Las Medallas Fields

Sección a cargo de

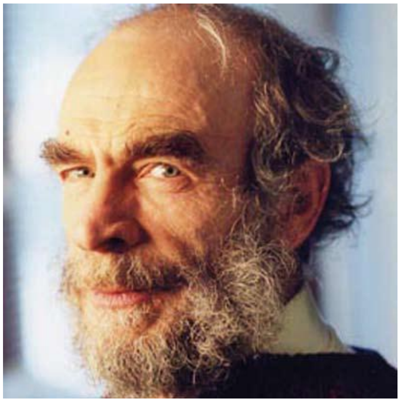
Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Este año el premio Abel ha recaído sobre el genial matemático Mikhail Gromov, una de las figuras clave de la matemática actual. Los responsables de la sección dedicada a las Medallas Fields y la dirección editorial hemos decidido, excepcionalmente, glosar su perfil profesional en este número.

Mikhail Gromov. Un gran geómetra que pudo ser Fields

por

Luis Guijarro y Vicente Muñoz



Mikhail Leonídovich Gromov (también conocido como Mijaíl Gromov, Michael Gromov, o Misha Gromov, siempre acentuando la primera «o»), es un matemático ruso-francés, conocido por importantes contribuciones en muy diversas áreas de las matemáticas. Nació el 23 de diciembre de 1943, en una pequeña ciudad llamada Boksitogorsk, cercana a Leningrado (ahora San Petersburgo), en Rusia. Cursó sus estudios universitarios en la Universidad de Leningrado. Realizó sus estudios de doctorado como estudiante del eminente topólogo Vladimir A. Rokhlin, obteniendo el título de doctor en 1969 y completando su tesis postdoctoral en 1973. Fue Profesor Asistente en la Universidad de Leningrado desde 1967 hasta 1974.

En 1974, Gromov dejó la Unión Soviética y se convirtió en Profesor de la Universidad de Stony Brook (Nueva York, EEUU). En 1981 se trasladó a Francia, adquiriendo la nacionalidad francesa en 1992. Tuvo inicialmente un puesto en la Universidad de París VI, y desde 1982 es Profesor permanente en el Institut des Hautes Études Scientifiques (I.H.E.S.), en Bures-sur-Yvette, Francia. Desde 1991 hasta 1996, ocupó un puesto de Profesor de Matemáticas en la Universidad de Maryland, EEUU. En la actualidad también es Profesor Jay Gould de Matemáticas en el Courant Institute of Mathematical Sciences de la Universidad de Nueva York.

Mikhail Gromov ha recibido numerosos premios internacionales de reconocido prestigio, tales como el Premio de la Sociedad Matemática de Moscú (1971), el Premio Oswald Veblen en Geometría (1981), el Premio Elie Cartan de l'Academie des Sciences de Paris (1984), el Prix des Assurances de Paris (1989), el premio Wolf en Matemáticas (1993), la Medalla Lobatchewski (1997), el Premio Leroy P. Steele (1997), el Premio Balzan en Matemáticas (1999), el Premio Kyoto en Ciencias Matemáticas (2002), y el Premio Nemmers en Matemáticas (2004). La Academia Húngara de las Ciencias le otorgó recientemente el Premio János Bolyai en 2005.

Gromov ha sido un conferenciante invitado en los International Congress of Mathematicians de Niza (1970), de Helsinki (1978), de Varsovia (1982), y de Berkeley (1986). Es miembro extranjero de la Academia Nacional de las Ciencias de EEUU, de la Academia Americana de las Artes y las Ciencias, y de la Academia Francesa de las Ciencias. El pasado 26 de marzo, la Academia Noruega de las Ciencias y las Letras anunció que había decidido otorgar el Premio Abel del año 2009 a Mikhail Gromov, por «sus contribuciones revolucionarias en la geometría». El Premio Abel es considerado como el análogo al premio Nobel para las matemáticas. Fue establecido en 2002 por el Niels Henrik Abel Memorial Fund, y se otorga anualmente desde 2003. La selección del premiado se basa en la recomendación de una comisión formada por cinco matemáticos de reconocido prestigio internacional. El premio lleva asociado un premio en metálico de 6 millones de coronas noruegas, equivalentes a 700 000 euros. Mikhail Gromov recibió el Premio Abel de manos de Su Majestad el Rey Harald de Noruega en la ceremonia oficial del 19 de mayo en Oslo (Noruega).

El trabajo de de Gromov ha tenido gran impacto en el álgebra, el análisis y la geometría, aunque Gromov se considera a sí mismo un geómetra debido a que las técnicas que emplea (e inventa) para atacar los problemas están formuladas en general en ese lenguaje. Ha introducido ideas realmente originales que han dado lugar a nuevos puntos de vista. Sus ideas suelen ser intuitivamente sencillas, pero hacerlas funcionar ha requerido en muchos casos un verdadero *tour de force* que le ha obligado a desarrollar técnicas completamente novedosas, algo al alcance de pocos matemáticos. El Comité del Premio Abel ha expresado que

> *Mikhail Gromov is always in pursuit of new questions and is constantly thinking of new ideas for solutions of long-standing problems. He has produced deep and original work throughout his career and remains remarkably creative. The work of Gromov will continue to be a source of inspiration for many future mathematical discoveries.*[1]

Desgraciadamente, Gromov no recibió la medalla Fields. Su última posibilidad fue en 1982, a la edad casi límite de 39 años. En esa ocasión los premiados reunían

[1]Mikhail Gromov siempre está a la búsqueda de nuevas preguntas y constantemente pensando en nuevas ideas para resolver viejos problemas. Ha producido un trabajo profundo y original a lo largo de su carrera y se mantiene extraordinariamente creativo. El trabajo de Gromov sigue siendo una fuente de inspiración para muchos descubrimientos matemáticos futuros.

méritos más que suficientes para el galardón, pero a estas alturas es claro que el nombre de Gromov no hubiera desentonado en absoluto dentro de la lista. Como, por entonces, algunos de sus resultados más importantes ya habían aparecido, es difícil entender por qué fue pasado por alto. Quizás el comité Fields subestimó las profundas implicaciones que el trabajo de Gromov tendría en las matemáticas de nuestros días.

