistemas*, Anthropos Editorial; Universidad Iberoamericana, México, DF, 1996, p. 137.

[6] Niklas Luhmann, *op. cit.,* p. 139.

[7] Niklas Luhmann, *op. cit.,* p. 140.

relaciones y las diferencias para comprender lo existente. Entiende a los sistemas como una red de relaciones, en las que hay algunas previamente establecidas y otras que están por realizar.

El objetivo del funcionalismo estructural es, por un lado, poder aprehender, a través de una observación metódica, las estructuras originales de un sistema establecido: buscar su identidad; y, por otro lado, este concepto ofrece la posibilidad de construir modelos desde los que poder dar visibilidad a todo un entramado teórico complejo de conocimientos adquiridos sobre un dominio de conocimiento específico, a través de la creación de sistemas, y buscando siempre que su diseño muestre un espacio lógico de posibilidades y de relaciones.

El análisis funcional puede tratar relaciones que no son visibles o poner lo conocido y familiar en el contexto de otras posibilidades. Alejandro Navas en su libro *La Teoría Sociológica de Niklas Luhmann,* lo ilustra con el siguiente ejemplo tomado de Luhmann: "La función es una relación de variables, es decir, de denominaciones para valores intercambiables… La x de la función 'x es azul' puede ser ocupada por el cielo, el mar, la violeta, etc. sin que se modifique el valor de verdad de la función, pero no por términos como la explosión o la virtud… Desde el punto de vista 'es azul', el cielo, el mar y la violeta son funcionalmente equivalentes".[8]

El valor de la teoría funcionalista está en su capacidad para construir problemas: formular preguntas y plantear espacios conceptuales abiertos a las relaciones y a las posibilidades, para solucionarlos. El funcionalismo ve la realidad como un lugar que esconde en su interior problemas de todo tipo que se pueden resolver de formas muy diferentes. Desde este punto de vista, el funcionalismo estructural no anticipa conclusiones lógicas a los problemas a los que intenta dar respuesta, sino que permite que sea el propio proceso de investigación y desarrollo el que defina las respuestas. El funcionalismo, en este sentido, sólo tiene valor como un método para solucionar problemas. La eficacia del método funcional depende de la relación que se establezca entre el problema y la solución alcanzada. La verdadera tarea de la teoría que prepara la aplicación del análisis funcional es, por tanto, la construcción del problema. De ahí resulta la relación entre el análisis funcional y la teoría de sistemas.

Los sistemas resuelven sus problemas formando estructuras. Las estructuras, tienen en este sentido, un valor instrumental. Su función consiste en limitar las relaciones que son posibles dentro del sistema. El análisis funcional cumple, en este sentido, la función de una reducción complejidad del problema a través de sus estructuras. Las estructuras obligan a una selección de modelos preferidos para que se establezcan relaciones entre los elementos del sistema. El funcionalismo estructural reconstruye en las estructuras las necesidades del sistema y las pone a disposición de los objetos del sistema para que puedan aprovecharlas, a través de un sistema de relaciones, con el mayor grado de libertad posible, para solucionar el problema.

Con este modo de proceder, el método funcional, con la elección de un problema, va más allá de una mera decisión metodológica y reclama ser teoría del conocimiento, aunque no existan garantías que durante el proceso del análisis funcional, se adquiera conocimiento. Se puede decir, que aunque los resultados del análisis funcional, no correspondan con exactitud a la realidad, sí que la captan. Esto significa que el análisis funcional es una forma de ordenar la realidad.

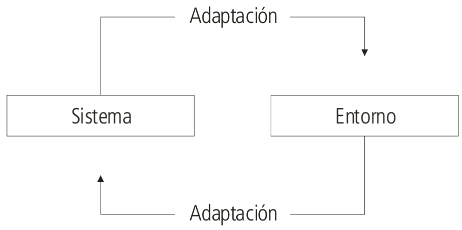
2.2.8.- Pensamiento en círculos

El pensamiento sistémico es un pensamiento en círculos más que un pensamiento en líneas rectas. Todas las partes de un sistema están conectadas directa o indirectamente, de modo que al cambiar una de las partes el efecto se

[8] Alejandro Navas, *La Teoría Sociológica de Niklas Luhmann*, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., EUNSA, Pamplona, 1989, p. 50.

propaga a todas las demás, que experimentan un cambio que, a su vez, termina afectando a la parte original que responde a esa nueva influencia. Así pues, la influencia vuelve modificada a la parte original, lo que genera un bucle, no un canal de una sola dirección, que se denomina bucle de realimentación.

Desde el punto de vista de la relación sistema y entorno, se produce circularidad porque se dan varias relaciones. En primer lugar, la relación simple sistema y entorno: el sistema tiene que adaptarse al entorno para poder sobrevivir. Después, se invierte este concepto: el entorno tiene que adaptarse al sistema, debe ser útil para su desarrollo.



La realimentación es fundamental en cualquier sistema; sin realimentación, no hay sistema. La experiencia personal que cada uno va adquiriendo a lo largo de su vida, está hecha de bucles de realimentación. El hombre capta la realimentación mediante los sentidos: la vista, el tacto, el gusto, el olfato y el oído.

Todos experimentamos la realimentación como la consecuencia de nuestros actos que vuelve a nosotros e influye en lo que hacemos a continuación. El término «realimentación», *feedback,* en inglés, se suele utilizar con el significado de «respuesta», pero lo importante es que se trata de un retorno de los efectos de una acción que influye en un siguiente paso, esto es, un vínculo de dos direcciones. La realimentación es un bucle, por eso el pensamiento, en función de la realimentación, es un pensamiento en círculos.

El principio de la realimentación resulta tan simple, tan omnipresente, que constantemente vivimos y respiramos bucles de realimentación sin reparar en ellos. Cuesta valorar hasta qué punto son importantes.

Todos los sistemas, por muy complejos que sean, tienen dos tipos de bucles de realimentación:

1. **Realimentación de refuerzo:** cuando los cambios registrados en todo el sistema se realimentan para amplificar el cambio original. Dicho de otro modo: el cambio recorre todo el sistema produciendo más cambios en la misma dirección.

2. **Realimentación de compensación:** se da cuando los cambios registrados en todo el sistema se oponen al cambio original para amortiguar el efecto. Se produce cuando los cambios en una parte del sistema generan cambios en el resto del sistema que reducen, limitan o contrarrestan el cambio inicial.

   La realimentación de compensación sirve también para reducir la diferencia entre dónde está un sistema y dónde «debería» estar. Siempre que haya diferencia entre el estado actual del sistema y el estado deseado, la realimentación de compensación desplazará el sistema en la dirección del estado deseado. Cuanto más cerca del objetivo se encuentre el sistema, menor será la diferencia representada por la realimentación y menor será el desplazamiento del sistema.

La realimentación es un círculo, y lleva su tiempo recorrerlo entero. De hecho en todos los procesos de realimentación se produce alguna forma de retraso. Esto significa que en todos los sistemas se producen retrasos entre las acciones y sus consecuencias.

Cuanto mayor es la complejidad dinámica de un sistema, más tiempo tardará la realimentación en recorrer la red entera de conexiones. Algunas conexiones pueden ser muy rápidas, pero, puede darse el caso, que una sola conexión lentifique todo el sistema.

PARTE II

APLICACIONES DE
LAS ESTRUCTURAS LÓGICAS A
LAS ARTES PLÁSTICAS

3.- ORDEN

"La noción de orden va más allá de los límites de una teoría concreta;" forma parte del conjunto de "conceptos, ideas y valores" que producen "el pensamiento y la acción del hombre".[1]

"Más que intentar definir, o hacer un análisis exhaustivo de la naturaleza" y la significación del orden, "se pretende profundizar y extender la comprensión"[2] del mismo por medio de nociones de orden importantes para el conocimiento y la creatividad.

3.1.- CONCEPTO DE ORDEN

Las nociones generales de orden que a lo largo de la historia del pensamiento humano se han definido han jugado un papel muy significativo en la totalidad del pensamiento y las acciones humanas. "Cuando las ideas de orden cambian de manera fundamental, producen un cambio radical en el orden global"[3] de los individuos y sus relaciones.

La noción de orden se experimenta en situaciones y contextos muy diferentes. Cualquier cosa que se realiza presupone algún tipo de orden. Se puede hablar, por ejemplo, del orden de los números, el orden de los elementos de una figura geométrica, el orden de los objetos en el espacio y el orden de las actividades en el tiempo. Existe también orden en el lenguaje, el pensamiento, la música y el arte en general.

Históricamente, las primeras nociones de orden en el pensamiento humano dependen de la habilidad de un individuo para percibir similitudes y diferencias. Esto sugiere que el orden de la percepción comienza recogiendo diferencias, que son los datos primarios de la visión, que después utiliza para construir similitudes.

Así, en la historia del pensamiento el orden "comienza con la formación de categorías. Esta categorización incluye dos acciones: selección y colección".[4] Con la selección se eligen ciertas cosas simplemente por las diferencias que éstas muestran, a través de una percepción mental, con respecto a un fondo más general. "Con la colección se colocan juntas algunas de las cosas seleccionadas (por su diferencia con el fondo) al considerarse sus diferencias poco importantes, mientras que se sigue considerando como importante su diferencia común con el fondo".[5] Selección y colección se convierten así en las dos partes inseparables de un proceso de orden que al generarse crea categorías de cosas, de pensamientos, de acciones,… según se dé, en la observación, prioridad a unas cosas u otras. "Los grupos de categorías y por tanto de orden que se obtienen, cambian según se dé importancia a unas diferencias y se ignoren otras o según se destaquen unas similitudes y se pasen por alto otras. De hecho, el proceso de categorización es una actividad dinámica que puede cambiar en multitud de formas, al seleccionarse nuevos órdenes de similitud y diferencia".[6]

---

[1] David Bohm, *Ciencia, Orden y Creatividad: Las Raíces Creativas de la Ciencia y la Vida*, Editorial Kairós, Barcelona, 2003, p.121.
[2] David Bohm, *op. cit.,* p.122.
[3] David Bohm, *Ibidem.*
[4] David Bohm, *op. cit.,* p.129.
[5] David Bohm, *op. cit.,* p.130.
[6] David Bohm, *op. cit.,* p. 130.

La mayoría de las categorías de los órdenes establecidos son conocidas por todos, y se utilizan de manera casi inconsciente. Sin embargo, "a veces surgen nuevas categorías, como resultado de algún cambio importante en la manera de ver el mundo de algún individuo o al ampliarse"[7] su propia experiencia personal. Se forman, entonces, categorías que antes no existían y surgen nuevos grupos de similitudes y diferencias.

De este modo, la creación de categorías nuevas parte de la percepción, que "tiene lugar tanto en la mente como a través de los sentidos".[8] En este sentido, la mente «lee la realidad entre líneas»; "percibe lo que existe «en medio»…" y crea nuevas categorías. "…Así pues, las categorías surgen por un juego libre de la mente, en el cual las nuevas formas se perciben mediante una acción creativa de la inteligencia, y se van fijando de manera gradual en sistemas de categorías. Este sistema de categorías permanecerá fluido y abierto al cambio siempre que la mente misma esté abierta a la acción creativa de la inteligencia".[9]

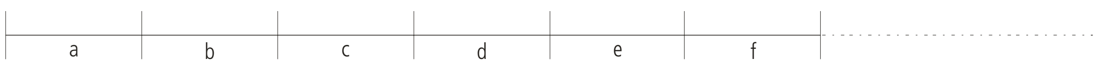
Se puede decir que "las categorías cambian a medida que lo hace el contexto... Sólo cuando la inteligencia opera de manera libre y creativa puede la mente abandonar las estructuras de categoría rígidas, y ser, por tanto, capaz de comprometerse en la formación de órdenes nuevos".[10]

3.2.- REPRESENTACIÓN FORMAL DEL ORDEN

Se puede representar, a través de un esquema formal, cualquier noción concreta de orden siempre que se entienda en términos de diferencias y similitudes.

Si se considera el ejemplo de una línea recta construida a partir de una serie de segmentos contiguos de igual longitud y dirección: a, b, c, d, e, f,…, se podría decir que el orden de la línea está definido por una similitud: todos los segmentos de la línea tienen el mismo tamaño y la misma dirección; y una diferencia, cada uno de los tramos ocupa una posición diferente en el trazado de la línea.

Su representación formal está determinada por el siguiente esquema:

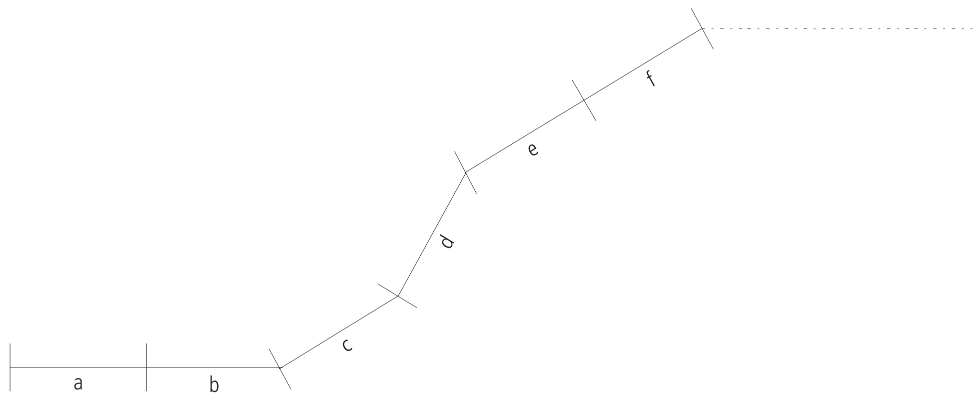


Si la línea a representar reúne las mismas condiciones que la anterior pero en lugar de ser recta es quebrada, se establece un nuevo orden definido por las siguientes características: una similitud: todos los tramos de la línea tienen el mismo tamaño, y varias diferencias: cada tramo de la línea puede tener una dirección diferente a los otros (distinto ángulo) y además ocupa una posición distinta.

La diferencia entre los segmentos representa distintos niveles de compromiso. Hay segmentos, como el *a*, *b* y el *e*, *f*, en el que la diferencia de dirección no existe aunque sí la de posición, y otros, como el *c* y el *d*, en el que la diferencia no sólo es de posición sino también de dirección. Los segmentos *a, b, e, f,* forman un orden y los segmentos *c y d*, otro. En el primer orden se debe cumplir sólo la diferencia de posición y en el segundo, se tienen que cumplir las dos condiciones de posición y de dirección. Esto quiere decir que la recta quebrada representada está

[7] David Bohm, op. cit., p. 131.
[8] David Bohm, *Ibidem.*
[9] David Bohm, *op. cit.,* p. 132.
[10] David Bohm, *op. cit.,* p. 133.

formada por dos niveles de orden diferentes, en el que la diferencia de posición es un nivel superior puesto que lo cumplen todos los tramos de la línea y la diferencia de dirección es un orden inferior porque cada tramo de la línea puede variar o no su dirección con respecto al tramo anterior. Se puede establecer así un orden de órdenes en el que resulta posible generar niveles de orden más alto que se relacionan con niveles de orden más bajo.



De esta manera pueden construirse esquemas formales de configuraciones muy diferentes que reflejen en cada momento cuáles son los compromisos de relación semejanza – diferencia que existen entre cada una de las partes del sistema.

3.3.- ORDEN CONSTITUTIVO Y ORDEN DESCRIPTIVO

Al aplicar el concepto de orden a un proceso dinámico en el que se ven implicados un sujeto, un objeto y una relación de percepción entre ellos, en la que se produce una distinción de semejanzas y diferencias, hay que tener en cuenta que se dan simultáneamente dos tipos de órdenes: el orden constitutivo y el orden descriptivo, cuya distinción nunca es absoluta, ya que en todo orden constitutivo se dan matices descriptivos, y en todo orden descriptivo hay una base constitutiva.

El orden constitutivo esta representado por un concepto que surge a partir de los resultados que se obtienen de un proceso perceptivo sujeto – objeto, definido por el conjunto de operaciones de selección y colección realizadas por el sujeto sobre un conjunto de objetos situados en un entorno. El concepto recoge todas aquellas características por las que se ha definido el objeto o la situación con una categoría de orden. El orden constitutivo tiene una gran capacidad para conducir la actividad del proceso perceptivo de forma coherente y rigurosa. Es un orden generado por la percepción del sujeto.

El orden descriptivo especifica las propiedades cualitativas del orden en términos de coordenadas, medidas, nombres de los elementos,… Es un orden del objeto.

Cualquier orden real descansa en una especie de espectro entre estos límites (orden constitutivo y orden descriptivo). Así, el orden no se encuentra meramente en el objeto o en el sujeto, sino en el ciclo de actividad que los incluye a ambos.

En el ejemplo de la línea quebrada anterior, el orden constitutivo estaría determinado por la descripción geométrica que constituye la esencia de línea quebrada (conjunto de líneas continuas con diferente dirección espacial) y el orden descriptivo por la especificación de cada uno de los tramos en cuanto a tamaño, posición y orientación espacial, que forman parte de la línea. Así, se puede describir una línea quebrada como una línea construida por segmentos con unas características determinadas (orden descriptivo) y cuyo conjunto de segmentos constituyentes reúnen unas diferencias y semejanzas significativas (orden constituyente). En la creación de la línea quebrada, el orden descriptivo está íntimamente conectado con el orden constitutivo.

Si se toma como ejemplo los planos que utiliza un arquitecto para construir una casa, el orden constitutivo estaría definido por el concepto arquitectónico de vivienda que ha motivado la realización del dibujo imaginario de la casa; y el orden descriptivo, estaría definido por el sistema de cotas y medidas aportadas en la descripción de los dibujos para poder traspasar cada uno de los elementos representados a su tamaño real: paredes, vigas, ventanas,… Una vez finalizada la casa, el sistema de medidas (orden descriptivo) quedará íntimamente ligado al orden constitutivo de la obra.

3.4.- ORDEN FORTUITO: CAOS, AZAR Y JUEGO

El concepto de orden va asociado a una información que le permite ubicarse dentro de un espectro muy amplio de diferentes niveles de órdenes, con distinto grado de complejidad. En uno de los extremos de este espectro general de orden, se encuentran los órdenes sencillos, de grado muy bajo, en los que las diferencias que se establecen entre los elementos son muy evidentes, por ejemplo, blanco / negro. En el otro extremo están los órdenes aleatorios o caóticos, de grado infinito, entre los que el azar es un caso límite, en los que las diferencias de distinción que se establecen en el sistema son muy sutiles y pasan de ser diferentes en un nivel a ser iguales en un nivel de orden superior. Entre un extremo y otro, "se extiende todo un mundo de órdenes sutiles y complejos, entre los que se encuentran el lenguaje, la música y otros ejemplos que podrían tomarse del arte,… y los juegos".[11] Todas estas clases de orden son importantes y todas corresponden, cada una a su manera, a la realidad.

Lo que aquí se propone es que cualquier cosa que ocurra ha de tener lugar con un cierto orden, de modo que la idea de «desorden» no tiene realmente sentido.

En términos generales, se puede definir un orden fortuito: caos, azar y juego, como un orden, con las siguientes características:

1. Es un orden de grado infinito: no se puede predecir su comportamiento.

2. La secuencia de resultados que se obtiene por este procedimiento parece sucederse de manera compleja e impredecible.

3. Tiende a variar dentro de dominios limitados, es decir, su comportamiento dependen de variables y factores específicos y definibles; por ejemplo al lanzar los dados sobre una mesa, los resultados que se pueden obtener sólo pueden variar dentro de un rango concreto: del 1 al 6, porque éstos son los números que se encuentran impresos en las 6 caras del dado.

Para establecer el grado de orden que le corresponde a un sistema determinado, hay que tener en cuenta el contexto en el que está descrito el sistema. En un contexto en el que no se tengan en cuenta los detalles, el orden del sistema es fortuito, de grado infinito. Se necesitarán muchos datos de información para generar el proceso. Pero

[11] David Bohm, *op. cit.*, p. 149.

en un contexto en que se conozcan todos los pequeños detalles, el orden del sistema será de grado bajo y se necesitarán muy pocos datos de información para definir cualquiera de las trayectorias del proceso.

La noción de azar como forma de orden se puede ejemplificar con los generadores de números aleatorios de los ordenadores. Para ello, hay que tener en cuenta cómo generan los ordenadores estos números. Utilizan algoritmos muy sencillos que, cada vez que se ejecutan, seleccionan puntos de partida distintos: un número dentro de un rango, por ejemplo entre 0 y 9; la situación del reloj electrónico que guía el tiempo interno del ordenador;… A partir de estos datos se realizan operaciones encadenadas de multiplicaciones y selección de partes de los números obtenidos hasta obtener un resultado concreto. La serie de números aleatorios obtenida así, en apariencia, no guarda ningún tipo de orden entre sí.

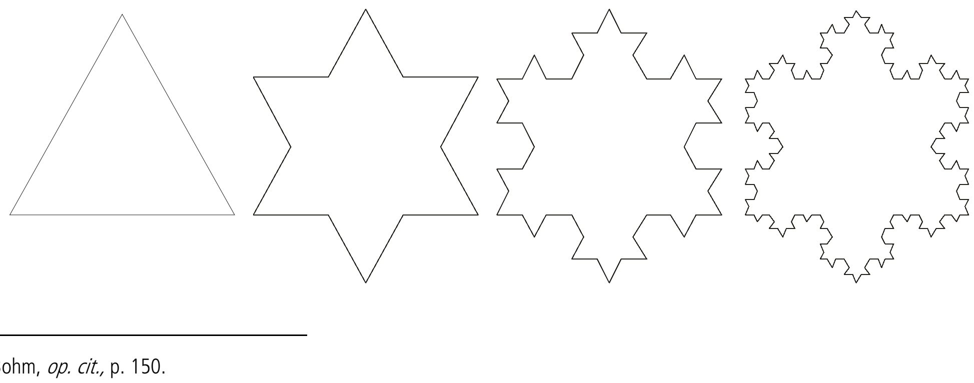
Los números aleatorios así generados pueden analizarse desde dos puntos de vista. Para el programa que los generó, los números surgieron a partir de unas reglas determinadas muy sencillas y por tanto el grado de orden asociado a este proceso es muy bajo. Sin embargo, en un contexto en que no se tenga en cuenta el programa de ordenador que los generó sino la secuencia generada en sí misma, los números parecen sucederse de manera compleja e impredecible. En este sentido, el orden de los números es esencialmente fortuito y de grado infinito.

"Es importante señalar que, aunque el orden de una secuencia aleatoria es de grado infinito, no tiene la sutileza de los órdenes infinitos de la música, el arte y el lenguaje".[12]

3.5.- ORDEN FRACTAL

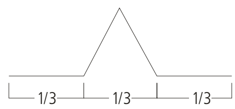
En la definición de orden se trató "el orden en términos de percepción de diferencias y semejanzas, siendo considerado sobre todo como un medio de entender… estructuras y procesos que se encuentran ya presentes en la naturaleza o en la mente. Sin embargo, también es posible utilizar esta noción de orden, basada en similitudes y diferencias, para generar formas, figuras y procesos. Por ejemplo, a partir de un segmento se puede generar una línea mediante un proceso de repetición, línea en la que cada elemento es semejante (igual) al siguiente. Puede también producirse un polígono, mediante una semejanza de ángulos y longitudes".[13]

"Los fractales implican un orden de diferencias y semejanzas que incluyen cambios de escala, además de otros posibles cambios".[14] Bohm, en su libro *Ciencia, Orden y Creatividad*, muestra un ejemplo sencillo basado en un triángulo. Si a cada uno de los lados del triángulo se le aplica un triángulo de base un tercio de la longitud del lado del triángulo, se obtiene una estrella de seis puntas. Si a los lados de cada uno de los triángulos obtenidos se le vuelve a aplicar este proceso, empiezan a aparecer figuras muy complejas:



[12] David Bohm, *op. cit.,* p. 150.
[13] David Bohm, *op. cit.,* p. 171.
[14] David Bohm, *Ibidem.*

En este ejemplo la figura base del dibujo es el triángulo y la operación que actúa como generador del fractal consiste en aplicar un triángulo a cada uno de los lados del triángulo base. Hay que tener en cuenta, además que en este proceso de generación de los fractales, hay un cambio de escala en el generador. Cada vez se aplica a lados de triángulo de menor longitud, por lo tanto es necesario escalarlo para que pueda seguir cumpliendo la regla de que sus lados midan un tercio del triángulo base que se utiliza en cada nueva generación de triángulos.



Este proceso puede realizarse de manera indefinida, generando figuras visual y matemáticamente muy interesantes. Este fractal es un ejemplo de orden generativo en el que la generación de la imagen se consigue por la aplicación reiterada de una forma similar, pero en escala decreciente.

Siguiendo este mismo proceso, Mandelbrot, inventor de los fractales, lo aplica a otras figuras geométricas base y a diferentes generadores aplicados cada vez a menor escala y consigue figuras de una gran complejidad que recuerdan a formas de la naturaleza como montañas, árboles, nubes,…

Todas las figuras fractales generadas por el proceso indicado anteriormente, están compuestas por un orden sencillo: repiten un único generador, sobre una figura geométrica simple, en una escala que disminuye de manera constante. Pero se pueden crear también figuras más complejas, utilizando más de un generador y aplicándolos de forma alternativa según determinadas reglas fijas. Se podrían, además, introducir otras reglas del juego sobre el generador que no fuesen simplemente un cambio de escala, sino que pudieran soportar cambios de dirección, forma,…, de manera que los resultados formales que se obtuviesen, fuesen más sugerentes y sutiles.

3.6.- ORDEN GENERATIVO

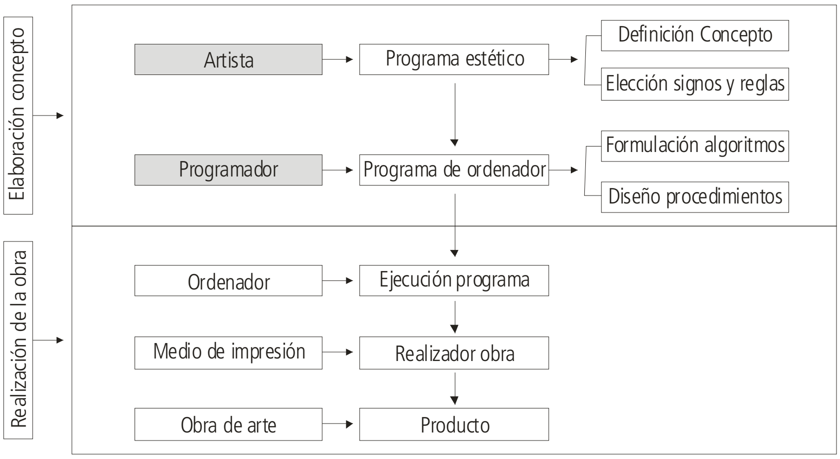
Por orden generativo se entiende "el conjunto de todas las operaciones, reglas y teoremas, por cuya aplicación a una cantidad de elementos materiales que pueden operar como signo se producen en ella de un modo consciente y metódico estados estéticos".[15] Esta definición de Max Bense publicada en el libro *Del Arte Objetual al Arte de Concepto,* de Simón Marchan Fiz, es muy clarificadora. Entiende la obra de arte como el resultado de un proceso diseñado a partir de un conjunto de instrucciones que posibilitan la generación de la obra por un proceso de transformaciones sucesivas. En primer lugar, este tipo de transformaciones son de un conjunto de instrucciones en procedimientos prácticos que puedan ser entendibles dentro de un entorno determinado para poder ejecutar la obra. En segundo lugar, se realizan transformaciones de los procedimientos en realizaciones: en esta etapa se interpretan cada uno de los procedimientos definidos para realizar una obra concreta, en la que se especifican el lenguaje gráfico, los materiales y los soportes que se van a utilizar en su realización. En este sentido, el proceso creativo está compuesto de dos etapas, una de elaboración del concepto, y otra de realización de la obra. La fase de elaboración del concepto trabaja en el dominio de las ideas, de las intenciones; y la fase de realización, en el entorno material técnico. En este sentido Simón Marchan Fiz señala "la obra ya no se relaciona más de un modo directo al creador. Es medida por un sistema de agregados semióticos y mecánicos".[16]

---

[15] Simón Marchan Fiz, *Del Arte Objetual al Arte de Concepto*, Akal, Arte y Estética, 3ª ed., Madrid, 1988, pp. 134-135.

[16] Simón Marchan Fiz, *op. cit.,* p. 135.

El estudio de este tipo de orden tiene por objeto conocer el conjunto de ideas, instrucciones, operaciones y reglas que llevan a generar una obra. El proceso generador responde al siguiente esquema:



En este proceso tan complejo intervienen además del artista responsable del concepto estético de la obra y de la elección del repertorio material de signos gráficos y de reglas que van a operar sobre ellos para transformarlos y convertirlos en objetos estéticos, un programador que recibe el programa estético del artista y lo transforma en un programa de ordenador capaz de satisfacer, a través del diseño de algoritmos y procedimientos, las necesidades estéticas del artista.

Una vez finalizada la elaboración del concepto, tanto estético como algorítmico, se pasa a la realización de la obra. En esta etapa, primero se ejecuta el programa para elaborar el repertorio gráfico especificado por el artista y, después, se busca el medio adecuado para imprimir los resultados: pantalla, plotter, impresora, fotocopiadora,… El producto obtenido, se convierte en el objeto estético esperado, es decir, en la obra de arte.

Sobre este proceso es importante la declaración que F. Nake realiza en el libro *Del Arte Objetual al Arte del Concepto:* "Con tal programa no se elabora o debe elaborar un dibujo determinado, singular, sino más bien tal programa representa la estructura general para todos los dibujos de toda una clase".[17] Abraham Moles añade: "La máquina… realiza todas las obras posibles… crea un gran número de obras potenciales que podría almacenar, pero las somete a una criba. El artista atiende al concepto de «filtro»… El filtro es un término… de la programación que elimina de una serie de combinaciones una parte de ellas".[18]

En este tipo de orden, se acentúa la elaboración del concepto de la obra sobre su realización, es decir, "se desentienden del objeto a favor del proceso".[19] Lo importante es la idea que propone el artista. No se trata de elaborar materialmente la obra sino de generar un programa que responda a las necesidades estéticas y expresivas del artista.

Los fractales de Mandelbrot son un ejemplo de orden generativo en el mundo de las matemáticas y de los ordenadores. Sin embargo, esta idea de orden no es restrictiva a este ámbito, sino que se puede aplicar a otras áreas

[17] Simón Marchan Fiz, op. cit., p. 136.
[18] Simón Marchan Fiz, op. cit., p. 137.
[19] Simón Marchan Fiz, *op. cit.,* p. 137.

de conocimiento. Por ejemplo, Bohm[20] señala que la presencia del orden generativo puede verse en el trabajo de un pintor, a través de las distintas fases por las que pasa para construir un cuadro. Señala que en el arte tradicional, un artista comienza su trabajo intentando captar el modelo general que va a representar mediante una serie de trazos significativos que encajen la totalidad del modelo sobre el soporte. A continuación, el artista interviene sobre el boceto inicial, para ir añadiendo detalles particulares del modelo. El artista repite este proceso tantas veces como sea necesario hasta conseguir que la obra responda visualmente al modelo propuesto. En este sentido, Bohm hace la siguiente reflexión: "De la misma manera que las formas más complejas de la naturaleza parecen generarse a través de adiciones sucesivas de detalles más y más pequeños, también podría pensarse que un cuadro crece de manera semejante".[21]

Sobre este proceso generativo, Bohm realiza la siguiente reflexión: "Desde luego que el orden generativo de una obra de arte es mucho más complejo de lo que sugiere la descripción anterior… además de la percepción externa, opera también una percepción interna, que es inseparable de toda la vida del pintor, su formación, conocimiento y respuesta frente a la historia de la pintura. Las percepciones externa e interna son, a su vez, inseparables de la relación emocional e intelectual del pintor con el tema, e incluso de sus valores literarios y sociales. Aun así, esta visión no es de ninguna manera rígida o fija, ya que tan pronto como el pintor comienza a trabajar sobre la tela se produce una nueva interacción. Él o ella se enfrenta constantemente tanto con las limitaciones físicas, como con las nuevas posibilidades que afloran en la actividad muscular misma de la pintura, y en las percepciones nuevas del cuadro que va surgiendo tras el pincel".[22]

Añade, además: "En toda esta actividad, lo importante es que el artista trabaja siempre, de una manera u otra, a partir de la fuente generativa de la idea, y permita que el trabajo se despliegue en formas siempre más definidas… Actúa en un principio mediante un juego libre, que se va transformando luego en formas cristalizadas… es necesario que las formas que se van haciendo más definidas sigan abiertas, en cada estadio, al tipo de juego libre que resulta fundamental para la creatividad".[23]

Resumiendo se puede añadir que "la esencia del orden generativo de un cuadro escapa a toda definición, pero está claro que este orden es muy diferente al de una máquina, en la que el todo está construido por las partes… Una de las actividades más importantes de la creación de una obra de arte es su desarrollo,… parte de una imagen general que deriva en el propio proceso en formas particulares".[24]

En el orden generativo, el orden no surge como resultado de una secuencia de sucesiones, sino como un "orden interno más profundo, del que pueden surgir de manera creativa las formas manifiestas de las cosas".[25] El orden generativo es el conjunto de fases que se llevan a cabo para la consecución de un objetivo. Estas fases deben estar organizadas de acuerdo a unas estrategias y en su proceso repetir, tantas veces como sea necesario, las reglas que lleven a generar unos resultados adecuados. En el orden generativo "lo que existe es el proceso mismo de llegar a ser, mientras que todos los objetos, acontecimientos, entidades, condiciones, estructuras, etcétera, son formas que pueden abstraerse de este proceso".[26]

---

[20] David Bohm, *op. cit.,* p. 176.
[21] David Bohm, *op. cit.,* p. 177.
[22] David Bohm, *Ibidem.*
[23] David Bohm, *op. cit.,* pp. 177-178.
[24] David Bohm, *Ibidem.*
[25]David Bohm, *op. cit..,* p. 170.
[26] David Bohm, *La Totalidad y el Orden Implicado*, Editorial Kairós, Barcelona, 2002, p. 80.

3.7.- ORDEN IMPLICADO Y ORDEN EXPLICADO

Según el modelo teórico del orden implicado, el conocimiento del mundo no está relacionado con una descripción exacta de la realidad objetiva: la realidad tal como la describe cada uno (explicada) porque este tipo de descripción está sometido a las restricciones y limitaciones de diferentes tipos propias del ser humano que las realiza; sino que el conocimiento del mundo es un modelo teórico que se basa en ser una aproximación a la realidad: el mundo exterior no es algo que exista objetivamente ahí afuera y que el hombre al percibirlo lo representa en su mente, sino que es algo que se crea o se construye en el propio proceso del conocimiento.

El conocimiento se entiende aquí, como el resultado de varias acciones:

1. Como una capacidad que tiene el ser humano para dar sentido y significado a la realidad exterior, por un proceso de interacción dialéctica entre él y su entorno próximo, tanto físico como cultural.
2. Como una necesidad de comprender la realidad compleja del mundo, como un todo coherente, a través de un proceso continuo de realimentaciones sucesivas entre los dos protagonistas del problema: el ser humano y su entorno.
3. Como un método para descubrir orden en el caos.

En este modelo teórico existen, por lo tanto, dos modos de conocimiento del mundo: el orden explicado y el orden implicado.

En el orden explicado, la realidad está formada por elementos diferentes y relaciones de distinto tipo entre ellos: dependencia, independencia,… El orden explicado está definido por el mundo que experimentamos a través de los sentidos: describe pasivamente los rasgos característicos del entorno local a través de un proceso de representación. Este tipo de orden da una visión reduccionista, fragmentaria y particular de la realidad.

David Bohm, en su libro *La Totalidad y el Orden Implicado*, describe esta visión de la realidad con los siguientes términos: "Siempre ha sido necesario para el hombre, y propio de su pensamiento el dividir las cosas hasta cierto punto, y el separarlas para reducir sus problemas a unas proporciones manejables, porque, es evidente que, si intentáramos tratar con toda la realidad a la vez en nuestra técnica práctica, nos estancaríamos en ella… En lo esencial, el proceso de división es una manera de pensar sobre las cosas adecuada y útil principalmente para las actividades prácticas, técnicas y funcionales… Sin embargo, cuando este modo de pensar se amplía a la noción que el hombre tiene de sí mismo y al mundo entero en el cual vive (por ejemplo, a su propio concepto del mundo), deja de considerar las divisiones resultantes como simplemente útiles o convenientes y comienza a verse y sentirse a sí mismo, y a su mundo, como formados realmente por fragmentos con existencia separada. Guiado por un concepto fragmentario de su propio mundo, el hombre intenta entonces romperse a sí mismo y su mundo, para que así todo parezca corresponder a su modo de pensar. Así consigue una prueba aparente de que su propio concepto fragmentario del mundo es correcto aunque, por supuesto, no advierta el hecho de que es él mismo, actuando según su manera de pensar, quien ha introducido esta fragmentación que ahora parece tener una existencia autónoma, independiente de su voluntad y de su deseo".[27]

Estas palabras rotundas de Bohm refuerzan la idea mostrada anteriormente de que el conocimiento del mundo, en el orden explicado, produce la sensación de creer que la descripción que de forma individual da una persona sobre el mundo, es un descripción del mundo tal como es; de que existe una correspondencia directa entre la realidad objetiva y el pensamiento; pero en realidad, lo que cada uno ve y experimenta de la realidad, no es más que un

[27] David Bohm, *La Totalidad y el Orden Implicado*, Editorial Kairós, Barcelona, 2002, pp. 20-21.

fragmento o una visión reducida de ella. El punto débil de este planteamiento está en considerar la relación entre realidad y pensamiento como una correspondencia directa y automática y no tener en cuenta que esta relación es algo mucho más compleja. El pensamiento además de recibir información por las propias percepciones a través de los sentidos, está formado por un entramado de teorías elegidas a través del tiempo y filtradas por la propia experiencia y bagaje cultural, intelectual,… que crean, más que un conjunto de conocimientos, una manera de mirar el mundo y de formarse ideas acerca de las realidades que presenta.

En el orden implicado, la realidad es un sistema complejo de elementos inseparables e interrelacionados en constante cambio, en el que el observador juega un papel muy importante y en donde el mundo real es un mundo de infinitas variedades, complejidades y posibilidades.

Para Bohm existe un nivel de realidad muy complejo al que no se tiene acceso y que él caracteriza con términos como: verdad, inteligencia,… Bohm propone a la intuición y a la creatividad como facultades humanas capaces de acceder a ese nivel de realidad: de ir más lejos en el conocimiento de lo real. Para él, la intuición es una inteligencia activa con capacidad para cambiar y ordenar la propia forma de pensar el mundo. En este sentido, David Bohm en su libro "Ciencia, Orden y Creatividad" propone lo siguiente: "Es necesario, tanto en la ciencia como en el arte, permitir que surjan nuevos órdenes generativos de creación perceptiva, órdenes que vayan más allá del contenido individual e incluyan la totalidad de la experiencia cultural común".[28]

Contemplar el mundo mediante la intuición, supone aceptar que se piensan las cosas no por el conocimiento físico que se tiene de ellas, sino por todo un entramado teórico que estructura cada pensamiento individual y que está formado por todos aquellos modos de pensar las cosas: el espacio, el tiempo, los objetos, las relaciones,… que son capaces de establecer órdenes coherentes y con sentido, entre las cosas o elementos observados. Hay que tener en cuenta, también, que este conjunto de teorías, particular de cada ser humano, está continuamente en cambio porque están en continua retroalimentación con la realidad. Lo importa de este hecho es comprender la enorme variedad de modos de pensar y observar la realidad, y no buscar una unificación en la forma de pensar.

Hay que pensar, en este sentido, que el mundo, no está formado por objetos relacionados, sino que es el resultado de un proceso de pensamiento, independiente de su contenido, capaz de ordenar y tener criterio para discernir la información que recibe de la realidad. El proceso posibilita que las cosas lleguen a ser. Aúna experiencias intelectuales, emocionales, físicas,… y da respuesta a situaciones reales de conocimiento, en un momento dado. Estas respuestas contribuyen a formar nuevas experiencias personales que condicionarán el pensamiento siguiente. En este aspecto, Bohm señala lo siguiente "El orden implicado no puede describirse según sencillas transformaciones geométricas… sino… operaciones de otra clase… metamorfosis. Esta palabra indica que el cambio es mucho más radical que el cambio de posición en la orientación de un cuerpo rígido, y que, en cierto modo, es más parecido al cambio de una oruga en mariposa (en el cual se altera todo de un modo radical, mientras que algunos rasgos sutiles y muy implícitos permanecen sin variación)".[29] Puede decirse que el conocimiento, siempre en movimiento y cambiante, surge como consecuencia de un conjunto de pensamientos, sensaciones y otros procesos mentales internos.

---

[28] David Bohm, *Ciencia, Orden y Creatividad: Las Raíces Creativas de la Ciencia y la Vida*, Editorial Kairós, Barcelona, 2003, p. 192.

[29] David Bohm, *La Totalidad y el Orden Implicado*, Editorial Kairós, Barcelona, 2002, p. 224.

3.8.- ANÁLISIS DE OBRAS

3.8.1- FRANÇOIS MORELLET

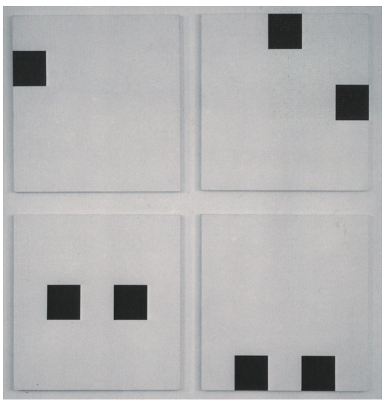
François Morellet trabaja en una serie de obras con el concepto de lo aleatorio. En todas ellas, genera un conjunto de números que obtiene de forma aleatoria y que utiliza para crear sus obras. Utiliza diferentes métodos para generar los números aleatorios: los números de una guía de teléfonos, los decimales del número matemático pi (3,14…), la serie de números triangulares, cuadrados, cúbicos, pentagonales, hexagonales, heptagonales, octagonales,…, la serie de números primos, factoriales, la serie formada por las permutaciones de los n primeros números enteros, la serie de Fibonacci, el lanzamiento de dados,…

En las siguientes obras de Morellet, lo aleatorio se obtiene a partir de la elección de un número determinado de cifras del número pi. Las primeras 500 cifras de la serie infinita de los decimales del número pi son:

3,

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128
4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091
4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436
7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548
0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912

1. 4 Reparticiones aleatorias de 2 cuadrados según las cifras 31-41-59-26-53-58-97-93, 1958[1]



[1] 4 Répartitions aléatoires de 2 carrés suivant les chiffres 31-41-59-26-53-58-97-93, 1958.

Las números 31 – 41 – 59 – 26 – 53 – 58 – 97 – 93, incluidos en el título de la obra, son las 16 primeras cifras del número pi:

3,

1415926535 89793

La estructura de la obra está compuesta de 4 cuadrados cada uno de ellos formado por una matriz de 5 x 5 = 25 casillas. La localización y orden de lectura de las cifras pi dentro de cada uno de los cuatro cuadrados que forman la obra se realiza comenzando en el vértice superior izquierdo y desplazándose de izquierda a derecha y de arriba abajo:

Orden de aplicación cifras nº pi

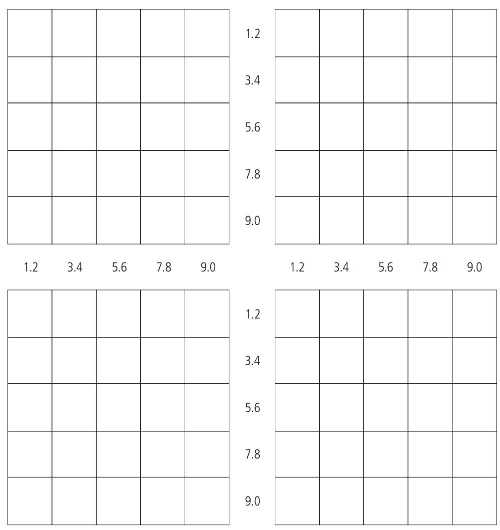
1º	2º
3º	4º

Los números de la secuencia aleatoria seleccionada están agrupados de 4 en 4, formando 4 grupos de 4 elementos cada uno (3141, 5926, 5358, 9793), y cada uno de estos grupos, a su vez, está dividido en dos parejas de números: (31 - 41, 59 - 26, 53 - 58, 97 - 93):

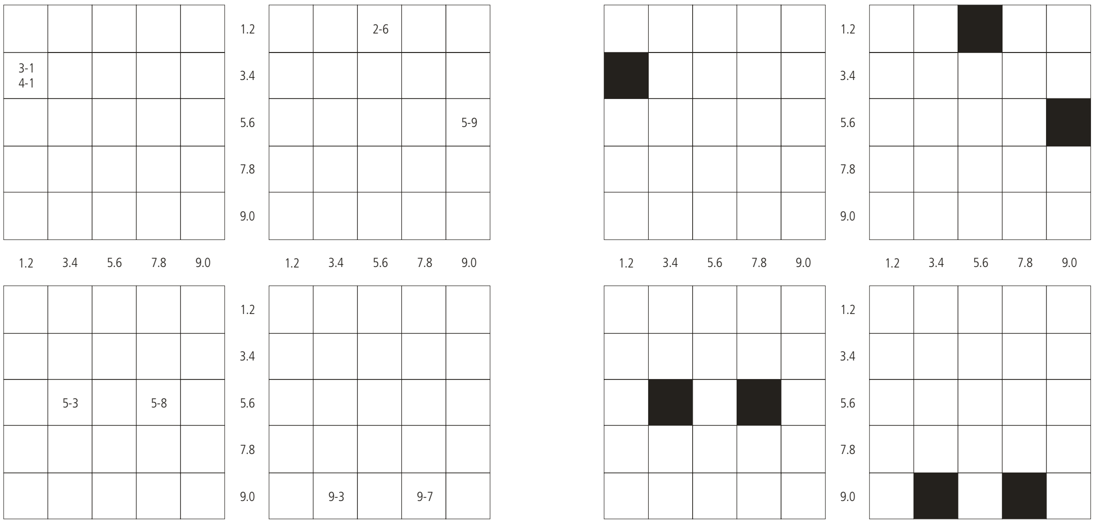
3141 5926 5358 9793

31 41 59 26 53 58 97 93

Para identificar cada una de las casillas de la matriz, se nombran sus filas y columnas. La pareja de números 1,2 representa a la primera fila y la primera columna de cada cuadrado; la pareja 3, 4, a la segunda fila y la segunda columna; la pareja 5, 6, a la tercera; la pareja 7, 8, a la cuarta y la pareja 9,0, a la quinta.

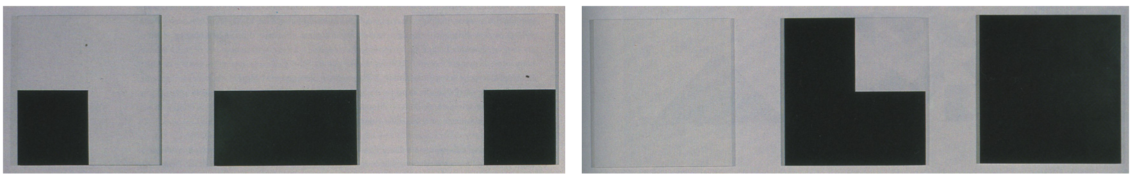


Para realizar la obra, se toman las dos primeras parejas de números (31 – 41), y se ubican en el primer cuadrado, en el lugar que les corresponda. Después se toman las dos siguientes parejas (59 – 26) y se ubican en el segundo; a continuación se toman las terceras parejas (53 – 58) y se sitúan en el tercer cuadrado; y finalmente, las cuartas parejas ((97 – 93) que se sitúan en el cuarto cuadrado. Para representar las parejas en las casillas de las matrices correspondientes, se identifica el primer número de la pareja con la fila de la matriz en la que está ubicado y el segundo número con la columna. Por ejemplo, la pareja 31, está representada en la fila 3 y la columna 1 del primer cuadrado de la matriz.



La obra termina pintando cada una de las casillas marcadas con el color negro.

2. 6 Reparticiones aleatorias de 4 cuadrados negros y blancos según las cifras pares e impares del número pi,1958[2]



Para realizar esta obra se utilizan las 24 primeras cifras del número pi:

3,

1415926535 8979323846 264

La estructura de la obra está compuesta de 6 cuadrados, cada uno de ellos formado por una matriz de 2 x 2 = 4 casillas. Los seis cuadrados forman una estructura lineal en la que el orden de lectura de cada uno de ellos es, de izquierda a derecha, el siguiente:

1º	2º	3º	4º	5º	6º

[2] 6 Répartitions aléatoires de 4 carrés noirs et blancs d'aprés les chiffres pairs et impairs du nombre pi, 1958.

Las 24 cifras de la secuencia del número pi están agrupadas de 4 en 4, formando 6 grupos de 4 elementos cada uno (3141, 5926, 5358, 9793, 2384, 6264). Cada grupo de 4 números se representa en un cuadrado siguiendo el orden de lectura antes indicado.

3141 5926 5358 9793 2384 6264

La distribución de los números en cada uno de los cuadros se realiza según el siguiente orden:

Orden de aplicación números

1º	2º
3º	4º

Su aplicación en cada uno de los cuadrados de la obra está representada por la siguiente secuencia:

1

3	1
4	1

2

5	9
2	6

3

5	3
5	8

4

9	7
9	3

5

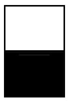
2	3
8	4

6

6	2
6	4

Para realizar la obra se tiene en cuenta la siguiente condición: las cifras pares del número pi seleccionado se representan con el color negro y las cifras impares con el color blanco.

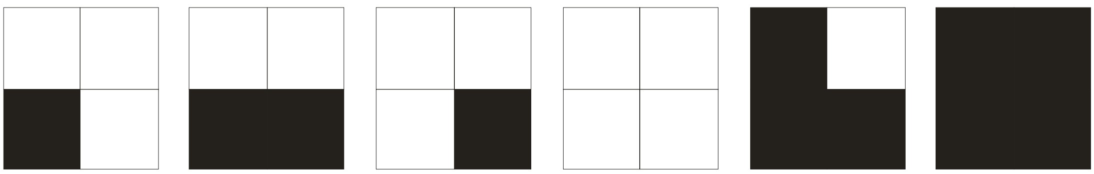
Representación números



= 13579

= 02469

La representación de la obra terminada responde al siguiente esquema:



A primera vista, parecen seis cuadrados diferentes, pero dos de ellos representan la misma figura: el primero y el tercero empezando a contar por la izquierda. Solo hay 5 figuras diferentes.

La intención de Morellet en esta obra no era realizar un inventario de todas las posibilidades de repartición de las cifras elegidas del número pi en la matriz de 2 x 2 = 4 casillas, sino diseñar un sistema para generar estas matrices que se basaba en tomar una serie de números existentes y controlables.

A F. Morellet no le interesa tanto representar materialmente su obra, como reproducir un texto con la receta de su construcción, el algoritmo, que el intérprete deberá aplicar y respetar para obtener la obra en cuestión. La sensibilidad del intérprete se manifiesta en cómo interpreta las consignas del artista.

3. Pi espinoso, Nº 1, 1 = 10º, 51 Decimales, 1998[3]

En 1998, Morellet comienza una nueva serie de obras basadas en el número pi. Utiliza los 51 primeros decimales del número pi para generar una línea en zigzag formada por tramos iguales de líneas rectas.

Para determinar los grados de los ángulos de las líneas de cada uno de los tramos de la recta en zigzag se utiliza la secuencia de los decimales del número pi a la que se le aplica la siguiente conversión u operación: cada número de la secuencia de los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, equivale a un ángulo en grados determinado por el orden que ocupa en la serie. El primer número de la serie, el 1, equivale a 10º; el valor de los grados correspondientes para el resto de los elementos de la serie se realiza según el siguiente criterio: cada número equivale a 10º más que el número anterior, es decir, cada número de la serie actúa como un contador acumulativo que guarda la suma de los grados de todos los elementos anteriores a él en la serie, y a esta cantidad le suma 10º más (+10º).

De este modo, la equivalencia de la serie de los números naturales anterior, a grados queda establecida en la siguiente tabla:

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Equivalencia	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º	90º	100º

Los 51 decimales del número pi que forman la serie serán:

3,

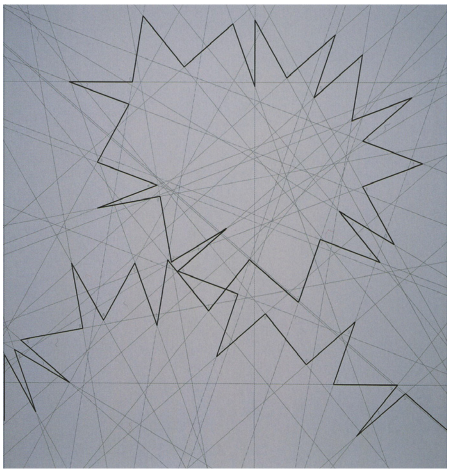
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510

El equivalente en ángulos de cada uno de estos números, produce la siguiente secuencia de direcciones:

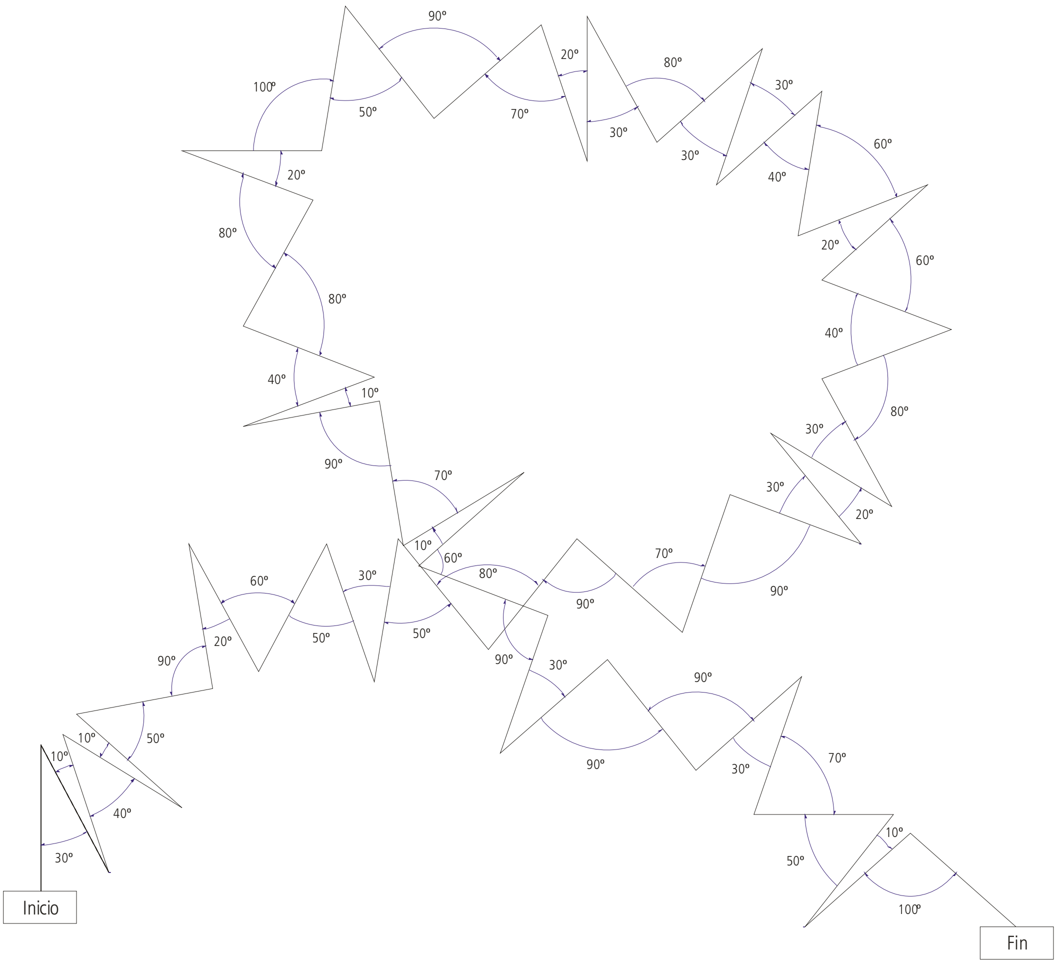
N^{os}	1	-	11	30º	10º	40º	10º	50º	90º	20º	60º	50º	30º	50º
N^{os}	12	-	21		80º	90º	70º	90º	30º	20º	30º	80º	40º	60º
N^{os}	22	-	31		20º	60º	40º	30º	30º	80º	30º	20º	70	90º
N^{os}	32	-	41		50º	100º	20º	80º	80º	40º	10º	90º	70º	10º
N^{os}	42	-	51		60º	90º	30º	90º	90º	30º	70º	50º	10º	100º

Estas series generan un gran número de obras que pueden ser de dos tipos: *pi piquante,* cuando la obra está representada por los propios segmentos de líneas rectas formadas por la secuencia o *pi rococo*, cuando a las líneas rectas de los segmentos se les añaden arcos de círculo.

[3] Prickly pi, Nr. 1, 1 = 10º, 51 Decimals, 1998.



La obra Pi espinoso, Nº 1, siguiendo la secuencia anterior, y comenzando en la esquina inferior izquierda del soporte, genera la siguiente secuencia de líneas rectas encadenadas:



4. Pi rococó Nº 16, 1 = 10º, 2000[4]

Utilizando la misma tabla de equivalencias y crecimiento de la serie pi que en la obra anterior pero considerando ahora sólo 19 de los 51 elementos anteriores, y añadiendo un arco de círculo a las líneas rectas obtenidas, se obtiene un resultado diferente.

Los decimales del número pi que forman la serie son los siguientes:

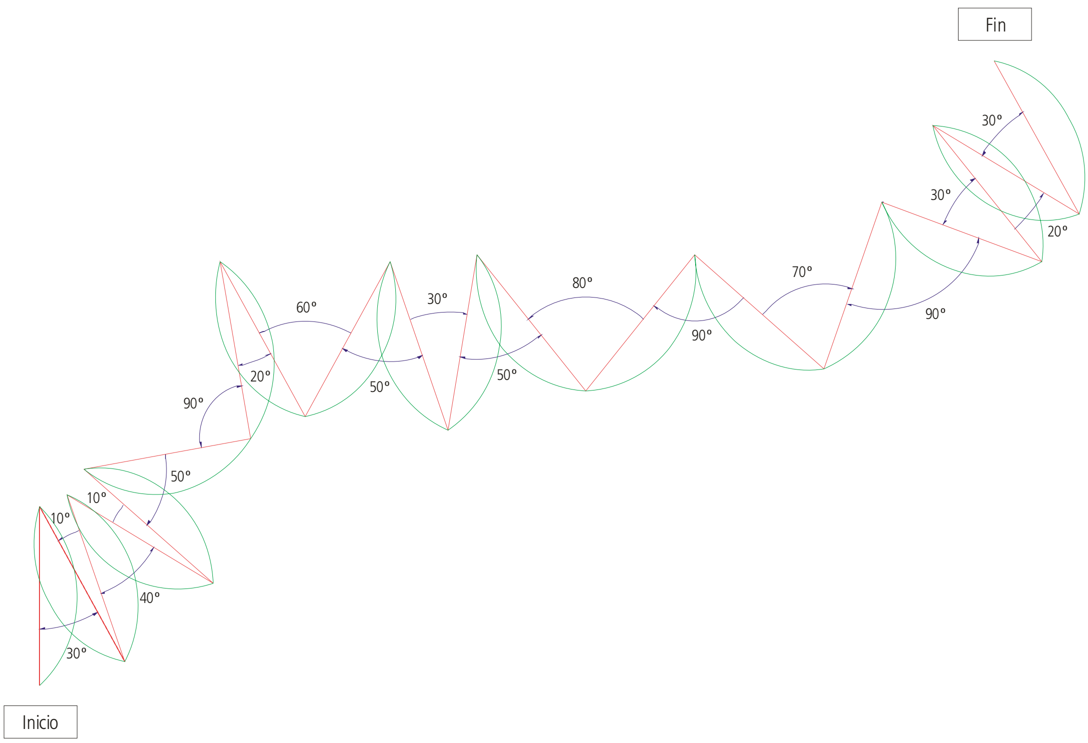
3,

1415926535 8979323

El equivalente en ángulos de los decimales del número pi se representan en la siguiente tabla:

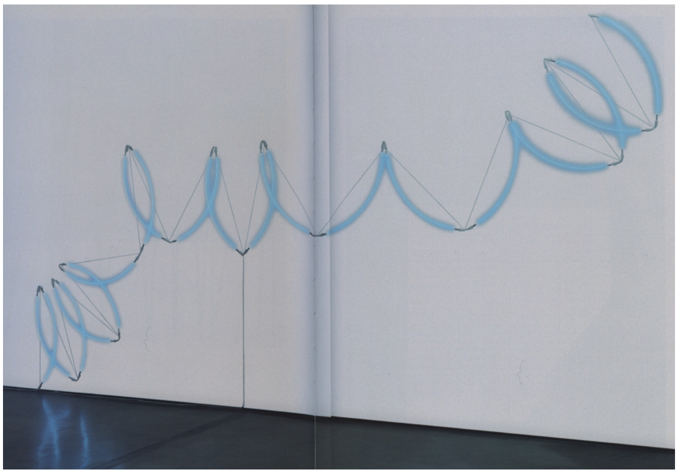
Nº	1	-	11	30º	10º	40º	10º	50º	90º	20º	60º	50º	30º	50º
Nº	12	-	21		80º	90º	70º	90º	30º	20º	30º			

La obra Pi rococó Nº 16, siguiendo la secuencia anterior, y comenzando en la esquina inferior izquierda del soporte, genera la siguiente secuencia de líneas rectas encadenadas y de arcos correspondientes a cada uno de los tramos de líneas rectas obtenidos:



[4] Pi rococo nº 16, 1=10º, 2000.

Se muestra a continuación el resultado de la instalación de la obra, realizada con tubos de neón azul:



5. Estudio, 1958

Partiendo de las 8 primeras cifras del número pi:

3,

1415926

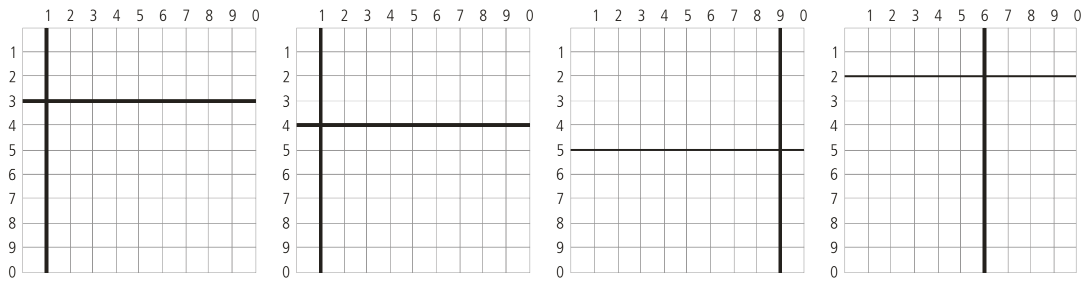
Se agrupan de dos en dos, para formar dos líneas rectas: una horizontal y otra vertical.

31 41 59 26

El punto de partida para realizar la obra es una estructura de 4 cuadrados, de modo que cada uno de ellos está formado por 10 x 10 = 100 casillas numeradas, en sus líneas de intersección, de arriba abajo y de izquierda a derecha.

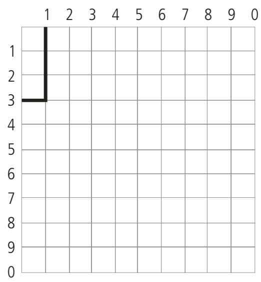
En cada cuadrado se representan dos líneas que están determinadas por el par correspondiente del número pi. Cada pareja de números representa a una línea horizontal (el primer componente del par) y otra vertical (el segundo componente del par).

31 41 59 26

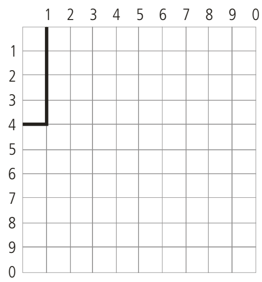


Otra manera de interpretar los datos, es teniendo en cuenta el trazado de las líneas sólo hasta su intersección:

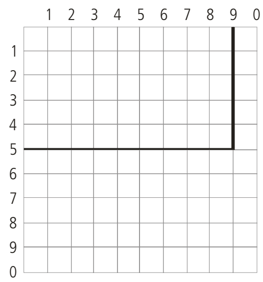
31



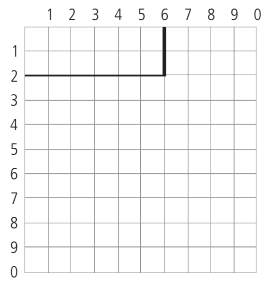
41



59

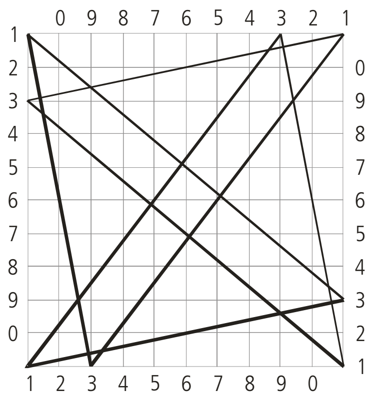


26

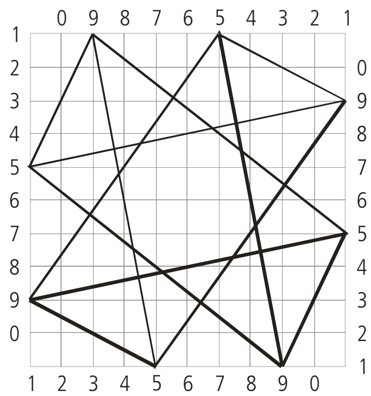


A partir de una estructura cuadrada de 10 x 10 = 100 casillas, numeradas según el siguiente criterio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, comenzando en el lado superior del cuadrado y ordenadas de derecha a izquierda y llevando la numeración a los otros lados del cuadrado siguiendo la misma orientación y en el sentido contrario a las agujas del reloj, se obtienen las siguientes obras según el siguiente sistema: cada cuadrado representa una pareja de cifras contiguas del número pi. Para obtener las líneas que forman el trazado de la obra, se unen todos los pares de puntos del cuadrado que contengan la combinación indicada: 31 o 59.

31

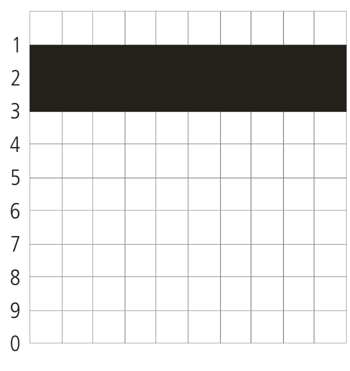


59

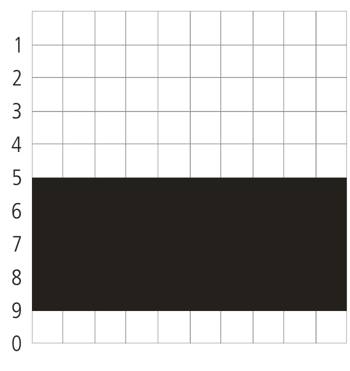


A partir de una estructura cuadrada de 10 x 10 = 100 casillas, numeradas verticalmente, de arriba abajo, según el siguiente criterio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, representar en cada cuadrado una pareja de cifras del número pi según el siguiente programa: el objetivo es crear superficies rectangulares limitadas horizontalmente, superior e inferiormente, por las líneas que representan en el cuadrado cada pareja de números de la serie pi: 31 o 59.

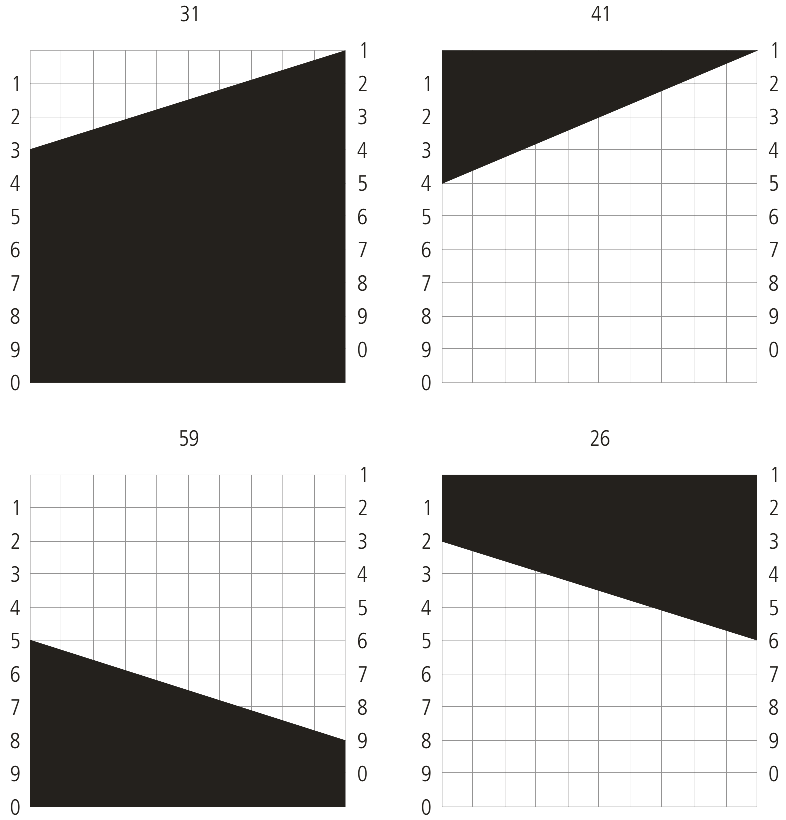
31



59



A partir de una estructura cuadrada de 10 x 10 = 100 casillas, numeradas verticalmente, de arriba abajo, según el siguiente criterio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, y teniendo en cuenta que la numeración de los lados izquierdo y derecho está desplazada una unidad, una con respecto a la otra, el sistema consiste en representar en cada cuadrado una pareja de cifras del número pi según el siguiente programa: el objetivo es crear superficies poligonales limitadas horizontalmente: por las líneas oblicuas que representan la unión de los números de la serie pi unidos en parejas y de forma que en el lado izquierdo del cuadrado se seleccione el número correspondiente a la primera cifra de la pareja del número pi y en el lado derecho, el número correspondiente a la segunda cifra del par elegido; y por una línea horizontal marcada por el extremo de la matriz. Esta línea horizontal de la matriz se elige alternamente, la superior o la inferior. En el par 31, la línea seleccionada es la inferior de la estructura del cuadrado; en el par 41, la superior; en el siguiente par, 59, vuelve a ser la inferior y en el siguiente, 26, la superior.



6. Estudio, 1958

Partiendo de las 16 primeras cifras del número pi:

3,

1415926535 89793

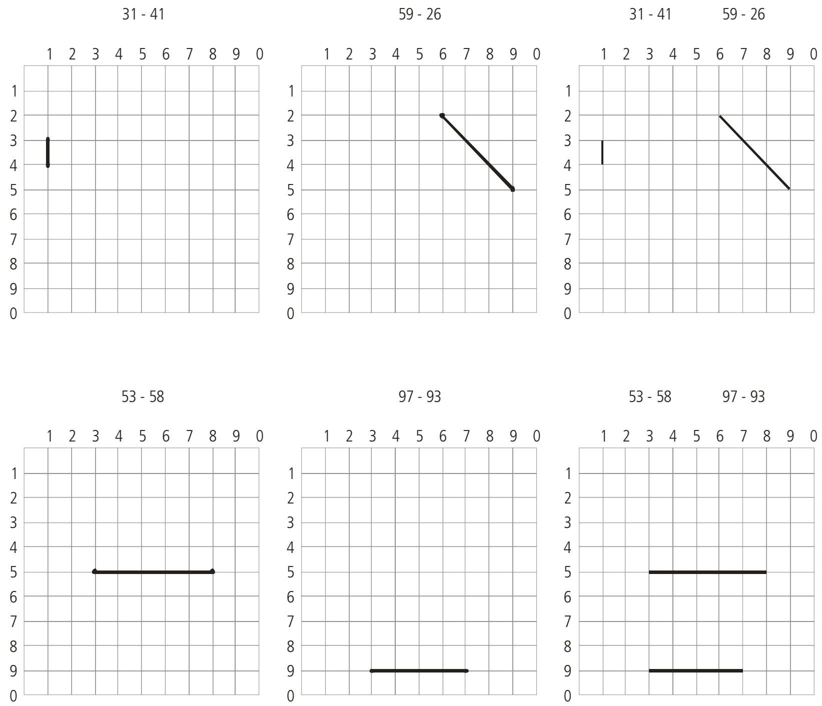
Se agrupan de dos en dos, para formar la posición del inicio y el final de una línea recta:

31 41 59 26

53 58 97 93

El punto de partida para realizar la obra es una estructura de 4 cuadrados, de modo que cada uno de ellos está formado por 10 x 10 = 100 casillas numeradas, en sus líneas de intersección, de arriba abajo y de izquierda a derecha.

En cada cuadrado se representa una línea que está determinada por dos puntos, de forma que, cada uno de ellos, se obtiene buscando la intersección de los puntos que corresponden a cada uno de los pares (31, 41, 59, 26, 53, 58, 97, 93) del número pi y teniendo en cuenta que el primer número de la pareja se representa en el eje vertical (3, 4, 5, 2, 5, 5, 9, 9) y el segundo (1, 1, 9, 6, 3, 8, 7, 3), en el eje horizontal. En el primer cuadrado, la línea obtenida es el resultado de unir el punto que localiza a la pareja 31, y el punto que localiza a la pareja 41.

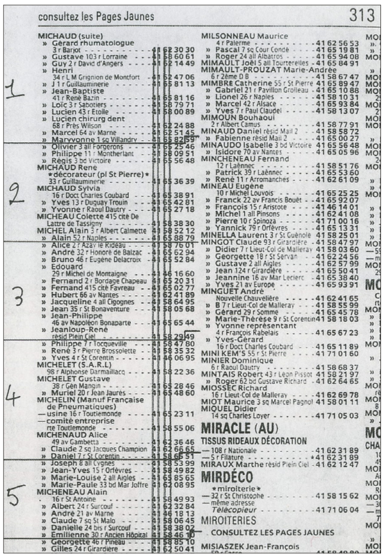


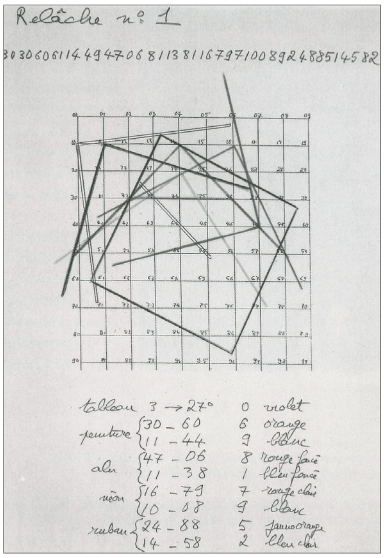
El principio constructivo de las siguientes obras de Morellet está basado en números de teléfono tomados de páginas de las guías de teléfonos de ciudades de Francia: Maine-et-Loire, Chalet,…

7. Descanso, Nº 1, 2, 3, 4, 5, 1992[5]

El punto de partida para realizar esta serie de obras es la página 313 de la guía de teléfonos de Maine-et-Loire, en la que está incluido el teléfono de Morellet.

[5] Relâche Nº 1, 2, 3, 4, 5, 1992.





Los números de teléfono de cada titular están formados por 8 números. Los 4 primeros números, por la izquierda, de cada número de teléfono se suprimen porque son prefijos repetitivos dentro de la página. Con el resto de los números: los 4 números por la derecha de cada abonado, se realiza una lista. Dividiendo la página de la guía de teléfonos de forma que para cada obra se obtengan 42 números, excepto en Descanso Nº 4 que tiene 43, se obtienen las siguientes series de números:

													Total nº
Descanso Nº 1		3030	6061	1449	4706	8113	8116	7971	0089	2488	5145	82	42
Descanso Nº 2	59	2546	0951	5648	3639	3891	4281	2718	3830	5212	8879		42
Descanso Nº 3		7601	6294	5284	1660	2031	0277	4189	6495	0568	6544	29	42
Descanso Nº 4	49	4780	3532	0695	2236	2846	4860	2311	5506	3646	6665	6	43
Descanso Nº 5	551	5399	4982	8565	0895	4993	3284	1813	0645	3802	461		42

Todas las obras de esta serie se realizan sobre una superficie cuadrada cuyos lados están divididos en 9 partes iguales. Esta división estructural del cuadrado proporciona 100 puntos de intersección que se utilizan como puntos de referencia para realizar una serie de trazados de líneas rectas. Estos puntos de intersección se numeran desde el vértice superior izquierdo al vértice inferior derecho siguiendo un recorrido de arriba abajo y de izquierda a derecha, siguiendo la serie de los números enteros del 00 al 99.

El objetivo de esta serie de obras es trazar un número determinado de líneas rectas definido por la selección de parejas de números, de las series obtenidas anteriormente. Para representar una línea se necesitan dos números y cada número está representado por dos cifras de la serie obtenida anteriormente. De este modo, en cada serie se pueden representar 10 líneas.

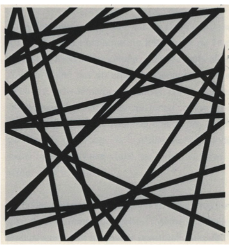
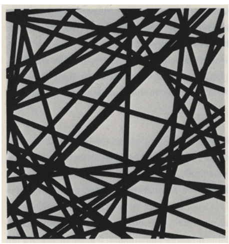
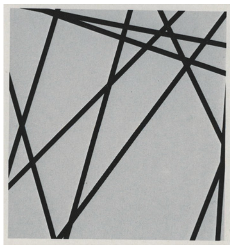
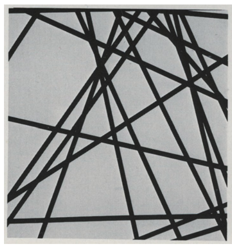
Para realizar la obra, se toman los números de cada una de las series de cuatro en cuatro, de forma que las dos primeras cifras representan la posición de un extremo de la línea a trazar y las dos segundas, la posición del otro extremo.

ORDEN

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

8. Líneas aleatorias (5, 10, 20, 50,…), 1971[6]

En 1971, Morellet crea una serie de obras en las que el objetivo era trazar un número determinado de líneas aleatorias: 5, 10, 20, 50,…, sobre un cuadrado y teniendo en cuenta diferentes sistemas de trazados. Todas las obras de la serie comienzan con una superficie cuadrada cuyos lados están divididos en 25 unidades, de forma que comenzando en el vértice superior izquierdo y continuando a lo largo de los cuatro lados del cuadrado, contando en el sentido contrario a las agujas del reloj, resulta una escala de 100 posiciones que se numeran del 00 al 99.

Un sistema de trazado de líneas responde al siguiente sistema: a partir de una página arbitraria de la guía de teléfonos de Chalet, 1970, se toman los 6 últimos números de cinco abonados:

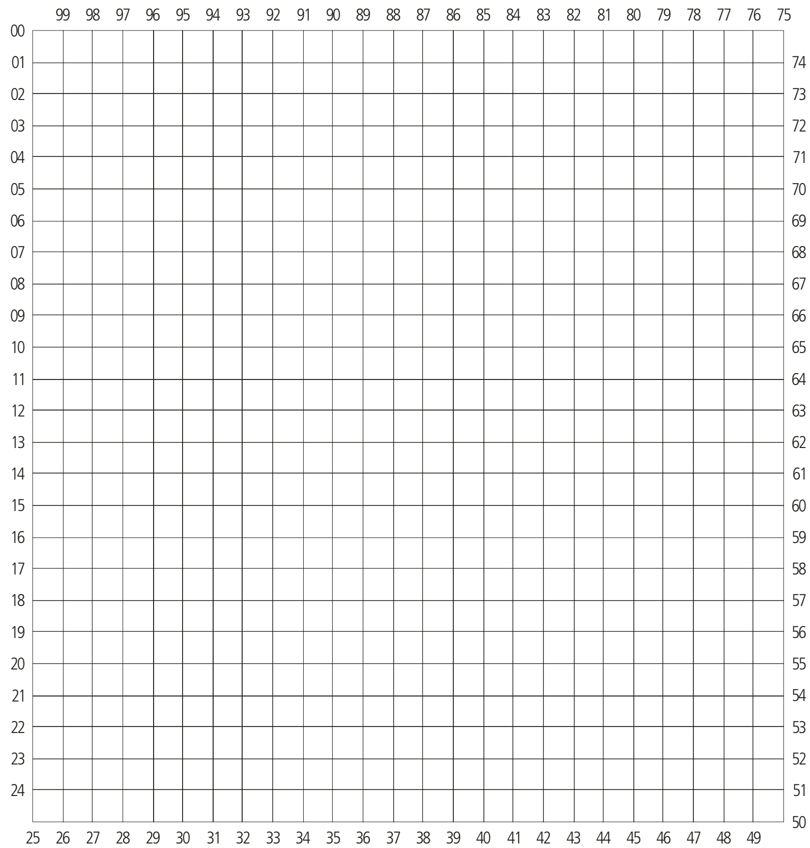
1º	622410
2º	620952
3º	620426
4º	622133
5º	620314

[6] Random lines (10, 20,…), 1971.

Para realizar la obra, se forman parejas con las dos últimas cifras de cada número de teléfono. Se toman las dos últimas cifras del primer número, 10 y las dos últimas cifras del segundo número, 52.

1º	62	24	10
2º	62	09	52
3º	62	04	26
4º	62	21	33
5º	62	03	14

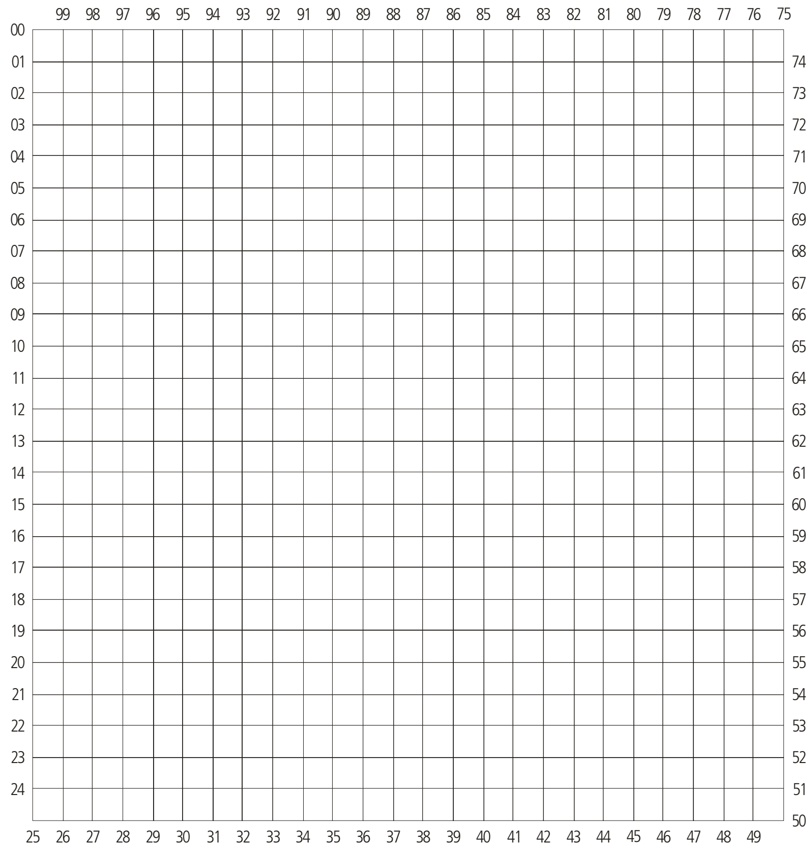
Se unen, sobre una hoja, los puntos de referencia 10 y 52 con cinta adhesiva negra y teniendo cuidado de que la línea sea recta.



Se continúa del mismo modo con los números siguientes: 26, 33. Si dos puntos de referencia se encuentran sobre el mismo lado del cuadrado: 26 y 33, se sustituye el 2º número, 33, por el 3º, 14.

62	04	26
~~62~~	~~04~~	~~33~~
62	03	14

El número de líneas a trazar en cada obra estará definido por la cantidad de números de teléfono que se hayan seleccionado previamente:



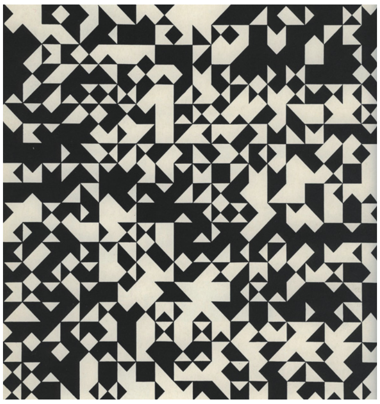
Otro sistema de trabajo que utiliza la misma estructura cuadrada para generar sus trazados está definido por el siguiente método de trabajo: a partir de una página arbitraria de una guía de teléfonos, Morellet selecciona las segundas y terceras parejas de números de los seis últimos números del teléfono de un abonado.

Nº teléfono	6	2	0	1	3	7

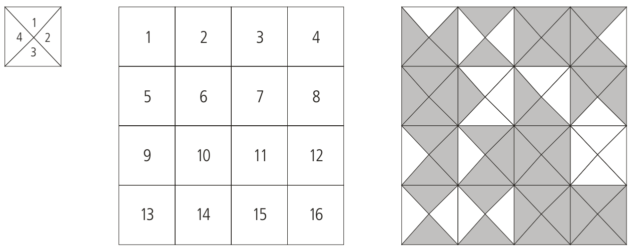
La primera pareja de los números de teléfono de la página consultada se descarta porque es idéntica en todos los números de la página y por lo tanto poco significativa. Estos números se aplican a las coordenadas del cuadrado antes descrito y marcan las posiciones de inicio y fin de una línea recta, conectada por el camino más corto. En el caso del ejemplo dado, 01, 37, la línea debería ir desde la parte superior del lado vertical izquierdo del cuadrado (01) hasta la mitad, del lado inferior del cuadrado. Morellet selecciona conjuntos de 20 números de la guía de teléfonos de modo que, con este procedimiento realiza 10 líneas que se cortan.

9. Repartición aleatoria de triángulos según las cifras pares e impares de una guía de teléfonos, 1958[7]

F. Morellet en su obra *Repartición aleatoria de triángulos siguiendo las cifras pares e impares de una guía de teléfonos*, ha utilizado también los números de una guía de teléfonos para marcar los triángulos de una matriz cuadrada de 400 cuadrados (20 x 20). Cada cuadrado está dividido en 4 triángulos rectángulos isósceles por sus dos diagonales principales. Hay un total de 1600 triángulos que se colorean en negro o blanco según la naturaleza par o impar de los números de teléfono elegidos de la guía. Los números pares (0, 2, 4, 6, 8) se representan con un triángulo negro y los números impares (1,3, 5, 7, 9) con un triángulo blanco.



Un extracto de esta obra está representada por una matriz de 4 x 4 = 16 cuadrados divididos, cada uno de ellos, en 4 triángulos al aplicar a cada cuadrado sus dos diagonales principales. Aunque en la documentación sobre la obra de Morellet no se especifican los números de la guía de teléfonos utilizados ni el orden de aplicación de los números dentro de cada uno de los triángulos, una solución podría obtenerse: agrupando los números seleccionados de 4 en 4, de forma que cada grupo de cuatro números se aplicase a un cuadrado de la matriz y numerando cada uno de los triángulos de los cuadrados según el siguiente orden:



Se podría recorrer la matriz de arriba abajo y de izquierda a derecha completando los 64 (16 x 4) triángulos de la obra.

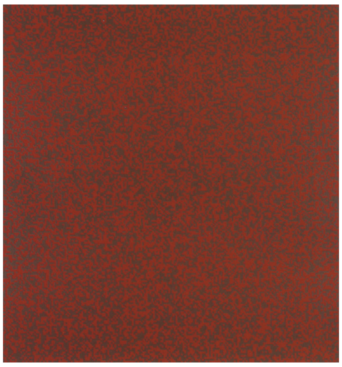
[7] Répartition aléatoire de triangles suivant les chiffres pairs et impairs d'un annuaire de telephone, 1958.

10. Distribución de 40000 cuadrados, 50% rojo, 50% marrón (distribución aleatoria), 1961[8]

Esta obra pertenece a una serie de obras con el mismo sistema generativo pero con distintas propiedades físicas:

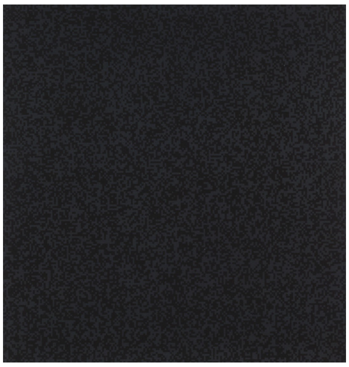
Distribución aleatoria	40 000 cuadrados	A	50% rojo	50% marrón
		B	50% blanco	50% gris claro
		C	50% gris oscuro	50% negro
		D	50% magenta	50% azul
		E	50% azul medio	50% negro
		F	50% rojo	50% verde

Esta serie de obras está basada el mismo principio constructivo: dada una matriz cuadrada de 200 x 200 = 40000 cuadrados, colorear cada uno de los cuadrados de la obra siguiendo las cifras pares e impares de los números de teléfonos de los abonados que aparecen en una guía de teléfonos. Los números pares se han representado en rojo y los impares en azul. Para realizar la obra, hay que determinar el sentido de lectura de la matriz.

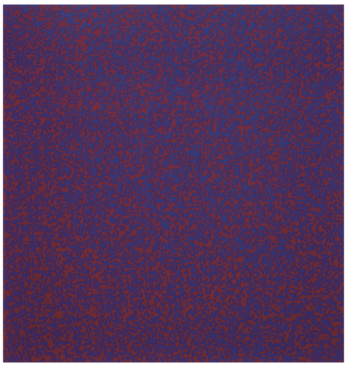


A

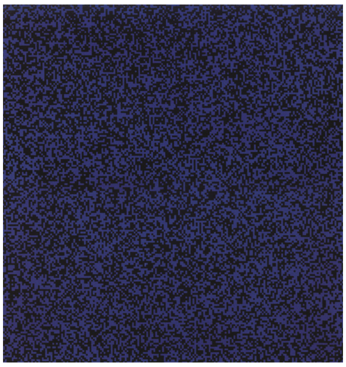
B



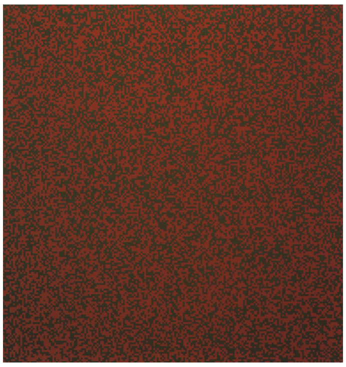
C



D



E



F

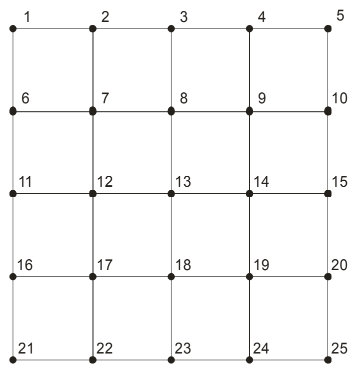
[8] Distribution of 40000 squares, 50% red, 50% brown (Random distribution), 1961.

3.8.2- KENNETH MARTIN

1. Aleatoriedad y orden, 1969 / 1972[9]

La serie *Aleatoriedad y orden* son un conjunto de obras de Kenneth Martin realizadas entre los años 1969 - 1972 con el objeto de demostrar las posibilidades que puede tener trabajar con lo aleatorio dentro de una estructura ordenada.

Comienzan con una estructura regular cuadrada de 4 x 4 = 16 cuadrados. Los 16 cuadrados proporcionan 25 puntos de intersección. Estos puntos de intersección se utilizan para articular los dibujos. Se enumeran del 1 al 25 empezando por la esquina superior izquierda y avanzando en cada fila de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Para realizar la obra se hace referencia a estos números.



Para generar el proceso aleatorio se escriben los números del 1 al 25 en cartas, se eligen al azar de uno en uno y se crea una secuencia de números. Para relacionar la secuencia aleatoria obtenida con la estructura dada se pueden emplear varios métodos. Un método consiste en dibujar una línea continua a lo largo de la estructura siguiendo la posición que ocupan en la estructura geométrica los números aleatorios obtenidos y en el orden en que se han generado. En otro método, se agrupan los números de dos en dos, de forma que cada par de números representa una línea en la que el primer número indica su punto de partida y el segundo número, su punto de llegada, dando como resultado 12 líneas en el cuadrado. Además, se puede utilizar, también, según otro método más, la secuencia de números para reconfigurar la red en sí misma, dando una nueva nominación a cada uno de sus puntos de intersección.

Se puede observar que en todos estos casos, lo aleatorio se produce en la elección de una serie de números y no en el dibujo en sí mismo. Con este proceso de trabajo, la obra se convierte en un campo de posibilidades conceptual y metodológico que da como resultado una obra cuya apariencia estética es el resultado de la aplicación de unas reglas. Ligeras modificaciones de las reglas generarán nuevas formas aún utilizando la misma secuencia de números.

Las secuencias de números se pueden utilizar también para repetir líneas en el dibujo o para hacerlas más anchas, según el orden en el que han sido listadas. Una línea, la primera pareja de números; dos líneas, la segunda; tres, la tercera;...

[9] Chance and Order, 1969 / 1972.

La obra es el resultado de diferentes etapas de trabajo: crear la matriz o estructura sobre el soporte, definir el uso que se va a hacer de esta estructura con la definición de sus elementos de intersección, establecer el modo en el que se va a intervenir sobre la matriz y finalmente, realizar los dibujos u obras.

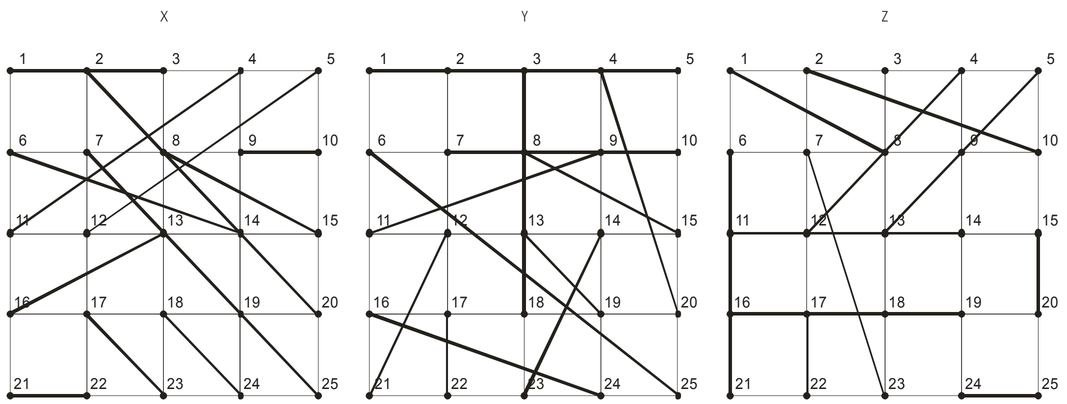
Las obras de la serie están clasificadas según grupos: grupo I, grupo II,… En el análisis de cada obra de la serie se incluye la estructura que se ha utilizado para generarla, con sus puntos de intersección regulares marcados con un número determinado, y el método que se ha utilizado para realizar los trazos sobre la estructura creada.

GRUPO I

Para la primera obra que se va a analizar, Dibujo 1,[10] se obtienen tres secuencias aleatorias de 25 números cada una y se nombra cada una de ellas con las tres últimas letras del alfabeto: X, Y, Z.

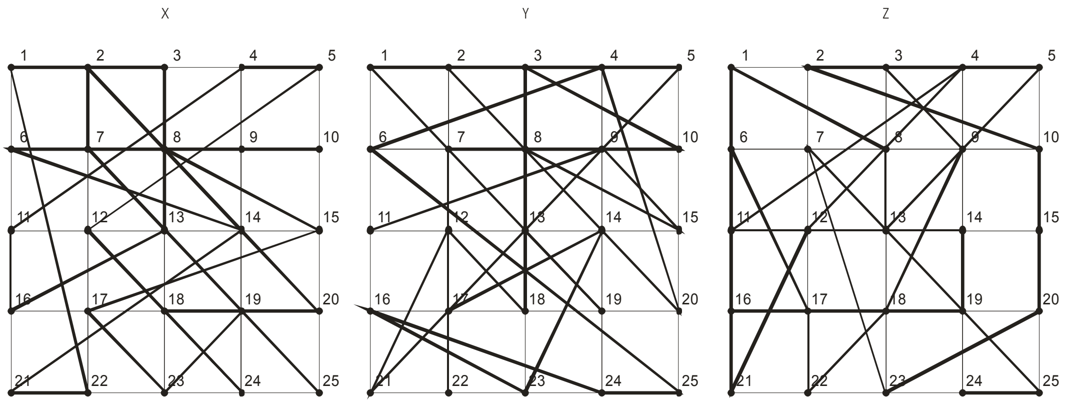
X	25	7	2	20	18	24	12	5	4	11	16	13	3	1	22	21	14	6	10	9	8	15	17	23	19
Y	11	9	15	8	13	19	1	5	21	12	18	3	10	7	22	17	14	23	16	24	25	6	4	20	2
Z	24	25	7	23	20	15	10	2	5	13	8	1	16	19	14	11	4	12	21	6	17	22	18	9	3

De estas tres series, en el dibujo X sólo se emplea la información de la serie numérica dada en la fila X. Se emparejan los números, el primero con el segundo, el tercero con el cuarto, y así sucesivamente, y se dibujan líneas entre las parejas de números. Como hay 25 puntos de intersección en el cuadrado y sólo se pueden utilizar 24 en el dibujo (doce parejas), el último número de la secuencia no se utiliza.

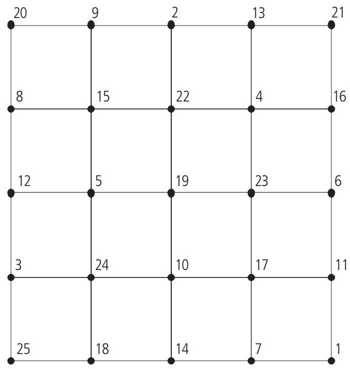


Los dibujos Y y Z se realizan de la misma forma que el anterior.
En la siguiente serie de dibujos X, Y y Z, Dibujo 2,[11] se realiza una línea continua con toda la secuencia de números desde el primer al último número de la serie.

[10] Drawing 1.
[11] Drawing 2.



En la siguiente serie, Dibujo 3,[12] los puntos de intersección de la estructura cuadrada se nombran de arriba a abajo y de izquierda a derecha empezando por la esquina superior izquierda, con una secuencia de números aleatoria cuyo resultado es el descrito en la imagen:



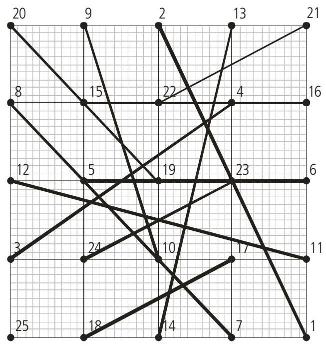
En los dibujos siguientes, A y B, de este grupo, se representa la serie de los números naturales del 1 al 25 (1,2,3…, 25). Para crear la obra, se agrupan los números de la serie de dos en dos. Cada par de números define una línea en la retícula.

En el dibujo A, se hace una lectura en orden creciente de la serie, del 1 al 25, de forma que las líneas se realizan formando los pares 1-2, 3-4, 5-6,... En el dibujo B, se hace una lectura en orden decreciente de la serie, del 25 al 1, de forma que las líneas se obtienen uniendo los pares 25 - 24, 23 - 22, 21 - 20,...

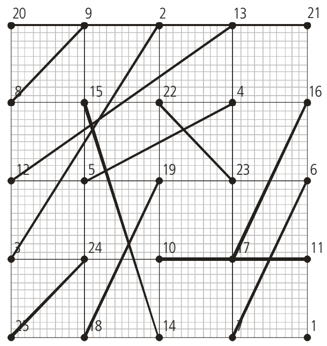
Las líneas en esta serie tienen una anchura y se dibujan por capas según el orden de realización del dibujo y de forma que la línea que se dibuja en primer lugar se sitúa en la primera capa, y la línea que se dibuja la última se sitúa en la última capa; y que las líneas de capas posteriores están parcialmente ocultas por las línea de capas precedentes: cuando las líneas se cruzan entre sí, quedan visibles las de las capas anteriores.

[12] Drawing 3.

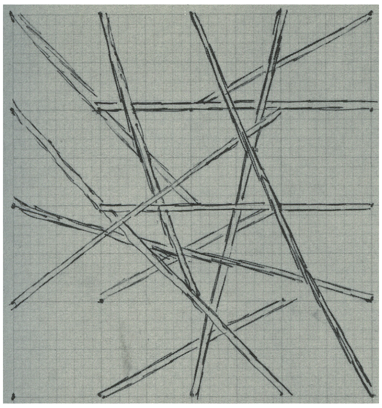
A



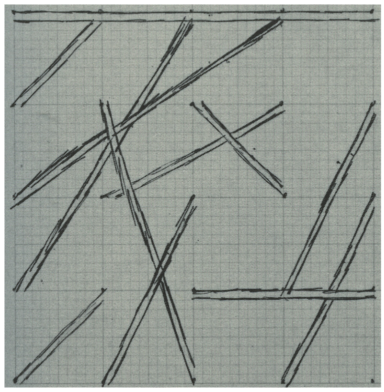
B



Los resultados de la obra se visualizan en estos bocetos realizados por Kenneth Martin:



A



B

GRUPO II

En la siguiente obra, Dibujo 2,[13] la retícula base que se utiliza está formada por un cuadrado de 6 x 6 = 36 cuadrados, con un cuadrado interno de 4 x 4 numerado del 1 al 25, empezando en la esquina superior izquierda y desplazándose por la retícula de arriba abajo y de izquierda a derecha. En esta matriz de 4 x 4 es donde se realiza la obra. Los pares de números aleatorios para realizar las líneas se forman con la secuencia descrita en la siguiente columna:

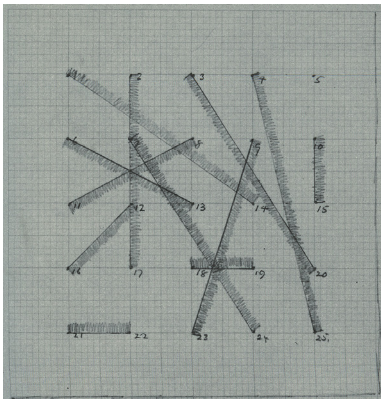
3	20
11	8
6	13
25	4
2	17
23	9
16	12
15	10

[13] Drawing 2.

19	18
22	21
24	7
14	1

Las líneas se realizan formando parejas con los números aleatorios obtenidos de forma que un número de la pareja es el punto de inicio de la línea y el otro, el punto final.

La novedad de esta composición con respecto a las anteriores está en que la línea tiene un grosor que puede aplicarse al lado izquierdo o derecho de la línea que une los puntos de la matriz correspondientes. En esta obra el grosor de la línea se realiza posicionándose en el primer número de cada par mirando hacia el segundo y, en este caso, realizando la anchura a la derecha de la línea previa.

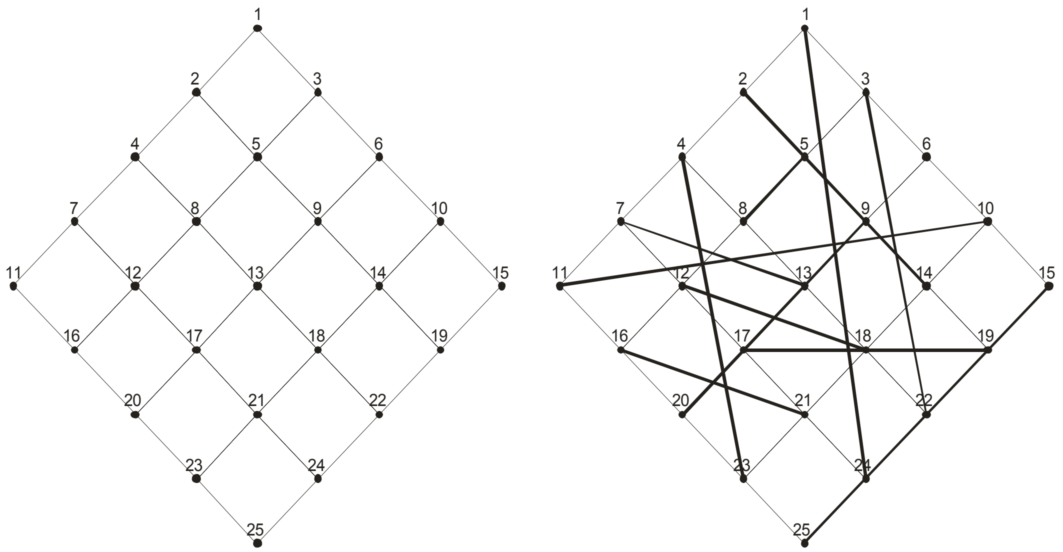


En la siguiente obra, Dibujo 8,[14] la retícula base cuadrada de 4 x 4 = 16 casillas, se coloca en diagonal y se enumera empezando en el vértice superior del cuadrado con el número 1 y después de izquierda a derecha y de arriba a abajo hasta el vértice inferior del cuadrado.

Para realizar las líneas se utiliza la siguiente secuencia de números aleatorios:

20	9
16	21
12	18
8	5
19	17
23	4
11	10
22	3
13	7
24	1
25	15
2	14

[14] Drawing 8.



Las líneas, como en el caso anterior, se realizan formando parejas con los números aleatorios obtenidos de forma que un número de la pareja es el punto de inicio de la línea y el otro, el punto final.

GRUPO IV

Los cuatro dibujos siguientes: Dibujo 1, Dibujo 2, Dibujo 4a y Dibujo 4b,[15] se han realizado con la misma secuencia de números aleatorios. En la tabla de números, de la siguiente página, hay información sobre los procesos que se deben aplicar a los cuatro dibujos.

En la columna de la izquierda se muestra el conjunto de números aleatorios que se ha utilizado para realizar la serie. En la columna del Dibujo 1, se indica el proceso seguido en su elaboración: el orden de ejecución de las líneas, de abajo a arriba, empezando por la última pareja y terminando en la primera, y la posición en la que se va a realizar el grosor de las líneas: a la izquierda (posicionándose en el primer número del par y mirando hacia el segundo en dirección a la izquierda).

En la columna del Dibujo 2, además de los datos de orden de ejecución (en este caso, de arriba abajo, comenzando por la primera pareja obtenida y terminando en la última) y la posición en la que se va a realizar el grosor de la línea, se añade una nueva columna en la que se facilita nueva información para la elaboración de la obra: el número de líneas a trazar por cada par de números generado. Este dato coincide con el orden de ejecución de las líneas. Cada par de números aleatorio genera un número determinado de líneas paralelas a la izquierda de la primera trazada. El primer par, genera sólo una línea; el segundo, dos líneas; el tercero, tres; y así sucesivamente, hasta el último par que genera doce líneas. Cada conjunto de líneas se dibuja por detrás del grupo anterior. El intervalo entre las líneas paralelas es una 1/6 parte del lado del módulo básico de la estructura (un cuadrado de la matriz).

En el Dibujo 4a, los datos facilitados coinciden en su proceso con las de los generados en la columna del Dibujo 2, excepto en que el orden de trazado de las líneas es inverso al caso anterior, de abajo a arriba, y el número de líneas que se ejecuta por cada par de números es un proceso aleatorio generado por dados. El número de líneas paralelas

[15] Drawing 1, Drawing 2, Drawing 4a y Drawing 4b.

se ha obtenido a través de un proceso aleatorio lanzando un dado de seis valores cada vez, de manera que en cada trazado pueda haber de 1 a 6 líneas.

Serie Aleatoria	
16	20
4	23
1	10
13	24
25	14
22	12
15	6
11	19
3	5
18	9
2	21
17	7

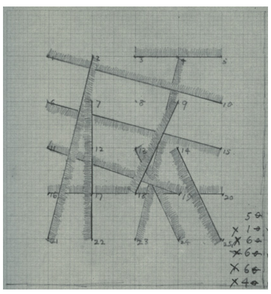
Dibujo 1	
Orden de ejecución	Grosor línea
12	Izq
11	Izq
10	Izq
9	Izq
8	Izq
7	Izq
6	Izq
5	Izq
4	Izq
3	Izq
2	Izq
1	Izq

Dibujo2		
Orden de ejecución	Grosor línea	Nº líneas
1	Izq	1
2	Izq	2
3	Izq	3
4	Izq	4
5	Izq	5
6	Izq	6
7	Izq	7
8	Izq	8
9	Izq	9
10	Izq	10
11	Izq	11
12	Izq	12

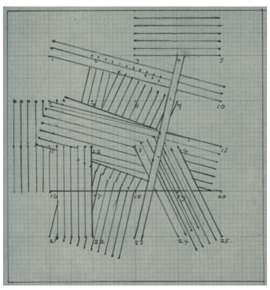
Dibujo 4a		
		Aleatorio (dado)
Orden de ejecución	Grosor línea	Nº líneas
12	Izq	5
11	Izq	1
10	Izq	6
9	Izq	6
8	Izq	6
7	Izq	4
6	Izq	5
5	Izq	1
4	Izq	3
3	Izq	6
2	Izq	3
1	Izq	3

Dibujo 4b		
		Aleatorio (dado)
Orden de ejecución	Grosor línea	Nº líneas
1	Dcha	5
2	Dcha	1
3	Dcha	6
4	Dcha	6
5	Dcha	6
6	Dcha	4
7	Dcha	5
8	Dcha	1
9	Dcha	3
10	Dcha	6
11	Dcha	3
12	Dcha	3

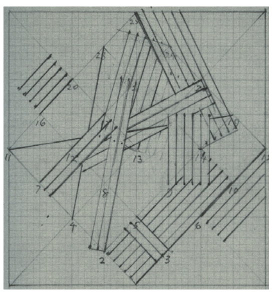
En la última obra, Dibujo 4b, el orden de ejecución de los pares vuelve a generarse de arriba abajo, pero el grosor de la línea se realiza en este caso a la derecha de la línea trazada (posicionándose en el primer número del par y mirando hacia el segundo en dirección a la derecha). La cantidad de líneas a realizar por cada trazado, sobre el dibujo, se vuelve a generar por un proceso aleatorio de dados, pudiendo, otra vez, variar la cantidad de 1 a 6.



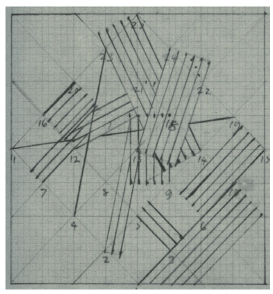
Dibujo 1



Dibujo 2

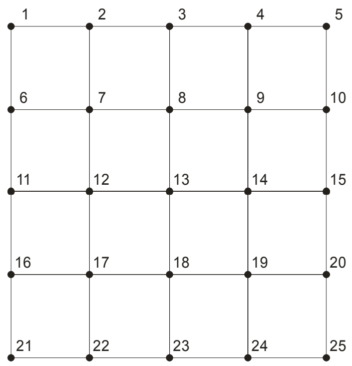


Dibujo 4a

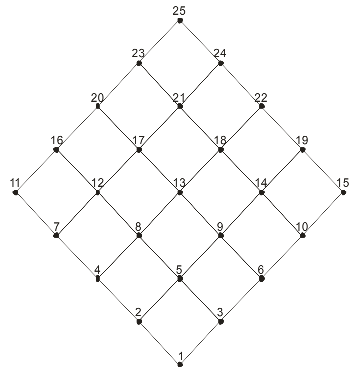


Dibujo 4b

En las obras Dibujo 1 y Dibujo 2, se utiliza una estructura cuadrada de 4 x 4 casillas, en la que sus puntos de intersección se nombran de arriba a abajo y de izquierda a derecha empezando por la esquina superior izquierda. En las obras Dibujo 4a y Dibujo 4b, la estructura cuadrada base se coloca en diagonal, empezando a numerar los puntos de intersección de la retícula en el vértice inferior de la estructura y recorriéndola de abajo a arriba y de izquierda a derecha:



Dibujo 1 y Dibujo 2



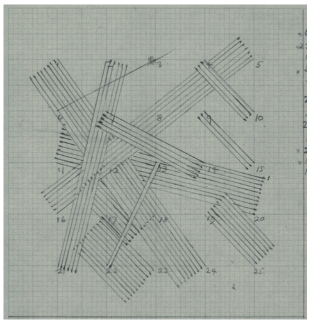
Dibujo 4a y Dibujo 4b

GRUPO V

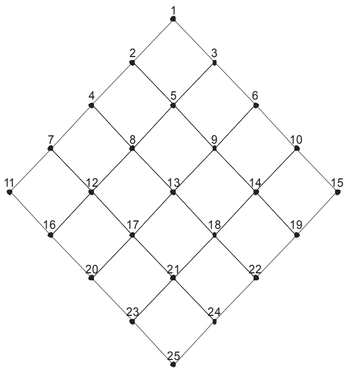
La siguiente obra, Dibujo 1,[16] tiene como restricción no utilizar líneas verticales ni horizontales. Para su realización se eligen números aleatorios en parejas para formar líneas con los pares obtenidos pero en este caso cada vez que la elección del segundo número de la pareja produce una línea recta vertical u horizontal, se descarta ese número y se vuelve a obtener otro del mismo modo aleatorio. En el proceso se dibujan tantas líneas paralelas a la obtenida en el par como número de posición de trazado tenga ese par dentro de la secuencia obtenida: con el primer par, se traza sólo una línea; con el segundo, dos; con el tercero, tres,..., y así sucesivamente. La posición en la que se dibujan las líneas paralelas es en el lado derecho de la recta primera tomando la orientación del primer número del par al segundo. El intervalo entre las líneas paralelas es de 1/12 parte del lado de uno de los 16 cuadrados (4 x 4) de la rejilla base.

		Nº líneas
6	3	1
22	13	2
9	15	3
4	10	4
7	14	5
21	2	6
5	16	7
25	19	8
1	24	9
20	11	10
12	18	11
17	23	12

[16] Drawing 1.



En el siguiente proyecto, Dibujo 5,[17] realizado para el cuadro Aleatoriedad y orden 8 (cinco colores), 1971,[18] el cuadrado base del dibujo se coloca en diagonal y se numeran los puntos de intersección de las líneas que constituyen la retícula cuadrada desde el vértice superior al inferior haciendo la lectura por filas de izquierda a derecha. El vértice superior comienza con el 1.



Los pares a dibujar vienen dados por la relación aleatoria siguiente:

		Nº líneas
1	18	1
4	14	2
9	24	3
20	25	3
16	3	4
7	2	4
17	4	4
10	21	5
15	8	5
12	19	5
11	22	5
13	6	5
	Total	46

[17] Drawing 5.
[18] Chance and order 8 (five colours), 1971.

El número de líneas para cada par es, por orden, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5. El total de líneas a dibujar es de 46. Todas estas líneas paralelas se realizan a la derecha de la primera línea del par.

En la generación de la obra se crea una secuencia de color inventada de 5 colores que se denominan A, B, C, D, E. La primera línea se colorea con el tono A, las siguientes 2 líneas con el color B, las siguientes 6 con el color C, las siguientes 12 con el color D, y las últimas 25 con el color E.

La regla de juego que se establece entre las líneas y los colores es la siguiente:

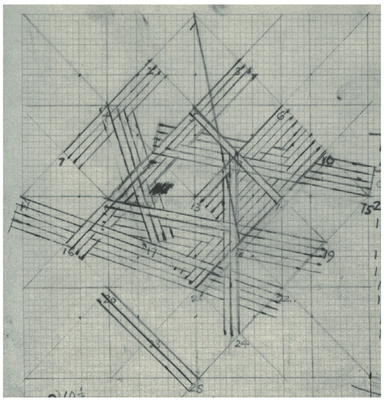
1. Sólo se pintan de color las líneas y no los espacios entre ellas.

2. La primera línea de la secuencia se colorea con el tono A, las dos siguientes líneas con el color B, las seis siguientes con el color C, las doce siguientes con el color D y las veinticinco últimas con color E.

Color	Nº líneas de color
A	1
B	2
C	6
D	12
E	25
Total	46

Este orden cromático se une con el orden y el número de las líneas a trazar, de forma que el número total de colores coincida con el de líneas:

Serie		Nº líneas	Colores				
1	18	■	A				
4	14	■■	B	D			
9	24	■■■	B	D	E		
20	25	■■■	C	D	E		
16	3	■■■■	C	D	E	E	
7	2	■■■■	C	D	E	E	
17	4	■■■■	C	D	E	E	
10	21	■■■■■	C	D	E	E	E
15	8	■■■■■	C	D	E	E	E
12	19	■■■■■	D	D	E	E	E
11	22	■■■■■	D	E	E	E	E
13	6	■■■■■	D	E	E	E	E



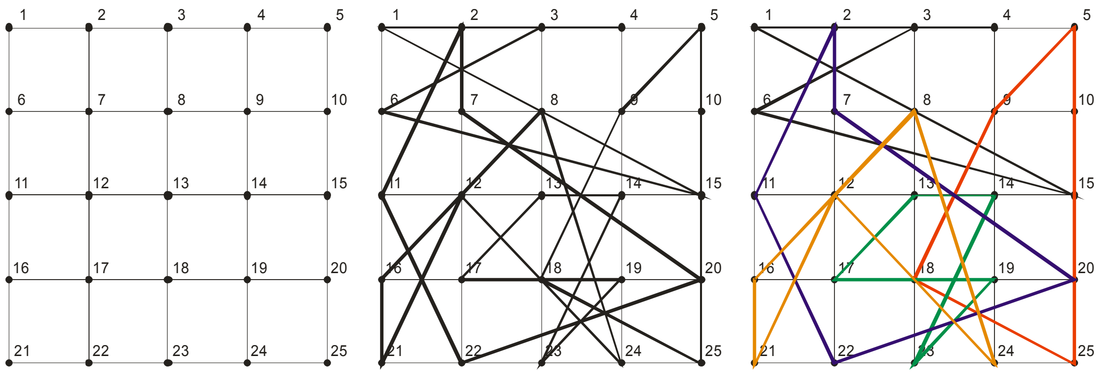
GRUPO VIII

En el siguiente proyecto, Dibujo 1,[19] se realiza sobre una matriz de 4 x 4 =16 cuadrados, numerada en sus vértices de arriba abajo y de izquierda a derecha (1 – 25). Se eligen una secuencia aleatoria de 25 números formando cinco grupos de cinco números cada uno, colocados en forma de filas. Uniendo los números de cada fila se obtiene un polígono cerrado. Por ejemplo los cinco primeros números de la fila: 3, 4, 1, 15, 6, se unen de la siguiente forma; 3-4, 4-1, 1-15, 15-6, 6-3. Cada fila sigue el mismo criterio.

La secuencia de números obtenida es:

	3	4	1	15	6
	5	10	25	18	9
	17	19	23	14	13
	22	11	2	7	20
	12	24	8	16	21

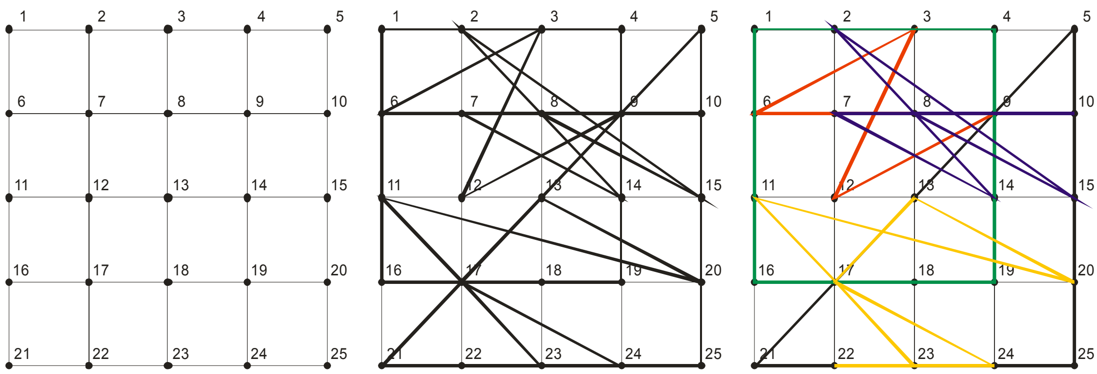
El resultado de dibujar todos los polígonos obtenidos, sobre la retícula, se representa en el cuadro central de la ilustración. En colores se muestra el resultado de cada polígono y la secuencia utilizada.



[19] Drawing 1.

Si en lugar de hacer cinco filas de cinco números cada una, se hacen cinco filas con cantidades de números diferentes: la primera, con tres números; la segunda, con cuatro; la tercera, con cinco; la cuarta, con seis; y la quinta, con siete; el resultado del proceso genera una nueva obra, Dibujo 3:[20]

	21	5	25				
	9	6	3	12			
	16	18	19	4	1		
	8	15	2	14	7	10	
	20	11	23	22	24	17	13

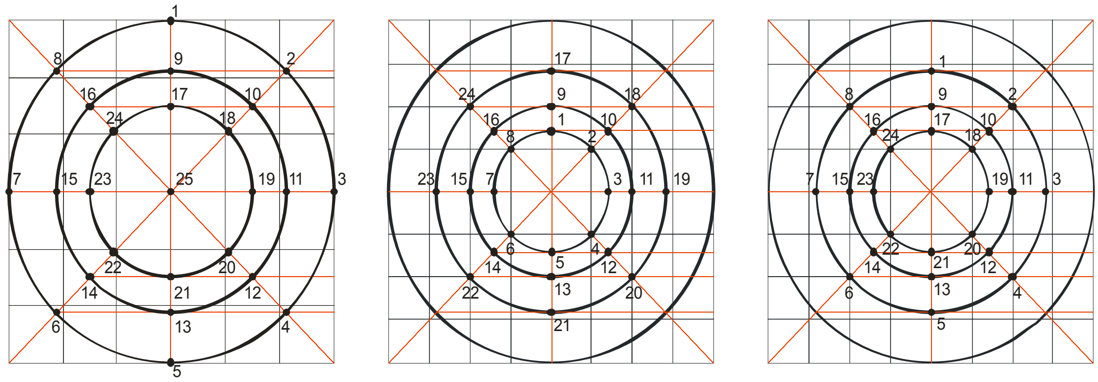


GRUPO VI

En las siguientes obras, Dibujo 2a, Dibujo 2b, Dibujo 3, Dibujo 7, Dibujo 9a y Dibujo 9b,[21] cambia la retícula básica de los proyectos. Se utiliza una trama de 6 x 6 o de 4 x 4 cuadrados. Se introduce la estructura portadora básica del cuadrado: diagonales y medianas y se introducen círculos concéntricos utilizando el siguiente criterio: el primer círculo está centrado en el cuadrado y su diámetro es del tamaño necesario para que el círculo toque los lados exteriores del cuadrado. Cada círculo concéntrico sucesivo se obtiene trazando una paralela horizontal a la mediana del cuadrado por el punto de intersección entre el círculo anterior con la diagonal del cuadrado. Se dibujan tres o cuatro círculos concéntricos siguiendo el mismo criterio de trazado. La numeración de los puntos de intersección de la retícula básica varía. Puede realizarse empezando en la parte superior del círculo y contando, en el sentido de las agujas del reloj, hacia el centro del círculo, nombrando el centro del círculo con el último número de la serie 25 o acabando la serie en 24 y dejando el centro sin numerar. Se puede realizar también la numeración inversa. Se empieza a contar en el cuadrante superior del círculo interior y se numeran todos los puntos de intersección del círculo con las líneas que representan la estructura portadora del cuadrado, en el sentido de las agujas del reloj y realizando movimientos hacia los círculos exteriores.

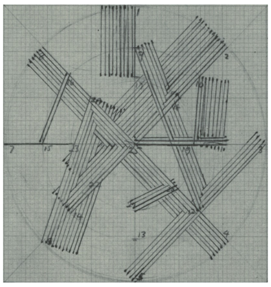
[20] Drawing 3.

[21] Drawing 2a, Drawing 2b, Drawing 3, Drawing 7, Drawing 9a y Drawing 9b.

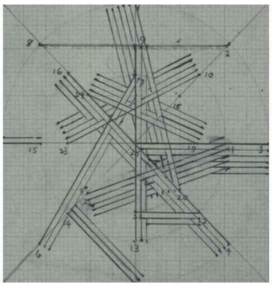


El número de líneas que se introducen por cada par de números generado se puede decidir teniendo en cuenta el orden que ocupa el par dentro de la secuencia de números generada: el primer par,1 línea; el segundo, 2; el tercero, 3;…; el último par,12. O también, se puede determinar de una forma aleatoria: por sorteo de un dado con 6 valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Las líneas obtenidas así, pueden situarse a derecha o izquierda de la primera línea trazada en el par.

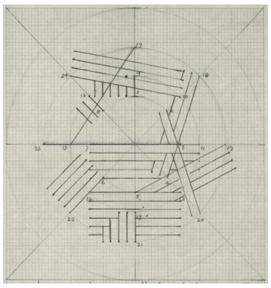
Otra forma de obtener los pares de números para trazar las líneas del dibujo es emparejando aleatoriamente números pares con pares e impares con impares.



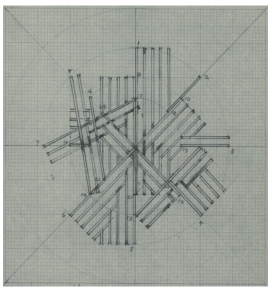
Dibujo 2a



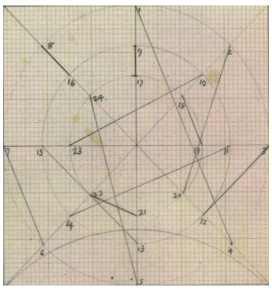
Dibujo 2b



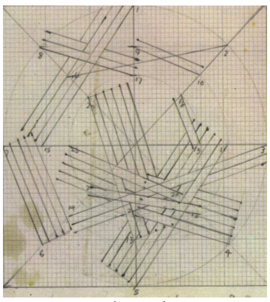
Dibujo 3



Dibujo 7



Dibujo 9a



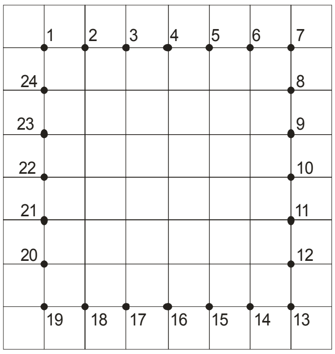
Dibujo 9b

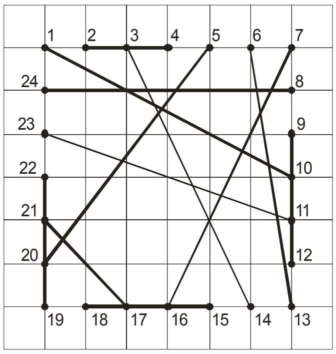
GRUPO VII

En los ejemplos siguientes, Dibujo 1, Dibujo 2, Dibujo 6,[22] se utiliza también una notación para crear ritmos cromáticos de forma que se indica la paleta de colores, es decir, el número de colores que se va a utilizar en la obra.

[22] Drawing 1, Drawing 2, Drawing 6.

En la obra Dibujo 1, la retícula básica, dividida en 64 cuadrados, 8 x 8, tiene un cuadrado interno centrado de 6 x 6 que es donde se desarrolla el proyecto. En esta estructura, se numera sólo el perímetro externo del cuadrado interno de 6 x 6, empezando en la esquina superior izquierda y contando en el sentido de las agujas del reloj. Se obtienen así 24 puntos de intersección. Los pares de números se obtienen de forma aleatoria.





En primer lugar, se unen las doce parejas de números según la secuencia dada:

Serie	
8	24
14	3
12	9
20	5
17	21
11	23
22	19
16	7
18	15
1	10
4	2
13	6

Luego se traza, a todos los pares, una paralela a un lado determinado de la línea anterior (derecha (R) o izquierda (L), según lo indicado en el dibujo). En este caso no se dan líneas individuales sino que toda la secuencia se refiere a dobles líneas o bandas. El número de bandas realizadas por cada par de números aleatorios es igual al orden de la secuencia aplicada: la primera secuencia, una banda; la segunda, dos; la tercera, tres; y así sucesivamente.

El resultado son 78 bandas (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78).

La secuencia de color está compuesta por cuatro colores: rojo, azul, verde y blanco.

	Contador	
Color 1	13	
Color 2	3	
Color 3	2	
Color 4	Resto (60)	

Esta cantidad de bandas puede leerse siguiendo un criterio de color que indique el tono con el que tiene que ser coloreada cada una de ellas. Cada 13 bandas se utiliza el color 1; cada 3 bandas, el color 2 (excepto cuando coincide con el color 1); y cada 2 bandas se utiliza el color 3 (excepto cuando coincide con los colores 1 y 2 que se dejarían los colores que están previamente pero continuando con el conteo). Al resto de las bandas se les aplica el color 4. La secuencia está numerada para que el último número, el 78, sea la primera banda del dibujo.

La forma de aplicar el color a la serie es el siguiente: se crea una partitura donde aparezca la secuencia de las 78 bandas relacionadas. Se hace una lectura de esta partitura empezando por la parte superior izquierda y en líneas de arriba a abajo aplicando el siguiente criterio: cada 13 bandas aplicar una del primer color seleccionado, el rojo; cada tres bandas, aplicar el segundo color, el azul; cada dos bandas, aplicar el color tercero, el verde; y el resto de las bandas dejarlas de color blanco. El color segundo y tercero se aplica sólo si en la banda correspondiente no hay un color previo. En este caso se continúa con la serie. En esta secuencia es importante el criterio de inicio para distribuir los colores. Unas secuencias empiezan con el color rojo en el primer número, otras, en la posición 13,...

1	1											
2	1	2										
3	1	2	3									
4	1	2	3	4								
5	1	2	3	4	5							
6	1	2	3	4	5	6						
7	1	2	3	4	5	6	7					
8	1	2	3	4	5	6	7	8				
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

1	78											
2	77	66										
3	76	65	55									
4	75	64	54	45								
5	74	63	53	44	36							
6	73	62	52	43	35	28						
7	72	61	51	42	34	27	21					
8	71	60	50	41	33	26	20	15				
9	70	59	49	40	32	25	19	14	10			
10	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6		
11	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	
12	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

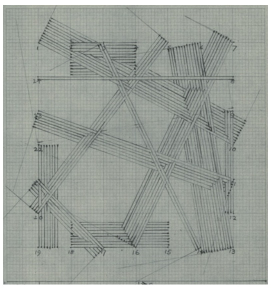
La secuencia de color según se aplique una u otra partitura será:

1	78											
2	77	66										
3	76	65	55									
4	75	64	54	45								
5	74	63	53	44	36							
6	73	62	52	43	35	28						
7	72	61	51	42	34	27	21					
8	71	60	50	41	33	26	20	15				
9	70	59	49	40	32	25	19	14	10			
10	69	58	48	39	31	24	18	13	9	6		
11	68	57	47	38	30	23	17	12	8	5	3	
12	67	56	46	37	29	22	16	11	7	4	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

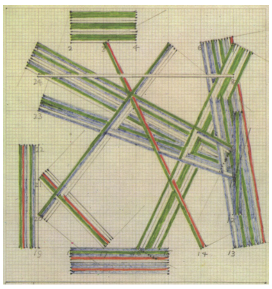
En la obra Dibujo 2, utiliza los mismos pares que la obra Dibujo 1, pero, en este caso, la banda se dibuja en la dirección de la derecha. El ritmo de color es también el mismo pero se utiliza a la inversa. El primer número es el 78.

1	1											
2	1	2										
3	1	2	3									
4	1	2	3	4								
5	1	2	3	4	5							
6	1	2	3	4	5	6						
7	1	2	3	4	5	6	7					
8	1	2	3	4	5	6	7	8				
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

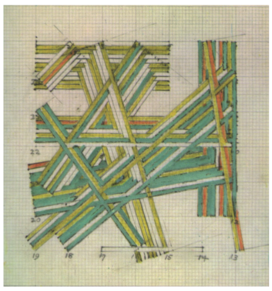
1	1											
2	2	13										
3	3	14	24									
4	4	15	25	34								
5	5	16	26	35	43							
6	6	17	27	36	44	51						
7	7	18	28	37	45	52	58					
8	8	19	29	38	46	53	59	64				
9	9	20	30	39	47	54	60	65	69			
10	10	21	31	40	48	55	61	66	70	73		
11	11	22	32	41	49	56	62	67	71	74	76	
12	12	23	33	42	50	57	63	68	72	75	77	78
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



Dibujo 1



Dibujo 2



Dibujo 6

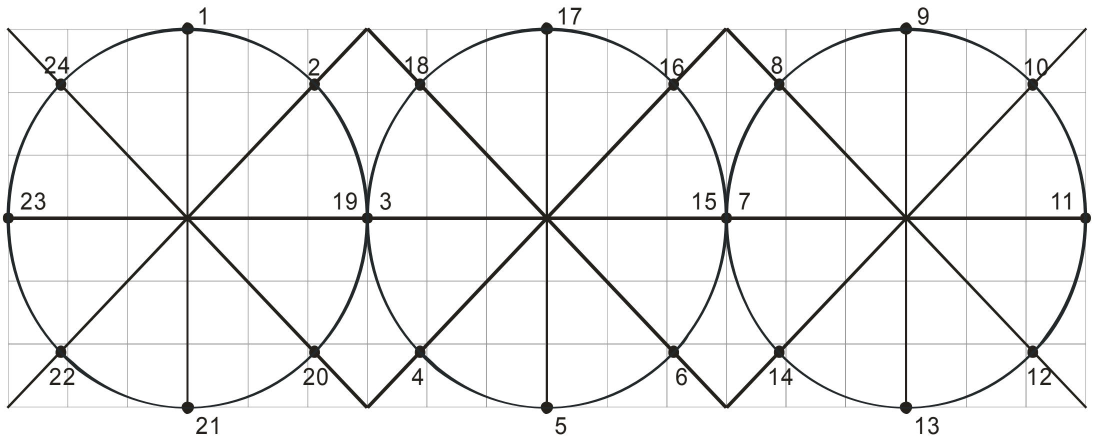
Se puede utilizar el mismo criterio de color pero con distintos colores, Dibujo 6:[23]

	Contador	
Color 1	13	
Color 2	3	
Color 3	2	
Color 4	Resto	

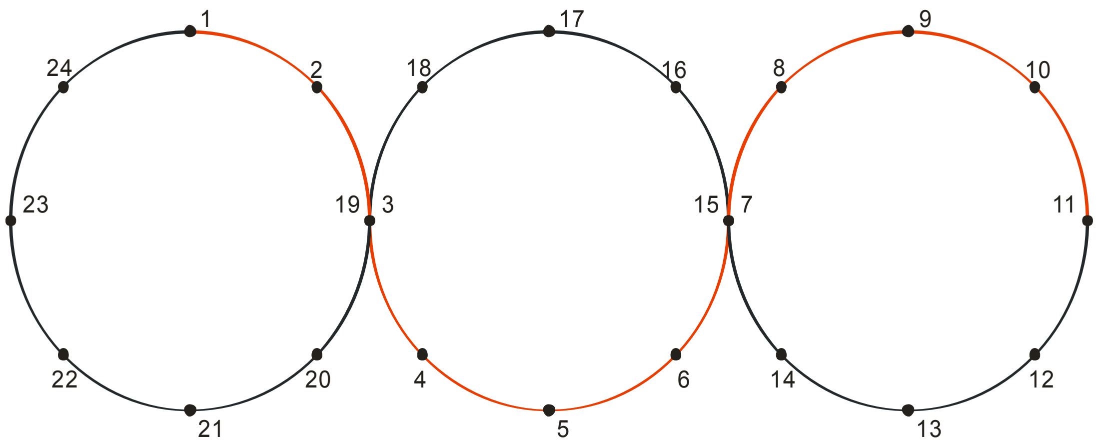
1	1											
2	2	13										
3	3	14	24									
4	4	15	25	34								
5	5	16	26	35	43							
6	6	17	27	36	44	51						
7	7	18	28	37	45	52	58					
8	8	19	29	38	46	53	59	64				
9	9	20	30	39	47	54	60	65	69			
10	10	21	31	40	48	55	61	66	70	73		
11	11	22	32	41	49	56	62	67	71	74	76	
12	12	23	33	42	50	57	63	68	72	75	77	78
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

GRUPO VIII

Otra estructura básica que se puede utilizar como soporte de la obra Dibujo 6,[24] se obtiene dibujando tres círculos tangentes entre sí que estén divididos en 8 partes cada uno. Los puntos se numeran comenzando en la parte superior del círculo que esté situado más a la izquierda y siguiendo hacia la derecha realizando un movimiento ondulatorio.



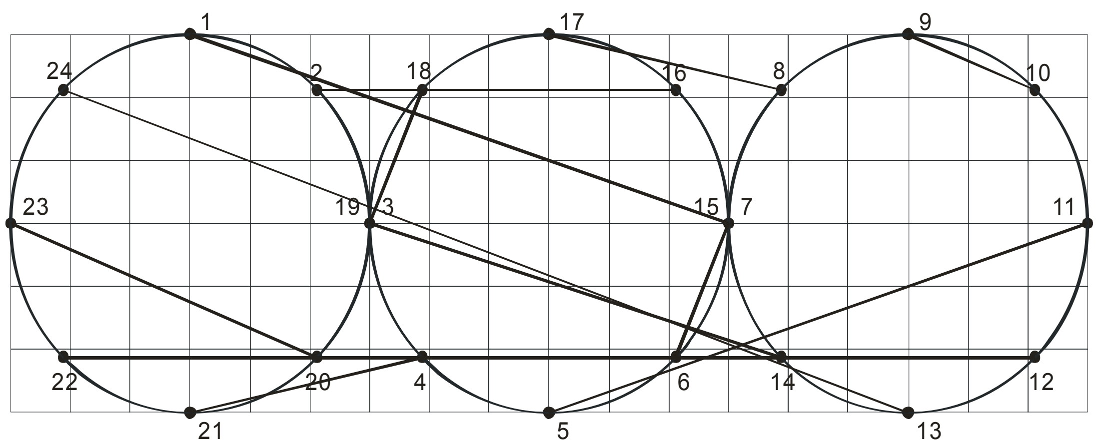
[23] Drawing 6.
[24] Drawing 6.



La secuencia aleatoria que genera la obra es la siguiente:

4	21
23	20
12	22
18	19
6	7
1	15
11	5
14	3
10	9
17	8
16	2
13	24

El resultado de aplicar el proceso anterior, genera el siguiente dibujo:



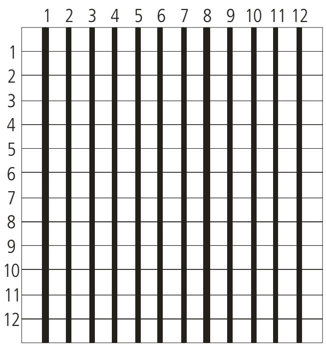
3.8.3- TORTEN RIDELL

1. Permutación de líneas, 1979[25]

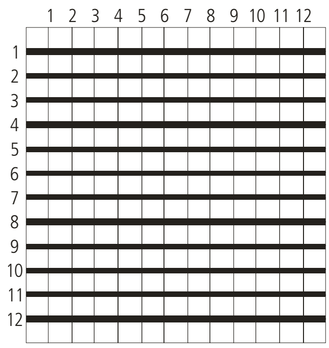
La imagen se obtiene a partir de un programa informático, con un generador aleatorio de números. La obra se compone de una imagen de 12 líneas que cambian de vertical a horizontal de una forma aleatoria.

Todo el proceso de la obra se realiza entre la imagen inicial de la obra, todas las líneas en vertical y la imagen final, todas las líneas en horizontal:

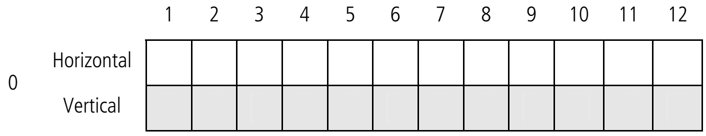
12 - 0

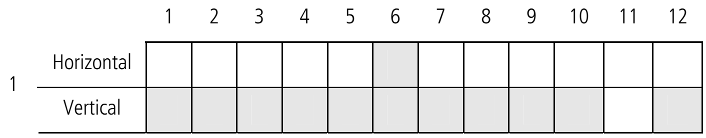


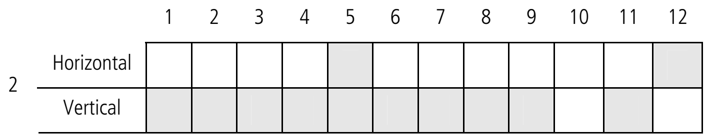
12 - 12

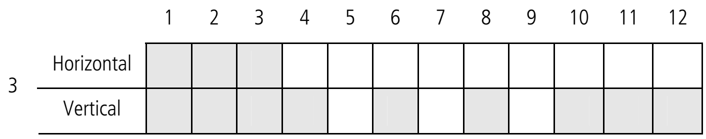


La secuencia de la realización de la obra, teniendo en cuenta los 13 movimientos y el resultado que se obtiene en cada uno de ellos, se establece en la siguiente tabla, donde, con gris se indica el moviendo de todas las líneas de la obra en un momento dado:









[25] Permutations de lignes, 1979.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	Horizontal												
	Vertical												

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	Horizontal												
	Vertical												

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	Horizontal												
	Vertical												

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	Horizontal												
	Vertical												

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	Horizontal												
	Vertical												

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	Horizontal												
	Vertical												

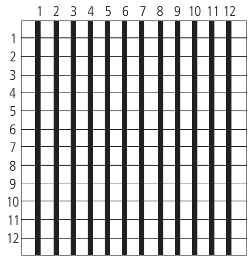
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Horizontal												
	Vertical												

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	Horizontal												
	Vertical												

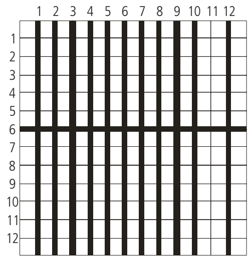
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	Horizontal												
	Vertical												

Se representa a continuación la secuencia gráfica de los dibujos que forman la serie completa:

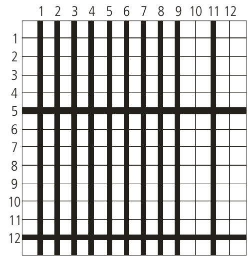
12 - 0



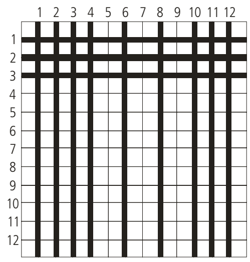
12 - 1



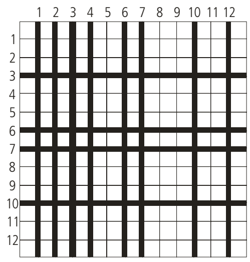
12 - 2



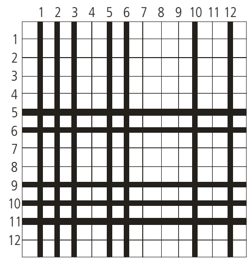
12 - 3



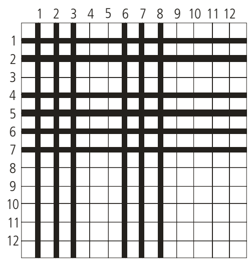
12 - 4



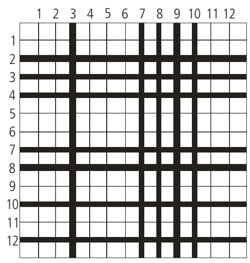
12 - 5



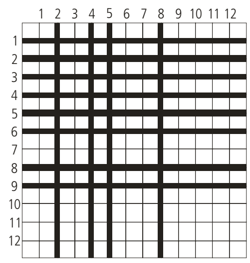
12 - 6



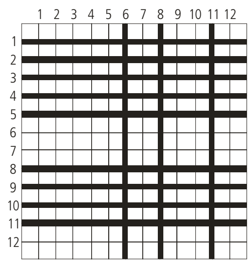
12 - 7



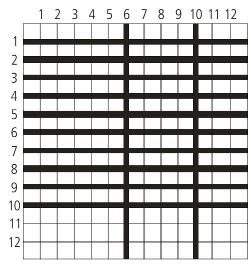
12 - 8



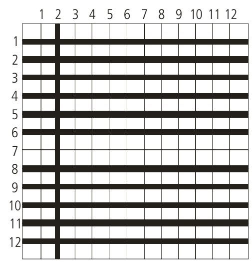
12 - 9



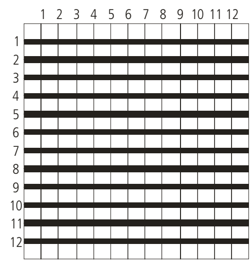
12 - 10



12 - 11



12 - 12



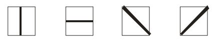
3.8.4- VERA MOLNAR

1. Distribución aleatoria de 4 elementos, 1959[26]

A partir de una estructura cuadrada de 24 x 24 = 576 cuadrados y teniendo en cuanta los siguientes módulos: A, B, C, y D:

[26] Distribution alèatoire de 4 èlèments, 1959.

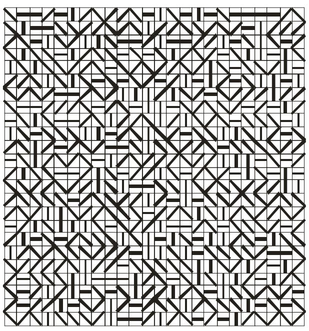
Modulo A Modulo B Modulo C Modulo D

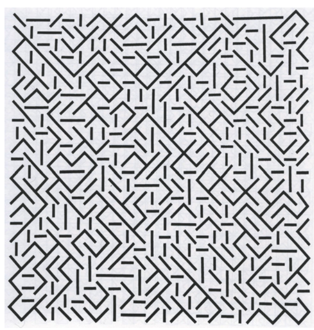


Distribuir los módulos sobre la matriz de una forma aleatoria:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	C	B	B	D	B	A	D	C	D	D	C	B	A	C	B	A	B	C	B	B	B	B	D	C
2	C	A	B	B	C	C	D	D	C	D	C	A	D	D	C	C	D	C	D	B	A	D	D	D
3	D	C	B	A	C	D	A	A	C	B	B	D	A	B	B	D	D	A	B	C	A	C	B	D
4	C	A	C	C	B	A	D	C	C	B	C	B	C	A	D	C	D	B	C	A	A	B	A	C
5	A	C	A	C	C	D	D	C	B	C	D	C	D	D	C	D	A	C	B	C	C	D	A	B
6	D	D	C	A	C	A	C	B	C	B	C	D	B	D	A	B	A	D	B	C	A	A	B	A
7	C	D	C	D	B	B	D	C	D	A	A	A	D	A	C	D	B	C	D	D	D	A	D	D
8	C	B	B	D	D	D	C	B	D	C	B	A	A	B	C	D	C	C	D	B	D	B	A	D
9	B	C	A	C	B	B	D	C	A	D	D	C	A	D	A	C	D	C	B	C	C	C	B	A
10	A	C	B	C	C	C	A	A	B	D	C	A	C	D	B	C	C	A	A	C	A	D	B	C
11	D	C	A	D	B	D	C	D	B	B	C	A	C	C	D	D	C	B	C	C	C	C	D	D
12	B	C	A	D	C	D	C	B	A	D	C	D	D	D	C	D	D	A	A	A	B	C	B	D
13	D	A	C	C	B	B	D	A	C	B	D	D	A	C	B	D	C	D	B	A	C	B	A	B
14	C	C	D	D	C	D	D	A	C	A	B	B	C	C	A	C	D	C	C	D	D	D	A	A
15	D	C	C	C	C	B	D	C	C	D	D	A	D	B	A	B	C	C	D	C	C	D	C	C
16	D	C	D	A	A	C	D	D	C	C	C	B	D	D	C	A	C	A	D	C	D	D	C	D
17	B	D	A	C	A	A	A	C	B	C	D	D	A	B	B	D	C	B	C	C	C	D	B	D
18	D	A	B	C	B	D	C	C	C	A	C	A	B	A	C	B	A	A	D	C	B	A	C	C
19	A	D	C	D	C	C	C	D	D	D	B	A	A	C	A	B	C	C	C	C	D	B	B	C
20	C	D	D	D	D	C	A	D	D	B	C	C	C	C	C	A	A	C	D	A	D	B	A	D
21	D	B	C	C	C	A	A	B	B	B	A	D	C	B	C	A	C	A	A	D	B	A	D	C
22	C	B	D	A	D	A	B	C	B	C	A	D	D	A	D	C	B	A	C	C	D	C	D	B
23	D	B	D	D	A	B	C	D	A	D	B	D	C	C	A	D	C	C	C	A	B	C	B	C
24	C	D	C	A	C	C	C	D	A	B	B	D	A	D	C	B	D	B	A	D	C	D	C	D

A continuación se muestran dos imágenes: un esquema del desarrollo de la obra, a la izquierda, y del resultado final, a la derecha:





4.- ESTRUCTURAS

El concepto de estructura es, en sí mismo, muy complejo. Pero entre sus significaciones más importantes está el hecho de que está muy estrechamente relacionado con el concepto de orden: todo orden tiene su punto de partida o su origen en una estructura. En este capítulo va a tratarse el concepto de estructura y se van a plantear cuestiones de cómo se originan, cómo crecen, cómo se clasifican y cómo se trabaja con ellas.

4.1.- RELACIÓN ESTRUCTURAS - SISTEMAS

Si se definen los sistemas en términos de elementos y relaciones. La palabra estructura está asociada al concepto de relación; a lo que en un sistema, a diferencia de los elementos, permanece constante en el tiempo: designa una relación entre un elemento A y uno B. Se puede decir que, en un sistema, las estructuras potencian las relaciones y relativizan los elementos.

Además, cada sistema debe conocer las estructuras que lo constituyen, ya que sino éstas no serían operativas.

En el desarrollo de la noción de estructura se pueden señalar algunos avances más. El primero, relaciona el concepto de estructura con el de expectativa. El concepto de expectativa se refiere a cómo una estructura puede servir para que se lleve a cabo una reducción de complejidad de la realidad, sin que el sistema al que pertenece, se sienta progresivamente reducido, sino más bien, al contrario, que aumenten las posibilidades de relación del propio sistema.

En segundo lugar, se contempla las estructuras como algo objetivo y no meramente subjetivo, independientemente de que alguien las reconozca y las perciba bajo una determinada perspectiva y les atribuya un determinado valor.

En tercer lugar, se realiza una distinción entre estructura y proceso. Los sistemas tienen estructuras y también tienen procesos. Los sistemas están formados por un conjunto de procesos enlazados que ellos mismos producen. Los procesos se enlazan entre sí a través de las estructuras. La función de las estructuras es conseguir que un proceso encuentre un nuevo proceso compatible con él, con el que poder enlazarse. Las estructuras sobreviven sólo si son capaces de generar estos enlaces.

Se puede decir que las estructuras son la representación de la trama que se desarrolla entre los procesos.

Las estructuras son, así, algo totalmente fluido que sólo sirve para unir y enlazar procesos entre sí.

En cuarto lugar, las estructuras son el resultado de una mezcla de características específicas y generales de un sistema, de forma que tienen la capacidad de poder ser reutilizadas y ajustarse a nuevos contextos en tiempos diferentes.

En quinto lugar, las estructuras son portavoces de contenidos de sentido y, gracias a su reutilización, permiten obtener nuevas referencias de sentido.

Finalmente, las estructuras son un instrumento para el conocimiento de un sistema. Si se quiere saber en qué situación se encuentra un sistema, hay que preguntar por sus estructuras. Un observador al realizar una observación, construye estructuras, busca posibilidades de sentido.

En términos generales, el concepto de estructura se construye con relación a sistemas y por lo tanto se pueden considerar las siguientes propiedades o características:

1. Relacionalidad.
2. Permanencia en el tiempo.
3. Instrumento para el conocimiento del sistema.
4. Capacidad de crear expectativas.
5. Carácter de objetividad.
6. Distinción entre estructura y proceso.
7. Capacidad de poder ser reutilizadas.
8. Portavoces de contenidos de sentido.

4.2.- CONCEPTO Y ALCANCE DE LAS ESTRUCTURAS

Según el diccionario, "estructura es el orden, disposición, conexión y organización de elementos".[1] Estos elementos, que el diccionario no especifica su naturaleza, no son necesariamente entidades físicas, sino que pueden interpretarse de manera más general como procesos, conceptos, ideas,… que guían el pensamiento. Lo que es importante en esta definición del concepto de estructura no son los elementos en sí, sino el tipo de conexión que se realiza entre ellos.

Una estructura está sujeta a unos principios generales dados que determinan cómo han de organizarse una serie de elementos mediante su disposición en un sistema y las conexiones adecuadas entre ellos. Se puede decir entonces, que una estructura es algo básicamente dinámico. La estabilidad o el equilibrio de una estructura surge gracias a la tensión que se produce entre una serie de fuerzas dinámicas que se producen entre los elementos del sistema y que resultan no sólo del orden dentro de la propia estructura de los elementos, sino también de su disposición, conexión y organización.

David Bohm en su libro *Ciencia, Orden y Creatividad*, dice: "Comprender una estructura y expresarla en el pensamiento y el lenguaje es posible sobre todo gracias a la razón. La palabra razón se basa en la latina ratio… Una de las características claves de la razón es algún tipo de «ratio» (relación). La forma general de esta «ratio» puede expresarse como A:B como D:C, siendo la «ratio» numérica A / B = D / C una forma especial de la anterior. Este tipo de «ratio» significa que A está relacionado a B como C está relacionado a D. Con todo, dos cosas sólo pueden estar relacionadas si son diferentes… En este proceso, hay dos cosas que, al menos en la mente, son separadas primero mediante la diferencia y vueltas a llevar de nuevo a la semejanza y la relación… El desarrollo completo de esta jerarquía de «ratios» o relaciones, que tiene lugar en todas las áreas a las que se aplica la mente, es en esencia el poder del pensamiento racional o razón. Puede describirse la irracionalidad como el caso en el que se da un fallo de coherencia entre estas «ratios». Así pues, la racionalidad es un orden; es, de hecho, el orden esencial del pensamiento".[2] Lo que señala Bohm dentro de este apartado es que toda estructura es el resultado de realizar

[1] David Bohm, *Ciencia, Orden y Creatividad: Las Raíces Creativas de la Ciencia y la Vida*, Editorial Kairós, Barcelona, 2003, p. 161.

[2] David Bohm, *op. cit.,* p. 164.

dinámicamente una serie de operaciones lógicas formales que establecen un conjunto de relaciones jerarquizadas, de diferentes tipos: distancia, tamaño, color,…, entre los elementos de un sistema.

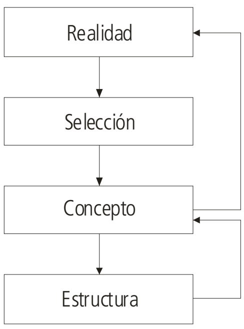
Continúa Bohm: "Es evidente que el pensamiento ha de tener la posibilidad de… encontrar un lugar apropiado en un contexto más amplio,… de la razón intuitiva... Sólo en este contexto más amplio puede el pensamiento convertirse en vehículo de la percepción creativa. De hecho, cuando se produce el juego libre de la mente, el pensamiento tiene su origen primero precisamente en esta percepción. Después se despliega de manera natural, a través de la proposición, composición, suposición y disposición. Se transforma en algo bastante bien definido, como cristalizado. Esta cristalización de la razón, dirigida por la lógica formal, es totalmente indispensable si se quiere comprobar la racionalidad y la coherencia con el hecho real de los presupuestos en que se basa el pensamiento. Sin embargo, la lógica formal ha de estar preparada para volver a disolverse en razón fluida en cuanto aparezcan una contradicción u oposición mantenidas al aplicarse sus formas relativamente fijas. En este caso, la mente tendrá que ser capaz de responder con inteligencia creativa, para percibir órdenes y categorías nuevos que normalmente descansan «entre» los extremos, estáticos y no relacionados, presentados por la pura lógica…".[3] Añade Bohm, dentro de este apartado, que aunque una estructura se construye, como se ha visto antes, a través de una lógica formal, se capta de una forma global en un acto perceptivo de la razón intuitiva.

Esta descripción de cómo se expresan y comprenden las estructuras a través de un mundo de relaciones entre elementos y de cómo funciona el pensamiento racional para que surja una respuesta creativa está llena de matices muy significativos. Se puede deducir que la respuesta creativa es el resultado de la combinación de la razón intuitiva y la lógica formal trabajando conjuntamente en un proceso de relaciones complejas y jerarquizadas de distintos tipos que interactúan entre sí. Esta estructura de relaciones es una estructura de pensamiento compleja cuyo objetivo es buscar una coherencia y sentido a las reglas de la lógica formal. Está en juego el sentido (los sentimientos), la sensibilidad (sensaciones) y el intelecto (pensamientos).

Este tipo de estructuras de relaciones son reflejo de estructuras de pensamiento. Cada pensamiento lleva a diseñar una estructura o una red de relaciones entre procesos concreta. El hecho de que se pueda establecer una relación entre estas estructuras de relaciones y el pensamiento sugiere que hay contenidos similares en los dos campos y que al relacionarlos se produce una reducción de complejidad de la realidad.

4.3.- REPRESENTACIÓN DE ESTRUCTURAS

Desde un punto de vista intelectual, una estructura es un concepto de realidad; una forma de ver el mundo; una manera de seleccionar partes de la realidad y de establecer relaciones entre ellas.



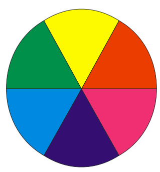
[3] David Bohm, *op. cit.,* p. 165.

Existen muchas formas diferentes de representar estas estructuras conceptuales: algoritmos, grafos, sistemas,…

La estructura cromática que representa a los seis colores básicos: amarillo, magenta, cyan, rojo, verde y azul-violeta se puede representar numérica o gráficamente. Numéricamente se representan las cantidades (del 0 al 100) de cada uno de los 3 colores primarios de la mezcla sustractiva (Cyan, Magenta, Amarillo) y del negro (K) que tiene cada uno de los 6 colores básicos en su composición.

	C	M	Y	K
Amarillo	0	0	100	0
Rojo	0	100	100	0
Magenta	0	100	0	0
Azul-Violeta	100	100	0	0
Cyan	100	0	0	0
Verde	100	0	100	0

Gráficamente, la estructura se puede representar en forma de un círculo cromático, indicando visualmente la relación de proximidad (armonía) y distancia (contraste) que existe entre los colores, así como el concepto de complementariedad (colores diametralmente opuestos).

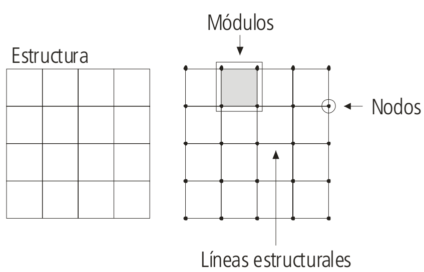


En la práctica del lenguaje plástico, una estructura es un conjunto de líneas significativas relacionadas entre sí que dividen el espacio según un criterio lógico y como resultado de esta división surgen dos elementos significativos: los módulos (espacios entre las líneas estructurales) y los puntos de intersección o nodos (puntos de intersección de dos o más líneas estructurales).

Los puntos de intersección, se utilizan como puntos significativos capaces de ser punto de partida de nuevas líneas estructurales o simplemente ser focos de atención o de sentido dentro de un soporte.

Los módulos son lugares contenedores de cualquier elemento morfológico de representación: colores, imágenes, texturas,…

Es importante señalar que numerosos artistas cuyas obras se analizarán en el apartado correspondiente de este capítulo, dedican una gran parte de sus obras a trabajar sobre estos términos dejando un legado lleno de matices e interpretaciones muy significativo.



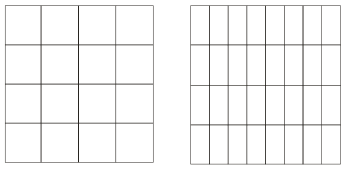
4.4.- TIPOS

De acuerdo a la definición práctica del término estructura, basada en líneas estructurales, módulos y nodos, las estructuras se pueden clasificar atendiendo a los siguientes tipos característicos:[4]

4.4.1.- Formal
4.4.2.- Inactiva
4.4.3.- Activa
4.4.4.- Visible
4.4.5.- Invisible

4.4.1.- Estructura formal

Es un conjunto de líneas estructurales que dividen el espacio según un criterio lógico (distancia regular entre líneas, igual número de subdivisiones horizontales y verticales,…) que deberá aplicarse a toda la superficie. Como resultado de esta división se genera un gran número de módulos iguales que dan un aspecto visual de regularidad y orden.



Las estructuras formales se pueden clasificar a su vez en diferentes tipos:

1. Estructuras de repetición
2. Estructuras de gradación
3. Estructuras de radiación

Cada uno de estos tipos se puede analizar desde dos puntos de vista: primero, según sus líneas estructurales; y segundo, según sus módulos:

Repetición			
	Estructuras de repetición simple		
		Operaciones sobre las líneas estructurales	
			Cambio de proporción
			Cambio de dirección
			Deslizamiento
			Curvatura o quebrantamiento
			Reflexión
			Combinación

[4] Wucius Wong, *Fundamentos del Diseño Bi- y Tri-dimensional,* Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1986.

			Divisiones sucesivas
			Superposición
		Operaciones sobre los módulos	
			Variación de posición
			Variación de tamaño
			Variaciones de dirección u orientación
	Estructuras de repetición múltiple		
Gradación			
		Gradación de las líneas estructurales	
			Cambio de tamaño y/o proporción
			Cambio de dirección
			Deslizamiento
			Curvatura o quebrantamiento
			Reflexión
			Combinación
			Divisiones sucesivas
			Superposición
		Gradación de los módulos	
			Gradación en la figura o forma
			Gradación en la dirección o rotación en el plano
			Gradación en la posición
			Rotación espacial
			Progresión espacial
Radiación			
	Centrífuga		
		Operaciones sobre las líneas estructurales	
			Curvatura o quebrantamiento de líneas estructurales
			Centro en posición excéntrica
			Centro de radiación con apertura
			Centros múltiples
	Concéntrica		
		Operaciones sobre las líneas estructurales	
			Curvatura o quebrantamiento
			Centros en posiciones múltiples
			Divisiones sucesivas
			Rotación gradual de entidades concéntricas

Centrípeta

Operaciones sobre las líneas estructurales

Cambio progresivo de ángulos

Curvatura o quebrantamiento

Centro de radiación con apertura

4.4.1.1.- Estructuras de repetición

Una estructura de repetición está compuesta de líneas estructurales colocadas regularmente a lo largo del espacio, de forma que quede dividido en subdivisiones o módulos de la misma forma y tamaño y distribuidos uniformemente por toda la superficie.

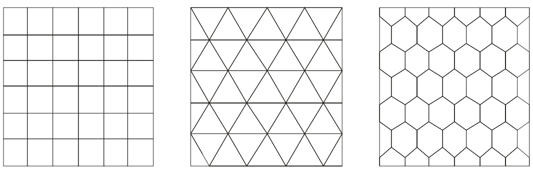
Las estructuras de repetición pueden ser:

1. Estructuras de repetición simple: cuando se repite un único módulo en toda la estructura.
2. Estructuras de repetición múltiple: cuando se repiten dos o más módulos diferentes en la estructura.

1. Estructuras de repetición simple:

Están compuestas de líneas verticales, horizontales u oblicuas espaciadas regularmente que se cruzan entre sí, dividiendo el espacio en subdivisiones o módulos regulares de igual forma y tamaño. Las estructuras de repetición simple puede tener tres formas básicas posibles: la estructura cuadrada, triangular y hexagonal.

El enrejado básico es la estructura de repetición simple más frecuente. Está compuesta de líneas verticales y horizontales, espaciadas regularmente y paralelas a los lados del soporte, que se cruzan entre sí, dividiendo el espacio en módulos cuadrados de igual forma y tamaño.



Existen muchas variaciones de las estructuras de repetición que surgen como resultado de manipular o aplicar una serie de operaciones sobre las formas básicas: cuadrado, triángulo, hexágono. En este capítulo sólo se van a considerar aquellas que se realizan sobre el enrejado básico.

Estas operaciones sobre el enrejado básico se pueden aplicar sobre las líneas estructurales o sobre los módulos de la estructura.

Operaciones sobre las líneas estructurales

Si se aplican sobre las líneas estructurales, las operaciones que se pueden realizar son:

1. **Cambio de proporción:** las líneas estructurales no se distribuyen uniformemente en las dos direcciones del espacio, sustituyendo así las subdivisiones cuadradas del enrejado básico por módulos rectangulares. Se rompe el equilibrio que existe en el enrejado básico entre las líneas verticales y horizontales de la estructura, dando mayor énfasis a una de las dos direcciones del espacio.

2. **Cambio de dirección:** las líneas estructurales horizontales, verticales o ambas, se inclinan un cierto ángulo. Esta modificación provoca una sensación de movimiento frente al estatismo de las líneas estructurales verticales y horizontales de las estructuras del enrejado básico.

3. **Deslizamiento:** cada fila o columna de módulos estructurales se puede desplazar, regular o irregularmente, en una u otra dirección del espacio. En este caso, las subdivisiones horizontales o verticales de filas o columnas adyacentes no tienen por qué coincidir exactamente unas con otras.

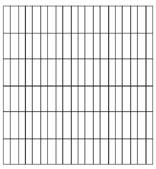
4. **Curvatura o quebrantamiento:** las líneas estructurales horizontales, verticales o ambas, se pueden curvar o quebrar de forma regular en todo su trayecto. Este tipo de operación permite conservar la misma forma y tamaño en las subdivisiones estructurales.

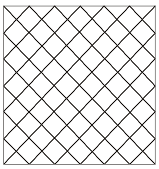
5. **Reflexión:** una fila o columna de subdivisiones estructurales se refleja y el resultado obtenido se repite en toda la superficie de forma regular o alterna.

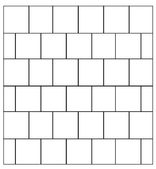
6. **Combinación:** las subdivisiones estructurales que resultan de una división estructural del espacio se combinan entre sí creando nuevas formas iguales pero de mayor tamaño y complejidad que encajan perfectamente entre sí, sin intervalos ni intersticios.

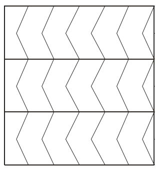
7. **Divisiones sucesivas:** las subdivisiones estructurales que genera una estructura de repetición se pueden dividir nuevamente generando otras subdivisiones estructurales más pequeñas y complejas que las anteriores. Las subdivisiones nuevas deben ser de igual forma y tamaño.

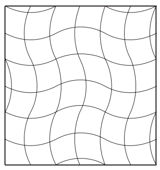
8. **Superposición:** una estructura de repetición, junto con los módulos que incluye, puede ser superpuesta a otra estructura de repetición. Las dos estructuras y sus módulos pueden ser iguales o diferentes entre sí.

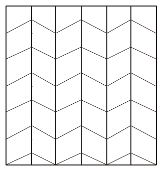

1

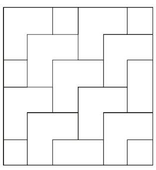

2

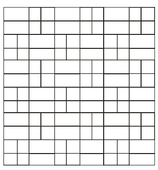

3

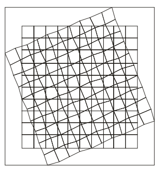

4


4


5


6


7


8

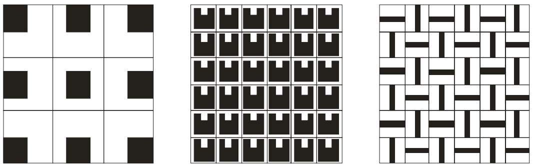
Operaciones sobre los módulos

Si las operaciones se aplican sobre los módulos, se pueden obtener las siguientes variaciones:

1. **Variación de posición:** hace referencia a cómo se distribuyen las imágenes dentro de los módulos o subdivisiones estructurales. La repetición de posición supone que todas las imágenes están colocadas en la misma posición dentro de cada una de las subdivisiones estructurales: en el centro, en la intersección de las líneas,…

2. **Variación de tamaño:** las imágenes que se colocan en los módulos pueden ser menores, mayores o iguales que las propias subdivisiones estructurales. Si son más grandes que ellas, las imágenes se desbordarán y ocuparán parte de los módulos adyacentes, haciendo que varias imágenes se superpongan, se toquen, se unan o se sustraigan entre sí.

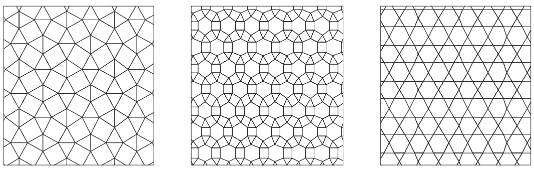
3. **Variaciones de dirección u orientación:** las imágenes que se colocan en los módulos pueden hacerlo con direcciones u orientaciones diferentes: verticales, horizontales, girados 45º, 90º,…



1 2 3

2. Estructuras de repetición múltiple

La estructura se compone de dos o más módulos diferentes, que se repiten en forma y tamaño y se distribuyen en el espacio de forma regular y sin que existan huecos vacíos entre ellos.



4.4.1.2.- Estructuras de gradación

1. Concepto de gradación

Una gradación es una transformación de una figura en otra mediante un número de pasos determinados.

Para realizar una gradación, hay que seleccionar las dos figuras que definan los dos extremos de la misma y decidir el número de pasos que va a haber entre un estado y el otro.

La gradación exige no sólo un cambio gradual de una figura en otra, sino que ese cambio se realice de una forma ordenada. Genera ilusión óptica y crea una sensación de progresión.

Toda gradación queda definida por el método que se emplea para producir el cambio de una figura en otra y la velocidad con que se realiza esta transformación. El método especifica la estrategia para realizar el cambio. Intercala dentro de la totalidad del proceso una serie de pasos intermedios o hitos por los que tienen que pasar las figuras en transformación. Para transformar un círculo en cuadrado, se puede hacer directamente fusionando una forma en la otra, o pasando por figuras intermedias como el triángulo, hexágono,…

La velocidad de la gradación queda definida por la cantidad de pasos intermedios que hay entre el inicio y el final de la gradación y su elección depende de los efectos visuales que se quieran obtener. Cuando el número de pasos intermedios es reducido, la velocidad de gradación es rápida y el efecto visual que produce es una transformación con muchos saltos visuales ya que las formas en transformación sólo aparecen vagamente relacionadas entre sí. Cuando el número de pasos intercalados es alto, la velocidad de la transformación de las figuras es lenta y produce un efecto de movimiento muy sutil.

La velocidad de gradación puede ser constante a lo largo de toda la secuencia o variar en el trayecto de la secuencia para producir efectos especiales: aceleración y retardos.

2. Tipos de gradación

La gradación de una estructura se puede obtener aplicándola a los módulos, a la estructura o a ambos:

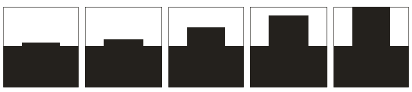
1. Gradación de módulos

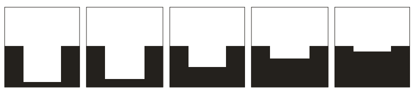
En una estructura de repetición, los módulos se pueden utilizar en gradación variando la forma o figura, el tamaño, el color, la textura, la dirección o la posición.

1. **Gradación en la figura o forma:** la gradación se produce en una secuencia en la que hay un cambio en la forma del módulo o en la imagen que está incluida dentro del módulo.

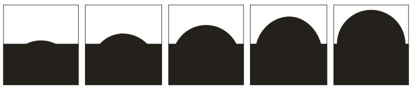
   La gradación de forma se puede realizar por varios procedimientos entre los que se pueden incluir:

   1. **Unión o sustracción:** controla el cambio gradual que se obtiene cuando dos módulos interactúan para unirse uno al otro de una forma progresiva o para sustraer a uno de ellos, el otro. Durante el proceso la forma y el tamaño de cada uno de los módulos puede variar de una forma gradual.

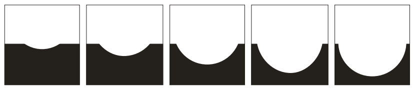

Unión


Sustracción

   2. **Tensión o compresión:** controla el cambio gradual de la figura o forma de los módulos, por fuerzas internas o externas, de modo que la forma aparece como si fuera elástica, y pudiera ser modificada fácilmente por cualquier ligero empuje hacia el exterior o hacia el interior.

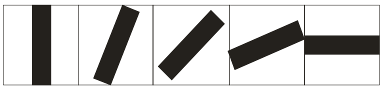


Tensión



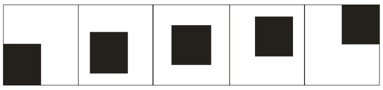
Compresión

2. **Gradación en la dirección o rotación en el plano:** se produce un cambio gradual en la dirección de los módulos. Hay que tener en cuenta en esta gradación que una figura se puede rotar sin desplazarse.



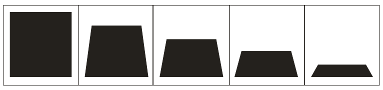
Rotación

3. **Gradación en la posición:** los módulos varían de posición gradualmente dentro de las subdivisiones estructurales. Pueden ascender, descender, desplazarse en ángulo,…



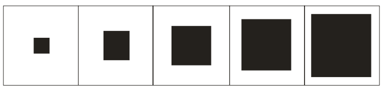
Posición

4. **Rotación espacial:** los módulos giran en el espacio de una forma gradual, haciendo que varíe el punto de vista del objeto y simulando su proyección espacial.



Rotación espacial

5. **Progresión espacial:** al aumentar y disminuir el tamaño de los módulos se sugiere acercamiento o distanciamiento espacial. Los módulos se aproximan cuando son grandes o se alejan cuando son pequeños.



Progresión espacial

2. Gradación de estructura

Una estructura de gradación es parecida a una estructura de repetición, con la excepción de que en la estructura de gradación las líneas estructurales ya no son repetitivas en forma, tamaño y situación, sino que, durante la progresión, pueden cambiar estas propiedades de forma gradual y sistemática.

Existen varios tipos de gradación de estructura:

1. **Cambio de tamaño y/o proporción:** se produce cuando la distancia entre las líneas estructurales (proporción), aumentan o disminuyen de tamaño de forma gradual. El cambio de tamaño de la distancia se puede dar sólo en una dirección de la estructura (líneas estructurales verticales u horizontales) o en ambas. La gradación puede progresar en su desarrollo siguiendo cualquier secuencia rítmica: de lo estrecho a lo ancho, de lo ancho a lo estrecho,… También se puede producir cuando el tamaño de las líneas estructurales varía a lo largo de la secuencia de forma gradual.

2. **Cambio de dirección:** las líneas estructurales horizontales, verticales o ambas, se inclinan un cierto ángulo.

3. **Deslizamiento:** cada fila o columna de módulos estructurales se puede desplazar, regular o irregularmente, en una u otra dirección del espacio. En este caso, las subdivisiones horizontales o verticales de filas o columnas adyacentes no tienen por qué coincidir exactamente unas con otras.

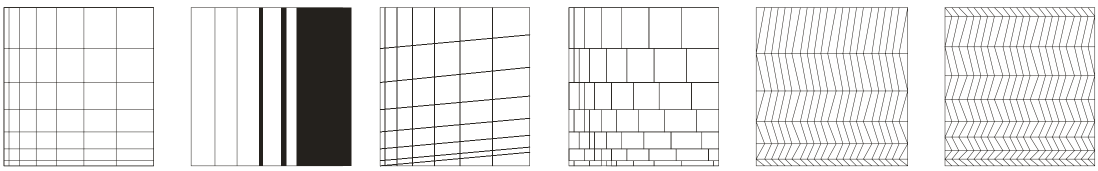
4. **Curvatura o quebrantamiento:** las líneas estructurales verticales, horizontales, o ambas, se pueden curvar o quebrar gradual o regularmente en todo su trayecto.

5. **Reflexión:** una fila o columna de subdivisiones estructurales se refleja y el resultado obtenido se repite en toda la superficie de forma alterna o regular.

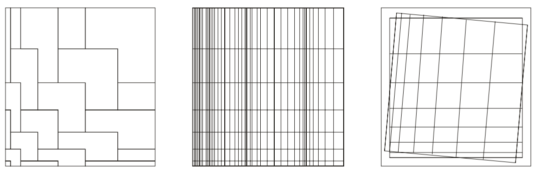
6. **Combinación: l**as subdivisiones estructurales generadas en una estructura de gradación se pueden combinar entre sí para crear nuevas formas iguales pero de mayor complejidad que encajen perfectamente entre sí, sin intervalos ni intersticios, con el efecto de la gradación.

7. **Divisiones sucesivas:** las subdivisiones estructurales generadas en una estructura de gradación se pueden dividir nuevamente generando otras subdivisiones estructurales más pequeñas y complejas que las anteriores.

8. **Superposición:** una estructura de gradación, puede ser superpuesta a otra estructura de gradación. Las dos estructuras pueden ser iguales o diferentes entre sí.



1 1 2 3 4 5



6 7 8

3. Modelos de gradación

En todo diseño de una gradación, influyen dos factores:

1. **La serie de gradación que se va a realizar:** es necesario definir la situación inicial y final de la gradación y, si es necesario, las situaciones intermedias que indiquen un paso forzoso por un determinado lugar, posición o figura.

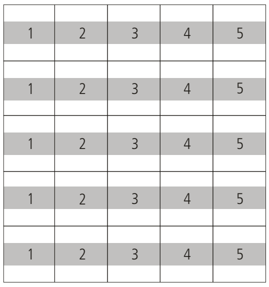
2. **La velocidad:** el número de pasos que se van a realizar entre el inicio y final de la gradación.

