

Tema 1. Introducción al cálculo de probabilidades

En este tema, se exploran los conceptos fundamentales del cálculo de probabilidades, comenzando con los experimentos aleatorios, que son aquellos cuyos resultados no se pueden predecir con certeza de antemano (es decir, están afectados por la incertidumbre o azar). A partir de estos experimentos, se define el espacio muestral, que es el conjunto de todos los posibles resultados; y los sucesos aleatorios, que son subconjuntos del espacio muestral. Para comprender y calcular estos elementos, es necesario contar con el conocimiento de variaciones, permutaciones y combinaciones. En caso de no tener dominio sobre estos conceptos, se recomienda consultar los siguientes libros:

Barboianu, C. (2006). *Understanding and Calculating the Odds: Probability Theory Basics and Calculus Guide for Beginners, with Applications in Games of Chance and Everyday Life*. INFAROM Publishing.

Caballero Roldán, R., Hortalá González, T., Martí Oliet, N., Nieva Soto, S., Pareja Lora, A., & Rodríguez Artalejo, M. (2024). *Ejercicios resueltos de matemática discreta* (1ª edición). Ibergarceta Publicaciones, S.L.

Para formalizar el estudio de la probabilidad, se introduce la definición de probabilidad y los axiomas de Kolmogorov, que establecen las reglas básicas que toda asignación de probabilidad debe cumplir. También se presentan los distintos tipos de espacios muestrales, que pueden ser finitos, infinitos numerables o infinitos no numerables, según el contexto del experimento aleatorio. Se introducen conceptos esenciales como la probabilidad condicionada y la independencia de sucesos, que permiten analizar unos eventos en relación con otros, así como el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total.

1.1. Experimento aleatorio y espacio muestral

Experimento aleatorio

Un *experimento aleatorio* es la reproducción controlada de un fenómeno en la que existe incertidumbre sobre el resultado, ya que este depende del azar. Por ejemplo, al lanzar una moneda no sabemos si saldrá cara o cruz; al lanzar un dado, no podemos predecir qué número aparecerá. Asimismo, la extracción de bolas en sorteos y loterías son experimentos que consideramos aleatorios.

Un experimento aleatorio puede repetirse bajo las mismas condiciones, y se puede describir el número de resultados posibles que pueden ocurrir.

Espacio muestral

Se define el *espacio muestral* y se denota por Ω , como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada al aire, el espacio muestral viene dado por los dos posibles resultados asociados al experimento, esto es, $\Omega = \{cara, cruz\}$.

Según los resultados obtenidos, el espacio muestral se puede clasificar en finito e infinito. En la sección 1.4, se ofrecen más detalles sobre cada tipo.

Estructura de conjuntos (σ -álgebra de conjuntos)

Si consideramos un experimento aleatorio con espacio muestral, Ω , distinto del vacío, nuestro interés se va a centrar en subconjuntos del espacio muestral (sucesos aleatorios), por ello es necesario dotar de una estructura al conjunto de subconjuntos de Ω .

- σ -álgebra

Sea Ω un conjunto no vacío.

Un σ -álgebra F es una clase de subconjuntos de Ω que verifica:

- 1) $\Omega \in F$.
- 2) Si $A \in F$, entonces $\bar{A} \in F$.
- 3) $\{A_n\}_{n \geq 1}$ son elementos de F , se verifica que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

En este manual solamente se va a utilizar la máxima σ -álgebra que se denomina *partes de Ω* y se denota por $\mathcal{P}(\Omega)$, como el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos del espacio muestral Ω , incluido \emptyset y Ω , siendo $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\text{Card}(\Omega)}$.

1.2. Sucesos aleatorios y operaciones con sucesos

Sucesos aleatorios

Se define un *suceso aleatorio*, y se denota tal que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, como cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio, es decir, un suceso será un subconjunto del espacio muestral Ω .

Ejemplo 1.1

Considerándose el experimento consistente en lanzar a la vez una moneda y un dado, el espacio muestral es tal que:

$\Omega =$

$\{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 4), (x, 5), (x, 6)\}$

siendo $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$.

Algunos posibles sucesos vienen dados por:

$A = \{(c, \text{par})\} = \{(c, 2), (c, 4), (c, 6)\}$ o

$B = \{\text{obtención de un número primo}\}$

$= \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5), (x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 5)\}$ o

$C = \{(x, \text{impar})\} = \{(x, 1), (x, 3), (x, 5)\}$.