Respecto a su vida personal, recomendamos al lector la introducción que escribió Y. Eliashberg para el volumen especial que publicó la revista *GAFA* en honor de Gromov [7]. Contiene anécdotas de primera mano, como que Gromov tardó en hablar, pero cuando lo hizo, a los dos años y medio, usaba frases completas. O que, a la edad de seis años, Gromov resolvió un problema de un curso más avanzado al suyo que su maestro le asignó por error como tarea. El maestro, sorprendido, renunció a creer que Gromov lo hubiera hecho sin ayuda de sus padres, lo que, según parece, irritó al niño Gromov sobremanera. Quizás esta necesidad de afirmarse es la que hace que sea terrorífica su presencia entre el auditorio de conferencias y seminarios. Uno de los autores asistió a un coloquio en Maryland en el que el conferenciante terminó hablando mucho menos que Gromov, quien desde el público le indicó (en frases completas) cómo iba a demostrar el teorema que había escrito en la pizarra y cómo lo podía mejorar. Al final de la hora, incluso el conferenciante, en vez de ofenderse, admitió que había pasado una hora bastante divertida.

No es posible en unas pocas páginas revisar todos los problemas en los que Mikhail Gromov ha realizado contribuciones fundamentales. Recomendamos la lectura de los artículos [1] y [2] donde se dan numerosos detalles de su trabajo, así como la consulta del sitio *Mikhaïl Gromov, géomètre*.[2] Aquí nos limitaremos a comentar brevemente algunos de los resultados más impactantes de su trabajo. Dividiremos los resultados según las áreas principales de trabajo de Gromov, colocándolas en un orden temporal.

1. Análisis. El h-principio

Aunque Gromov es un geómetra, el problema que atacó en su tesis se refiere a una cuestión fundamentalmente de análisis. Eso sí, la formulación de Gromov y su método de ataque al problema son de carácter marcadamente geométrico. El concepto introducido por Gromov se conoce con el nombre de *h-principio* («h» es abreviatura de homotopía, un término del campo de la topología). Donde Gromov desarrolla ampliamente este concepto es en su libro *Partial Differential Relations* [11]. Pero, de hecho, el h-principio no es muy conocido entre los analistas, y ha tardado mucho en calar en la comunidad matemática. A esto han contribuido dos condicionantes: en primer lugar, el libro de Gromov es de difícil lectura, no sólo por la cantidad de nociones y resultados, sino también por lo condensado de la exposición. En segundo lugar, está escrito en un lenguaje geométrico (fibrados, jets, haces, ...), lo que ha hecho que pocos matemáticos no geómetras se hayan animado a usar el

[2]Hospedado en `http://images.math.cnrs.fr/+-Mikhail-Gromov-geometre-+.html`

h-principio hasta muy recientemente. Lo que es innegable es que las ideas de [11] son realmente innovadoras y visionarias.

La teoría clásica de Ecuaciones en Derivadas Parciales tiene sus raíces en la física, donde las ecuaciones describen las leyes de la naturaleza. La situaciones en las que tenemos acceso a la resolución explícita de estas ecuaciones son escasas, por lo que cuestiones como el conocimiento de si las ecuaciones tienen solución, o si las soluciones son únicas (quizá dando unas condiciones iniciales, o imponiendo condiciones de contorno), son de extrema relevancia. En muchas circunstancias, la geometría juega un papel importante para resolver los problemas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

Gromov plantea una perspectiva completamente distinta. Analiza lo que denomina relaciones en derivadas parciales. Recordemos que una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una ecuación en la que buscamos una función $y = f(x)$ satisfaciendo una ecuación de la forma

$$F\left(x_i, f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}\right) = 0\,. \tag{1}$$

Reescribamos la EDP en lenguaje geométrico. Para ello, introducimos el concepto de r-jet, que contiene la información del punto, el valor de la función, y los valores infinitesimales a distintos órdenes hasta orden r (por ejemplo, el valor a primer orden es el vector tangente). De esta forma, el jet de la función f en un punto x es el vector

$$j^r f(x) = \left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}(x)\right)\,.$$

La noción de jet es geométrica, en el sentido de que, dada una variedad diferenciable, hay un espacio de jets de orden r bien definido (es decir, que se pueden definir r-jets en cada carta, pero el concepto de r-jet no depende de las elecciones de coordenadas). Llamemos $\mathcal{J}^r(M)$ al espacio de r-jets, que tiene una estructura de fibrado con la proyección natural $\mathcal{J}^r(M) \to M$. Más generalmente, es natural considerar espacios de r-jets asociados a fibrados $E \to M$, y considerar EDPs donde buscamos una sección de dicho fibrado.

Una función $y = f(x)$ es solución de (1) si $F(j^r f(x)) = 0$, donde $F : \mathcal{J}^r(M) \to \mathbb{R}$. Podemos considerar la subvariedad $F^{-1}(0) \subset \mathcal{J}^r(M)$. Entonces $j^r f : M \to \mathcal{J}^r(M)$ debe estar contenido en $F^{-1}(0)$. Gromov sustituye esta condición por la condición de que el jet $j^r f(x)$ esté en un conjunto previo dado $U_x \subset \mathcal{J}^r_x(M)$, que puede ser bien abierto o cerrado, o de cualquier otro tipo, para cada punto $x \in M$. Dichos conjuntos forman lo que Gromov denominó una *relación en derivadas parciales*. Una *solución formal* es una función $g : M \to \mathcal{J}^r(M)$ tal que

$$g(x) \in U_x\,, \text{ para cada } x \in M.$$

Pero, para que una solución formal sea una solución al problema, necesitamos una función $y = f(x)$ tal que $j^r f(x)$ es solución formal. Denominamos *función holónoma* a toda $g : M \to \mathcal{J}^r(M)$ tal que $g = j^r f$ para alguna $f : M \to \mathbb{R}$. Una solución a la EDP es una solución formal que es holónoma.

Así Gromov divide el problema en dos: primero hemos de encontrar una solución formal. Éste es un problema de tipo topológico, donde la clave es la teoría de obstrucciones de la teoría de fibrados. El segundo problema es de tipo analítico: dada una solución formal, deformarla continuamente hasta encontrar una solución holónoma. Se dice que una relación en derivadas parciales satisface el h-principio si toda solución formal se puede deformar a una solución holónoma. Dada una relación en derivadas parciales concreta, el h-principio puede verificarse o no (y hay numerosos ejemplos de ambas posibilidades). El trabajo de Gromov consistió, no sólo en formalizar el problema desde este punto de vista geométrico, sino también en inventar una serie de técnicas con las que probar el h-principio en multitud de situaciones.