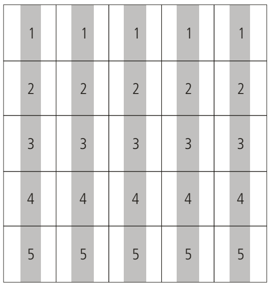
3. **La dirección del movimiento:** describe el camino que van a seguir los módulos desde la situación inicial a la final. Los módulos de la situación inicial pueden ser puestos en fila y desplazarse a lo largo de la gradación en horizontal, o situarse en columnas y desplazarse verticalmente, o en ambos sentidos a la vez, con pasos regulares hacia la situación final. También son posibles las diagonales y otras maneras de progresión: zigzag,…

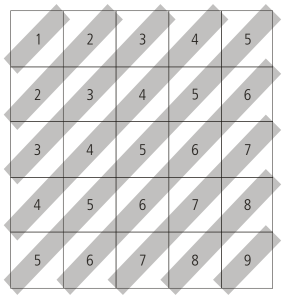
Algunos modelos típicos de movimientos o desplazamientos son:

1. Movimiento paralelo:

Es el más simple. Los módulos se transforman gradualmente en pasos paralelos y en forma de línea recta.[5]

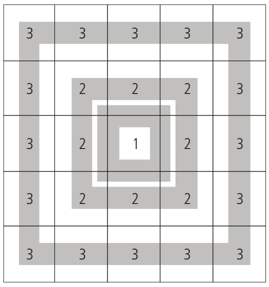


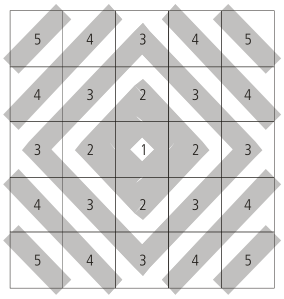


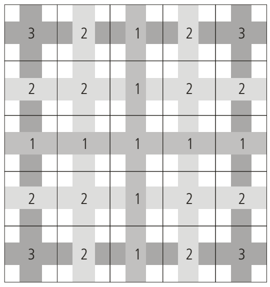


2. Movimiento concéntrico:

Los módulos se transforman en figuras concéntricas. Los movimientos pueden ser de dentro a fuera o viceversa.[6]







3. Movimiento en zigzag:

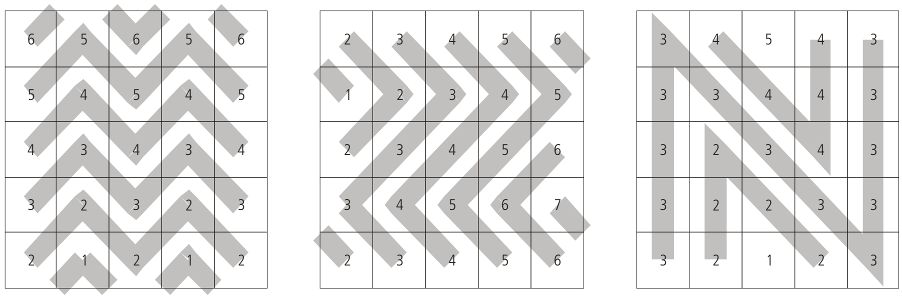
Los módulos que ocupan el mismo estado de progresión en la sucesión se disponen en forma de zigzag y se transforman a una misma velocidad.[7]

---

[5] Wucius Wong, *op. cit.,* p. 46.

[6] Wucius Wong, *Ibidem*.

[7] Wucius Wong, *Ibidem*.



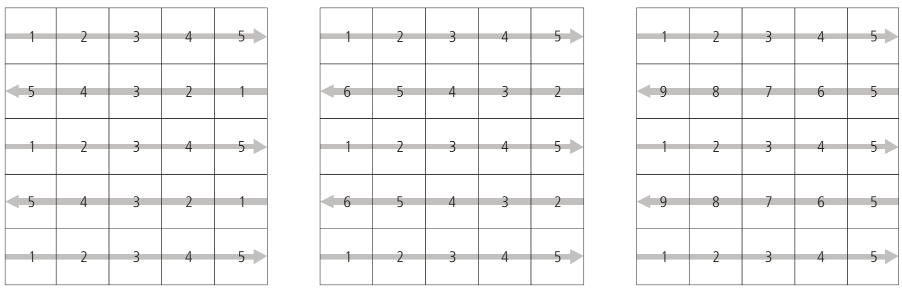
4. Alternancia

La alternancia aporta complejidad a una gradación. Consiste en utilizar una secuencia de módulos o subdivisiones estructurales gradualmente cambiantes, y alternarlos en direcciones opuestas. El modo más simple de conseguir la gradación alterna es dividir la estructura (sean las filas horizontales o verticales) en filas impares y pares, y aplicar a las filas impares un criterio de gradación diferente al de las pares. Se pueden realizar muchos tipos de secuencias de gradación contemplando series de crecimiento y decrecimiento alternas. La secuencia se puede repetir una y otra vez, hasta que sea necesario.[8]

1 2 3 4 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

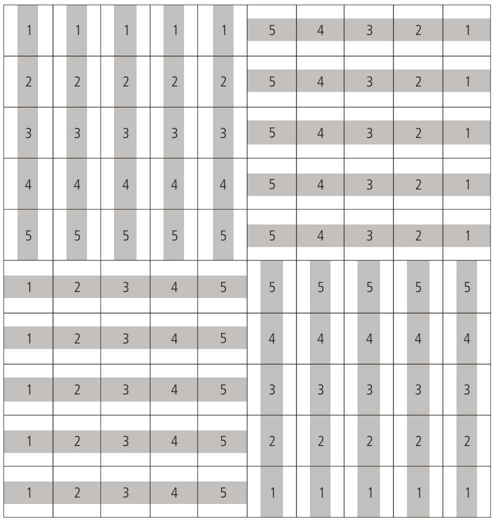
1 2 3 4 5 6 7 8 9

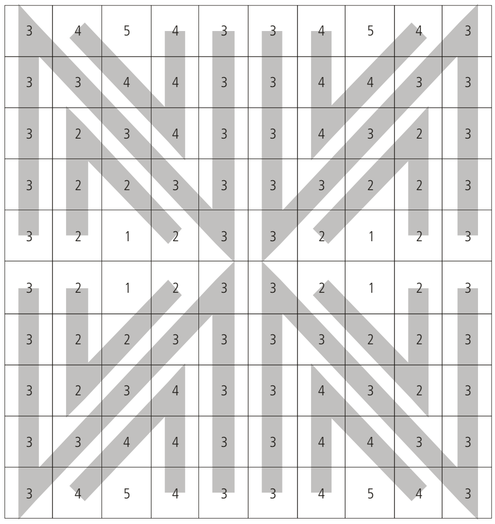


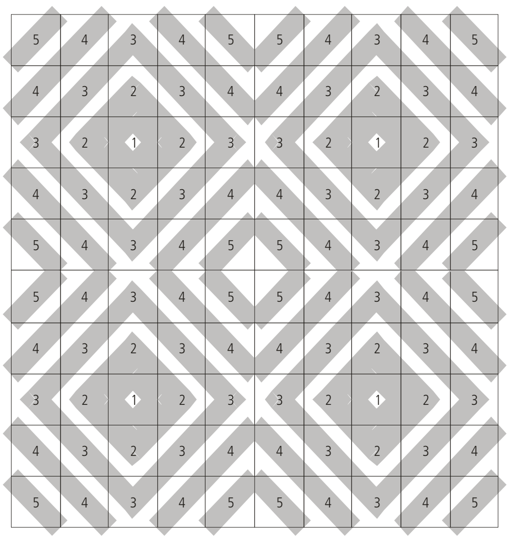
Manipulando el grado, velocidad y dirección de la gradación se pueden obtener un número ilimitado de variaciones de estructuras de gradación.

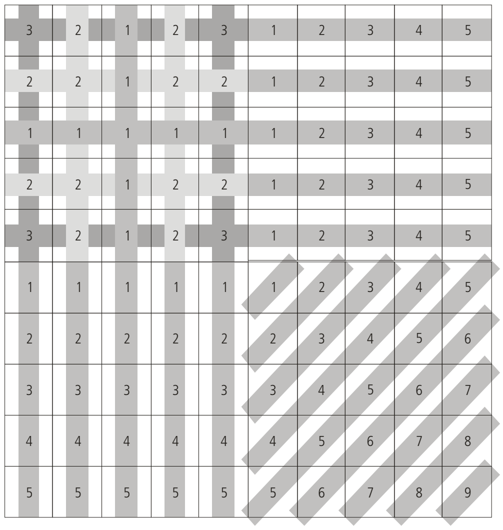
5. **Combinación:** se puede formar un modelo de gradación por combinación de modelos de gradación más pequeños de forma que se llegue a crear una estructura de gran complejidad.

[8] Wucius Wong, *Ibidem*.









4.4.1.3.- Estructuras de radiación

1. Concepto de radiación

La radiación se produce por la repetición de módulos o líneas estructurales alrededor de un centro común.

La radiación puede tener el mismo efecto de vibración óptica que se encuentra en las estructuras de gradación. Si se repiten módulos o líneas estructurales alrededor de un centro común, se produce un tipo de gradación en la que todas las direcciones de gradación de la secuencia se localizan en el centro. Se puede decir que la radiación es un caso especial de gradación. A veces la diferencia entre un esquema de gradación y otro de radiación es bastante indefinida y por lo tanto es difícil identificar sus estructuras.

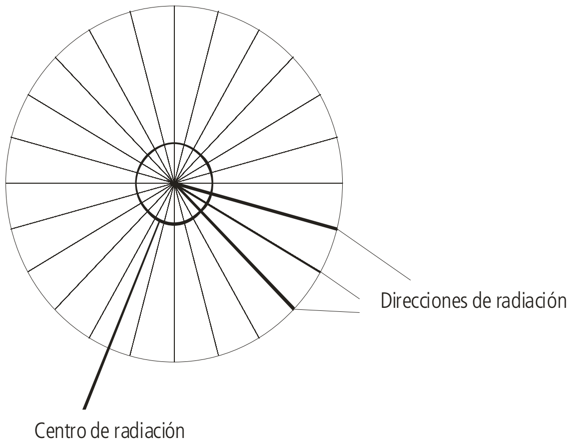
Todo esquema de radiación tiene las siguientes características:

1. Es multisimétrico: tiene una simetría múltiple alrededor de un punto.
2. Posee uno o varios puntos focales que son el centro de la radiación.
3. Produce la sensación de un movimiento óptico, desde o hacia el centro.

Toda estructura de radiación se compone de dos elementos que combinados entre sí, permiten una gran variación de modelos de radiación y de una gran complejidad:

1. Centro de radiación: es el punto focal del diseño y es el lugar entorno al cual giran todos los módulos y líneas estructurales. El centro de la radiación no siempre es el centro físico del diseño.

2. Direcciones de radiación: hacen referencia tanto a las direcciones de las líneas estructurales como a las de los módulos.



2. Tipos de radiación:

Pueden distinguirse tres tipos de estructuras de radiación:

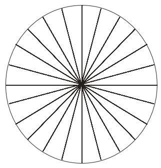
1. Estructura centrífuga
2. Estructura concéntrica
3. Estructura centrípeta

Generalmente en el desarrollo de las estructuras de radiación, aparecen las tres de una forma combinada. Por ejemplo, la estructura de radiación centrífuga, puede utilizar una estructura concéntrica para poder disponer sus módulos; la centrípeta utilizar una estructura centrífuga como guía de construcción; y la concéntrica, utilizar una estructura centrífuga para determinar la posición y dirección de sus líneas estructurales.

1. Estructura centrífuga

En la estructura centrífuga, las líneas estructurales se irradian regularmente desde un centro o punto focal hacia todas las direcciones del espacio.

La estructura centrífuga básica o prototipo, se compone de un conjunto de líneas estructurales rectas que se irradian desde un centro o punto focal a todas las direcciones del espacio. Todos los ángulos formados por las líneas estructurales son iguales.



Operaciones sobre las líneas estructurales

La radiación de una estructura sólo se puede aplicar sobre las líneas estructurales, por lo tanto, las operaciones que se pueden realizar sobre este tipo de estructuras sólo afectan a las líneas estructurales:

1. **Curvatura o quebrantamiento de las líneas estructurales:** las líneas estructurales son regularmente curvadas o quebradas. Para realizar esta operación se utiliza una estructura de radiación concéntrica para determinar el tamaño de cada uno de los tramos de la curvatura o quiebro.

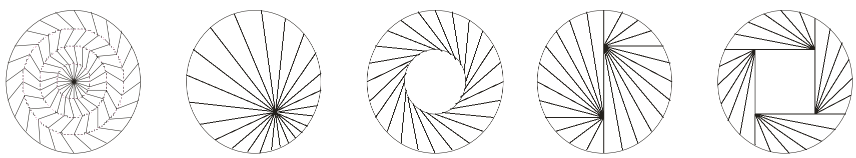
2. **Centro en posición excéntrica:** el centro de radiación de la estructura no tiene que estar necesariamente en el centro de la estructura sino que se puede desplazar ocupando una posición excéntrica que puede llegar hasta el borde de la estructura o posicionarse fuera de ella.

3. **Centro de radiación con apertura:** el centro de radiación, en lugar de ser un punto conceptual, no visible en el dibujo, puede adquirir una dimensión física y presentar formas muy diversas: círculo, óvalo, triángulo, cuadrado o cualquier otra figura poligonal. En este caso, las líneas estructurales se irradian de forma tangente a las figuras geométricas utilizadas. Es decir, se dividen el círculo externo y la figura geométrica utilizada de centro en un número determinado de partes y se unen puntos dos a dos, de forma que los módulos obtenidos en la estructura tengan una distribución regular.

4. **Centros múltiples:** en lugar de un centro de radiación único, la estructura se puede generar utilizando varios centros de radiación que pueden ser: puntos conceptuales, sin identidad física formal, y centros con dimensión poligonal.

   Cuando el centro de radiación tiene forma poligonal, cada vértice o posición significativa del polígono puede convertirse en un nuevo centro de radiación.

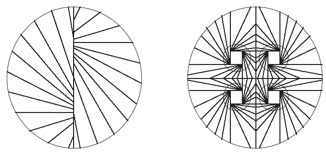
   Al utilizar varios centros de radiación, la estructura queda dividida en varios sectores, cada uno de ellos con su propio centro de radiación desde el que parten las líneas estructurales.



1 2 3 4 4

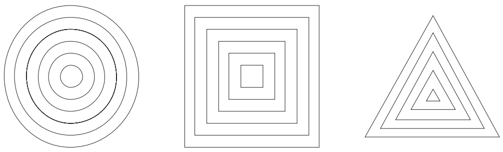
Si se divide la superficie de la estructura en módulos y en cada uno de ellos se proyecta una estructura de radiación creada previamente, el aspecto global de la estructura es de una estructura de radiación con centros múltiples.

Los centros de radiación utilizados pueden ser centros conceptuales, no visibles, o centros poligonales que actúan como centros de apertura. Además, estos centros pueden ser concéntricos o excéntricos en cada uno de los módulos.

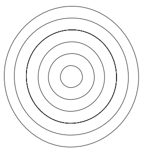


2. Estructura concéntrica

Una estructura concéntrica genera entidades equidistantes en todos sus puntos de una señalada, y con una distancia de separación determinada. Las entidades pueden ser círculos, cuadrados, triángulos o cualquier otra figura poligonal.



La estructura concéntrica básica se compone de círculos equidistantes, con un centro común.



Operaciones sobre líneas estructurales:

La concentración de una estructura radial sólo puede generarse en las líneas estructurales.

1. **Curvatura o quebrantamiento:** las líneas estructurales son regularmente curvadas o quebradas en forma regular.

2. **Centro en posiciones múltiples:**

En lugar de un centro común, la estructura de concentración puede utilizar, para generar su estructura, varios centros de concentración que pueden ser: puntos conceptuales, sin identidad física formal, y centros con dimensión poligonal. Cuando los centros son conceptuales, se pueden distribuir a lo largo de líneas rectas, curvas o quebradas, o figuras poligonales.

Al utilizar varios centros de concentración, la estructura queda dividida en varios sectores, cada uno de ellos con su propio centro de concentración desde el que parten las líneas estructurales.

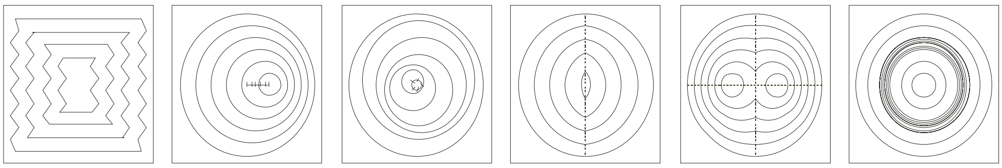
Si se escoge una sección o un sector de una estructura concéntrica creada previamente y se repite un número determinado de veces, puede construirse, a veces con determinados ajustes, una estructura concéntrica con centros múltiples.

Los centros de concentración utilizados en la estructura, igual que ocurría en la estructura de radiación, pueden ser centros conceptuales, ocultos, o centros poligonales, y a su vez, pueden ser, comunes para todo el módulo o múltiples.

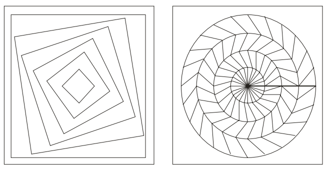
3. **Divisiones sucesivas:** las subdivisiones estructurales que genera una estructura concéntrica se pueden dividir nuevamente generando otras subdivisiones estructurales más pequeñas y complejas que las anteriores.

4. **Rotación gradual de entidades concéntricas:** cuando las entidades concéntricas no son círculos, sino cuadrados, polígonos u otras figuras irregulares, al realizar la estructura de concentración se pueden rotar gradualmente.

5. **Capas concéntricas con radiaciones centrífugas:** se pueden construir radiaciones centrífugas dentro de cada una de las entidades concéntricas generadas.



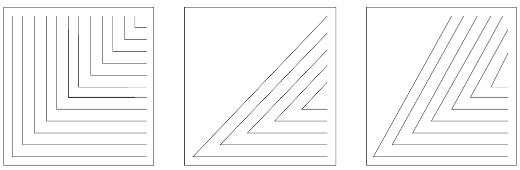
1 2 2 2 2 3



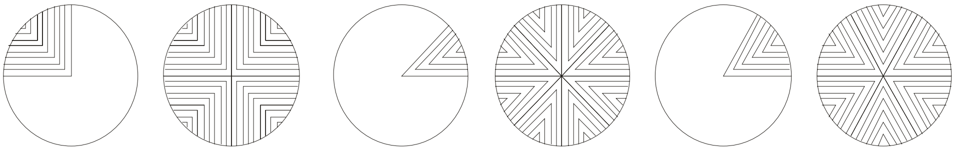
4 5

3. Estructura centrípeta

Las estructuras centrípetas están formadas por una secuencia de líneas estructurales quebradas que en su ángulo de inflexión se dirigen hacia un centro. El centro es, por lo tanto, el lugar hacia donde apuntan todos los ángulos formados por las líneas estructurales.



La estructura centrípeta básica está formada por un conjunto de sectores iguales, formados, cada uno de ellos, por líneas equidistantes, paralelas a los dos lados rectos del sector, formando una serie de ángulos que apuntan hacia el centro.

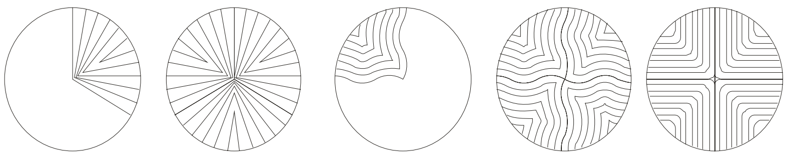


Operaciones sobre las líneas estructurales:

1. **Cambio progresivo de ángulo**: en el desarrollo de cada sector de la estructura centrípeta, las líneas pueden variar progresivamente su dirección con el único objetivo de modificar progresivamente los ángulos que se forman entre ellas. La variación de los ángulos puede ser creciente: formación de ángulos obtusos, o decreciente: formación de ángulos agudos.

2. **Curvatura o quebrantamiento:** las líneas estructurales pueden ser curvadas o quebradas regularmente.

3. **Centro de radiación con apertura: e**l centro de radiación, en lugar de ser un punto conceptual, no visible en el dibujo, puede adquirir una dimensión física y presentar formas muy diversas: círculo, óvalo, triángulo, cuadrado o cualquier otra figura poligonal.



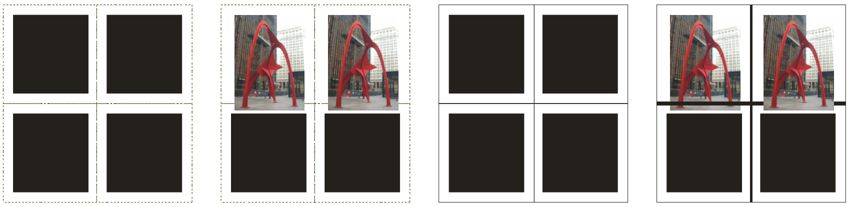
1 1 2 2 3

4.4.2.- Inactiva

Todos los tipos de estructura expuestos anteriormente pueden ser activos o inactivos.

La actividad o inactividad de una estructura está definida por el papel que juegan las líneas estructurales dentro de la estructura y afecta a los módulos o espacios que se generan entre ellas.

Una estructura inactiva se compone de líneas estructurales, visibles o no visibles, que son puramente conceptuales. Se utilizan para construir un diseño; para localizar la posición de formas o de módulos; para señalar recorridos o direcciones;…, pero nunca interfieren con el contenido de sus módulos. Cualquier elemento gráfico colocado en ellos: imagen, color textura,…, puede sobrepasar las dimensiones de su espacio e invadir los espacios de módulos colindantes, pasando por encima o por debajo de las líneas estructurales, si éstas son visibles, y si no lo son, dando la sensación visual de que varios módulos se unen total o parcialmente y creando un cierto aspecto de irregularidad.



4.4.3.- Estructura activa

Una estructura activa se compone de líneas estructurales que pueden ser conceptuales o invisibles, o visibles. Pero tanto si son visibles como invisibles, las líneas estructurales activas dividen el espacio en subdivisiones individuales o módulos que interactúan de varias maneras con las figuras que contienen.

Algunas de las propiedades de una estructura activa son las siguientes:

1. Independencia espacial y gráfica de los módulos:

Las líneas estructurales, visibles o invisibles, generan una completa independencia espacial para los módulos. Cada módulo tiene entidad propia. Es una entidad individual que tiene su propio espacio que se extiende hasta su marco de referencia (las líneas estructurales). Se manifiesta individualmente y puede adquirir propiedades gráficas independientes: color, textura,…, o ser contenedores de figuras o imágenes diferentes a las de los módulos colindantes.

2. Posee unos límites espaciales definidos por las líneas estructurales:

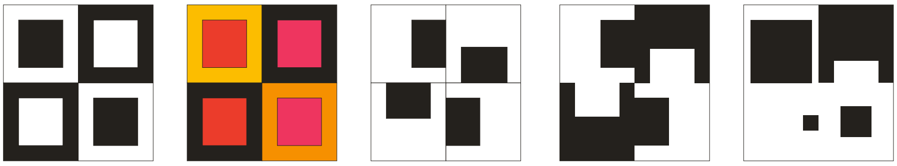
Cada módulo tiene unos límites espaciales definidos por la propia estructura que lo genera. Dentro de las subdivisiones estructurales, cada módulo o cada imagen o figura que contiene, puede desplazarse dentro de su marco para asumir posiciones excéntricas, pero si en este movimiento la imagen sobrepasa los límites del marco, la imagen quedaría cortada y todas aquellas partes que estuviesen fuera de sus límites se perderían.

3. Interacción entre módulos adyacentes:

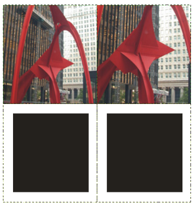
Dos módulos adyacentes pueden interactuar entre sí haciendo que las propiedades gráficas de un módulo se compartan o no con el contiguo, creando visualmente una sensación de continuidad en la superficie al realizarse operaciones de unión, intersección o sustracción entre los módulos.

4. Variaciones de posición y dirección:

En una estructura activa (visible o invisible) cada módulo está limitado por la subdivisión espacial que crean sus propias líneas estructurales, pero no es necesariamente ni del mismo tamaño que la división estructural ni que esté situado en su centro. Puede, tener el mismo tamaño o ser más pequeño que él, pero rara vez excederá sus límites. Puede, asimismo, tener distintas posiciones y direcciones con respecto a su subdivisión estructural.



1 1 2 3 4



Estructura invisible

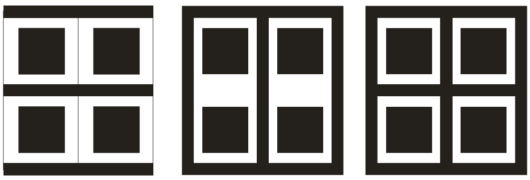
Estructura visible

4.4.4.- Estructura visible

En las estructuras visibles las líneas estructurales existen como líneas reales, físicas, visibles, de un determinado grosor. Estas líneas son un elemento visual y por lo tanto tienen todas las propiedades y características gráficas que se pueden aplicar sobre cualquier imagen. Pueden actuar aisladamente o interactuar con las líneas estructurales de los módulos adyacentes que limitan y con sus contenidos.

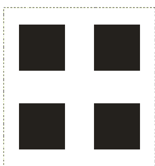
Las líneas estructurales visibles pueden ser positivas o negativas. Cuando son positivas actúan como elemento diferenciador de un fondo. Se las puede identificar visualmente en su extensión y grosor. Cuando son negativas, se confunden con el fondo; se funden con él. Parece que, aunque están físicamente, no se las puede diferenciar.

En los diseños aparecen combinadas las líneas visibles positivas y negativas. Además, estas líneas estructurales, visibles, actúan conjuntamente con las invisibles.



4.4.5.- Estructura invisible

En las estructuras invisibles, las líneas estructurales son conceptuales; se utilizan para realizar el diseño, tienen dimensiones pero no aparecen físicamente en la imagen, incluso aunque, corten un fragmento de un módulo, si son activas.



4.5.- ANÁLISIS DE OBRAS

4.5.1.- ESTRUCTURAS: TIPOLOGÍA

Algunos artista dedican su labor investigadora a indagar sobre los diferentes elementos que forman parte de la definición del concepto de estructura: líneas estructurales, módulos y nodos; y utilizan los resultados de estos trabajos como fuente de inspiración para desarrollar su obra plástica. La riqueza y la complejidad con la que logran expresarse muestran la importancia y vigencia que este tema presenta dentro del mundo del arte.

En este apartado, se van a clasificar una serie de obras de arte según los tipos de estructuras, descritos en la parte teórica de este capítulo. Este estudio se va a realizar por medio de tablas que recogen de una forma esquemática la estrategia que el artista ha elegido para desarrollar su idea estética. En algunos casos, cuando sea oportuno, se complementará la información con una pequeña descripción de las operaciones realizadas sobre las estructuras.

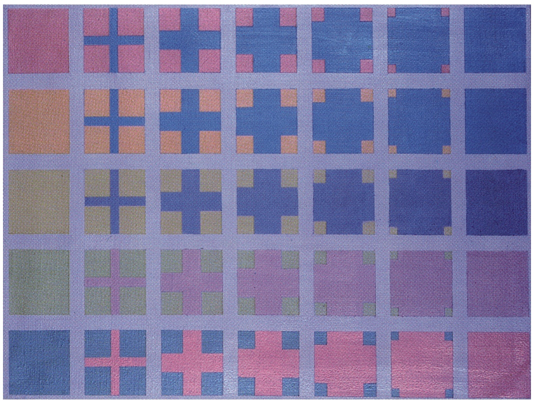
El tipo de tabla general que se va a utilizar está definido por los siguientes parámetros:

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición					
	Op. sobre líneas estructurales				
	Operaciones sobre módulos				
Gradación					
	Gradación de líneas estructurales				
	Gradación de módulos				
Radiación					
Centrífuga					
Concéntrica					
Centrípeta					

Cada tabla recoge información sobre los tres tipos de estructura formal que se repiten habitualmente en este tipo de obras: estructura de repetición, de gradación y de radiación; y las dos formas que tiene una estructura para actuar sobre un soporte: actividad / inactividad, visibilidad / invisibilidad. También diferencia, dentro de cada tipología, cuál es el elemento protagonista de la estructura: líneas estructurales o módulos, y cómo conviven entre sí.

4.5.1.1.- VINCENZO ARENA

1. Obra 1 / 92, 1992[1]



Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x				
	Op. sobre líneas estructurales	x		x	
	Operaciones sobre módulos				
Gradación	x				
	Gradación de líneas estructurales				
	Gradación de módulos x				

La gradación de módulos en la obra se produce por progresión espacial horizontal: hay una progresión en el espacio del tamaño de los módulos. Entre el primer y el último módulo hay una figura, una imagen formada por dos líneas estrechas centradas, perpendiculares entre sí, que aparece y va aumentando su tamaño hasta invadir toda la extensión del módulo. A lo largo de toda la progresión, las líneas se mantienen en la misma posición pero su anchura va variando, aumentando sus dimensiones hasta que se hacen tan grandes para el módulo, que completan toda su superficie. En la progresión hay un cambio cromático del primer módulo, módulo de la izquierda, al último, módulo de la derecha. Por ejemplo en la última fila, la progresión comienza con el color del fondo: azul, y poco a poco va aumentando el color de la figura: el rojo, hasta sustituirlo. El modelo de gradación utilizado para desarrollar la estructura es un modelo de movimiento paralelo de líneas rectas horizontales:

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

[1] Opera 1 / 92, 1992.

La velocidad de gradación es constante y gradual en todo el proceso, produciendo una evolución de la gradación equilibrada y proporcional.

2. Estructura serial modular Nº 11, 1971[2]

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	
Op. sobre líneas estructurales					
Operaciones sobre módulos					
Gradación	x	x			x
Gradación de líneas estructurales	x				
Gradación de módulos					

Esta obra está formada por una combinación de dos tipos de estructuras: la primera, es una estructura de repetición simple en las líneas verticales de la obra, ya que todas las subdivisiones verticales son constantes. Hay que añadir además que las líneas de esta estructura (verticales) son visibles y activas y que todas ellas han sido quebradas de forma que respeten la estructura de gradación impuesta por las líneas horizontales.

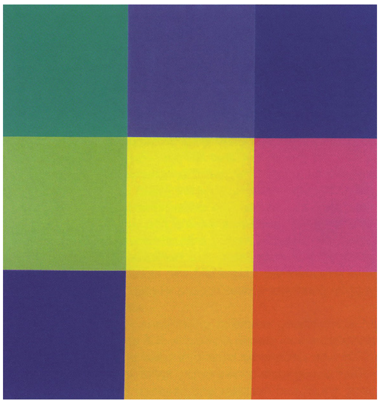
La segunda es una estructura de gradación sobre las líneas estructurales horizontales. Existe una gradación sobre las subdivisiones estructurales de la obra: las líneas horizontales están espaciadas con tamaños gradualmente decrecientes de arriba abajo hasta la mitad de la obra; y crecientes, de la mitad de la obra hasta su borde inferior. Estas líneas horizontales son invisibles pero activas: marcan un lugar a partir del cual, las líneas verticales quedan alineadas sin posibilidad de invadir el territorio del siguiente módulo.

Entre las líneas estructurales horizontales se dan las siguientes propiedades: hay un deslizamiento de una fila con respecto a la otra; y una reflexión o simetría horizontal de las cinco primeras filas de la obra sobre la totalidad de la obra.

[2] Struttura seriale modulare Nº 11, 1971.

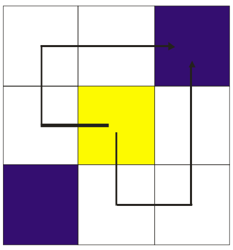
4.5.1.2.- RICHARD PAUL LOHSE

1. Dos gradaciones hacia el violeta, 1955 / 1975[3]



Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x				
Op. sobre líneas estructurales		x			x
Operaciones sobe módulos	x				

En los módulos hay dos progresiones cromáticas del amarillo al azul-violeta: una siguiendo el camino a través de la gama de los colores cálidos: amarillo, naranja, rojo, magenta y azul violeta; y otra a través de la gama de los colores fríos: amarillo, verde amarillento, verde, azul y azul-violeta:

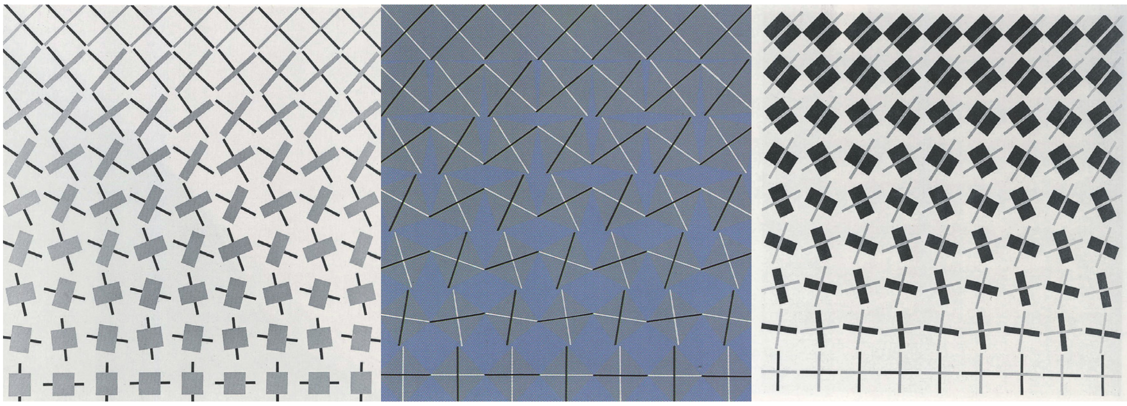


En la diagonal ascendente, del vértice inferior izquierda al vértice superior derecha, se sitúan el color amarillo, inicio de las progresiones, en el centro, rodeado de su complementario el azul-violeta, en los dos extremos.

[3] Zwei Stufungen gegen Violett, 1955 / 1975.

4.5.1.3.- MATTI KUJASALO

1. A. Cuadro, 1977 / B. Cuadro, 1976 / C. Cuadro, 1977[4]



A B C

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x				
Op. sobre líneas estructurales		x			x
Operaciones sobre módulos					
Gradación	x				
Gradación de líneas estructurales					
Gradación de módulos	x				

La gradación de módulo se produce sobre dos elementos, dos astas de una cruz o, dos líneas perpendiculares entre sí, según los siguientes criterios:

En A, en cada una de las columnas se realizan las siguientes progresiones: para una de las líneas de la cruz, la gradación comienza en la fila inferior de la imagen, de forma horizontal o vertical, y evoluciona a lo largo de la progresión hasta convertirse en una línea diagonal a 45º que va del vértice superior izquierdo al vértice inferior derecha. Para la otra línea de la cruz, la gradación comienza teniendo forma de cuadrado y evoluciona estrechándose en una dirección del espacio y alargándose en la otra, hasta convertirse en otra línea diagonal a 45º que va del vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho. Cada una de estas líneas de la cruz se identifica con un color diferente: la primera lo hace con el color negro, y la segunda, con un gris medio.

En B, en cada una de las columnas se realizan tres progresiones: dos que corresponden a las dos líneas perpendiculares entre sí de la cruz, y una tercera que utiliza un cuadrado como elemento de la progresión. En las dos

[4] A. Painting, 1977 / B. Painting, 1976 / C. Painting, 1977.

primeras progresiones, la evolución de las líneas se produce desde la línea horizontal o vertical hasta una diagonal a 45º. En la tercera progresión, el cuadrado, que comienza estando situado a 45º, apoyado sobre uno de sus vértices, evoluciona hasta convertirse en un cuadrado horizontal apoyado sobre uno de sus lados. Durante el progreso de la serie, en este caso, hay un cambio de tamaño: el cuadrado va aumentando su tamaño hasta completar el tamaño máximo del módulo en el que está inscrito.

En C, en cada una de las columnas se realizan las siguientes progresiones: para una línea de la cruz, de color gris medio, la gradación comienza en la fila inferior de la imagen, de forma horizontal o vertical, y evoluciona a lo largo de la progresión hasta convertirse en una línea diagonal a 45º que va del vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho. Para la otra línea de la cruz, de color negro, la gradación comienza en la fila inferior de la imagen, de forma horizontal o vertical y evoluciona ensanchándose en una dirección del espacio y manteniéndose constante, en cuanto a longitud, en la otra, hasta convertirse en un cuadrado a 45º en la fila 9.

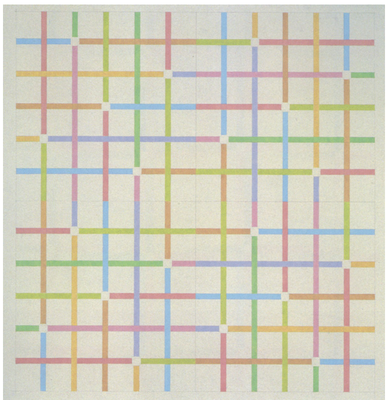
En todos los casos, A, B y C, el modelo de gradación utilizado para desarrollar la estructura es un modelo de movimiento de líneas rectas verticales paralelas, de abajo arriba cuyo concepto se puede expresar según la siguiente norma: de la diferencia a la igualdad. Horizontalmente, los módulos en las filas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, muestran un alternancia, por columnas, de alguna propiedad cualitativa de las formas: color, grosor, tamaño,... En la fila 9 todas las propiedades se han homogeneizado. La alternancia también se produce por la dirección de los movimientos entre columnas: unas columnas realizan la progresión girando sus módulos espacialmente hacia la derecha y otras hacia la izquierda.

9	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1

La velocidad de gradación es constante y gradual en todo el proceso, produciendo una evolución de la gradación equilibrada y proporcional.

4.5.1.4.- SHIZUKO YOSHIKAWA

1. Z200 "5 Coordinaciones – 2 acordes - giro", 1987[5]



Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	x
Op. sobre líneas estructurales	x			x	x
Operaciones sobre módulos					

Esta obra está formada por cuatro módulos cuadrados de 6 x 6 = 36 cuadrados y cada uno de ellos con una estructura de repetición simple:

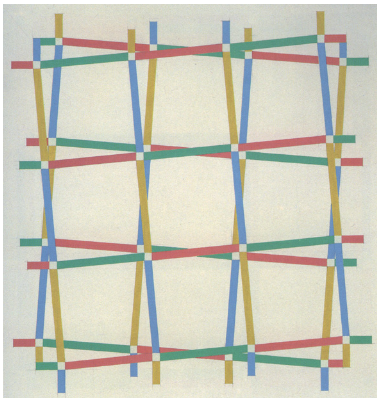
1	2
3	4

Las líneas estructurales de cada uno de los módulos son todas visibles excepto las de la periferia del propio módulo y algunos tramos de las otras líneas. En cada uno de los módulos se presentan 5 líneas estructurales verticales y 5 horizontales (5 coordinaciones). Cada una de ellas está formada por dos partes (2 acordes), separadas por un cuadrado en blanco, línea estructural no visible, en un punto de intersección entre las horizontales y verticales. Cromáticamente, en cada uno de los módulos, se representa en una de las direcciones del espacio, todos los acordes que giran en torno a una pareja de complementarios: amarillos naranjas – azulados, y en la otra dirección del espacio, en torno a los verdes – rojizos.

La obra completa se realiza haciendo girar, 4 veces, uno de los módulos por uno de sus vértices.

[5] Z200 "Fünf koordinationen – 2 akkorden – drehung", 1987.

2. Z229 "Superposición – compactación Nº 12", 1989[6]



Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	x
Op. sobre líneas estructurales	x			x	x
Operaciones sobre módulos					

Esta obra está formada por un conjunto de estructuras de repetición simple superpuestas con tramos visibles e invisibles. Se pueden distinguir dos estructuras cuadradas de 3 x 3 = 9 cuadrados giradas una con respecto a la otra un ángulo agudo suave, con todas sus líneas estructurales visibles excepto en los puntos de intersección de sus tramas que se hacen invisibles. Además de estas dos estructuras, se pueden ver un conjunto de estructuras de 0º, 90º que sólo son visibles por medio de unos pequeños trazos de sus líneas estructurales que se encuentran localizados en la periferia de las estructuras anteriores e interactuando con ellas en los siguientes puntos: en los puntos de intersección de sus lados exteriores y en los vértices: se añaden pequeños trazos en escuadra que se utilizan para unir los extremos de las dos estructuras anteriores.

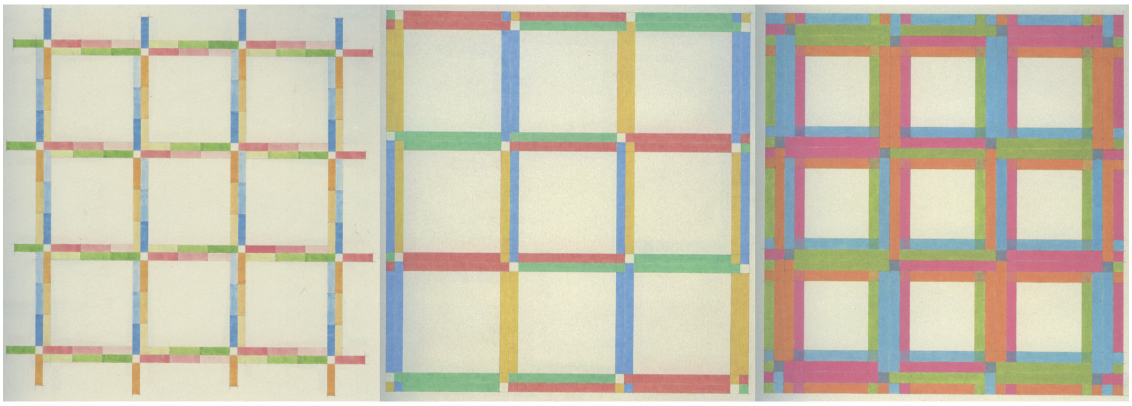
Esta obra, desde el punto de vista de sus estructuras, es muy sutil y compleja. Parece, visualmente, muy fácil de consumir, pero, conceptualmente es complicada en su concepción y elaboración.

Desde el punto de vista cromático, el criterio conceptual que se utiliza es el de trabajar con colores en torno a dos parejas de complementarios: amarillo – azul violeta y magenta – verde. O si se prefiere, trabajar en torno al concepto de cuatro colores básicos específicos: amarillo, azul, rojo y verde.

Las líneas estructurales de cada una de las retículas están divididas por direcciones: vertical y horizontal; y por tramos: van de nodo a nodo o de punto de intersección de dos líneas estructurales perpendiculares entre sí a punto de intersección de otras dos líneas estructurales contiguas. Cromáticamente, todas las líneas estructurales de una misma dirección del espacio utilizan la misma pareja de colores complementarios: las verticales, amarillo – azul; y las horizontales, magenta – verde; y se aplican alternando los colores de la pareja en cada uno de los tramos de la línea estructural.

[6] Z229 "Überlagern – verdichten Nº 12", 1989.

3. A. Z 224 "Superposición – compactación Nº 7", 1989 / B. Z 233 "Superposición – compactación Nº 16", 1989 / C. "Superposición – compactación", 1989 [7]



A B C

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	
Op. sobre líneas estructurales		x			
Operaciones sobre módulos					
Radiación	x				
Centrífuga					
Concéntrica	x				
Centrípeta					

Esta obra está formada por una estructura de repetición simple de 3 x 3 = 9 cuadrados con todas sus líneas estructurales visibles.

A cada uno de los módulos de esta estructura se le aplica una estructura radial de concentración de forma que las líneas estructurales de dos estructuras contiguas estén unidas entre sí. En B y C aparecen todas las líneas estructurales visibles y en A, a la estructura de repetición simple se le añaden una serie de tramos, en sus puntos de intersección, con la intención visual de indicar que estas estructuras de concentración pueden expandirse o contraerse: alejarse o acercarse al centro.

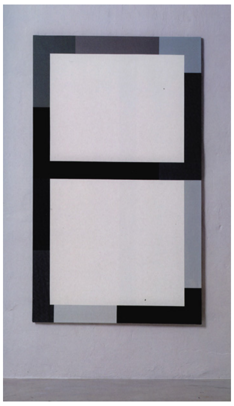
El criterio cromático es el mismo que se ha utilizado en las dos obras anteriores: las líneas estructurales de cada una de las direcciones del espacio están representadas por una pareja de complementarios: en una dirección del espacio, las líneas estructurales son amarillo naranjas – azuladas, y en la otra dirección, verdes – rojizas.

[7] A. Z 224 "Überlagern – verdichten Nº 7", 1989 / B. Z 233 "Überlagern – verdichten Nº 16", 1989 / C. "Überlagern – verdichten", 1989.

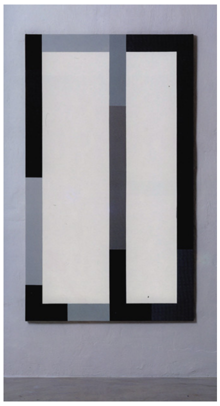
En A, es importante señalar cómo en cada una de las líneas estructurales se produce una alternancia de los colores de la pareja de complementarios y que, además, cada uno de los tramos de cada uno de los colores está a su vez dividido en tres tramos más pequeños que cromáticamente se colorean con una gama monocroma de tres tonos del color correspondiente. En B y C, el uso de los colores por tramos sucesivos no sigue una alternancia concreta sino que se realiza por ritmos de color.

4.5.1.5.- NORBERT THOMAS

1. A. Horizontal 1 (Imagen de arquitectura), 1990 / B. Vertical 2 (Imagen de arquitectura), 1990[8]



A



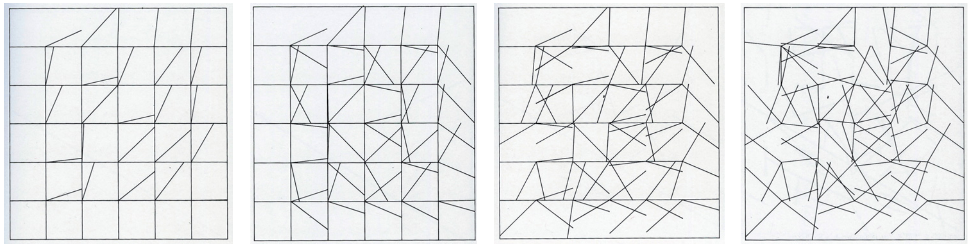
B

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x		x	x	
Op. sobre líneas estructurales	x				
Operaciones sobre módulos					

Estas dos obras están representadas por una estructura repetitiva simple de un único módulo y una mediana que, al tener anchura, divide el rectángulo en dos partes desiguales. Lo interesante de estas estructuras es el tratamiento plástico que se les da. Cada una de ellas, A y B, tiene un grosor uniforme y está dividida en un número determinado de partes desiguales: 10 y 11 respectivamente. A las partes de cada una de las estructuras se les aplica tonos de una escala monocroma de grises de una forma aleatoria.

[8] A. Waagerecht 1 (Architektur-Bild), 1990 / B. Senkrecht 2 ((Architektur-Bild), 1990.

2. Sistema 12 / 1-4, 1975 / 1976[9]



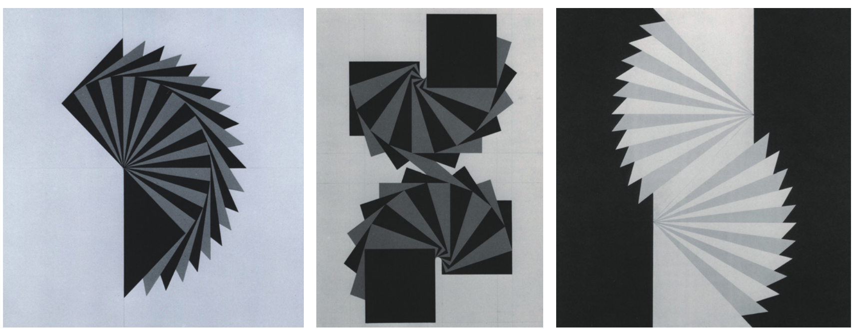
Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x		x	x	
Op. sobre líneas estructurales	x				
Operaciones sobre módulos					

Esta obra está basada en una estructura de repetición simple de 6 x 6 = 36 cuadrados con todas las líneas estructurales visibles e inactivas: los módulo se pueden ver invadidos por líneas estructurales pertenecientes a otros módulos de la estructura. Lo interesante de este trabajo es el uso del concepto de estructura: los protagonistas son los puntos de intersección o nodos. Un nodo es el lugar donde se cortan cuatro tramos de líneas estructurales. Los nodos permanecen constantes en toda la serie, lo que va a variar son la disposición de los tramos de líneas estructurales que parten de cada uno de ellos y que rotan en distintos ángulos para configurar los distintos signos que aparecen en cada una de las piezas.

En este sistema hay una evolución del concepto de orden desde un orden simple, descriptivo en la primera obra por la izquierda, a un orden complejo y caótico en la primera obra por la derecha.

4.5.1.6.- KARL-HEINZ ADLER

1. A. Estratificación, 1957 / 1960 / B. Estratificación, 1957 / 1958 / C. Estratificación, 1959



A B C

[9] System 12 / 1-4, 1975 / 1976.

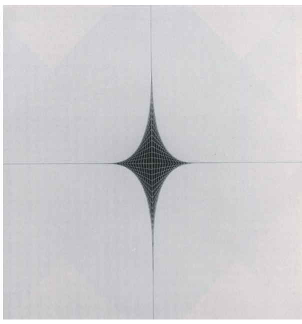
Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Radiación	x		x		x
Centrífuga	x				
Concéntrica					
Centrípeta					

Las tres composiciones de Karl-Heinz Adler son estructuras centrífugas formadas con módulos geométricos: triángulos o cuadrados, repetitivos, que irradian desde un centro. Todos los ángulos formados por cada uno de los módulos al girar un cierto número de grados desde el centro de rotación son iguales. Las líneas estructurales son invisibles e inactivas: al estar los módulos superpuestos, cada uno de ellos invade el módulo siguiente de la radiación.

En A, la estructura de radiación tiene un único centro de rotación que está centrado, es el centro físico del diseño, y es un punto. En B, hay dos centros de radiación excéntricos próximos a los bordes superior e inferior del dibujo. Estos centros de rotación son abiertos y tienen forma de dos agujeros redondos. En este caso, los módulos no se irradian desde el centro del agujero sino que son tangentes al propio círculo. La obra está dividida en dos sectores: la mitad superior del soporte y la mitad inferior. Entre las dos partes existe una relación de una doble simetría: una vertical y otra horizontal. En C, también hay dos centros de radiación excéntricos próximos a los lados derecho e izquierdo del dibujo. Estos centros de rotación, a diferencia de los anteriores, son puntuales y por lo tanto, los módulos se irradian directamente desde ellos. Entre las dos radiaciones existe una relación de simetría vertical con desplazamiento horizontal.

Cromáticamente, cada una de las obras está representada por un contraste de luminosidad con un intervalo o distancia pequeño: entre módulo y módulo hay una alternancia de dos valores diferentes de grises.

2. Sin título, 1984



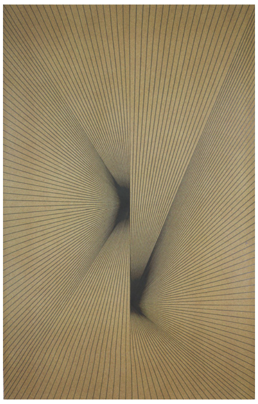
Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	
Op. sobre líneas estructurales					
Operaciones sobre módulos					

Radiación	x
Centrífuga	
Concéntrica	
Centrípeta	x

Aunque este tipo de estructura tiene varias interpretaciones conceptuales, aquí se va a considerar como una estructura que es el resultado de la siguiente operación: una estructura repetitiva básica en forma cuadrada apoyada sobre uno de sus vértices. Si se consideran elásticos los bordes de la propia estructura y se realiza una fuerza externa e igual sobre cada uno de sus lados, la estructura se ve afectada y cambia gradualmente de forma, adquiriendo la configuración que se ve en la obra. Es importante señalar que las líneas estructurales de la estructura repetitiva básica quedan también deformadas.

En este tipo de estructura, el centro no es el lugar desde donde parten los módulos o las líneas estructurales de la obra, sino el sitio donde convergen todos los ángulos y líneas estructurales como consecuencia de ejercer todos ellos una presión hacia un mismo lugar. El centro, en esta obra, no se presenta como un lugar puntual sino como centro en forma de polígono, rombo, con los lados ligeramente curvos.

3. Líneas en serie, 1991[10]



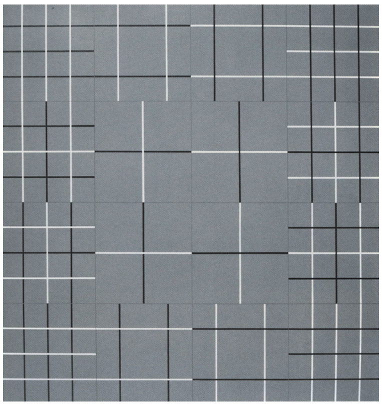
Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Radiación	x				
Centrífuga	x	x		x	
Concéntrica					
Centrípeta					

[10] Serielle Lineaturen, 1991.

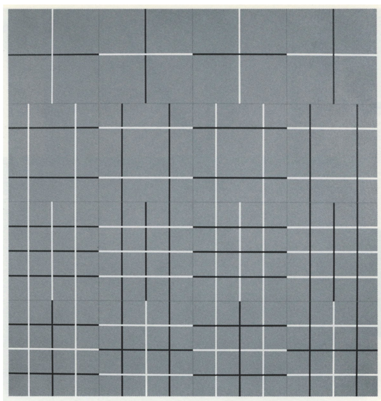
Esta obra responde a una estructura de radiación centrífuga básica con un centro único dividido verticalmente en dos partes, de forma que la obra queda fragmentada en dos mitades verticales: la parte de la derecha y la parte de la izquierda. Hay que añadir, además, que este centro que en una primera posición probablemente ocupase el centro geométrico del soporte, al dividirse se desplaza verticalmente, por la mediana del rectángulo, uno hacia arriba y otro hacia abajo, ocupando posiciones excéntricas del soporte. Desde cada una de estas nuevas posiciones, cada uno de los centros irradia líneas estructurales regulares, con el mismo ángulo constante, hacia todas las direcciones del espacio dentro de la mitad que le corresponde. Cada una de las mitades queda dividida, visualmente, en tres partes debido al trazado de las líneas que unen dos de los vértices del rectángulo con el centro de la mitad que les corresponde.

4.5.1.7.- JAN KUBICEK

1. A. Adición horizontal / vertical, positivo / negativo II, 1970 / B. Adición horizontal / vertical, positivo / negativo I, 1970



A



B

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x			x
Op. sobre líneas estructurales	x				
Operaciones sobre módulos					

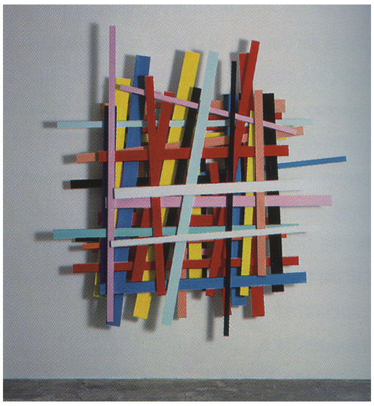
Estas dos obras de Jan Kubicek están realizadas de acuerdo a la misma estrategia compositiva: utilizar una estructura de repetición simple de 4 x 4 = 16 cuadrados, con líneas estructurales invisibles y activas. Sobre cada uno de los módulos obtenidos, se vuelven a aplicar otras estructuras de repetición simple con el mismo número de subdivisiones estructurales: 4 x 4, pero de manera que en cada uno de ellos, el número de subdivisiones estructurales visibles e invisibles varía.

Las dos composiciones tienen los mismos módulos estructurales pero varían en el orden en el que están situados. En A, desde el punto de vista de las líneas estructurales, la composición es concéntrica y simétrica de arriba abajo y de izquierda a derecha. En B, la distribución de los módulos se realiza de forma que, horizontalmente, los cuatro módulos de una misma fila, sean estructuralmente iguales; y verticalmente se produzca, de arriba abajo, una progresión creciente del número de líneas estructurales que hay en cada uno de los módulos.

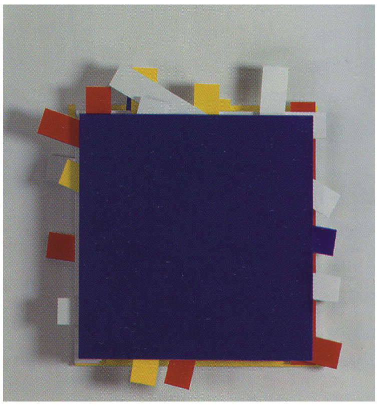
Cromáticamente las composiciones utilizan un contraste de luminosidad de tres tonos de grises diferentes: blanco, negro y gris medio, que se distribuyen rítmicamente por la composición. El gris medio se utiliza para el fondo, y el blanco y el negro para definir el tono de las líneas estructurales, de manera que, en cada uno de los módulos, cada uno de estos colores defina todas las líneas estructurales de una misma dirección espacial y el otro, las líneas estructurales perpendiculares a ellas.

4.5.1.8.- IMI KNOEBEL

1. A. Sweet Baby Jane, 1991 / B. Odyshape C3, 1995



A



B

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x		x	x	
Op. sobre líneas estructurales	x				
Operaciones sobre módulos					

En A, se utilizan un conjunto de estructuras repetitivas simples de un único módulo, superpuestas. Cada una de estas estructuras está representada por las cuatro líneas estructurales que limitan su módulo. En la composición cada conjunto de cuatro líneas se identifica por un tono diferente. La composición está formada por una desintegración de todas estas estructuras formales que, desplazándose y girando ligeramente las líneas por el lugar que le corresponde al módulo de la estructura, configuran una nuevo orden más complejo que el anterior. En B, el desarrollo de la obra se realiza de la misma manera que se ha realizado en A, pero con la particularidad de que, en esta composición, el módulo de la estructura se hace visible convirtiéndose en protagonista y ocupando una posición espacialmente, por delante, de las propias líneas estructurales.

2. A. ILLLIA, 2002 / B. AAAMOO, 2001

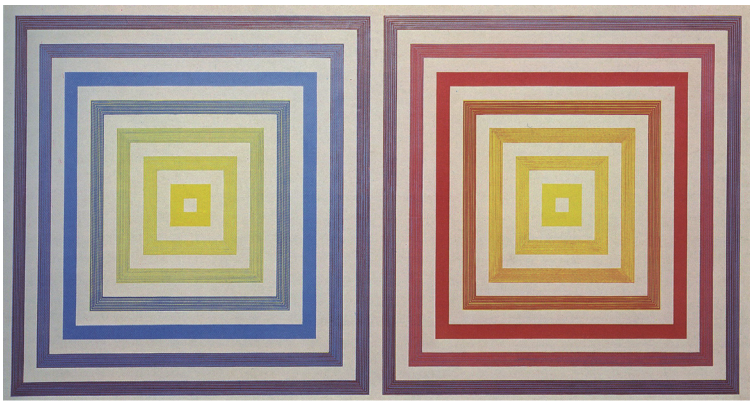
A B

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	x
Op. sobre líneas estructurales	x				
Operaciones sobre módulos					

En estas obras de Imi Knoebel, se utilizan estructuras repetitivas básicas de 2 x 2 = 4 cuadrados, con líneas estructurales activas: permiten que cada uno de los módulos sea cromáticamente independiente. El tema principal de estas estructuras es trabajar con el concepto de visibilidad e invisibilidad de las líneas estructurales. En A, en dos de los módulos, los que ocupan la diagonal que va desde el vértice superior izquierdo al vértice inferior derecha, las líneas estructurales son activas pero invisibles; y en los otros dos, son visibles y activas. En B, tres de los módulos están ocupados por líneas estructurales invisibles y activas, y el cuarto por líneas estructurales visibles.

4.5.1.9.- FRANÇOIS MORELLET

1. Del amarillo al púrpura, 1956



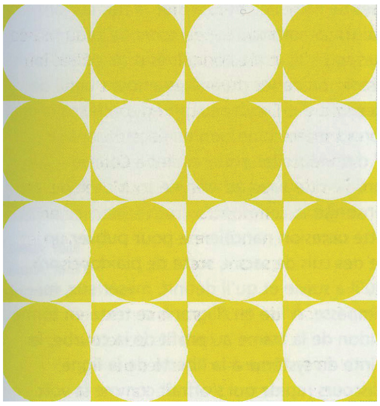
Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Radiación	x			x	

Centrífuga	
Concéntrica	x
Centrípeta	

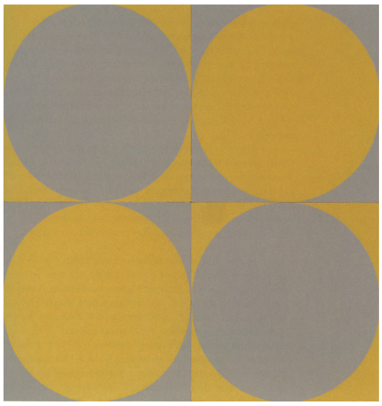
Estructura cuadrada de radiación concéntrica formada por cuadrados escalados progresiva y regularmente, y espaciados hacia el centro uniformemente. Esta obra está formada por dos centros excéntricos colocados en la mediana horizontal del soporte rectangular de la obra que generan dos estructuras concéntricas simultáneas, dividiendo el soporte, verticalmente, en dos partes iguales.

En las dos estructuras concéntricas hay un recorrido cromático del amarillo, en el centro, a su complementario, el azul – violeta, en los cuadrados más exteriores de la obra. La diferencia, desde el punto de vista cromático, de las dos estructuras cromáticas, está en el recorrido que realizan para ir de un color a su complementario. En la estructura de la izquierda, el trayecto se realiza por la gama de los colores fríos del círculo cromático: amarillos, verdes, azules y azul – violeta. En la estructura de la derecha, el recorrido se realiza por la gama de los colores cálidos del círculo cromático: amarillo, naranja, rojo, magenta y azul – violeta. Visualmente, se puede apreciar que la gama de los colores fríos, a la izquierda, retrocede; y la gama de los colores cálidos, a la derecha, avanza hacia el espectador. Es interesante destacar que la misma estructura con diferente gama cromática, tiene visualmente comportamientos diferentes.

2. A. Pintura, 1953 / B. Círculo amarillo , círculo gris, 1954



A



B

Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x			x

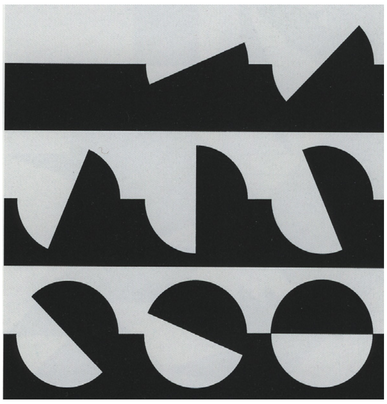
Op. sobre líneas estructurales	
Operaciones sobre módulos	x

Estas dos obras de Morellet se generan a partir de una estructura repetitiva formada por líneas estructurales invisibles pero activas: aunque las líneas estructurales no forman parte física de la obra, cada módulo se encuentra enmarcado dentro de cuatro líneas estructurales que limitan su campo de acción e impiden que otros módulos ocupen su espacio.

Entre los módulos se ha producido un ritmo sistemático y alterno de una gama cromática de dos tonos. En A, los colores utilizados son amarillo y blanco, y la alternancia se produce entre los colores de la figura y el fondo de uno de los módulos de la composición, y los colores de la figura el fondo de su módulo contiguo. En B, los colores utilizados son amarillo anaranjado y gris medio, y el juego de la alternancia que se produce es igual que en el caso anterior.

4.5.1.10.- ALBERT RUBENS

1. B.1-P.9, 1966



Formal			Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición		x	x			x
	Op. sobre líneas estructurales	x				
	Operaciones sobre módulos					
Gradación		x				
	Gradación de líneas estructurales					
	Gradación de módulos	x				

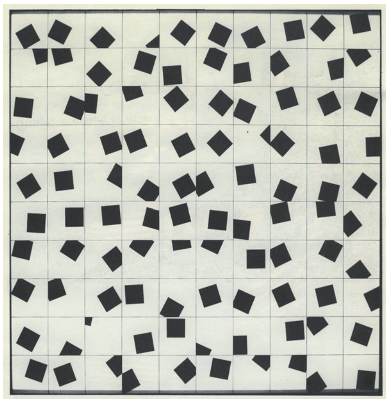
En esta obra se dan dos tipos de estructuras simultáneamente. En primer lugar, una estructura repetitiva básica que divide el soporte cuadrado en 3 x 3 = 6 módulos cuadrados iguales. Las líneas estructurales de esta estructura son activas e invisibles.

Sobre los módulos de esta estructura repetitiva se va a realizar una gradación de módulos. La gradación comienza en el módulo superior izquierdo y avanza, de izquierda a derecha y de arriba abajo, hasta el módulo inferior derecho. Cada uno de los módulos está compuesto por dos elementos: una línea que divide el cuadrado, horizontalmente, en dos partes iguales que cromáticamente se pintan, la superior de blanco, y la inferior de negro; y un círculo dividido en dos partes iguales por su diámetro y coloreadas cada una de ellas en blanco o negro.

La gradación consiste en que manteniendo el fondo constante, el círculo que inicialmente tiene su diámetro divisorio dispuesto horizontalmente, con su mitad blanca en la parte superior y mitad negra en la parte inferior, vaya girando gradualmente, en el sentido contrario a las agujas del reloj hasta que al llegar al último módulo, haya realizado un giro completo de 180º, y por lo tanto se encuentre, otra vez con el diámetro divisor en posición horizontal, pero ahora, la mitad blanca del círculo esté en la parte inferior del círculo y la mitad negra, en la parte superior. En este proceso de gradación hay un punto de inflexión que se produce en el módulo central de la estructura, y que obliga a que en ese punto el diámetro del círculo haya alcanzado la verticalidad con la mitad blanca a la izquierda y la mitad negra a la derecha. Hay que señalar también, que la velocidad de gradación es constante y pautada en toda la secuencia.

4.5.1.11.- RYSZARD WINIARSKI

1. Cientos de accidentes, 1977



Formal		Activa	Inactiva	Visible	Invisible
Repetición	x	x		x	
Op. sobre líneas estructurales					
Operaciones sobre módulos	x				

Estructura repetitiva básica con las líneas estructurales visibles y activas. La riqueza de esta estructura reside en las operaciones que se practican sobre los módulos: variación de posición y variaciones de dirección u orientación. Hay que destacar que al ser las estructuras activas, cuando los módulos al desplazarse o girar, exceden el límite del espacio modular que les corresponde, estos se cortan por el lugar que pasa la línea estructural correspondiente.

4.5.2.- OPERACIONES CON ESTRUCTURAS

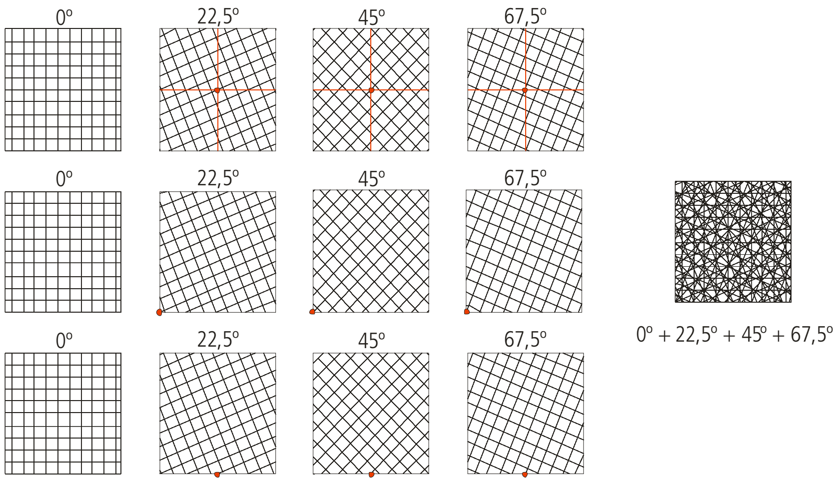
4.5.2.1.- FRANÇOIS MORELLET

En la superposición de retículas es importante tener en cuenta el punto elegido como punto de superposición de las estructuras porque generará en su entorno un punto o foco de atención. A veces este punto es común a todas las estructuras que se superponen y a veces, en una misma obra, pueden darse dos o más puntos de enfoque.

1. 4 Estructuras superpuestas 0º, 22,5º, 45, 65,5º

Esta obra es un ejercicio de superposición de 4 tramas con ángulos de 0º, 22,5º, 45º y 65,5º. Es importante destacar las diferencias que surgen según dónde se elija el centro de rotación de la las tramas: en el centro del cuadrado, en su vértice inferior izquierdo y en el punto medio del lado inferior del cuadrado. En el resultado final, las tramas se han superpuesto girando el ángulo correspondiente, en torno al centro de la estructura.

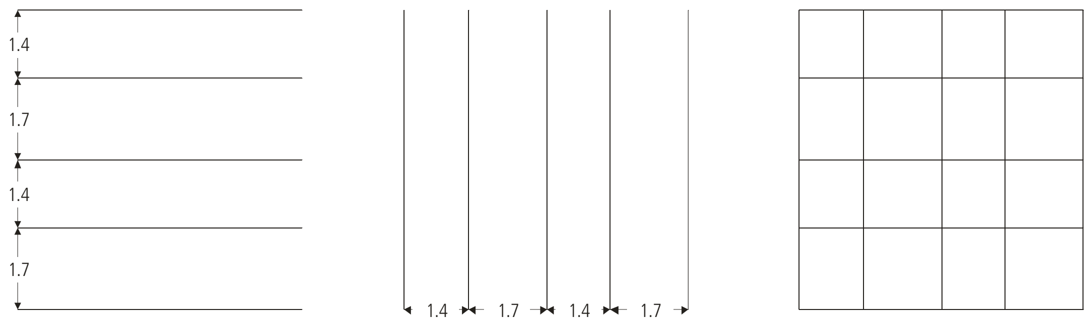
Nº retículas	1	2	3	4
4	0º	22,5º	45	67,5º



2. Dos tramas a 0º, 90º no regulares

Lo importante de esta obra es que al no ser constante la distancia espacial que existe entre las líneas estructurales de las dos tramas utilizadas, 0º y 90º, se genera una estructura de módulos desiguales.

Nº retículas	1	2
2	0º	90º

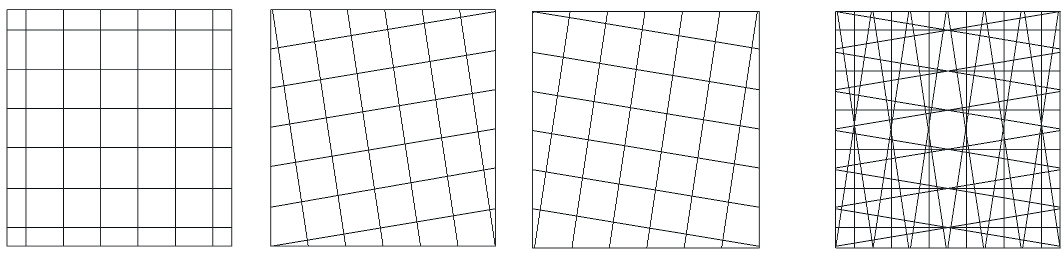


3. 3 Dobles tramas, 1954[11]

Esta obra es un ejercicio de superposición de tramas. Morellet utiliza, como protagonistas de esta obra, tres dobles tramas, de modo que cada una de ellas está formada por dos tramas relacionadas por un ángulo de 90º. La primera doble trama está formada por dos tramas de 0º - 90º. La segunda, por dos tramas de 9º - 99º. Y la tercer, por dos tramas de 81º - 171º. Es importante destacar que la segunda y tercera parejas de tramas tienen un ángulo de giro de +9º y -9º con respecto a la doble trama de 0º - 90º, es decir, están giradas 9º a derecha e izquierda de ella.

Nº retículas	1	2	3	4	5	6
6	0º	90º	9º	99º	81º	171º

Las tramas se superponen girando en torno al centro de la estructura, de forma que el resultado obtenido es simétrico.



0º - 90º 9º - 99º 81º - 171º

En el resultado que se obtiene en esta obra, la trama juega el papel de motivo decorativo de un módulo. Aunque sus trazados se pueden percibir con claridad, prima el dibujo simétrico que surge al producirse la superposición de las tramas. Se convierte en protagonista.

[11] 3 doubles trames, 1954.

4. 4 Dobles tramas[12]

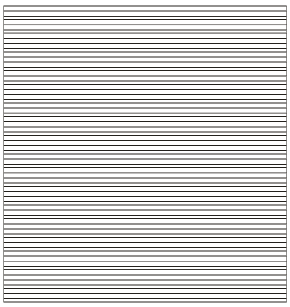
En esta obra se superponen cuatro dobles tramas de forma que cada pareja de ellas está formada por dos tramas con una relación de 0º - 90º entre sus líneas estructurales. La elección de los ángulos de estas dobles tramas es la siguiente:

Nº retículas	1	2	3	4	5	6	7	8
8	0º	90º	22,5º	112,5º	45º	135º	67,5º	157,5º

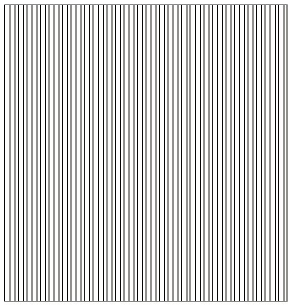
En la elección de las tramas hay una progresión angular de 0º a 180º, con distancias regulares de 22,5º:

0º	22,5º	45º	67,5º	90º	112,5º	135º	157,5º	180º

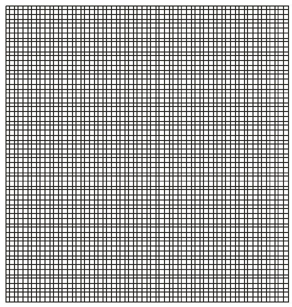
Para la construcción de cada una de las dobles tramas se considera que éstas se superponen girando en torno al centro de la estructura. Su secuencia constructiva es la siguiente:



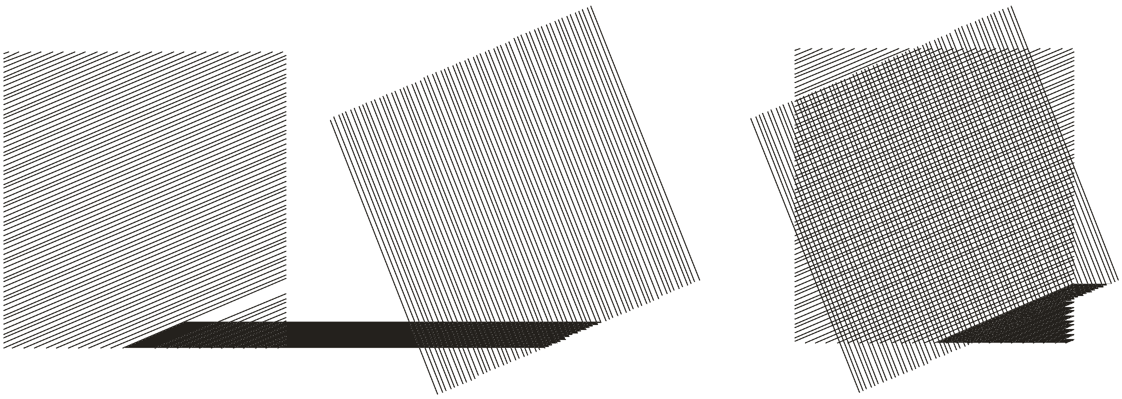
0º



90º



0º - 90º

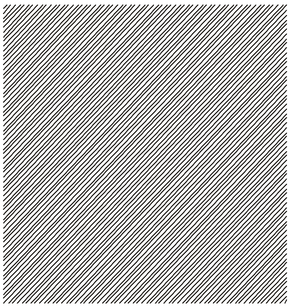


22,5º

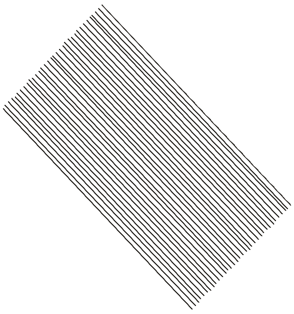
112,5º

22,5º - 112,5º

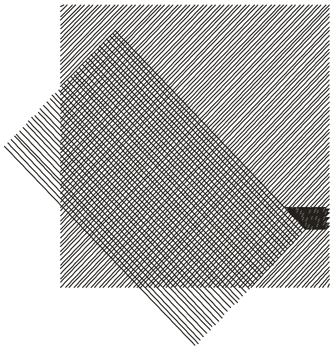
12 4 doubles trames.



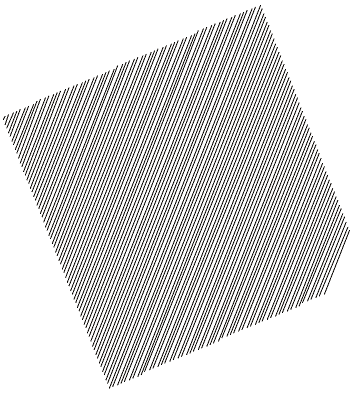
45º



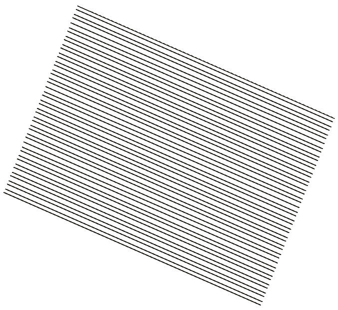
135º



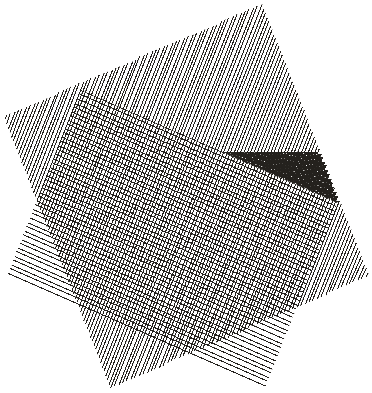
45º - 135º



67,5º

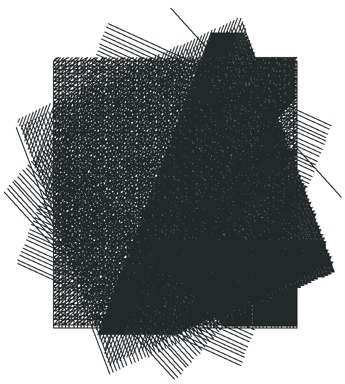


157,5º



67,5º - 157,5º

El resultado final se obtiene al superponer las cuatro dobles tramas con respecto al centro de cada una de las estructuras:

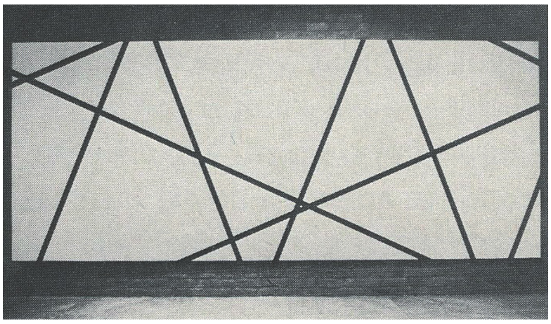


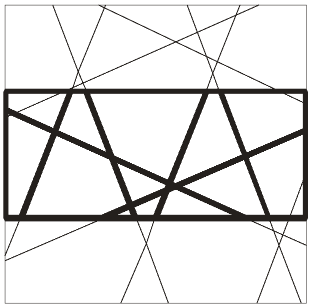
0º - 22,5º - 45º - 67,5º - 90º - 112,5º - 135º - 157,5º

A diferencia de la anterior obra, la forma de trabajar en esta obra con las tramas, produce una visión de textura pero no de motivo individual. En esta obra no se pueden apreciar las líneas estructurales de una forma aislada sino que todas están al servicio del conjunto final.

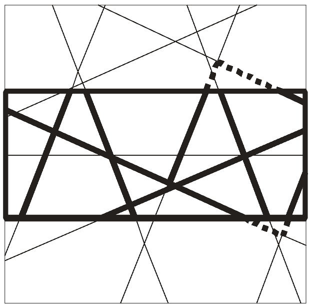
5. Dos tramas superpuestas[13]

Observar esta obra da la impresión de una estructura de líneas complicada. El observador siente la necesidad de recorrer las diferentes direcciones de las líneas para averiguar cuál es su procedencia y la relación que existe en ellas. Hay muchas formas de hacer esto, pero aquí se va a hablar de tres. Una opción, A, consiste en considerar la obra como resultado de la superposición de dos conjuntos de líneas en zigzag girados, uno con respecto al otro 90º y desplazados entre sí para que no se creen puntos de intersección, visualmente, significativos. La impresión visual que dejan estas líneas en zigzag es de una estructura repetitiva cuyo módulo base es un rombo.

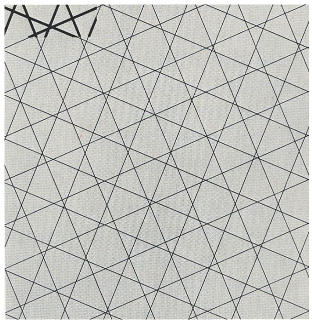




A



B



C

Otra opción, B, puede considerar la obra como resultado de dos conjuntos de cuadrados del mismo tamaño girados, uno con respecto al otro, 45º. Ambos conjuntos están desplazados entre sí para evitar puntos o focos de atención significativos.

En otra opción, C, se puede considerar la obra como resultado de un sistema de dos tramas superpuestas. Cada una de estas tramas es una estructura repetitiva de cuadrados de igual tamaño y una está girada con respecto a la otra, 45º. Para reproducir la obra es necesario especificar los ángulos de giro de las dos tramas. Estos ángulos pueden ser accidentales o estar determinados por una decisión concreta por parte del artista. Para realizar la obra, se elige, con una ventana o marco proporcional al lienzo sobre el que se va a reproducir la obra, una sección de las líneas estructurales trazadas que pertenecen a las tramas superpuestas. En este caso, la sección elegida está localizada en la parte superior izquierda. Se puede decir que, en este modo de trabajo, el objetivo es elegir secciones adecuadas para realizar obras, en las que las líneas estructurales, alejadas de las estructuras que las han generado, mantienen una relación entre ellas que responde a un orden previamente fijado. Estas líneas dejan de pertenecer a un sistema repetitivo en la que su función es estar al servicio de la comprensión global del sistema y se convierten en protagonistas.

[13] Deux trames superposées.

6. Interferencia de 3 tramas diferentes, 1955[14]

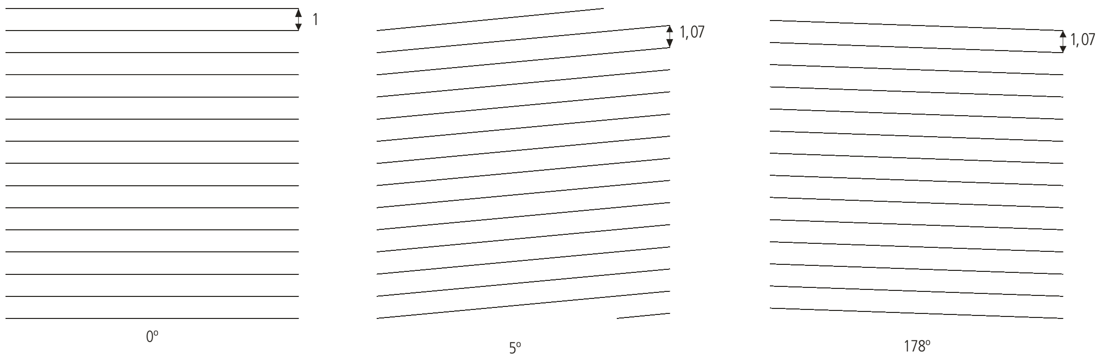
Esta obra está formada por tres tramas de líneas paralelas en sólo una dirección del espacio, de forma que cada una de ellas esté inclinada un ángulo diferente, y la separación entre sus líneas sea distinta.

Los datos de los diferentes ángulos entre las líneas se especifican en la siguiente tabla:

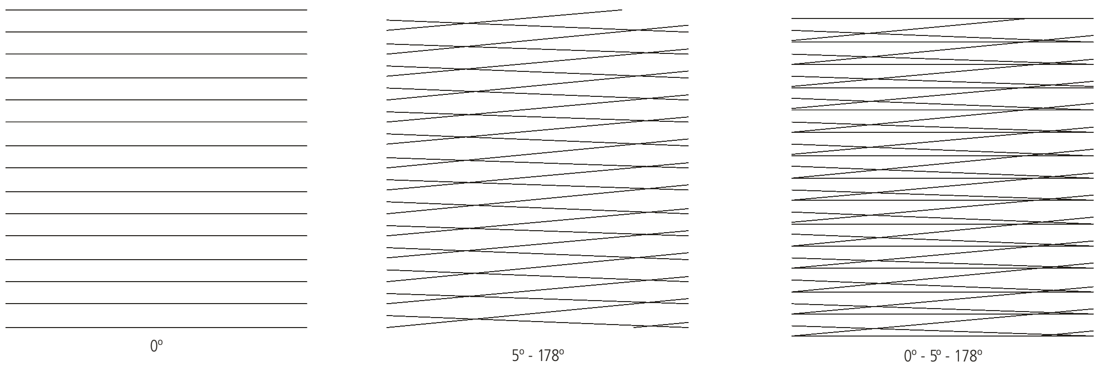
Nº retículas	1	2	3
	0º	5º	178º

La distancia irregular en la separación de las líneas de la trama está determinada por los siguientes datos:

Retícula 0º	1
Retícula 5º	1,07
Retícula 178º	1,07

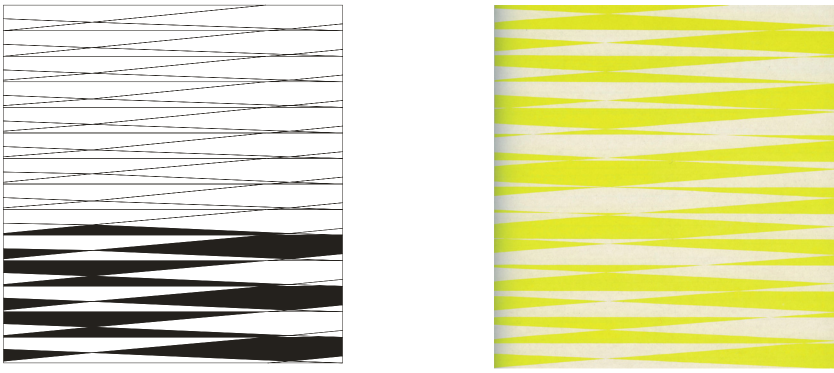


Al superponerse las tres estructuras, se generan unas superficies poligonales irregulares a las que, rítmicamente, se les puede aplicar color y así poder generar una obra. Los polígonos variarán dependiendo de los lugares que ocupen cada una de las tramas en el conjunto de la superposición de las tres.



[14] Interférence de 3 trames différentes, 1955.

Los resultados obtenidos al aplicar color sobre la obra, son los siguientes:



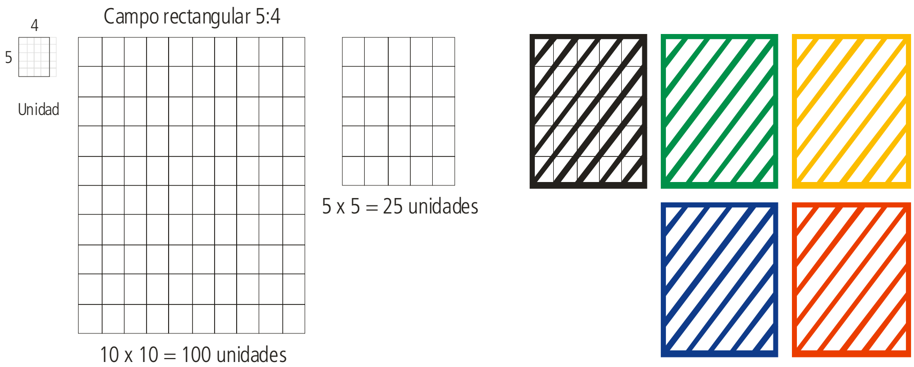
4.5.2.2.- DORA MAURER

1. Desplazamientos, 1976[15]

En toda la serie de obras que se generan con el mismo titulo de *Desplazamientos*, el punto de partida y las reglas constructivas son siempre las mismas. Se parte de un módulo rectangular formado por 5 x 4 = 20 cuadrados. Con este módulo o unidad, se construye: un campo rectangular de 10 x 10 = 100 unidades; y varias retículas de 5 x 5 = 25 unidades.

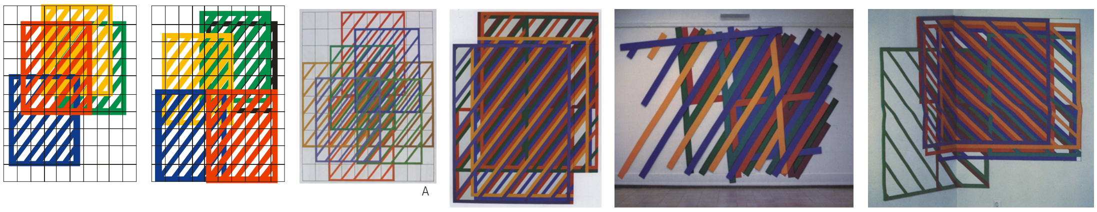
El sistema de trabajo es el siguiente: sobre la matriz de 25 unidades, se trazan líneas paralelas y equidistantes a una de sus diagonales principales; con el módulo obtenido se realizan varias copias y se crea un criterio de color para crear un sistema cromático. Por ejemplo: la mitad de los módulos, colorearlos de colores fríos y la otra mitad, con colores cálidos.

Para construir la obra, se superponen estos módulos, por capas, sobre el campo rectangular de 100 unidades, de manera que los protagonistas sean las líneas del marco y las diagonales. Al desplazar unos sobre otros, en dirección horizontal, vertical o diagonal, se van creando series de líneas cromáticas que producen efectos muy interesantes. Un criterio cromático, que se utiliza en varias de sus obras, es crear dos capas de color: una, con colores fríos y otra, con colores cálidos, buscando su contraste, al desplazar los módulos.



[15] Displacements, 1976.

A continuación se muestran el proceso de construcción de la obra y algunos de los resultados obtenidos:



5.- ESTRUCTURAS PLANAS ESTÁTICAS

Una estructura estática es aquella que queda definida en el momento en que se describe el proyecto en el que se va a utilizar y no puede ser modificada por el propio proceso generativo del proyecto. Los valores de sus diferentes elementos pueden variar, pero no su estructura, ya que es fija y se mantiene constante: no se puede crear ni destruir durante su ejecución. El objetivo de este capítulo es conocer las estructuras características de las formas básicas planas: cuadrado, triángulo y círculo. Las estructuras fundamentales de estas figuras geométricas: portadora, modular y de proyección interna, permiten mirar más allá de los límites de la propia geometría y derivar en nuevas formas no convencionales. Estas estructuras tienen un gran potencial creativo, ya que se las puede interpretar de formas muy diferentes.

5.1.- CONCEPTO Y TIPOS DE ESTRUCTURAS PLANAS ESTÁTICAS

Attilio Marcolli en su libro *Teoría del Campo*, realiza la siguiente declaración: "Cada forma posee una estructura propia, más o menos visible o manifiesta, y más o menos coherente. La estructura es lo que caracteriza a la forma, su esencia".[1] Poseer la estructura de una forma significa no sólo conocer su esencia, sino también todas sus articulaciones formales.

Toda estructura tiene su fundamento en la aplicación de unas reglas específicas, basadas en la lógica, de forma que, se puede considerar que toda estructura es portadora de una norma, una serie de rasgos distintivos que la caracterizan. Todas las estructuras son definibles por líneas características organizadas de una forma determinada que se cruzan en determinados puntos que se denominan nodos.

La estructura tiene un campo de interpretación ilimitado en su relación con la forma construida. La estructura puede esconderse por completo tras la forma perceptible, o puede llegar a ser ella misma la forma construida visible.

Las tres estructuras características de las formas planas: cuadrado, triángulo y círculo, son:

5.1.1.- Portadora:

La estructura portadora da existencia y soporta a la forma. Sin estructura portante, las formas materiales no se pueden garantizar. Es la estructura que permite el mayor nivel de articulación formal. Está formada por los puntos y las líneas de máxima caracterización formal.

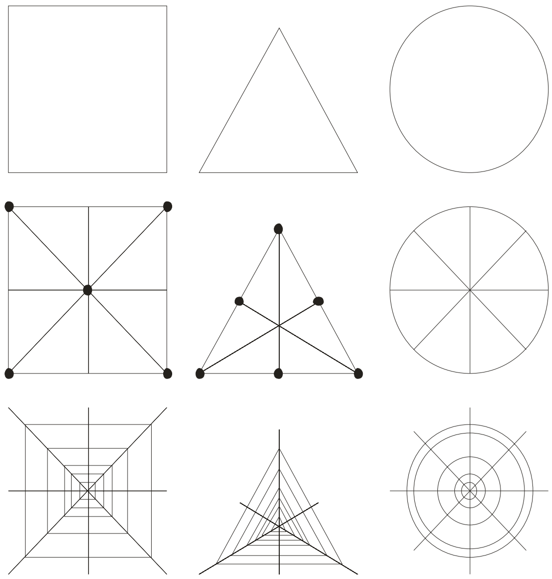
Es el conjunto de rasgos mínimos que sirven para identificar una forma y que son capaces de contener a cuantas formas, del mismo tipo, se tracen.

En el cuadrado está formada por las dos diagonales principales del cuadrado y las dos líneas que se trazan del punto medio de un lado al punto medio de su lado opuesto. En el triángulo, esta estructura está formada por tres líneas que van desde los vértices al punto medio del lado opuesto. En el círculo está formada por, al menos 4 líneas de igual diámetro.

---

[1] Attilio Marcolli, *Teoría del Campo: Curso de Educación Visual*, Xarait Ediciones y Alberto Corazón Editor, Madrid, 1978, p. 10.

Del análisis de cualquiera de estas estructuras portadoras se deduce que, estas líneas estructurales obtenidas que en los tres casos pasan por un punto central, son capaces de soportar tantas formas cuadradas, triangulares y circulares como se deseen imaginar o se quieran realizar.



5.1.2. Modular:

Caracteriza un determinado planteamiento en el interior de una forma geométrica que permite obtener múltiples desarrollos compositivos.

Está basada en crear submúltiplos de una figura geométrica dada trazando líneas paralelas y equidistantes al perímetro de la forma geométrica considerada.

5.1.3. Proyección interna

Permite la posibilidad de una penetración en profundidad en la forma geométrica, hasta llegar a captar toda su tensión espacial interna.

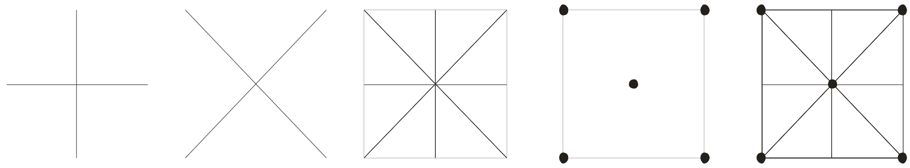
En la estructura de proyección interior se produce la máxima tensión espacial posible dentro de un campo geométrico específico y se crea la posibilidad de una gran articulación entre sus partes.

5.2.- APLICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS PLANAS A LOS SOPORTES TRADICIONALES

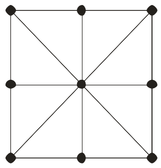
5.2.1.- Cuadrado

1. Portadora

Se obtiene al trazar en el cuadrado las siguientes líneas: sus dos diagonales principales y sus dos ejes o medianas; es decir, dos líneas que unen cada una dos vértices opuestos; y otras dos líneas que van del punto medio de un lado, al punto medio del lado opuesto. Estas cuatro líneas se encuentran en un punto central. Tanto los dos ejes, como las dos diagonales, son perpendiculares entre sí. Los puntos o nudos característicos esenciales para reconocer la forma cuadrada son cinco: los cuatro vértices y el punto central. Cualquiera de las dos representaciones del cuadrado, por líneas o por puntos característicos, permite reconocer la forma cuadrada aún cuando físicamente no exista:

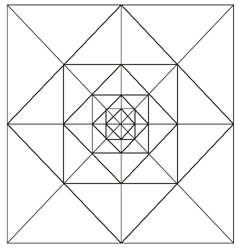


Uniendo todas estas características, se puede decir que la estructura portadora de un cuadrado está formada por ocho líneas: los cuatro lados del cuadrado, las dos diagonales y los dos ejes; y por nueve nudos o intersecciones: los cuatro vértices, los cuatro puntos medios de los cuatro lados, y el punto central.



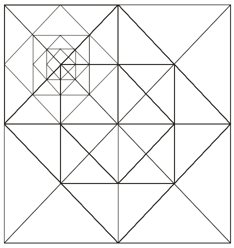
Trabajar con estructuras portadoras no consiste solamente en tomar una portadora y trabajar con sus puntos y líneas significativas, sino que, dentro de la propia estructura, se pueden realizar divisiones sucesivas de la propia estructura o, lo que es lo mismo, realizar estructuras portadoras dentro de portadoras para obtener una mayor complejidad y articulación estructural.

Se puede realizar la siguiente serie de divisiones estructurales: si se toma un cuadrado y se unen los cuatro puntos medios de sus lados, se obtiene un nuevo cuadrado más pequeño que el anterior y girado 45º, cuyos ejes son las diagonales del cuadrado anterior y cuyas diagonales son los ejes del cuadrado más grande. A partir de este nuevo cuadrado se puede llegar a otro más pequeño uniendo los cuatro puntos medios de sus lados e invirtiendo las diagonales y los ejes, y así sucesivamente, procediendo siempre hacia el interior del cuadrado.



Puede invertirse también el movimiento, construyendo toda una serie de cuadrados alternos desde el interior al exterior, haciendo, cada vez, que los vértices de un cuadrado interno se conviertan en los puntos medios de los lados de un cuadrado exterior, y los ejes prolongados del cuadrado anterior en las diagonales del nuevo cuadrado.

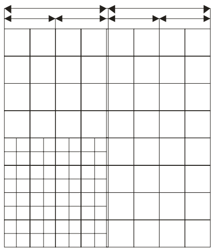
Este desarrollo alterno general puede también sectorizarse. Como los dos ejes dividen el cuadrado en cuatro partes que son cuatro cuadrados iguales, se puede elegir uno de ellos, por ejemplo el que está situado en la parte superior izquierda, y construir sobre éste una serie de cuadrados alternos de la misma forma que se ha procedido anteriormente.



2. Modular

La estructura modular se obtiene al subdividir en partes iguales cada uno de los lados del cuadrado y de trazar, por los puntos de subdivisión, rectas paralelas a sus lados.

Las partes obtenidas son módulos iguales, que forman familias de cuadrados más pequeños en el interior del cuadrado más grande. El módulo es un submúltiplo: mitad, un cuarto, un octavo,..., del lado del cuadrado de base.

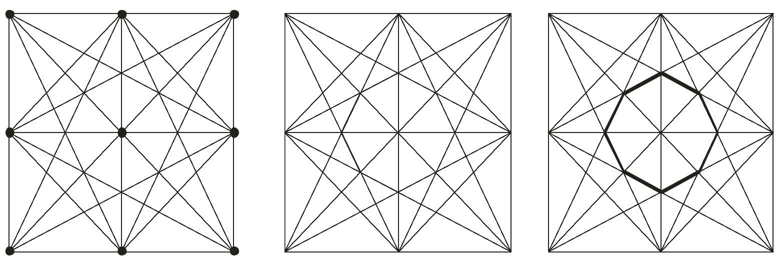


Igual que ocurría con la estructura portadora, en la estructura modular también se pueden introducir estructuras modulares dentro de estructuras modulares, subdividiendo los módulos obtenidos en nuevas subdivisiones estructurales que incluyan cuadrados más pequeños dentro de cuadrados mayores.

3. Proyección interna

Permite la posibilidad de encontrar todas las líneas de tensión espacial interna del cuadrado.

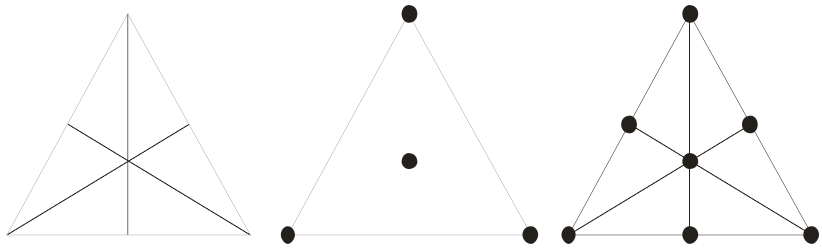
Para obtener esta estructura se parte de los 9 puntos característicos o nudos estructurales del cuadrado: los cuatro vértices, los puntos medios de los cuatro lados y el centro; y se une cada uno de ellos, con los otros ocho. Las líneas de unión así obtenidas son: ocho conocidas: los 4 lados, las 2 diagonales y los 2 ejes; y ocho nuevas líneas de proyección. El conjunto de todas estas líneas de proyección constituye el trazado de tensión interna del cuadrado que da lugar en el centro del campo a un octógono con todos sus vértices unidos por diagonales.



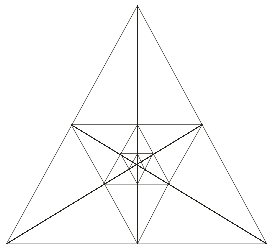
5.2.2.- Triángulo

1. Portadora

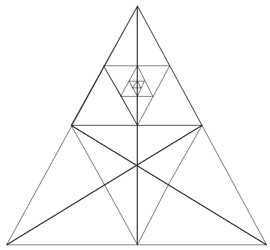
Está formada por seis líneas: tres líneas, que se obtienen uniendo cada vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto; y tres líneas que son los lados del propio triángulo; y siete nodos: los tres vértices del triángulo, los tres puntos medios de los lados y el centro.



Si se toma un triángulo equilátero, se puede inscribir en él otro triángulo equilátero cuyos vértices se apoyen sobre los tres puntos medios del triángulo precedente. Los ejes del nuevo triángulo continúan siendo los mismos que los del anterior. Se pueden construir de esto modo, con un desarrollo alterno, toda una serie de triángulos equiláteros, uno al revés que el otro, con movimiento hacia el interior, y cada vez más pequeños, o con movimiento hacia el exterior, y cada vez más grandes.

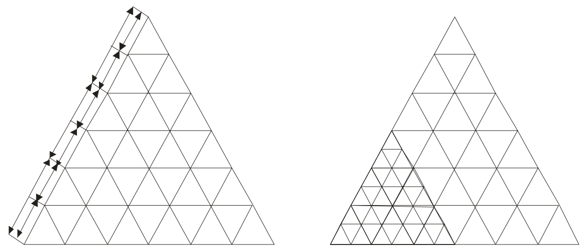


Este desarrollo alterno de triángulo hacia arriba – triángulo hacia abajo, puede realizarse también en sólo un sector del triángulo. El primer triángulo interior, se realiza con los vértices apoyados en los puntos medios del triángulo dado. Este primer triángulo interno divide el triángulo en cuatro nuevos triángulos equiláteros iguales: tres de ellos, con la misma orientación que el triángulo de partida, están apoyados en los vértices del triángulo de partida, y el cuarto, invertido, en el centro. Se puede volver a operar sobre uno de estos nuevos cuatro triángulos obtenidos y obtener cuatro más, con el mismo desarrollo alterno que el anterior, y así sucesivamente.



2. Modular

La estructura modular se obtiene subdividiendo los tres lados de un triángulo en segmentos de igual medida y trazando, desde cada uno de los puntos de la subdivisión, rectas paralelas a cada uno de los lados del triángulo. Se obtienen así, muchos triángulos que son submúltiplos del triángulo dado.

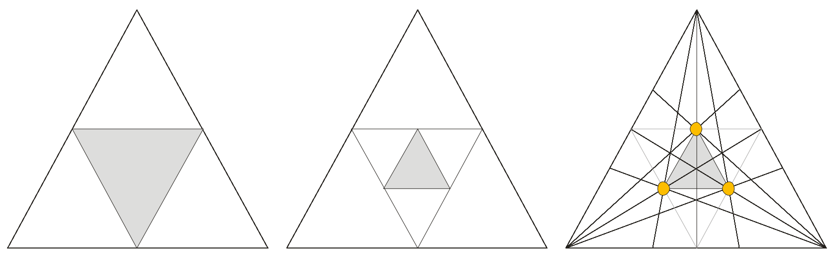


La estructura modular se puede aplicar sobre la totalidad del triángulo o sobre triángulos parciales que se vayan obteniendo en las subdivisiones que se van realizando. El primer tipo de estructura tiene una distribución uniforme de triángulos y, el segundo tipo, irregular.

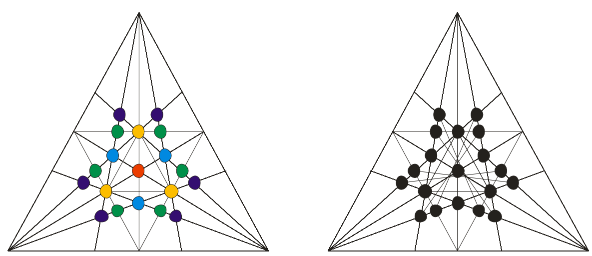
3. Proyección interna

Para obtener la estructura de proyección interna del triángulo, se parte de un triángulo base dado y se obtiene un primer triángulo invertido uniendo los puntos medios de los lados del triángulo dado. A continuación, se obtiene, por el mismo procedimiento, el triángulo invertido del obtenido, que resulta tener la misma orientación que el triángulo base.

A partir de este segundo triángulo obtenido, se unen todos los vértices del triángulo base con cada uno de los vértices del triángulo segundo y se proyectan las líneas hasta que corten a los lados del triángulo base.



Se señalan todos los puntos de intersección característicos, que se detallan en la siguiente tabla:



- Punto central
- Vértices del triángulo más pequeño
- Puntos de intersección de las rectas de proyección que se encuentran del mismo lado
- Puntos de intersección de las rectas de proyección con el primer triángulo inscrito, el que está invertido
- Puntos de intersección de las rectas de proyección entre ellas

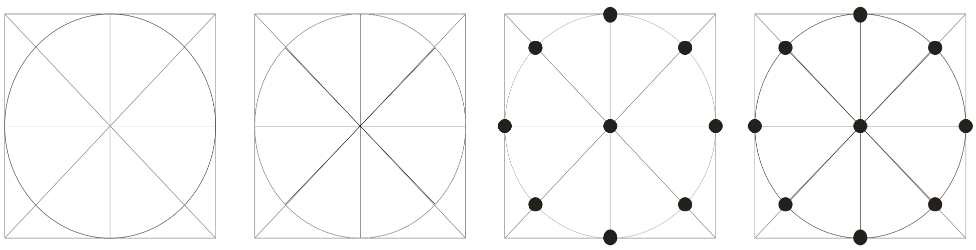
Si se unen todos estos puntos en una sola figura se puede ver cómo están unidos dos a dos a través del centro del triángulo, dando lugar a una estrella cuyas líneas son las directrices de máxima tensión interna del triángulo.

5.2.3.- Círculo

1. Portadora

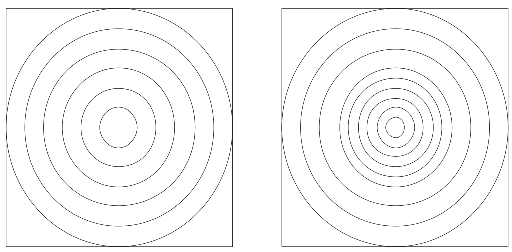
Para definir esta estructura portadora, se inscribe el círculo en un cuadrado, de forma que el círculo sea tangente en los puntos medios de los cuatro lados del cuadrado. Su estructura es entonces la estructura portadora del cuadrado, formada por dos ejes y dos diagonales cuyas medidas no son, sin embargo, diferentes como en el caso del cuadrado, ya que ahora sólo se consideran las partes de la diagonal que están incluidas dentro del círculo: su diámetro.

Se entiende la estructura del círculo como una serie de radios iguales que se unen en el punto situado en el centro del círculo. Estos radios no son sólo ocho (los derivados de los ejes y de las diagonales del cuadrado) sino infinitos. Se puede decir, que es una estructura radial.



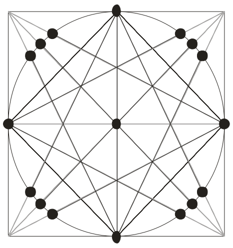
2. Modular

La estructura modular se obtiene trazando alrededor de un punto una serie de círculos concéntricos, a distancia constante uno del otro. Es una estructura de anillos concéntricos. La estructura modular puede ser regular: cuando la distancia entre los distintos círculos concéntricos es constante; o irregular: cuando la distancia entre los círculos concéntricos trazados no es uniforme en toda la estructura:



3. Proyección interna

Partiendo de la estructura portadora del cuadrado, y considerando sus líneas estructurales como las directrices de máxima tensión interna del círculo, se obtienen los puntos y líneas más significativos del círculo:

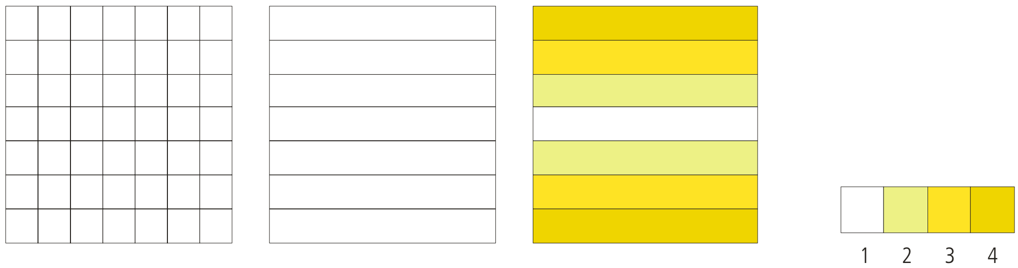


5.3.- ANÁLISIS DE OBRAS

5.3.1- FRANÇOIS MORELLET

1. Del Amarillo al blanco, 1953[1]

La obra parte de un soporte cuadrado con una estructura modular de 7 x 7 = 49 cuadrados. De entre todas las posibilidades de esta trama, se eligen sólo seis líneas estructurales horizontales que dividen el cuadrado en 7 bandas horizontales. A esta estructura se le añade una estructura cromática que consiste en aplicar una gama monocroma de 4 tonos, del blanco al amarillo, que se aplica de una forma simétrica y progresiva sobre la superficie cuadrada, con el blanco como color central que inicia la sucesión cromática de la serie hacia arriba y abajo.



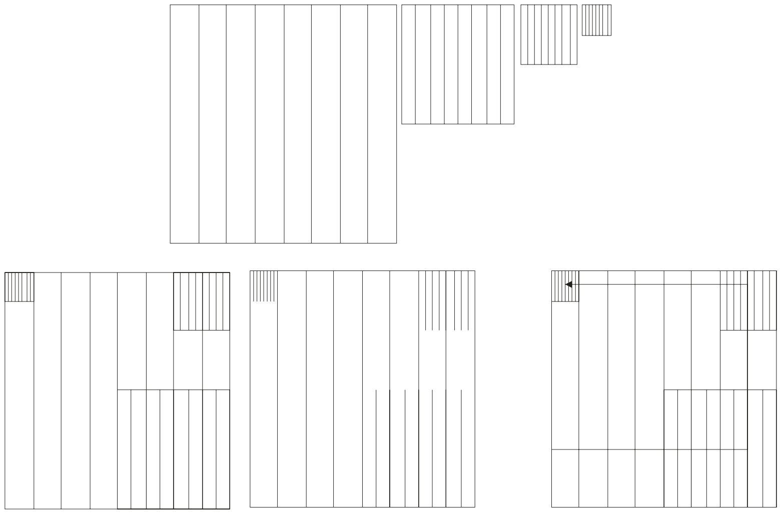
5.3.2- HARTMUT BÖHM

1. Rotación 2, Rotación 1[2]

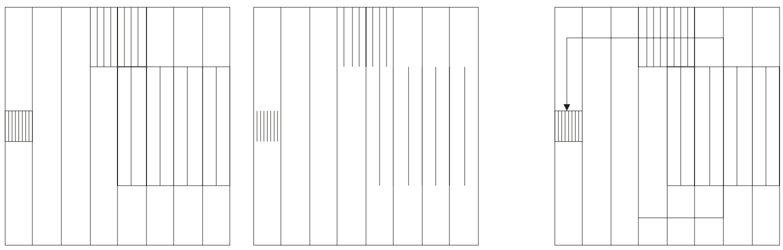
A un soporte cuadrado dividido verticalmente en ocho partes iguales, se le aplica una estructura modular con líneas estructurales verticales que pasen por cada una de las ocho divisiones practicadas. Se divide el cuadrado en cuatro partes iguales y sobre una de ellas, esquina inferior derecha, se vuelve a practicar el mismo proceso que el realizado sobre el cuadrado anterior. Se divide este nuevo cuadrado en otras cuatro partes iguales y a una de ellas se la subdivide en ocho partes y se trazan las líneas verticales que pasan por estos puntos. Este nuevo cuadrado obtenido se sitúa en la esquina superior derecha del cuadrado inicial. Finalmente, se realiza este mismo proceso sobre el último cuadrado obtenido y el resultado se traslada a la esquina superior izquierda del cuadrado inicial. Se obtiene así, una obra de líneas estructurales proporcionales entre sí y colocadas en el cuadrado inicial siguiendo un círculo, aplicado a los vértices, en el sentido contrario a las agujas del reloj, y comenzando en la esquina inferior izquierda.

[1] From yellow to white, 1953.

[2] Rotation 2, Rotation 1.



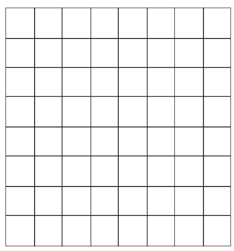
Otra versión de esta obra se realiza con el mismo procedimiento de división modular de las estructuras cuadradas en 8 partes iguales y de trazado de las líneas estructurales verticales, pero el procedimiento de ubicación de los cuadrados proporcionales que se van obteniendo varía: ahora se sitúan en los puntos medios de los lados, pero también siguiendo una rotación en el sentido contrario a las agujas del reloj y comenzando en el lado inferior del cuadrado inicial.

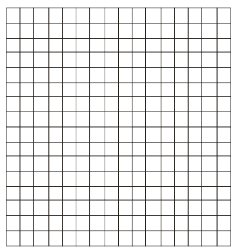


5.3.3- JULIÁN GIL

1. Serie ORTogonal

Para desarrollar las obras de esta serie se utiliza una estructura ortogonal, 0º - 90º, con trazas paralelas a los lados del cuadrado. Emplea dos tipos de estructura: una que divide cada lado del cuadrado en 8 partes iguales de forma que la superficie soporta una matriz de 8 x 8 = 64 cuadrados; y otra que divide cada lado del cuadrado en 16 partes iguales, de forma que la superficie cuadrada soporta una matriz de 16 x 16 = 256 cuadrados.


ORTogonal


ORTogonal

La posibilidad de realizar trazos sobre estas tramas da lugar a varias series que se diferencian entre sí por el número de trazos que tienen, la estrategia de trazado utilizada y el criterio de color elegido para colorear las superficies entre trazas.

Todas las obras están creadas por la combinación de dos tipos de estructuras diferentes: una estructura lineal, que por medio del trazado de un número determinado de líneas, crea una serie de superficies relacionadas entre sí y una estructura cromática.

1. Estructura lineal:

Para crear la estructura lineal de una obra se construye un sistema que establezca una serie de pautas a realizar para su elaboración. Dentro de estas acciones a considerar, están las siguientes:

1. Establecer una situación y número de puntos de partida: para poder realizar divisiones ortogonales en el cuadrado, se realizan unas marcas o divisiones en el perímetro del cuadrado y en sus vértices, según un criterio preestablecido: serie de los números naturales (1, 2, 3,…), serie de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5,…), pares – impares,… Por estas marcas elegidas se trazan las líneas ortogonales de la obra que se va a realizar.

2. Establecer el orden de ejecución del trazado: en esta etapa, se decide dónde se va a comenzar a realizar el trazado de las líneas ortogonales, aplicar la serie (ej. vértice superior izquierdo) y cómo se va a aplicar la serie elegida sobre el soporte; por ejemplo: girando alrededor del cuadrado en sentido inverso a las agujas del reloj.

3. Decidir la dirección y orientación de las líneas: según el punto de partida marcado se elige sobre la trama aquel trazado más significativo y se realiza una línea estructural.

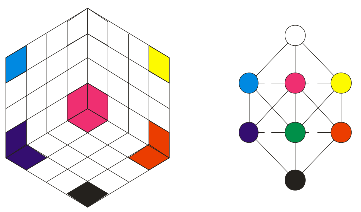
4. Otras reglas: según la serie realizada se pueden tener en cuenta otros criterios como:

    1. Una línea estructural no puede atravesar de forma visible más de un cuadrante.

    2. Visibilidad de las líneas según el orden en el que son trazadas: las primeras, se superponen a todas; las segundas, a todas menos a las primeras; las terceras, a todas las trazas realizadas excepto a las primeras y segundas; y así sucesivamente.

2. Estructura cromática:

Para seleccionar los colores que va a aplicar a las superficies que se encuentran entre las líneas estructurales, utiliza el sólido de 64 colores de Alfred Hickethier: un cubo apoyado en uno de sus vértices con 64 modulaciones diferentes de color.



La diagonal que une el vértice sobre el que se apoya el sólido con su opuesto, forma la escala de los grises con el blanco arriba y el negro abajo. Los colores primarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta y cyan están en el extremo de las aristas que tienen su origen en el blanco. Los colores que se originan por su mezcla, rojo, verde y azul-violeta, están en el extremo de las aristas que tienen su origen en el negro. Cada arista está dividida en 4 partes. Por cada de uno de estos puntos se trazan líneas ortogonales paralelas a los lados del cubo y se numeran del 0 al 9 (0, 3, 6, 9).

La especificación de cada uno de los colores se realiza por tres números cuyos valores pueden variar del 0 al 9, siendo el 0 el color blanco y el 9 el color en su máxima saturación:

Nº Nº Nº
(1) (2) (3)

El primer número, empezando a contar por la izquierda (1), indica el contenido de amarillo del color; el segundo (2), el contenido de magenta; y el tercero (3), el contenido de cyan. Así, los colores básicos están representados con los siguientes códigos: 000 (blanco), 900 (amarillo), 090 (magenta), 009 (cyan), 990 (rojo), 909 (verde), 099 (azul-violeta) y 999 (negro).

Para su uso práctico, Julián Gil divide el cubo en 4 planos o tablas cuadradas paralelas, cada una subdividida en 16 cuadrados, conteniendo cada uno de ellos, 16 colores diferentes:

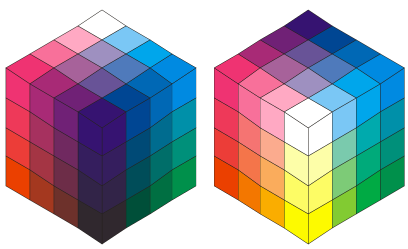
090	093	096	099
390	393	396	399
690	693	696	699
990	993	996	999

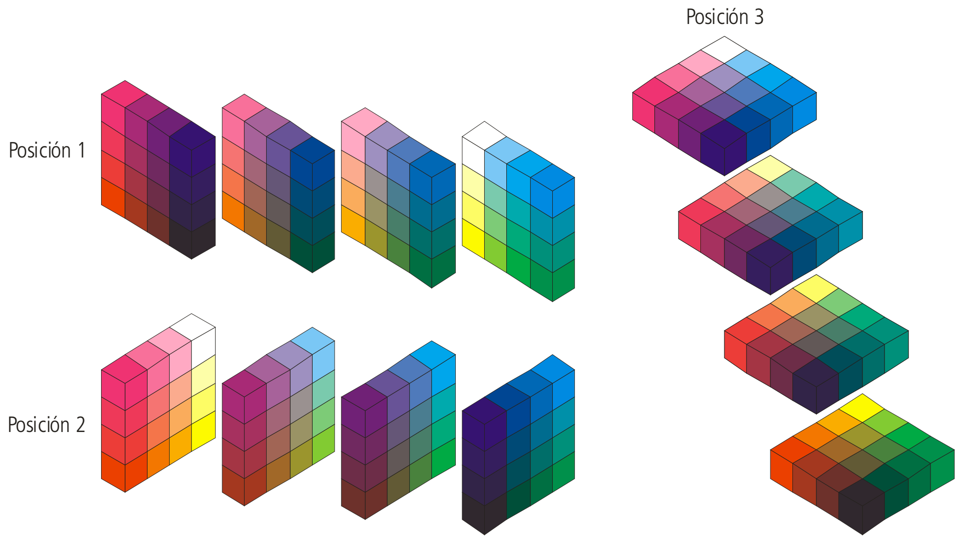
060	063	066	069
360	363	366	369
660	663	666	669
960	963	966	969

030	033	036	039
330	333	336	339
630	633	636	639
930	933	936	939

000	003	006	009
300	303	306	309
600	603	606	609
900	903	906	909

Julián Gil, según sus necesidades compositivas, hace tres lecturas diferentes del cubo de 64 tonos, según qué dirección del espacio utilice para realizar los cortes de los cuatro planos cromáticos:





Julián Gil utiliza estas tres posiciones diferentes del cubo de Hickethier, para establecer relaciones entre los colores, dando prioridad a unas gamas de color o a otras. Primero, selecciona la posición del cubo que va a utilizar. A continuación, toma las 4 plantillas cromáticas que corresponden a esa posición del cubo, y sobre ellas, según determinados criterios, elige los colores. Los criterios varían de un proyecto a otro. En sus obras, se pueden distinguir las siguientes estrategias: criterios de complementariedad, en toda su riqueza: desde la complementariedad de los colores básicos: amarilo, magenta, cyan, rojo, verde y azul–violeta; hasta complementariedades más sutiles, realizadas entre colores terciarios. A veces, utiliza, gamas monocromas o policromas de un grupo reducido de colores; o, realiza series geométricas sobre los planos del cubo de Hickethier. También emplea series que le permiten recorrer el cubo y configurar nuevas relaciones entre los colores.

En cualquier caso, en sus obras conviven los dos tipos de estructura antes mencionados: las estructuras lineales, que dividen el soporte en un número determinado de partes relacionadas, y las estrategias cromáticas, que le sirven para dar color a las superficies generadas por las líneas estructurales. Una y otra, le sirven para ordenar sus composiciones.

Algunos ejemplos de series ORTogonales son los siguientes:

1. Trazados ortogonales para 4 tonos (3 líneas estructurales):

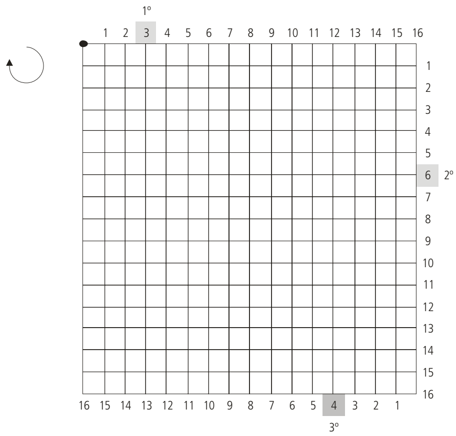
La siguiente serie de estructuras, ORT 078, ORT 079, ORT 080, ORT 093, está realizada sobre una trama de 16 x 16 = 256 cuadrados. El proceso de creación de la serie se realiza según los siguientes criterios:

1. Elegir una serie de tres números naturales para realizar tres marcas sobre tres lados consecutivos del cuadrado.

2. Comenzar por el vértice superior izquierdo del cuadrado y contando en el sentido de las agujas del reloj, aplicar las marcas, primero sobre el lado superior del cuadrado, después sobre el lado vertical derecho y finalmente sobre el lado inferior.

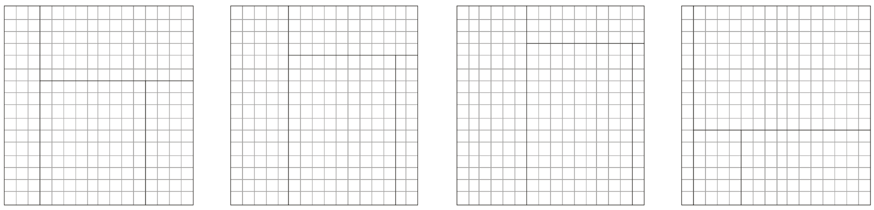
3. Desde la primera marca se realiza una traza vertical que divida el cuadrado en toda su longitud. Desde la segunda, se realiza una traza que vaya desde la marca, perpendicular a la línea trazada anteriormente y sin

superponerse a ésta. Desde la tercera, se realiza otra línea, perpendicular a la anterior y de longitud, desde la marca a la intersección con la segunda traza realizada.



ORT 078
3, 6, 4

ORT 078 | ORT 079 | ORT 080 | ORT 093



3, 6, 4 | 5, 4, 2 | 6, 3, 1 | 1, 10, 11

Las obras que corresponden a estas estructuras están representadas en las siguientes imágenes:

ORT 078 | ORT 079 | ORT 080 | ORT 093

Un criterio de color para este tipo de series es aplicar a cada obra 4 tonos formados por dos parejas de complementarios situados sobre el cubo de Hitckethier en la posición P1:

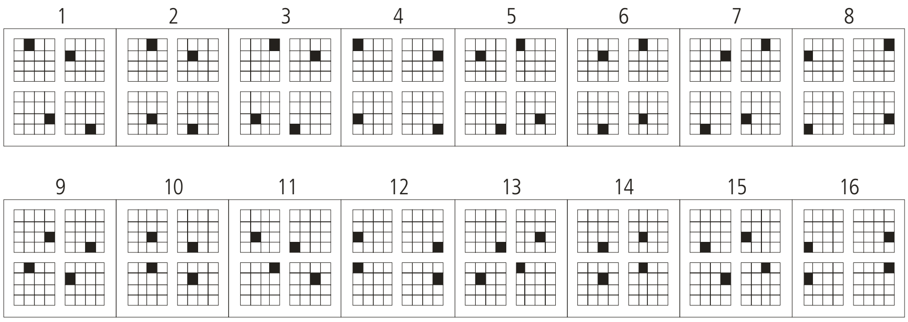
1		2		3		4	
330	003	333	006	336	009	000	339
669	996	666	993	663	990	999	660

5		6		7		8	
030	303	033	306	036	309	300	039
969	696	966	693	963	690	699	960

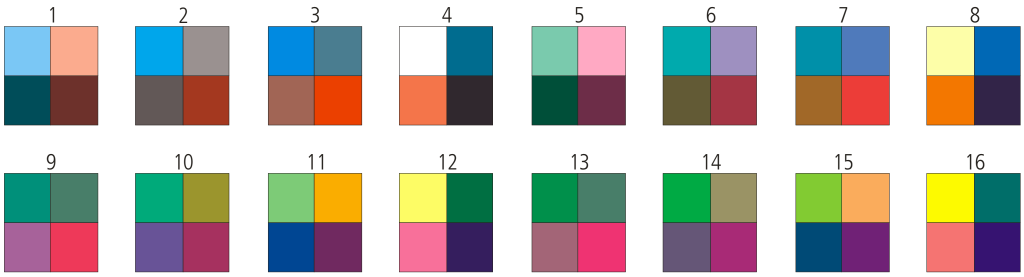
9		10		11		12	
390	063	393	066	396	069	060	399
609	936	606	933	603	930	939	600

13		14		15		16	
090	363	093	366	096	369	360	099
909	636	906	633	903	630	639	900

Si se representan estas 16 posibilidades, que permitirían crear 16 obras diferentes, sobre un esquema que tenga en cuenta, para cada opción, los cuatro planos del cubo de Hickethier que corresponden a la posición P1, se puede apreciar la siguiente relación entre los colores:



Y la equivalencia en colores, se recoge en los siguientes esquemas:



En esta serie de color hay un gran contraste entre los tonos utilizados dos a dos.

Otro criterio cromático, consiste en utilizar el cubo de Hickethier en la posición P2 y realizar un conjunto de selecciones de 4 tonos:

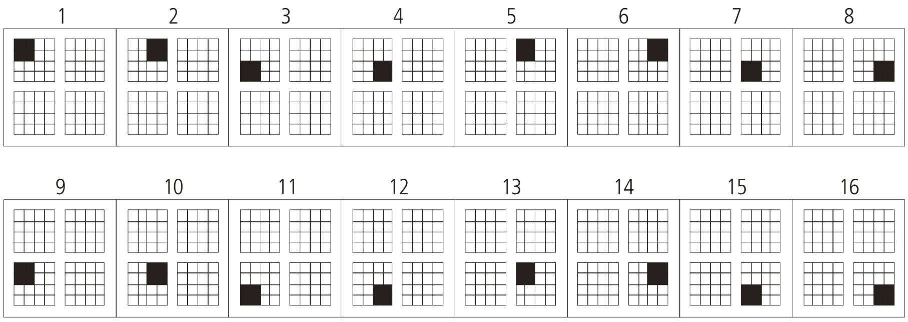
1		2		3		4	
090	060	030	000	690	660	630	600
390	360	330	300	990	960	930	900

5		6		7		8	
093	063	033	003	693	663	633	603
393	363	333	303	993	963	933	903

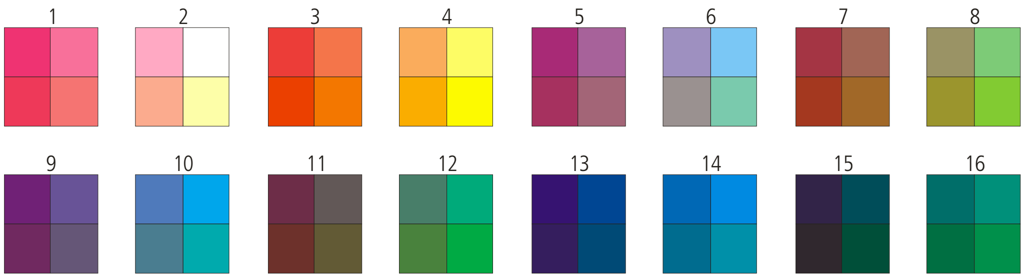
9		10		11		12	
090	066	036	006	696	666	636	606
396	366	336	306	996	966	936	906

13		14		15		16	
099	069	039	009	699	669	639	609
399	369	339	309	999	969	939	909

La representación gráfica de los datos de esta tabla, según los planos del cubo de Hickethier en la posición P2 es la siguiente:



Y su equivalencia cromática, se recoge en los siguientes esquemas:



Todas estas gamas cromáticas son armónicas ya que los cuatro tonos que se utilizan para cada una de las composiciones son colores adyacentes dentro de cada uno de los planos del cubo de Hickethier y, por lo tanto, el tránsito cromático entre ellos es pautado y constante en todos los grupos.

2. Trazados ortogonales para 9 tonos (8 líneas estructurales):

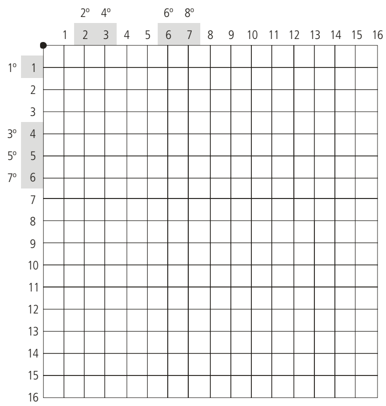
La obra, ORT 050, se realiza según el siguiente sistema:

1. Utilizar la serie de los números naturales 1, 2, 4, 3, 5, 6, 6, 7 para realizar ocho marcas sobre 2 lados consecutivos del cuadrado.

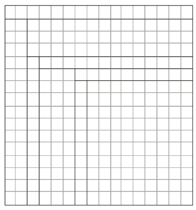
2. Introducir las marcas comenzando por el vértice superior izquierdo del cuadrado. Aplicar las marcas, alternativamente, primero sobre el lado vertical izquierdo del cuadrado, y después sobre el lado superior; de nuevo sobre el lado vertical izquierdo, el superior; y así sucesivamente.

3. Desde la primera marca se traza una línea horizontal que divida el cuadrado en toda su longitud. Desde la segunda marca, se realiza una traza que vaya perpendicular a la línea trazada anteriormente con origen el punto de intersección de la marca con la línea trazada y como final el límite del cuadrado. Realizar este proceso tantas veces como número de trazas se haya elegido.

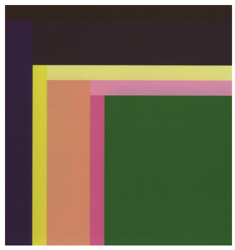
La siguiente estructura está realizada sobre una trama de 16 x 16 = 256 cuadrados.



ORTogonal



1, 2, 4, 3, 5, 6, 6, 7



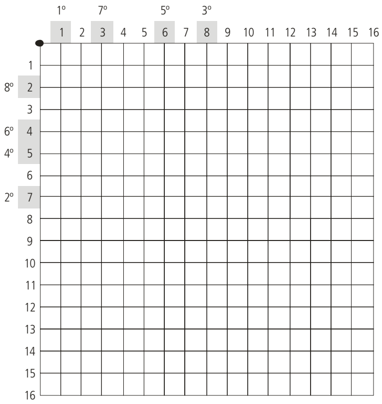
ORT 050

La obra, ORT 051, está realizada sobre una trama de 16 x 16 = 256 cuadrados, según el siguiente método:

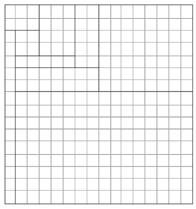
1. Utilizar la serie de los números naturales 1, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 2 para realizar ocho marcas sobre 2 lados consecutivos del cuadrado.

2. Comenzar por el vértice superior izquierdo del cuadrado. Aplicar las marcas, alternativamente, primero sobre el lado superior del cuadrado después sobre el lado vertical izquierdo; de nuevo, sobre el lado superior, después el vertical izquierdo; y así sucesivamente.

3. La obra se realiza sobre el cuadrante superior izquierdo. Sus límites están determinados por los tres primeros números de la serie: 1, 7 (línea horizontal) y 8 (línea vertical). Desde la primera marca se realiza una traza vertical que divida el cuadrado en toda su longitud. Desde la segunda, se realiza una traza que vaya perpendicular a la línea trazada anteriormente con origen en el punto de intersección de la marca con la línea trazada y como final el límite del cuadrado. La traza vertical realizada con la tercera marca, limita el campo de operación de las siguientes líneas. Realizar este proceso tantas veces como números de trazas se hayan especificado.



ORTogonal



1, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 2

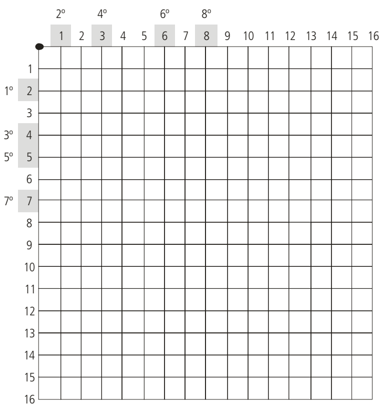
ORT 051

La obra, ORT 052, está realizada sobre una trama de 16 x 16 = 256 cuadrados con los siguientes criterios constructivos:

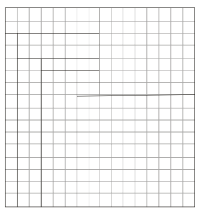
1. Utilizar la serie de los números naturales 2, 1, 4, 3, 5, 6, 7, 8 para realizar ocho marcas sobre 2 lados consecutivos del cuadrado: el lado superior y el lado vertical izquierdo.

2. Comenzar por el vértice superior izquierdo del cuadrado. Aplicar las marcas, alternativamente, primero sobre el lado vertical izquierdo del cuadrado después sobre el lado superior; de nuevo sobre el lado izquierdo; después el superior; y así sucesivamente.

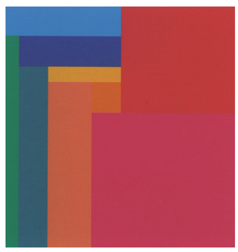
3. La obra se realiza sobre el cuadrante superior izquierdo. Sus límites están determinados por los dos últimos números de la serie: 7 (línea horizontal) y 8 (línea vertical). Desde la primera marca se realiza una traza horizontal que vaya desde la marca a una línea imaginaria que divide el cuadrado, verticalmente, en dos partes iguales. Desde la segunda, se realiza una traza que vaya perpendicular a la línea trazada anteriormente con origen en el punto de intersección de la marca con la línea trazada y como final el límite del cuadrado. Realizar este proceso tantas veces como puntos de inicio de traza se hayan definido.



ORTogonal



2, 1, 4, 3, 5, 6, 7, 8

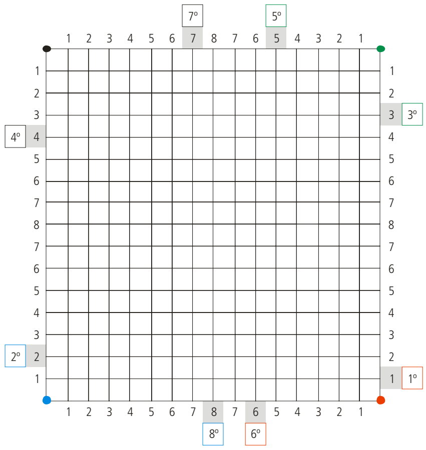


ORT 052

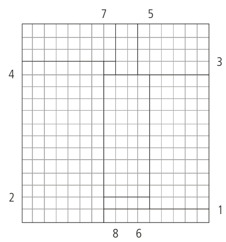
En la realización de las siguientes obras, ORT 048, ORT 047, se utilizan los cuatro lados del cuadrado para realizar marcas y los cuatro vértices como puntos de inicio de contadores. Cada vértice es origen del trazado de una línea vertical y una línea horizontal. El orden de realización de las líneas estructurales de la obra es, para las horizontales:

1, 2, 3, 4, de abajo arriba y, alternativamente, de derecha a izquierda; y para las verticales: 5, 6, 7, 8, alternativamente, de arriba abajo y de derecha a izquierda.

Para crear las líneas estructurales de la obra, se trazan las líneas horizontales y verticales de la serie y, con el objeto de crear un marco con el trazado o crear el mayor espacio posible en el centro, se van borrando los tramos correspondientes que sean necesarios. En la formación del marco hay que tener en cuenta, además, la siguiente propiedad: en cada dirección del cuadrado, hay dos rectángulos que refuerzan esa dirección.

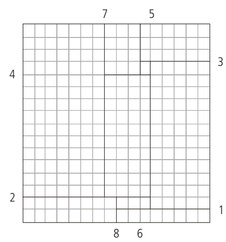


ORT 048



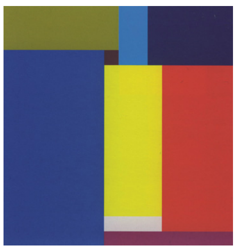
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

ORT 047



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Las obras están representadas en las siguientes ilustraciones:



ORT 048

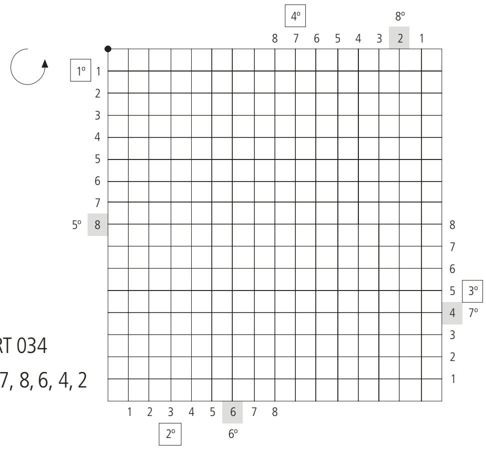
ORT 047

En las obras, ORT 034, ORT 035, se utiliza el mismo criterio de construcción que los anteriores pero intentando que el espacio interior sea lo más pequeño posible o incluso que desaparezca. En estas obras la secuencia de realización indica la longitud de la línea a trazar. El punto de partida de cada línea está en la periferia del cuadrado o lo más cercano posible a ella. El punto de llegada lo determina la posición de la línea a trazar por el siguiente número de la serie, que es perpendicular a la anterior. Por ejemplo, si el par 1, 4, de una serie de números cualquiera, es el par de inicio de la serie, hay que realizar las siguientes operaciones: traza una línea horizontal, desde la posición 1 del lado vertical derecho del cuadrado, hasta encontrarse con la línea vertical 4 que tiene su origen en el lado izquierdo del cuadrado.

1. Para obtener las divisiones ortogonales en el cuadrado, se realizan unas marcas o divisiones en el perímetro del cuadrado, dos por lado según las siguientes series de números elegidos: 1, 3, 5, 7, 8, 6, 4, 2, o 1, 4, 8, 2, 6, 7, 3, 6. Se comienza a contar por el vértice superior izquierdo y se aplican los números de la serie sobre los lados

del cuadrado contando en el sentido contrario a las agujas del reloj y aplicando cada vez sólo un número de la serie de forma que se dan dos vueltas al cuadrado.

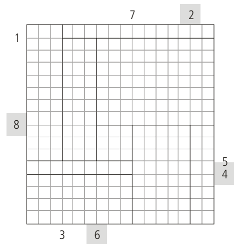
2. Se realizan las trazas completas, de lado a lado del cuadrado y se suprimen los tramos que se necesite para que, con todas las trazas, se cree un marco de dos niveles de rectángulos en cada lado y un hueco en el centro lo más pequeño posible.



ORT 034

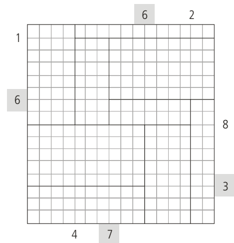
1, 3, 5, 7, 8, 6, 4, 2

ORT 034



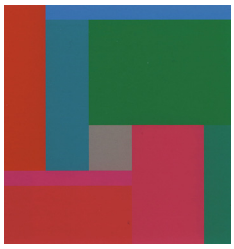
1, 3, 5, 7, 8, 6, 4, 2

ORT 035



1, 4, 8, 2, 6, 7, 3, 6

Las obras analizadas están representadas en las siguientes ilustraciones:

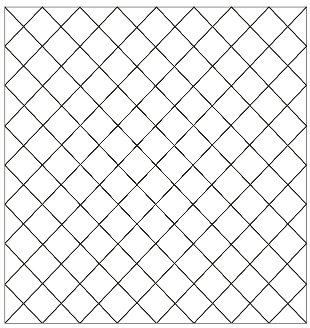


ORT 034

ORT 035

2. Serie ESCuadra:

Las obras de esta serie utilizan, como estructura, un cuadrado cuyos lados están divididos en 8 partes iguales y en cuyo interior hay una trama basada en líneas inclinadas a 45°, que parten de las divisiones de los lados del cuadrado y de sus vértices.



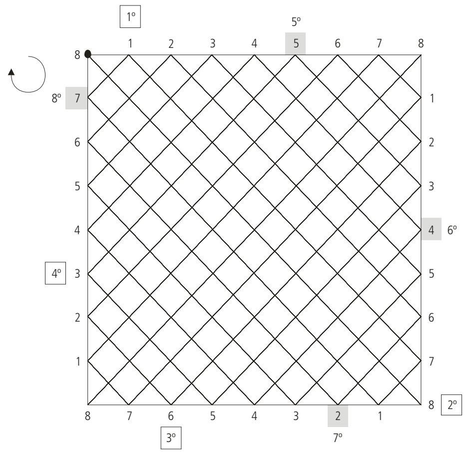
ESCuadra

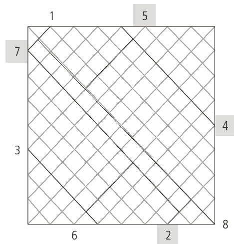
Como ocurría en la serie ORT, las posibilidades de realizar trazas sobre esta trama dan lugar a varias series que se diferencian entre sí por el número de trazos realizados, la estrategia de trazado utilizada y el criterio de color empleado para colorear las superficies generadas.

En la realización de la composición, ESC 127 A, se observan las siguientes reglas básicas:

1. Para obtener las divisiones en escuadra en el cuadrado, se realizan unas marcas o divisiones en el perímetro del cuadrado, dos por lado según la siguiente serie de números 1, 8, 6, 3, 5, 4, 2, 7. Se comienza a contar por el vértice superior izquierdo y se aplican los números de la serie sobre los lados del cuadrado contando en el sentido de las agujas del reloj y aplicando cada vez sólo un número de la serie de forma que se dan dos vueltas al cuadrado.

2. Se realizan las trazas completas, de lado a lado del cuadrado y se suprimen los tramos que se necesite para que, con todas las trazas, se cree un marco de dos niveles en cada lado y un hueco en el centro.





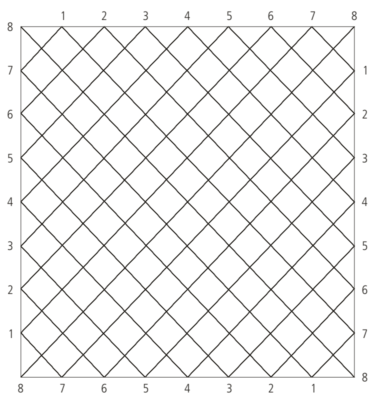
1, 8, 6, 3, 5, 4, 2, 7

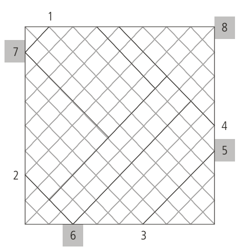
ESC 127 A

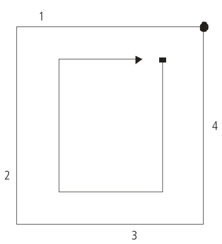
En la siguiente obra, ESC 128 A, se utiliza la serie: 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, para colocar las marcas sobre el perímetro del cuadrado. El procedimiento para realizar las marcas es el siguiente:

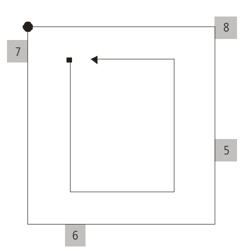
1. Comenzando en el vértice superior derecho del cuadrado y girando en el sentido de las agujas del reloj, realizar las marcas de los cuatro primeros números de la serie, uno por cada lado del cuadrado.

2. Comenzando en el vértice superior izquierdo del cuadrado y girando en el sentido contrario a las agujas del reloj, realizar las marcas de los últimos cuatro números de la serie, uno por cada lado del cuadrado.









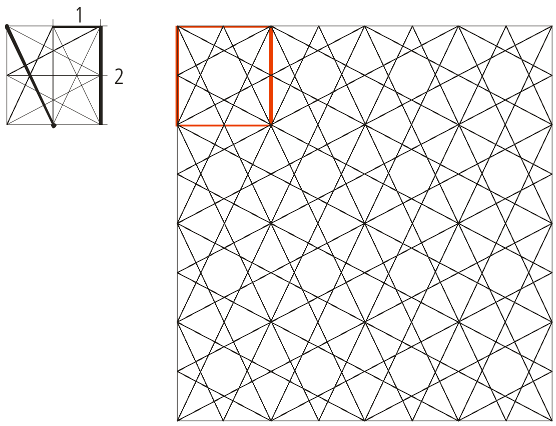
4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5

La obra final está representada en la siguiente imagen:

ESC 128 A

3. Serie HEMipitagórica

Las obras de esta serie utilizan una trama basada en trazos que unen los vértices del cuadrado con los puntos medios de sus lados, es decir, trazando hipotenusas de triángulos rectángulos de lado menor igual a 1 y de lado mayor igual a 2.



HEMipitagórica

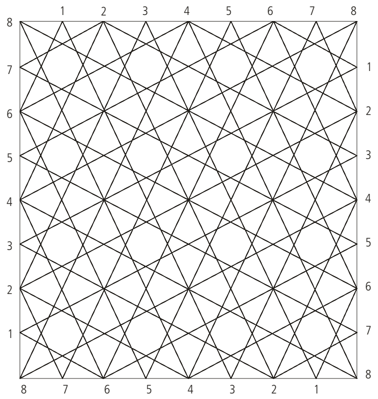
La siguiente obra, HEM 233 A, utiliza esta trama como soporte para realizar los trazados de la composición. La serie que se utiliza para colocar las marcas sobre el perímetro del cuadrado es la siguiente: 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, 5.

El proceso para realizar las trazas es el siguiente:

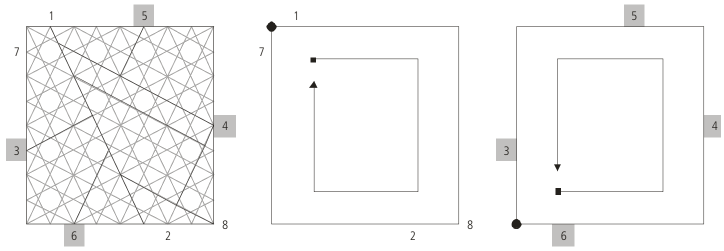
1. Comenzando en el vértice superior izquierdo del cuadrado y girando en el sentido de las agujas del reloj, realizar las marcas correspondientes a los números 1, 8, 2, y 7, uno por cada lado del cuadrado.

2. Comenzando en el vértice inferior izquierdo del cuadrado y girando en el sentido contrario a las agujas del reloj, realizar las marcas que corresponden a los números 3, 6, 4 y 5 de la serie, uno por cada lado del cuadrado.

3. El criterio para elegir la dirección de la trama es arbitrario y su longitud viene determinada por el orden de trazado y las líneas que se encuentre en su recorrido: elige un tramo que no corte a ninguna línea previamente trazada.



HEM 233 A

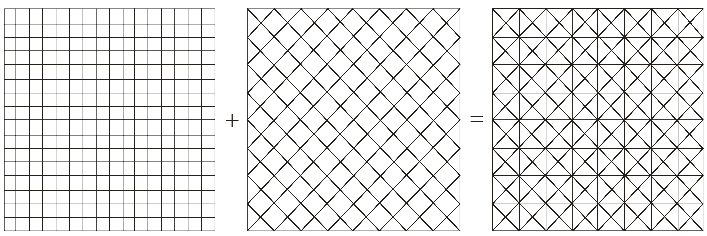


La obra está representada en la siguiente ilustración:

HEM 233 A

4. Serie ORT + ESC

Las obras de esta serie utilizan una trama que se obtiene por la superposición de la trama ORTogonal y la trama ESCuadra: está formada por líneas a 0º, 90º y 45º.



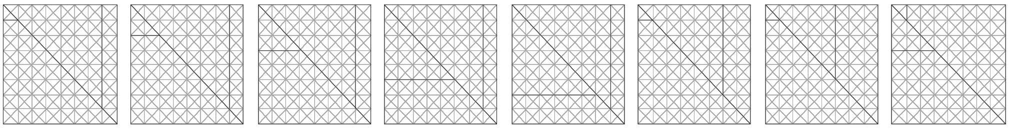
ORTogonal ESCuadra ORT + ESC

Dentro de esta serie es importante destacar las obras ORT/ESC 1-300, ORT/ESC 1-301, ORT/ESC 1-302, ORT/ESC 1-304, ORT/ESC 1-305, ORT/ESC 1-307, ORT/ESC 1-308, ORT/ESC 1-310, ORT/ESC 1-311, ORT/ESC 1-313, ORT/ESC 1-314, ORT/ESC 1-315, ORT/ESC 1-316, ORT/ESC 1-318, ORT/ESC 1-319, ORT/ESC 1-320 basadas en un mismo principio constructivo:

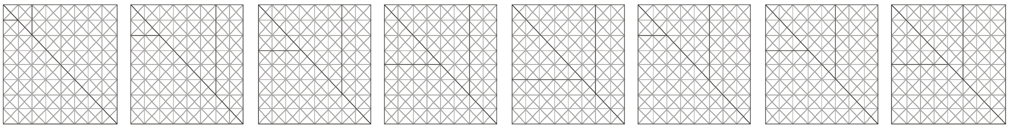
1. Dividir el soporte cuadrado por una diagonal descendente que va desde el vértice superior izquierdo del cuadrado al vértice inferior derecho (45º). Esta línea pertenece a la estructura ESCuadra.

2. A cada una de las mitades obtenidas aplicarle una traza de la trama ORTogonal, de forma que ambas sean perpendiculares entre sí.

3. Utilizar combinaciones de 4 tonos para completar la obra.



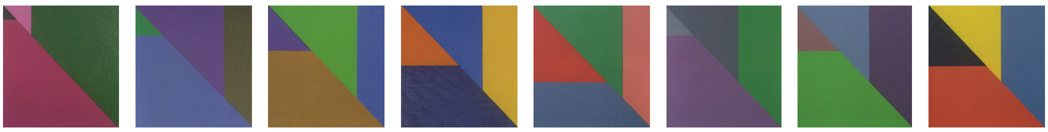
ORT / ESC 1-300 ORT / ESC 1-301 ORT / ESC 1-302 ORT / ESC 1-304 ORT / ESC 1-305 ORT / ESC 1-307 ORT / ESC 1-308 ORT / ESC 1-310



ORT / ESC 1-311 ORT / ESC 1-313 ORT / ESC 1-314 ORT / ESC 1-315 ORT / ESC 1-316 ORT / ESC 1-318 ORT / ESC 1-319 ORT / ESC 1-320

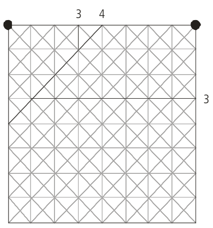
Se reproducen, a continuación, las obras que resultan de las composiciones anteriores:

ORT / ESC 1-300 ORT / ESC 1-301 ORT / ESC 1-302 ORT / ESC 1-304 ORT / ESC 1-305 ORT / ESC 1-307 ORT / ESC 1-308 ORT / ESC 1-310

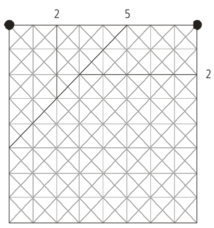


ORT / ESC 1-311 ORT / ESC 1-313 ORT / ESC 1-314 ORT / ESC 1-315 ORT / ESC 1-316 ORT / ESC 1-318 ORT / ESC 1-319 ORT / ESC 1-320

La serie ORT/ESC 2-302, ORT/ESC 2-308, está compuesta de tres trazas: una a 45º que divide el cuadrado en dos partes desiguales, aislando un vértice de los otros tres, y dos ortogonales entre sí, un línea en cada una de las partes obtenidas con la división diagonal.



ORT / ESC 2-302

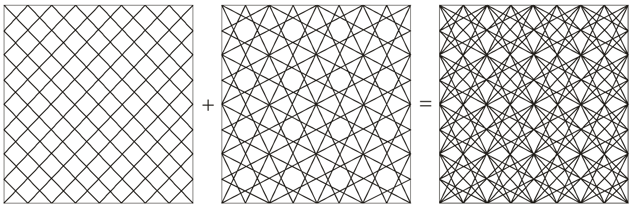


ORT / ESC 2-308

Los orígenes de las trazas son diferentes según sean las líneas que se van a trazar. Para las líneas verticales y diagonales, se utiliza como punto de partida el vértice superior izquierdo del cuadrado. Para las líneas horizontales, se utiliza el vértice superior derecho.

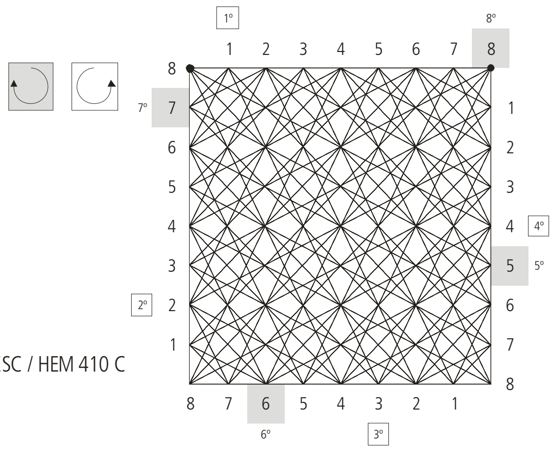
5. Serie ESC + HEM

Las obras de esta serie utilizan una estructura que se obtiene con la superposición de dos tramas: la trama ESCuadra y la trama HEMipitagórica:

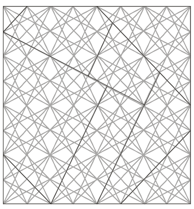


ESCuadra HEMipitagórica ESC + HEM

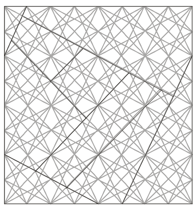
Las siguientes obras ESC / HEM 410 C y ESC / HEM 409 A, se realizan sobre la trama ESC + HEM. En cada una de ellas se realizan 8 trazas: cuatro que se toman de la retícula ESCuadra y las otras cuatro de la retícula HEMipitagórica. En ambas series se representa la serie de los números enteros: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. En ESC / HEM 410 C, se representan en los vértices, comenzando en el vértice superior izquierda del cuadrado y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj, con líneas a 45º, la serie: 1, 2, 3, 4. Dentro del espacio que queda disponible, con la trama HEMipitagórica, y comenzando en el vértice superior derecho del cuadrado y contando en el sentido de las agujas del reloj, se representan el resto de los números de la serie: 5, 6, 7, 8. En ESC / HEM 409 A, ocurre lo mismo que en el caso anterior, pero se invierte el uso de las tramas. Se utiliza la trama HEMipitagórica para representar sobre los vértices del cuadrado y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj, los términos: 1, 2, 3, 4. En el espacio interior que queda disponible en el cuadrado, se completa la secuencia: 5, 6, 7, 8, utilizando líneas a 45º de la trama ESCuadra.



ESC / HEM 410 C



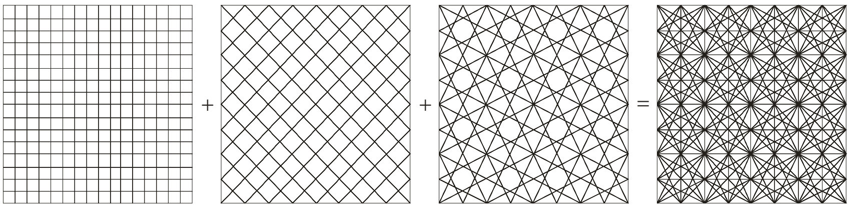
ESC / HEM 410 C



ESC / HEM 409 A

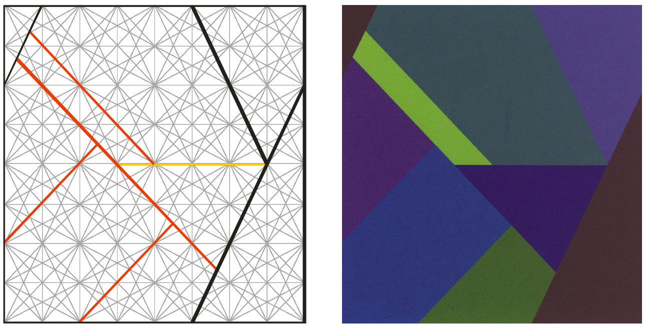
6. Serie ORT + ESC + HEM

Las obras de esta serie se obtienen con la superposición de tres tramas: la trama ORTogonal, la trama ESCuadra y la trama HEMipitagórica:



ORTogonal + ESCuadra + HEMipitagórica = ORT + ESC + HEM

En la obra ORT / ESC / HEM 600 A se han realizado ocho trazos: tres de ellos, en negro, con la retícula HEM; uno, en amarillo, con la retícula ORT; y los otros cuatro, en rojo, con la trama ESC.



ORT / ESC / HEM 600 A

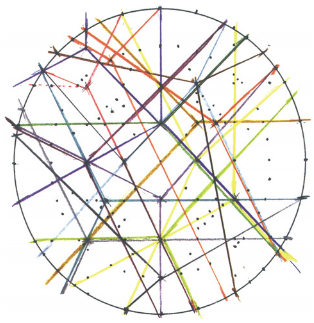
7. Serie TONDOS

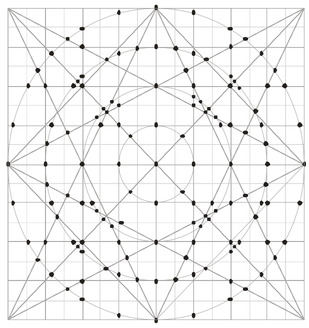
En la serie Tondos se utilizan soportes circulares a los que se les ha practicado dos tipos de sistemas:

1. Trazar arcos de circunferencia incompletos.
2. Dibujar trazas que correspondan a cualquiera de las tramas anteriores: ORT, HEM, ESC,…

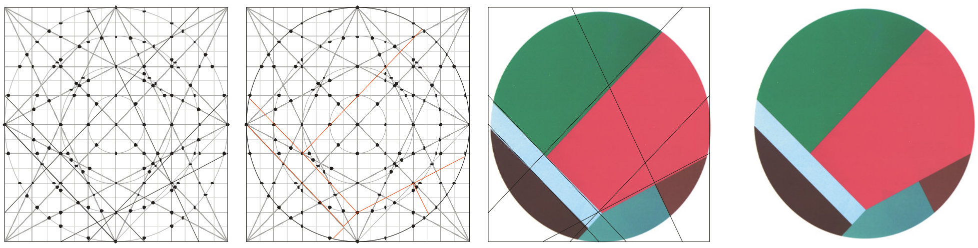
Tanto en un caso como en el otro, la estrategia para fragmentar el espacio en un número determinado de superficies, capaces de soportar color, varía según se dé prioridad a crear un espacio vacío o lleno. Existen tondos de 4, 6, 9 y 12 tonos.

En el catálogo de la exposición *Julián Gil: Tondos*, publicado por la Galería 57 de Madrid, Gil incluye la siguiente plantilla como imagen evocadora de los conceptos y herramientas que forman parte del proceso generativo de la serie tondos. En este trabajo, se incluye la plantilla dentro de una estructura ortogonal de 16 x 16 cuadrados y se buscan los orígenes de cada una de las trazas y de los puntos que aparecen en la propuesta de Gil.

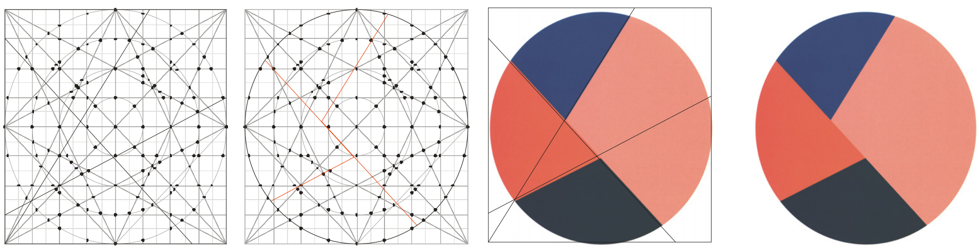




A continuación, utilizando esta estructura, se analizan un conjunto de Tondos: Tondo 099, Tondo 074, Tondo 045, Tondo 001. En las dos primeras obras: Tondo 099 y Tondo 074, se fragmentan los tondos utilizando trazas que corresponden a cualquiera de las tramas conocidas anteriores: ORT, HEM, ESC,…

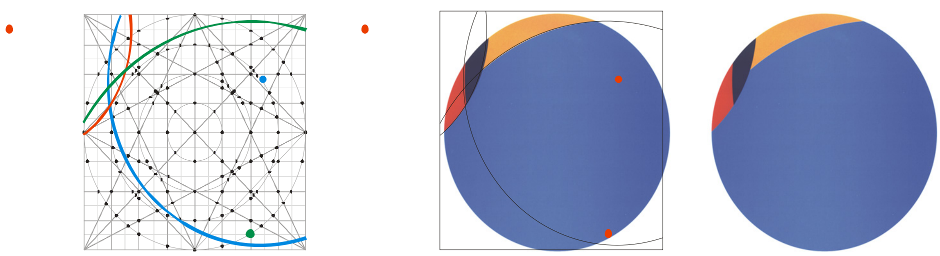


Tondo 099

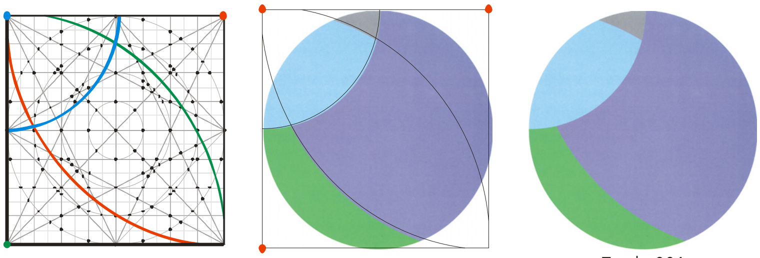


Tondo 074

En las otras dos obras: Tondo 045 y Tondo 001, se utilizan arcos de circunferencia para fragmentar el espacio. Los centros de los arcos pueden formar parte de la estructura realizada previamente: vértices del cuadrado donde está inscrito el tondo, puntos significativos, puntos de intersección de líneas estructurales,…; o ser externo a la estructura. En este último caso, es importante hacer una previsión sobre dónde empieza y dónde acaba el arco dentro de la propia estructura.



Tondo 045

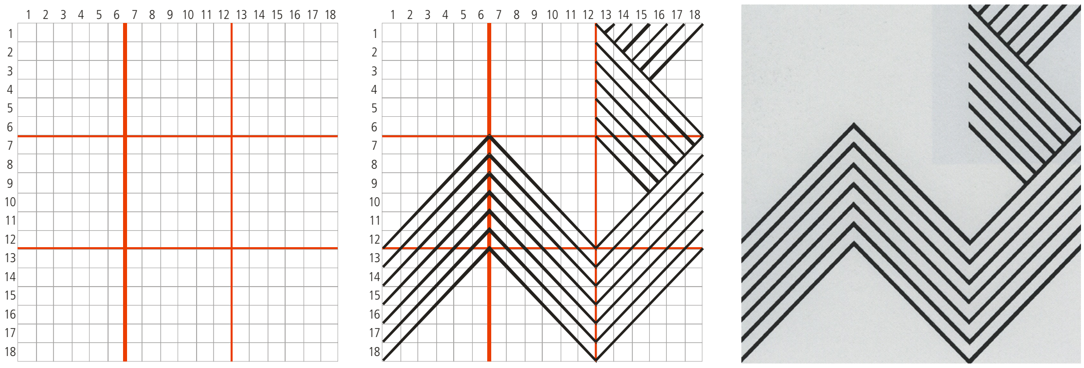


Tondo 001

5.3.4- ALBERT RUBENS

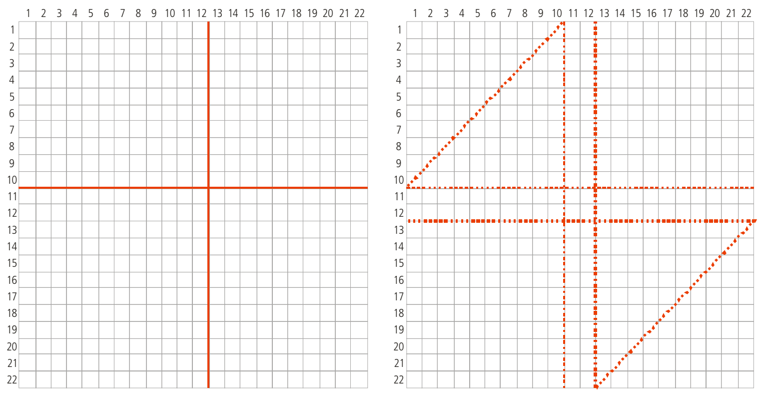
1. B.IV-P.131-135, 1970

En esta obra, Albert Rubens trabaja en un soporte cuadrado dividido en 3 módulos cuadrados, de 3 x 3 = 9 cuadrados, de 6 x 6 cuadrados cada uno. Para generar las líneas estructurales de la obra, utiliza líneas a 45º que ocupan la mitad de cada uno de estos cuadrados y de forma que haya una sucesión y continuidad entre ellas.



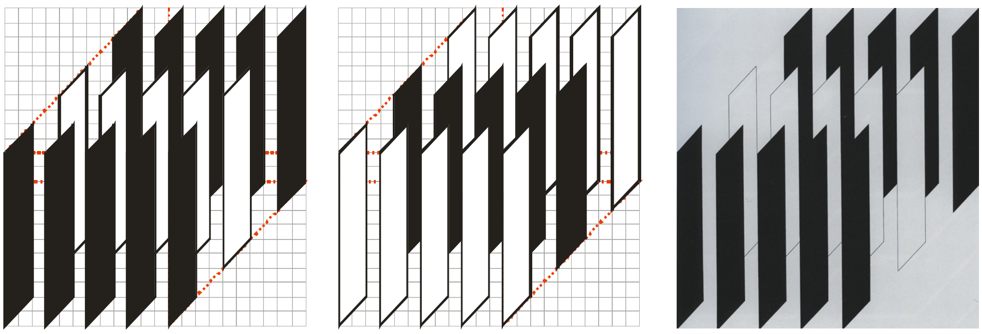
2. Composición I, 1968[3]

A partir de una estructura ortogonal de 22 x 22 cuadrados, se trazan dos líneas verticales y dos horizontales según el siguiente criterio: desde los extremos de la estructura, formar cuatro cuadrados de 10 x 10 cuadrados; en el centro quedan dos bandas, una vertical y otra horizontal de dos cuadrados de ancho cada una de ellas. A partir de esta plantilla, construir la diagonal ascendente, de izquierda a derecha, del cuadrado superior izquierdo y del cuadrado inferior derecha.



[3] Composition I, 1968.

A partir de esta plantilla, utilizando el espacio entre diagonales, realizar la siguiente composición:



5.3.5- AURELIE NEMOURS

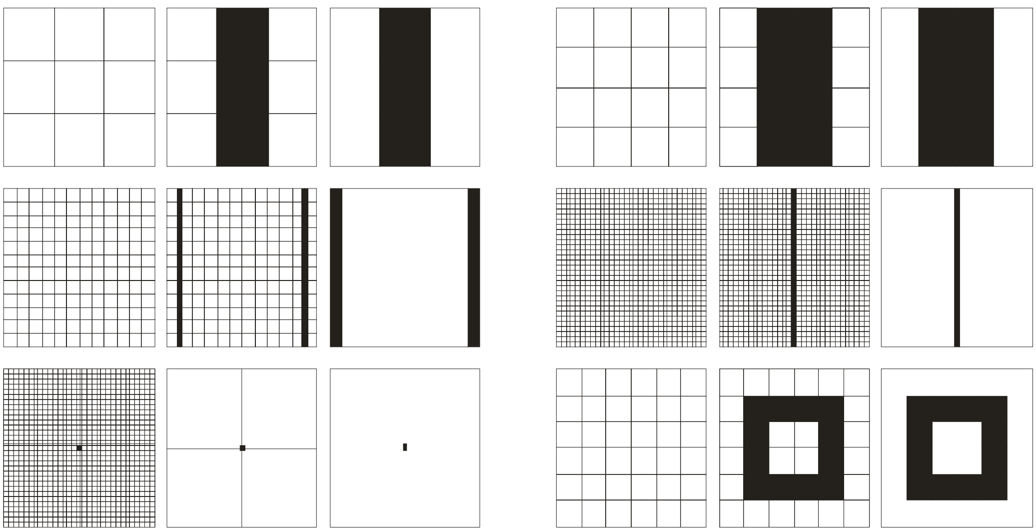
1. Ritmo del milímetro

Ritmo del milímetro es el título de una serie de cuadros dedicados a las relaciones entre el negro y el blanco. El título se refiere tanto al ritmo de la estructura que soporta el conjunto de las obras de la serie, como al que se utiliza para que las formas blancas y negras se distribuyan en la superficie del cuadro y se relacionen entre sí.

La serie está compuesta por un gran número de obras que utilizan como superficie de trabajo, un soporte cuadrado sobre el que se ha aplicado una estructura modular con un número variable de subdivisiones Cada obra está restringida a un número reducido de elementos, que unas veces aparecen solos, aislados y otras repetidos.

De un cuadro a otro se pueden observar las diferentes maneras que puede adoptar una línea, un cuadrado,… para dividir un soporte: la línea multiplica, divide, organiza la superficie. En todos los casos, se trata de descubrir las leyes que rigen la constitución de cada uno de ellos. Las obras no reflejan una preocupación compositiva sino una idea de espacio en tanto que reflejo de un mundo inteligible en la que el ritmo es su razón de ser. Las obras son un medio de calcular posibles, de cuantificar cualidades, de admitir órdenes. Consiste el proceso en elegir un objetivo concreto y elegir el sistema adecuado para conseguirlo: elección de proporciones entre los elementos que se utilizan, repetición de formas, distribución alterna del blanco y negro,…

A continuación se muestran algunas de las propuestas de esta serie:



6.- ESTRUCTURAS DINÁMICAS

En los capítulos anteriores se han introducido las estructuras estáticas. Se ha demostrado cómo con este tipo de estructuras agrupadas se pueden formar estructuras muy complejas. En este capítulo se van a tratar las estructuras dinámicas: raíz de y áureas. Este tipo de estructuras se denominan dinámicas porque no crecen al añadir un módulo constante a un cuadrado base, sino que la ley de crecimiento que las define hace que la forma geométrica sobre la que se aplica, crezca o decrezca de forma diferente a medida que evoluciona la estructura y su programa correspondiente. Este tipo de estructuras tiene grandes ventajas de flexibilidad sobre las representaciones estáticas, sin embargo, tienen un punto débil: al ser estructuras secuenciales se generan de tal modo que es necesario moverse a través de ellas una generación cada vez (cada resultado obtenido tiene un siguiente resultado y uno anterior). Lo que es interesante es que cada rectángulo obtenido puede tener, a su vez, diferentes siguientes rectángulos dinámicos que introducen el concepto de subdivisiones sucesivas: una estructura dinámica se puede ampliar o reducir a medida que se requiera utilizando la variable dinámica correspondiente: raíz de dos, número de oro, raíz de tres,... Una estructura dinámica es una colección de operaciones, que se enlazan sucesivamente, de subdivisión dinámica de una figura geométrica. Una estructura dinámica puede modificar su estructura mediante la operación que la define, ampliando o reduciendo su tamaño a medida que se ejecuta su programa generativo.

En este capítulo se van a estudiar los soportes rectangulares dinámicos: cómo se generan, cómo se clasifican y que características estructurales presentan.

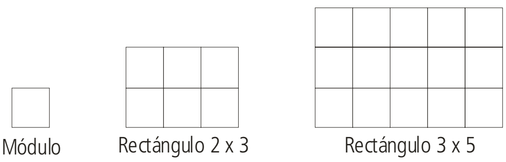
6.1.- SISTEMAS GENERATIVOS

Los soportes rectangulares se generan, a partir del cuadrado, por crecimiento modular aditivo (sistema aditivo o estático) o por crecimiento modular progresivo o geométrico (sistema generativo o dinámico). De acuerdo a esta premisa, los rectángulos se pueden clasificar, según su forma de crecimiento, en dos tipos: los rectángulos estáticos y los rectángulos dinámicos.

6.1.1.- Rectángulos estáticos

Los rectángulos estáticos se producen por un crecimiento acumulativo a partir de un módulo cuadrado base. Las dimensiones de los rectángulos estáticos son resultado de la multiplicación de un número por el módulo base, de forma que el número indica el número de veces que se repite el módulo base en cada una de las direcciones del espacio. El sistema numérico empleado se basa en razones numéricas simples: 1/2, 2/3, 3/4,..., que provienen de la serie de los números naturales.

La proporción aditiva se emplea en la composición para establecer tamaños que guardan entre sí una relación modular. Según la expresividad pretendida, se añaden múltiplos y submúltiplos del módulo base.



6.1.2.- Rectángulos dinámicos

Los rectángulos dinámicos se producen por un crecimiento progresivo, constante y regular a partir de una relación proporcional fija: raíz de dos, número de oro, raíz de tres,... Se generan aplicando una operación constante sobre un estado de crecimiento anterior.

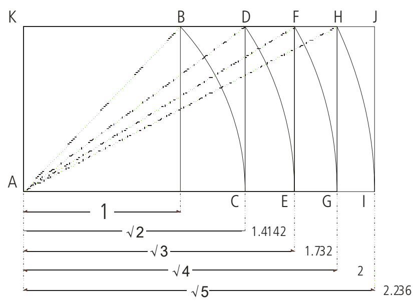
Este sistema generativo somete las proporciones entre las partes del rectángulo a leyes de crecimiento: un multiplicador o un exponente aumenta o disminuye progresivamente las partes del rectángulo, según una progresión geométrica, sobre una base constante.

El crecimiento de los rectángulos se realiza, por lo tanto, a través de incrementos sucesivos, ampliaciones regulares y periódicas, que ocupan posiciones similares o análogas a las de las anteriores configuraciones.

Existen dos tipos de rectángulos dinámicos:

1. Rectángulos raíz de ...
2. Rectángulos áureos

Para construir la serie de rectángulos raíz de se puede utilizar el siguiente método:



Se parte de un cuadrado AB cuyo lado AK mide la unidad o 1. Con 1 se indica un módulo, una unidad de medida y no una medida en centímetros concreta. Se traza su diagonal AB cuya medida, por el teorema de Pitágoras es raíz cuadrada de dos. Con centro en A y radio AB, se traza un arco de circunferencia, BC. La línea AC es igual a la línea AB o raíz cuadrada de dos (1.4142). El rectángulo AD es, por lo tanto, un rectángulo raíz de dos.

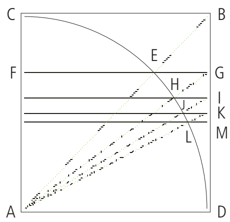
La diagonal del rectángulo raíz de dos, AD, es igual, por el teorema de Pitágoras, a raíz cuadrada de tres. Por el mismo proceso que en el rectángulo raíz de dos, la línea AE es igual a AD, o raíz cuadrada de tres (1.732).

La diagonal del rectángulo raíz de tres, AF, es igual a raíz cuadrada de cuatro. Por el mismo proceso anterior, la línea AB es igual a AF o a raíz cuadrada de cuatro (2). AH es, por lo tanto, un rectángulo raíz de cuatro.