Los sucesos aleatorios se clasifican como:

- *Suceso seguro*: es aquel que está formado por todos los resultados posibles del espacio muestral Ω .
- *Suceso imposible*: es aquel que no ocurre nunca, se denota como \emptyset .
- *Suceso elemental o simple*: es aquel que está formado por un único elemento del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento del ejemplo 1.1. consistente en lanzar a la vez una moneda y un dado, un suceso elemental es $D = \{(c, 5)\}$.
- *Suceso no elemental o compuesto*: cuando el suceso representa un conjunto de resultados posibles del experimento, esto es, un subconjunto con más de un elemento, de forma que un suceso no elemental o compuesto viene dado por la unión de sucesos elementales o simples. Por ejemplo, en el experimento del Ejemplo 1.1 cualquiera de los sucesos expuestos, A , B o C son sucesos no elementales o compuestos.

Operaciones con sucesos

Sean A, B dos sucesos tales que $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- *Suceso unión:* dados dos sucesos A y B , el suceso unión dado por $A \cup B$ es el suceso que ocurre cuando ocurre A u ocurre B u ocurren cualquiera de los dos simultáneamente. Considerando en el ejemplo anteriormente expuesto $A = \{(c, par)\}$ y $B = \{\text{obtención de un número primo}\}$, el suceso unión de A y B viene dado por $\mathcal{C}(A \cup B)$ es tal que (ver la Figura 1.1):

$$A \cup B = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 5)\}.$$

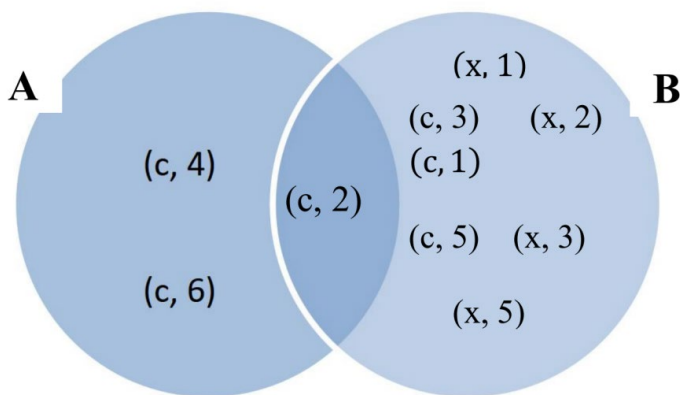


Figura 1.1. Suceso unión $A \cup B$.

Propiedades:

- 1) Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
 - 2) Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 - 3) $A \cup A = A$
 - 4) $A \cup \emptyset = A$
 - 5) $A \cup \Omega = \Omega$
- *Suceso intersección:* sean dos sucesos A y B , el suceso intersección dado por $A \cap B$ es el que ocurre cuando A y B ocurren simultáneamente. En el ejemplo anterior, $A \cap B = \{(c, 2)\}$ (ver la Figura 1.1).

Propiedades:

- 1) Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

- 2) Asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 - 3) $A \cap A = A$
 - 4) $A \cap \emptyset = \emptyset$
 - 5) $A \cap \Omega = A$
- *Suceso contrario o complementario*: es aquel que está formado por los resultados que no están incluidos en el suceso considerado. Por ejemplo, el suceso contrario al suceso A se nota como \bar{A} o A^c , y $\bar{A} = \{(c, impar), (x, par), (x, impar)\} = \{(c, 1), (c, 3), (c, 5)\}$ (ver la Figura 1.2).

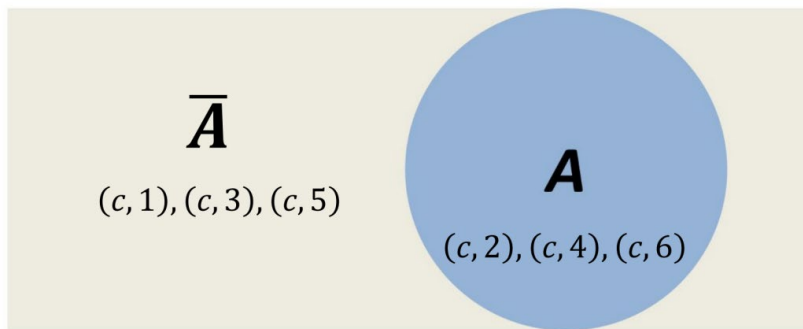


Figura 1.2. Suceso contrario \bar{A} .

Propiedades:

- 1) El complementario del suceso complementario es el propio suceso
 - 2) $\overline{\bar{\emptyset}} = \Omega$
 - 3) $A \cup \bar{A} = \Omega$
 - 4) $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- *Suceso inclusión*: dados dos sucesos A y B , se dice que A está incluido en B , $A \subset B$, si todos los elementos de A están en B , es decir, si ocurre A , ocurre B . En el ejemplo del lanzamiento de una moneda y un dado a la vez, si el suceso $E = \{\text{obtención de un número par}\}$, entonces $A \subset E$.