Muchos problemas de existencia de aplicaciones diferenciables entre espacios pueden expresarse como relaciones en derivadas parciales. Analicemos algunas situaciones destacables:

1. Si M y N son variedades, con $\dim M \leq \dim N$, podemos buscar inmersiones $f : M \to N$. Consideramos las aplicaciones $f : M \to N$ como secciones del fibrado $M \times N \to M$. Tenemos un espacio de 1-jets $\mathcal{J}^1(M,N) \to M$, donde un 1-jet en $x \in M$ consiste en (x,y,h), $y \in N$, $h : T_xM \to T_yN$. La relación en derivadas parciales está dada por el conjunto $U_x = \{(x,y,h) \mid h \text{ inyectiva}\}$. Así, una solución formal consiste en encontrar un par de aplicaciones (f,F), donde $f : M \to N$ es cualquier aplicación (en general no inmersiva) y $F(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ es monomorfismo para todo $x \in M$. El h-principio en este caso dice que, si hay una solución formal, entonces hay una inmersión. Está probado cuando M es una variedad abierta, y cuando M es cerrada y $\dim N > \dim M$. Esto recupera un sorprendente resultado clásico de Smale: la eversión de la esfera. La inmersión $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ puede deformarse (a través de inmersiones) a su antípoda, es decir la esfera se le puede dar la vuelta, sacando «lo de dentro fuera» (véase [21]).
2. Uno de los resultados más sorprendentes de Nash [17] es el de la existencia de inmersiones isométricas de una variedad riemanniana (M, g_M) en $\mathbb{R}^n$, con n grande. Este problema puede ser reescrito en términos de relaciones en derivadas parciales. De hecho, si M y N son variedades riemannianas tenemos, en el espacio de 1-jets, el conjunto $U_x = \{(x,y,h) \mid y \in N, h : T_xM \to T_yN \text{ isometría}\}$. Gromov probó el h-principio para este caso encontrando un valor de n óptimo (que es cuadrático en la dimensión de M) para la existencia de inmersiones riemannianas de una variedad en otra.
3. También podemos reescribir el problema de Oka de existencia de secciones holomorfas en un fibrado $E \to M$ sobre una variedad de Stein, como una relación en derivadas parciales que no es más que una ecuación de Cauchy-Riemann. El h-principio dice, en esta situación, que toda sección continua del fibrado se puede deformar mediante homotopía a una sección holomorfa.
4. En la sección 4 comentaremos brevemente la definición de variedad simpléctica. Aquí queremos mencionar que el h-principio ha jugado también un papel fundamental en topología simpléctica. Las inmersiones simplécticas de una variedad simpléctica en un espacio $\mathbb{R}^{2n}$, o en otra variedad simpléctica, pueden

encontrarse a través de una versión del h-principio. Por ejemplo, esto sirvió a Gromov para probar que toda variedad simpléctica abierta M puede ser inmersa en un espacio $\mathbb{R}^{2n}$ con $2n = \dim M$, un resultado ciertamente sorprendente.

Los métodos para probar el h-principio son de tipo muy geométrico, y ciertamente muy originales. Generalmente consisten en resolver ciertas singularidades de aplicaciones, a base de enrollar mucho la aplicación. En el libro [6], dedicado al h-principio, Eliashberg y Mishachev ponen la siguiente dedicatoria:

To Vladimir Igorevich Arnold who introduced us to the world of singularities and Misha Gromov who taught us how to get rid of them.[3]

2. Álgebra. Grupos finitamente generados

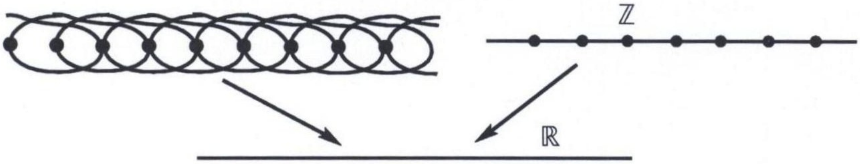
El trabajo de Gromov en Álgebra se centra en el estudio de grupos discretos finitamente generados. Estos grupos son interesantes por ellos mismos, pero también aparecen como grupos de transformaciones en varias situaciones: en teoría de números aparece el grupo modular $SL(2,\mathbb{Z})$ actuando sobre el semiplano superior; también son relevantes los grupos discretos actuando en espacios homogéneos, que producen los llamados espacios geométricos. En general, los grupos discretos finitamente generados aparecen como grupos fundamentales de variedades diferenciables compactas.

Gromov estudió los grupos de crecimiento polinomial [8], resolviendo una conjetura de Milnor de 1968. Demostró que cada grupo de tipo finito y crecimiento polinomial contiene un subgrupo de índice finito que es él mismo un subgrupo de un grupo de Lie nilpotente. El crecimiento de un grupo se calcula de la siguiente manera. Fijamos una colección de generadores del grupo y definimos una función de crecimiento que asigna a cada natural n el número de elementos del grupo que se pueden escribir como producto de a lo más n generadores (o sus inversos). El crecimiento es polinomial si esta función es menor que algún polinomio. Esta característica no depende de la elección de generadores.

El problema consiste en encontrar un grupo de Lie, es decir, un objeto continuo en el que el grupo discreto se sumerja. La idea de Gromov consistió en mirar al grupo desde el infinito. Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}^d$ visto desde el infinito aparece como el espacio euclídeo $\mathbb{R}^d$, pues este retículo visto desde lejos tiene un tamaño tan pequeño que se presenta como continuo. Un cambio de los generadores del grupo no hace cambiar la estructura desde el infinito. Por ejemplo, tomemos $\mathbb{Z}$, y consideremos los generadores $\{2,3\}$. El *grafo de Cayley* asociado se construye poniendo como vértices los elementos del grupo y uniéndolos con aristas si dos elementos se pueden obtener uno del otro multiplicando por uno de los generadores.

Para cualquier grupo G, con una presentación $\langle x_1,\ldots,x_n \mid r_1,\ldots,r_k\rangle$, en términos de generadores y relaciones, definimos un espacio métrico (G,d) de la siguiente

[3]Para Vladimir Igorevich Arnold, que nos presentó el mundo de las singularidades, y para Misha Gromov, que nos enseñó cómo librarnos de ellas.



El grafo de la derecha corresponde a $\{1\}$, el de la izquierda a $\{2,3\}$. Ambos grafos, vistos desde el infinito, se convierten en una línea.

forma. Para cada par de elementos $g, h \in G$, la distancia es

$$d(g,h) = \text{mín}\{N \geq 0 \mid g = h\, x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_N}^{\epsilon_N}\,, 1 \leq i_1, \ldots, i_N \leq n,\, \epsilon_i = \pm 1\}\,.$$

El grafo de Cayley se obtiene uniendo los vértices para los cuales $d(g,h) = 1$. Mirar G desde el infinito consiste en hallar el límite de la sucesión de espacios métricos $(G, \epsilon^{-1}d)$, con ϵ tendiendo a cero. El logro de Gromov consistió en definir precisamente este límite. Para ello, definió una distancia en el conjunto de todos los espacios métricos completos separables, ahora denominada *distancia de Gromov-Hausdorff*. Esta noción ha sido usada en numerosas situaciones. Ha tenido especial relevancia en sus aplicaciones a geometría riemanniana, pues formaliza muchas situaciones en las que hay colapsos de espacios.