La diagonal del rectángulo raíz de cuatro, AH, es igual a raíz cuadrada de cinco. Por el mismo proceso visto anteriormente, la línea AI es igual que AH, o a raíz cuadrada de cinco (2.236). Por lo tanto, AJ es un rectángulo raíz de cinco.

Este proceso se podría realizar tantas veces como se quisiera hasta el infinito, pero por razones prácticas no se van a considerar en este trabajo rectángulos dinámicos mayores que el rectángulo raíz de cinco.

En el método descrito anteriormente, los rectángulos raíz de que se van obteniendo son mayores que aquellos de los que proceden, por lo tanto, se puede decir que el crecimiento es expansivo. Cuando a partir de una figura geométrica dada, rectángulo o cuadrado, se quieren obtener todos los rectángulos raíz de que se puedan incluir en su interior, se utiliza otro método constructivo. Si la figura geométrica de la que se parte es un cuadrado, el método para construir rectángulos raíz de dentro de su forma es el siguiente:



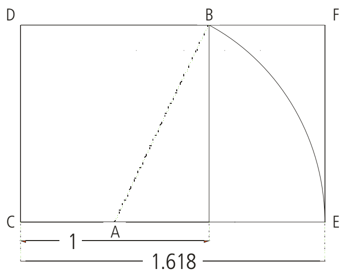
Se parte de un cuadrado AB, en el que se traza un arco de círculo CED, de radio la longitud de los lados del cuadrado, por ejemplo, AD. La diagonal del cuadrado AB, corta el arco de círculo en el punto E. Por el punto de corte E, se traza una línea paralela a AD, FG. El rectángulo AG es un rectángulo raíz de dos dentro del cuadrado AB.

La diagonal del rectángulo raíz de dos AG corta el arco de círculo en H. Si se traza una línea que pase por el punto H y sea, como en el caso anterior, paralela a la línea AD, se obtiene un rectángulo raíz de tres, AI.

La diagonal del rectángulo raíz de tres AI, corta el arco de círculo en el punto J. Trazando una línea que pase por el punto J y sea paralela al lado del cuadrado AD, se obtiene un rectángulo raíz de cuatro, AK.

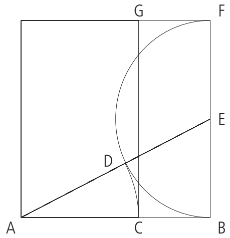
La diagonal del rectángulo raíz de cuatro AK, corta el arco de círculo en el punto L. Al trazar una paralela al lado AD del cuadrado por el punto L, se obtiene un rectángulo raíz de cinco, AM.

Para construir los rectángulos áureos se utiliza el siguiente procedimiento:



Se dibuja un cuadrado, CB y se traza una línea, AB, que una el punto medio de un lado del cuadrado, A, con uno de sus vértices, B. Se proyecta la línea AB sobre la horizontal y en el punto de corte, E, se completa el rectángulo dibujando las líneas BF y FE. El rectángulo DE, es un rectángulo áureo. Está compuesto por el cuadrado CB y el rectángulo BE.

De la misma forma que los rectángulos raíz de, los rectángulos áureos también pueden crecer expandiéndose o reduciéndose dentro de una superficie dada. El método para expandirse es el descrito con anterioridad. Para construir un rectángulo áureo dentro de un cuadrado dado se utiliza el siguiente método:

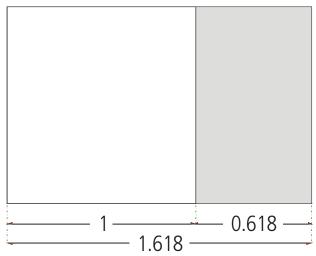


Se construye un cuadrado AF y se traza la línea AE que va desde el vértice del cuadrado A al punto medio, E, del lado FB. Con centro en E y radio EB, se traza un semicírculo que corta la línea AE en D. Haciendo centro en A y con radio AD, se traza un arco de circunferencia que corta el lado AB del cuadrado en el punto C. Con vértice en A y lado menor AC, se traza un rectángulo cuya altura sea BF. El rectángulo obtenido AG, es un rectángulo áureo.

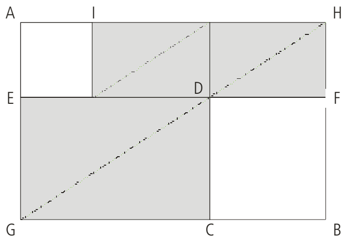
Todos los rectángulos dinámicos, bien sean raíz de o áureos, tienen las siguientes propiedades:

1. Aplicación de un cuadrado a un rectángulo dinámico dado:

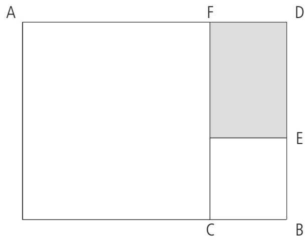
Si a un rectángulo áureo (1.618) se le añade un cuadrado (1) en el extremo de uno de sus lados, se halla, en el otro extremo, un único rectángulo áureo (0.618) múltiplo del anterior.



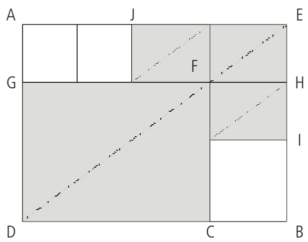
Dado un rectángulo áureo AB, se traza un cuadrado AC en uno de sus extremos, de lado igual a la altura del rectángulo. Se traza la diagonal del rectángulo áureo, GH. Esta diagonal corta el lado del cuadrado AC en D. Se traza un línea EF paralela al lado GB del rectángulo que pase por D. El área obtenida EB está compuesta por un cuadrado CF, un rectángulo áureo GD y el área restante AF está compuesta a su vez por un cuadrado y dos rectángulos áureos ID y DH.



Si se aplica un cuadrado AC, a un rectángulo raíz de dos AB, en uno de sus extremos, se obtiene un rectángulo FB que a su vez puede dividirse, por el mismo procedimiento, en un cuadrado CE y un rectángulo raíz de dos FE.



Dado un rectángulo raíz de dos AB, se traza un cuadrado AC en uno de sus extremos de lado igual a la altura del rectángulo. Se traza la diagonal del rectángulo raíz de dos, DE. Esta diagonal corta el lado del cuadrado AC en F. Se traza una línea GH paralela al lado DB del rectángulo que pase por F. El área obtenida GB está compuesta por un cuadrado CI y dos rectángulos raíz de dos DF y FI. El resto del rectángulo, AH, esta compuesto a su vez por dos cuadrados y dos rectángulos raíz de dos IF y FE.



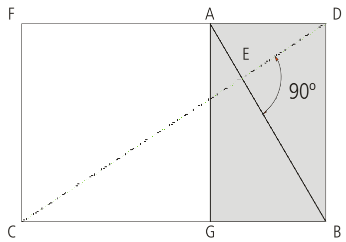
2. Obtención de rectángulos recíprocos

El rectángulo recíproco de un rectángulo dado, es un rectángulo de igual forma que el anterior pero de tamaño inferior.

Dos rectángulos son recíprocos entre sí, cuando la diagonal del recíproco corta en perpendicular a la diagonal del rectángulo mayor.

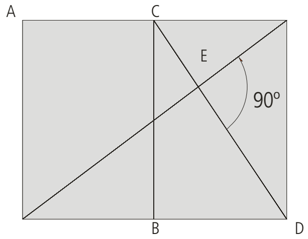
Para hallar un rectángulo recíproco de un rectángulo áureo dado, FB, se realizan las siguientes operaciones:

1. Trazar la diagonal del rectángulo dado CD.
2. Por uno de los vértices del rectángulo, B, trazar una perpendicular a la diagonal, AB.
3. Donde corte esta línea con uno de los lados del rectángulo grande, A, trazar una paralela a uno de los lados del rectángulo, AG.
4. El rectángulo obtenido, AB es recíproco al rectángulo del que se parte, FB.



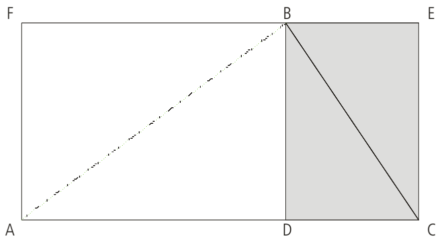
Cuando se obtiene el rectángulo recíproco de un rectángulo áureo, se obtiene siempre un cuadrado y un rectángulo áureo recíproco del dado.

Para hallar un rectángulo recíproco (AB o CD) de un rectángulo raíz de dos dado, AD, se realizan las mismas operaciones que se han realizado para obtener el recíproco de un rectángulo áureo sólo que el resultado que se obtiene ahora es diferente. Cuando se traza la perpendicular a la diagonal de un rectángulo raíz de dos dado, se obtienen dos rectángulos recíprocos del rectángulo raíz de dos, AB y CD.



Otros métodos para obtener rectángulos recíprocos son:

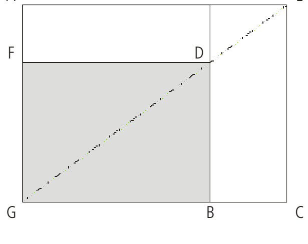
1. Trazar un triángulo rectángulo, de forma que uno de sus lados sea la diagonal del rectángulo dinámico dado:



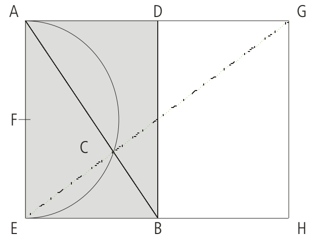
Dibujar un rectángulo FD y su diagonal AB. En ángulo recto con la línea AB, dibujar la línea BC. Completar el rectángulo BC. ABC es un triángulo rectángulo en B y el rectángulo BC es recíproco del rectángulo FD.

2. Introduciendo un cuadrado dentro de un rectángulo dinámico:

Se introduce un cuadrado AB en uno de los extremos de un rectángulo raíz de dos AC. Se dibuja la diagonal GE del rectángulo AC. Un lado del cuadrado AB corta a la diagonal del rectángulo AC en D. Se traza una línea, FD, paralela al lado GC del rectángulo por el punto D. El rectángulo FB obtenido es un rectángulo recíproco del AC.



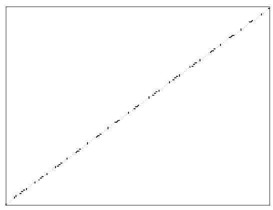
3. Trazando un semicírculo por uno de los lados menores del rectángulo dinámico:



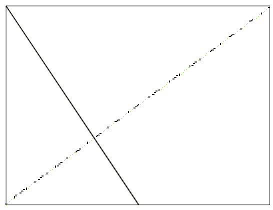
Dado un rectángulo raíz de dos AH, trazar su diagonal EG. Con centro en F y radio FA, trazar un semicírculo sobre el rectángulo AH. El semicírculo trazado corta a la diagonal EG en el punto C. Trazar desde el vértice A una línea AB que pase por C. El rectángulo AB obtenido es recíproco del rectángulo AH. La línea AB, diagonal del rectángulo recíproco AB, corta a la diagonal EG en ángulo recto.

3. Trazado de diagonales:

El elemento más importante de un rectángulo es su diagonal: principal y secundaria.

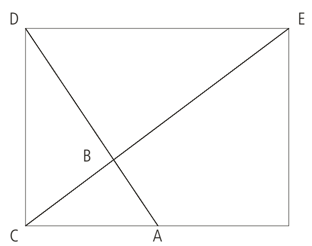


El segundo elemento importante es la diagonal de su recíproco, que corta a la diagonal principal en ángulo recto.



La diagonal de un rectángulo, CE y la diagonal de su recíproco, DA se cortan entre sí para formar líneas proporcionales entre sí. BA, BC, BD y BE son líneas proporcionales entre sí. Es decir, La línea BA mantiene la misma relación proporcional a la línea BC, como la línea BC mantiene con la línea BD y la línea BD con la línea BE.

De la misma forma, AC, CD y DE son líneas proporcionales entre sí. Las líneas proporcionales entre sí dividen el rectángulo en partes proporcionales, múltiplos y submúltiplos de la dada.

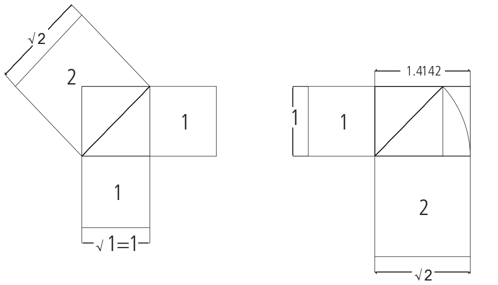


6.2.- RECTÁNGULOS RAÍZ DE

6.2.1.- Rectángulos raíz de dos (1.4142)

1. Definición:

Un rectángulo raíz de dos es aquel cuyo lado mayor mide raíz cuadrada de dos y su lado menor la unidad o 1. La relación entre sus lados menor y mayor es 1 : 1.4142.



Si se traza la diagonal a un cuadrado de lado la unidad o 1, el cuadrado queda dividido en dos triángulos rectángulos. Los lados de cada uno de los triángulos obtenidos tienen como valor la unidad o 1 y la hipotenusa, por el teorema de Pitágoras, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo rectángulo: $\sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$. El área del cuadrado que se obtiene en la diagonal es doble del área del cuadrado más pequeño.

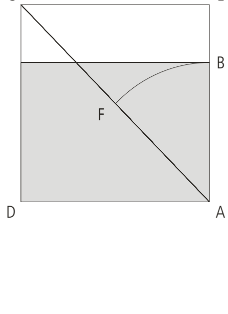
Un rectángulo raíz de dos se puede obtener por cualquiera de los dos procedimientos descritos anteriormente:

1. Partir de un cuadrado. Trazar la diagonal. Con centro en un vértice y radio la diagonal del cuadrado, trazar un arco y donde corte a la línea de base del cuadrado, levantar una vertical. El rectángulo obtenido, es un rectángulo raíz de 2.

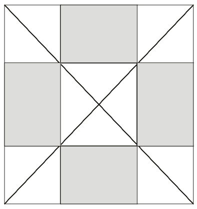
2. Se pueden trazar rectángulos raíz de 2 en un cuadrado, trazando la diagonal de cuadrado; haciendo centro en un vértice y con radio la mitad de la diagonal, trazar un arco hasta uno de los lados del cuadrado. En el punto de corte, trazar una paralela a un lado del cuadrado.

También se puede obtener por el siguiente procedimiento:

3. Trazar un cuadrado DE y su diagonal AC. Trazar un arco de circunferencia con centro A y radio AF. F es el punto medio de la diagonal del cuadrado. El punto de corte del arco de círculo y el lado del cuadrado, es B. Dibujar una línea paralela a DA que pase por B. El rectángulo DB obtenido es un rectángulo raíz de dos.



Cuando este proceso se realiza desde los cuatro vértices del cuadrado, el área del cuadrado queda dividida en cinco cuadrados y cuatro rectángulos raíz de dos.

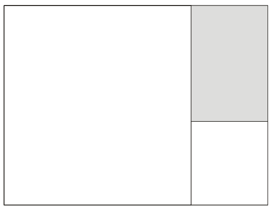


2. Propiedades:

1. Inclusión de un cuadrado en un rectángulo raíz de dos:

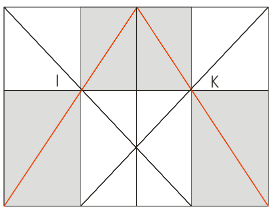
Al incluir un cuadrado a un rectángulo raíz de dos en uno de sus extremos, éste se subdivide en cuadrados y rectángulos raíz de dos sucesivos. Esta propiedad de los rectángulos raíz de dos, se ha descrito con anterioridad.

1. Cuando se introduce un cuadrado en un rectángulo raíz de dos en uno de sus extremos, el área restante está formada por un cuadrado y un rectángulo raíz de dos.



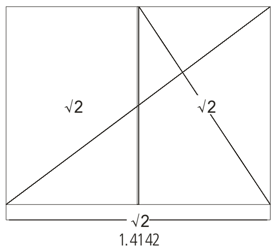
2. Cuando se introduce un cuadrado a cada lado del rectángulo raíz de dos, el área del rectángulo queda dividida en tres cuadrados y tres rectángulos raíz de dos.

   Para construir este trazado geométricamente, dibujar las diagonales de los dos cuadrados. Dividir el lado mayor del rectángulo raíz de dos en dos. Dibujar las diagonales de los recíprocos. Estas diagonales cortan a las diagonales de los cuadrados en los puntos I y K. Trazando por estos puntos, una paralela al lado mayor del rectángulo raíz de dos, se obtienen tres superficies cuadradas y tres, raíz de dos.



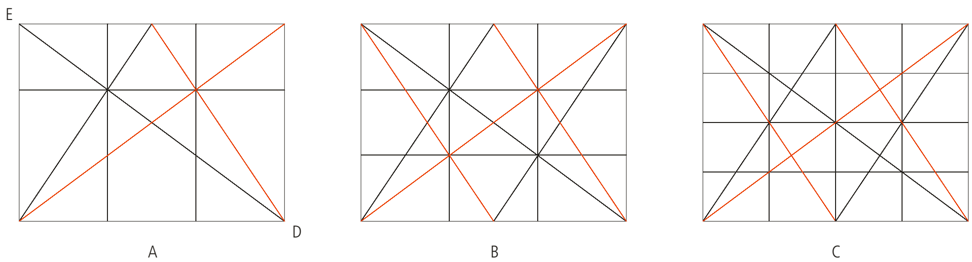
2. Obtención de rectángulos recíprocos

El área del rectángulo recíproco de un rectángulo raíz de dos, es la mitad del área total del rectángulo raíz de dos:



3. Trazado de diagonales

Las diagonales de un rectángulo raíz de dos y las diagonales de los recíprocos dividen el área en una serie sin límite de rectángulos raíz de dos más pequeños.



En A, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de dos con las diagonales del recíproco que parten de los vértices D y E, divide el rectángulo verticalmente en tercios y horizontalmente en medios. Se obtienen 6 rectángulos recíprocos, agrupados por igualdad de tamaño de tres en tres.

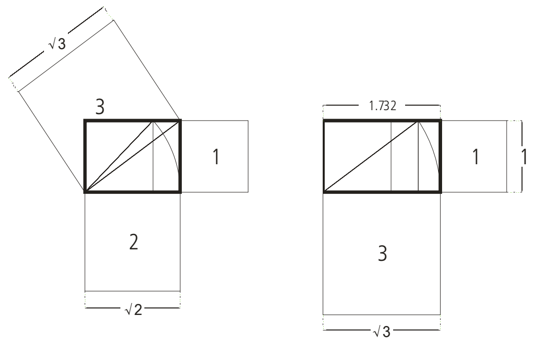
En B, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de dos con las diagonales del recíproco que parten de los cuatro vértices del cuadrado, divide el rectángulo vertical y horizontalmente en tercios. Se obtienen 9 rectángulos recíprocos de igual tamaño.

En C, la intersección de una diagonal del rectángulo raíz de dos con las diagonales del recíproco de la otra diagonal, divide el rectángulo vertical y horizontalmente en cuartos. Se obtienen así, 16 rectángulos recíprocos iguales.

6.2.2.- Rectángulos raíz de tres (1.732)

1. Definición

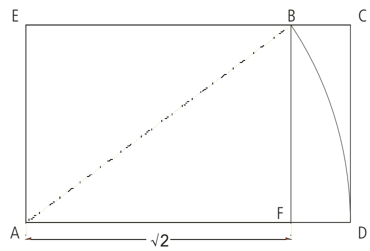
Un rectángulo raíz de tres es aquel cuyo lado mayor mide raíz cuadrada de tres y su lado menor la unidad o 1. La relación entre sus lados menor y mayor es 1 : 1.732.



Si se traza la diagonal a un rectángulo raíz de dos de lado menor la unidad o 1 y de lado mayor raíz cuadrada de dos, el rectángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos. Los cuadrados de los dos lados menores del triángulo son iguales a 1 y 2 respectivamente. Por lo tanto la hipotenusa del triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo rectángulo: $\sqrt{(1^2 + (\sqrt{2})^2)} = \sqrt{(1 + 2)} = \sqrt{3}$. Así, la relación entre sus lados es $1 : \sqrt{3}$.

Un rectángulo raíz de tres se obtiene por el siguiente procedimiento:

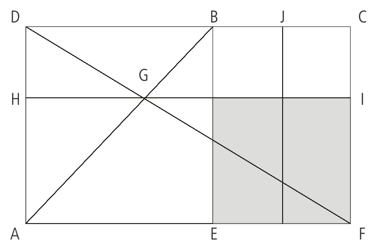
Partir de un rectángulo raíz de dos EF. Trazar su diagonal AB. Con centro en el vértice, A, y radio la diagonal del rectángulo, AB, trazar un arco, BD, hasta que corte a la línea de base del rectángulo, D. Completar el nuevo rectángulo ED obtenido. ED es un rectángulo raíz de 3.



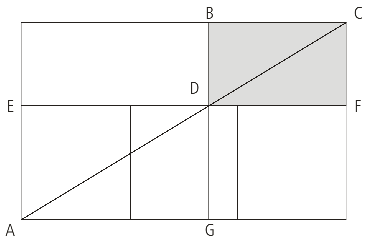
2. Propiedades:

1. Aplicación de un cuadrado a un rectángulo raíz de tres:

Si se traza un cuadrado, DE en un extremo del rectángulo raíz de tres, AC, el área restante del rectángulo, BF, está compuesta por dos cuadrados y dos rectángulos raíz de tres. Para obtener estos rectángulos se traza la diagonal del rectángulo raíz de tres DF y la diagonal del cuadrado AB. Por el punto de intersección de estas dos diagonales, G, trazar un línea, HI, paralela al lado del rectángulo AF. El rectángulo BF queda dividido en dos partes. Para obtener los rectángulos raíz de tres, dividir el lado BC por la mitad, punto J, y trazar por este punto una perpendicular al lado EF. Así se obtienen 2 cuadrados y 2 rectángulo raíz de tres.

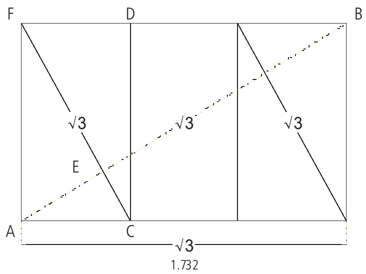


Se traza un cuadrado, AB en un extremo del rectángulo raíz de tres, AC. El lado del cuadrado BG corta a la diagonal del cuadrado en el punto D. La línea EF, paralela al lado AG pasa por el punto D y determina el área AF, que se puede dividir en tres cuadrados.



2. Obtención de rectángulos recíprocos

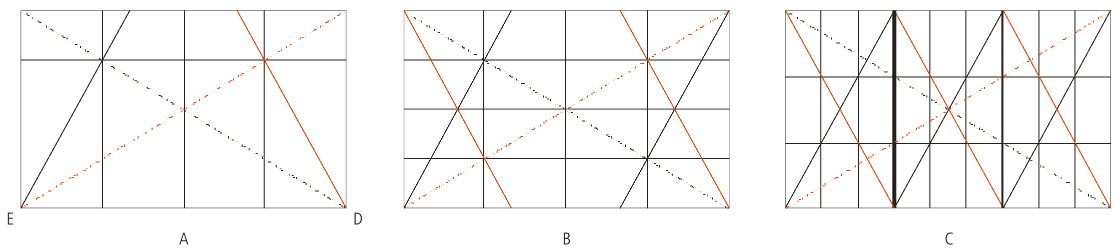
El área del rectángulo recíproco de un rectángulo raíz de tres, es un tercio del área total del rectángulo raíz de tres. AD es un recíproco del rectángulo raíz de tres AB, y AD es un tercio de AB. Hay tres rectángulos recíprocos en un rectángulo raíz de tres.



La diagonal de un recíproco, FC y la diagonal del rectángulo raíz de tres AB se cortan en ángulo recto en el punto E.

3. Trazado de diagonales

Las diagonales de un rectángulo raíz de tres y las diagonales de los recíprocos dividen el área en una serie ilimitada de rectángulos raíz de tres más pequeños.



Las diagonales de un rectángulo raíz de tres y las tres diagonales de los recíprocos se cortan todas en ángulo recto.

En A, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de tres con las diagonales del recíproco que parten de los vértices D y E, divide el rectángulo horizontalmente en medios y verticalmente en cuartos. Se obtienen así, 8 rectángulos recíprocos, agrupados por igualdad de tamaño de cuatro en cuatro.

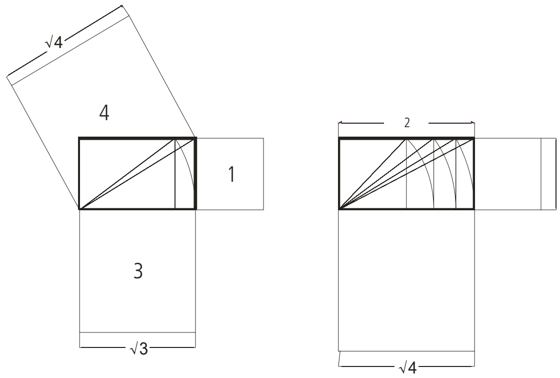
En B, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de tres con las diagonales del recíproco que parten de los cuatro vértices del cuadrado, divide el rectángulo vertical y horizontalmente en cuartos. Se obtienen así, 16 rectángulos recíprocos de igual tamaño.

En C, horizontalmente, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de tres con los lados de los rectángulos recíprocos, divide el rectángulo en tercios. Verticalmente, la intersección de las diagonales de los recíprocos con la líneas trazadas horizontalmente, divide el rectángulo raíz de tres en 9 rectángulos recíprocos. Se obtienen, en total, 27 rectángulos recíprocos iguales.

6.2.3.- Rectángulos raíz de cuatro (2)

1. Definición

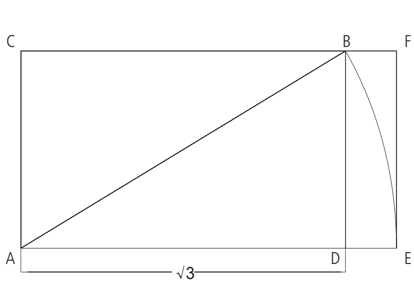
Un rectángulo raíz de cuatro es aquel cuyo lado mayor mide raíz cuadrada de cuatro y su lado menor la unidad o 1. La relación entre sus lados menor y mayor es 1 : 2.



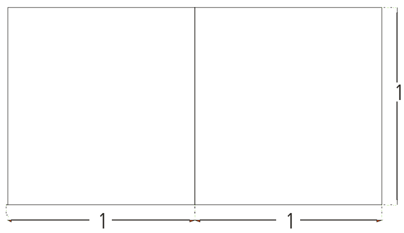
Si se traza la diagonal a un rectángulo raíz de tres de lado menor la unidad o 1 y de lado mayor raíz cuadrada de tres, el rectángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos. Los cuadrados de los dos lados menores del triángulo son iguales a 1 y 3 respectivamente. Por lo tanto la hipotenusa del triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo rectángulo: $\sqrt{(1^2 + (\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(1 + 3)} = \sqrt{4}$. Así, la relación entre sus lados es 1 : √4.

Un rectángulo raíz de cuatro se puede obtener por cualquiera de los dos procedimientos siguientes:

1. Partir de un rectángulo raíz de tres, CD. Trazar la diagonal al rectángulo dado, AB. Con centro en el vértice A y radio la diagonal del rectángulo, AB, trazar un arco hasta que corte a la línea de base del rectángulo raíz de tres, E. Completar por este punto, el nuevo rectángulo AF. El rectángulo obtenido, es un rectángulo raíz de 4.



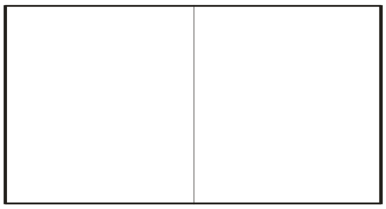
2. Se pueden obtener rectángulos raíz de 4 por la suma de dos cuadrados: la raíz cuadrada de cuatro es dos. Por lo tanto, un rectángulo raíz de cuatro puede ser tratado como un rectángulo dinámico o estático.



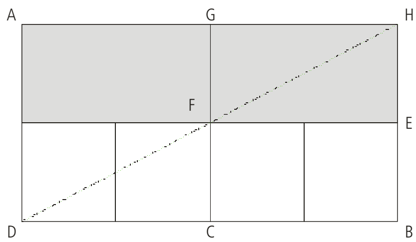
2. Propiedades:

1. Aplicación de un cuadrado a un rectángulo raíz de cuatro:

Si se introduce un cuadrado en un rectángulo raíz de cuatro, el área que resulta de esta división está compuesta por otro cuadrado. Por lo tanto, un rectángulo raíz de cuatro está compuesto de dos cuadrados.

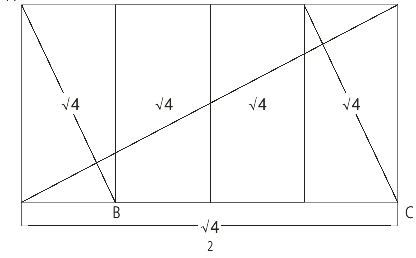


Se aplica un cuadrado AC, en uno de los lados del rectángulo raíz de cuatro, AB. El punto de corte del lado del cuadrado CG, con la diagonal del rectángulo DH, es F. Por F, se traza una línea paralela al lado DB del rectángulo. El área DE, está compuesta por cuatro cuadrados y el área AE por dos rectángulos raíz de cuatro.



2. Obtención de rectángulos recíprocos

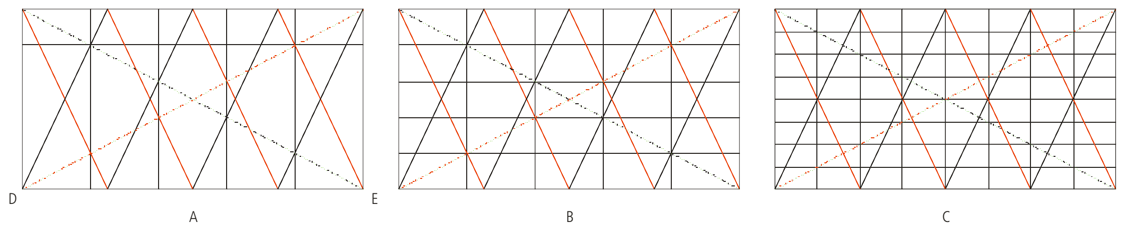
El área de un rectángulo recíproco de un rectángulo raíz de cuatro es igual a una cuarta parte del área total de un rectángulo raíz de cuatro.



AB, es el recíproco del rectángulo AC.

3. Trazado de diagonales

Las diagonales de un rectángulo raíz de cuatro y las diagonales de los recíprocos dividen el área en una serie infinita de rectángulos raíz de cuatro más pequeños.



En A, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de cuatro con las diagonales de los recíprocos que parten de los vértices D y E, divide el rectángulo horizontalmente en dos partes. Verticalmente, la intersección de las dos diagonales del rectángulo raíz de cuatro con todas las diagonales de los recíprocos, divide el rectángulo en cinco partes Se obtienen 10 rectángulos recíprocos, agrupados por igualdad de tamaño de cinco en cinco.

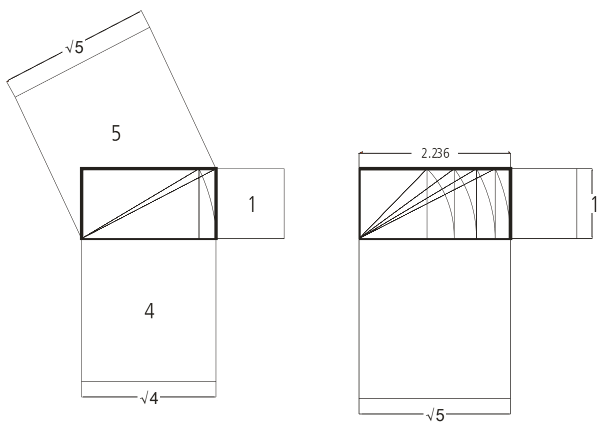
En B, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de cuatro con las diagonales de todos los recíprocos obtenidos, divide el rectángulo vertical y horizontalmente en quintos. Se obtienen, de esta forma, 25 rectángulos recíprocos de igual tamaño.

En C, verticalmente, la intersección entre las diagonales de los recíprocos, divide el rectángulo raíz de cuatro en octavos. Horizontalmente, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de cuatro con las trazas verticales dibujadas, divide el rectángulo en octavos. Se obtienen, en total, 64 rectángulos recíprocos iguales.

6.2.4.- Rectángulos raíz de cinco (2.236)

1. Definición

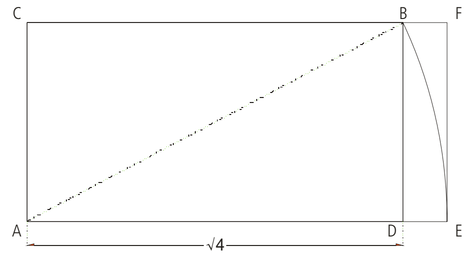
Un rectángulo raíz de cinco es aquel cuyo lado mayor mide raíz cuadrada de cinco y su lado menor la unidad o 1. La relación entre sus lados menor y mayor es 1 : 2.236.



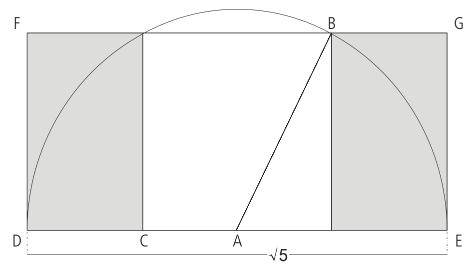
Si se traza la diagonal a un rectángulo raíz de cuatro de lado menor la unidad o 1 y de lado mayor raíz cuadrada de cuatro, el rectángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos. Los cuadrados de los dos lados menores del triángulo son iguales a 1 y 4 respectivamente. Por lo tanto la hipotenusa del triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo rectángulo: $\sqrt{(1^2 + (\sqrt{4})^2)} = \sqrt{(1 + 4)} = \sqrt{5}$. Así, la relación entre sus lados es $1 : \sqrt{5}$.

Un rectángulo raíz de cinco se puede obtener por cualquiera de los tres procedimientos siguientes:

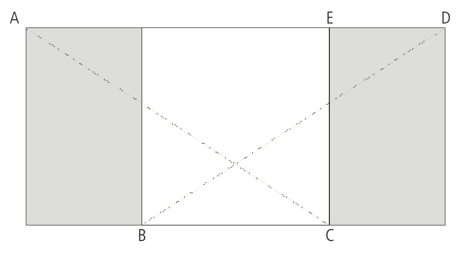
1. Partir de un rectángulo raíz de cuatro, CD. Trazar la diagonal al rectángulo dado, AB. Con centro en el vértice A y radio la diagonal del rectángulo, AB, trazar un arco de circunferencia, BE, hasta que corte a la línea de base del rectángulo raíz de cuatro, en un punto, E. Completar por este punto E, el nuevo rectángulo AF. El rectángulo obtenido, es un rectángulo raíz de cinco. El área BE representa la diferencia entre un rectángulo raíz de cuatro y uno raíz de cinco.



2. Dibujar un cuadrado, CB. Trazar una línea que una el punto medio de un lado del cuadrado A, con uno de sus vértices, B. Con centro en A y radio la línea AB del cuadrado, trazar un semicírculo, DBE, que corte, por ambos lados, la línea base del cuadrado. AE y AD son iguales en longitud a AB, o, lo que es lo mismo, la línea DE es dos veces en longitud la línea AB. Completar el rectángulo trazando las líneas DF, FG y GE. El rectángulo FE obtenido, es un rectángulo raíz de cinco y está compuesto por un cuadrado CB y dos rectángulos áureos, FC y BE.



3. Un rectángulo raíz de cinco se puede considerar como un rectángulo compuesto por dos rectángulos áureos superpuestos y de forma que la parte común que comparten sea el cuadrado:



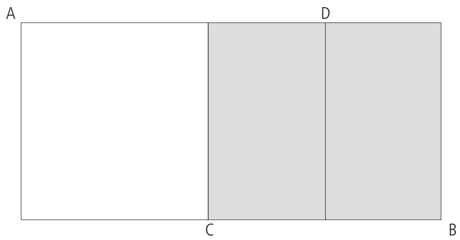
Los rectángulos áureos AB y BD forman, compartiendo el cuadrado, BE, común, un rectángulo raíz de cinco.

4. Propiedades:

1. Aplicación de un cuadrado a un rectángulo raíz de cinco:

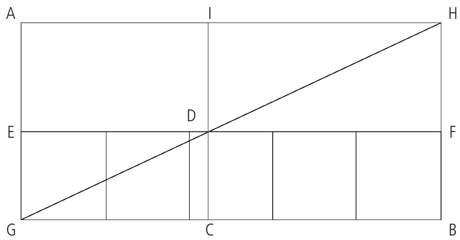
Este apartado estudia la inclusión de un cuadrado en un extremo de un rectángulo raíz de cinco y, como resultado, las correspondientes subdivisiones del rectángulo raíz de cinco en cuadrados y rectángulos raíz de cinco sucesivos.

Si se introduce un cuadrado en un extremo de un rectángulo raíz de cinco, el área que resulta de esta división está compuesta por dos rectángulos áureos.



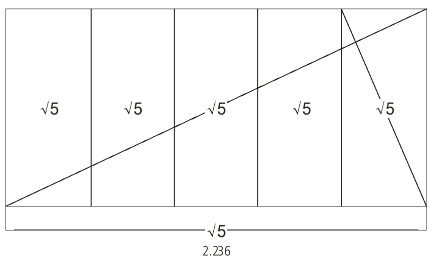
AB es un rectángulo raíz de cinco. AC es un cuadrado y CD, DB son rectángulos áureos.

Se puede obtener otra división del rectángulo raíz de cinco si se introduce un cuadrado, AC, en un extremo de un rectángulo raíz de cinco, AB, y se considera el punto de corte, D, entre el lado del cuadrado, IC y la diagonal del rectángulo raíz de cinco, GH. Se traza una línea paralela al lado GB que pase por el punto, D. Se obtiene un área, EB, que está compuesta por cinco cuadrados.

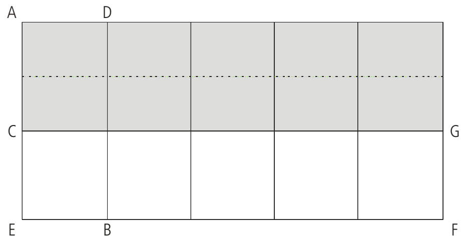


2. Obtención de rectángulos recíprocos

El área del rectángulo recíproco de un rectángulo raíz de cinco, es la quinta parte del área total del rectángulo raíz de cinco. O, dicho de otra forma, la intersección de la diagonal del rectángulo raíz de cinco con la diagonal de uno de sus recíprocos, divide el rectángulo raíz de cinco en quintos.

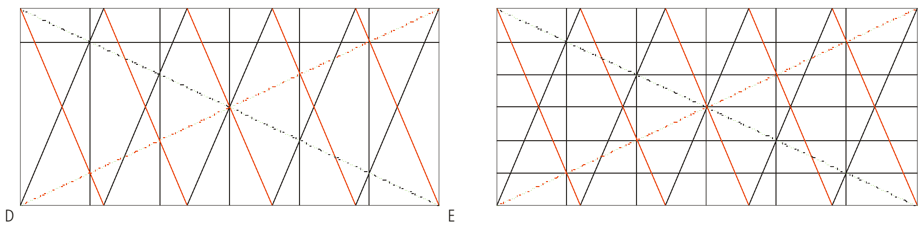


Para demostrar de qué está compuesto cada rectángulo recíproco, se considera el rectángulo raíz de cinco AF, y se trazan sus cinco rectángulos recíprocos. Por definición un rectángulo recíproco de un rectángulo dado es igual a éste en forma pero no en tamaño y orientación espacial. Cada rectángulo recíproco, AB, es, por lo tanto, un rectángulo raíz de cinco y está compuesto por un cuadrado CB y un área restante, CD. Si se divide esta área CD por la mitad, se obtiene, por cada rectángulo recíproco, dos rectángulos áureos. Por lo tanto, el área AG está formada por 10 rectángulos áureos.



3. Trazado de diagonales

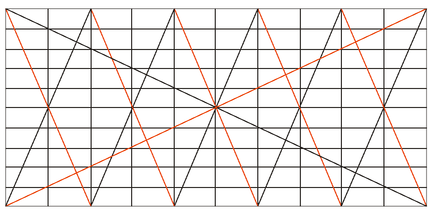
Las diagonales de un rectángulo raíz de cinco y las diagonales de los recíprocos dividen el área en una serie sin límite de rectángulos raíz de cinco más pequeños.



A B

En A, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de cinco con las diagonales de los recíprocos que parten de los vértices D y E, divide el rectángulo horizontalmente en medios y verticalmente en sextos. Se obtienen así, 12 rectángulos recíprocos, agrupados por igualdad de tamaño de seis en seis.

En B, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de cinco con las diagonales de todos los recíprocos obtenidos, divide el rectángulo vertical y horizontalmente en sextos. Se obtienen 36 rectángulos recíprocos de igual tamaño.



C

En C, verticalmente, la intersección entre las diagonales de los recíprocos, divide el rectángulo raíz de cinco en décimos. Horizontalmente, la intersección de las diagonales del rectángulo raíz de cinco con las trazas verticales dibujadas, divide el rectángulo en décimos. Se obtienen, en total, 100 rectángulos recíprocos iguales.

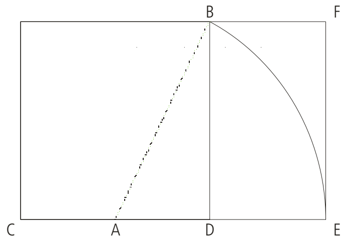
6.3.- RECTÁNGULOS ÁUREOS (1.618)

1. Definición

Un rectángulo áureo es un rectángulo cuyo lado mayor mide 1.618 y su lado menor la unidad o 1. La relación entre sus lados menor y mayor es 1 : 1.618.

Para construir los rectángulos áureos se utiliza el siguiente procedimiento:

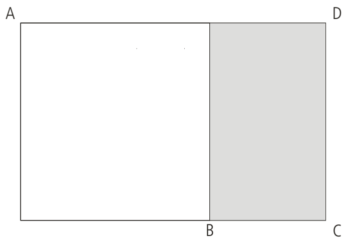
Dibujar un cuadrado, CB. Trazar una línea que una un vértice con el punto medio de uno de los lados del cuadrado, AB. Con centro en A y radio la línea AB, trazar un arco, BE, que corte a la línea de base de cuadrado, CD en el punto E. Levantar una vertical por el punto E hasta formar el rectángulo CF. El rectángulo obtenido, es un rectángulo áureo. Está compuesto por el cuadrado CB y el rectángulo áureo DF.



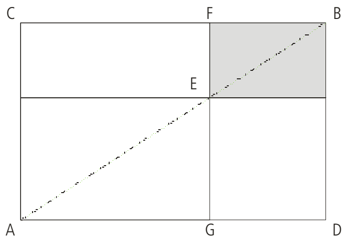
2. Propiedades:

1. Aplicación de un cuadrado a un rectángulo áureo:

Si se introduce un cuadrado AB en uno de los extremos de un rectángulo áureo AF, el área que resulta de esta división es un rectángulo áureo EF.

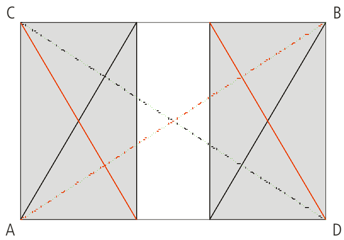


Se puede obtener otra división del rectángulo áureo por el siguiente procedimiento: se introduce un cuadrado, AF, en un extremo de un rectángulo áureo, CD. Se traza la diagonal del rectángulo áureo, AB. Por el punto de corte de la diagonal, AB, del rectángulo áureo y el lado FG del cuadrado, E, se traza una línea paralela al lado AD del rectángulo. Se obtiene un área, GB, que está compuesta por un cuadrado y un rectángulo áureo.



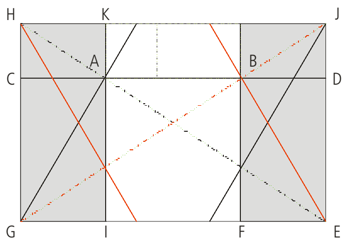
2. Obtención de rectángulos recíprocos:

Se trazan, por los cuatro vértices de un rectángulo áureo, las perpendiculares a las diagonales del rectángulo, AB y CD. Por el punto de corte de las perpendiculares a las diagonales y los lados del rectángulo se trazan líneas verticales. Se obtiene así dos rectángulos recíprocos áureos.



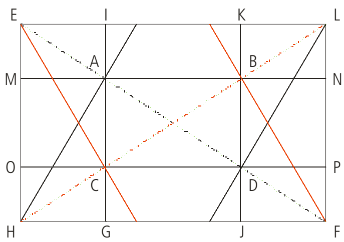
3. Trazado de diagonales

Las diagonales de un rectángulo áureo y las diagonales de los recíprocos dividen el área en una serie infinita de rectángulos áureos más pequeños.



A

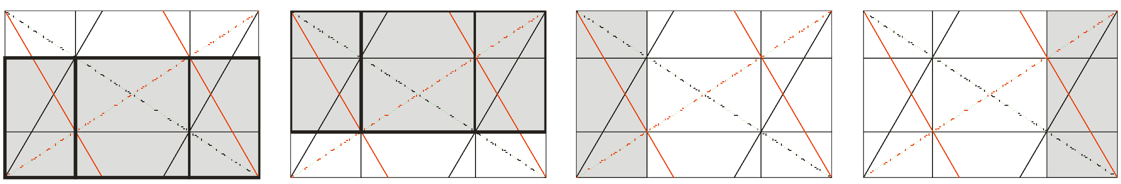
En A, la intersección, A y B, de las diagonales del rectángulo áureo con las diagonales de los recíprocos que parten de los vértices G y E, divide el rectángulo verticalmente en tercios y horizontalmente en dos partes. El área CE es un rectángulo raíz de cinco. AF es un cuadrado y GA y BE son rectángulos áureos. El área KB está compuesta por un cuadrado más un rectángulo áureo, y HA y BJ son también rectángulos áureos. En total se obtienen 4 rectángulos áureos visibles y un cuadrado, a los que se añade un rectángulo áureo y un cuadrado incluidos en el área KB.



B

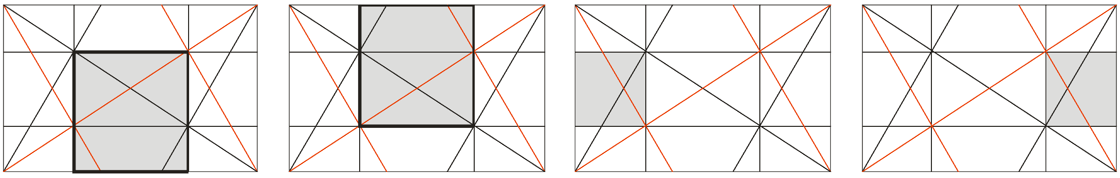
En B, la intersección de las diagonales del rectángulo áureo con las diagonales de todos los recíprocos obtenidos, divide el rectángulo EF, en cuatro rectángulos raíz de cinco superpuestos, MF, EP, EG y KF. Cada uno de ellos está compuesto por un cuadrado y dos rectángulos áureos.

Rectángulos raíz de cinco



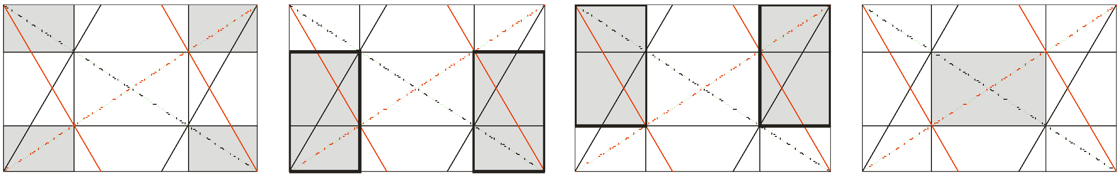
AJ, ID, OA y BP son cuadrados.

Cuadrados



EA, HA, HC, OI, BL, DF, KP y BF son rectángulo áureos. El rectángulo AD es, también, un rectángulo áureo.

Rectángulos áureos



6.4.- ANÁLISIS DE OBRAS

6.4.1.- JULIÁN GIL

Para reducir el mundo complejo de Julián Gil, de una gran riqueza de lenguaje gráfico y conceptual, hay que elegir un punto de vista que permita ir un poco más allá de lo que a primera vista pudiera parecer evidente. La aproximación a su mundo que se hace en este apartado es desde la autoría, la obra y el proceso. Del autor, el pensamiento sistémico. De la obra, los sistemas dinámicos, objeto de estudio de este capítulo. Y del proceso, el estudio de las series PHI, RA (Relaciones Áureas) y PAC (Proporciones Áureas Cuadrado).

La herramienta más útil para pensar las obras de Julián Gil son los sistemas. Los sistemas son un conjunto de conceptos, herramientas y variables, previos a la realización de la obra, que maneja a modo de bocetos y que le sirven para experimentar, aprender y comprender las posibilidades del propio sistema. Cada sistema genera una o más series de obras numeradas que están clasificadas por nombres y que anticipan al espectador las reglas del juego que rigen las obras: serie ORTogonal, serie ESCuadra, HEMipitagórica, ORT + ESC, ORT + HEM, ESC + HEM, ORT + ESC + HEM, Raízdedos, Tondos, PHI, RA, PAC y sistema cromático de 64 colores basado en el cubo de los colores de Alfred Hickethier.

Julián Gil maneja expectativas, se propone metas, escoge medios... Sus sistemas son el resultado de observar, ordenar y estructurar un mundo de conocimientos y experiencias personales. Al observar, realiza un conjunto coherente de elecciones; se concentra en cosas concretas; crea límites.

Al ordenar, determina con exactitud cuáles son los métodos que conforman el sistema. Es decir, qué operaciones utiliza para construir las estructuras necesarias dentro del sistema y qué directrices debe seguir para determinar cada uno de los estados por los que debe pasar la obra para alcanzar un resultado satisfactorio.

Al estructurar, busca un orden en su trabajo. Descubre las leyes estructurales y cromáticas que rigen sus obras. Hace que el código utilizado se haga visible. Construye retículas complejas que le aporten un repertorio grande de posibilidades para poder elegir las líneas estructurales más oportunas que sirvan para generar su obra. Las líneas estructurales elegidas reflejan un orden y permiten una división lógica y formal de la superficie. En algunos casos, el orden que contienen se hace palpable porque existe una gran similitud entre el formato del cuadro y las líneas estructurales elegidas (serie RA). En otros casos, es la superposición de la retícula sobre la superficie del cuadro la que asegura la unificación de todas las partes del cuadro. En cualquier caso, se trata de encontrar un orden no jerárquico que permita que ningún área generada sea preferida o prioritaria sobre las otras.

Julián Gil, según las necesidades expresivas personales que cada serie de obras requiere, establece relaciones entre los colores según criterios muy diferentes. Unas veces utiliza un número determinado de parejas de colores complementarios. Otras veces, la elección de una gama cromática se debe a las posiciones simétricas o a los ritmos geométricos de los colores seleccionados dentro del cubo de Hickethier. La elección de los colores se puede deber también a que sean colores con el mismo grado de saturación, con la misma cantidad de uno de sus componentes en la mezcla, o con distinto grado de luminosidad. Se utilizan también gradaciones uniformes, progresiones y combinación de escalas monocromas o policromas con y sin grises. A veces incluso realiza una selección aleatoria de los colores, o corrige algunas de las familias seleccionadas hasta que ajusta el resultado cromático a unas necesidades organizativas establecidas previamente.

El número de colores en cada serie está determinado por el tema. Julián Gil, según la estrategia de color que elige en cada situación, obtiene un número determinado de combinaciones cromáticas posibles. En una serie en que cada una de las obras va a utilizar 4 tonos, obtiene 16 combinaciones posibles (16 x 4 = 64) si no repite ninguno de los tonos en la serie. Si la repetición de tonos se permite, el número de posibilidades aumenta.

Colores y estructuras no son, para Julián Gil, sistemas dinámicos simétricos, sino que, cada uno con sus propias características y su propia riqueza organizativa complementa al otro para establecer un orden a sus obras que satisfaga sus necesidades expresivas.

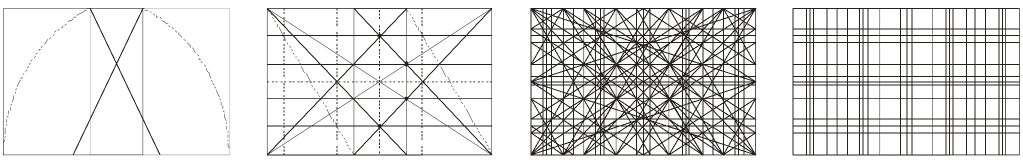
La obra de Julián Gil refleja una economía de vocabulario, un control de la sintaxis: determinación matemática de los formatos, relación entre las formas y las leyes numéricas, especificación de los colores. Se ponen en evidencia problemas de proporción, llenos y vacíos, regularidad, cadencia, número, tensión, color. La simplicidad, reducción de complejidad, que se da en su obra no es producto de lo espontáneo sino de una continua revisión reflexiva y, en caso de que sea oportuno, modificación, de los sistemas que utiliza para desarrollar su obra.

Se presentan aquí tres series de Julián Gil basadas en el número PHI (1.618) y sus relaciones áureas:

1. Serie PHI

El punto de partida de la serie PHI, es construir un rectángulo PHI (proporción áurea (1.618)) e incorporarle una estructura interna dinámica que sea lo suficientemente compleja para que posibilite la generación de una gran variedad de obras con organizaciones muy diferentes.

Entre las operaciones que se realizan para obtener la estructura dinámica están las siguientes: relaciones proporcionales entre sus lados, mitades de rectángulos PHI y de cuadrados, trazados de diagonales a cuadrados y rectángulos PHI que se van generando, trazado de perpendiculares por sus vértices a las diagonales de los rectángulos PHI, operaciones de simetría, traslaciones, giros de resultados obtenidos sobre la propia estructura, búsqueda de series e interrelaciones modulares, trazado de verticales y horizontales por puntos significativos (intersección de diagonales rectángulo PHI con lado de cuadrado incluido, intersección de trazas de rectángulos recíprocos, intersección de trazas de rectángulos recíprocos con diagonales rectángulos PHI,…).



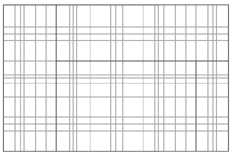
A B

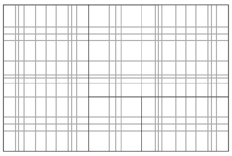
La estructura A, muestra la retícula dinámica utilizada.

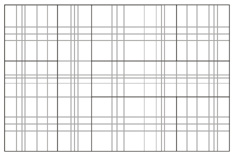
Como las obras de la serie PHI sólo seleccionan trazas horizontales y verticales de la estructura dinámica, se utiliza la estructura B para que operativamente sea más útil.

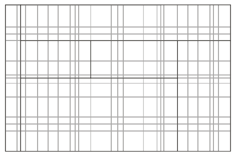
Sobre la estructura dinámica generada se realizan una serie de elecciones de trazas en un proceso por tanteos que busca participar de la armonía, la riqueza estructural y la estética de las propias relaciones áureas del soporte rectangular. Los resultados obtenidos tienen objetivos diferentes. Unas veces se busca realizar el máximo número de subdivisiones PHI en el rectángulo áureo; otras el no pasar de un cierto límite de subdivisiones para que después del proceso de construcción de la obra se siga reconociendo la organización inicial; relaciones de proporciones entre el plano inicial y las superficies generadas por la elección de trazas; alternancia de verticales y horizontales,…

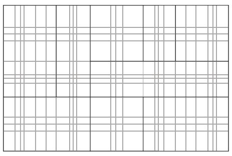
Algunas estructuras de las obras de la serie PHI basadas en esta plantilla están representadas por los siguientes esquemas:

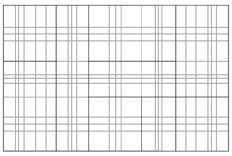

PHI 006 A

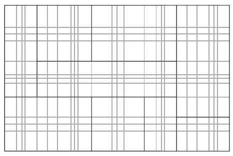

PHI 008 A

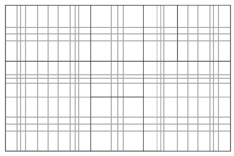

PHI 014 B

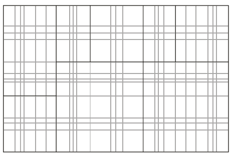

PHI 016 A

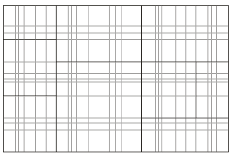

PHI 020 A

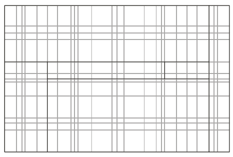

PHI 023 A

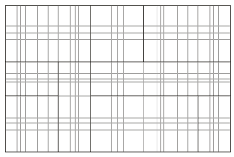

PHI 026 A


PHI 030 B


PHI 031 A


PHI 035 B

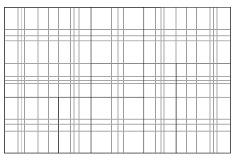

PHI 043 A


PHI 051 A

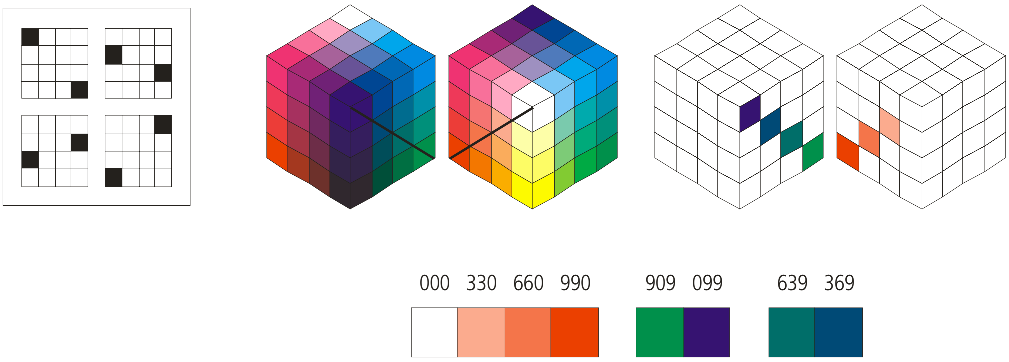
La gran variedad de los resultados obtenidos responden a estrategias compositivas del artista que pueden responder a criterios diversos: composición en forma de U (PHI 006 A, PHI OO8 A, PHI O16 A), en forma de L (PHI 039 A), en cerramiento (PHI 015 A, PHI 017 B, PHI 018 A, PHI 038 B, PHI 041 A, PHI 047 B, PHI 043 A), destacando las propias subdivisiones PHI del rectángulo áureo (PHI 014 B, PHI 020 A, PHI 023 A, PHI 026 A, PHI 030 B, PHI 031 A, PHI 035 B),…

Estas obras adquieren mayor complejidad cuando sobre las superficies planas y ortogonales obtenidas después del proceso de selección de trazas en la estructura dinámica del rectángulo áureo, Julián Gil distribuye un conjunto de colores en cada una de las obras según una serie de propuestas compositivas realizadas sobre el cubo de 64 colores de Alfred Hickethier.

En la obra PHI 021 A, el trazado realizado sobre la estructura dinámica favorece la visibilidad de las relaciones del rectángulo áureo:



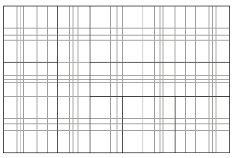
La elección de los colores se realiza sobre el cubo reducido de 64 colores de Hickethier. Julián Gil utiliza plantillas para señalar la estrategia de color que va a utilizar en la elaboración de cada serie de obras. Cada una de estas plantillas está formada por cuatro cuadrados de 16 colores diferentes (4 x 4 = 16), que corresponden a los cuatro planos cromáticos que se obtienen si se realizan cuatro cortes, en una dirección determinada del espacio, en el cubo de Hickethier. La especificación de cada uno de los 8 colores elegidos de la obra y su representación en el cubo de colores, se realiza sobre los siguientes esquemas:



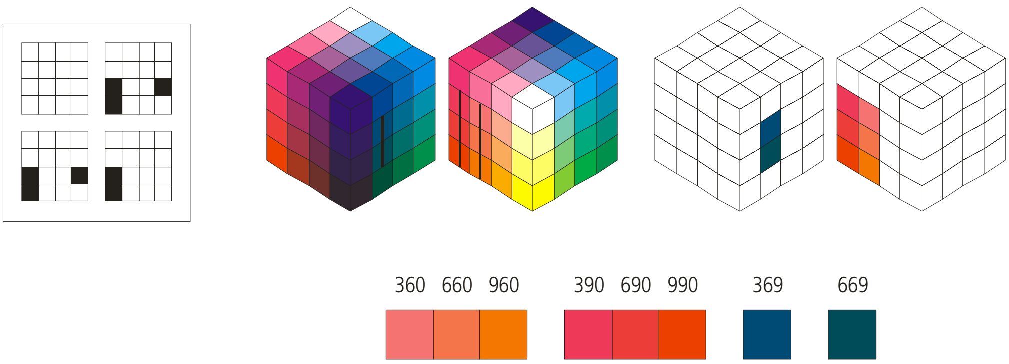
Se puede observar que ha utilizado los 3 colores secundarios de la mezcla sustractiva rojo (990), verde (909) y azul-violeta (099); una escala monocroma de luminosidad-saturación del rojo de cuatro tonos (000, 330, 660, 990) y dos azules grisáceos (complementarios del rojo) uno matizado rojizo (369) y el otro amarillento (639). Desde el punto de vista espacial, los 8 colores elegidos corresponden a las diagonales de dos caras paralelas del cubo.

La aplicación de los colores se realiza, color contra color, sin límites entre ellos para que los colores, en igualdad de oportunidades vibren por conseguir el protagonismo que les corresponde a cada uno de ellos en la totalidad de la obra.

En la obra PHI 050 A, el trazado realizado sobre la estructura dinámica favorece, también, la visibilidad de las relaciones del rectángulo áureo:



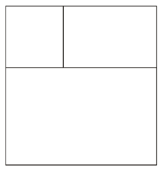
La elección y denominación de los colores en el cubo reducido de 64 colores de Hickethier está representada por los siguientes esquemas:



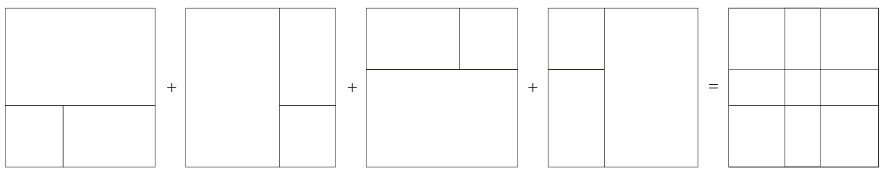
La serie cromática seleccionada representa de una forma muy sutil, la complementariedad entre la pareja de colores rojo – azul. El color rojo está representado por dos escalas policromas de tres tonos cada una. La primera escala entre el rojo y el magenta está formada por los tonos 390, 690, 990; y la segunda, entre un rojo anaranjado y un magenta mezclado con blanco por los tonos, 360, 660,960. Los colores complementarios, azules, 369 y 669, se matizan cada uno de ellos para completar, conceptualmente, al conjunto de la serie con un matiz verdoso y un matiz azulado. Espacialmente, su representación corresponde a líneas adyacentes en caras paralelas del cubo de colores de Hickethier.

2. Serie RA (Relaciones Áureas)

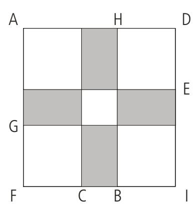
Esta serie tiene su origen en un cuadrado de 50 x 50 cm dividido en tres partes según las relaciones áureas, que el galerista sevillano, Félix Gómez entregó a Julián Gil a comienzos de 2004 con el objeto de que participase en una exposición que estaba organizando sobre el tema de la "media y extrema razón".



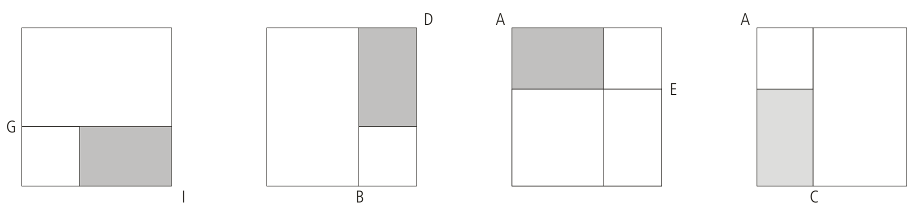
A partir de esta estructura del cuadrado, girándola cuatro veces, se obtienen una estructura dinámica que permite una gran combinación de trazas en relación áurea.



AB, CD, FE, GD, son cuatro rectángulos áureos incluidos dentro de los cuatro lados del cuadrado. Todos se superponen entre sí y generan, dos a dos, las áreas GE y CH. Estas áreas están formadas por un cuadrado y dos rectángulos áureos. Las áreas AC y BD están formadas cada una por dos cuadrados y un rectángulo áureo.

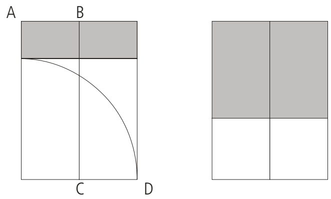


Otras formas, por combinación de 3 piezas, en las que se puede descomponer las áreas GI, BD, AE, AC:

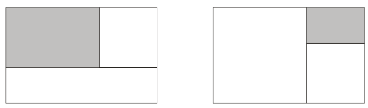


En todos estos casos, las combinaciones de los dos cuadrados y el rectángulo áureo pueden aparecer de las siguientes formas:

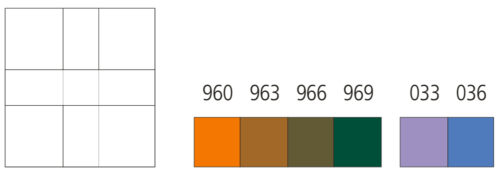
Las áreas AC y BD, unidas, lado con lado, generan una superficie que se puede descomponer en un cuadrado y dos rectángulos áureos, o en dos cuadrados y dos rectángulos áureos. Lo mismo ocurre con las áreas AE y GI.



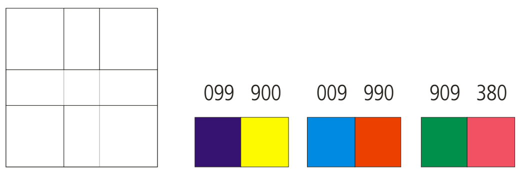
Los rectángulos áureos DG, FH, DC, FE, se pueden también descomponer, en tres piezas, de las siguientes formas: en un cuadrado y rectángulo áureo, o en dos cuadrados y un rectángulo áureo.



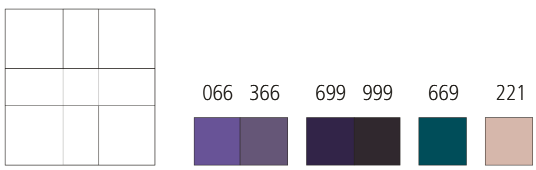
Las siguientes obras se construyen a partir de la estructura dinámica indicada y teniendo en cuenta las propiedades de mayor fragmentación que se han sugerido para determinadas zonas. Todas las obras están divididas en 6 superficies de forma que 3 de ellas pertenecen al área AB, CD, FE o GD, y otras tres al área, AC, BD, AE o GI.



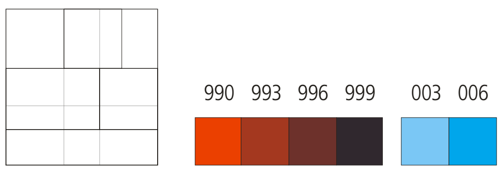
Fa 03



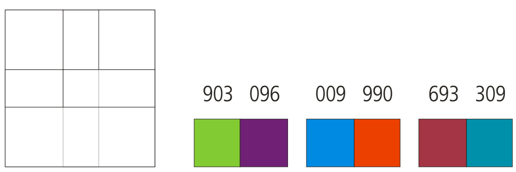
Fa 04



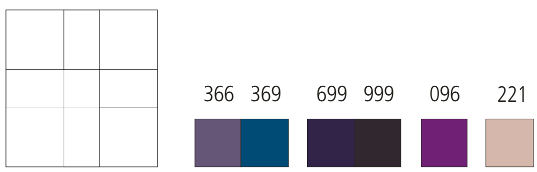
Fc 01



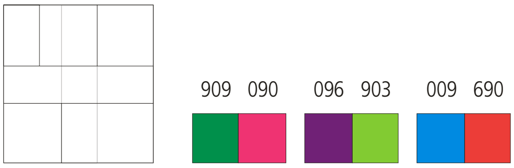
Fd 01



Fh 01



Fi 02

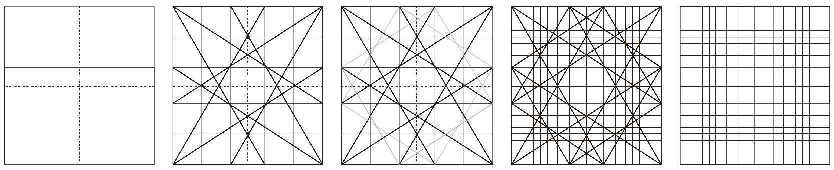


Fj 01

Los criterios de color utilizado son los siguientes: en Fa 03 y Fd 01 se utiliza una escala monocroma de luminosidad de cuatro tonos, del rojo en Fa 03 y del naranja en Fd 01, hacia el negro y una pareja de complementarios aproximados de la escala. En Fa 04 y Fj 01 se utilizan 3 parejas de complementarios cada una; dos exactas y una aproximada.

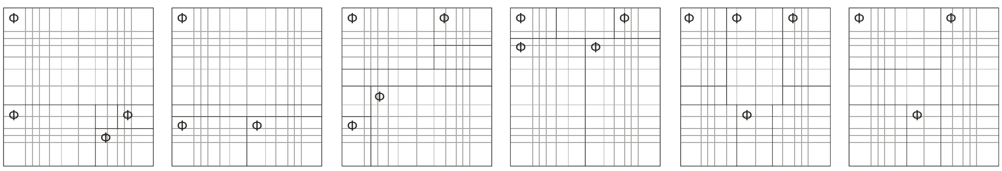
3. Serie PAC (Proporciones Áureas en el Cuadrado)

A partir de la estructura del cuadrado, en relación áurea, utilizada en la serie anterior, RA, se obtiene una nueva estructura dinámica aplicando las siguientes operaciones: obtención del primer rectángulo áureo incluido en el cuadrado, mitades del cuadrado, trazados de diagonales a rectángulos PHI que se van generando, búsqueda de series e interrelaciones modulares, trazado de verticales y horizontales por puntos significativos (intersección de diagonales rectángulo PHI con los lados de los cuadrados incluidos).

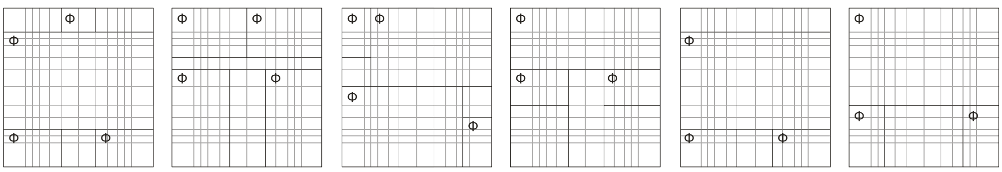


Como estas obras están basadas en la ortogonalidad, se utiliza una estructura dinámica simplificada en la que se han suprimido todas las diagonales trazadas.

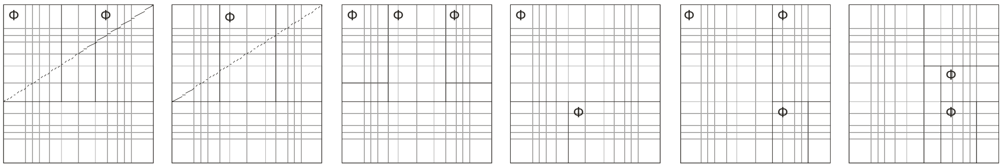
El objetivo de esta serie es encontrar el mayor número de subdivisiones PHI dentro de la retícula propuesta:



PAC 5-13 PAC 4-4 PAC 7-2 PAC 5-7 PAC 8-1 PAC 6-2

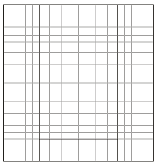


PAC 7-1 PAC 6-7 PAC 6-06 PAC 7-3 PAC 5-2 PAC 4-10

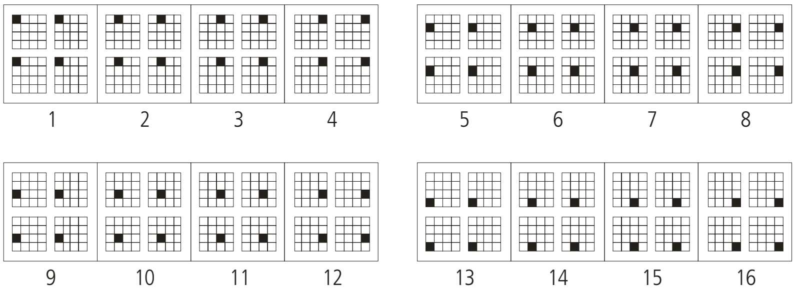


PAC 4-1 PAC 4-2 PAC 6-5 PAC 3-06 PAC 4-05 PAC 6-4

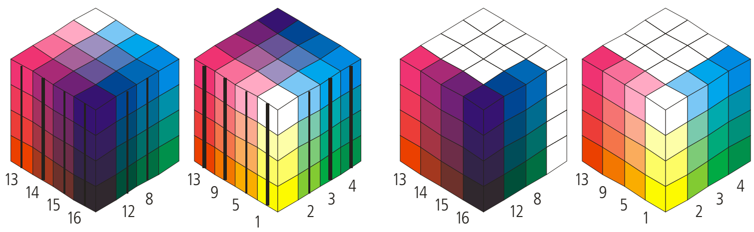
En la serie PAC 4-12 una retícula lineal divide el cuadrado en 4 rectángulos, uno de ellos áureo, que están separados por grupos de colores rítmicamente diferenciados. La serie está formada por 16 obras con una estructura dinámica constante y 4 tonos. El conjunto de todas las obras forma la paleta completa de los 64 tonos del cubo de Hickethier (16 x 4 = 64). Para ver la disposición de los colores se utilizan unas plantillas a modo de partitura que dividen el cubo de Hickethier en cuatro planos donde se representan los tonos que cada cuadro tiene y en qué planos del cubo de los colores están.

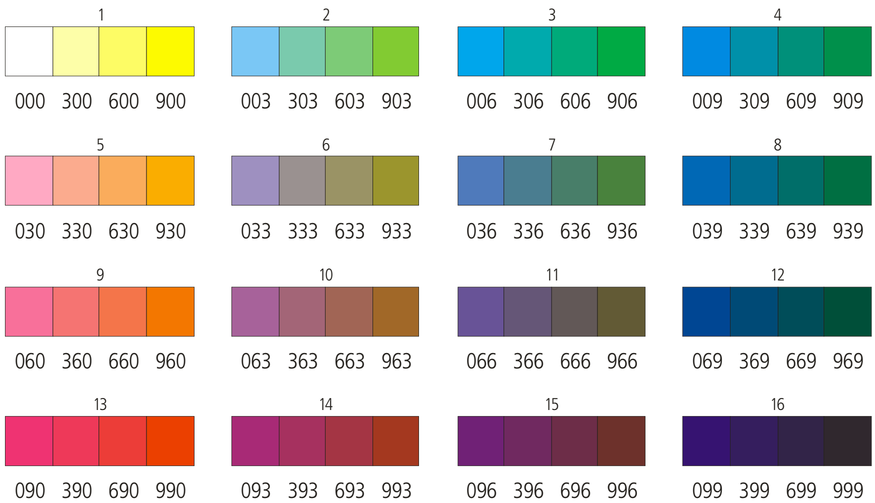


PAC 4-12



Lo que une a las obras de esta serie es el ritmo cromático que se aplica a cada una de las obras. Se utilizan sistemáticamente y de forma progresiva y ordenada las columnas de cuatro tonos del cubo de Hickethier: pequeñas escalas policromas; acordes de color.

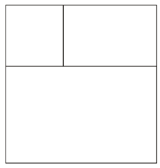




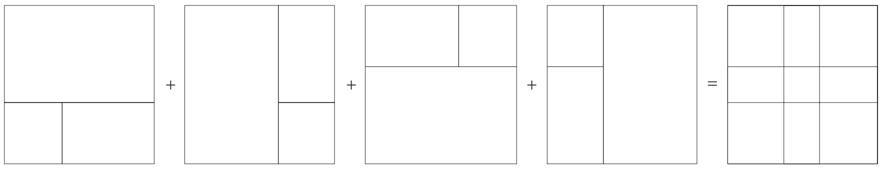
6.4.2.- ULRICH OTTO

1. Sin título, 1995

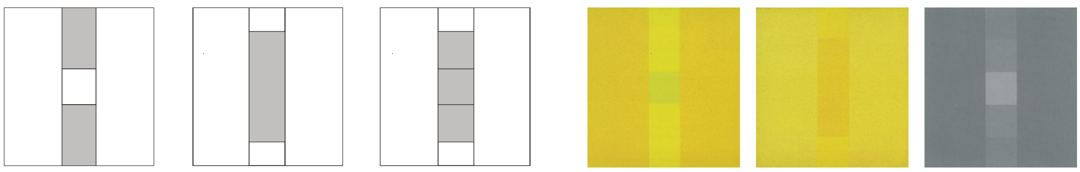
En las obras de la siguiente serie "*La fuerza del silencio*",[1] Ulrich Otto utiliza la misma estrategia que Julián Gil para la serie RA (Relaciones Áureas), pero con resultados muy diferentes. Esta serie tiene también su origen en un cuadrado dividido en tres partes según las relaciones áureas.



Girando cuatro veces esta estructura, se obtiene una estructura dinámica que permite realizar trazas en relación áurea.



Para Ulrich Otto el elemento protagonista de esta estructura es la banda vertical central. Puede aparecer dividida en un cuadrado central y dos rectángulos áureos; con tres cuadrados centrales y dos restos; o con un rectángulo equivalente a la suma de tres cuadrados y dos restos:



La paleta de colores utiliza por Otto para realizar su obra se basa en una gama monocroma de tres tonos próximos: gama de amarillos, de rojos, de azules o de grises.

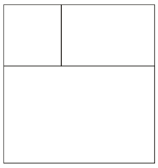
6.4.3.- JOSÉ LUIS GÓMEZ PERALES

5. A. Construcción modulada Nº 7.319, 1973 / B. Construcción modulada Nº 7.309, 1973 / C. Construcción modulada Nº 7.326, 1973

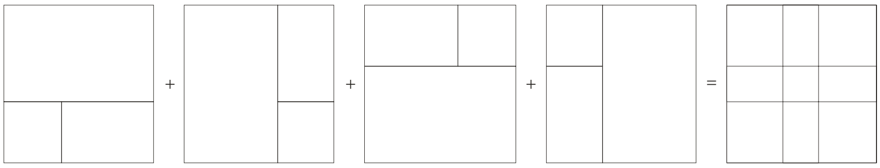
En la serie *Construcción modulada*, José Luís Gómez Perales trabaja, como en los casos anteriores, con un cuadrado al que introduce una estructura interna dinámica de proporción áurea (1.618) capaz de generar una gran variedad de obras con organizaciones muy diferentes.

[1] *Die Kraft der Stille.*

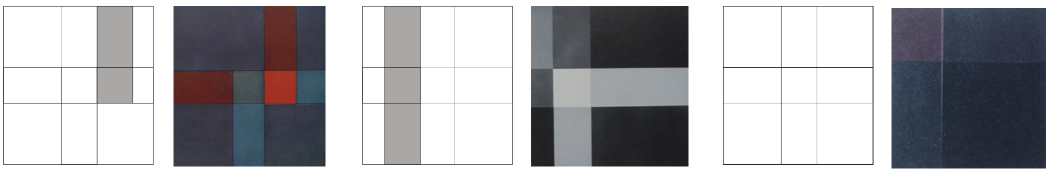
El proceso constructivo comienza con un cuadrado dividido en tres partes desiguales relacionadas proporcionalmente por el número PHI:



Si se superpone cuatro veces esta estructura y se gira cuatro veces a 0º, 90º, 180º, 270º, se obtiene la siguiente estructura áurea:



A partir de esta estructura dinámica básica, Perales, selecciona algunos trazos significativos y, en algunos casos, A y B, los desplaza una posición a derecha o izquierda para conseguir mayor tensión dinámica en sus obras. A continuación se muestran las estructuras de las obras seleccionadas:



A B C

La paleta de colores, muy sobria, trabaja en A, con una gama de grises azulados y con una gama de rojos: su complementario. En la obra hay un contraste de saturación entre los colores: todos los colores son neutros excepto el rojo que tiene un grado de saturación medio alto. En B, cromáticamente, se utiliza un contraste de luminosidad, generado por el uso de una gama acromática de grises y un único tono cromático azul muy luminoso y muy poco saturado. En C, se utiliza una gama de tres tonos diferentes: dos grises oscuros y un tono rojizo ennegrecido y muy poco saturado.

7.- OPERACIONES GEOMÉTRICAS CON CUADRADOS

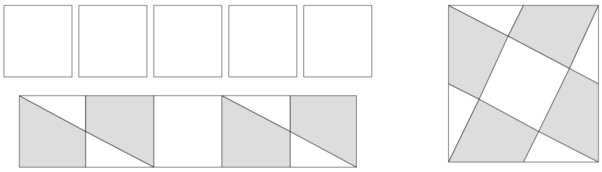
Antes de empezar con el estudio de las series numéricas, se va a trabajar en este capítulo con el estudio del cuadrado bajo diferentes aspectos matemáticos y geométricos. El cuadrado es una figura matemática y geométrica perfecta: todos sus lados y sus ángulos son iguales y está lleno de simetrías. El cuadrado tiene muchas propiedades aritméticas y geométricas que se pueden utilizar con fines estéticos. En este capítulo se presentan algunas de las geométricas.

7.1.- COMPOSICIÓN / DESCOMPOSICIÓN DE UN CUADRADO EN OTROS CUADRADOS

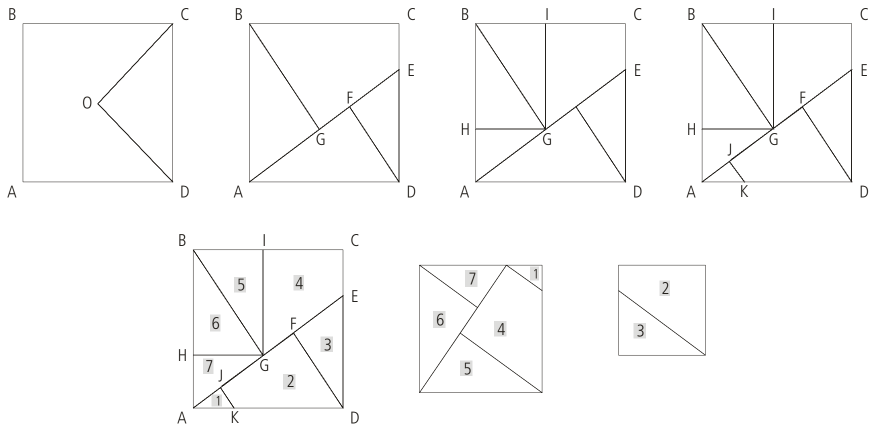
Se trata de construir o de descomponer un cuadrado a partir de o en muchos cuadrados iguales. Existen muchas soluciones a este problema de las que se van a mostrar algunas importantes:

1. Dados cinco cuadrados, descomponerlos para formar con todas sus piezas un único cuadrado

Se yuxtaponen los 5 cuadrados; se traza la diagonal alterna de 4 de ellos, dos a dos. Se cortan las piezas de los cuadrados que han resultado de trazar las diagonales; se juntan todas las piezas y se obtiene el cuadrado buscado.



2. Descomponer un cuadrado en siete partes de modo que las partes obtenidas se puedan unir para formar dos nuevos cuadrados con las siguientes características: uno de ellos es doble en superficie que el otro



Dado el cuadrado ABCD. Si la longitud del lado AB = 1, la longitud de DE es igual a la mitad de la diagonal del cuadrado ABCD, DO:

$$DE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se traza el segmento AE.

Desde los vértices B y D se trazan las perpendiculares DF y BG sobre el segmento AE. Desde G se trazan las perpendiculares GH y GI a los lados del cuadrado AB y BC respectivamente. Se toma la medida FD y desde F se lleva al segmento AE, obteniendo el punto J. Desde J, se traza una línea perpendicular a FJ que corte el lado DA del cuadrado en el punto K.

Se juntan las 7 partes obtenidas de la siguiente manera:

Se sabe que

$$DE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AE = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$$

$$FD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

FD es el lado del cuadrado pequeño.

La diagonal del rectángulo BIGH es el lado del cuadrado grande. Su valor es

$$BG = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}$$

Se tiene así:

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

Por otro lado, se tiene:

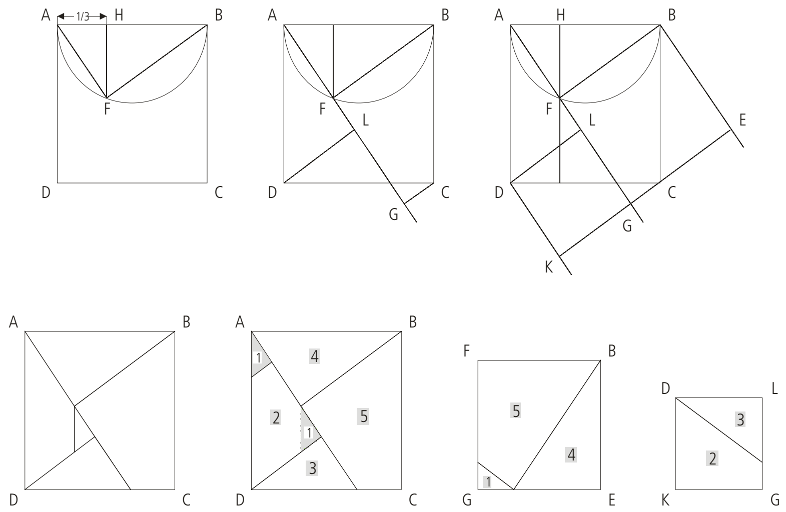
$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

Esto indica que uno de los cuadrados es doble que el otro.

3. Descomponer un cuadrado en 5 partes de modo que con sus piezas se puedan formar dos cuadrados en el que uno sea doble en superficie que el otro

Se traza un semicírculo de diámetro AB y centro en el punto medio del lado AB. Se divide el lado AB en tres partes iguales y se traza el punto H de modo que AH = 1/3 AB. Desde el punto H se traza una perpendicular a AB que corte el semicírculo en el punto F. El ángulo AFB es recto y el triángulo AFB es rectángulo.

Se traza una recta que pasa por AF y se prolonga más allá del corte de la recta con el lado DC del cuadrado. Desde los vértices C y D se trazan las perpendiculares CG y DL a la recta que pasa por AF. Se completan los cuadrados DLGK y BFGE, que son los dos cuadrados buscados.



Sobre la pieza ADL se realiza la siguiente operación: se recorta el triángulo 1 y se desplaza al vértice A, de forma que la pieza 2 quede completa para crear el lado del cuadrado pequeño.

Demostración:

Dado un cuadrado ABCD de lado c = 3 unidades. Su superficie es $c^2 = 9\ u^2$ y se obtiene así la siguiente relación:

$$AH = 1u \text{ y } HB = 2u$$

En el triángulo rectángulo AFB, se puede establecer la siguiente relación:

$$(FH)^2 = AH \times BH = 1u \times 2u = 2u^2$$

Los triángulos rectángulos AFB y DLA son semejantes e iguales. AF y FB son, por lo tanto, iguales a los lados de los cuadrados DLGK y FBEG.

Se puede establecer la siguiente relación:

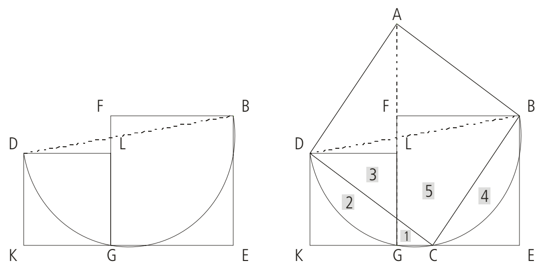
$$(AF)^2 = (AH)^2 + (HF)^2 = 1\ u^2 + 2\ u^2 = 3u^2$$

$$(FB)^2 = (HF)^2 + (HB)^2 = 2\ u^2 + (2\ u)^2 = 6u^2$$

La superficie de uno de los cuadrados es doble de la superficie del otro y la suma de estas dos superficies es igual a la del cuadrado original $9u^2$.

Esta descomposición se puede realizar a la inversa: descomponer dos cuadrados tales que uno de ellos sea doble en superficie que el otro, de modo que juntando sus piezas se pueda formar un cuadrado cuya superficie sea la suma de las dos anteriores.

Se sitúan los cuadrados DLGK y BFGE lado con lado. Se unen los vértices D y B. Se traza un semicírculo de diámetro DB que corte el segmento de líneas KGE en el punto C. Se completa el cuadrado ABCD que es el cuadrado buscado.



4. Descomponer un cuadrado en 7 partes de modo que con ellas se puedan construir tres cuadrados iguales

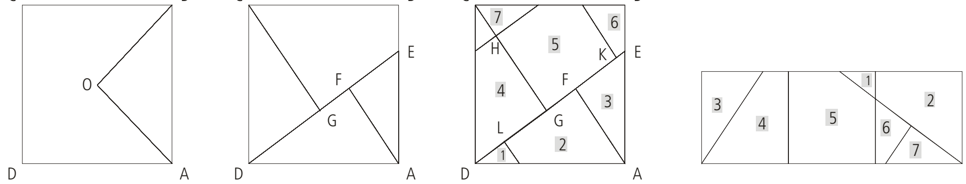
Dado un cuadrado ABCD cuyo lado AB =1. La longitud AE es igual a la mitad de la diagonal principal, AO, del cuadrado ABCD. Se toma la medida de la semidiagonal principal, AO, sobre el lado AB con origen en A y se traza una línea DE.

$$AB = 1$$

$$AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sobre ED, se trazan perpendiculares con centro en los vértices A y C: AF y CG. Con la medida AF se determinan los puntos K, L y H de forma que GK = FL = GH =AF. Estos puntos son los orígenes de perpendiculares a las líneas DE y CG.

Las piezas que se obtienen así pueden unirse para formar 3 cuadrados yuxtapuestos iguales.



Demostración:

Se puede establecer la siguiente relación:

$$(ED)^2 = (EA)^2 + (AD)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}$$

$$ED = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$$

Los triángulos rectángulos EAD y EFA son semejantes, y por lo tanto se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{AD}{FA} = \frac{ED}{EA}$$

Y, por lo tanto,

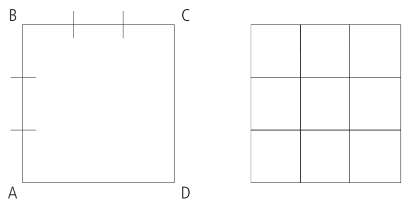
$$FA = \frac{AD \times EA}{ED} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donde la superficie de uno de los tres cuadrados es:

$$(FA)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

5. Descomponer un cuadrado en n^2 cuadrados iguales.

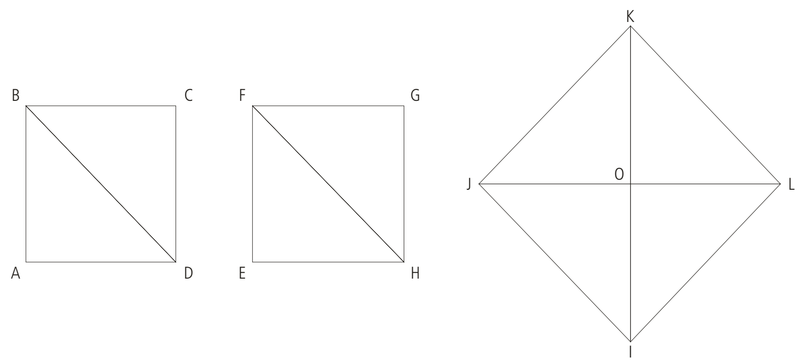
Para descomponer un cuadrado AC en n^2 cuadrados iguales, se dividen dos lados consecutivos del cuadrado dado, AB y BC, en partes iguales y se trazan paralelas a estos dos lados por los puntos de división.



Si el lado AB del cuadrado a descomponer tiene una longitud a, después de su descomposición, se puede decir que $a^2 = 3^2$.

6. Componer un cuadrado a partir de dos cuadrados iguales

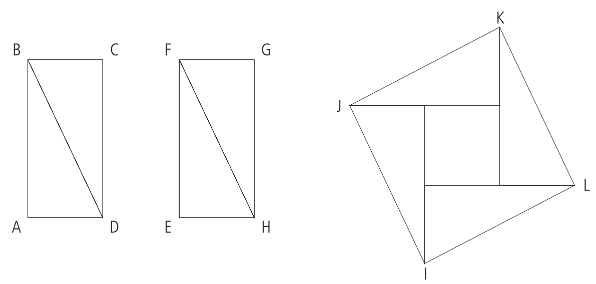
Dados dos cuadrados ABCD y EFGH, se divide cada uno de los dos cuadrados dados con una de sus diagonales principales, y se unen los cuatro triángulos rectángulos obtenidos de forma que sus ángulos rectos se junten en un mismo punto O. Se obtiene así el cuadrado IJKL.



Por un proceso inverso, se puede descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados iguales. Se trazan las dos diagonales del cuadrado dado y se unen por su hipotenusa, dos a dos, los triángulos isósceles obtenidos.

7. Componer un cuadrado a partir de dos rectángulos iguales

Dados dos rectángulos iguales ABCD y EFGH, se divide cada uno de ellos por una diagonal y se obtienen dos triángulos rectángulos en los que la hipotenusa es el lado del nuevo cuadrado, IJKL.



El cuadrado que se obtiene está formado por cuatro triángulos rectángulos de área ab/2 y un cuadrado central de lado a - b.

8. Componer un cuadrado a partir de dos cuadrados más pequeños desiguales de lados c y d, de manera que c >d

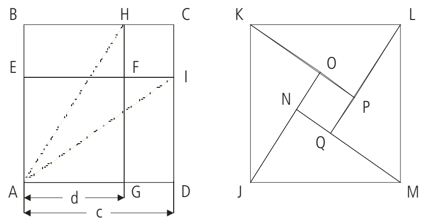
Se superpone el cuadrado AEFG de lado d al cuadrado ABCD de lado c, de forma que estos dos cuadrados tengan un ángulo y lado en común. Se prolongan los lados del cuadrado pequeño EF y GF hasta que corten con los lados CD y BC del cuadrado grande en los puntos I y H.

El cuadrado ABCD queda dividido en:

1. El cuadrado FHCI de lado c – d.
2. El rectángulo ABHG de superficie cd, que se puede dividir en dos triángulos rectángulos iguales por la diagonal AH.
3. El rectángulo GFID.

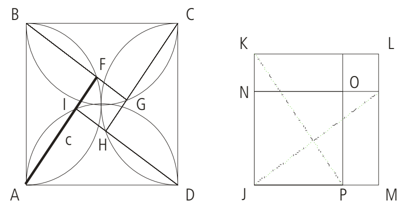
Este último rectángulo junto con el cuadrado AEFG forman el rectángulo AEID de superficie cd, que se puede, también dividir por la diagonal AI, en dos triángulos rectángulos iguales entre sí y de hipotenusa AI.

Se construye el nuevo cuadro, JKLM, con los cuatro triángulos rectángulos obtenidos, de forma que las hipotenusas AI y AH sean los lados del nuevo cuadrado. Para completar el cuadrado se coloca el cuadrado FHCI en NOPQ.



9. Dividir un cuadrado en dos cuadrados desiguales, conociendo el lado, c, de uno de ellos

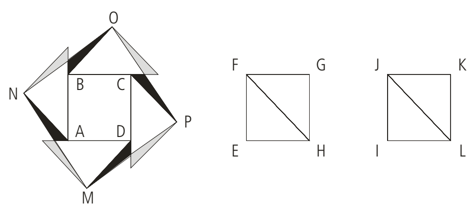
Sobre los cuatro lados de un cuadrado dado ABCD, se traza un semicírculo de diámetro el lado del cuadrado.



A partir de los vértices del cuadrado A, B, C, D, se trazan las líneas AF, BG, CH, DI, iguales a c. Estas líneas configuran un cuadrado IFGH y cuatro triángulos rectángulos iguales ABF, BCG, DHC, AID, con los que se forman los dos cuadrados previstos JKLM y JNOP.

10. Componer un cuadrado a partir de 3 cuadrados iguales

Dados tres cuadrados iguales ABCD, EFGH, IJKL, se dividen los dos últimos en dos partes iguales trazando su diagonal principal y se disponen los triángulos obtenidos alrededor de los lados del primer cuadrado dado, ABCD.



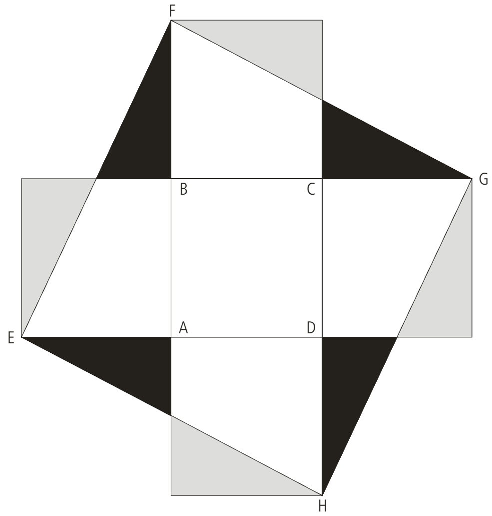
Uniendo los puntos M, N, O, P entre sí, se obtiene un cuadrado, MNOP. Los triángulos grises obtenidos y los espacios negros generados al unir los puntos M, N, O, P son iguales entre sí, de modo que se cortan los triángulos grises y se meten en los espacios negros. Se obtiene así el cuadrado MNOP formado por los tres cuadrados dados.

11. Construcción de un cuadrado a partir de 5 cuadrados iguales

Disponer alrededor de los lados de uno de los cuadrados ABCD dado, los otros 4.

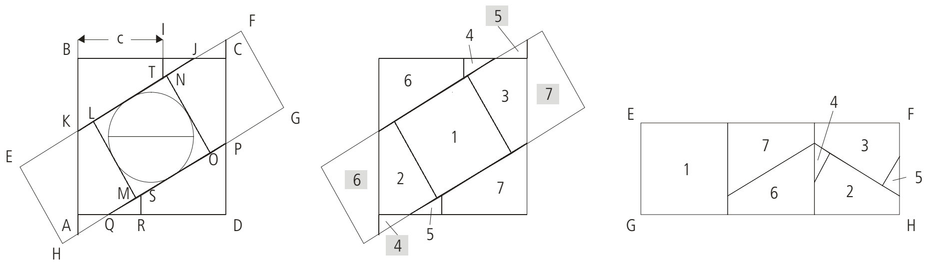
Unir uno de los vértices de cada uno de los cuadrados periféricos con el siguiente, hasta obtener un cuadrado EFGH.

Los triángulos grises obtenidos y los huecos negros generados son iguales entre sí y por lo tanto, los triángulos grises pueden ocupar la posición de los huecos negros para obtener el cuadrado EFGH formado por los 5 cuadrados iniciales.



12. Descomponer un cuadrado dado en 3 cuadrados iguales de lado c

Dado el cuadrado ABCD, se trata de determinar gráficamente el valor de la altura de un rectángulo EFGH formado por los 3 cuadrados iguales contenidos en el cuadrado.



Sobre el lado BC del cuadrado dado ABCD, se toma la longitud, BI igual al lado c de uno de los cuadrados.

Desde el centro del cuadrado ABCD y de diámetro igual a c, se dibuja una circunferencia y se trazan las siguientes tangentes a ésta:

1. JK pasando por el punto J, mitad de IC.
2. LM y NO perpendiculares a JK.
3. PQ paralela a la línea recta JK.

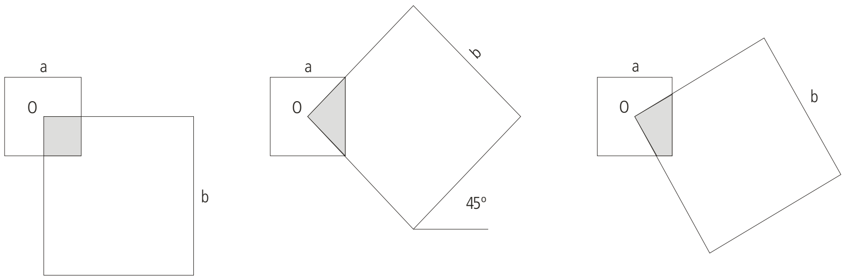
Se comprueba que QR = JC y se trazan las perpendiculares IT y RS a BC y AD respectivamente.

El cuadrado, en este punto, se encuentra descompuesto en fragmentos que juntos forman un rectángulo EFGH formado de 3 cuadrados iguales yuxtapuestos, donde el cuadrado LMNO es el cuadrado central y el que se traza en primer lugar.

Se puede ver que los triángulos 4 y 4, 5 y 5 y los trapecios 6 y 6, 7 y 7 son respectivamente iguales. Los elementos 1, 2, 3 son comunes a las dos figuras.

7.2.- CUADRADOS GIRADOS

Dado un cuadrado de lado a y de centro O y otro cuadrado de lado b (tal que b > a), en el que un vértice está fijo en el centro O. Este último cuadrado gira en torno a O como centro de rotación.



Perímetro mínimo Perímetro máximo

El perímetro p de la superficie común es mínimo cuando los lados del gran cuadrado son paralelos a los lados del cuadrado pequeño. Este perímetro vale p = 2a. El perímetro de la superficie común es máximo cuando el ángulo entre los lados del cuadrado grande y del pequeño es igual a 45º. Este perímetro tiene un valor, $p = a\,(1 + \sqrt{2})$.

La superficie S de la parte común es siempre la misma e igual a:

$$S = \frac{a^2}{4}$$

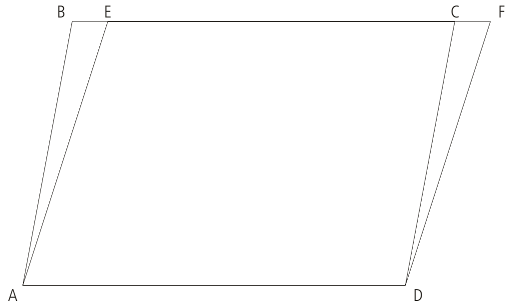
7.3.- DESCOMPOSICIÓN DE POLÍGONOS EQUIVALENTES EN ELEMENTOS SUPERPONIBLES: DOS PARALELOGRAMOS CON UNA BASE COMÚN Y LA MISMA ALTURA

Dada una figura poligonal A, se trata de descomponerla en elementos que, unidos de una u otra manera, den una figura poligonal B de la forma dada y equivalente a la primera.

1. Dos paralelogramos con una base común y la misma altura superpuesta

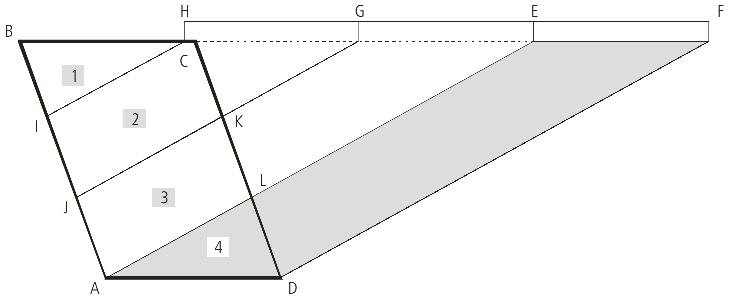
Dados dos paralelogramos ABCD y AEFD, que tienen una base común, AD y la misma altura donde BC y EF se superponen.

Para pasar de la primera figura, ABCD, a la segunda, AEFD, se transporta el triángulo ABE sobre su igual DCF.



2. Dos paralelogramos con una base común y la misma altura no superpuesta

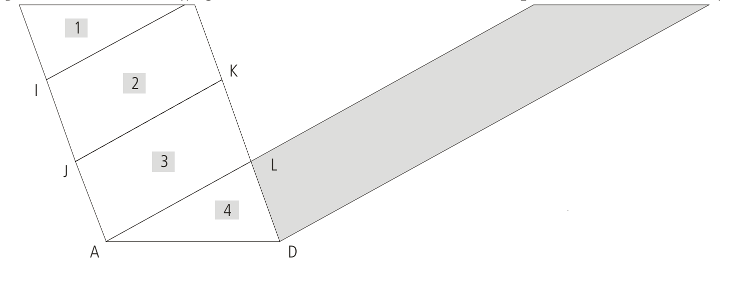
Dados dos paralelogramos ABCD y AEFD, que tienen una base común, AD y la misma altura, donde BC y EF no se superponen.

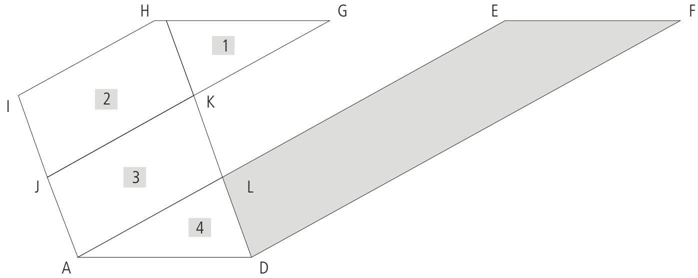


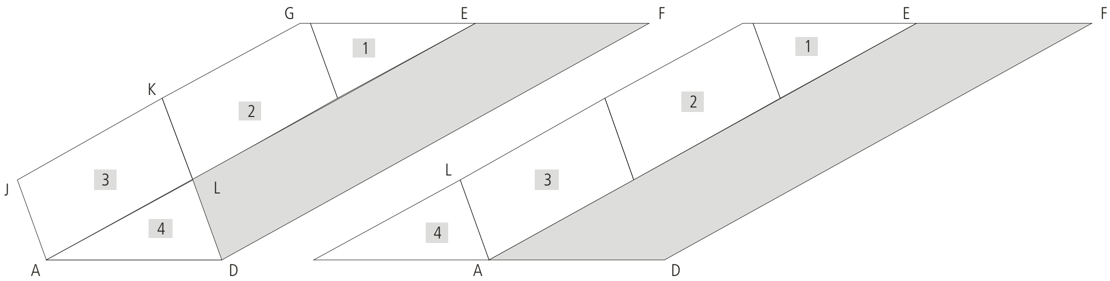
Si EF no se superpone a BC se transporta sucesivamente sobre el lado opuesto a la base común AD (BF), y a partir de E, los segmentos iguales a EF tantas veces como sea necesario para que para que el último se monte sobre el segmento BC. Por los puntos así obtenidos G, H, se trazan paralelas al lado DF del segundo paralelogramo: GJ y HI.

El paralelogramos ABCD queda descompuesto en polígonos, 1, 2, 3, 4, que equivalen a AEFD.

Para comprobarlo, se desplaza el elemento 1 (triángulo BHI) a CKG; después el trapecio JIHG, compuesto de los elementos 1 y 2, a KGEL; y finalmente el elemento trapecio AJGE, compuesto de los elementos 1, 2, 3 a DLEF. Se obtiene así el paralelogramo AEFD.




H
G
E
F
1
I
2
K
J
3
L
4
A
D

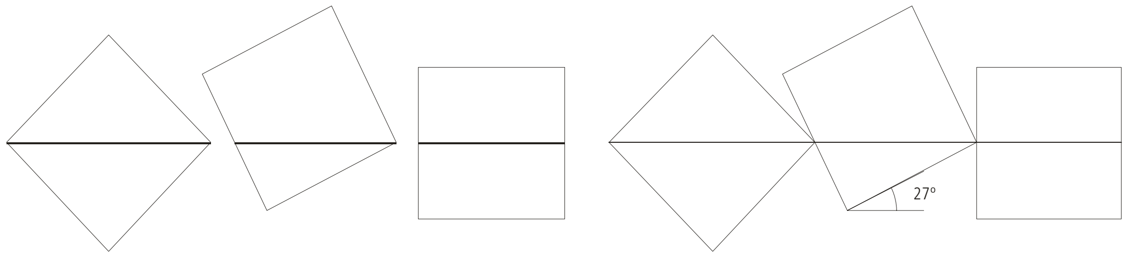

G
E
F
E
F
1
1
K
2
2
J
3
L
L
3
4
4
A
D
A
D

7.4.- ANÁLISIS DE OBRAS

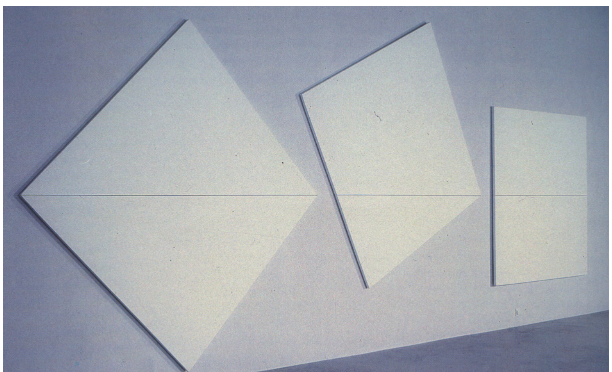
7.4.1.- FRANÇOIS MORELLET

1. Línea horizontal recorriendo 3 cuadrados, 1974[1]

Esta obra se basa en el principio de que una misma línea puede recorrer diferentes soportes independientes, que se pueden separar, antes o después de ser dibujados.



Los soportes sobre los que pasa la línea son un cuadrado girado a 45º, otro a 27º y el último en posición horizontal. La protagonista de esta obra es una línea horizontal que atraviesa los tres cuadrados, separados entres sí una determinada distancia, con diferentes estrategias. En el cuadrado a 45º, la línea se traza entre dos vértices opuestos. En el cuadrado inclinado a 27º, la línea tiene su origen en el punto medio de uno de sus lados y se extiende hasta uno de sus vértices. Y, finalmente, en el cuadrado horizontal, la línea se sitúa entre los puntos medios de dos lados paralelos del cuadrado. Se genera la obra con las superficies de los cuadrados unidas por los puntos significativos de cada uno de ellos: los que se van a utilizar como referentes para realizar las trazas correspondientes de la obra, y una vez realizada la operación de trazado de las líneas, se separan una cierta distancia.

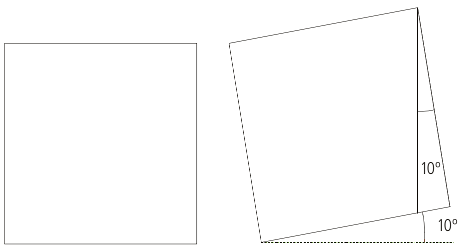


[1] Ligne horizontale passant sur 3 carrés, 1974.

2. Lienzo 10º -100º, inclinación de la pared 90º, 1983[2]

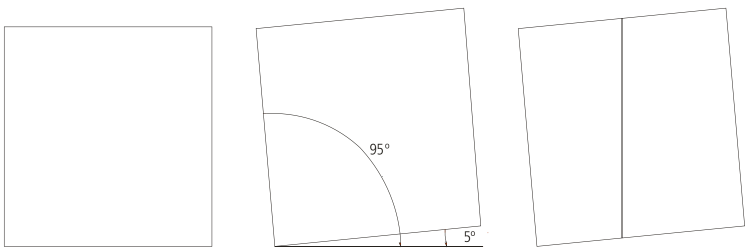
La obra está formada por un lienzo cuadrado inclinado 10º con respecto a la horizontal, al que se le ha dibujado una línea recta vertical que parte del vértice superior del cuadrado, después de su inclinación, y desciende verticalmente hasta cortar a la línea de base del cuadrado. El espacio que se genera al practicar la línea vertical, es un triángulo rectángulo de 10º con respecto al vértice superior del cuadrado.

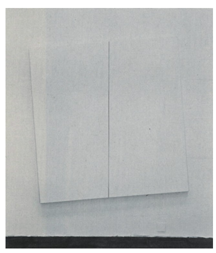
Estas obras son instalaciones que se sitúan estratégicamente en lugares geométricos de la arquitectura: líneas, arcos, puntos, formas,… Sirven para destacar o hacer visibles tramos de geometrías arquitectónicas que de otra forma pasarían desapercibidas.



3. Lienzo 5º- 95º, mediana vertical 90º, 1980[3]

El proceso y planteamiento de la obra es parecido al anterior: se inclina un cuadrado 5º y se traza una línea en su interior que parte del punto medio del lado superior y desciende verticalmente hasta cortar al lado inferior del cuadrado. En este caso la obra no se incorpora arquitectónicamente a ningún elemento geométrico concreto, pero hace reflexionar sobre la inestabilidad visual de lo vertical y la necesidad de corrección de todas las direcciones angulares del espacio con respecto a las coordenadas horizontales y verticales para que se produzca una estabilidad o equilibrio.



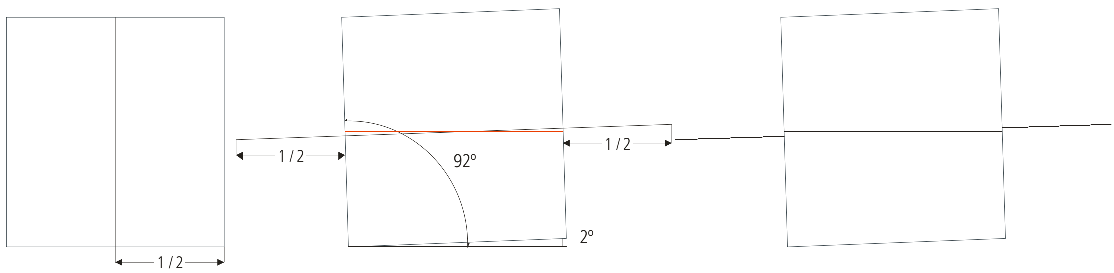


[2] Tableau 10º - 100º, inclination du mur 90º, 1983.

[3] Tableau 5º- 95º, médiane verticale 90º, 1980.

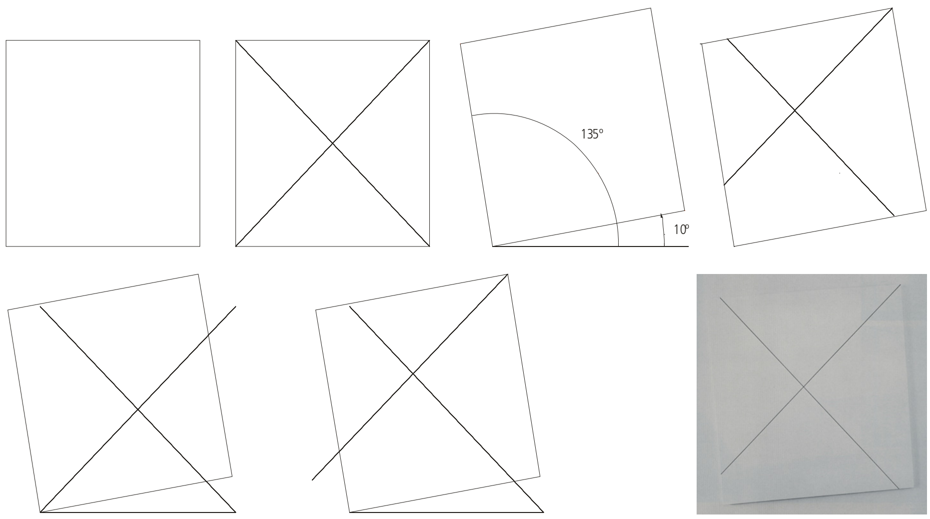
4. Lienzo 2º - 92º con mediana horizontal. Línea sobre la pared 2º, 1980[4]

Se parte de un cuadrado horizontal que se gira 2º en el sentido contrario a las agujas del reloj. A este nuevo cuadrado, se le traza la mediana desde el punto medio del lado vertical izquierdo al punto medio del lado vertical derecho y se prolonga por los dos lados, fuera del cuadrado, una longitud igual a la mitad de lo que mide un lado del cuadrado. Se fragmenta la mediana horizontal trazada en 3 tramos: dos exteriores cuya suma es igual a la longitud del lado del cuadrado, y uno interior, que se gira, en el sentido de las agujas del reloj 2º y con respecto al punto medio del cuadro, hasta obtener la horizontalidad.



5. Lienzo 10º, diagonales 45º - 135º, 1980[5]

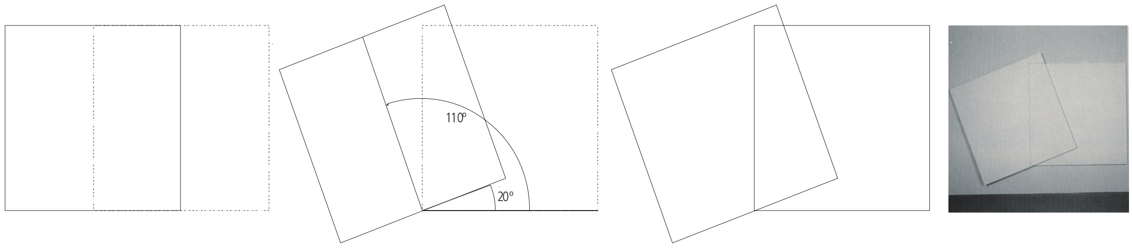
Sobre un cuadrado horizontal, se trazan su dos diagonales principales: descendente (desde el vértice superior izquierdo al vértice inferior derecho) y ascendente (desde el vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho). Se gira el cuadrado 10º en el sentido contrario a las agujas del reloj, con respecto al vértice inferior izquierdo del cuadrado y se mantienen sin giro sus diagonales. Para la representación final de la obra, se utiliza la diagonal descendente en la misma posición que se definió al principio, con el cuadrado horizontal, prolongando su trayectoria hasta que corte el lado superior del cuadrado y suprimiendo aquella parte de su trayectoria que excede el perímetro del cuadrado. La vertical ascendente se desplaza, haciendo coincidir su extremo superior derecho con el vértice superior derecho del cuadrado girado y suprimiendo las partes de la línea que se salgan del cuadrado.



[4] Tableau 2º - 92º avec mediana horizontale. Ligne sur le mur 2º, 1980.

[5] Tableau 10º, diagonales 45º - 135º, 1980.

6. Superposición y transparencia. Lienzo posterior 0º - 90º, lienzo primero 20º - 110º, 1980[6]



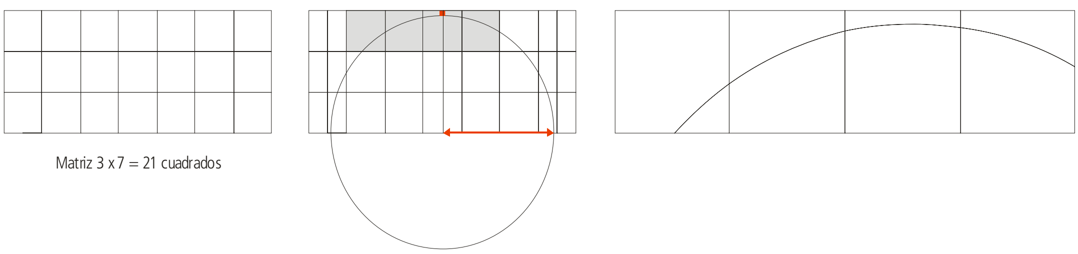
Dados dos cuadrados horizontales superpuestos de forma que el extremo de uno de ellos coincida con la mediana del otro, se realiza el siguiente proceso: el cuadrado posterior se mantiene horizontal, y el cuadrado anterior se gira 20º, con respecto al punto de cruce inferior de los dos cuadrados y en el sentido contrario a las agujas del reloj. Para crear la sensación de transparencia aunque las superficies sean opacas, después de la superposición, se trazan sobre el lienzo superior las líneas ocultas del lienzo inferior.

7. Arco roto de un círculo, 1954[7]

Esta obra se basa en el principio de la fragmentación en el que una misma línea se dibuja sobre diferentes soportes independientes (separados después de ser dibujados o separados y/o inclinados antes de ser dibujados).

Es una obra formada por 4 lienzos blancos, cuadrados, iguales y colgados a intervalos regulares, atravesados por un arco de círculo azul que es el protagonista de la obra. Las cuatro secciones de arco no son simétricas y no ocupan la misma posición en todos los cuadrados. Si se acercan los cuadrados lado con lado, los arcos se unen unos con otros y se inscriben dentro del mismo círculo.

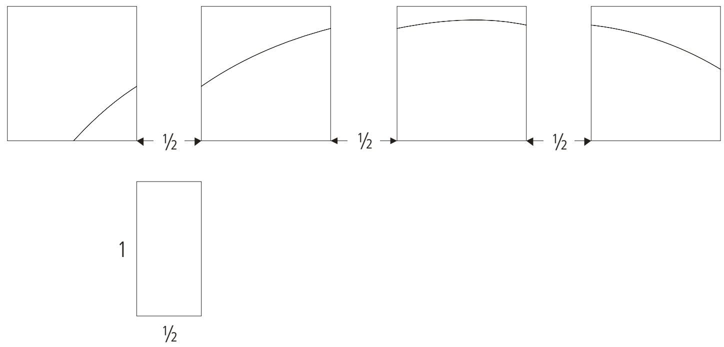
El punto de partida para generar la obra es una matriz de 3 x 7 = 21 casillas donde se inscribe un semicírculo de radio, la altura de la matriz formada por 3 cuadrados menos unos centímetros para que el círculo quede inscrito dentro de la matriz y no sea limítrofe. De toda esta matriz, para realizar la obra, se eligen sólo cuatro cuadrados contiguos, marcados en gris, con arcos de círculo diferente.



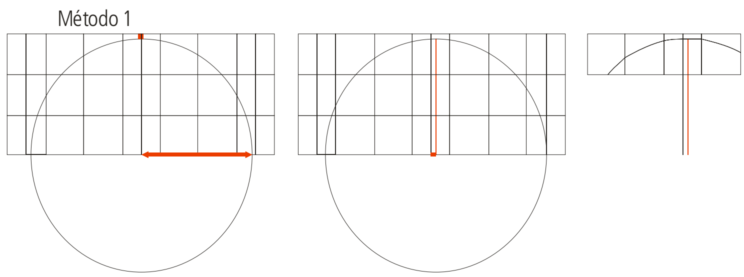
Cada uno de estos cuadrados se muestra, no como una obra total, sino como fragmento. Para situar espacialmente la obra, se separan cada uno de los cuadrados, con su arco correspondiente, un intervalo que es la mitad de la longitud del cuadrado; una medida que permite reunir perceptivamente las cuatro superficies y dar una visión de un arco continuo.

[6] Superposition et transparence. Tableau derrière 0º -90º, tableau devant 20º -110º, 1980.

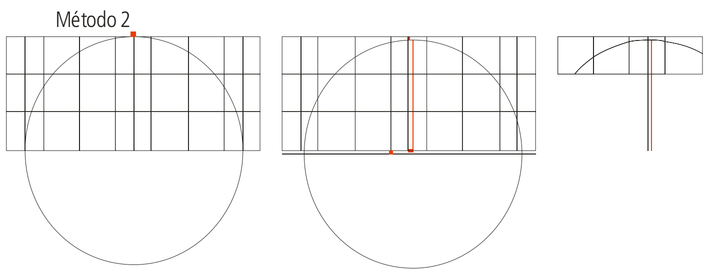
[7] Broken arc of a circle, 1954.



El hecho de que el arco no se presente de forma continua sino fragmentada, obliga a reconstruir el método de trabajo para localizar el círculo completo que da lugar a los arcos representados en la obra. Se pueden interpretar dos formas de trazar el círculo en la matriz de 3 x 7 cuadrados. En el primer método, el círculo tiene su centro en el punto medio del lado inferior de la matriz y de radio, la altura de la matriz menos unos centímetros, que como se explicó antes, sirven para que la circunferencia quede inscrita en la superficie de la matriz. Se desplaza el arco de círculo horizontalmente hasta que su radio horizontal derecho corte con la mediana del cuadrado que está situado en el vértice inferior derecho.

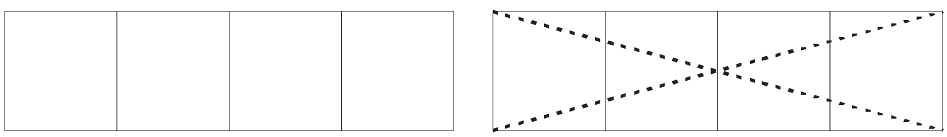


En el segundo método, el círculo que se inscribe en la matriz tiene de radio su altura (3 cuadrados). Para que el arco quede insertado dentro de la matriz, se desplaza unos centímetros verticalmente hacia abajo.

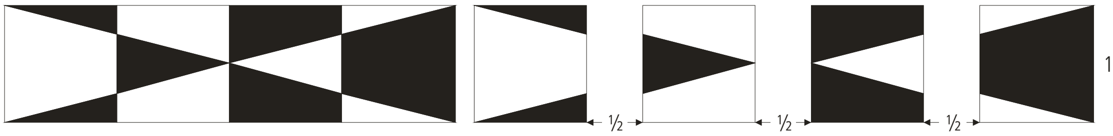


8. Estudio, 1954

Dados cuatro cuadrados contiguos y adyacentes, se trazan sus diagonales principales:



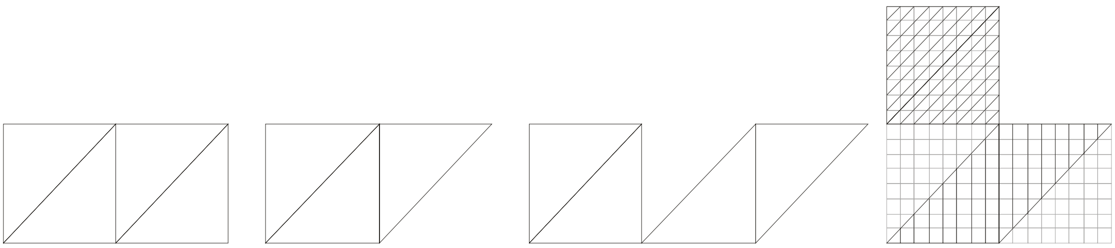
En cada cuadrado se generan tres superficies que se colorean alternativamente con blanco y negro, de forma que la secuencia generada en uno de los cuadrados sea la inversa de la que se aplica al siguiente: negro – blanco – negro; blanco – negro – blanco;… Finalmente, los cuadrados se separan entre sí una distancia igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado.



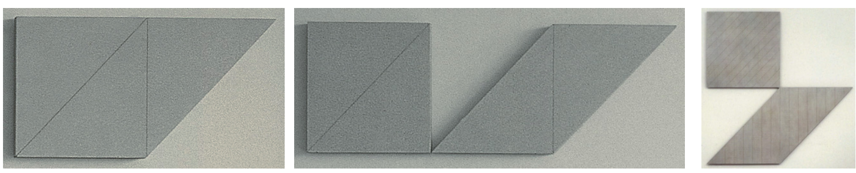
7.4.2.- HARTMUT BÖHM

1. Integración 7, II (a y b) e Integración 14, I (c)[8]

Dos obras que comparten el mismo proceso constructivo: dos cuadrados contiguos a los que se les ha trazado la diagonal principal ascendente que parte del vértice inferior izquierdo y acaba en el vértice superior derecho. Con estos 4 triángulos rectángulos isósceles se crean una serie de variaciones empleando tres o cuatro de los triángulos generados. En la obra de la izquierda, A, se suprime uno de los triángulos y se obtiene un polígono irregular de cuatro lados. En la obra de la derecha, B, se desplaza uno de los triángulos interiores hasta el extremo derecho del rectángulo hasta obtener dos figuras geométricas reconocibles: un cuadrado y un paralelogramo de la misma altura. En C, se parte de dos cuadrados apilados verticalmente, en el que en el cuadrado inferior, se desplaza el triángulo rectángulo superior sobre el lado derecho del cuadrado. Los cuadrados de esta última obra están divididos modularmente en ocho partes. En el cuadrado superior se trazan líneas estructurales a 45 º y en el paralelogramo inferior, a 90º (verticales).



A B C

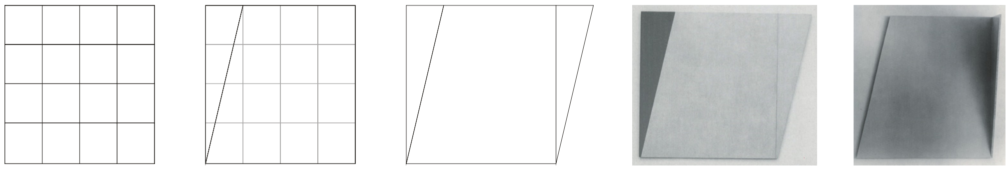


A B C

[8] Gegenüberstellung 7, II (a y b) y Gegenüberstellung 14, I (c).

2. Integración[9]

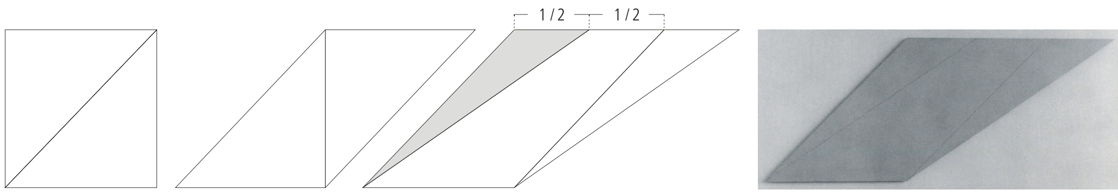
Dada una matriz de 4 x 4 = 16 cuadrados, se traza una línea que va del vértice inferior izquierdo a un cuarta parte del lado superior del cuadrado, empezando a contar por la izquierda. En A, el triángulo rectángulo que se obtiene, se copia y se desplaza al lado contrario del cuadrado. Se obtiene así, un nuevo paralelogramo. En B, el triángulo obtenido se gira espacialmente 90º, de forma que el nuevo triángulo sea perpendicular al anterior en el lado de mayor longitud, y se desplaza al lado derecho del cuadrado.



A B

3. Paralelo, interior - exterior, I[10]

Partiendo de un cuadrado dividido en dos partes por su diagonal principal ascendente, se transforma en un paralelogramo al trasladar el triángulo equilátero isósceles de la izquierda, al lado derecho del cuadrado. Tomando como medidas: la mitad del lado superior del paralelogramo obtenido, el lado mayor del paralelogramo y la distancia que existe entre el vértice inferior izquierdo y el punto medio del lado superior, se obtiene un triángulo escaleno. Se realiza una copia de éste y se traslada al lado derecho del paralelogramo.



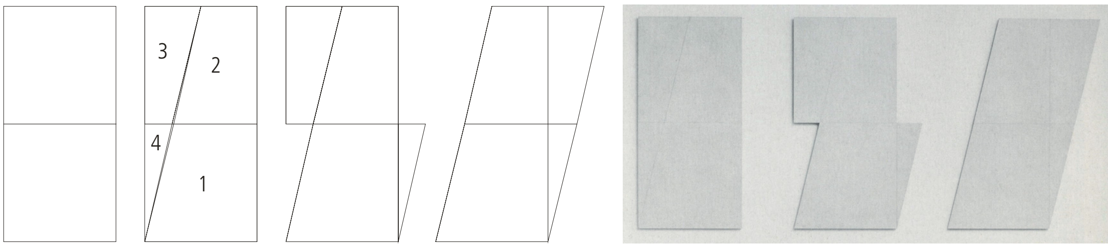
4. Integración 17, II[11]

Dados dos cuadrados superpuestos, se traza una línea que una el vértice inferior izquierdo del cuadrado inferior y el punto medio del lado superior del cuadrado superior. El rectángulo queda dividido en cuatro partes diferentes entre sí: 1, 2, 3, 4. Mientras que las partes 1 y 2 permanecen constantes, en A, se desplaza horizontalmente el módulo 4, sobre el lado derecho del cuadrado inferior del cuadrado; y en B, se traslada el módulo 3, de la misma forma que el anterior, pero sobre el lado derecho del cuadrado superior.

[9] Gegenüberstellung / Integration.

[10] Parallel, innen –auβen, I.

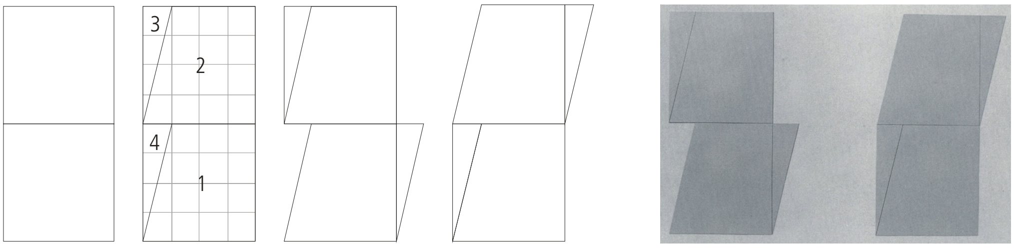
[11] Gegenüberstellung / Integration 17, II.



A B

5. Cambio (Perspectiva transversal)[12]

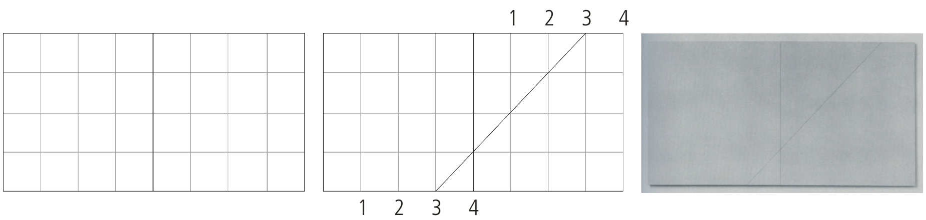
Con un planteamiento similar al de la obra anterior pero con el cuadrado superior dividido, en este caso, según el mismo criterio que el inferior: con una línea que parte del vértice inferior izquierdo y se une a un punto del lado superior del cuadrado que ha sido dividido en cuatro partes iguales. En A, se desplaza, horizontalmente, el triángulo rectángulo 4, al lado derecho del cuadrado inferior; en B, el triángulo que se desplaza es el 3, pero el método es igual que en el caso anterior.



A B

6. Dos divisiones[13]

Dados dos cuadrados horizontales colindantes, en los que cada uno de sus lados está dividido en cuatro partes iguales, se traza una única línea, protagonista de la obra, que va desde el lado inferior del primer cuadrado (posición 3), al lado superior del segundo cuadrado (posición 3).

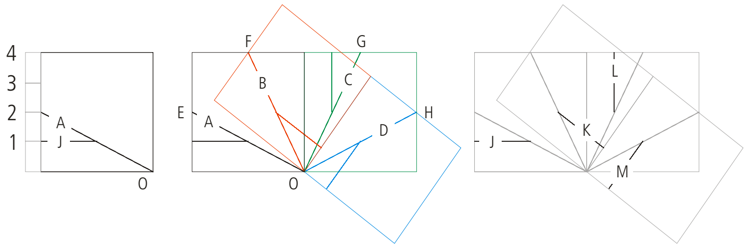


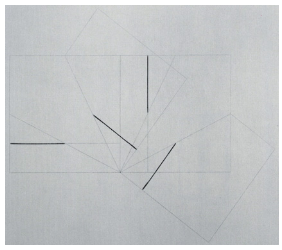
[12] Veränderung (Schnittzeichnung).

[13] Zwei Teilungen.

7. Obra en pared con líneas de fresado, 1984[14]

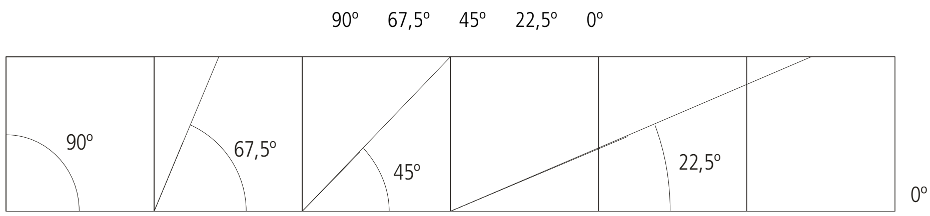
Dado un módulo cuadrado, dividido en uno de sus lados, el vertical izquierdo, en cuatro partes iguales, 1, 2, 3, y 4, y con dos líneas en su interior: la línea A, que une el vértice inferior derecho, O, con el punto medio del lado vertical izquierdo, E (marca 2); y la línea horizontal, J, que parte de la marca 1 del lado vertical izquierdo hasta que se corta con la línea trazada previamente, A. Para realizar la obra, se utilizan dos cuadrados horizontales consecutivos. Sobre el cuadrado de la izquierda, se coloca el módulo trazado con las líneas A y J. Este módulo se gira cuatro veces según el siguiente criterio: el centro de rotación es siempre el vértice inferior derecho del módulo, O; y el ángulo de giro está determinado por la posición que ocupa la línea A, con respecto a un lado consecutivo del cuadrado que se ha utilizado para trazarla, y haciendo el giro siempre en el sentido de las agujas del reloj. En todos los casos se busca siempre el punto medio del lado considerado: E, F, G, H. Al realizar el primer giro, la línea A gira desde del punto E al F y crea la línea B; en el segundo, la línea B gira hasta el punto G y crea la línea C; y en el tercero, la línea C gira hasta el punto H y genera la línea D. El resultado de la obra son la obtención de los trazos J, K, L, M. Estos trazos son todos paralelos a un lado de un cuadrado y están distanciados una cuarta parte de uno de sus vértices. Es importante señalar también que son complementarios dos a dos, ya que juntos completan la línea que es igual en longitud a lo que mide el cuadrado: J es complementario de K y L de M.

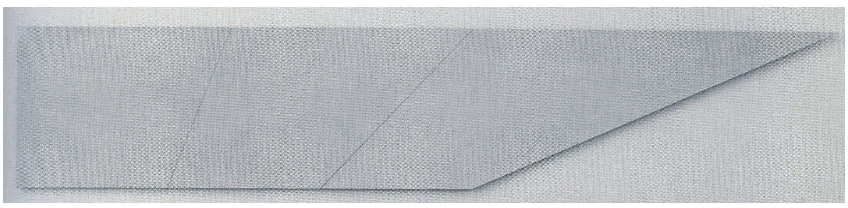




8. Progresión, 1981

Progresión de la inclinación de una línea en 5 pasos: desde la vertical en el extremo izquierdo de la obra, a la horizontal, con tres pasos intermedios. El paso intermedio de la serie es a 45º. Para calcular las otras dos inclinaciones de las líneas, se dividen los 90º, que cubren todo el recorrido de la línea, en cuatro partes iguales y se obtiene un ángulo constante de 22,5º. Con esta subdivisión geométrica se crea una sucesión de ángulos, de izquierda a derecha, que está definido en la siguiente secuencia:





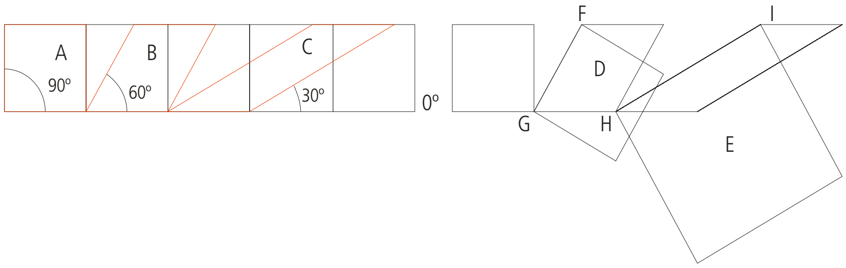
[14] Wandarbeit mit Fräslinien, 1984.

9. A. Progresión hacia el infinito con 30º, 1985 / B. Progresión hacia el infinito con 30º, 1987 [15]

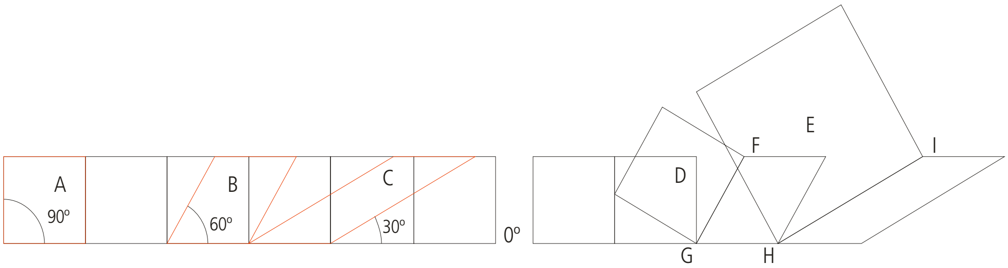
Las dos obras siguientes tienen un proceso constructivo muy parecido. La primera etapa consiste en construir los polígonos A, B, C que tienen todos, la misma línea base y la misma altura pero distinta forma. Para obtener estos polígonos, se calcula la inclinación de sus lados de forma que entre uno y otro haya una diferencia de 30º. La secuencia para que los lados evolucionen de 90º a 0º, en cuatro pasos, es la siguiente:

90º 60º 30º 0º

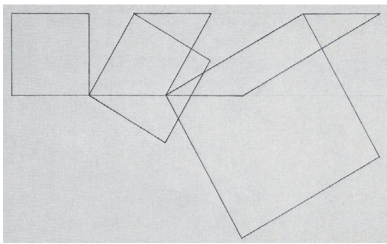
A



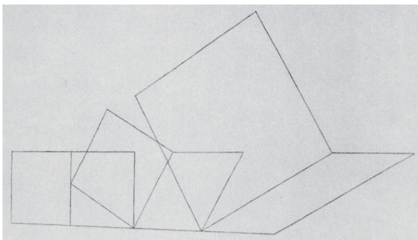
B



La segunda etapa consiste en trazar cuadrados perpendiculares a los lados GF y HI a los dos lados de estos ejes; en A, hacia abajo, y en B, hacia arriba.



A



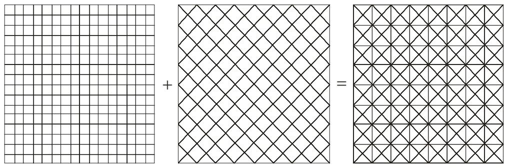
B

7.4.3.- JULIÁN GIL

1. Serie ORT + ESC

Las obras de esta serie utilizan para su creación una estructura que se obtiene superponiendo una retícula a la que se le ha aplicado una subdivisión de líneas ortogonales a 0º y 90º, ORT, y otra retícula con trazas a 45º, ESC:

[15] Progresión gegen Unendlich mit 30º.



ORTogonal + ESCuadra = ORT + ESC

A continuación se muestra el proceso generativo de una serie de obras que tienen los mismos principios constructivos:

1. A partir de una estructura ORT + ESC, realizar, sobre un cuadrado, dos trazas: una que pertenezca a la serie ORT (0º, 90º) y otra que tenga su origen en la serie ESC (45º), de forma que el cuadrado quede dividido en tres partes diferentes.

2. Descomponer el cuadrado en tres piezas realizando cortes por el lugar donde se han dibujado las trazas.

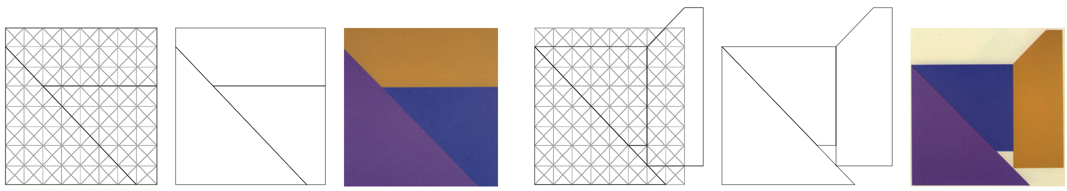
3. Con las piezas obtenidas y sobre la estructura ORT + ESC, realizar una nueva composición de forma que las piezas estén relacionadas entre sí siguiendo los mismos principios que la estructura ORT + ESC.

4. Cada una de las obras realizadas está compuesta de dos piezas: la primera, es el propio cuadrado con las trazas dibujadas; y la segunda, es el polígono construido a partir de las piezas obtenidas del cuadrado. A la primera obra se la identifica con un número, por ejemplo: 338, y a la segunda, con el mismo número seguido de la letra D, por ejemplo: 338 D.

5. El último paso consiste en elegir la estructura cromática que se va a utilizar en cada obra.

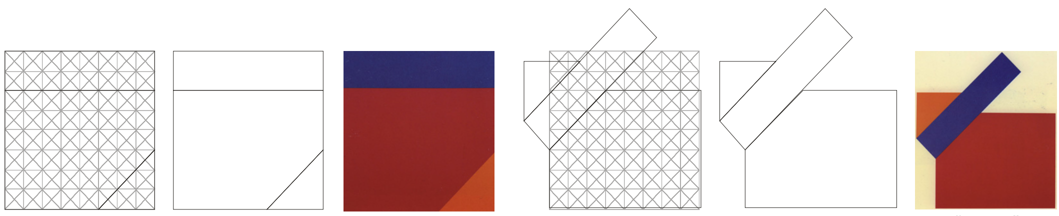
Lo característico de esta serie de obras y de la siguiente, serie HEMipitagórica, es la ruptura del marco. La obra establece su propio contorno. Las obras están formadas por una serie de piezas que se recortan y ensamblan.

El proceso constructivo de las obras 338 y 338 D es el siguiente:



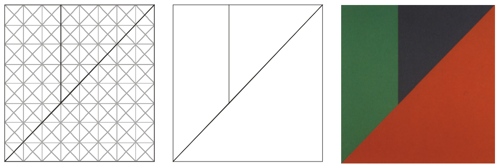
"338" "338 D"

La elaboración de las obras 340 y 340 D se realiza según el siguiente sistema generativo:

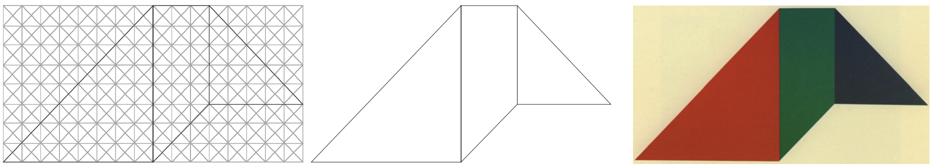


"340" "340 D"

Para construir las obras 341 y 341 D, se sigue el siguiente proceso:

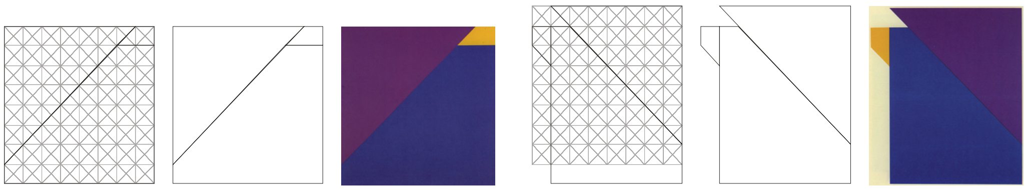


"341"



"341 D"

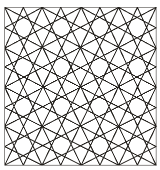
Finalmente, las obras 344 y 344 D se realizan según el siguiente proceso constructivo:



"344" "344 D"

2. Serie HEMipitagórica

La serie HEMipitagórica esta formada por un conjunto de obras, realizadas en 1996, que utilizan la retícula HEMIpitagórica como punto de partida del proceso generativo que las construye. La retícula sirve para seleccionar líneas estructurales relacionadas entre sí, y desarrollar múltiples variaciones de obras basadas en las proporciones que facilita la propia retícula.



HEMipitagórica

Para realizar estas obras se sigue el siguiente método de trabajo:

1. A partir de una estructura HEMipitagórica, realizar, sobre un cuadrado, dos trazas, de forma que el cuadrado quede dividido en tres partes diferentes.

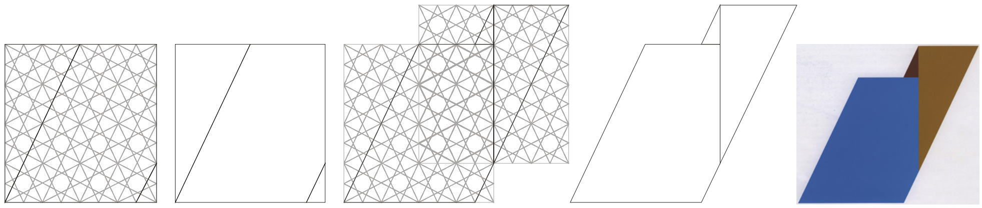
2. Descomponer el cuadrado en tres piezas realizando cortes por el lugar donde se han dibujado las trazas.

3. Con las piezas obtenidas y sobre la estructura HEMipitagórica, realizar una nueva composición de forma que las piezas estén relacionadas entre sí siguiendo los mismos principios constructivos que la estructura HEMipitagórica.

4. Cada una de las obras realizadas está compuesta de dos piezas: la primera, es el propio cuadrado con las trazas dibujadas; y la segunda, es el polígono construido a partir de las piezas obtenidas del cuadrado.

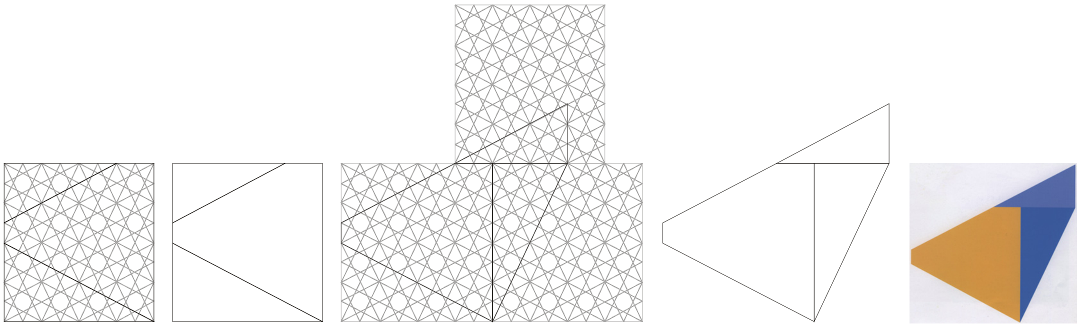
5. El último paso consiste en elegir la estructura cromática que se va a utilizar en cada obra.

El proceso esquemático constructivo para generar la obra HEM 260 da es el siguiente:



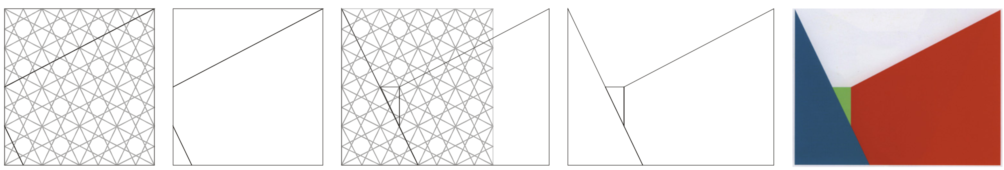
HEM 260 da

Para construir la obra HEM 245 Db se sigue el siguiente proceso:



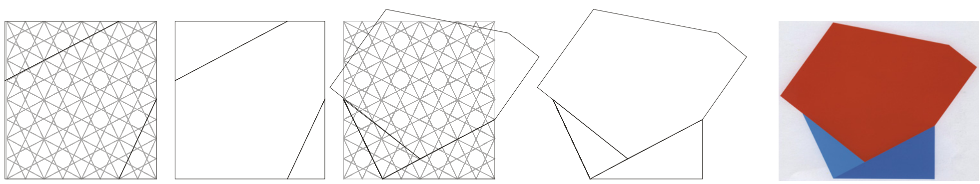
HEM 245 Db

La elaboración de la obra HEM 273 Db se realiza según el siguiente sistema:



HEM 273 Db

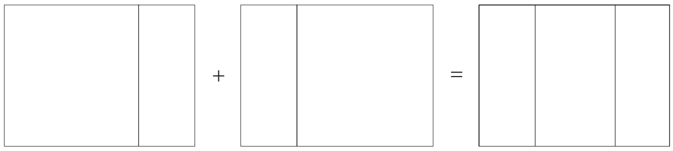
Finalmente, el proceso constructivo de la obra HEM 266 Da se realiza según el siguiente sistema:



HEM 266 Da

3. Serie Raízdedos Fragmentado

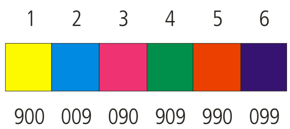
La serie *Raízdedos Fragmentado,* realizada en 1996, está formada por una serie de obras que son variaciones estructurales de un rectángulo raíz de dos. Para generar las obras se utiliza una plantilla básica, formada por la superposición de dos estructuras raíz de dos, verticalmente, simétricas.



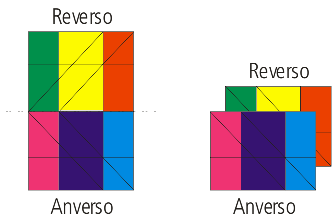
Para realizar estas obras se sigue el siguiente proceso de trabajo:

1. Sobre un rectángulo raíz de dos al que se le ha aplicado la estructura raíz de dos descrita anteriormente, se dibujan una serie de trazas siguiendo las líneas estructurales de la retícula, de forma que el rectángulo quede dividido en dos o tres partes diferentes.

2. Se establece la siguiente estructura cromática: todas las piezas de esta serie utilizan los seis colores básicos: los tres colores primarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta, cyan; y los tres secundarios: rojo, verde y azul-violeta, con los siguientes códigos de Hickethier:



   Para aplicar el color sobre cada una de las obras realizadas se sigue el siguiente principio: toda composición está formada cromáticamente por dos caras: un anverso y un reverso. Cada una de estas caras está dividida en tres bandas iguales de forma que en una de las caras, por el ejemplo el anverso, se eligen tres de los seis colores básicos y se aplican sobre cada una de las bandas según el orden elegido por el autor. En el reverso, y en cada una de las bandas correspondientes, se aplican los colores complementarios de aquellos que ocupan la misma posición en el anverso.

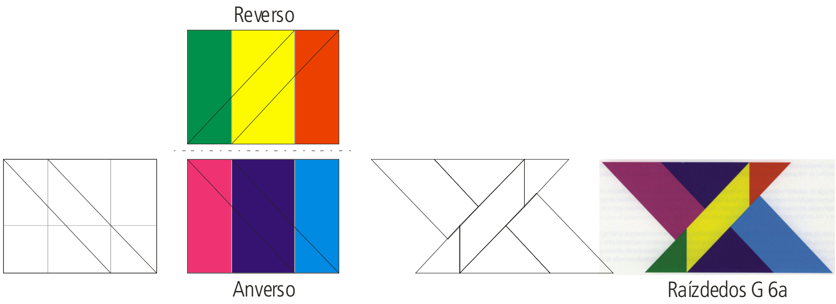


3. Se descompone el rectángulo en piezas cromáticas realizando cortes por el lugar donde se han dibujado las trazas.

4. Con las piezas obtenidas se realiza una nueva composición según el siguiente criterio: las piezas se pueden utilizar con los colores de su anverso o su reverso, según convenga.

5. Cada una de las obras obtenidas está formada por una serie de piezas que se recortan y ensamblan y forman un contorno específico.

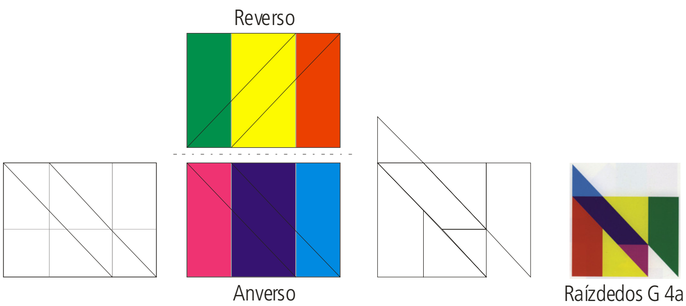
Para construir la obra Raízdedos G 6a se realiza el siguiente proceso:



Raízdedos G 6a

Se realizan dos trazas sobre la estructura raízdedos de manera que se obtienen tres piezas diferentes. Al realizar los cortes de las piezas, para realizar la pieza definitiva se utilizan dos piezas por su anverso y una por su reverso.

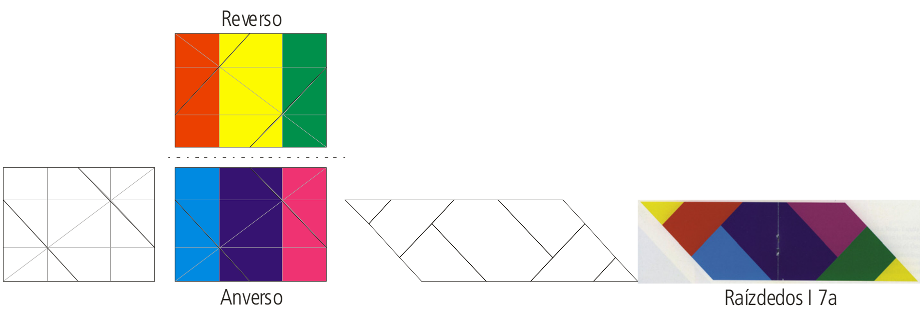
Para construir la obra Raízdedos G 4a se realiza el siguiente proceso:



Raízdedos G 4a

En este caso se realizan, también, dos cortes y por lo tanto se obtienen tres piezas. Al componer las piezas recortadas, se utilizan una por su anverso y dos por su reverso.

La siguiente obra, Raízdedos I 7a, se realiza según el siguiente sistema:



Raízdedos I 7a

En esta obra se han realizado dos trazas sobre el soporte raíz de, que han generado tres piezas. Al cortarlas, para realizar la composición final se han utilizado dos piezas con los colores del reverso del soporte y una, con los colores del anverso.

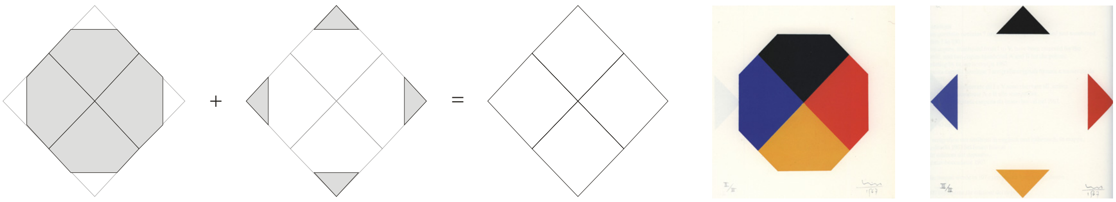
7.4.4.- MAX BILL

1. 7 scarions, 1967[16]

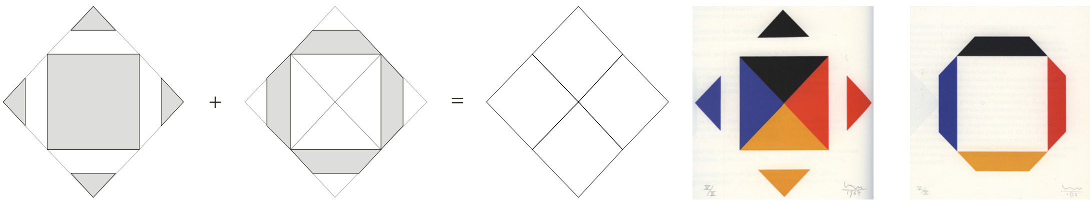
En esta obra de Max Bill, se realizan 7 variaciones de un mismo tema: un cuadrado dividido en cuatro partes iguales al trazar sus medianas y dispuesto a 45º, es decir, apoyado sobre uno de sus vértices. Este cuadrado se encuentra coloreado con los siguientes colores: negro, amarillo, rojo y azul. Estas siete variaciones se organizan de la siguiente manera: una de forma independiente, y el resto por parejas de dos composiciones complementarias.

La primera variación, presenta el cuadrado en su totalidad:

La segunda y la tercera variación se obtienen al trazar en los cuatro vértices del cuadrado base dispuesto a 45º, una línea que va del punto medio de uno de los lados, de uno de los cuatro cuadrados que forman el cuadrado base, al punto medio de un lado contiguo. Una de las obras estará formada por los cuatro triángulos isósceles que se obtienen al realizar este trazado y la otra por el octógono que se genera en el interior del cuadrado.

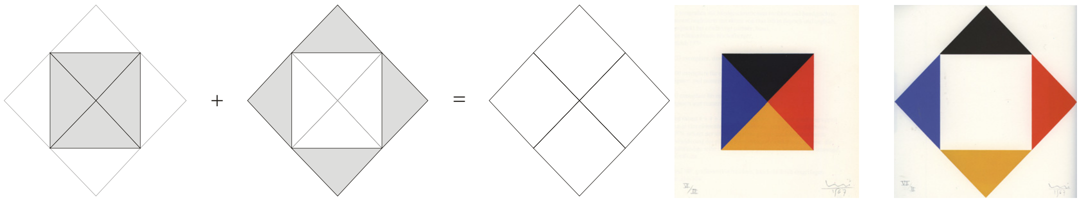


Las variaciones cuarta y quinta, añaden cuatro trazos más a los obtenidos en las variaciones anteriores: cuatro líneas que van del punto medio de un lado del cuadrado grande al punto medio del lado contiguo. A partir de este trazado, se generan dos interpretaciones. En una se representa el espacio entre líneas que surge al hacer el trazado; y en la otra, se representa todo el cuadro excepto la línea representada anteriormente.



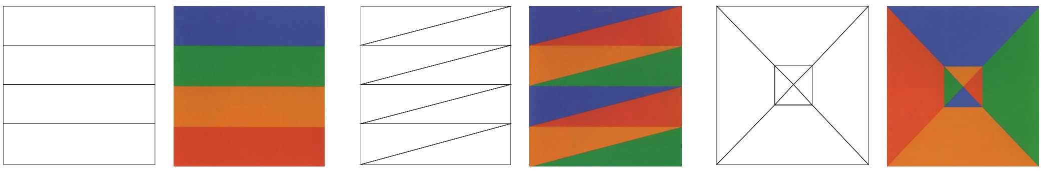
Finalmente, las variaciones sexta y séptima, se obtienen al dibujar, sobre el cuadrado inicial, un cuadrado interno que va del punto medio de un lado del cuadrado grande al punto medio del lado contiguo. Las nuevas variaciones están representadas por el cuadrado inscrito o por los tres triángulos isósceles que surgen para, con el cuadrado inscrito, completar el cuadrado base.

[16] 7 scarions.

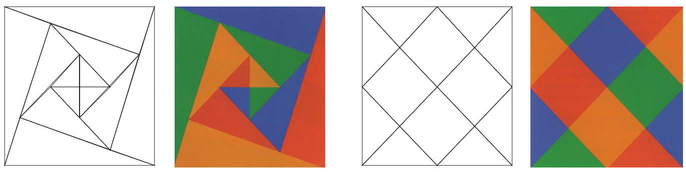


2. Cinco cuadrados con la misma cantidad de superficie, 1972[17]

Esta obra es un muestrario de cómo dividir un cuadrado en un número determinado de partes de forma que, dándoles color se puedan obtener, en cada uno de ellos, cuatro partes con la misma cantidad de superficie:

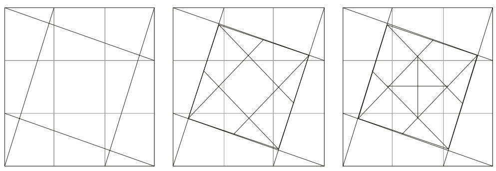


A B C



D E

Deducir la igualdad de superficie en los métodos A, B, C y E, es visualmente sencillo. En D, el proceso es algo más complicado. El proceso consiste en dividir la superficie del cuadrado, tres veces, y de una forma sucesiva, en cuatro partes iguales.



En la primera partición, se considera al cuadrado como una superficie dividida en 3 x 3 = 9 cuadrados. Sobre esta superficie se recortan 4 triángulos rectángulos iguales según el siguiente procedimiento: los catetos de cada uno de los triángulos rectángulos coinciden con dos lados contiguos del cuadrado, es decir, el ángulo rectángulo de cada uno de los triángulos dibujados coincide con cada uno de los 4 vértices del cuadrado. La relación entre los lados de los triángulos trazados es 1:3. Al realizar este trazado se obtiene un cuadrado inscrito en el centro del cuadrado.

En una segunda partición, se vuelven a recortar 4 triángulos rectángulos iguales al cuadrado inscrito anterior. Para ello, se trazan líneas que vayan desde cada uno de los vértices del cuadrado a los puntos medios de uno de los lados no adyacentes al vértice. El resultado que se obtiene de esta repartición, es un nuevo cuadrado inscrito situado en el centro del cuadrado base y girado 45º.

[17] Fünf quantengleiche quadrate, 1972.

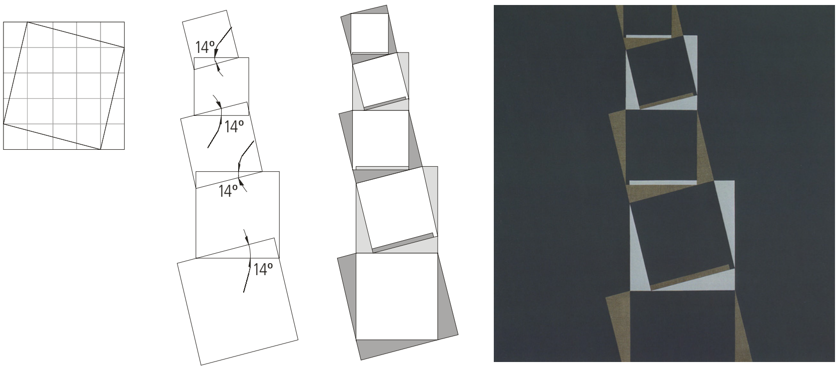
Si a este último cuadrado obtenido se le trazan sus diagonales, se obtienen 4 triángulos isósceles iguales. Sumando cada una de las superficies que se han ido obteniendo en las particiones anteriores, se obtienen 4 grupos de tres elementos iguales cada uno: dos triángulos rectángulos diferentes y un triángulo isósceles.

7.4.5.- TIBOR GAYOR

1. Q Torsión, 2001[18]

Este trabajo de Tibor Gayor parte de un módulo cuadrado base de 5 x 5 = 25 cuadrados, al que se le ha dibujado un cuadrado interno según el siguiente criterio: sobre cada lado del cuadrado se dibuja un triángulo rectángulo de lado mayor 4 y lado menor 1 y teniendo en cuenta que el vértice de ángulo 90º de cada uno de los triángulos rectángulos trazados, coincide con cada uno de los vértices del cuadrado base. El proyecto consiste en recortar una superficie cuadrada sólida; girarla 14º con respecto a una línea base horizontal; e inscribirla un cuadrado según el procedimiento antes descrito. Recortar tres lados contiguos del cuadrado inscrito y teniendo como eje el otro lado del cuadrado, el cuarto, abatir la superficie cuadrada hallada 180º. Sobre este nuevo cuadrado sólido se vuelve a aplicar el procedimiento anterior de modo que se obtenga un nuevo cuadrado sólido inscrito y abatido con respecto a un lado del cuadrado anterior otros 180º. Este procediendo se puede aplicar tantas veces como se desee.

Es importante destacar el juego cromático que se produce en la obra al considerar la superficie de trabajo como una superficie con dos caras: anverso y reverso, y aplicarle a cada una de ellas un color diferente. Al realizar los cortes y los plegados en la superficie, se produce un ritmo cromático entre los dos tonos elegidos muy interesante.

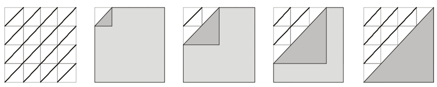


2. Q 4/4 D-1, 1976

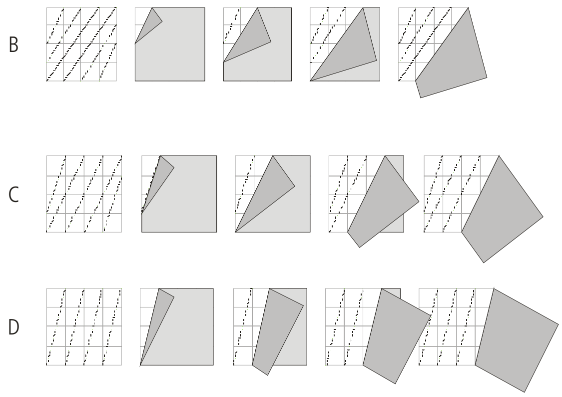
Las cuatro series que forman parte de esta obra tienen el mismo punto de partida: un cuadrado dividido en 4 x 4 = 16 cuadrados. El sistema generado por Gayor consiste en realizar las siguientes operaciones:

Partiendo de una estructura ortogonal cuadrada de en 4 x 4 = 16 cuadrados, se realizan las siguientes trazas sobre la estructura:

A



[18] Q Torsion, 2001.



En A, se realizan trazas regulares a 45º, distanciadas una unidad de módulo. La proporción entre los lados, menor y mayor de los triángulos que generan estos trazos es de 1:1.

En B, las trazas que se realizan para obtener el primer triángulo doblado, tienen como medida, una unidad o 1 de base y 2 de longitud.

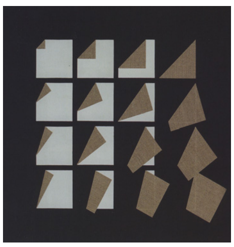
En C, la proporción entre los lados del triángulo que se utiliza para hacer el primer pliegue es la siguiente: una unidad o 1 de base y 3 unidades de longitud.

En D, la proporción entre los lados del triángulo que se utiliza para hacer el primer pliegue es la siguiente: una unidad o 1 de base y 4 de longitud.

El resto de las trazas que se realizan en la obra, son líneas paralelas a las líneas realizadas anteriormente.

El proyecto consiste en ir doblando progresivamente, y en cinco pasos, las superficies cuadradas iniciales de cada una de las estructuras descritas anteriormente, A, B, C, o D.

La obra está representada en la siguiente imagen:



8.- POLIOMINÓS

El nombre de poliominós se debe al matemático norteamericano Salomon W. Golomb quién generó la idea hacia 1954. Los poliominós son un tipo de juegos, un tipo de rompecabezas, que contienen una gran carga matemática y que son capaces de plantear una gran variedad de problemas. Entre todos los posibles, aquí se va a tratar de uno específico: el recubrimiento de superficies.

8.1.- DEFINICIONES

Los poliominós son polígonos construidos a base de adosar cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. Desde un punto de vista formal, son un conjunto de cuadrados conectados entre sí por uno de sus lados de tal modo que no queden huecos en el interior de la estructura resultante.

Desde un punto de vista geométrico, una pieza compuesta de dos cuadrados se llama dominó; la que resulta de la unión de tres cuadrados, triminó; de la unión de cuatro, tetraminós; y así sucesivamente.

8.1.1.- La cuadratura de los poliominós

Se puede cuadrar o completar una superficie de cuadrados con todo tipo de poliominós de orden n en una matriz de lado m, en la que hay m^2 cuadrados, si el número de celdas o módulos cuadrados de la matriz es un múltiplo de n:

$$\boxed{m^2 = k\,n}$$

n	$m^2 = k\,n$
2	2^2 4^2 6^2 8^2 10^2 12^2
3	3^2 6^2 9^2 12^2 15^2 18^2
4	4^2 8^2 12^2 16^2 20^2 24^2
5	5^2 10^2 15^2 20^2 25^2 30^2
6	6^2 12^2 18^2 24^2 30^2 36^2

Para m = 12, se utiliza una matriz de 12 x 12 = 144 cuadrados. Esta matriz se puede completar con poliominós de orden n = 2, 3, 4 y 6.

Esta cuadratura se puede hacer, en el mismo orden n, con piezas idénticas, o con piezas diferentes, en su totalidad o parcialmente.

En general se puede decir que una primera condición para recubrir una superficie con poliominós es que el número de casillas hábiles de la superficie sea múltiplo del número de cuadrados que tiene el poliominó en su composición.

8.2.- TIPOS Y CONSTRUCCIONES

Los poliominós se diferencian entre sí por el número de cuadrados que les caracteriza:

Monominó	n	=	1
Dominó	n	=	2
Triminó	n	=	3
Tetraminó	n	=	4
Pentaminó	n	=	5
Hexaminó	n	=	6
Heptaminó	n	=	7

Con un mismo número de cuadrados se pueden formar un cierto número de poliominós diferentes. Estos poliominós se identifican con las letras mayúsculas, I, L, T, U, O,…, que hacen referencia a su forma y sirven para diferenciarlos entre sí.

El problema de llenar una superficie, rectangular o cuadrada, sin agujeros o casillas libres o desocupadas, consiste en buscar cómo llenar con el menor número posible de poliominós iguales, la superficie. Este número cuando existe, ya que la solución a este problema no siempre es posible, se denomina orden m del poliominó considerado o también orden rectangular. Se dice, en estos casos, que el poliominó es capaz de llenar la superficie con m poliominós iguales.

Para determinar el orden de un poliominó se necesita realizar dos operaciones:

1. Encontrar la manera de llenar el rectángulo elegido con los m elementos del poliominó considerado.
2. Probar que la superficie elegida, es imposible de llenar con poliominós de números enteros inferiores a m.

Estos dos problemas son difíciles de resolver porque no hay método.

La tabla siguiente, descrita por René Descombes,[1] resume todas estas características:

	n	Número de n-ominós diferentes	Número n-ominó rectangulables	Tipos	Orden m
Monominó	1	1	1	I	1
Dominó	2	1	1	I	1
Triminó	3	2	2	I L	1 2
Tetraminós	4	5	4	I, O L, T	1 2 4
Pentaminós	5	12	4	J L, P Y	1 2 10

[1] René Descombes, *Les Carrés Magiques: Histoire, Théorie et Technique du Carré Magique, de l'Antiquité aux Recherches, Vuibert*, París, 2000, p. 82.

				I, O	1
				L P, F, U, W	2
Hexaminós	6	35	10	T	4
				K	18
				Y	92
Heptaminós	7	108		L	28
				Y	78

Hay que añadir, además, que sólo se considerarán poliominós distintos a aquellos que no se pueden obtener a partir de otro dado con una simple función de rotación o de inversión/reflexión.

8.2.1.- Monominós

El poliominó más pequeño posible es el cuadrado aislado, o monominó. Se puede rellenar una superficie de cualquier dimensión y formato cuadrado o rectangular, sin agujeros, o casillas libres o desocupadas, con cuadrados iguales.

Rellenar una matriz cuadrada con cuadrados de diferentes tamaños de lado, es más difícil. No se conoce más que un número limitado de matrices cuadradas que se pueden completar con todos sus cuadrados diferentes. A este tipo de cuadrados se les llama cuadrados perfectos.

En la página web http://www.squaring.net/, se encuentra una recopilación, clasificación y archivo de un gran número de cuadrados perfectos. Aquí se van a mostrar algunos de ellos. En la siguiente tabla se muestra un resumen, no completo, de algunos cuadrados perfectos: donde el orden está determinado por el número de cuadrados diferentes que se necesitan para realizar un cuadrado perfecto, y se indica, además, el número de cuadrados perfectos que se pueden realizar con ese número determinado de cuadrados diferentes específico:

Orden	21	22	23	24	25	26	28	38	69
Nº cuadrados perfectos	1	8	12	26	160	441	2	1	1

De todos ellos, aquí se van a mostrar los siguientes cuadrados perfectos:

112	x	112	,	con 21 cuadrados diferentes
175	x	175	,	con 24 cuadrados diferentes
630	x	630	,	con 26 cuadrados diferentes
1.015	x	1.015	,	con 28 cuadrados diferentes
4.920	x	4.920	,	con 38 cuadrados diferentes

Lo óptimo sería encontrar una superficie construida por una serie de cuadrados diferentes cuyos lados sigan una ley de formación definida: progresión aritmética o geométrica. René Descombes en su libro *Les Carrés Magiques*,[2] muestra un cierto número de relaciones, que siguen una cierta ley de formación, en las que un cuadrado es igual a la suma de muchos cuadrados. Por ejemplo:

$29^2 = 3^2 + 16^2 + 24^2$

[2] René Descombes, *op. cit.,* París, 2000, p. 74.