Propiedades:

- 1) Si $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$
- 2) Si $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

$$3) \emptyset \subset A \subset \Omega$$

- *Suceso diferencia:* Sean dos sucesos A y B , el suceso diferencia, denotado como $A \setminus B$ o $A - B$, es el que ocurre si ocurre A y no ocurre B , es decir $A - B = A \cap \bar{B}$. En el ejemplo anterior, $A - B = \{(c, 4), (c, 6)\}$ (ver la Figura 1.3).

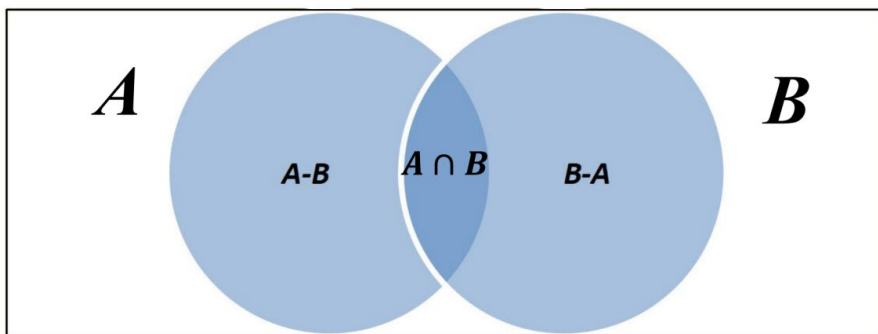


Figura 1.3. Suceso diferencia $A - B$.

Propiedades:

$$1) \text{ Distributiva: } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ y}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Es importante destacar las leyes de Morgan de la teoría de conjuntos, para la realización de diversas operaciones entre sucesos:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Ejemplo 1.2

Si lanzamos un dado, ¿cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio? ¿Y cuál es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos del espacio muestral?

El espacio muestral de este experimento aleatorio está compuesto por los seis posibles resultados, que es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En este experimento, el número de todos los posibles subconjuntos del espacio muestral es $2^6 = 64$, por lo que $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \Omega\}$.

1. Si lanzamos dos monedas, ¿cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio? ¿Y cuál es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos del espacio muestral?

El espacio muestral de este experimento aleatorio incluye cuatro posibles resultados: $\Omega = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$, siendo $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$. En este experimento, el número de todos los posibles subconjuntos del espacio muestral es $2^4 = 16$, por lo que:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \Omega, \{(c, c)\}, \{(c, x)\}, \{(x, c)\}, \{(x, x)\}, \\ \{(c, c), (c, x)\}, \{(c, c), (x, c)\}, \{(c, c), (x, x)\}, \\ \{(c, x), (x, c)\}, \{(c, x), (x, x)\}, \{(x, c), (x, x)\}, \\ \{(c, c), (c, x), (x, c)\}, \{(c, c), (c, x), (x, x)\}, \\ \{(c, c), (x, c), (x, x)\}, \{(c, x), (x, c), (x, x)\} \end{array} \right\}$$

2. Si tenemos una caja con 5 bombillas, de las cuales 2 son defectuosas, y queremos determinar el número de bombillas que debemos extraer, sin remplazamiento, hasta obtener una defectuosa, ¿cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio? ¿Y cuál es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos del espacio muestral?

En este experimento, el espacio muestral incluye los posibles resultados de las extracciones necesarias para obtener la primera bombilla defectuosa. Los resultados posibles son: extraer una bombilla defectuosa; extraer una bombilla no defectuosa seguida de una defectuosa (total de 2); extraer dos bombillas no defectuosas y luego una defectuosa (total de 3); y extraer tres bombillas no defectuosas y luego una defectuosa (total de 4). Por lo tanto, el espacio muestral de este experimento se puede representar como $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

En este experimento, el número de todos los posibles subconjuntos del espacio muestral es $2^4 = 16$, por lo que:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

1.3. Concepto de probabilidad

La probabilidad se puede definir desde varios puntos de vista, en todos ellos lo que se pretende es precisar el grado de ocurrencia de cualquier suceso del espacio muestral.

Concepto frecuentista

Si repetimos un experimento n número de veces, la probabilidad de un suceso $A \in \Omega$ se puede definir como el límite de la frecuencia relativa de dicho suceso.

Definición de Laplace

La probabilidad de cualquier suceso $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ es igual al cociente entre el cardinal del suceso A y el cardinal del espacio muestral.

$$P(A) = \frac{n^\circ \text{ de casos favorables (card}(A))}{n^\circ \text{ de casos posibles (card}(\Omega))}$$

Axiomas de Kolmogorov

En 1933, Andréi Kolmogorov (1903-1987) introdujo una definición de probabilidad basada en una serie de axiomas, la cual sigue siendo válida hasta la actualidad. Sea un espacio muestral Ω y $\mathcal{P}(\Omega)$. Se define la función de probabilidad P como $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, verificando los siguientes axiomas:

- *Axioma (i)*. La probabilidad del suceso seguro es igual a uno: $P(\Omega) = 1$
- *Axioma (ii)*. La probabilidad de cualquier suceso es no negativa: $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): P(A) \geq 0$
- *Axioma (iii)*. $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Como consecuencia de los axiomas presentados en la definición de probabilidad se obtienen las siguientes propiedades:

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Se sabe que si $A \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) \stackrel{(i)}{=} 1$; como $P(A \cup \bar{A}) \stackrel{(iii)}{=} P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Si $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A)$ tal que $A \cap (B - A) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A)$; como $P(B - A) \geq 0$ (por (ii)) $\Rightarrow P(B) \geq P(A)$

3. $P(\emptyset) = 0$

$\emptyset = \bar{\Omega} \Rightarrow$ Por la propiedad 1, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

$$4. \forall A \in \mathcal{P}(\Omega): P(A) \leq 1$$

Como $A \subset \Omega \Rightarrow$ por la propiedad 2, $P(A) \leq P(\Omega) \stackrel{(i)}{=} 1 \Rightarrow P(A) \leq 1$

$$5. \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ tal que } A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

Por la propiedad 2 se sabe que $P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$

$$6. \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega): P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sea $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ tal que $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

Sea $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ tal que $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$

Sea $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ tales que son sucesos disjuntos dos a dos $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$

Calculando:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Como consecuencia directa de la última propiedad expuesta se tiene que:

$$\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega): P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ejemplo 1.3

La probabilidad de que un alumno estudie la carrera A es 0.5, mientras que la probabilidad de que estudie la carrera B es 0.3. La probabilidad de que un alumno curse ambas carreras, A y B (es decir, el doble grado), es 0.15.

1. Calcular la probabilidad de que un alumno estudie al menos una de las dos carreras.
2. Calcular la probabilidad de que un alumno no estudie ninguna de las dos carreras.
3. Calcular la probabilidad de que un alumno estudie exactamente una de las dos carreras.

Sean los siguientes sucesos:

A: el alumno estudia la carrera A. $P(A) = 0.5$

B: el alumno estudia la carrera B. $P(B) = 0.3$

$A \cap B$: el alumno estudia el doble grado (A y B). $P(A \cap B) = 0.15$

1. Se pide la probabilidad del suceso compuesto $A \cup B$.

$$P(A \cup B) \stackrel{\text{Propiedad 6}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.3 - 0.15 = 0.65$$

La probabilidad de que un alumno estudie al menos una de las dos carreras es 0.65.

2. Se pide la probabilidad del suceso compuesto $\bar{A} \cap \bar{B}$.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{\text{Morgan}}{=} P(\overline{A \cup B}) \stackrel{\text{Propiedad 1}}{=} 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

La probabilidad de que un alumno no estudie ninguna de estas dos carreras es 0.35.

3. Se pide la probabilidad del suceso compuesto $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

$$P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.65 - 0.15 = 0.5$$

La probabilidad de que un alumno estudie exactamente una de las dos carreras es 0.5.

1.4. Algunos tipos de espacios muestrales

Sea un espacio muestral Ω , sea $\mathcal{P}(\Omega)$ y sea $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ la función de probabilidad. Se denomina *espacio de probabilidad* a la terna dada por $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

A continuación, se enuncian algunos tipos de espacios muestrales que facilitan el cálculo de la probabilidad de un suceso mediante reglas básicas, como la *regla de Laplace*.

Espacios muestrales finitos

Los *espacios muestrales finitos* son aquellos conjuntos de resultados posibles de un experimento aleatorio que contienen un número *finito* de elementos, de forma que $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda el espacio muestral es finito, ya que todos los posibles resultados son cara y cruz ($\Omega = \{c, x\}$, donde $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$).

La probabilidad asociada a cada uno de los sucesos elementales de Ω viene dada por:

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \rightarrow P(x_i) = p_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

siendo p_i la probabilidad de que el suceso x_i ocurra.

Para que se satisfagan los axiomas de Kolmogorov, se han de cumplir las siguientes propiedades:

1. $p_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
2. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Considerándose el suceso compuesto $A = \bigcup_{i=1}^k x_i$ con $k \leq n$, la probabilidad de dicho suceso vendrá dada por la suma de las probabilidades p_i de los sucesos simples $x_i \in A$ que lo componen, esto es $P(A) = \sum_{i=1}^k P(x_i) = \sum_{i=1}^k p_i$.

Ejemplo 1.4

Lanzamos un dado trucado, tal que la probabilidad de obtener una cara es proporcional al valor de esa cara. ¿Cuál será el valor de los p_i ?

La probabilidad asociada a cada cara del dado debe cumplir los axiomas de Kolmogorov, entonces $\sum_{i=1}^6 p_i = \sum_{i=1}^6 K * i = 1$, resolvemos la ecuación y obtenemos $k = \frac{1}{21}$.

Por lo tanto, $p_i = \frac{i}{21}$ para $i = 1, 2, \dots, 6$.