Definamos la noción de distancia de Gromov-Hausdorff, para lo cual nos restringiremos al caso más sencillo de espacios métricos compactos. Si (Z,d) es un espacio métrico compacto, y $X, Y \subset Z$ son subespacios cerrados, la distancia de Hausdorff entre ellos es

$$d_{H,Z}(X,Y) = \text{máx}\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x,y)\right\}\,.$$

Por tanto $d_H(X,Y) < \epsilon$ si X está contenido en una ϵ-vecindad de Y e Y está contenido en una ϵ-vecindad de X, simultáneamente.

En el caso en que X e Y sean dos espacios métricos compactos no sumergidos en un espacio ambiente, tenemos la distancia de Gromov-Hausdorff

$$d_{GH}(X,Y) = \inf_{Z,f,g}\{d_{H,Z}(f(X), g(Y)) \mid f : X \to Z,\, g : Y \to Z\}\,,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles inmersiones isométricas $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$. Esto produce un espacio métrico $(\mathcal{Z}, d_{GH})$, donde $\mathcal{Z}$ consiste en todos los espacios métricos compactos, y d_{GH} es la distancia de Gromov-Hausdorff. Este espacio $(\mathcal{Z}, d_{GH})$ es completo. Es más, todo espacio compacto se puede aproximar por conjuntos finitos (métricos), en esta métrica.

Aunque no lo vamos a comentar en detalle, cabe mencionar que otro concepto algebraico de gran impacto introducido por Gromov es el de *grupo hiperbólico*, cuyo interés todavía está lejos de apagarse. Tiene relación tanto con asuntos algebraicos como geométricos, y una de sus principales aplicaciones relaciona ambos. Dado un grupo G con una presentación finita $\mathcal{P}$, no existe ningún algoritmo que nos permita decidir si una palabra dada representa la identidad del grupo. Pero, para entender la complejidad del problema, se puede tomar una palabra w en los generadores en $\mathcal{P}$ que represente la identidad en G, y contar cuál es el número mínimo de relaciones (o más bien de sus conjugados) que son necesarias para escribir w. El grupo se llama *hiperbólico en palabras* (en inglés, *word-hyperbolic*) si este número está acotado linealmente por la longitud de w. Es fácil ver que la definición es independiente de la presentación. Por otra parte, Gromov define un espacio δ-hiperbólico como un espacio métrico en el que cada lado de un triángulo geodésico se halla contenido en el δ-entorno de los otros dos lados. E hiperbólico es uno que es δ-hiperbólico para algún δ. En cierta forma, las distancias en estos espacios se asemejan a las de árboles cuando se toma un límite (más bien, un ultralímite) de Gromov-Hausdorff de sus métricas multiplicadas por constantes tendiendo a cero. Gromov usa esta definición para grupos aplicándosela a sus grafos de Cayley: el grupo es hiperbólico si su grafo lo es. Lo realmente sorprendente es que Gromov demostró en [12] que ambos conceptos son equivalentes: un grupo es hiperbólico en palabras si es hiperbólico en un sentido métrico.

3. Geometría riemanniana. La curvatura

Probablemente el área en la que más repercusión han tenido los trabajos de Gromov es la geometría riemanniana. No hay forma de resumir todos los resultados ni problemas en los que Gromov ha intervenido en estas pocas páginas, por lo que nuestra exposición es incompleta, y la elección de temas que hemos hecho es puramente personal.

La geometría riemanniana es el estudio de las variedades diferenciables (M, g) dotadas con una métrica riemanniana $g(\cdot, \cdot)$, es decir, un producto escalar para los vectores del espacio tangente T_pM en cada punto. La métrica permite medir longitudes, ángulos y volúmenes, y, con ellos, intentar transplantar nuestra intuición euclídea a geometrías más complicadas. Permite también construir análogos de las líneas rectas en cualquier variedad, que son las curvas que localmente minimizan distancias, y que se denominan geodésicas. Las hay tangentes a cada dirección de la variedad, pero el caso de interés geométrico es el de variedades para las cuales hay geodésicas conectando dos puntos cualesquiera, aunque éstas no necesiten ser únicas, como en el caso de dos puntos antipodales de la esfera.

Es fundamental entender que la métrica da una geometría local a la variedad. Esto es, que entornos de puntos distintos en variedades distintas no pueden en general identificarse con una isometría (un difeomorfismo que preserva las métricas). Por ejemplo, una región sobre el globo terráqueo no podrá nunca describirse sobre un mapa plano sin que se produzca una distorsión entre las distancias reales sobre la esfera y las que terminan apareciendo en el atlas. De hecho, este fenómeno se produce independientemente del tamaño de la región descrita, y afortunadamente tenemos un invariante para describirla: la curvatura riemanniana. Sin embargo, es un objeto complicado de carácter tensorial, y sus efectos son difíciles de describir en dimensiones altas, haciéndolo a menudo intratable para un estudio frontal. De hecho, en la introducción de [13], el mismo Gromov escribe:

> *The curvature tensor of a Riemannian manifold is a little monster of (multi)linear algebra whose full geometric meaning remains obscure. However, one can define, using the curvature, several significant classes of manifolds and then these can be studied in the spirit of the old-fashioned* synthetic geometry *with no appeal to the world of infinitesimals where curvature tensors reside.*[4]

Esto establece la estrategia a seguir: en vez de tratar directamente con el tensor de curvatura, le asociaremos cantidades que lo recuperen total o parcialmente, que conserven contenido geométrico, y las combinaremos con los invariantes métricos habituales que nuestra intuición geométrica euclidiana nos presta: el diámetro, el volumen, la función distancia, sus derivadas, o parecidos.