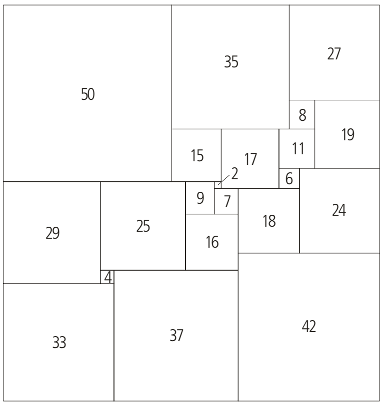
$70^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 23^2 + 24^2$
$195^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 + \ldots + 49^2 + 50^2$

Algunos ejemplos de los cuadrados perfectos indicados anteriormente son los siguientes:

1. n = 112

Para este cuadrado de 112 x 112, se necesitan 21 cuadrados diferentes para completar su superficie sin agujeros ni huecos libres o desocupadas. Los cuadrados que se utilizan para configurar el cuadrado son:

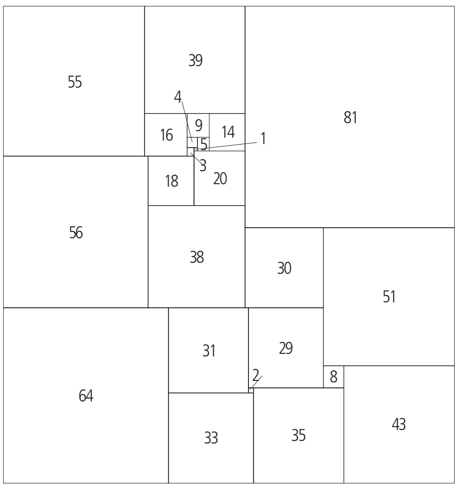
2 4 6 7 8 9 11 15 16 17 18 19 24 25 27 29 33 35 37 42 50



2. n = 175

El cuadrado perfecto de 175 x 175, está formado por 24 cuadrados diferentes. Los cuadrados que utiliza para formar el cuadrado perfecto son los siguientes:

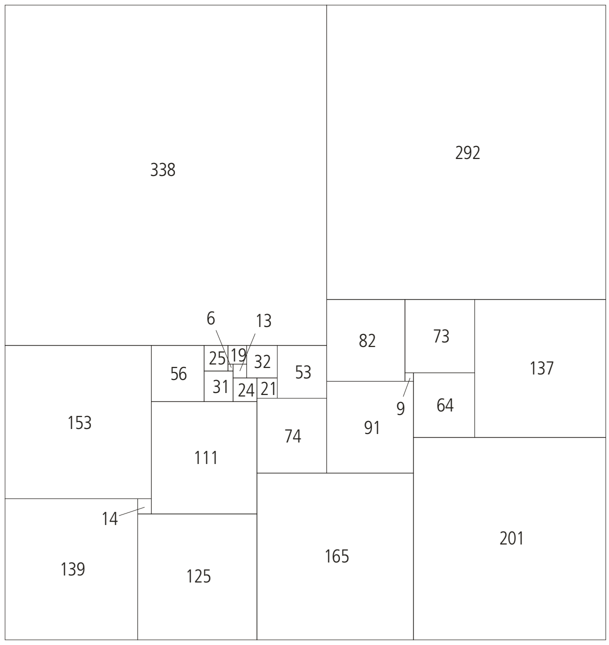
1 2 3 4 5 8 9 14 16 18 20 29 30 31 33 35 38 39 43 51 55 56 64 81



3. n = 630

El cuadrado perfecto de 630 x 630, está formado por 26 cuadrados diferentes, con las siguientes proporciones:

6	9	13	14	19	21	24	25	31	32	53	56	64
73	74	82	91	111	125	137	139	153	165	201	292	338



4. n = 1015

El cuadrado perfecto de 1015 x 1015, está formado por 28 cuadrados diferentes y se puede obtener de dos maneras:

Con el primer método se utilizan los siguientes cuadrados:

13	16	17	23	30	43	47	84	92	93	119	120	142	163
165	167	177	183	188	199	215	219	261	270	280	363	372	382

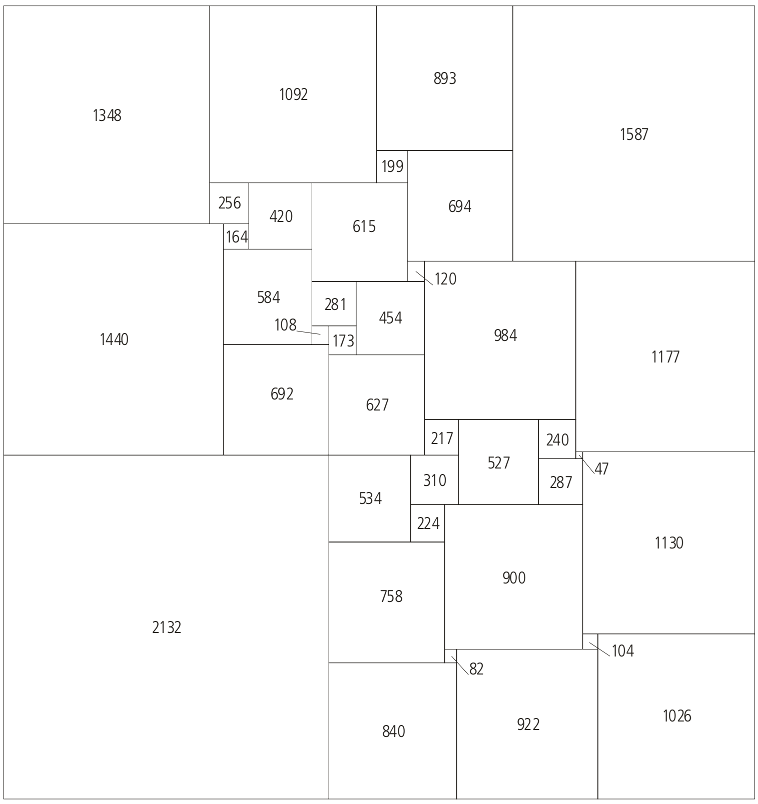
Con el segundo, los cuadrados necesarios para formar el cuadrado perfecto son los siguientes:

2	18	22	37	38	39	41	43	49	67	72	80	85	103
116	154	164	175	178	192	200	207	215	222	230	247	422	593

5. n = 4920

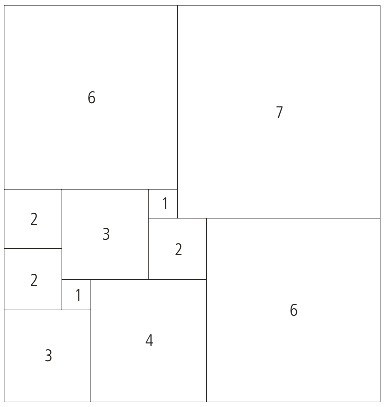
El cuadrado perfecto de 4920 x 4920, está formado por 38 cuadrados diferentes y se puede realizar con los siguientes cuadrados:

47	82	104	108	120	164	173	199	217	224	240	256	281	287	310	420	454	527	534
584	615	627	692	694	758	840	893	900	922	984	1026	1092	1130	1177	1348	1440	1586	2132



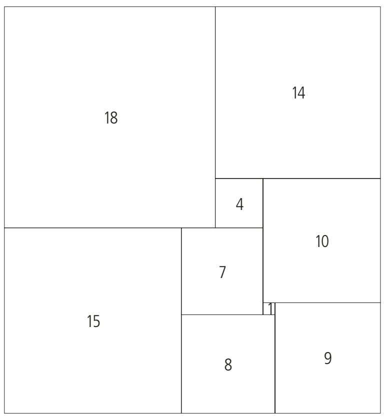
También es posible la construcción de cuadrados semi-perfectos, en los que las matrices admiten, además de los cuadrados diferentes que las definen, una serie de cuadrados unitarios simples, dobles, triples,… en su composición que se utilizan para rellenar los espacios vacíos que se generan en su realización. En un cuadrado semi-perfecto, además, se pueden repetir algunos de los cuadrados característicos. El cuadrado semi-perfecto[3] más simple es una matriz de 13 x 13 cuadrados que se puede dividir en 11 cuadrados más pequeños según la siguiente relación: 2 cuadrados de un cuadrado simple, 2x1; 3 cuadrados de 2x2 cuadrados; 2 cuadrados de 3x3 cuadrados; 1 cuadrado de 4x4 cuadrados; 2 cuadrados de 6x6 cuadrados; 1 cuadrado de 7x7 cuadrados.

2 x 1　　3 x 2　　2 x 3　　1 x 4　　2 x 6　　1 x 7



Existen también los rectángulos perfectos que están también formados por un número determinado de cuadrados que completan la superficie sin dejar ningún hueco o agujero libre. La solución más sencilla se crea con un rectángulo de 32 x 33, que está compuesto de 9 cuadrados cuyos lados tienen los siguientes valores:

1　4　7　8　9　10　14　15　18



El rectángulo de 61 x 69 se puede formar, también, a partir de 9 cuadrados diferentes de valores:

2　5　7　9　16　25　28　33　36

Existe otro rectángulo, el rectángulo de Brooks, de 75 x 112, compuesto por los 13 cuadrados siguientes:

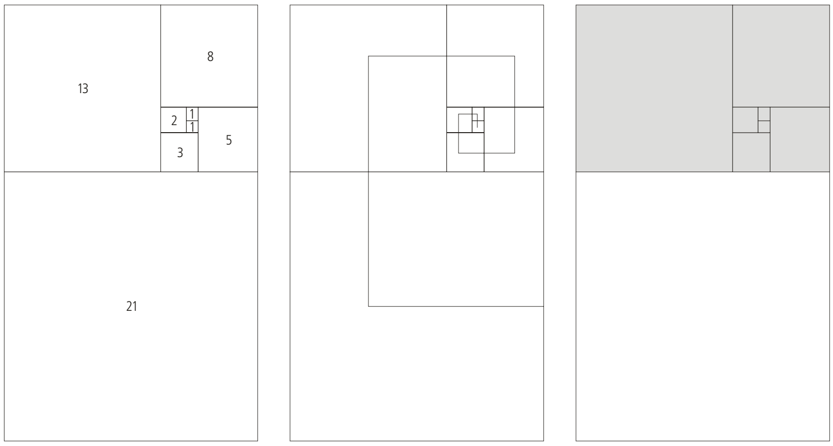
3 René Descombes, *op. cit.,* Vuibert, París, 2000, p. 77.

3 5 9 11 14 19 20 24 31 33 36 39 42

Un rectángulo particular es el rectángulo PHI o rectángulo de oro que se puede formar por 8 elementos de la serie de Fibonacci, creando una configuración de cuadrados decrecientes en espiral:

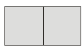
1 1 2 3 5 8 13 21

Este conjunto de cuadrados permite llenar el rectángulo áureo con un conjunto de cuadrados diferentes que forman, a su vez, rectángulos áureos.



8.2.3.- Dominós

Un dominó es un rectángulo de 1 x 2 cuadrados. Sólo existe un tipo de dominó:

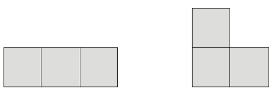


Forma I

Con los dominós se puede llenar toda superficie cuadrada de número par de cuadrados, por lado.

8.2.4.- Triminós

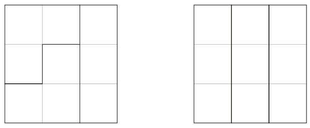
Sólo hay dos tipos de triminós: en forma de I y en forma de L.



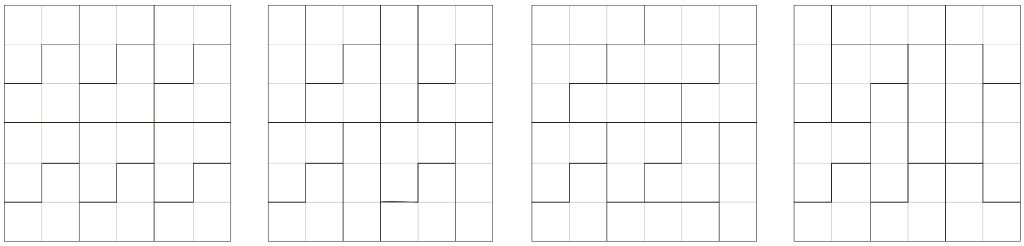
Forma I Forma L

Con el triminó en forma de I se pueden llenar superficies cuadradas cuyo número de orden n, sea divisible por 3, ya que los triminós cubren superficies de 3 unidades de cuadrado.

Con el objeto de practicar y ver la dificultad que entraña completar una superficie sin huecos o agujeros libres, se muestran algunos ejemplos de cuadraturas de triminós: para m = 3, hay dos soluciones; para m = 6, hay numerosas soluciones:



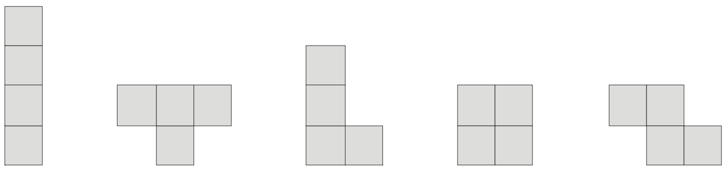
m = 3



m = 6

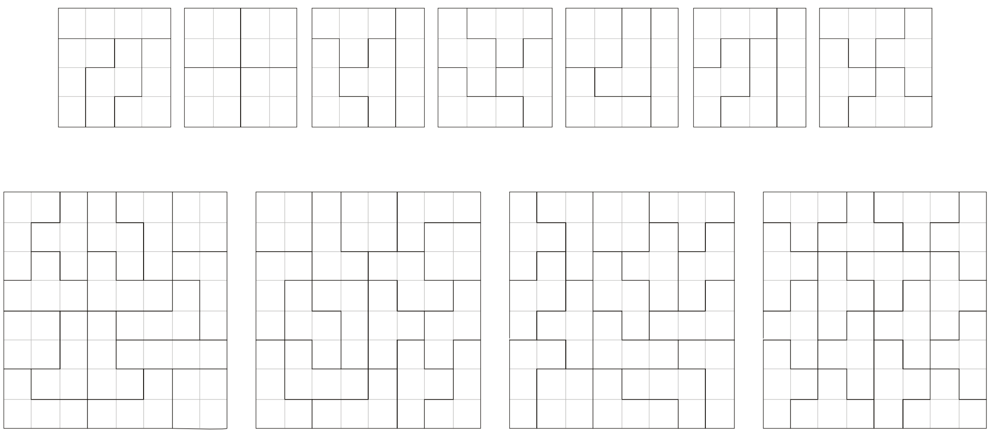
8.2.5.- Tetraminós

Hay 5 tipos de tetraminós:



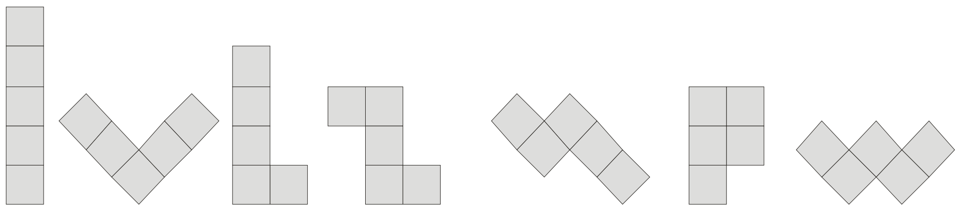
Forma T Forma T Forma L Forma O Forma Z

A continuación se muestran algunos ejemplos de cuadratura de tetraminós para m = 4 y para m = 8:

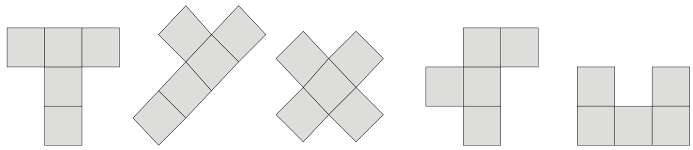


8.2.6.- Pentaminós

Golomb definió 12 tipos de pentaminós posibles y los bautizó con los siguientes nombres mnemotécnicos:



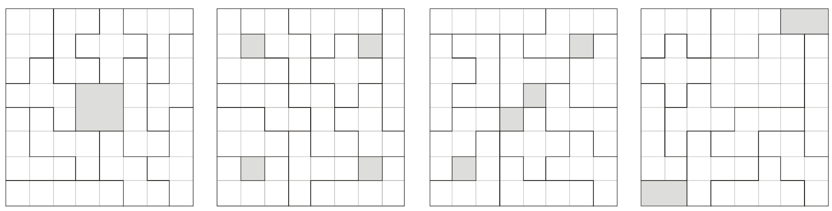
Forma I Forma V Forma L Forma Z Forma N Forma P Forma W



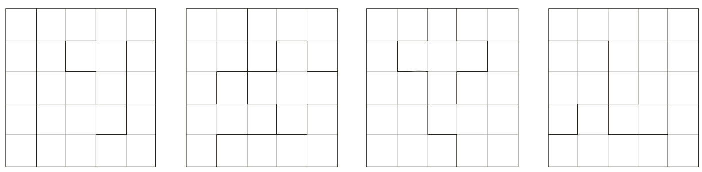
Forma T Forma Y Forma X Forma F Forma U

La superficie total de los 12 pentaminós diferentes es 12 x 5 = 60. Con esta cantidad no se puede crear un cuadrado y por lo tanto, no es posible crear una superficie completa con los 12 pentaminós juntos.

Si se admiten agujeros o huecos, en una matriz de 8 x 8 = 64 cuadrados, se pueden situar los 12 pentaminós, y quedan 4 cuadrados sin ocupar:

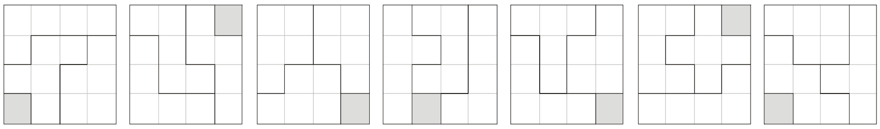


En teoría, con los pentaminós se pueden estructurar todas las matrices de lado múltiplo de 5, siendo $5^2 = 25$ la matriz más pequeña. Lo mejor es utilizar 5 pentaminós diferentes en cada una de las matrices:

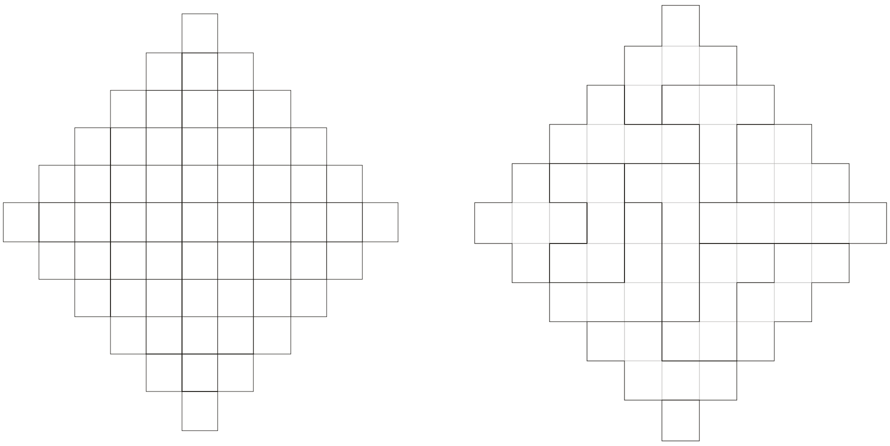


Si se admiten huecos o casillas desocupadas, se pueden, en principio, llenar con pentaminós todas las matrices cuadradas o rectangulares.

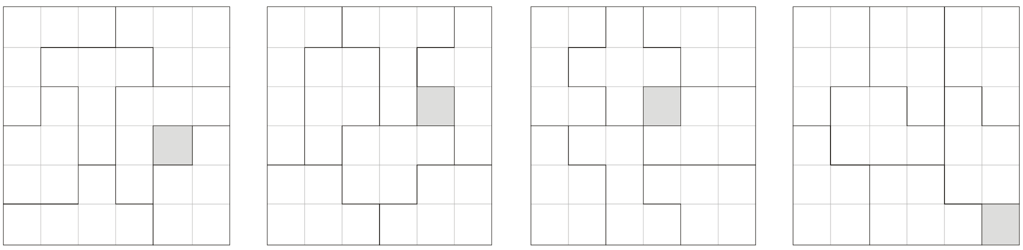
Por ejemplo, para m = 4, una matriz de 4 x 4 =16 cuadrados, se puede rellenar la superficie dejando un agujero en cada una de ellas:



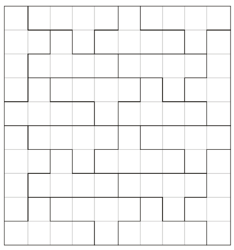
Si se toma la siguiente estructura cuadrada, de lado 6, que cuenta con 61 cuadrados. Se pueden utilizar los 12 pentaminós, dejando solamente una casilla vacía:



Los siguientes ejemplos corresponden a una matriz de 6 x 6 = 36 cuadrados. Si se utilizan 7 pentaminós para llenar la superficie, queda un cuadrado vacío, 7 x 5 = 35. En este caso, hay muchas soluciones:

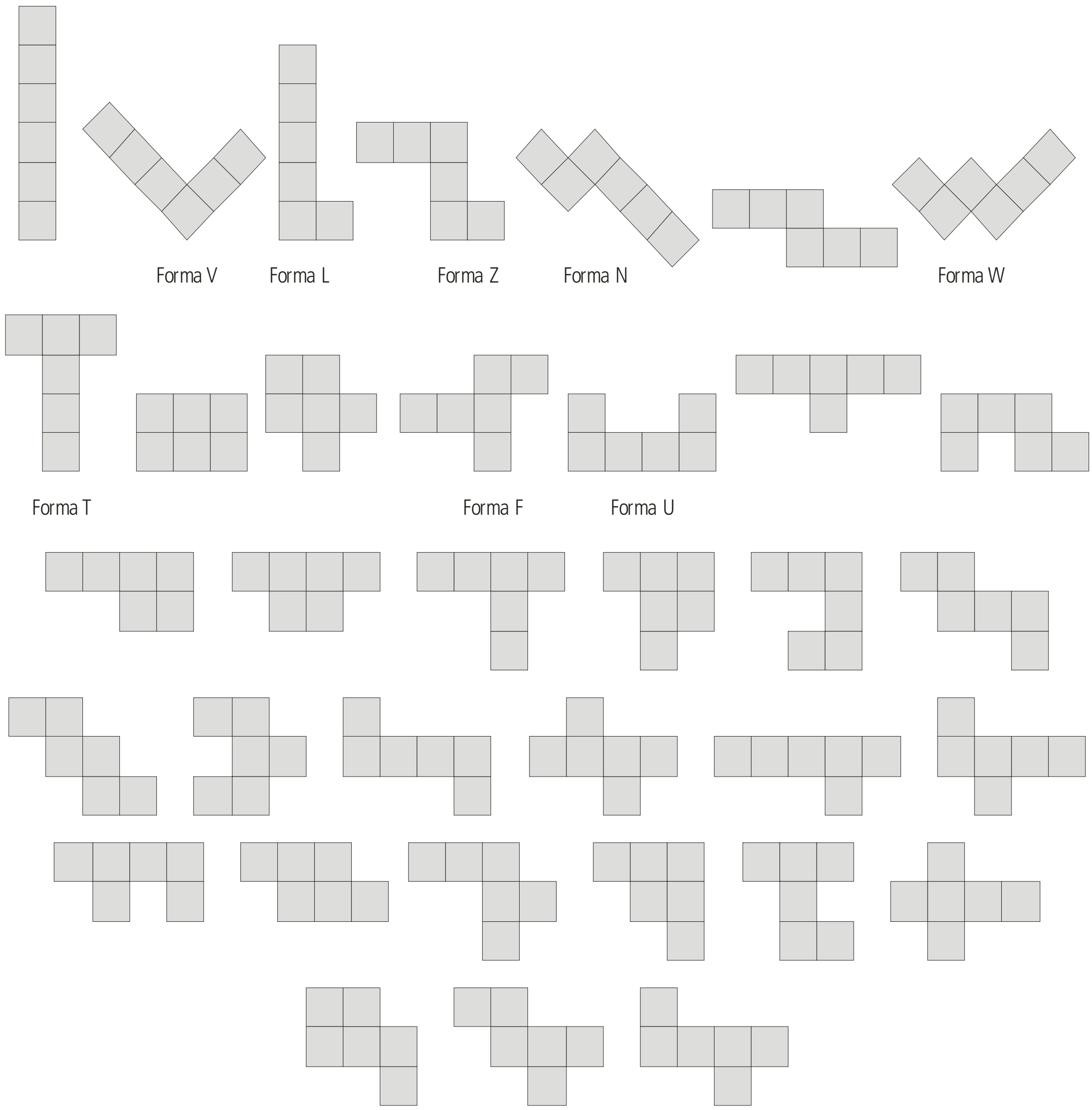


A continuación se muestra una matriz de 10 x 10 = 100 cuadrados. Se trata de una superficie compuesta por dos matrices rectangulares de 10 x 5 = 50 cuadrados y de 10 pentamimós iguales en forma de Y.



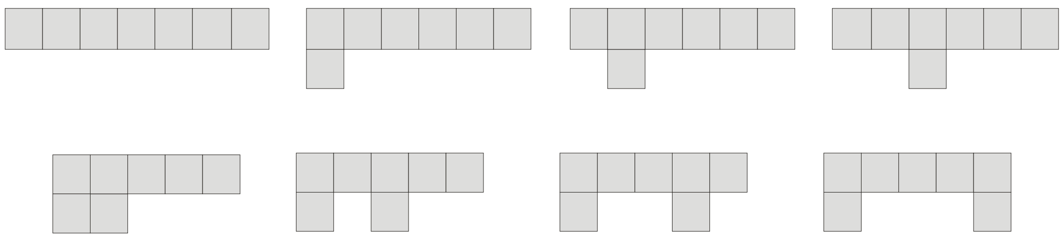
8.2.6.- Hexaminós

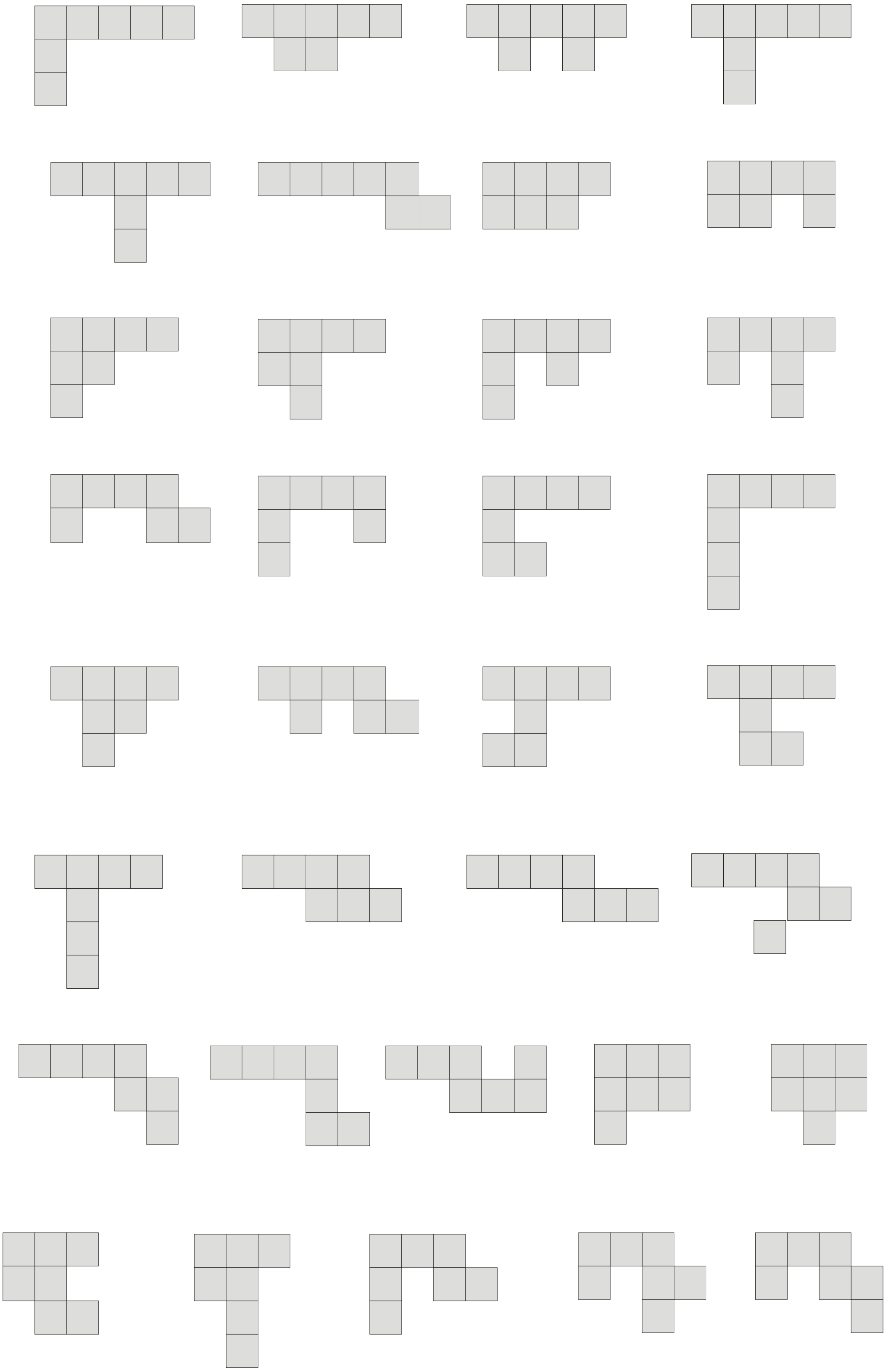
Hay 35 maneras de crear hexaminós:

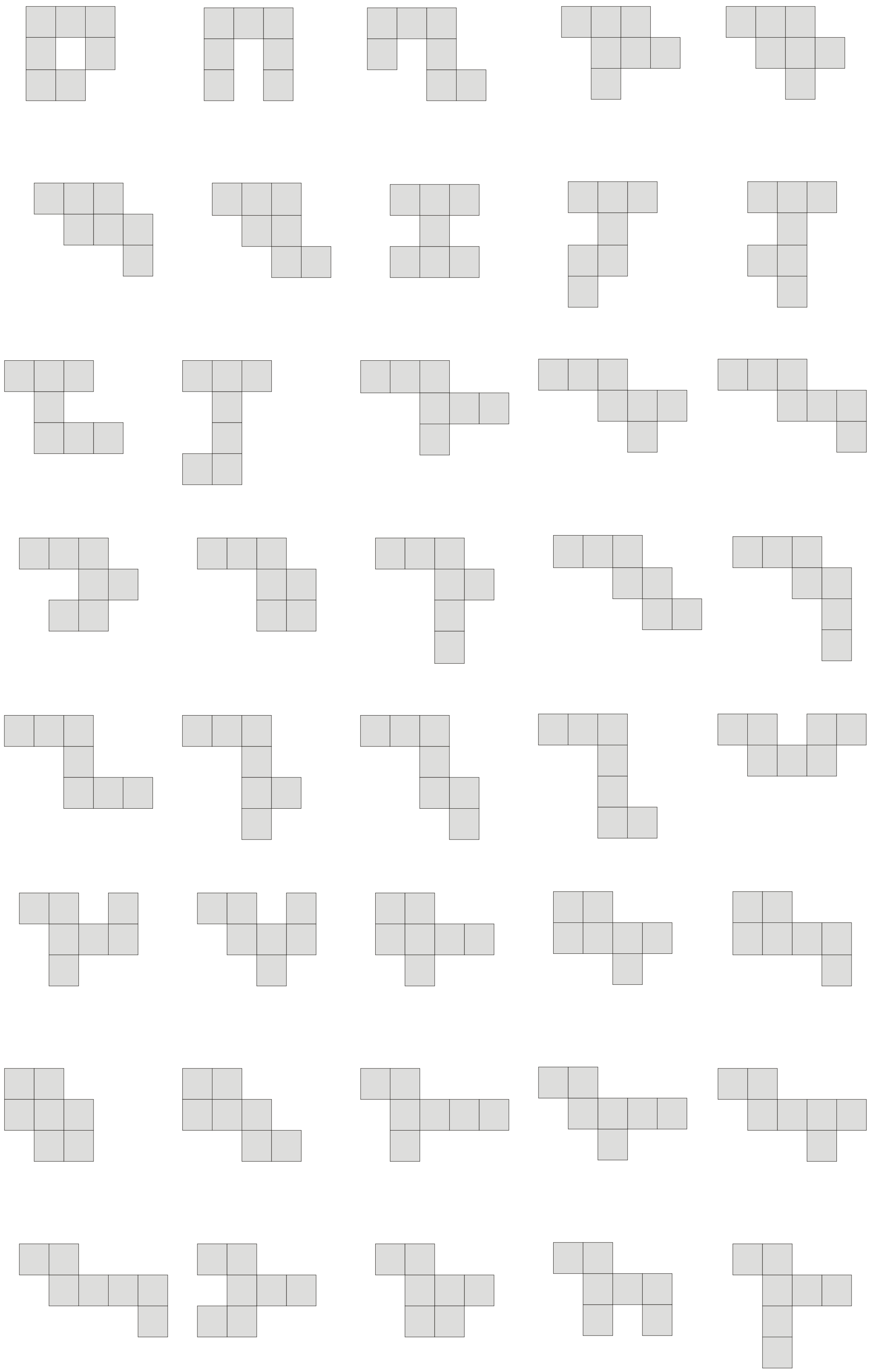


8.2.7.- Heptaminós

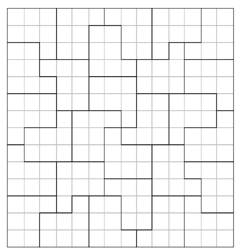
Hay 108 heptominós. De todos estos hay uno que tiene un agujero en su centro. Los otros 107 no tienen agujero.







Dada una matriz de 14 x 14 = 196 cuadrados, se puede llenar con 28 heptaminós del mismo tipo.

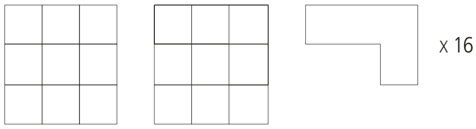


8.3.- ANÁLISIS DE OBRAS

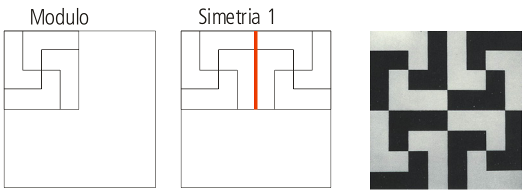
8.3.1.- FRANCOIS MORELLET

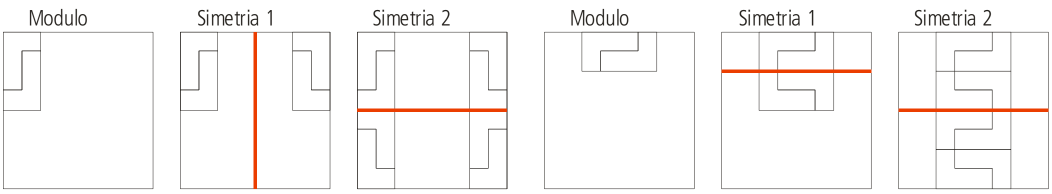
1. Distribución de 16 formas iguales del nº1 al nº 6, 1957[1]

Para completar un cuadrado con un tetraminó en forma de L, el número de cuadrados por lado del cuadrado debe ser par y múltiplo de 8: 8 x = n^2. La matriz utilizada en este caso es de 8 x 8 = 64 cuadrados. Para saber el número de tetraminós que se necesitan para completar el cuadrado, se divide 64 por el número de piezas que tiene un tetraminó, 4 y el resultado que se obtiene es de 64 : 4 = 16 piezas.



Para realizar este trabajo existen varios métodos posibles. Uno de ellos consiste en crear un módulo con 2 o 4 poliominós en forma de L y, por simetrías, ir completando la matriz cuadrada de 64 cuadrados:

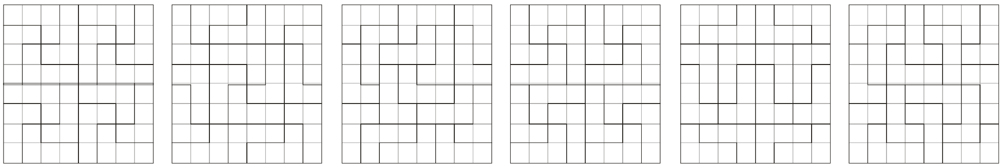




Con este procedimiento, no siempre es posible completar todo el cuadrado. Cuando no lo sea, se pueden utilizar una combinación de módulos por simetría con otros métodos, basados en el tanteo.

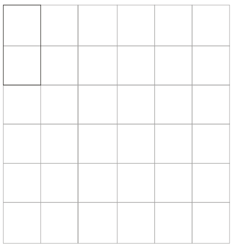
Otros procedimientos, trabajan con el sistema de prueba y error hasta conseguir completar la superficie. A continuación se muestran algunos de ellos:

[1] Distribution of 16 identical shapes nº1 to nº 6, 1957.

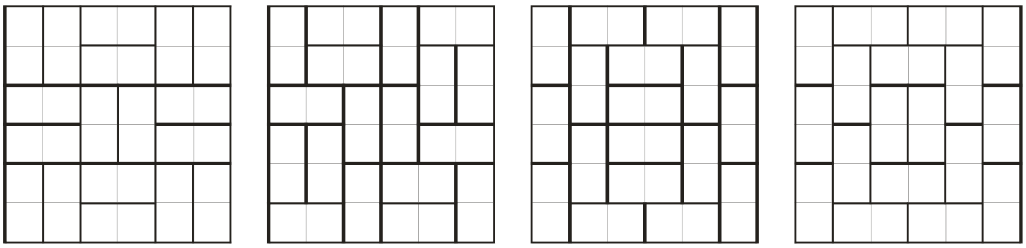


2. Estudio, 1953[2]

A partir de una matriz cuadrada de 6 x 6 =36 cuadrados, crear una pieza de dominó:

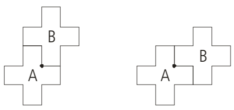


Con 18 piezas de dominó buscar diferentes formas de completar la matriz:



3. Violeta, azul, verde, amarillo, naranja, rojo, 1953[3]

El pentominó en forma de X se caracteriza porque es monomórfico, es decir, sólo existe una forma de completar el espacio sin agujeros ni superposiciones. Dado un pentominó A, se selecciona una de sus esquinas cóncavas y se marca con un punto. Para colocar la segunda pieza del pentominó en forma de X, se dan dos posibilidades. En la primera, 1, el segundo pentominó sitúa su vértice inferior izquierdo sobre el punto señalado. En la segunda, 2, el segundo pentominó sitúa el vértice inferior de su línea horizontal sobre el punto seleccionado:

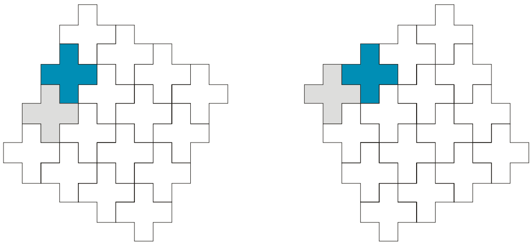


1 2

[2] Etude, 1953.

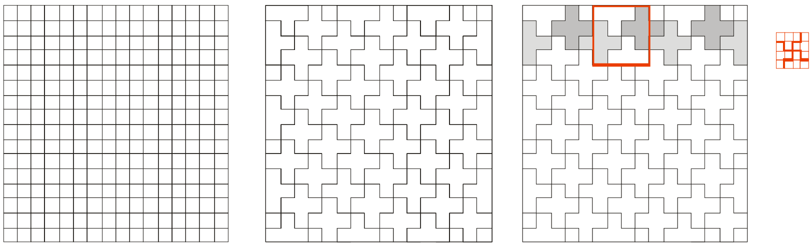
[3] Violet, blue, vert, jaune, orange, rouge, 1953.

Una vez que se ha colocado la segunda pieza del poliominó sobre el plano, y se completa la superficie por el procedimiento elegido, el resultado obtenido en los dos casos es idéntico: el resultado obtenido en 2, es simétrico del obtenido en 1, con respecto a un eje de simetría vertical u horizontal:

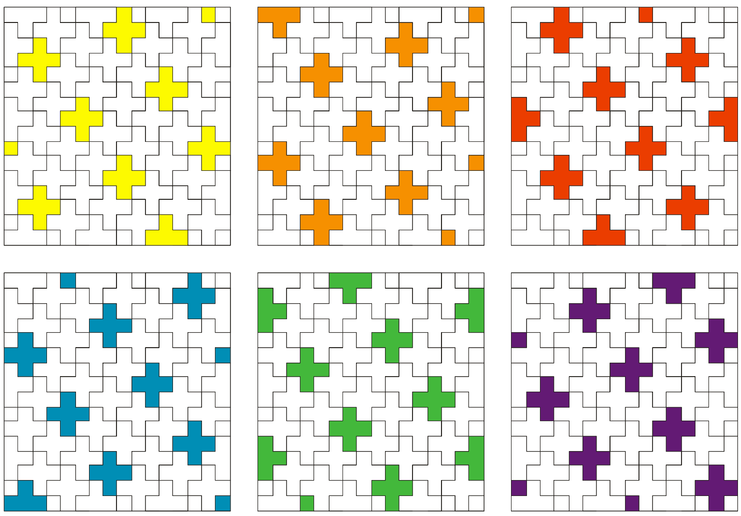


1 2

Se utiliza una matriz de 16 x 16 = 256 cuadrados. Como el pentomínó en forma de X necesita 5 unidades de cuadrado, para saber el número de poliominós completos que es capaz de soportar este cuadrado se divide 256 por 5 (256 : 5 = 51). En la obra hay 7 pentominós amarillos completos, 1 fragmentado y un resto de 1 monominó; 7 pentominós naranjas completos, 1 fragmentado y 2 monominós; 6 pentominós rojos completos, 1 fragmentado y 2 tetraminós en forma de T; 7 pentominós azules completos, 1 fragmentado y 2 monominós; 5 pentominós verdes completos, 1 fragmentado, 4 tetraminós en forma de T; 7 pentominós azul – violeta completos, 1 fragmentado, 2 monominós.



16 x 16 = 256 cuadrados



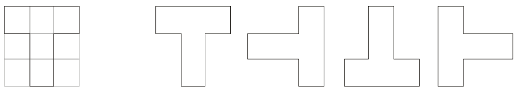
La elección de los colores se basa en el principio de que hay 6 colores básicos: 3 colores primarios y 3 colores secundarios que se pueden obtener por mezcla de los primarios. Morellet utiliza en esta obra los colores primarios de la mezcla sustractiva del pintor: amarillo, rojo y azul. Y como colores secundarios: naranja, verde y violeta. Estos 2 grupos de 3 colores cada uno se disponen alternativamente sobre líneas oblicuas paralelas.

8.3.2.- JAN KUBICEK

1. Estructura con elementos en T - Contraposición de estático y rotación, 1975[4]

Los poliominós no solo se utilizan para completar una superficie sin agujeros, sino que a veces se convierten en el protagonista de una obra, como ocurre en este caso: estructura con elemento en forma de T. Este elemento en forma de T es un pentaminó.

Si se incluye el pentaminó dentro de una matriz cuadrada de 3 x 3 = 9 cuadrados, se obtiene un módulo que puede tener las siguientes orientaciones:



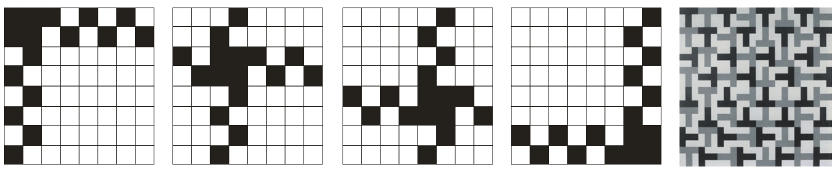
A B C D

Para completar una superficie con las variaciones de este módulo, A, B, C, D, se utiliza una matriz de 8 x 8 = 64 cuadrados. La distribución de los diferentes módulos dentro de la matriz se realiza según el siguiente orden:

A	A	A	B	A	C	A	D
A	A	B	A	C	A	D	A
B	A	B	B	B	C	B	D
A	B	B	B	C	B	D	B
C	A	C	B	C	C	C	D
A	C	B	C	C	C	D	C
D	A	D	B	D	C	D	D
A	D	B	D	C	D	D	D

De esta tabla se puede deducir que, en la obra, hay el mismo número de módulos A, B, C y D: 16. Si se estudia la frecuencia y la situación que tiene cada uno de ellos dentro de la obra, se obtienen las siguientes tablas:

A B C D



16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados

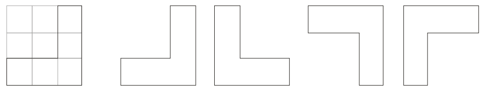
[4] Struktur mit T-Elementen-Kontraposition von Statik und Rotation, 1975.

Se puede observar que la distribución de los módulos dentro de la matriz está llena de simetrías y desplazamientos de un mismo patrón.

Como comentario final, es importante destacar la uniformidad y ritmo que se da a la obra, a pesar de las diferentes orientaciones de los módulos, por el uso alterno de dos colores: el negro y el gris.

2. Estructura con elementos en L, 1975[5]

En la misma línea que la obra anterior, en esta obra se utiliza como protagonista un pentominó en forma de L. Si se incluye este pentaminó dentro de una matriz cuadrada de 3 x 3 = 9 cuadrados, se obtiene un módulo que puede tener las siguientes orientaciones:



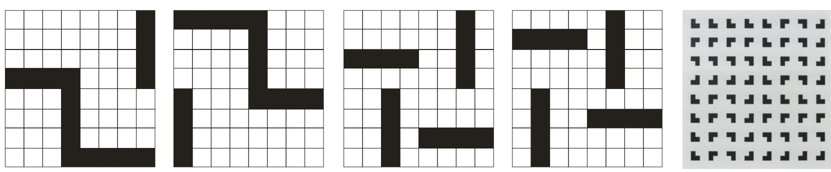
A B C D

La distribución de estos módulos: A, B, C, D, dentro de una matriz de 8 x 8 = 64 cuadrados se realiza según el siguiente orden:

B	B	B	B	B	D	C	A
D	D	D	D	B	D	C	A
C	C	C	C	B	D	C	A
A	A	A	A	B	D	C	A
B	D	C	A	B	B	B	B
B	D	C	A	D	D	D	D
B	D	C	A	C	C	C	C
B	D	C	A	A	A	A	A

De la misma forma que en la obra anterior, en ésta, hay el mismo número de módulos A, B, C y D: 16. Si se representa en una tabla la frecuencia y la situación que tienen cada uno de ellos dentro de la obra, se obtienen los siguientes gráficos:

A B C D



16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados

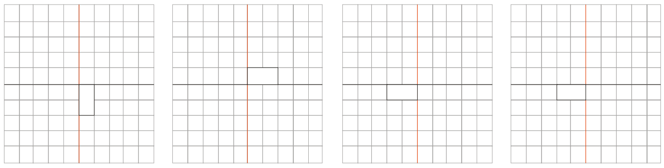
Una vez más vuelven a aparecer simetrías y rotaciones entre las diferentes ubicaciones de cada uno de los módulos.

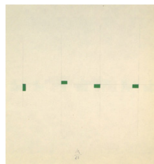
[5] Struktur mit L-Elementen, 1975.

8.3.3.- DIET SAYLER

1. Fuga verde 13, 1987[6]

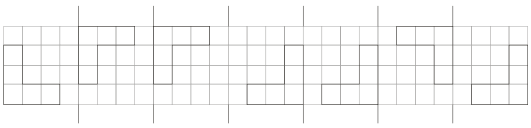
Sobre una matriz de 10 x 10 = 100 cuadrados, se trazan sus ejes verticales y horizontales y se toma como protagonista de la obra un dominó que se colorea de verde. La obra consiste en ubicar el poliominó en distintas posiciones con respecto a los ejes de cada una de las matrices, pero teniendo en cuenta que uno de sus vértices tiene que coincidir con el punto de intersección de los ejes.





2. Fuga negra 7, 1990[7]

Sobre una matriz rectangular de 4 x 28 = 112 cuadrados, crear, con un pentaminó en forma de L, una composición horizontal según el siguiente sistema:



Situar la matriz rectangular sobre la mediana de un cuadrado dado.

3. Sin título, Negro BB 12, 1989[8]

Otra forma diferente de trabajar con los poliominós es por sustracción. A partir de una matriz cuadrada de 4 x 4 = 16 cuadrados, de color negro distribuido uniformemente en todas las casillas de la matriz, se sustraen un número determinado de poliominós, conectados o no, dejando como resultado un polígono irregular, compuesto por un conjunto de trazas encadenadas de distinto tamaño cuya orientación espacial está limitada a la horizontal y la vertical.

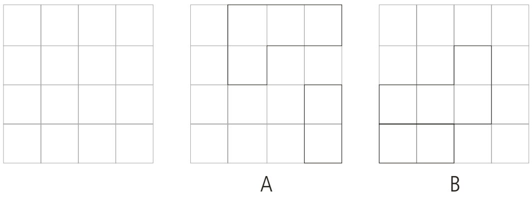
Esta obra está formada por dos matrices cuadradas negras de 4 x 4 = 16 cuadrados. En las dos matrices, A y B, se sustraen un tetraminó en forma de L y un dominó.

---

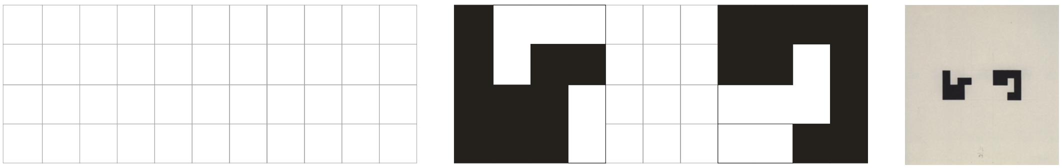
[6] Fuge Grün 13, 1987.

[7] Fuge schwarz 7, 1990.

[8] O. T., Schwarz BB 12, 1989.



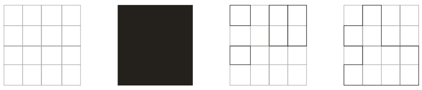
La composición se realiza sobre un rectángulo de 4 x 11 = 44 cuadrados según el siguiente criterio:



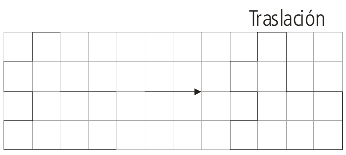
El resultado final de la obra se ubica centrado, en la mediana horizontal de un cuadrado.

4. Fuga B Negro 11, 1990[9]

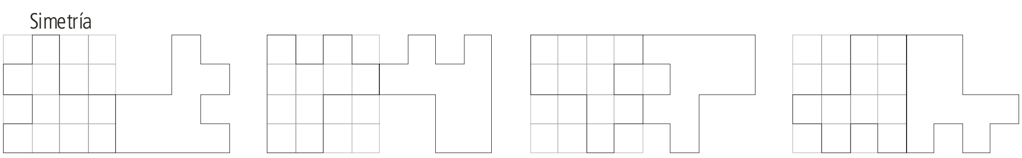
Dado un módulo cuadrado negro formado por una matriz de 4 x 4 = 16 cuadrados, se sustraen a este módulo 4 poliominós: dos monominós y dos dominós:



Sobre el módulo obtenido se realizan una serie de operaciones de traslación, rotación y simetría:

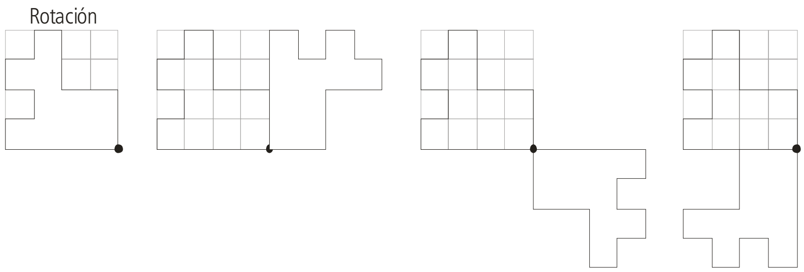


La simetría con respecto a un eje vertical produce los siguientes resultados:

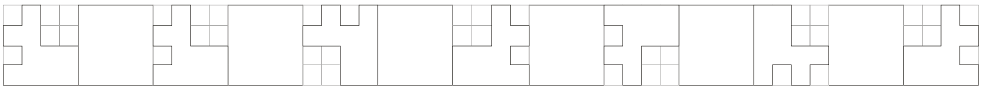


La rotación se realiza haciendo girar el módulo inicial cuatro veces, sobre el vértice inferior derecho, los siguientes ángulos: 0º, 90º, 180º y 270º:

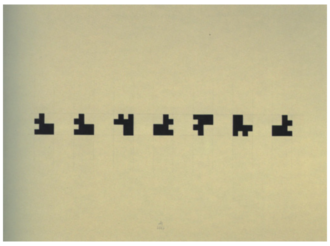
[9] B-Fuge Schwarz 11, 1990.



Con los módulos obtenidos, se realiza una composición horizontal siguiendo la siguiente pauta: módulo, silencio, módulo, silencio,…

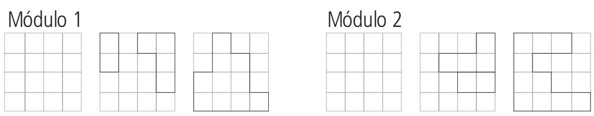


El resultado de la obra se obtiene situando, la serie horizontal anterior, sobre la mediana de un rectángulo:

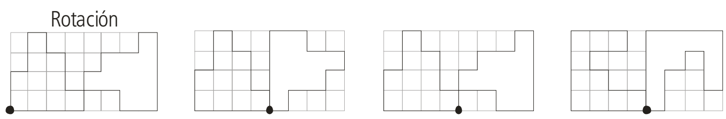


5. Espacio II, 1993[10]

En esta obra Diet Sayler utiliza dos módulos distintos, 1 y 2, que obtiene al sustraer dos poliominós: un tetraminó en forma de L y un dominó sobre una matriz cuadrada de 4 x 4 = 16 cuadrados:

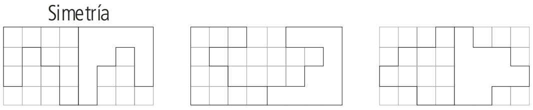


Sobre estos módulos realiza algunas operaciones de rotación y simetría para obtener nuevas versiones de los módulos dados:

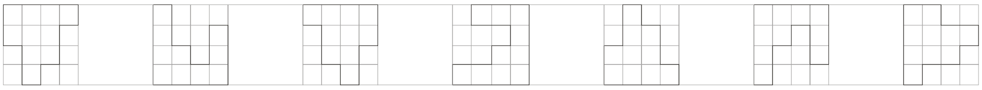


[10] Raum II, 1993.

La simetría se realiza sobre un eje vertical que pasa por el lado derecho de cada módulo:



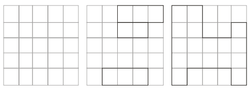
Por razones de espacio, se presenta esta composición como horizontal, pero realmente su aspecto es vertical. Para obtener su orientación real, hay que girar, con centro en el vértice inferior izquierdo del rectángulo, toda la pieza 90º, contados en el sentido contrario a las agujas del reloj:



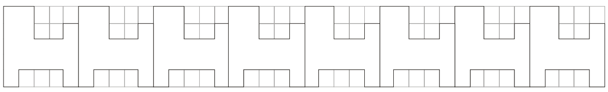
En la siguiente imagen se muestra un aspecto de la instalación de esta obra sobre un espacio real:

6. Collage básico, 1988[11]

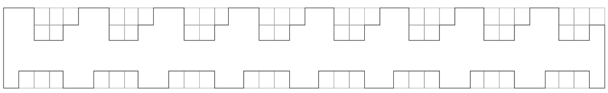
A partir de una matriz de 5 x 5 = 25 cuadrados de color verde, distribuido uniformemente sobre todos los cuadrados de la matriz, se sustraen 3 poliominós: dos triminós en forma de I y un dominó, y se obtiene el siguiente módulo:



Sobre este módulo se realiza una operación de simetría: la traslación, para conseguir una greca horizontal formada por 8 módulos contiguos:

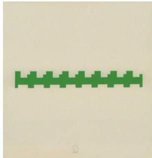


Si se suprimen las líneas divisoras entre módulos y se traza una línea continua que recorra todos los trazos exteriores de los polígonos trazados, se obtiene un nuevo polígono irregular formado por trazos de diferentes tamaños pero direcciones alternas de 0º y 90º.



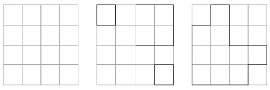
[11] Basic-Collage, 1988.

El aspecto visual de la obra está representado en la siguiente imagen:

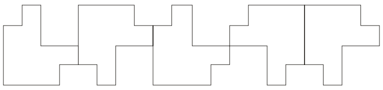


7. Sin título, Rojo M 15, 1989[12]

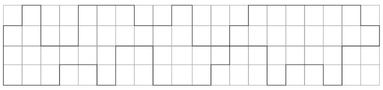
Esta obra se desarrolla a partir de un módulo construido sobre una matriz roja de 4 x 4 = 16 cuadrados. A la matriz se le han sustraído los siguientes poliominós: un tetraminó y dos monominós:



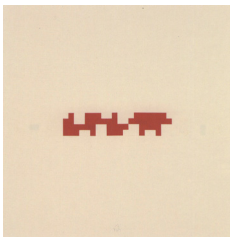
Sobre el módulo obtenido se realizan operaciones de rotación y simetría, y los resultados obtenidos se disponen secuencialmente y de forma que los lados de los módulos sean contiguos:



Si se suprimen las líneas entre módulos interiores al polígono realizado, se obtiene un nuevo polígono construido por un conjunto de lados de diferentes longitudes pero que, al recorrerlo de una forma continua, sigue una secuencia alterna de tramos orientados a 0º y 90º.



El resultado de la obra está representado en la siguiente imagen:



[12] O. T., Rot M 15, 1989.

9.- MÓDULOS: ESTRUCTURAS CONTINUAS O DE REPETICIÓN

El principio de trabajar con un patrón es muy simple: crear un módulo donde todos los lados se puedan ensamblar. La preparación de este tipo de trabajos, sin embargo, es un poco más complicada, puesto que supone seguir todo un proceso encadenado de operaciones que requieren el conocimiento de una serie de conceptos y la habilidad para poder interpretarlos y aplicarlos con éxito. Todo este proceso comprende realizar una serie de acciones que van desde la elección de una celda básica capaz de repetirse espacialmente sin dejar huecos ni vacíos entre sus piezas; a la aplicación de una serie de operaciones sobre esta celda básica: traslación, giro, simetría y desplazamiento seguido de una simetría, con el objeto de enriquecer sus posibilidades estéticas y expresivas, y crear un módulo capaz de repetirse, cuantas veces se requiera para generar, finalmente un patrón.

El objetivo de este capítulo es plantear los conocimientos que son necesarios para realizar estructuras continuas o de repetición en el plano, y teniendo en cuenta que este tipo de estructuras se puede generar siguiendo dos modelos diferentes pero muy relacionados: las simetrías y los entrelazados de formas.

9.1.- SIMETRÍA

Es un principio básico de organización; un sistema de repetición de formas para crear un diseño.

La simetría comienza cuando a una figura geométrica simple, celda básica, en cuya superficie se ha realizado un diseño, se le practican una serie de operaciones: traslación, giro, reflexión y desplazamiento seguido de una reflexión, para conseguir un módulo capaz de poder repetirse en el espacio sin dejar huecos o que se den superposiciones entre sus piezas. Los módulos se repiten un número determinado de veces para formar un modelo o patrón. Dependiendo de cómo se repita la celda básica, es decir, dependiendo de qué operaciones se realicen sobre ella, se definirán unos patrones u otros.

Una simple celda básica puede producir muchos diseños diferentes. En superficie o en dos dimensiones hay 17 maneras en las que se pueden organizar formas repetidas para llenar la superficie. Estos métodos son la base para crear cualquier ornamentación de superficie.

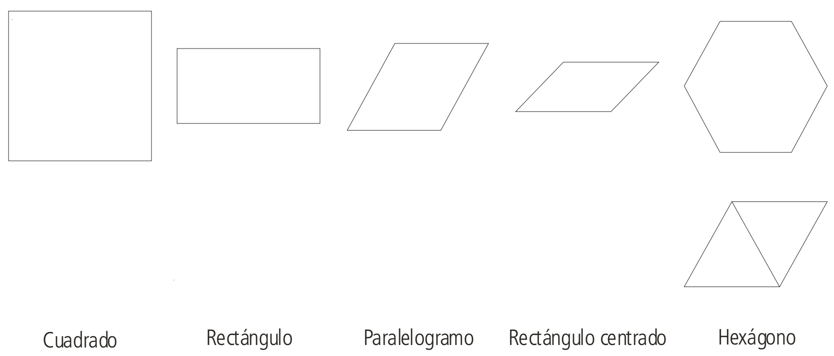
9.1.1.- Definiciones

1. Celda básica o primaria

La celda primaria es una figura geométrica simple, capaz de completar un espacio sin huecos, que contiene en su interior un motivo de diseño. Es la unidad mínima gráfica que se va a repetir un número determinado de veces para realizar un módulo.

Se la puede llamar de diferentes formas: celda primitiva, unidad generadora, celda unidad,...

Pueden tener las siguientes formas: cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rectángulo centrado, hexágono.



2. Módulo

El módulo se obtiene cuando a una o más celdas básicas se les aplica una serie de operaciones de simetría: traslación, giro, reflexión y/o desplazamiento seguido de una reflexión.

Es la porción más pequeña del patrón que se repite sin dejar huecos o realizar superposiciones. Está compuesto de una o más celdas primarias.

Es la unidad que se repite una y otra vez para crear un patrón. Los matemáticos llaman a esta unidad, unidad de traslación. Las unidades de traslación están orientadas siempre en la misma dirección. Deben ir juntas sin huecos o superposiciones y deben completar una superficie. La celda primaria por sí misma puede ser un módulo. Sin embargo, lo más generalizado es que un módulo esté formado por un grupo de dos o más celdas primarias.

La base de un diseño de superficie simétrico es obtener un módulo que se oriente en la misma dirección y se repita sin huecos o superposiciones. Por lo tanto, sólo ciertas formas pueden ser utilizadas como módulos.

Los triángulos son figuras geométricas capaces de unirse en una superficie sin que se generen huecos o superposiciones entre ellos, pero para ajustarse correctamente, entre dos triángulos consecutivos, uno de ellos, tiene que invertirse. Por lo tanto, el triángulo no es un módulo por sí mismo, sino que se necesita una combinación de dos triángulos para construir una forma de cuatro lados capaz de repetirse infinitamente, por traslación, sin vacíos o huecos entre sus piezas.

Todas las formas de cuatro lados (cuadriláteros) encajan juntas en una superficie sin huecos o superposiciones; sin embargo, si los lados opuestos de un cuadrilátero no son iguales en longitud o paralelos entre sí, se necesitan dos cuadriláteros, de forma que uno de ellos esté girado 180º con respecto al otro, para formar juntos un módulo que se pueda repetir por traslación y llenar completamente una superficie sin huecos o solapamientos.

Por lo tanto, los módulos usados para diseños simétricos, están limitados a cuadriláteros (formas de cuatro lados) y hexágonos (formas de seis lados). Para que estos módulos estén orientados en la misma dirección, los lados opuestos de las formas deben ser paralelos unos a otros e iguales en longitud. En el módulo pueden estar presentes otras formas, pero cuando las formas constituyen el módulo final, el módulo debe estar comprendido en un cuadrilátero, o hexágono, con los lados opuestos paralelos e iguales.

3. Patrón o modelo

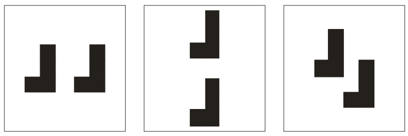
Es una organización de módulos repetidos. Es el resultado de aplicar una serie de operaciones de simetría sobre un conjunto de celdas básicas. Dependiendo de las operaciones que se realicen sobre las celdas básicas se pueden generar patrones o modelos diferentes. Cada patrón refleja, por lo tanto, un tipo de simetría determinada por las operaciones que llevan implícitas sus celdas básicas.

9.1.2.- Operaciones de simetría

Hay cuatro métodos o modelos para crear simetrías bidimensionales. De la combinación de estas operaciones resultan los distintos grupos de simetría:

1. Traslación

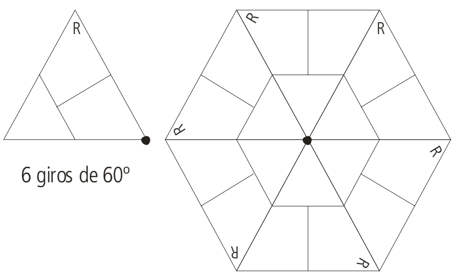
En la traslación, la celda primaria se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda; hacia arriba o hacia abajo; o diagonalmente, pero manteniendo siempre la misma orientación.

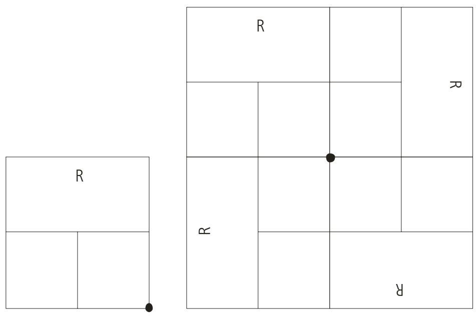


2. Rotación

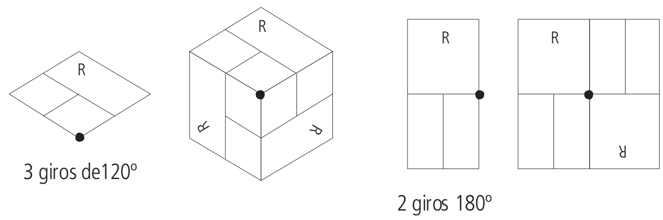
En la rotación la celda primaria gira un cierto número de veces. El número de rotaciones depende de la forma de la celda primaria, y el ángulo sobre el que tiene lugar la rotación. En la rotación la celda no se refleja ni se traslada, sino que simplemente gira.

El triángulo equilátero tiene que girar 6 veces alrededor de uno de sus vértices de 60º, para crear un módulo hexagonal. El cuadrado tiene que girar 4 veces alrededor de uno de sus vértices de 90º, para crear un módulo cuadrado.

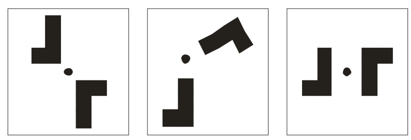




El rombo tiene que girar 3 veces alrededor de uno de sus vértices de 120º, para crear un módulo hexagonal. Y finalmente, el rectángulo tiene que girar 2 veces alrededor del punto medio de uno de sus lados (180º), para crear un cuadrado.

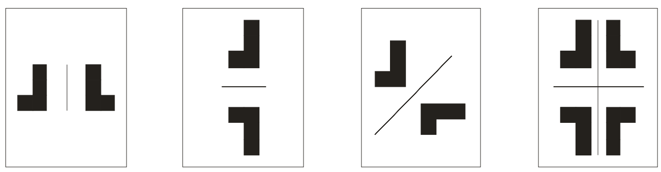


Las distancias de los motivos a los centros de rotación, puede producir, visualmente, sensaciones aparentes de traslaciones.



3. Reflexión o simetría

En la reflexión, la celda primaria se refleja, con respecto a un eje, como en un espejo. La reflexión se puede producir sobre uno o más lados de la celda primaria, y puede ser vertical, horizontal o diagonal. Se dice que una reflexión es vertical cuando el eje sobre el que se realiza la reflexión es un eje vertical. Se dice que una reflexión es horizontal, cuando el eje sobre el que se realiza la reflexión es horizontal. Y se dice que una reflexión es diagonal, cuando el eje sobre el que se realiza la reflexión es diagonal.

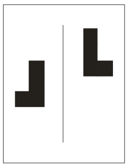


Reflexión vertical   Reflexión horizontal   Reflexión diagonal   Doble reflexión

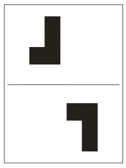
4. Desplazamiento seguido de reflexión:

Una reflexión con desplazamiento es una combinación de una traslación y una reflexión.

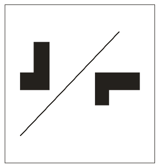
La línea o eje de simetría se utiliza como línea de desplazamiento y como eje de simetría. La línea de desplazamiento puede ser horizontal, vertical o diagonal. Para un desplazamiento horizontal, la celda básica se mueve horizontalmente y se refleja verticalmente con respecto al eje de simetría horizontal. En un desplazamiento vertical, la celda básica se mueve verticalmente y se refleja horizontalmente con respecto al eje de simetría vertical. En un desplazamiento diagonal, la celda básica se desplaza en diagonal y la reflexión ocurre con respecto al eje de simetría diagonal.



Desplazamiento vertical
Reflexión vertical



Desplazamiento horizontal
Reflexión horizontal



Desplazamiento diagonal
Reflexión diagonal

Se puede considerar la traslación como un caso especial de rotación (rotación con el centro en el infinito) y la reflexión como un caso especial de la reflexión con desplazamiento (reflexión con desplazamiento cero). De este modo los cuatro tipos de operaciones se pueden reducir a dos: rotación y reflexión con desplazamiento.

9.1.3.- Grupos de simetría:

Un grupo de simetría es un conjunto de operaciones de simetría: traslación, rotación, reflexión y reflexión con desplazamiento, y todas las combinaciones posibles entre ellas, que comparten tres características:

1. Continuidad:

Cada operación puede ser seguida por una segunda operación semejante, que así mismo puede generar otra tercera operación similar a las anteriores que también es miembro del grupo.

2. Reversibilidad:

Cada operación realizada tiene una inversa que permite deshacer la primera.

3. Identidad:

La posición del modelo después de una operación puede ser el mismo que antes de la operación. Es decir, existe una operación de identidad que deja a la figura en la misma posición de partida.

Hay tres tipos de grupos de simetría:

1. **Grupos puntuales o de Leonardo:** son aquellos en los que los módulos para crear un patrón, giran en torno a un punto fijo.

2. **Grupos lineales:** son aquellos en los que los módulos para crear un patrón, crecen sólo en una dirección del espacio. Se utilizan para crear frisos, grecas,...

3. **Grupos planos:** son aquellos en los que los módulos para crear un patrón, crecen en las dos direcciones del espacio: ancho y alto, llenando, así, una superficie.

9.1.4.- Grupos de simetría en el plano

En el plano se pueden generar 17 grupos de simetría. En este estudio, cada uno de estos grupos de simetría, se va a describir de acuerdo al siguiente esquema:

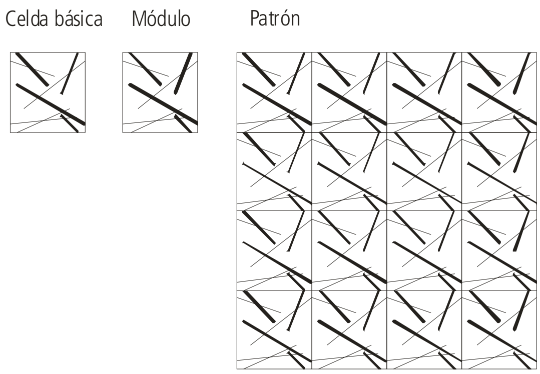
1. Nombre que identifica al grupo de simetría: grupo1, grupo 2,…
2. Operación de simetría que se va a realizar en ese grupo para, a partir de una o más celdas básicas, crear un módulo que se pueda utilizar para generar un patrón.
3. Etiqueta estándar que se utiliza en ámbitos profesionales para identificar a los distintos grupos de simetría.
4. Tabla, o cuadro resumen, en la que se describe de una forma muy esquemática lo que aporta o necesita cada uno de los elementos de simetría: celda básica y módulo, para crear un patrón; y el número de patrones diferentes que se pueden crear en cada grupo de simetría.
5. Descripción, conceptual y gráfica, de las operaciones de simetría que se realizan en ese grupo de simetría.

Los 17 grupos de simetría en el plano son los siguientes:

1. Grupo 1: traslación (p1)

Celda básica	cuadrado
Módulo	1
Patrón o modelo	1

Es la simetría más fácil. Para generar la simetría se necesita una única celda básica y se genera sólo un tipo de patrón. En la traslación, la celda primaria es el módulo y éste se repite una y otra vez por traslación. Los módulos están orientados en la misma dirección y se mueven de lado a lado y de arriba abajo.

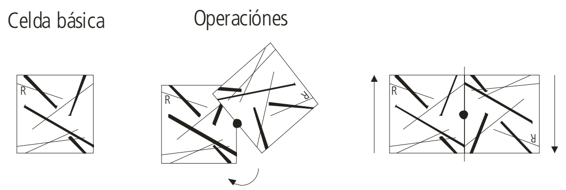


2. Grupo 2: rotación sobre el punto medio de un lado o media vuelta (p2)

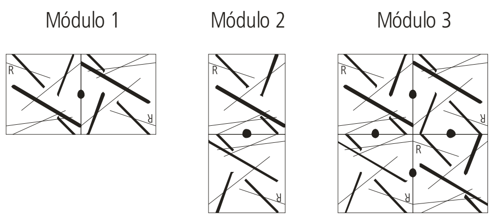
Celda básica	cuadrado
Módulo	2
Patrón o modelo	3

Par generar esta simetría se necesitan dos celdas básicas para crear el módulo, y se generan tres tipos de patrones diferentes.

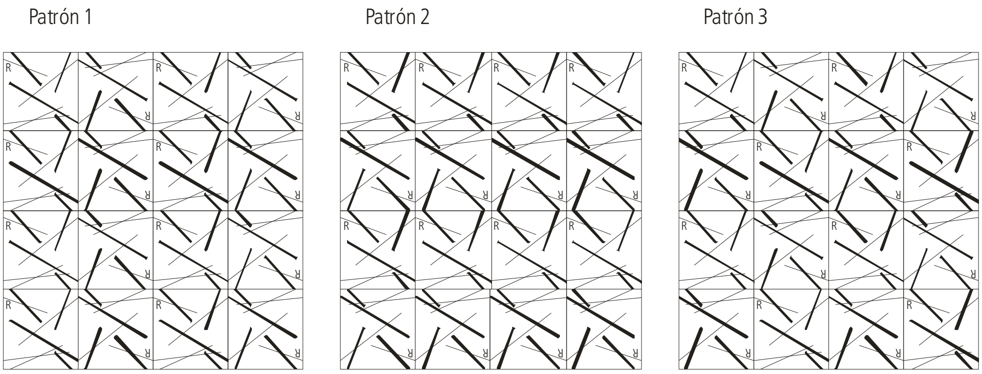
El proceso para generar el módulo es el siguiente: superponer dos celdas básicas, de forma que tengan la misma orientación y sentido. Situar el punto de rotación, en el punto medio de uno de los lados del módulo; y, finalmente, girar la celda básica superior 180º. Por este procedimiento, se obtiene un módulo formado por dos celdas básicas: una celda en el mismo sentido y orientación que antes de realizar el giro, y la otra invertida 180º.



Con esta operación de simetría se pueden generar tres tipos diferentes de módulos, dependiendo de qué lado se utilice para realizar el giro. Si se utiliza un lado vertical de la celda para colocar el punto medio de giro, se obtiene el mismo resultado si se gira la celda sobre el lado izquierdo o el derecho: módulo 1. Si se utiliza el lado inferior, se obtiene el mismo resultado que si se gira la celda sobre el lado superior o el inferior: módulo 2. Si se utilizan dos lados contiguos de la celda básica, por ejemplo, el lado inferior y el lado derecho, se utiliza un doble punto medio de rotación, y se genera un nuevo módulo de simetría: módulo 3. El proceso para realizar este doble giro, en el ejemplo mostrado en la ilustración, es el siguiente: se gira la celda básica dos veces: una por el punto medio del lado derecho y otra por el punto medio del lado inferior. Una vez que se ha girado la celda básica una vez por el punto medio de uno de los lados elegidos, en este ejemplo, el derecho, se gira la celda obtenida por el punto medio del lado inferior.



Para crear los patrones correspondientes, se crean varios grupos de módulos y se colocan, por traslación, unos contiguos a los otros, en las dos direcciones del espacio.

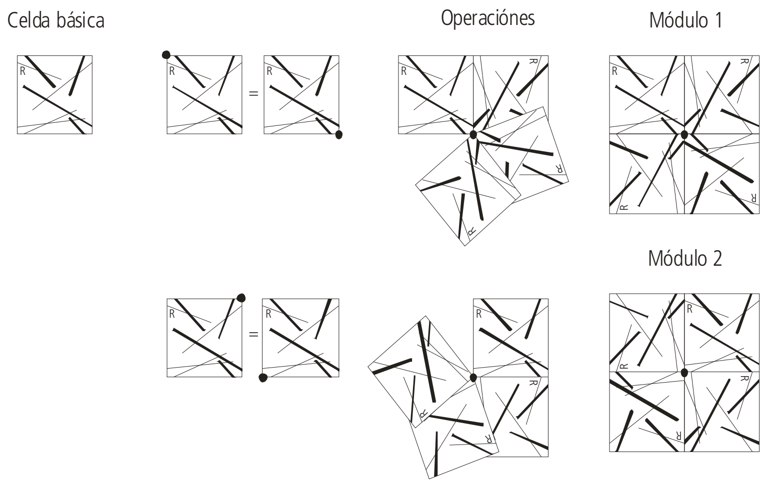


3. Grupo 3: rotación sobre un vértice de la celda o ¼ de vuelta (p4)

Celda básica	cuadrado
Módulo	4
Patrón o modelo	2

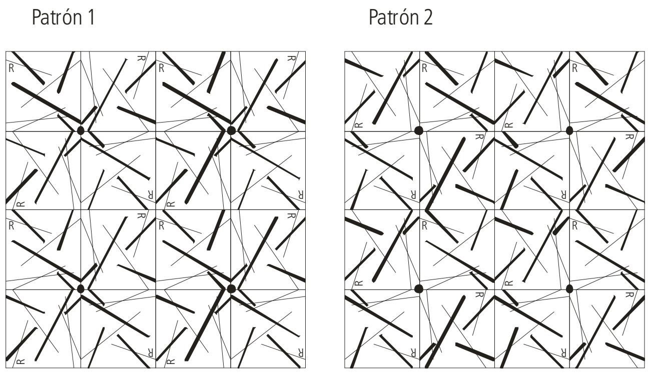
En este grupo de simetría se necesitan cuatro celdas básicas para crear un módulo. Se pueden crear dos módulos distintos y, con esos módulos, generar dos patrones diferentes.

El proceso para generar el módulo es el siguiente: se superponen 4 celdas primarias unas encima de otras, asegurándose que estén todas orientadas en la misma dirección y sentido. Se sitúa el punto de giro en uno de los vértices de la celda primaria y se giran las tres primeras celdas 90º; después las dos primeras, 90º más; y finalmente, la primera, otros 90º. Todas las celdas básicas juntas, unidas alrededor del vértice de rotación, forman un módulo.



Se pueden generar dos módulos diferentes dependiendo qué vértice de la celda primaria se utilice para realizar el giro. Un modelo surge cuando se utiliza el vértice superior izquierdo o el inferior derecho; y otro, cuando se utiliza el vértice superior derecho o el inferior izquierdo.

Con esta operación de simetría se pueden generar dos tipos diferentes de patrones:

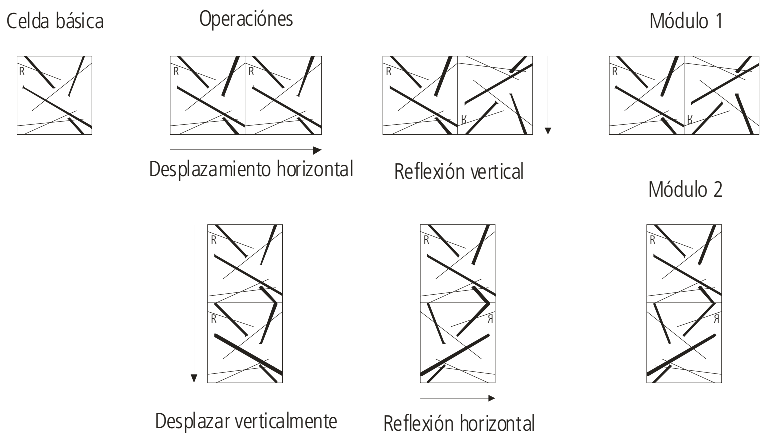


4. Grupo 4: desplazamiento y reflexión (pg)

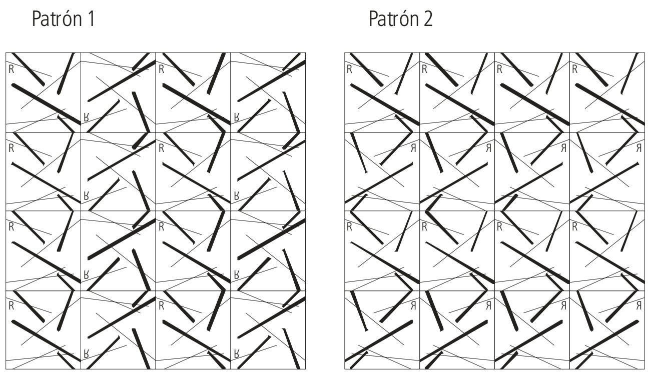
Celda básica	cuadrado
Módulo	2
Patrón o modelo	4

Se necesitan dos celdas primarias para formar un módulo. Se pueden crear cuatro módulos distintos y, con estos módulos, crear cuatro patrones diferentes.

Para crear un módulo, se apilan dos celdas primarias una encima de la otra, ambas orientadas en la misma dirección y sentido. Se coge la celda superior y se desplaza horizontalmente hacia la derecha. Después, se refleja verticalmente, de arriba hacia abajo, con respecto al eje de simetría horizontal.



Con esta operación de simetría se pueden crear 4 modelos diferentes dependiendo en qué dirección se realice el desplazamiento de la celda básica: mover la celda horizontalmente y reflejarla verticalmente; mover la celda verticalmente y reflejarla horizontalmente,... Lo más importante es recordar que si se mueve la celda horizontalmente, se refleja verticalmente. Y, al contrario, si la celda se mueve verticalmente, se refleja horizontalmente.



Se pueden crear dos patrones más reflejando la celda diagonalmente y desplazándola horizontal o verticalmente.

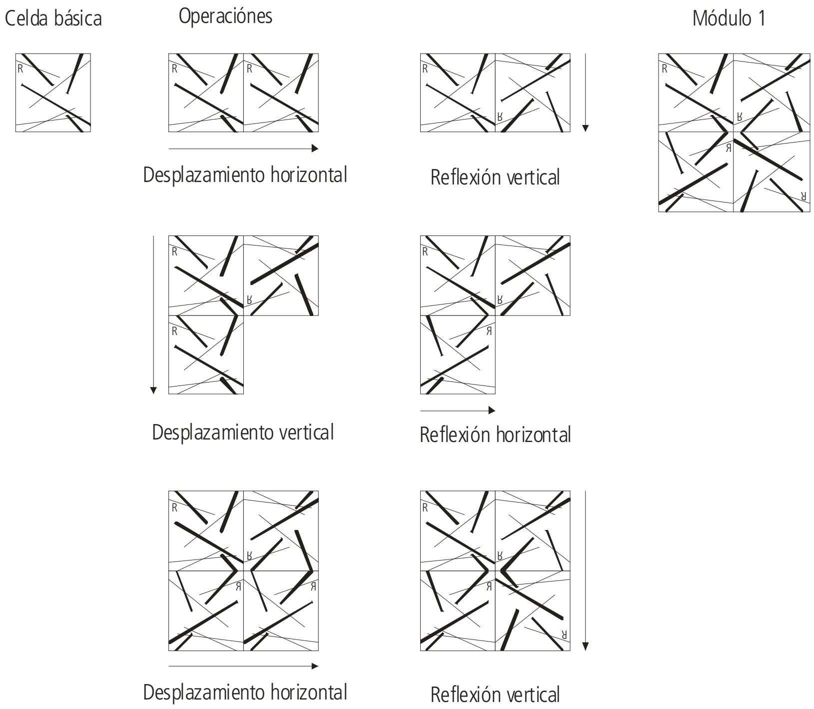
5. Grupo 5: doble desplazamiento – doble reflexión (pgg)

Celda básica	cuadrado
Módulo	4
Patrón o modelo	3

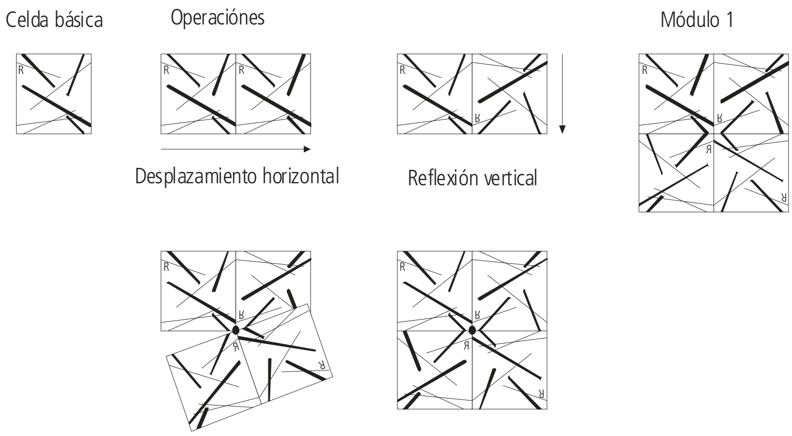
Se necesitan cuatro celdas primarias para formar el módulo que se utilizará para crear el único patrón que genera esta simetría.

Para crear el módulo, se superponen dos celdas primarias una encima de la otra, ambas orientadas en la misma dirección y sentido. Se realiza un desplazamiento horizontal con la celda superior y se refleja verticalmente.

Se coge otra celda y se coloca encima de la primera celda, la que está situada en la esquina superior izquierda, orientándola en la misma dirección y sentido. Con esta nueva celda, se realiza ahora un desplazamiento vertical y una reflexión horizontal. Finalmente, se coloca la última celda encima de una de las ya desplazadas, por ejemplo, la que está situada en la esquina inferior izquierda, asegurándose de que está en la misma posición que la celda sobre la que se sitúa, y se realiza un desplazamiento horizontal y una reflexión vertical. Con esta última operación se completa el último agujero libre disponible para formar el módulo.

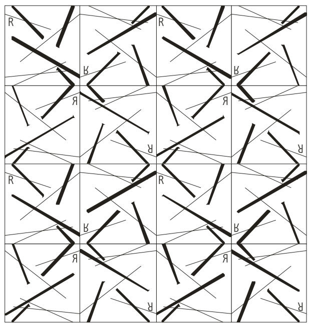


Otra forma alternativa de crear el módulo es utilizando solo dos celdas primarias. Se superponen dos celdas en la misma dirección y orientación. Se mueve la superior horizontalmente y se refleja verticalmente. Se crean dos modelos como los anteriores y se superponen a éstos, uno encima del otro, con la misma dirección y sentido. Se gira la unidad superior compuesta por dos celdas primarias, alrededor de un punto colocado en el vértice de intersección de las dos celdas.



Con esta operación de simetría se puede generar el siguiente patrón:

Patrón 1



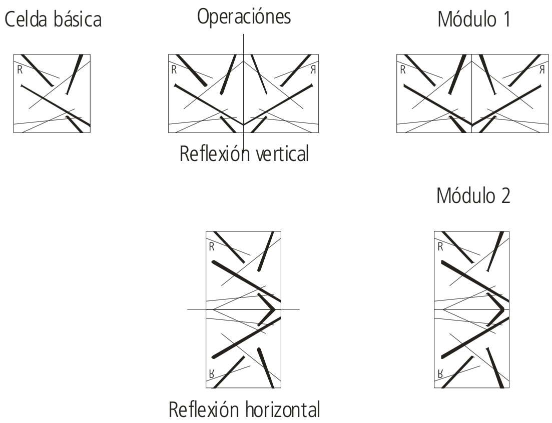
Se podrían obtener otros dos patrones de simetría realizando las reflexiones diagonalmente y desplazando las celdas básicas vertical u horizontalmente.

6. Grupo 6: reflexión (pm)

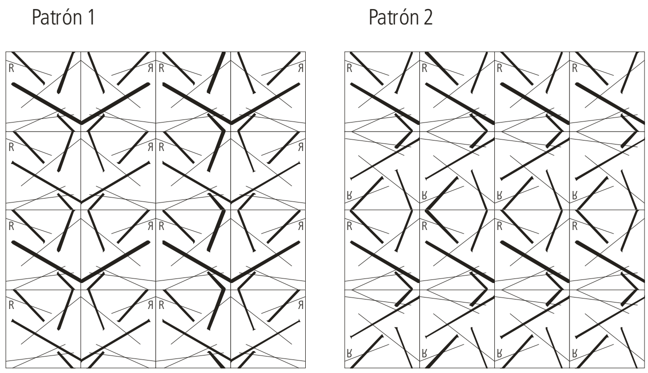
Celda básica	cuadrado
Módulo	2
Patrón o modelo	2

Se necesitan 2 celdas primarias para formar los módulos que se utilizarán para generar dos tipos de patrones diferentes.

Para crear el módulo, se superponen las dos celdas primarias una encima de la otra, ambas orientadas en la misma dirección y sentido. Al realizar una reflexión se produce una imagen que es reflejo exacto de la otra: como en un espejo. La celda superior se puede reflejar horizontal o verticalmente. Si se refleja horizontalmente, es decir, con respecto a un eje horizontal, la celda básica se desplaza verticalmente. Si se refleja verticalmente, es decir, con respecto a un eje de reflexión vertical, la celda básica se desplaza horizontalmente.



Se pueden generar dos patrones diferentes dependiendo del lado de la celda que se utilice para realizar la reflexión. Si se refleja a la derecha o a la izquierda (reflejo vertical) aparece un patrón diferente que si son reflejadas la parte superior o inferior de las celdas (reflejo horizontal). Los términos reflexión horizontal (eje horizontal) y vertical (eje vertical) hacen referencia a la posición real de la línea de reflexión.

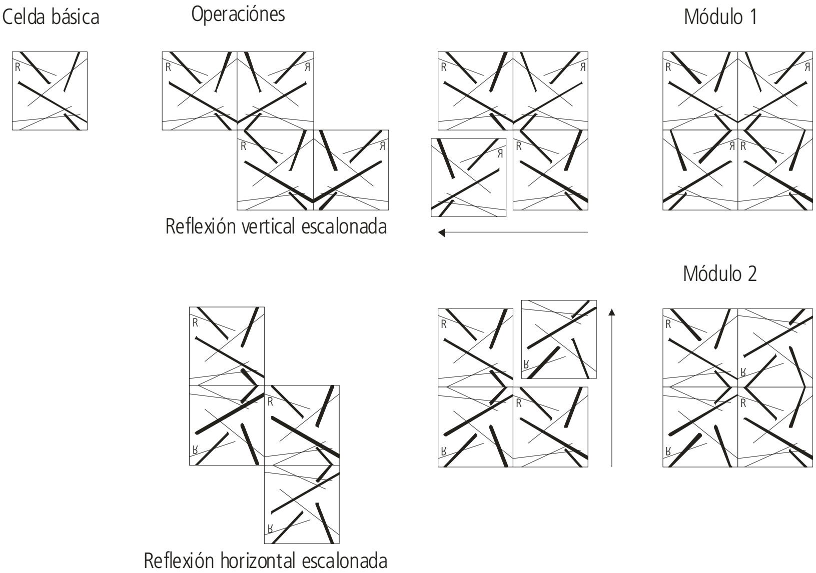


7. Grupo 7: reflexión escalonada (cm)

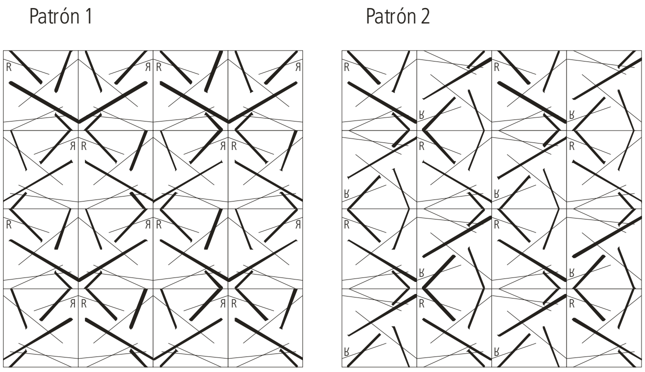
Celda básica	cuadrado
Módulo	4
Patrón o modelo	2

Esta simetría es muy parecida a la simetría del grupo anterior. La única diferencia está en que las celdas reflejadas están escalonadas cuando se ponen juntas, en vez de alineadas una encima de la otra.

Se necesitan 4 celdas primarias para formar los módulos cuadrados que se utilizarán para generar los 2 patrones que se pueden obtener en este grupo de simetría. Para generar los dos módulos diferentes que se pueden crear, se superponen dos celdas básicas, una encima de la otra, de modo que, ambas estén orientadas en la misma dirección y sentido. Se refleja la celda superior horizontal o verticalmente. Se hace una copia de las dos celdas reflejadas y se colocan escalonadamente unas con respecto a las otras. Si la reflexión realizada ha sido vertical, el escalonamiento de las celdas, es horizontal. Si la reflexión ha sido horizontal, el escalonamiento de las celdas es vertical. Para crear el módulo, se desplaza la celda básica que sobresale horizontal o verticalmente a la izquierda o hacia arriba respectivamente, creando así, dos módulos cuadrados diferentes.



Con estos dos módulos se pueden crear dos patrones diferentes:



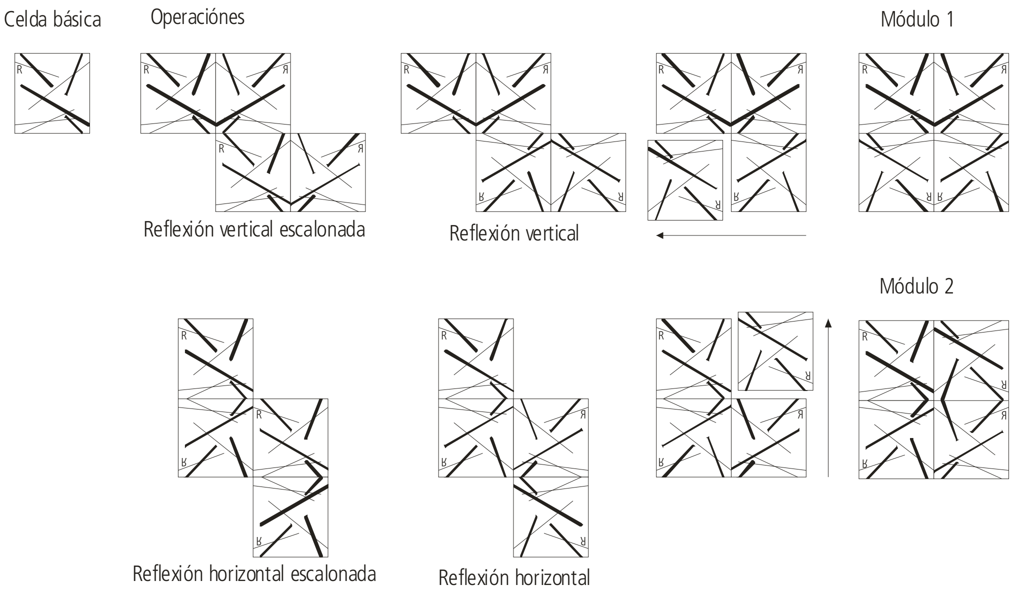
8. Grupo 8: reflexión escalonada + desplazamiento (pmg)

Celda básica	cuadrado
Módulo	4
Patrón o modelo	2

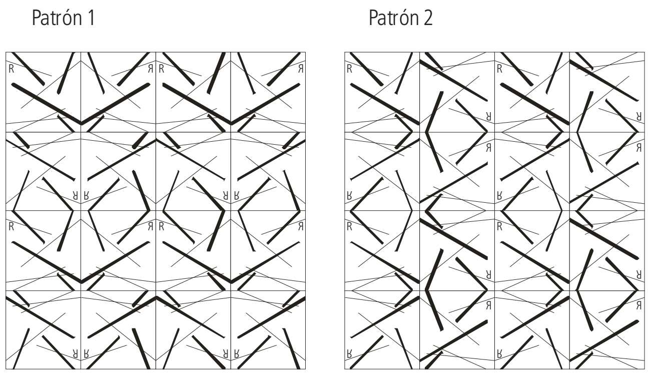
Esta simetría es muy parecida a la del grupo anterior, pero con una gran diferencia: el conjunto de celdas escalonadas, en este caso, están reflejadas de arriba abajo o de izquierda a derecha, unas con respecto a las otras.

Se necesitan 4 celdas primarias para formar los 2 módulos cuadrados diferentes que se utilizarán para generar los patrones.

Para generar los módulos, se crean dos conjuntos de celdas básicas reflejadas, igual que en los grupos de simetría anteriores. Se escalona uno de los dos anteriores con respecto al otro, y después, se refleja vertical u horizontalmente o se gira 180º. Para crear los módulos cuadrados, se toma la celda inferior que sobresale a la derecha y se desplaza horizontalmente hacia la izquierda hasta rellenar el hueco inferior izquierdo y completar un módulo cuadrado o se toma la celda inferior que sobresale hacia abajo y se desplaza verticalmente hasta llenar el hueco superior derecho y completar un módulo cuadrado.



Se pueden crear dos tipos diferentes de patrones dependiendo de qué lado de la celda primaria se utilice para realizar la simetría.

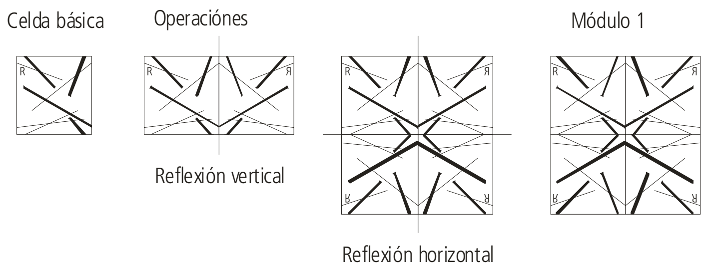


9. Grupo 9: doble reflexión (pmm)

Celda básica	cuadrado
Módulo	4
Patrón o modelo	1

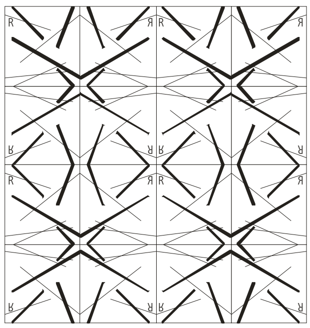
Se necesitan 4 celdas primarias para formar el módulo cuadrado que se utilizará para generar el único patrón posible en este grupo.

Para crear el módulo, se crean dos grupos de pares reflejados, es decir, se realizan dos reflexiones consecutivas, una vertical y otra horizontal. Se superponen las cuatro celdas básicas unas encima de las otras, orientándolas en la misma dirección y sentido. Después, se reflejan dos de ellas verticalmente, y con el resultado obtenido, se reflejan otras dos de ellas, horizontalmente.



El patrón que se puede generar a partir de este módulo es el siguiente:

Patrón 1

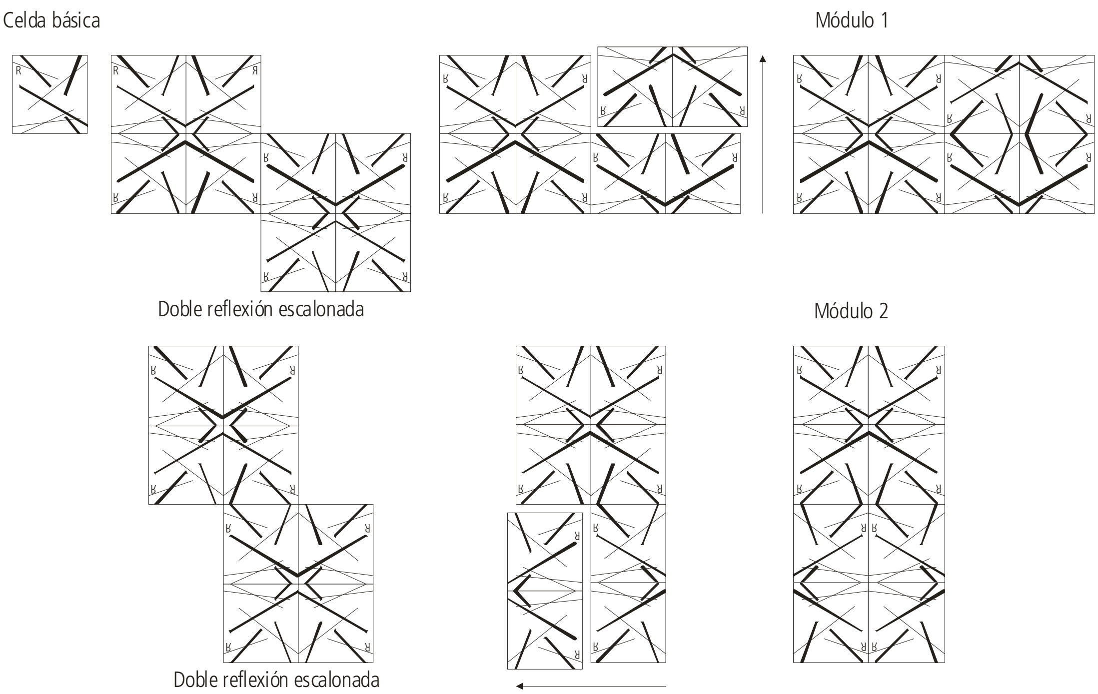


10. Grupo 10: doble reflexión escalonada (cmm)

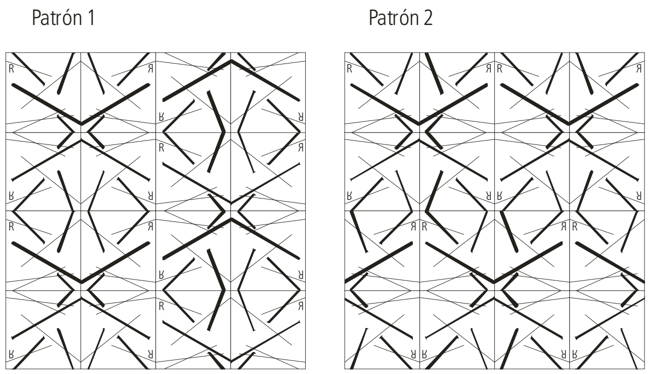
Celda básica	cuadrado
Módulo	8
Patrón o modelo	2

En este grupo de simetría se necesitan 8 celdas primarias para formar los módulos cuadrados que se utilizarán para generar los patrones correspondientes.

Para generar los módulos, se comienza realizando dos módulos, formados cada uno de ellos por cuatro celdas básicas, que se hayan obtenido por una operación de simetría de doble reflexión y se colocan de forma escalonada., horizontal o verticalmente. Si se colocan horizontalmente escalonadas, se desplazan las dos celdas inferiores que sobresalen para rellenar el hueco en la parte superior derecha y así, generar un módulo rectangular cerrado. Si se colocan verticalmente escalonadas, se desplazan las dos celdas en el extremo derecho que sobresalen para llenar el hueco disponible en la parte inferior izquierda, y así, formar un módulo rectangular completo, capaz de trasladarse horizontal y verticalmente para formar un patrón.



Como las celdas doblemente reflejadas pueden escalonarse horizontal o verticalmente, se pueden obtener dos patrones diferentes:

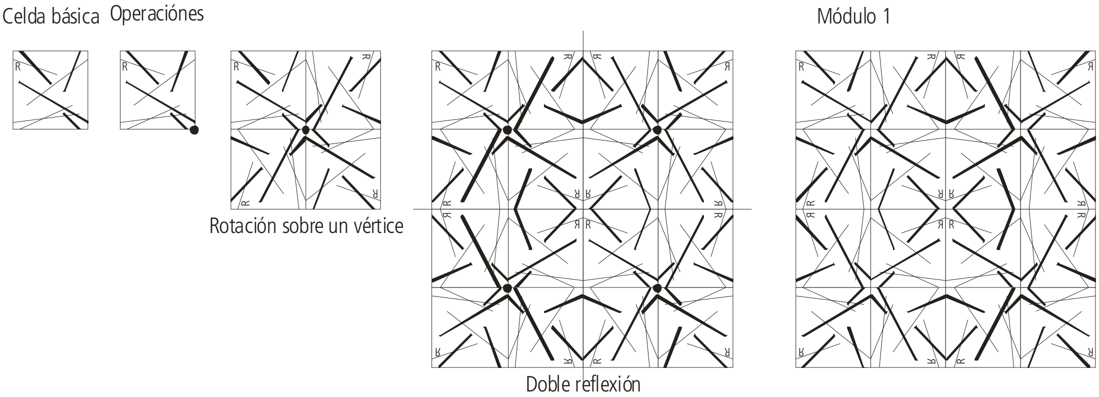


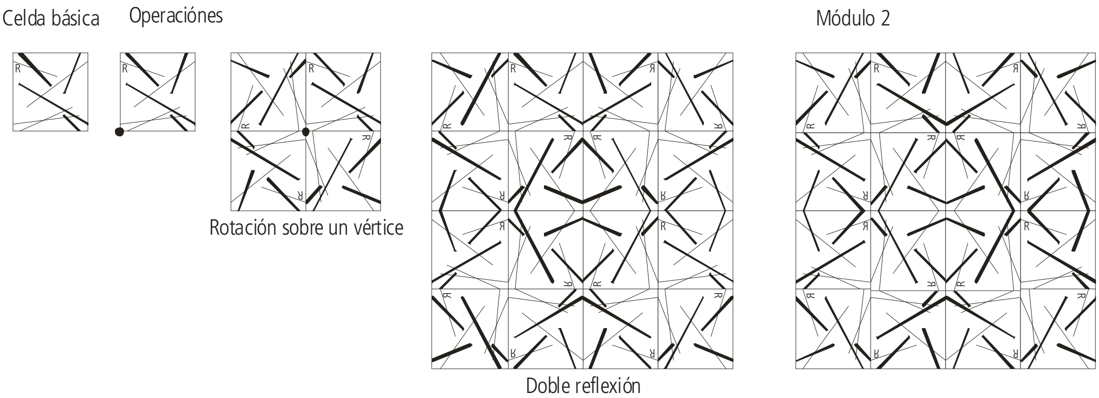
11. Grupo 11: cuatro rotaciones reflejadas o rotaciones reflejadas alrededor de un punto (p4g)

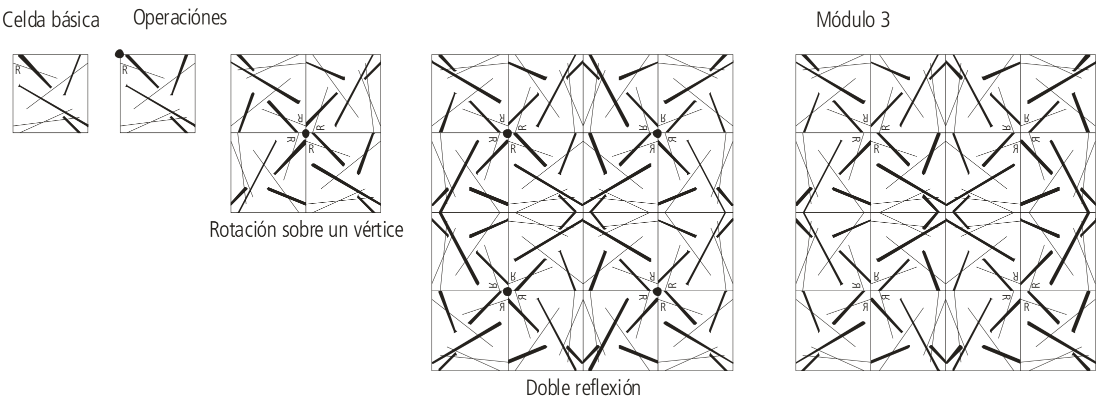
Celda básica	cuadrado
Módulo	16
Patrón o modelo	4

En este grupo de simetría se necesitan 16 celdas primarias para formar los módulos cuadrados que se utilizarán en la creación de los 4 patrones posibles.

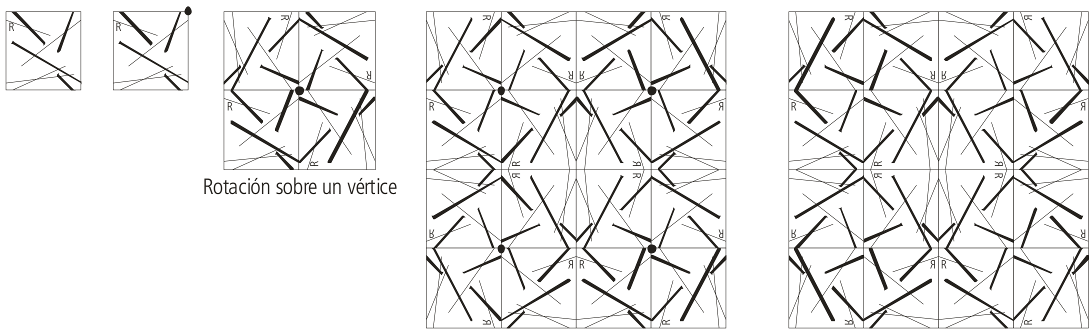
Para generar los 4 módulos posibles, se comienza realizando cuatro rotaciones seguidas de la celda básica sobre cada uno de sus vértices, y se obtienen 4 módulos distintos. Sobre estos módulos se realiza una doble reflexión y se obtienen así 4 módulos diferentes. Para realizar la doble reflexión, se refleja la unidad formada por las 4 celdas primarias con respecto a un eje horizontal o vertical, y el resultado se vuelve a reflejar sobre el otro eje no utilizado anteriormente.







Celda básica Operaciónes Módulo 4

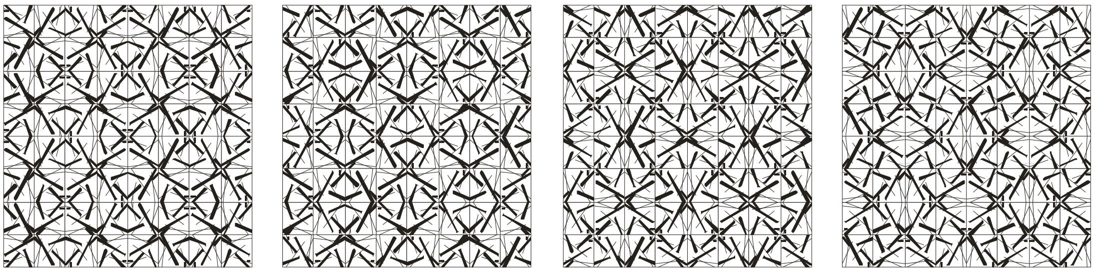


Rotación sobre un vértice

Doble reflexión

En este modelo de simetría se pueden generar cuatro patrones diferentes dependiendo de qué vértice del cuadrado se utilice para realizar las rotaciones de la celda básica.

Patrón 1 Patrón 2 Patrón 3 Patrón 4



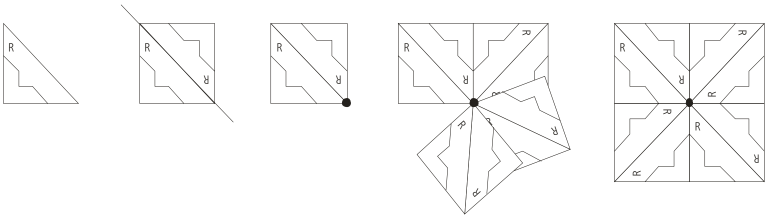
12. Grupo 12: bloque tradicional (p4m)

Celda básica	triángulo de 90º, 45º, 45º
Módulo	8
Patrón o modelo	1

La celda primaria es un triángulo de 90º, 45º, 45º (escuadra). Se necesitan 8 celdas primarias para crear el módulo, cuatro de ellas en una posición determinada y las otras cuatro, invertidas o reflejadas.

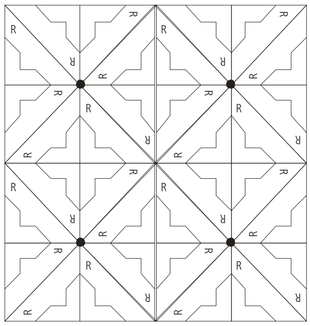
En este grupo de simetría, para obtener el módulo, se realiza una reflexión del triángulo rectángulo dado utilizando como eje de simetría su hipotenusa, obteniéndose así, un cuadrado. Después se gira cuatro veces el cuadrado sobre uno de los vértices que forma parte de la línea de reflexión de la celda.

Celda básica Operaciónes Módulo 1



Con este módulo se puede crear el siguiente patrón:

Patrón 1



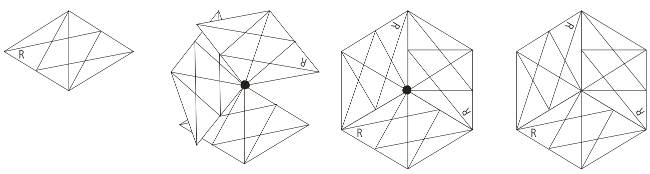
13. Grupo 13: tres rotaciones (p3)

Celda básica	rombo de 60º
Módulo	3
Patrón o modelo	1

La celda primaria es un rombo de 60º. El módulo se crea por rotación del rombo alrededor de uno sus ángulos de 120º. Se necesitan 3 celdas primarias para crear el módulo.

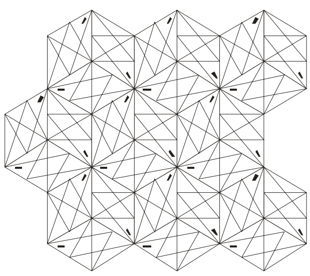
Para crear el módulo se superponen 3 celdas primarias una encima de la otra, orientadas en la misma dirección y sentido. Se fija como punto de rotación a uno de los ángulos de 120º y se gira el rombo alrededor de este centro hasta que forme un hexágono.

Celda básica Operaciónes Módulo 1



No importa cual de los dos ángulos de 120º del rombo se utilice ya que generará el mismo patrón.

Patrón 1

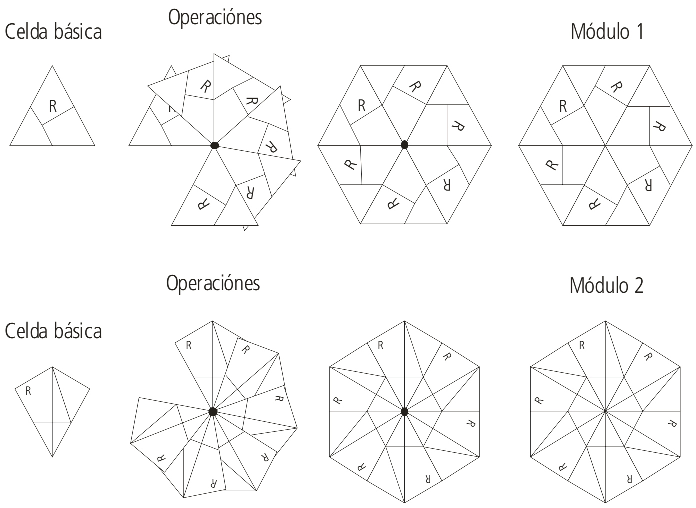


14. Grupo 14: seis rotaciones (p6)

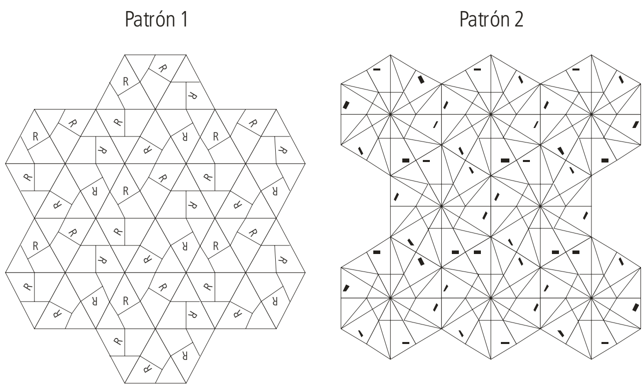
Celda básica	triángulo equilátero 60º-60º-60º cometa 120º-90º-60º-90º
Módulo	6
Patrón o modelo	3 - 1

La celda primaria puede ser un triángulo equilátero (60º-60º-60º) o una forma de cometa (120º-90º-60º-90º). El módulo se crea por rotación de estas figuras alrededor de uno de sus ángulos de 60º. Se necesitan 6 celdas primarias para crear el módulo.

Para realizar el módulo, se superponen 6 celdas básicas una encima de la otra, orientadas en la misma dirección y sentido. Se fija como centro de rotación a uno de los vértices de 60º de cualquiera de las figuras geométricas antes indicadas, y se gira la unidad alrededor de este punto hasta que forme un hexágono.



Cuando se utiliza un triángulo equilátero para crear este grupo de simetría, se pueden crear 3 patrones diferentes dependiendo del vértice del triángulo que se utilice en la rotación.

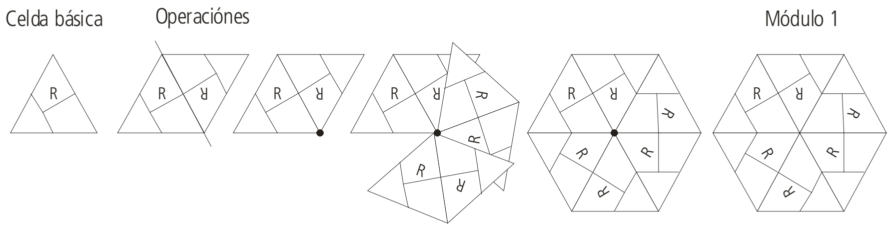


15. Grupo 15: reflexión y tres rotaciones (p3m1)

Celda básica	triángulo equilátero 60º-60º-60º
Módulo	6
Patrón o modelo	1

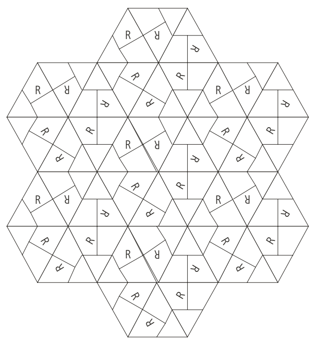
La celda primaria es un triángulo equilátero (60º-60º-60º). Se necesitan 6 celdas primarias para crear el módulo, tres normales y tres reflejadas.

Para realizar el módulo, se refleja el triángulo equilátero utilizando uno de sus lados como eje de simetría y se obtiene un rombo. No importa cuál de los lados del triángulo se utilice para realizar la simetría, ya que el resultado final será el mismo en los tres casos. Se gira el rombo resultante tres veces alrededor de uno de sus vértices de 120º, y se obtiene un hexágono.



Con el módulo obtenido, se crea el siguiente patrón:

Patrón 1

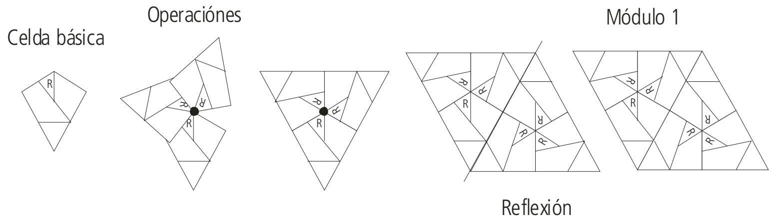


16. Grupo 16: tres rotaciones y reflexión (p31m)

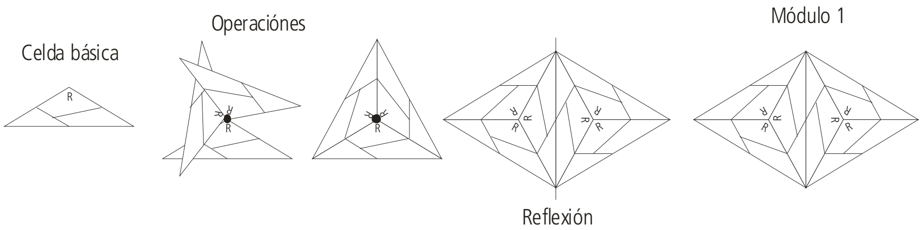
Celda básica	mitad hexágono mitad rombo de 60º cometa 120º-90º-60º-90º
Módulo	6
Patrón o modelo	1

La celda primaria puede ser la mitad de un hexágono, la mitad de un rombo de 60º o una forma de cometa (120º-90º-60º-90º). Se necesitan 6 celdas primarias para crear el módulo que se utilizará para obtener el patrón correspondiente.

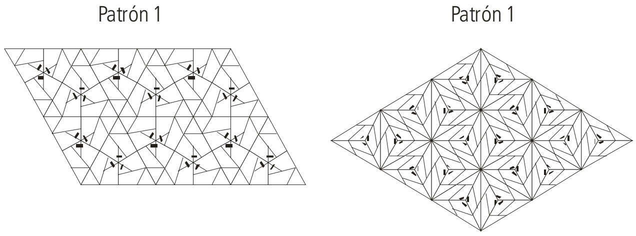
Para crear el módulo a partir de una forma de cometa, se superponen 3 cometas colocadas unas encima de las otras en la misma posición y orientadas en la misma dirección. Se giran las cometas alrededor del ángulo de 120º hasta que formen un triángulo equilátero. Se crea otro triángulo exacto al primero y se superpone al anterior respetando la misma orientación: dirección y sentido. Este triángulo se refleja sobre uno cualquiera de sus lados y se forma un rombo. Para crear el patrón, se realiza una traslación de estos rombos en las dos direcciones del espacio.



Si la celda básica es la mitad de un rombo de 60º, el proceso para construir el módulo es el siguiente: se superponen tres mitades de rombo, unas encima de las otras, de forma que tengan la misma dirección y sentido. Se giran estas formas alrededor del ángulo de 120º hasta que formen un triángulo equilátero. Se refleja el triángulo obtenido sobre uno cualquiera de sus lados y se forma un rombo que se puede desplazar en las dos direcciones del espacio para crear el patrón.



Los patrones que resultan de cada uno de estos módulos son los siguientes:

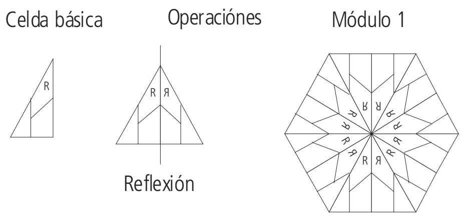


17. Grupo 17: calidoscopio (p6m)

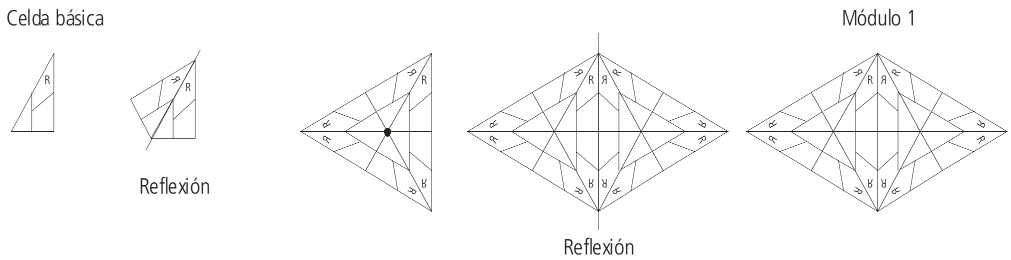
Celda básica	triángulo rectángulo 90º-60º-30º
Módulo	12
Patrón o modelo	1

La celda primaria es un triángulo rectángulo de 90º-60º-30º. Se necesitan doce celdas primarias para construir el módulo que se va a utilizar para generar el patrón.

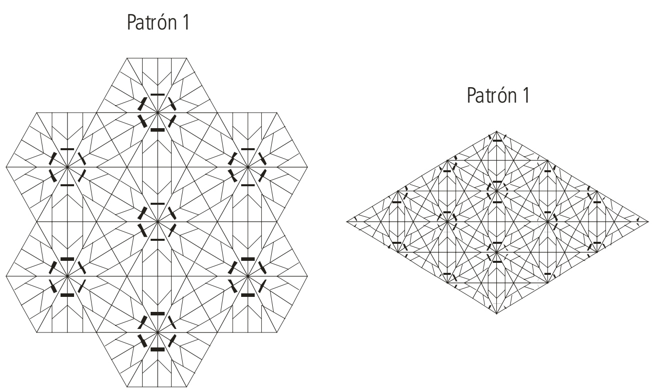
Para crear el módulo, se refleja la celda primaria utilizando como eje de simetría cualquiera de sus lados mayores: la hipotenusa o el lado de mayor longitud. Por esta operación, según el eje de simetría que se haya utilizado, se obtiene un triángulo equilátero (el lado de mayor longitud) o una cometa (la hipotenusa). Si se utiliza el triángulo equilátero, se superponen seis triángulos equiláteros, unas encima de los otros y orientadas en la misma dirección y sentido. Con centro en uno de sus vértices, se giran los triángulos equiláteros seis veces hasta que se forme un módulo en forma de hexágono.



En el caso de que se utilice la forma de cometa, se realiza la rotación alrededor del ángulo de 60º de la cometa. Se obtiene de esta forma un triángulo equilátero. Por simetría, utilizando como eje de simetría uno cualquiera de sus lados, se obtiene un rombo.



Para crear los patrones, se realiza una traslación de los hexágonos y rombos obtenidos en las dos direcciones del espacio.



9.2.- ENTRELAZADOS DE FORMAS

Una malla es una forma o modelo que se repite para llenar una superficie sin huecos ni solapamientos. Un modelo se puede repetir en una sola dirección del espacio para formar un diseño unidimensional o en las dos direcciones del espacio, horizontal y vertical, para formar un modelo bidimensional.

Para crear una malla se parte de una forma geométrica básica (cuadrado, triángulo, rectángulo, paralelogramo o hexágono) sobre la que se realizan una serie de operaciones de simetría; traslación, giro, simetría y desplazamiento seguido de una reflexión, que modifican esta forma pero que hacen que el nuevo elemento creado pueda seguir completando la superficie sin agujeros ni superposiciones. Hay muchas formas de hacer que un elemento de una malla que ha sido manipulado, pueda volver a incorporarse a la malla para crear formas entrelazadas, pero todas ellas, están basadas en los cuatro principios de simetría vistos anteriormente: traslación, rotación, simetría y desplazamiento seguido de una reflexión.

Hay varias reglas que se pueden utilizar o no para la construcción de los entrelazados dependiendo de la forma básica que se utilice. Pero hay una regla universal para todos ellos: cuando se quita una pieza del lado de una forma, el lado en el que se coloca de nuevo la pieza debe tener la misma longitud que la anterior.

Las operaciones de simetría que se pueden realizar sobre las formas geométricas básicas antes citadas para crear entrelazados de formas, son las siguientes:

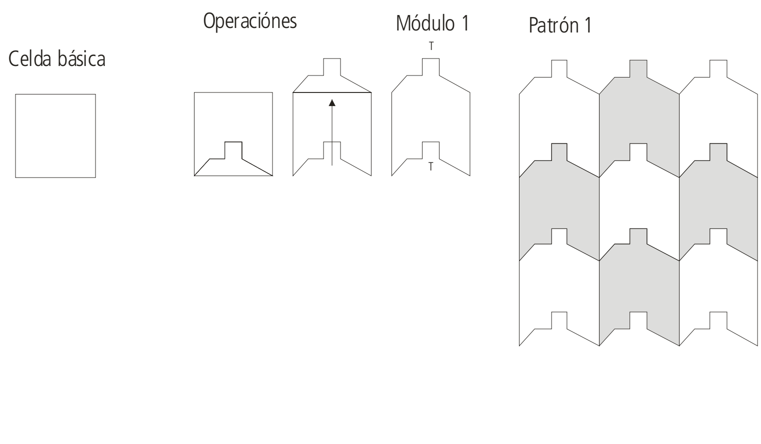
1. Traslación

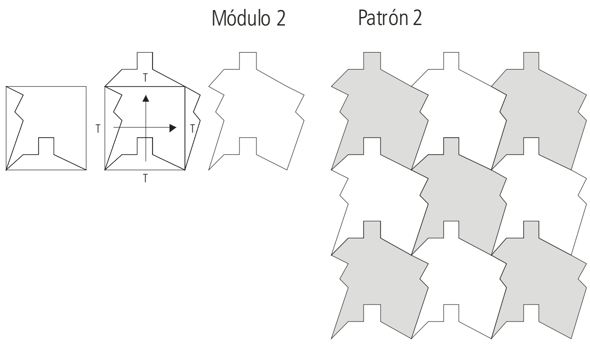
Con la traslación, se corta una pieza de uno de los lados de la forma básica y se mueve directamente al lado contrario. En la traslación una pieza sólo se puede mover de un lado de la forma básica a otro lado que sea paralelo al primero y de igual longitud.

Las traslaciones sólo se pueden realizar en figuras geométricas que tengan lados paralelos que sean iguales en longitud: cuadrados, rectángulos, paralelogramos o hexágonos.

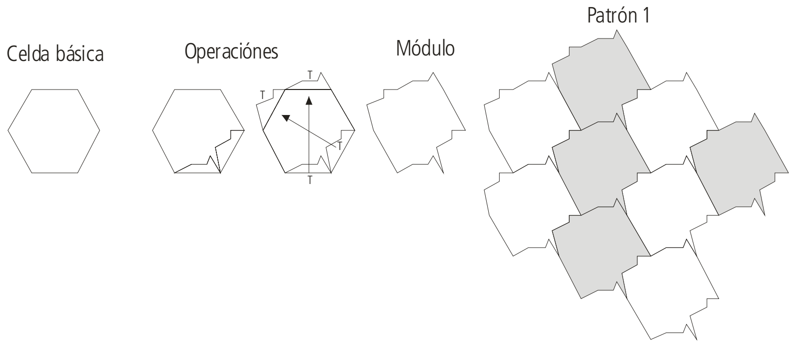
En una forma se pueden realizar tantas traslaciones como lados paralelos de igual longitud tenga.

Si la celda básica es un cuadrado, se pueden realizar algunas de las siguientes operaciones de simetría:

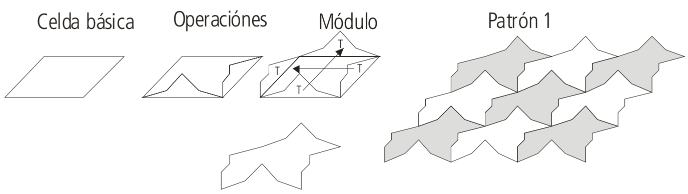




Si la celda básica es un hexágono, algunas de las operaciones de simetría que se pueden realizar, generan los siguientes patrones:

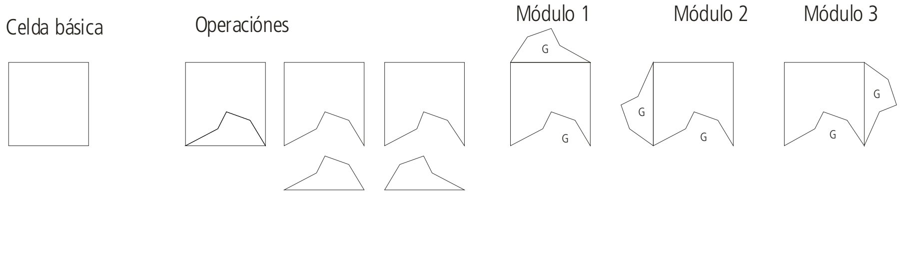


Si la celda básica es un paralelogramo, algunas de las operaciones de simetría que se pueden realizar, generan los siguientes patrones:

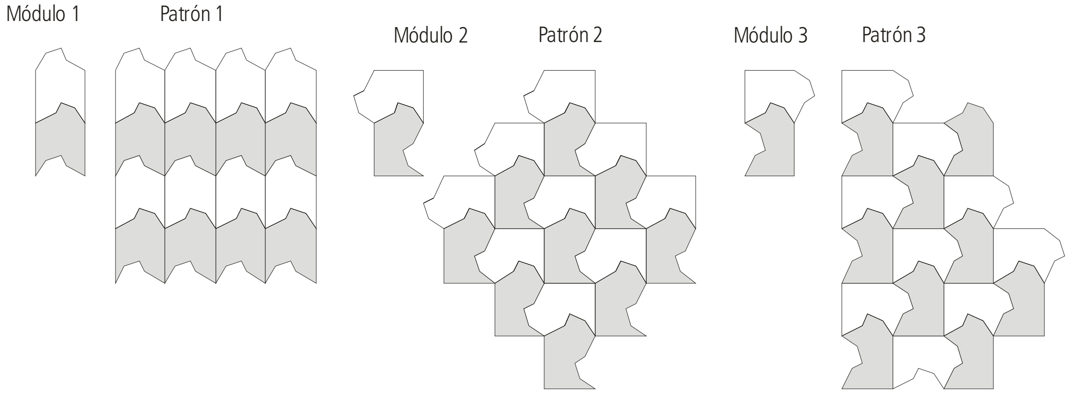


2. Desplazamiento y reflexión

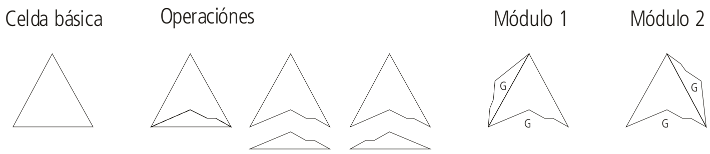
Para crear un diseño con este método, se dibuja la forma que se quiere sustraer de la celda básica y se aplica sobre uno de sus lados. Se recorta y se separa de la forma básica. Sobre esta pieza se realiza una reflexión sobre un eje perpendicular al lado de la celda básica sobre el que se ha recortado la forma. Con esta nueva forma reflejada, se realiza un desplazamiento y se traslada a cualquier otro lado de la forma básica con igual longitud que el primero. No es necesario, en este caso, que los lados sean paralelos.



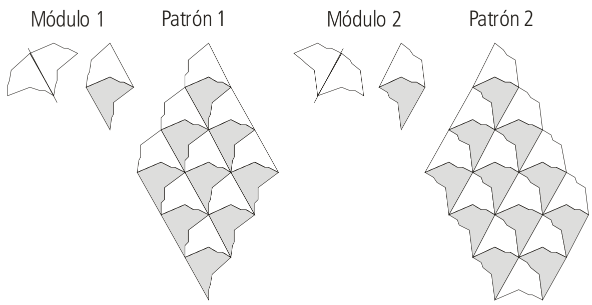
A partir de estos módulos se pueden generar los siguientes patrones:



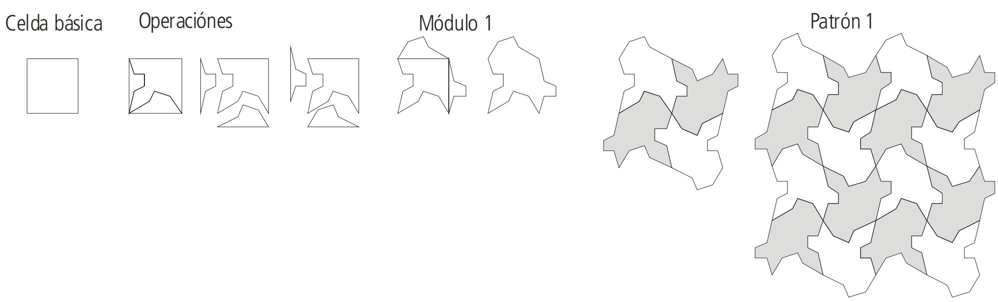
Si la pieza se mueve desde un lado de la celda básica a otro paralelo al primero, como se hace en la traslación con el cuadrado, el paralelogramo o el hexágono, la pieza que se separa de un lado del cuadro sólo tiene que reflejarse y trasladarse; pero si se coloca sobre un lado adyacente, además de ser reflejada, se tiene que girar para que el lado correcto de la pieza cortada pueda colocarse en la posición correcta sobre el nuevo lado.

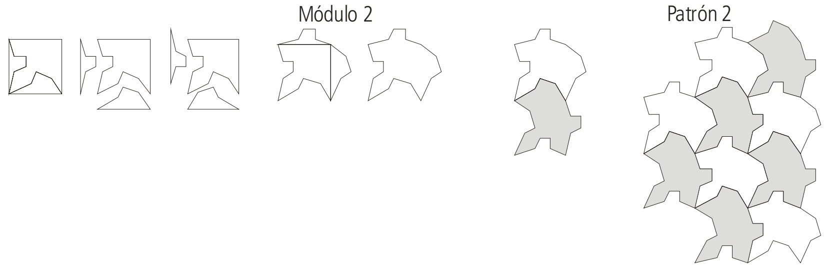


A partir de estos módulos se pueden generar los siguientes patrones:



Cuando el desplazamiento y la reflexión se realizan sobre los lados opuestos de un paralelogramo, es decir, lados paralelos entre sí, se necesitan cuatro celdas básicas para realizar el módulo capaz de crear el patrón; pero cuando estas operaciones se realizan sobre lados adyacentes de la celda básica, sólo se necesitan dos celdas básicas para realizar el módulo.

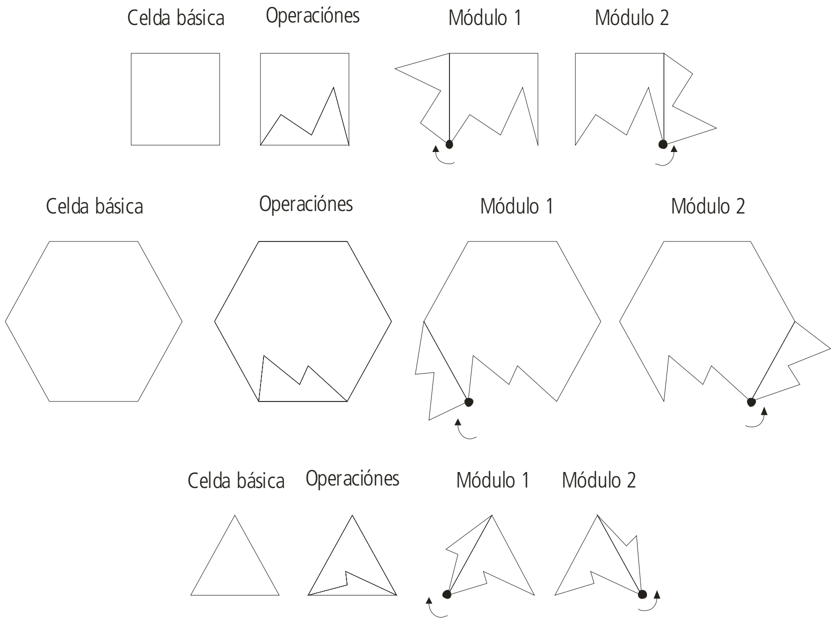




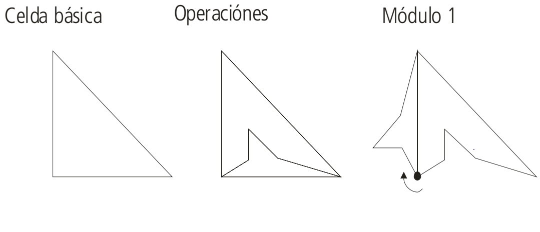
3. Rotación

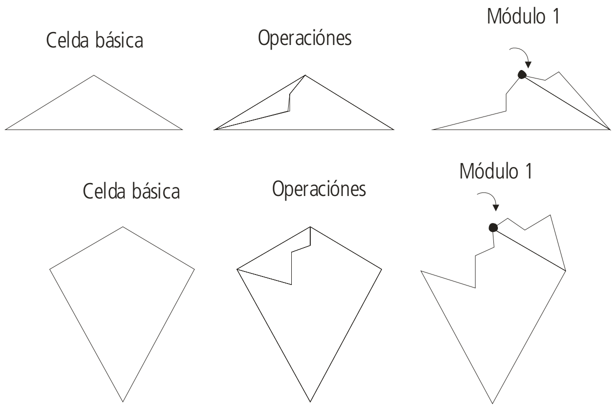
En la rotación la pieza cortada, se gira un número determinado de grados dependiendo de la forma básica de la que se parta. Se pueden dar dos tipos de rotación: rotación entorno a un vértice y rotación entorno al punto medio de un lado. En el primer tipo, la pieza que se corta de uno de los lados de la forma básica se coloca sobre otro lado adyacente de la forma básica, que tenga igual longitud.

En los siguientes modelos de rotación con respecto a un vértice, las formas recortadas se colocan indistintamente sobre los dos lados adyacentes porque éstos son iguales en longitud al lado del que ha sido recortada la pieza, por lo tanto, se pueden realizar dos tipos de giros: girar sobre el vértice de la derecha, o sobre el de la izquierda.

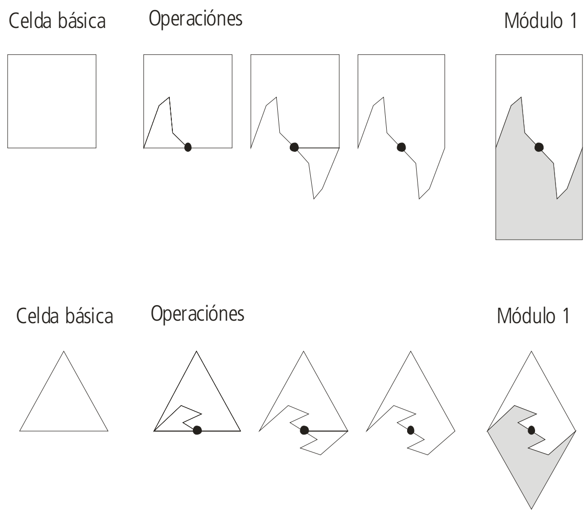


En las siguientes rotaciones con respecto a un vértice de la forma básica, la rotación solamente se puede realizar sobre uno de los lados adyacentes del lado del que se ha recortado la pieza ya que los dos son iguales en longitud.



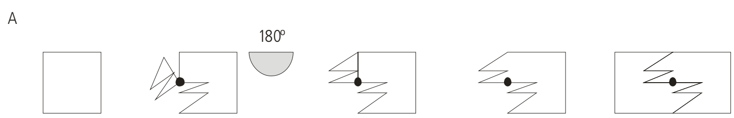


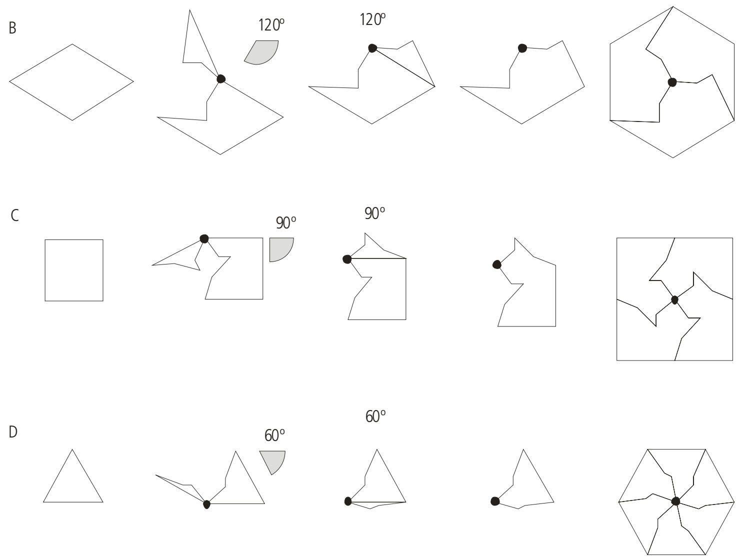
En el segundo tipo de rotación: rotación sobre el punto medio de un lado, la rotación se puede realizar sobre el punto medio de cualquier lado de la forma básica. En este caso, la pieza que se corta de un lado, se gira 180º alrededor del punto medio de un lado y se vuelve a colocar sobre el mismo lado. Si esta es la única operación que se realiza sobre una forma, se necesitan dos celdas básicas para formar el módulo.



La rotación sólo se puede realizar sobre formas básicas con ángulos de 60º, 90º o 120º. Cuando se hace una rotación, el ángulo sobre el que se realiza la rotación determina el número de celdas que se necesitan para crear el módulo. Una rotación o giro alrededor de un ángulo de 60º necesita 6 celdas básicas para formar un módulo. Una rotación de 90º necesita 4 celdas básicas para formar un módulo y una rotación de 120º necesita 3 celdas básicas para crear el módulo.

En resumen, se puede realizar el siguiente cuadro:





En A, la rotación se realiza sobre un mismo lado, es una rotación sobre el punto medio del lado y se necesitan dos piezas de la forma básica para realizar el módulo que se utilizará para generar el patrón.

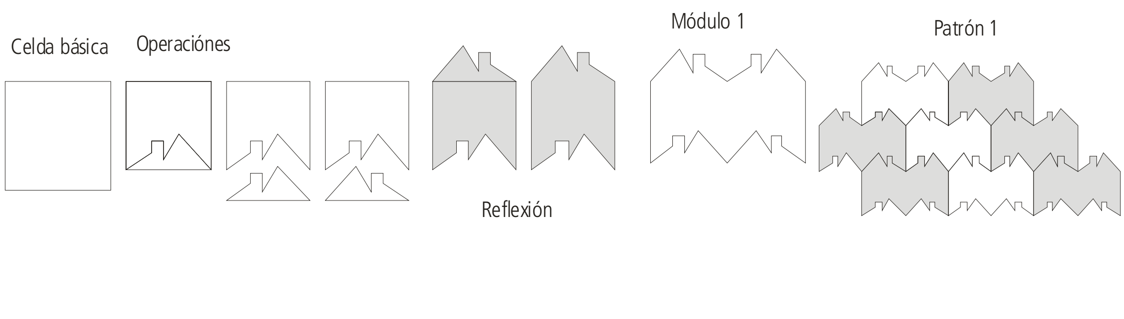
En B, las piezas giran en torno a un ángulo de 120º y, por lo tanto, se necesitan tres piezas (120 x 3 = 360) para realizar el módulo.

En C, las piezas giran en torno a un ángulo de 90º, y se necesitan cuatro formas para completar el módulo (90 x 4 = 360).

En D, las piezas giran en torno a un ángulo de 60º y se necesitan 6 piezas para crear el módulo (6 x 6 = 360).

4. Reflexión

En la reflexión, se realizan las operaciones de simetría, como la traslación, o el desplazamiento seguido de una reflexión sobre cualquiera de los lados de la celda básica. A continuación, se crea una copia de la forma transformada y luego se refleja sobre uno de los lados de la forma que no haya sido alterado por ninguna operación de simetría.

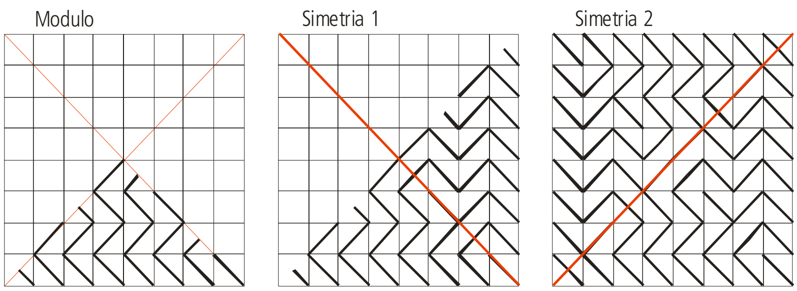


9.3.- ANÁLISIS DE OBRAS

9.3.1.- FRANÇOIS MORELLET

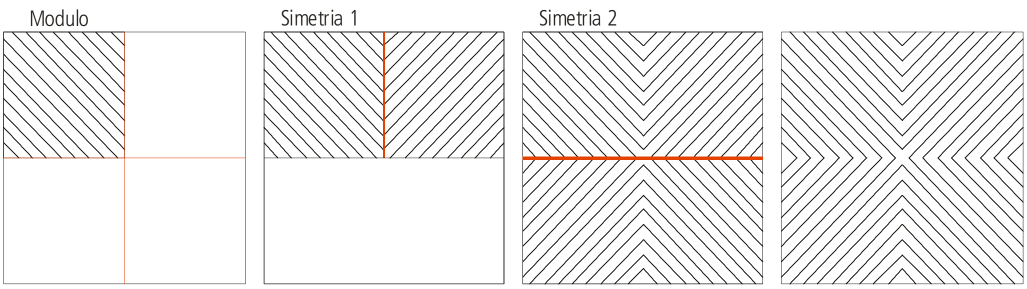
1. Líneas 45º, 135º, 1956[1]

Dada una matriz de 8 x 8 = 64 casillas, para generar la obra se trazan las diagonales principales del cuadrado que dividen el espacio en 4 triángulos rectángulos isósceles. Se elige el triángulo inferior, cuya hipotenusa es el lado inferior del cuadrado, y se utiliza para generar un módulo que por simetría complete la superficie. El criterio para realizar el módulo es alternar filas de líneas a 45º y a 135º, o lo que es lo mismo, diagonales a derecha o izquierda de cada una de las casillas del triángulo. Una vez realizado el módulo, por simetría con respecto a la diagonal descendente del cuadrado, la que va del vértice superior izquierdo al vértice inferior derecha, se crea una plantilla que completa la mitad del cuadrado. Una nueva simetría con respecto a la otra diagonal del cuadrado, completa la obra.



2. Ángulos rectos concéntricos, 1956[2]

Dado un cuadrado en el que se han trazado las medianas, se elige uno de sus cuadrantes, por ejemplo, el cuadrante superior izquierdo, y sobre él, se trazan líneas a 45º paralelas a la diagonal principal descendente, de forma que la distancia entre ellas sea constante. Con este módulo obtenido se realiza una simetría con respecto a la mediana vertical del cuadrado y con el resultado, una segunda simetría con respecto a la mediana horizontal.



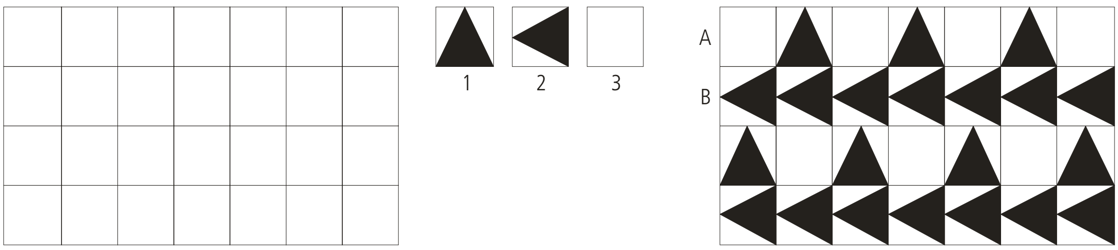
[1] Lignes 45º, 135º, 1956.

[2] Angles droits concentriques, 1956.

3. Pintura, 1952[3]

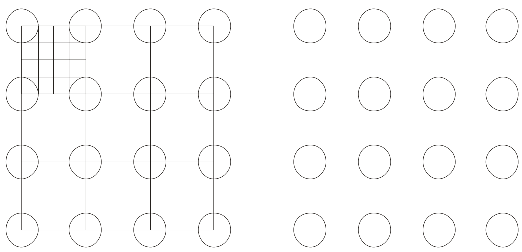
Dada una matriz de 4 x 7 = 28 cuadrados, y tres módulos, 1, 2, 3, Morellet completa la matriz de acuerdo al siguiente criterio:

1. Establecer dos tipos de filas: A y B. La fila B está formada por una cadena continua de módulos del tipo 2. La fila A, está formada por una combinación repetitiva de dos módulos: 1 y 3, que se suceden uno a otro en alternancia.
2. La disposición de las filas en la matriz, realizando una lectura de arriba abajo y de izquierda a derecha, responde al siguiente orden: A, B, A, B. Hay que destacar que la fila A varía su punto de inicio al introducirse en la matriz: unas veces comienza por el módulo 1 y otras por el 2.

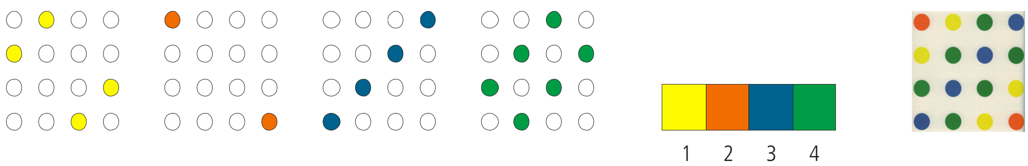


4. Azul – verde – amarillo – naranja, 1954[4]

Dada una matriz de 3 x 3 = 9 casillas, y un módulo circular, de diámetro igual a la mitad de uno de los cuadrados de la matriz, se trata de completar la matriz colocando un módulo en cada uno de sus vértices.



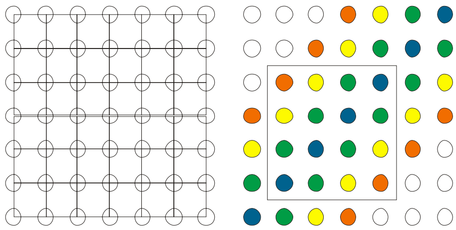
La homogeneidad y simetría de los módulos se interrumpe al introducir en la obra un criterio de color. Se utilizan cuatro colores: azul, verde, amarillo y naranja y se distribuyen de la siguiente forma:



[3] Peinture, 1952.

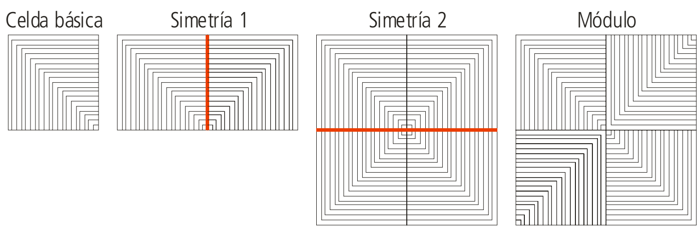
[4] Bleu – vert – jaune – orange, 1954.

El criterio de color aunque simétrico para cada uno de los colores de una forma aislada, no parece mostrar un criterio fácil de entender. Pero si se considera la obra como parte de una superficie mayor a la que por selección se le han sustraído una serie de elementos, aparece un criterio de orden cromático muy definido: hay una alternancia de colores, aplicados a las líneas paralelas a la diagonal principal ascendente del cuadrado, la que va del vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho, que responde a la siguiente secuencia: naranja, amarillo, verde, azul, verde, amarillo, naranja,…



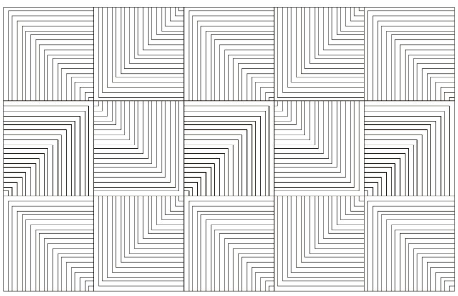
5. Pintura, 1952[5]

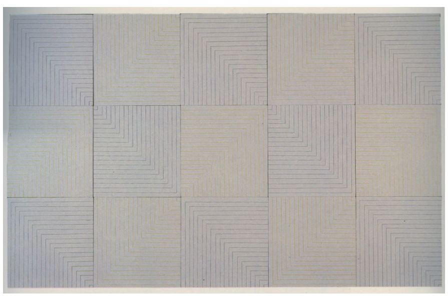
Dada una celda básica simétrica generada por líneas ortogonales entre sí y distanciadas de una forma constante, si se le aplican dos simetrías consecutivas, primero sobre un eje vertical y después sobre uno horizontal, de forma que pasen por los lados vertical derecho e inferior del cuadrado, se obtiene un módulo, visualmente, concéntrico: simetría 2. Si se intercambia el módulo inferior izquierdo con el módulo superior derecho, manteniendo la misma orientación y sentido que el que le corresponde después de haber aplicado las simetrías anteriores, se obtiene un nuevo módulo formado por dos estructuras concéntricas, una con un único centro de concentración en el centro geométrico del cuadrado, y otra con dos centros de concentración excéntricos, en el vértice superior derecho y en el vértice inferior izquierdo.

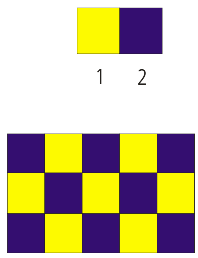


Con este módulo obtenido se crea un patrón de 3 x 5 cuadrados y se le aplica color. Se utiliza la pareja de colores complementarios amarillo, azul – violeta, que se distribuye por la matriz alternando los dos colores.

Patrón





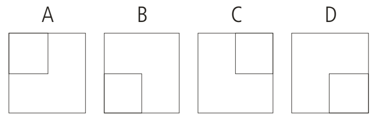


[5] Peinture, 1952.

9.3.2.- JAN KUBICEK

1. Elementos cuadrados en contraposición, 1974[6]

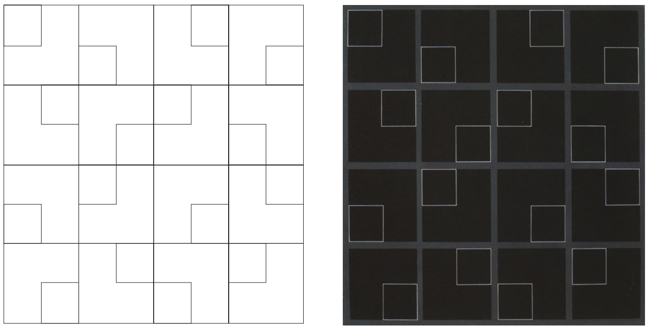
El sistema generador de la obra está basado en cuatro módulos A, B, C y D, iguales en diseño pero con orientaciones espaciales diferentes:



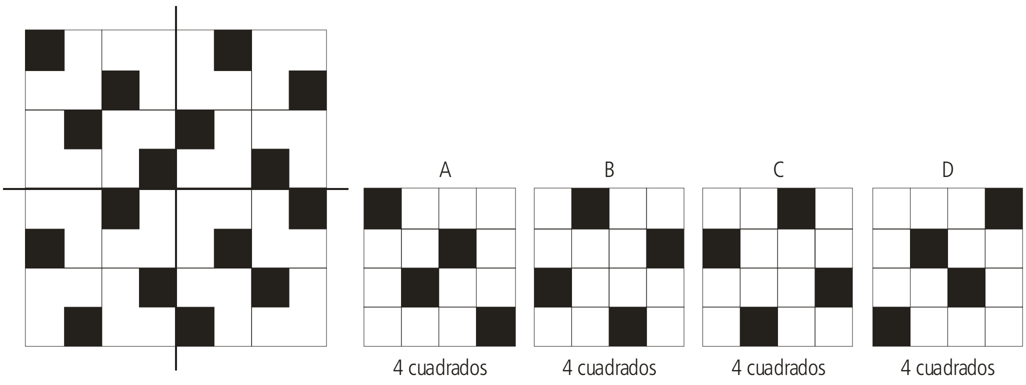
Estos módulos se distribuyen en una matriz cuadrada de 4 x 4 = 16 casillas según la siguiente sucesión:

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

El resultado que se obtiene al aplicar los módulos a la matriz, es el siguiente:



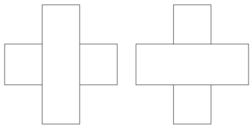
Si se observa la regularidad con la que aparecen cada uno de los módulos en la matriz, se da la paradoja de que se repiten los mismos patrones que resultan visualmente si se contempla la obra dividida en cuatro cuadrantes, de forma que cada uno de ellos este formado por cuatro cuadrados que representan la presencia de cada uno de los módulos en la matriz:



[6] Quadratelemente in Krontaposition, 1974.

2. Estructura con elementos cruzados – Contraposición de lo estático y la rotación, 1972[7]

Jan Kubicek utiliza dos módulos en forma de cruz, para realizar esta composición. Aunque ambos son iguales en su perímetro, son diferentes en su configuración interna: el módulo 1, tiene el tramo vertical superpuesto; y el módulo 2, el horizontal.



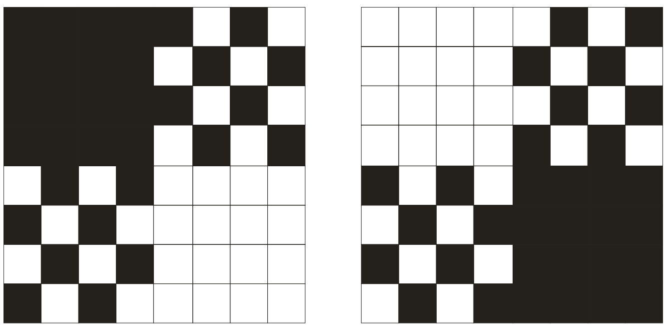
1 2

La superficie de la obra está dividida en una matriz de 8 x 8 = 64 cuadrados. Teniendo en cuenta estos dos módulos, su distribución en la matriz responde a la siguiente tabla:

1	1	1	1	1	2	1	2
1	1	1	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	2	1	2
1	1	1	1	2	1	2	1
2	1	2	1	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2	2
2	1	2	1	2	2	2	2
1	2	1	2	2	2	2	2

Gráficamente la repetición de cada uno de estos módulos genera el siguiente dibujo, donde las casillas negras indican que en esa posición está colocado el módulo correspondiente, 1 o 2; y las casillas en blanco indican ausencia de ese módulo:

1 2

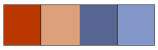


32 cuadrados 32 cuadrados

Se puede observar con esta representación que hay el mismo número de módulos 1 que 2 en la obra y que su distribución es simétrica una con respecto a la otra.

Se incluyen además en el proceso cuatro colores, A, B C, D cuya secuencia por líneas horizontales, H, y verticales, V, está definida en la siguiente tabla:

[7] Strucktur mit Kreuzelementen – Kontraposition von Statik und Rotation, 1972



A B C D

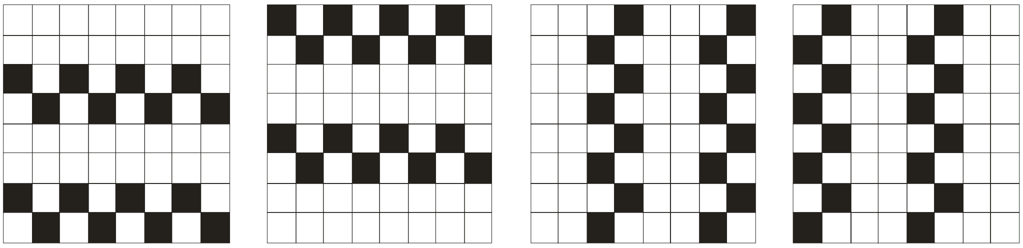
H	B	D	B	C	B	D	B	C
	D	B	C	B	D	B	C	B
	A	D	A	C	A	D	A	C
	D	A	C	A	D	A	C	A
	B	D	B	C	B	D	B	C
	D	B	C	B	D	B	C	B
	A	D	A	C	A	D	A	C
	D	A	C	A	D	A	C	A

V	A	C	A	D	A	C	A	D
	C	A	D	A	C	A	D	A
	B	C	B	D	B	C	B	D
	C	B	D	B	C	B	D	B
	A	C	A	D	A	C	A	D
	C	A	D	A	C	A	D	A
	B	C	B	D	B	C	B	D
	C	B	D	B	C	B	D	B

Si, igual que antes, se representa gráficamente la repetición de cada uno de los colores, tanto en horizontal como en vertical, se obtienen gráficos muy curiosos, llenos de paralelismos, complementariedad y simetrías:

Horizontales

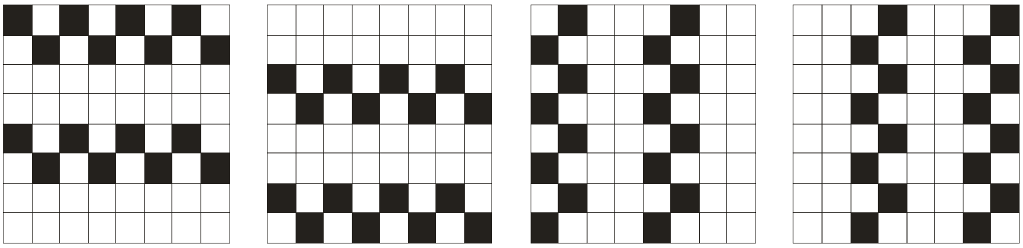
A B C D



16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados

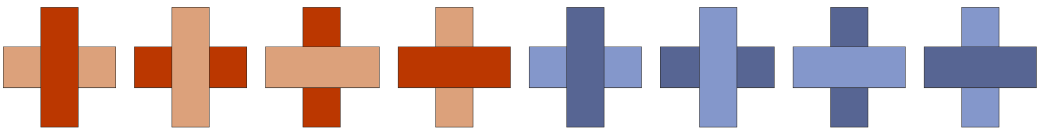
Verticales

A B C D



16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados 16 cuadrados

Finalmente, si se combinan las formas de los módulos 1 y 2, con las posibilidades cromáticas A, B, C, D, se obtienen 8 nuevos módulos en la composición:



1 2 3 4 5 6 7 8

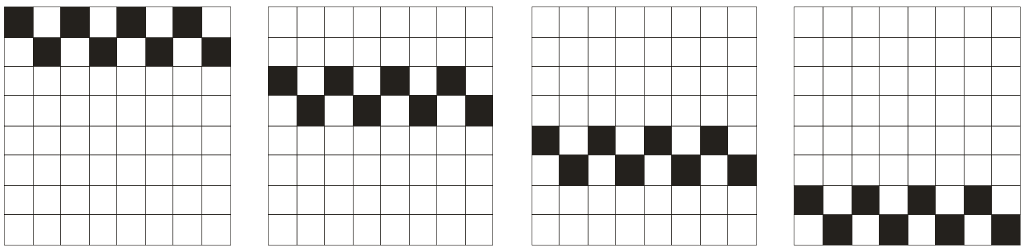
La frecuencia y distribución cromática de estos módulos en la obra está determinada por la siguiente tabla:

1	5	1	6	1	7	1	8
5	1	6	1	7	1	8	1
2	5	2	6	2	7	2	8
5	2	6	2	7	2	8	2
3	5	3	6	3	7	3	8
5	3	6	3	7	3	8	3
4	5	4	6	4	7	4	8
5	4	6	4	7	4	8	4

Y gráficamente, para apreciar las relaciones simétricas y rítmicas entre los módulos, se realizan las siguientes tablas:

Horizontales

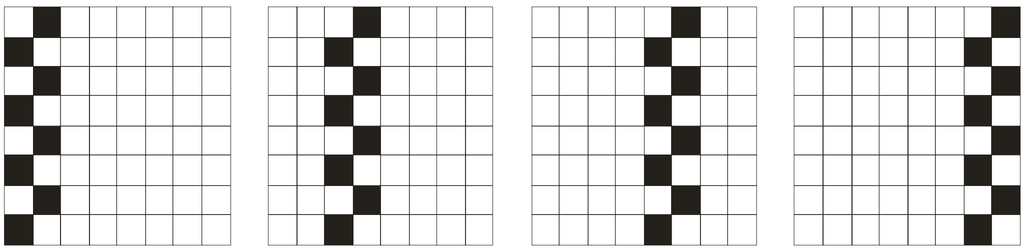
1 2 3 4



8 cuadrados 8 cuadrados 8 cuadrados 8 cuadrados

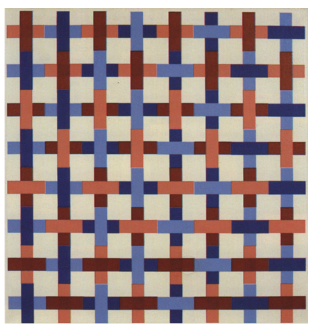
Verticales

5 6 7 8



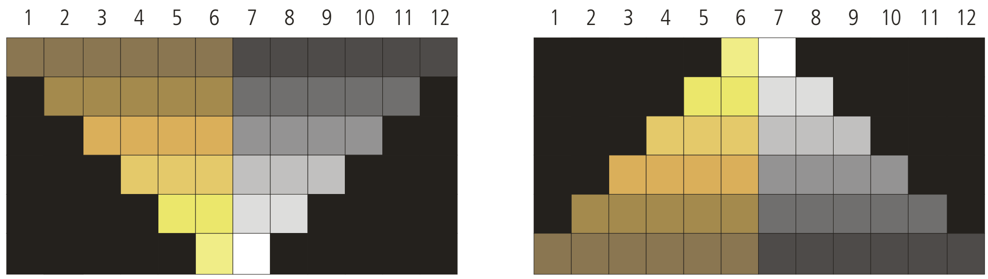
8 cuadrados 8 cuadrados 8 cuadrados 8 cuadrados

Se presenta una imagen de la obra para poder comprender la complejidad del orden de simetría generado en su ejecución:



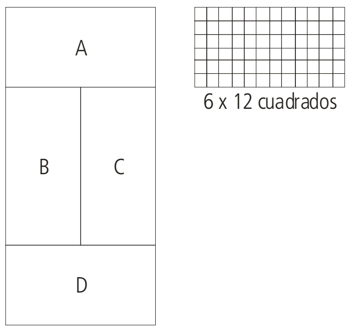
3. Orden y casualidad, 1975[8]

En esta obra se parte de unas series cromáticas ordenadas: 6 escalas acromáticas de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 términos; y 6 escalas policromas también de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 elementos. Cada una de estas escalas funciona a modo de módulo y la obra se construye por combinación y secuencia de estos módulos:



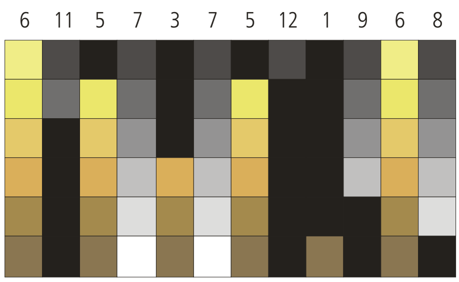
Se presentan los dos modelos porque, en su uso, se considera igual utilizar la serie en su posición original o invertida.

La obra está formada por una matriz de 24 x 12 = 288 casillas, que está dividida en cuatro partes iguales de 6 x 12 = 72 cuadrados, A, B, C, D, con distintas orientaciones espaciales: dos verticales, B y C, y dos horizontales, A y D:



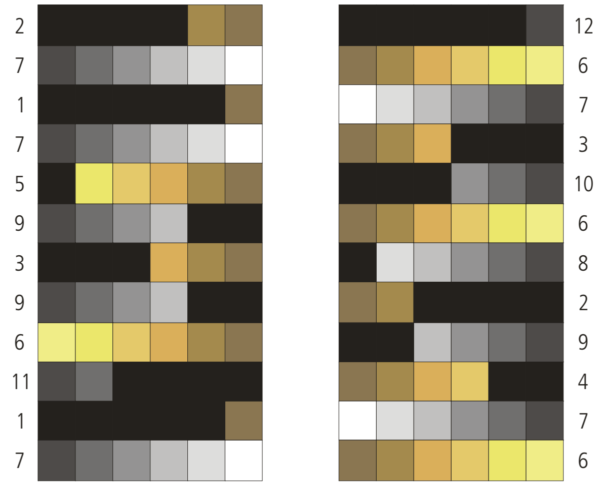
La secuencia de módulos cromáticos que completan cada uno de estas partes está descrita en la siguiente tabla:

Modulo A



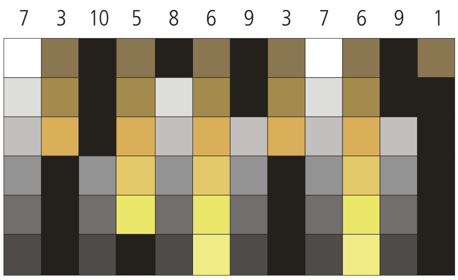
8 Ordnung und Zufall, 1975.

Modulo B

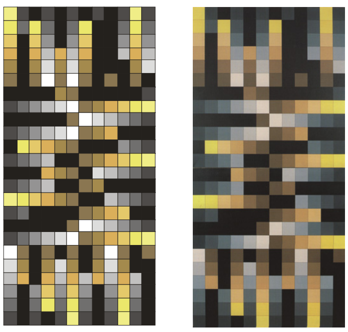


Modulo C

Modulo D



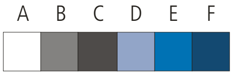
Se presenta a continuación, una representación digital y fotográfica de la obra para poder apreciar las diferencias cromáticas:

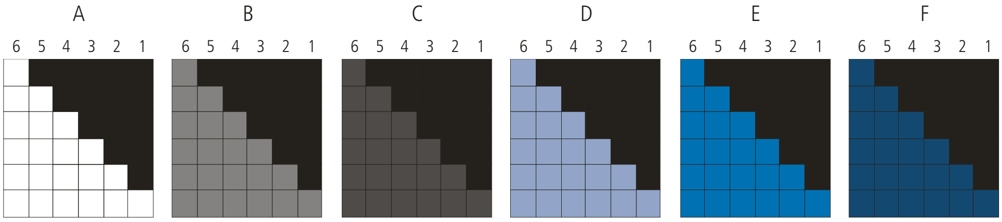


4. Estructura – construcción y casualidad, 1977[9]

Esta obra está construida a partir de una matriz rectangular de 24 x 12 = 288 cuadrados, dividida en cuatro rectángulos iguales superpuestos, de 6 x 12 = 72 casillas. Kubicek utiliza dos tipos de módulos para generar la obra: uno cromático: A, B, C, D, E, F; y otro de cantidad: cuántos cuadrados se tienen que poner de un mismo color: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Esquemáticamente, la representación de los módulos es la siguiente:

[9] Struktur – Kronstruktion und Zufall, 1977.





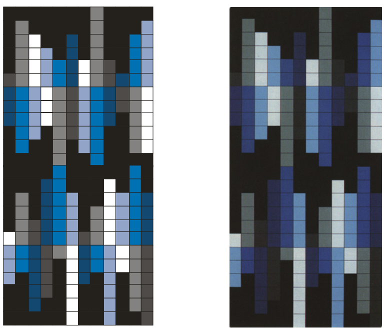
Los módulos cromáticos, son gamas monocromas de un único tono. Según la elección de los colores, la realización de la obra responde a la siguiente secuencia, de arriba abajo y de izquierda a derecha:

C	B	A	D	E	F	A	B	C	F	E	D
F	E	D	A	B	C	D	E	F	C	B	A
A	B	C	F	E	D	C	B	A	D	E	F
D	E	F	C	B	A	F	E	D	A	B	C

Para la elección de tamaños, la plantilla o partitura necesaria para construir la composición es la siguiente:

1	5	4	3	2	4	2	6	2	1	4	5
3	5	4	3	6	4	5	6	3	2	5	5
1	4	2	5	6	4	1	3	5	4	6	4
3	2	5	4	1	6	3	2	6	2	5	6

La combinación de los dos criterios da como resultado la siguiente obra, representada digital y fotográficamente:

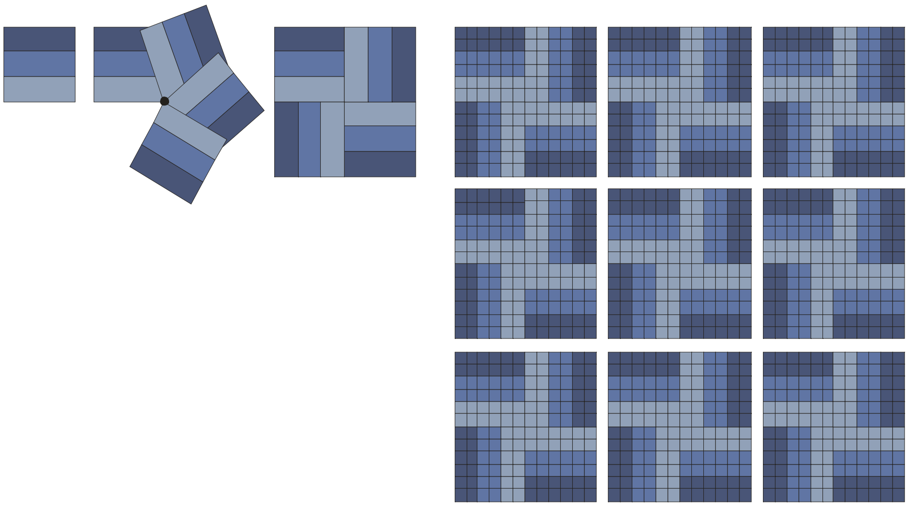


5. Estructura – construcción y casualidad (nueva fase), 1976[10]

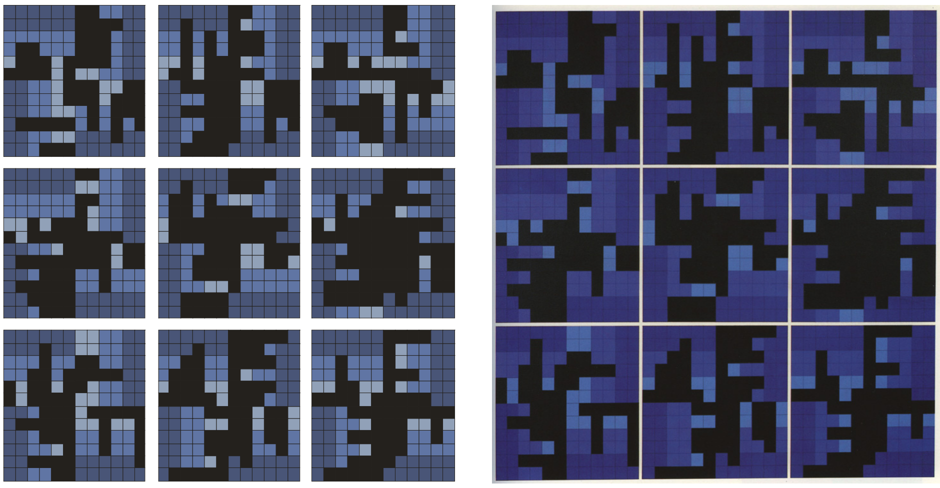
Los pasos para generar esta obra son los siguientes: crear un modulo según el siguiente procedimiento: crear un cuadrado de 6 x 6 casillas y dividirlo en 3 partes de 2 x 6 = 12 casillas cada una. Aplicar a cada uno de estos

[10] Struktur – Konstruktion und Zufall (neun Phasen), 1976.

rectángulos obtenidos un color azul con distinto grado de luminosidad. Girando este cuadrado cuatro veces con respecto a uno de sus vértices, el inferior derecho, se obtiene un módulo de 12 x 12 = 144 cuadrados que se va a utilizar como unidad para construir una matriz de 3 x 3 = 9 casillas:



Sobre la nueva matriz, establecer una operación de conteo. Cada casilla puede tomar los valores de 0 a 144 dependiendo del número de casillas que hayan sido borradas (pintadas de negro). Se pueden contar los llenos y los vacíos; y establecer secuencias continuas o discontinuas, previsibles o aleatorias, con poca o mucha diferencia entre ellas. Todas las posibilidades elegidas, generarán imágenes diferentes.



9.3.3.- RICHARD PAUL LOHSE

En las obras de Richard Paul Lohse, los títulos describen las líneas de desarrollo que hay detrás de cada una de sus obras. Ofrecen un medio de orientación y permiten el acceso a la idea y estructura de sus composiciones.

Hay una gran similitud entre el formato del cuadro y el módulo, lo que crea una gran unidad. La superposición de la estructura sobre la superficie del cuadro unifica todas las partes del cuadro.

Lohse, en su obra, muestra un orden no jerárquico que puede subsistir sin que haya preferencia de áreas o cualidades. Además de buscar la unidad en sus obras, Lohse tiende a una expresión dinámica. Muestra predilección por los movimientos diagonales y los desarrollos lineales.

El color es el medio pictórico más importante de su obra. En su obra se pueden apreciar distintas estrategias para enfrentarse al tema del color. Unas veces, elige colores muy saturados entre los que existe un gran contraste de tono: amarillo, rojo, verde, azul,… y, a veces, incluye en sus obras blanco, negro y grises.