Espacios muestrales infinitos

Los *espacios muestrales infinitos* son aquellos conjuntos de resultados posibles de un experimento aleatorio que contienen un número *infinito* de elementos. A diferencia de los espacios muestrales finitos, en los que se puede contar cada resultado, en los espacios muestrales infinitos hay resultados que no se pueden enumerar exhaustivamente.

Se pueden clasificar en dos categorías principales:

- *Espacio muestral infinito numerable*: Cuando el conjunto de todos los posibles resultados es infinito numerable. Por ejemplo, en el experimento que consiste en contar el número de lanzamientos de una moneda hasta obtener cara, el espacio muestral viene dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$.
- *Espacio muestral infinito no numerable*: Cuando el conjunto de todos los resultados posibles es infinito no numerable. Por ejemplo, en el experimento

consistente en elegir un número real positivo cuyo valor sea menor que 50, el espacio muestral asociado al experimento es $\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 50\}$.

Espacios muestrales equiprobables

Se denomina *espacio muestral equiprobable* al espacio muestral finito dado por $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, en el que todos los sucesos elementales que lo componen tienen la misma probabilidad de ser obtenidos cuando se realiza el experimento aleatorio. De forma que:

$$P(x_i) = p_i = p \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Como se ha de cumplir que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, entonces:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n p = np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Considerándose el experimento de lanzar dos monedas no trucadas al aire, el espacio muestral asociado a dicho experimento es $\Omega = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$ donde $c = \text{cara}$ y $x = \text{cruz}$. Dicho espacio muestral es equiprobable ya que todos los sucesos que lo componen tienen la misma probabilidad p de ocurrir, siendo $p = \frac{1}{4}$.

Estos espacios muestrales equiprobables son también denominados *espacios muestrales simples*.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^k x_i$ con $k \leq n$ un suceso compuesto perteneciente al espacio muestral equiprobable, siendo x_i sucesos simples de Ω . La probabilidad asociada a dicho suceso A viene dada por:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(x_i) = kp = \frac{k}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{n^\circ \text{ de casos favorables de } A}{n^\circ \text{ de casos posibles}}$$

Este resultado se conoce como regla de Laplace y se corresponde con la definición clásica de probabilidad.

Ejemplo 1.5

Considere el experimento de lanzar tres monedas no trucadas al aire. Calcule:

1. La probabilidad de obtener exactamente dos cruces.
2. La probabilidad de obtener al menos una cara.

3. La probabilidad de obtener el mismo resultado en las tres monedas.

El espacio muestral asociado al experimento es:

$$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, c, c), (c, x, x), (x, c, x), (x, x, c), (x, x, x)\}$$

siendo $c = \text{cara}$, $x = \text{cruz}$.

En este caso, el espacio muestral tiene un total de $2^3 = 8$ resultados. Es decir, $\text{Card}(\Omega) = 8$.

1. Sea $A = \{\text{obtener exactamente dos cruces}\}$, entonces:

$$A = \{(c, x, x), (x, c, x), (x, x, c)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

2. Sea $B = \{\text{obtener al menos una cara}\}$, entonces:

$$B = \{(c, c, c), (c, c, x), (c, x, c), (x, c, c), (c, x, x), (x, c, x), (x, x, c)\} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{8}$$

3. Sea $C = \{\text{obtener el mismo resultado en las 3 monedas}\}$, entonces:

$$C = \{(c, c, c), (x, x, x)\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

1.5. Probabilidad condicionada e independencia. Teorema de Bayes. Teorema de la probabilidad total

Probabilidad condicionada

La *probabilidad condicionada* es un concepto clave en la teoría de la probabilidad. Hay muchas situaciones en las que tenemos información que hacen que la probabilidad de un determinado suceso, utilizando o no esa información, sea diferente, incluso puede que algunos de los resultados, bajo las nuevas hipótesis sean imposibles. En este contexto definimos el concepto de probabilidad condicionada. El objetivo es analizar cómo afecta la ocurrencia de un determinado suceso (información *a priori*) a la probabilidad de que ocurra otro suceso. La probabilidad condicionada tiene una clara interpretación en espacios muestrales finitos en los que puede aplicarse la *regla de Laplace*.

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio probabilístico y A un suceso cualquiera ($A \in \mathcal{P}(\Omega)$) tal que $P(A) > 0$. Para cualquier otro suceso $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, se define la probabilidad condicionada de B dado A o probabilidad de B condicionada por A y se denota por $P(B / A)$ al producto de la intersección de los sucesos por la probabilidad del suceso A (ver la Figura 1.4).