La primera de tales cantidades es la curvatura seccional K, que asocia a cada plano $\sigma \subset T_pM$ la curvatura gaussiana de la superficie formada por geodésicas tangentes a ese plano. Geométricamente, esta cantidad mide cómo se separan cada par de geodésicas tangentes a σ comparando esta configuración con una similar en el plano euclídeo: si γ_1, γ_2 son geodésicas formado un ángulo α en p, entonces la distancia entre $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ coincide con la euclídea hasta primer orden, pero en segundo orden aparece como coeficiente la curvatura seccional de σ. Su signo se puede interpretar como sigue: si $K > 0$, entonces las longitudes de las circunferencias (de radio r pequeño) son menores que $2\pi r$, y la suma de los ángulos de los triángulos pequeños (cuyos lados son geodésicas) es mayor que π. Pedimos que estos objetos sean pequeños para que no intervengan propiedades de carácter global (topológico), dado que estamos analizando propiedades locales. Si $K = 0$, entonces la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, y la suma de los ángulos de un triángulos es π. Si $K < 0$, entonces las longitudes de las circunferencias son menores que $2\pi r$, y la suma de los ángulos de un triángulo es menor que π. Cuando se estudia la curvatura, es conveniente tener como referencia los espacios modelo $M(k)$, que son aquéllos de curvatura constante k: esferas de radio $1/\sqrt{k}$ si $k > 0$, $\mathbb{R}^n$ si $k = 0$, y el espacio hiperbólico adecuado si $k < 0$.

La segunda es la curvatura de Ricci, que asocia a cada vector $v \in T_pM$ la variación del área de las esferas geodésicas a lo largo de la geodésica tangente a v. En términos parecidos al anterior, si el área de una esfera de radio r en $\mathbb{R}^n$ crece en cualquier dirección del orden de r^{n-1}, en una variedad con tensor de Ricci Ric, crece en la dirección de v como $r^{n-1}\left(1 - \mathrm{Ric}(v)r^2/3 + o(\varepsilon^2)\right)$. Esto es, en variedades con curvatura de Ricci positiva, inicialmente las esferas crecen en volumen menos que en el caso euclídeo, *y eso se produce en cada dirección de la esfera.*

Finalmente, la tercera cantidad es la curvatura escalar scal, que devuelve para cada punto la media de todas las curvaturas seccionales. Es por tanto una función

[4]El tensor de curvatura de una variedad riemanniana es un monstruo de álgebra (multi)lineal cuyo completo significado geométrico permanece en la oscuridad. A pesar de ello, puede utilizarse para definir diferentes tipos de variedades que pueden estudiarse con el anticuado espíritu de la geometría sintética sin tener que recurrir al mundo de lo infinitesimal, donde residen los tensores.

definida sobre la variedad, y hay de nuevo una interpretación puramente geométrica en términos del volumen de las bolas geodésicas: si $V_p(r)$ es el volumen de la bola de radio r y centro p, entonces la curvatura escalar aparece como uno de los términos del desarrollo de Taylor de V_p en $r = 0$. De nuevo, curvatura escalar positiva da menos crecimiento inicial que el caso euclídeo, y la negativa al revés.

Es claro que restricciones sobre el signo de estas curvaturas son menos importantes conforme avanzamos en la secuencia. Así, por ejemplo, $K \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Ric} \geq 0 \Rightarrow \mathrm{scal} \geq 0$. Esto influye también en el tipo de resultados que puede obtenerse con cada una de ellas: condiciones sobre la curvatura seccional dan resultados métricos; sobre la curvatura de Ricci, analíticos; y sobre la curvatura escalar, resultados de corte topológico. Gromov ha dejado su impronta sobre el estudio de todos estos tipos de curvatura.

En la sección anterior, apareció la distancia de Gromov-Hausdorff sobre el conjunto $\mathcal{M}$ de espacios métricos de longitud, donde se usó para caracterizar los grupos de crecimiento polinomial. Pero su utilidad está lejos de reducirse al álgebra: como las métricas riemannianas definen distancias sobre las variedades, éstas se convierten a su vez en espacios métricos que pertenecen a $\mathcal{M}$, formando así un subconjunto de especial interés. Gran parte de las veces, al estudiar restricciones sobre la curvatura combinadas con otros invariantes, se intenta ver qué ocurre cuando estos últimos se acercan a un caso límite. Por ejemplo, es bien sabido que, cuando $\mathrm{Ric} \geq (n-1)g$, el diámetro de la variedad no puede superar el valor π, que sólo se alcanza en la esfera. Pero ¿qué ocurre si nos acercamos mucho a ese valor del diámetro? ¿Se parece la variedad a la esfera? En $\mathcal{M}$ esto nos daría una sucesión de puntos que nos gustaría ver converger a un espacio métrico cuyas propiedades nos permitan entender mejor los elementos de la sucesión. Pero, para poder hacer todo esto, es necesario que tal convergencia ocurra realmente, lo que no es una cuestión trivial. Usando ideas tomadas de la prueba del teorema de Arzelà-Ascoli, Gromov demostró el *Teorema de Precompacidad*: el conjunto de variedades con $\mathrm{Ric} \geq k$ y $\mathrm{diam} \leq D$ es precompacto bajo la distancia de Gromov-Hausdorff. Súbitamente tenemos permitido tomar límites de variedades bajo condiciones muy generales.

Para poder demostrar esta precompacidad, Gromov tuvo que extender un resultado clásico de geometría riemanniana conocido como teorema de comparación de Bishop. Éste dice que cuando la curvatura de Ricci es superior a la curvatura de Ricci de uno de los espacios modelos $M(k)$, entonces las bolas de radio r tienen volumen no superior que las bolas del mismo radio en $M(k)$. Hay una analogía clara entre la curvatura seccional (donde la distancia no es superior a la del espacio modelo) y la de Ricci (donde es *el volumen* el que no es superior). Gromov generalizó el teorema de Bishop a un teorema de comparación relativo: el cociente entre los volúmenes de bolas del mismo radio en la variedad y en el espacio modelo forma una función decreciente con respecto al radio. Este resultado ha encontrado posteriormente numerosas aplicaciones riemannianas, más allá de la precompacidad.

Gromov también estudió las consecuencias topológicas de la curvatura. Cartan demostró que las variedades con $K = 0$, o planas, aparecen siempre como cocientes del espacio euclídeo por un grupo discreto de isometrías, lo cual describe todas las variedades «sin curvatura». Pero, ¿y si se acepta «poca curvatura»? ¿Hay alguna consecuencia? Una primera observación es que al cambiar una métrica g por un múltiplo positivo ag, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, la curvatura cambia multiplicándose por $1/a^2$, por lo que, en teoría, en una variedad compacta siempre se puede reducir o aumentar la curvatura tanto como se desee. Sin embargo, tras este cambio, el diámetro se modifica como $a \cdot \operatorname{diam}(M)$, así que lo más adecuado es mirar a la cantidad $\operatorname{diam}(M)^2 \cdot \text{máx}\,|K|$, que permanece invariante. Es obvio que este valor es cero en una variedad plana, así que es natural decir que una variedad es *casi-plana* si existe una sucesión de métricas para las que este invariante se acerca a cero. Otra descripción es decir que son aquellas variedades que tienen métricas con diam ≤ 1 pero con curvaturas $|K| \to 0$. Gromov demostró que las variedades casi-planas son lo que se conoce como *infranilvariedades*, esto es, cocientes discretos de una variedad cuya geometría local coincide con la de un grupo nilpotente dotado de una métrica invariante por traslaciones. Otra caracterización, un poco más visual, es que estas variedades son aquéllas que se pueden obtener tomando fibraciones iteradas de toros por toros. El lector interesado debería consultar la excelente referencia [3].