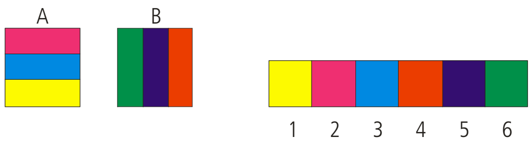
Otras veces, crea ritmos basados en sucesiones suaves de tonos uniforme y progresivamente graduados. En estos casos, la continuidad entre los tonos de la serie crea una sensación de unidad dentro de la variedad cromática.

En otros casos utiliza como protagonistas de sus obras a parejas de colores complementarios. En las obras que utiliza este criterio, el punto de partida creativo para desarrollar la estructura cromática es la elección de la pareja de complementarios: un simple color llama a un segundo que es diametralmente opuesto a él. A continuación se eligen secuencias graduadas de colores que sirvan para unir estos dos colores según un orden lógico. El desarrollo general de las obras basadas en este concepto, comienza generalmente con el amarillo. Después continúa con su complementario el azul – violeta. Y a continuación se produce el movimiento cromático del amarillo al azul – violeta a través de los rojos, y del azul – violeta al amarillo a través de los verdes. Estas secuencias de color son lineales y graduales.

En su trabajo, es también importante, la elección de los colores basados en criterios de luminosidad y oscuridad, y de calidez y frialdad.

1. Grupos de colores ordenados en cuadrados, 1944[11]

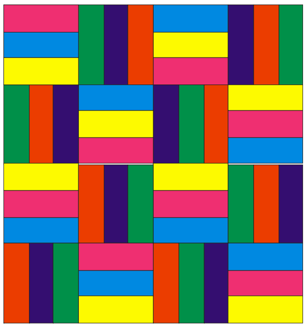
Una matriz de 12 x 12 = 144 casillas, se completa con 16 módulos de 3 x 3 = 9 cuadrados cada uno. Se utilizan dos módulos, A y B, que tienen la misma estructura pero distinta orientación espacial: uno se representa horizontalmente y el otro de forma vertical; y además, se diferencian en la gama cromática que utilizan: uno emplea los tres colores primarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta y cyan; y el otro, los tres colores secundarios de la misma mezcla: rojo, verde y azul – violeta:

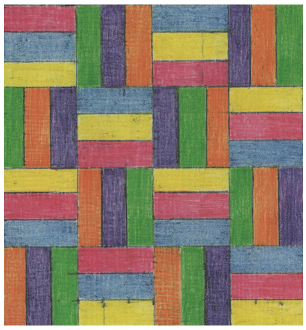


La secuencia de aparición de los módulos A y B en la matriz es alterna y el inicio de cada una de las filas difiere del inicio de la anterior fila en una posición:

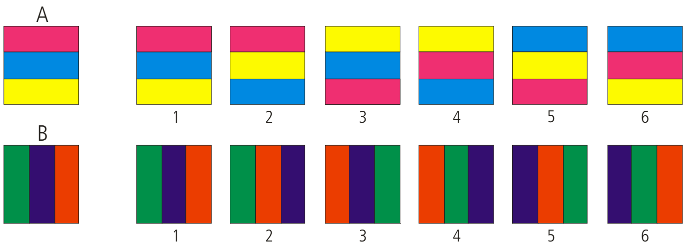
A	B	A	B
B	A	B	A
A	B	A	B
B	A	B	A

[11] Groupes de couleurs ordonnés en carrés, 1944.





No todas las representaciones (8), de cada uno de los módulos, A y B, son iguales, sino que existen variaciones de orden de los tres elementos que lo componen. Todas las posibilidades que se pueden dar están determinadas por el número de permutaciones de tres elementos, $P_6 = 3! = 3 \times 2 = 6$:



Atendiendo a este criterio, la representación de los módulos A y B con las variaciones de orden y posición, 1, 2, 3, 4, 5, y 6 se realiza según la siguiente tabla, comenzando a leer en la esquina superior izquierda y recorriendo la matriz de arriba abajo y de izquierda a derecha y representando con gris las casillas donde está presente el módulo A:

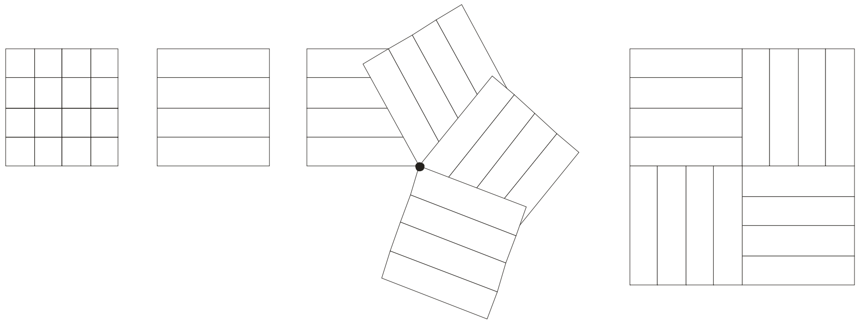
1	1	5	5
2	5	6	4
4	3	4	2
3	1	4	6

Puede observarse que de las seis permutaciones posibles, el módulo A sólo utiliza cuatro, repitiendo tres de ellas, dos veces: 1, 4, 5. El módulo B, sin embargo, utiliza todas las permutaciones posibles y repite dos de ellas dos veces: 2, 3.

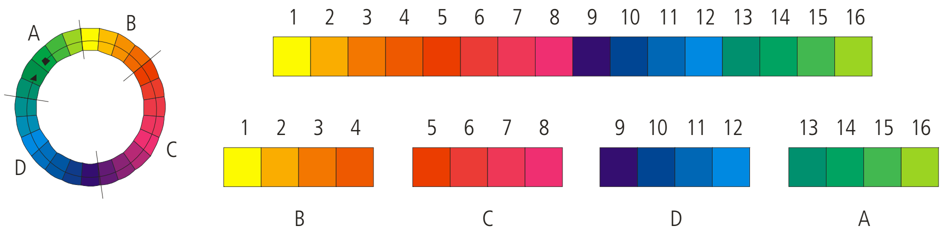
2. Rotaciones axiales, 1951[12]

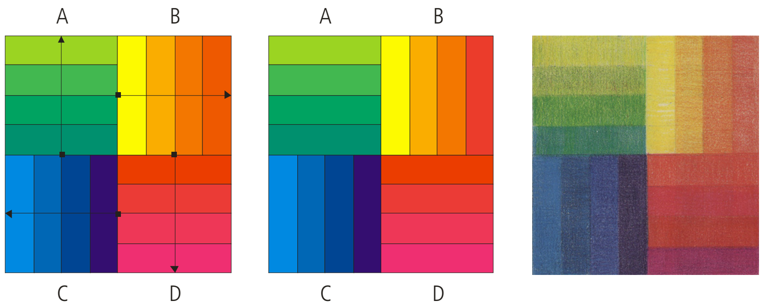
El tema principal de esta obra es la existencia de dos rotaciones axiales con respecto al centro del cuadro. La primera rotación se utiliza para crear la superficie del cuadro: un cuadrado generado por la rotación de un módulo. El módulo cuya superficie es una matriz de 4 x 4 = 16 cuadrados, representado por cuatro tetraminós en forma de I, se gira cuatro veces con respecto a su vértice inferior derecho y se obtiene una matriz de 8 x 8 = 64 casillas.

[12] Rotations axiales, 1951.



La segunda rotación con respecto al eje que pasa por el centro del cuadrado es cromática. La estructura cromática de la obra está definida por cuatro escalas policromas de cuatro tonos cada una, con un total de 16 tonos diferentes. La sucesión de los tonos en la distribución de los módulos responde al orden espectral de los colores, representado aquí en forma de un círculo cromático, comenzando su recorrido con los colores del módulo superior izquierdo del cuadrado, A, y girando en el sentido de las agujas del reloj, se van acotando tramos cromáticos, B, C, D, entre los que se seleccionan los cuatro más representativos.

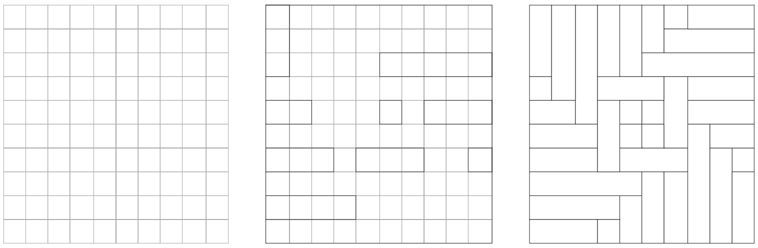




3. Rotaciones axiales, 1951[13]

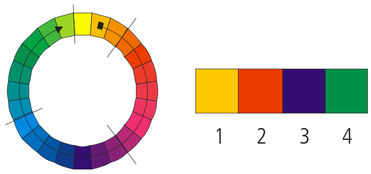
En esta obra se vuelve a repetir el tema de las rotaciones axiales y se vuelven a realizar en dos tipologías: rotaciones estructurales y rotaciones cromáticas. Las rotaciones estructurales sirven para generar las líneas estructurales que generan el diseño del cuadro. Se parte de una matriz de 10 x 10 = 100 casillas, que se divide en cuatro grupos de 25 cuadrados cada uno. Estos 25 cuadrados se representan en la matriz de 100 cuadrados utilizando poliominós en forma de I con diferentes dimensiones: monominós, dominós, triminós, tetraminós y pentominós, y con una distribución seleccionada para que el resultado final represente a una serie de líneas entrecruzadas con un centro representado por cuatro cuadrados, uno para cada uno de los colores protagonista de la obra. Una vez que se ha creado esta plantilla, se gira con respecto al centro del cuadrado cuatro veces y se obtiene la estructura de la obra.

[13] Rotations axiales, 1951.



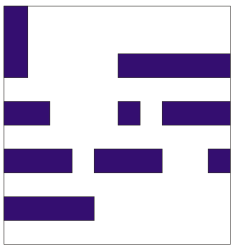
25 cuadrados

Para completar la obra se selecciona una estructura cromática basada en la elección de cuatro tonos, uno para cada una de las cuatro plantillas de poliominós que se ha generado. La elección de los tonos se realiza recorriendo toda la gama de colores del espectro de forma secuencial y progresiva y eligiendo lo cuatro más representativos. Esta selección se puede representar en el círculo cromático, dividido en cuatro zonas y con una rotación axial de los colores con respecto a su centro.



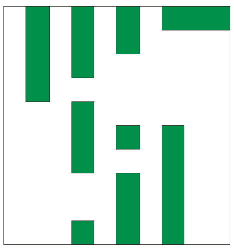
La representación de las cuatro plantillas cromáticas con los poliominós correspondientes es la siguiente:

A



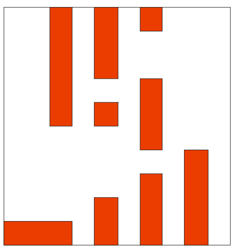
25 cuadrados

B



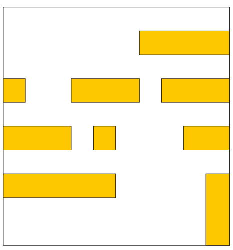
25 cuadrados

C



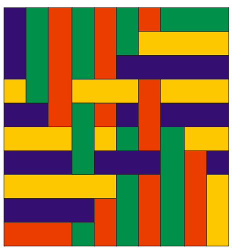
25 cuadrados

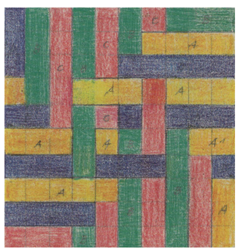
D



25 cuadrados

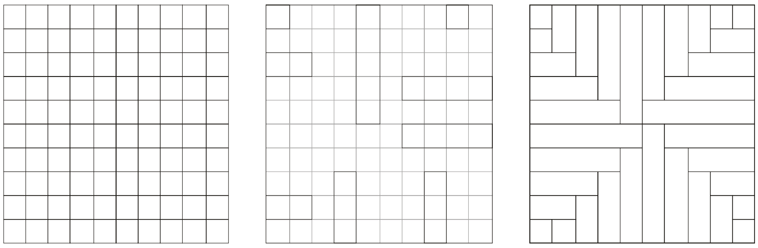
El resultado final de la obra representada digital y fotográficamente, se muestra en las siguientes imágenes:





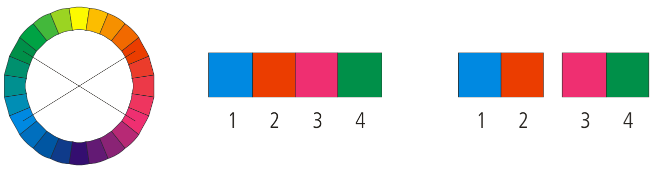
4. Grupos entrecruzados de colores complementarios con una distribución cuantitativa igual de colores, 1950[14]

Partiendo de una matriz de 10 x 10 = 100 cuadrados, se dividen en cuatro grupos de 25, de forma que con un grupo de ellos se dibuje una serie de poliominós, en forma de I: monominós, dominós, triminós, tetraminós, pentaminós, distribuidos por el cuadrado con el objeto de crear una estructura radial centrípeta. Con la rotación de esta plantilla con respecto a su centro se genera la estructura del cuadro.

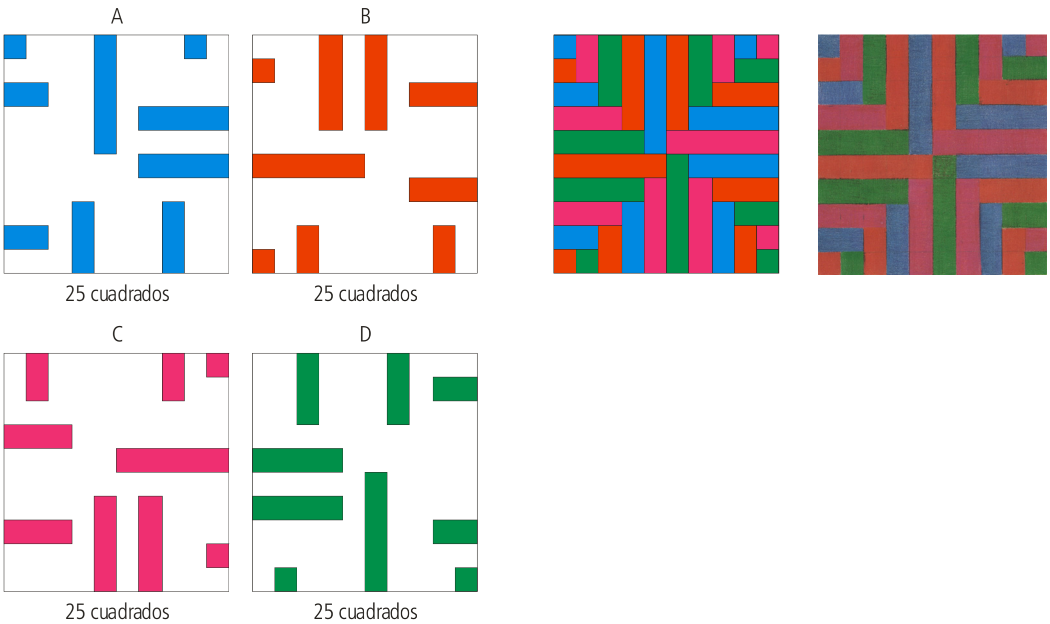


25 cuadrados

La elección de la estructura cromática se basa en la selección de dos parejas de complementarios: rojo – cyan y magenta – verde.



A cada una de las cuatro plantillas de poliominós generadas, A, B, C, D, se le atribuye un color y juntas, superpuestas generan la obra. En la obra final, por su propio proceso generativo, hay la misma cantidad de color de cada uno de los colores seleccionados.

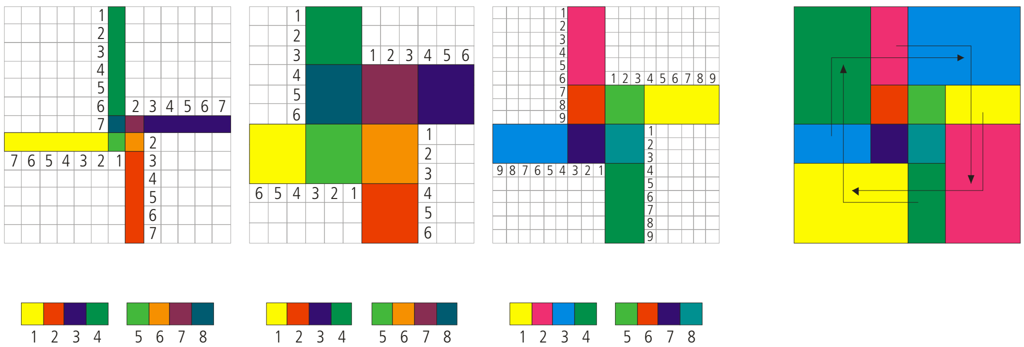


[14] Groupes entrecroises de couleurs complémentaires á distribution quantitative égale des couleurs, 1950.

5. Ejes alrededor del centro, 1951[15]

Ejes alrededor del centro son un conjunto de obras basadas en el mismo principio generativo: sobre una matriz cuadrada, seleccionar su centro y marcarlo con cuatro cuadrados, sin importar su tamaño. A partir de estos elementos, trazar por cada uno de ellos un eje, del mismo ancho que los cuadrados, en las cuatro direcciones del espacio: arriba, abajo, izquierda y derecha. El soporte queda dividido en 12 superficies: cuatro, correspondientes a los cuadrados centrales; cuatro, de los ejes; y las otras cuatro, las superficies generadas entre ejes. Esta es la estructura del cuadro.

Sobre esta estructura se aplica otra estructura cromática. Se seleccionan cuatro colores muy saturados, generalmente primarios y secundarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta, cyan, rojo, verde y azul – violeta, y se aplican sobre los ejes de la composición. Para los cuatro cuadrados centrales, se seleccionan colores que resulten de la mezcla sustractiva, dos a dos, de los cuatro colores previos. Estos colores tienen un grado de saturación inferior a los primeros. Las superficies entre ejes se colorean con los colores de los ejes, desplazados por giro, en el sentido de las agujas del reloj o el contrario, y manteniendo la misma secuencia que en los ejes.



6. Rotaciones axiales, 1952[16]

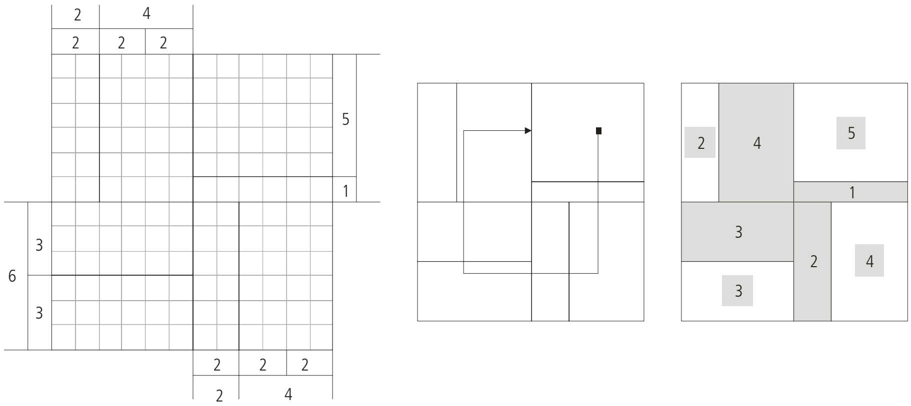
Dada una matriz cuadrada de 12 x 12 = 144 cuadrados, para crear la estructura lineal del cuadro, se crea un contador que sea capaz de sumar 6 de distintas formas: 1 + 5; 2 + 4; y 3 + 3. Se divide la matriz en cuatro partes iguales y, comenzando en el cuadrante superior derecho, y girando en el sentido de las agujas del reloj, se aplican los resultados obtenidos de forma secuencial, hasta llegar al límite de la secuencia 3 + 3, y a partir, de este punto invertir el proceso hasta volver a obtener 1 + 5:

Cuadrantes	
4º	1º
3º	2º

Cuadrantes	1º	2º	3º	4º	1º
	1 + 5	2 + 4	3 + 3	2 + 4	1 + 5

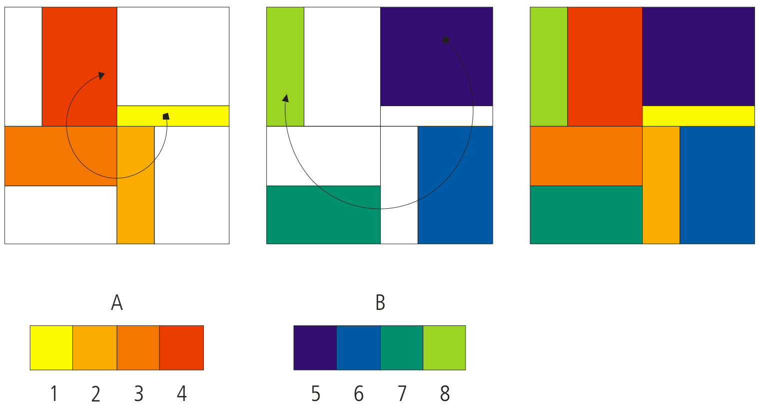
[15] Axes autour de centres, 1951.

[16] Rotations axiales, 1952.



La estructura generada, divide la obra en ocho partes: cuatro, que tienen un vértice común, y que se pueden denominar ejes; y cuatro, que son superficies entre ejes. Es interesante destacar que, con esta partición del espacio, se producen dos series numéricas. La primera es la que generan los propios ejes, con respecto a su anchura: 1, 2, 3, 4, comenzando en el cuadrante 1º y girando en el sentido de las agujas del reloj. La otra, se genera entre las superficies entre ejes. Comenzando en el cuadrante 4º y, contando en el sentido contrario a las agujas del reloj, la serie de números enteros que se genera es: 2, 3, 4, 5.

La estructura cromática de la obra se centra en la elección de dos grupos de colores, cada uno de cuatro tonos, enfrentados por el contraste de cálido y frío. La gama de los colores cálidos, una escala policroma del rojo al amarillo, se sitúa en los ejes de la estructura. Y la gama de colores fríos, en las superficies entre ejes. Es importante señalar que si se empieza en el primer cuadrante y se gira en el sentido de las agujas del reloj, los colores cálidos según cambian de croma, pierden luminosidad, siendo el amarillo el color más luminoso de la serie. En los colores fríos el proceso es inverso, en su desarrollo van ganando luminosidad, siendo el azul – violeta, 5, el color más oscuro y el verde amarillento, 8, el más luminoso. Según este criterio, en la casilla 1º, se da el máximo contraste de luminosidad entre los colores amarillo, 1, y azul – violeta, 5.

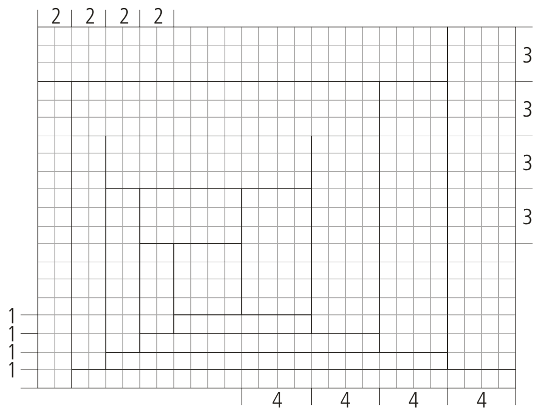


7. Rotaciones alrededor del centro, 1953[17]

Dada una matriz rectangular de 20 x 28 = 560 casillas cuadradas, se establece un sistema de conteo en círculos concéntricos en los que se repite siempre la misma secuencia de números enteros: 1, 2, 3, 4. Las cantidades de la

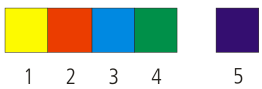
[17] Rotations autour de centres, 1953.

serie se utilizan para crear módulos rectangulares, paralelos a los lados del rectángulo, con anchura la indicada por el número de la serie correspondiente. Se comienza en el lado inferior del rectángulo, creando un rectángulo de altura 1 y de longitud, el ancho del rectángulo menos 2 cuadrados. Continúa la serie en el lado vertical izquierdo, dibujando un rectángulo de anchura 2 y de longitud, la altura del rectángulo menos 3 cuadrados. A continuación el lado superior, creando un rectángulo de anchura 3 y longitud, el largo del rectángulo menos 4. Y finalmente, el lado derecho del rectángulo, en el que se crea un rectángulo de anchura 4 y de longitud, el alto del rectángulo menos 1. Según este sistema, y esta dirección de giro, el sentido de las agujas del reloj, se realizan tantas vueltas al rectángulo como se desee: en este caso, crear un cuadrado central de 4 x 4 casillas cuadradas.



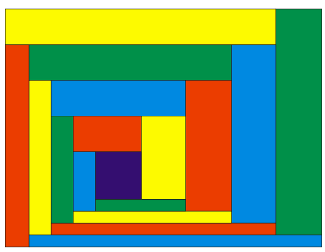
El aspecto visual de la obra, da como resultado, cuatro rectángulos de la misma anchura y distinta longitud por cada lado del rectángulo y un cuadrado en el centro.

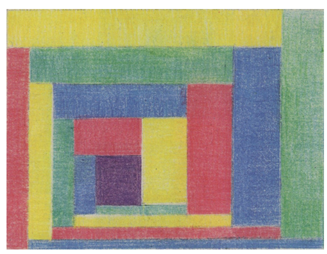
La estructura cromática generada, trabaja con cinco colores muy saturados; cuatro de ellos: amarillo, rojo, azul y verde: 1, 2, 3, 4, que se van utilizando, en el giro, para colorear los rectángulos que se van generando, y el quinto color, azul – violeta, para colorear el cuadrado central. La secuencia de los colores utilizados en el giro son permutaciones de los cuatro colores:



Vuelta 1º	Vuelta 2º	Vuelta 3º	Vuelta 4º	Cuadrado
3 2 1 4	2 1 4 3	1 4 3 2	4 3 2 1	5

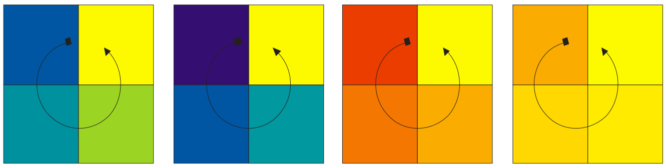
Esta disposición de los colores permite que, cada grupo de cuatro rectángulos paralelo a uno de los lados del rectángulo, tenga la secuencia cromática completa y en órdenes diferentes. Es decir, cada color está representado en las cuatro direcciones del rectángulo.



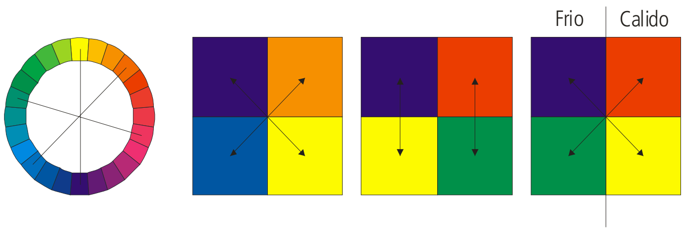


8. Rotaciones axiales, 1953[18]

Para una estructura repetitiva de un cuadrado divido en cuatro partes iguales, se crea una serie de obras en las que se dan rotaciones axiales con respecto a un eje que pasa por el centro del cuadrado, de tipo cromático. Las rotaciones comienzan en el cuadrado superior izquierdo y giran al resto de los cuadrados en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cada una de estas rotaciones es una escala policroma de cuatro tonos muy saturados. Todas tienen en común que el punto final de la serie es el amarillo.

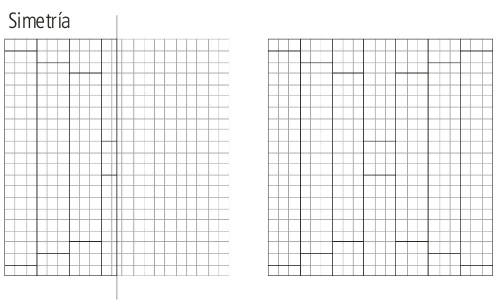


Se pueden dar también las rotaciones teniendo en cuenta la disposición de los colores con respecto al círculo cromático, eligiendo parejas de colores complementarias o diametralmente opuestas, para colorear los cuadrados de la obra.



9. Grupo simétrico de colores complementarios, 1954[19]

A partir de una matriz cuadrada de 21 x 21 = 441 cuadrados, se realizan sobre ella las siguientes operaciones: dividir el cuadrado verticalmente en siete grupos de 3 cuadrados de anchura cada uno. Horizontalmente, trazar líneas, en los módulos verticales, empezando por el más alejado por la izquierda y avanzando hacia la derecha, que sigan la siguiente secuencia: 1, 2, 3, 9. Por cada módulo vertical, trazar dos líneas: una con respecto al lado inferior del cuadrado y otra, con respecto al superior. El número de la serie indica el número de cuadrados que debe distanciarse la línea a trazar de los límites del cuadrado.



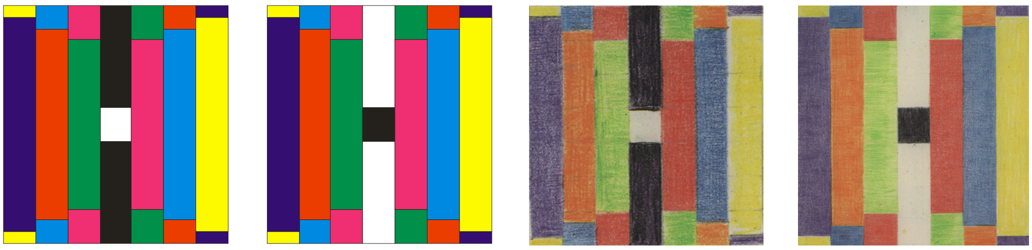
[18] Rotations axiales, 1953.

[19] Groupe symétrique de couleurs complémentaires, 1954.

Una vez construida la estructura lineal, seleccionar la estructura cromática que se le va a aplicar. Elegir las tres parejas básicas de colores complementarios: amarillo – azul-violeta, cyan – rojo y magenta – verde, y el blanco y el negro. Aplicar los colores por parejas de complementarios a cada uno de los módulos verticales obtenidos. Como en cada uno de ellos hay tres superficies, colocar unas veces los primarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta y cyan, en el centro y sus complementarios en los extremos; y otras, colocar los colores secundarios de la mezcla sustractiva en el centro: verde, rojo y azul – violeta, y sus complementarios en los extremos. Desarrollar una secuencia de forma que visualmente, los dos módulos verticales de una misma pareja de complementarios sean simétricos con respecto a un eje vertical que pase por el centro del cuadrado:

1 2 3 4 5 6　　1 4　2 5　3 6

En el módulo central se incluyen los colores neutros blanco y negro y, existen dos versiones: una versión que tiene el cuadrado central en blanco y los rectángulos extremos negros, y la contraria.



10. Interpenetración de grupos de colores, 1954[20]

Dado un cuadrado de 126 x 126 cm, realizar una estructura modular, con diferencia de proporción entre los módulos, en las dos direcciones del espacio: vertical y horizontal, según la siguiente secuencia de medidas, en centímetros, cuya ley de formación es comenzar por el 3 e ir añadiendo +3 a cada nuevo número que se va obteniendo:

3 18 6 15 9 12 12 9 15 6 18 3

En esta secuencia hay dos series de números enteros intercaladas, cuya razón entre ellos es +3: una que avanza de izquierda a derecha en orden creciente, 3, 6, 9, 12, 15, 18; y otra que, avanzando en el mismo sentido, es de orden decreciente, 18, 15, 12, 9, 6, 3.

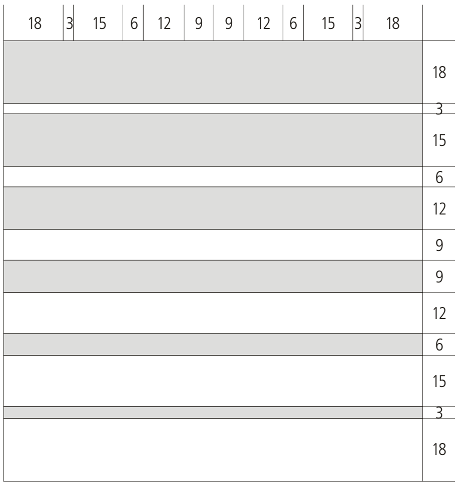
3 6 9 12 15 18

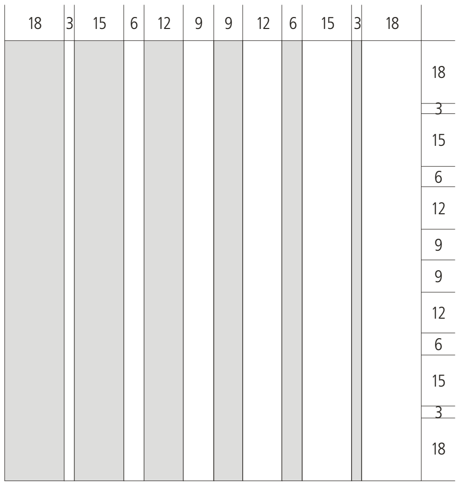
18 15 12 9 6 3

Si se gira el módulo obtenido con esta estructura, con respecto al centro y se superponen ambas estructuras, el resultado es el siguiente:

---

[20] Interpénétrations de groupes de couleurs, 1954.



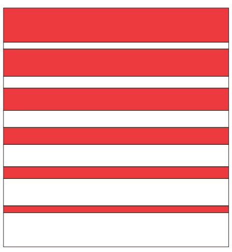
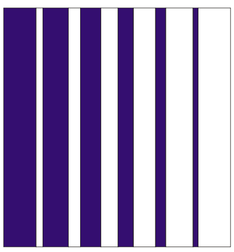
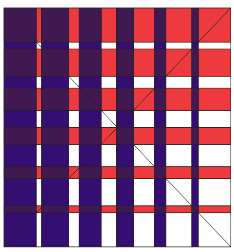
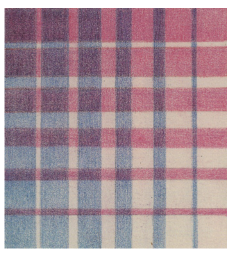


Al superponer los dos módulos se puede observar que, en sus diagonales, aparece una secuencia de cuadrados proporcionales entre sí.

Cromáticamente se eligen dos colores que tengan un alto contraste de calidez y frialdad entre sí, para que cada una de las superficies cromáticas sea capaz de, visualmente, mantenerse autónoma frente a la otra, sin fundirse. Como resultado de superponer los dos módulos, surgen también una serie de rectángulos comunes a ambos módulos a los que se aplica un tercer color, 3, poco saturado y mezcla de los dos anteriores, 1 y 2. El cuarto color es el blanco que se utiliza, en ambos módulos para representar a una de las series implicadas en el proceso de construcción de las líneas estructurales que corresponden a la secuencia antes indicada.

La representación cromática de los tonos utilizados para dar color a los módulos, está representada en el siguiente esquema:

La obra final, es muy dinámica ya que la superficie está irregularmente distribuida, pero existe una gran estabilidad visual porque se intuye un orden que proviene de una ley de crecimiento muy concreta y fácil de identificar.

11. Interpenetraciones de grupos de colores, 1954[21]

Esta obra tiene un proceso generativo muy relacionado con la anterior. Parte de una superficie de 9 x 9 cm dividida estructuralmente por la siguiente estructura modular con diferencia de proporción entre módulos:

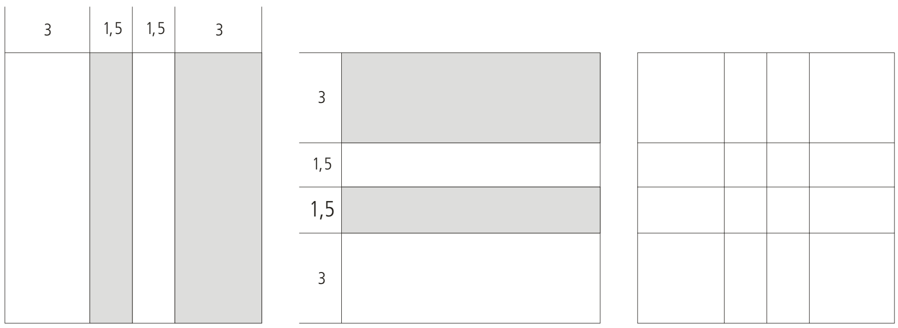
3 1,5 1,5 3

En esta secuencia también hay dos series de números enteros intercaladas, cuya razón entre ellos es +1,5: una que avanza de izquierda a derecha en orden creciente, 1,5, 3; y otra que, avanzando en el mismo sentido, es de orden decreciente, 3, 1,5.

3 1,5

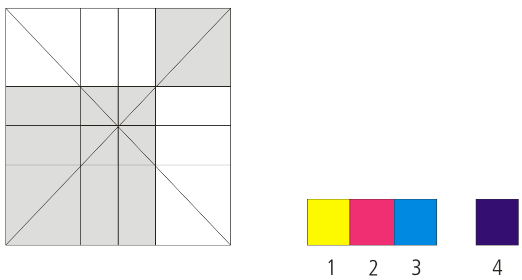
1,5 3

Si se aplica esta secuencia a dos lados consecutivos del cuadrado, uno vertical y otro horizontal, se obtiene el siguiente resultado:



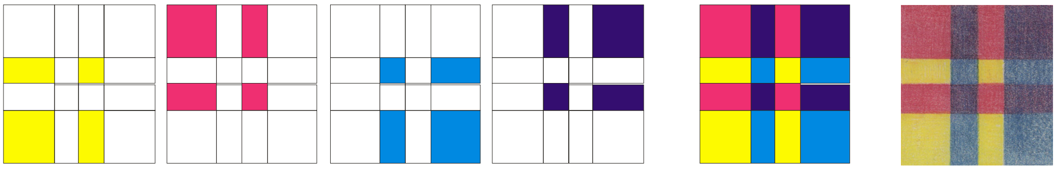
La estructura modular generada es simétrica con respecto a su mediana horizontal y vertical.

Lo que diferencia a esta serie de la anterior es su forma de aplicar el color. Si se trazan las dos diagonales principales al cuadrado estructurado obtenido, se obtienen dos cuadrados proporcionales entre sí con origen en cada uno de los vértices del cuadrado. Los cuadrados de mayor tamaño de los dos obtenidos, se van a utilizar como protagonistas para aplicar el color al cuadro. Como hay cuatro cuadrados, se necesitan cuatro tonos diferentes. Primero, se seleccionan tres: los tres colores primarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta y cyan y se aplican a la estructura. Después se selecciona un cuarto color que es mezcla de dos de los anteriores, el azul – violeta (mezcla del magenta y del cyan).



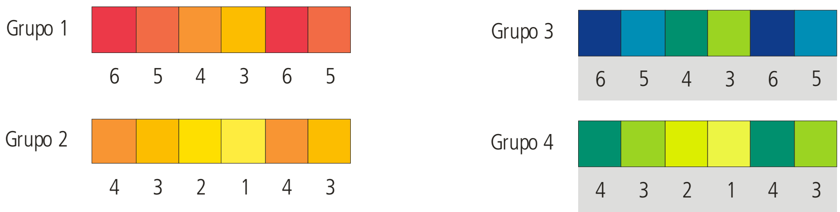
[21] Interpénétrations de groupes de couleurs, 1954.

El resultado de aplicar el criterio cromático anterior es que se crean cuatro módulos cromáticos, cada uno, con uno de los colores elegidos, y que al superponerse generan la obra:



12. Cuatro grupos de color azul / verde-rojo, 1956[22]

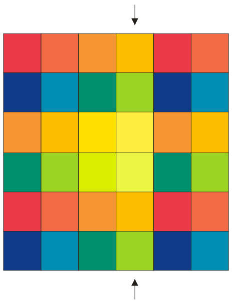
Sobre una superficie cuadrada compuesta por 6 x 6 = 36 cuadrados, se realizan las siguientes operaciones: rellenarla cromáticamente con cuatro grupos de color: dos verde – azulados, y dos rojos, según la siguiente codificación y tabla:



6	5	4	3	6	5
6	5	4	3	6	5
4	3	2	1	4	3
4	3	2	1	4	3
6	5	4	3	6	5
6	5	4	3	6	5

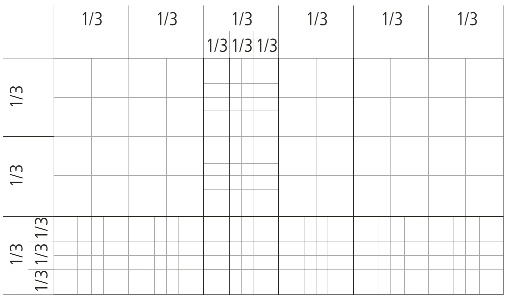
Si se unen los grupos cromáticos rojos, 1 y 2, y por otro lado, los grupos azul –verdosos, 3 y 4, se obtienen dos escalas policromas que en un extremo tienen un color muy cercano al amarillo y en el otro, el rojo y azul – violeta respectivamente. Lo que ocurre cromáticamente es que conviven en el cuadro dos gamas de color con un gran contraste entre ellas: la de los cálidos (rojos) y la de los fríos (azul- verdosos), y se distribuyen, horizontalmente, con alternancia. Visualmente se producen dos planos, uno generado por los colores cálidos, más cercano; y otro, generado por la gama fría, espacialmente, más lejano. Pero uno y otro confluyen en una línea vertical, la cuarta empezando por la izquierda, que homogeniza las dos gamas convirtiéndose en el punto de atención más importante del cuadro. Es la protagonista de la obra.

[22] Quatre groupes de couleur bleu / vert-rouge, 1956.

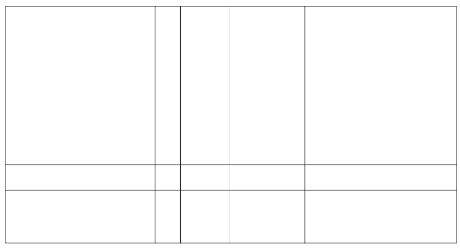


13. Cuatro grupos simétricos, 1947 / 1959[23]

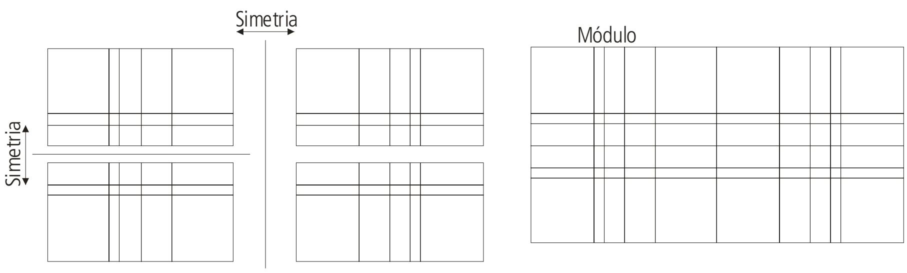
Partiendo de una celda básica rectangular formada por 2 cuadrados adyacentes y dividida en 6 x 12 cuadrados, se realizan las siguientes operaciones de diseño para crear las líneas estructurales que se necesitan para fragmentar el espacio de una forma adecuada al proyecto de color que se va a aplicar a la obra. Cada uno de los cuadrados se divide, en todos sus lados a tercios. El tercio más cercano al centro del primer cuadrado de la izquierda, y el inferior, se subdivide, a su vez, en tercios. A partir de esta plantilla se eligen las siguientes líneas estructurales:



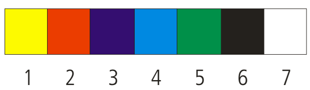
Celda basica



Aplicando a esta celda básica dos operaciones de simetría, una sobre un eje horizontal y otra sobre uno vertical, se obtiene un módulo que en sí mismo ya es la obra.

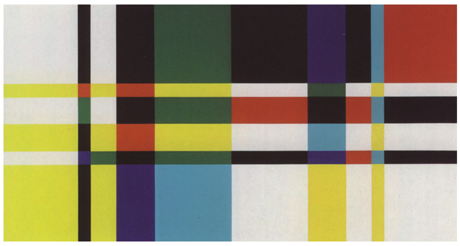


Sobre esta estructura se aplica un grupo cromático compuesto por 7 colores: cinco de ellos son colores con un alto grado de saturación: amarillo, cyan, rojo, verde y azul – violeta; los otros dos, son neutros: el blanco y el negro.



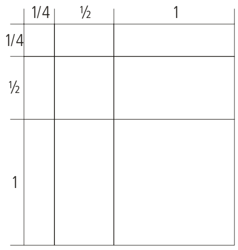
[23] Four Symmetrical Groups, 1947 / 1959.

Con esta serie se colorean las superficies de color generadas de manera que se rompa la simetría de la estructura, sin ningún criterio de orden concreto:

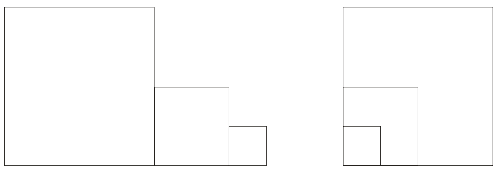


14. Progresión diagonal – vertical – horizontal de las filas amarillas – verdes y rojas, 1955 / 1971[24]

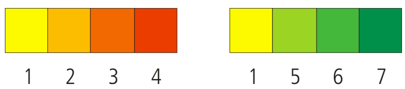
En un soporte cuadrado se aplica una estructura modular de diferente proporción entre módulos, en las dos direcciones del espacio. La realización de la estructura comienza en el vértice inferior derecho. A partir de este punto y de derecha a izquierda y de abajo arriba se establece la siguiente relación proporcional: la medida de la anchura o altura entre un módulo y el siguiente, es siempre la mitad del anterior. La secuencia de medidas seria: 1, 1/2, 1/4.



En la diagonal principal descendente, de izquierda a derecha, se encuentran un conjunto de cuadrados proporcionales entre sí.

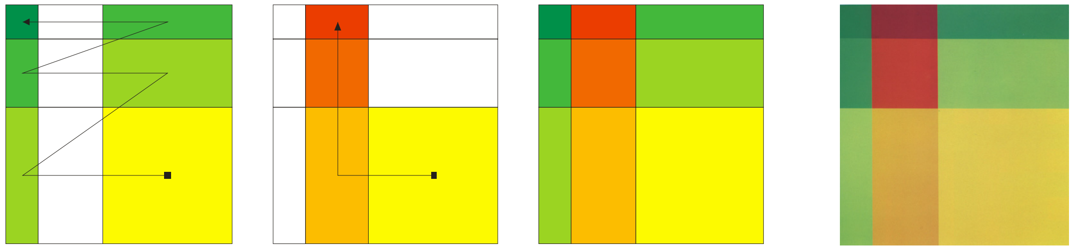


El criterio cuantitativo de la obra está definido también en el uso del color. La obra está formada por dos escalas policromas en progresión de cuatro tonos cada una, con un elemento cromático de origen común: el amarillo.



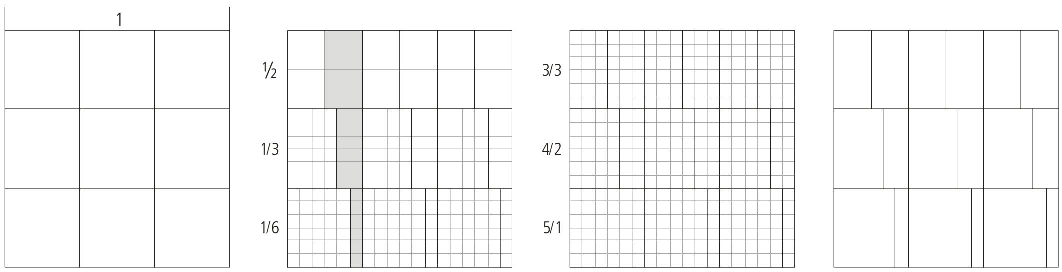
La primera serie, del amarillo al verde, 1, 5, 6, 7, se distribuye por el espacio, de derecha a izquierda y de abajo arriba, por filas. La segunda, del amarillo al rojo, 1, 2, 3, 4, se distribuye en forma de L, de derecha a izquierda y de abajo arriba, formando una columna central en la obra:

[24] Diagonal – Vertical – Horizontal Progression of Yellow – Green and Red Rows, 1955 / 1971.

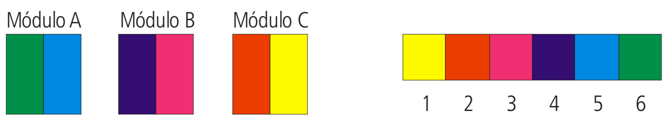


15. Tres divisiones horizontales, 1949 / 1984[25]

Dada una matriz cuadrada de 3 x 3 = 9 casillas, dividir, verticalmente, cada una de las casillas de la primera fila, empezando a contar por arriba, en dos partes iguales; las de la segunda, en tres; y las de la tercera, en seis. A partir de esta plantilla, crear una estructura con las siguientes relaciones entre los módulos: los módulos de la primera fila están en relación 1:2; los de la segunda1:3; y los de la tercera, 1:6. Si en lugar de hacer estas subdivisiones irregulares, se dividen todos los cuadrados de la matriz en 6 partes, la relación entre los módulos obtenidos será la siguiente: en la primera fila, 3:3; en la segunda, 4:2; y en la tercera, 5:1.



Sobre esta estructura se aplica color. Se eligen los seis colores básicos: amarillo, magenta, cyan, rojo, verde y azul-violeta, y se unen por parejas creando los siguientes módulos cromáticos:

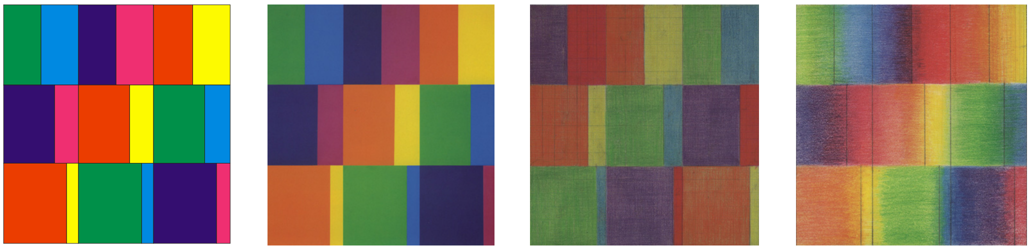


La aplicación de los módulos a la obra se realiza según el siguiente criterio: en cada una de las filas y columnas tienen que estar presentes los tres módulos. Su distribución en la matriz responde a la siguiente secuencia generada por las permutaciones de los elementos A, B, C:

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Sobre esta obra existen varias versiones. La de la izquierda es la utilizada para tomar los datos obtenidos, explicados anteriormente. Las otras dos son proyectos con igual o diferentes resultados o técnicas:

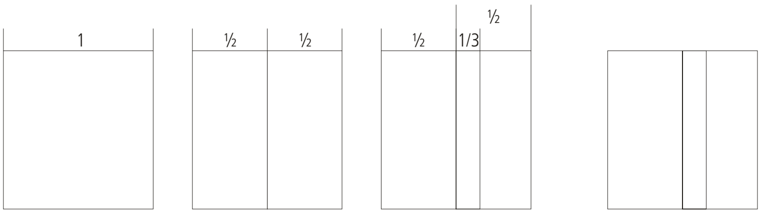
25 Three horizontal divisions, 1949 / 1984.



Si se observa la obra horizontalmente, se puede ver que en cada fila se da una secuencia de color ordenada según el círculo cromático: amarillo, rojo, magenta, azul – violeta, cyan y verde. Esta concepción cromática de la obra contribuye a una representación del contraste cuantitativo y cualitativo de los colores.

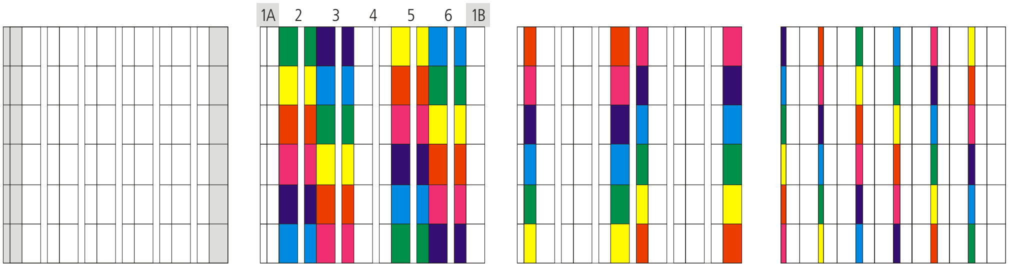
16. Seis bandas horizontales con seis grupos de color formalmente iguales en cada una de ellas[26]

La obra se realiza sobre una matriz de 6 x 6 = 36 cuadrados, en la que en cada uno de ellos se incluye el siguiente módulo:



Módulo

La distribución de los módulos en la matriz no es igual en todas las casillas. Los cuadrados de la primera y última columna están fragmentados: dos partes del módulo en la primera y una, en la última. El resto de las columnas son iguales.



La obra está formada por los seis colores básicos: amarillo, magenta, cyan, rojo, verde y azul-violeta, de modo que, todas las filas tengan un cuadrado completo de cada uno de estos colores, aunque todas las superficies de color iguales no estén juntas.

[26] Six horizontal bands with six formally equal colour groups in each.

La distribución de los colores, sobre las superficies generadas por el módulo antes descrito, responde a ritmos enlazados complejos. Por ejemplo, aquellos cuadrados con los colores primarios de la mezcla sustractiva: amarillo, magenta y cyan, sólo tienen en su línea vertical interna, colores de la misma triada. Y por el mismo razonamiento, a los colores secundarios de la mezcla sustractiva: rojo, verde y azul-violeta, les ocurre lo mismo. Verticalmente, la secuencia de los colores en las columnas 2, 3, 5 y 6 se mantiene constante: el orden de los colores en el círculo cromático, aunque el punto de inicio de la serie varía en cada una de ellas. En las otras dos columnas la aplicación del color sobre el cuadrado divido en dos mitades desiguales, utiliza también la misma secuencia, sólo que en este caso, existen un desfase entre los colores de una parte y los de la otra de un cuadrado. En las líneas centrales de los módulos también se mantiene el mismo orden secuencial.

La relación de los colores de los cuadrados del fondo responde a la siguiente tabla:

Columna	1A	2	3	4A	4B	5	6	1B
	2	6	4	2	3	1	5	3
	3	1	5	3	4	2	6	4
	4	2	6	4	5	3	1	5
	5	3	1	5	6	4	2	6
	6	4	2	6	1	5	3	1
	1	5	3	1	2	6	4	2

La relación entre los colores pares (colores secundarios) e impares (colores primarios) de los cuadrados del fondo, se refleja en la siguiente tabla:

Columna	1A	2	3	4A	4B	5	6	1B
	2	6	4	2	3	1	5	3
	3	1	5	3	4	2	6	4
	4	2	6	4	5	3	1	5
	5	3	1	5	6	4	2	6
	6	4	2	6	1	5	3	1
	1	5	3	1	2	6	4	2

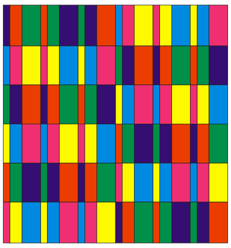
La relación de los colores de las líneas verticales, considerados en su secuencia horizontal, responde al siguiente criterio:

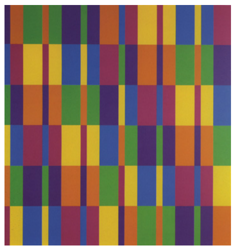
Columna	1	2	3	4	5	6
	4	2	6	5	3	1
	5	3	1	6	4	2
	6	4	2	1	5	3
	1	5	3	2	6	4
	2	6	4	3	1	5
	3	1	5	4	2	6

La relación de los colores pares (colores secundarios) e impares (colores primarios) de las líneas verticales estrechas, consideradas en su secuencia horizontal, está definida en la siguiente tabla:

4	2	6	5	3	1
5	3	1	6	4	2
6	4	2	1	5	3
1	5	3	2	6	4
2	6	4	3	1	5
3	1	5	4	2	6

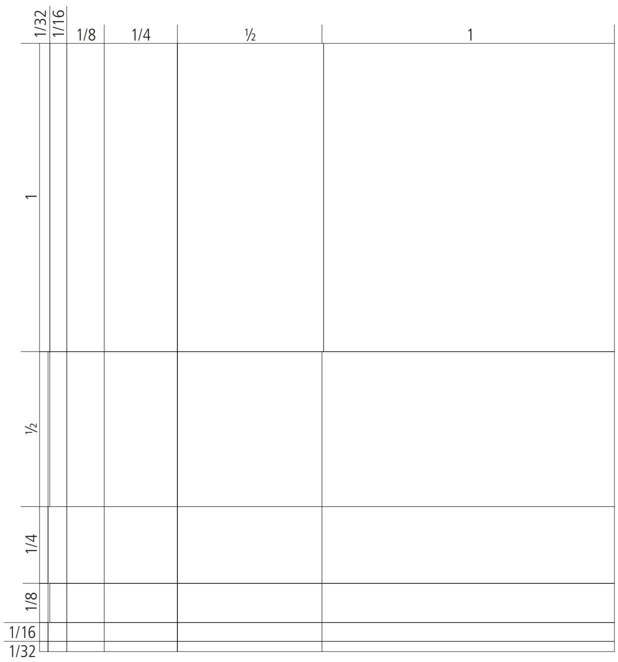
Existen unas permutaciones anidadas entre fondo y líneas. La relación cromática se produce entre secundarios o entre primarios.





17. Seis series sistemáticas de color horizontales con cuadrados rojos 1955 / 1983[27]

La obra presenta una estructura modular cuyas líneas estructurales muestran una gradación de estructura por cambio de tamaño y proporción entre los módulos y las líneas estructurales. Las seis subdivisiones que se realizan en cada dirección del espacio, disminuyen su distancia progresivamente a la mitad de la subdivisión anterior.



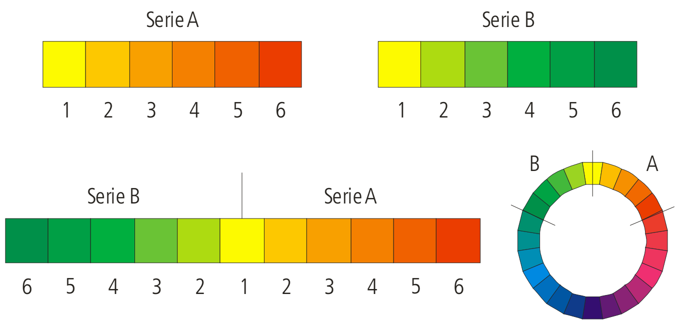
[27] Six horizontal systematic colour series with red squares 1955 / 1983.

Como consecuencia de esta división, surgen dos tipos de módulos geométricos: cuadrados, en su diagonal principal de abajo arriba, y rectángulos con distintas leyes proporcionales.

La relación de medidas y proporciones entre los lados de los cuadrados y rectángulos generados está determinada en la siguiente serie:

Medidas	Proporciones
1	1
0,5	1/2
0,25	1/4
0,125	1/8
0,625	1/16
0,3125	1/32

Lohse utiliza en esta obra dos series o escalas policromas de color: A y B. Cada una de ellas está formada por 6 tonos distanciados unos de otros con una gran regularidad y una distancia cromática muy pequeña, lo que hace que la secuencia genere visualmente un ritmo suave y continuo y exista una fuerte sensación de armonía en la obra. Las dos series parten de un elemento común, el amarillo. A partir de éste, tomando colores a derecha e izquierda de su posición en el círculo cromático se generan las siguientes series cromáticas:



La relación de los colores en la obra, según las series y tonos utilizados es la siguiente:

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B3	B2	A1	A2	A3	A4
B5	B4	B3	B2	A1	A2
B2	A1	A2	A3	A4	A5
B4	B3	B2	A1	A2	A3
B6	B5	B4	B3	B2	A1

Los elementos A1, amarillos, son comunes a las dos series.

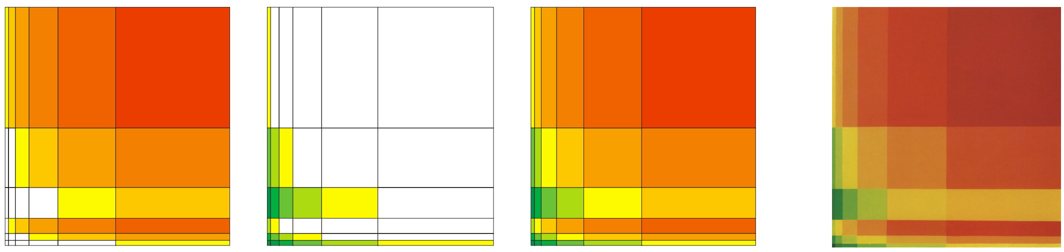
Si se considera la relación cuantitativa entre los colores, teniendo en cuenta el número de colores aplicado por cantidad, independientemente de que pertenezca a la serie A o B, se establece la siguiente tabla de relaciones:

Colores	Cantidades	
1	6	
2	10	2 x 5
3	8	2 x 4
4	6	2 x 3
5	4	2 x 2
6	2	2 x 1

Para la serie A y B, de una forma individual, el número de colores empleados es

Colores	Cantidades
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Teniendo en cuenta el tamaño de las superficies sobre las que se aplican las escalas cromáticas, la impresión visual que transmite esta obra es de una preponderancia de la gama de los colores cálidos (rojos) frente a la de los fríos (verdes).



18. Seis series sistemáticas de color del amarillo al azul, 1955 / 1969[28]

En una distribución uniforme del espacio cuadrado dividido en una matriz de 6 x 6 = 36 cuadrados, se distribuyen ordenadamente, por filas, grupos de seis colores extraídos de una serie de 10 tonos muy saturados, ordenados según la secuencia de los colores del espectro, y cubriendo toda su oferta de una forma muy simplificada.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[28] Six systematic colour series from yellow to blue, 1955 / 1969.

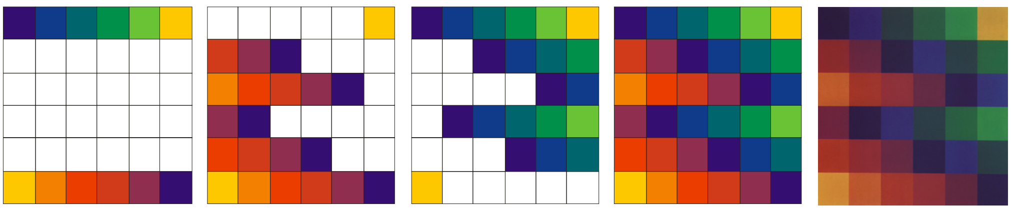
La distribución de los colores en la matriz responde al siguiente orden:

6	7	8	9	10	1
4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7
5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6

Entre los colores de la gama utilizada existe un gran contraste de calidez (rojos) y frialdad (azules verdosos).

Desde el punto de vista cuantitativo el número de colores aplicado por cantidad, da como resultado un conteo acumulativo en palíndromo:

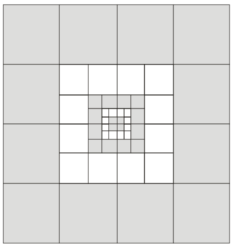
Colores	Cantidades
1	2
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2



La distribución de los colores en el cuadrado es simétrica y complementaria. Horizontalmente, la primera y última fila del cuadrado, comenzando a contar por arriba, representan el tramo de colores fríos de la serie y de los colores cálidos respectivamente. Ambas comparten el amarillo y el azul - violeta, pero la forma de secuenciar los colores es en orden inverso: en la gama de los azules verdosos, se realiza, de derecha a izquierda: del amarillo al azul – violeta; y en la gama de los rojos, de izquierda a derecha. A partir de esta secuencia, crecen las dos series con criterios simétricos hasta completar, por complementariedad, la superficie del cuadrado.

19. Cuatro grupos de color dispuestos en degradación con el centro reducido, 1956 / 1969[29]

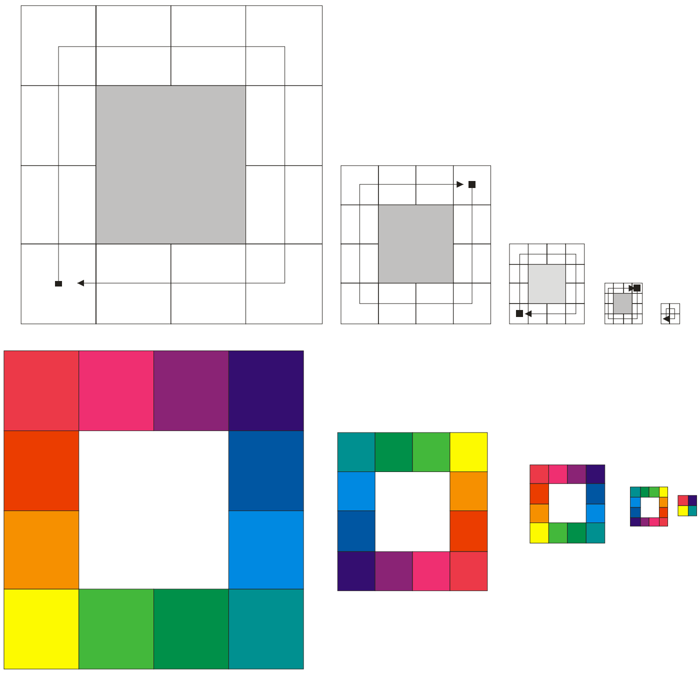
En un soporte cuadrado de 4 x 4 = 16 cuadrados, se dibuja una estructura concéntrica de marcos de cuadrados cada vez más pequeños, hasta llegar, en cuatro niveles, al centro que está formado por cuatro cuadrados. Cada uno de estos anillos de cuadrados está formado por 12 cuadrados.



La obra utiliza una gama de 12 tonos que cubre toda la oferta espectral y que están representados en el siguiente esquema:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

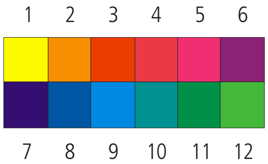
El comienzo de aplicación de la serie sobre cada uno de los anillos varía en el inicio y en el sentido de evolución, pero mantiene una simetría de unas con respecto a las otras a través de sus diagonales que utiliza como ejes de simetría. La simetría provoca que el primer y tercer anillo, y el centro, comenzando a contar desde fuera hacia dentro, sean iguales en orientación y desarrollo cromático; y lo mismo les ocurre al segundo y al cuarto.



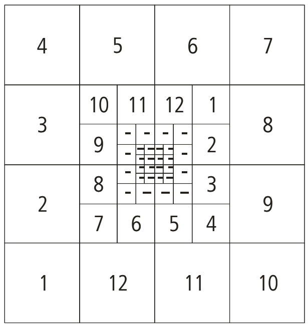
Esta obra además de trabajar con series, plantea del concepto de la complementariedad entre los colores. Dos colores, gráficamente, son complementarios, cuando son diametralmente opuestos. Y conceptualmente, cuando por

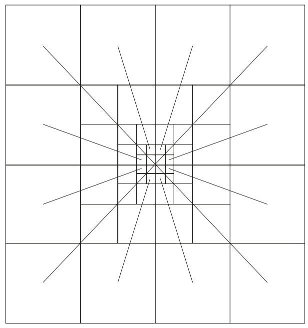
[29] Four degressively arranged colour groups with reduced centre 1956 / 1969.

mezcla, aditiva o sustractiva, se neutralizan. Los colores de la serie organizados por complementariedad dan la siguiente secuencia:



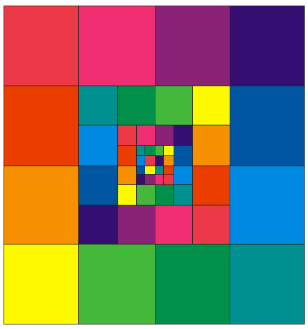
Gráficamente se puede representar con los siguientes esquemas:

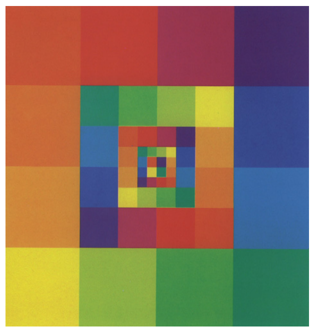




Cada uno de estos tramos, representa a una pareja de colores complementarios. Si las líneas coinciden con las diagonales del cuadrado, representan a dos parejas distintas.

Las siguientes imágenes muestran una representación final de la obra:



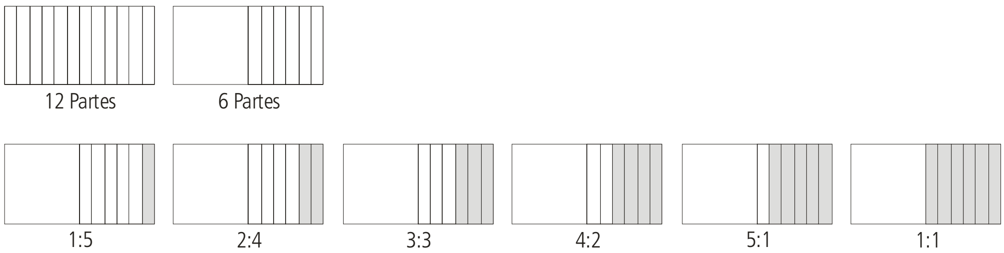


20. Gradaciones de seis veces seis filas iguales de color verticales, 1988[30]

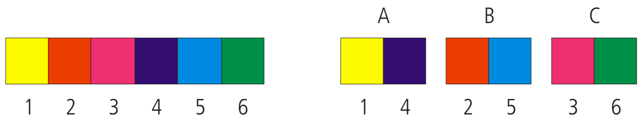
Esta obra, realizada sobre un cuadrado, está dividida verticalmente en tres partes iguales y, horizontalmente, en seis. Cada rectángulo vertical generado, a su vez, está dividido en dos partes desiguales cuya medida la determina un contador. Para poder realizar comparativamente las subdivisiones de una columna completa, se dividen todos los rectángulos de esa columna en 12 partes iguales. El contador, de arriba abajo, comienza en 1 y termina en la última fila en 6, es decir, evoluciona hasta completar la mitad del rectángulo. Si sólo se consideran las seis partes de ese rectángulo, o lo que es lo mismo, uno de los dos cuadrados que forman cada uno de los módulos rectangulares de la

[30] Gradations of six times six equal vertical colour rows, 1988.

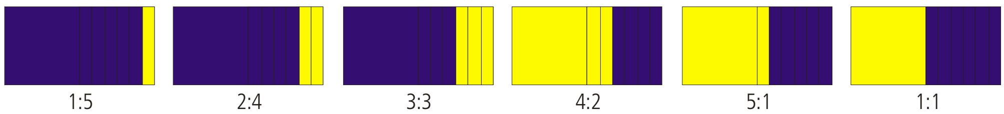
obra, la secuencia de proporciones entre los dos segmentos en que queda dividido el cuadrado es la siguiente: 1:5: 2:4; 3:3; 4:2; 5:1; 1:1.



Cromáticamente utiliza 6 colores agrupados por parejas de complementarios: amarillo – azul-violeta, cyan – rojo y magenta – verde:



Para aplicar el color a la obra, hay que tener en cuenta que cada pareja de complementarios está representada, visualmente, por todos los módulos de la serie numérica antes indicados.

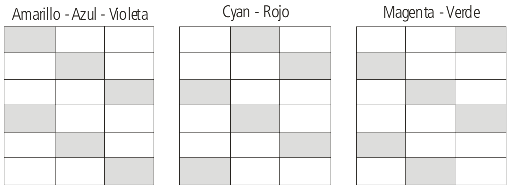


Para aplicar la secuencia cromática, se tienen en cuenta los siguientes criterios: de los seis cuadrados que representan la mitad de los rectángulos, tres son de un color de la pareja de complementarios, azul – violeta, y otros tres del otro, amarillo. En la primera parte de la secuencia del contador, evoluciona el amarillo: 1, 2, 3, y en la segunda parte, evoluciona el azul – violeta: 4, 5, 6. Los tres primeros elementos de la secuencia se producen en la mitad superior del cuadrado y los otros tres en la mitad inferior.

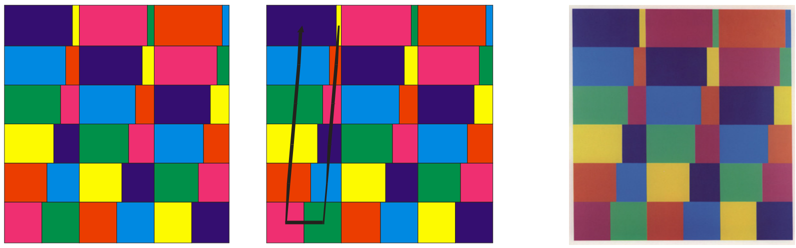
La relación entre las parejas de complementarios por filas se resume en la siguiente tabla:

A	C	B
B	A	C
C	B	A
A	C	B
B	A	C
C	B	A

La secuencia de la primera mitad y la segunda es igual pero, al invertir en los módulos correspondientes el orden de aparición de las parejas de complementarios, la obra visualmente presenta un gran dinamismo y además, produce, en cada columna un contador policromo creciente, de arriba abajo, del 1 al 6 y otro decreciente, de arriba abajo, del 11 al 6. Es decir, en cada rectángulo, recorriendo sus módulos con una trayectoria en forma de U, se establece un contador de números enteros del 1 al 11. Entre fila y fila se produce una permutación entre los elementos que la componen:

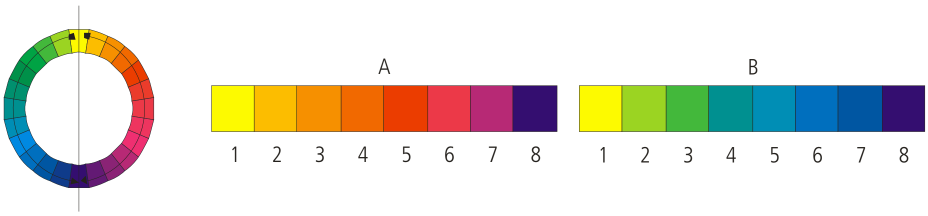


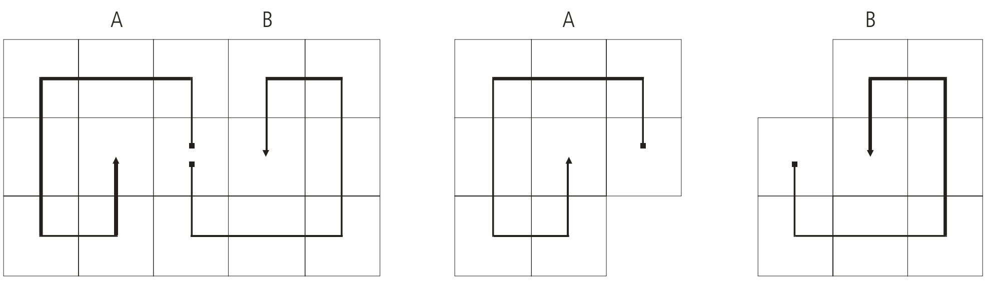
Se representa, a continuación, el resultado de la obra digital y fotográficamente:



21. Dos disposiciones de colores complementarios, 1955 / 1975[31]

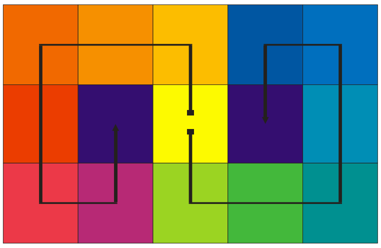
Dado un rectángulo de 3 x 5 = 15 cuadrados, dividirlo en dos partes iguales de 8 cuadrados cada una, de forma que a cada una de ellas se le pueda aplicar una secuencia cromática. El tema cromático de la obra es la pareja de complementarios amarillo – azul –violeta y cómo acceder secuencial y ordenadamente de uno a otro. Lohse plantea dos recorridos cromático de 8 tonos saturados cada uno: el primero, A, se realiza siguiendo la parte cálida del espectro; y el segundo, B, la parte fría. Ambos recorridos cromáticos tienen en común el punto de partida, el amarillo, y el de llegada, el azul – violeta. Estructuralmente, los puntos de partida son iguales, casilla que ocupa el color amarillo, pero diferentes los puntos de llegada: cuadrados coloreados con el color azul – violeta. Las dos secuencias cromáticas utilizadas y su orden de aplicación se muestran a continuación:

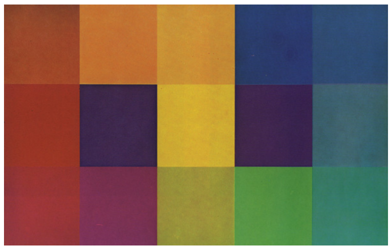




[31] Zwei farbkomplementäre Ordnungen, 1955 / 1975.

El resultado final de la obra después de aplicar los colores correspondientes, es el que se muestra a continuación:

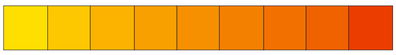




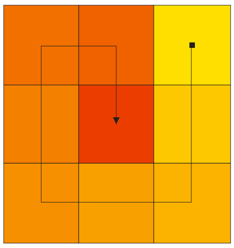
22. Gradaciones del Amarillo de cadmio claro al naranja, 1955 / 1975[32]

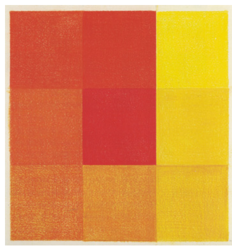
Dado un cuadrado de 3 x 3 = 9 cuadrados, comenzando por el cuadrado superior derecha y haciendo un recorrido circular según el sentido de las agujas del reloj, se aplica una secuencia cromática sobre la matriz. El tema cromático de la obra es representar una escala policroma de 9 tonos de las diferentes gradaciones de tono que se pueden generar entre un amarillo de cadmio claro y un naranja.

Visualmente, el conjunto ordenado de los colores de la serie produce una sensación de una gran armonía y contención. Se muestra, a continuación, la secuencia cromática utilizada, su orden de aplicación y una imagen de la obra generada:



1 2 3 4 5 6 7 8 9





23. Movimiento de ocho cantidades iguales de color alrededor de un eje, 1952 / 1971[33]

Dado un cuadrado dividido en 8 dominós, se le aplica la siguiente secuencia de color: elegir una pareja de complementarios: amarillo y azul-violeta. Seleccionar dos escalas policromas ordenadas según los colores del espectro y de forma que haya dos puntos de conexión entre ellas: el amarillo y el azul-violeta. Se obtienen así, dos series, A y B, que se pueden concatenar por cualquiera de sus dos extremos. Las series A y B muestran dos propuestas de recorridos del amarillo al azul-violeta, uno, por la gama de los colores fríos (verdes) y otro, por la de los cálidos (rojos).

A

1 2 3 4 5

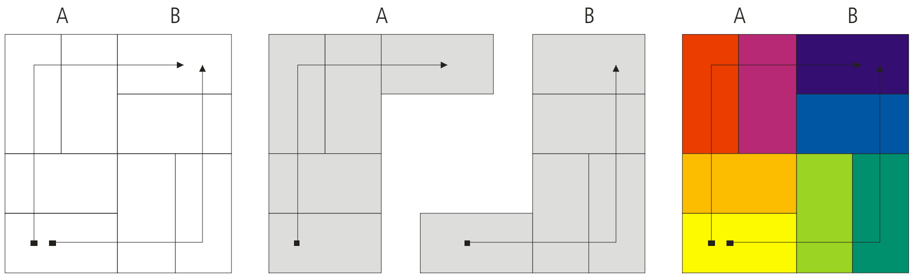
B

1 2 3 4 5

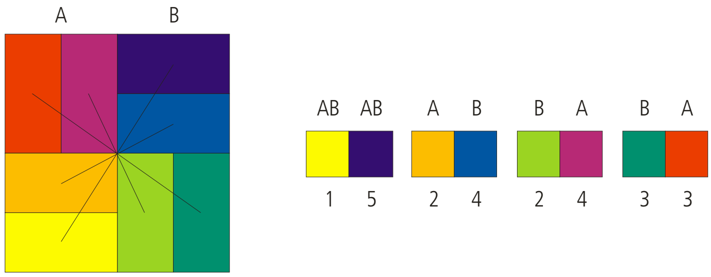
[32] Stufung von cadmiumgelb hell zu orange, 1955 / 1975.

[33] Bewegung von acht gleichen Farbquantitäten um eine Achse, 1952 / 1971.

El criterio para aplicar el color sobre los dominós es situando los dos colores comunes en las dos series, en los extremos de la diagonal principal ascendente, la que va del vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho. Comenzando por la esquina inferior izquierda, el amarillo, y tomando todos los dominós que están en el recorrido hasta alcanzar al azul- violeta, se realizan dos recorridos cromáticos: A y B. En A, el recorrido cromático es circular, comienza en el amarillo y, siguiendo el sentido de las agujas del reloj, llega al azul - violeta. En la serie B, el recorrido comienza en el mismo lugar que la serie A, el amarillo, pero el recorrido circular se realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj.



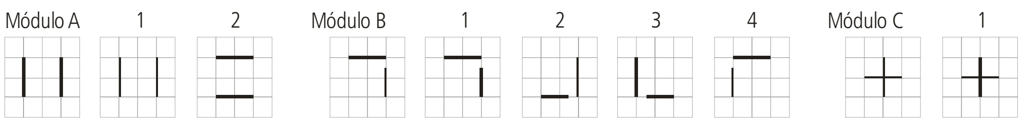
En esta serie no solo son complementarios el amarillo y el azul – violeta, sino que el resto de los colores se pueden agrupar de dos en dos. Visualmente, son complementarios todos aquellos colores que ordenados, al unirlos dos a dos pasan por el centro geométrico del sistema:



9.3.4.- VERA MOLNAR

1. Lento movimiento giratorio, 1957[34]

Dados tres módulos diferentes A, B, C, se establece un movimiento giratorio para cada uno de ellos, alrededor de un punto, sobre un soporte cuadrado dividido en 3 x 3 = 9 cuadrados. Al girar, cada uno de los módulos tiene las siguientes variedades:



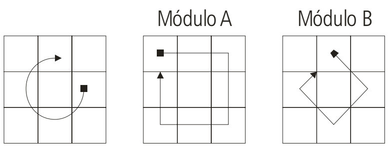
El módulo A2 se obtiene por rotación de 90º, en el sentido de las agujas del reloj, del módulo A1.
El módulo B2 se obtiene por rotación de 90º, en el sentido de las agujas del reloj, del módulo B1.

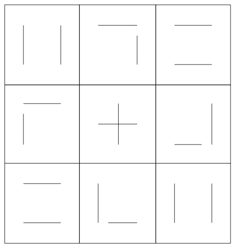
[34] Lent mouvement giratoire, 1957.

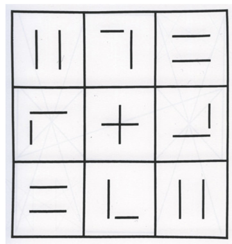
El módulo B3 se obtiene por simetría vertical del módulo B2.
El módulo B4 se obtiene por rotación de 90º, en el sentido contrario a las agujas del reloj, del módulo B1 o por simetría horizontal del módulo B3.
El módulo C1 gira entorno a sí mismo, o, permanece constante.
La distribución de los módulos en la matriz del cuadro se refleja en la siguiente tabla:

A1	B1	A2
B4	C1	B2
A2	B3	A1

El movimiento de todos los módulos en la matriz es en el sentido de las agujas del reloj. Los módulos A y B se mueven, cada uno de ellos, en determinados puntos fijos de la matriz.







2. Efecto estético de la inversión de funciones para la fluctuación de la atención, 1960[35]

A partir de una matriz de 3 x 3 cuadrado,s se crea una celda básica con las siguientes características:

Celda básica

Realizando dos simetrías axiales paralelas a los lados del cuadrado de la celda básica, una vertical y otra horizontal, se obtiene el módulo que además coincide con la obra final.

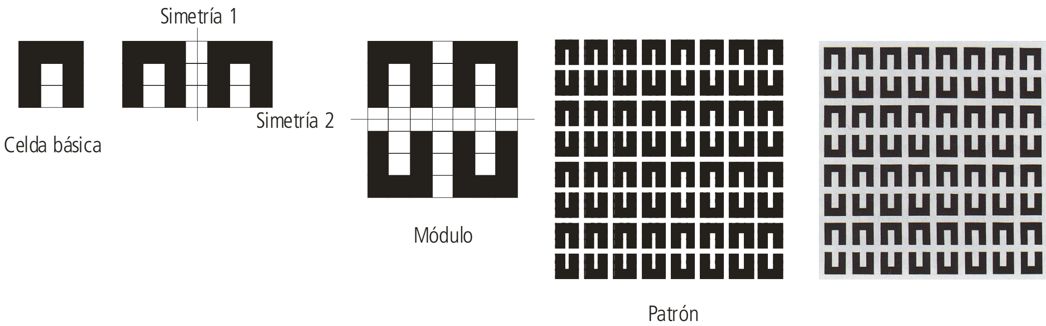
Módulo

[35] Effet esthétique de l'inversion des fonctions par la fluctuation de l'attention, 1960.

3. Cuadros U, 1960[36]

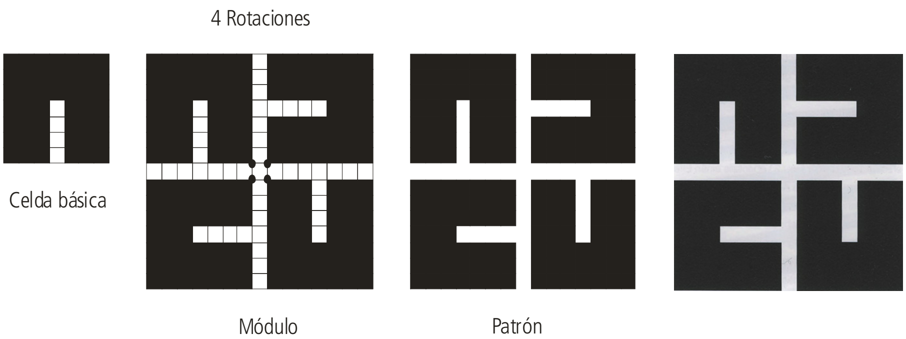
Se crea una celda básica en una matriz de 3 x 3 = 9 cuadrados con las siguientes características: tomar 7 cuadrados contiguos de los 8 que hay en la periferia del cuadrado y pintar su interior de negro.

Para crear la obra se utiliza para separar las celdas básicas entre sí, tanto vertical como horizontalmente, la misma unidad que se ha utilizado para su creación. Para obtener el módulo, se realiza una doble simetría sobre la celda básica, una horizontal y otra vertical. Una vez obtenido el módulo se repite por traslación, horizontal y verticalmente tantas veces como sea necesario hasta completar un cuadrado de 4 x 4 = 16 cuadrados.



Existen varias versiones de esta obra. En todas ellas se utiliza el mismo concepto de forma de U, pero variando las proporciones de la celda básica, las operaciones necesarias para crear el módulo y el número de módulos utilizado para crear la obra final.

En la siguiente interpretación, la celda básica utiliza una matriz de 7 x 7 = 49 cuadrados para crear la forma de U. Para crear el módulo correspondiente, se utilizan cuatro rotaciones de la celda básica, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor de uno de sus vértices: el inferior derecho. El módulo obtenido se convierte en el propio patrón y, por lo tanto, en el resultado final de la obra.



[36] U pictures, 1960.

10.- CONTADORES

Los contadores son procesos repetitivos que se realizan un número de terminado de veces y que, en cada iteración, incrementan o decrementan el valor de una variable en una cantidad constante o variable.

Tom Johnson en su libro *Self-Similar Melodies*[1] donde hace una reflexión sobre los procesos compositivos que utiliza para generar sus composiciones musicales, clasifica el proceso de contar en los siguientes grupos: conteo natural, acumulativo, repetitivo, en palíndromo, en círculos, en otras bases y con el ordenador.

10.1.- CONTEO NATURAL O SIMPLE

Contar es el proceso lógico más simple. Contar es, básicamente, crear series infinitas de números que comienzan por 123… Contar es repetir un procedimiento: incrementar o decrementar la variable del contador con una cantidad constante: +1, +2, +3, -1, -2,…

En la serie natural, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11,..., el procedimiento que se repite es "+ 1". En el primer término de la serie, el procedimiento "+1" es el término 1, el procedimiento "1 + 1" es el término 2, el procedimiento "1 + 1 + 1", el término 3, y así sucesivamente.

10.2.- CONTEO ACUMULATIVO

Hay otras formas de contar. Se puede realizar una serie en la que cada uno de sus términos represente el procedimiento "contar hasta": primero se cuenta hasta el 1, luego hasta el 2, después hasta el 3, y así sucesivamente. Esta forma de contar se puede llamar conteo acumulativo porque en el proceso de conteo, la variable del contador es una cantidad variable que resulta de almacenar cantidades resultantes de sumas sucesivas: +1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1,…

Una secuencia de este tipo es:

1 12 123 1234 12345 123456 …

10.3.- CONTEO REPETITIVO

Otra forma de contar viene dada por la expresión "repite n veces el número n". En este tipo de conteo, que se puede llamar conteo repetitivo, cada número de la serie indica el número de veces que se repite cada uno de ellos (un uno; dos doses; tres treses;…).

1 22 333 4444 55555 666666 …

---

[1] Tom Johnson: *Self-Similar Melodies,* Editions 75, París, 1996.

Estos tres tipos de conteo no sólo funcionan de una forma aislada, sino que se pueden anidar entre sí y dar un gran número de posibilidades.

Se puede generar una estructura de conteo en la que primero se realice un conteo simple hasta el 5. Después se haga una versión acumulativa de los resultados obtenidos. Luego una versión repetitiva de los nuevos resultados, después una acumulativa y terminar con una acumulativa:

1. Conteo simple:

1
2
3
4
5

2. Conteo acumulativo:

1
12
123
1234
12345

3. Conteo repetitivo:

1
1 22
1 22 333
1 22 333 4444
1 22 333 4444 55555

4. Conteo acumulativo:

1
1 12 12
1 12 12 123 123 123
1 12 12 123 123 123 1234 1234 1234 1234
1 12 12 123 123 123 1234 1234 1234 1234 12345 12345 12345 12345 12345

5. Conteo acumulativo:

1
1 1 12 1 12
1 1 12 1 12 1 12 123 1 12 123
1 1 12 1 12 1 12 123 1 12 123 1 12 123 1234 1 12 123 1234 1 12 123 1234 1 12 123 1234
1 1 12 1 12 1 12 123 1 12 123 1 12 123 1234 1 12 123 1234 1 12 123 1234 1 12 123 1234
1 12 123 1234 12345 1 12 123 1234 12345 1 12 123 1234 12345 1 12 123 1234 12345 1 12 123 1234 12345

10.4.- CONTEO EN PALÍNDROMO

Un palíndromo es una palabra o número que se lee de la misma forma de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo las palabras ala, rapar y Ana son palíndromos. El conteo en palíndromo se puede aplicar a cualquiera de los conteos anteriores:

1. Conteo simple:

1
2
3
4
5
4
3
2
1

2. Conteo acumulativo:

Continuando con los resultados obtenidos en el conteo anterior, se obtiene la siguiente estructura de conteo:

1
121
12321
1234321
12345**4321**
1234321
12321
121
1

Para que se produzca el conteo en palíndromo en un conteo acumulativo, es necesario que se realice el palíndromo no sólo en la estructura global sino también en cada una de las líneas porque sino, no se produciría correctamente:

1 121 12321 1234321 12345**4321** **1234321** **12321** **121** **1**

3. Conteo Repetitivo

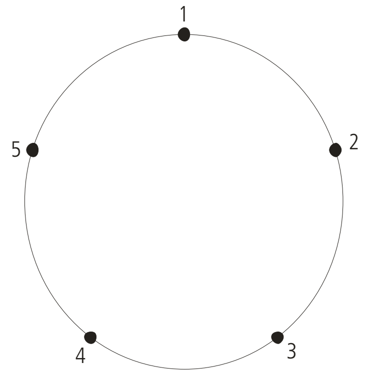
Tomando los resultados obtenidos en el conteo acumulativo, el número de dígitos de cada línea se determina de la siguiente manera:

1
1221
122333221
1223334444333221
1223334444555**554444333221**
1223334444333221
122333221
1221
1

10.5.- CONTANDO EN CÍRCULOS

Se pueden crear series numéricas contando alrededor de círculos. El procedimiento consiste en diseñar un círculo con unos números asociados a él y especificar unas instrucciones que permitan generar la serie numérica.

Dado un círculo dividido en 5 partes iguales, si se numera con los 5 primeros números de la serie natural (1, 2, 3, 4, 5) colocados en el sentido de las agujas del reloj y situando en la parte superior del círculo el 1, se genera la siguiente estructura:[2]



Se puede generar una serie de números teniendo en cuenta las siguientes instrucciones:

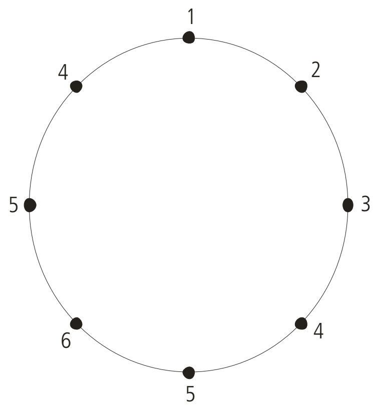
Comenzar con el número 1 y tomar los cuatro números siguientes contando en el sentido de las agujas del reloj. Hacer lo mismo comenzando por el 2, por el 3, por el 4 y por el 5:

12345 23451 34512 45123 51234

Otra serie a partir de esta distribución del círculo de 5 números sería: comenzar con el número 1 y dar vueltas al círculo, siempre en la misma dirección, tomando 8 números cada vez. Se conseguirá así una serie de 8 x 5 = 40 números.

12345123 23451234 34512345 45123451 51234512

Se puede generar una serie numérica a partir de un círculo dividido en 8 partes que se numeran, comenzando en la parte superior del círculo y contando en el sentido de las agujas del reloj, del 1 al 6 y del 6 al 4, teniendo en cuenta las siguientes instrucciones:



[2] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 50.

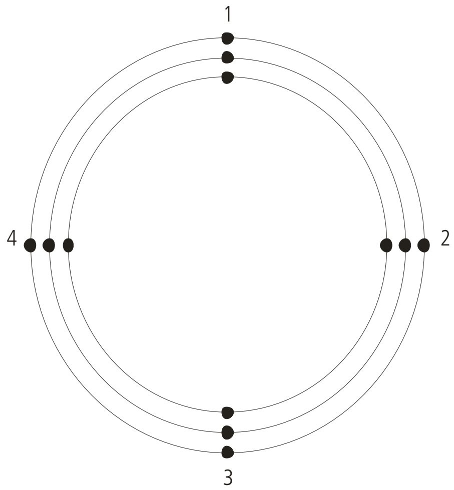
Comenzar en el 1, tomar 8 números en el sentido de las agujas del reloj, luego 6 números en el sentido contrario a las agujas del reloj a partir del último número alcanzado y continuar combinando estos dos criterios hasta que se alcance la posición de inicio: el 1. Se necesitan 5 vueltas completas, cada una combinando los dos criterios, de 14 números cada una, para realizar todo este proceso (5 x 14 = 70 números):

12345654 456543
34565432 234565
56543212 212345
54321234 432123
32123456 654321

10.6.- CONTANDO VARIAS COSAS A LA VEZ

Se utiliza para contar varias secuencias numéricas simultáneamente. La idea es crear una estructura que permita contar una progresión de dos o más niveles al mismo tiempo.

Para realizar esta tarea, la solución es descomponer la estructura en dos o más niveles. Para contar en tres niveles, cada vez que se complete un ciclo del primer nivel, se realiza un movimiento en el segundo nivel, y cada vez que se termine un ciclo del segundo nivel, se mueve un número en el tercer nivel.

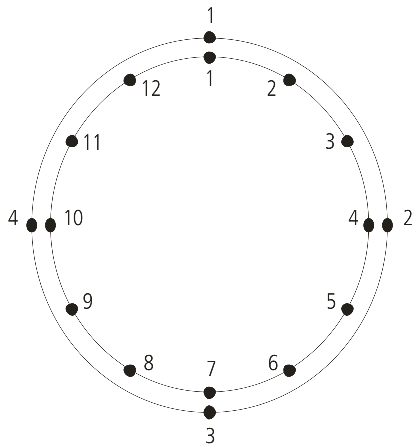


La siguiente serie está basada en un círculo de 4 números que se desarrolla en tres niveles diferentes que mantienen una jerarquía y dependencia entre sí. El círculo exterior es el que tiene mayor jerarquía y de él dependen los otros dos círculos interiores; siendo el círculo interior el de menor jerarquía y mayor dependencia de los tres.

Por cada movimiento que se realiza en el círculo exterior se producen simultáneamente movimientos en los otros círculos de una forma jerárquica. Un procedimiento para crear una serie podría ser el siguiente: comenzando por el 1 y contando siempre en el sentido de las agujas del reloj en todos los círculos, contar en el círculo exterior 4 números. Cada vez que se cuente un número en el círculo exterior, en el círculo central se cuentan dos números y en el interior 3. La secuencia obtenida será:

1	1 2	1 2 3
2	3 4	4 1 2
3	1 2	3 4 1
4	3 4	2 3 4

Se puede contar, en dos niveles, una serie cuya estructura está representada en el siguiente gráfico:



El proceso de conteo está determinado por las siguientes instrucciones: comenzar a contar en el círculo exterior y completar una vuelta completa. Por cada número del círculo exterior se produce una vuelta completa del interior. La serie completa sería:

1	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
2	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
3	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Otra propuesta, sobre esta misma estructura de conteo, puede definirse con las siguientes instrucciones: crear una serie con una vuelta completa, en el sentido de las agujas del reloj, del círculo interior de modo que cada vez que avanza un número este círculo, se produce una vuelta completa del exterior:

1 1 2 3 4	**2** 1 2 3 4	**3** 1 2 3 4	**4** 1 2 3 4	**5** 1 2 3 4	**6** 1 2 3 4
7 1 2 3 4	**8** 1 2 3 4	**9** 1 2 3 4	**10** 1 2 3 4	**11** 1 2 3 4	**12** 1 2 3 4

10.7.- CONTAR EN OTRAS BASES

10.7.1.- Sistema decimal

El sistema decimal de numeración es el que habitualmente utilizan las personas para contar todo tipo de cosas. Este sistema utiliza diez dígitos distintos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

No siempre se tienen que utilizar los valores numéricos del sistema decimal para crear las secuencias o series numéricas. Se pueden utilizar otros sistemas posicionales de representación numérica.

Un sistema posicional es un sistema en el que el valor de una cadena de dígitos se obtiene sumando los productos de cada dígito por una cierta cantidad que depende de la posición que ocupa dicho dígito dentro de la cadena. Estas cantidades son los pesos del sistema. Los pesos son las sucesivas potencias de un número llamado base.

La base delimita el número de dígitos diferentes que puede utilizar el sistema:

Sistema	Peso (Potencias de…)	Números disponibles según Base
Binario	2	01
Base 3	3	012
Base 4	4	0123
Base 5	5	01234
Base 6	6	012345
Base 7	7	0123456
Octal	8	01234567
Base 9	9	012345678
Decimal	10	0123456789
Hexadecimal	16	0123456789ABCDEF

En el sistema decimal, los pesos del sistema son potencias de 10 y por lo tanto, al escribir el número 5723 se está dando un valor relativo a cada uno de los dígitos 5, 7, 2, 3. En este caso, el 5 está representando 5000 (5 x 1000), el 7 representa 700 (7 x 100), el 2 representa 20 (2 x 10) y el 3, representa 3 (3 x 1). Se puede decir que el valor que representa cada dígito depende de la posición que ocupa. Los sistemas que cumplen esta condición son sistemas posicionales. A las cantidades por las que hay que multiplicar los dígitos de un número para obtener su valor real se les llama pesos. En el sistema decimal, los pesos son 1, 10, 100, 1000,…, que corresponden, respectivamente, a las unidades, decenas, centenas, millares,... Estos pesos son las sucesivas potencias de 10: 10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100,... Si los pesos de un sistema posicional son las sucesivas potencias de un determinado número, a dicho número se le llama base de numeración y se dice que el sistema es relativo a esa base. El sistema decimal es un sistema numérico en base 10. El número que está más a la izquierda es el que tiene mayor peso y es conocido como número más significativo. El número que está más a la derecha es el de menor peso o número menos significativo.

	Dígitos		Pesos						
	5	x	10^3	=	5	x	1000	=	5000
	7	x	10^2	=	7	x	100	=	700
5723_{10}	2	x	10^1	=	2	x	10	=	20
	3	x	10^0	=	3	x	1	=	3
							Suma		5723_{10}

10.7.2.- Sistema binario

El sistema binario es un sistema de numeración posicional en base dos que utiliza dos dígitos: 0 y 1. Estos dos dígitos son los dígitos binarios. Un número binario válido puede ser el 100110_2. El subíndice 2 indica que el número está representado en base 2.

Por ser el sistema binario relativo a la base 2, los pesos deben ser las sucesivas potencias de 2.

Pesos		
2^0	=	1
2^1	=	2
2^2	=	4
2^3	=	8
2^4	=	16
2^5	=	32
2^6	=	64
2^7	=	128

Por lo tanto, el equivalente decimal al número binario 100110_2 es:

	Dígitos		Pesos						
	1	x	2^5	=	1	x	32	=	32
	0	x	2^4	=	0	x	16	=	0
100110_2	0	x	2^3	=	0	x	8	=	0
	1	x	2^2	=	1	x	4	=	4
	1	x	2^1	=	1	x	2	=	2
	0	x	2^0	=	0	x	1	=	0
							Suma		38_{10}

10.7.3.- Sistema octal

El sistema octal es un sistema de numeración posicional en base 8. Utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Los pesos son las sucesivas potencias de 8:

Pesos		
8^0	=	1
8^1	=	8
8^2	=	64
8^3	=	512
8^4	=	4096
8^5	=	32768
8^6	=	262144
8^7	=	2097152

10.7.4.- Sistema hexadecimal

El sistema hexadecimal es un sistema de numeración posicional en base 16. Para codificar diferentes cantidades, utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y las letras A, B, C, D, E y F. Los seis últimos términos simbolizan los valores 10, 11, 12, 13, 14 y 15, respectivamente. Los pesos son las sucesivas potencias de 16:

Pesos

16^0	=	1
16^1	=	16
16^2	=	256
16^3	=	4096
16^4	=	65536
16^5	=	1048576

Dadas estas premisas, sobre cómo organizar los sistemas de conteo en diferentes bases, se puede obtener una serie numérica en base 2 de los números decimales del 1 al 15:

Dígitos decimales	Dígitos binarios			
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

10.8.- CONTEO CON EL ORDENADOR

Considerar algunas secuencias numéricas en términos de un programa de ordenador puede revelar posibilidades que de otra forma pueden pasar desapercibidas.

En todos los lenguajes de programación modernos, las estructuras de iteración o repetición permiten que un conjunto de instrucciones se ejecute un número determinado de veces o hasta que se alcance una cierta condición. Cuando esta condición está predefinida, la estructura de programación que se utiliza es el bucle *for* (desde o para).

La sentencia *for* requiere, por lo tanto, que se conozca por anticipado el número de veces que se van a ejecutar las sentencias o acciones que están en el interior del bucle y por lo tanto no precisa de ninguna condición de salida para detener el bucle. Un contador controla de modo automático el número de iteraciones o repeticiones fijadas en el cuerpo del bucle y termina cuando llega al valor final.

El pseudocódigo correspondiente a un bucle *for* es el siguiente:

desde x = valor inicial *hasta* y = valor final [incremento] *hacer*
    acciones
fin_desde

Su funcionamiento es el siguiente: el contador comienza en el valor inicial *x* y aumenta, en cada vuelta del bucle, el valor del incremento hasta llegar al valor final *y*, en cuyo momento se detiene el bucle. Si se omite el valor del incremento se supone por defecto que el incremento del contador es igual a la unidad, es decir, se cuenta de 1 en 1 (x, x+1, x+2,…, y).

Es posible utilizar las estructuras *for* para diseñar estructuras que contengan más de dos repeticiones o iteraciones. Por ejemplo, una estructura *for* puede contener otra estructura *for*, y esta estructura *for* puede contener otra, y así sucesivamente cualquier número de veces. Las estructuras *for* interiores a otras estructuras *for* se denominan anidadas o encajadas. De esta forma las estructuras *for* pueden volverse bastante complejas. Las variables índices o de control de los bucles toman valores de modo tal que por cada valor de la variable índice del bucle externo se debe ejecutar totalmente el bucle interno.

El formato general del bucle *for* se encuentra en todos los lenguajes de programación. En el lenguaje C, la forma general de la sentencia *for* es:

for (inicialización; condición; incremento) sentencia;

La inicialización es una sentencia de asignación que se utiliza para iniciar la variable de control del bucle; en este caso, el número de inicio de la serie. La condición es una expresión relacional: igual, menor que, mayor que, menor o igual que, mayor o igual que (=, <, >, <=, >=), que determina cuando termina el bucle. El incremento define cómo cambia la variable de control cada vez que se repite el bucle (después de cada iteracción del bucle). El bucle *for* se ejecutará mientras que la condición sea cierta. Una vez que la condición sea falsa, la ejecución del programa terminará o continuará con la siguiente sentencia al *for* en el programa.

El siguiente programa en C++, imprime los números del 1 al 10:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
	int i;
	for (i = 1; i <= 10; i++)
	{
		printf ("%d",i);
	}
	printf ("\n");
	system ("pause");
}
```

En este programa i es la variable de control del bucle que se pone inicialmente a 1 y se incrementa, en cada iteración, una unidad, +1. Cada vez que se repite el bucle, se comprueba su valor.

Este proceso se repite hasta que i es mayor que 10, ya que la condición de salida del bucle es cuando el valor de i sea menor o igual que 10, i <= 10, momento en el que finaliza el bucle.

La expresión i++, incrementa i en 1, cada vez que se ejecuta una vuelta del bucle. *Printf* ("%d",i), imprime el resultado en la pantalla.

El resultado del programa es:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Es posible anidar bucles: poner un bucle dentro de otro. Anidando el bucle anterior con otro, que tiene una variable de control "j", se le pide al ordenador que "j" cuente hasta "i", y que imprima su valor a cada paso. Cuando "j" alcance el valor de "i", entonces "i" se incrementa 1 y "j" vuelve a tomar el valor 1.[3]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
        int i;
        int j;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
                        printf ("%d",j);
        printf ("\n\n");
        }
        system ("pause");
}
```

El resultado será:

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5

Esto es lo que se definió, anteriormente, como conteo acumulativo.

Si se añade un tercer bucle anidado en el interior con los dos anteriores, que controle una variable "k", y se hace que "k" cuente hasta "j" y que "j" cuente hasta "i", se obtiene un conteo acumulativo-acumulativo del 1 al 5.[4]

[3] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 60.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
        int i;
        int j;
        int k;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
                        for (k = 1; k <= j; k++)
                                printf ("%d",k);
        printf ("\n\n");
        }
        system ("pause");
}
```

El resultado será:

```
1
1 1 2
1 1 2 1 2 3
1 1 2 1 2 3 1 2 3 4
1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5
```

Si se toma este mismo programa y se pide al ordenador que imprima "j" en lugar de "k", se obtiene una secuencia de conteo del 1 al 5 repetitiva-acumulativa:[5]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
        int i;
        int j;
        int k;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
                        for (k = 1; k <= j; k++)
                                printf ("%d",j);
        printf ("\n\n");
```

[4] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 60.
[5] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 61.

```
        }
        system ("pause");
}
```

El resultado del programa es la siguiente serie de números:

1
1 2 2
1 2 2 3 3 3
1 2 2 3 3 3 4 4 4 4
1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5

Si se imprime la "i", se obtendrá una forma de conteo no prevista:[6]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int main()
{
        int i;
        int j;
        int k;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
                        for (k = 1; k <= j; k++)
                                printf ("%d",i);
        printf ("\n\n");
        }
        system ("pause");
}
```

Al ejecutar el programa se obtiene la siguiente serie de números:

1
2 2 2
3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

Si se imprime la "i" y la "j" al mismo tiempo, se obtiene:[7]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
```

[6] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 61.
[7] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 62.

```
int main()
{
        int i;
        int j;
        int k;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
                        for (k = 1; k <= j; k++)
                        {
                                printf ("%d",i);
                                printf ("%d",j);
                        }
        printf ("\n\n");
        }
        system ("pause");
}
```

El resultado de ejecutar el programa produce la siguiente secuencia:

```
11
21  22  22
31  32  32  33  33  33
41  42  42  43  43  43  44  44  44  44
51  52  52  53  53  53  54  54  54  54  55  55  55  55  55
```

Se pueden obtener también resultados curiosos si se imprime la "i" y la "k"; la "j" y la "i"; la "j" y la "k"; la "k" y la "i"; la "k" y la "j";… al mismo tiempo. En general, se puede decir, que son variaciones de 3 elementos; i, j, k, tomadas de 2 en 2, en las que es importante el orden de los elementos que se tienen en cuenta, porque generaran secuencias diferentes.

Si se imprime la "i", la "j" y la "k" al mismo tiempo, se obtiene el siguiente resultado:[8]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
        int i;
        int j;
        int k;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
```

[8] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 63.

```
                for (k = 1; k <= j; k++)
                {
                        printf ("%d",i);
                        printf ("%d",j);
                        printf ("%d",k);
                }
        printf ("\n\n");
        }
        system ("pause");
}
```

```
111
211  221  222
311  321  322  331  332  333
411  421  422  431  432  433  441  442  443  444
511  521  522  531  532  533  541  542  543  544  551  552  553  554  555
```

De la misma forma que se ha explicado con dos variables, se pueden realizar todas las variaciones posibles de los tres elementos i, j, k, tomados de 3 en 3, y teniendo en cuenta que el orden de los elementos entre sí es importante porque generará secuencias diferentes: imprimir la "j", la "i" y la "k"; la "k", la "j" y la "i";…

Otra forma de operar con el ordenador, para poder obtener también resultados interesantes, es pedirle que haga operaciones aritméticas con estas variables: i, j, k:

Si se imprime la operación aritmética "i+j" al mismo tiempo, se obtienen los siguientes resultados:[9]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
        int i;
        int j;
        int k;

        for (i = 1; i <= 5; i++)
        {
                for (j = 1; j <= i; j++)
                        for (k = 1; k <= j; k++)
                                printf ("%d",i+j);

        printf ("\n\n");
        }
        system ("pause");
}
```

[9] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 64.

```
2
3  4  4
4  5  5  6  6  6
5  6  6  7  7  7  8  8  8  8
6  7  7  8  8  8  9  9  9  9  10  10  10  10  10
```

Si se imprime la operación aritmética "i+j-k" al mismo tiempo, se obtiene la siguiente secuencia:[10]

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
	int i;
	int j;
	int k;

	for (i = 1; i <= 5; i++)
	{
		for (j = 1; j <= i; j++)
			for (k = 1; k <= j; k++)
				printf ("%d",i+j-k);
	printf ("\n\n");
	}
	system ("pause");
}
```