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) \neq 0$$

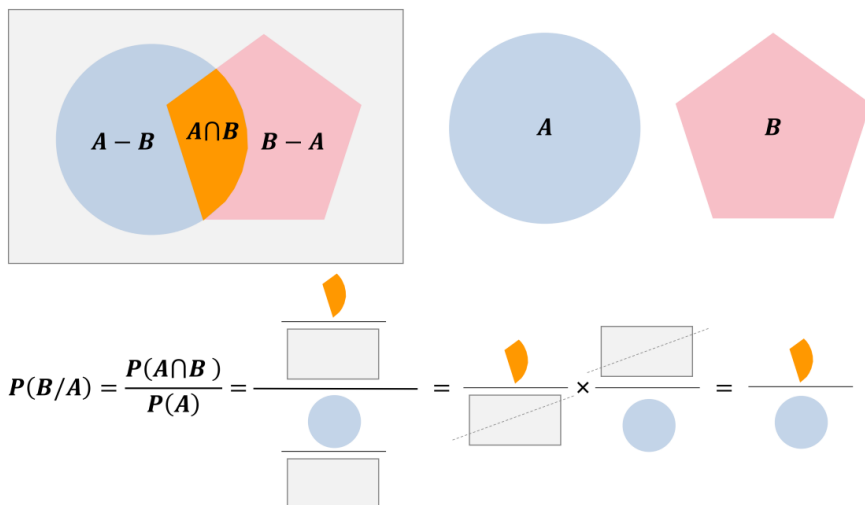


Figura 1.4. Ejemplo de $P(B / A)$.

Observemos que el hecho de que haya ocurrido A puede modificar la probabilidad del resto de los sucesos, por lo tanto, estamos definiendo una nueva función de probabilidad sobre $(A, P(A))$.

Ejemplo 1.6

En una caja hay 5 bolas: 2 rojas y 3 azules. Se extrae una bola al azar y, sin devolverla, se extrae una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea azul, dado que la primera fue roja? ¿Y cuál es la probabilidad conjunta?

La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja es: $P(A) = \frac{2}{5}$.

Si la primera bola fue roja, entonces quedan en la caja 4 bolas (1 roja y 3 azules).

La probabilidad de que la segunda bola sea azul, dado que la primera fue roja, es:

$$P(B / A) = \frac{3}{4}$$

La probabilidad conjunta de que la primera bola sea roja y la segunda bola sea azul es:

$$P(A \cap B) = P(B / A) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

Independencia de sucesos

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ con $P(A) > 0$. Como ya hemos comentado, la ocurrencia del suceso A puede alterar la probabilidad de ocurrencia de cualquier otro suceso $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si la ocurrencia de A no modifica la probabilidad de B , entonces diremos que existe independencia entre A y B .

Es importante no confundir los sucesos independientes con los sucesos incompatibles:

- *Sucesos independientes*: son aquellos que no se afectan mutuamente, es decir, la ocurrencia de uno no influye en la probabilidad de que ocurra el otro. La probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es igual al producto de sus probabilidades individuales: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$.
- *Sucesos incompatibles*: son aquellos que no tienen elementos en común, por lo que la probabilidad de la intersección es igual a 0: $P(A \cap B) = 0$.

Ejemplo 1.7

Lanzamos una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en la moneda y un 2 en el dado?

Como lanzar la moneda y el dado son eventos independientes, la probabilidad de obtener cara en la moneda, c , y un 2 en el dado se calcula multiplicando sus probabilidades:

$$P(c \cap 2) = P(c) \cdot P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Teorema de la probabilidad total

Para enunciar el teorema de la probabilidad total necesitamos definir una partición de Ω . Una partición de Ω es un conjunto de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n , tal que estos sucesos sean incompatibles dos a dos y además la unión sea el suceso total, Ω . Por ejemplo, si deseamos analizar la probabilidad de encontrar un determinado tipo de árbol en la Comunidad de Madrid, podemos dividir la zona geográfica de estudio en distintos sucesos que formen una partición (ver la Figura 1.5).

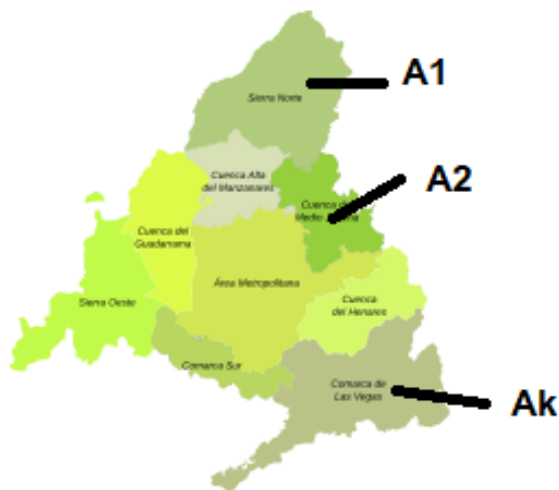


Figura 1.5. Partición de la Comunidad de Madrid.