Otra línea de investigación que Gromov examinó a finales de los años ochenta fue la estructura de variedades con curvatura acotada. Lo hizo en colaboración con Jeff Cheeger, del Instituto Courant de Nueva York, quien en su tesis demostró que el conjunto de variedades con cotas inferiores en el volumen y la curvatura seccional, v_0, k_0, y cotas superiores en el diámetro, d_0, era precompacto bajo una convergencia de tipo $C^{1,\alpha}$. Esto es, toda sucesión de variedades (M_n, g_n) con las restricciones anteriores, tiene subsucesiones cuyos términos son todos difeomorfos, y cuyas métricas se aproximan (junto con sus primeras derivadas) a una métrica límite que sin embargo pierde la regularidad C^2. Como consecuencia, hay sólo un número finito de variedades (módulo difeomorfismos) con las cotas anteriores. Pero como en cada dimensión (salvo $n = 1$) hay un número infinito de variedades, la mayor parte de ellas tendrán volúmenes tendiendo a cero (una vez que hayamos fijado los k_0 y d_0 anteriores). Lo que Cheeger y Gromov hicieron en una serie de artículos fue examinar la estructura de estas últimas. Demostraron que en toda dimensión existe una constante tal que, cuando el volumen cae por debajo de ella, la variedad debe admitir lo que se conoce como una $\mathcal{F}$-estructura. Aunque éstas son difíciles de describir con precisión, una buena aproximación es decir que son variedades que admiten métricas tales que en cada punto existe una acción local y libre de un toro por isometrías, y que casan bien unas con otras. Como resultado, estas variedades admiten métricas con curvatura y diámetro acotados, pero con volumen cayendo a cero. Sus límites de Gromov-Hausdorff perderán por lo tanto dimensión, lo que se conoce como *colapso* o, también, *hundimiento*. El lector se beneficiará de comparar esta situación con el caso casi-plano, que corresponde al caso en que la $\mathcal{F}$-estructura tiene órbitas abiertas. Posteriormente, algunos años más adelante, los dos autores, junto con Fukaya, dieron una descripción aún más detallada del colapso en [4].

Tampoco es fácil entender qué espacios pueden curvarse más que el espacio euclídeo; de hecho, resulta desolador comprobar qué poco se sabe aún de las variedades positivamente curvadas. Las únicas restricciones conocidas son debidas al grupo fundamental, pero, si la variedad es simplemente conexa, se ignora casi todo. De hecho, el mejor resultado conocido es, de nuevo, debido a Gromov: su famoso teorema de los números de Betti afirma que hay una constante dependiente sólo de la dimensión de la variedad tal que la suma de los números de Betti permanece acotada superiormente para cualquier variedad de curvatura no negativa. En cierta forma, los números de Betti cuentan el número de agujeros de la variedad, y un conocido resultado de Morse los pone en relación con el mínimo número de puntos críticos que debe asumir una función diferenciable suficientemente genérica. Para la demostración de su teorema, Gromov tuvo que usar una versión adaptada de la teoría de Morse para la función distancia; esta versión fue desarrollada originalmente por Grove y Shiohama en [14] para caracterizar la esfera. El punto delicado de todo este enfoque es que lo que correspondería en condiciones normales a un punto crítico de la distancia, cae siempre en el conjunto de no diferenciabilidad de la función. Para sortear esta dificultad, se redefine un punto crítico de $\mathrm{dist}_p = d(p, \cdot)$ como un punto q en el que los vectores tangentes en q a las geodésicas que conectan a p con q están a distancia inferior a $\pi/2$ de cualquier otro vector. Con esta definición, lo difícil es estimar el número de tales puntos críticos, y aquí es donde la hipótesis sobre la curvatura es esencial, ya que permite aplicar argumentos de comparación para triángulos geodésicos. El cálculo explícito de la constante que hace Gromov en su artículo es bastante tosco, ya que sólo le interesaba su existencia, pero al menos como resultado se obtiene que la suma conexa de espacios proyectivos complejos sólo puede admitir curvatura no negativa hasta cierto número de sumandos, sin que sepamos exactamente dónde está el punto de no retorno. Como curiosidad para uno y dos sumandos, tales métricas existen, pero para tres ya se desconoce.

Gromov no ha estudiado solamente cotas inferiores en la curvatura. Junto con Bill Thurston (medalla Fields en 1982) construyó los primeros ejemplos conocidos de variedades con curvatura seccional $-1 - \varepsilon < K < -1$ y diámetro acotado que no admiten métricas puramente hiperbólicas. También construyeron el caso complementario de variedades con curvatura negativa y sin métricas con curvaturas cerca de -1. Para la primera usaron recubrimientos ramificados sobre una subvariedad totalmente geodésica de un espacio compacto hiperbólico. Si la variedad tiene suficiente codimensión y se elige adecuadamente, Gromov y Thurston demostraron que se pueden construir métricas negativamente curvadas sobre tales recubrimientos controlando el volumen y el cociente entre los valores máximo y mínimo de la curvatura, haciéndolos tan cercanos a 1 como se desee. Teoremas de finitud prueban que, en el caso de admitir una métrica hiperbólica, el orden de ramificación quedaría necesariamente acotado superiormente, lo que asegura que la mayor parte de los ejemplos cumplan lo pedido. La construcción del segundo tipo de variedades es aún más elaborada.

Las condiciones sobre la curvatura escalar son las menos restrictivas sobre la variedad. De hecho, cualquier variedad compacta admite métricas de curvatura escalar negativa, y a priori parece que lo mismo podría ocurrir con la positiva. Sin embargo, Lichnerowicz encontró una obstrucción para la existencia de tales métricas, usando un invariante conocido como el A-genus. Junto con Blaine Lawson, Gromov encontró tanto métodos nuevos de construcción de ejemplos usando cirugías, como obstrucciones más detalladas usando cobordismos spin.