```
1
2  3  2
3  4  3  5  4  3
4  5  4  6  5  4  7  6  5  4
5  6  5  7  6  5  8  7  6  5  9  8  7  6  5
```

En general, se puede observar que el número de posibilidades es inmenso y que los resultados, aunque no siempre aprovechables, son muy sugerentes y permiten reflexionar sobre el propio proceso de conteo.

[10] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 64.

10.9.- ANÁLISIS DE OBRAS

10.9.1.- FRANÇOIS MORELLET

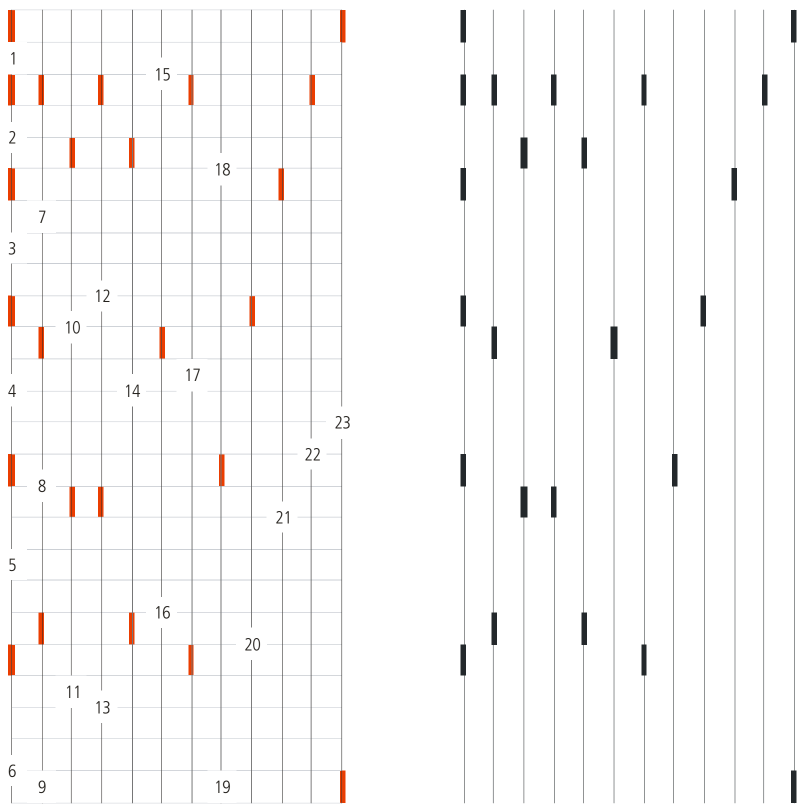
1. Interferencias

Este título representa a un conjunto de obras que crea Morellet basadas en el mismo principio generativo: superponer dos grupos de elementos de la misma naturaleza a intervalos irregulares.

En una matriz de 11 x 25 = 275 cuadrados, se representa la serie de los números naturales enteros del 1 al 23 en las 12 líneas verticales de la matriz. El número de módulos verticales disponibles para realizar la representación de la serie es de 12 x 25 = 300 unidades. La suma de los 23 números de la serie es igual a 276, por lo que se necesitan 276 unidades para representar los números y 24 tramos para representar los intervalos de una unidad, entre dos números representados (276 + 24 = 300).

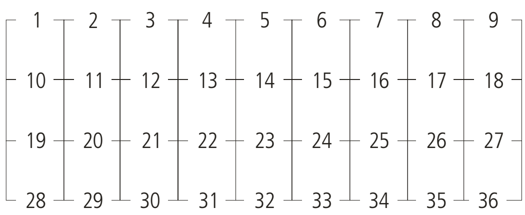
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 = 276

La secuencia rítmica es alternar, un módulo constante de una unidad, con la representación lineal y física de la medida en módulos que representa cada uno de los números de la serie de los números enteros del 1 al 23. La representación visual de la serie se realiza a través de los intervalos que se desplazan constante y progresivamente en el espacio.

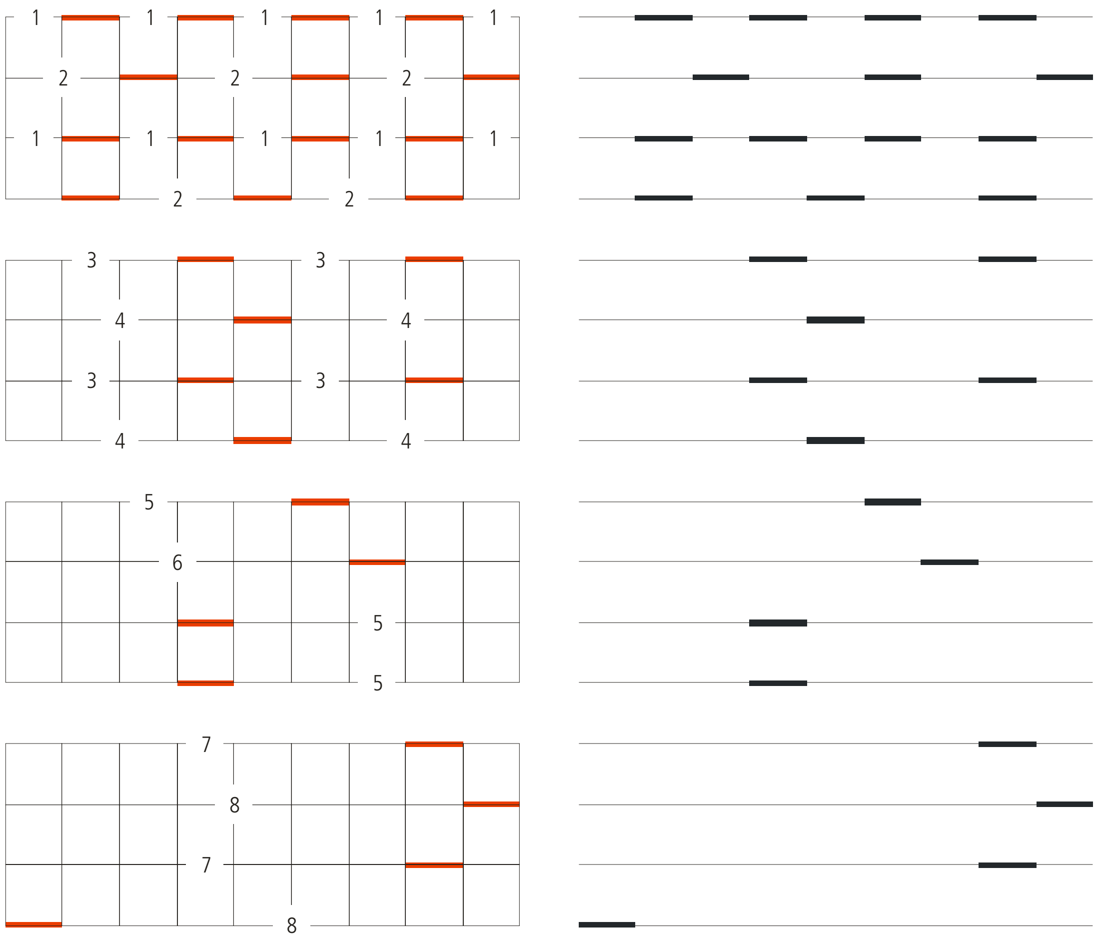


En una matriz de 9 x 12 = 108 cuadrados, dividida en cuatro submatrices de 3 x 9 = 27 cuadrados, se representa la serie de los números naturales enteros del 1 al 8, en sus 16 líneas horizontales. En cada una de las submatrices se representa la secuencia rítmica de un conteo repetitivo de dos números de una forma alterna: en la primera submatriz se cuenta repetitivamente a dos voces, el 1 y el 2. En la segunda, el 3 y el 4. En la tercera, el 5 y el 6. Y en la cuarta, el 7 y el 8. Visualmente, se alterna, un módulo constante de una unidad, con la representación lineal y física de la medida, en número de módulos, que representa cada uno de los números de la serie.

Cada submatriz tiene la posibilidad de representar 36 trazos sobre sus líneas estructurales. En la primera submatriz se representan 14; en la segunda, 6; en la tercera, 4; en la cuarta, 4.

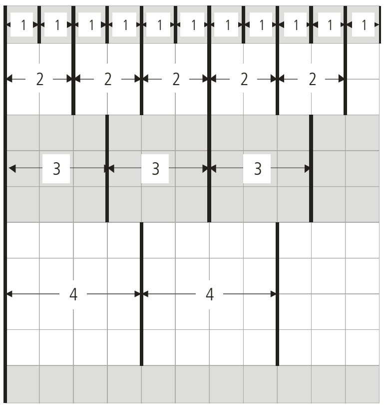
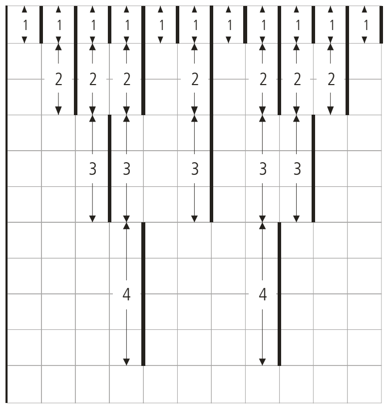


La secuencia del conteo repetitivo de cada uno de los números, sitúa a las trazas visibles (de una unidad) a intervalos irregulares.



En una matriz de 11 x 11 cuadrados se realiza un contador del 1 al 4 de diferentes formas. Horizontalmente se miden distancias regulares y repetitivas: contador repetitivo: 1, 1, 1, 1,…; 2, 2, 2,…; 3, 3, 3,…; 4, 4, 4,… Verticalmente, se representa un contador acumulativo: 1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4;… La secuencia correspondiente al conteo acumulativo vertical es simétrica y está representada por los siguientes números:

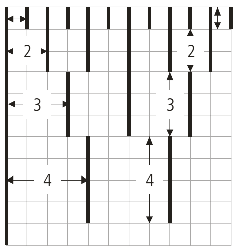
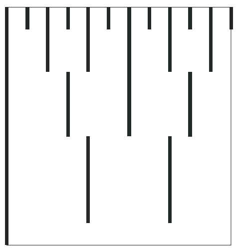
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2		2		2	2	2	
		3	3		3		3	3		
			4				4			

Combinando estos dos conteos, repetitivo y acumulativo, sus resultados se superponen y se representan visualmente todos aquellos tramos que corresponden a estos contadores, salvo aquellos que entran en contradicción con alguno de los contadores. Por ejemplo, en el conteo vertical de la tercera y novena columna, se suprime la representación visual del tramo del 2, porque si se incluyese, no se respetaría el conteo horizontal de la secuencia del 2 que le corresponde. Igual ocurre con el conteo del tramo 3 en la cuarta y octava columna: se suprime porque entra en conflicto con el conteo horizontal correspondiente.

Columna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		2	2	2		2		2	2	2	
			3	3		3		3	3		
				4				4			

Finalmente, hay que hacer referencia a la línea continua vertical que aparece en el extremo izquierdo de la obra y que no se corresponde rítmicamente con el desarrollo de la serie. Puede servir como punto de partida y referente para realizar el resto de los conteos o interpretarla como la secuencia del conteo natural 1, 2, 3, 4, 1.

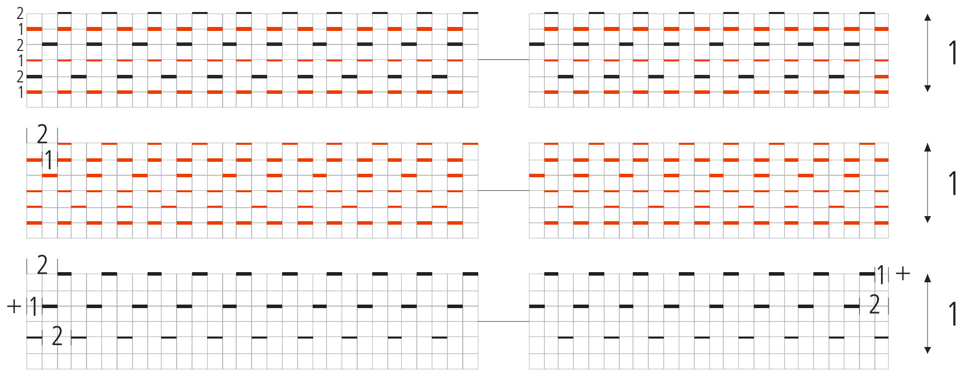
2. Todos los 1, todos los 2, 1974[1]

Dada una matriz cuadrada de 80 x 80 = 6400 cuadrados marcar con una línea de tamaño la unidad, por filas y alternativamente, todos los 2 y todos los 1. En el desarrollo de la secuencia se produce un módulo o patrón que se adapta al formato del cuadrado elegido y que, finalmente, es el que se repite continuamente. La obra está formada por 13 de estos módulos con un sobrante de dos filas de cuadrados. Si se toma como referencia el módulo 1, se pueden señalar las siguientes ocurrencias en el desarrollo de la serie:

1. La alternancia de las series en cada módulo es: 2, 1, 2, 1, 2, 1.

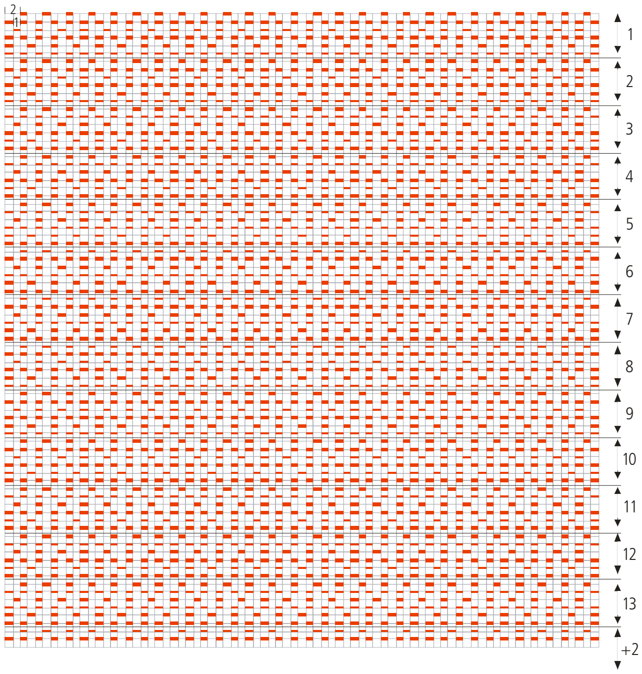
2. El concepto de +2 significa: contar dos tramos de la matriz y marcar con una traza de una unidad el siguiente; repetir esta operación hasta que se hayan computado todos los tramos de la fila. El concepto de +1 significa lo mismo que el anterior sólo que, en este caso, la distancia entre traza y traza es de una unidad, 1.

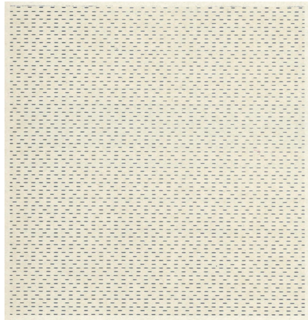
3. Existe una relación entre todas las filas que cuentan todos los tramos +2 y otra, entre todas las que cuentan todos los tramos +1. Esto significa que el final de una fila +2 se concatena con el inicio de la siguiente fila +2, de forma que el conteo +2 tiene en cuenta de dónde viene y a dónde va, es decir, si en una fila +2, ha sobrado una unidad +1, ésta se suma a la siguiente fila +2 para poder continuar con el conteo repetitivo.



A continuación se muestra, un análisis del conteo +1 y +2 a lo largo de toda la estructura de la obra y una imagen del aspecto visual que muestra la obra de Morellet:

[1] Tous les 1, tous les 2, 1974.





3. Trazos cuya longitud e intervalos entre ellos aumentan 5 mm en cada fila. Alineamiento sobre el lado izquierdo, 1974[2]

El lienzo de formato cuadrado de 140 x 140 cm muestra en la fila superior tramos de líneas negras de 5 mm espaciadas a intervalos regulares de 5 mm. En la segunda fila, las líneas miden 10 mm y los intervalos entre ellas son de 10 mm. En la tercera fila, las líneas miden 15 mm y los intervalos entre ellas son de 15 mm y así sucesivamente hasta la fila 23 en la que las líneas miden 115 mm y los intervalos entre ellas son de 115 mm.

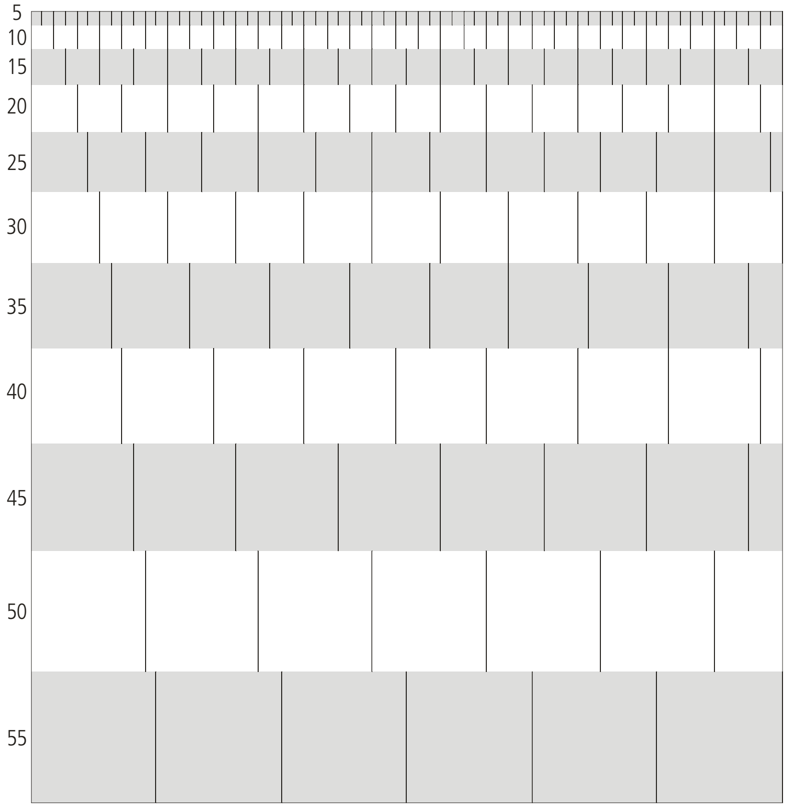
La relación de los tamaños de los trazos de líneas y de los intervalos entre ellos, en las 23 filas representadas en esta obra, sigue la siguiente secuencia lógica:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115

Dado un cuadrado con una estructura modular horizontal de 23 líneas entre las que existen diferentes distancias: 5 y múltiplos de 5, establecer en la primera línea un contador repetitivo del 5: 5, 5, 5,…; en la segunda, del 10: 10, 10, 10, 10,…; en la tercera, del 15: 15, 15, 15,… Y así sucesivamente. Al establecer el conteo linealmente, existe un alineamiento a la izquierda, es decir, en cada fila se empieza a contar, en el lado de la izquierda, desde 0.

A continuación se muestra un fragmento de la obra para ilustrar la complejidad de este proceso:

[2] Tirets dont la longueur et l'espacement augmentent à chaque rangée de 5 mm. Alignement sur le coté gauche, 1974.

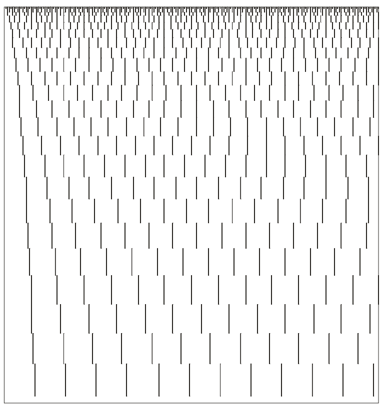


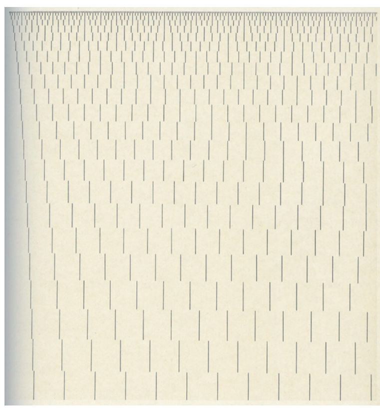
Fragmento

Visualmente merece la pena hacer las siguientes observaciones: las líneas se tocan entre sí algunas veces entre fila y fila; en la mitad izquierda del lienzo los intervalos se ven con claridad; y finalmente, en cada fila horizontal los cuadrados formados por las líneas verticales y el espacio entre ellas, quedan visibles a pesar de la ausencia de las líneas superior e inferior.

La organización mecánica de esta obra y su casi mecánica realización produce un gran trabajo. El sistema permite explicar todo lo que hay en el lienzo. Todo obedece a una regla. Cada cosa está determinada previamente antes de su realización en una técnica objetiva.

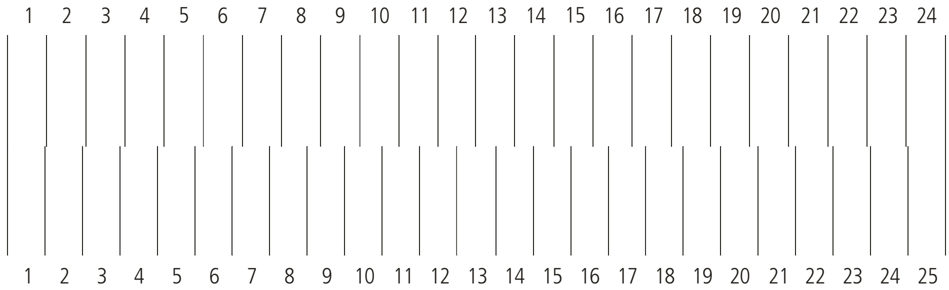
El resultado de la obra digital y fotográficamente es el siguiente:

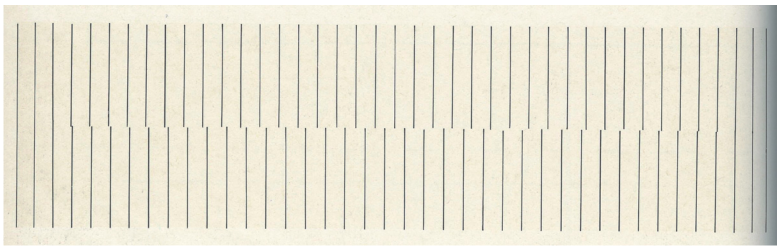




4. 2 secuencias de trazos verticales con 2 interferencias, 1974[3]

En esta obra conviven dos contadores de números enteros de la serie de los números naturales: uno, del 1 al 24 y otro, del 1 al 25. Se distribuyen simultánea y paralelamente en el mismo espacio. Con el mismo inicio y final. Visualmente Se crean dos ritmos que empezando parejos, muestran en el centro de la obra una gran diferencia de sincronía. Cada secuencia es simétrica, verticalmente, con respecto a la totalidad de la obra.

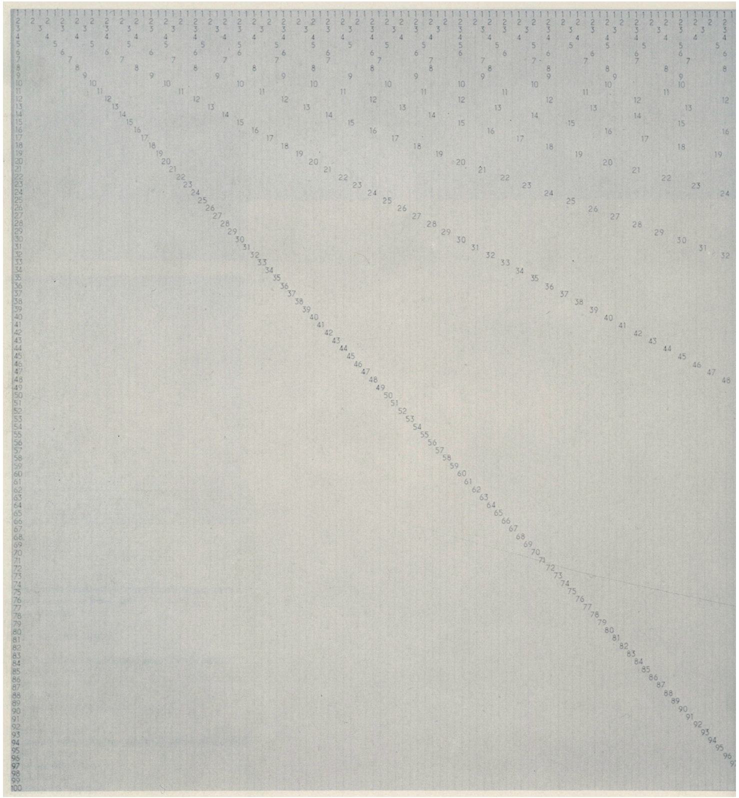




5. 1, 1, 1,… todos los 1; 2, 2, 2,… todos los 2; 3, 3, 3,… todos los 3, 1978[4]

Contador repetitivo. Está formado por una matriz de 100 x 100 casillas. Cada una de las filas de la matriz realiza un conteo repetitivo de cada uno de los números de la serie de los números naturales. En la fila 1 se representa: 1, 1, 1, 1,…; en la 2: 2, 2, 2, 2,…; en la 3: 3, 3, 3,…; y así sucesivamente. La representación de cada una de las cantidades del contador se realiza con la propia cantidad que representa.

[3] 2 Sequences of dashes with 2 interferences, 1974.
[4] 1, 1, 1,… tous les 1; 2, 2, 2,… tous les 2; 3, 3, 3,… tous les 3, 1978.



10.9.2.- MALCOLM HUGHES

1. Dibujos de trabajo[5]

Malcolm Hughes utiliza en esta serie de dibujos una secuencia de los números naturales del 1 al 7 para realizar diferentes operaciones de orden sobre el soporte de una obra y sus elementos. Esta secuencia está dividida en dos subconjuntos: los números primos (2, 3, 5, 7) y los números no primos (1, 4, 6). Visualmente, las obras están organizadas a través de una estructura ortogonal construida a partir de la serie numérica. Las áreas geométricas generadas son, por lo tanto, el resultado de una codificación. A nivel cromático, usa una progresión de tonos, generalmente grises, desarrollada también a partir de la secuencia de números elegida. Se puede decir que los elementos básicos de las obras son: los contadores de números, divididos en números primos, y no primos; la estructura y el color.

La mayoría de estos dibujos son como partituras de pinturas de dos dimensiones; sin embargo, en algunos ejemplos, el desarrollo de las estructuras visuales puede sugerir una forma de realización en tres dimensiones tanto para construcciones en relieve como para esculturas exentas.

Son dibujos muy trabajados que sirven para investigar y desarrollar la naturaleza de sistemas generativos particulares. Se puede decir que son entidades independientes de los cuadros, donde se realizan las anotaciones de los sistemas. Son un acto de exploración y análisis válido por sí mismo.

[5] Working Drawings.

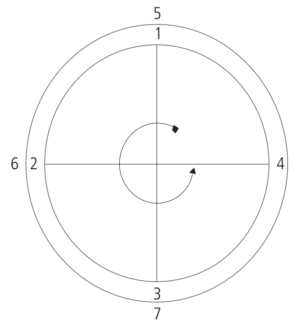
Serie números naturales	1	2	3	4	5	6	7
Serie números primos		2	3		5		7
Serie números no primos	1			4		6	

En el desarrollo de todas estas obras, Malcolm Hughes muestra un orden de realización y de conceptualización que se aplica al estudio de cada una de ellas.

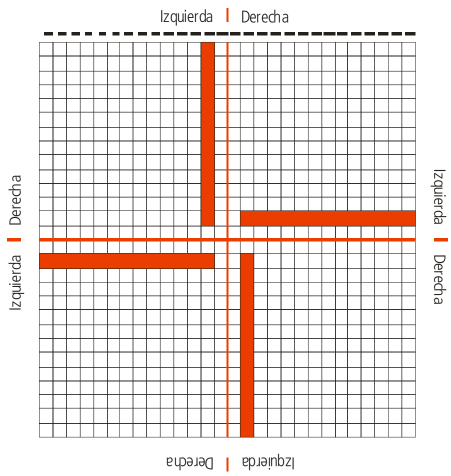
1. **P1, P2, P3, P4**

1. **Sistema generativo:** conteo circular:

Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la parte superior del círculo y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj.



2. **Soporte:** Trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados, trazar sus medianas y señalar, desde el centro de la matriz y mirando hacia cada uno de los lados del cuadrado, el lado derecho e izquierdo de cada uno de los cuatro tramos de las medianas:



3. **Sistema de trazado de líneas:** trazar, en el lado izquierdo de las medianas, líneas de ancho lo que indica su número natural y de longitud la anchura del cuadrado.

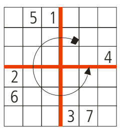
		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

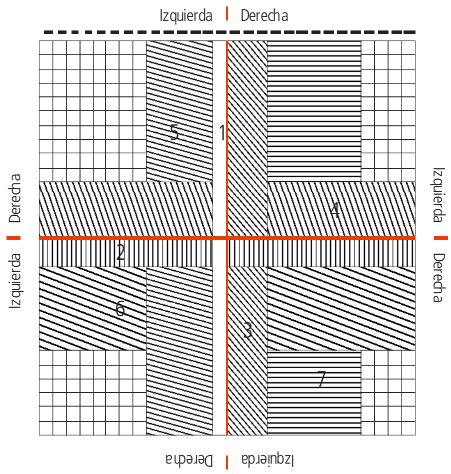
El trazado de las líneas se realiza según el orden indicado por el contador y su secuencia gráfica, según su orientación espacial, está determinada por el siguiente esquema:

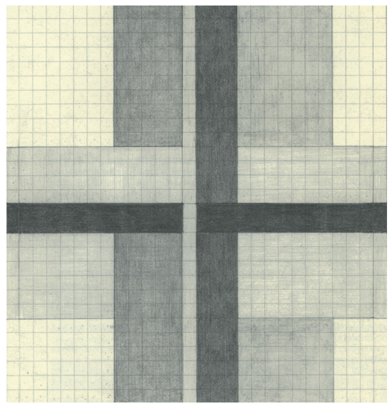
1 2 3 4 5 6 7

| — | — | — |

Las líneas se trazan por superposición o capas. Es decir, la primera en trazarse estará en la capa superior del dibujo, la segunda a continuación y así sucesivamente; de modo que la capa 7 está en la última posición y por lo tanto parte de sus trazos lineales están ocultos por las capas que se han trazado con anterioridad.





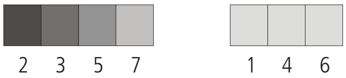


Cuando dos líneas ocupan el mismo cuadrante, al trazar la segunda se sitúa, en esta obra, a la izquierda y a continuación de la anterior.

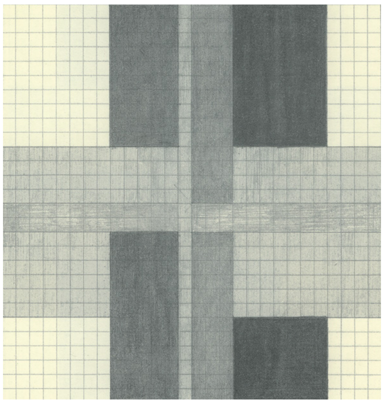
4. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

   1. Los números primos representan una serie de grises del negro al blanco de cuatro tonos, de manera que el extremo blanco no está representado.

   2. Los números pares están representados por un mismo tono de gris neutro.



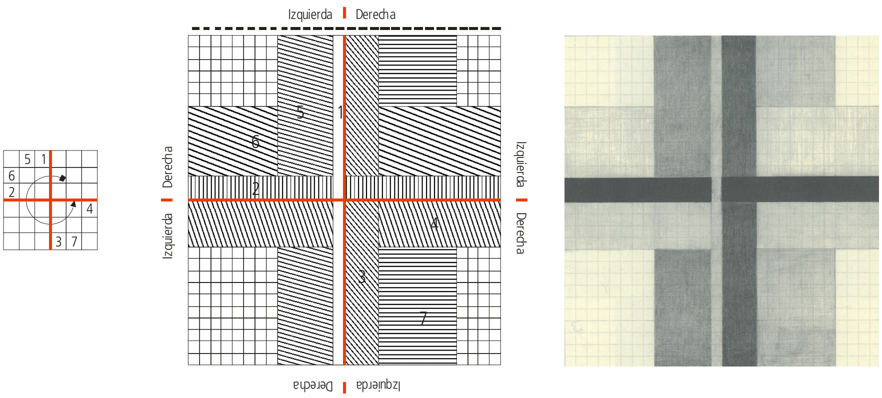
Manteniendo la misma estructura de trazado de líneas pero cambiando el criterio de color: la correlación de los grises con respecto a los números primos, se obtiene la siguiente obra, P2:



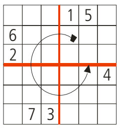
Se pueden establecer otras variables para crear nuevas propuestas a partir del sistema especificado anteriormente. Algunas de estas variaciones afectan tanto al conteo: cómo se realiza, como al sistema de trazado de líneas:

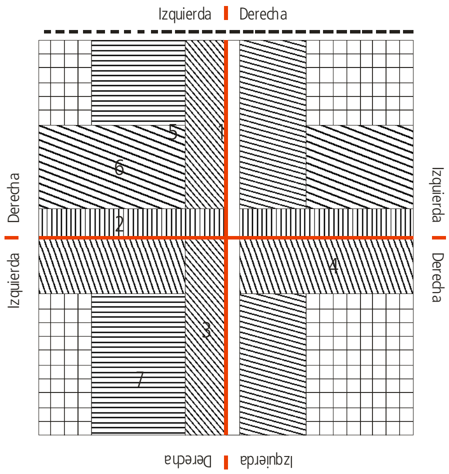
1. Trazar, las líneas verticales 1, 3, 5 y 7 hacia la izquierda del eje que divide al cuadrado en dos partes iguales y las horizontales 2, 4, 6 hacia la derecha, partiendo del centro del cuadrado.

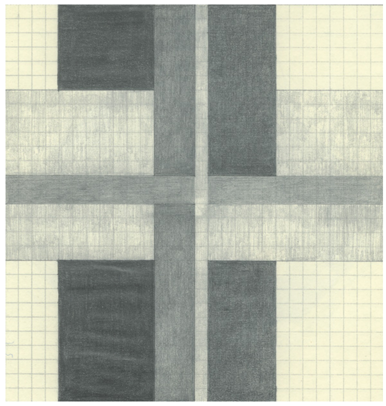
El resultado de estas operaciones se puede apreciar en el siguiente dibujo, P3:



2. Si tanto las líneas verticales como las horizontales de toda la serie se sitúan a la derecha de los ejes del cuadrado, el resultado que se obtiene vuelve a variar, P4:





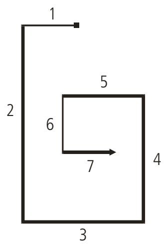


2. D1, D2

La siguiente serie de dibujos está realizada a partir del siguiente sistema:

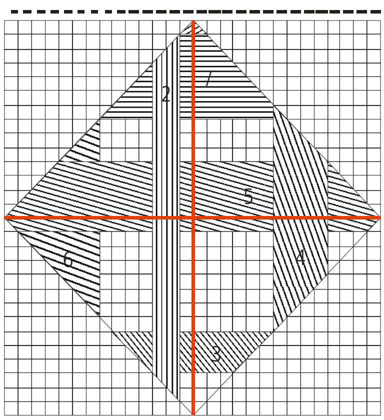
1. Sistema generativo: conteo circular:

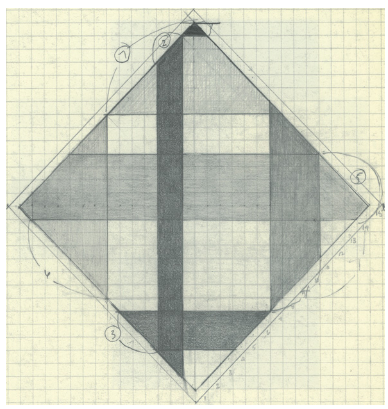
Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la parte superior del círculo y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj.



En D1, el movimiento que se realiza entre las líneas es ortogonal. Cada línea es perpendicular a la anterior; comienza donde acaba la anterior y termina haciendo intersección con el marco del cuadro.

2. Soporte: trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados en diagonal y trazar sus medianas:





3. **Sistema de trazado de líneas:** comenzando en el vértice superior del cuadrado, trazar líneas perpendiculares entre sí, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud la anchura del cuadrado.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia de las líneas trazadas es la que indica el contador y su dirección gráfica espacial está representada por el siguiente esquema:

1 2 3 4 5 6 7

— | — | — | —

Las líneas se trazan por superposición o capas. La primera en trazarse estará en la capa superior del dibujo, la segunda a continuación y así sucesivamente, de modo que la línea que está dibujada en la capa que está en la última posición, tiene parte de sus trazos lineales ocultos por las líneas de las capas trazadas con anterioridad.

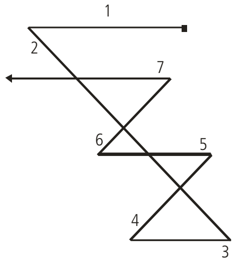
4. **Estructura cromática**: una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

La secuencia de todos los números del 1 al 7 es una secuencia de grises del negro al blanco de 7 tonos diferentes y pautados, y teniendo en cuenta que el extremo del color blanco no está representado.

1 2 3 4 5 6 7

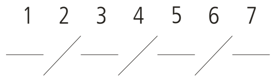
Una variedad de esta obra, es la diseñada en el dibujo D2, que manteniendo muchas de las características del anterior dibujo, soporte y estructura de color, presenta las siguientes diferencias de conteo y trazado de líneas:

1. **Sistema generativo**: el conteo se realiza en forma de zigzag según el siguiente patrón:

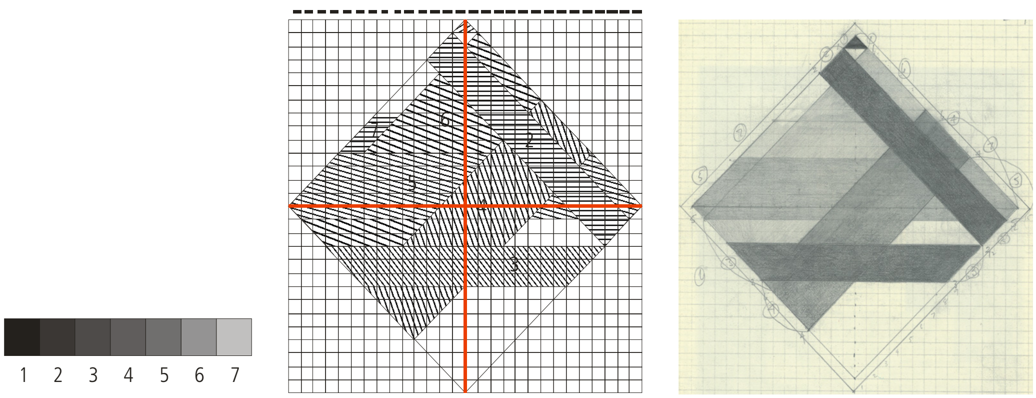


2. **Sistema de trazado de líneas:** comenzando en el vértice superior del cuadrado, trazar líneas en escuadra, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud la anchura del cuadrado.

La secuencia de las líneas trazadas es la que indica el contador y su dirección gráfica espacial está representada por el siguiente esquema:



El resultado de la obra, después de aplicar la estructura de color definida anteriormente es el siguiente:

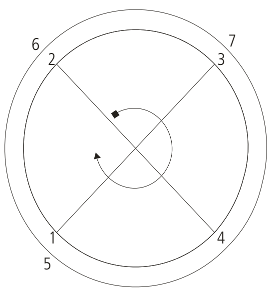


3. X1

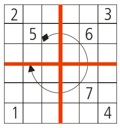
Esta serie de dibujos está definida por el siguiente sistema:

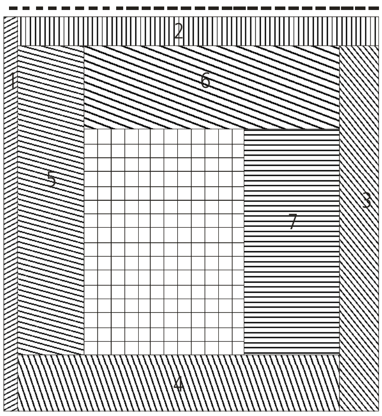
1. **Sistema generativo:** conteo circular:

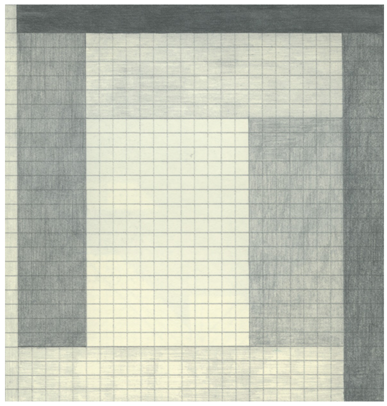
Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la parte inferior izquierda del círculo y contando en el sentido de las agujas del reloj.



2. **Soporte:** trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados:







3. **Sistema de trazado de líneas**: comenzando en el vértice inferior izquierdo del cuadrado, trazar líneas perpendiculares entre sí, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud la distancia entre dos líneas trazadas previamente, excepto la primera que es igual al ancho del cuadrado. Cada línea es perpendicular a la anterior y comienza donde acaba la anterior haciendo un movimiento centrípeto hacia el centro del cuadrado.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia de las líneas trazadas es la que indica el contador y su aplicación gráfica espacial responde al siguiente orden:

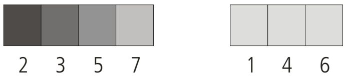
1 2 3 4 5 6 7
| — | — | — |

Las líneas se trazan por superposición o capas. La primera en trazarse está en la capa superior del dibujo, la segunda a continuación y así sucesivamente, de modo que la capa 7 esté en la última posición y por lo tanto parte de sus trazos lineales están ocultos por las líneas de las capas que la preceden.

4. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

   1. Los números primos representan una serie de grises del negro al blanco de cuatro tonos, de manera que el color blanco no estará presente en la serie.

   2. Los números pares están representados por un mismo tono de gris neutro.

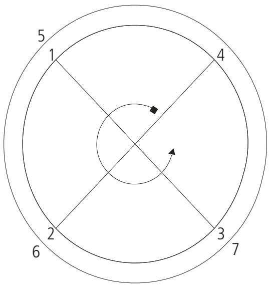


4. X2

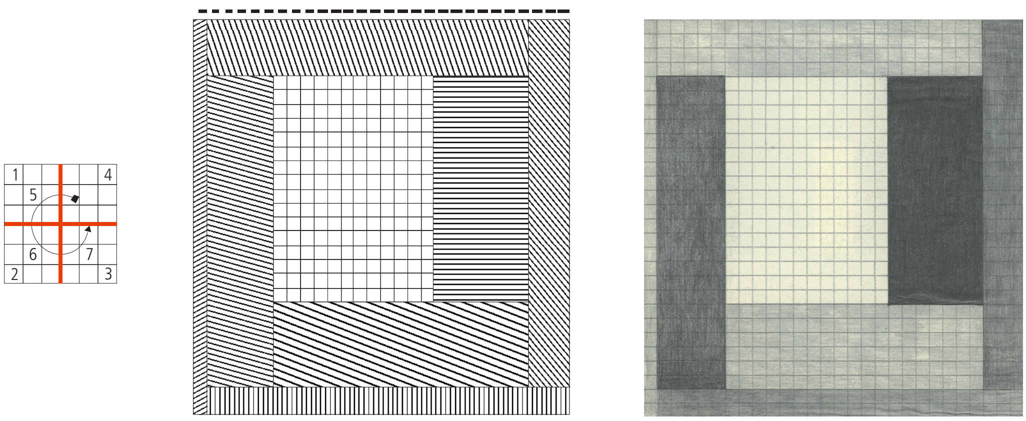
La siguiente obra se realiza a partir del siguiente sistema:

1. **Sistema generativo:** conteo circular:

   Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la esquina superior izquierda del círculo y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj.



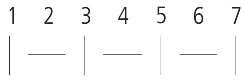
2. **Soporte:** trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados:



3. **Sistema de trazado de líneas:** comenzando en el vértice superior izquierdo del cuadrado, trazar líneas perpendiculares entre sí, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud la distancia entre dos líneas trazadas previamente, excepto la primera línea que es igual al ancho del cuadrado. Cada línea es perpendicular a la anterior y comienza donde acaba la anterior haciendo un movimiento centrípeto hacia el centro del cuadrado.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia de trazado de las líneas es la que indica el contador y su disposición espacial sigue el siguiente ritmo:



Las líneas se trazan por superposición o capas. La primera en trazarse está en la capa superior del dibujo, y la última en la última posición, por lo tanto parte de sus trazos lineales están ocultos por las líneas de las capas anteriores.

4. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

    1. Los números primos representan una serie de grises del negro al blanco de cuatro tonos, de manera que el color blanco no está representado en la obra.

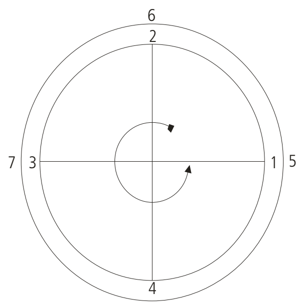
    2. Los números pares están representados por un mismo tono de gris neutro:

5. **U1**

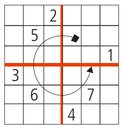
En el dibujo U1, Hughes aplica el siguiente sistema generativo:

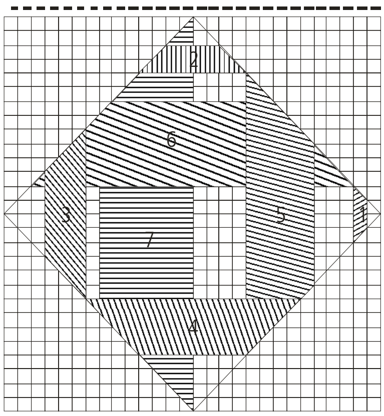
1. **Sistema generativo:** conteo circular:

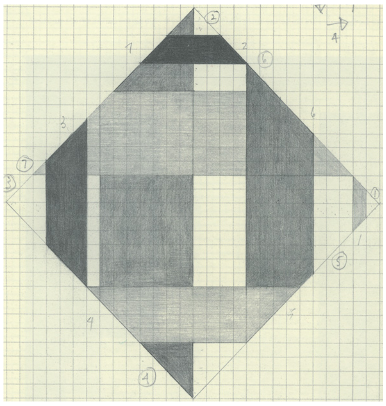
Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la esquina media derecha del círculo y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj.



2. **Soporte:** trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados:







3. **Sistema de trazado de líneas:** comenzando en el vértice derecho del cuadrado, trazar líneas perpendiculares entre sí, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud el ancho del cuadrado. Cada línea es perpendicular a la anterior y comienza con una distancia, del vértice correspondiente al que va a situarse, igual al grosor de la línea. Realiza un movimiento centrípeto hacia el centro del cuadrado.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia de las líneas trazadas es la indicada por el contador y la dirección de los trazos realizados corresponde al siguiente esquema:

1 2 3 4 5 6 7
| — | — | — |

Las líneas se trazan por superposición o capas, de modo que la última línea trazada tiene parte de sus trazos lineales ocultos por las líneas trazadas con anterioridad.

4. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

    1. Los números primos representan una serie de grises del negro al blanco de cuatro tonos, de manera que el color blanco no se representa.

    2. Los números pares están representados por un mismo tono de gris neutro.

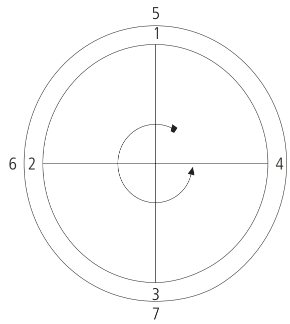
CONTADORES

6. PA

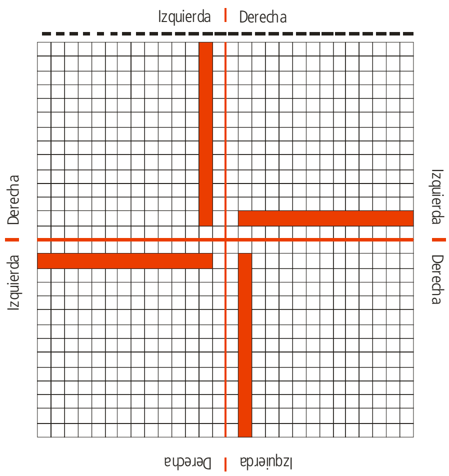
En el dibujo PA, Malcolm Hughes, utiliza el siguiente sistema para generar su obra:

1. Sistema generativo: conteo circular:

Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la esquina superior del círculo y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj.



2. Soporte: trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados y trazar sus medianas:



Sistema de trazado de líneas: comenzando en los puntos medios de los lados del cuadrado y situándose en los lados izquierdos de las medianas, trazar líneas perpendiculares entre sí, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud el ancho del cuadrado. Las líneas tienen forma de T. Cada línea es perpendicular a la anterior y comienza donde acaba la anterior haciendo un movimiento centrípeto hacia el centro del cuadrado.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia gráfica de las líneas trazadas es:

1 2 3 4 5 6 7

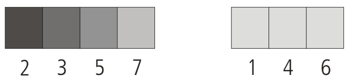
| — | — | — |

3. **Sistema de trazado de líneas:** las líneas se trazan por superposición o capas, de modo que parte de sus trazos lineales están ocultos por trazos de línea que están en capas trazadas con anterioridad.

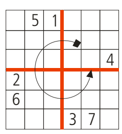
4. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

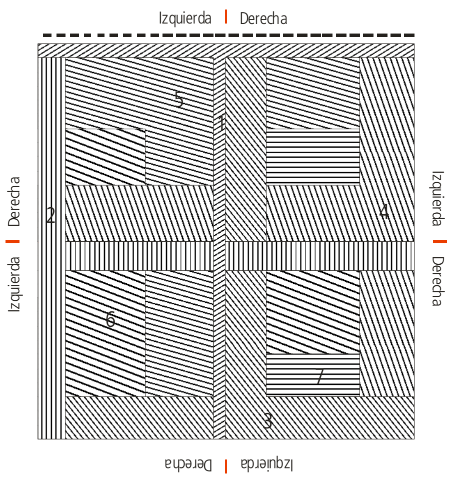
    1. Los números primos representan una serie de grises del negro al blanco de cuatro tonos, donde el blanco no está incluido.

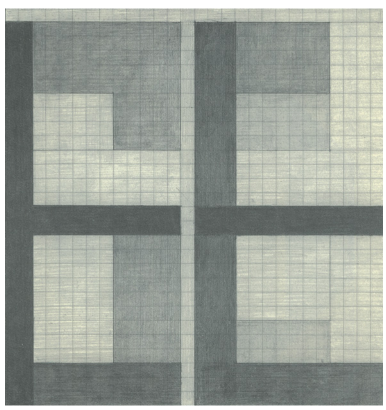
    2. Los números pares están representados por un mismo tono de gris neutro.



A continuación se muestra el desarrollo y representación final de la obra:





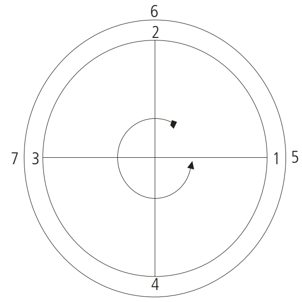


7. T2

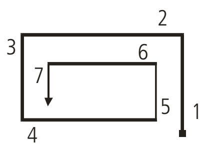
En el dibujo T2, se utiliza el siguiente sistema:

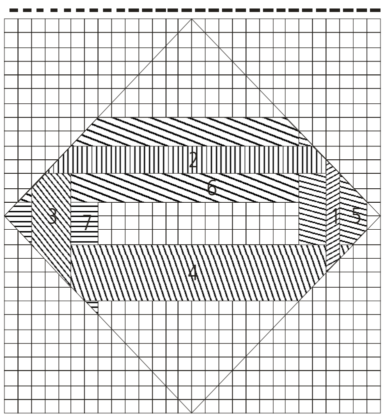
1. Sistema generativo: conteo circular:

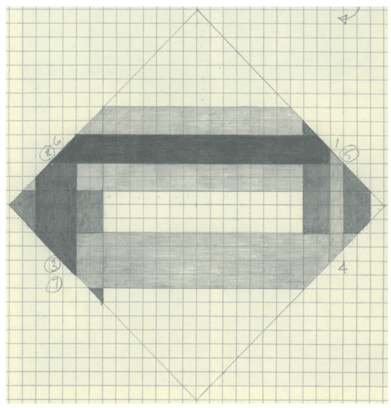
Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la esquina media derecha del círculo y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj.



2. Soporte: trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados:



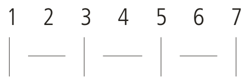




3. Sistema de trazado de líneas: comenzando en el vértice derecho del cuadrado, trazar líneas perpendiculares entre sí, de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud el ancho del cuadrado. Cada línea es perpendicular a la anterior y comienza donde acaba la anterior haciendo un movimiento que produce un marco periférico en el cuadrado con un centro vacío.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia gráfica del trazado de las líneas es:

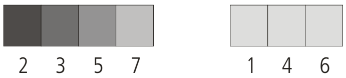


s líneas se trazan por superposición o capas, de forma que parte de las líneas trazadas en la última capa están ocultas por parte de las líneas que se han trazado con anterioridad.

3. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

    1. Los números primos representan una serie de grises del negro al blanco de cuatro tonos, sin contar con el blanco.

    2. Los números pares están representados por un mismo tono de gris neutro.

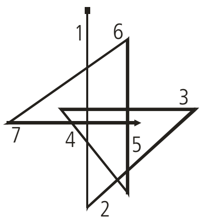


8. A1

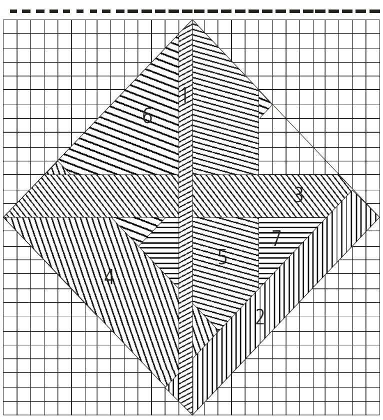
En el dibujo A1, Hughes muestra el siguiente sistema para realizar la obra:

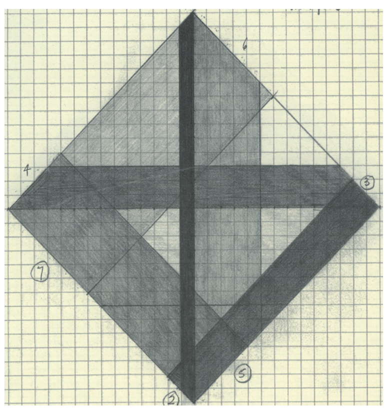
1. **Sistema generativo:** conteo circular:

Contar del 1 al 7 en forma circular, comenzando en la esquina superior del cuadrado y contando en el sentido contrario a las agujas del reloj, alternando líneas ortogonales entre sí a 0º y 90º y sus diagonales a 45º y 135º, siguiendo la siguiente pauta: vertical – diagonal – horizontal – diagonal - vertical – diagonal – horizontal



2. **Soporte:** trazar una matriz de 28 x 28 cuadrados:





3. **Sistema de trazado de líneas:** comenzando en el vértice superior izquierdo del cuadrado, trazar líneas de ancho lo que indica su número de contador correspondiente y de longitud el ancho del cuadrado.

		Anchura líneas
Línea	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7

La secuencia gráfica de la aplicación de las líneas trazadas es:

1 2 3 4 5 6 7

Las líneas se trazan por superposición o capas, y por lo tanto, parte de ellas pueden estar ocultas por líneas trazadas con anterioridad.

4. **Estructura cromática:** una vez realizada la estructura del cuadro, se da color a la obra según el siguiente criterio:

    1. Los números primos representan una serie de cuatro tonos: rojo, naranja, verde y azul.

    2. Los números no primos están representados por un mismo tono de gris neutro.

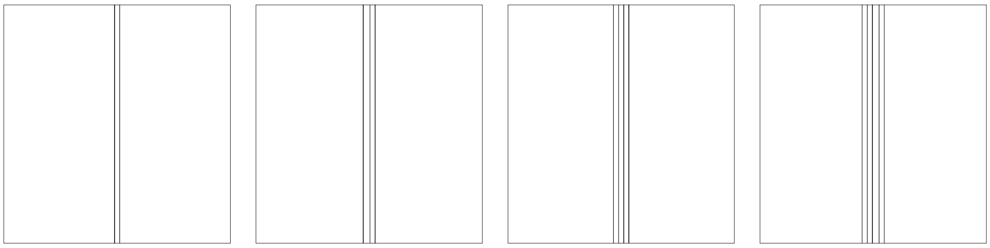
2 3 5 7 1 4 6

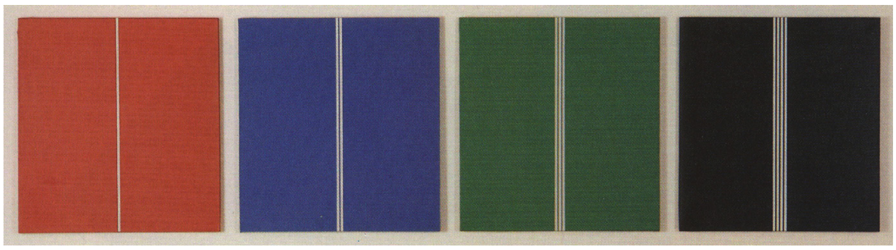
10.9.3.- JAN KUBICEK

1. Principio de verticalidad y de la adición (cuatro fases), 1968[6]

Esta obra de Jan Kubicek, está formada por cuatro cuadros cromáticamente diferenciados y dispuestos horizontalmente, a los que se les ha dibujado su mediana vertical. El sistema generativo de la obra crea un contador a través de las medianas de cada uno de los cuadrados de la serie. Empezando a leer por la izquierda y, avanzando, hacia la derecha, se puede ver representada la serie de los cuatro primeros términos de los números enteros: 1, 2, 3, 4. En el primer cuadrado, la mediana está representada por una línea de un determinado grosor. En el segundo cuadrado, por dos; en el tercero, por tres; y en el cuarto, por cuatro.

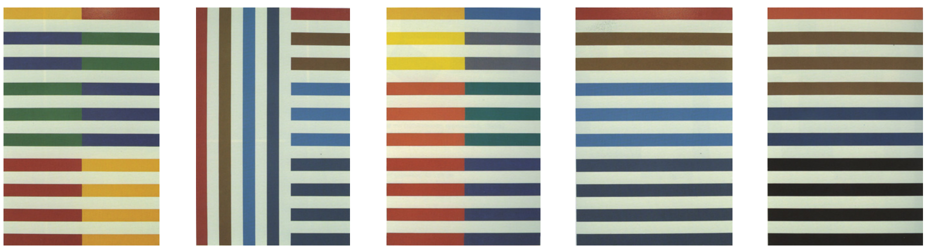
[6] Prinzip der Vertikalen und der Addition (vier Phasen), 1968.





2. Imágenes a rayas con secuencia sistemática (cinco fases), 1981[7]

En todas estas obras de Kubicek, se presenta el mismo patrón conceptual. Sobre un soporte rectangular, se crea una estructura modular horizontal que divide el rectángulo en 19 bandas iguales. Estas bandas horizontales representan, alternamente, dos sistemas gráficos simultáneos. En uno de ellos se representan las bandas de color blanco, creando neutralidad y uniformidad a la obra. En el otro sistema, se crea, a través del uso de clores muy saturados, una secuencia sistemática de conteo del 1 al 4, representada en cada una de las obras de una forma específica. En A, las bandas cromáticas que representan al contador, están divididas verticalmente en dos partes iguales. En las dos mitades de la obra, aunque con distintos colores se produce la misma secuencia de conteo: 1, 2, 3, 4. Visualmente, el conteo se aprecia por acumulación de bandas del mismo color. El uno, está representado por una banda horizontal de un color determinado. El dos, por dos bandas de colores iguales. El tres, por tres bandas cromáticamente iguales. Y finalmente, el cuatro, por cuatro bandas de color iguales. En B, se producen dos conteos: uno horizontal, igual al descrito en A; y otro vertical, representado por la propia operación de conteo: +1, +1, +1, +1. En C y en D, los conteos se realizan con el mismo criterio que en A. En E, se introduce una nueva variedad al conteo: se cuentan, secuencialmente, y empezando en la parte superior del rectángulo, primero los números impares: 1, 3; y luego los pares: 2, 4.



A B C D E

[7] Streifenbilder mit systematischer Reihung (fünf Phasen), 1981.

11.- SERIES BASADAS EN PATRONES GEOMÉTRICOS

Cualquier patrón geométrico ordenado y estructurado puede servir como modelo para sacar, atendiendo a sus características, información numérica serial. La información se puede deber a la ubicación de los elementos dentro del sistema, la definición de movimientos y trayectos entre los elementos del sistema, la información sobre relaciones entre los elementos,…

Con el objetivo de conocer diferentes patrones geométricos y de ver cómo pueden ser útiles para obtener información ordenada y estructurada que se pueda aplicar a otros menesteres creativos, se ha realizado este estudio descriptivo.

11.1.- SERIES BASADAS EN INSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

Tom Johnson, en su libro *Self-Similar Melodies,*[1] muestra un patrón geométrico, realizado según el siguiente programa:

1. Encuadrar el dibujo dentro de un cuadrado.
2. Comenzar en la esquina inferior izquierda.
3. Trazar una línea continua que se mueva en el sentido contrario a las agujas del reloj y que cumpla los siguientes requisitos:

Movimiento 1:
1. Realizar un recorrido de 3 tramos perpendiculares entre sí, alrededor de tres lados del cuadrado.
2. Continuar trazando una diagonal al cuadrado.

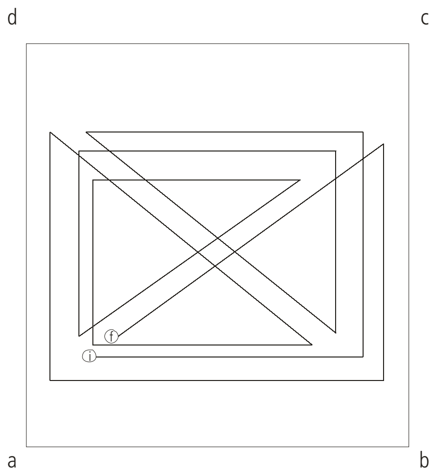
Movimiento 2:
1. Repetir el recorrido de la línea alrededor de otros tres lados del cuadrado.
2. Trazar una diagonal al cuadrado.

Movimiento 3:
1. Repetir el recorrido de los tres lados de nuevo.
2. Trazar nuevamente una diagonal.

Movimiento 4:
1. Recorrer otra vez los tres lados del cuadrado.
2. Finalmente trazar una última diagonal al cuadrado.

En el último punto, la línea completa un ciclo ya que vuelve al punto de partida.

[1] Tom Johnson, *Self-Similar Melodies,* Editions 75, París, 1996, p. 200.



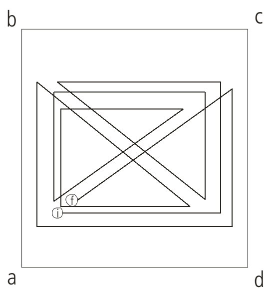
Para definir los movimientos de la línea se puede dar nombre a las cuatro esquinas del cuadrado de la siguiente forma:

1. Esquina inferior izquierda a
2. Esquina inferior derecha b
3. Esquina superior derecha c
4. Esquina superior izquierda d

El movimiento quedará definido con la siguiente secuencia:

a b c d b
b c d a c
c d a b d
d a b c a

Manteniendo la misma estructura, si se recorre el cuadrado en el sentido de las agujas del reloj, en vez de al contrario, la serie sería la siguiente:



a d c b d
d c b a c
c b a d b
b a d c a

Aparece ahora una progresión descendente, pero al final, la línea también completa un ciclo ya que vuelve otra vez al punto de partida.

Este procedimiento se caracteriza por ser una aplicación repetida de un mismo sistema: trazar 3 perpendiculares entre sí y una diagonal. Se podrían definir otros sistemas, añadiendo más líneas, y en otras condiciones, al proceso definido.

Dentro de la progresión obtenida a partir del recorrido de las líneas en el sentido contrario a las agujas del reloj, se pueden realizar también, cuatro rotaciones con los patrones obtenidos:

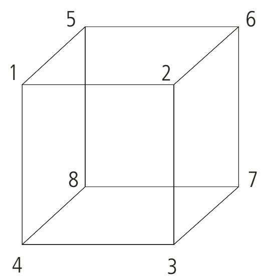
a b c d b	b c d a c	c d a b d	d a b c a

Las secuencias que se obtendrían serían:

a b c d b	b c d a c	c d a b d	d a b c a
b c d a c	c d a b d	d a b c a	a b c d b
c d a b d	d a b c a	a b c d b	b c d a c
d a b c a	a b c d b	b c d a c	c d a b d

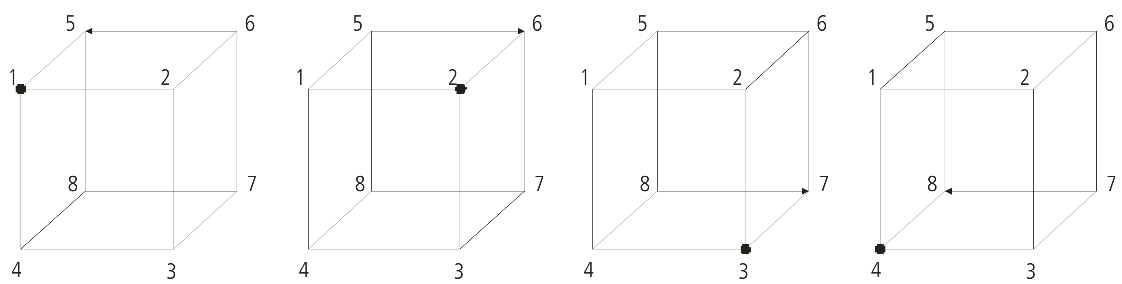
11.2.- SERIES BASADAS EN FIGURAS GEOMÉTRICAS

Si el punto de partida es un cubo, se pueden utilizar cada uno de sus vértices como puntos significativos y asignarles un nombre para identificarlos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.[2]

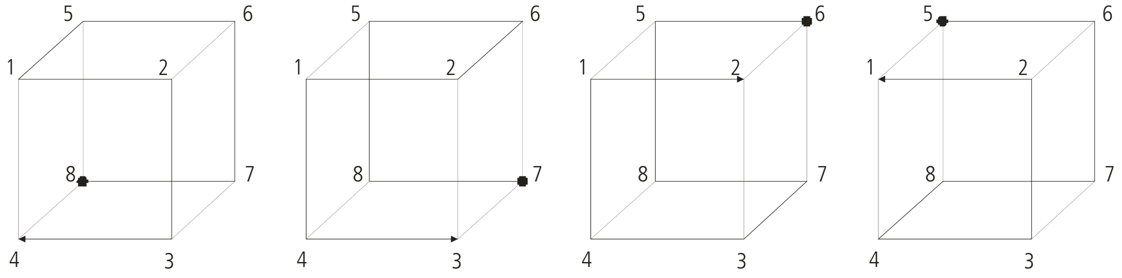


El programa que recorre el cubo para definir el sistema es el siguiente:

Comenzando en cualquier vértice del cubo, realizar un recorrido lineal por las aristas del cubo, sin repetir ninguna, de forma que cada uno de los trayectos realizados pase por los 8 vértices del cubo. Los resultados que se obtienen a partir de esta proposición son los siguientes:



[2] Tom Johnson, *op. cit.,* pp. 204-205.

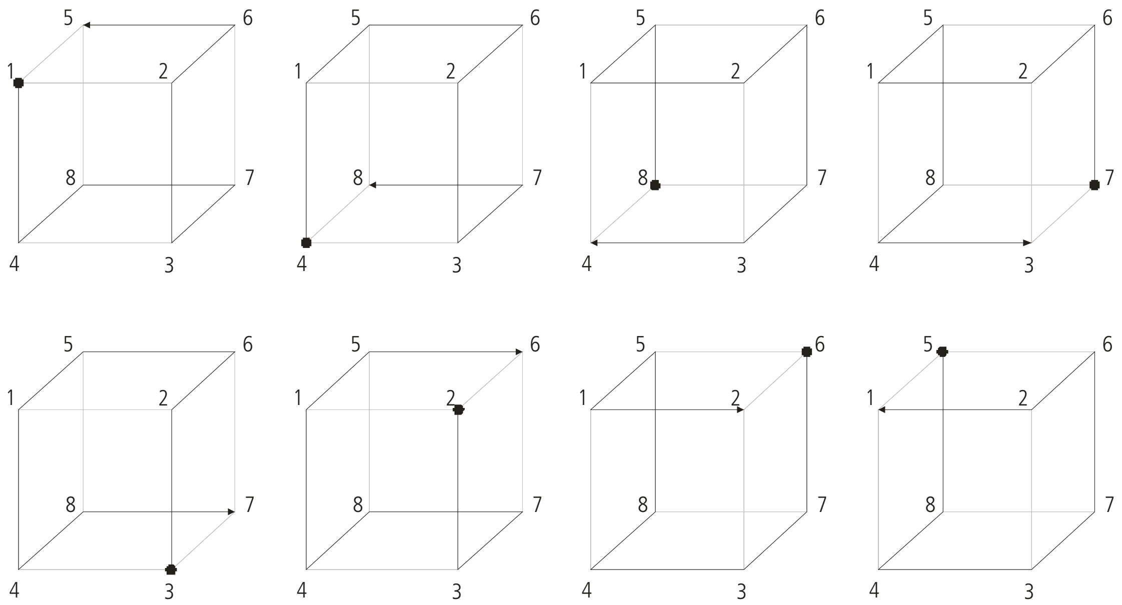


Siguiendo este programa se pueden crear 8 secuencias de ocho números cada una:

12348765	21437856	34126587	43215678
87651234	78562134	65873412	56784321

Cada una de estas secuencias representa una manera de recorrer los 8 vértices del cubo.

Otra forma de recorrer los 8 vértices del cubo con 7 movimientos diferentes siguiendo las aristas del cubo, es la siguiente:



Siguiendo este procedimiento se pueden crear otras 8 secuencias de 8 números cada una:

14873265	41562378	85126734	76215843
32651487	23784156	67348512	58437621

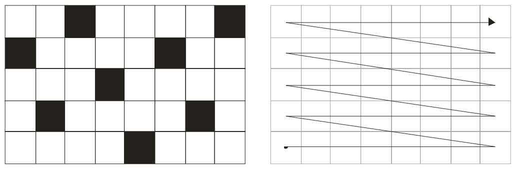
Se podría trabajar también sobre cubos con cuatro y cinco dimensiones, con cuadrados, triángulos, pentágonos, hexágonos,…, o examinar los patrones geométricos encontrados en árboles, cristales y estructuras químicas.

11.3.- SERIES BASADAS EN PATRONES DE TEJIDO

Si se toma una matriz rectangular de 5 x 8 cuadrados y se representa en ella un patrón de tejido que responda al siguiente procedimiento:[3]

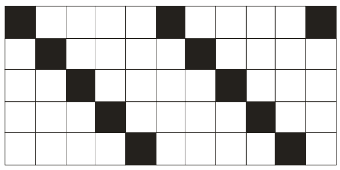
1. Comenzar en la esquina inferior izquierda de la matriz y tachar uno de cada cinco cuadrados. La lectura de las casillas de la matriz se realiza de abajo arriba y de izquierda a derecha, según el orden indicado por la flecha en la ilustración que acompaña al patrón de tejido.

2. Terminar el proceso cuando se llegue a la esquina superior derecha de la matriz.



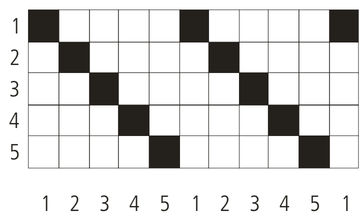
Todo cuadra correctamente porque hay 40 cuadrados, y 40 es divisible por 5. En el patrón visual del tejido, los 8 cuadrados negros obtenidos (40 : 5 = 8) forman diagonales ascendentes y descendentes, cuyos elementos están desplazados entre sí, horizontalmente, dos posiciones.

Si se repite este mismo sistema sobre una matriz rectangular de 5 x 11, el diseño varía:[4]



Como 11 no es múltiplo de 5 sino que dividido entre 5 deja un resto de 1, la diferencia de desplazamiento de los cuadrados negros entre una línea y la siguiente es de 1 cuadrado. En el patrón visual del tejido, los 11 cuadrados negros obtenidos (55 : 5 = 11) forman líneas a 45º.

A partir de los resultados obtenidos sobre esta matriz de 11 x 5, se pueden obtener secuencias de números de formas muy diferentes. Una de ellas, responde al siguiente procedimiento: leer la posición, del 1 al 5, que ocupa, verticalmente, cada casilla de la matriz señalada con el color negro, teniendo en cuenta que la dirección de lectura de la matriz es de arriba abajo y de izquierda a derecha. Según este criterio, la secuencia que se obtiene es la siguiente:



[3] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 209.
[4] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 210.

12345 12345 1

En los tejidos, se puede trabajar con más de dos colores: blanco y negro. En el siguiente ejemplo, en vez de situar un hilo negro en cada intervalo de cinco, se añade un tercer color, el gris.

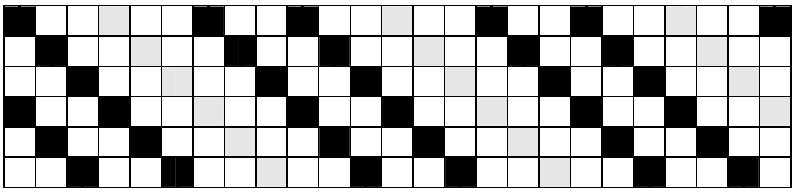
En una matriz rectangular de 25 x 6 cuadrados, se utiliza el siguiente criterio compositivo para marcar las casillas negras y blancas de la matriz:

1. Comenzar en la esquina inferior izquierda de la matriz y tachar en negro una de cada 3 casillas. La lectura de las casillas de la matriz se realiza de abajo arriba y de izquierda a derecha.
2. Terminar cuando se alcance la esquina superior derecha.

Para marcar las casillas grises de la matriz, se añade una tercera regla compositiva:

3. Cada dos marcas en negro en el tejido, realizar con el mismo criterio, una gris.

El patrón del tejido resultante sería el siguiente:



Si se interpreta la representación del tejido de la matriz según las siguientes características:

1. Representar con 0, los hilos blancos
2. Representar con 1, los hilos negros
3. Representa con 2, los hilos grises

Y leyendo la matriz de arriba a abajo y de izquierda a derecha, se obtiene la siguiente secuencia:

1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1

0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0

0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0

1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2

0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0

0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 0 1 0

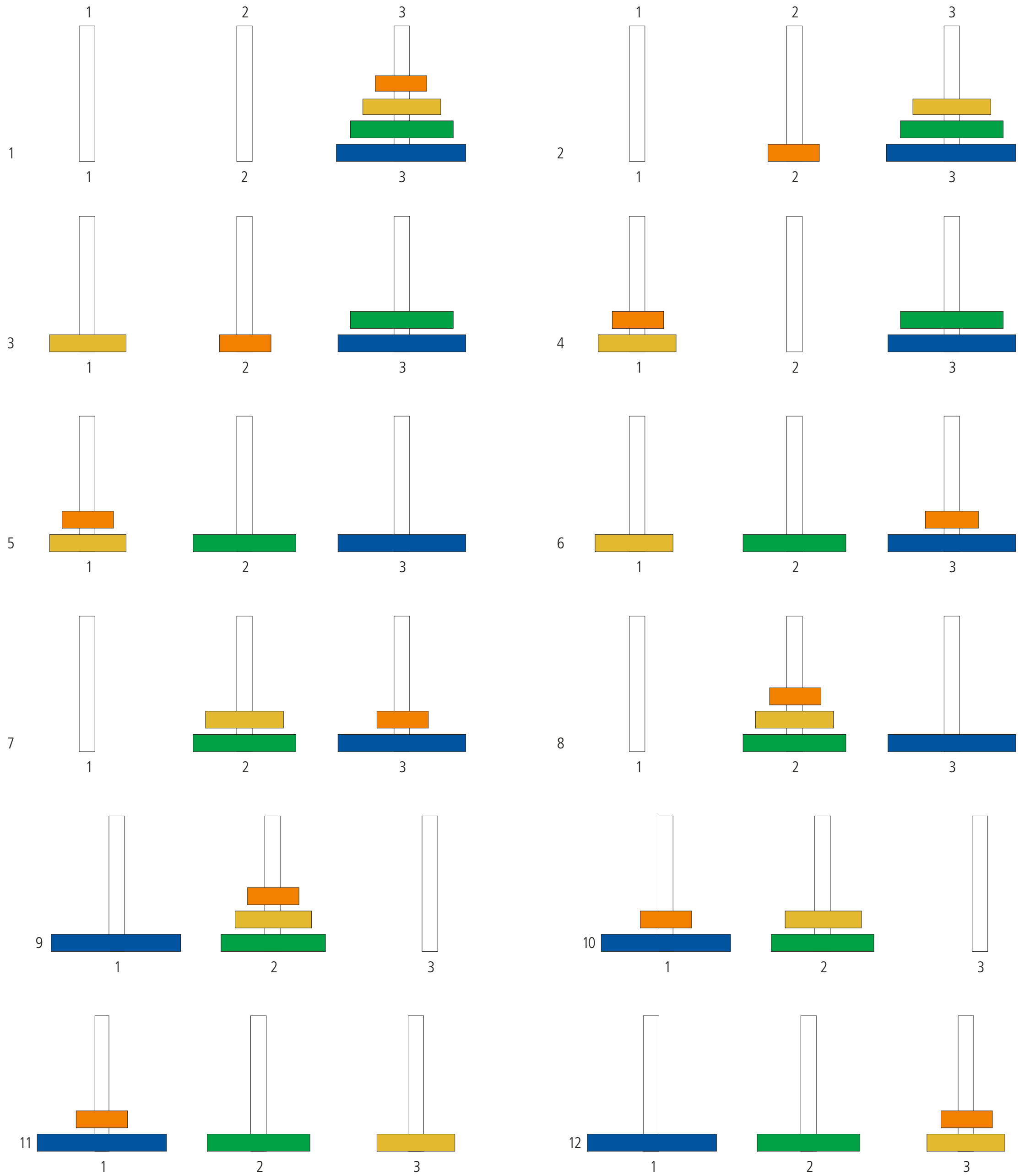
11.4.- SERIES BASADAS EN LAS TORRES DE BRAHMA O TORRES DE HANOI

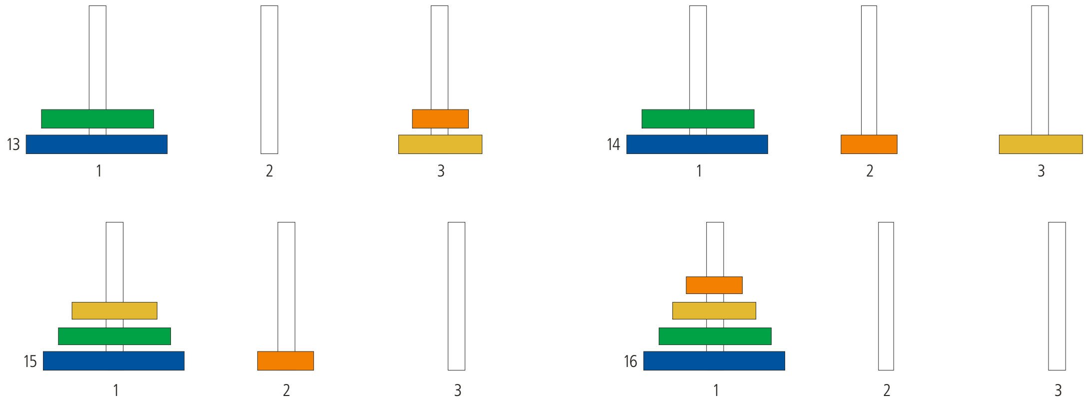
En este tipo de transformaciones se trabaja con analogías. Se toma una estructura que ya existe en otro campo de conocimiento, un juego llamado Torres de Hanoi o Torres de Brama, y se traslada al campo de la composición artística. Lo que se hace es codificar y decodificar cosas.

El juego de las Torres de Hanoi o Torres de Brahma utiliza tres postes 1, 2 y 3 y cuatro anillos de cuatro medidas diferentes: naranja, amarillo, verde y azul.

En la posición inicial, se colocan los tres postes alineados. Dos de los postes están vacíos y el tercero tiene insertados los 4 anillos de diferentes tamaños colocados por tamaño, de forma que el de mayor diámetro ocupa la posición inferior y el de menor, la superior.

El objeto del juego es mover los anillos de un poste (3) a otro, uno cada vez, y nunca colocando un anillo mayor encima de uno más pequeño, hasta que los anillos estén perfectamente alineados en el poste opuesto (1), utilizando los mínimos movimientos posibles.





Si se considera no sólo el anillo que se mueve sino también los postes en los que se apilan los anillos y en los que no se apilan y se llaman a los tres postes 1, 2 y 3, nombrándolos de izquierda a derecha, y se mira con detenimiento a los movimientos que un jugador tiene que hacer para mover los cuatro anillos del poste 3 al 1, la secuencia por orden de ejecución será:[5]

Anillo	Desapilar Poste Salida	Apilar Poste Entrada
1	3	2
2	3	1
1	2	1
3	3	2
1	1	3
2	1	2
1	3	2
4	3	1
1	2	1
2	2	3
1	1	3
3	2	1
1	3	2
2	3	1
1	2	1

La primera columna de la tabla muestra el anillo que se mueve cada vez. Su secuencia es:

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

Las secuencias de las otras dos columnas son similares. Si se coloca la secuencia de los postes de salida y debajo la secuencia, en orden inverso, de los postes de entrada de los anillos, el efecto es el siguiente:

[5] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 173.

Poste salida	3	3	2	3	1	1	3	3	2	2	1	2	3	3	2
Poste entrada	1	1	2	1	3	3	1	1	2	2	3	2	1	1	2

La única diferencia entre ellas es que los 1 y los 3 están invertidos. Hay más números 3 en la serie de los postes de salida, ya que es lugar desde donde comienzan los anillos a moverse, y más números 1 en la serie de los postes de entradas, porque es a donde tienen que llegar los anillos.

Con cuatro anillos, los movimientos de los anillos a los postes, independientemente de cual sea el anillo que se mueve, son los siguientes:[6]

32 31 21 32 13 12 32 31 21 23 13 21 32 31 21

Partiendo de esta última secuencia, si se subraya uno de cada cuatro números:

$\underline{3}231\underline{2}132\underline{1}312\underline{3}231\underline{2}123\underline{1}321\underline{3}231\underline{2}1$

Se puede leer 321 continuamente. Y si se toman en cuenta los números siguientes a los subrayados, se obtiene la misma secuencia pero comenzando con 2:

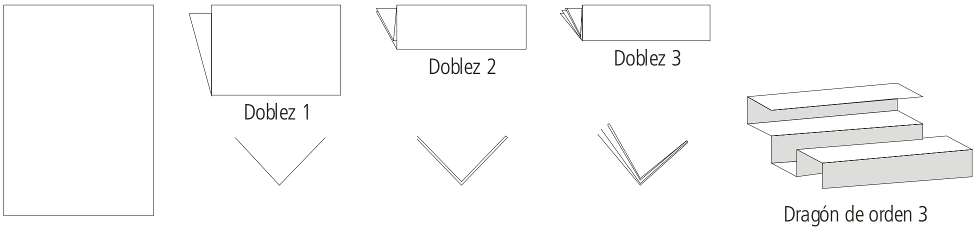
$3\underline{2}312\underline{1}321\underline{3}123\underline{2}312\underline{1}231\underline{3}213\underline{2}312\underline{1}$

11.5.- SERIES BASADAS EN LA CURVA DE DRAGÓN

"A mediados de los 60's, un físico de la NASA, John E. Heighway, comenzó a estudiar qué ocurriría si se doblaba un papel por la mitad, una y otra vez, siempre en la misma dirección".[7] Lo que pasaba, independientemente de las veces que se doblase el papel, era que la secuencia de derecha e izquierda que se conseguía recordaba, según explica Martín Gardner[8] en su libro *Festival Mágico-Matemático*, "vagamente a un dragón nadando hacia la izquierda, provisto de patas de agudas garras, y cuyo curvado hocico sobresaliera, lo mismo que la cola en espiral, de una imaginaria superficie"; es decir, el dragón que se generaba tenía un tipo de cabeza, dos pies, y un largo rabo curvo. Heighway bautizó a esta figura la "curva de dragón". En los siguientes años, la secuencia se convirtió en un autómata binario muy conocido y estudiado. Se engendraron varios métodos para engendrar la curva de dragón: uno basado en una sucesión de dígitos binarios, otro como resultado de plegar varias veces una hoja de papel y un tercero basado en una construcción geométrica.
Según el método de plegados[9] de una hoja de papel, el proceso es el siguiente:

1. Doblar una hoja de papel por la mitad tantas veces como se desee.
2. Abrir el papel doblado, de forma que por cada doblez se defina un ángulo recto.

[6] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 175.
[7] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 83.
[8] Martín Gardner, *Festival Mágico-Matemático,* Alianza Editorial, Madrid, 1994, p. 234.
[9] Martín Gardner, *op. cit.*, p. 245.



Con el primer doblez se divide el papel en dos partes y un pliegue. A este pliegue se le llamó pliegue de tipo valle (1). Con el segundo doblez, siempre realizando los dobleces en la misma dirección, se divide el papel en cuatro partes con tres pliegues. El pliegue del centro continúa siendo un pliegue de tipo valle (1), pero a los dos lados de éste, hay un pliegue de tipo valle (1) y un pliegue de tipo cresta (0). Se genera un dragón de orden 2. Haciendo un tercer doblez, se divide el papel en 2^3 partes (8), y se tienen $2^3 - 1$ pliegues (7): el pliegue original, los dos pliegues que se añadieron con el segundo doblado y cuatro pliegues nuevos, dos tipo valle (1) y dos tipo cresta (0). Se genera, en este caso, un dragón de orden 3. En general, n dobleces producen un dragón de orden n.

Si se representa la curva de dragón teniendo en cuenta el tipo de dobleces, 0 (pliegue en cresta) y 1 (pliegue en valle), que se van generando por cada operación que se aplica al papel, se obtiene la siguiente secuencia binaria:

1
1 1 0
1 1 0 1 1 0 0
1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0
1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0

Para poder deducir el proceso de construcción binaria de la curva, se representa la secuencia de la siguiente forma:

1

1 1 0

1 1 0 1 1 0 0

1 1 0 1 1 0 0 **1** 1 1 0 **0** 1 0 0

1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0

De esta representación visual se deduce que para representar un dragón correspondiente a un orden dado, su serie se deduce de la del orden inmediatamente anterior mediante la siguiente técnica recursiva:

1. Se copian todos los dígitos de la secuencia anterior.
2. Se añade un 1 a la secuencia.
3. Se vuelven a copiar todos los dígitos de la secuencia anterior pero cambiando la cifra central de esa secuencia; 0 por 1 y 1 por 0.

La curva de dragón de orden 1 está representada por la secuencia de un único término, 1. Para obtener la secuencia de la curva de dragón de orden 2, se copia la secuencia anterior, 1; se le añade un 1, 11; se vuele a copiar la secuencia anterior que, como sólo tiene un término, éste es también la cifra central, y se convierte en 0. Se obtiene así la secuencia 110 de la curva de orden 2. Para obtener la secuencia de orden 3: se copia la secuencia anterior, 110; se añade un 1, 1101; y finalmente se añade 110 con su cifra central cambiada, 100. Se obtiene así la secuencia de la curva de orden 3: 1101100. De la misma manera se obtienen las secuencias de orden superior. Se puede observar que cada curva de dragón está formada por dos copias de dragones de orden inmediatamente inferior, unidas cabeza con cabeza, de forma que la segunda curva se representa desde el hocico hasta la cola.

Algunas observaciones a tener en cuenta sobre este proceso[10] son las siguientes:

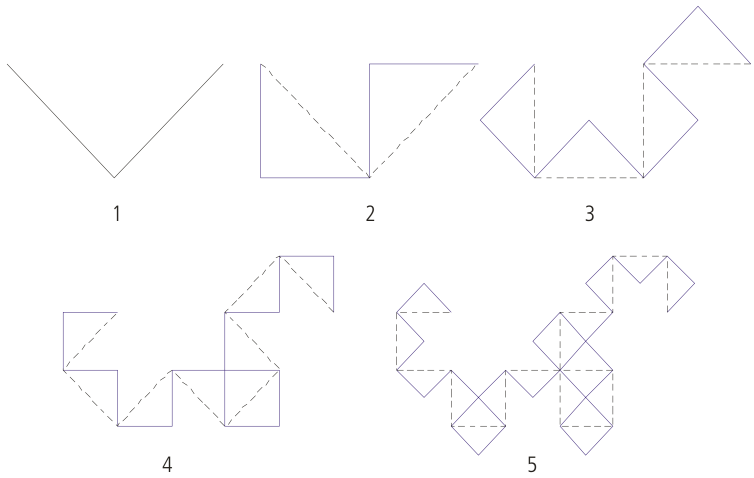
1. Después de n pliegues, el papel se divide en 2^n partes con $2^n - 1$ pliegues.

2. En cada nivel, los pliegues de tipo valle (1) exceden en número a los pliegues de tipo cresta (0).

3. Ignorando el pliegue de tipo valle (1) del centro del papel, los unos sobrepasan en número a los ceros en una unidad en la primera mitad de la curva de dragón: en el lado izquierdo; y los ceros sobrepasan en número a los unos en la segunda mitad, en el lado derecho.

4. Ignorando el pliegue de tipo valle (1) del centro del papel, la primera mitad de cada transformación es la misma que la transformación previa entera, de forma que lo que le ocurre a la primera mitad del papel ahora es exactamente lo que le ocurrió al papel entero en la transformación anterior.

El físico Bruce A. Banks[11] descubrió cómo realizar la construcción geométrica de la curva de dragón. Su proceso comienza con un ángulo recto. A continuación, en cada etapa, cada segmento que surge, lo reemplaza por un ángulo recto de ángulo menor que el anterior:



Jean-Paul Allouche[12] mostró otra forma de obtener la curva de dragón. En vez de doblar el papel, simplemente se comienza con una cadena alternativa de unos y ceros, dejando espacios entre ellos. Después, se rellenan los huecos que quedan libres, cada dos espacios con la secuencia unos y ceros. Y finalmente, se rellenan los restantes huecos, cada dos, con unos y ceros. Y así sucesivamente:

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0

1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0

1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0

---

[10] Tom Johnson, *op. cit.,* pp. 84-85.

[11] Martín Gardner, *op. cit.,* p. 247.

[12] Tom Jonson, *op. cit.,* p. 84.

1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0		1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0		1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0		1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0

Otros matemáticos como Chandler Davis[13] de la Universidad de Toronto y Donald E. Knuth de la Universidad de Standford han realizado otros estudios muy exhaustivos sobre las curvas de dragón: procedimientos para obtener la sucesión generatriz de la curva de dragón; variantes de la curva: curvas de dragón con giros a derecha e izquierda diferentes a 90 grados; y generalizaciones de la curva y sus propiedades.

11.6.- SERIES BASADAS EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es una tabla numérica infinita de forma triangular en cuyos lados se encuentran las unidades y todo número, menos estas unidades laterales, se obtiene como suma de dos números que están encima de él, por su izquierda y su derecha. Por ejemplo, el tercer número de la quinta fila (10), empezando a contar por la izquierda, se obtiene sumando los dos números que están a su derecha e izquierda, en la fila anterior (4ª): 4 y 6 (4 + 6 = 10). El sexto número de la séptima fila (21), empezando a contar por la izquierda, se obtiene sumando los dos números que están a su derecha e izquierda, en la fila anterior (6ª): 15 y 6 (15 + 6 = 21). Y finalmente, el cuarto número, empezando por la izquierda, de la décima fila (120), se obtiene sumando los dos números que están a su derecha e izquierda, en la fila anterior (9ª): 36 y 84 (36 + 84 = 120).

	Fila = n
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6
1 7 21 35 35 21 7 1	7
1 8 28 56 70 56 28 8 1	8
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	9
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	10

El triángulo de Pascal se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. La primera línea del triángulo de Pascal, n, es igual a cero: n = 0.
2. El número de términos de una línea crece en una unidad con respecto a la línea anterior, por lo tanto en la n-ésima línea de Pascal habrá n + 1 términos.
3. La suma de los números de la n-ésima fila de Pascal es equivalente a 2^n.

[13] Coautores del siguiente artículo: «*Number Representation and Dragon Curves*» (Journal of Recreational Mathematics, vol. 3, abril de 1970, pp. 66-81, y vol. 3, Julio de 1970, pp. 133-49).

4. Todas las líneas del triángulo de Pascal son simétricas.
5. Cada número de cada línea del triángulo de Pascal es el resultado de la suma de los dos números de la línea anterior entre los que se encuentra situado.
6. El triángulo de Pascal es simétrico con respecto a su bisectriz.
7. Los números que lo rellenan tienen una serie de propiedades interesantes: números pares (divisibles por 2) e impares (números divisibles por 3, 5, 7, 9), potencias de 2 (la suma de todos los coeficientes de un fila n del triángulo de Pascal, es igual a 2^n),…
8. Todos los números de una n-ésima fila, menos los dos extremos, son divisibles por n.

El triángulo de Pascal es un triángulo aritmético, es un autómata ya que contiene muchos procedimientos que repitiendo aplicaciones concretas como la suma de +1 a lo largo de todo el triángulo permite encontrar estructuras de series numéricas conocidas. Algunas series de números interesantes que se encuentran en el triángulo de Pascal son las siguientes:

1. Serie de potencias del binomio (1 + x): $(1 + x)^n$

Si se leen horizontalmente los elementos de una fila se obtienen todos los coeficientes de las potencias de (1 + x), es decir, $(1 + x)^n$. Donde n indica la fila de la matriz pero teniendo en cuenta que el cómputo de las filas comienza por n = 0. Por ejemplo, n = 4, señala la fila 5ª del triángulo de Pascal.

Si se toma el binomio (1 + x) y se empieza a elevar a las potencias 0, 1, 2, 3,…, se obtienen los siguientes polinomios:

$(1 + x)^0 = 1$
$(1 + x)^1 = 1 + x$
$(1 + x)^2 = (1 + x)\ (1 + x) = 1 + 2x + x^2$
$(1 + x)^3 = (1 + x)^2\ (1 + x) = 1 + 3x + 3\ x^2 + x^3$

En general, el desarrollo del binomio (1 + x) para el exponente n, siendo n cualquier número entero no negativo, está definido por la siguiente relación:

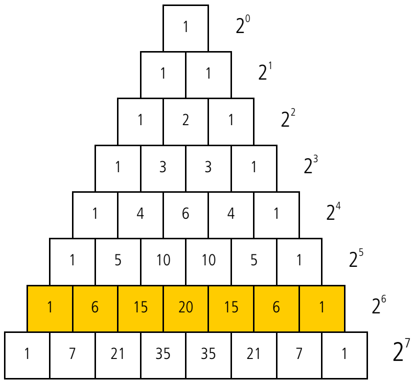
$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Donde a_0, a_1, a_2, ..., a_n son los coeficientes numéricos del polinomio.

Por ejemplo, para n = 3, los coeficientes que se obtienen son: 1, 3, 3, 1, que corresponden a la cuarta línea física del triángulo de Pascal y para n = 2, los coeficientes obtenidos 1, 2, 1 están situados en la tercera fila física.

2. Serie de las potencias de 2: (2^n)

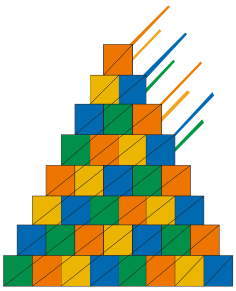
La suma de todos los coeficientes de una fila n del triángulo de Pascal es igual a 2^n. El número n, numera las filas del triángulo, empezando de arriba abajo y comenzando con el número 0 (n = 0).

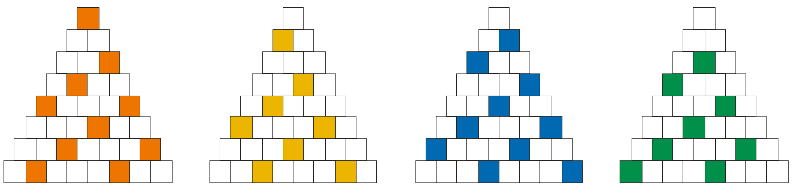


En la fila séptima, n = 6, la suma de todos los coeficientes que la componen es igual a 64 (1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64) y el resultado de realizar la operación de la potencia sexta de 2 es también 64 (2^6 = 2 x 2 x 2 x2 x 2 x 2 x 2 = 64).

3. Serie de Fibonacci:

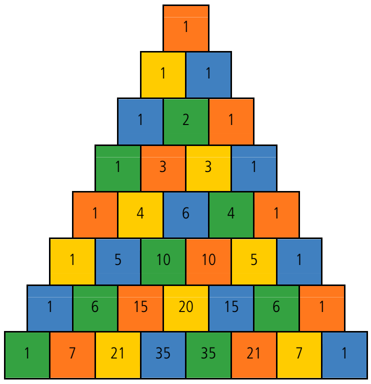
Si se lee el triángulo de Pascal en diagonales del mismo color y desde la esquina superior derecha hasta la esquina inferior izquierda, siguiendo el orden de los patrones de color rojo, amarillo, azul, verde, y repitiendo esta secuencia hasta llegar al final del triángulo, se obtienen los términos de la serie de Fibonacci.





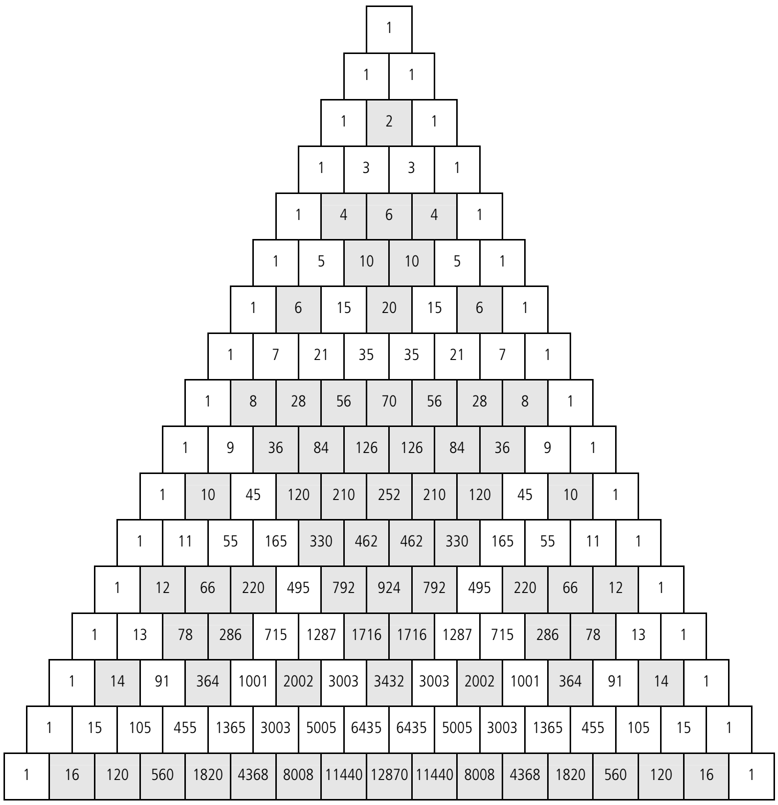
Sumando los coeficientes de las series por secuencia de colores rojo, amarillo, azul y verde sucesivamente permiten obtener los términos de la serie de Fibonacci:

1
1
1 + 1 = 2
1 + 2 = 3
1 + 3 + 1 = 5
1 + 4 + 3 = 8
1 + 5 + 6 + 1 = 13

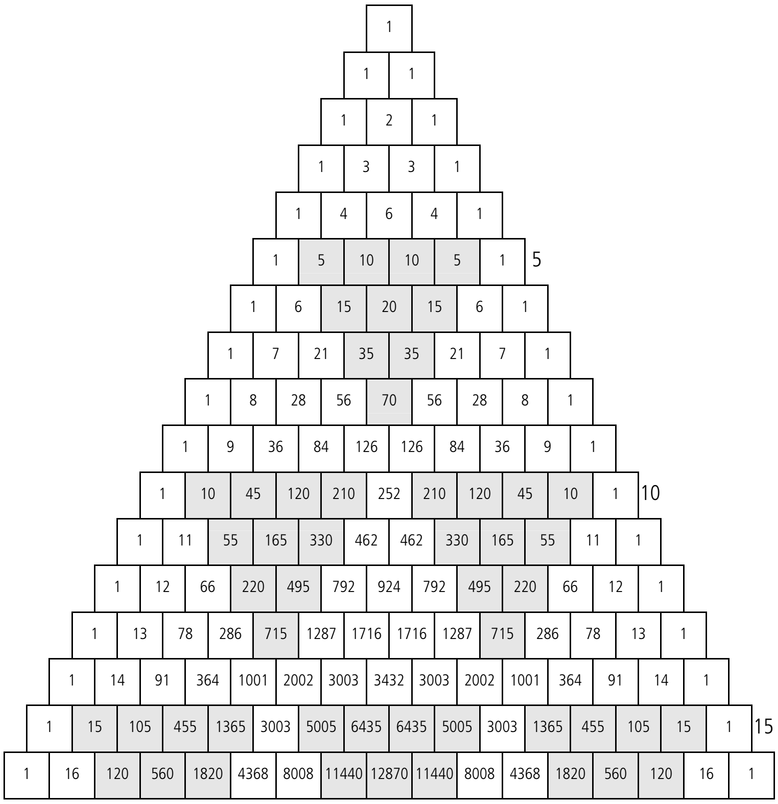


4. Series formadas por los números pares del triángulo:

Si se seleccionan dentro del triángulo de Pascal todos aquellos números que son pares, aparecen triángulos más pequeños e invertidos, con el vértice superior hacia abajo, dentro del triángulo de Pascal. Los triángulos que se generan son de distintas dimensiones. En el triángulo de Pascal de la ilustración, el pequeño está formado por un único cuadrado. El mediano consta de 6 cuadrados y el grande de 28. Los números que aparecen en estos triángulos son números triangulares.



5. Series formada por los números del triángulo divisibles por 5:



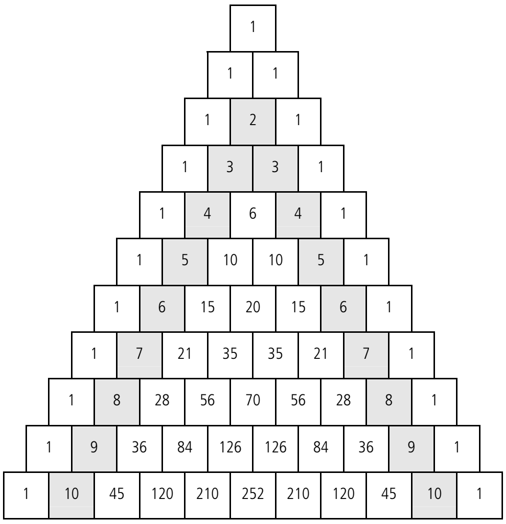
Al seleccionar todos los números divisibles cinco, aparecen otra vez triángulos invertidos, pero esta vez son todos del mismo tamaño: 10 números. La secuencia de triángulos se va incrementando de forma natural, 1, 2, 3,…, según se va avanzando por el triángulo de Pascal.

Las líneas cuyas posiciones n son igual a 5, 10, 15, 20, 25, y otros múltiplos de 5, están formadas por unos (1) y por grupos de cuatro números que corresponden a la base de los triángulos de números divisibles por 5.

Se puede realizar el triángulo de Pascal de cualquier conjunto de números divisibles por cualquier número, pero 5 es un número primo y el triángulo de Pascal divisible por cualquier número primo es bastante simétrico y predecible. Los número cuadrados también crean un orden bastante simétrico en la serie pero los números que tienen varios divisores son más caóticos

6. Series de números enteros:

La diagonal paralela al borde del triángulo, está formada por la progresión aritmética de la serie natural de los números enteros: 1, 2, 3, 4, 5,…

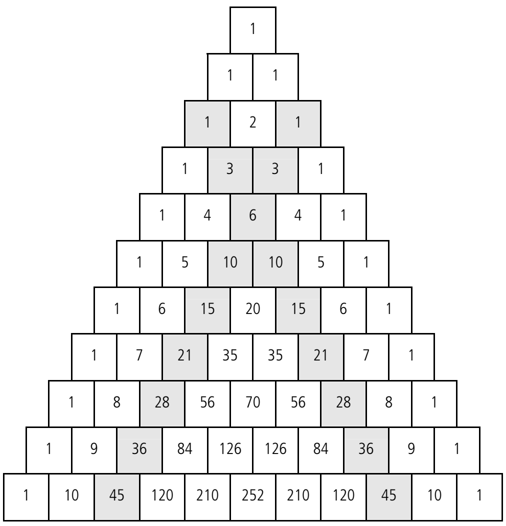


7. Series de números triangulares:

La siguiente diagonal a la de los números enteros está formada por la de los números triangulares: 1, 3, 6, 10,…,

Con esta disposición de los números triangulares es fácil calcular términos concretos sin tener que hacer operaciones complicadas, simplemente buscando posiciones determinadas dentro de la diagonal. Aparece también la ley de formación de los números naturales:

1				
1	+	2	=	3
3	+	3	=	6
6	+	4	=	10
10	+	5	=	15



11.7.- SERIES BASADAS EN CUADRADOS MÁGICOS

Cuadrado mágico de orden n es un cuadrado de n^2 casillas, en las que se colocan los n^2 primeros números enteros diferentes, sin repetición, de manera que la suma de los números de cada línea horizontal, de cada columna vertical o de cada una de las dos diagonales principales del cuadrado sea siempre la misma. A esta suma se le llama constante mágica (M_n).

A los cuadrados en los que sólo con los números de las líneas horizontales y de las columnas verticales se tienen los mismos resultados de la suma, se llaman cuadrados semi-mágicos.

El orden n o la dimensión de un cuadrado mágico, corresponde al número de casillas que tenga el cuadrado en cada uno de sus lados. Por ejemplo, un cuadrado mágico de orden 3, está formado por un cuadrado en el que cada uno de sus lados está dividido en tres casillas o cuadrados de forma que el número total de casillas del cuadrado es 3 x 3 = 9 casillas.

Los cuadrados mágicos se pueden crear por muchos métodos diferentes tanto aditivos como multiplicativos En este proyecto no se van a tratar los algoritmos de construcción de los cuadrados mágicos porque, en algunos casos, requieren conocimientos matemáticos de un cierto nivel. Sin embargo, se muestran varios cuadrados mágicos de diferentes órdenes para mostrar el interés práctico que estas series de números pueden tener para un creador.

Los cuadrados mágicos se pueden clasificar según criterios o autores diferentes. Una clasificación simple, establecería las siguientes tipologías:[14]

1. **Cuadrado simplemente mágico:** es aquel que cumple las condiciones básicas para ser un cuadrado mágico: el resultado de la suma de todos los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales principales es el mismo y es igual a la constante mágica M. En el ejemplo mostrado a continuación sobre un cuadrado mágico de orden 4, $M_4 = 34$.

2. **Cuadrado semi-diagonal:** la suma de todos los números que forman parte de dos diagonales secundarias paralelas es igual a la constante mágica, $M_4 = 34$:

1	14	12	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	3	5	10

	4	+	14	+	5	+	11	=	34
	13	+	3	+	12	+	6	=	34

3. **Cuadrado mágico asociado:** es aquel en el que los números complementarios de la serie de 1 a n^2, se sitúan en las casillas complementarias de la matriz del cuadrado mágico. La suma de dos números complementarios, diametralmente opuestos, es constante e igual a $(n^2 + 1)$: 1 + 16 = 17; 8 + 9 = 17; 11 + 6 = 17,…

[14] René Descombes, Les carrés magiques, pp. 89

El cuadrado de tipo asociado es también semi-diagonal.

4. **Cuadrado pandiagonal o diagonal:** es aquel en el que los números de todas las diagonales: las dos diagonales principales y las secundarias, suman la misma cantidad y esta cantidad es igual a la constante mágica $M_4 = 34$.

5. **Cuadrado semi-mágico:** es aquel en el que todos los números de las filas y las columnas suman la misma cantidad que es igual a la constante mágica del cuadrado. En este caso se excluyen de esta propiedad a las diagonales principales y a las secundarias.

1	12	14	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	5	3	10

(1) Mágico

1	14	12	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	3	5	10

(2) Semi-diagonal

1	14	12	7
8	11	13	2
15	4	6	9
10	5	3	16

(3) Asociado

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

(4) Pandiagonal

6. **Cuadrado hipermágico:**[15] tiene todas las propiedades de los cuadrados mágicos pandiagonales, es decir, es aquel en el que los números de todas las diagonales: las dos diagonales principales y las secundarias, suman la misma cantidad y esta cantidad es igual a la constante mágica $M_4 = 34$, pero presenta además las siguientes propiedades:

    1. La suma de todas las matrices de 4 términos, 2 x 2 casillas juntas, que se puedan formar, en la matriz de n^2 casillas, es constante e igual a $2(n^2 - 1)$, cuando se utiliza la serie de números de 0 a $(n^2 - 1)$ para formar el cuadrado hipermágico, (A); o igual a $2(n^2 + 1)$ cuando la serie de números que se utiliza para crear el cuadrado hipermágico va de 1 a n^2, (B).

0	11	6	13
14	5	8	3
9	2	15	4
7	12	1	10

A. $M_4 = 30$

1	12	7	14
15	6	9	4
10	3	16	5
8	13	2	11

B. $M_4 = 34$

    2. La suma de 2 casillas espaciadas con $(n/2 - 1)$ casillas intermedias, sobre las diagonales principales o secundarias, es constante e igual a $(n^2 - 1)$, cuando, para crear el cuadrado hipermágico, se utiliza la serie de números de 0 a $(n^2 - 1)$, (A); o igual a $(n^2 + 1)$, cuando la serie de números que se utiliza para crear el cuadrado hipermágico, va de 1 a n^2, (B). Para una matriz de $n = 4$, el espaciado que se puede dar entre las 2 casillas seleccionadas es $(4/2 - 1) = 1$ casilla.

[15] René Descombes, *Les Carrés Magiques: Histoire, Théorie et Technique du Carré Magique, de l'Antiquité aux Recherches*, Vuibert, París, 2000, p. 159.

0	11	6	13
14	5	8	3
9	2	15	4
7	12	1	10

A. $M_4 = 30$

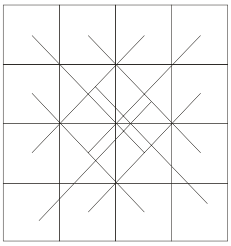
1	12	7	14
15	6	9	4
10	3	16	5
8	13	2	11

B. $M_4 = 34$

Henry E. Dudeney,[16] realiza una clasificación de los cuadrados mágicos basada en el concepto de números complementarios: la suma de dos números complementarios es constante e igual a ($n^2 + 1$).

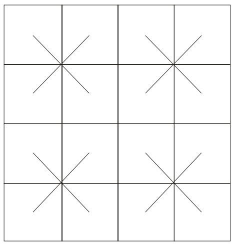
Esta clasificación consiste en representar con trazos de líneas las casillas ocupadas por parejas de números complementarios. Este proceso sólo se aplica a los cuadrados de orden par porque los cuadrados de orden impar al tener, como centro, una casilla y no un punto, no permiten realizar todas las asociaciones posibles. Según este criterio, existe un repertorio de 12 tipos diferentes de cuadrados mágicos. Siguiendo la notación y ejemplos de Dudeney, los 12 tipos de cuadrados mágicos de orden 4, son los siguientes:

12	7	14	1
13	2	11	8
3	16	5	10
6	9	4	15



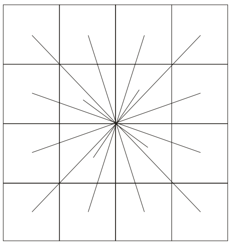
I

8	15	10	1
2	9	16	7
11	4	5	14
13	6	3	12



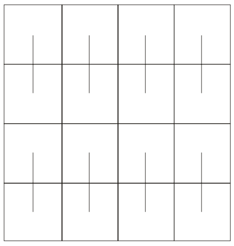
II

13	8	12	1
3	10	6	15
2	11	7	14
16	5	9	4



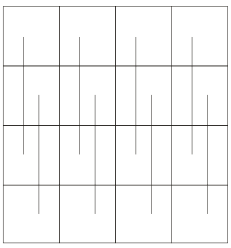
III

9	2	7	16
8	15	10	1
12	3	6	13
5	14	11	4



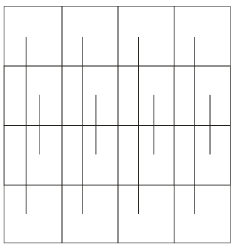
IV

5	11	14	4
8	10	15	1
12	6	3	13
9	7	2	16



V

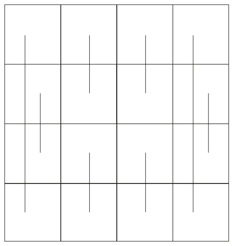
16	9	3	6
4	5	15	10
13	12	2	7
1	8	14	11



VI

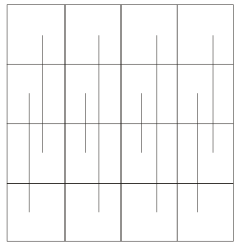
[16] René Descombes, *op. cit.*, p. 92.

5	10	8	11
4	7	9	14
13	2	16	3
12	15	1	6



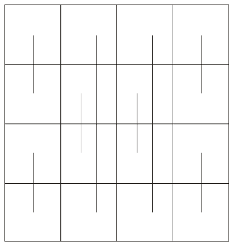
VII

16	7	2	9
12	3	6	13
1	14	11	8
5	10	15	4



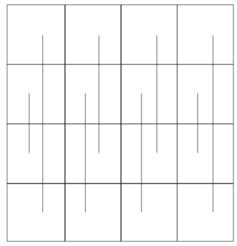
VIII

5	15	10	4
12	6	3	13
1	11	14	8
16	2	7	9



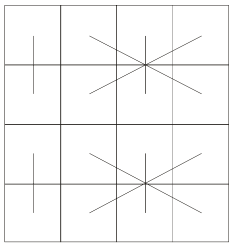
IX

5	8	10	11
13	16	2	3
4	9	7	14
12	1	15	6



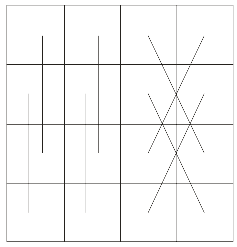
X

16	5	4	9
1	8	13	12
15	10	3	6
2	11	14	7



XI

15	3	6	10
16	4	9	5
2	14	7	11
1	13	12	8



XII

11.8.- SERIES BASADAS EN CUADRADOS LATINOS

Los cuadrados latinos son tablas cuadradas de orden n, de n^2 casillas, en las que se colocan n elementos diferentes (números, letras o símbolos) de manera que cada uno de ellos está una sola vez por línea y una sola vez por columna.[17]

En el cuadrado latino siguiente de orden 3, formado por tres elementos diferentes: a, b, c, cada línea o cada columna representa una permutación diferente de los tres elementos a, b, c.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Se dice que un cuadrado latino es *diagonal*, si la propiedad de que todos los elementos de cada una de las filas y de cada una de las columnas sean diferentes, se extiende a las diagonales principales del cuadrado. Si esta propiedad

[17] René Descombes, *op. cit.,* p. 23.

se extiende a todas las diagonales del cuadrado, se dice que el cuadrado latino es pandiagonal. El cuadrado latino de orden 5 siguiente es diagonal y pandiagonal:

c	b	a	e	d
e	d	c	b	a
b	a	e	d	c
d	c	b	a	e
a	e	d	c	b

c	b	a	e	d
e	d	c	b	a
b	a	e	d	c
d	c	b	a	e
a	e	d	c	b

c	b	a	e	d
e	d	c	b	a
b	a	e	d	c
d	c	b	a	e
a	e	d	c	b

c	b	a	e	d
e	d	c	b	a
b	a	e	d	c
d	c	b	a	e
a	e	d	c	b

Se denominan cuadrados latinos normalizados a todos aquellos cuadrados en los que la primera línea y la primera columna se escriben con el mismo conjunto de elementos y en el mismo orden: por ejemplo, la serie natural de números enteros 1, 2, 3.[18]

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Una vez completada la primera fila y la primera columna con la misma serie de elementos, sólo queda un modo de completar el cuadrado latino de orden 3. Por lo tanto, sólo existe un cuadrado latino normalizado de orden 3 de estos elementos. Pero dependiendo del número de orden del cuadrado latino, pueden darse más de un cuadrado normalizado.

Con los cuadrados latinos se pueden generar superficies indefinidas de cuadrados latinos a base de yuxtaponer un mismo cuadrado latino varias veces en las dos direcciones del espacio. René Descombes en su libro *Les Carrés Magiques*,[19] describe el siguiente ejemplo: se yuxtaponen cuatro cuadrados latinos regulares de orden 5 en un cuadrado, de forma que se cree una matriz de 10 x 10 casillas.

5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
2	1	5	4	3	2	1	5	4	3
4	3	2	1	5	4	3	2	1	5
1	5	4	3	2	1	5	4	3	2
3	2	1	5	4	3	2	1	5	4
5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
2	1	5	4	3	2	1	5	4	3
4	3	2	1	5	4	3	2	1	5
1	5	4	3	2	1	5	4	3	2
3	2	1	5	4	3	2	1	5	4

También se puede crear un cuadrado latino a base de dividirlo en un número determinado de compartimientos y rellenando cada uno de ellos con un cuadrado latino que puede ser diferente o igual al de otro compartimiento. La matriz cuadrada de orden 9 formada por 9 x 9 = 81 casillas está compartimentada en 9 grupos de matrices de 3 x 3

[18] René Descombes, *op. cit.,* p. 27.
[19] René Descombes, *op. cit.,* p. 34.

= 9 cuadrados, de forma que esta constituida por 9 cuadrados de orden 3. Estos 9 cuadrados están agrupados en tres modelos o tipos A, B y C que son cada uno de ellos un cuadrado latino.[20]

Matriz 9 x 9

A	B	C
C	A	B
B	C	A

A

1	2	3
3	2	1
2	3	1

Matriz 3 x 3

B

4	5	6
6	4	5
5	6	4

Matriz 3 x 3

C

7	8	9
9	7	8
8	9	7

Matriz 3 x 3

Estos tres cuadrados latinos, A, B, C, completan la matriz de 9 x 9 según el siguiente orden:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	1	6	4	5	9	7	8
2	3	1	5	6	4	8	9	7
7	8	9	1	2	3	4	5	6
9	7	8	3	2	1	6	4	5
8	9	7	2	3	1	5	6	4
4	5	6	7	8	9	1	2	3
6	4	5	9	7	8	3	2	1
5	6	4	8	9	7	2	3	1

11.9.- SERIES BASADAS EN CUADRADOS EULERIANOS O GRECO-LATINOS

Los cuadrados eulerianos o greco-latinos se obtienen superponiendo dos cuadrados latinos del mismo orden n, y de forma que las parejas de los n^2 símbolos que se obtienen: A1, B2, C3,…, tienen que ser todas distintas y aparecer sólo una vez en el cuadrado de n^2 casillas.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Cuadrado latino A

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Cuadrado latino B

A,1	B, 2	C, 3
B, 3	C, 1	A, 2
C, 2	A, 3	B,1

Cuadrado greco-latino

Los elementos de un cuadrado greco-latino se forman por las combinaciones de n objetos tomados de 2 en 2. Hay que tener en cuenta que no todas las parejas de cuadrados latinos pueden crear un cuadrado greco-latino.

[20] René Descombes, *op. cit.,* p. 35.

11.10.- SERIES BASADAS EN CUADRADOS NATURALES

Los cuadrados naturales, o fundamentales, son aquellos que se construyen con los n^2 números enteros consecutivos y ordenados, de la serie de los números naturales.

Se pueden distinguir dos tipos de cuadrados naturales: cuadrados naturales normales y cuadrados naturales alternos.

1. Cuadrados naturales normales:

Un cuadrado natural normal de orden n, es una matriz de n^2 casillas, en la que se escriben los n^2 primeros números enteros consecutivos en su orden natural y en el mismo sentido de la escritura: de arriba abajo y de izquierda a derecha.

Hay 4 tipos de cuadrados naturales normales:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Natural N

5	4	3	2	1
10	9	8	7	6
15	14	13	12	11
20	19	18	17	16
25	24	23	22	21

Simétrico M

21	22	23	24	25
16	17	18	19	20
11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

Natural Inverso NI

25	24	23	22	21
20	19	18	17	16
15	14	13	12	11
10	9	8	7	6
5	4	3	2	1

Simétrico Inverso MI

2. Cuadrados naturales alternos:

En una matriz de n^2 casillas, un cuadrado natural alterno es aquel cuadrado en el que se escriben los n^2 primeros números enteros consecutivos en su orden natural pero alternando el sentido de la escritura: una vez, de derecha a izquierda y otra, de izquierda a derecha.

Hay 4 tipos de cuadrados naturales alternos:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

Natural Alterno NA

5	4	3	2	1
6	7	8	9	10
15	14	13	12	11
16	17	18	19	20
25	24	23	22	21

Simétrico Alterno MA

21	22	23	24	25
20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

Alt. Natural Inverso NAI

25	24	23	22	21
16	17	18	19	20
15	14	13	12	11
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

Alt. Simétrico Inverso MI

11.11.- SERIES BASADAS EN EL CUADRADO MÁGICO DE DURERO

Durero, en su grabado *Melancolía*, realizado en 1514, representó el siguiente cuadrado mágico de orden n = 4, donde la fecha de su realización aparece en las dos casillas centrales de la última línea del cuadrado mágico.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Por definición de un cuadrado mágico normal, la suma de todos los números de una fila, los de una columna o los de cualquiera de las diagonales principales se mantiene constante e igual a $M_4 = 34$.

Existen muchos métodos de construcción del cuadrado mágico de Durero. René Descombes en su libro *Les Carrés magique*, propone la siguiente:[21]

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

2

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3

1. Partir de un cuadrado natural normal (1).
2. Permutar los números del cuadrado natural sobre las dos diagonales principales con respecto al centro (2).
3. Permutar las dos columnas centrales (3).

Este cuadrado mágico reúne algunas características especiales que conviene señalar. Para ello, se introduce el concepto de números complementarios. En una serie de números naturales enteros del 1 a N, se llaman números complementarios a las parejas formadas por dos números simétricos con respecto al centro de la serie: aquellas que están situadas a la misma distancia de los números extremos de la serie. La serie puede ser par o impar:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Por ejemplo, en la serie de los números naturales enteros del 1 al 9 (N = 9), las parejas 3-7, 4-6,… son números complementarios. Y en la serie de los números naturales enteros del 1 al 16 (N = 16), las parejas 2-15, 4-13,… son también complementarias.

Se puede observar que la suma de las parejas de números complementarios es constante e igual a (N + 1). En la serie de números naturales del 1 al 9, la suma de las parejas de complementarios 3 + 7 y 4 + 6 es igual a 10 que a

[21] René Descombes, *op. cit.,* p. 125.

su vez coincide con el resultado de la suma de (N + 1), 9 + 1 = 10. En la serie de los números naturales del 1 al 16, la suma de las parejas de complementarios 2 + 15 y 4 + 13 es igual a 17 que a su vez coincide con el resultado de la suma de (N + 1), 16 + 1 = 17.

En las series impares, el número central es igual a:

$$\frac{N + 1}{2}$$

En una estructura cuadrada o rectangular, se llaman casillas complementarias a aquellas que son diametralmente opuestas, o simétricas con respecto a la casilla central (si la matriz es de orden impar) o al centro de la matriz (si la matriz es orden par):

A		B			
				C	
	C				
			B		A

	E	D
D	E	

Cuando las parejas de números complementarios de la serie de los n^2 números enteros consecutivos, se sitúan en las casillas complementarias de un cuadrado mágico, se dice que este cuadrado es un cuadrado mágico de tipo asociado.

En el cuadrado mágico de Durero, hay 8 parejas de números complementarios: 1-16, 2-15, 3-14, 4-13, 5-12, 6-11, 7-10 y 8-9. Si se representan cada una de estas parejas con una letra que las identifique A, B, C, D, E, F, G, H, su relación en el cuadrado de Durero estaría representada por la siguiente ilustración:

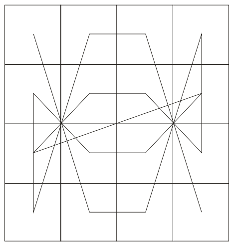
1-16	2-15	3-14	4-13	5-12	6-11	7-10	8-9
A	B	C	D	E	F	G	H

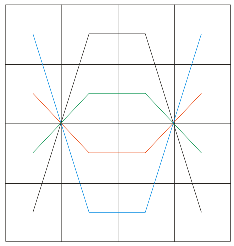
A	C	B	D
E	G	F	H
H	F	G	E
D	B	C	A

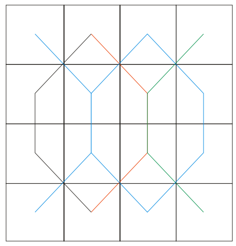
Sobre el cuadrado mágico de Durero se pueden realizar diferentes representaciones gráficas. En A, la ilustración se obtiene enlazando sucesivamente con una línea recta todas las casillas del cuadrado, una a una, según la serie de los números enteros naturales: 1, 2, 3,…, 16, en orden numérico progresivo. En B,[22] se crean cuatro tramos de líneas que se basan en cuatro series cortas, de cuatro números cada una, de la serie de los números naturales del 1 al 16: 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12; 13, 14, 15, 16. En C, se crean seis series de cuatro números cada una, a partir de la secuencia de los números naturales del 1 al 16; tres de ellas con números impares: 3, 5, 9, 15; 3, 11, 7, 15; 1, 7, 11, 13; y las otras tres con números pares: 4, 6, 10, 16; 2, 10, 6, 14; 2, 8, 12, 14.

[22] René Descombes, *op. cit.*, p. 448.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1


A


B


C

11.12.- ANÁLISIS DE OBRAS

11.12.1.- HARTMUT BÖHM

Las siguientes obras de Hartmut Böhn están basadas en progresiones lineales de carácter numérico: cadenas de líneas concatenadas cuyo ángulo de inclinación va variando según progresa la serie, de acuerdo a un criterio preestablecido (grados de inclinación). Existen muchas variedades e interpretaciones de este principio.

La lógica del sistema predetermina todos y cada uno de los pasos necesarios para concretar la obra.

1. Progresión lineal hacia el infinito con 18º, 3, 1982[1]

La palabra infinito utilizada en este trabajo indica que se está trabajando con un concepto muy conocido en distintos campos de la historia de la humanidad: matemáticas, ciencias, arte,… Lo que interesa aquí, sin embargo, no es que Böhm lo utilice como tema sino las interpretaciones y los medios que utiliza para formalizar este concepto con diferentes representaciones visuales. En esta serie cada tramo, de una forma individual, no tiene valor en sí mismo. Lo importante es la relación que surge entre dos o más líneas y si esta relación lleva, o no, a reflexiones sobre la idea de lo infinito.

La combinación de las palabras infinito y progresión sugiere que el trabajo podría quedar incompleto porque la obra podría crecer continuamente añadiéndole nuevos elementos. Y por lo tanto, lo que se muestra sólo sería una parte de la serie. Sin embargo la filosofía de esta obra no contempla esta opción. La lógica del concepto, para mantener su unidad, define unos límites concretos de expansión y realización de la obra.

Los parámetros que determinan el trabajo de Böhm no se han elegido al azar, sino que se han seleccionado para que su progresión se desarrolle dentro de un sector que va de 0º a 90º, con divisiones regulares de ángulos múltiplos de 18º.

En general las distintas formas de representar este concepto, presentan diferentes formas de materializar procesos en torno a un mismo tema.

La serie *Progresión lineal hacia el infinito con 18º* se construye según el siguiente procedimiento:

[1] Lineare Progression gegen Unendlich (18º), 3, 1982.

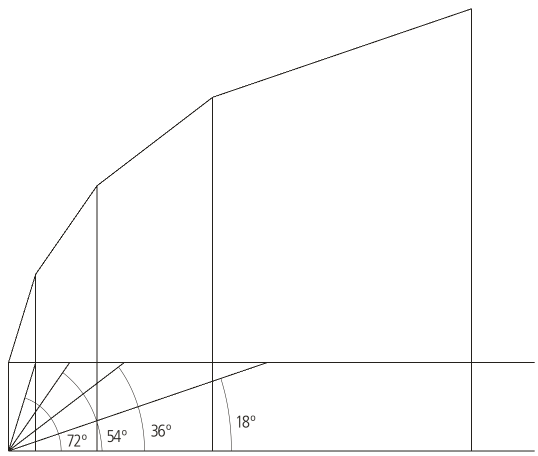
1. Se traza una línea base horizontal que va a servir de línea de referencia para realizar todas las medidas de la serie.

2. Sobre un extremo de la línea horizontal, el izquierdo, se dibujan cuatro líneas que se utilizarán después para generar los cuatro tramos de líneas que representan a la obra. El criterio para dibujar estas líneas es que todas partan del mismo punto, el extremo izquierdo de la línea base horizontal; y que cada una esté representada por una inclinación diferente, que está determinada por la secuencia de números múltiplos de 18:

0º	18º	36º	54º	72º	90º

3. Para establecer la longitud de los tramos de línea, se realizan las siguientes operaciones: a una cierta altura, con respecto a la línea base horizontal, se traza una paralela a esta. Los puntos de corte de esta nueva línea con la serie de líneas oblicuas trazadas anteriormente, determina la longitud de cada uno de los tramos de la serie.

Para construir, visualmente, la secuencia, se desplaza el tramo más corto de las líneas trazadas previamente, aquel que corresponde a la línea inclinada a 72º, y se sitúa en el extremo izquierdo de la nueva línea horizontal trazada. Otra interpretación constructiva de este proceso, podría hacer que, en este caso, esta línea, se mantuviese en el lugar en el que ya está ubicada. A continuación, se desplaza la línea cuyo ángulo de inclinación es igual a 54º y se coloca a continuación de la anterior, y de forma que los extremos de las líneas, superior de una e inferior de la otra, coincidan. Después, se coloca por el mismo procedimiento, el tramo de línea inclinado a 36º; y a continuación, el de 18º. Se obtienen así los cuatro tramos de líneas concatenados, de diferente longitud y ángulo, que configuran la obra.



2. Progresión lineal hacia el infinito con 22,5º, 1985[2]

El sistema generativo de esta serie comienza estableciendo una altura de la línea vertical, AB, que va a servir como pauta para establecer las longitudes del resto de las líneas de la serie. A partir de este dato, se trazan dos líneas horizontales, BC y AD, perpendiculares a la anterior, que pasando por sus extremos, AB, acoten un territorio donde se van a calcular las otras líneas de la serie.

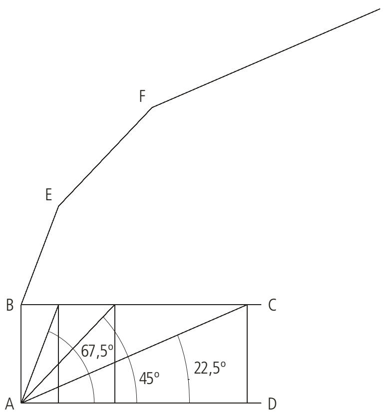
[2] Lineare Progression gegen Unendlich mit 22,5º, 1985.

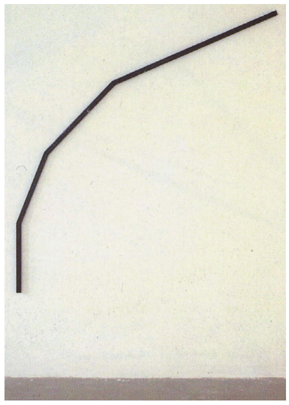
Con centro en A y ángulos múltiplos de 22,5º: 22,5º - 45º - 67,5º, se trazan tres líneas cuya longitud está definida por la línea BC.

0º 22,5º 45º 67,5º 90º

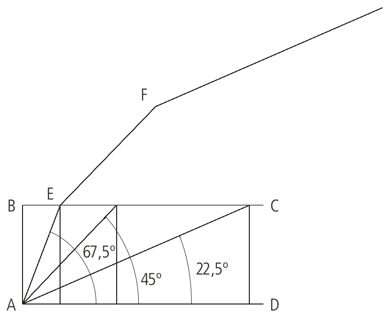
Finalmente, para construir la serie, se desplaza el extremo A de la línea que tiene mayor apertura de ángulo con respecto a la horizontal, sobre el vértice B de la línea vertical, manteniendo en el traslado, su orientación y su longitud. Después de traslada la siguiente línea en apertura de ángulo desde A hasta el extremo E de la línea anterior. Y finalmente, se mueve la última línea de la serie desde su extremo en A hasta F.

Esta progresión muestra visualmente una conexión lineal entre la primera línea, vertical, AB, y las que le suceden.





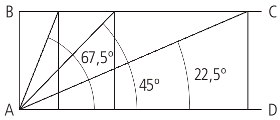
Una variedad de esta serie consistiría en representar la misma secuencia pero sin el tramo vertical de inicio:

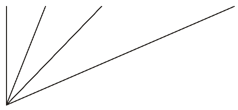


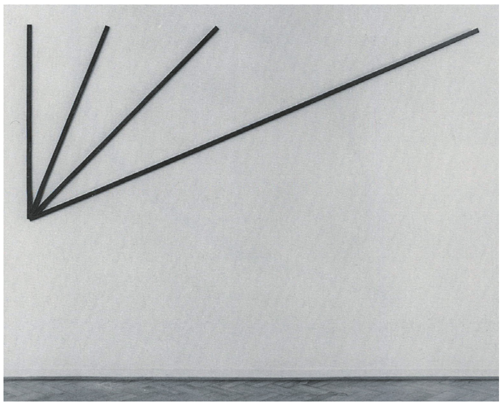
3. Progresión hacia el infinito con 22,5º, 1985[3]

Esta progresión es otra variedad de las anteriores, en las que se representan todas las líneas obtenidas en la obra anterior, 2, partiendo de un mismo origen A. Desde el punto de vista gráfico, todas las líneas trazadas según este criterio, se quedan dentro de una banda horizontal invisible que limita sus longitudes y uniformiza las variedades particulares con las que se presenta cada una de ellas.

[3] Progression gegen Unendlich mit 22,5º, 1985.



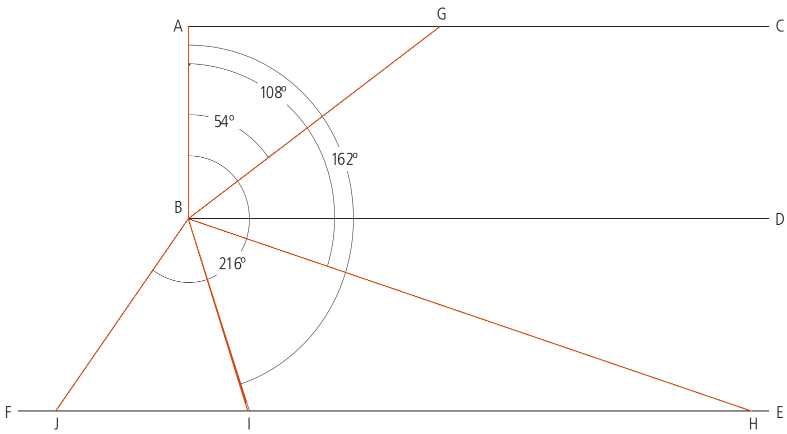




4. Progresión hacia el infinito con 54º / Rotación II a, 1985[4]

En esta progresión se parte de la línea vertical AB y se trazan dos perpendiculares a ésta por los puntos A y B: AC y BD. Se realiza una simetría de AC con respecto al eje BD, y se obtiene la línea FE. Estas líneas AC, BD, y FE, forman dos bandas paralelas que se van a utilizar para definir la longitud de las líneas de la progresión.

Para realizar la progresión se realizan cuatro giros de la línea AB a 54º en el sentido de las agujas del reloj; y las líneas resultantes se prolongan hasta cortar a las líneas AC, BD, o FE. Se obtienen así las cinco líneas de la obra: AB, BG, BH, BI, y BJ.

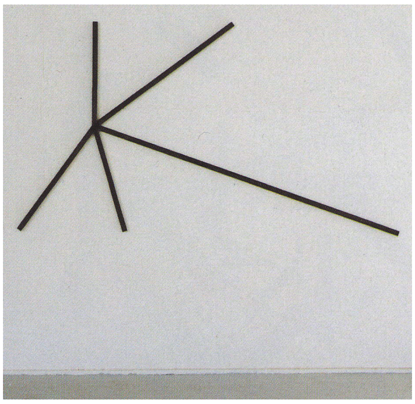


La secuencia de los ángulos de la progresión con respecto a AB, es la siguiente:

0º	54º	108º	162º	216º	270º

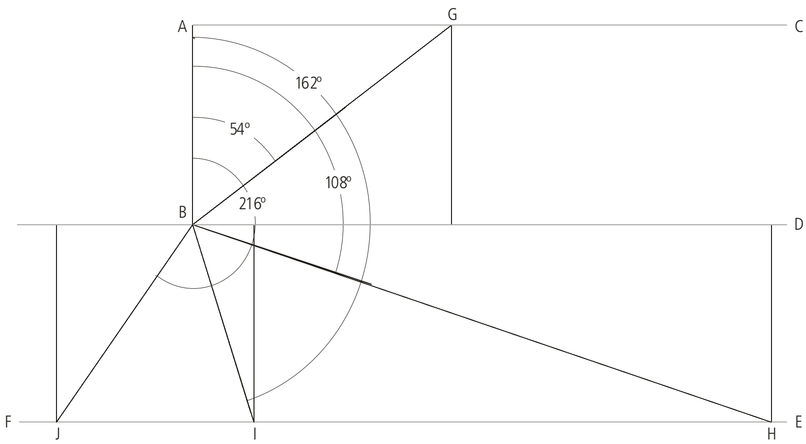
Una representación de una instalación de la obra la muestra la siguiente imagen:

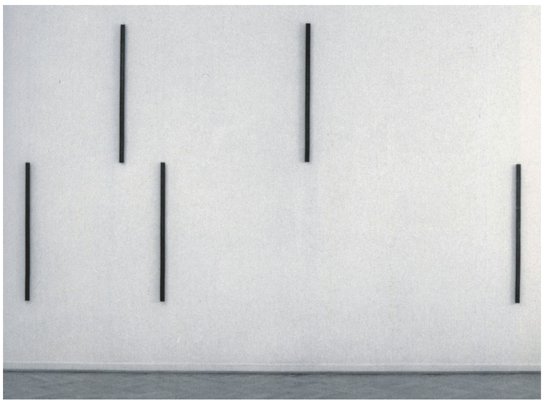
[4] Progression gegen Unendlich mit 54º / Rotation II a, 1985.



5. Progresión hacia el infinito con 54º / Rotación – Parámetro Vertical, 1985 / 1989[5]

Esta obra en la que el proceso constructivo es igual que la anterior, difiere de sus resultados en que aquí, los tramos de las líneas son de la misma longitud. Lo importante en este caso es la relación que existe entre los intervalos de cada una de las líneas trazadas, es decir, las distancias entre dos de las líneas trazadas. Para señalar estos intervalos, se traza por los puntos de intersección de las líneas BG, BH, BI y BJ con las líneas horizontales AC y FE respectivamente: G, H, I, J, líneas verticales iguales cuya longitud está determinada por la altura del tramo AB.



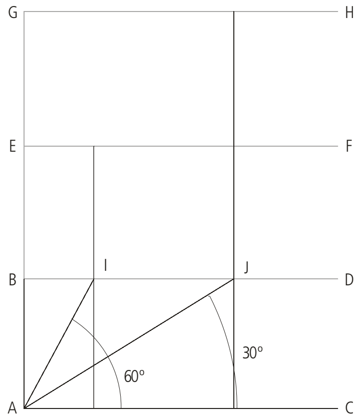


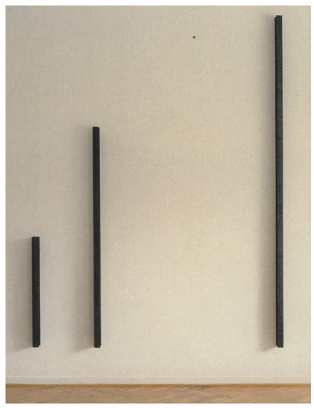
[5] Progression gegen Unendlich mit 54º / Rotation – VertiKale Parameter, 1985 / 1989.

6. Progresión hacia el infinito con 30º, 1985[6]

Esta obra está compuesta de tres elementos diferenciados: tres líneas. El inicio de la obra se realiza dibujando la línea vertical AB que va a servir de pauta para desarrollar el resto del sistema. Por los extremos A y B de la línea AB, se trazan dos líneas horizontales: AC y BD. Tomando como medida la distancia AB, se trazan dos nuevas horizontales paralelas a las anteriores: EF y GH.

Para trazar las líneas de la obra se realizan las siguientes operaciones: con origen en A y ángulos de 30º y 60º, se trazan las líneas AJ y AI, respectivamente. Por el punto de corte de las líneas trazadas con la horizontal BD: J, I, se trazan dos perpendiculares a la línea base AC, de altura AG y AE, respectivamente.





[6] Progression gegen Unendlich mit 30º, 1985.

12.- SERIES NUMÉRICAS

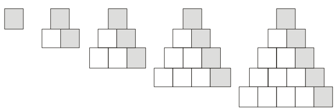
En un contexto de secuencia se emplean los números en su orden habitual (1, 2, 3, 4,…) sin hacer referencia a ningún objeto externo. Se suelen emplear las secuencias numéricas para conseguir distintos propósitos: como ser, simplemente, recitativos de una secuencia conocida; como contadores de tiempo; para efectuar operaciones aritméticas: sumar, restar, multiplicar y dividir, de una forma rápida y eficaz,…

En este capítulo se van a estudiar una serie de secuencias conocidas por su aplicación directa con el mundo creativo. La forma de presentar cada una de las secuencias es muy sintética y repetitiva en todas y cada una de ellas. Se comienza introduciendo conceptualmente la secuencia y, a continuación, se describen cuáles son los términos que corresponden a esa serie y finalmente se analizan los procedimientos constructivos de las series que se utilizan.

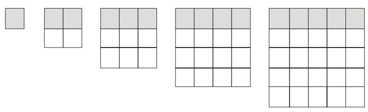
12.1.- SECUENCIAS DE NÚMEROS POLIGONALES:

Los números poligonales toman su nombre del conjunto de puntos que necesitan para dibujar los polígonos que representan. Pueden ser triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales, octogonales,…

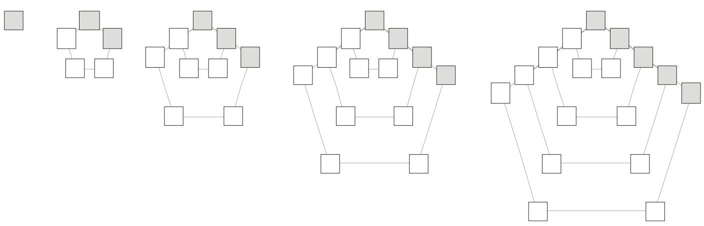
Números triangulares:



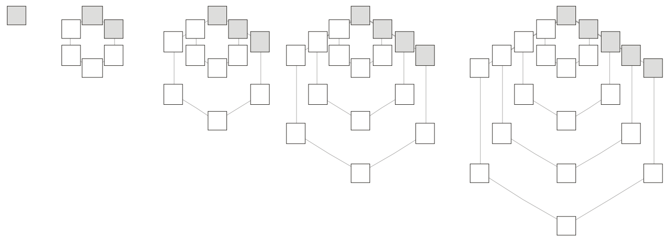
Números cuadrados:



Números pentagonales:



Números hexagonales:

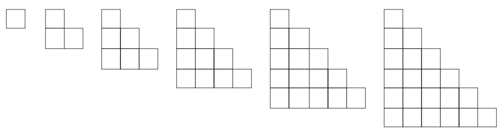


Comparativamente las progresiones aritméticas apropiadas para crear cada uno de los números poligonales, comenzando por 1, son:

	Progresión aritmética	Serie
Números triangulares	1+2+3+4+5+…	1, 3, 6, 10, 15,…
Números cuadrados	1+3+5+7+11+…	1, 4, 9, 16, 25,…
Números pentagonales	1+4+7+10+13+…	1, 5, 12, 22, 35,…
Números hexagonales	1+5+9+13+17+…	1, 6, 15, 28, 45,…
Números heptagonales	1+6+11+16+21+…	1, 7, 18, 34, 55,…
Números octogonales	1+7+13+19+25+…	1, 8, 21, 40, 65,…

12.1.1.- Secuencia de números triangulares

Si se representa con puntos la cantidad que representa a cada número de la serie de los números enteros, 1, 2, 3, 4,…, y de forma que cada uno de ellos esté representado en una fila diferente, lo que se obtiene son los números triangulares. Se llaman números triangulares porque, geométricamente, producen triángulos. Cada triángulo está formado por un conjunto de filas cuya longitud se incrementa progresivamente una unidad en cada nueva fila: una fila de uno, con una fila de dos debajo, y una fila de tres a continuación de ésta, y así sucesivamente:



1 3 6 10 15 21

La regla que se utiliza para la obtención de los números triangulares es la siguiente: el primer número de la serie es el 1; el segundo es 1+2, o 3; el tercero es 1+2+3, o 6; el cuarto es 1+2+3+4, o 10. La serie continua con 15, 21, 28, 36,... En general, se puede decir que cada nuevo término de la serie se obtiene sumando todo el conjunto de números naturales consecutivos que le preceden y teniendo en cuenta que el primer término de la serie es el 1:

1 1+2 1+2+3 1+2+3+4 1+2+3+4+5 1+2+3+4++6 1+2+3+4+5+6+7 …

También se puede obtener aplicando la siguiente fórmula para valores diferentes de n:

$$\frac{n\,(n+1)}{2}$$

La tabla siguiente permite el cálculo de una secuencia de números triangulares de forma rápida por un proceso de sumas reiteradas:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

La construcción de la tabla se realiza de la siguiente forma:

1. Se coloca una primera fila, donde solo se escribe el número 1, tantas veces como números triangulares se quieran calcular.

2. Se forma la segunda fila con el criterio siguiente: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con el número de la fila anterior situado encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con el número que está situado encima de él de la fila anterior; y así sucesivamente.

3. Para crear la tercera fila, formada por los números triangulares, se realiza el mismo procedimiento: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con los números de la filas anteriores situados encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con los números que están situados encima de él de las filas anteriores; y así sucesivamente.

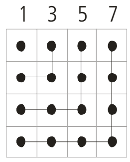
12.1.2.- Secuencia de números cuadrados

Si se representa con puntos la cantidad que representa a cada número, n, de la serie de los números enteros, 1, 2, 3, 4,…, y de forma que cada uno de ellos esté representado en n filas de n puntos: el número 1 está representado por una fila de un punto; el número 2, por dos filas de dos puntos cada una; el número 3, por tres filas de tres puntos cada una; y así sucesivamente, lo que se obtiene son los números cuadrados. Se llaman números cuadrados porque, geométricamente, producen cuadrados. Cada cuadrado está formado por n filas de n puntos cada una.

Los números cuadrados se pueden obtener aplicando la siguiente fórmula para valores diferentes de n:

$$n^2$$

Observando las figuras geométricas de puntos que representan la serie de los números cuadrados, se puede deducir el patrón de formación de un cuadrado cualquiera a partir del anterior. Al primer punto, se le van añadiendo, sucesivamente, filas de puntos en forma de ángulo recto; cada una de estas nuevas filas contienen 3, 5, 7, 9,… puntos respectivamente. Aritméticamente, esta regla de formación responde al siguiente patrón: para obtener un número cuadrado se suman series de números impares consecutivos. El primer término de la serie es el 1. Para obtener el segundo término, se suman los dos primeros números impares de la serie de los números naturales; para obtener el tercer término, se suman los tres primeros números impares de la serie de los números enteros a partir del 1, y así sucesivamente.



1 1+3 1+3+5 1+3+5+7 1+3+5+7+9 1+3+5+7+9+11 1+3+5+7+9+11+13 1+3+5+7+9+11+13+15 …

También es posible obtener los números cuadrados mediante una tabla de sumas sucesivas siguiendo la siguiente pauta:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

1. En la primera fila, se escribe el número 2, tantas veces como números cuadrados se quieran calcular.

2. La segunda fila se obtiene realizando sumas según el siguiente criterio: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con el número de la fila anterior situado encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con el número que está situado encima de él de la fila anterior; y así sucesivamente.

3. Para obtener la tercera fila, formada por los números cuadrados, se realiza el mismo procedimiento: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con los números de la filas anteriores situados encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con los números que están situados encima de él de las filas anteriores; y así sucesivamente.

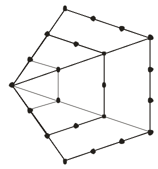
12.1.3.- Secuencia de números pentagonales

Se llaman números pentagonales porque, geométricamente, producen pentágonos. El pentágono se genera a partir de un elemento triangular que se multiplica, a partir de un vértice, para generar el pentágono.

Los números pentagonales se pueden obtener aplicando la siguiente fórmula para valores diferentes de n:

$$\frac{n\,(3n - 1)}{2}$$

Observando las figuras geométricas de puntos que representan la serie de los números pentagonales, se puede deducir el patrón de formación de un pentágono cualquiera a partir del anterior. Al primer punto, se le van añadiendo, sucesivamente, 3 filas contiguas de puntos a 108º entre sí, de manera que, juntas, forman 3 lados de un pentágono; cada una de estas nuevas filas contiene 4, 7, 10, 13,… puntos respectivamente. Aritméticamente, esta regla de formación responde al siguiente patrón: para obtener un número pentagonal se suman series sucesivas de números naturales según el siguiente criterio: el primer término de la serie es el 1. Para obtener el segundo término, se suma a este primer término, 1, el resultado de sumar +3 a la cantidad anterior, 1, es decir, 4 (1+3=4); para obtener el tercer término, se suma a la serie anterior, una nueva cantidad que resulta de sumar al último término de la serie, 4, la cantidad de +3, es decir, 7 (4+3=7); y así sucesivamente. La razón o la diferencia entre los términos de la serie es una progresión aritmética, 1, 4, 7, 10, 13,…, (3n – 2), de intervalo constante igual a 3.



1 1+4 1+4+7 1+4+7+10 1+4+7+10+13 1+4+7+10+13+16 1+4+7+10+13+16+19 …

De esta forma, la serie de los número pentagonales está representada por la siguiente secuencia: 1, 5, 12, 22, 35,…

1	4	7	10	13	16	
1	5	12	22	35	51	…

También es posible obtener los números pentagonales mediante una tabla de sumas sucesivas siguiendo la siguiente pauta:

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210

1. En la primera fila, se escribe el número 3, tantas veces como números pentagonales se quieran calcular.

2. La segunda fila se obtiene realizando sumas según el siguiente criterio: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con el número de la fila anterior situado encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con el número que está situado encima de él de la fila anterior; y así sucesivamente.

3. Para obtener la tercera fila, formada por los números pentagonales, se realiza el mismo procedimiento: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con los números de la filas anteriores situados encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con los números que están situados encima de él de las filas anteriores; y así sucesivamente.

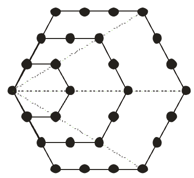
12.1.4.- Secuencia de números hexagonales

Se llaman números hexagonales porque, geométricamente, producen hexágonos. El hexágono se genera a partir de un elemento triangular que se multiplica, a partir de un vértice, para generar el hexágono.

Los números hexagonales se pueden obtener aplicando la siguiente fórmula para valores diferentes de n:

n (2n - 1)

Observando las figuras geométricas de puntos que representan la serie de los números hexagonales, se puede deducir el patrón de formación de un hexágono cualquiera a partir del anterior. Al primer punto, se le van añadiendo, sucesivamente, 4 filas contiguas de puntos a 120º entre sí, de manera que, juntas, forman 4 lados de un hexágono; cada una de estas nuevas filas contiene 5, 9, 13, 17,… puntos respectivamente. Aritméticamente, esta regla de formación responde al siguiente patrón: para obtener un número hexagonal se suman series sucesivas de números naturales según el siguiente criterio: el primer término de la serie es el 1. Para obtener el segundo término, se suma a este primer término, 1, el resultado de sumar +4 a la cantidad anterior, 1, es decir, 5 (1+4=5); para obtener el tercer término, se suma a la serie anterior, una nueva cantidad que resulta de sumar al último término de la serie, 5, la cantidad de +4, es decir, 9 (5+4=9); y así sucesivamente. La razón o la diferencia entre los términos de la serie, es una progresión aritmética, 1, 5, 9, 13, 17,…, de intervalo constante igual a 4.



1   1+5   1+5+9   1+5+9+13   1+5+9+13+17   1+5+9+13+17+21   1+5+9+13+17+21+25   …

De esta forma, la serie de los números hexagonales está representada por la siguiente secuencia: 1, 6, 15, 28, 45,…

1	5	9	13	17	21
1	6	15	28	45	66

También es posible obtener los números hexagonales mediante una tabla de sumas sucesivas siguiendo la siguiente pauta:

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276

1. En la primera fila, se escribe el número 4, tantas veces como números hexagonales se quieran calcular.

2. La segunda fila se obtiene realizando sumas según el siguiente criterio: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con el número de la fila anterior situado encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con el número que está situado encima de él de la fila anterior; y así sucesivamente.

3. Para obtener la tercera fila, formada por los números hexagonales, se realiza el mismo procedimiento: en la primera columna se escribe un 1; en la segunda columna se escribe la suma de ese 1 con los números de la filas anteriores situados encima de él; el número de la tercera columna se forma sumando el número obtenido en la segunda columna con los números que están situados encima de él de las filas anteriores; y así sucesivamente.

12.2.- SECUENCIAS DE NÚMEROS ESPECIALES

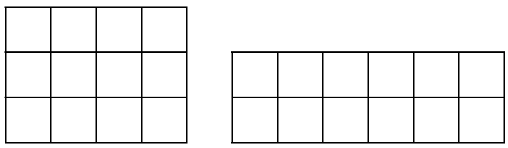
Hay muchas familias de números que aparecen continuamente en matemáticas: números primos, de Catalan, Bernoulli, Fibonacci, Lucas, PI, PHi, raíz de dos, raíz de tres,…, y que pueden ser punto de partida para cualquier obra artística. Aquí se incluyen algunas de estas secuencias.

12.2.1.- Secuencia de números primos

Los números primos son números enteros, distintos de 0 y de 1, que no son divisibles por ningún entero, excepto por el propio número y por 1. Por convención, se considera que lo números 0 y 1 no son ni primos ni compuestos (números superiores a 1 que poseen diferentes divisores de 1 y ellos mismos).

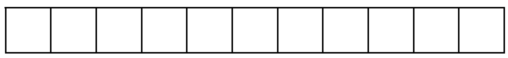
Geométricamente un número n compuesto, se puede representar en forma de un rectángulo completo,[1] mientras que un número primo sólo se puede representar en forma lineal.

Por ejemplo, el número compuesto 12, divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12, se puede representar de forma rectangular de diferentes maneras: 3 x 4, 2 x 6:

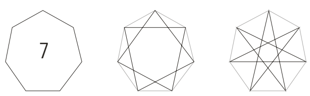


3 x 4 2 x 6

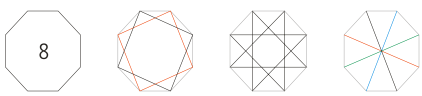
El número primo 11 sólo se puede representar de forma lineal:



También se dice que, geométricamente, un número n es primo[2] si a partir del polígono regular de n vértices que le representa, se puede obtener un polígono estrellado de n puntas, uniendo, los n vértices del polígono sin levantar el lápiz. Si se representa cada trazo realizado en el polígono estrellado con un color diferente, se puede obtener visualmente, una representación de los números primos y de los que no lo son. Por ejemplo, para averiguar los números primos que hay en la secuencia de los números enteros entre el 7 y el 11, se realiza el siguiente desarrollo:



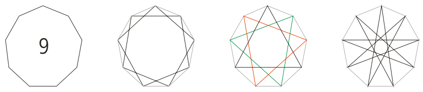
El número 7 es primo porque los tres polígonos estrellados que le representan se han trazado uniendo los 7 vértices del polígono sin levantar el lápiz (igual color).



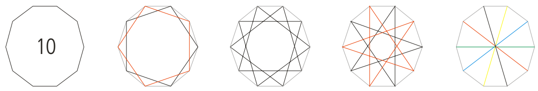
[1] Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux nombres premiers. Voyage au coeur de l'arithmétique*, Ed. Belin Pour la Science, Bibliothèque Scientifique, p. 17.

[2] Jean-Paul Delahaye, *op. cit.,* p. 21.

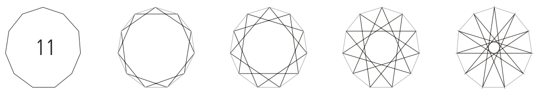
El número 8 no es primo porque 2 de los 4 polígonos estrellados que le representan no se han dibujado de un solo trazo (diferentes colores).



El número 9 no es primo porque uno de los 4 polígonos estrellados que le representan no están realizados con un solo trazo (diferentes colores).



El número 10 no es primo porque 3 de los 5 polígonos estrellados por los que está representado, no están formados por un solo trazo (diferentes colores).



El número 11 es primo porque los 5 polígonos estrellados por los que está representado son polígonos dibujados con un solo trazo (igual color).

Los primeros números primos positivos son:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71

La razón entre los números primos mostrados en la secuencia es:

1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	4

12.2.2.- Secuencia de números primos en un intervalo determinado: la criba de Erastosthenes

La criba de Erastosthenes se utiliza para encontrar, de una sola vez, una serie de números primos consecutivos dentro de un intervalo definido entre 2 y N (por ejemplo, inferiores a mil, quinientos,…). La criba consiste en escribir todos los números de un intervalo dado, y después eliminar sistemáticamente todos aquellos que son múltiplos de los números primos conocidos: 2, 3, 5, 7,… Los números primos que queden después de esta criba, son los números primos de ese intervalo.

Por ejemplo, la criba de Erastosthenes para obtener los números primos inferiores a 100, se realiza según el siguiente método:

1. Realizar una tabla con todos los números enteros sucesivos entre 2 y 100 (N):

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	3	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Suprimir en la tabla todos aquellos números que son múltiplos de 2, excepto el 2:

2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

3. Coger el siguiente número primo superior a 2 de la serie de los números primos, el 3, y suprimir en la tabla todos aquellos números que sean múltiplos de 3, excepto el 3:

2	**3**	5	7		11	13		17	19
	23	25		29	31		35	37	
41	43		47	49		53	55		59
61		65	67		71	73		77	79
	83	85		89	91		95	97	

4. Coger el siguiente número primo superior a 3 de la serie de los números primos, el 5, y suprimir en la tabla todos aquellos números que sean múltiplos de 5, excepto el 5:

2	**3**	**5**	7		11	13		17	19
	23			29	31			37	
41	43		47	49		53			59
61			67		71	73		77	79
	83			89	91			97	

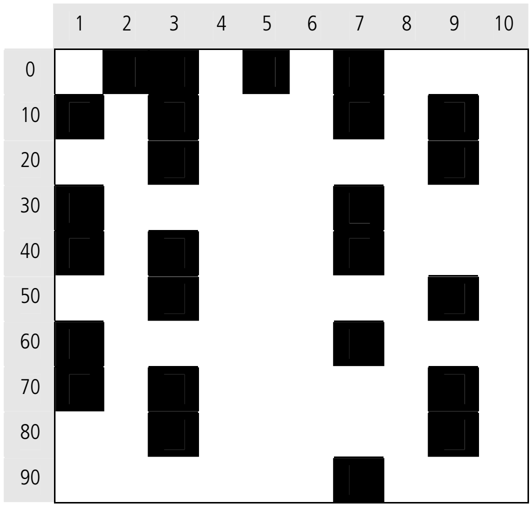
5. Coger el siguiente número primo superior a 5 de la serie de los números primos, el 7, y suprimir en la tabla todos aquellos números que sean múltiplos de 7, excepto el 7:

2	**3**	**5**	**7**		11	13		17	19
	23			29	31			37	
41	43		47			53			59
61			67		71	73			79
	83			89				97	

En este punto se para la criba porque el siguiente número primo es 11 y 11 x 11 = 121 que es superior a 100. Todos los números presentes en la anterior tabla son primos y constituyen el conjunto de números primos inferiores a 100.

Esta serie se puede representar geométricamente sobre un matriz cuadrada de 10 x 10 = 100 casillas, numeradas de izquierda a derecha y de arriba abajo, marcando con el color negro todas aquellas casillas que corresponden a los números primos del intervalo del 1 al 100:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		2	3		5		7			
10	11		13				17		19	
20			23						29	
30	31						37			
40	41		43				47			
50			53						59	
60	61						67			
70	71		73						79	
80			83						89	
90							97			



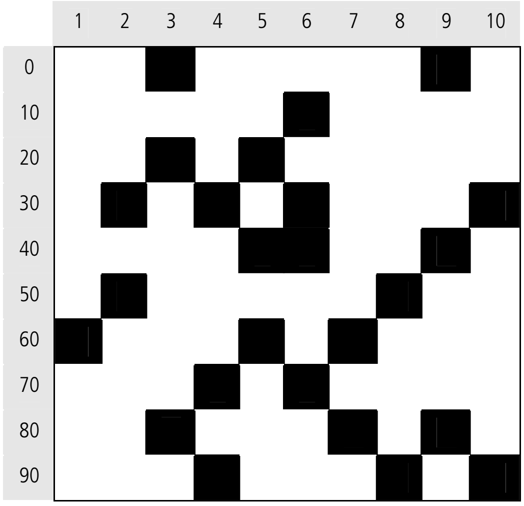
En la representación se puede observar que todas las columnas que representan a números que terminan en números pares están vacías, excepto la primera que contiene el 2. Lo mismo ocurre con las columnas que representan a números múltiplos de 5, excepto la primera que contiene el 5.

El matemático Stanislav Ulam[3] propuso en 1963, representar la secuencia de los números primos de un intervalo en forma de espiral. El método consistía en representar todos los números enteros de la secuencia del intervalo determinado, en general a partir de 1, en una espiral creciente hacia el exterior donde se marcaban los números primos. Los números primos aparecen en este caso en las líneas diagonales.

13	12	**11**	10
14	**3**	**2**	9
15	4	1	8
...	**5**	6	**7**

[3] Jean-Paul Delahaye, *op. cit.,* p. 29.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	91	90	89	88	87	86	85	84	83	82
10	92	57	56	55	54	53	52	51	50	81
20	93	58	31	30	29	28	27	26	49	80
30	94	59	32	13	12	11	10	25	48	79
40	95	60	33	14	3	2	9	24	47	78
50	96	61	34	15	4	1	8	23	46	77
60	97	62	35	16	5	6	7	22	45	76
70	98	63	36	17	18	19	20	21	44	75
80	99	64	37	38	39	40	41	42	43	74
90	100	65	66	67	67	69	70	71	72	73



12.2.3.- Números de Mersenne

Los números de Mersenne son simplemente números primos que se obtienen al restar la unidad a las siguientes potencias de dos: n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

$$\boxed{2^x - 1}$$

Un ejemplo sería el siguiente: $2^5 - 1 = 31$, lo que indica que 31 es un número de Mersenne.

El proceso para obtener la serie de los números de Mersenne es el siguiente:

$$2^2 - 1 \quad 2^3 - 1 \quad 2^5 - 1 \quad 2^7 - 1 \quad 2^{13} - 1 \quad 2^{17} - 1 \quad 2^{19} - 1 \quad 2^{31} - 1 \quad 2^{67} - 1 \quad \ldots$$

A continuación se muestra el resultado de la serie:

		3	7	31	127	8191	131071	524287	…
n	=	2	3	5	7	13	17	19	

12.2.4.- Números de Catalan

Dado un triángulo de Pascal, los números de Catalan son los números que se encuentran en el centro de cada fila impar. La secuencia, empezando por el vértice del triángulo de Pascal y leyendo de arriba abajo, es:

1	2	6	20	70	252	924	3432	12870	48620	…

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

12.2.5.- Secuencia de Fibonacci

En la serie de los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,..., cada uno de ellos tiene una unidad más (+1) que el anterior y una menos (-1) que el siguiente; estableciendo una relación igual y constante, de simetría simple y monótona.

Si esta serie se hace aditiva, es decir, que cada término sea igual a la suma de los dos anteriores, y teniendo en cuenta que los dos primeros términos de la serie son 1, 1, se obtendrá entonces una serie asimétrica llamada serie de Fibonacci:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765
10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
1346269	2178309	3524578	5702887	9227465	14930352	24157817	39088169	63245986	102334155

Si se representan estos números en forma de quebrados, comenzando por el cero y formando quebrados con los números sucesivos, se obtiene una serie de fracciones armónicas y proporcionales entre sí, y constituyen una serie de quebrados de relación menor:

0/1 1/2 3/5 8/13 21/34 55/89 …

En cambio, si los quebrados se forman de manera que el numerador sea igual a la suma de los dos términos del quebrado anterior y el denominador sea la suma del propio numerador, más el denominador precedente, se obtiene otra serie de quebrados de relación mayor:

1/1 2/3 5/8 13/21 34/55 89/144 …

Combinando estas dos series de quebrados alternativamente, se obtiene otra más amplia, de escalonamientos más próximos y que además presenta posibilidades mayores:

1/1 1/2 2/3 3/5 5/8 8/13 13/21 21/34 34/55 55/89 89/144 …

Si se divide el denominador por el numerador, a partir del quebrado 21/34, aparece una cifra constante, que es el número de oro = 1,618. Si se procede a la inversa, resulta otra cifra también constante, 0,618, que en cuanto a proporcionalidad, representa el mismo concepto. Los quebrados anteriores dan, otras cifras aproximadas.

12.2.6.- Secuencia de Lucas

La secuencia de Lucas está definida con las mismas reglas que la serie de Fibonacci: cada número es igual a la suma de los dos anteriores, pero comienza con dos números diferentes: 2, 1.

El proceso para construir la serie es el siguiente:

2	1	3	3+1	4+3	7+4	11+7	18+11	29+18	47+29	76+47	123+76	199+123	322+199	…

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	3571	…
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	3571

12.2.7.- Número PI

El área de un círculo de radio 1 es el número PI. El perímetro de un círculo de diámetro 1 es el mismo número.

Los 500 primeros términos de la serie PI, leyéndolos de arriba abajo y de izquierda a derecha:

3,				
1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128
4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091
4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436
7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548
0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912

12.2.8.- Número PHI:

Los 500 primeros términos de la serie PHI, leyéndolos de arriba abajo y de izquierda a derecha:

1,				
6180339887	4989484820	4586834365	6381177203	0917980576
2862135448	6227052604	6281890244	9707207204	1893911374
8475408807	5386891752	1266338622	2353693179	3180060766
7263544333	8908659593	9582905638	3226613199	2829026788
0675208766	8925017116	9620703222	1043216269	5486262963
1361443814	9758701220	3408058879	5445474924	6185695364
8644492410	4432077134	4947049565	8467885098	7433944221
2544877066	4780915884	6074998871	2400765217	0575179788
3416625624	9407589069	7040002812	1042762177	1117778053
1531714101	1704666599	1466979873	1761356006	7087480710

12.2.9.- Número raíz de dos:

Los 500 primeros términos de la serie raíz de 2, leyéndolos de arriba abajo y de izquierda a derecha:

1,				
4142135623	7309504880	1688724209	6980785696	7187537694
8073176679	7379907324	7846210703	8850387534	3276415727
3501384623	0912297024	9248360558	5073721264	4121497099
9358314132	2266592750	5592755799	9505011527	8206057147
0109559971	6059702745	3459686201	4728517418	6408891986
0955232923	0484308714	3214508397	6260362799	5251407989
6872533965	4633180882	9640620615	2583523950	5474575028
7759961729	8355752203	3753185701	1354374603	4084988471
6038689997	0699004815	0305440277	9031645424	7823068492
9369186215	8057846311	1596668713	0130156185	6898723723

12.2.10.- Número raíz de tres:

Los 500 primeros términos de la serie raíz de 3, leyéndolos de arriba abajo y de izquierda a derecha:

1,				
7320508075	6887729352	7446341505	8723669428	0525381038
0628055806	9794519330	1690880003	7081146186	7572485756
7562614141	5406703029	9699450949	9895247881	1655512094
3736485280	9323190230	5582067974	8201010846	7492326501

5312343266	9033228866	5067225466	8921837971	2270471316
6036786158	8019049986	5373798593	8946765034	7506576050
7566183481	2960610094	7602187190	3250831458	2952395983
2997789824	5082887144	6383291734	7224163984	5878553976
6795806381	8353666110	8431737808	9437831610	2088305524
9016700235	2071114428	8695990956	3657970871	6849807289

12.2.11.- Números abundantes

Se llaman números defectivos a aquellos números que no tienen muchos divisores.[4] Se llaman números abundantes a aquellos que tienen un gran número de divisores. El número abundante más bajo es el 12, con los siguientes divisores: 1, 2, 3, 4 y 6. La suma de estos divisores es 16 (1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16), y 16 es mayor que 12. De este modo, 12 es un número abundante.

El siguiente número abundante es 20. Y los siguientes: 24, 30, 36, 40, 42, 48 y 54. Éstos son simplemente múltiplos de 6, 12 y 20.

El siguiente número abundante es el 56 con los siguientes divisores: 1, 2, 4, 7, 8, 14 y 28. A continuación está el número 60 con los siguientes divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30. Otro número abundante es el 70 con los siguientes divisores: 1, 2, 5, 7, 10, 14 y 35.

Más números abundantes con sus respectivos divisores son: el número 78, con los siguientes divisores: 1, 2, 3, 6, 13, 26, y 39; el 84, con 11 divisores diferentes: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28 y 42; el 88, con los siguientes divisores: 1, 2, 4, 8, 11, 22 y 44.

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie es el siguiente:

12	20	24	30	36	40	42	48	54	56	60	70	78	84	88
8	4	6	6	4	2	6	6	2	4	10	8	6	4	

12.212.- Secuencia de Bernouilli

El proceso constructivo de la serie es el siguiente:

0+1 1+2 3+3 6+4 10+5 15+6 21+7 28+8 36+9 45+10 55+11 66+12 78+13 …

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171		
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

[4] Tom Johnson, *Musique pour quatre-vingt-huit = Music for Eighty-eight = Musik für Achtundachtzig*, Editions 75, París, 1988, pp. 53-61.

12.3.- SECUENCIAS GEOMÉTRICAS

12.3.1.- Secuencia de cuadrados:

El proceso constructivo de la serie es el siguiente:

1 1x2 2x2 4x2 8x2 16x2 32x2 64x2 128x2 256x2 512x2 1024x2 2048x2 …

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

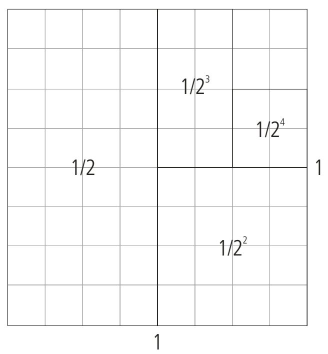
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32786
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

12.3.2.- Suma de cuadrados:

La siguiente suma de cuadrados es una propuesta de Warreb Page[5] y se utiliza para fragmentar un cuadrado de forma ordenada y proporcional.

El proceso de construcción de la serie está formado por diferentes potencias del quebrado 1/2, de forma que la suma de toda la serie sea igual a 1 o la unidad:

$$1/2 \quad + \quad 1/2^2 \quad + \quad 1/2^3 \quad + \quad \dots \quad = \quad 1$$



El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie es el siguiente:

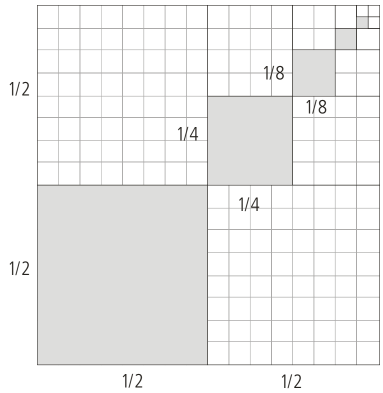
1/2	1/4	1/8	…

La siguiente suma de cuadrados es una propuesta de Sunday A. Ajose.[6]

[5] Rogen B. Nelsen, *Proofs without words*, The Mathematical Association of America, 1993, p. 118.
[6] Rogen B. Nelsen, *op. cit.,* p. 121.

El proceso de construcción de la serie es el siguiente:

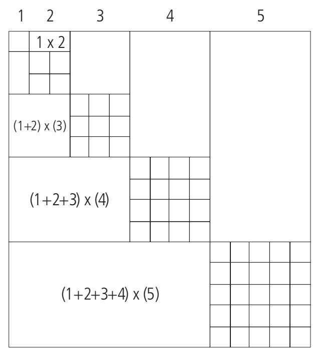
1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + … = 1/3



La siguiente suma de cuadrados es una propuesta de James O. Chilaka.[7]

El proceso de construcción de la serie, está determinado por las siguientes operaciones:

1 1x2 (1+2)x3 (1+2+3)x4 (1+2+3+4)x5 …



El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie es el siguiente:

1	2	9	24	50	…
1	7	15	26	…	

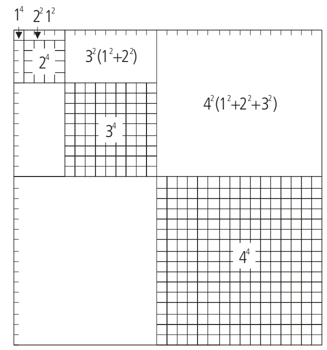
12.3.3.- Suma de potencias de cuatro:

Esta representación es una propuesta de Elizabeth M. Markham.[8]

[7] Rogen B. Nelsen, *op. cit.,* p. 80.
[8] Rogen B. Nelsen, *op. cit.,* p. 92.

El proceso geométrico constructivo de la serie es el siguiente:

1^4 2^4 3^4 4^4 …



El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie se muestra a continuación:

1	16	81	256	…
15	65	175		

12.4.- SECUENCIA DE PRODUCTOS NUMÉRICOS: TABLAS DE MULTIPLICAR

Esta serie está basa en una serie de multiplicaciones sucesivas de dos series de números enteros desfasadas una con respecto a la otra, una unidad, o lo que es lo mismo, dos series continuas de números enteros en las que una de ellas comienza por la unidad, 1, y la otra por 2.

El proceso para construir la serie es el siguiente:

1x2 2x3 3x4 4x5 5x6 6x7 7x8 8x9 9x10 10x11 11x12 12x13 13x14 14x15 …

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie está representado en la siguiente tabla:

2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240	272	306			
4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42

12.5.- HEXAGRAMAS

El I Ching o Libro de los Cambios, es un libro de origen chino que se ha utilizado en Oriente como oráculo de consulta para los momentos de duda o de elección.

El I Ching consta de 64 hexagramas que resultan de realizar todas las permutaciones posibles de dos tipos de líneas al tomarlas de 6 en 6. Los dos tipos de línea que utilizan los hexagramas revelan la dualidad básica de la metafísica china: una línea continua (Yang, trazo masculino) y una línea discontinua (Yin, trazo femenino). Si se toman las líneas de 2 en 2, hay cuatro maneras de poder combinarlas, $2^2 = 4$, a las que se llama diagramas; si se toman de 3 en 3, hay 8 maneras de formar trigramas, $2^3 = 8$; y si se toman de 6 en 6, hay 64 maneras de formar hexagramas, $2^6 = 64$.

Los diagramas están compuestos por combinaciones de 2 elementos, n = 2, tomados de dos en dos, p = 2: $2^2 = 4$:

1	0	0	3	1	0
2	0	1	4	1	1

Los valores numéricos de los diagramas corresponden a la traducción decimal del código binario utilizado para crear cada uno de los diagramas, A este valor numérico se le ha añadido + 1, para que la numeración coincida con la establecida en el *Libro de los Cambios*.

El valor numérico de cada diagrama corresponde a un código binario donde los trazos cortos o Yin se han representado por el 0; y los trazos largos o Yang por el 1. La sucesión de los trazos para realizar cada uno de los diagramas se ha realizado de arriba abajo y la lectura de cada uno de los códigos binarios de izquierda a derecha:

Los trigramas están compuestos por combinaciones de dos elementos, n = 2, agrupados de tres en tres, p = 3, donde se pueden repetir los elementos: $2^3 = 8$. La presentación de estos trigramas es la siguiente:

1	0	0	0	5	1	0	0
2	0	0	1	6	1	0	1
3	0	1	0	7	1	1	0
4	0	1	1	8	1	1	1

Igual que con los diagramas, los valores numéricos de los trigramas corresponden a la traducción decimal del código binario utilizado para crear cada uno de los trigramas, A este valor numérico se le ha añadido + 1, para que la numeración coincida con la establecida en el *Libro de los Cambios*.

El valor numérico de cada trigrama corresponde a un código binario donde los trazos cortos o Yin se han representado por el 0; y los trazos largos o Yang por el 1. La sucesión de los trazos para realizar el trigrama se ha realizado de arriba abajo y la lectura de cada uno de los códigos binarios de izquierda a derecha:

Los hexagramas son el resultado de agrupar estos 8 trigramas, n = 8, de 2 en 2, p = 2. El número de hexagramas posible viene dado por la siguiente relación: $8^2 = 64$. También se pueden construir a partir de los 2 elementos Yin y Yang, agrupándolos de 6 en 6: $2^6 = 64$. El resultado es el mismo.

Si se aplica a cada hexagrama la misma lectura binaria de los números decimales del 0 al 63 que se ha utilizado para construir los trazos de los diagramas y trigramas, el resultado de la tabla que se aplica para construir la serie de los 64 símbolos es el siguiente:

1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	1
7	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	1	1	1
9	0	0	1	0	0	0
10	0	0	1	0	0	1

11	0	0	1	0	1	0
12	0	0	1	0	1	1
13	0	0	1	1	0	0
14	0	0	1	1	0	1
15	0	0	1	1	1	0
16	0	0	1	1	1	1
17	0	1	0	0	0	0
18	0	1	0	0	0	1
19	0	1	0	0	1	0
20	0	1	0	0	1	1

21	0	1	0	1	0	0
22	0	1	0	1	0	1
23	0	1	0	1	1	0
24	0	1	0	1	1	1
25	0	1	1	0	0	0
26	0	1	1	0	0	1
27	0	1	1	0	1	0
28	0	1	1	0	1	1
29	0	1	1	1	0	0
30	0	1	1	1	0	1

31	0	1	1	1	1	0
32	0	1	1	1	1	1
33	1	0	0	0	0	0
34	1	0	0	0	0	1
35	1	0	0	0	1	0
36	1	0	0	0	1	1
37	1	0	0	1	0	0
38	1	0	0	1	0	1
39	1	0	0	1	1	0
40	1	0	0	1	1	1

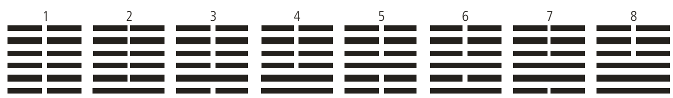
41	1	0	1	0	0	0
42	1	0	1	0	0	1
43	1	0	1	0	1	0
44	1	0	1	0	1	1
45	1	0	1	1	0	0
46	1	0	1	1	0	1
47	1	0	1	1	1	0
48	1	0	1	1	1	1
49	1	1	0	0	0	0
50	1	1	0	0	0	1

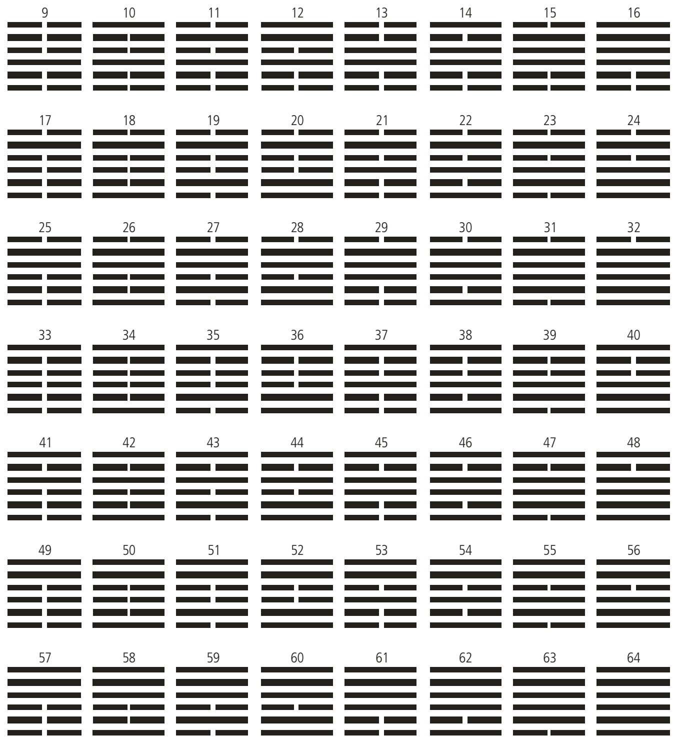
51	1	1	0	0	1	0
52	1	1	0	0	1	1
53	1	1	0	1	0	0
54	1	1	0	1	0	1
55	1	1	0	1	1	0
56	1	1	0	1	1	1
57	1	1	1	0	0	0
58	1	1	1	0	0	1
59	1	1	1	0	1	0
60	1	1	1	0	1	1

61	1	1	1	1	0	0
62	1	1	1	1	0	1
63	1	1	1	1	1	0
64	1	1	1	1	1	1

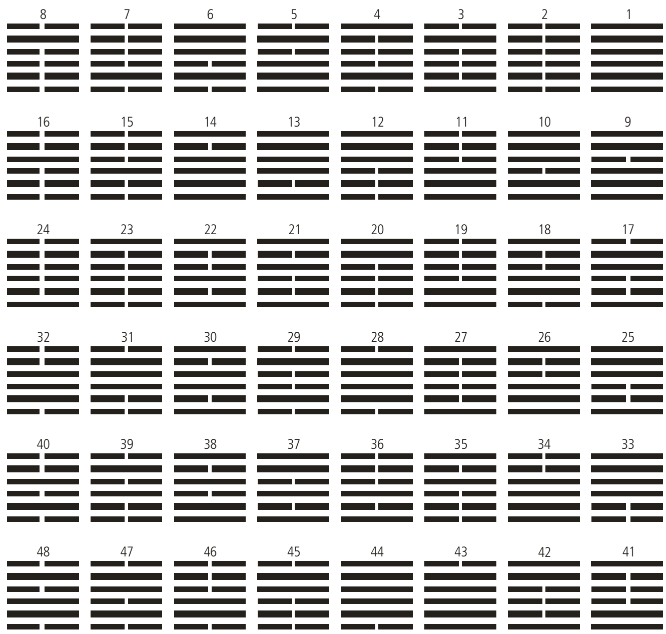
De la misma forma que para los diagramas y los trigramas, un hexagrama está representado por un valor numérico convencional del 0 al 63, al que se le suma una unidad para que el orden de numeración coincida con el establecido por Wen Wang: del 1 al 64.

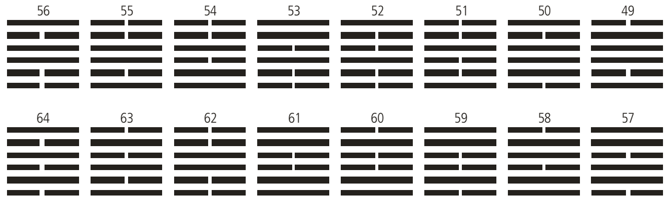
El valor numérico de cada hexagrama corresponde a un código binario donde los trazos cortos o Yin se han representado por el 0; y los trazos largos o Yang por el 1. La sucesión de los trazos para realizar cada uno de los diagramas se ha realizado de arriba abajo y la lectura de cada uno de los códigos binarios de izquierda a derecha:



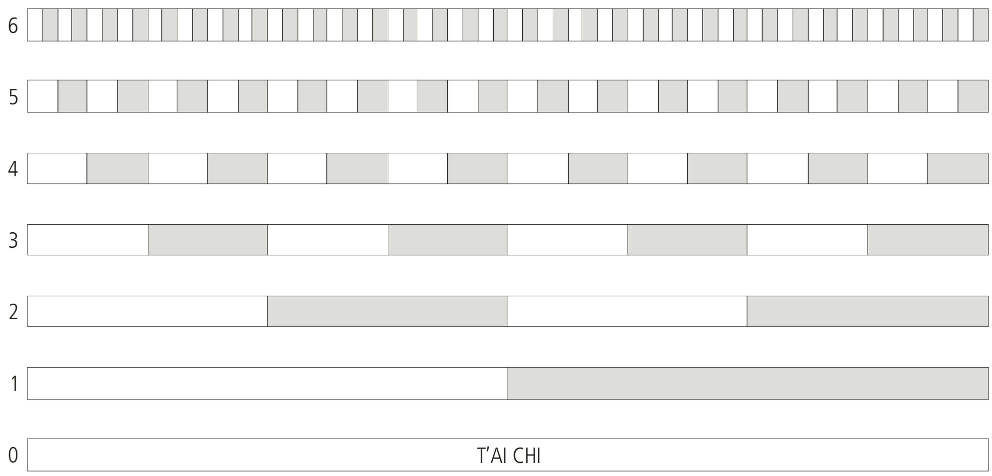


La manera más antigua de disponer los 64 hexagramas, conocida como la secuencia Rey Wen, es el orden en el que aparecen en el I Ching. Las filas se leen de derecha a izquierda, según indica la numeración. Los hexagramas están emparejados de acuerdo a las siguientes características: cada hexagrama impar, va seguido de otro hexagrama que es su inverso. Cuando el hexagrama impar tiene simetría bilateral (es igual por arriba que por abajo), el hexagrama siguiente es su complementario:

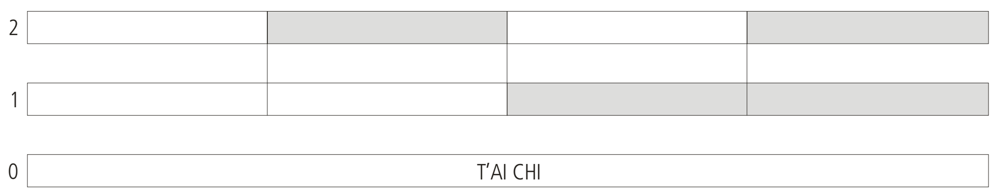




En el siglo XI, Fu Hsi,[9] planteó otra forma de ordenar los hexagramas. En este sistema, se utilizan 6 líneas horizontales y una división binaria (blanco / negro) en cada una de ellas, de diferente número de partes. La representación comienza con una línea inferior continua, sin divisiones, de color blanco, que representa el «T'ai chi»: el universo cuando estaba sin forma. La línea 1, hacia arriba, está dividida en dos mitades: la yin (en blanco) y la yang (en negro). En la línea 2, se ha divido la parte yin de la línea 1 en dos partes: yin y yang; y la parte yang, de la línea 1, en otras dos partes: yin y yang. Esta división binaria de cada trama de la línea anterior, se realiza hasta la última línea del sistema, línea 7 (6 veces).

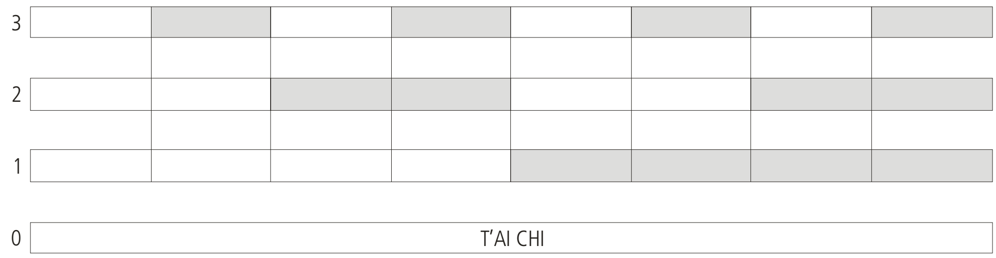


Si se dividen las filas 1 y 2, verticalmente, en cuatro partes iguales y se sustituyen las partes blancas por líneas cortas (yin) y las partes negras, por líneas largas (yang), se obtiene 4 diagramas:

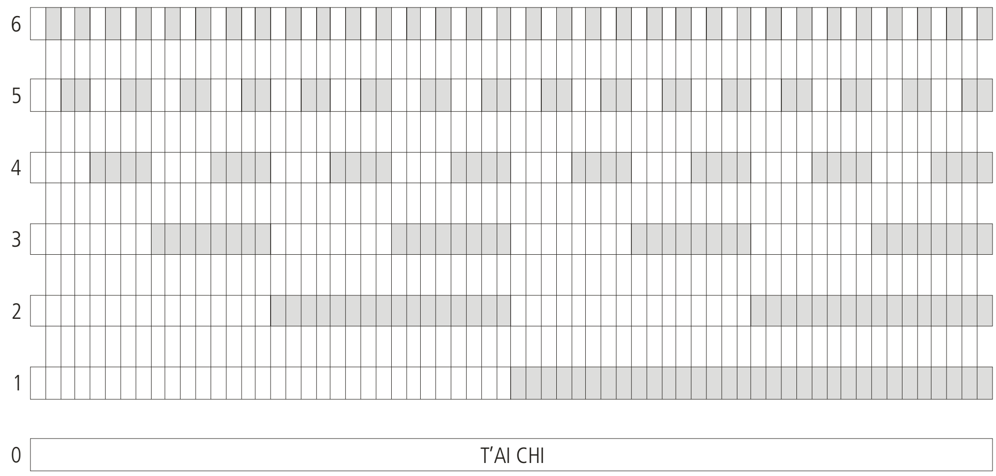


Si se dividen, verticalmente, las filas 1, 2 y 3, en 8 partes iguales, se obtienen los 8 trigramas:

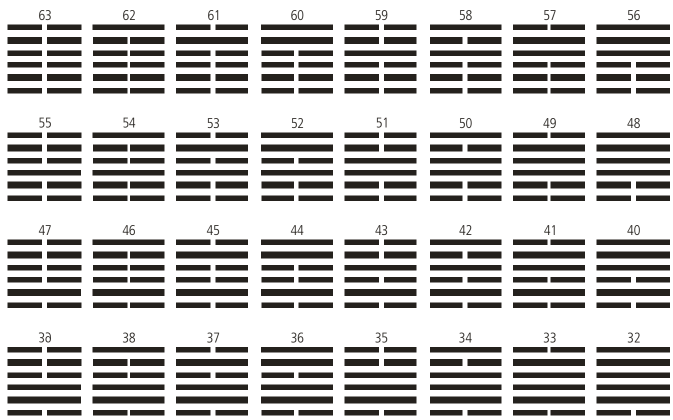
[9] Martin Gardner, *Rosquillas cruzadas y otras amenidades matemáticas*, Editorial. Labor, Barcelona, 1987, p. 271.

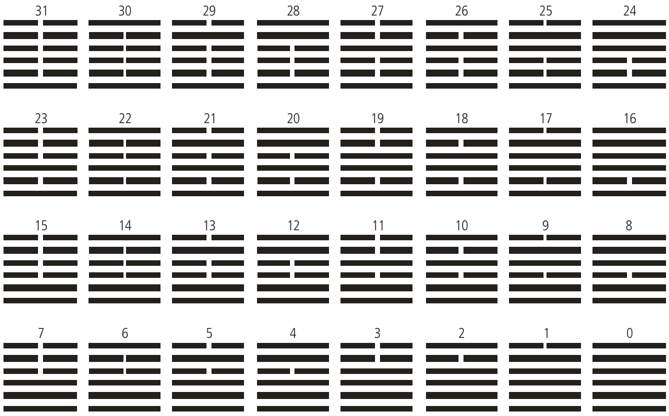


Si se dividen, verticalmente, las filas 1, 2, 3, 4, en 16 partes, se obtienen 16 tetragramas. Si se dividen, verticalmente, las filas 1, 2, 3, 4, 5, en 32 partes, se obtienen 32 pentagramas. Y finalmente, si se dividen, verticalmente, las filas 1, 2, 3, 4, 5, 6, en 64 partes, se obtienen los 64 hexagramas:



La siguiente ilustración muestra los 64 hexagramas de Fu Hsi leídos de izquierda a derecha y de arriba abajo, donde se sustituyen las partes blancas por líneas cortas (yin) y las partes negras, por líneas largas (yang):




31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

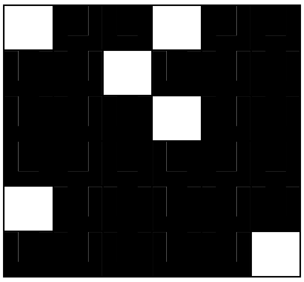
12.6.- ANÁLISIS DE OBRAS

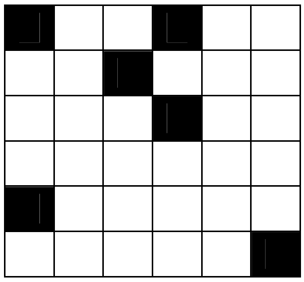
12.6.1.- HARTMUT BÖHM

1. Relieve, 6 Puntos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 1959[1]

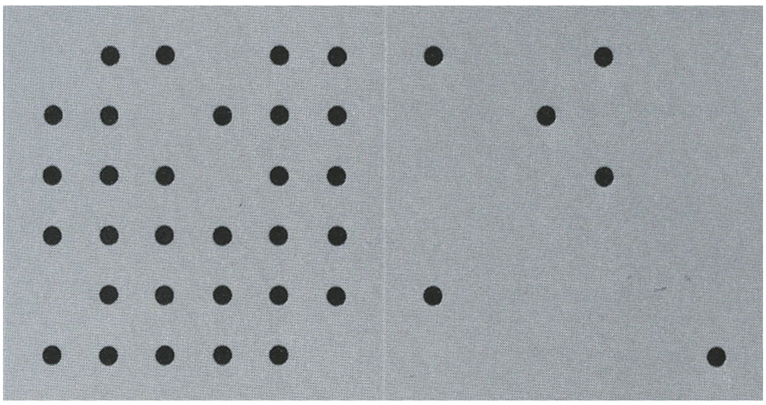
Serie de los seis primeros números cuadrados. En una matriz de 6 x 6 = 36 cuadrados, en la que se ha representado la serie de los números enteros del 1 al 36, de una forma ordenada y progresiva, comenzando en la esquina superior izquierda y avanzando en la matriz de arriba abajo y de izquierda a derecha. La obra representa los seis primeros términos de la serie de los números cuadrados, en positivo y en negativo. En negativo, dejando vacías (blanco) las casillas de la matriz que corresponden a los números de la serie y marcando de color negro las otras. En positivo, realizando el proceso inverso: marcando en negro las casillas de la matriz que corresponden a los números de la serie de cuadrados especificada y dejando en blanco el resto de las casillas.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36





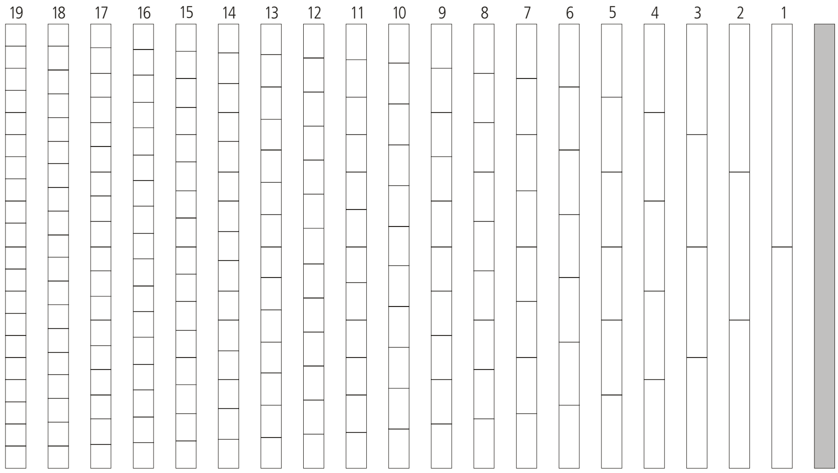
La obra original, se representa en la siguiente imagen:



[1] Relief 6 Punkte 1, 4, 9, 16, 25, 36, 1959.

2. Divisiones regulares, 1972[2]

Contador del 1 al 19 de la secuencia de los números enteros, por subdivisiones sucesivas, de derecha a izquierda, de un rectángulo a partes iguales. El aspecto visual de la obra es de un arco de elipse.



La obra está representada por 19 filas de adoquines rectangulares, situados de una forma ordenada, regular y progresiva, dando visualmente la impresión de la cadencia que el conteo provoca.

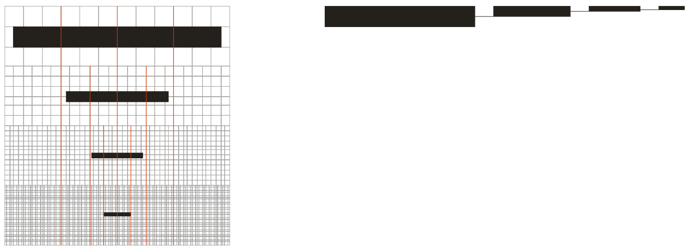
3. Sin título, 1969[3]

Contador del 1 al 4, a cuatro voces, con cadencias rítmicas diferentes. En una matriz de 4 x 4 = 16 cuadrados, se representan cada uno de los números por una figura geométrica, un rectángulo, cuyo módulo inicial (1), en cada incremento del contador, aumenta al doble de longitud y de anchura. La primera voz del contador, columna de la izquierda, realiza un conteo rápido; en la segunda voz, segunda columna a la izquierda, se ralentiza el conteo al doble de tiempo que el anterior; la tercera voz, lo ralentiza al triple; y la cuarta voz al cuádruple. Visualmente esta sensación sonora se traduce en ocupaciones cada vez más grandes del espacio del cuadrado y con intervalos cada

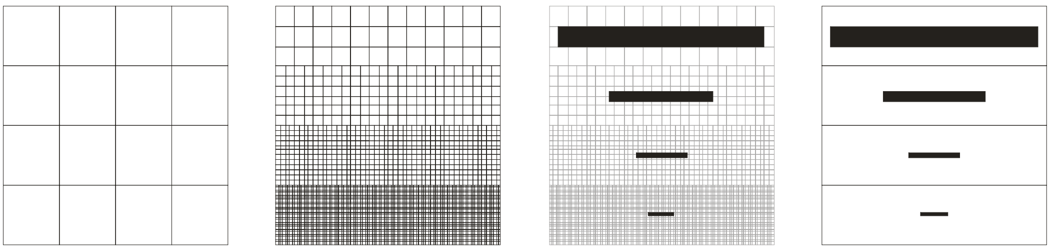
[2] Regelmäβige Teilungen, 1972.
[3] O. T., 1969.

vez mayores entre los símbolos que representan al contador. Se podría hablar también del énfasis a la hora de repetir sonoramente el conteo 1, 2, 3, 4, produciéndose un incremento del tono según se avanza en la serie.

Para crear el primer contador, 1, 2, 3, 4, se utiliza una matriz de 4 x 4 = 16 casillas y se trata cada una de las filas de 1 x 4 casillas. En la fila superior, se introduce el contador que representa al cuatro, y que ocupa un tercio del ancho de la fila y una quinceava parte de largo. Los siguientes símbolos son proporcionales al obtenido: son, en anchura y altura, la mitad que el anterior:



La secuencia de creación del primer contador, se puede sintetizar de la siguiente forma:



Para crear la obra, la sucesión de silencios, grises, y voces, negro, en el proceso de conteo se representa en el siguiente esquema, junto con la obra final:

4. Progresión 1, 4, 9, 16,… 100 y ámbito de referencia, 1989[4]

Esta obra representa la serie de todos los números cuadrados comprendidos en el intervalo del 1 al 100:

1^2	=	1
2^2	=	4
3^2	=	9
4^2	=	16
5^2	=	25
6^2	=	36
7^2	=	49
8^2	=	64
9^2	=	81
10^2	=	100

En una matriz de 4 x 25 = 100 casillas, se representa una tabla con los 100 primeros números enteros, comenzando a contar en el vértice superior izquierdo y avanzando de arriba abajo y de izquierda a derecha:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

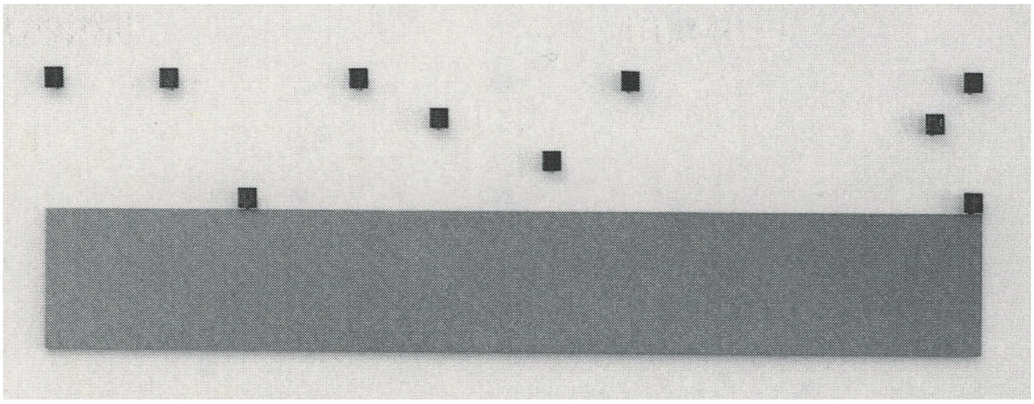
Para realizar la obra se marcan con negro aquellas casillas cuya numeración coincide con un número de la serie de los números cuadrados:

	2	3		5	6	7	8		10	11	12	13	14	15		17	18	19	20	21	22	23	24	
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		37	38	39	40	1	42	43	44	45	46	47	48		50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63		65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80		82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Para representar la obra, se utilizan dos rectángulos iguales superpuestos: en el superior, se representa la serie de los números cuadrados, y en la inferior una mancha del tamaño de la matriz que se necesita para representar a los números enteros del 1 al 100 en cuatro filas.

---

[4] Progresión 1, 4, 9, 16… 100 und Bezugsfeld, 1989.



5. Progresión 1, 4, 9, 16,… 400 y ámbito de referencia, 1989[5]

Esta obra representa la serie de todos los números cuadrados comprendidos en el intervalo del 1 al 400:

1^2	=	1	11^2	=	121
2^2	=	4	12^2	=	144
3^2	=	9	13^2	=	169
4^2	=	16	14^2	=	196
5^2	=	25	15^2	=	225
6^2	=	36	16^2	=	256
7^2	=	49	17^2	=	289
8^2	=	64	18^2	=	324
9^2	=	81	19^2	=	361
10^2	=	100	20^2	=	400

El proceso de generación de la obra es similar al anterior. Se crea una tabla de 20 x 20 casillas y en cada una de ellas se introduce un número entero, de forma ordenada y progresiva, de la serie de los números naturales. Se comienza el conteo en la esquina superior izquierda y su desarrollo se realiza de arriba abajo y de izquierda a derecha:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140

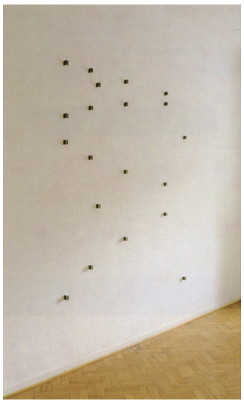
[5] Progresión 1, 4, 9, 16,… 400 und Bezugsfeld, 1989.

141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
281	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

Para realizar la obra se marcan con negro las casillas que corresponden a los números de la serie de los números cuadrados:

	2	3		5	6	7	8		10	11	12	13	14	15		17	18	19	20
21	22	23	24		26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48		50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63		65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143		145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168		170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195		197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224		226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255		257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288		290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323		325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
281	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	

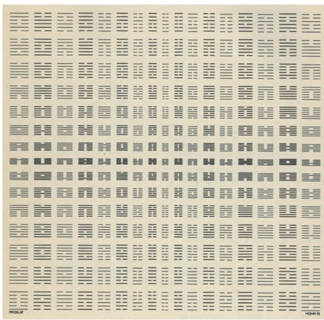
En la siguiente imagen se representa el resultado final de la obra:



12.6.2.- MANFRED MOHR

1. P-67, Programa 67, I Ching, 1970[6]

La obra está compuesta por una matriz de 15 X 17 = 255 casillas. La forma del soporte del cuadro es un cuadrado sobre el que se ha aplicado una estructura de gradación en la que las subdivisiones estructurales entre líneas sucesivas disminuyen o aumentan de tamaño gradualmente, con el correspondiente cambio de proporción del módulo. Es decir, el espacio, vertical y horizontal, entre las líneas estructurales, varía gradualmente de ancho. En la obra, la gradación progresa, tanto vertical como horizontalmente, de lo ancho a lo estrecho, desde los bordes del cuadro hasta su mitad, y luego, progresa de lo estrecho a lo ancho, desde la mitad del cuadro hasta sus límites periféricos. En esta estructura, mientras que los módulos tienen un cambio de proporción y tamaño, las líneas estructurales permanecen, a lo largo de toda la obra, constantes: con el mismo color y el mismo grosor.



La representación de los hexagramas, se ha realizado según las siguientes reglas: cada hexagrama está representado por la codificación binaria de un número decimal del 0 al 63, en el que los ceros o 0, se representan con trazos de líneas cortas, y los unos o 1, con trazos de líneas continuas; la relación entre el número que representa a un hexagrama y el diseño de su símbolo se realiza de la siguiente forma: los seis dígitos binarios que representan a

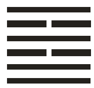
[6] P-67, Programme 67, I Ching, 1970.

cada hexagrama, se leen de izquierda a derecha y los trazos de los hexagramas se dibujan de arriba abajo. Por ejemplo, el número decimal 43, en binario se representa con la siguiente secuencia de números:

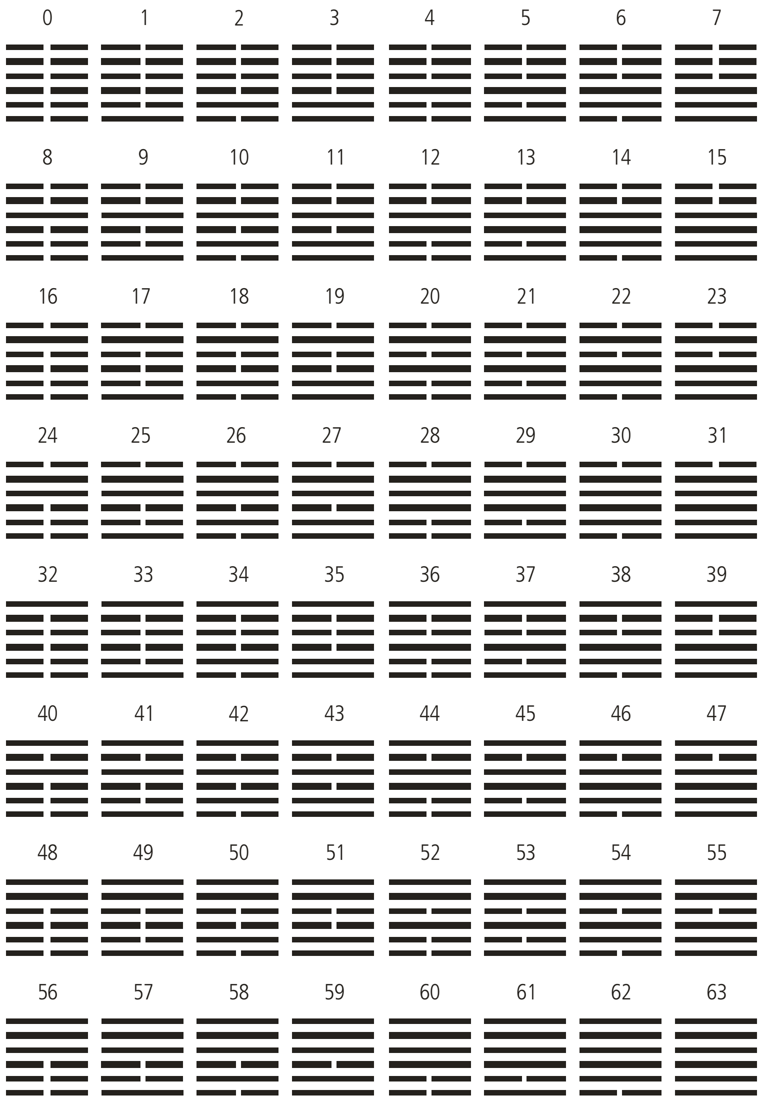
	Binario					
43	1	0	1	0	1	1

El hexagrama correspondiente al número 43, según las reglas descritas anteriormente, será el siguiente:

43



La representación de los 64 hexagramas, según el código binario descrito anteriormente, está resumida en la siguiente tabla:



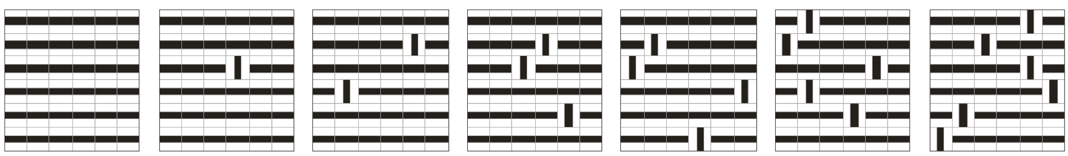
La frecuencia y posición de los 64 hexagramas, en la matriz de la obra, se realiza según el siguiente esquema:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	50	14	38	58	9	57	8	57	13	33	51	9	32	43	40	38	9
2	13	51	52	31	48	37	40	25	18	7	41	40	35	54	26	24	15
3	40	25	48	18	18	53	34	45	47	1	24	9	15	21	10	34	48
4	28	28	19	9	46	22	22	7	6	42	51	59	39	45	48	15	49
5	2	17	17	4	59	34	4	17	3	14	46	10	8	17	9	61	3
6	55	4	27	12	7	49	57	54	37	34	53	14	0	37	24	20	43
7	44	28	57	32	20	35	59	36	25	34	30	60	33	8	3	10	44
8	16	62	48	45	6	2	10	28	38	23	48	6	6	14	61	51	5
9	19	55	2	2	50	31	52	39	60	36	22	11	8	60	56	41	19
10	34	52	41	48	29	33	1	11	24	10	51	49	36	8	27	20	10
11	56	28	52	48	42	11	53	40	16	20	8	22	25	31	5	3	51
12	21	43	51	58	28	38	19	36	53	27	19	23	44	39	31	11	2
13	46	51	58	61	40	54	20	25	37	58	4	57	38	46	8	27	1
14	23	6	54	6	48	41	35	61	49	39	31	18	40	4	55	19	2
15	33	52	29	41	38	34	5	17	56	43	57	60	22	60	52	10	45

12.6.3.- VERA MOLNAR

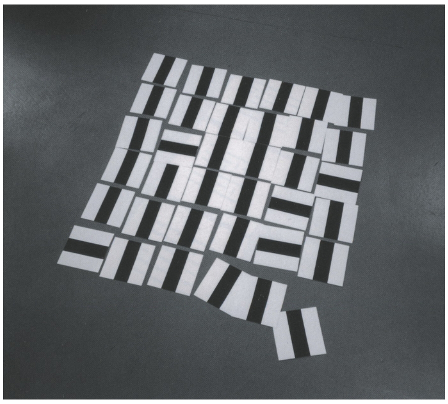
1. Interrupción / continuación, 1961[7]

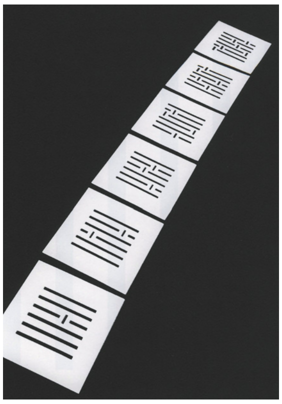
Contador del 1 al 6. En una estructura modular cuadrada de 6 x 6 = 36 cuadrados, se trazan 6 líneas horizontales continuas de lado a lado del cuadrado. El ancho de cada una de las líneas es un tercio de la medida del lado de uno de los cuadrados que forma la estructura de 36 cuadrados. Esta situación es el punto de partida de la serie. A partir de aquí, se interrumpen las líneas horizontales, en un proceso de 6 etapas, una a una y de una forma aleatoria. Cada interrupción se muestra como una fragmentación de la línea horizontal y una introducción de un elemento vertical dentro de su estructura. En cada paso de la serie cambian la posición de los tramos verticales; no hay una continuidad secuencial, sino que cada vez se eligen de nuevo las líneas que van a ocupar los tramos verticales.

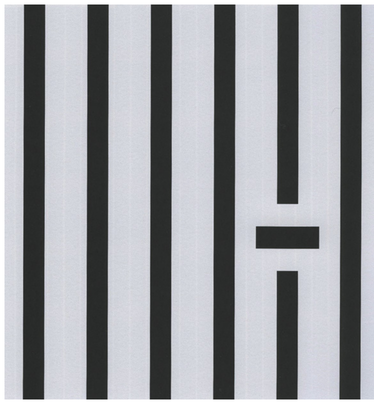


1 2 3 4 5 6

[7] Interruption / continuation, 1961.







12.6.4.- JOSEF LINSCHINGER

1. Secuencia de números primos[8]

Esta formada por círculos cuyo radio crece de acuerdo a la regularidad de las secuencias que el artista ha seleccionado para su desarrollo. Son visualizaciones de la mente humana. Cada una de las imágenes se distingue de las otras por la secuencia que se ha utilizado para generarla.

En A, se ha utilizado la secuencia de los números primos:

Los primeros números primos positivos son:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71

La razón entre los números primos mostrados en la secuencia es:

1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	4

Visualmente se aprecia como una secuencia impredecible debido a la irregularidad de crecimiento de los números primos.

2. Secuencia de Fibonacci[9]

En B, se representa la secuencia asimétrica de Fibonacci:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

[8] Prime Number Sequence.

[9] Fibonacci Sequence.

10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	832040
1346269	2178309	3524578	5702887	9227465	14930352	24157817	39088169	63245986	102334155

3. Secuencia de números cuadrados[10]

En C, se visualiza la secuencia de números cuadrados:

La serie de números cuadrados es:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41

Se puede observar la regularidad de los intervalos de esta secuencia.

4. Secuencia geométrica[11]

En D, se representa la secuencia geométrica siguiente:

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32786
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

5. Secuencia de Lucas[12]

En E, se representa la secuencia de Lucas:

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	3571	…
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	3571

[10] Square Number Sequence.

[11] Geometric Sequence.

[12] Lucas Sequence.

6. Secuencia de Bernoulli[13]

En F, la secuencia en cuestión es la secuencia de Bernoulli:

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171		
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21


A


B


C


D


E

7. Secuencia de diferencias[14]

En G, está representada la secuencia de diferencias:

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

3	4	6	8	12	16	24	32	48	64	96	128	192	256	384	512	768	1024	
1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32	64	64	128	128	256	256	512	512

8. Secuencia aleatoria (con dados)[15]

Y en H, la secuencia aleatoria siguiente, generada con dados:

3	6	14	19	23	32	41	43	50	57	65	71	78	83	95	98	103	11	118	
3	8	5	4	9	9	2	7	7	8	6	7	5	12	3	5	8	7	7	8

13 Bernoulli Sequence.

14 Difference Sequence.

15 Aleatoric Sequence (with dice).

9. Secuencia de multiplicación de números[16]

En I, la secuencia representada es una secuencia de productos:

El resultado de la serie y la razón que existe entre los números de la serie:

2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240	272	306			
4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42

F G H I

[16] Product Number Sequence.

13.- OPERACIONES SOBRE SERIES

Una serie numérica dada se puede transformar en otra secuencia de números aplicando sobre ella diversas operaciones. Las operaciones que se realizan tienen por objeto disponer los datos de la serie de acuerdo a algún criterio o característica concreta que haga que los elementos de la serie se adapten mejor a las necesidades expresivas que requiere cada proyecto, pero sin perder el orden y las relaciones entre los elementos de la serie original. Actúan, así, a modo de filtro. Las transformaciones se pueden aplicar a toda la serie o parcialmente, y se pueden realizar para expandir la serie con nuevos términos; para reducirla, borrando algunos de ellos; o manteniendo el número de elementos invariable.

TRANSFORMACIONES

Dadas unas series o secuencias numéricas, si se aplican un conjunto de procedimientos con unas reglas precisas sobre ellas, se pueden generar nuevas secuencias.

En este apartado se agrupan una serie de procedimientos o estrategias que sirven para generar nuevas secuencias según reglas precisas sobre otras dadas. Las reglas determinadas convierten automáticamente unas secuencias en otras. Se utiliza aquí el término autómata para designar a estos procedimientos que convierten una cosa específica en otra cosa.

En el lenguaje cotidiano, la palabra «autómata» evoca un dispositivo electromecánico que simula los movimientos de los seres vivos. Un robot con capacidad autónoma de movimiento, es un caso típico de autómata.

Sin embargo, en informática, este concepto se refiere a una máquina secuencial síncrona (con entrada de reloj), que posee una o varias entradas de datos o entradas de control, así como una o varias salidas de datos.

Estas salidas de datos (en sincronismo con el reloj) darán unas determinadas señales, dependiendo esencialmente del estado interno en que se encuentre el autómata. Por tanto, el autómata tiene circuitos de almacenamiento de información (memoria, biestables, etc.) que recuerdan el estado en que se encontraba la máquina en el instante anterior. Así, se define el concepto de estado del autómata como la información que contiene un autómata en un determinado instante y que necesita para deducir cuál será la salida en el instante siguiente.

En función del número de estados que tenga el autómata, se pueden clasificar éstos en «autómatas finitos», que son aquellos dispositivos en los que el número de estados interno está limitado y, por tanto, pueden ser codificados todos ellos por el diseñador como estados internos del autómata; y «autómatas infinitos» en cuyo caso el número total de estados es imposible de codificar, por tanto, no conduce a ningún circuito práctico, y su estudio cae fuera de cualquier sistematización.

13.1.- TRANSFORMACIONES PARCIALES DE SERIES

Este tipo de transformación se da cuando se divide una secuencia numérica en partes y se utiliza una regla para transformar la primera mitad de la secuencia y otra regla para transformar la segunda parte.

Para definir transformaciones de este tipo se necesita una nomenclatura que defina cada uno de los elementos que van a formar parte de la transformación.

1. Las primeras mitades de cada secuencia se llamarán x_1, x_2, x_3,...

2. Las segundas mitades y_1, y_2, y_3,...

3. La secuencia entera z_1, z_2, z_3,...

La secuencia 1234, tendrá los siguientes parámetros:

$$x_1 = 12, \qquad y_1 = 34, \qquad z_1 = 1234$$

Para transformar esta secuencia en partes, se aplican las siguientes reglas:[1]

$$x_n = y_{n-1}$$
$$y_n = y_{n-1},\ x_{n-1}$$
$$z_n = x_n,\ y_n$$

Esto produce una progresión del tipo:

z_1	12	34
z_2,	34	3412
z_3,	3412	341234
z_4,	341234	3412343412
z_5,	3412343412	3412343412341234
z_6,	3412343412341234	34123434123412343412343412

13.2.- TRANSFORMACIONES DE UNOS Y CEROS

Dada una serie codificada con 0 y 1, se puede definir un autómata o procedimiento que convierta los 1 en 110 y los 0 en 01:

0 → 01

1 → 110

Si se comienza con 0, el 0 se convierte, en la primera salida del autómata en 01; después, en la segunda salida, se convierte en 01110, y así sucesivamente:

[1] Tom Johnson, *Self-Similar Melodies*, Editions 75, París, 1996, p. 154.

0
01
01 110
01 110 110 110 01
01 110 110 110 01 110 110 01 110 110 01 01 110
01 110 110 110 01 110 110 01 110 110 01 01 110 110 110 01 110 110 01 01 110 110 110 01 110 110 01 01 110 01 110 110 110 01

Un nuevo sistema en el que el número de dígitos aumenta con una tasa de crecimiento irregular es el siguiente:

0 → 011

1 → 0

Comenzando con 1, las transformaciones siguientes serán:

1
0
011
011 0 0
011 0 0 011 011
011 0 0 011 011 011 0 0 011 0 0
011 0 0 011 011 011 0 0 011 0 0 011 0 0 011 011 011 0 0 011 011

Un sistema de reglas que genera palíndromos es:

0 → 101

1 → 010

Como 010 y 101 son simétricos, cada transformación que se realiza es simétrica. Si se comienza el sistema con el 1, los resultados obtenidos son:

1
010
101 010 101
010 101 010 101 010 101 010 101 010
101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101 010 101

Otra transformación sería:

00 → 1001

01 → 1110

10 → 0110

11 → 0010

Si se comienza el sistema por 00, y siguiendo las reglas arriba indicadas:

00
1001
0110 1110
1110 0110 0010 0110
0010 0110 1110 0110 1001 0110 1110 0110

13.3.- TRANSFORMACIONES HÍBRIDAS

Las transformaciones híbridas se obtienen combinando varios procedimientos completamente independientes. Se pueden, por ejemplo, aplicar dos juegos diferentes de reglas alternativamente, o transformar una secuencia x veces con un juego de reglas y luego cambiar a otro juego. Los resultados de las transformaciones híbridas son normalmente más complejos que los resultados de las no híbridas, por lo tanto, si se quiere un resultado más complejo, es una buena opción utilizar este tipo de transformación.

El problema de estas transformaciones es que se pueden llegar a generar secuencias que aparentemente tienen más que ver con el caos que con el orden, al aplicar procedimientos, uno detrás de otro, con lógicas constructivas contradictorias: finitos con infinitos; procedimientos que alargan la secuencia, con procedimientos que la reducen,… En todos estos casos se pierden las simetrías, y las estructuras repetitivas quedan tan profundas que podrían no verse.

Si se alterna, sin embargo, una lógica con otra lógica similar, y se va hacia delante y hacia atrás de forma repetitiva, el resultado puede ser bastante coherente.

Un ejemplo de un procedimiento híbrido,[2] que alterna dos procedimientos de transformación que se llamarán regla 1 y regla 2, puede ser el siguiente:

Regla 1: $n \rightarrow n, \quad n+1,$

Regla 2: $n \rightarrow n, \quad n-1,$

Para evitar los números negativos, se comenzará la secuencia con 5, aplicando las dos reglas alternativamente:

comienzo:	5
regla 1:	56
regla 2:	5465
regla 1:	56456756
regla 2:	5465435465765465
regla 1:	56456756453456456756786756456756
regla 2:	5465435465765465435432435465435465765465768765765465435465765465

Otra forma de crear híbridos es alternando fragmentos de dos o más secuencias concebidas independientemente:

12 5 34
34 56 3412
3412 5465 341234
341234 56456756 3412343412

Se pueden reconocer en esta transformación tramos de secuencias obtenidas previamente en las transformaciones por partes y en el ejemplo de híbrido citado anteriormente.

[2] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 145.

13.4.- TRANSFORMACIONES POR AUTÓMATAS FINITOS

Los autómatas finitos son aquellos en los que se conoce previamente cuántos y cuáles son los elementos que se van a transformar: dos (0, 1); tres (1, 2, 3); cuatro (a, b, c, d),… El resultado de la transformación no va nunca va más allá de los elementos de los que se parte.

Comenzando por las cinco primeras letras del alfabeto y teniendo en cuenta el siguiente juego de reglas:

a → bec
b → ad
c → cd
d → ae
e → dca

En el siguiente ejemplo se comienza con a, y se producen las reglas de transformación cinco veces:

a
bec
ad dca cd
bec ae ae cd bec cd ae
ad dca cd bec dca bec dca cd ae ad dca cd cd ae bec dca

Para que un autómata crezca a mayor o menor velocidad, es decir, genere mayor o menor número de elementos, incluye en sus reglas de transformación mayor o menor número de elementos. De este modo, un autómata finito cuyas leyes de transformación son las siguientes, tendrá un crecimiento muy rápido:

a → bcdac
b → acddc
c → abadc
d → bacbd

Si se parte de a, el resultado de las transformaciones será:

a
bcdac
acddc abadc bacbd bcdac abadc

Sin embargo, el siguiente autómata finito crece muy lentamente ya que aunque tiene muchos elementos diferentes, cada uno de ellos, excepto el e, sólo reemplaza un elemento por otro:

a → b
b → c
c → d
d → e
e → abc

Después de 10 transformaciones habrá sólo 9 elementos:

a
b
c
d
e
abc
bcd
cde
deabc
eabcbcd
abcbcdcde

13.5.- TRANSFORMACIONES POR AUTÓMATAS INFINITOS

En los autómatas infinitos, no se trabaja con un número finito de elementos, como 0 y 1, o "a b c". En este caso, el número de elementos se representa por una variable "n" que puede tomar cualquier valor entre menos y más infinito.

Dado un autómata infinito con la fórmula general:

$$n \rightarrow n, \quad n+1$$

Este autómata transforma cada número en dos: el propio número y el siguiente. Así, si n = 7, se transformará en 7 seguido de 8.

Si se empieza con la letra a, y se tiene en cuenta el orden creciente del abecedario (a, b, c, d, e…), la progresión que se obtiene es:

a
ab
abbc
abbcbccd
abbcbccdbccdcdde
abbcbccdbccdcddebccdcddecddedeef

Esta secuencia puede seguir hasta el infinito.

Otros autómatas de este tipo son aquellos que convierten cada número en tres, triplicando de este modo la longitud de la cadena en cada transformación:

$$n \rightarrow n, \quad n+1, \quad n$$

Si se comienza la progresión con el 1, se obtienen las siguientes transformaciones:

1
121
121 232 121
121 232 121 232 343 232 121 232 121

El siguiente autómata cuadruplica su longitud en cada transformación:

n → n + 1, n, n + 2, n

Si se comienza la progresión con el 1, se obtienen las siguientes transformaciones:

1
2131
3242 2131 4353 2131
4353 3242 5464 3242 3242 2131 4353 2131 5464 4353 6575 4353 3242 2131 4353 2131

13.6.- TRANSFORMACIONES POR INSERCIÓN ENTRE DOS ELEMENTOS CONTIGUOS

Las transformaciones que se han visto hasta ahora implicaban añadir elementos antes o después de otros elementos existentes. Lo que aportan las transformaciones por inserción es que agrupan los elementos de la serie de dos en dos, los comparan y dependiendo de las reglas establecidas, determinan que elementos introducir entre ellos. Por ejemplo, si dos elementos adyacentes son iguales, se introducirá entre ellos un elemento que es resultado de sumar a ese elemento la cantidad de +2, y si dos elementos adyacentes son diferentes, se introduce entre los dos la repetición del elemento que viene primero, el elemento de la izquierda.

Una forma de anotar estas reglas es la siguiente:

Regla 1: n, n → n, n + 2 n
Regla 2: n, x → n, n x

Donde, x es un elemento diferente de n.

Una secuencia que sigue estas reglas y que comienza con los elementos 1 y 2 y realizando las transformaciones cinco veces, es:

1 2
112
13112
113313 11 2
13113533113313112
113313113355353313113533113313112

En el siguiente sistema,[3] la relación de los elementos entre los que se va a producir la transformación por inserción puede presentar cuatro estados diferentes. La regla 1 se aplica cuando los elementos que se comparan son

[3] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 116.

consecutivos de forma creciente y se diferencian solamente en una unidad (+1). La regla 2 se aplica cuando los elementos comparados son consecutivos de forma decreciente y se diferencian solamente en una unidad (-1). La regla 3, se aplica cuando los elementos comparados están ordenados en orden creciente y la diferencia entre ambos es de dos unidades (+2). Y, finalmente, la regla 4, se utiliza cuando entre los elementos, ordenados decrecientemente, existe una diferencia de dos unidades (-2).

Regla 1:	n,	n + 1	→	n,	n +2	n +1
Regla 2:	n,	n - 1	→	n,	n + 1	n - 1
Regla 3:	n,	n + 2	→	n,	n + 1	n + 2
Regla 4:	n,	n - 2	→	n,	n - 1	n - 2

Si se comienza por la serie 123, el resultado de las transformaciones que genera el autómata son las siguientes:

121
13231
123424321
13243543234534231
123423453456453424354654354324321

Un último ejemplo es el definido por el siguiente autómata[4] que compara si los elementos son iguales (regla 1); si están ordenados creciente o decrecientemente y si la diferencia entre ellos es la unidad, +1 y -1, respectivamente (regla2 y 5 respectivamente); si el orden creciente o decreciente entre ellos les distancia 3 o 4 unidades, +3 y +4, o -3 y -4 respectivamente (reglas 3 y 4, y reglas 6 y 7, respectivamente).

Regla 1:	n,	n	→	n,	n + 3	n
Regla 2:	n,	n + 1	→	n,	n - 3	n + 1
Regla 3:	n,	n + 3	→	n,	n - 1	n + 3
Regla 4:	n,	n + 4	→	n,	n + 3	n + 4
Regla 5:	n,	n - 1	→	n,	n + 3	n - 1
Regla 6:	n,	n - 3	→	n,	n + 1	n - 3
Regla 7:	n,	n - 4	→	n,	n - 3	n - 4

Si se comienza con 11 la serie sería:

11
141
10451
140341521
10410-130451456251
1403451403-12340341521041526921521

[4] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 122.

13.7.- TRANSFORMACIONES POR BORRADO

Algunas veces es mejor no comenzar por pocos elementos e ir transformándolos en series más abundantes y más complejas, sino comenzar con una secuencia repetitiva de numerosos términos y por un tipo de borrado convertirla en una estructura interesante.

Si se parte de la estructura[5] 12345432123454321 repetida un número determinado de veces, 8, y se empieza borrando un elemento de cada tres:

123454321234543212345432123454321234543212345432123454321234543212345432
12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_

Se consigue así una estructura interesante porque es una serie bastante larga en la que la segunda mitad, comenzando en 23..., es una inversión exacta de la primera mitad.

Si se continúa con este proceso y se borra ahora, en lugar de un único elemento, un grupo de dos, con la frecuencia de uno de cada tres grupos:

123454321234543212345432123454321234543212345432123454321234543212345432
12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_
12_45____23_54____34_43____45_32____54_21____43_12____32_23____21_34____

Continuando con este proceso y eliminando ahora, en lugar de un grupo de dos elementos, un grupo de 4, con la frecuencia de uno de cada tres grupos, el resultado que se obtiene es el siguiente:

123454321234543212345432123454321234543212345432123454321234543212345432
123454321234543212345432123454321234543212345432123454321234543212345432
123454321234543212345432123454321234543212345432123454321234543212345432

12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_
12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_
12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_12_45_32_23_54_21_34_43_

12_45____23_54____34_43____45_32____54_21____43_12____32_23____21_34____
12_45____23_54____34_43____45_32____54_21____43_12____32_23____21_34____
12_45____23_54____34_43____45_32____54_21____43_12____32_23____21_34____

12_45____23_54_____________45_32____54_21_____________32_23____21_34____
_________23_54____34_43_____________54_21____43_12_____________21_34____
12_45_____________34_43____45_32_____________43_12____32_23_____________

Se muestra a continuación otro ejemplo de borrado que se aplica sobre una secuencia de seis elementos (123432) repetida nueve veces:[6]

1234321234321234321234321234321234321234321234321234321

[5] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 125.
[6] Tom Johnson, *op. cit.,* p. 129.

La operación de borrado se puede realizar de acuerdo al siguiente criterio:

Regla 1:	Dejar 1	Borrar 4
Regla 2:	Dejar 2	Borrar 3
Regla 3:	Dejar 3	Borrar 2
Regla 4:	Dejar 4	Borrar 1
Regla 5:	Dejar 5	Parar de Borrar

123432123432123432123432123432123432123432123432123432

1____21___321__4321_3432123432 123432123432123432123432

Cuando se para de borrar, se han procesado sólo 25 términos de la serie. Este procedimiento, por lo tanto, sólo afecta a la primera mitad, de la secuencia, pero se puede realizar la misma operación comenzando por el final, a partir de los resultados obtenidos previamente, y procesando la segunda mitad:

123432123432123432123432123432123432123432123432123432

1____21___321__4321_3432123432 123432123432123432123432
1____21___321__4321_34321 23432 12343_1234__123___12____1

Otro modelo de borrado sobre la misma secuencia anterior de 6 números (123432) repetida 9 veces, está definido por las siguientes reglas:

Regla 1:	Dejar 1	Borrar 2
Regla 2:	Dejar 2	Borrar 2
Regla 3:	Dejar 3	Borrar 1
Regla 4:	Dejar 2	Borrar 3

El conjunto de reglas de este modelo también se puede definir como una secuencia de dígitos binarios, 0 y 1, en la que el 1 indica la operación de dejar el número que corresponda sin tocar y el 0 borrarlo:

1001100111011000

Aplicando este modelo de borrado a la secuencia definida anteriormente, se obtiene la siguiente serie:

123432123432123432123432123432123432123432123432123432123432
1__43__234_21___3__23__212_43___3__21__432_23___1__43__234_21

13.8.- TRANSFORMACIONES CON RETARDOS

Si se parte del autómata infinito visto anteriormente, con el que se generaba la siguiente secuencia de letras:

$$n \quad \rightarrow \quad n, \quad n+1$$

a
ab
abbc
abbcbccd
abbcbccdbccdcdde
abbcbccdbccdcddebccdcddecddedeef

Se puede observar que en cada transformación, la cantidad de números se duplica. Se parte de un elemento, y en la primera transformación se obtienen dos. En la siguiente transformación se duplican a cuatro, en la siguiente a ocho, luego a 16, y así sucesivamente.

La diferencia de esta transformación con respecto a la anterior, es que ahora, en su representación, se va a realizar un retardo visual entre el número de entrada "n" y el de salida "n, n + 1". Este distanciamiento va a crear un efecto temporal:

```
a
a                                 b
a                b                b                c
a        b        b        c        b        c        c        d
a    b    b    c    b    c    c    d    b    c    c    d    c    d    d    e
a b b c b c c d b c c d c d d e b c c d c d d e c d d e d e e f
```

14.- PERMUTACIONES

Las permutaciones permiten al artista generar un campo compositivo exploratorio de las posibilidades combinatorias de un repertorio de elementos dados. El arte desarrollado con esta técnica se convierte en una exploración de posibles, con la capacidad, por parte del artista, de mostrarlos todos para subrayar la importancia del proceso dentro de la generación de la obra y la creación, ya no de obra única, sino de obra en serie, o de realizar una selección, aleatoria o no, para filtrar sólo aquellas obras que responden mejor al criterio estético del autor en cada momento.

14.1.- CONCEPTO DE COMBINATORIA

Sea un conjunto A = {a, b, c,…} de m elementos cualesquiera. Con estos m elementos de A se pueden formar agrupaciones según ciertas normas preestablecidas.

Si se agrupan estos elementos de uno en uno, se obtienen agrupaciones monarias o unitarias; si de dos en dos, binarias; si de tres en tres, ternarias; si de cuatro en cuatro, cuaternarias,… En general, el agrupar los m elementos de A, de n en n, donde m >= n, se dice que se forman agrupaciones enearias (n-arias).

Se llama base al número de elementos del conjunto A. La base está constituida por los elementos de que se dispone para formar las agrupaciones. Se llama orden al número de elementos que intervienen en cada agrupación.

La combinatoria estudia:

1. Normas que se siguen para formar estas agrupaciones.
2. Formas de todas las agrupaciones posibles, de acuerdo con las normas establecidas.
3. Número de agrupaciones que se pueden formar de cada clase.

De acuerdo con las normas que se fijen para agrupar los elementos de A, se distinguen tres formas importantes:

1. Variaciones
2. Permutaciones
3. Combinaciones

14.2.- VARIACIONES

Dado un conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ de m elementos distintos, se llaman variaciones ordinarias n-arias, donde m >= n, a las agrupaciones de n elementos diferentes que se pueden formar con los m elementos de A, de modo que:

1. En cada grupo entren n elementos distintos.
2. Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

Las variaciones ordinarias de m elementos tomadas de n en n se representan mediante los símbolos:

$$\boxed{V\,m^{n} \quad o \quad V_{m,\,n}}$$

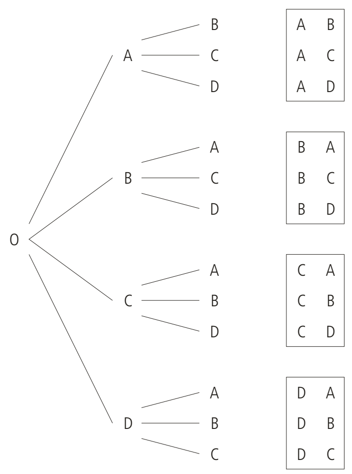
En esta representación, m es la base o número de elementos disponibles para realizar las agrupaciones y n es el orden o número de elementos que intervienen en cada agrupación.

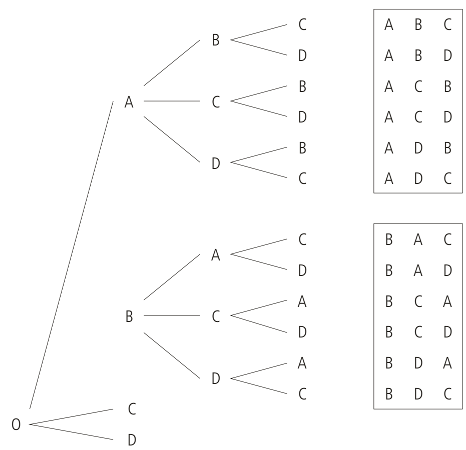
14.2.1.- Variaciones ordinarias o sin repetición

Dado un conjunto A = {a, b, c,…, h, k, l, m} de m elementos, el número de variaciones n-arias que se pueden formar con m elementos, de forma que m >= n, es igual al producto de n factores enteros, consecutivos y decrecientes, siendo m el primer factor y [m – (n - 1)] = (m – n + 1), el último factor.

$$\boxed{V_{m,\,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = m\ (m-1)\ (m-2)\dots(m-n+1)}$$

Las variaciones se representan mediante un diagrama en árbol:





14.2.2.- Variaciones con repetición

Variaciones n-arias con repetición de m elementos, de manera que m >< n, son las agrupaciones de n elementos iguales o distintos que se pueden formar con los m elementos de A, de modo que:

1. En cada grupo entren n elementos repetidos o no.
2. Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

La representación simbólica es:

$$\boxed{VR_{m,\,n}}$$

El número de variaciones n-arias con repetición de m elementos es igual al producto de m por sí mismo n veces.

$$\boxed{VR_{m,n} = m^n}$$

14.3.- PERMUTACIONES

Se llaman permutaciones a las distintas formas de ordenar los n términos de un conjunto, de manera que el orden de unos se realice con respecto al de los otros.

Existen dos tipos de permutaciones: permutaciones sin repetición y permutaciones con repetición.

14.3.1.- Permutaciones sin repetición

Las permutaciones sin repetición de los n elementos de un conjunto, son los distintos grupos de elementos que se pueden formar, de manera que:

1. En cada grupo estén los n elementos.
2. Un grupo se diferencia de otro solamente por el orden de colocación de sus elementos.

Se representan simbólicamente por la siguiente anotación:

$$\boxed{Pn = Vn,n = n!}$$

Las permutaciones sin repetición pueden ser: permutaciones ordinarias, naturales, lineales o geométricas; o cíclicas, circulares o poligonales.

14.3.1.1.- Permutaciones circulares, cíclicas o poligonales

Resuelven el problema de calcular las distintas formas de colocar n objetos diferentes alrededor de una circunferencia.

En esta ordenación hay que tener en cuenta que no hay un primer y un último elemento y por lo tanto, un giro o un desplazamiento de los n elementos a colocar, no produce una nueva permutación.

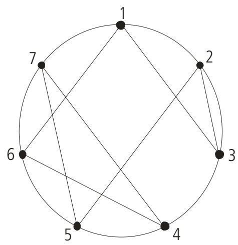
Se representan con el símbolo:

$$\boxed{PC\ n}$$

Para formar las permutaciones circulares con los n elementos de un conjunto {a, b, c,…}, al no haber un elemento primero y uno último, es necesario fijar, como primero, un elemento cualquiera del conjunto, por ejemplo el a, y formar después las permutaciones ordinarias con los n - 1 elementos restantes. Por lo tanto, el número de permutaciones circulares que se pueden formar con n elementos es igual al número de permutaciones ordinarias con (n - 1) elementos.

$$\boxed{PC_n = P_{n-1} = (n-1)!}$$

A toda permutación circular se le puede asociar un polígono o monograma. Por ejemplo,[1] si se parte de un círculo dividido en siete partes iguales numeradas, cada una de ellas, con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y se considera la permutación de siete números: 2574613, se puede obtener un monograma o polígono uniendo los distintos puntos del círculo siguiendo el orden de la permutación dada:



Hay que tener en cuenta que cada permutación genera un único polígono, pero un polígono puede representar a más de una permutación, ya que en el caso anterior, las 7 permutaciones siguientes están representadas por el mismo polígono con la única diferencia de que cada una de ellas difiere de las demás en el punto de partida del polígono.

1	3	2	5	7	4	6
3	2	5	7	4	6	1
2	5	7	4	6	1	3
5	7	4	6	1	3	2
7	4	6	1	3	2	5
4	6	1	3	2	5	7
6	1	3	2	5	7	4

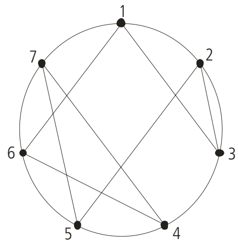
Se puede deducir, además, que para pasar de una permutación a otra, hay que desplazar el primer término de la permutación dada al último término de la siguiente y mantener el resto de los términos en el orden establecido. Esto es lo que caracteriza a una permutación circular.

Este polígono sirve también para definir otras permutaciones:

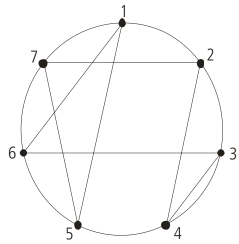
1. Permutaciones cíclicas por adición:

Si se gira el polígono obtenido, en el sentido de las agujas del reloj, 1, 2, 3,…, 7 partes del círculo, define 7 nuevos dibujos que corresponden cada uno de ellos a siete permutaciones diferentes. Se obtienen, así, 7 grupos de permutaciones de forma que cada uno de ellos representa a 7 permutaciones diferentes, de manera que 7 x 7 dan como resultado 49 permutaciones distintas:

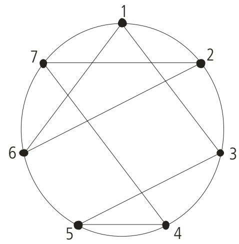
[1] André Sainte-Laguë, *Avec des Nombre et des Lignes*, Librairie Vuibert, París, 1994, p. 131.



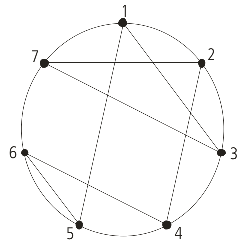
A



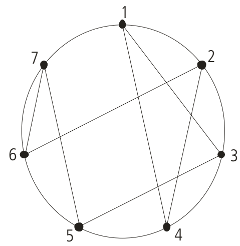
B



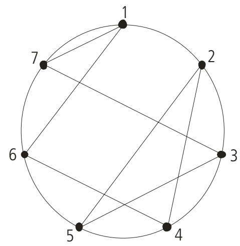
C



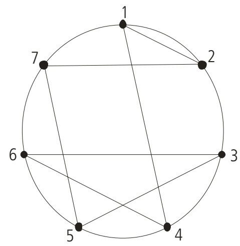
D



E



F



G

Para codificar, en tablas, las permutaciones que corresponden a cada uno de estos polígonos, A, B, C,…, G, se parte de la tabla obtenida anteriormente que representa a las siete permutaciones posibles del primer polígono, A. Para pasar de una tabla a otra, se realiza sumando a cada elemento de la primera fila la cantidad +1, de manera que si la primera permutación de la primera tabla es 1,2,3,4,5,6,7, la primera permutación de la segunda tabla sería, 2,3,4,5,6,7,1. Se puede decir entonces que las permutaciones se deducen unas de otras por adición o suma y que todas las permutaciones del mismo grupo están representadas por el mismo polígono o monograma.

A						
1	3	2	5	7	4	6
3	2	5	7	4	6	1
2	5	7	4	6	1	3
5	7	4	6	1	3	2
7	4	6	1	3	2	5
4	6	1	3	2	5	7
6	1	3	2	5	7	4

B						
2	4	3	6	1	5	7
4	3	6	1	5	7	2
3	6	1	5	7	2	4
6	1	5	7	2	4	3
1	5	7	2	4	3	6
5	7	2	4	3	6	1
7	2	4	3	6	1	5

C						
3	5	4	7	2	6	1
5	4	7	2	6	1	3
4	7	2	6	1	3	5
7	2	6	1	3	5	4
2	6	1	3	5	4	7
6	1	3	5	4	7	2
1	3	5	4	7	2	6

D						
4	6	5	1	3	7	2
6	5	1	3	7	2	4
5	1	3	7	2	4	6
1	3	7	2	4	6	5
3	7	2	4	6	5	1
7	2	4	6	5	1	3
2	4	6	5	1	3	7

E						
5	7	6	2	4	1	3
7	6	2	4	1	3	5
6	2	4	1	3	5	7
2	4	1	3	5	7	6
4	1	3	5	7	6	2
1	3	5	7	6	2	4
3	5	7	6	2	4	1

F						
6	1	7	3	5	2	4
1	7	3	5	2	4	6
7	3	5	2	4	6	1
3	5	2	4	6	1	7
5	2	4	6	1	7	3
2	4	6	1	7	3	5
4	6	1	7	3	5	2

G						
7	2	1	4	6	3	5
2	1	4	6	3	5	7
1	4	6	3	5	7	2
4	6	3	5	7	2	1
6	3	5	7	2	1	4
3	5	7	2	1	4	6
5	7	2	1	4	6	3

2. Permutaciones complementarias:

Partiendo de estas 49 permutaciones, se puede aplicar una nueva regla que genere otras 49 permutaciones nuevas. Estas permutaciones, llamadas permutaciones complementarias de las anteriores, se obtienen reemplazando cada una de las cifras de las tablas anteriores por su complementario a 8; por ejemplo, la cifra 3 se sustituye por el resultado que se obtiene de la siguiente operación 8 – 3 = 5, y así sucesivamente. Las tablas anteriores quedarían de la siguiente forma:

A						
7	5	6	3	1	4	2
5	6	3	1	4	2	7
6	3	1	4	2	7	5
3	1	4	2	7	5	6
1	4	2	7	5	6	3
4	2	7	5	6	3	1
2	7	5	6	3	1	4

B						
6	4	5	2	7	3	1
4	5	2	7	3	1	6
5	2	7	3	1	6	4
2	7	3	1	6	4	5
7	3	1	6	4	5	2
3	1	6	4	5	2	7
1	6	4	5	2	7	3

C						
5	3	4	1	6	2	7
3	4	1	6	2	7	5
4	1	6	2	7	5	3
1	6	2	7	5	3	4
6	2	7	5	3	4	1
2	7	5	3	4	1	6
7	5	3	4	1	6	2

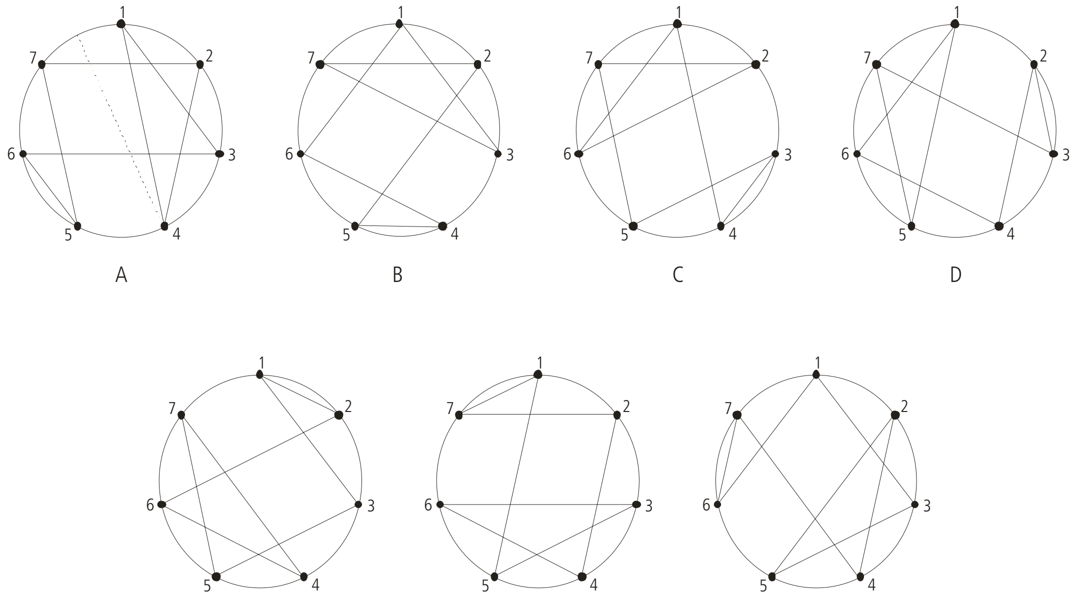
D						
4	2	3	7	5	1	6
2	3	7	5	1	6	4
3	7	5	1	6	4	2
7	5	1	6	4	2	3
5	1	6	4	2	3	7
1	6	4	2	3	7	5
6	4	2	3	7	5	1

E						
3	1	2	6	4	7	5
1	2	6	4	7	5	3
2	6	4	7	5	3	1
6	4	7	5	3	1	2
4	7	5	3	1	2	6
7	5	3	1	2	6	4
5	3	1	2	6	4	7

F						
2	7	1	5	3	6	4
7	1	5	3	6	4	2
1	5	3	6	4	2	7
5	3	6	4	2	7	1
3	6	4	2	7	1	5
6	4	2	7	1	5	3
4	2	7	1	5	3	6

			G			
1	6	7	4	2	5	3
6	7	4	2	5	3	1
7	4	2	5	3	1	6
4	2	5	3	1	6	7
2	5	3	1	6	7	4
5	3	1	6	7	4	2
3	1	6	7	4	2	5

Si se representan estas 49 nuevas permutaciones sobre el círculo anterior se obtiene un polígono simétrico al anterior cuyo eje de simetría es un diámetro del círculo que pasa por el vértice 4.



A B C D

E F G

3. Permutaciones inversas:

Otra operación a realizar sobre las 49 primeras permutaciones es la inversión. Si se toma una permutación cualquiera de entre las 49 primeras, por ejemplo, 1325746 y se lee a la inversa 6475231, se puede decir que este resultado es la permutación inversa de la primera. Las tablas que corresponden a estas permutaciones son las siguientes:

A						
6	4	7	5	2	3	1
1	6	4	7	5	2	3
3	1	6	4	7	5	2
2	3	1	6	4	7	5
5	2	3	1	6	4	7
7	5	2	3	1	6	4
4	7	5	2	3	1	6

B						
7	5	1	6	3	4	2
2	7	5	1	6	3	4
4	2	7	5	1	6	3
3	4	2	7	5	1	6
6	3	4	2	7	5	1
1	6	3	4	2	7	5
5	1	6	3	4	2	7

C						
1	6	2	7	4	5	3
3	1	6	2	7	4	5
5	3	1	6	2	7	4
4	5	3	1	6	2	7
7	4	5	3	1	6	2
2	7	4	5	3	1	6
6	2	7	4	5	3	1

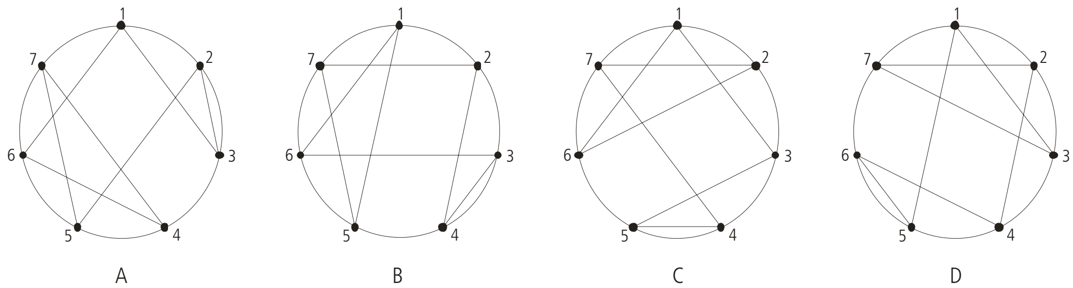
D						
2	7	3	1	5	6	4
4	2	7	3	1	5	6
6	4	2	7	3	1	5
5	6	4	2	7	3	1
1	5	6	4	2	7	3
3	1	5	6	4	2	7
7	3	1	5	6	4	2

E						
3	1	4	2	6	7	5
5	3	1	4	2	6	7
7	5	3	1	4	2	6
6	7	5	3	1	4	2
2	6	7	5	3	1	4
4	2	6	7	5	3	1
1	4	2	6	7	5	3

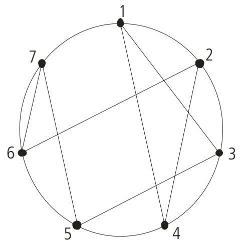
F						
4	2	5	3	7	1	6
6	4	2	5	3	7	1
1	6	4	2	5	3	7
7	1	6	4	2	5	3
3	7	1	6	4	2	5
5	3	7	1	6	4	2
2	5	3	7	1	6	4

G						
5	3	6	4	1	2	7
7	5	3	6	4	1	2
2	7	5	3	6	4	1
1	2	7	5	3	6	4
4	1	2	7	5	3	6
6	4	1	2	7	5	3
3	6	4	1	2	7	5

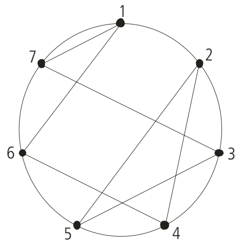
Si se representan estos resultados sobre el círculo dividido y numerado, el resultado que se obtiene es el mismo que en el primer caso, sólo que el orden de su construcción ha variado:



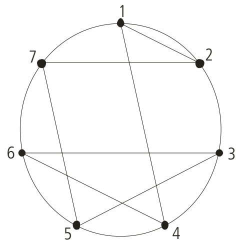
A B C D



E



F



G

4. Permutaciones complementarias de la inversa:

Si finalmente se obtienen las permutaciones complementarias de estos nuevos resultados, se generan las siguientes tablas:

			A			
2	4	1	3	6	5	7
4	1	3	6	5	7	2
1	3	6	5	7	2	4
3	6	5	7	2	4	1
6	5	7	2	4	1	3
5	7	2	4	1	3	6
7	2	4	1	3	6	5

			B			
1	3	7	2	5	4	6
3	7	2	5	4	6	1
7	2	5	4	6	1	3
2	5	4	6	1	3	7
5	4	6	1	3	7	2
4	6	1	3	7	2	5
6	1	3	7	2	5	4

			C			
7	2	6	1	4	3	5
2	6	1	4	3	5	7
6	1	4	3	5	7	2
1	4	3	5	7	2	6
4	3	5	7	2	6	1
3	5	7	2	6	1	4
5	7	2	6	1	4	3

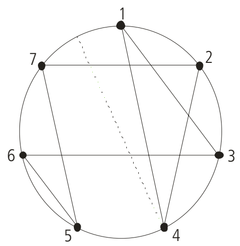
			D			
6	1	5	7	3	2	4
1	5	7	3	2	4	6
5	7	3	2	4	6	1
7	3	2	4	6	1	5
3	2	4	6	1	5	7
2	4	6	1	5	7	3
4	6	1	5	7	3	2

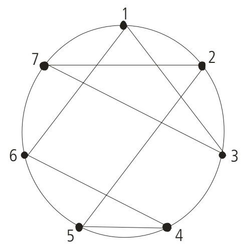
			E			
5	7	4	6	2	1	3
7	4	6	2	1	3	5
4	6	2	1	3	5	7
6	2	1	3	5	7	4
2	1	3	5	7	4	6
1	3	5	7	4	6	2
3	5	7	4	6	2	1

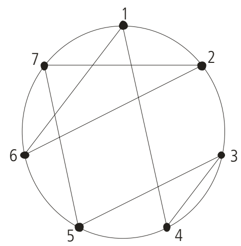
			F			
4	6	3	5	1	7	2
6	3	5	1	7	2	4
3	5	1	7	2	4	6
5	1	7	2	4	6	3
1	7	2	4	6	3	5
7	2	4	6	3	5	1
7	4	6	3	5	1	7

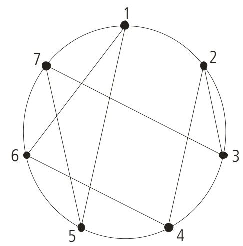
			G			
3	5	2	4	7	6	1
5	2	4	7	6	1	3
2	4	7	6	1	3	5
4	7	6	1	3	5	2
7	6	1	3	5	2	4
6	1	3	5	2	4	7
1	3	5	2	4	7	6

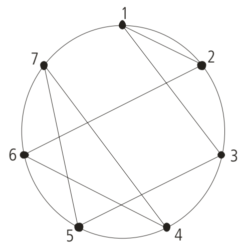
Se obtiene, además, un nuevo polígono simétrico al anterior e idéntico al obtenido por complementarios la vez anterior:

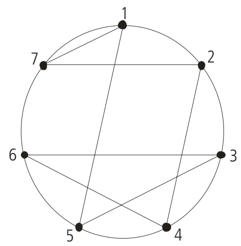

A

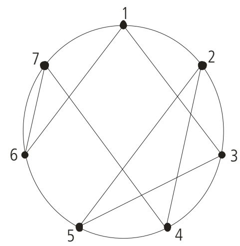

B


C


D


E

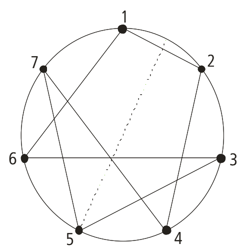

F


G

Se puede decir que un mismo polígono representa a una familia de 196 (49 x 4) permutaciones de las 5040 que se pueden obtener de 7! = 7 x 6 x 5 x 4 3 x 2 x 1 = 5040. Estas 196 permutaciones representan a una familia no simétrica porque el polígono que las representa no es simétrico.

Con este mismo conjunto de números, se pueden buscar nuevas familias de permutaciones que se representen por un nuevo polígono. Hay que tener en cuenta que no todos los polígonos representan al mismo número de permutaciones. Hay algunos que representan a familias de permutaciones muy reducidas porque el diseño del polígono geométricamente es simétrico lo que hace que muchas de las permutaciones obtenidas sean iguales y por lo tanto no válidas. En cualquier caso, el proceso para obtener los elementos de estas familias es el mismo que en el caso anterior. Obtener, primero, todas las variaciones posibles de la permutación dada; después, crear todas las permutaciones por adición correspondientes; a continuación, calcular las permutaciones complementarias de las anteriores; después las permutaciones inversas; y finalmente, las permutaciones complementarias de las inversas.

Si se toma como ejemplo la permutación 5361247, el polígono que la representa es un polígono simétrico con respecto a un diámetro del círculo que tiene su origen en el vértice 5. En esta familia de permutaciones simétricas, el número de permutaciones que se puede obtener es de 98.

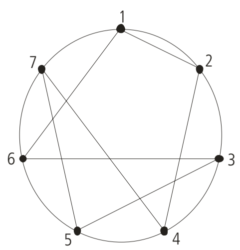


Este polígono representa también a las siguientes permutaciones circulares con la única diferencia de que cada una de ellas difiere de las demás en el punto de partida del polígono:

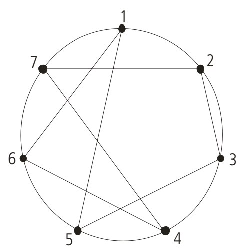
5	3	6	1	2	4	7
3	6	1	2	4	7	5
6	1	2	4	7	5	3
1	2	4	7	5	3	6
2	4	7	5	3	6	1
4	7	5	3	6	1	2
7	5	3	6	1	2	4

1. Permutaciones cíclicas por adición:

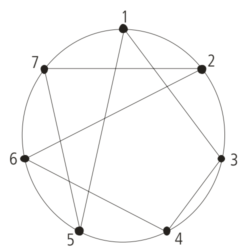
Las primeras 49 permutaciones que se pueden deducir de la dada, 5361247, se obtienen haciendo girar el polígono obtenido, en el sentido de las agujas del reloj, 1, 2, 3,…, 7 partes del círculo. Esta operación crea 7 nuevos dibujos que corresponden cada uno de ellos a siete permutaciones diferentes. Se obtienen, así, 7 grupos de permutaciones de forma que cada uno de ellos representa a 7 permutaciones diferentes, de manera que 7 x 7 dan como resultado 49 permutaciones distintas



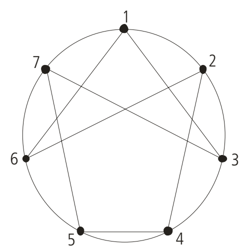
A



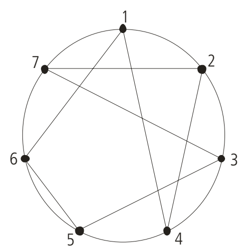
B



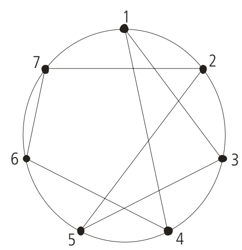
C



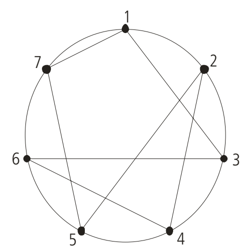
D



E



F



G

Para obtener las 49 permutaciones correspondientes a los polígonos dados, se suma a cada elemento de la primera fila la cantidad +1. Se puede decir entonces que estas permutaciones se deducen de las anteriores por adición o suma y que todas las permutaciones del mismo grupo están representadas por el mismo polígono.

A						
5	3	6	1	2	4	7
3	6	1	2	4	7	5
6	1	2	4	7	5	3
1	2	4	7	5	3	6

B						
6	4	7	2	3	5	1
4	7	2	3	5	1	6
7	2	3	5	1	6	4
2	3	5	1	6	4	7

C						
7	5	1	3	4	6	2
5	1	3	4	6	2	7
1	3	4	6	2	7	5
3	4	6	2	7	5	1

2	4	7	5	3	6	1
4	7	5	3	6	1	2
7	5	3	6	1	2	4

3	5	1	6	4	7	2
5	1	6	4	7	2	3
1	6	4	7	2	3	5

4	6	2	7	5	1	3
6	2	7	5	1	3	4
2	7	5	1	3	4	6

D						
1	6	2	4	5	7	3
6	2	4	5	7	3	1
2	4	5	7	3	1	6
4	5	7	3	1	6	2
5	7	3	1	6	2	4
7	3	1	6	2	4	5
3	1	6	2	4	5	7

E						
2	7	3	5	6	1	4
7	3	5	6	1	4	2
3	5	6	1	4	2	7
5	6	1	4	2	7	3
6	1	4	2	7	3	5
1	4	2	7	3	5	6
4	2	7	3	5	6	1

F						
3	1	4	6	7	2	5
1	4	6	7	2	5	3
4	6	7	2	5	3	1
6	7	2	5	3	1	4
7	2	5	3	1	4	6
2	5	3	1	4	6	7
5	3	1	4	6	7	2

G						
4	2	5	7	1	3	6
2	5	7	1	3	6	4
5	7	1	3	6	4	2
7	1	3	6	4	2	5
1	3	6	4	2	5	7
3	6	4	2	5	7	1
6	4	2	5	7	1	3

2. Permutaciones complementarias:

Partiendo de estas 49 permutaciones, se pueden obtener las permutaciones complementarias de las anteriores, reemplazando cada una de las cifras de las tablas anteriores por su complementario a 8. Las tablas de permutaciones quedarían de la siguiente forma:

A						
3	5	2	7	6	4	1
5	2	7	6	4	1	3
2	7	6	4	1	3	5
7	6	4	1	3	5	2
6	4	1	3	5	2	7
4	1	3	5	2	7	6
1	3	5	2	7	6	4

B						
2	4	1	6	5	3	7
4	1	6	5	3	7	2
1	6	5	3	7	2	4
6	5	3	7	2	4	1
5	3	7	2	4	1	6
3	7	2	4	1	6	5
7	2	4	1	6	5	3

C						
1	3	7	5	4	2	6
3	7	5	4	2	6	1
7	5	4	2	6	1	3
5	4	2	6	1	3	7
4	2	6	1	3	7	5
2	6	1	3	7	5	4
6	1	3	7	5	4	2

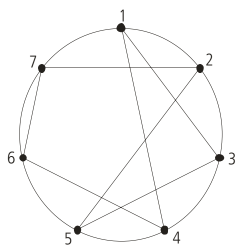
D						
7	2	6	4	3	1	5
2	6	4	3	1	5	7
6	4	3	1	5	7	2
4	3	1	5	7	2	6
3	1	5	7	2	6	4
1	5	7	2	6	4	3
5	7	2	6	4	3	1

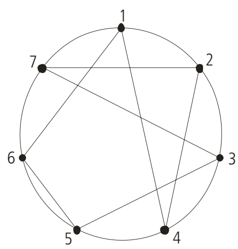
E						
6	1	5	3	2	7	4
1	5	3	2	7	4	6
5	3	2	7	4	6	1
3	2	7	4	6	1	5
2	7	4	6	1	5	3
7	4	6	1	5	3	2
4	6	1	5	3	2	7

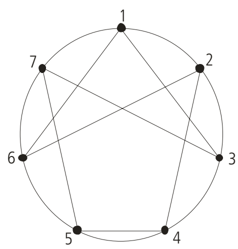
F						
5	7	4	2	1	6	3
7	4	2	1	6	3	5
4	2	1	6	3	5	7
2	1	6	3	5	7	4
1	6	3	5	7	4	2
6	3	5	7	4	2	1
3	5	7	4	2	1	6

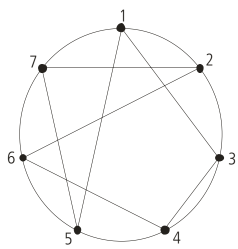
G						
4	6	3	1	7	5	2
6	3	1	7	5	2	4
3	1	7	5	2	4	6
1	7	5	2	4	6	3
7	5	2	4	6	3	1
5	2	4	6	3	1	7
2	4	6	3	1	7	5

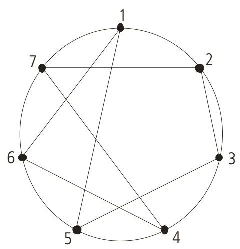
Se representan a continuación, los polígonos correspondientes a estas nuevas permutaciones:

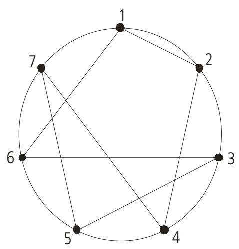

A

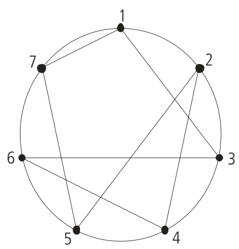

B


C


D


E


F

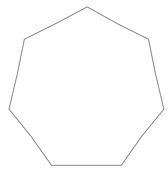

G

Los polígonos obtenidos son simétricos a los anteriores por un diámetro que pasa por el vértice 4 del polígono. Si a partir de estas permutaciones, se calculan las inversas, se obtienen otra vez los mismos resultados.

Hay otro tipo de familias de permutaciones, las familias regulares, que están representadas por un número de permutaciones muy reducido. En el siguiente ejemplo, la familia de permutaciones que parte de la permutación 1234567, tiene las siguientes permutaciones cíclicas:

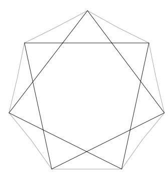
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

Este grupo de permutaciones están representadas por un heptágono regular:



A estas permutaciones cíclicas se les pueden añadir 7 permutaciones más, que se obtienen por inversión. Entre los resultados obtenidos, se encuentra la permutación: 7654321.

Otras familias regulares, análogas a las anteriores, tienen solamente 14 permutaciones. Una de ellas parte de la permutación 1357246. Este grupo de permutaciones están representadas por un heptágono regular estrellado:



Esta familia da origen a una nueva, también compuesta por 14 permutaciones, entre las que está la siguiente: 1473625.

Las diversas familias y sus polígonos

Se podría pensar que es fácil realizar una lista de todas las familias que agrupen todas las permutaciones posibles de los 7 elementos (5040), dibujando sus polígonos, pero es un trabajo bastante arduo. No obstante, el método de trabajo para realizarlo es el siguiente:[2]

[2] André Sainte-Laguë, *op. cit.,* p. 141.

1. Se dibuja un polígono inscrito en una circunferencia cuyo lado mida, en este caso, 1/7 parte de la circunferencia.

2. Se clasifican los polígonos ordenadamente según el número de lados del polígono regular inicial que utilicen para realizar su representación y por la disposición que cada uno de ellos tenga dentro del polígono que le representa.

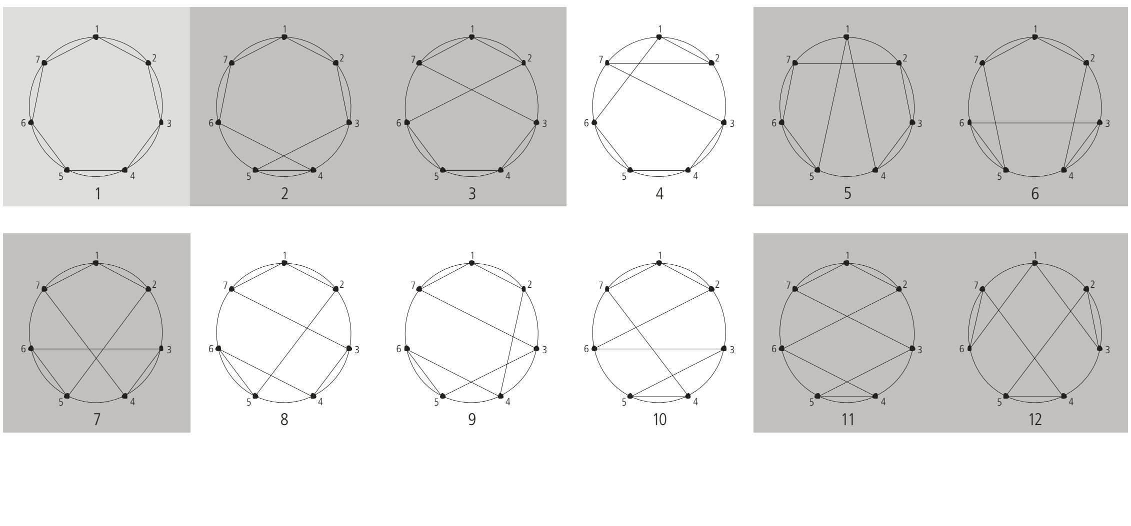
En el dibujo 1, el polígono está representado por los 7 lados simples (su longitud es una 1/7 parte de la circunferencia) del polígono regular. En los dibujos 2 y 3, los polígonos están representados por 5 de sus lados; en el dibujo 2, con cuatro lados consecutivos; y en el dibujo 3, con tres lados consecutivos. Representados con 4 lados, están los dibujos 4, 5, 6, 7 y 8. En este caso hay que distinguir, también, si el polígono tiene tres o dos lados consecutivos. Si tienen tres, sólo es posible un polígono: el 4; si tiene dos parejas de lados consecutivos, sólo es posible el polígono 5. Queda sólo el caso donde dos lados son consecutivos y los otros dos están separados; en este caso se pueden generar 3 polígonos diferentes: 6, 7, 8. No puede darse el caso de 4 lados simples separados.

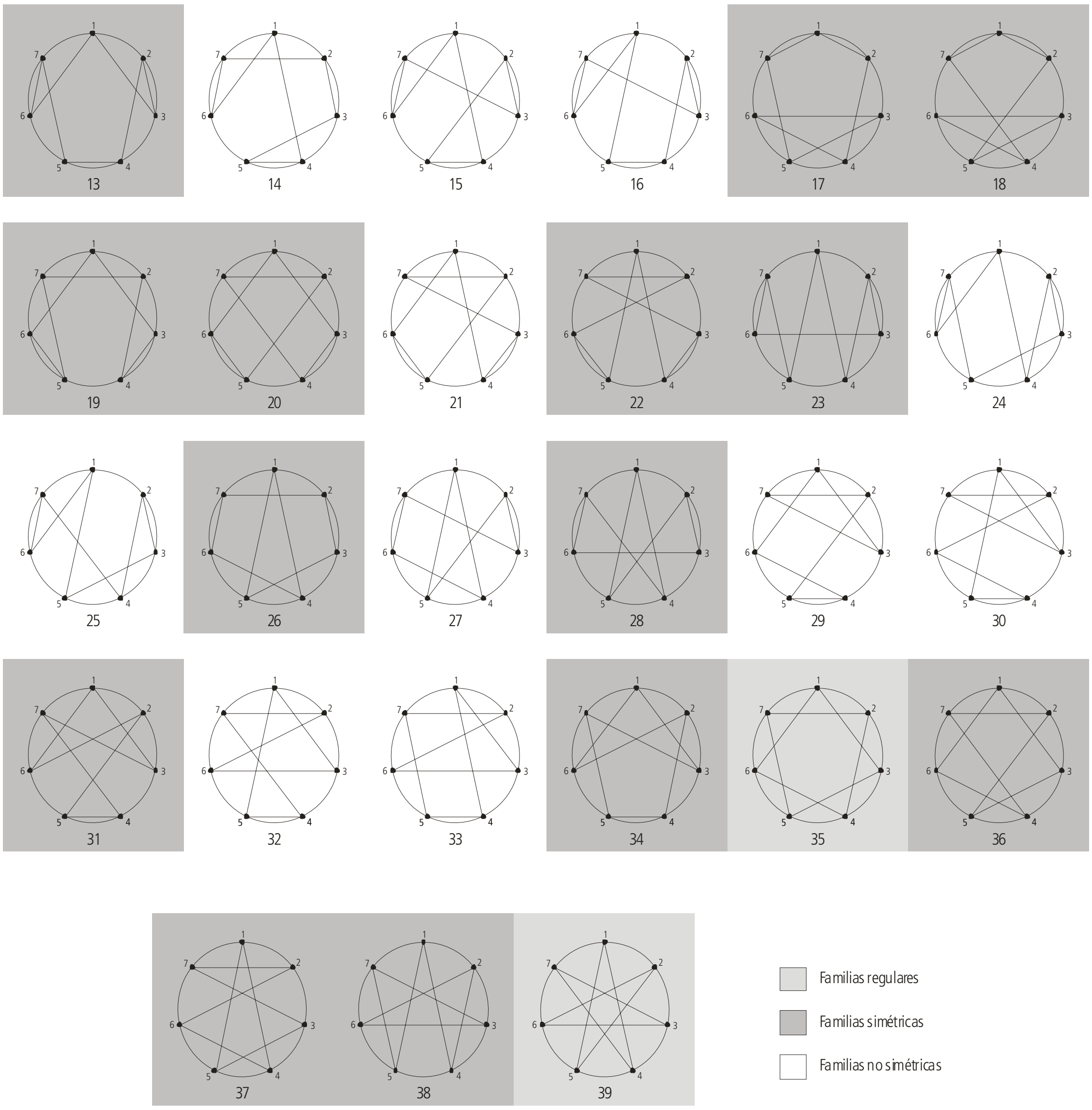
Si hay tres lados simples, éstos no pueden ser todos consecutivos. Si dos son consecutivos, hay dos formas de situar estos tres lados. En una de ellas, se crea un polígono (9), y en la otra, dos (10, 11). Si los tres lados simples están separados entre sí, se pueden generar 5 polígonos diferentes (12, 13, 14, 15, 16).

Si se utilizan dos lados simples consecutivos, se pueden obtener dos polígonos (17, 18) y si los dos lados no son consecutivos, se pueden generar, por compartir la misma posición los dos lados, dos tipos: el primero, con 4 polígonos (19, 20, 21, 22) y el segundo con 6 (23, 24 25, 26, 27 28). Si sólo hay un único lado simple, hay muchas tipologías según la disposición de los lados entre los que se encuentra el lado simple: 1 polígono (29), 1 polígono (30), 1 polígono (31), 1 polígono (32), 1 polígono (33) y 1 polígono (34).

Queda todavía el caso donde no existe ningún lado simple. Se trata ahora de situar el mayor número posible de lados dobles, es decir, que midan 2/7 de la circunferencia. Se obtiene, en primer lugar, un heptágono regular estrellado (35); después, con 5 lados dobles en los que 4 son consecutivos, hay un polígono (36); con 4 lados dobles consecutivos no hay nada; tampoco con 3 o 2 lados simples consecutivos; si sólo hay 2 lados dobles aislados, hay 2 polígonos que tienen tres o dos lados dobles aislados (37, 38).

Y, finalmente, si sólo hay dos lados triples, solamente existe un heptágono regular estrellado (39).





Resumiendo, todos estos casos agrupan las permutaciones circulares de 7 elementos en las siguientes familias: 3 familias regulares y cada una de ellas con 14 permutaciones (3 x 14 = 42); 21 familiar simétricas y cada una de ellas con 98 permutaciones (21 x 98 = 2058); 15 familiar asimétricas y cada una de ellas con 196 familias (15 x 196 = 2940). Si se suman dotas las permutaciones obtenidas, se llega a la siguiente conclusión: las permutaciones circulares de 7 elementos están representadas por 39 familias diferentes y por 5040 permutaciones distintas.

3	Familias regulares (14 permutaciones)	3	x	14	=	42
21	Familias simétricas (98 permutaciones)	21	x	98	=	2058
15	Familias asimétricas (196 permutaciones)	15	x	196	=	2940
39	Familias en total					5040

14.3.1.2.- Permutaciones ordinarias, naturales, lineales o geométricas

Calculan las distintas formas de colocar n objetos o elementos en línea recta o en una superficie geométrica plana: matriz cuadrada de orden n.

En esta ordenación hay un primer y un último elemento. Se representan con el símbolo:

$$\boxed{Pn}$$

El número total de permutaciones, Pn, de n elementos alineados, viene dado por la relación:

$$\boxed{Pn \quad = \quad Vn,n \quad = \quad n!}$$

Para n = 4, el número de permutaciones que se puede obtener viene dado por: $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Los resultados de los factoriales que se pueden obtener desde 0 a 20 elementos son:

		Número de permutaciones
0!	=	1
1!	=	1
2!	=	2
3!	=	6
4!	=	24
5!	=	120
6!	=	720
7!	=	5.040
8!	=	40.320
9!	=	362.880
10!	=	3.628.800
11!	=	39.916.800
12!	=	479.001.600
13!	=	6.227.020.800
14!	=	87.178.291.200
15!	=	1.307.674.368.000
16!	=	20.922.789.888.000
17!	=	355.687.428.096.000
18!	=	6.402.373.705.728.000
19!	=	121.645.100.408.832.000
20!	=	2.432.902.008.176.640.000

Para dos elementos (1,2), hay dos soluciones:

1	1	2
2	2	1

Para tres elementos (1, 2, 3), hay 6 soluciones:

1	1	2	3
2	1	3	2
3	2	1	3
4	2	3	1
5	3	1	2
6	3	2	1

Para cuatro elementos (1, 2, 3, 4) hay 24 soluciones posibles (4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24):

1	1	2	3	4
2	1	2	4	3
3	1	3	2	4
4	1	3	4	2
5	1	4	2	3
6	1	4	3	2
7	2	1	3	4
8	2	1	4	3
9	2	3	1	4
10	2	3	4	1
11	2	4	1	3
12	2	4	3	1
13	3	1	2	4
14	3	1	4	2
15	3	2	1	4
16	3	2	4	1
17	3	4	1	2
18	3	4	2	1
19	4	1	2	3
20	4	1	3	2
21	4	2	1	3
22	4	2	3	1

1	a	b	c	d
2	a	b	d	c
3	a	c	b	d
4	a	c	d	b
5	a	d	b	c
6	a	d	c	b
7	b	a	c	d
8	b	a	d	c
9	b	c	a	d
10	b	c	d	a
11	b	d	a	c
12	b	d	c	a
13	c	a	b	d
14	c	a	d	b
15	c	b	a	d
16	c	b	d	a
17	c	d	a	b
18	c	d	b	a
19	d	a	b	c
20	d	a	c	b
21	d	b	a	c
22	d	b	c	a

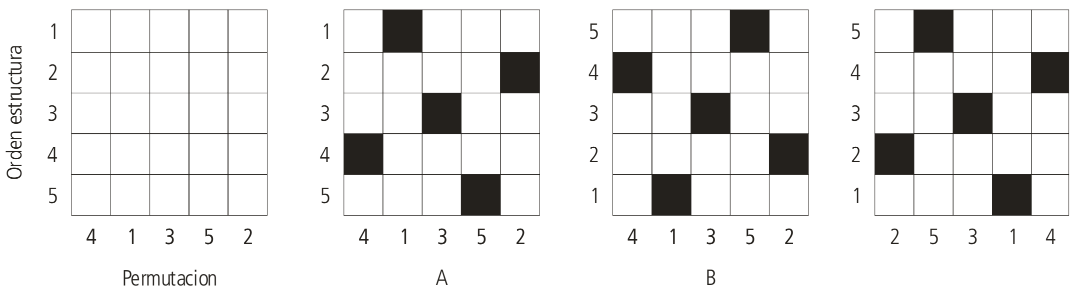
23	4	3	1	2	23	d	c	a	b
24	4	3	2	1	24	d	c	b	a

Para representar una permutación de n elementos en una matriz cuadrada de n x n elementos, se realizan las siguientes operaciones sobre la matriz:

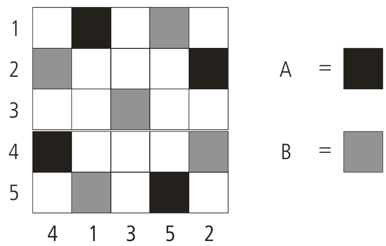
1. Se numeran las filas de la matriz, de arriba abajo, o de abajo a arriba, siguiendo el eje de las *y*, ya que las representaciones obtenidas, en ambos casos, son inversas una de la otra si se conserva la permutación numérica.

2. Se numeran las columnas de la matriz de izquierda a derecha siguiendo el eje de las *x*.

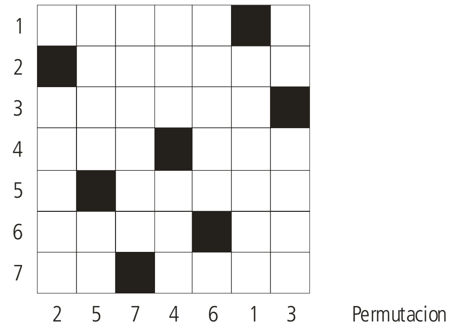
En el eje horizontal o de las *x*, se coloca la permutación que se quiere representar utilizando una columna por cada uno de los términos de la permutación. El punto de intersección entre la columna, la cantidad representada por la permutación de esa columna, y la interpretación de esa cantidad en la fila correspondiente, (punto de encuentro de dos números iguales (2-2, 5-5,…) indica el lugar a señalar o colorear en la matriz.



Si se superponen los dos resultados obtenidos, A y B, se obtiene la matriz y su inversa:

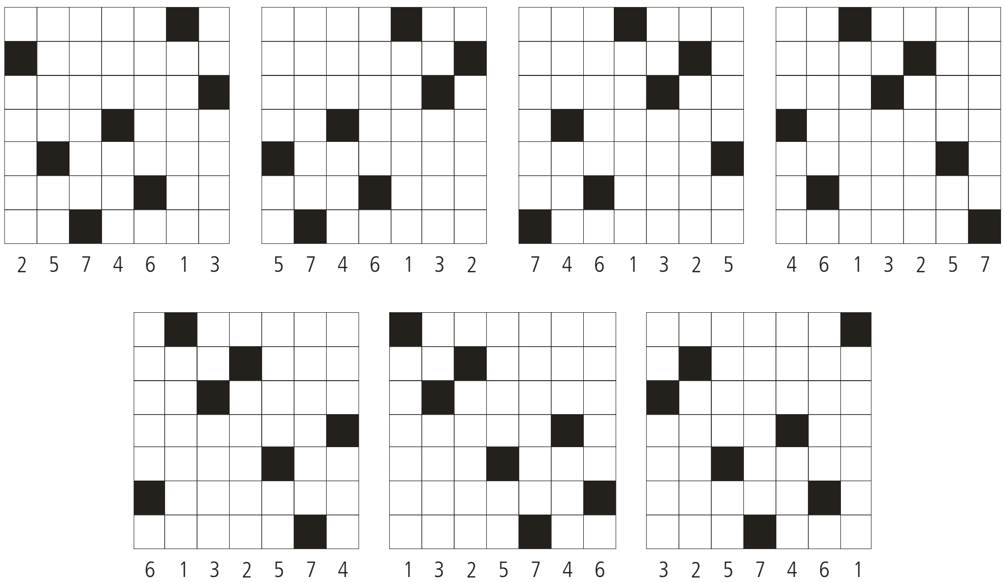


Para representar la permutación 2574613, que ha generado la familia de 196 permutaciones circulares, se construye una matriz de 7 x 7 = 49 cuadrados iguales, de forma que las columnas representen la permutación correspondiente y las filas indiquen el lugar donde se representa cada número de la permutación en la matriz. Se marca así, en negro, el 2º cuadrado de la primera columna de la izquierda; el 5º cuadrado de la columna siguiente, el 7º de la siguiente, y así sucesivamente, hasta obtener la siguiente representación:

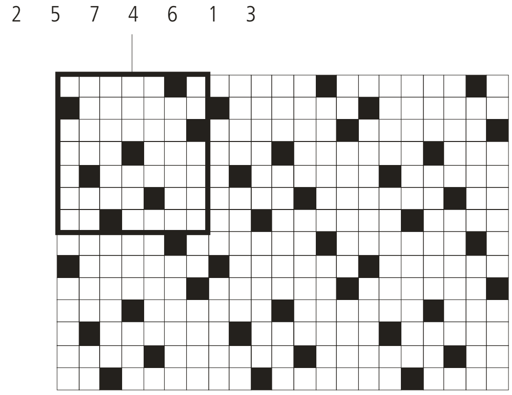


Se puede ver que hay sólo un cuadrado negro por cada columna y uno sólo por cada fila. Si se crean todas las permutaciones posibles con estos 7 elementos 1234567 se obtienen las 6 matrices siguientes:

2	5	7	4	6	1	3
5	7	4	6	1	3	2
7	4	6	1	3	2	5
4	6	1	3	2	5	7
6	1	3	2	5	7	4
1	3	2	5	7	4	6
3	2	5	7	4	6	1



Si se toma la representación matricial de la permutación 2574613, y se copia indefinidamente en un tablero a la derecha e izquierda de la anterior y arriba y abajo de la misma, se puede obtener un adoquinado que completa el espacio sin ningún hueco o agujero. Dentro de este tablero se pueden identificar las familias de permutaciones vistas anteriormente en las permutaciones cíclicas. Para identificarlas, se crea un marco que cubra sólo una matriz de 7 x 7 cuadrados y se desplaza a través del tablero:



El orden de lectura de las permutaciones que aparecen en este tablero, se puede realizar de izquierda a derecha y de arriba abajo, o de derecha a izquierda y de abajo arriba. En la esquina superior izquierda, se encuentra la permutación 2574613. Si se desplaza el marco seleccionado una, dos, tres,… casillas hacia la derecha, se leen sucesivamente las permutaciones 5746132, 7461325, 4613257, 6132574, 1325746, 3257461 vistas anteriormente y finalmente, se vuelve a repetir la permutación 2574613. Si se continúan los desplazamientos a derecha e izquierda de los anteriores, todas las permutaciones que aparecen son de esta familia.

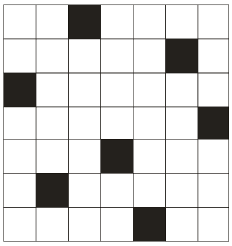
En este tablero, no obstante, se pueden obtener otras permutaciones:

1. Permutaciones por adición:

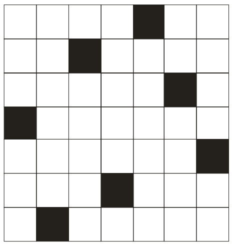
Si, desde el vértice superior izquierdo del tablero, el desplazamiento del marco se realiza una, dos, tres,… casillas hacia la abajo, aparecen 6 permutaciones nuevas, que se obtienen al sumar a cada elemento de la primera permutación anterior, la cantidad +1. El resto de las permutaciones se obtienen, por el mismo procedimiento, a partir de ésta. Se puede decir entonces que estas permutaciones se deducen de las anteriores por adición o suma:

3	6	1	5	7	2	4
4	7	2	6	1	3	5
5	1	3	7	2	4	6
6	2	4	1	3	5	7
7	3	5	2	4	6	1
1	4	6	3	5	7	2
2	5	7	4	6	1	3

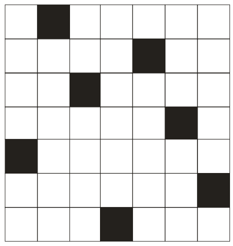
Todas estas permutaciones están representadas geométricamente en las siguientes matrices:



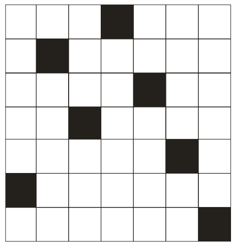
3 6 1 5 7 2 4



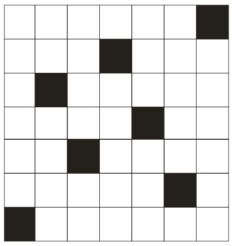
4 7 2 6 1 3 5



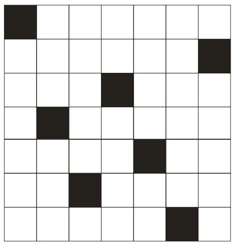
5 1 3 7 2 4 6



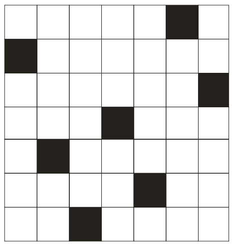
6 2 4 1 3 5 7



7 3 5 2 4 6 1



1 4 6 3 5 7 2



2 5 7 4 6 1 3

A partir de estas permutaciones se pueden obtener, por adición, las 49 que pertenecen a esta familia.

2. Permutaciones complementarias::

Si por el mismo procedimiento se lee el tablero de abajo a arriba, se obtienen 49 nuevas permutaciones, por ejemplo, la 6314275 es complementaria de la 2574613 porque se obtiene reemplazando cada una de las cifras de la última permutación por su complementario a 8.

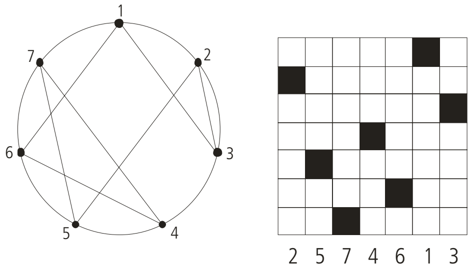
3. Permutaciones inversas:

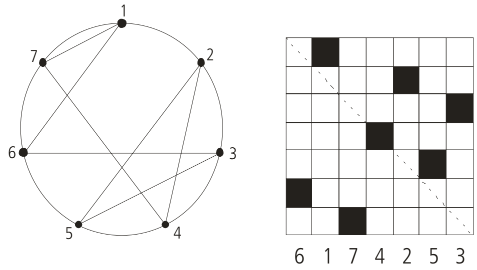
Si se leen las columnas del tablero de derecha a izquierda y no de izquierda a derecha, se obtienen 49 nuevas permutaciones, que son inversas de las primeras. Por ejemplo, la permutación 3164752 es inversa de la permutación 2574613.

4. Permutaciones complementarias de la inversa:

Si se combinan los dos modos de lectura anteriores, de abajo arriba y de derecha a izquierda, se obtienen las otras 49 permutaciones y así se completa la familia de 196 permutaciones de la familia asimétrica vistas anteriormente en las permutaciones cíclicas.

Para obtener las permutaciones de la familia simétrica se parte de dos permutaciones 2574613 y 6174253 conocidas que generaron, cada una de ellas, una familia asimétrica de 196 permutaciones cíclicas, y se representan en forma de polígono y de matriz:





Los dos polígonos obtenidos no se parecen: no son simétricos y no se pueden superponer uno al otro. El primero tiene tres parejas de cuerdas paralelas: 23 y 75, 13 y 74, 16 y 25 y una cuerda sin paralelismo con ninguna: 46. En el segundo polígono hay sólo dos parejas de cuerdas paralelas: 17 y 35, 16 y 25 y tres cuerdas aisladas sin ningún paralelismo entre ellas: 63, 74 y 24.

Las matrices, sin embargo, son simétricas entre sí con respecto a una de sus diagonales principales: la diagonal descendente de izquierda a derecha. Se dice que dos permutaciones son recíprocas cuando la representación gráfica sobre una matriz de una de ellas, 2574613, genera una matriz simétrica a la representación gráfica de la otra, 6174253.

La regla para encontrar la permutación recíproca de una dada es la siguiente: se lee la permutación elegida según el orden creciente de sus términos (1, 2, 3,…) y se van anotando las posiciones que ocupan esos términos dentro de la permutación dada. Por ejemplo, en la permutación 2574613, la cifra 1 está en la posición 6ª: se anota el número 6; la cifra 2 está en la 1ª posición: se anota un 1; la cifra 3 está en la posición 7ª: se anota un 7; y así sucesivamente. El resultado obtenido por este procedimiento es: 6174253.

Cuando la matriz utiliza otra de las diagonales principales como eje de simetría, la ascendente de izquierda a derecha, se dice que la permutación es autorecíproca.

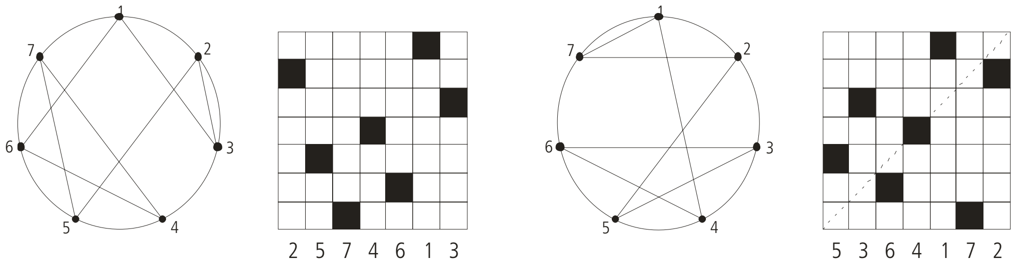
Dada una permutación cualquiera, por ejemplo, 2574613, para obtener su permutación autorecíproca, se utiliza la siguiente regla:

1. Calcular la permutación complementaria de la dada: encontrar el complemento a 8 de todas las cifras de la permutación: 6314275.

2. Calcular la permutación inversa de la obtenida: leer este resultado al revés: 5724136.

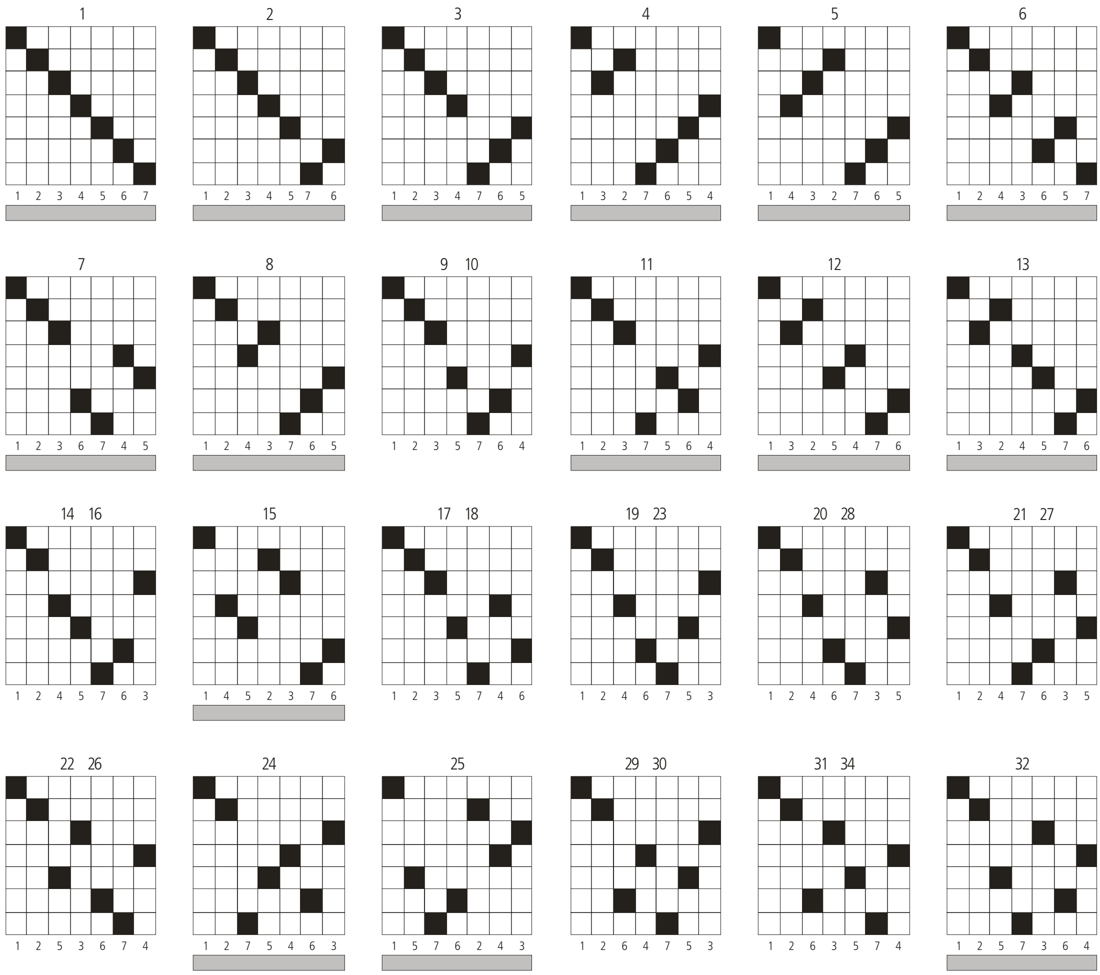
3. Calcular la permutación recíproca de la anterior (2): la cifra 1 está en la posición 5ª: se anota el número 5; la cifra 2 está en la 3ª posición: se anota un 3; la cifra 3 está en la posición 6ª: se anota un 6; la cifra 4ª está en la posición 4: se anota un 4; la cifra 5 está en la posición 1ª: se anota un 1; la cifra 6 está en la posición 7ª: se anota un 7; y la cifra 7 está en la posición 2ª: se anota un 2. La permutación recíproca buscada es 5364172.

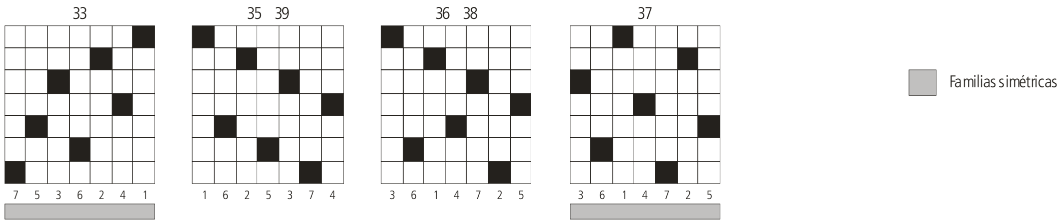
La permutación 5364172 es autorrecíproca de la 2574613.



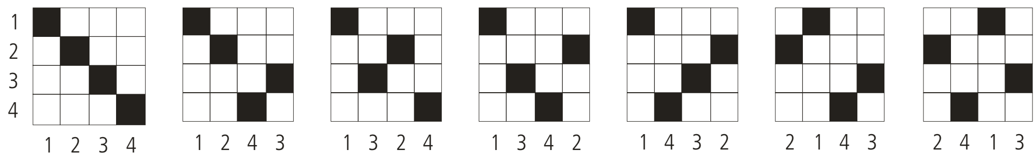
Las diversas familias y sus matrices

A continuación se representan las matrices que representan a las 39 familias de las permutaciones cíclicas que se han obtenido anteriormente. Los números corresponden a los utilizados en la representación de los polígonos. Se han señalado aquellas representaciones que corresponden a familias simétricas.

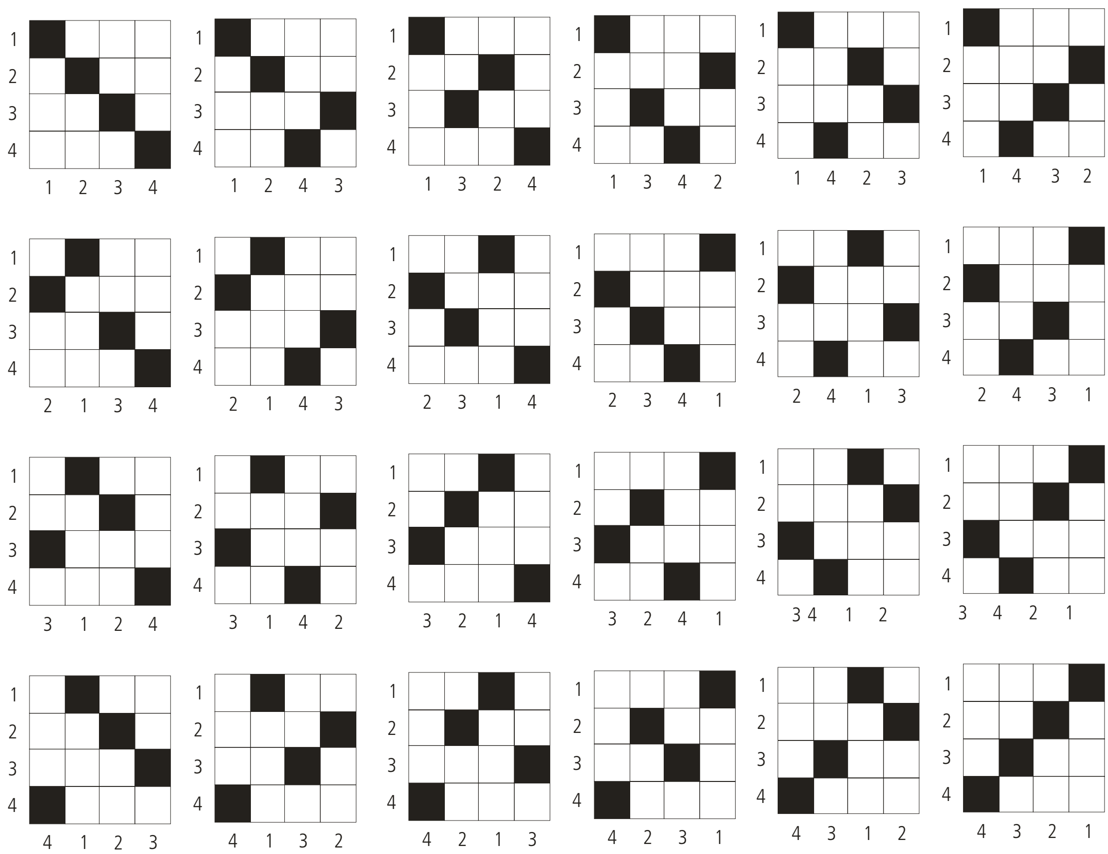




Si se construyen geométricamente las permutaciones de orden 4 (1, 2, 3, 4), se puede observar que el número de tipos diferentes de representación geométrica se queda reducido a 7, ya que las otras representaciones, 24, se pueden deducir por rotación o simetría de éstos:



Las 24 permutaciones son las siguientes:



14.3.2.- Permutaciones con repetición o de series redundantes

Permutaciones con repetición de n elementos, donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, y así sucesivamente, hasta el último que se repite k veces (a + b +… + k = n), son los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de manera que:

1. El primer elemento se repite a veces.
2. El segundo elemento se repite b veces.
3. …
4. El último elemento se repite k veces.
5. Un grupo se diferencia de otro, solamente en el orden de colocación de los elementos.

Las permutaciones con repetición de n elementos se representan con el siguiente símbolo y fórmula:

$$P_n^{a,b,\dots,k} = \frac{n!}{a!\,b!\,\dots\,k!}$$

Las series redundantes se diferencian de las series en las que los elementos son todos diferentes, por el hecho de que ciertos términos de la serie son repetitivos. Se pueden encontrar en la serie términos dobles, triples,… Algunos ejemplos de series redundantes serían: AAABB, 11122,…

Dados n términos diferentes A, B, C, D, E,… se trata de agrupar de todas las formas posibles los n términos de forma que algunos de ellos se puedan repetir y otros omitir. Por ejemplo, para 4 términos A, B, C, D, hay tres tipos de agrupamientos posibles: AAAB AABB AABC

En general los tipos de series redundantes según el número de términos de la serie es el siguiente:

n	Tipologías de series redundantes			
3	AAB			
4	AAAB	AABB	AABC	
5	AAAAB	AAABB	AABBC	AABCD
6	AAAAAB	AAAABB	AAABBB	
	AAAABC	AAABCD	AABCDE	
7	AAAAAAB	AAAAABB	AAAABBB	
	AAAAABC	AAAABCD	AAABCDE	AABCDEF
8	AAAAAAAB	AAAAAABB	AAAAABBB	AAAABBBB

Hasta ahora se ha visto que para enumerar las permutaciones de series cuyos términos son todos diferentes, pueden existir dos métodos, alinear los términos (Pn = n!) y situarlos en un círculo cerrado PCn = (n - 1)!.

Para las series redundantes el número de permutaciones que se pueden obtener depende del tipo de serie de la que se parta.

Para series con tres elementos del tipo AAB, hay tres permutaciones posibles:

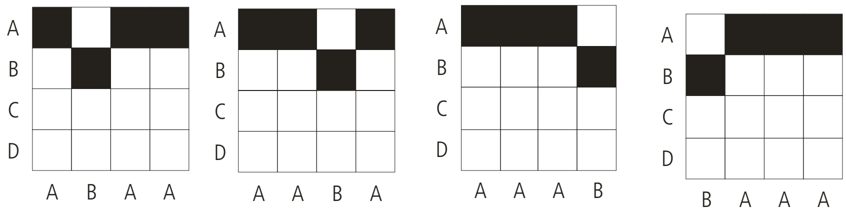
AAB ABA BAA

En las permutaciones de series redundantes de orden n = 4, hay que distinguir primero el tipo de serie redundante que se está considerando y después calcular las permutaciones posibles.

1. Serie tipo AAAB:

Hay cuatro permutaciones diferentes:

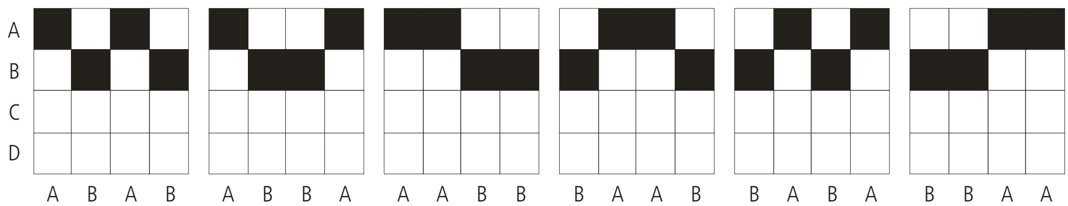
ABAA AABA AAAB BAAA



2. Serie tipo AABB:

Hay seis permutaciones diferentes:

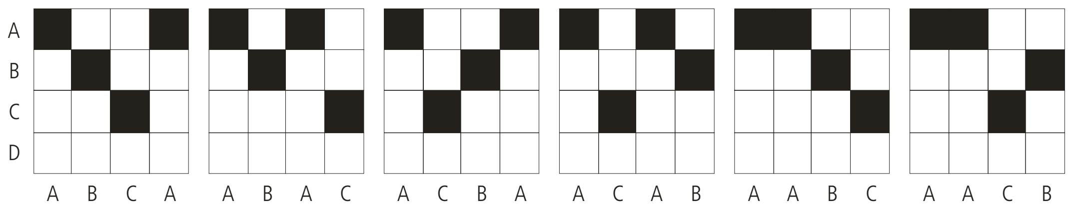
ABAB ABBA AABB BAAB BABA BBAA

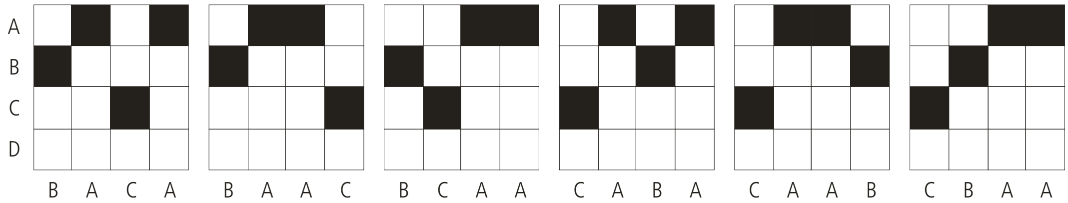


3. Serie tipo AABC:

Hay 12 permutaciones diferentes:

ABCA ABAC ACBA ACAB AABC AACB BACA BAAC BCAA CABA CAAB CBAA





Estas permutaciones se obtienen partiendo de las 24 permutaciones posibles en una serie de 4 términos diferentes y haciendo las sustituciones apropiadas y eliminando las permutaciones que se repiten.

14.3.3.- Permutaciones simultáneas o superpuestas

Dada una matriz 4 x 4 = 16 cuadrados, se rellena con números y letras:

A1	A2	A3	A4
B1	B2	B3	B4
C1	C2	C3	C4
D1	D2	D3	D4

El objetivo es repartir estos datos de modo que en cada línea, cada columna y cada diagonal principal, estén presentes todas las letras y todos los números, en un orden indiferente.

El método para buscar una de las soluciones posibles es el siguiente:

1. Realizar una permutación circular con las cuatro letras A, B, C, D, sobre la matriz 4 x 4.

A			
			A
		A	
	A		

	B		
B			
			B
		B	

		C	
	C		
C			
			C

			D
		D	
	D		
D			

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

2. Realizar otra permutación circular con los cuatro números 1, 2, 3, 4, sobre la matriz 4 x 4.

1			
			1
		1	
	1		

	2		
2			
			2
		2	

		3	
	3		
3			

			4
		4	
	4		
4			

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Superponer las dos matrices y así se obtiene una de las soluciones posibles:

A1	B2	C3	D4
B2	C3	D4	A1
C3	D4	A1	B2
D4	A1	B2	C3

Hay 24 permutaciones de orden n = 4. En total se pueden obtener 24 x 24 = 256 soluciones.

De hecho, se superponen dos cuadrados latinos diagonales: uno de letras, A, B, C, D, y otro de números, 1, 2, 3, 4.

14.4.- ANÁLISIS DE OBRAS

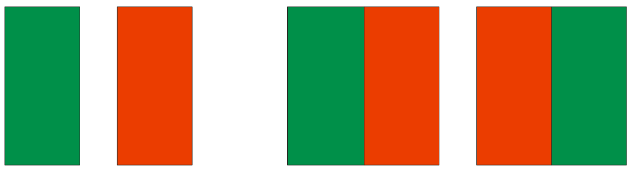
14.4.1.- KARL GERSTNER

1. Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956[1]

Dados dos módulos cromáticos, 1 y 2, de igual tamaño, buscar visualmente las permutaciones posibles entre estos 2 elementos:

$$\boxed{P_2 \quad = \quad 2! \quad = \quad 2}$$

1 2 2 1

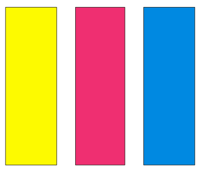


1 2 1 2 2 1

2. Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956[2]

Dados tres módulos cromáticos, 1, 2 y 3, de igual tamaño, buscar visualmente las permutaciones posibles entre estos 3 elementos:

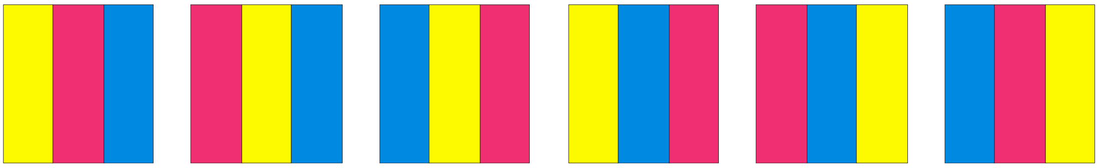
$$\boxed{P_3 \quad = \quad 3! \quad = \quad 6}$$



1 2 3

1 2 3 2 1 3 3 1 2 1 3 2 2 3 1 3 2 1

[1] Zyklische Permutationen: 22 ideensskizzen, 1956.
[2] Zyklische Permutationen: 22 ideensskizzen, 1956.



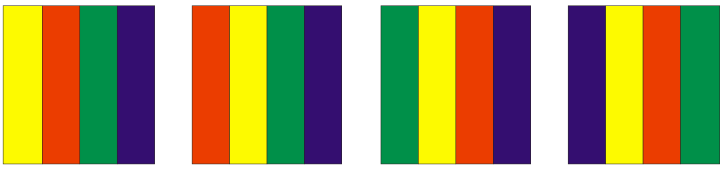
1 2 3   2 1 3   3 1 2   1 3 2   2 3 1   3 2 1

3. Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956[3]

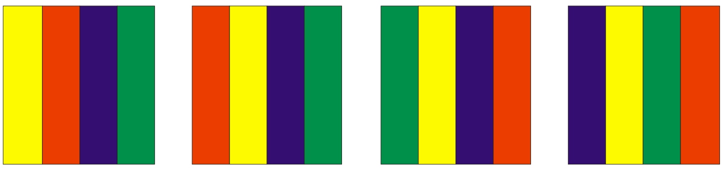
Dados cuatro módulos cromáticos de igual tamaño, 1, 2, 3 y 4, buscar visualmente las permutaciones posibles entre estos 4 elementos:

$$\boxed{P_4 = 4! = 24}$$

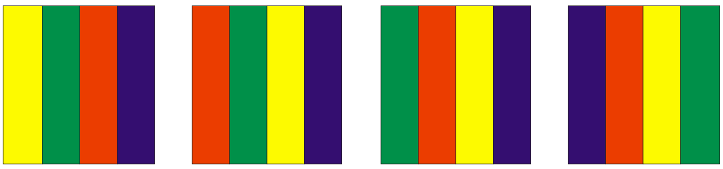
1	2	3	4		2	1	3	4		3	1	2	4		4	1	2	3
1	2	4	3		2	1	4	3		3	1	4	2		4	1	3	2
1	3	2	4		2	3	1	4		3	2	1	4		4	2	1	3
1	3	4	2		2	3	4	1		3	2	4	1		4	2	3	1
1	4	2	3		2	4	1	3		3	4	1	2		4	3	1	2
1	4	3	2		2	4	3	1		3	4	2	1		4	3	2	1



1 2 3 4   2 1 3 4   3 1 2 4   4 1 2 3

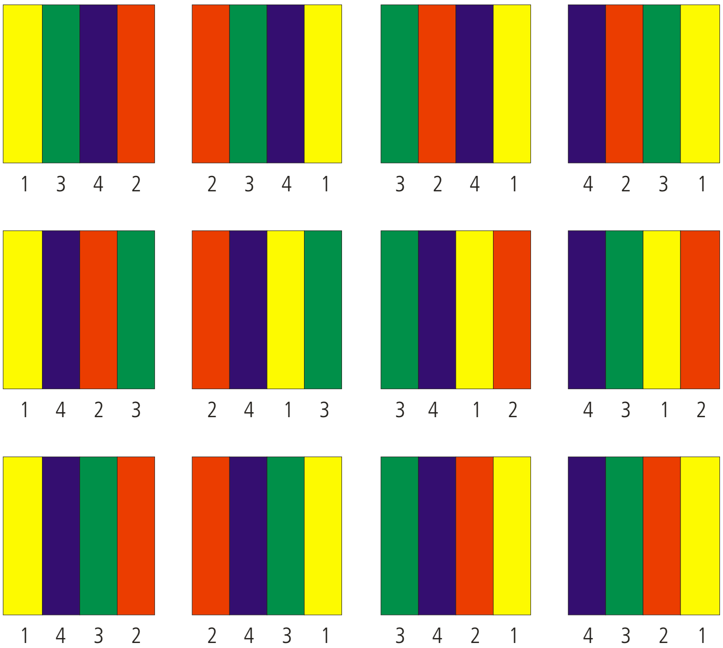


1 2 4 3   2 1 4 3   3 1 4 2   4 1 3 2



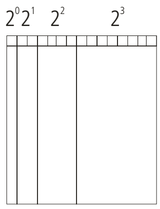
1 3 2 4   2 3 1 4   3 2 1 4   4 2 1 3

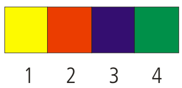
[3] Zyklische Permutationen: 22 ideensskizzen, 1956.



4. Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956[4]

Dado un cuadrado al que se le ha aplicado una subdivisión en cuatro partes de diferentes anchuras, determinadas por la secuencia de las potencias de dos: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, es decir, 1, 2, 4, 8 y cuatro módulos de diferentes colores, 1, 2, 3, 4, hallar las permutaciones de color que se pueden aplicar sobre la estructura dada:

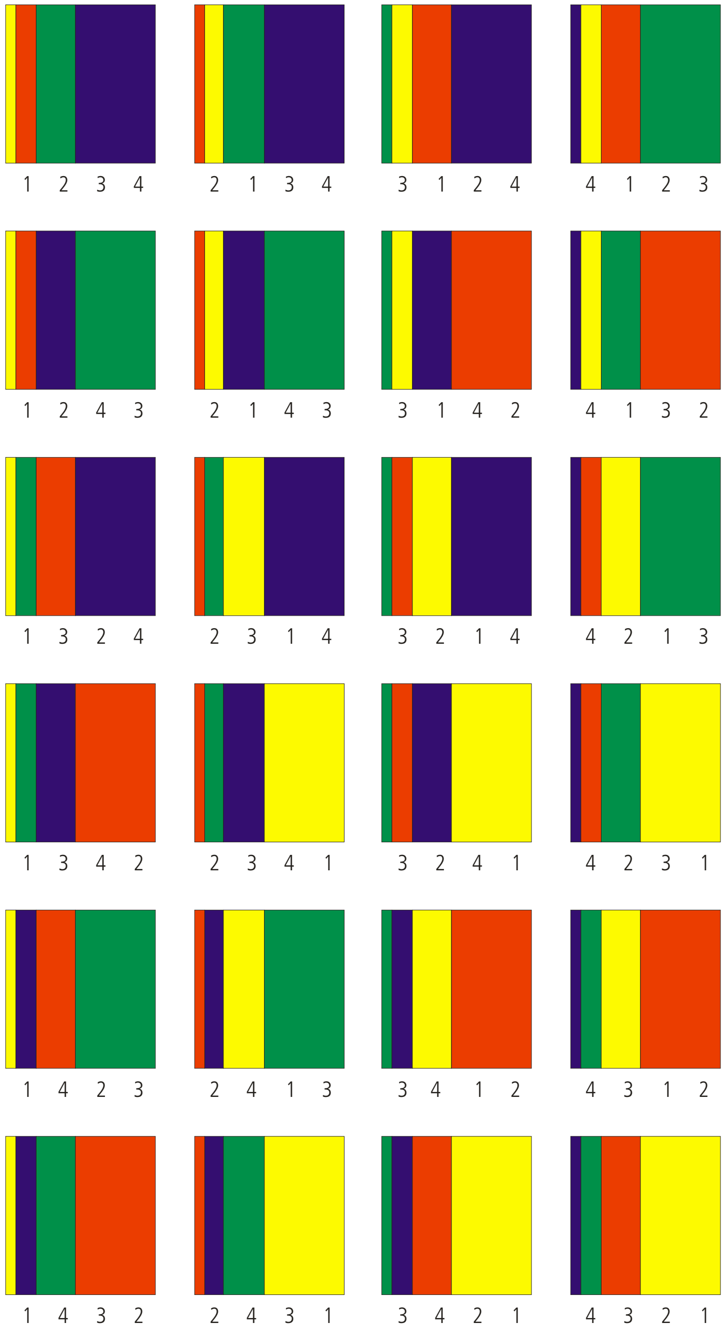




$$\boxed{P_4 = 4! = 24}$$

1	2	3	4	2	1	3	4	3	1	2	4	4	1	2	3
1	2	4	3	2	1	4	3	3	1	4	2	4	1	3	2
1	3	2	4	2	3	1	4	3	2	1	4	4	2	1	3
1	3	4	2	2	3	4	1	3	2	4	1	4	2	3	1
1	4	2	3	2	4	1	3	3	4	1	2	4	3	1	2
1	4	3	2	2	4	3	1	3	4	2	1	4	3	2	1

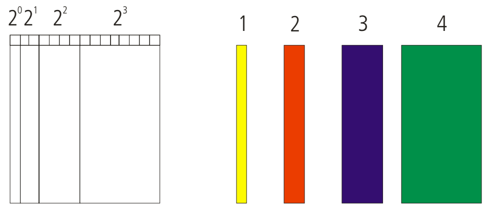
[4] Zyklische Permutationen: 22 ideensskizzen, 1956.



5. Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956[5]

Dado un cuadrado con la misma estructura definida en el caso anterior, pero teniendo en cuenta, en este caso, que cada uno de los elementos de la estructura tiene asociado un color, 1, 2, 3, 4, según el siguiente criterio:

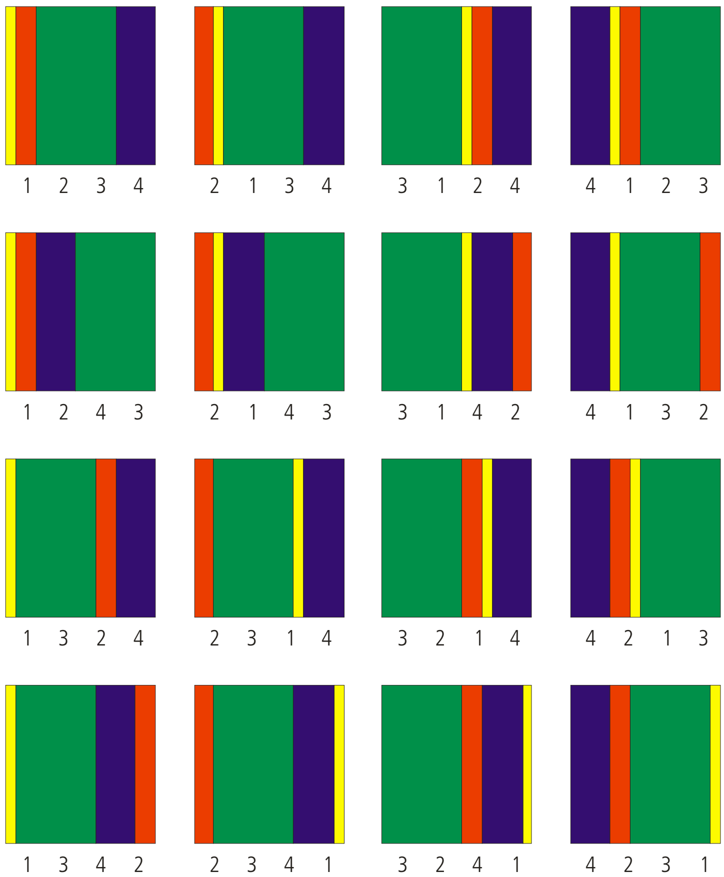
[5] Zyklische Permutationen: 22 ideensskizzen, 1956.

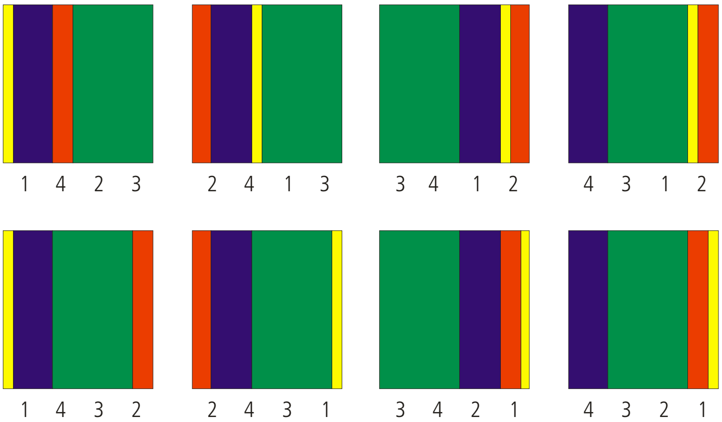


Realizar todas las permutaciones posibles entre los elementos del cuadrado:

$$\boxed{P_4 = 4! = 24}$$

1	2	3	4	2	1	3	4	3	1	2	4	4	1	2	3
1	2	4	3	2	1	4	3	3	1	4	2	4	1	3	2
1	3	2	4	2	3	1	4	3	2	1	4	4	2	1	3
1	3	4	2	2	3	4	1	3	2	4	1	4	2	3	1
1	4	2	3	2	4	1	3	3	4	1	2	4	3	1	2
1	4	3	2	2	4	3	1	3	4	2	1	4	3	2	1





Syncrhromies,[6]

La serie de obras Synchromies está formada por un conjunto de líneas verticales de colores en armonía sobre las que se aplica la mezcla óptica de los colores. En esta obra es muy importante la escala en la que ha sido realizada: el tamaño ha sido elegido con mucho criterio. Las bandas verticales son lo suficientemente anchas para que sus colores, cuando se ven de cerca, se mantengan separados uno del otro; pero, si se ven a una cierta distancia, se fundan en campos de color. Es decir, la percepción de los colores, por mezcla óptica, cambia según a qué distancia se sitúe el espectador con respecto al cuadro, aunque en sí mismos, éstos no cambien.

Desde el punto de vista cromático, cada Synchromy está basada en el siguiente principio: crear 3 grupos cromáticos de 4 colores cada uno, es decir, se trabaja con un total de 12 tonos diferentes: 3 x 4 = 12. Estos colores se distribuyen por el cuadro según las leyes de las permutaciones cíclicas y siempre teniendo en cuenta que los colores se tocan entre sí límite con límite.

Lo importante en estas obras es que los colores no sólo cambian de posición, sino que, dependiendo de su entorno inmediato, experimentan cambios. El mismo color parece diferente en posiciones distintas, dando la sensación unas veces de avanzar y otras retroceder. Los colores cálidos se hacen más cálidos cuando están cerca de tonos fríos; los colores luminosos se hacen más luminosos cuando están cerca de los oscuros; y los saturados se hacen más saturados cuando están cerca de los agrisados. Este fenómeno se conoce como ilusión óptica. El efecto no es una ilusión sino que es una sensación que percibe el ojo como si fuera real. Los colores en esta serie se conciben de tal manera que los cambios son parte del concepto.

6. Syncrhromy 26 a, Par rojo desarrollándose hacia el lado claro, 1998[7]

Dados tres obras pictóricas, A, B, C, pintadas en acrílico sobre aluminio, de 144 x 142,4 cm, se fragmenta cada una de ellas en 89 bandas verticales del mismo tamaño. Para realizar la obra final, D, se crea una secuencia de tramos verticales en cada uno de los cuadros A, B, C, según el siguiente orden repetitivo:

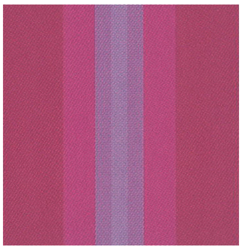
[6] Syncrhromies.

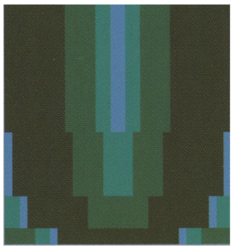
[7] Syncrhromy 26 a, Red Pair Developing towards the Light Side, 1998.

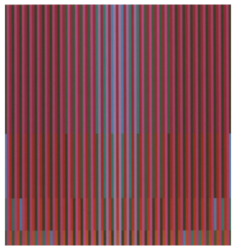
C B A C B A C B A C B A …

La ubicación de los tramos en la obra final, conserva la posición que cada uno de los tramos utilizados tiene en las obras: A, B, C.


A


B


C

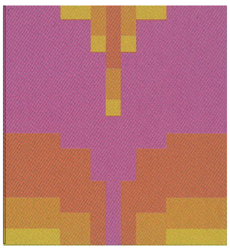

D

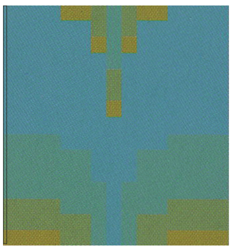
7. Syncrhromy 82, 2002

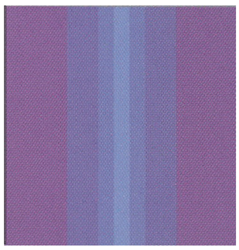
Dados tres obras pictóricas, A, B, C, pintadas en acrílico sobre aluminio, de 90 x 90 cm, se fragmenta cada una de ellas en 89 bandas verticales del mismo tamaño. Para realizar la obra final, D, se crea una secuencia de tramos verticales de cada uno de los cuadros A, B, C, según el siguiente orden repetitivo:

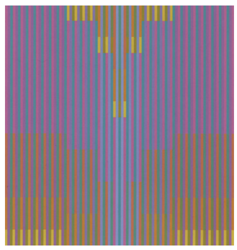
A C B A C B A C B A C B A …

La ubicación de los tramos en la obra final, conserva la posición que cada uno de los tramos utilizados tiene en las obras: A, B, C.


A


B


C

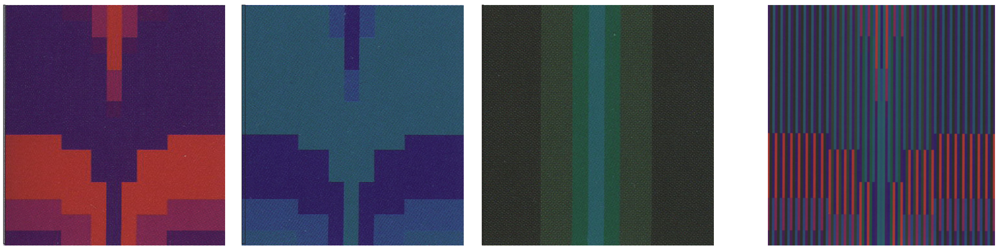

D

8. Syncrhromy 76, 2000

Dados tres obras pictóricas, A, B, C, pintadas en acrílico sobre aluminio, de 144 x 142,4 cm, se fragmenta cada una de ellas en 90 bandas verticales del mismo tamaño. Para realizar la obra final, D, se crea una secuencia de tramos verticales de cada uno de los cuadros A, B, C, según el siguiente orden repetitivo:

A C B A C B A C B A C B A …

La ubicación de los tramos en la obra final, conserva la posición que cada uno de los tramos utilizados tiene en las obras: A, B, C.

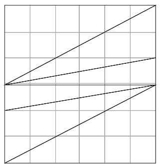


A B C D

14.4.2.- MAX BILL

1. Transcoloración en cinco cuadrados, 1974[8]

Esta obra está formada por 5 cuadrados iguales. Cada uno de los cuadrados se construye según el siguiente principio: se crea una matriz de 6 x 6 = 36 cuadrados y sobre ella, se trazan las siguientes líneas: una línea horizontal que va de punto medio a punto medio de los lados verticales del cuadrado; sobre cada una de las mitades obtenidas, se trazan sus diagonales ascendentes, del vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho; finalmente, se consideran dos rectángulos horizontales de proporciones 1/6, uno situado por encima de la mediana del cuadrado, y el otro por debajo, de forma que los dos estén unidos lado con lado, y se trazan sus diagonales ascendentes. Según este procedimiento, el cuadrado queda dividido en 6 partes, simétricas e invertidas tres a tres, dispuestas de manera que según se aproximan a la mediana van disminuyendo sus tamaños.

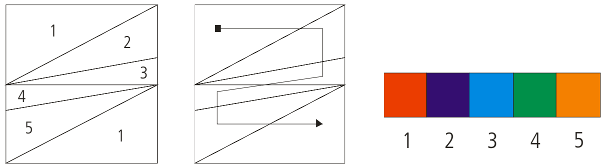


Sobre la estructura descrita anteriormente, se aplica la siguiente estructura cromática: se eligen 5 colores muy saturados: 1, 2, 3, 4, 5, y se realizan las permutaciones de estos 5 elementos sobre una matriz.

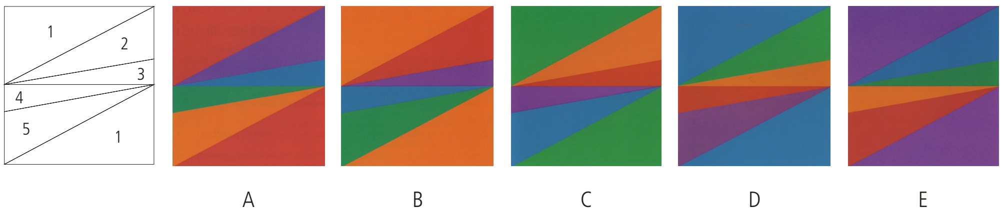
A	1	2	3	4	5	1
B	5	1	2	3	4	5
C	4	5	1	2	3	4
D	3	4	5	1	2	3
E	2	3	4	5	1	2

Para aplicar los resultados de estas permutaciones sobre la obra, se numeran los 6 triángulos que han resultado de la fragmentación del cuadrado por el procedimiento descrito anteriormente, y se aplican los colores correspondientes sobre cada uno de ellos según el siguiente esquema:

[8] Transcoloration in fünf quadraten, 1974.

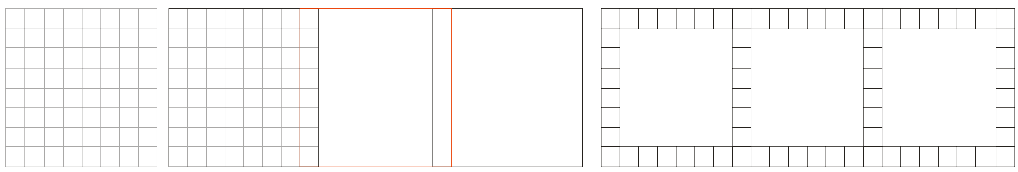


El resultado de la obra después de aplicar las permutaciones sobre los 5 cuadrados de la serie, es el siguiente:



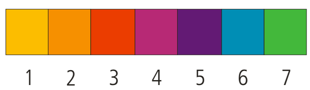
2. 7 desplazamientos dentro del mismo sistema, 1979[9]

Esta obra está compuesta de una serie de 7 piezas rectangulares iguales. Cada uno de estos rectángulos está formado por 3 cuadrados superpuestos. Y, cada uno de los cuadrados es una matriz de 8 x 8 = 64 cuadrados. La superposición que se da entre los cuadrados es de 1/8 parte del cuadrado.



De estas matrices cuadradas, para realizar la obra, sólo se van a tener en cuenta los cuadrados que recorren la periferia de cada una de ellas.

Los protagonistas de la obra son una serie de 7 colores diferentes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ordenados según el orden del espectro de los colores y elegidos de tal forma que cubren todo su rango:



Con estos 7 colores se realizan, en cada uno de los rectángulos, varias permutaciones de acuerdo a las siguientes reglas:

1. En cada rectángulo se realizan 12 permutaciones cromáticas: 4 por cada uno de los cuadrados que lo forman, de forma que, 4 x 3 = 12.

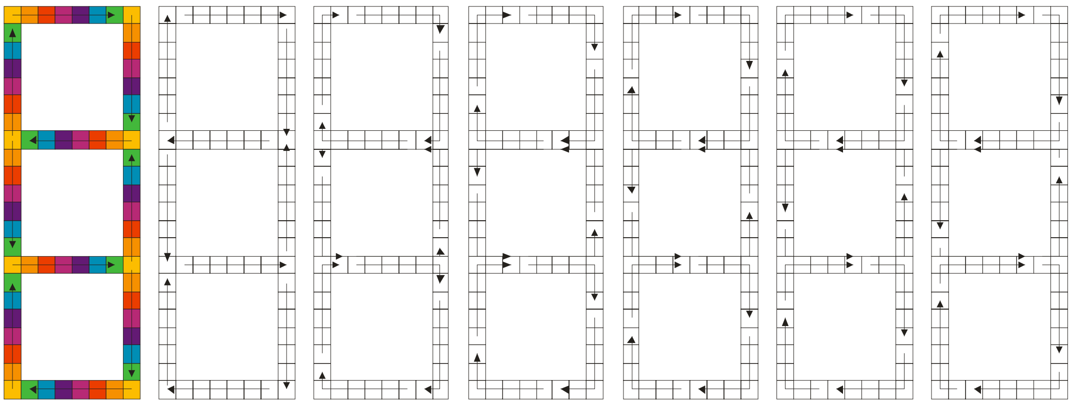
[9] 7 verschiebungen im gleichen system, 1979.

2. Las permutaciones de cada uno de los cuadrados se desarrollan de forma circular. Las que se desarrollan en los cuadrados superior e inferior, se realizan en el sentido de las agujas del reloj. Las permutaciones que se realizan en el cuadrado central, se realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj. La secuencia, de cada una de ellas, es la siguiente:

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

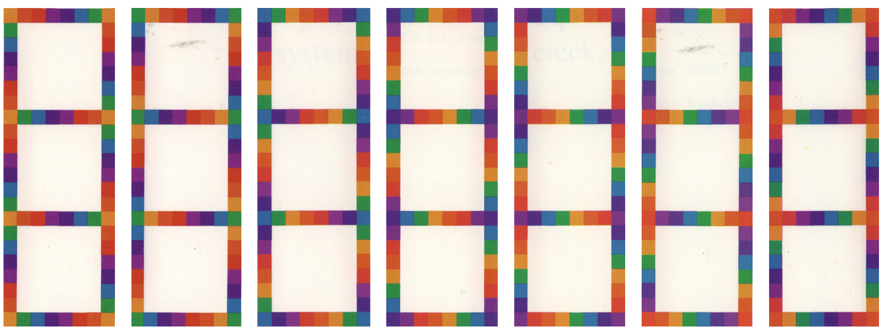
3. La serie cubre una vuelta entera de las permutaciones, de forma que, según este orden, el siguiente grupo de permutaciones coincidiría, otra vez, con las permutaciones del rectángulo primero: A.

La secuencia y orden de estas permutaciones, se representa gráficamente, en la siguiente imagen:



A B C D E F G

El resultado de la aplicación de todas las permutaciones sobre el conjunto de los rectángulos que forman la obra, se refleja en la siguiente imagen:



A B C D E F G

14.4.3.- TORTEN RIDELL

1. Permutaciones de líneas, 1979[10]

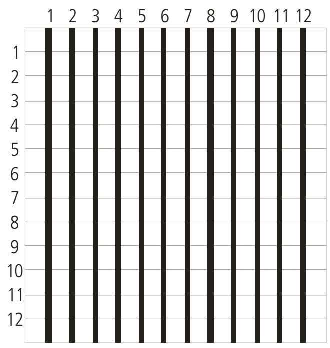
Las imágenes se obtienen a partir de un programa informático. La serie se compone de 13 imágenes relacionadas por una permutación sistemática de 12 líneas verticales a 12 líneas horizontales.

La secuencia de la permutación completa, es la siguiente:

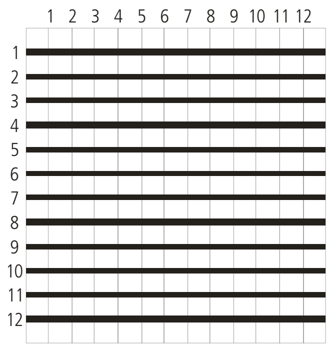
Verticales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Horizontales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

La serie comienza con una imagen de todas las líneas verticales y termina con una imagen de todas las líneas horizontales:

12 - 0



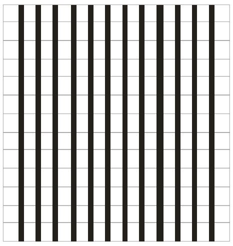
12 - 12



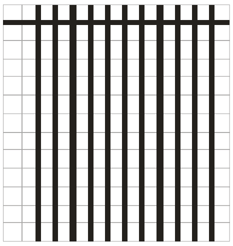
[10] Permutations de lignes, 1979.

La representación gráfica de toda la permutación de las líneas se representa a continuación:

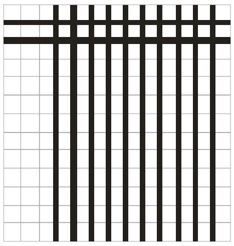
12 - 0



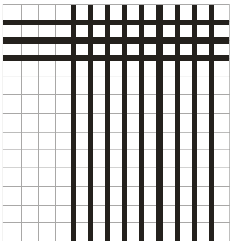
12 - 1



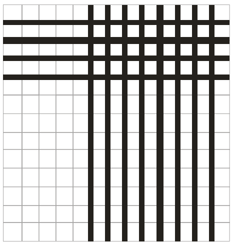
12 - 2



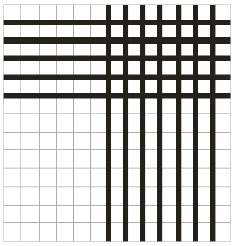
12 - 3



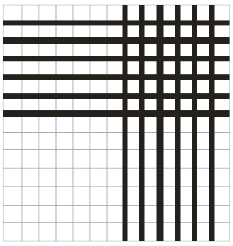
12 - 4



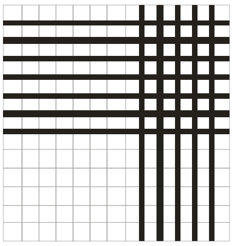
12 - 5



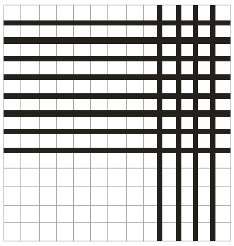
12 - 6



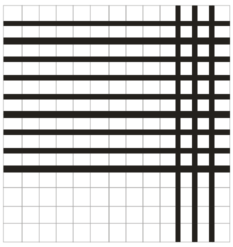
12 - 7



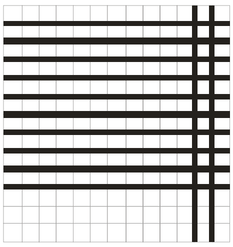
12 - 8



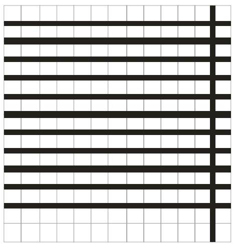
12 - 9



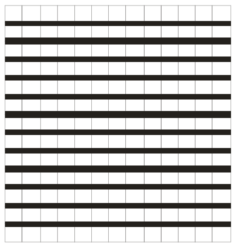
12 - 10



12 - 11



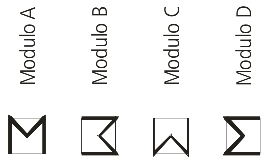
12 - 12



14.4.4.- VERA MOLNAR

1. M, como Malévitch, 1970[11]

La obra está formada por una matriz cuadrada de 28 x 28 = 784 cuadrados. Sobre los cuadrados de esta matriz se distribuyen, secuencialmente, repeticiones de permutaciones de cuatro elementos. Visualmente, estos cuatro elementos están representados por cuatro módulos cuadrados con la letra M en su interior: A, B, C, D. La diferencia que existe entre los módulos depende de la orientación que cada uno de ellos tiene con respecto a la letra M.



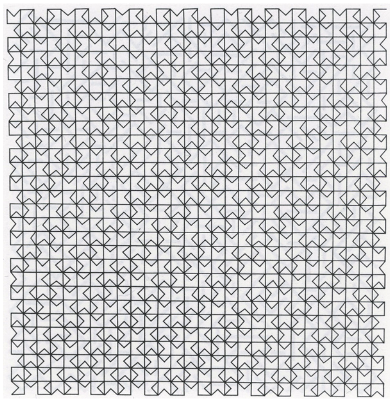
La distribución de las permutaciones dentro de la matriz está representada en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
2	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
3	C	D	A	B	C	D	A	B	C		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
4	D	A	B	C	D	A	B	C		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C
5	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
6	B	C	D	A	B	C		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
7	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
8	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C
9	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
10	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
11	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
12	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C
13	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
14	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
15	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
16	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C
17	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
18	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
19	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
20	D		B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C

[11] M, comme Malévitch, 1970.

21	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
22	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
23	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	D
24	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C
25	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
26	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A
27	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
28	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C

La representación final de la obra es la siguiente:



15.- COMBINACIONES

La combinatoria resuelve problemas que aparecen al estudiar y cuantificar las diferentes agrupaciones que se pueden formar con los elementos de un conjunto.

15.1.- CONCEPTOS

Dado un conjunto A = {a, b, c,…} de m elementos cualesquiera, con estos m elementos de A se pueden formar agrupaciones de n elementos de forma que m >= n, de acuerdo con ciertas normas:

1. Si se agrupan estos elementos de uno en uno, se obtienen agrupaciones monarias o unitarias; si de dos en dos, binarias; si de tres en tres, ternarias; si de cuatro en cuatro, cuaternarias,… En general, el agrupar los m elementos de A, de n en n, donde m >= n, se dice que se forman agrupaciones enearias.

2. Se llama base al número de elementos del conjunto A. La base está constituida por los elementos de que se dispone para formar las agrupaciones.

3. Se llama orden al número de elementos que intervienen en cada agrupación.

La combinatoria estudia:

1. Normas que se siguen para formar estas agrupaciones.
2. Desarrollo de todas las agrupaciones posibles, de acuerdo con las normas establecidas.
3. Número de agrupaciones que se pueden formar de cada clase.

15.2.- COMBINACIONES SIMPLES O SIN REPETICIÓN

Combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n, donde n <= m, son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos de A, de forma que:

1. En cada grupo entren n elementos distintos.
2. Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento pero no el orden de colocación.

El símbolo para representar las combinaciones es el siguiente:

$$\boxed{C_{(m,n)} \quad \text{o} \quad C_m^n}$$

El número de combinaciones posibles viene dado por la fórmula:

$$C_{(m,n)} = C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}$$

De todas las combinaciones posibles se van a considerar aquí sólo aquellas que se pueden representar geométricamente en un cuadrado, es decir, en una matriz cuadrada de m^2 casillas. Se ha elegido por razones de extensión centrarse en las que por su número de soluciones son, en la medida de lo posible, abarcables: m = 4, m = 9 y m = 16, que se aplican a matrices cuadradas de 2 x 2 = 4, 3 X 3 = 9 y 4 x 4 = 16 casillas.

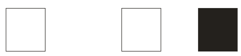
Se puede realizar una tabla general de combinaciones de m términos tomados de n en n, para diferentes valores de m y n:

n	m = 4	m = 9	m = 16	m = 25	m = 36	m = 49
0	1	1	1	1	1	1
1	4	9	16	25	36	49
2	6	36	120	300	630	1176
3	4	84	560	2300	7140	8424
4	1	126	1820	12650	58905	211876
5		126	4368	53130	366992	1906884
6		84	8008	177100	1947792	
7		36	11440	480700	8347680	
8		9	12870	1081575	30260340	
		1	11440	2042975		
Total	16	512	65536	33554432	$6,8 \times 10^{10}$	$5,6\text{x}10^{14}$

Dada una matriz cuadrada de orden m, se propone señalar las casillas de la matriz de todas las formas posibles: cero marcas, una, dos,…, n^2 casillas marcadas.

1. Combinaciones de 1 elemento: 1

Para m = 1 hay dos soluciones:



m = 1

2. Combinaciones de 4 elementos: 1234

El número de combinaciones posibles de 4 elementos tomados de n en n viene dado por la fórmula siguiente:

n	0	1	2	3	4	Total
Nº total de combinaciones	1	4	6	4	1	16
Nº de combinaciones fundamentales diferentes	1	1	2	1	1	6

Las combinaciones se pueden representar geométricamente, en una matriz cuadrada de 2^2 casillas, en la que cada una de ellas está numerada de la siguiente forma: en columnas sucesivas de arriba abajo y de izquierda a derecha de forma continua:

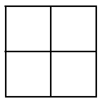
1	3
2	4

La forma de visualizar cada una de las combinaciones es marcando aquellas casillas de la matriz numerada cuyos índices corresponden a los números de la combinación correspondiente.

El número de combinaciones sin repetición de 4 elementos (1, 2, 3, 4) m = 4 tomados de 0 en 0, n = 0, es igual a 1 y esa combinación está representada por el conjunto vacío.

$$C_{(4,0)} = C_4^0 = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{4!}{1 \times 4!} = 1$$

Su representación está representada por una matriz en la que no hay ninguna casilla marcada:

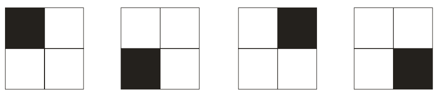


El número de combinaciones sin repetición de 4 elementos (1, 2, 3, 4) m = 4 tomados de 1 en 1, n = 1, es igual a 4 y esas combinaciones son:

$$C_{(4,1)} = C_4^1 = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!} = 4$$

1 2 3 4

Su representación gráfica está determinada por la siguiente serie:



1 2 3 4

El número de combinaciones sin repetición de 4 elementos (1, 2, 3, 4) m = 4, tomados de dos en dos, n = 2, es igual a 6 y esas combinaciones son:

$$C_{(4,2)} = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 2!} = 6$$

12 13 14 23 24 34

La combinación se representa geométricamente en la siguiente matriz cuadrada de 2^2 casillas:

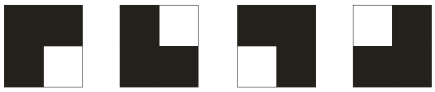
12 13 14 23 24 34

El número de combinaciones sin repetición de 4 elementos (1, 2, 3, 4) m = 4, tomados de 3 en 3, n = 3, es igual a 4 y esas combinaciones son:

$$C_{(4,3)} = C_4^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!} = 4$$

123 124 134 234

La representación gráfica de la combinación es:



123 124 134 234

El número de combinaciones sin repetición de esos 4 elementos (1, 2, 3, 4) m = 4 tomados de 4 en 4, n = 4, es igual a 1 y esa combinación es:

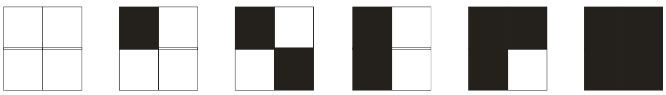
$$C_{(4,4)} = C_4^4 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 1$$

1234

Su representación gráfica está representada por una matriz con todas las casillas marcadas:

1234

En total hay 16 soluciones pero solo hay 6 representaciones fundamentales diferentes ya que el resto hasta 16 son simetrías y rotaciones de éstas.



3. Combinaciones de 9 elementos: 123456789

El número de combinaciones posibles de 9 términos, 1 2 3 4 5 6 7 8 9, tomados de n en n, se puede sintetizar en la siguiente tabla:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Nº total de combinaciones	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512
Nº de combinaciones fundamentales diferentes	1	3	8	16	24	24	16	8	3	1	104

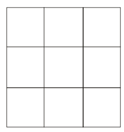
Las combinaciones se pueden representar geométricamente, en una matriz cuadrada de 3^2 casillas, en la que cada una de ellas está numerada de la siguiente forma: en columnas sucesivas de arriba abajo y de izquierda a derecha de forma continua:

1	4	7
2	5	8
3	6	9

El número de combinaciones sin repetición de esos 9 elementos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) m = 9, tomados de 0 en 0, n = 0, es igual a 1 y esa combinación es el conjunto vacío:

$$C_{(9,0)} = C_9^0 = \frac{9!}{0!\,(9-0)!} = \frac{9!}{9!} = 1$$

Su representación gráfica está determinada por una matriz de 3 x 3 = 9 casillas sin marcar:

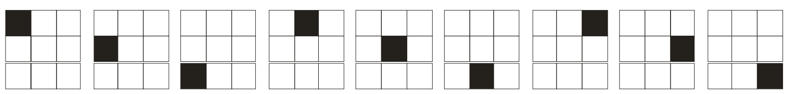


El número de combinaciones sin repetición de esos 9 elementos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) m = 9, tomados de 1 en 1, n = 1, es igual a 9 y esa combinación es:

$$C_{(9,1)} = C_9^1 = \frac{9!}{1!\,(9-1)!} = \frac{9 \times 8!}{8!} = 9$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

La representación gráfica de estas 9 combinaciones se recoge en la siguiente ilustración:



1 2 3 4 5 6 7 8 9

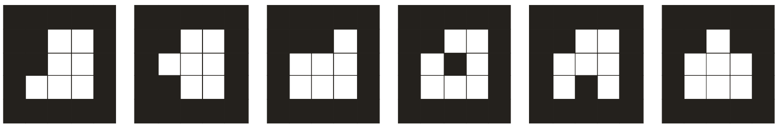
Dada una serie de 9 elementos (123456789) m = 9, para descomponerla en grupos de 2 (n = 2), el número de combinaciones simples es igual a $C_9^2 = 36$:

$$C_{(9,2)} = C_9^2 = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2! \times 7!} = 36$$

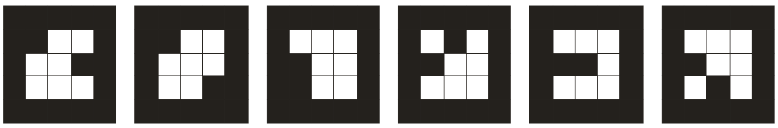
12	13	14	15	16	17	18	19
	23	24	25	26	27	28	29
		34	35	36	37	38	39
			45	46	47	48	49
				56	57	58	59
					67	68	69
						78	79
							89

Para escribir todas las combinaciones numéricas de m términos tomadas de n en n sin olvidarse de ninguna, se hacen grupos por cada uno de los términos de la serie haciendo que todos los elementos de un grupo comiencen por el mismo término y se hacen rodear del resto de los elementos de la serie.

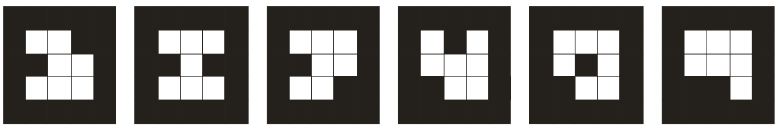
En una matriz cuadrada de orden 3, las combinaciones geométricas de 9 elementos tomados de 2 en 2 son las siguientes:



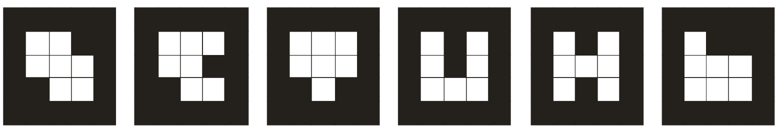
12 13 14 15 16 17



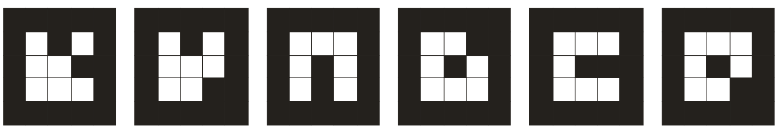
18 19 23 24 25 26



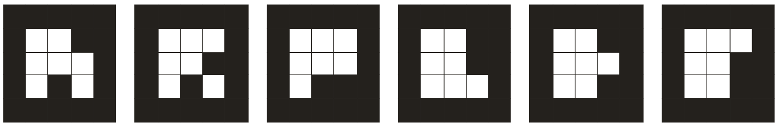
27 28 29 34 35 36



37 38 39 45 46 47

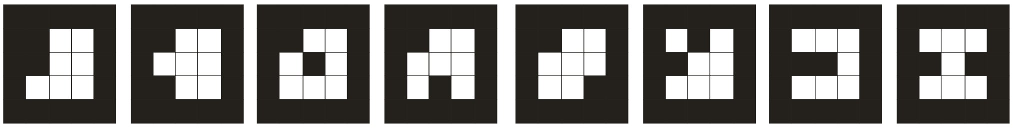


48 49 56 57 58 59



67 68 69 78 79 89

De estas 36 combinaciones, solo hay 8 combinaciones fundamentales diferentes, ya que las otras se deducen de las representadas por rotación o simetría:

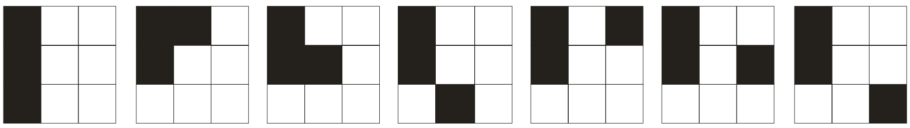


La combinación de los 9 elementos tomados de 3 en 3, $C_9^3 = 84$. Las combinaciones posibles, son:

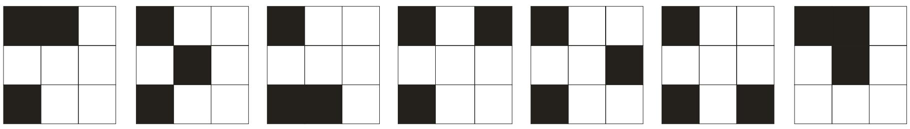
$$C_{(9,3)} = C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

123	124	125	126	127	128	129
134	135	136	137	138	139	145
146	147	148	149	156	157	158
159	167	168	169	178	179	189
234	235	236	237	238	239	245
246	247	248	249	256	257	258
259	267	268	269	278	279	289
345	346	347	348	349	356	357
358	359	367	368	369	378	379
389	456	457	458	459	467	468
469	478	479	489	567	568	569
578	579	589	678	679	689	789

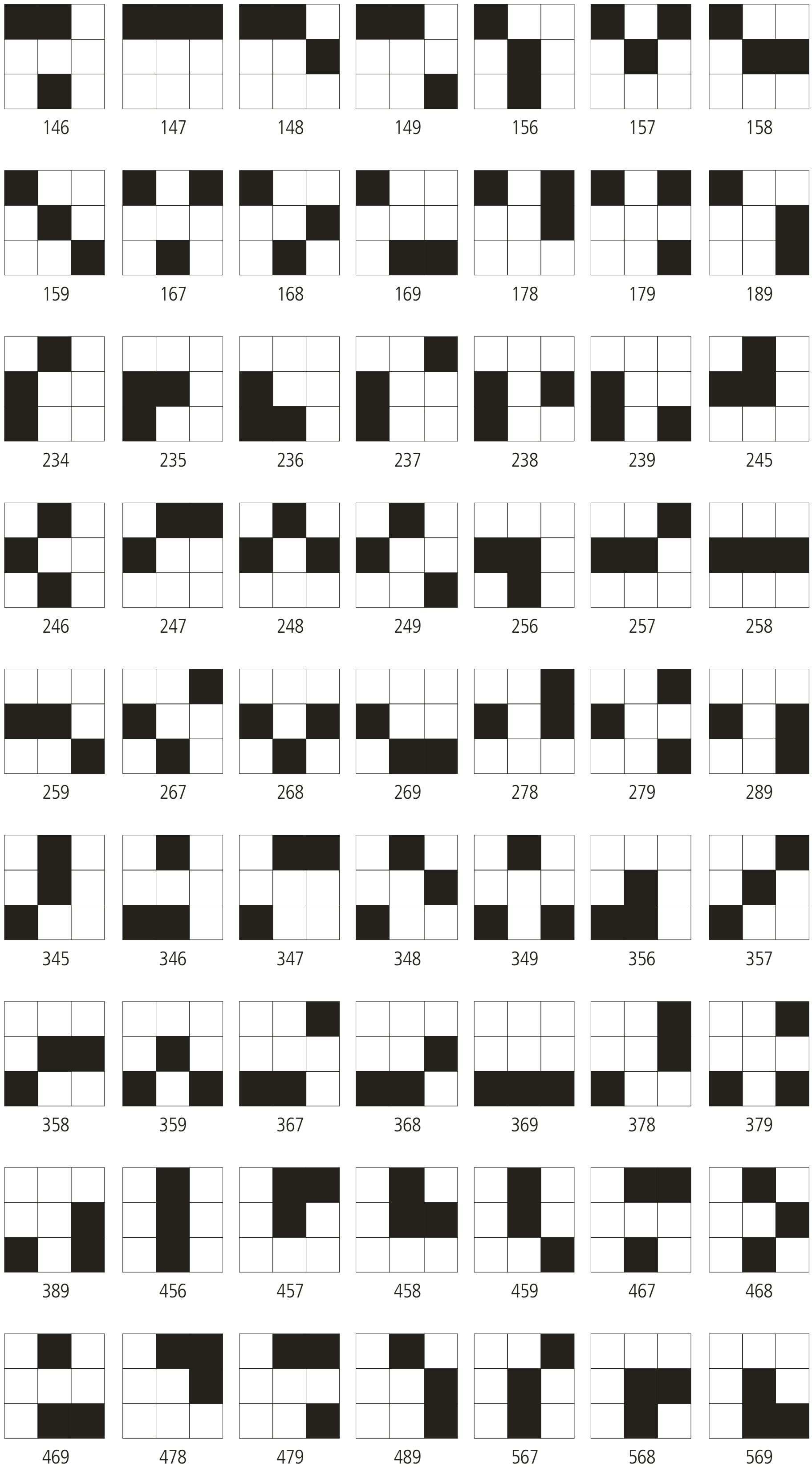
La representación geométrica de los 9 elementos tomadas de 3 en 3:

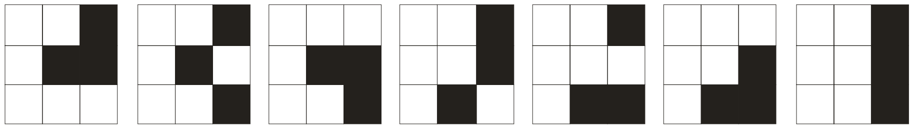


123 124 125 126 127 128 129



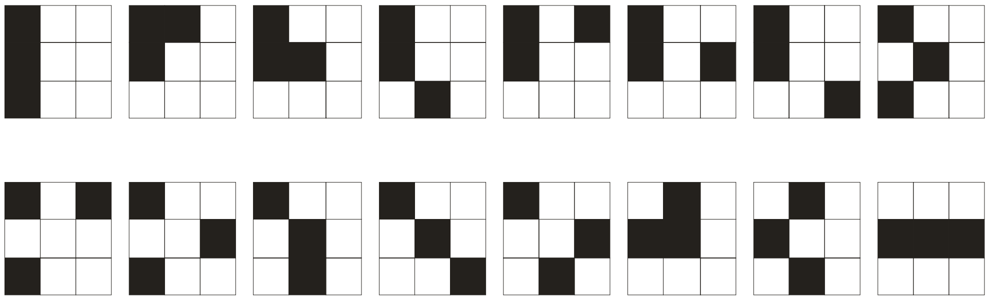
134 135 136 137 138 139 145


146 147 148 149 156 157 158
159 167 168 169 178 179 189
234 235 236 237 238 239 245
246 247 248 249 256 257 258
259 267 268 269 278 279 289
345 346 347 348 349 356 357
358 359 367 368 369 378 379
389 456 457 458 459 467 468
469 478 479 489 567 568 569



578 579 589 678 679 689 789

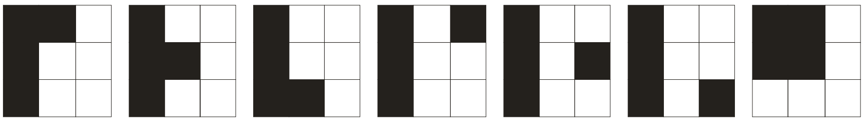
De estas 84 figuras, solo hay 16 que son figuras fundamentales diferentes:



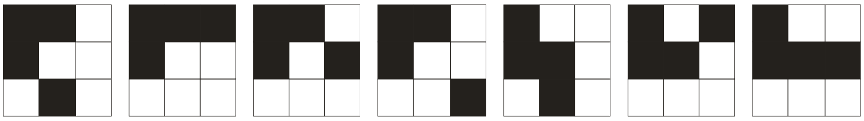
Hay 126 combinaciones geométricas posibles de 9 elementos tomadas de 4 en 4:

$$C_{(9,4)} = C_9^4 = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = 126$$

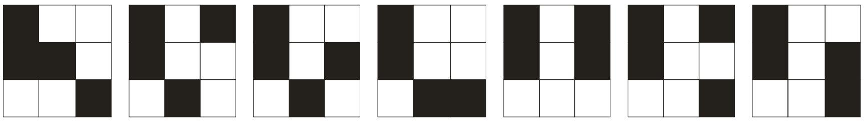
1234	1235	1236	1237	1238	1239	1245
1246	1247	1248	1249	1256	1257	1258
1259	1267	1268	1269	1278	1279	1289
1345	1346	1347	1348	1349	1356	1357
1358	1359	1367	1368	1369	1378	1379
1389	1456	1457	1458	1459	1467	1468
1469	1478	1479	1489	1567	1568	1569
1578	1579	1589	1678	1679	1689	1789
2345	2346	2347	2348	2349	2356	2357
2358	2359	2367	2368	2369	2378	2379
2389	2456	2457	2458	2459	2467	2468
2469	2478	2479	2489	2567	2568	2569
2578	2579	2589	2678	2679	2689	2789
3456	3457	3458	3459	3467	3468	3469
3478	3479	3489	3567	3568	3569	3578
3579	3589	3678	3679	3689	3789	4567
4568	4569	4578	4579	4589	4678	4679
4689	4789	5678	5679	5689	5789	6789



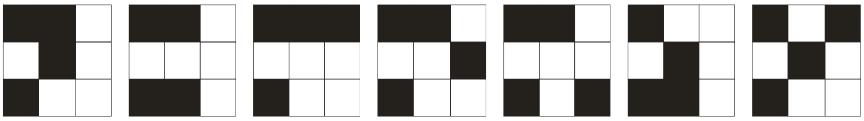
1234 1235 1236 1237 1238 1239 1245



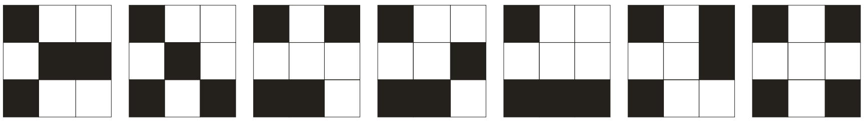
1246 1247 1248 1249 1256 1257 1258



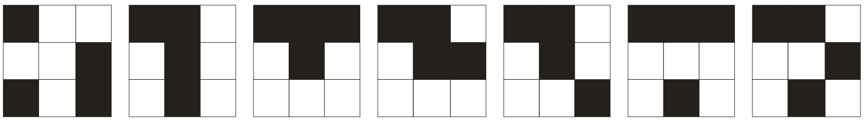
1259 1267 1268 1269 1278 1279 1289



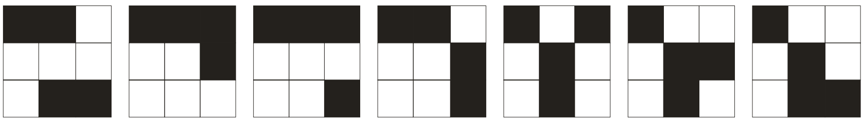
1345 1346 1347 1348 1349 1356 1357



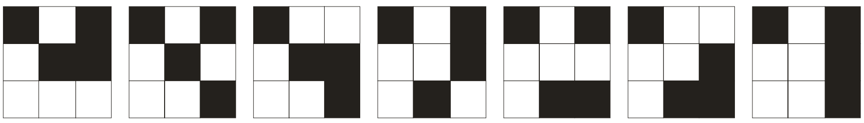
1358 1359 1367 1368 1369 1378 1379



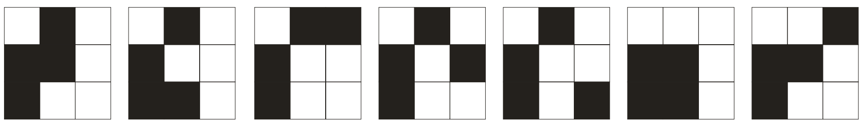
1389 1456 1457 1458 1459 1467 1468



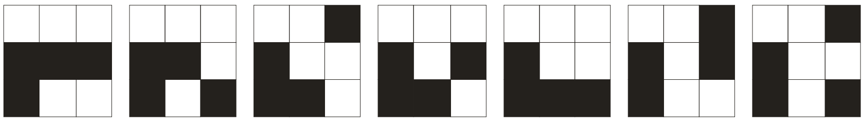
1469 1478 1479 1489 1567 1568 1569



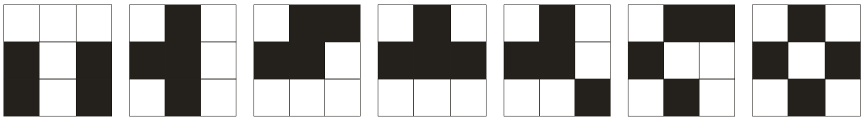
1578 1579 1589 1678 1679 1689 1789



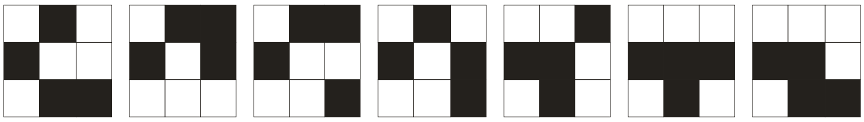
2345 2346 2347 2348 2349 2356 2357



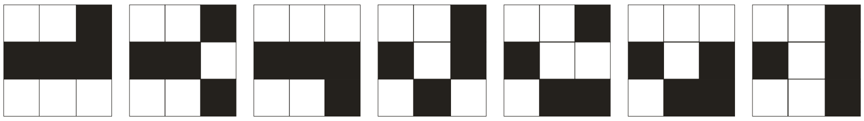
2358 2359 2367 2368 2369 2378 2379



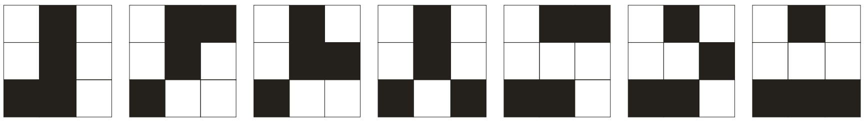
2389 2456 2457 2458 2459 2467 2468



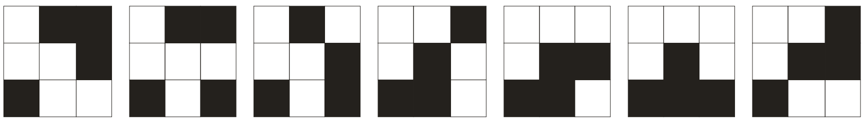
2469 2478 2479 2489 2567 2568 2569



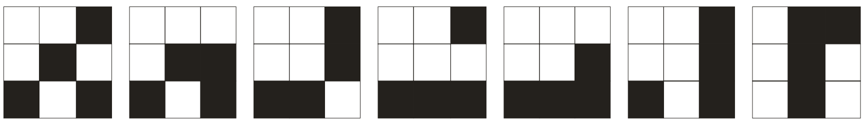
2578 2579 2589 2678 2679 2689 2789



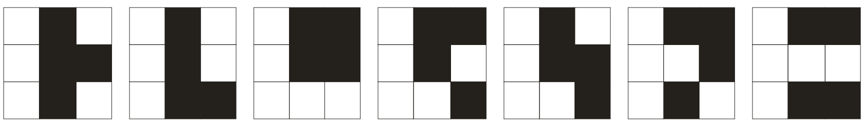
3456 3457 3458 3459 3467 3468 3469



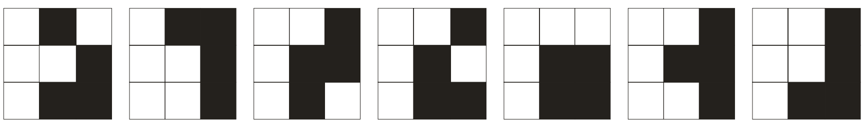
3478 3479 3489 3567 3568 3569 3578



3579 3589 3678 3679 3689 3789 4567

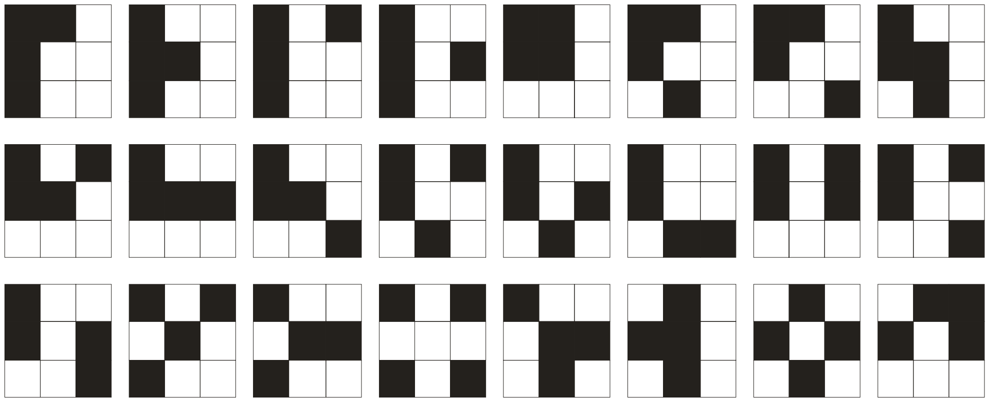


4568 4569 4578 4579 4589 4678 4679

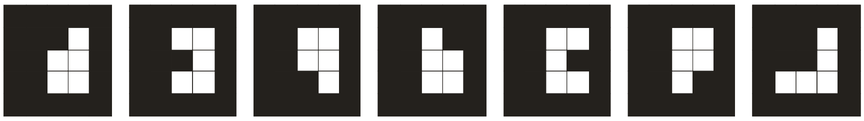


4689 4789 5678 5679 5689 5789 6789

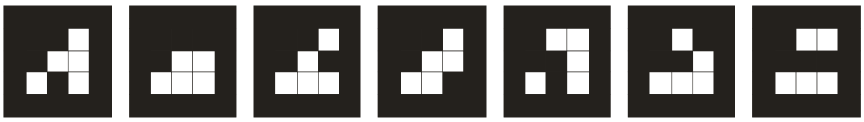
Entre las 126 combinaciones posibles hay 24 combinaciones fundamentales diferentes:



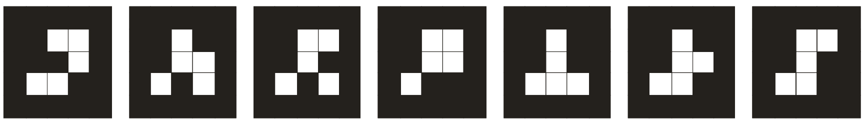
Otra representación de estas 126 combinaciones:



1234 1235 1236 1237 1238 1239 1245

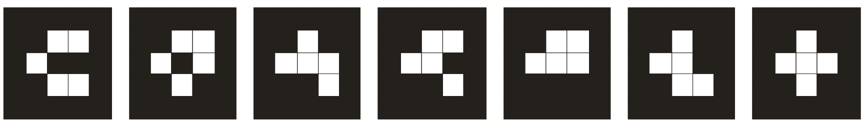


1246 1247 1248 1249 1256 1257 1258

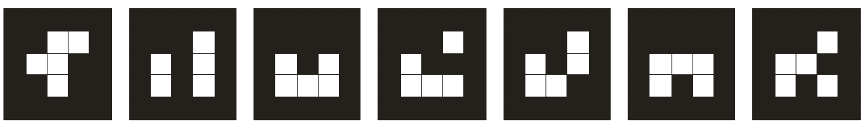


1259 1267 1268 1269 1278 1279 1289

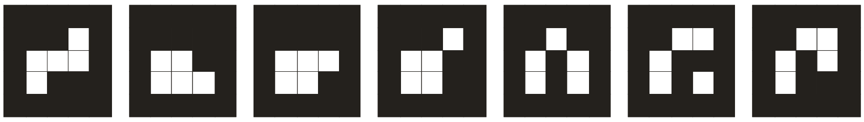
1345 1346 1347 1348 1349 1356 1357



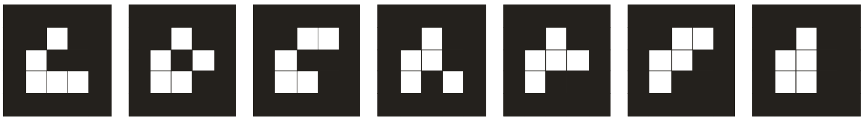
1358 1359 1367 1368 1369 1378 1379



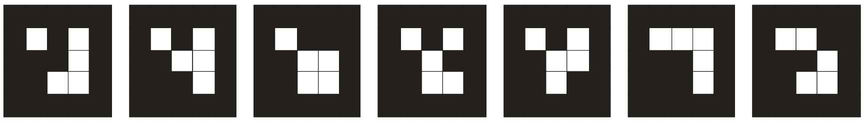
1389 1456 1457 1458 1459 1467 1468



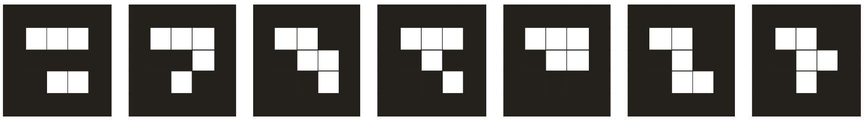
1469 1478 1479 1489 1567 1568 1569



1578 1579 1589 1678 1679 1689 1789



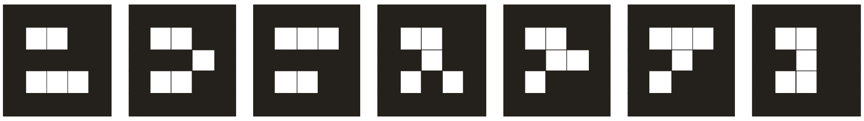
2345 2346 2347 2348 2349 2356 2357



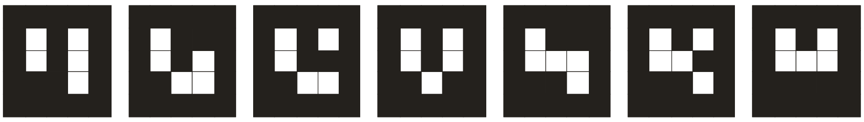
2358 2359 2367 2368 2369 2378 2379

2389 2456 2457 2458 2459 2467 2468

2469 2478 2479 2489 2567 2568 2569

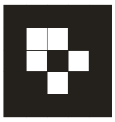


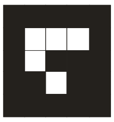
2578 2579 2589 2678 2679 2689 2789

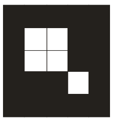


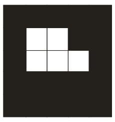
3456 3457 3458 3459 3467 3468 3469

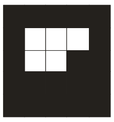
3478 3479 3489 3567 3568 3569 3578

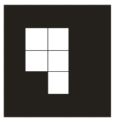

3579

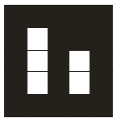

3589

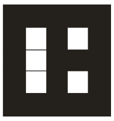

3678

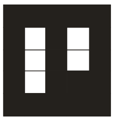

3679

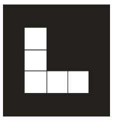

3689

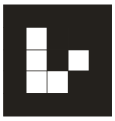

3789

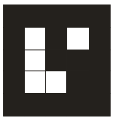

4567

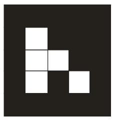

4568

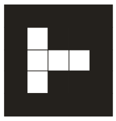

4569

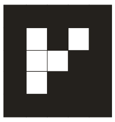

4578

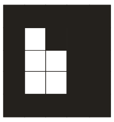

4579

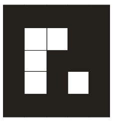

4589

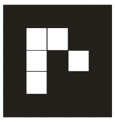

4678

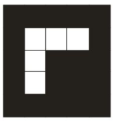

4679

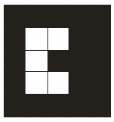

4689

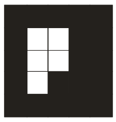

4789


5678


5679


5689


5789


6789

Hay 126 combinaciones geométricas posibles de 9 elementos tomadas de 5 en 5:

$$C_{(9,5)} = C_9^5 = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!\ \mathrm{X}\ 4!} = 126$$

12345	12346	12347	12348	12349	12356	12357
12358	12359	12367	12368	12369	12378	12379
12389	12456	12457	12458	12459	12467	12468
12469	12478	12479	12489	12567	12568	12569
12578	12579	12589	12678	12679	12689	12789
13456	13457	13458	13459	13467	13468	13469
13478	13479	13489	13567	13568	13569	13578
13579	13589	13678	13679	13689	13789	14567
14568	14569	14578	14579	14589	14678	14679
14689	14789	15678	15679	15689	15789	16789
23456	23457	23458	23459	23467	23468	23469
23478	23479	23489	23567	23568	23569	23578
23579	23589	23678	23679	23689	23789	24567
24568	24569	24578	24579	24589	24678	24679
24689	24789	25678	25679	25689	25789	26789
34567	34568	34569	34578	34579	34589	34678
34679	34689	34789	35678	35679	35689	35789
36789	45678	45679	45689	45789	46789	56789

La combinación de los 9 elementos tomados de 6 en 6, $C_9^6 = 84$. Las combinaciones posibles, son:

$$C_{(9,6)} = C_9^6 = \frac{9!}{6!\,(9-6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!\; X\; 3!} = 84$$

123456	123457	123458	123459	123467	123468	123469
123478	123479	123489	123567	123568	123569	123578
123579	123589	123678	123679	123689	123789	124567
124568	124569	124578	124579	124589	124678	124679
124689	124789	125678	125679	125689	125789	126789
134567	134568	134569	134578	134579	134589	134678
134679	134689	134789	135678	135679	135689	135789
136789	145678	145679	145689	145789	146789	156789
234567	234568	234569	234578	234579	234589	234678
234679	234689	234789	235678	235679	235689	235789
236789	245678	245679	245689	245789	246789	256789
345678	345679	345689	345789	346789	356789	456789

Dada una serie de 9 elementos (123456789) m = 9, para descomponerla en grupos de 7 (n = 7), el número de combinaciones simples es $C_9^7 = 36$:

$$C_{(9,7)} = C_9^7 = \frac{9!}{7!\,(9-7)!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!\; X\; 2!} = 36$$

1234567	1234568	1234569	1234578	1234579	1234589	1234678	1234679	1234689
1234789	1235678	1235679	1235689	1235789	1236789	1245678	1245679	1245689
1245789	1246789	1256789	1345678	1345679	1345689	1345789	1346789	1356789
1456789	2345678	2345679	2345689	2345789	2346789	2356789	2456789	3456789

El número de combinaciones sin repetición de esos 9 elementos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) m = 9, tomados de 8 en 8, n = 8, es 9 y esa combinación es:

$$C_{(9,8)} = C_9^8 = \frac{9!}{8!\,(9-8)!} = \frac{9 \times 8!}{8!} = 9$$

12345678	12345679	12345689	12345789	12346789	12356789	12456789	13456789	23456789

El número de combinaciones sin repetición de esos 9 elementos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) m = 9, tomados de 9 en 9, n = 9, es 1 y esa combinación es el conjunto vacío:

$$C_{(9,9)} = C_9^{\,9} = \frac{9!}{9!\,(9-9)!} = \frac{9!}{9!} = 1$$

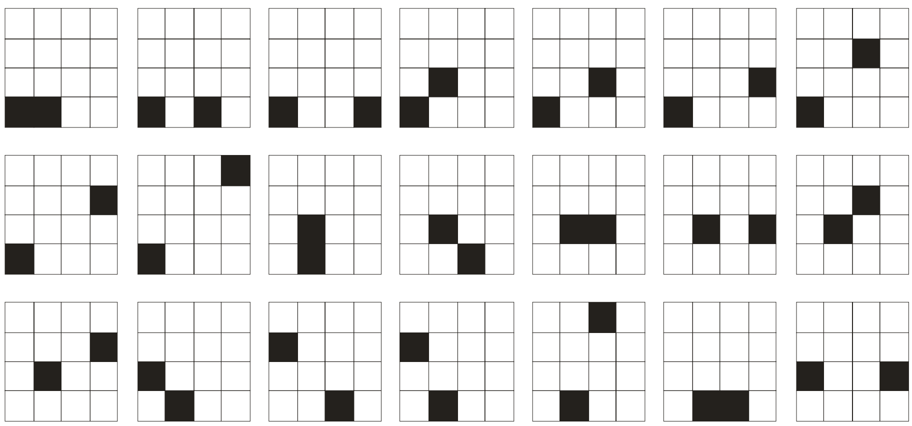
123456789

4. Combinaciones de 16 elementos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

Las combinaciones se pueden representar geométricamente, en una matriz cuadrada de 4^2 casillas, en la que cada una de ellas está numerada de la siguiente forma: en columnas sucesivas de arriba abajo y de izquierda a derecha de forma continua:

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

De las 120 combinaciones geométricas de 16 términos tomados de 2 en 2 (m = 16 y n = 2), hay 21 combinaciones fundamentales diferentes:



En general se trata de enumerar las combinaciones geométricas sucesivas de m términos tomados de n en n, con todos los valores que puede tomar n desde 0 hasta $m = n^2$.

0 casillas marcadas	1 casillas marcadas	2 casillas marcadas	3 casillas marcadas	4 casillas marcadas
$C_4^0=1$	$C_4^1=4$	$C_4^2=6$	$C_4^3=4$	$C_4^4=1$

De estas clasificaciones se puede deducir la fórmula general de numeración de las N soluciones posibles dadas:

$$N = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + C_m^4 + \ldots + C_m^p = 2^m = 2^{(n2)}$$

Para n = 2; $m = 2^2 = 4$; $N = 2^4 = 16$
Para n = 3; $m = 3^2 = 9$; $N = 3^9 = 512$
Para n = 4; $m = 4^2 = 16$; $N = 4^{16} = 65536$

15.3.- COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de forma que:

1. En cada grupo entren n elementos repetidos o no.
2. Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento.
3. No influye el orden de colocación de sus elementos.

Las combinaciones con repetición se representan con el siguiente símbolo:

$$\boxed{CR_{m,n} \quad \text{o} \quad C^{n}_{m+n-1,n}}$$

El número de combinaciones posibles viene dado por la fórmula:

$$\boxed{CR_{m,n} = C^{n}_{m+n-1,n} = \binom{m+n-1}{n}}$$

1. Combinaciones con repetición de 2 elementos: 12

El número de combinaciones con repetición 2 elementos tomados de 0 en 0 es 1 y esa combinación es igual conjunto vacío.

El número de combinaciones con repetición de esos 2 elementos tomados de 1 en 1 es 2 y esas combinaciones son:

1 2

El número de combinaciones con repetición de esos 2 elementos tomados de 2 en 2 es igual a 3 y esas combinaciones son:

11 12 22

El número de combinaciones con repetición de esos 2 elementos tomados de 3 en 3 es igual a 4 y esas combinaciones son:

111 112 122 222

El número de combinaciones con repetición de esos 2 elementos tomados de 4 en 4 es igual a 5 y esas combinaciones son:

1111 1112 1122 1222 2222

El número de combinaciones con repetición de esos 2 elementos tomados de 5 en 5 es igual a 6 y esas combinaciones son:

11111 11112 11122 11222 12222 22222

2. Combinaciones con repetición de 4 elementos: 1234

El número de combinaciones con repetición de esos 4 elementos tomados de 0 en 0 es 1 y esa combinación es el conjunto vacío.

El número de combinaciones con repetición de esos 4 elementos tomados de 1 en 1 es igual a 4 y esas combinaciones son:

1 2 3 4

El número de combinaciones con repetición de esos 4 elementos tomados de 2 en 2 es igual a 10 y esas combinaciones son:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44

El número de combinaciones con repetición de esos 4 elementos tomados de 3 en 3 es igual a 20 y esas combinaciones son:

111	112	113	114	122	123	124	133	134	144
222	223	224	233	234	244	333	334	344	444

El número de combinaciones con repetición de esos 4 elementos tomados de 4 en 4 es igual a 35 y esas combinaciones son:

1111	1112	1113	1114	1122	1123	1124
1133	1134	1144	1222	1223	1224	1233
1234	1244	1333	1334	1344	1444	2222
2223	2224	2233	2234	2244	2333	2334
2344	2444	3333	3334	3344	3444	4444

El número de combinaciones con repetición de esos 4 elementos tomados de 5 en 5 es igual a 56 y esas combinaciones son:

11111	11112	11113	11114	11122	11123	11124
11133	11134	11144	11222	11223	11224	11233
11234	11244	11333	11334	11344	11444	12222
12223	12224	12233	12234	12244	12333	12334
12344	12444	13333	13334	13344	13444	14444
22222	22223	22224	22233	22234	22244	22333
22334	22344	22444	23333	23334	23344	23444
24444	33333	33334	33344	33444	34444	44444

15.4.- SERIE DE FIBONACCI

Dada la serie de Fibonacci :

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657	46368
75025	121393	196418	317811	514229	832040	1346269	2178309	3524578	5702887	9227465	14930352

24157817	39088169	63245986	102334155	165580141	267914296	433494437
701408733	1134903170	1836311903	2971215073	4807526976	7778742049	12586269025

Se toman los 144 primeros números de la serie y se agrupan de 4 en 4:

1123	5813	2134	5589	1442	3337	7610	9871	5972	5844	1816	7651
0946	1771	1286	5746	3687	5025	1213	9319	6418	3178	1151	4229
8320	4013	4626	9217	8309	3524	5785	7028	8792	2746	5149	3035

Se crea una matriz de 12 x 12 = 144 casillas divida en 6 x 6 = 36 submatrices de 4 x 4 elementos cada una[1] y de forma que el orden de lectura de los elementos dentro de las submatrices sea el siguiente:

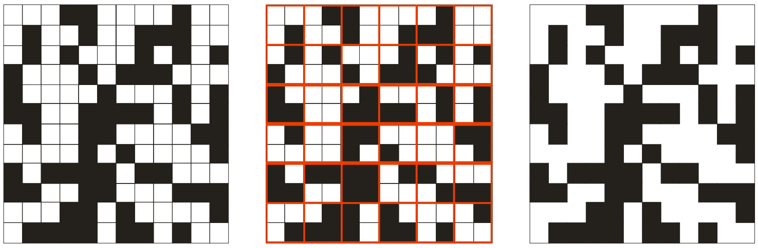
1	2
4	3

Se completa la matriz general de arriba abajo y de izquierda a derecha, insertando los términos de la serie de Fibonacci clasificados de 4 en 4. La matriz resultante será:

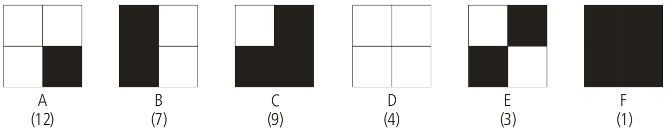
1	1	5	8	2	1	5	5	1	4	3	3
3	2	3	1	4	3	9	8	2	4	7	3
7	6	9	8	5	9	5	8	1	8	7	6
0	1	1	7	2	7	4	4	6	1	1	5
0	9	1	7	1	2	5	7	3	6	5	0
6	4	1	7	6	8	6	4	7	8	5	2
1	2	9	3	6	4	3	1	1	1	4	2
3	1	9	1	8	1	8	7	1	5	9	2
8	3	4	0	4	6	9	2	8	3	3	5
0	2	3	1	6	2	7	1	9	0	4	2
5	7	7	0	8	7	2	7	5	1	3	0
5	8	8	2	2	9	6	4	9	4	5	3

[1] René Descombes, *La Magie du Carré: Le Carré dans Tous ses Éclats*, Vuibert, París, 2004, p. 340.

Si se tachan los números pares, 0 2 4 6 8, dentro de la matriz anterior, el resultado que se obtiene será:



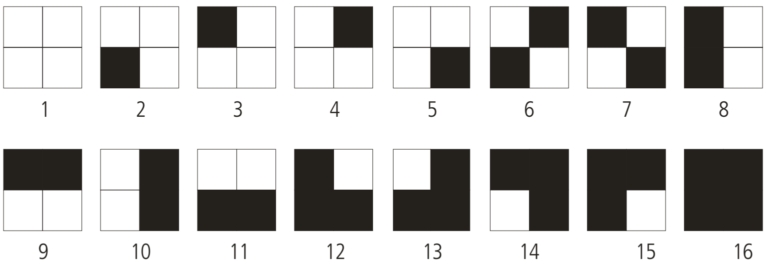
Si se tiene en cuenta que las 6 formas diferentes de marcar una matriz de 4 casillas, como se expuso anteriormente, están representadas por las siguientes combinaciones fundamentales diferentes, el número de veces que aparece cada modelo dentro de la matriz total es: A,12; B,7; C,9; D, 4; E, 3; F,1:



Se puede decir que en las 36 submatrices y en las 144 casillas, se contabilizan 63 casillas marcadas y 81 blancas.

15.5.- APLICACIONES CON EL CUADRADO MÁGICO DE DURERO

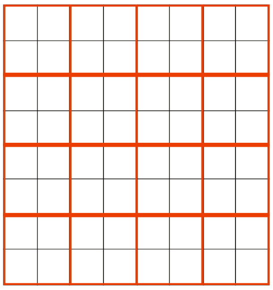
Si se tienen en cuenta las 16 figuras que resultaron de marcar todas las combinaciones de cuatro elementos sobre una matriz cuadrada de 2 x 2 = 4 casillas, y se numeran de una forma arbitraria, se puede crear una matriz formada por 16 submatrices de 4 x 4 casillas.

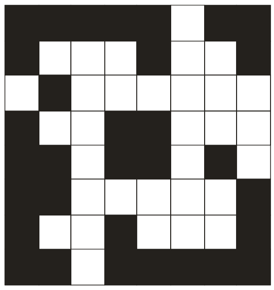


Dado el siguiente cuadrado mágico de Durero, que utiliza para completarse los 16 primeros términos de la serie de los números enteros:

15	9	8	14
6	5	2	1
16	4	3	7
12	10	11	13

Aplicando en la siguiente matriz los módulos que corresponden en numeración al número indicado en el cuadrado mágico de Durero, el dibujo que se puede obtener es el siguiente:[2]

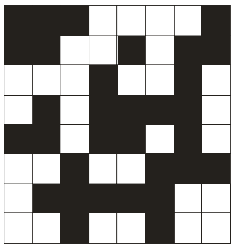




Si el cuadrado mágico es:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

El resultado sería:



[2] René Descombes, *op. cit.,* p. 341.

15.6.- ANÁLISIS DE OBRAS

15.6.1- MANFRED MOHR

1. Límite del cubo I, 1973 / 1975[1]

Con el título *Límite del cubo I*, Manfred Mohr reúne una serie de obras de una época, en las que trabaja con el cubo como sistema geométrico generador de signos. Lo que le interesa al autor, en esta época, no es el aspecto geométrico del cubo en sí mismo, sino el sistema de relaciones que existe entre las líneas que lo generan.

Las siguientes obras: P – 155 – C, P – 155 – B, P – 159 – A, se representan sobre una matriz cuadrada de 48 x 48 = 2304 casillas, pautada horizontalmente. Sobre cada una de las casillas, hay un signo inscrito.

Para crear los signos, que va a introducir en cada una de las casillas de la matriz, Mohr utiliza como sistema de trabajo, las 12 líneas que corresponden a la representación gráfica de un cubo que quiere crear la ilusión de una figura tridimensional. Sobre estas líneas, Mohr practica diferentes tipos de operaciones: selección, supresión, división, adición, giro, subrayado,… Con todas estas operaciones, lo que consigue es que vaya desapareciendo la visión tridimensional del cubo. El cubo le sirve, entonces, para descubrir nuevos signos que no han sido visualizados antes y que evocan nuevos tipos de órdenes y estructuras. Este sistema de 12 líneas es un sistema muy potente capaz de generar un gran número de signos diferentes.

Para generar los signos, utiliza diferentes métodos algorítmicos:

1. Algoritmos estadísticos: le permiten elegir los signos, dentro de un repertorio, por la frecuencia relativa con que aparecen. En este proceso, el factor casualidad se puede utilizar como un principio formativo.

2. Algoritmos que generan rotaciones del cubo: modifican la posición de los vértices del cubo.

3. Algoritmos combinatorios: eligen el número de líneas que va a tener cada uno de los signos que se van a generar.

4. Algoritmos basados en expresiones de lógica simbólica: utilizan los operadores lógicos *not*, *and* y *or*. En estos algoritmos, los signos se interpretan como conjuntos de elementos y se manipulan gráficamente siguiendo las reglas de la teoría de conjuntos.

5. Algoritmos aditivos: en los procesos aditivos, los signos se superponen, y se juntan para crear nuevos elementos y estructuras. Estas superposiciones se pueden realizar de una forma estrictamente sistemática y, al final, hasta completar un cubo.

[1] Cubic limit I, 1973 / 1975.

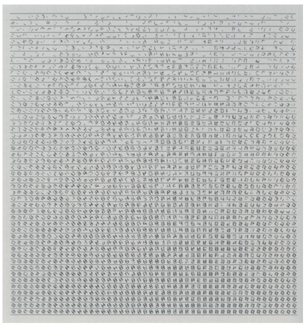
6. Algoritmos restrictivos: actúan como filtros de cualquiera de los algoritmos anteriores. Sirven para restringir el número de signos generados, según determinados criterios.

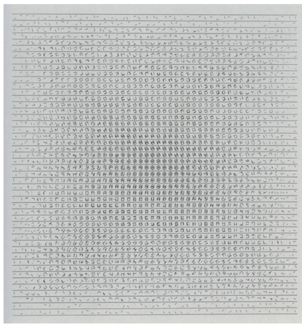
En la imagen P – 155 – C, utiliza algoritmos que tienen en cuenta la estadística, la combinatoria y la rotación del cubo. Para crear los signos icónicos de la matriz, elige, entre el repertorio de signos generado por los algoritmos de las combinaciones y la rotación del cubo, aquellos con un determinado número de líneas y una determinada posición espacial. El método que utiliza para elegir los signos puede variar: unas veces realiza una selección aleatoria y otras veces, un procedimiento sistemático muy definido que elige a algunas o a todas las combinaciones generadas. En algunas casillas se identifica, de vez en cuando, el signo del cubo orientado con diferentes posiciones espaciales. En otras, el referente del cubo es muy difícil de identificar.

En la imagen P – 155 – B, utiliza algoritmos que tienen en cuenta la combinatoria y la rotación del cubo. Los resultados visuales de los signos utilizados son rítmicamente progresivos, es decir, según avanzan su situación en las casillas de la matriz, de arriba abajo, va aumentando el número de líneas de cada uno de los dibujos. En algunas casillas se identifica, de vez en cuando, el signo del cubo. En otras, el cubo desaparece por completo, creando así símbolos muy abstractos.

En la imagen P – 159 – A, utiliza, también, algoritmos que tienen en cuenta la combinatoria y la rotación del cubo. En la composición final, se ven zonas de máxima concentración de líneas en el centro del dibujo, dejando la periferia formada por cubos con menor número de líneas. En algunas casillas se identifica, de vez en cuando, el signo del cubo. En otras, su identificación visual es casi nula.


P - 155 - C

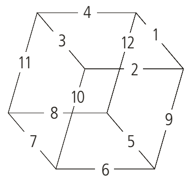

P - 155 - B


P - 159 - A

2. Límite del cubo I, 1973 / 1975[2]

En los siguientes trabajos, de la serie *Cubic Limit I*, Manfred Mohr vuelve a utilizar el cubo como un sistema generador de signos. Parte de la representación tridimensional de un cubo en el plano evocando la ilusión de una figura tridimensional. Para dibujar un cubo en dos dimensiones, se necesita un conjunto de 12 líneas rectas mostradas en un orden definido. Si las líneas del cubo se van suprimiendo sucesivamente, la ilusión de las tres dimensiones se desvanece y aparece un nuevo elemento gráfico de dos dimensiones. El tema de este trabajo se basa en la investigación de la dinámica de este proceso y la innovación visual que producen sus resultados.

[2] Cubic Limit I, 1973 / 1975.



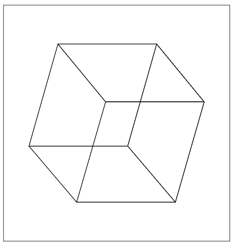
En este proyecto, utiliza un repertorio de 12 líneas representadas por valores numéricos, con los que crea signos que contienen entre 0 y 12 líneas. Es un ejercicio de combinatoria. Con 12 elementos (n =12) tomados de m en m hay ((n) x (n-1)… (n-m+1)) / m! combinaciones posibles. En este modelo n = 12 y m es igual al número de líneas ausentes en el dibujo del cubo. Así, un cubo con 1 línea arbitrariamente eliminada tiene 12 posibles representaciones. Si se suprimen 2 líneas, hay (12 x 11) / 2! = 66 combinaciones posibles, con tres líneas (12 x 11 x 10) / 3! = 220,… Este número aumentará con 6 líneas eliminadas a 924 combinaciones posibles y después disminuirá simétricamente a 12 combinaciones cuando sólo quede una línea de representación. Todas juntas forman 4095 combinaciones posibles. Para completar el conjunto, se añade a esta serie de combinaciones el cubo completo de 12 líneas, consiguiendo así un total de 4096 posibilidades.

La serie está formada por 13 dibujos que representan todas las combinaciones posibles de la descomposición de un cubo por supresión de las líneas que forman su representación espacial. El ángulo de rotación de los cubos permanece constante en toda la serie y es, en las tres direcciones del espacio: 50º, 50º, 50º.

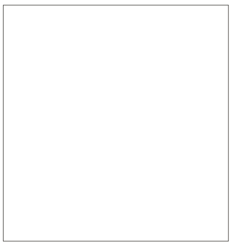
Presentes	Eliminadas	Combinaciones
12	0	1
11	1	12
10	2	66
9	3	220
8	4	495
7	5	792
6	6	924
5	7	792
4	8	495
3	9	220
2	10	66
1	11	12
	Total	4096

En esta obra, Mohr muestra, ordenadamente, todo el repertorio de signos generados al ir suprimiendo ordenadamente tramos o líneas del cubo. Para representar la obra, Mohr agrupa los dibujos de dos en dos, de forma, que cada pareja de dibujos sea complementaria una de la otra; es decir, entre los dos formen el dibujo de un cubo completo. Por ejemplo, el dibujo 11, representa todas las posibilidades de visualizar el cubo cuando se le suprime una línea; y su complementario, el dibujo 1, representa todas las posibilidades de representar el cubo con una única línea. Si se suman los dos dibujos, se consiguen obtener cubos completos.

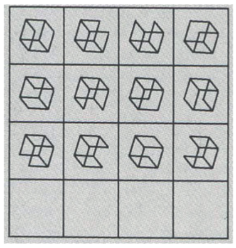
Las combinaciones posibles de supresión de líneas en el cubo se representan con las siguientes parejas de dibujos: la pareja 12-0: el dibujo 12 representa un cubo completo con las 12 líneas que representan a sus lados; el dibujo 0, representa a un cubo representado con 0 líneas, es decir, un cubo vacío. La pareja 11-2, vista anteriormente, visualiza todas las posibilidades de cubos con 11 y 1 líneas. La pareja 10-2, visualiza cubos con 10 y 2 líneas respectivamente. La pareja 9-3, representa cubos con 9 y 3 líneas. La pareja 8-4, representa todas las posibilidades de representar cubos con 8 y 4 líneas. La pareja 7-5, representa cubos con 7 y 5 líneas. La única representación de la serie que no lleva pareja es la representación del cubo con 6 líneas ausentes y 6 presentes, porque se duplicaría la imagen.



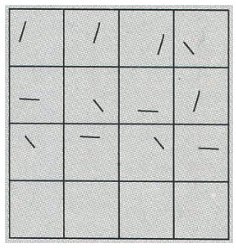
12



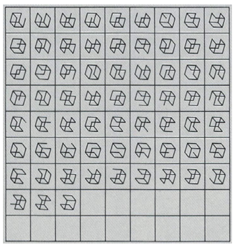
0



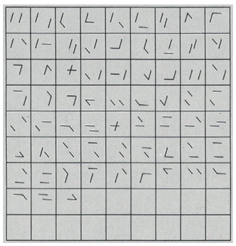
11



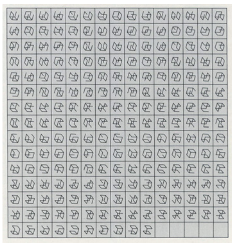
1



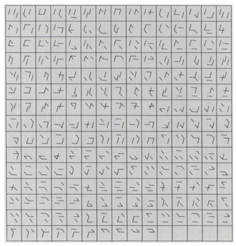
10



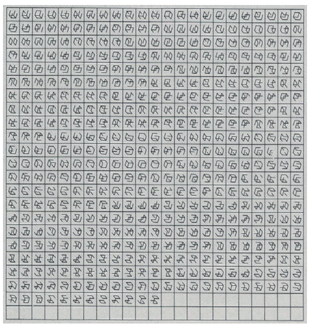
2



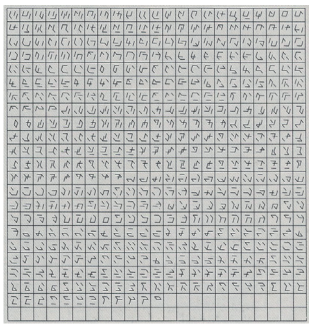
9



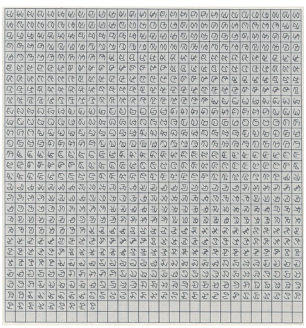
3



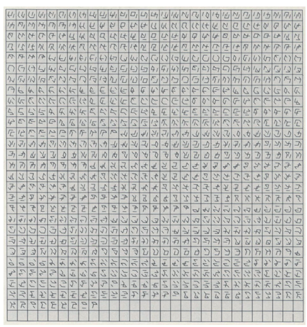
8



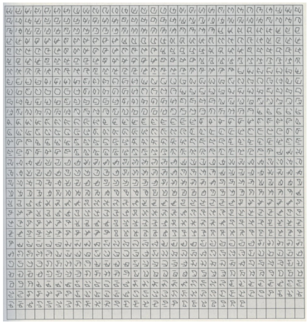
4



7



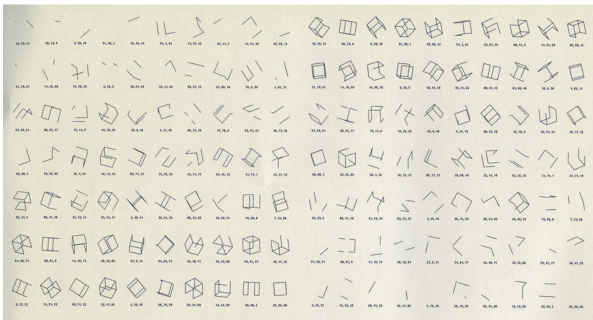
5



6

En esta obra se ha considerado el cubo representado de una forma estática. Si se introduce la rotación en el modelo, las posibilidades de mostrar estos elementos gráficos aumentan de una forma considerable.

Un cubo, completo o incompleto, que gira, provoca en algunos casos ambigüedad visual, ya que visto bajo ciertos ángulos, el primer plano y el fondo, se confunden o simplemente se pierden. Hay además algunas combinaciones lineales que desaparecen al quedar ocultas por líneas superpuestas de caras anteriores. En algunos casos se genera una redundancia visual al coincidir aparentemente algunas formas. En general, se puede decir que la rotación, en su aspecto visual, es un mecanismo muy potente para crear situaciones inesperadas. Se puede añadir además que cuando se representa gráficamente una rotación, se está representando un proceso de transformación y por lo tanto, las imágenes muestran la inestabilidad propia de una dinámica de cambio: la ruptura de la ilusión tridimensional en una representación bidimensional.



P 154 C

En estas obras, el problema se encuentra en tratar de averiguar cuál es el número mínimo de líneas requeridas para mantener la ilusión tridimensional de un cubo incompleto, mostrando además, como dato, los tres ángulos X, Y, Z de rotación del cubo, con los incrementos angulares en rotación aleatoria:

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
16	55	24	90	23	8	9	28	45	51	50	1	30	56	43
21	79	61	14	16	60	43	56	35	9	18	5	18	54	20
63	59	61	86	52	17	72	14	0	19	25	25	20	8	46
68	88	2	55	26	89	38	4	16	40	13	13	80	77	33
52	23	6	80	41	26	21	13	24	63	34	47	3	49	44

51	28	71	88	61	5	11	45	74	40	10	63	27	5	11
0	22	22	31	51	25	89	71	32	32	47	82	2	76	45

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
54	3	81	23	57	45	65	41	2	14	54	39	60	58	12
35	11	62	89	57	12	63	66	48	36	6	56	4	82	71
4	21	70	88	22	48	42	78	0	52	51	24	30	77	26
25	56	16	23	14	79	83	16	32	34	74	1	29	37	49
90	31	29	88	21	60	20	58	31	79	56	8	7	33	68
54	84	77	42	48	71	49	32	66	53	51	27	48	47	25
66	79	39	50	34	88	18	19	89	89	66	2	85	90	90

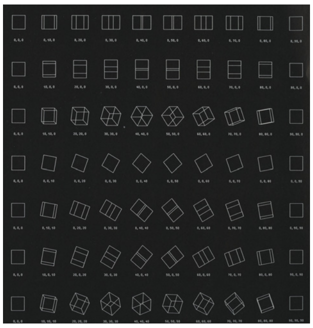
Una solución a esta cuestión es mostrar, como aparecen en la composición P 154 C, la representación de los cubos en rotación aleatoria, a la izquierda de imagen, y a la derecha, su imagen complementaria.

En la obra P 154 A, se muestra un proceso de rotación del cubo con los tres ángulos de rotación X, Y, Z, con los incrementos angulares constantes:

X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
0	0	0	0	10	0	0	20	0	0	30	0	0	40	0
0	0	0	10	0	0	20	0	0	30	0	0	40	0	0
0	0	0	10	10	0	20	20	0	30	30	0	40	40	0
0	0	0	0	0	10	0	0	20	0	0	30	0	0	40
0	0	0	0	10	10	0	20	20	0	30	30	0	40	40
0	0	0	10	0	10	20	0	20	30	0	30	40	0	40
0	0	0	10	10	10	20	20	20	30	30	30	40	40	40

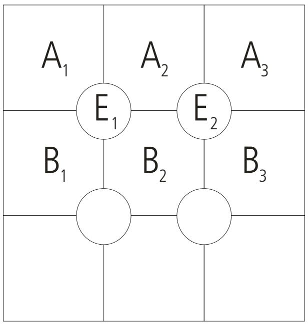
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
0	50	0	0	60	0	0	70	0	0	80	0	0	90	0
50	0	0	60	0	0	70	0	0	80	0	0	90	0	0
50	50	0	60	60	0	70	70	0	80	80	0	90	90	0
0	0	50	0	0	60	0	0	70	0	0	80	0	0	90
0	50	50	0	60	60	0	70	70	0	80	80	0	90	90
50	0	50	60	0	60	70	0	70	80	0	80	90	0	90
50	50	50	60	60	60	70	70	70	80	80	80	90	90	90

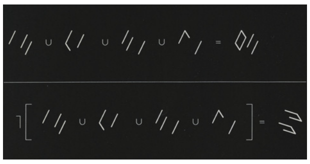
En la matriz de 7 x 10 casillas que subyace a la obra, se muestran una secuencia de 70 cubos, que plantea línea a línea (10 cubos) un proceso de rotación constante y pautada del cubo, de forma que su reconocimiento viene dado por la evolución de la serie más que por su identificación puntual en cada una de las representaciones.

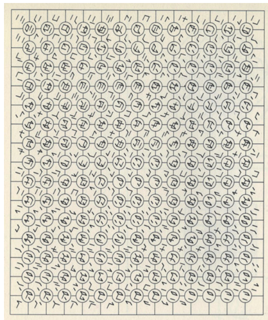


P 154 A

En P 163 A, una matriz de 16 x 14 = 224 casillas muestra en cada una de ellas la representación de un cubo con un ángulo de rotación constante: 55º, 55º, 55º, al que se le han suprimido 9 líneas y por lo tanto, sólo visualiza 3 de ellas. En la intersección de cada una de las líneas horizontales y verticales de la matriz, se introduce un círculo con un signo. Estos signos representan la unión de las cuatro representaciones gráficas de los cubos que se encuentran en las casillas que rodean a cada círculo:







P 163 A

$$E_1 = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$$

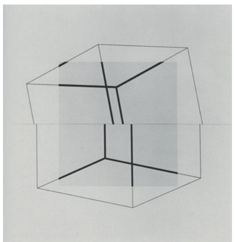
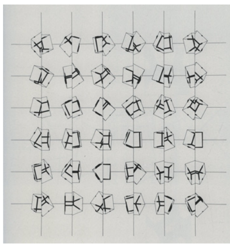
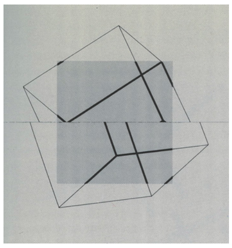
$$E_2 = A_2 \cup A_3 \cup B_2 \cup B_3$$

3. Límite del cubo II, 1975 / 1977[3]

En esta serie los cubos se dividen en dos partes por uno de los ejes cartesianos: X o Y. La imagen de cada una de las dos particiones contiene una rotación independiente del cubo. El resultado se proyecta sobre un plano en dos dimensiones y se enmarca con una ventana cuadrada que resulta de la proyección del cubo a 0, 0, 0, grados. Si se giran ambas partes del cubo en pequeños pero diferentes incrementos, se desarrollan secuencias de imágenes muy interesantes.

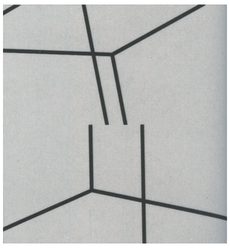
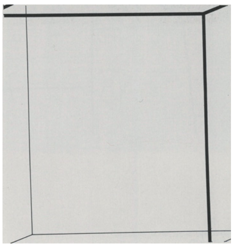
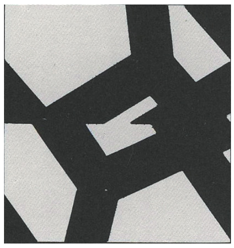
En las obras P 196 EE, P 197 H y P 196 G, se pueden observan distintos cortes y giros de diferentes cubos. En las obras P 196 EE y P 196 G aparece en gris la ventana que se utiliza para recortar las líneas estructurales del cubo que interesan para formalizar la obra.

[3] Cubic limit II, 1975 / 1977.

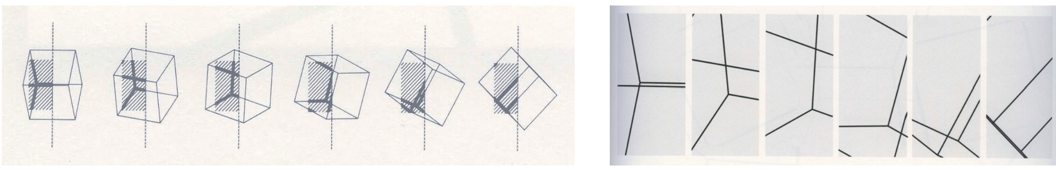
P 196 EE P 197 H P 196 G

Las obras P 200 / 201 – K, P 198 B, P 200 // 15 y P 201 / 22, son resultados de recortes de cubos. En ellas, se pueden apreciar los diferentes tratamientos de la línea en anchura: unas veces homogénea para no dar prioridad a ninguno de los trazados; otras combinando dos anchuras diferentes para intentar destacar la proximidad o lejanía de las líneas con respecto a su ubicación en el cubo; y finalmente, ampliando considerablemente el trazo para convertir la línea en un signo gráfico.


P 200 / 201 - K P 198 B P 200 // 15 P 201 / 22

En la siguiente obra, P 200 F, se muestra el proceso de trabajo para realizar este tipo de proyectos. El marco de selección en esta obra está representado por un rectángulo.



P 202 F

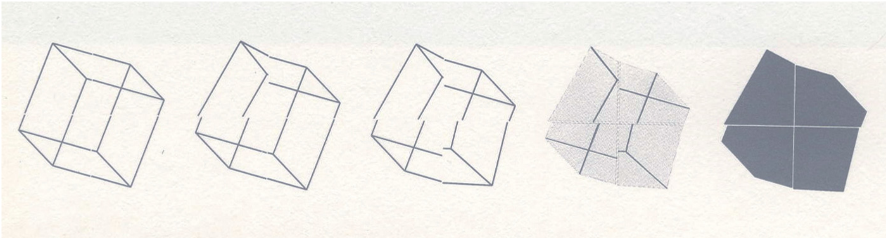
4. Divisibilidad I, 1980 / 1982[4]

En esta serie también se utiliza el cubo como generador de signos. La idea visual es crear signos inestables interrumpiendo deliberadamente, si no rompiendo completamente, la simetría del cubo.

Se divide el cubo en cuatro secciones por un corte vertical y otro horizontal. Girando las cuatro partes independientes del cubo, se crean superficies poligonales diferentes pero relacionadas. Con objeto de estabilizar visualmente la estructura y dar referencia a la rotación inicial del cubo, dos cuadrantes diagonalmente opuestos (el superior derecho y el inferior izquierdo) contienen la misma rotación. Se proyectan las cuatro rotaciones independientes del cubo sobre una superficie plana y se encuadran o recortan con un cuadrado, parte de las estructuras generadas para realizar la obra.

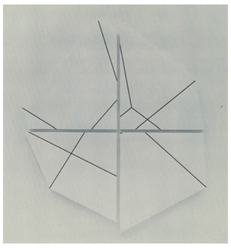
[4] Divisibility I, 1980 / 1982.

Como ejemplo, se toma un cubo, se divide en cuatro partes según un eje vertical y otro horizontal y se gira 60º en sus tres ángulos. A continuación, se introduce una rotación adicional de 5º (65º, 65º, 65º) en el sentido de las agujas del reloj en el cuarto superior izquierdo del cubo y un giro de -5º (55º, 55º, 55º) en el sentido contrario a las agujas del reloj en el cuarto inferior derecho. La parte inferior izquierda y la superior derecha permanecen en su rotación inicial de 60º, 60º, 60º: se crean así, dos polígonos y/o signos simétricos.



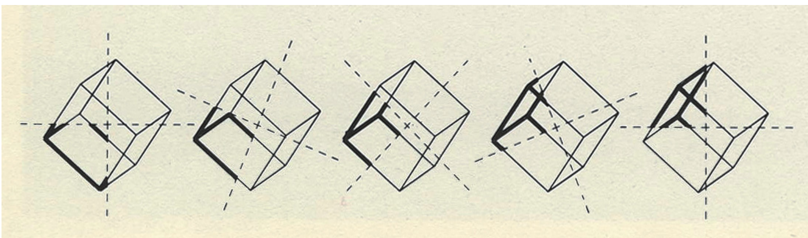
P 302 B

Se pueden generar estructuras en las que todas las piezas pertenecientes a los cuadrantes del cubo giren de una forma diferente, de modo que no exista simetría en ninguna de sus diagonales. En la siguiente obra, el cuadrante izquierdo del cubo muestra la rotación inicial del cubo, pero los otros cuadrantes giran, según el sentido de las agujas del reloj, un incremento progresivo de 5º cada uno: $\propto$, $\propto + 5º$, $\propto + 10º$, $\propto + 15º$.

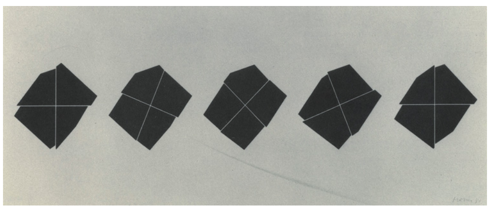


P 306 B

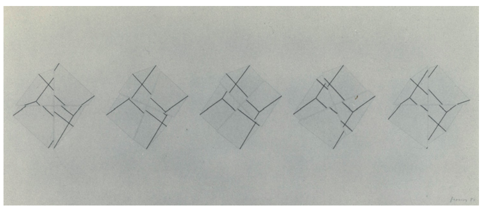
En el siguiente proyecto, se parte de un cubo que mantiene su posición espacial y de giro constante en toda la obra. En esta serie se generan las imágenes girando las líneas de corte, horizontal y verticalmente, con incrementos regulares.



P 308 E

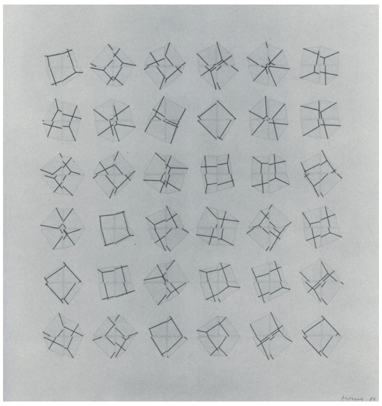


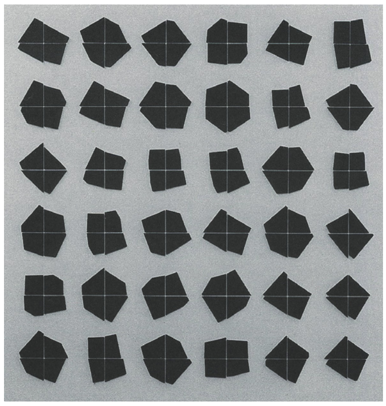
P 308 B/BL



P 308 B/WH

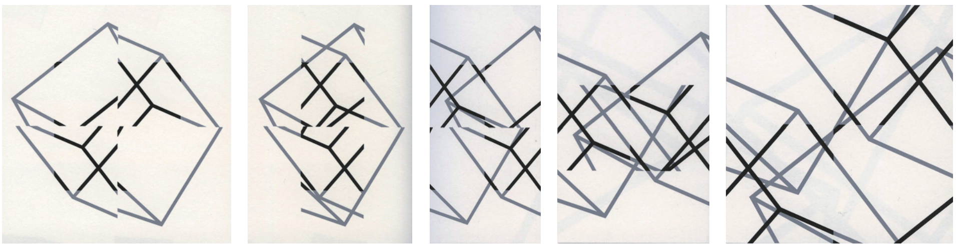
Este proceso genera dos tipos de obras: las primeras, utilizan las líneas internas del cubo para crear signos lineales bidimensionales, P 332 A; las segundas, utilizan los bordes externos de la estructura generada para crear superficies poligonales: los cubos ya no aparecen como los signos principales. Los contornos de los cuatro cortes se muestran como una forma en sombra, o mejor, como una historia visual bidimensional del crecimiento del cubo: P 300 AA.





P 304 E P 300 AA

En la serie *Divisibilidad,* hay un interés por crear signos con una superficie enfatizada por lo que utilizan grises y negros para diferenciar las líneas de corte o mostrar la ventana de corte.



P 332 A

Las secciones grises de las líneas inscriben a las líneas de los signos en un cuadrado que representa el tamaño del cubo (vista frontal) y muestra el origen de las líneas seleccionadas (negras): P 332 A.

5. Divisibilidad II, 1982 / 1984[5]

En las obras de esta serie, se crea una superestructura de cubos cortados en cuatro cortes por crecimiento orgánico y lógico a partir de uno de ellos. El procedimiento utilizado es el siguiente:

1. Se divide un cubo proyectado sobre un plano en cuatro partes por un corte vertical y otro horizontal a través del centro del cubo. A este cubo se le denomina unidad cubo y a las cuatro partes generadas, secciones del cubo.

[5] Divisibility II, 1982 / 1984.

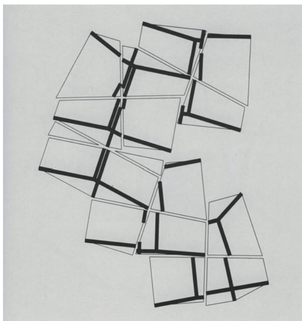
2. A partir de esta unidad cubo, se crean, recursivamente, nuevas unidades cubo, utilizando como punto de inicio de cada uno de estos nuevos cubos, las secciones o cuadrantes del cubo generado previamente. La obra comprende la totalidad de unidades cubos generadas por secciones de cubos de generaciones anteriores. En cada generación de cubos, las reglas globales determinan qué secciones del cubo existente de la generación anterior están disponibles para posibles crecimientos.

3. Se forma entonces una superestructura por una generación jerárquica de reglas locales que afectan a cada una de las secciones del cubo y globales que afectan a toda la superestructura.

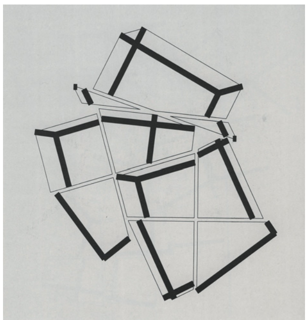
4. El desarrollo de las formas es secuencial y no se imponen restricciones direccionales. Si la configuración de una sección de cubo y sus vecinas permite continuar el crecimiento, se crea una nueva unidad de cubo. Si se alcanza un límite de generación de conjuntos o si todas las posibilidades de crecimiento se agotan, el sistema termina.

5. Para generar esta superestructura, se crean algoritmos que generan modelos gráficos, caminos binarios, crecimientos máximos, o agrupamientos

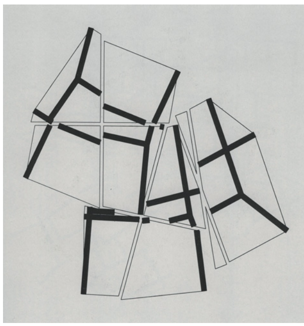
.



P 370 P



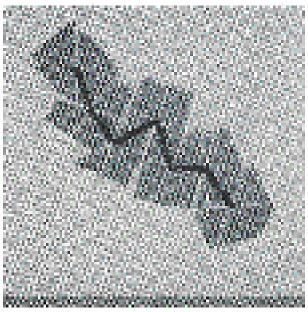
P 361 E



P 360 K

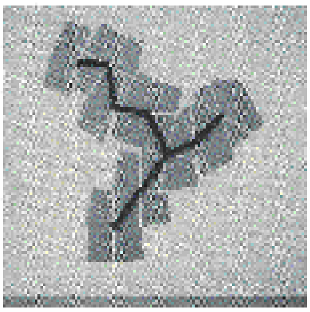
6. Divisibilidad III, 1984 / 1986[6]

En las obras que caracterizan a esta serie, los cubos no aparecen más como signo principal. Los contornos de los cuatro cortes se ven como formas de sombra, o mejor, como una huella de la historia visual bidimensional del crecimiento del cubo. El camino de conexión entre el punto central de uno de los cuatro cortes y el punto central del siguiente corte, se muestra como una línea negra: la línea de crecimiento. Parecido a la columna vertebral de un cuerpo, la línea de crecimiento se incrusta en la forma de sombra.



P 397 A

P 397 B



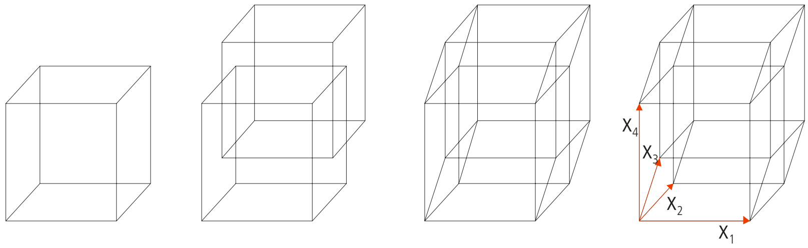
P 397 D

[6] Divisibility III, 1984 / 1986.

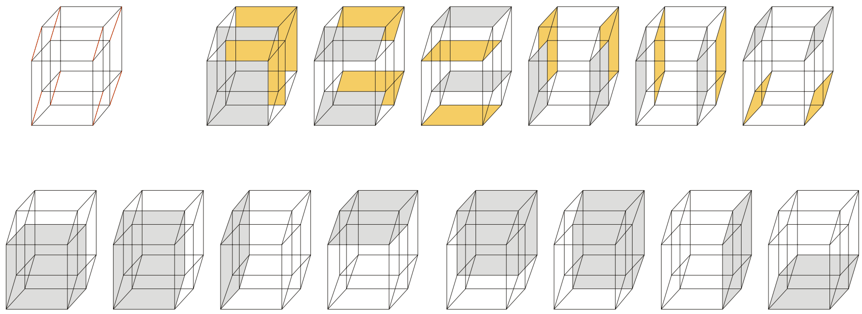
7. Dimensiones I, 1978 / 1979[7]

En las obras de esta serie se utiliza el hipercubo de cuatro dimensiones como estructura para crear los signos. La estructura del hipercubo es una representación bidimensional de un hipercubo mostrando las relaciones entre los puntos, las líneas, los cuadrados y los cubos inherentes a su estructura.

En geometría, un hipercubo es una figura que está formada por dos cubos desplazados en un cuarto eje dimensional.



Un hipercubo está compuesto de 8 cubos, 24 caras cuadradas, 32 aristas y 16 vértices:



Los datos de un hipercubo cualquiera están determinados por la siguiente tabla:

Dimensión	Vértices	Lados	Cuadrados	Cubos	Hipercubo
n	$\binom{n}{0} 2^{n}$	$\binom{n}{1} 2^{n-1}$	$\binom{n}{2} 2^{n-2}$	$\binom{n}{3} 2^{n-3}$	$\binom{n}{4} 2^{n-4}$

Donde,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Y por lo tanto:

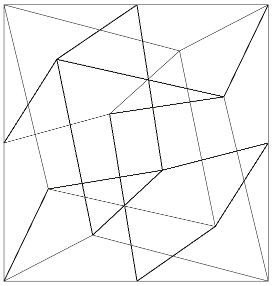
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

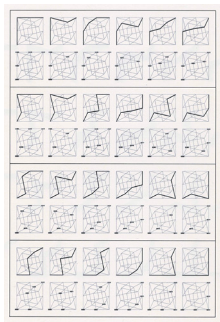
[7] Dimensions I, 1978 / 1979.

Para un hipercubo de dimensión 4, sus datos están determinados por las siguientes relaciones:

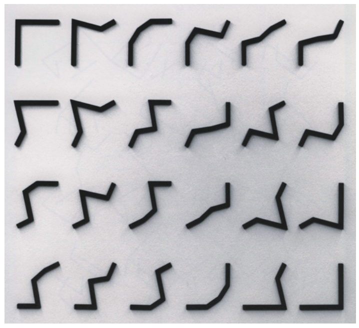
Dimensión	Vértices	Lados	Cuadrados	Cubos	Hipercubo
4	16	32	24	8	1

En las siguientes obras, P 228, P 229 A, P 226 EE, se parte de una plantilla del hipercubo proyectado en dos dimensiones y las obras se generan por una selección combinatoria de líneas del hipercubo o por búsqueda de caminos entre sus puntos significativos



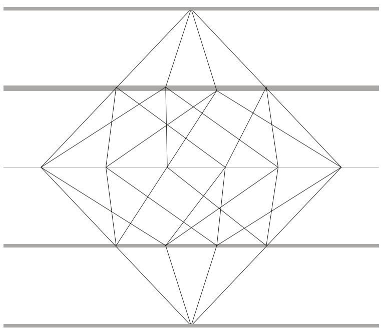


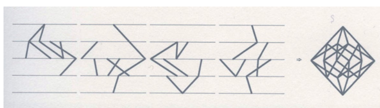
P 228

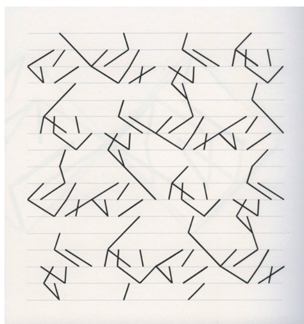


P 229 A

En el proyecto P 226 EE, se divide horizontalmente el hipercubo en cuatro bandas y se van seleccionando, a modo de escritura pautada, líneas del propio hipercubo. La obra final está compuesta de una estructura de 3 x 3 = 9 casillas en donde en cada una de ellas se sitúa uno de los signos generado.







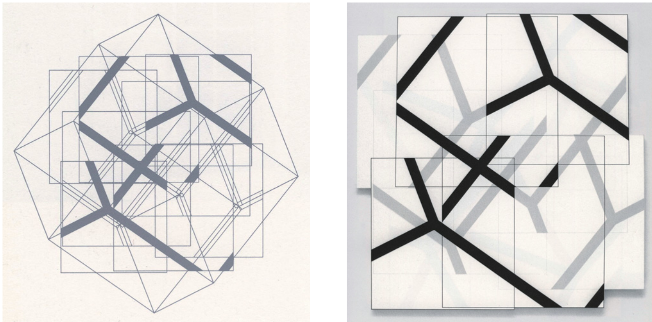
P 226 EE

8. Dimensiones II, 1987 / 1989[8]

En los proyectos de *Dimensiones II*, las 4 rotaciones dimensionales de un hipercubo se convierten en un elemento adicional para generar formas y signos. Un hipercubo 4-dimensional es el resultado de una relación estructural de 8 cubos interconectados. En este trabajo particular, cada uno de estos 8 cubos se ve como a través de una ventana

[8] Dimensions II, 1987 / 1989.

cuadrada de rotación 0, 0, 0. Cuatro de los cubos se representan en su vista frontal (negra) y cuatro en su vista trasera (gris).



P 411 C

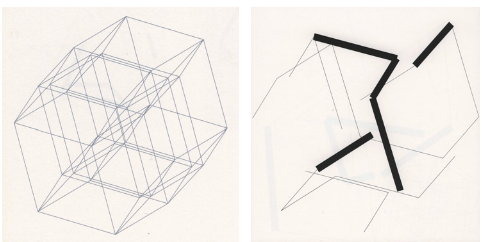
9. Grupo de líneas, 1989 / 1990[9]

La serie de obras *Grupo de líneas* está basada en un hipercubo de cinco dimensiones: una estructura construida por un conjunto de 80 líneas. Para realizar las obras se eligen de esta estructura un conjunto de 20 líneas, conteniendo cuatro líneas por cada una de las direcciones del espacio del hipercubo. Cada dirección dimensional está representada por cuatro líneas paralelas, representadas por 3 líneas delgadas y una gruesa.

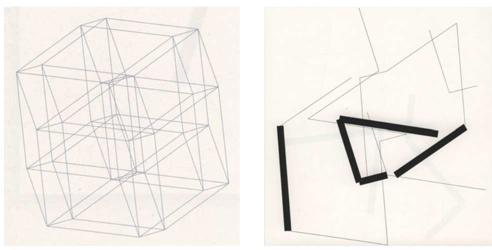
Para un hipercubo de dimensión 5, sus datos están determinados por las siguientes relaciones:

Dimensión	Vértices	Lados	Cuadrados	Cubos	Hipercubo
5	32	80	80	40	10

Los trabajos P 453 AD/4 y P 453 AB/9, muestran combinaciones posibles de proyecciones en dos dimensiones del grupo de 20 líneas de una rotación dada. La selección de las rotaciones y proyecciones, en este trabajo, son aleatorias.



P 453 AD / 4



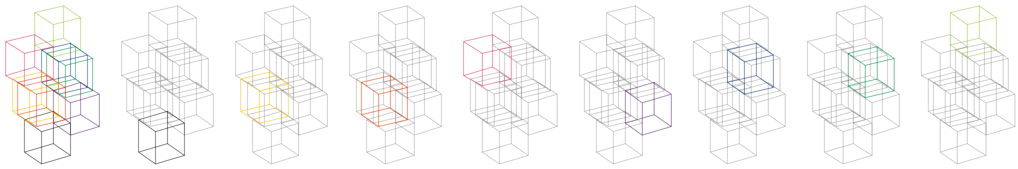
P 453 AB / 9

[9] Line Cluster, 1989 / 1990.

10. Glifos en láser 1991 / 1992[10]

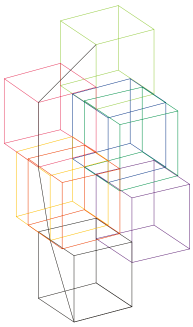
Las obras de esta serie están basadas en un hipercubo de 6 dimensiones. Esta estructura geométrica está definida por 32 diagonales, de forma que los dos puntos extremos de cada una de las diagonales son diametralmente opuestos en la propia estructura. La obra está compuesta de líneas rectas que unen puntos diametralmente opuestos, dos a dos, de la estructura.

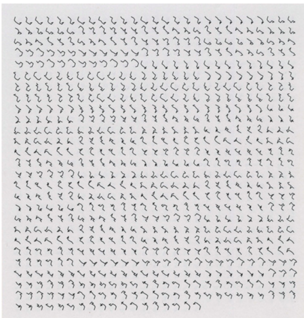
En la estructura del hipercubo se puede observar que en la dirección 2 y 5 hay dos cubos paralelos en la misma dirección.



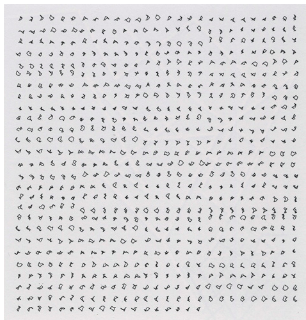
1 2 2 3 4 5 5 6

Algunas de las obras de esta serie están basadas en una única línea formada por 6 tramos, uno por cada dirección del espacio del hipercubo. Estos proyectos se presentan a modo de desarrollo de posibles combinaciones de trayectos en una matriz de 27 x 27 = 729 casillas, de las que 9 están libres. Por lo tanto el resultado de la obra está formado por 720 posibilidades:



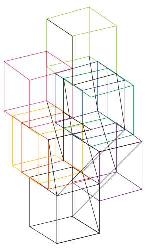


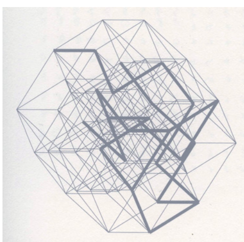
P 480 / 101011



P 480 / 111110

La siguiente obra está formada por 4 grupos de líneas de 6 tramos cada uno: un tramo por cada dirección espacial del hipercubo de 6 dimensiones. La proyección bidimensional de estos grupos está recortada en una plancha de metal con láser para formar un relieve.



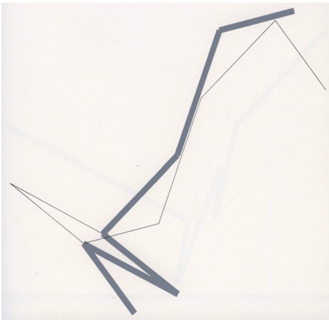


P 486 K

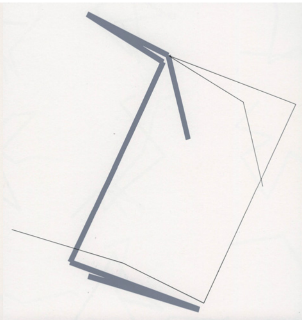
[10] Laserglyphs, 1991 / 1992.

11. Contrapunto, 1993 / 1994[11]

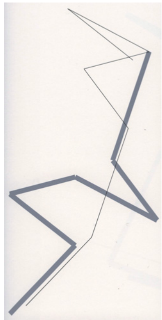
La estructura utilizada para esta serie de dibujos es, igual que en el caso anterior, un hipercubo de 6 dimensiones proyectado sobre un plano bidimensional. Para realizar cada una de las obras, se eligen dos líneas de cada una de las direcciones del hipercubo: una línea fina y negra, y otra, gruesa y gris. Estas dos líneas se mantienen visualmente conectadas porque tienen al menos un punto en común de la estructura. Ambas líneas mantienen entre sí una relación comparable a la sucesión de sonidos en la forma musical del contrapunto. En cada trabajo, el formato del cuadro es el resultado del tamaño y localización de las dos líneas trazadas.



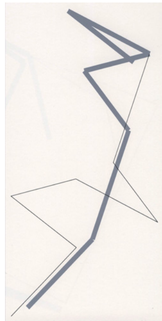
P 496 C



P 496 J



P 496 i1



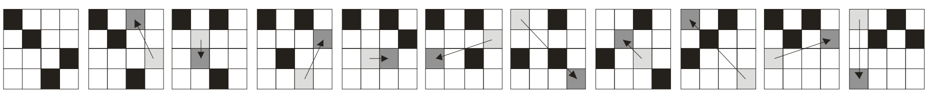
P 496 i2

6.2- MAX BILL

1. 11 x 4:4, 1963 / 1970

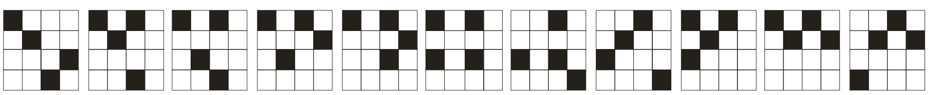
Bajo este título se agrupan 11 obras cuya principio generador está muy relacionado: 4 grupos de cuadrados de 4 elementos cada uno: 4 + 4 + 4 + 4 = 16. Dada una matriz cuadrada de 4 x 4 = 16 casillas, para componer la obra se crean 4 grupos de cuadrados de 4 elementos cada uno, de manera que juntos forman las 16 casillas de la matriz: 4 + 4 + 4 + 4 = 16.

Para crear cada grupo de 4 casillas marcadas se sigue el siguiente procedimiento: para crear el primer grupo, se parte de una opción simétrica con respecto a la diagonal principal descendente de izquierda a derecha, 1. Para cambiar de un grupo al siguiente, se mueve solamente una casilla de posición:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Como la serie está formada por 11 obras, se obtienen 11 grupos de matrices diferentes:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

---

[11] Counterpoint, 1993 / 1994.

Numéricamente, la secuencia de las combinaciones de 4 elementos dentro de cada una de las matrices, se especifica según las siguientes tablas:

1	2	3	4
5	**6**	7	8
9	10	11	**12**
13	14	**15**	16

1	2	**3**	4
5	**6**	7	8
9	10	11	12
13	14	**15**	16

1	2	**3**	4
5	6	7	8
9	**10**	11	12
13	14	**15**	16

1	2	**3**	4
5	6	7	**8**
9	**10**	11	12
13	14	15	16

1	2	**3**	4
5	6	7	**8**
9	10	**11**	12
13	14	15	16

1	2	**3**	4
5	6	7	8
9	10	**11**	12
13	14	15	16

1	2	**3**	4
5	6	7	8
9	10	**11**	12
13	14	15	**16**

1	2	**3**	4
5	**6**	7	8
9	10	11	12
13	14	15	**16**

1	2	**3**	4
5	**6**	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

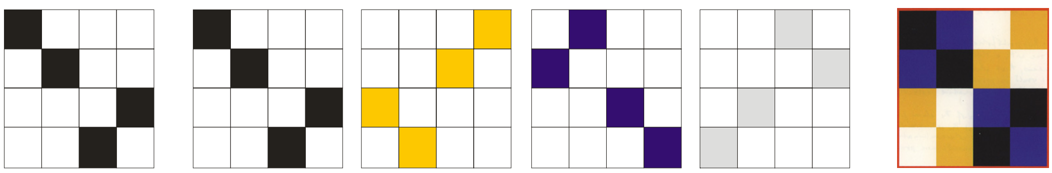
1	2	**3**	4
5	**6**	7	**8**
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	**3**	4
5	**6**	7	**8**
9	10	11	12
13	14	15	16

Según estas tablas, el resultado de las casillas marcadas que tiene cada uno de los 11 cuadros que representan la serie, está determinado por la siguiente secuencia:

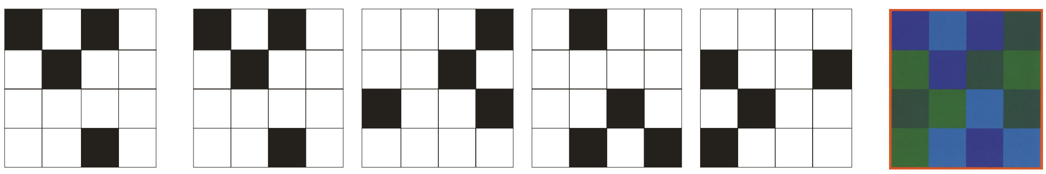
1	1	6	12	15	5	1	3	8	11	9	1	3	6	9
2	1	3	6	15	6	1	3	9	11	10	1	3	6	8
3	1	3	10	15	7	3	9	11	16	11	3	6	8	13
4	1	3	8	10	8	3	6	9	16					

Para la realización de la primera obra, se utiliza el primer grupo y se gira cuatro veces, hasta completar la matriz de 16 casillas y a cada uno de los giros se le atribuye un color diferente:

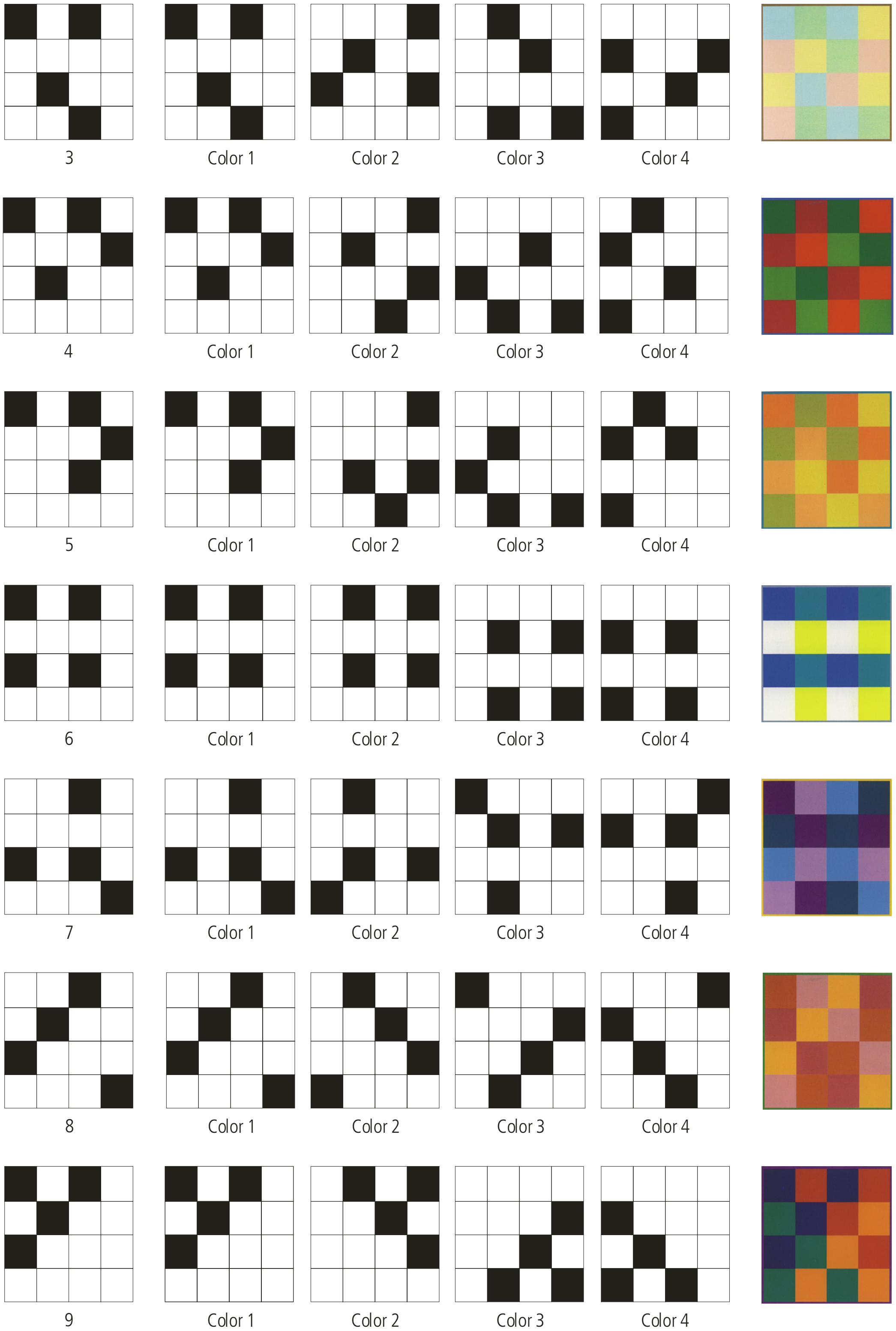


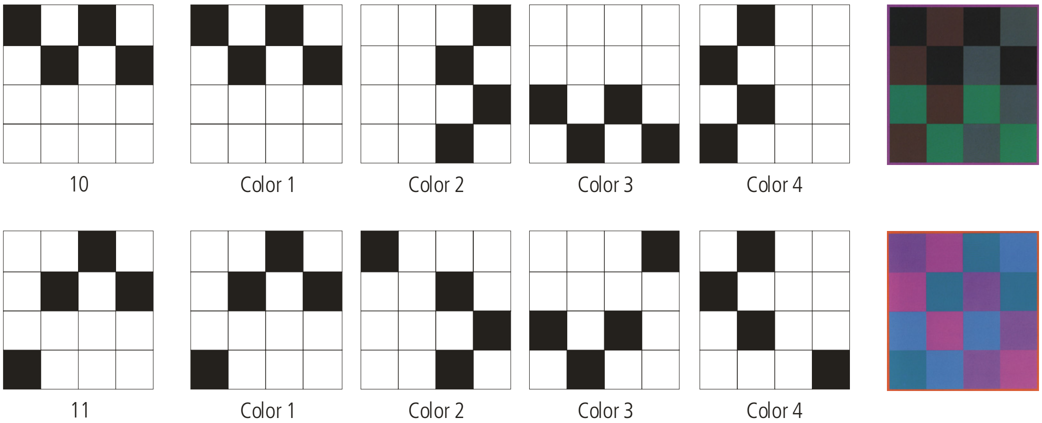
1

Para la creación del resto de las obras, el proceso es el siguiente:



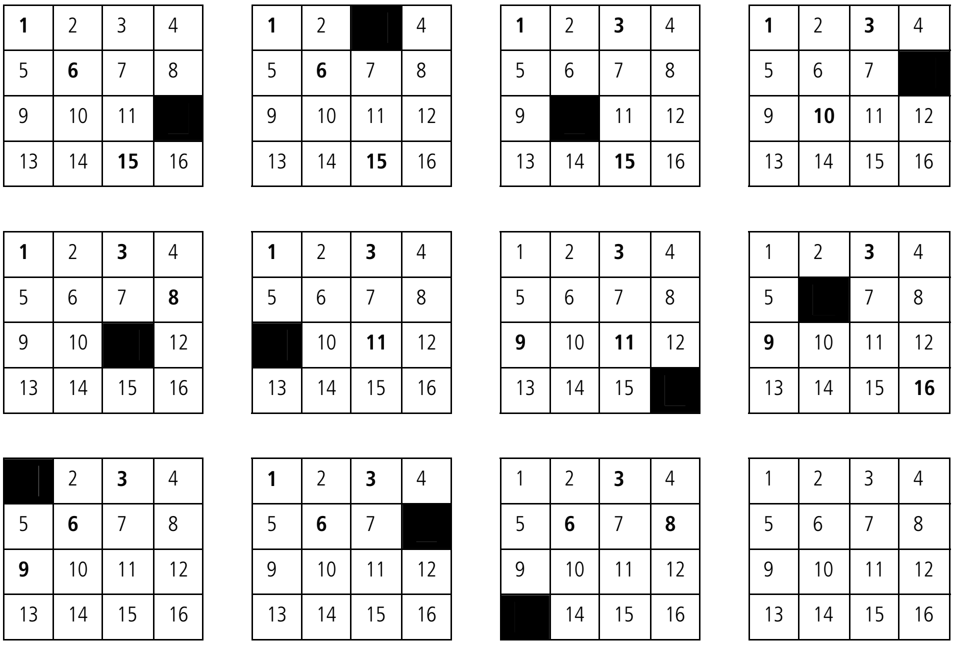
2 Color 1 Color 2 Color 3 Color 4


3
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4
4
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4
5
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4
6
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4
7
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4
8
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4
9
Color 1
Color 2
Color 3
Color 4



Cada composición está realizada con un grupo diferente de 4 colores. Esto significa que cuando se toman los colores de todas las composiciones se obtienen 44 colores diferentes: 4 x 11 = 44. Se podrían hacer variaciones de esta serie manteniendo las estructuras y cambiando los grupos de color que se le aplican, bien, manteniendo los grupos establecidos pero aplicados a otras estructuras o, incluso rehaciendo los grupos de color, de forma que las combinaciones posibles de color se hacen ilimitadas.

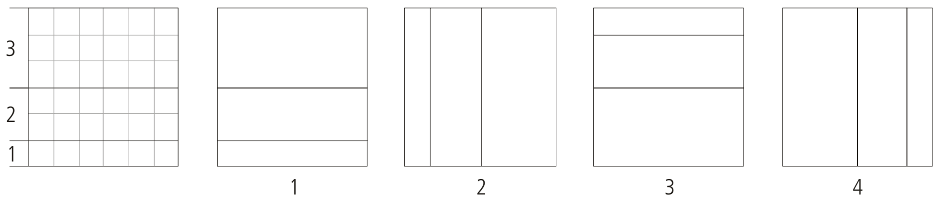
La secuencia de la casilla que cambia, está representada en la siguiente serie:



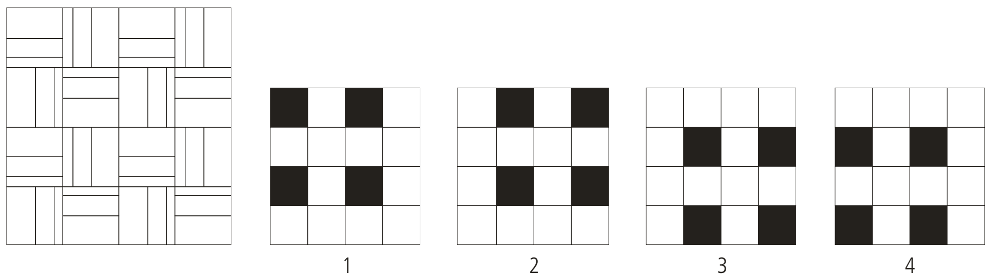
2. Sistema con cinco centros de cuatro colores, 1970[12]

Dado 1 módulo cuadrado dividido por dos líneas paralelas entre sí de forma que la relación entre los espacios que se generan en su división sea: 1:2:3, o dicho de otra forma, se divide el cuadrado en tres partes en el siguiente orden y proporciones: 1/2, 1/3, 1/6.

Este módulo se gira 4 veces, en el sentido de las agujas del reloj, y se obtienen 4 módulos iguales en estructura pero diferentes en orientación: 1, 2, 3, 4:



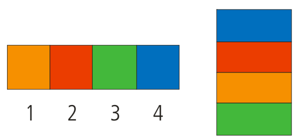
Con estos módulos se completa una matriz de 4 x 4 = 16 cuadrados, de forma que en cada uno de los cuadrados de la matriz se inserta uno de ellos.



El orden y la frecuencia con que aparecen cada uno de los módulos en la matriz, está determinado por las ilustraciones de los patrones que acompañan a la matriz. Se puede observar que cada una de estas disposiciones se obtiene por giro de los resultados obtenidos con el módulo 1. Y que juntos todos los módulos suman el total de casillas de la matriz: 4 + 4 + 4 + 4 = 16. La secuencia de localización de estos módulos, leyendo la matriz de izquierda a derecha y de arriba abajo es la siguiente:

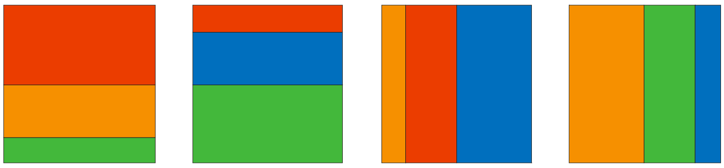
1	2	1	2
4	3	4	3
1	2	1	2
4	3	4	3

Esta serie tiene una estructura de color según el siguiente código: se eligen cuatro colores: naranja, rojo, verde y azul en una determinada secuencia circular: verde, naranja, rojo y azul, de manera que la relación entre dos colores colindantes, responde a esta sucesión de tonos.



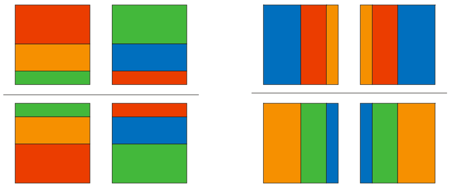
[12] System mit fünf vierfarbigen zentren, 1970.

Si se aplican estos colores a los módulos 1, 2, 3, 4 obtenidos anteriormente y según los criterios de color establecidos previamente, se obtienen nuevos módulos cromáticos: A, B, C, D.



A B C D

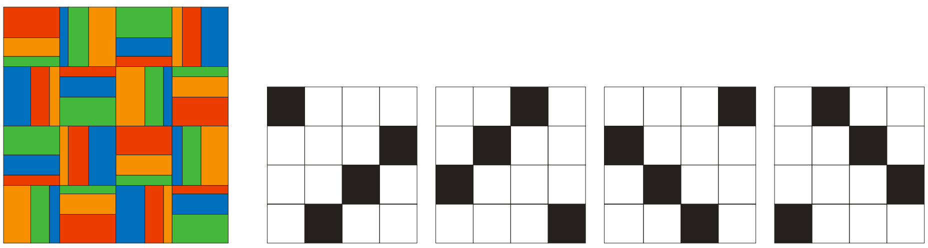
Cada uno de estos módulos de color se puede presentar en la posición indicada o en su simétrico:



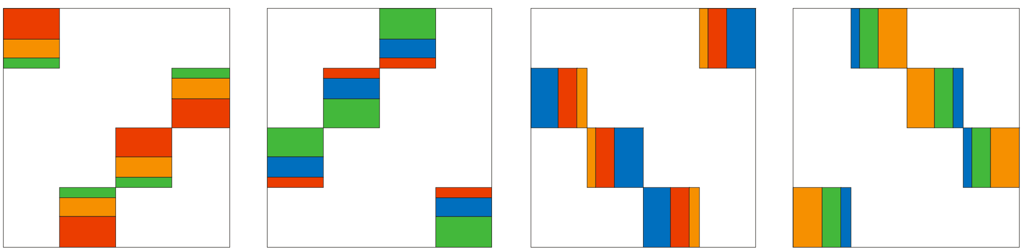
La secuencia cromática para completar la matriz de 4 x 4 según los módulos indicados, atendiendo a su secuencia cromática (se puede presentar el módulo y su simétrico) y a su horizontalidad o verticalidad, es la siguiente:

A	D	B	C
C	B	D	A
B	C	A	D
D	A	C	B

Atendiendo a la frecuencia con que aparece cada uno de estos módulos cromáticos en la totalidad de la matriz, se observa que se vuelve a repetir el mismo patrón visto anteriormente: un módulo, que girado cuatro veces, permite completar la matriz:

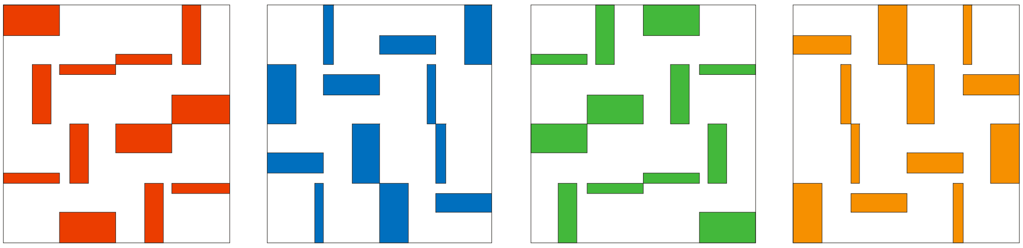


A B C D

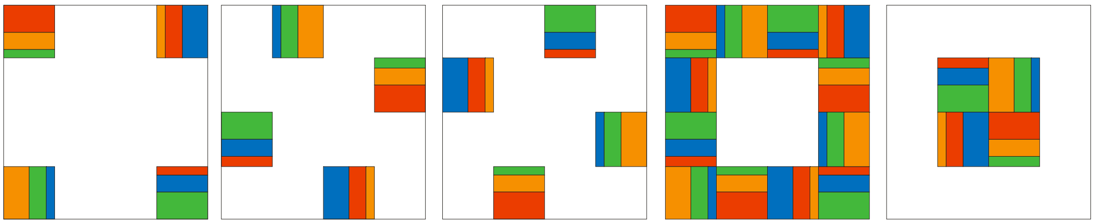


En cada uno de estos grupos predomina uno de los 4 colores que forman parte de la obra y falta otro. De izquierda a derecha, en el primer grupo, predomina el rojo y falta el azul; en el segundo, predomina el verde y falta el naranja; en el tercero, predomina el azul y falta el verde; y finalmente, en el cuarto, predomina el naranja y falta el rojo.

Esta obra está llena de características de este tipo. Contiene en su interior una gran capacidad de mutaciones. Si se divide la superficie total de la matriz por grupos de color, se obtiene, una vez más, un conjunto de cuatro módulos iguales cuya diferencia se encuentra sólo en su orientación espacial:

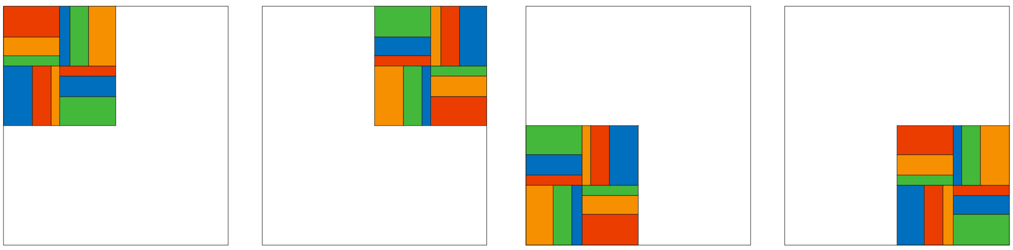


Si se recorre la matriz de forma circular, los módulos de la periferia forman tres grupos completos de 4 módulos de color A, B, C, D, y el centro está representado por el cuarto grupo cromático completo:



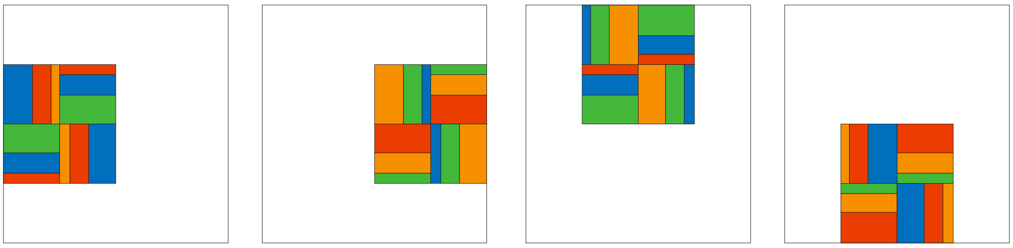