Fuente: elaboración propia basada en Joan M. Borràs, Mapa comarcal de la Comunidad de Madrid (Wikimedia Commons).

Teorema 1.1. Dado $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad y A_1, A_2, \dots, A_k sucesos incompatibles dos a dos que además verifican que la unión es el suceso total, Ω (una partición de Ω), si se verifica que la $P(A_n) > 0, \forall n$. La probabilidad de cualquier suceso $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ se puede calcular como:

$$P(B) = \sum_{n=1}^k P(B / A_n) \cdot P(A_n)$$

Ejemplo 1.8

Una determinada imprenta realiza las compras de folios a tres proveedores diferentes, (40% al proveedor 1 ($Prov_1$), 50% al proveedor 2 ($Prov_2$) y el resto al proveedor 3 ($Prov_3$)). Se conoce la probabilidad de que un paquete de folios no cumpla el control de calidad ($NoCal$) dependiendo del proveedor ($P(NoCal/Prov_1)=0.2$, $P(NoCal/Prov_2)=0.15$ y $P(NoCal/Prov_3)=0.25$). ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete de folios en la imprenta cumpla el control de calidad (Cal)?

$$\begin{aligned} P(Cal) &= \sum_{k=1}^3 P(Cal / Prov_k) \cdot P(Prov_k) \\ &= (1 - 0.2) \cdot 40\% + (1 - 0.15) \cdot 50\% + (1 - 0.25) \cdot 10\% = 0.82 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Teorema 1.2. Dado $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad y A_1, A_2, \dots, A_k sucesos incompatibles dos a dos que además verifican que la unión es el suceso total, Ω (una partición de Ω), si se verifica que la $P(A_n) > 0, \forall n$.

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{n=1}^k P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$

$P(A_i)$ se denomina probabilidad *a priori*, las probabilidades $P(A_i / B)$ se denominan probabilidades *a posteriori* y las probabilidades $P(B / A_n)$ se denominan verosimilitudes.

Ejemplo 1.9

Con los datos del Ejemplo 1.8, calcular la probabilidad de que un paquete de folios que no ha pasado el control de calidad sea del proveedor 1.

$$\begin{aligned} P(\text{NoCal}) &= \sum_{k=1}^3 P(\text{NoCal} / \text{Prov}_k) \cdot P(\text{Prov}_k) \\ &= 0.2 \cdot 40\% + 0.15 \cdot 50\% + 0.25 \cdot 10\% = 0.18 \\ P(\text{Prov}_1 / \text{NoCal}) &= \frac{P(\text{NoCal} / \text{Prov}_1) \cdot P(\text{Prov}_1)}{\sum_{k=1}^3 P(\text{NoCal} / \text{Prov}_k) \cdot P(\text{Prov}_k)} = \frac{0.2 \cdot 40\%}{0.18} \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

1.6. Ejercicios

Ejercicios resueltos

Ejercicio R. 1.1

Sean A , B , C tres sucesos. Expresa formalmente, mediante una sola fórmula (o mediante un dibujo), los siguientes sucesos compuestos:

1. Ocurren B y C , pero no ocurre A .
2. Ocurren al menos dos de ellos.
3. Ocurre solamente uno de los tres.
4. Ocurre al menos uno de los tres.
5. No ocurre ninguno de los tres.

Solución:

1. $\bar{A} \cap B \cap C$
2. $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$
3. $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$
4. $\overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}}$
5. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

Ejercicio R. 1.2

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 bolas rojas. Se extraen dos bolas de forma simultánea (sin reemplazamiento). Se pide:

1. Calcular la probabilidad de obtener dos bolas rojas.
2. Calcular la probabilidad de obtener dos bolas blancas.
3. Calcular la probabilidad de obtener una bola blanca y otra roja.
4. Calcular las probabilidades anteriores suponiendo que las extracciones son con reemplazamiento (cada bola que saco, la vuelvo a dejar en la urna).

Solución:

1. $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$
2. $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

$$3. \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

4. Si las extracciones son con remplazamiento, no se resta del numerador ni del denominador la bola extraída.

Ejercicio R. 1.3

Un laboratorio tiene dos máquinas, A y B, que maquetan libros. La máquina A maqueta el 60% de los libros y la máquina B maqueta el 40%. La máquina A tiene un 2% de defectuosos, mientras que la máquina B tiene un 5%. Si seleccionamos un libro al azar y resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido maquetado por la máquina A?

Solución:

Definamos los eventos:

A: El libro fue maquetado por la máquina A.

B: El libro fue maquetado por la máquina B.

D: El libro es defectuoso.

Queremos calcular $P(A/D)$, la probabilidad de que el libro haya sido maquetado por la máquina A, dado que es defectuoso.

Utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)}{P(D/A)P(A) + P(D)P(A/D)} = \frac{0.012}{0.032} = 0.375$$

Ejercicio R. 1.4

Sea el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calcula el cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Solución:

$\mathcal{P}(\Omega)$ es el conjunto que contiene a todos los subconjuntos posibles que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6. Luego será la suma de todos los conjuntos que se pueden formar con un elemento, con dos, con tres, con 4, con 5 y con 6 y el vacío.

$$\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^6 = 32$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio P. 1.1

Dadas dos muestras del tejido A y del tejido B, las probabilidades de que A y B conserven su textura después de un lavado a 30° son, respectivamente, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$.

1. Calcula la probabilidad de A y B conserven su textura.
2. Calcula la probabilidad de que solo una conserve su textura.
3. Calcula la probabilidad de que al menos una conserve su textura.
4. Calcula la probabilidad de que ninguna conserve su textura.

Ejercicio P. 1.2

En una empresa el 20% de los empleados son graduadas en Estadística, el 25% trabajan en el departamento de I+D y el 15% son graduadas en Estadística que trabajan en el departamento de I+D. Si se selecciona una empleada cualquiera, calcula la probabilidad de que sea:

1. Graduada en Estadística si se sabe que trabaja en I+D.
2. Trabajadora en I+D si se sabe que es graduada en Estadística.
3. No sea graduada en Estadística ni trabaje en I+D.

Ejercicio P. 1.3

Un hospital tiene tres médicos: M1, M2 y M3. La probabilidad de que un paciente sea tratado por cada médico es:

- $P(M1) = 0.4$
- $P(M2) = 0.35$
- $P(M3) = 0.25$

La probabilidad de que un paciente reciba un diagnóstico correcto depende del médico que lo trate:

- $P(D|M1) = 0.9$
- $P(D|M2) = 0.8$
- $P(D|M3) = 0.7$

¿Cuál es la probabilidad de que un paciente reciba un diagnóstico correcto (D)?

Ejercicio P. 1.4

En una urna hay 8 bolas rojas, 5 bolas azules y 7 bolas verdes. Se extraen 4 bolas al azar, sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que las 4 bolas extraídas incluyan exactamente 2 bolas rojas, 1 bola azul y 1 bola verde?

Ejercicio P. 1.5

Una empresa tiene tres máquinas (A, B y C) que producen un 50%, 30% y 20% del total de productos, respectivamente. Las tasas de defectos son 2%, 3% y 5% para cada máquina. Si se selecciona al azar un producto defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina B?

Ejercicio P. 1.6

Un restaurante tiene dos cocineros: uno trabaja rápido el 70% del tiempo y lento el 30%. Si un cocinero está trabajando rápido, tiene una probabilidad del 80% de continuar rápido al siguiente día y un 20% de cambiar a lento. Si trabaja lento, tiene una probabilidad del 50% de continuar lento y un 50% de cambiar a rápido. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje rápido en el tercer día, dado que hoy está trabajando rápido?

Ejercicio P. 1.7

Un operario de una fábrica observa de 3 en 3 las piezas producidas en una máquina, anotando si cada una de ellas es defectuosa o no. Escribir el espacio muestral correspondiente a esta situación y describir:

1. Suceso A: La primera pieza observada es defectuosa.
2. Suceso B: La segunda pieza observada es defectuosa.

Ejercicio P. 1.8

Cierto lote de 26 componentes mecánicos contiene seis defectuosos. Se extrae una muestra aleatoria sin reposición del lote de cuatro componentes. Se pide:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro componentes extraídos del lote sean todos ellos no defectuosos?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los cuatro componentes extraídos al azar halla dos defectuosos y dos no defectuosos?

Ejercicio P. 1.9

Una urna contiene tres bolas de distintos colores: blanco, rojo y negro. Consideremos la variable aleatoria $X = \text{número total de bolas blancas obtenidas en dos extracciones con reemplazamiento}$. Describir el espacio muestral asociado a la variable X y calcular la probabilidad de sus valores.

Ejercicio P. 1.10

Consideremos una moneda trunca de tal forma que la probabilidad de cara = $P(C) = 0.3$. Si se arroja la moneda 5 veces, calcúlese la probabilidad del siguiente suceso:

1. Cinco caras.
2. Dos cruces.

1.7. Evaluación

Todos los estudiantes del Grado en Estadística Aplicada y del Grado en Ciencia de los Datos Aplicada de la UCM, matriculados en la asignatura de Azar y Probabilidad, tienen acceso al Campus Virtual para responder una serie de preguntas seleccionadas aleatoriamente del banco de preguntas, con el fin de obtener la calificación de la evaluación continua.

Este manual está disponible en el repositorio de la UCM, por lo que se ha dispuesto una autoevaluación para cualquier persona interesada en la asignatura, utilizando el mismo banco de preguntas del Campus Virtual, accesible en Google Forms a través del siguiente enlace: <https://forms.gle/u9ohwb2i4zTRtHEk6>.