Finalmente, no queremos terminar esta sección sin mencionar uno de los artículos más intrigantes de Gromov. En *Filling Riemannian manifolds* [9], Gromov introdujo varios invariantes que están lejos aún de ser completamente entendidos. La idea principal del artículo es de una simplicidad desarmante: cualquier variedad riemanniana admite una inmersión isométrica en el espacio de Banach de sus funciones continuas mediante la aplicación que manda un punto $p \in M$ a la función distancia dist_p. Podemos mirar la imagen M' de M en este espacio y sus entornos de radio r (el conjunto de puntos, o en este caso funciones, a distancia menor que r de M') e intentar averiguar en qué momento la topología de M desaparece dentro de este entorno. Esto se formula en términos de anulación de grupos de homología, y, en cierta forma poco rigurosa, esta cantidad mide el valor mínimo requerido para rellenar los agujeros de M. Ésta es la definición del famoso *Filling radius*, o radio de llenado de M. Su interés es que es una cantidad intermedia entre el volumen y la *sístole de* M. Ésta es el ínfimo de la longitud de las curvas cerradas y no contractibles de M. Gromov demuestra que, para cualquier variedad cerrada, $\mathrm{FillRad}(M) \leq C(n)\,\mathrm{vol}(M)^{1/n}$, y que, además, para variedades esenciales (donde en cierta forma, la clase fundamental de la variedad está generada por el grupo fundamental) se tiene la desigualdad adicional $\mathrm{sys}(M) \leq 6\,\mathrm{FillRad}(M)$. Con ambas, se obtiene una desigualdad entre sístole y volumen que había sido conjeturada por M. Berger siguiendo ideas de Loewner. Las demostraciones de Gromov son complicadas, y afortunadamente hay una simplificación reciente de ambas desigualdades debida a Larry Guth en [15]. Después de todo, como termina lacónicamente Y. Burago su recensión del artículo de Gromov en *Mathematical Reviews*: *The paper is difficult to read.*[5] Pero el lector debe saber que, por duro que sea, el tiempo invertido en su lectura será siempre provechoso.

Quedan muchos temas que no hemos ni siquiera arañado: K-área, *mm*-espacios, volumen simplicial, teoría de homotopía con un control métrico de las aplicaciones empleadas, invariantes asintóticos de grupos, espectro de variedades, geometría subriemanniana... En todos ellos las ideas de Gromov tendrán mucho que decir en el futuro.

4. Topología simpléctica. Curvas pseudo-holomorfas

Mikhail Gromov revolucionó el mundo de la geometría simpléctica con la introducción de las curvas pseudo-holomorfas [10]. La geometría simpléctica (también llamada topología simpléctica por aquéllos que reservan el término geometría para las situaciones en las que hay una métrica) es el estudio de variedades diferenciables M de dimensión $2n$, dotadas de una *forma simpléctica*, es decir, una forma diferencial ω de grado 2 que es cerrada, $d\omega = 0$, y no degenerada (equivalentemente, de rango máximo como forma bilineal antisimétrica). Por tanto, el producto exterior de grado máximo ω^n es no nulo en todo punto. Esta $2n$-forma es una forma de volumen, es decir, una medida en la variedad. En el caso de superficies, una forma simpléctica es una forma de área, y la existencia de simplectomorfismos (difeomorfismos que preservan la estructura simpléctica) entre superficies se reduce a la cuestión de la medida (área) total.

[5] El artículo es difícil de leer.

Las estructuras simplécticas aparecen en matemáticas en muy diversas situaciones, dos de ellas especialmente importantes. La primera es la geometría Kähler. Una *variedad Kähler* es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica h que oscula con la métrica plana a orden 2. La estructura compleja y la métrica hermítica dan lugar a una 2-forma ω definida como $\omega(u,v) = \operatorname{Im} h(u,v)$. Los coeficientes de ω en una carta compleja son (salvo un factor) los coeficientes de la métrica h. La no-degeneración de h es equivalente a la no-degeneración de ω. La condición de osculación se traduce en que ω sea cerrada. Por lo tanto, toda variedad Kähler es simpléctica. En particular, toda subvariedad compleja del espacio proyectivo complejo hereda esta propiedad.

La segunda situación donde aparece la geometría simpléctica de modo fundamental es la mecánica hamiltoniana, en la que la 1-forma canónica del espacio de fases (espacio de posiciones-momentos donde la mecánica se estudia) es la forma de Liouville, y su diferencial exterior es una 2-forma simpléctica.

El teorema de Darboux establece que, localmente, toda forma simpléctica se puede escribir en algún conjunto de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ como

$$\omega = dx_1 \wedge dx_{n+1} + dx_2 \wedge dx_{n+2} + \cdots + dx_n \wedge dx_{2n}\,.$$

Por tanto, no existen invariantes locales en geometría simpléctica, en contraste con la geometría riemanniana, donde la noción de curvatura es el invariante local por excelencia. La topología simpléctica se centra en el estudio de las propiedades globales, o topológicas, de las variedades simplécticas. Sin embargo, Gromov descubrió obstrucciones más allá de la medida en el caso de dimensión $2n \geq 4$. Un resultado paradigmático es la inexistencia de embebimientos simplécticos de una bola $B_{2n}(0,R)$ de radio R (del espacio $2n$-dimensional) en un producto $B_2(0,r)\times\mathbb{R}^{2n-2}$, con $r < R$, a pesar de que la medida del segundo espacio sea infinita.

La pieza clave para estos resultados de rigidez simpléctica viene de la extensión de la teoría enumerativa de curvas complejas en subvariedades complejas proyectivas a la situación simpléctica. Una estructura casi-compleja en una variedad de dimensión par es un endomorfismo J del espacio tangente cuyo cuadrado es $J^2 = -id$. Por lo tanto, el espacio tangente se convierte en un espacio complejo en el que la multiplicación por $i = \sqrt{-1}$ está definida como la acción de J en los vectores. Cada forma simpléctica admite una (de hecho muchas, pero todas ellas deformables entre sí) estructura casi-compleja J compatible (es decir, que J y ω se complementan para producir una métrica hermítica análoga a la de las variedades Kähler). En esta situación, una curva pseudoholomorfa es una subvariedad de dimensión 2 cuyos espacios tangentes son subespacios complejos del tangente a la variedad (se denomina curva porque una curva compleja tiene dimensión compleja 1, es decir, dimensión real 2). La condición para la existencia de curvas pseudo-holomorfas se escribe como una ecuación en derivadas parciales del estilo de la ecuación de Cauchy-Riemann. Sea (Σ, j) una superficie de Riemann compacta (es decir, j es una estructura compleja en Σ). Una curva pseudo-holomorfa es una aplicación