Los módulos al girar mantienen la relación de orden cromático entre ellos.

Si se fragmenta la matriz que representa a la obra en cuatro grupos de cuatro cuadrados cada uno, seleccionados al trazar las medianas a la matriz y seleccionar los grupos de cuatro cuadrados que se agrupan en torno a los vértices de la matriz, se obtienen agrupaciones de 4 módulos cuyos componentes se agrupan en torno a un centro en orden decreciente y de modo que las superficies más pequeñas de cada uno de los módulos, 1/6, formen una cruz en la que cada una de sus astas está representada por uno de los colores de la secuencia:



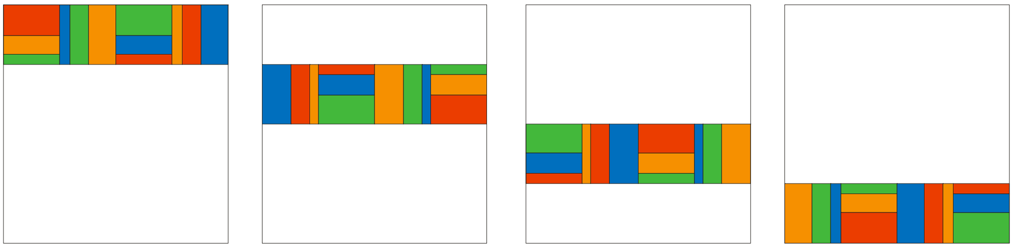
Si se observan las proporciones de los colores presentes en cada uno de estos grupos, se puede decir que la suma de las partes del mismo color en cada grupo, completan un cuadrado monocromo en el que cada una de sus partes es diferente en proporción. Esta subdivisión aporta cuatro centros que corresponden a cada punto de intersección de los cuatro cuadrados de un mismo grupo, más un centro en el medio de la matriz que agrupa a los cuatro grupos cromáticos que están situados en cada uno de los cuadrantes de la matriz. Los grupos cromáticos son idénticos si se considera su distribución diagonal con respecto a las diagonales principales, ascendente y descendente, de la matriz. Y con respecto a las diagonales entre sí, los dos grupos de color de cada una de ellas, están girados.

Si se fragmenta, esta vez, la matriz en cuatro grupos de cuatro cuadrados cada uno, seleccionados al trazar las medianas a la matriz y seleccionar los grupos de cuatro cuadrados que se agrupan en torno al centro de cada uno de los lados de la matriz, se obtienen nuevas agrupaciones de 4 módulos cuyos componentes se caracterizan porque, dos a dos, se comportan de forma contraria: dos se aproximan al centro, según el tamaño de las partes que componen el módulo, de forma progresiva (de menor tamaño a mayor tamaño), y los otros dos, de forma regresiva (de mayor a menor). Cromáticamente, la distribución del color, desde el punto de vista cuantitativo es desigual. En cada uno de ellos existe un protagonista cromático. Según la ilustración, de izquierda a derecha, los protagonistas son: azul, naranja, verde y rojo.

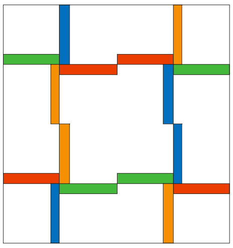


Se puede dividir la obra verticalmente en columnas de cuatro cuadrados superpuestos cada una. Las columnas que se obtienen tienen una doble simetría entre ellas, dos a dos: las dos primeras empezando por la izquierda, y las dos primeras empezando por la derecha. Desde el punto de vista cromático, mantienen, por parejas, la misma sucesión cromática de módulos. En cada una de las columnas, se completa un cuadrado completo monocromo, obteniéndose así, cuatro cuadrados monocromos completos.

Si de divide la obra en 4 líneas horizontales, se produce una doble simetría vertical y horizontal entre filas, dos a dos. Empezando de arriba abajo: la primera fila con la segunda, y la tercera con la cuarta. Se observa también, un orden de secuencia y de igualdad de módulos entre la primera y la tercera fila, y la segunda y la cuarta. En cada una de las filas se obtienen, si se suman todos las partes del mismo color de cada uno de los cuatro módulos que forman la fila, cuatro cuadrados monocromos de cada uno de los colores que forman parte de la composición.



Finalmente, si se toman sólo las partes más pequeñas de cada módulo, 1/6, y se observa su distribución, se obtienen composiciones de 4 cruces policromas. Esta representación de la obra también contribuye a la visualización de los cinco centros que son tema de la obra: cuatro que corresponden al centro de cada una de las cruces y el punto de intersección de las medianas del cuadrado de la matriz que, aunque no es visible por intersección de líneas, su presencia se hace patente al encontrarse los dos planos formados por las astas horizontales y verticales.



El tema de esta obra es la variación como "rostro visible de la unidad".[13] Esta técnica compositiva parte de un tema dado, unos módulos cromáticos, que forman una obra, e introduce con ellos modificaciones de ritmo, secuencias, proporciones, centros,…

[13] Max Bill, *Max Bill*, DPA 17 (Documents de Projectes d'Arquitectura), Departamento de Proyectos d'Arquitectura, Escola d'Arquitectura de Barcelona, Escola d'Arquitectura del Vallès, Universitat, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Departamento de Proyectos d'Arquitectura, Barcelona, 2001, p. 53. En esta publicación aparece un artículo de Carles Martí y Joan Llecha que se titula "*Max Bill a través de cinco conceptos*".

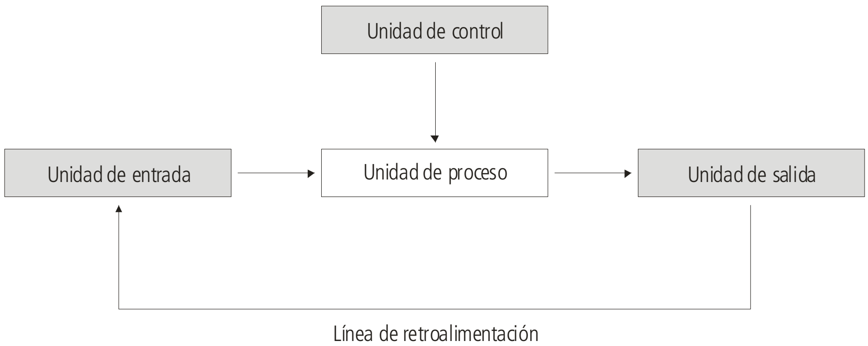
16.- RECURSIVIDAD

Muchas estructuras geométricas pueden ser definidas a través de la expansión de un módulo tras otro.

16.1.- CONCEPTO

Los procesos de recursividad se caracterizan porque una misma operación se realiza de forma repetida un número determinado de veces, y la salida de una repetición o iteración es la entrada de la siguiente.

Se pueden utilizar los términos iteración, retroalimentación y recursividad de una forma sinónima. El proceso es el siguiente:



El modelo o sistema recursivo está compuesto por tres unidades de almacenamiento (unidad de entrada, unidad de salida y unidad de control) y una de proceso (unidad de proceso), todas conectadas por cuatro líneas de transmisión. El sistema se ejecuta por un contador o acumulador, que controla la acción de cada componente y cuenta los ciclos completos que se van realizando. La unidad de control se utiliza para cambiar las condiciones de los datos facilitados por la unidad de entrada o influir en la forma de su proceso de transformación para convertirlos en datos de salida. En este sistema hay ciclos preparatorios y ciclos de ejecución, y cada uno de ellos puede desglosarse en pasos elementales:

Ciclo preparatorio:

Paso 1: Cargar información en la unidad de entrada.
Paso 2: Cargar información en la unidad de control
Paso 3: Transmitir el contenido de la unidad de control a la unidad de proceso.

Ciclo de ejecución:

Paso 1: Transmitir el contenido de la unidad de entrada y cargarlo en la unidad de proceso.
Paso 2: Procesar la información de la unidad de entrada.
Paso 3: Transmitir el resultado y cargarlo en la unidad de salida.

Paso 4: Transmitir el contenido de la unidad de salida y cargarlo en la unidad de entrada.

Para iniciar la operación o ciclo del proceso, se ejecuta el ciclo preparatorio. Después se comienzan a ejecutar los ciclos de ejecución un número determinado de veces, cuyo cómputo se obtiene controlando las salidas actuales. La ejecución de un ciclo completo de ejecución se llama iteración.

La recursividad es el proceso de definir algo en términos de sí mismo y a veces se llama definición circular.

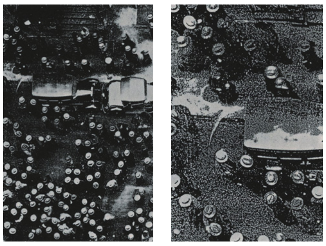
Los ejemplos de recursividad abundan. Por ejemplo, una forma recursiva de definir un número entero que pertenece a una serie dada: 0, 1, 2, 3, 4, 5, o 9, 8, 7, es sumar +1 o restar -1 al número entero.

Para que un lenguaje de computadora sea recursivo, una función debe ser capaz de llamarse a sí misma. Un sencillo ejemplo es la función *fact(),* que calcula el factorial de un número entero. El factorial de un número N es el producto de todos los números enteros entre 1 y N. Por ejemplo, el factorial de 3 es igual a 1 x 2 x 3, cuyo resultado es 6.

Una máquina fotocopiadora a la que se le ordena repetidamente que reduzca una imagen al 50% es también un buen ejemplo de recursividad. Si se coloca una primera imagen sobre el cristal expositor de originales, y se pulsa el botón de fotocopiar, se obtiene una copia de la imagen original reducida uniformemente al 50%, es decir, a la mitad. La imagen obtenida se puede volver a colocar sobre la pantalla de exposición de originales y pulsar de nuevo el botón para, una vez más, obtener una nueva imagen al 50% de la anterior. Este proceso se puede repetir tantas veces como se desee y teniendo en cuenta que después de realizar un determinado número de copias, la imagen que se obtenga será tan pequeña, casi como un punto, que continuar copiándola no aportará nada al proceso. Se puede decir que las copias que se van obteniendo no son iguales al original sino similares a él. El proceso para generar las copias es, entonces, un proceso de transformación de la imagen por semejanzas o por similitudes. Este proceso describe con bastante exactitud el concepto de un sistema recursivo.

Si en lugar de reducir la imagen, se amplia, se crea un proceso degenerativo de la imagen. Este procedimiento basado en la obtención sucesiva de copias, por ampliación, de forma indefinida, produce, a medida que se realiza, una creciente erosión gráfica en la imagen, modificando su estado original y provocando una imagen, en cierto modo, impredecible. El proceso degenerativo de la imagen se debe a diversos factores como: la disposición irregular del toner de la fotocopiadora sobre el papel que, al ampliar la imagen a grandes tamaños, hace que las manchas negras de tinta, se fragmenten y aparezcan en su interior pequeñas manchas blancas; el contraste de luminosidad elegido para realizar la copia, uniformiza zonas de la imagen haciendo que parte de su información desaparezca; el uso de distintas máquinas fotocopiadoras para realizar el proceso, ya que cada una de ellas se caracteriza por registrar la imagen con una textura determinada, contaminando, de este modo el aspecto visual de la imagen.

La siguiente imagen de Alcalá Canales,[1] de la serie *El "crack" del 29*, muestra un ejemplo del proceso degenerativo por ampliaciones sucesivas de la imagen:



Aunque diferentes en estrategia y resultados, todos estos procesos se caracterizan porque se producen de acuerdo a los mismos principios: son generados "a partir de un grupo de puntos de arranque (axiomas), mediante la aplicación reiterada de reglas de inferencia. Así, el conjunto crece y crece, y sus nuevos elementos se van componiendo, de algún modo, con los elementos anteriores, en una especie de 'bola de nieve' matemática".[2] Esta es la esencia de la recursividad: definir algo en función de versiones más simples de sí mismo, en lugar de hacerlo explícitamente. Los números de Fibonacci y los números de Lucas, vistos anteriormente, son ejemplos de recursividad: a partir de dos números, y gracias a la aplicación de una regla recursiva, se generan infinitos conjuntos de números relacionados entre sí.

La enumeración recursiva es un proceso donde surgen elementos nuevos a partir de elementos anteriores, por la acción de reglas establecidas. Pero el propio proceso generativo puede producir sorpresas o generar elementos impredecibles dentro de la secuencia. Se trata de aprovechar estas cualidades recursivas capaces de asumir un comportamiento cada vez más complejo. Parece adecuado pensar que los sistemas recursivos, si se les complica adecuadamente, se convierten en una herramienta muy potente para poderse desviar de cualquier modelo prefijado. En vez de diseñar procedimientos que sólo se llaman así mismos, se trata de trabajar con procedimientos muy sutiles que sean capaces de, en su desarrollo, modificarse a sí mismos. Es decir, crear programas que actúen sobre otros programas, extendiéndolos, mejorándolos, generalizándolos, reordenándolos, etc. Se trata de trabajar con una recursividad entrelazada.

16.2.- LA CURVA DE HILBERT O CURVA DE PEANO

Giuseppe Peano (1858-1932) y David Hilbert (1862-1943), crearon una línea particular conocida como la curva de Hilbert o curva de Peano que se utilizaba como patrón para completar un plano.

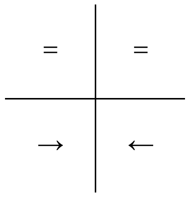
El proceso general de construcción de la curva de Hilbert o curva de Peano es el siguiente:

1. Se comienza con un módulo o patrón cuadrado, dividido por sus medianas, sobre el que se ha dibujado una línea en forma de "U" invertida.

2. Se multiplica el módulo elegido cuatro veces y se sitúan sobre una matriz cuadrada de 2 x 2 = 4 casillas de la siguiente forma: los dos módulo superiores de la matriz permanecen en la misma posición de origen, U invertida; el módulo de la esquina inferior derecha, se gira, con respecto a su posición de origen, 90º en el

[1] José Ramón Alcalá y Fernando Niguez Canales, *Copy-Art: la Fotocopia como Soporte Expresivo*, Instituto de Estudios Juan Gil-Albert y Centro Eusebio Sempere de Arte y Comunicación Visual, colección Paraarte, Alicante, 1986, p. 161.
[2] Peitgen, Jürgens y Saupe, *Chaos and Fractals*, New Frontiers of Science, Springer-Verlag, New York, 1992.

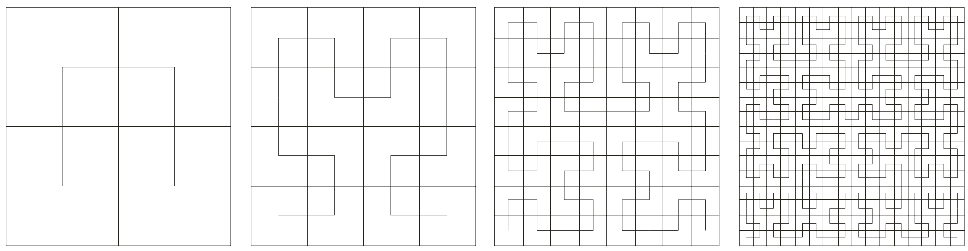
sentido contrario a las agujas del reloj; y, el módulo de la esquina inferior izquierda, se gira, con respecto a su posición de origen, 90º en el sentido de las agujas del reloj;



3. Se unen los extremos de las líneas de los cuatro módulos obtenidos, formando una especie de letra "Y".

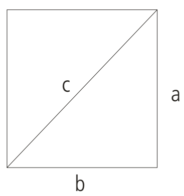
4. A partir de aquí, se comienza un nuevo procedimiento: se repiten los tres pasos anteriores con el módulo obtenido en (3), tantas veces como se desee.

Se obtiene así, una curva cada vez más compleja que cubre el plano de una forma continua.



16.3.- ÁRBOLES PITAGÓRICOS

Pitágoras que murió al comienzo del siglo V a.c., fue conocido por sus contemporáneos, como fundador de una hermandad religiosa en el sur de Italia, que jugó un rol político muy influyente en el siglo VI a.c. A Pitágoras, o en cualquier caso a su escuela, se le atribuye un descubrimiento muy importante: la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado de lado 1 o la unidad; esto es, la diagonal al cuadrado de un cuadrado de lado 1 o la unidad, es igual a la suma de los cuadrados de sus lados: $a^2 + b^2 = c^2$



Si $a = b = 1$, entonces, $1^2 + 1^2 = c^2$, es decir, $c^2 = 2$, y por lo tanto $c = \sqrt{2}$.

Este descubrimiento produjo la necesidad de extender el sistema numérico a los números irracionales, ya que $\sqrt{2}$, es un número irracional.

El cómputo y uso de las raíces cuadradas es un tema que ha inspirado a matemáticos y artistas de todos los tiempos y les ha llevado a descubrir algunas construcciones geométricas muy interesantes. Una de ellas son los árboles pitagóricos.

Su construcción se realiza según el siguiente método:

1. Se dibuja un cuadrado.

2. En uno de los lados del cuadrado, se dibuja un triángulo rectángulo de forma que la unión entre el triángulo y el cuadrado sea por su hipotenusa.

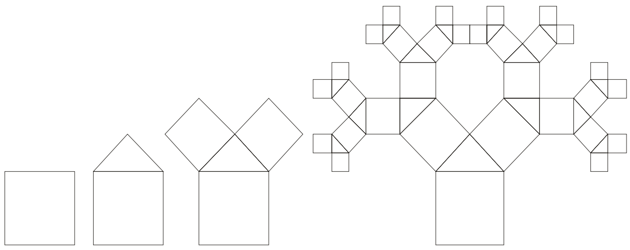
3. Se añade un cuadrado a cada uno de los lados libres del triángulo, de longitud el lado del triángulo correspondiente.

4. Se dibujan dos nuevos triángulos rectángulos y se unen a uno de los lados de cada uno de los nuevos cuadrados dibujados.

5. Se dibujan cuatro nuevos cuadrados y se sitúan, dos a dos, en los lados de los triángulos rectángulos dibujados.

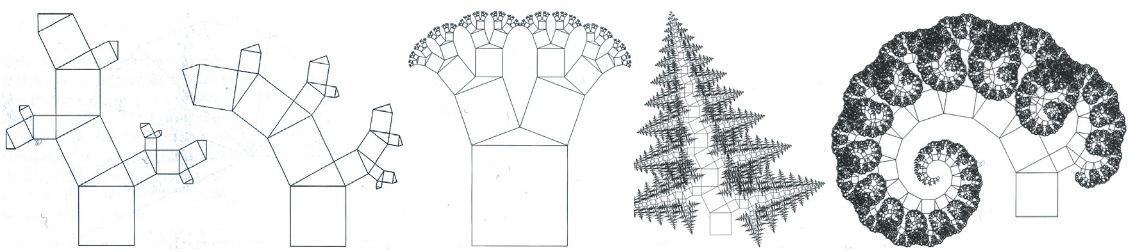
6. Se dibujan cuatro nuevos triángulos rectángulos y se colocan, uno a uno, sobre uno de los lados de los cuatro cuadrados obtenidos.

7. Se dibujan ocho nuevos cuadrados, ocho nuevos triángulos, y así sucesivamente.



Una vez entendida esta construcción básica, se puede modificar de varias formas. Por ejemplo, los triángulos rectángulos que se van añadiendo durante el proceso, no tienen que ser necesariamente triángulos isósceles, se pueden utilizar cualquier otro tipo de triángulo rectángulo. Además, los triángulos rectángulos no tienen por qué estar dibujados siempre con la misma orientación: se puede variar su orientación después de cada paso. Se pueden introducir otras variaciones como la posibilidad de incluir cualquier otro tipo de triángulo que no sea rectángulo: equiláteros o isósceles.[3]

A continuación se muestran algunos ejemplos de estas variaciones:



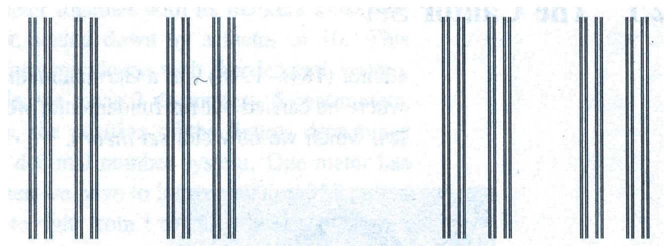
[3] Peitgen, Jürgens y Saupe, *op. cit.,* 1992.

16.4.- CONJUNTO DE CANTOR

Cantor (1845-1918) fue un matemático alemán de la Universidad de Halle donde desarrolló su trabajo más importante sobre el fundamento de las matemáticas, llamado teoría de conjuntos.

El conjunto de Cantor se publicó por primera vez en 1883 y surgió como un ejemplo de ciertos conjuntos excepcionales.

El conjunto de Cantor es un conjunto infinito de puntos del intervalo unidad [0,1], que se visualizan gráficamente, por medio de líneas verticales de igual longitud, con una distribución determinada por un conjunto de números que pertenecen al conjunto de Cantor: 0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27, 2/27,…



El proceso de construcción del conjunto de Cantor está determinado por la siguiente secuencia:

1. Se comienza eligiendo y definiendo el intervalo [0,1].

2. Se divide el intervalo [0,1] en tres parte iguales, de forma que se creen tres nuevos subintervalos de longitud 1/3 dentro del intervalo [0,1]: [0,1/3], [1/3, 2/3] y [2/3, 1].

3. Se suprime el intervalo central: el intervalo [1/3, 2/3] y se dejan los otros dos intervalos: [0,1/3] y [2/3, 1], de longitud 1/3.

4. Se repite este proceso sobre cada uno de los intervalos que se han obteniendo, quitando a cada uno de ellos su intervalo central. Se obtienen así, cuatro nuevos intervalos de longitud 1/9.

Si se continúa con este proceso, se crea un sistema recursivo que genera una secuencia de intervalos según el siguiente criterio:

1. Un intervalo después del primer bucle o iteración.

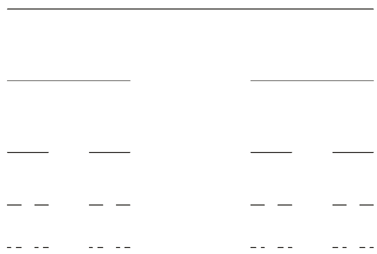
2. Dos intervalos después del segundo bucle o iteración.

3. Cuatro intervalos después de la tercera iteración.

4. Ocho intervalos después de la cuarta iteración. Y así sucesivamente.

En general, se puede decir, que se crean 2^n intervalos de longitud $1/3^n$ después de la enésima iteración.

El conjunto de Cantor es el conjunto de puntos que quedan cuando se suprimen los intervalos intermedios de un intervalo infinito de puntos [0,1].



16.5.- LA CURVA DE KOCH

Helge von Koch fue un matemático sueco que, en 1904, introdujo lo que ahora se llama la curva de Koch. Adaptando convenientemente tres copias giradas de la curva de Koch, se obtiene una figura, que por razones obvias se llama la curva de copos de nieve o isla de Koch.

Como su nombre expresa, la curva de Koch es una curva cuya construcción se genera con el siguiente procedimiento:

1. Se comienza con una línea recta. Este objeto inicial se llama iniciador.

2. Se divide la línea en tres partes iguales.

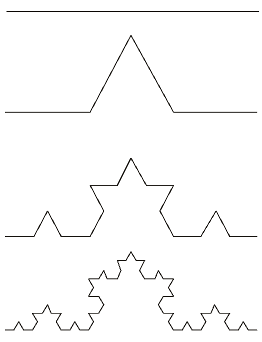
3. Se sustituye la parte central por un triángulo equilátero y se quita su base.

4. Se obtiene así, una figura compuesta por cuatro líneas rectas de igual longitud pero diferente orientación espacial: dos son líneas horizontales, y dos son líneas que forman parte de los lados de un triángulo equilátero y por lo tanto la relación entre sus lados es de 60º.

Esta secuencia describe el conjunto básico de instrucciones necesarias para generar la curva de Koch.

En las siguientes iteraciones de este proceso, se utilizará la figura de 4 líneas obtenida en el paso anterior solo que, en los pasos siguientes, se reutilizará con un factor de escala reducido. A este elemento se le llama generador.

El proceso continúa, tomando cada uno de los segmentos de línea obtenidos en el punto 4; dividiéndolos en tres partes iguales; y sustituyendo la parte central de cada uno de los tramos por un triángulo equilátero al que se suprime su base. Y así sucesivamente.



Se puede generalizar la construcción de la curva de Koch de la siguiente forma: "definir un iniciador, que debe ser un conjunto de segmentos de líneas, y un generador, que es una línea poligonal compuesta por un número de segmentos de línea conectados. Comenzando con el iniciador, se sustituye cada segmento de línea por una copia escalada adecuadamente de la curva generadora. Aquí es necesario unir cuidadosamente los puntos finales de un segmento de línea y el generador. Este procedimiento se repite hasta el infinito. En la práctica, uno se para tan pronto como la longitud del segmento de línea más largo en el gráfico esté por debajo de la resolución del dispositivo gráfico". [4]

En cada paso se obtiene una curva. Después del primer paso, se obtiene una curva compuesta por 4 segmentos de línea de la misma longitud. Después del segundo paso, se tienen 4 x 4 = 16 segmentos de línea, y después del tercer paso o iteración, 4 x 4 x 4 = 64 segmentos de líneas, y así sucesivamente. Si la línea original tiene una longitud L, después de la primera iteración, un segmento de línea tendrá una longitud igual a L x 1/3; después de la segunda iteración, la longitud de la línea tiene una longitud igual a L x $1/3^2$; después de la tercera iteración, la longitud de la línea será igual a L x $1/3^3$; y así sucesivamente. Ya que en cada iteración se genera una curva formada por segmentos de línea, se puede medir también, las longitudes que va adquiriendo a lo largo del proceso. Después de la primera iteración, su longitud es igual a 4 x L x 1/3; a continuación es igual a 4^2 x L x $1/3^2$, y así sucesivamente. Después de la iteración k, su longitud será igual a 4^k x L x $1/3^k$. Se puede observar que de iteración en iteración, la longitud de la curva crece con respecto a un factor de escala de 4/3.

16.6.- TRIÁNGULO DE SIERPINSKI[5]

Waclaw Sierpinski (1882-1969) fue un matemático polaco, profesor de Lvov y Warsaw. Fue uno de los matemáticos más influyentes de su época en Polonia y tuvo una gran reputación mundial.

La construcción geométrica básica del triángulo de Sierpinski se realiza de acuerdo al siguiente proceso:

1. Se comienza con un triángulo plano, homogéneo de color negro sobre el que se van a aplicar un conjunto de operaciones repetitivas.

2. Se marcan los puntos medios de sus tres lados y se unen para formar 4 nuevos triángulos congruentes de los que se extrae el central. Esta operación describe el método constructivo básico que se va a utilizar a lo largo de todo el proceso para generar el triángulo de Sierpinski. Después del primer paso se tienen tres triángulos congruentes cuyos lados miden, exactamente, la mitad de la longitud de cualquiera de los lados del triángulo original y que se tocan en tres puntos que son vértices comunes a dos triángulos contiguos.

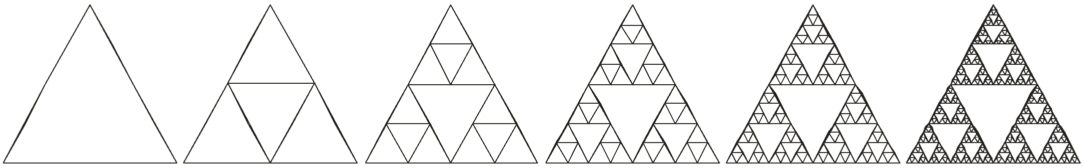
3. A continuación se realiza el mismo procedimiento anterior sobre los tres triángulos obtenidos y se repite el mismo paso tantas veces como se desee. Generalizando, se puede decir que, se comienza con un triángulo y se produce una secuencia de 3, 9, 27, 81, 243,... triángulos, en la que cada uno de ellos es una versión en escala de los triángulos encontrados en el paso anterior.

El triángulo de Sierpinski está formado por el conjunto de triángulos que quedan en el plano si se realiza este proceso infinitamente.

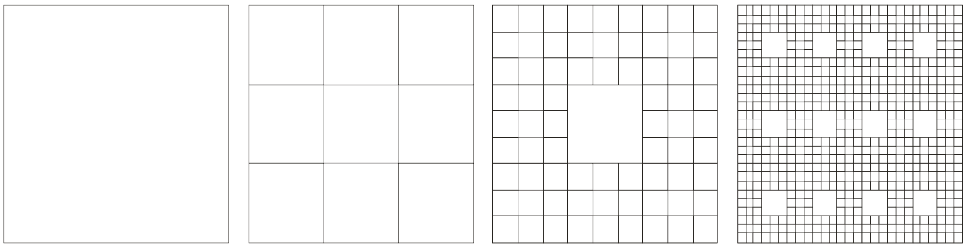
---

[4] Peitgen, Jürgens y Saupe, *op. cit.,* p. 91.

[5] *Sierpinski gasket*.



Sierpinski ha creado, además, otro proceso recursivo, derivado aparentemente del anterior, que se llama la alfombra de Sierpinski. En este sistema se comienza con un plano cuadrado que se subdivide en 9 cuadrados congruentes más pequeños de igual tamaño, de los que se suprime el del centro. Si se repite este proceso sucesivamente y de forma infinita, sobre cada uno de los cuadrados que se van generando, se obtiene el siguiente resultado:



CONCLUSIONES

Después de un trabajo tan dilatado en el tiempo, quisiera en las conclusiones compartir con todo posible lector el propio proceso de investigación y revisar cuáles fueron los objetivos del trabajo y a dónde me ha llevado este proceso.

Si se revisan los tres objetivos que se marcaron al realizar este trabajo de investigación, se pueden hacer las siguientes observaciones:

El primer objetivo fundamental de la tesis consistía en reunir una serie de conocimientos teóricos que permitiesen a un posible lector interesado introducirse en el mundo complejo del quehacer artístico considerado como producto de una forma de pensar sistémica. Este objetivo está planteado para poder ser evaluado de formas muy diferentes. Por un lado se han hecho referencias a textos de teóricos expertos en cada uno de los temas tratados, con el objeto de recoger la experiencia y el enfoque que sobre determinados conceptos pudieran ser útiles para el desarrollo de la tesis. Por otro lado, la forma de exponer los conceptos, siempre que ha sido posible, se ha llevado a cabo de una forma muy ilustrativa, para precisamente, medir el alcance que cada uno de ellos tenía y compartir el modo de organizar, decidir y desarrollar en la práctica, la complejidad de sistematizar estos conocimientos. No era el objetivo crear temas que agrupasen todos los conocimientos conocidos hasta este momento sobre su temática, sino buscar, en cada uno de ellos, el punto de vista más adecuado para comprender lo que está en juego cuando se trabaja con determinados conceptos, el marco de referencia que cada uno de ellos tiene y las posibilidades expresivas que se pueden derivar de cada uno de ellos. En este sentido los temas tratados han sido muy diferentes. Algunos de ellos, era obligado que apareciesen en una tesis de este tipo: estructuras planas estáticas, estructuras dinámicas, simetrías, operaciones geométricas con cuadrados,… porque su presencia en la expresión artística de autores de casi todos los movimientos artísticos que se han dado a lo largo de la historia son un referente. Otros, sin embargo, son una novedad en el entorno de la expresión plástica. No, porque los artistas no los hayan utilizado antes, sino porque su expresión teórica no es frecuente en el ámbito de las artes plásticas. Se utilizan en entornos relacionados con las artes del tiempo, como la música, o en tornos teóricos como el ámbito de las ciencias exactas. Estos temas, a los que estoy haciendo alusión son todos aquellos relacionados con el concepto de serie y que están basados en los números y en las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Además, a este grupo, habría que añadir el tema de los poliominós, que, habitualmente, no se recoge como un tema cuya presencia sea necesaria en los libros teóricos de ámbitos académicos sino que aparece siempre en libros de divertimento o de cosas curiosas. Y, lo completaría otro grupo de temas dedicados a las posibilidades de la combinatoria como forma expresiva, por medio de las permutaciones y las combinaciones. Finalmente, habría que añadir el tema de la recursividad, un préstamo del mundo de la ciencia que, a niveles operativos, se utiliza también en el campo artístico.

Pudiera parecer que los temas son los que tienen o deben estar, y que la elección ha debido de ser fácil; pero en la práctica, el decidir y configurar cada uno de estos referentes teóricos ha sido un camino arduo. Primero, porque no había referentes previos que hubiesen sistematizado esta forma de trabajo de un grupo de artistas; y segundo, porque la documentación disponible, en algunos casos, era escasa. La solución, llegó, como en muchos otros casos ocurre, por el análisis práctico continuo que se iba realizando durante todo el proceso de la investigación. Empezaron a aparecer referencias conceptuales concretas a las que había que dar una entidad teórica y hubo que ponerse, manos a la obra, para encontrar conocimientos teóricos que avalasen su forma de trabajo. Insisto una vez más que, la adquisición de estos conocimientos no iba dirigida a tener una visión muy especializada y abstracta de cada uno de ellos, sino, desde la operatividad, buscar marcos de referencia y definir siempre las variables que estaban en juego para poder pensar en estos conceptos de una forma sistémica; es decir, poder organizarlos de manera que se pudiera llegar a generar obras coherentes y con sentido. En este aspecto, los conocimientos adquiridos amplían el grado de libertad para proceder, según el criterio del autor, que siempre es necesario en todo quehacer artístico.

Debido a este planteamiento, no todos los temas tienen la misma extensión, aunque sí la misma importancia. Ni todos, el mismo número de ejemplos prácticos. Lo que sí comparten todos es su enfoque sistémico: esa necesidad de ser útiles para poder decidir una forma de trabajo y ser lo suficientemente sugerentes para abrir todo un campo de posibilidades al juego creativo.

Ha sido un reto establecer una comparación entre tres formas diferentes de pensar u organizar plásticamente una obra: los sistemas, los algoritmos y los programas. Como se ha demostrado en la tesis, hay artistas cuya labor creativa consiste en diseñar los propios algoritmos y programas de ordenador necesarios para producir sus obras de forma que su resultado responda a las necesidades estéticas propias de un momento determinado.

Las técnicas de programación proporcionan métodos para la resolución de problemas. Son un buen entrenamiento para organizar los pasos y recoger los datos necesarios para resolver problemas de una forma sistemática y rigurosa. El diseño de algoritmos, primero, y su codificación en lenguajes de programación de alto nivel, después, muestran un camino a seguir, indicando los pasos específicos y necesarios que hay que realizar para alcanzar el objetivo planteado. Este proceso enseña, además de la gramática y la sintaxis del lenguaje de programación elegido, la lógica de la construcción de los programas. La necesidad de combinar estructuras de datos y programas.

Cuando uno esta familiarizado con el campo de los lenguajes de programación, sabe lo creativo de este proceso de elaborar paso a paso un programa para conseguir unos objetivos determinados; de definir los datos de entrada necesarios para que produzcan unos resultados de salida deseados; de codificar los pasos y depurar el lenguaje y la sintaxis gramatical hasta que los programas se puedan ejecutar sin errores. Es un proceso fascinante que te obliga a tener que definir con claridad lo que se aspira a resolver o a comprender, o aquello que se quiere que se despliegue mostrando todas sus posibilidades operativas,… Te obliga también a poner límites, a acotar el territorio de los conceptos y elementos con los que se va a tratar. No es cuestión de reducir las posibilidades sino de hacerlas más cercanas a los resultados esperados.

Los sistemas, a través de la creación de modelos, juegan un papel muy similar al de los algoritmos y programas fuera del ámbito de la programación. Igual que ellos trabajan con estructuras y datos, y limitan su campo de operación y se plantean resolver problemas concretos. Pero, a diferencia de los otros, tienen un lenguaje de desarrollo y una gramática totalmente diáfana. Caben todas las posibilidades. La única restricción que tienen es que sean entendibles por cualquier otra persona.

El segundo objetivo de la tesis, hace referencia al punto de vista desde el que se configura la tesis: el discurso visual que elabora un autor para generar sus obras. Los rastros de pensamiento que deja, a través de sus obras preparatorias o bocetos, para compartir sus preocupaciones conceptuales. O, directamente, el discurso, por sugerencias y analogías, que sus obras finales generan. La preocupación fundamental de este objetivo era llegar a comprender y conocer el ámbito de influencias, conceptual y práctico, que el autor había marcado para plantear un proyecto. Ver las estrategias utilizadas en su desarrollo y evaluar los resultados finales. El método de acercamiento a esta forma de operar ha sido totalmente práctico y además sistemático. Comenzaba siempre con una observación repetitiva de las obras buscando siempre agruparlas bajo temas conceptuales concretos. Continuaba, después, con un análisis lo más exhaustivo posible de la obra, buscando todos los datos que estuviesen relacionados con su generación. En este punto el estudio se realizaba por dos vías: una, elaborando tablas con los datos que me iba encontrando; y otra dibujando todas las etapas de un proceso simulado que me llevaba a resultados iguales o muy parecidos a los del autor. Esta etapa, tengo que decir, que ha sido muy laboriosa pero muy enriquecedora, porque, de cada análisis realizado, obtenía siempre un sistema; una forma de operar; una capacidad para elegir unos elementos expresivos, relacionarlos entre sí según unas reglas establecidas y llegar a unos resultados. Mi gratitud a todos y cada uno de los autores por todos los ratos pasados analizando sus obras es enorme. Su huella, seguro que ha calado en mí más hondo de lo que hoy día pueda hacerme idea.

El proceso terminaba cuando, con todos los datos recogidos en el análisis de una obra, se buscaba reformular el sistema empleado por el artista, ya no desde su punto de vista, sino desde el mío. Desde el punto de vista de un observador que sin perder de vista los matices de cada autor, filtra la información y los sistemas de muchos de ellos, para que juntos tengan una coherencia. Este filtro sirve también para que, al proceder de la misma forma sistemática, sobre todas las obras analizadas, se puedan apreciar los vacíos sobre algunos temas en los discursos de algunos de ellos, y la sobreabundancia de datos en los discursos de otros. Quisiera añadir, en este punto, que esta forma de proceder, me ayudó a romper los temores que tenía al principio de la tesis sobre hasta dónde podía llegar en el análisis de una obra y hasta dónde podía mostrar los resultados. Me di cuenta que lo que obtenía era tan bueno y tan importante, que era el tema principal de la tesis y que debía mostrar todo lo que cupiese razonablemente en extensión y buscando siempre la diversidad.

Parte de todo este proceso de investigación consistió en ordenar toda la documentación de catálogos y libros de que disponía por orden alfabético, de manera que pudiera estudiar de una forma conjunta todo lo disponible de un autor determinado. Al leer de una forma continua todos los contenidos acerca de un autor y su obra, me permitió ver las constantes creativas en su obra; su mundo operativo; sus preocupaciones estéticas; el lenguaje empleado; los conceptos utilizados;... Esta parte de la investigación se llevo a cabo de dos formas diferentes. Por un lado se leyó toda la documentación disponible; y por otro, se analizaron las obras de una forma muy exhaustiva, simulando los elementos que estaban en juego en cada una de ellas, y reconstruyendo, paso a paso, cada una de las etapas que, a mi juicio, pudieran llevar a la realización de la obra. Este trabajo, ha sido apasionante porque el simular el proceso, me ha permitido detectar constantes y repeticiones de cada uno de los artistas estudiados.

En este sentido ha habido mucho trabajo realizado que se ha quedado fuera de la tesis. Algunos porque trataban temas tridimensionales que no se tratan en este proyecto. Otros, porque eran trabajos cuyo desarrollo conceptual pertenecía a más de un autor y por lo tanto había que elegir cuál de ellos era más adecuado.

En este proceso he aprendido también mucho sobre el alcance conceptual que cada autor decide desarrollar para elaborar sus obras. Hay autores que la variedad de conceptos que manejan es muy grande. Trabajan en casi todos los ámbitos propuestos en el proyecto, y además, con una profundidad admirable. Otros, sin embargo, prefieren buscar el mayor número de posibilidades expresivas en uno o dos ámbitos diferentes, llegando, en estos casos, a llevar los límites de los sistemas de trabajo empleados a puntos muy sugerentes y poéticos.

Sin embargo, en algunos aspectos, el panorama que me he encontrado al analizar a todos estos autores ha sido muy parecido y repetitivo: un gran número de investigaciones empíricas individuales y una gran ausencia de criterios teóricos compartidos. Llama la atención, la presencia, por un lado, de pensadores que reflejaban, a través de textos que sirven de prólogo a catálogos de exposiciones, sus formas de abordar este tipo de obras, con referencias a conceptos muy próximos al pensamiento sistémico. Por otro lado, de los artistas que, a veces, dejan huella de su discurso a través de bocetos y notas que acompañan a sus obras. Estas posiciones están, a veces, demasiado distanciadas para dar lugar a una visión global de la situación que tuviera sentido. Ante esta situación, ha sido prioritario conseguir traducir conceptos generales a teorías investigadoras particulares intentando que en este préstamo, no se perdiera la función integradora que estos conceptos tienen.

El déficit en teoría, creo que se debe a que este tipo de arte es, en muchos casos, minoritario, y que sus planteamientos, de un gran interés, quizás para un público iniciado, no tienen el carácter divulgativo que otros temas artísticos tienen.

El tercer objetivo de la tesis, mostrar la obra de una serie de artistas de la Unión Europea de reconocido prestigio internacional, cuyo trabajo respondiese a una misma actitud y discurso artístico: el pensamiento sistémico, no ha sido difícil. Quizás lo más complicado ha sido decidir los criterios que llevasen a una lista equilibrada que cubriese el mayor número de países de la Unión Europea y cuyos artistas mostrasen el mayor número de sistemas de trabajo diferentes. Soy consciente que no están todos y que la lista podría haber sido otra y haber obtenido, también, resultados muy satisfactorios en el análisis de las obras. Quisiera en este punto declarar que, aunque quizás no hayan tenido visibilidad en este proyecto, muchos de ellos, cuya obra conozco, me han aportado muchas sugerencias sobre distintos aspectos de los temas tratados. Por lo tanto, esto significa que los he tenido en cuenta en el proceso.

En general, creo que la estructura del trabajo realizado da una panorámica de algunas tendencias en la forma de trabajar y crear sistemas de estos artistas, y creo, además, que la forma en que se han expuesto muestra un panorama bastante real de la situación.

BIBLIOGRAFÍA

CATÁLOGOS

Nombre Autor: apellido y nombre del autor
Título y subtítulo catálogo
Lugar de realización exposición: si en el libro no figura, se escribe sn (sin nombre)
Fecha de realización exposición: si en el libro no figura, se escribe sf (sin fecha)
Grosor del catálogo: Número de páginas del catálogo y si es necesario, número de volúmenes de que se compone la obra

EXPOSICIONES COLECTIVAS:

1 AA.VV., 4 Artistas Británicos, Salas de Exposiciones de la Dirección General del Patrimonio Artístico y Cultural, Madrid, febrero 1975
ES, Madrid: Patronato Nacional de Museos, 1975
36 p.

2 AA.VV., Arte Geométrico en España: 1957 - 1989; Arte Sistemático y Constructivo, Centro Cultural de la Villa, Madrid, abril 1989
ES, Madrid: Ayuntamiento, D.L., 1989
2 v. (vol. 1, Arte Geométrico en España: 1957 - 1989, 320 pp.)

3 AA.VV., Arte Geométrico en España: 1957 - 1989; Arte Sistemático y Constructivo, Centro Cultural de la Villa, Madrid, abril 1989
ES, Madrid: Ayuntamiento, D.L., 1989
2 v. (vol. 2, Arte Sistemático y Constructivo, 114 pp.)

4 AA.VV. Britisch - Systematisch: Mary Martin, Kenneth Martin, Nicole Charlett, Norman Dilworth, Malcolm Hughes, Michael Kidner, Peter Lowe, Eric Snell, Jean Spencer, Jeffrey Steele, Stiftung für Konstruktive und Konkrete Kunst, Zürich, 9 febrero – 29 abril 1990,
CH, Zürich: Stifung für Konstuktive und Konkrete Kunst, 1990
74 pp.

5 AA.VV., Europe Concrete Reductive, Museum Modern Art, Hünfeld, 5 agosto – 30 octubre 2002
DE, Hünfeld: Magistrat der Stadt Hünfeld, 2002
63 pp.

6 AA.VV., Forma y Medida en el Arte Español Actual: Salas de Exposiciones de la Dirección General del Patrimonio Artístico, Archivos y Museos, Madrid, 1977
ES, Madrid: Patronato Nacional de Museos, D.L., 1977
163 pp.

7 AA.VV., Hommage a Richard Paul Lohse,
AT, Wien / Klagenfurt: Ritter Verlag, 2002
103 pp.

8 AA.VV., Nueva Generación 1967 - 1977: Palacio Velázquez, Madrid, julio - septiembre 1977,
ES, Madrid: Patronato Nacional de Museos, 1977
91 pp.

9 AA.VV., Systems: Arts Council 1972 - 1973: Richard Allen, John Ernest, Malcolm Hughes, Colin Jones, Michael Kidner, Peter Lowe, James Moyes, David Saunders, Geoffrey Smedley, Jean Spencer, Jeffrey Steele, Gillian Wise Ciobotaru
UK, London: Arts Council of Great Britain, 1973
62 pp.

10 AA.VV., Ways of Making: 5 Systemic Artists: Norman Dilworth, Jeff Hellyer, Peter Lowe, Ray Masters, David Saunders, University Arts Centre, Aberystwyth, 1975
UK, Aberystwyth: University Arts Centre, 1975
33 pp.

11 Asins, Elena et al., Sobre Objetos y Cosas: Elena Asins, Manuel Barbadillo, Guillermo Lledó, Eugenio López, Anselmo Álvarez Galería de Arte, Madrid, 25 enero - 24 febrero 1996
ES, Madrid: Anselmo Álvarez Galería de Arte, 1996
16 pp.

12 Federle, Helmut et al., John M Armleder / Martin Disler / Helmut M. Federle, Centre d'Art Contemporain, Genève, invierno 1981 - 1982
IT, Genève: Centre d'Art Contemporain, 1982
93 pp.

13 Fritz, Kunibert, et al., Norm Und Form: Methoden Konstruktiver Kunst, Stadthaus am Abdinghof, Paderborn, 8 - 30 enero 1972
DE, Paderborn: Stadthaus am Abdinghof, 1972
64 pp.

14 Gil, Julián et al., Cruz Novillo, Julián Gil, José María Iglesias, Galería de Arte La Caja, Córdoba, 3 - 23 noviembre 1994
ES, Córdoba: Caja Provincial de Ahorros de Córdoba, 1994
32 pp.

15 Hughes, Malcolm, et al., Malcolm Hughes, Alan Reynolds: Recent Works, Annely Juda Fine Art, London, 23 febrero - 23 marzo 1996
UK, London: Annely Juda Fine Art, 1996
24 pp.

EXPOSICIONES INDIVIDUALES:

16 Adler, Karl-Heinz, Karl-Heinz Adler: Malerei, Objekte, Zeichnungen, Museum Folkwang Essen, 15 mayo - 15 junio 1997; Galerie Neher, Essen, 22 mayo - 22 junio 1997; Neuer Sächsischer Kunstverein e.V., Dresden, 27 junio - 10 agosto 1997
DE, Essen: Museum Folkwang, cop.1997
104 pp.

17 Agam, Yaacov, Agam / [editado por] Frank Popper, 3rd. rev. ed.
USA, New York: Harry N. Abrams, INC., 1990
474 pp.

18 Allsop, Douglas, Douglas Allsop: Seven Sequential Spaces, Sauthampton City Art Gallery, United Kingdom, 26 julio – 6 octubre 2002
UK, Southampton: Southampton City Art Gallery, 2002
27 pp.

19 Allsop, Douglas, Douglas Allsop: Zeichnungen, Objekte und Installationen 1971 - 2001, Zeichnungen, Emschertal-Museum Herne; Objekte und Installationen, Städtisches Museum Gelsenkirchen, 7 septiembre - 11 noviembre 2001

DE, Herne; Gelsenkirchen: Stadt Herne; Stadt Gelsenkirchen, 2001
98 pp.

20 Arena, Vicenzo, Vincenzo Arena: Una Ricerca Sistematica, Museo Comunale - Palazzo Brancaleoni, 7 - 29 octubre 2000
IT, Fara in Sabina: Museo Comunale, 2000
20 pp.

21 Asins, Elena, Elena Asins, Salas de Exposiciones de la Dirección General del Patrimonio Artístico, Archivos y Museos, Madrid, diciembre 1979 - enero 1980
ES, Madrid: Patronato Nacional de Museos, 1979
10 pp.

22 Asins, Elena, Elena Asins: Menhir Dos, Centro Cultural de la Villa, Madrid, 30 noviembre 1995 - 21 enero 1996
ES, Madrid: Ayuntamiento de Madrid, 1995
104 pp.

23 Asins, Elena, Elena Asins: Menhires
ES, Zaragoza: Caja de Ahorros de la Inmaculada, 1996
44 pp.

24 Asins, Elena, Elena Asins, Sala de Exposiciones del Palacio Provincial de Málaga, Málaga, 16 febrero - 2 marzo 1974
ES, Málaga: Diputacion Provincial, 1974
8 pp.
«Cuadernos de Arte del Instituto de Cultura; 31»

25 Asins, Elena, Elena Asins, Columela Galería de Arte, Madrid, 1988
ES, Madrid: Columela Galería de Arte, 1988
12 pp.

26 Asins, Elena, Elena Asins, Zarauzko Udala, Zarautz, 1998
ES, Zarautz: Zarauzko Udala, 1998
44 pp.

27 Asins, Elena, Elena Asins, Colegio de Arquitectos de Málaga, Málaga, 1998
ES, Málaga: Colegio de Arquitectos, 1998
44 pp.

28 Baljeu, Joost, Joost Baljeu, Stedelijk Museum Amsterdam, Amsterdam, 13 abril - 26 mayo 1991
NL, Amsterdam: Stedelijk Museum, 1991
72 pp.

29 Baljeu, Joost, Joost Baljeu: Syntetische Konstrukties, Stedelijk Museum Amsterdam, Amsterdam, 25 abril - 8 junio 1969
NL, Amsterdam: Stedelijk Museum, 1969
24 pp.

30 Baljeu, Joost, Joost Baljeu, Haags Gemeentemuseum, Den Haag, 13 diciembre 1975 - 14 febrero 1976
NL, Den Haag: Haags Gemeentemuseum, 1976
84 pp.

31 Baljeu, Joost, Joost Baljeu: Morgen Kan Het Architektuur Zijn / It Can Be Architecture Tomorrow,
NL, Den Haag: Haags Gemeentemuseum, 1976
30 pp.

32 Barbadillo, Manuel, Barbadillo, Salas de Exposiciones de la Dirección General de Bellas Artes, Madrid, noviembre 1974
ES, Madrid: Patronato Nacional de Museos, 1974
28 pp.
«Arte Actual. Exposición; 533»

33 Bill, Max Max Bill, Galerie Denise Rene, París, mayo - junio 1990
FR, París: Galerie Denise René, 1990
24 pp.

34 Bill, Max Max Bill
CH, Zürich: Arthur Niggli, 1958
84 pp.

35 Bill, Max, Max Bill: Die Grafischen Reihen
DE, Stuttgart: Verlag Gerd Hatje, 1995
106 pp.

36 Bill, Max, Max Bill, DPA 17 (Documents de Projectes d'Arquitectura), Departamento de Proyectos d'Arquitectura, Escola d'Arquitectura de Barcelona, Escola d'Arquitectura del Vallès, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona, 2001
ES, Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Departamento de Proyectos d'Arquitectura, 2001
77 pp.

37 Bill, Max, Max Bill, Marlborough Fine Art, Londres, 14 febrero - 15 marzo 1974, Marlborough Galerie AG, Zürich, 7 junio - 6 julio 1974
UK, Londres: Marlborough Fine Art , 1974
54 pp.

38 Bill, Max, Max Bill: Zeichnungen 30-40-50er-jahre, Galerie J&P Fine Art, Zürich, 13 mayo - 23 julio 2004
CH, Zumikon: Haus Bill, 2004
140 pp.

39 Bill, Max, Max Bill: System mit Fünf Vierfarbigen Zentren
CH, St. Gallen: Erker-Verlag, 1972
40 pp.

40 Bill, Max, Max Bill: Malerei und Plastik1928 - 1968, Kunsthalle Bern, Bern, 6 abril - 12 mayo 1968
CH, Bern: s.n., 1968
92 pp.

41 Bill, Max, Max Bill: Pinturas, Esculturas, Gráfica, Museo de Bellas Artes, Caracas, octubre 1979
VEN, Caracas: s.n., 1979
17 pp.
«Museo de Bellas Artes. Catálogo; 8»

42 Bill, Max, Max Bill
IT, Parma: Centro Studi e Archivio della Comunicazione, Università di Parma, 1977
368 pp.

43 Bill, Max, Max Bill, Galerie im Erker am Gallusplatz, St. Gallen, 8 abril - 27 mayo 1967
CH, St. Gallen: Galerie im Erker am Gallusplatz, 1967
52 pp.

44 Bill, Max, Max Bill: Das Druckgrafische Werk bis 1968, Kunsthalle Nürnberg, Nürnberg, 1968
DE, Nürnberg: Kunsthalle Nürnberg, 1968
118 pp.

45 Bill, Max, Max Bill: Neue Werke / Recent Works, Marlborough Galerie AG, Zürich, 14 junio - 19 agosto 1972
CH, Zürich: Marlborough Galerie AG, 1972
58 pp.

46 Bill, Max, Max Bill: Surfaces, Marlborough-Godard, Toronto, 1972
CAN, Toronto: Marlborough-Godard Ltd, 1972
58 pp.

47 Bill, Max, Max Bill, Albright- Knox Art Gallery, Buffalo, 28 septiembre - 17 noviembre 1974
USA, NY, Buffalo: Albright-Knox Art Gallery, 1974
198 pp.

48 Bill, Max, Max Bill
ES, Barcelona: Fundacio Joan Miro, 1980
71 pp.

49 Bill, Max, Max Bill
ARG, Buenos Aires: Nueva Visión, 1955
148 pp.

50 Bill, Max, Max Bill, Museo Español de Arte Contemporáneo, Madrid, febrero 1980
ES, Madrid: Patronato Nacional de Museos, 1980
61 pp.

51 Bill, Max, Max Bill, Galerie Denise Rene, París, 22 junio - 31 julio 1971
FR, París: Galerie Denise Rene, 1971
30 pp.

52 Böhm, Hartmut, Hartmut Böhm: Arbeiten von 1959 - 1986, Karl Ernst Osthaus Museum, Hagen, 24 mayo - 29 junio 1986
DE, Hagen: Karl Ernst Osthaus Museum, 1986
122 pp.

53 Böhm, Hartmut, Hartmut Böhm: Zeichnungen, Saarland Museum, Saarbrücken, 12 diciembre 1999 - 13 febrero 2000
DE, Saarbrücken: Saarland Museum, 2000
62 pp.

54 Böhm, Hartmut, Hartmut Böhm: An Ort und Stelle, Verein für Aktuelle Kunst, Oberhausen, 25 junio - 13 agosto 1995
DE, Bönen: Hartmut Kettler, 1995
32 pp.

55 Böhm, Hartmut, Hartmut Böhm, Van Reekum Museum, Apeldoorn, 26 mayo - 8 julio 1990; Wilhelm-Hack-Museum, Ludwigshafen am Rhein, 9 septiembre - 14 octubre1990
DE, Nürnberg: Verlag für Moderne Kunst, 1990
176 pp.

56 Böhm, Hartmut, Hartmut Böhm, Museum am Ostwall, Dortmund, 10 marzo - 21 abril 1996, Haus für Konstruktive und Konkrete Kunst, Zürich, 21 junio - 18 agosto 1996
DE; CH, Dortmund; Zürich: Museum am Ostwall; Haus für Konstruktive und Konkrete Kunst, 1996
118 pp.

57 Bruch, Hellmut, Hellmut Bruch: Acrylglas Arbeiten
DE, Ladenburg: Preysing Verlag, 2001
60 pp.

58 Bruch, Hellmut, Hellmut Bruch: Hommage à Fibonacci
DE, Piesport: Ottenhausen Verlag, 1989

28 pp.

59 Bruch, Hellmut, Hellmut Bruch: Neue Plastiken
DE, Aachen: Ottenhausen Verlag Aachen, 1987
48 pp.

60 Bruch, Hellmut, Hellmut Bruch: Vertikale Progressionen, Galerie und Verlag Beatrix Wilhelm, Stuttgart, 1991
DE, Stuttgart: Galerie und Verlag Beatrix Wilhelm, 1991
36 pp.

61 Bruch, Hellmut, Hellmut Bruch: Von der Zahl zum Licht, Galerie Peter Lindner, Wien, 4 junio - 7 julio 1999
AT, Wien: Triton Verlag, 1999
52 pp.

62 Carter, John, John Carter: Darmstadt Double Arch / Doppeltor Darmstadt, 1993
DE, Darmstadt: sn, 1993
14 pp.

63 Carter, John, John Carter: Ideas and Intentions
BE, Gerpinnes: Editions Tandem, 1995
60 pp.
«Alentours»

64 Carter, John, John Carter: Objekte von 1971 - 1990, Edition & Galerie Hoffmann, Friedberg, 1990
DE, Friedberg: Edition & Galerie Hoffmann, 1990
55 pp.

65 Carter, John, John Carter: Paintings, Drawings and Structures 1965 - 1983, Warwick Arts Trust, Coventry, 25 mayo - 2 julio 1983
UK, London: Warwick Arts Trust, 1983
28 pp.

66 Cohen, Nathan, Nathan Cohen: Form and Vision, Annely Juda Fine Art, London, 22 febrero - 31 marzo 2001
UK, London: Annely Juda Fine Art, 2001
32 pp.

67 Cohen, Nathan, Nathan Cohen: Structural Vision: Reliefs and Constructions, Annely Juda Fine Art, London, 5 - 27 marzo 1997
UK, London: Annely Juda Fine Art, 1997
16 pp.

68 Dekkers, Ad Ad Dekkers
NL, ’s-Gravenhage: Staatsuitgeverij, 1981
256 pp.

69 Delahaut, Jo, Jo Delahaut: Conversation avec Ignace Vandevivere
BE, Gerpinnes: Editions Tandem, 1989
40 pp.
«Conversation avec…»

70 Dienst, Hans Günter, Hans Günter Dienst: Elementarplastik
DE, Wechmar: Gotha Druck, 1996
92 pp.

71 Ernst, Rita, Rita Ernst: Progetto Siciliano
CH, Zürich: Verlag Scheidegger & Spiess, 2003
100 pp.

72 Federle, Helmut — Helmut Federle: XLVII Biennale Venedig
CH, Baden: Verlag Lars Müller, 1997
200 pp.

73 Federle, Helmut — Helmut Federle, Musée des Beaux-Arts Nantes, Nantes, 9 marzo - 3 junio 2002
FR, Arles: Actes Sud, D.L., 2002
140 pp.

74 Federle, Helmut, — Helmut Federle: Bilder Zeichnungen, Museum für Gegenwartskkunst Basel, 9 febrero - 14 abril 1985; Städtische Galerie Regensburg, 26 abril - 2 junio 1985; Haags Gemeentemuseum, Den Haag, 28 septiembre - 17 noviembre 1985
CH, Basel: Offentliche Kunstsammlung Basel, 1985
102 pp.

75 Federle, Helmut, — Helmut Federle, IVAM Centre Julio González, Valencia, 2 julio - 20 septiembre 1998
ES, Valencia: IVAM Institut Valencià d'Art Modern, D.L.1998
129 pp.

76 Federle, Helmut, — Helmut Federle, Galerie Nationale du Jeu de Paume, París, 3 mayo - 15 junio 1995
FR, París: Jeu de Paume; Réunion des Musées Nationaux, 1995
88 pp.

77 Federle, Helmut, — Helmut Federle, Mary Boone Gallery, New York; Barbara Gladstone Gallery, New York, 17 octubre - 14 noviembre 1987
USA, New York: Mary Boone Gallery; Barbara Gladstone Gallery,1987
67 pp.

78 Federle, Helmut, — Helmut Federle: Peintures, Dessins, Musée de Grenoble, Grenoble, 16 septiembre - 20 noviembre 1989
FR, Grenoble: Musée de Grenoble, 1989
130 pp.

79 Federle, Helmut, — Helmut Federle, Kunsthalle Zürich, Zürich, 6 junio - 9 agosto 1992; Moderna Museet Stockholm, 22 agosto - 11 octubre 1992; Museum Friderician um Kassel 15 febrero - 18 abril 1993
CH, Zürich: Kunsthalle, cop., 1992
100 pp.

80 Federle, Helmut, — Helmut Federle
DE, Bonn: Kunstmuseum, 1996
134 pp.

81 Federle, Helmut, — Helmut Federle: Peintures 1979 - 1983, Musée Cantonal Des Beaux-Arts, Lausanne, 12 febrero - 20 marzo 1983
CH, Lausanne: Musée Cantonal des Beaux-Arts, 1983
47 pp.

82 Federle, Helmut, — Helmut Federle: Black Series I + II und Nachbarschaft der Farben, Aargauer Kunsthaus, Aarau, 14 junio - 6 septiembre 1998; Staatliche Kunsthalle, Karlsruhe, 26 septiembre - 8 noviembre 1998; Kunstverein Braunschweig e. V., Haus Salve Hospes, 22 febrero - 5 abril 1999
CH, Aarau: Aargauer Kunsthaus, 1998
119 pp.

83 Federle, Helmut, — Helmut Federle
DE, Köln: König, 1999
168 pp.

84 Fritz, Kunibert, — Kunibert Fritz: Bilder von 1997 - 2001

SN, sn: s.n, 2001
16 pp.

85 Fruhtrunk, Günter — Gunter Fruhtrunk
DE, Braunschweig: Kunstverein Braunschweig, 1983
186 pp.

86 Fruhtrunk, Günter, — Fruhtrunk: Bilder 1952 - 1972, Städische Galerie im Lenbachhaus, München, 10 febrero - 18 marzo 1973; Badischer Kunstverein e.V., Karlsruhe, 30 marzo - 8 mayo 1973; Museum Bochum - Kunstsammlung, Bochum, 4 agost - 9 septiembre 1973
DE, Munchen: Städtische Galerie im Lenbachhaus, 1973
72 pp.

87 Fruhtrunk, Günter, — Günter Fruhtrunk: Retrospektive, Nationalgalerie, Staatliche Museen zu Berlin, 5 febrero - 14 marzo 1993; Westfälisches Landesmuseum, Münster, 28 marzo - 9 mayo 1993; Bayerische Staatsgemäldesammlungen, Manchen, 14 julio - 5 septiembre 1993; Städtische Galerie im Lenbachhaus, München, 14 julio - 5 septiembre 1993,
DE, München: Prestel-Verlag, 1993
183 pp.

88 Gáyor, Tibor, — Gáyor: Faltcollagen, 1972 - 1986, Museum Moderner Kunst (MUMOK), Wien, marzo - abril 1986; Ernst Múzeum, Budapest, diciembre 1986
AT, Wien: Museum Moderner Kunst, 1986
69 pp.

89 Gáyor, Tibor, — Tibor Gáyor: Bildobjekte, Neue Galerie am Landesmuseum Joanneum, Graz, 20 marzo - 13 abril 1975
AT, Graz: Neue Galerie am Landesmuseum Joanneum, 1975
30 pp.

90 Gerstner, Karl, — Karl Gerstner, Museum für Gegenwartskkunst Basel, Basel; Kunsthalle Tübingen, Tübingen; Von der Heydt-Museum Wuppertal, Wuppertal; Kunsthalle Weimar, Weimar; Kunstmuseum Solothurn, Solothurn, 1992
DE, Stuttgart: Edition Cantz, 1992
64 pp.

91 Gil, Julián, — Julián Gil: Cuadrado, Sala Cai-Luzán, Zaragoza, 2 - 30 octubre 1991
ES, Zaragoza: Sala Cai-Luzán, 1991
10 pp.

92 Gil, Julián, — Julián Gil - Norbert Thomas
ES, Barcelona: F-Design, 2005
37 pp.

93 Gil, Julián, — Julián Gil, Sala de Exposiciones Caja de Extremadura, Cáceres, 26 enero - 25 febrero 2006
ES, Cáceres: Caja de Extremadura, 2006
63 pp.

94 Gil, Julián, — Julián Gil: Arte Construido, Sala de Exposiciones de la UNED, Barbastro, 4 - 29 febrero 2000
ES, Barbastro: Fundación "Ramón J. Sender", 2000
13 pp.

95 Gil, Julián, — Julián Gil: Construcciones. Esculturas en Pequeño Formato, Centro Cultural de la Villa, Madrid, mayo 1993
ES, Madrid: Ayuntamiento de Madrid, D.L., 1993
36 pp.

96 Gil, Julián, — Julián Gil: Cuadrado / Square 1990 - 2002

ES, Logroño: Gobierno de La Rioja, Consejería de Educación, Cultura, Juventud y Deporte, 2003
324 pp.

97 Gil, Julián, Julián Gil, Anselmo Álvarez Galería de Arte, Madrid, 11 abril - 18 mayo 1996
ES, Madrid: Anselmo Alvarez Galería de Arte, 1996
16 pp.

98 Gil, Julián, Julián Gil, Galería 57, Madrid, 9 enero - 22 febrero 2003; Galerie Garanin, Berlín, junio - julio 2003
ES, Madrid: Galeria 57, 2003
60 pp.

99 Gil, Julián, Julián Gil: Dentro y Fuera del Cuadrado, Galería Víctor Martín, Madrid, octubre - noviembre 1992
ES, Madrid: Galería Víctor Martín, 1992
20 pp.

100 Gil, Julián, Julián Gil: Formas e Imágenes. El Arte Contemporáneo en La Rioja, Centro Cultural Caja Rioja, Logroño, 13 marzo - 1 abril 2000
ES, Logroño: Fundación Caja Rioja, 2000
12 pp.

101 Gil, Julián, Julián Gil: Tondos 1998 - 1999, Galería 57, Madrid, diciembre 1999 - enero 2000
ES, Madrid: Galería 57, 1999
48 pp.

102 Gil, Julián, Julián Gil: Pinturas 1990 - 1995, Sala Cultural Gecesa, Barcelona, 1 - 25 febrero 1996
ES, Barcelona: Caja Madrid, 1996
27 pp.

103 Gil, Julián, Julián Gil: Pinturas, Sala de Armas de la Ciudadela, Pamplona, 6 - 24 marzo 1991
ES, Navarra: Ayuntamiento de Pamplona, 1991
14 pp.

104 Gil, Julián, Julian Gil, Sala Amós Salvador, Logroño, 25 mayo - 12 junio 1990
ES, Logroño: Gobierno de La Rioja, Ayuntamiento, 1990
47 pp.

105 Gil, Julián, Julian Gil: Raízdedos Fragmentado, Sala de Arte de la Universidad, Universidad de Málaga, Málaga, 17 febrero - 10 marzo 1998
ES, Málaga: Universidad de Málaga, Vicerrectorado de Cultura, 1998
28 pp.

106 Gil, Julián, Julián Gil: Sobre el Cuadrado, Salas Provinciales de Exposición, Palacio Provincial, Jaén, 21 abril - 15 mayo 1994
ES, Jaén: Diputación Provincial, 1994
32 pp.

107 Gil, Julián, Pinturas, Relieves de Julián Gil, Sala Neblí, Madrid, 18 diciembre 1965 - 6 enero 1966
ES, Madrid: Sala Neblí, 1965
8 pp.

108 Gil, Julián, Julián Gil: Pinturas, Sala de Exposiciones de la Fundación Cultural COAM, Madrid, 30 mayo - 30 junio 1995
ES, Madrid: Fundación Cultural COAM, 1995
6 pp.

109 Glass, Ingo, Ingo Glass, Ostdeutsche Galerie Regensburg, Regensburg, 23 noviembre 1985 - 19 enero 1986
DE, Regensburg: Ostdeutsche Galerie Regensburg, 1986

98 pp.

110	Glass, Ingo,	Ingo Glass, DE, München: Südostdeutsches Kulturwerk, 1991 50 pp.
111	Gómez Perales, José Luis	José Luis Gomez Perales, Sala de Exposiciones Luzán, Zaragoza, 8 - 22 mayo 1974 ES, Zaragoza: Caja de Ahorros de la Inmaculada, 1974 8 pp.
112	Gómez Perales, José Luis	José Luis Gomez Perales, Galeria Juana Mordo, 1976 ES, Madrid: Galería Juana Mordo, 1976 22 pp.
113	Gómez Perales, José Luis	Gomez Perales: Obra 1968 - 1988, Galería de Arte Soledad Lorenzo, Madrid, 3 noviembre - 3 diciembre 1988 ES, Madrid: Galería de Arte Soledad Lorenzo, 1988 35 pp.
114	Grosch, Hans,	Hans Grosch: Bilder - Objekte, Galerie Peter Lindner, Wien, 9 diciembre 1995 - enero 1996 AT, Wien: Galerie Peter Lindner, 1995 36 pp.
115	Grosch, Hans,	Hans Grosch, Galerie Lindner, Wien, 2001 AT, Wien: Galerie Peter Lindner, 2001 56 pp.
116	Grosch, Hans,	Hans Grosch, Galerie Orms, Austria, 1991 AT, Innsbruck: Galerie Orms, 1991 24 pp.
117	Hanselmann, Urs,	Urs Hanselmann: Eine Atelierwanderung CH, Olten: Urs Hanselmann, sf. 41 pp.
118	Hanselmann, Urs,	Urs Hanselmann: Werke 1973 - 1984, Stadthaus Olten, 20 enero - 17 febrero 1985 CH, Zürich: Waser Druck AG, 1985 137 pp.
119	Honegger, Gottfried,	Gottfried Honegger: Face à Face, Museum Tinguely, Basel, 6 junio - 31 octubre 2004 CH, Basel: Museum Tinguely, 2004 88 pp.
120	Honegger, Gottfried,	Gottfried Honegger: Trotzallem: Eine Rückschau, Kunstmuseum Liechtenstein, Liechtenstein, 9 noviembre 2001 - 17 febrero 2002 LI, Liechtenstein: Kunstmuseum Liechtenstein, 2001 151 pp.
121	Honegger, Gottfried,	Gottfried Honegger: Cercle et Carré, Dorothea van der Koelen, Mainz, 7 septiembre - 20 octubre 1990 DE, Mainz: Dorothea van der Koelen Verlag, 1990 39 pp.
122	Honegger, Gottfried,	Gottfried Honegger: Le Cercle et l'Angle Droit, SN., sn.: sn., 1991 12 pp.

123 Honegger, Gottfried, Gottfried Honegger, Gimpel & Hanover Galerie, Zürich, 10 abril - 12 mayo 1965
CH, Zürich: Gimpel & Hanover Galerie, 1965
10 pp.

124 Honegger, Gottfried, Gottfried Honegger: Paintings, Sculpture, Drawings and Prints, Annely Juda Fine Art, London, 16 noviembre - 21 diciembre 1988
UK, London: Annely Juda Fine Art, 1988
16 pp.

125 Honegger, Gottfried, Honegger, Musée d'Art Moderne de la Ville de París, París, 8 junio - 23 julio 1978; Centre Internacional de Création Artistique de Sénanque, Gordes, 29 julio - 25 septiembre 1978; Galerie Nouvelles Images, Den Haag, 28 octubre - 22 noviembre 1978
FR, París: Musée d'Art Moderne de la Ville de París, 1978
48 pp.

126 Honegger, Gottfried, Gottfried Honegger: Métamorphose, Fondation Cartier pour l'Art Conteporain, París, 2 abril - 30 mayo 1999
FR, París: Fondation Cartier pour l'Art Conteporain, 1999
68 pp.

127 Honegger, Gottfried, Gottfried Honegger: Tableaux - Reliefs / Skulpturen, 1970 - 1983
CH, Zürich: Waser Verlag, 1983
133 pp.

128 Honegger, Gottfried, Gottfried Honegger: Art et Architecture = Kunst als Architektur = Art as Architecture,
CH, Weiningen-Zürich: Waser Verlag, 1993
197 pp.

129 Hughes, Malcolm, Malcolm Hughes: Working Drawings, University of Leeds Art Gallery, Leeds, 1985
UK, Leeds: University of Leeds, 1985
26 pp.

130 Iglesias, José María José María Iglesias: Acuarelas, Seleccion 1984 - 1988, Centro Cultural Galileo, Madrid, enero - febrero 1989
ES, Madrid: Ayuntamiento, Junta Municipal de Chamberí, 1988
32 pp.

131 Iglesias, José María José María Iglesias: Pinturas, Galería Término, Madrid, octubre 1989
ES, Madrid: Galería Término, 1989
24 pp.

132 Iglesias, José María José María Iglesias: Selección 1991 - 1994 de Pinturas del Ciclo "ELDAG: Constelación Modular", Galería Fauna's, Madrid, 12 abril - 10 mayo 1994
ES, Madrid: Galería Fauna's, 1994
31 pp.

133 Iglesias, José María Iglesias: ELDAG y otras Elucidaciones 1974 - 1982, Sala Luzán, Caja de Ahorros de la Inmaculada, Zaragoza, 15 diciembre 1982 - 18 enero 1983
ES, Zaragoza: Caja de Ahorros de la Inmaculada, 1982
36 pp.

134 Iglesias, José María De Palabras Parecidas y otros Estigmas: 24 poemas visuales
ES, Madrid: Fernando Nuño, 1978
29 pp.

135 Iglesias, José María José María Iglesias, Galería Theo, Madrid, octubre - noviembre 1979
ES, Madrid: Galería Theo, 1979

34 pp.

136 Iglesias, José María

Iglesias, Salas de Exposiciones de la Dirección General del Patrimonio Artístico y Cultural, Madrid, 1976
ES, Madrid: Dirección General del Patrimonio Artístico y Cultural, Patronato Nacional de Museos, 1976
39 pp.

137 Iglesias, José María

José María Iglesias: Trayectoria 1960 - 1985, Centro Cultural de la Villa, Madrid, octubre 1985
ES, Madrid : Ayuntamiento de Madrid; Centro Cultural de la Villa, 1985
111 pp.

138 Iglesias, José María

José María Iglesias, Sala de Exposiciones de la Caja de Ahorros Provincial de Alicante, Alicante, 31 octubre - 18 noviembre 1989
ES, Alicante: Caja de Ahorros Provincial, 1989
12 pp.

139 Iglesias, José María

José María Iglesias: Acrílicos y Acuarelas del Ciclo ELDAG, Galería Varrón, Salamanca, noviembre 1993
ES, Salamanca: Galería Varrón, 1993
8 pp.

140 Iglesias, José María

José María Iglesias: Pinturas: Selección de obras 1975 - 1994, Sala Cultura Caja de Madrid, Barcelona, 11 - 28 enero 1995
ES, Barcelona: Caja de Madrid, 1995
34 pp.

141 Iglesias, José María

José María Iglesias: Obras Recientes, Museo Nacional de Escultura, Valladolid, 19 abril - 4 mayo 1974
ES, Valladolid: Museo Nacional de Escultura, 1974
20 pp.

142 Iglesias, José María

Iglesias, Aula de Cultura de la Caja de Ahorros Provincial, Guadalajara, 1976
ES, Guadalajara: Caja de Ahorros Provincial, 1976
24 pp.

143 Kalucki, Jerzy,

Jerzy Kalucki: The Space Defined by Straight Line and Arc: Painting, Prints, Objects, Museum Modern Art, Hünfeld, 8 octubre 2000 - 31 enero 2001
DE, Hünfeld: Museum Modern Art , 2000
30 pp.

144 Kidner, Michael,

Michael Kidner: Painting, Drawing, Sculpture 1959 - 1984, Serpentine Gallery, London, 4 noviembre - 2 diciembre 1984; Hatton Gallery, Newcastle upon Tyne, 30 enero - 2 marzo 1985
UK, London: The Arts Council of Great Britain, 1984
56 pp.

145 Kidner, Michael,

Michael Kidner: A Search for Eudaemonia = W poszukiwaniu eudajmonii, Muzeum Sztuki, Lód´z, 16 julio - 26 septiembre 1993
PL, Lód´z: Muzeum Sztuki, 1993
44 pp.

146 Knoebel, Imi,

Imi Knoebel: Pure Freude, Kestner Gesellschaft, Hannover, 17 agosto - 3 noviembre 2002
DE, Hannover: Kestner Gesellschaft, 2002
131 pp.

147 Knoebel, Imi,

Imi Knoebel, Museum van Hedendaagse Kunst (MUHKA), Antwerpen, 12 noviembre 1988 - 8 enero 1989

BE, Antwerpen: Museum van Hedendaagse Kunst, 1988
48 pp.

148 Knoebel, Imi, Imi Knoebel, Kunstmuseum, Winterthur, 27 marzo - 8 mayo 1983; Städtisches Kunstmuseum, Bonn, 18 mayo - 3 julio 1983
DE, Winterthur; Bonn: Kunstmuseum; Städtisches Kunstmuseum, 1983
79 pp.

149 Knoebel, Imi, Imi Knoebel: Retrospectiva 1968 - 1996, Haus der Kunst, Munich, 23 agosto - 20 octubre 1996; Stedelijk Museum, Amsterdam, 16 noviembre 1996 - 19 enero 1997; IVAM Centre del Carme, Valencia, 30 enero - 31 marzo 1997; Kunsthalle, Düsseldorf, verano 1997; Musée de Grenoble, Grenoble, invierno 1997
ES, Valencia: IVAM Centre del Carme, 1996
310 pp.

150 Knoebel, Imi, Imi Knoebel: Jena Bilder, 17 mayo - 12 julio 1996
DE, Arnstadt: Rhino - Verlag, 1996
73 pp.

151 Knoebel, Imi, Imi Knoebel: Linienbilder 1966 - 1968, Kunstverein St. Gallen Kunstmuseum, 1 junio - 18 agosto 1996
CH, St. Gallen: Kunstmuseum, 1999
62 pp.

152 Knoebel, Imi, Imi Knoebel: Genter Raum: Installationen 1980 - 2000, Kunstsammlung Nordrhein-Westfalen, Düsseldorf
DE, Düsseldorf: Kunstsammlung Nordrhein-Westfalen, 2001
47 pp.

153 Knoebel, Imi, Imi Knoebel, Galerie Lelong, Zürich, 6 noviembre 2004 - 29 enero 2005
CH, Zürich: Galerie Lelong, 2005
34 pp.

154 Kubíček, Jan, Jan Kubíček: Gemälde 1958 - 1993, Wilhelm-Hack-Museum Ludwigshafen am Rhein, 28 noviembre 1993 - 16 enero 1994
DE, Ludwigshafen am Rhein: Wilhelm-Hack-Museum, 1993
127 pp.

155 Kujasalo, Matti, Matti Kujasalo: Vuoden Taiteilija = Årets Konstnär = Artist of the Year 1994, Helsinki Art Hall, Helsinki, 11 agosto - 11 septiembre 1994
FI, Helsinki: Helsinki Festival, 1994
112 pp.

156 Lemoine, Serge, Francois Morellet: Dessins = Zeichnungen, Musée de Grenoble, 14 abril - 10 junio 1991, Stiftung für Konkrete Kunst, Reutlingen, 7 julio - 30 octubre 1991
DE, Reutlingen: Stiftung für Konkrete Kunst, 1991
179 pp.

157 Linn, Horst, Horst Linn, Städtische Galerie Lüdenscheid, Lüdenscheid, 26 junio - 2 agosto 1987
DE, Lüdenscheid: Städtische Galerie Lüdenscheid, 1987
117 pp.

158 Linschinger, Josef, Innovation: Konstruktiv, Konkret, Visuell, Konzeptuell
AT, Wien: Ritter Verlag, 2000
259 pp.

159 Linschinger, Josef, Josef Linschinger: Mappen und Multiples, Galerie Peter Lindner, Wien, diciembre 1994 – enero 1995

		AT, Wien: Galerie Peter Lindner,1994 46 pp.
160	Linschinger, Josef,	Josef Linschinger: Reliefs + Bilder, Galerie Romanischer Keller, Salzburg, 6 septiembre – 1 octubre 1988 AT, Salzburg: Galerie Romanischer Keller, 1988 36 pp.
161	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: 1902 - 1988 Retrospektive DE, Kassel: Museum Fridericianum, 1988 24 pp.
162	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: 1902 - 1988 PL, Lódz: Muzeum Sztuki, 1993 87 pp.
163	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: Neun Kwadrate, Van Abbemuseum, Eindhoven NL, Eindhoven: Van Abbemuseum, 1978 60 pp.
164	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse CH, Ginebra: Skira, 1988 97 pp.
165	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse, Galerie Denise René, París, octubre - noviembre 1990 FR, París: Galerie Denise René, 1990 20 pp.
166	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: Colour becomes Form, Annely Juda Fine Art, London, 24 enero - 1 marzo 1997; Kettle's Yard, Cambridge, 8 marzo - 27 abril 1997 UK, London: Annely Juda Fine Art, 1997 64 pp.
167	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: Konstruktive Gebrauchsgrafik DE, Ostfildern-Ruit: Hatje Cantz Verlag, 1999 311 pp.
168	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: Die Konstruktion ist das Bild = La Construction est le Tableau, Fondation Saner Studen, Biel, 18 junio - 1 octubre 1995 CH, Biel: Waser Gassmann, 1995 95 pp.
169	Lohse, Richard Paul	Richard Paul Lohse: Rétrospective, Musée de Grenoble, Grenoble, 11 junio - 5 septiembre 1988 FR, Grenoble: Musée de Grenoble, 1988 98 pp.
170	Lohse, Richard Paul,	Richard Paul Lohse 1902 - 1988, Wilhelm-Hack-Museum, Ludwigshafen am Rhein, 11 abril - 24 mayo 1992; Dum Umeni, Brno, 26 enero - 28 febrero 1993; Slovenska Narodna, Bratislava, 19 marzo - 9 mayo 1993; Ernst Museum, Budapest, 14 junio - 1 agosto 1993; Museum Sztuki, Lódz, 3 septiembre - 10 octubre 1993, Museum für Konkrete Kunst, Ingolstadt, 29 octubre - 27 noviembre 1993 DE, Ludwigshafen am Rhein: Wilhelm-Hack-Museum, 1992 101 pp.
171	Lohse, Richard Paul,	Richard Paul Lohse, Kunsthalle Bern, Bern, 5 septiembre - 11 octubre 1970 CH, Bern: Kunsthalle Bern, 1970 69 pp.

172	Lohse, Richard Paul,	Richard Paul Lohse: Modulare und Serielle Ordnungen, Kunsthaus Zürich, Zürich, 19 agosto - 26 septiembre 1976 DE, Düsseldorf: Stadtische Kunsthalle, 1975 94 pp.
173	Lohse, Richard Paul,	Richard Paul Lohse: Zeichnungen Dessins 1935 - 1985 DE, Baden: LIT Verlag, 1986 156 pp.
174	Martin, Kenneth,	Kenneth Martin, Yale Center for British Art, New Haven, Connecticut, abril - junio 1979 USA, New Haven: Yale Center for British Art, 1979 104 pp.
175	Martin, Kenneth,	Chance and Order: Drawings by Kenneth Martin, Waddington Galleries, London, 1973 UK, London: Waddington Galleries, 1973 77 pp.
176	Martin, Kenneth,	Kenneth Martin UK, London: Tate Gallery, 1975 2 v. (vol. 2, 37 pp.)
177	Martin, Kenneth,	Kenneth Martin, Tate Gallery, Londres, 14 mayo - 29 junio 1975 UK, London: Tate Gallery, 1975 2 v. (vol. 1, 144 pp.)
178	Martin, Kenneth,	Kenneth and Mary Martin, Annely Juda Fine Art, London, 11 septiembre - 31 octubre 1987 UK, London: Annely Juda Fine Art, 1987 128 pp.
179	Martin, Kenneth,	Kenneth Martin, Yale Center for British Art, New Haven, Connecticut, 18 abril - 17 junio 1979 USA, New Haven: Yale Center for British Art, 1979 104 pp.
180	Martin, Kenneth,	Kenneth Martin: The Chance and Order Series, Series Modulars and Related Works: 1953 - 1999, Annely Juda Fine Art, London, 19 enero - 20 febrero 1999 USA, London: Annely Juda Fine Art, 1999 41 pp.
181	Maurer, Dóra	Maurer Dóra: Munkák = Arbeiten 1958 – 1983, Ernst Múzeum, Budapest; Museum Moderner Kunst, Wien, 1984 HU, Budapest: Mũcsarnok, 1984 40 pp.
182	Maurer, Dóra et al.,,	Maurer - Gáyor: Párhuzamos életmüvek = Parallele Lebenswerke = Parallel Oeuvres, Városi Müvészeti Múzeum, Györ HU, Györ: Városi Müvészeti Múzeum, sf. 260 pp.
183	Maurer, Dóra,	Dóra Maurer: Arbeiten = Munkák = Works 1970 - 1993, Present Time Foundation, Budapest, 1994 HU, Budapest: Present Time Foundation, 1994 170 pp.
184	Maurer, Dóra,	Dóra Maurer: Munkák = Arbeiten 1990 - 1997, Kortárs Müvészeti Múzeum, Ludwig Múzeum Budapest, 27 noviembre 1997 - 4 enero 1998; Josef Albers Museum, Quadrat, Boltrop, 1 febrero - 15 marzo 1998 HU, Budapest: Ludwig Múzeum, 1997 78 pp.

185 Maurer, Dóra, Dóra Maurer: Verschiebungen, 1972 - 1975, Neu Galerie am Landesmuseum Joanneum, 23 marzo - 13 abril 1975
AT, Graz: Neue Galerie am Landesmuseum Joanneum, 1975
46 pp.

186 Maury, Jean-Pierre, Jean-Pierre Maury: Conversation avec Ben Durant
BE, Gerpinnes: Éditions Tandem, 2003
66 pp.

187 Meyer-Rogge, Jan, "Stillwasser": Plastische Arbeiten von Jan Meyer-Rogge, Museum Bochum Kunstsammlung, Bochum, 16 agosto - 21 septiembre 1980
DE, Bochum: Museum Bochum Kunstsammlung, 1980
117 pp.

188 Meyer-Rogge, Jan, Jan Meyer-Rogge: Plastische Arbeiten, 1984 - 1988, Karl Ernst Osthaus Museum, Hagen, 1988
DE, Hagen: Karl Ernst Osthaus Museum, 1988
71 pp.

189 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Algorithmische Arbeiten = Algorithmic Works, Josef Albers Museum, Quadrat Bottrop, 29 marzo - 3 mayo 1998
DE, Bottrop: Josef Albers Museum 1998
65 pp.

190 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Computer Graphics. Une Esthétique Programmée, Musée d´Art Moderne de la Ville de París, París, 11 mayo - 6 junio 1971
SN., sn: s.n., s.f.
48 pp.

191 Mohr, Manfred, Manfred Mohr
CH, Zürich: Waser Verlag, 1994
225 pp.

192 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Divisibility II. Generative Arbeiten 1981 - 1984, Galerie Teufel, Köln, 19 enero - 19 abril 1985
DE, Köln: Galerie Teufel, 1985
36 pp.

193 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Divisibility. Generative Works = Travaus Génératifs = Generative Arbeiten, 1980 - 1981, Galerie Gilles Gheerbrant, Montréal, 10 octubre - 3 noviembre 1981
CA, Montréal: Galerie Gilles Gheerbrant, 1981
32 pp.

194 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Fractured Symmetry. Algorithmische Arbeiten = Algorithmic Works 1967 - 1987, Wilhelm-Hack-Museum, Ludwigshafen am Rhein, 31 octubre - 6 diciembre 1987
DE, Ludwigshafen am Rhein: Wilhelm-Hack-Museum, 1987
119 pp.

195 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Werkübersicht von 1965 - 1980, Galerie Teufel, Köln, 1 marzo - 20 abril 1980
DE, Köln: Galerie Teufel, 1980
34 pp.

196 Mohr, Manfred, Manfred Mohr: Cubic Limit. Generative Drawings = Dessins Génératifs = Generative Zeichnungen, Part I, Travaux de 1973 - 1975, Galerie Weiller, París, 29 mayo - 28 junio 1975
FR, París: Galerie Weiller, 1975
24 pp.

197 Molnar, Véra, Véra Molnar: Inventar 1946 - 1999

DE, Ladenburg: Preysing-Verlag, 1999
600 pp.

198 Molnar, Véra, Véra Molnar, Musée de Grenoble, Grenoble, 7 octubre 2001 - 6 enero 2002
FR, Grenoble: Musée de Grenoble, cop. 2001
62 pp.
«ReConnaître»

199 Morellet, François, Morellet, Centre Georges Pompidou, París, 4 marzo - 11 mayo 1986; Stedelijk Museum d'Amsterdam, 1 junio - 20 julio 1986
FR, París: Centre Georges Pompidou, 1986
218 pp.

200 Morellet, François, François Morellet, Nationalgalerie Berlin, 15 enero - 20 febrero 1977; Staatliche Kunsthalle Baden-Baden, 22 abril - 12 junio 1977; Musée d'Art Moderne de la Ville de París, 23 septiembre - 30 octubre 1977
DE, Berlin: Nationalgalerie, 1977
188 pp.

201 Morellet, François, François Morellet: Quelques Courbes en Hommage à Lamour, Musée des Beaux-Arts Nancy, Nancy, 10 abril - 9 junio 2003
FR, Nancy: Musée des Beaux-Arts, 2003
68 pp.
«ReConnaître»

202 Morellet, François, François Morellet: Arbeiten 1971 - 1988, Galerie Dorothea Van der Koelen, Mainz, 28 octubre - 17 diciembre 1988
DE, Mainz: Dorothea van der Koelen Verlag, 1988
47 pp.

203 Morellet, François, François Morellet: Systems, Albright-Knox Art Gallery, Buffalo, New York, 21 julio - 16 septiembre 1984; Musée d'Art Contemporain Montreal, 11 octubre - 25 noviembre 1984; The Brooklyn Museum, Brooklyn, New York, 17 enero - 24 marzo 1985; Center for the Fine Arts, Miami, Florida, 27 abril - 23 junio 1985
USA, NY, Buffalo: Albright-Knox Art Gallery, 1984
64 pp.

204 Morellet, François, François Morellet: Geometree, Abbaye Royale de Fontevraud, Fontevraud, 30 noviembre 1985 - 18 enero 1986
FR, Pays de la Loire: Fonds Regional d'Art Contemporain, 1985
96 pp.

205 Morellet, François, François Morellet: mais Comment Taire Mes Commentaires
FR, París: École Nationale Supérieure des Beaux-Arts, 1999, 2003
283 pp.

206 Morellet, François, François Morellet: Obras de François Morellet en la Colección del Museo de Cholet (Francia), Sala Amárica Museo de Bellas Artes de Álava, Victoria, febrero - marzo 1990; Museo Municipal de San Telmo, San Sebastián, diciembre 1989 - enero 1990
ES, San Sebastián: Museo Municipal de San Telmo, DL, 1989
84 pp.

207 Morellet, François, François Morellet
CH, Zürich: Waser Verlag, 1986
263 pp.

208 Morellet, François, François Morellet: Dessins = Zeichnungen, Musée de Grenoble, 14 abril - 10 junio 1991; Stiftung für

Konkrete Kunst, Reutlingen, 7 julio - 30 octubre 1991
FR; DE, Grenoble; Reutlingen: Musée de Grenoble; Stiftung für Konkrete Kunst,1991
179 pp.

209 Morellet, François, François Morellet: Steel Lifes, Sprengel Museum, Hannover, 27 marzo - 20 abril 1992
DE, Hannover: Sprengel Museum, 1992
83 pp.

210 Morellet, François, François Morellet, Galería Theo, Barcelona, noviembre - diciembre 1990
ES, Barcelona: Theo Editor, 1990
38 pp.

211 Morellet, François, François Morellet: Lichtobjekte, Westfälischer Kunstverein, Münster, 3 septiembre - 3 octubre 1976; Kunsthalle zu Kiel, 1 mayo - 5 junio 1977
DE, Münster: Westfälischer Kunstverein, 1976
84 pp.

212 Morellet, François, François Morellet: Désintégrations Architecturales, Musée Savoisien, Chambéry; Musée d'Angers, Angers, 1982
FR, Chambéry: Musée Savoisien, 1982
72 pp.

213 Morellet, François, Morellet:, Museum Würth, Künzelsau, 22 enero - 20 mayo 2002
DE, Künzelsau: Museum Würth, 2002
356 pp.

214 Myslowski, Tadeusz, Tadeusz Myslowski: Selected Works. Cross Expanding Series, 1976 - 1988
USA, New York: Tadeusz Myslowski, 1990
48 pp.

215 Nemours, Aurelie, Aurelie Nemours, IVAM Centre Julio González, Valencia, 15 octubre 1998 - 3 enero 1999
ES, Valencia: IVAM Institut Valencià d'Art Modern, 1998
184 pp.

216 Nemours, Aurelie, Aurelie Nemours: Rythme, Nombre, Couleur, Centre National et de Culture Georges Pompidou, París, 9 junio - 27 septiembre 2004
FR, París: Centre Pompidou, 2004
220 pp.

217 Nemours, Aurelie, Aurelie Nemours, Musée de Grenoble, Grenoble, 24 junio - 24 septiembre 2001
FR, Grenoble; París: Musée de Grenoble; Réunion des Musées Nationaux, 2001
62 pp.
«ReConnaître. Tome; 2»

218 Nemours, Aurelie, Aurelie Nemours, Galleria Lorenzelli, Bergamo, mayo 1970
IT, Bergamo: Galleria Lorenzelli, 1970
23 pp.

219 Nemours, Aurelie, Nemours: Synonymie, Galerie Denise René, París, marzo 1986
FR, París: Galerie Denise René, 1986
32 pp.

220 Nemours, Aurelie, Aurelie Nemours, Espace de l'Art Concret Mouans-Sartoux, Mouans-Sartoux, 27 junio - 31 octubre 1999
FR, Mouans-Sartoux; París: Espace de l'Art Concret; Réunion des Musées Nationaux, 1999
62 pp.
«ReConnaître. Tome; 1»

221 Nemours, Aurelie, Aurelie Nemours: Estampes, Musée de la Cohue, Vannes, 10 marzo - 10 junio 2001
FR, París; Vannes: Réunion des Musées Nationaux; Musée de la Cohue, 2001
223 pp.

222 Otto, Ulrich, Ulrich Otto: Die Kraft der Stille, Galeria 72, Chelm; Muzeum Okręgowe, Chelm, 8 abril - 15 mayo 1999; Galeria Bałucka, Lód´z, 20 mayo - 20 junio 1999; Durhammer Galerie, Frankfurt / Main, 28 mayo - 31 julio 1999; Galeria Test, Warszawie, 20 agosto - 11 septiembre 1999
PL, sn.: s.n, s.f.
26 pp.

223 Otto, Ulrich, Ulrich Otto: Die Kraft der Stille, Museum Modern Art, Hünfeld, 19 noviembre 1995 - 14 enero 1996
DE, Hünfeld: Museum Modern Art, 1995
28 pp.

224 Palazuelo, Pablo Palazuelo: Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía, Madrid, 25 abril - 10 julio 1995; IVAM Centre Julio González, Valencia, 18 enero - 10 marzo 1996
ES, Madrid: Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía, D.L.1995
283 pp.

225 Palazuelo, Pablo, Pablo Palazuelo, Galería Iolas-Velasco, Madrid, marzo - abril 1973
ES, Madrid: Galería Iolas – Velasco, 1973
32 pp.

226 Palazuelo, Pablo, Palazuelo: Geometrías Espirituales, Centro Cultural Casa del Cordón, Caja de Burgos, Burgos, diciembre 1994 - enero 1995
ES, Burgos: Caja de Burgos, 1994
88 pp.

227 Palazuelo, Pablo, Pablo Palazuelo: Virtus Marin, Centro Andaluz de Arte Contemporáneo, Sevilla, 2000
ES, Sevilla: Centro Andaluz de Arte Contemporáneo, DL, 2000
29 pp.
«Mínima; 4»

228 Palazuelo, Pablo, Pablo Palazuelo: 1995 - 2005, Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía, Madrid, 25 octubre 2005 - 9 enero 2006
ES, Madrid: Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía, 2005
171 pp.

229 Pfahler, Georg Karl, Georg Karl Pfahler: Bildfolgen, Staatsgalerie Stuttgart, 17 marzo - 6 mayo 1990
DE, Stuttgart: Staatsgalerie Stuttgart, Edition Cantz, 1990
126 pp.

230 Pfahler, Georg Karl, Georg Karl Pfahler: Bilder und Objekte = Paintings and Objects, Kunstsammlungen Chemnitz, Chemnitz, 16 septiembre 2001 - 11 noviembre 2001; Von der Heydt-Museum Wuppertal, Wuppertal, 9 diciembre 2001 - 20 enero 2002
DE, Chemnitz: Kunstsammlungen Chemnitz, 2001
159 pp.

231 Pfahler, Georg Karl, Georg Karl Pfahler: Zeichnungen, Prakonzeptionen, Collagen, Gouachen, Gemalde, Farbraumobjekte, Architekturprojekte, 1955 - 1975
DE, Münster: Westfälischer Kunstverein, 1976
196 pp.

232 Pfahler, Georg Karl, Georg Karl Pfahler, Galerie Neuendorf, Frankfurt / Main, 26 septiembre - 30 noviembre 1992
DE, Frankfurt / Main: Galerie Neuendorf, 1992
71 pp.

233 Pfahler, Georg Karl,
Karl Pfahler, Hessischen Landesmuseum, Darmstadt, 21 junio - 15 septiembre 1968
DE, Darmstadt: Hessischen Landesmuseums, 1968
26 pp.

234 Ragon, Michel,
Agam: 54 Palabras Clave para una Lectura Polifónica de Agam,
ES, Barcelona: Polígrafa, 1976
108 pp.

235 Rave, Horst,
Horst Rave: Farbräume, Farbtektoniken, Gesellschaft für Kunst und Gestaltung e. V., Bonn, 1989
DE, Bonn: Gesellschaft für Kunst und Gestaltung e. V, 1989
44 pp.

236 Rave, Horst,
Horst Rave: Transparenz und Krümmung, Galerie Circulus, Bonn, 28 mayo - 15 julio 1983
DE, Bonn: Circular Zeitschrift für Kunst und Gestaltung, 1983
32 pp.

237 Rave, Horst,
Horst Rave: Über die Fallbilder, Galerie Circulus, Bonn
DE, Bonn: Circular Zeitschrift für Kunst und Gestaltung, sf
24 pp.

238 Ridell, Torsten,
Torsten Ridell: Permutations de Lignes = Linjepermutationer
SE, Malmö: Wedgepress & Cheese, 1979
30 pp.

239 Riley, Bridget,
Bridget Riley, Tate Britain, London, 26 junio - 28 septiembre 2003
UK, London: Tate Publishing, 2003
244 pp.

240 Riley, Bridget,
Bridget Riley: Reconnaissance, Dia Center for the Arts, New York, 21 septiembre - 17 junio 2001
USA, New York: Dia Center for the Arts, 2001
112 pp.

241 Riley, Bridget,
Bridget Riley: New York, Museum Haus Esters, Kaiser Wilhelm Museum, Krefeld, 24 marzo - 18 agosto 2002
DE, Ostfildern-Ruit, Hatje Cantz Verlag, 2002
84 pp.

242 Riley, Bridget,
Robert Kudielka on Bridget Riley: Essays and interviews 1972 - 2003
UK, London: Ridinghouse, 2005
264 pp.

243 Rubens, Albert,
Albert Rubens: Geometrisch in- en Uitzicht = Geometricasl Insights and Views, Museum of Modern Art, Oostende, 4 diciembre 1998 - 14 febrero 1999
BE: Tielt: Lannoo, 1998
143 pp.

244 Sayler, Diet,
Diet Sayler, Kunsthaus Nürnberg, 18 febrero - 27 marzo 1994; Institut für Moderne Kunst Nürnberg, 18 febrero - 8 abril 1994; Vasarely Múzeum Budapest, 12 abril - 5 junio 1994; Stiftung für Konstruktive und Konkrete Kunst Zürich, 24 junio - 21 agosto 1994; Dum Umení Mesta Brno, 6 septiembre - 16 octubre 1994; Lorenzelli Arte S.A.S. Milano, 15 enero - 28 febrero 1995
DE, Nürnberg: Verlag für Moderne Kunst, cop. 1994
182 pp.

245 Sayler, Diet,
Diet Sayler, Wilhelm-Hack-Museum, Ludwigshafen, 20 febrero - 18 abril 1999; Muzeul National de Artă al României, Bukarest, 26 agosto - 10 octubre 1999; České Muzeum Výtvarných Umění, Prag, The Czech Museum of Fine Arts, Prague, 8 diciembre 1999 – 30 enero 2000; Kettle’s Yard, Cambridge, University of Cambridge, Cambridge, 1 - 30 abril 2000; Ely Catedral, Ely, 1 - 30 abril

2000
DE, Ludwigshafen; Nürnberg: Wilhelm-Hack-Museum; Verlag für Moderne Kunst, 1999
248 pp.

246 Staechelin, Peter, Peter Staechelin: Farbtafeln 1989 - 2001, März Galerien, Mannheim / Ladenburg, 10 noviembre - 9 diciembre 2001; Städtische Galerie Schwarzes Kloster, Freiburg im Breisgau, 17 noviembre 2001 - 13 enero 2002
DE, Ladenburg: Preysing Verlag, 2001
52 pp.

247 Staechelin, Peter, Peter Staechelin: Farbtafeln 1972 - 1992, Städtische Museen Freiburg, Museum für Neue Kunst, Ludwigshafen am Rhein, 1 febrero - 29 marzo 1992; Wilhelm-Hack-Museum, Ludwigshafen am Rhein, 5 septiembre - 11 octubre 1992; Museum für Konkrete Kunst, Ingolstadt, enero - febrero 1993
DE, Freiburg; Ludwigshafen am Rhein; Ingolstadt: Städtische Museen Freiburg; Museum für Neue Kunst; Wilhelm-Hack-Museum; Museum für Konkrete Kunst, 1992
133 pp.

248 Thiel, Heiner, Heiner Thiel: Arbeiten 1987 - 1989, Galerie Dorothea Van der Koelen, Mainz, 20 enero - 18 marzo 1989
DE, Mainz, Galerie Dorothea Van der Koelen Verlag, 1989
39 pp.

249 Thiel, Heiner, Opus · Heiner Thiel: Gesamtverzeichnis der Plastischen Arbeiten 1979 - 1993 = Catalogue Raisonne of the Sculptural Works 1979 - 1993
DE, Mainz: Dorothea van der Koelen Verlag, 1994
160 pp.

250 Thomas, Norbert, Norber Thomas: Von der Fläche in den Raum = Del Plano al Espacio = From Plane to Space, Galería AELE-Evelyn Botella, Madrid, mayo - junio 2000
DE, Essen: Art-Print Publishers, Niessen GMBH, 2000
48 pp.

251 Thomas, Norbert, Norbert Thomas, Märkischen Museum, Witten, 27 julio - 5 octubre 2003
DE, Bönen: DruckVerlag Kettler, 2003
321 pp.

252 Thomas, Norbert, Norbert Thomas: System und Zufall, Galerie im Stadttheater, Museum für Konkrete Kunst, Ingolstadt, 14 febrero - 15 marzo 1992; Galerie Hoffmeister, Lüdenscheid, 22 marzo - 22 abril 1992; Galerie Augustin, Hofheim am Taunus, 3 mayo - 7 junio 1992; Städtisches Museum, Gelsenkirchen, 27 junio - 30 agosto 1992; Forum Siemens AG, Essen, 19 agosto - 30 septiembre 1992; Schoßgalerie, Nordkirchen, 1 noviembre - 19 diciembre 1992
DE, Bielefeld: Druckerei & Verlag, 1992
61 pp.

253 Vacher, Philippe, Philippe Vacher: Années 90
FR, Déols: Philippe Vacher, 1990
67 pp

254 Verhaegen, Dirk, Dirk Verhaegen:, Sint-Lukasgalerij, Brussel, 26 abril - 24 mayo 1991
SN, s.n.: s.n., s.f.
16 pp.
«(Anti-)kwadraten 86-91; 6»

255 Winiarski, Ryszard, Ryszard Winiarski, Internationaal Cultureel Centrum, Antwerpen, 16 febrero - 16 marzo 1980
BE, Antwerpen: Internationaal Cultureel Centrum; Ministerie van Nederlandse Cultuur, 1980
39 pp.

256 Winiarski, Ryszard, Ryszard Winiarski, Galleria Schwarz, Milano, 8 noviembre - 11 diciembre 1974
IT, Milano: Galleria Schwarz, 1974
42 pp.

257 Yoshikawa, Shizuko, Shizuko Yoshikawa: "A Roma: Gouachen und Pastelle 1997 - 1999", Kunsthaus Zürich, Zürich, 20 mayo - 30 julio 2000
CH, Zürich: Kunsthaus, 2000
40 pp.

258 Yoshikawa, Shizuko, Shizuko Yoshikawa: Gouachen 1987 - 1992, Kunstverein Ulm, 31 enero - 7 marzo 1993; Gesellschaft für Kunst und Gestaltung, Bonn, 19 marzo - 30 abril 1993; Galerie Gudrun Spielvogel, Galerie & Edition, München, junio - julio 1993
DE, Ulm; Bonn; München: Kunstverein; Gesellschaft für Kunst und Gestaltung; Galerie Gudrun Spielvogel, 1993
47 pp.

259 Yoshikawa, Shizuko, Shizuko Yoshikawa: Cira (sic) en Colombia: Bogotá, Medellín, Cali, 1991
SN, sn: s.n., 1991
16 pp.

LIBROS

Nombre Autor: apellido y nombre del autor
Título y subtítulo libro original: editor, lugar de publicación, fecha de edición, edición
Título y subtítulo libro traducido:
Si el libro consultado es una traducción al castellano del original, se especifican los siguientes datos:
Editor
Lugar de edición: si en el libro no figura, se escribe sn (sin nombre)
Fecha de edición libro: si en el libro no figura, se escribe sf (sin fecha)
Traducción al castellano: nombre del traductor
Ediciones: 1ª ed. ; Nª que hace la edición consultada
Grosor del libro:
Número de páginas del libro y si es necesario, número de volúmenes de que se compone la obra
Colección libro. Serie

260 AA.VV.: The Visual Mind: Art and Mathematics, Editado por Michele Emmer
USA, MA, Cambridge: The MIT Press, 1995
1.ª ed 1993; 3ª ed.
274 pp.
«The Leonardo book series»

261 Aracil, Javier et al., Dinámica de Sistemas
ES, Madrid: Alianza Editorial, 2002
1ª ed. 1997; 2ª ed.
198 pp.
«Alianza Universidad. Textos; 168»

262 Bertalanffy, Ludwig von, Perspectives on General System Theory: Scientific - Philosofhical Studies, George Braziller, Inc., New York, 1975
Perspectivas en la Teoría General de Sistemas: Estudios Científico - Filosóficos
ES, Madrid: Alianza Editorial, 1992
Traducción castellano: Antonio Santisteban
1ª ed. 1979; 4ª ed.
166 pp.
«Alianza Universidad; 230»

263 Bertalanffy, Ludwig v, et al., Trends in General Systems Theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972, 1.ª ed
Tendencias en la Teoría General de Sistemas
ES, Madrid: Alianza Editorial, 1987
1ª ed. 1978; 4ª ed.
Traducción castellano: Álvaro Delgado y Andrés Ortega
323 pp.
«Alianza Universidad. Ciencias; 208»

264 Beyer, Jinny, Designing Tessellations: The Secrets of Interlocking Patterns
USA, IL, Chicago: Contemporary Books, 1999
1ª ed.
242 pp.

265 Bohm, David et al., Science, Order and Creativity, Bantam Books, 1987, 1ª ed.
Ciencia, Orden y Creatividad: Las Raíces Creativas de la Ciencia y la Vida
ES, Barcelona: Editorial Kairós, 2003
Traducción castellano: Joseph M. Apfelbäume
1ª ed. 1988; 3ª ed.

299 pp.
«Nueva ciencia»

266 Bohm, David, | Wholeness and the Implicate Order, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1980, 1ª ed.
La Totalidad y el Orden Implicado
ES, Barcelona: Editorial Kairós, 2002
Traducción castellano: Joseph M. Apfelbäume
1ª ed. 1988; 4ª ed.
305 pp.
«Nueva ciencia»

267 Bohm, David, | Thought as a System
UK; USA, London; New York: Routledge, 2005
1ª ed. 1994; 8ª ed.
250 pp.

268 Bonell, Carmen | La Geometría y la Vida: Antología de Palazuelo
ES, Murcia: Cendeac, 2006
235 pp.
«Ad Hoc. Monografías; 10»

269 Bonell, Carmen, | La Divina Proporción: las Formas Geométricas
ES, Barcelona: Edicions UPC, 1999
1ª ed. 1994; 2ª ed.
128 pp.
«Arquitext; 2»

270 Ching, Francis D.K., | Architecture: Form, Space and Order, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979, 1ª ed.
Arquitectura: Forma, Espacio y Orden
MEX, México, DF: Ediciones Gustavo Gili, 1987
Traducción castellano: Santiago Castán y Xavier Güell Guix
1ª ed. 1982; 5ª ed.
397 pp.

271 Clark, Roger H. et al., | Precedents in Architecture, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1985, 1ª ed.
Arquitectura: Temas de Composición
MEX, México, DF: Ediciones Gustavo Gili, 1987
Traducción castellano: Santiago Castán
1ª ed.
226 pp.

272 Critchlow, Keith, | Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach
USA, Rochester, Vermont: Inner Traditions International, 1999
1ª ed. (1ª ed. London: Thames and Hudson, 1976)
192 pp.

273 Critchlow, Keith, | Order in Space: a Design Source Book
USA, New York: Thames & Hudson, 2000
1ª ed. 1987; 2ª ed.
120 pp.

274 Descombes, René, | La Magie du Carré: Le Carré dans Tous ses Éclats
FR, París: Vuibert, 2004
1ª ed.
608 pp.

275 Descombes, René, | Les Carrés Magiques: Histoire, Théorie et Technique du Carré Magique, de l'Antiquité aux Recherches

Actuelles
FR, París: Vuibert, 2000
1ª ed.
494 pp.

276 Doczi, György, The Power of Limits: Proportional Harmonies in Nature, Art and Architecture
USA, MA, Boston: Shambhala Publications, 1994
1ª ed. 1981
150 pp.

277 Enzensberger, H. Magnus, Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für Alle, die Angst vor der Mathematik Haben, Carl Hanser Verlag, München, 1997, 1ª ed.
El Diablo de los Números: Un Libro para Todos Aquellos que Temen a las Matemáticas
ES, Madrid: Ediciones Siruela, 1997
Traducción castellano: Carlos Fortea
1ª ed. 1997; 2ª ed.
259 pp.

278 Gerstner, Karl, The Forms of Color: The Interaction of Visual Elements, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986, 1ª ed.
Las Formas del Color: la Interacción de Elementos Visuales
ES, Madrid: Hermann Blume, 1988
Traducción castellano: Juan Manuel Ibeas
1ª ed.
180 pp.

279 Ghyka, Matila C., Le Nombre d'Or: II. Les Rythmes, Gallimard, París, 1931, 1ª ed.
El Número de Oro: Vol: I: Los Ritmos
ES, Barcelona: Editorial Poseidón, 1984
Traducción castellano: J. Bosch Bousquet
1ª ed. 1978; 2ª ed.
222 pp.

280 Ghyka, Matila C., Esthétique des Proportions dans la Nature et dans les Arts, Gallimard, París, 1933, 5ª ed.
Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes
ES, Barcelona: Editorial Poseidón, 1983
Traducción castellano: J. Bosch Bousquet
3ª ed.
301 pp.

281 Ghyka, Matila C., Philosophie et Mystique du Nombre, Editions Payot & Rivages, París, 1952, 1ª ed.
Filosofía y Mística del Número
ES, Barcelona: Ediciones Apóstrofe, 1998
Traducción castellano: Roser Berdagué
1ª ed.
318 pp.
«Poseidón»

282 Granet, Marcel, La Pensée Chinoise, Éditions Albin Michel, París
El Pensamiento Chino
MEX, México, DF: Uteha (Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana), 1959
Traducción castellano: Vicente Clavel
1ª ed.
429 pp.
«La Evolución de la Humanidad; 30»

283 Hambidge, Jay, The Elements of Dynamic Symmetry
USA, New York: Dover Publications

1ª ed. 1967
133 pp.

284 Hambidge, Jay, Practical Applications of Dynamic Symmetry
USA, New York: The Devin-Adair Company
1ª ed. 1960
109 pp.

285 Hofstadter, Douglas R., Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid, Basic Books, New York, 1979, 1ª ed.
Gödel, Escher, Bach: Un Eterno y Grácil Bucle
ES, Barcelona: Tusquets Editores, S.A., 1995
Traducción castellano: Mario A. Usabiaga y Alejandro López Rousseau, con la colaboración de Franco Simonetti, Andrea Parada y Claudio L. Lamadrid
1ª ed. 1987; 5ª ed.
882 pp.
«Metatemas; 14»

286 Huntington, Edward V., The Continuum and Other Types of Serial Order
USA, New York: Dover Phoenix Editions, 2003
1ª ed. 1955; 2ª ed.
82 pp.

287 El-Said, Issam, et al., Geometric Concepts in Islamic Art
UK, London: World of Islamic Festival Publishing Company, 1976
1ª ed.
154 pp.

288 Johnson, Tom, Self-Similar Melodies
FR, París: Editions 75, 1996
1ª ed.
291 pp.

289 Johnson, Tom, Musique pour quatre-vingt-huit = Music for Eighty-eight = Musik für Achtundachtzig
FR, París: Editions 75, 1988
1ª ed.
79 pp.

290 Klir, George J., Teoría General de Sistemas: un Enfoque Metodológico
ES, Madrid: Ediciones ICE, 1980
383 pp.
«Matemática actual»

291 Kuhm, Thomas S., The Structure of Scientific Revolutions, University of Chicago Press, Chicago, 1962, 1ª ed.
La Estructura de las Revoluciones Científicas
ES, Madrid: Fondo de Cultura Económica, 2001
Traducción castellano: Agustín Contín
1ª ed. 1971; 21ª ed.
320 pp.
«Brevarios»

292 Leyton, Michael, A Generative Theory of Shape
DE, Berlín: Springer Verlag, cop., 2001
554 pp.

293 Leyton, Michael, Symmetry, Causality, Mind
USA, CA, Massachusetts: The Mit Press, 1992
1ª ed.

630 pp.
«A Bradford book»

294 Luhmann, Niklas, Complejidad y Modernidad: De la Unidad a la Diferencia
ES, Madrid: Trotta, 1998
257 pp.
«Estructuras y procesos. Ciencias sociales»

295 Luhmann, Niklas, Die Kunst der Gesellschaft, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1995
El Arte de la Sociedad
MEX, México, DF: Editorial Herder, S.A., 2005
Traducción castellano: Torres Nafarrate con la colaboración de Brunhilde Erker, Silvia Pappe y Luis Felipe Segura
1ª ed.
512 pp.

296 Luhmann, Niklas, Fin y Racionalidad en los Sistemas: Sobre la Función de los Fines en los Sistemas Sociales
ES, Madrid: Editora Nacional, D.L. 1983
349 pp.
«Cultura y sociedad. Teoría y método»

297 Luhmann, Niklas, Introducción a la Teoría de Sistemas
MEX, México, DF: Anthropos Editorial; Universidad Iberoamericana, 1996
1ª ed.
303 pp.
«Autores, textos y temas. Ciencias sociales; 11»

298 Luhmann, Niklas, Beobachtungen der Moderne, Westdeutscher Verlag, Opladen, 1992, 1ª ed.
Observaciones de la Modernidad: Racionalidad y Contingencia en la Sociedad Moderna
ES, Barcelona: Paidós Ibérica, 1997
Traducción castellano: Carlos Fortea Gil
1ª ed.
203 pp.
«Paidós Studio; 123»

299 Luhmann, Niklas, Organisation und Entscheidung, Westdeutscher Verlag, Opladem, 1978, 1ª ed.
Autopoiesis, Handlung und Kommunikative Verständigung, Zeitschrift für Soziologie, 11, 4, 1982, 1ª ed.
Organización y Decisión: Autopoiesis, Acción y Entendimiento Comunicativo
ES; MEX; CHI, Barcelona; México, DF; Santiago de Chile: Anthropos; Universidad Iberoamericana; Instituto de Sociología, Pontificia Universidad Católica de Chile, 1997
Traducción castellano: Darío Rodríguez Mansilla
1ª ed.
138 pp.
«Biblioteca A; 27»

300 Luhmann, Niklas, Soziale Systeme: Grundisse einer Allgemeinen Theorie, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1984, 1ª ed.
Sistemas Sociales: Lineamientos para una Teoría General
ES; MEX; COL, Barcelona; México, DF; Santa Fé de Bogotá: Anthropos; Universidad Iberoamericana; CEJA, Pontificia Universidad Javeriana, 1998
Traducción castellano: Silvia Pappe y Brunhilde Erker, bajo la coordinación de Javier Torres Nafarrate
1ª ed. 1991; 2ª ed.
445 pp.
«Autores, textos y temas. Ciencias Sociales; 15»

301 Luhmann, Niklas, System and Funktion, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1984, 1ª ed.
Sociedad y Sistema: la Ambición de la Teoría

ES, Barcelona: Paidos Ibérica; I.C.E. de la Universidad Autónoma de Barcelona, 1990
Traducción castellano: Santiago López Petit y Dorothee Schmitz
1ª ed.
144 pp.
«Pensamiento contemporaneo; 8»

302 Marcolli, Attilio, Teoría del Campo: Curso de Educación Visual
ES, Madrid: Xarait Ediciones y Alberto Corazón Editor, 1978.
1ª ed.
401 pp.

303 Maturana, Humberto, El Sentido de lo Humano
CHI, Santiago de Chile: J. C. Sáez Editor, 2005
1ª ed. 1991; 10ª ed.
327 pp.

304 Maturana, Humberto, La Objetividad: Un Argumento para Obligar
CHI, Santiago de Chile: J. C. Sáez Editor, 2005
1ª ed. 1992; 3ª ed.
157 pp.

305 Maturana, Humberto, La Realidad: ¿Objetiva o Construida?: I. Fundamentos Biológicos de la Realidad
ES, Barcelona: Anthropos, 1997
1ª ed. 1995; 2ª ed.
162 pp.
«Nueva Ciencia; 12»

306 Maturana, Humberto, La Realidad: ¿Objetiva o Construida?: II. Fundamentos Biológicos del Conocimiento
ES, Barcelona: Anthropos, 1997
1ª ed. 1996; 2ª ed.
286 pp.
«Nueva Ciencia; 13»

307 Maturana, Humberto, et al., Biología del Emocionar y Alba Emoting: Respiración y Emoción
CHI, Santiago de Chile: Dolmen Ediciones
366 pp.

308 Maturana, Humberto, et al., Vom Sein zum Tun
Del Ser al Hacer: Los Orígenes de la Biología del Conocer
CHI, Santiago de Chile: J.C.Sáez Editor, 2005
Traducción castellano: Luisa Ludwig
1ª ed. 2004; 2ª ed.
239 pp.

309 Maturana, Humberto, et al., The Tree of Knowledge: the Biological Roots of Human Understanding, Shambhala, Boston, 1987
El Árbol del Conocimiento: Las Bases Biológicas del Entendimiento Humano
ARG, Buenos Aires: Lumen, 2003
1ª ed.
172 pp.

310 O'Connor, Joseph, et al., The Art of Systems Thinking, Thorsons (HarperCollins), Londres, 1997, 1.ª ed
Introducción al Pensamiento Sistémico: Recursos Esenciales para la Creatividad y la Resolución de Problemas
ES, Barcelona: Ediciones Urano, D.L., 1998
Traducción castellano: Mar Guerrero
1.ª ed
302 pp.

311 Palazuelo, Pablo et al. Palazuelo
FR, París: Maeght Éditeur, 1980
216 pp.

312 Palazuelo, Pablo, Pablo Palazuelo: Geometría y Visión. Una Conversación con Kevin Power
ES, Granada: Diputación Provincial, 1995
159 pp.

313 Palazuelo, Pablo, Pablo Palazuelo: Escritos. Conversaciones
ES, Murcia: Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos; Librería Yerba; CajaMurcia, 1998
307 pp.
«Colección de Arquitectura; 36»

314 Peitgen, Heinz-Otto et al., Chaos and Fractals: New Frontiers of Science
USA, New York: Springer-Verlag, 1992
1ª ed.
984 pp.

315 Perle, George, Serial Composition and Atonality. An Introduction to the Music of Schoenberg, Berg and Webern
USA, Berkeley: University of California Press, 1991
1ª ed. 1962; 6ª ed.
164 pp.

316 Schodek, Daniel L., Structure in Sculpture
USA, CA, Massachusets: The MIT Press, 1993
312 pp.

317 Scholfield, P. H., The Theory of Proportion in Architectura, Cambridge University Press, Cambridge, 1958, 1ª ed.
Teoría de la Proporción en Arquitectura
ES, Barcelona: Editorial Labor, 1971
176 pp.
«Biblioteca universitaria labor; 20»

318 Senge, Peter, et al., The Dance of Change: The Challenges of Sustaining Momentum in Learning Organizations, Doubleday, New York, 1999, 1ª ed.
La Danza del Cambio: Cómo Crear Organizaciones Abiertas al Aprendizaje
ES, Barcelona: Ediciones Gestión 2000, S.A., 2000
Traducción castellano: Jorge Cárdenas Nannetti
1ª ed.
447 pp.

319 Senge, Peter, The Fifth Discipline, Doubleday, New York, 1990, 1ª ed.
La Quinta Disciplina: El Arte y la Práctica de la Organización Abierta al Aprendizaje,
ARG, Buenos Aires: Ediciones Granica, 2005
Traducción castellano: Carlos Gardini
1ª ed. 2004; 2ª ed.
490 pp.

320 Senge, Peter, et al., The Fifth Discipline Fieldbook, Doubleday, New York, 1994, 1ª ed.
La Quinta Disciplina en la Práctica: Estrategias y Herramientas para Construir la Organización Abierta al Aprendizaje
ES, Barcelona: EdicioneS Granica, 1999
Traducción castellano: Carlos Gardini
1ª ed. 1995; 4ª ed.
593 pp.
«Management»

321 Sheets Dye, Daniel, Chinese Lattice Designs
USA, New York: Dover Publications, Inc.
1.ª ed. 1974
467 pp.

322 Stevens, Peter S., Handbook of Regular Patterns: An Introduction to Symmetry in Two Dimensions
USA, MA, Cambridge: The MIT Press, 1999
1ª ed. 1984, 6ª ed.
400 pp.

323 Villafañe, Justo Introducción a la Teoría de la Imagen
ES, Madrid: Ediciones Pirámide, 1987
1ª ed. 1985; 2ª ed.
230 pp.

324 Villafañe, Justo et al., Principios de Teoría General de la Imagen,
ES, Madrid: Ediciones Pirámide, 2000
1ª ed. 1996; 2ª ed.
342 pp.

325 Von Foerster, Heinz et al., Music by Computers
USA, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1969
1ª ed.
139 pp.

326 Von Franz, Marie-Louise, Zahl und Zeit: Psychologische Überlegungen zu einer Annäherung von Tiefenpsychologie und Physik, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1970
Number and Time: Reflections Leading toward a Unification of Depth Psychology and Physics
USA, IL, Evanston: Northwestern University Press, 1974
1ª ed.
332 pp.
«Studies in Jungian Thought»

327 Von Franz, Marie-Louise, On Divination and Synchronicity, Inner City Books, Toronto, 1990, 1ª ed.
Sobre Adivinación y Sincronicidad: La Psicología de las Casualidades Significativas
ES, Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A., 1999
Traducción castellano: Alicia Sánchez Millet
1ª ed.
180 pp.
«Paidós Junguiana; 5»

328 Von Franz, Marie-Louise, Time: Rhythm and Repose,
UK, London: Thames and Hudson, 1978
1ª ed.
96 pp.
«Art & Imagination»

329 Watzlawick, Paul et al., Das Auge des Betrachters: Beiträge zum Konstruktivismus, R. Piper GmbH, Munich, 1991, 1ª ed.
El Ojo del Observador: Contribuciones al Constructivismo. Homenaje a Heinz von Foerster
ES, Barcelona: Editorial Gedisa, S.A., 2000
Traducción castellano: Cristóbal Piechocki
1ª ed. 1989; 4ª ed.
261 pp.
«Ciencias cognitivas. CLA-DE-MA»

330 Weil, Claudia & Thomas Ornament in Architektur, Kunst und Design
DE, München: Callwey Verlag, 2004
144 pp.

331 Wilhelm, Richard, I Ging, das Buch der Wandlung, Eugen Diederichs Verlag Düsseldorf, 1960, 1ª ed.
I Ching. El libro de las mutaciones
ES, Barcelona: Edhasa, 2002
1ª ed. 1977; 25ª ed.
821 pp.

332 Wong, Wucius, Principles of Two-Dimensional Design, Van Nostrand Reinhold Company, New York
Fundamentos del Diseño Bi- y Tri-dimensional
ES, Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1986
Traducción castellano: Homero Alsina Thevenet
1ª ed. 1979; 5ª ed.
204 pp.
«GG Diseño»

APÉNDICE A

Listado de artistas seleccionados por nombre

1	AT	AUSTRIA
2	BE	BÉLGICA
3	CH	SUIZA
4	CZ	REPÚBLICA CHECA
5	DE	ALEMANIA
6	ES	ESPAÑA
7	FIN	FINLANDIA
8	FR	FRANCIA
9	HU	HUNGRÍA
10	IT	ITALIA
11	NL	PAÍSES BAJOS
12	PL	POLONIA
13	SW	SUECIA
14	UK	REINO UNIDO

1	Adler, Karl-Heinz	DE
2	Agam, Yaacov	FR
3	Allsop, Douglas	UK
4	Arena, Vincenzo	IT
5	Asins, Elena	ES
6	Baljeu, Joost	NL
7	Bill, Max	CH
8	Böhm, Hartmut	DE
9	Bruch, Hellmut	AT
10	Carter, John	UK
11	Cohen, Nathan	UK
12	Dienst, Hans Günter	DE
13	Ernst, Rita	CH
14	Federle, Helmut	CH
15	Fritz, Kunibert	DE
16	Fruhtrunk, Günter	DE
17	Gáyor, Tibor	HU
18	Gerstner, Karl	CH
19	Gil, Julián	ES
20	Glass, Ingo	DE
21	Gómez Perales, Jose Luis	ES
22	Grosch, Hans	AT
23	Hanselmann, Urs	CH

24	Honegger, Gottfried	CH
25	Hughes, Malcolm	UK
26	Iglesias, Jose María	ES
27	Kalucki, Jerzy	PL
28	Kidner, Michael	UK
29	Knoebel, Imi	DE
30	Kubicek, Jan	CZ
31	Kujasalo, Matti	FIN
32	Linn, Horst	DE
33	Linschinger, Josef	AT
34	Lohse, Richard Paul	CH
35	Lowe, Peter	UK
36	Martin, Kenneth	UK
37	Maurer, Dóra	HU
38	Maury, Jean-Pierre	BE
39	Meyer-Rogge, Jan	DE
40	Mohr, Manfred	DE
41	Molnar, Véra	FR
42	Morellet, François	FR
43	Myslowski, Tadeusz	PL
44	Nemours, Aurelie	FR
45	Otto, Ulrich	DE
46	Palazuelo, Pablo	ES
47	Pfahler, Georg Karl	DE
48	Rave, Horst	DE
49	Ridell, Torsten	SW
50	Riley, Bridget	UK
51	Rubens, Albert	BE
52	Sayler, Diet	DE
53	Staechelin, Peter	DE
54	Thiel, Heiner	DE
55	Thomas, Norbert	DE
56	Vacher, Philippe	FR
57	Verhaegen, Dirk	BE
58	Winiarski, Ryszard	PL
59	Yoshikawa, Shizuko	CH

APÉNDICE B

Listado de artistas seleccionados por países

1	Bruch, Hellmut	AT	AUSTRIA
2	Grosch, Hans	AT	
3	Linschinger, Josef	AT	
4	Maury, Jean-Pierre	BE	BÉLGICA
5	Rubens, Albert	BE	
6	Verhaegen, Dirk	BE	
7	Bill, Max	CH	SUIZA
8	Ernst, Rita	CH	
9	Federle, Helmut	CH	
10	Gerstner, Karl	CH	
11	Hanselmann, Urs	CH	
12	Honegger, Gottfried	CH	
13	Lohse, Richard Paul	CH	
14	Yoshikawa, Shizuko	CH	
15	Kubicek, Jan	CZ	REPÚBLICA CHECA
16	Adler, Karl-Heinz	DE	ALEMANIA
17	Böhm, Hartmut	DE	
18	Dienst, Hans Günter	DE	
19	Fritz, Kunibert	DE	
20	Fruhtrunk, Günter	DE	
21	Glass, Ingo	DE	
22	Knoebel, Imi	DE	
23	Linn, Horst	DE	
24	Meyer-Rogge, Jan	DE	
25	Mohr, Manfred	DE	
26	Otto, Ulrich	DE	
27	Pfahler, Georg Karl	DE	
28	Rave, Horst	DE	
29	Sayler, Diet	DE	
30	Staechelin, Peter	DE	
31	Thiel, Heiner	DE	
32	Thomas, Norbert	DE	
33	Asins, Elena	ES	ESPAÑA
34	Gil, Julián	ES	

35	Gómez Perales, Jose Luis	ES	
36	Iglesias, Jose María	ES	
37	Palazuelo, Pablo	ES	
38	Kujasalo, Matti	FIN	FINLANDIA
39	Agam, Yaacov	FR	FRANCIA
40	Molnar, Véra	FR	
41	Morellet, François	FR	
42	Nemours, Aurelie	FR	
43	Vacher, Philippe	FR	
44	Gáyor, Tibor	HU	HUNGRÍA
45	Maurer, Dóra	HU	
46	Arena, Vincenzo	IT	ITALIA
47	Baljeu, Joost	NL	PAÍSES BAJOS
48	Kalucki, Jerzy	PL	POLONIA
49	Myslowski, Tadeusz	PL	
50	Winiarski, Ryszard	PL	
51	Ridell, Torsten	SW	SUECIA
52	Allsop, Douglas	UK	REINO UNIDO
53	Carter, John	UK	
54	Cohen, Nathan	UK	
55	Hughes, Malcolm	UK	
56	Kidner, Michael	UK	
57	Lowe, Peter	UK	
58	Martin, Kenneth	UK	
59	Riley, Bridget	UK	

APÉNDICE C

Listado de obras seleccionadas por capítulos

CAPÍTULO 1:

CAPÍTULO 3:

CAPÍTULO 4:

CAPÍTULO 5:

CAPÍTULO 6:

CAPÍTULO 7:

CAPÍTULO 8:

CAPÍTULO 9:

CAPÍTULO 10:

CAPÍTULO 11:

CAPÍTULO 12

CAPÍTULO 14:

CAPÍTULO 15:

APÉNDICE D

Listado de obras seleccionadas por autores

Cap.	Autor	Obra	Pag.
4	Adler, Karl-Heinz	A. Estratificación, 1957 / 1960 / B. Estratificación, 1957 / 1958 / C. Estratificación, 1959	161
4	Adler, Karl-Heinz	Sin título, 1984	162
4	Adler, Karl-Heinz	Líneas en serie, 1991	163
4	Arena, Vincenzo	Obra 1 / 92, 1992	152
4	Arena, Vincenzo	Estructura serial modular Nº 11, 1971	153
1	Asins, Elena	Cánones 22 #1 y #2, 1991 / 1995	53
1	Asins, Elena	Menhires y Menhires Dos, 1995	55
7	Bill, Max	7 scarions, 1967	268
7	Bill, Max	Cinco cuadrados con la misma cantidad de superficie,1972	269
14	Bill, Max	Transcoloración en cinco cuadrados, 1974	532
14	Bill, Max	7 desplazamientos dentro del mismo sistema, 1979	533
14	Bill, Max	11 x 4:4, 1963 / 1970	576
14	Bill, Max	Sistema con cinco centros de cuatro colores, 1970	580
5	Böhm, Hartmut	Rotación 2, Rotación 1	187
7	Böhm, Hartmut	Integración 7, II (a y b) y Integración 14, I (c)	258
7	Böhm, Hartmut	Integración	259
7	Böhm, Hartmut	Paralelo, interior - exterior, I	259
7	Böhm, Hartmut	Integración 17, II	259
7	Böhm, Hartmut	Cambio (Perspectiva transversal)	260
7	Böhm, Hartmut	Dos divisiones	260
7	Böhm, Hartmut	Obra en pared con líneas de fresado, 1984	261
7	Böhm, Hartmut	Progresión, 1981	261
7	Böhm, Hartmut	A. Progresión hacia el infinito con 30º,1985 / B. Progresión hacia el infinito con 30º, 1987	262
11	Böhm, Hartmut	Progresión lineal hacia el infinito con 18º, 3, 1982	439
11	Böhm, Hartmut	Progresión lineal hacia el infinito con 22,5º, 1985	440
11	Böhm, Hartmut	Progresión hacia el infinito con 22,5º, 1985	441
11	Böhm, Hartmut	Progresión hacia el infinito con 54º / Rotación II a, 1985	442
11	Böhm, Hartmut	Progresión hacia el infinito con 54º/ Rotación – Parámetro Vertical, 1985 / 1989	443
11	Böhm, Hartmut	Progresión hacia el infinito con 30º, 1985	444
12	Böhm, Hartmut	Relieve, 6 Puntos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 1959	469
12	Böhm, Hartmut	Divisiones regulares, 1972	470
12	Böhm, Hartmut	Sin título, 1969	470
12	Böhm, Hartmut	Progresión 1, 4, 9, 16, … 100 y ámbito de referencia, 1989	472
12	Böhm, Hartmut	Progresión 1, 4, 9, 16,… 400 y ámbito de referencia, 1989	473
7	Gayor, Tibor	Q Torsión, 2001	270
7	Gayor, Tibor	Q 4/4 D-1, 1976	270
14	Gerstner, Karl	Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956	525
14	Gerstner, Karl	Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956	525
14	Gerstner, Karl	Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956	526
14	Gerstner, Karl	Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956	527
14	Gerstner, Karl	Permutaciones cíclicas: 22 bocetos de la idea, 1956	528
14	Gerstner, Karl	Syncrhromy 26 a, Par rojo desarrollándose hacia el lado claro, 1998	530
14	Gerstner, Karl	Syncrhromy 82, 2002	531
14	Gerstner, Karl	Syncrhromy 76, 2000	531
5	Gil, Julián	Serie ORTogonal	188
5	Gil, Julián	Serie ESCuadra	198
5	Gil, Julián	Serie HEMipitagórica	200
5	Gil, Julián	Serie ORT + ESC	201
5	Gil, Julián	Serie ESC + HEM	203
5	Gil, Julián	Serie ORT + ESC + HEM	204

9	Lohse, Richard Paul	Seis series sistemáticas de color del amarillo al azul, 1955 / 1969	360
9	Lohse, Richard Paul	Cuatro grupos de color dispuestos en degradación con el centro reducido, 1956 / 1969	362
9	Lohse, Richard Paul	Gradaciones de seis veces seis filas iguales de color verticales,1988	363
9	Lohse, Richard Paul	Dos disposiciones de colores complementarios, 1955 / 1975	365
9	Lohse, Richard Paul	Gradaciones del Amarillo de cadmio claro al naranja, 1955 / 1975	366
9	Lohse, Richard Paul	Movimiento de ocho cantidades iguales de color alrededor de un eje, 1952 / 1971	366
12	Manfred Mohr	P-67, Programa 67, I Ching, 1970	475
3	Martin, Kenneth	Aleatoriedad y orden, 1969 / 1972	106
4	Maurer, Dora	Desplazamientos, 1976	176
1	Mohr, Manfred	P–10/I, P–10/II, Programa 10 – Líneas continuas – Estudios (primer nivel) para el programa 21, 1969	45
1	Mohr, Manfred	P–11, Programa 11 – Líneas discontinuas - Estudios (primer nivel) para el programa 21	46
1	Mohr, Manfred	P - 18, Programa 18 – Paseo aleatorio - Estudios (segundo nivel) para el programa 21, 1969	46
1	Mohr, Manfred	Programa 21 – Estructuras en bandas, 1969	44
1	Mohr, Manfred	P – 26, Programa 26 – Inversión Lógica, 1970 y P – 28, Programa 28, 1970	47
1	Mohr, Manfred	P – 35, Programa 35 y P – 36, Programa 36 – Ruido blanco, 1971	48
1	Mohr, Manfred	P – 48, Programa 48 – UHF 81	49
1	Mohr, Manfred	P – 49, Programa 49 y P – 50, Programa 50 – Un lenguaje formal,, 1970	49
1	Mohr, Manfred	P-32, Programa 32 – Elementos de la matriz	50
1	Mohr, Manfred	P-38, Programa 38 – Rotor	50
1	Mohr, Manfred	P-40, Programa 40 – F 107	51
1	Mohr, Manfred	P-52, Programa 52 – Líneas Quark	51
1	Mohr, Manfred	P-59, Programa 59 – N +3 Hz	52
15	Mohr, Manfred	Límite del cubo I, 1973 / 1975	561
15	Mohr, Manfred	Límite del cubo I, 1973 / 1975	562
15	Mohr, Manfred	Límite del cubo II,1975 / 1977	567
15	Mohr, Manfred	Divisibilidad I, 1980 / 1982	568
15	Mohr, Manfred	Divisibilidad II, 1982 /1984	570
15	Mohr, Manfred	Divisibilidad III, 1984 / 1986	571
15	Mohr, Manfred	Dimensiones I, 1978 / 1979	572
15	Mohr, Manfred	Dimensiones II, 1987 / 1989	573
15	Mohr, Manfred	Grupo de líneas, 1989 / 1990	574
15	Mohr, Manfred	Glifos en láser 1991 / 1992	575
15	Mohr, Manfred	Contrapunto, 1993 / 1994	576
3	Molnar, Vera	Distribución aleatoria de 4 elementos, 1959	126
9	Molnar, Vera	Lento movimiento giratorio, 1957	367
9	Molnar, Vera	Efecto estético de la inversión de funciones para la fluctuación de la atención, 1960	368
9	Molnar, Vera	Cuadros U, 1960	369
12	Molnar, Vera	Interrupción / continuación, 1961	477
14	Molnar, Vera	M, como Malévitch, 1970	537
3	Morellet, François	4 Reparticiones aleatorias de 2 cuadrados según las cifras 31-41-59-26-53-58-97-93,1958	89
3	Morellet, François	6 Reparticiones aleatorias de 4 cuadrados negros y blancos según las cifras pares e impares del número pi, 1958	91
3	Morellet, François	Pi espinoso, Nº 1, 1 = 10º, 51 Decimales, 1998	93
3	Morellet, François	Pi rococó Nº 16, 1 = 10º, 2000	95
3	Morellet, François	Estudio, 1958	96
3	Morellet, François	Estudio, 1958	98
3	Morellet, François	Descanso, Nº 1, 2, 3, 4, 5, 1992	99
3	Morellet, François	Líneas aleatorias (5, 10, 20, 50,…), 1971	101
3	Morellet, François	Repartición aleatoria de triángulos según las cifras pares e impares de una guía de teléfonos, 1958	104
3	Morellet, François	Distribución de 40000 cuadrados, 50% rojo, 50% marrón (distribución aleatoria, 1961	105
4	Morellet, François	Del amarillo al púrpura, 1956	166
4	Morellet, François	A. Pintura, 1953 / B. Círculo amarillo , círculo gris, 1954	167
4	Morellet, François	4 Estructuras superpuestas 0º, 22,5º, 45, 65,5º	170
4	Morellet, François	Dos tramas a 0º, 90º no regulares	170
4	Morellet, François	3 Dobles tramas, 1954	171
4	Morellet, François	4 Dobles tramas	172
4	Morellet, François	2 tramas superpuestas	174
4	Morellet, François	Interferencia de 3 tramas diferentes, 1955	175
5	Morellet, François	Del Amarillo al blanco, 1953	187