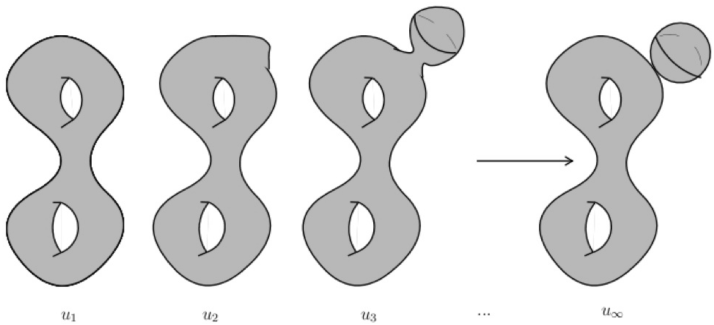
$$u : \Sigma \to M,$$

con $du \circ j = J \circ du$. Aquí $du \in \Omega^1(u^*TM)$ se puede descomponer como $du = \partial_J u + \bar{\partial}_J u$, donde $\partial_J u = \frac{1}{2}(du - J \circ du \circ j) \in \Omega^{1,0}(u^*TM)$ y $\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j) \in \Omega^{0,1}(u^*TM)$. La ecuación que asegura que u es pseudoholomorfa es

$$\bar{\partial}_J u = 0\,,$$

que es una ecuación de tipo elíptico.

La clave del trabajo de Gromov estriba en lograr un resultado de estabilidad para la existencia de curvas pseudo-holomorfas cuando variamos J. Uno de los conceptos más conocidos en este campo es el de la compactificación de Gromov del espacio de curvas pseudo-holomorfas, que refleja las deformaciones de estas curvas, y cómo puede presentarse el fenómeno de aparición de burbujas [16]. Si (u_n) es una sucesión de curvas J-holomorfas, $u_n : \Sigma \to M$, podemos extraer una subsucesión que converge en un sentido generalizado (introducido por Gromov). Existe un conjunto finito $K \subset \Sigma$, tal que u_n converge en la topología de convergencia C^∞ en compactos en $\Sigma \setminus K$. El límite $u_\infty : \Sigma \setminus K \to M$ es una curva J-holomorfa y, por un teorema de eliminación de singularidades, se extiende de forma única a una curva J-holomorfa $u_\infty : \Sigma \to M$. La cuestión es que $u_n(\Sigma)$ no converge (en sentido Hausdorff) a $u_\infty(\Sigma)$. Lo que ocurre es lo siguiente: en el caso más sencillo, tenemos que, alrededor de un punto $p \in K$, hay entornos $V_n \subset \Sigma$, cada vez más pequeños, en los que $u_n : V_n \to M$ los podemos reparametrizar a través de una identificación $V_n \cong D(0, R_n)$, con $R_n \to \infty$, y de forma que $u_n : D(0, R_n) \to M$ converja a una aplicación J-holomorfa $\bar{u}_\infty : \mathbb{C} \to M$. De nuevo, esta aplicación extiende a $\bar{u}_\infty : S^2 \to M$ (¡una burbuja!).



Aparición de burbujas.

En el caso general, pueden aparecer varias burbujas simultáneamente, dando lugar a un árbol de burbujas. Añadiendo estas curvas J-holomorfas con burbujas al espacio de curvas J-holomorfas, obtenemos un espacio compacto de curvas J-holomorfas. El estudio de este espacio permite obtener propiedades fundamentales de la geometría de la variedad simpléctica original M.

La teoría de curvas pseudo-holomorfas ha dado lugar a los invariantes de Gromov-Witten y a la cohomología cuántica [18]. Este invariante ha sido de mucha utilidad para diferenciar variedades simplécticas y aplicaciones simplécticas entre dos variedades.

REFERENCIAS

[1] M. BERGER, Encounter with a Geometer, Part I, *Notices of the AMS* **47** (2000), Number 2, 183–194. `http://www.ams.org/notices/200002/fea-berger.pdf`

[2] M. BERGER, Encounter with a Geometer, Part II, *Notices of the AMS* **47** (2000), Number 3, 326–340. `http://www.ams.org/notices/200003/fea-berger.pdf`

[3] P. BUSER Y H. KARCHER, Gromov's almost flat manifolds, *Asterisque (Soc. Math. France)* **81** (1981), 1–148.

[4] J. CHEEGER, K. FUKAYA Y M. GROMOV, Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), 327–372.

[5] Y. ELIASHBERG Y M. GROMOV, Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension $3n/2+1$, *Ann. Math. (2)* **136** (1992), 123–135.

[6] Y. ELIASHBERG Y N. MISHACHEV *Introduction to the h-Principle*, Graduate Studies in Math., Vol. 48, AMS, 2002.

[7] Geometries in interaction. *GAFA special issue in honor of Mikhail Gromov. Reprint of Geom. Funct. Anal. 5 (1995), no. 2*. Editado por Y. Eliashberg, V. Milman, L. Polterovich y R. Schoen, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995, pp. i–xvi y 105–527.

[8] M. GROMOV, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publications Mathématiques de L'IHÉS* **53** (1981), 53–78.

[9] M. GROMOV, Filling Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 1–147.

[10] M. GROMOV, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Inventiones Math.* **82** (1985), 307–347.

[11] M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 1986.

[12] M. GROMOV, Hyperbolic groups, *Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 8, 75–263, Springer-Verlag, 1987.

[13] M. GROMOV, Sign and geometric meaning of curvature, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **61** (1991), 9–123.

[14] K. GROVE Y K. SHIOHAMA, A generalized sphere theorem, *Annals Math. (2)* **106** (1977), 201–211.

[15] L. GUTH, Notes on Gromov's systolic estimate, *Geom. Dedicata* **123** (2006), 113–129.

[16] D. MCDUFF Y D. SALAMON, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, Colloquium Publications, Vol. 52, AMS, 2004.

[17] J. NASH, The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Annals Math. (2)* **63** (1956), 20–63.

[18] Y. RUAN Y G. TIAN, A mathematical theory of quantum cohomology, *J. Diff. Geom.* **42** (1995), 259–367.

[19] Premio Abel 2009. `http://www.abelprisen.no/en/`

[20] Página web de Mijail Gromov en el IHES. `http://www.ihes.fr/~gromov/`

[21] «Outside In», video de la eversión de la esfera, Geometry Center. http://video.google.com/videoplay?docid=-6626464599825291409

Luis Guijarro, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Cantoblanco, Madrid, e Instituto de Ciencias Matemáticas CSIC-UAM-UCM-UC3M

Correo electrónico: luis.guijarro@uam.es

Página web: http://www.uam.es/luis.guijarro

Vicente Muñoz, Instituto de Ciencias Matemáticas CSIC-UAM-UCM-UC3M, Serrano 113 bis, 28006 Madrid, y Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid

Correo electrónico: vicente.munoz@imaff.cfmac.csic.es

Página web: http://www.mat.csic.es/vicente.munoz