

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT36

Integrabilidad, caos y entrelazamiento en sistemas cuánticos

Integrability, chaos and entanglement in quantum systems

Supervisor/es: Federico Finkel Morgenstern, Artemio González López

Rafael José Fernández-Delgado Ruiz

Doble Grado en Matemáticas-Física

Curso académico 2023-24

Convocatoria Ordinaria de Junio

Calificación: 10,0 (Matrícula de Honor)

Entrelazamiento cuántico en cadenas de espines XX inhomogéneas

Resumen:

El presente trabajo pretende explorar el concepto de la entropía de entrelazamiento del estado fundamental de los sistemas bipartitos en términos de la entropía de Rényi, con especial énfasis en las cadenas de espines inhomogéneas por sus propiedades especiales e interés teórico. Relacionaremos las familias ortogonales de polinomios y resultados clásicos de esta área con métodos de diagonalización de hamiltonianos de cadenas cuando éstos se restringen al subespacio de una partícula. Dada la inviabilidad computacional y el escalamiento exponencial de la complejidad de los cálculos con el tamaño del sistema, recurriremos a técnicas propias de teorías cuánticas conformes en $(1 + 1)$ dimensiones, las cuales proporcionarán fórmulas asintóticas para la entropía de entrelazamiento del vacío de un cierto hamiltoniano. Se realizarán simulaciones numéricas con *Mathematica* a fin de comparar y extraer cuán buenas resultan ser estas expresiones en el límite continuo de nuestros modelos discretos; todo esto tiene como objetivo obtener propiedades acerca del comportamiento crítico de nuestros sistemas, que viene regido por la dependencia de la entropía de entrelazamiento con N , el número de sitios de la cadena. El estudio se centrará en dos familias específicas de cadenas: la cadena de Lamé y la cadena de Rindler, donde haremos una comparativa entre las similitudes y diferencias de ambas, pudiendo así extraer de ellas propiedades universales de los modelos de cadenas inhomogéneas.

Abstract:

The present work aims to explore the concept of entanglement entropy of the ground state of bipartite systems in terms of Rényi entropy, with a special emphasis on inhomogeneous spin chains due to their special properties and theoretical interest. We will relate orthogonal families of polynomials and classical results in this area to methods of diagonalizing Hamiltonians of chains when restricted to the subspace of a single particle. Given the computational infeasibility and exponential scaling of complexity in calculations with system size, we will resort to techniques from conformal quantum field theories in $(1 + 1)$ dimensions, which will provide asymptotic formulas for the entanglement entropy of the vacuum of a certain Hamiltonian. Numerical simulations will be conducted using *Mathematica* to compare and assess how accurate these expressions are in the continuous limit of our discrete models; the objective of all this is to derive properties concerning the critical behavior of our systems, governed by the dependence of entanglement entropy on N , the number of sites in the chain. The study will focus on two specific families of chains: the Lamé chain and the Rindler chain, where we will compare the similarities and differences between them, thus being able to extract universal properties of inhomogeneous chain models.

ÍNDICE

	I. Introducción	1
	II. Cadenas de espines XX inhomogéneas	3
	III. Subespacio de una partícula	4
	IV. Familias de polinomios ortogonales (FPO)	5
	V. Conexión de las FPOs finitas y la cadena inhomogénea XX	7
	VI. Entropía de entrelazamiento de una cadena	8
	VII. La Cadena de Lamé	9
	VIII. La Cadena de Rindler	15
	IX. Conclusiones	17
	Referencias	20

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de propiedades del estado fundamental es una herramienta que nos permite conocer de forma indirecta comportamientos sobre el sistema en su totalidad. Por ejemplo, conocer la *entropía de entrelazamiento del estado fundamental* aporta información acerca del carácter crítico de un sistema, por medio del estudio de sistemas críticos utilizando *teorías de campos conformes* (CFT). Éstos se caracterizan por poseer espectros de energía en los cuales no existe *gap* entre el estado fundamental y el primer estado excitado. En la gran mayoría de estos modelos, la diagonalización es una tarea imposible debido al rápido escalado de la complejidad de los cálculos con el tamaño del sistema. Sin embargo, las *cadenas de espines* son un marco de trabajo de gran interés debido a su relevancia teórica, así como por el hecho de que son de los pocos sistemas que permiten evaluar la entropía de entrelazamiento del estado fundamental mediante técnicas particulares a estos modelos. En particular, el *crecimiento asintótico* con el número de espines de la cadena describe el comportamiento crítico del sistema, como se pretende demostrar a lo largo de este

trabajo. Dentro de las aplicaciones teóricas de este tipo de modelos, presentaremos en este trabajo cómo el estudio de la entropía en cadenas acaba desembocando en el posible uso de éstas como simuladores cuánticos para reproducir espacio-tiempos curvos (1 + 1)D para cualquier métrica arbitraria dada.

El *entrelazamiento cuántico* es el fenómeno según el cual el estado cuántico de una partícula individual, que conforma un grupo de partículas, no puede ser descrito independientemente del estado de las demás, sin importar las distancias de separación involucradas.

En términos matemáticos, un *sistema entrelazado* es aquel en el que la función de onda del sistema compuesto no puede ser factorizada como producto de estados de sus constituyentes, es decir

$$|\Psi\rangle = \otimes_i |\psi_i\rangle \in \mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_i. \quad (1)$$

En otras palabras, en un sistema entrelazado, dicho estado $|\Psi\rangle$ se escribirá de forma general como una combinación lineal de estados producto, o equivalentemente

$$|\Psi\rangle = \sum_{k_1, \dots, k_n} \lambda_{k_1, \dots, k_n} |\psi_{k_1}^1\rangle \dots |\psi_{k_n}^n\rangle, \quad (2)$$

donde $\{|\psi_k^i\rangle\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H}_i ($1 \leq i \leq n$), y

$$\{|\psi_{k_1}^1\rangle |\psi_{k_2}^2\rangle \dots |\psi_{k_n}^n\rangle : 1 \leq k_i \leq \dim \mathcal{H}_i, 1 \leq i \leq n\} \quad (3)$$

lo será de \mathcal{H} . Como se observa, ahora $|\Psi\rangle$ no puede ser escrito como un único producto de estados de cada subsistema.

La *entropía de entrelazamiento* es una medida del grado de entrelazamiento cuántico entre dos subsistemas en un sistema bipartito. Por ejemplo, dado un estado separable describiendo dos sistemas A y B $|\Psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle |\phi_B\rangle$, entonces la matriz de densidad reducida

$$\rho_A := \text{tr}_B |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| = |\phi_A\rangle \langle \phi_A| \quad (4)$$

es un estado puro. Por lo tanto, cabría esperar también que la entropía del estado fuese cero, como habría sucedido si hubiésemos tomado la matriz de densidad reducida de B . Intuitivamente, una matriz de densidad reducida que muestre entrelazamiento no trivial

deberá poseer una entropía no nula, y es en particular este aspecto el que querríamos cuantificar.

Una de las muchas funciones que se emplean como figura de mérito para el entrelazamiento es la denominada *entropía de von Neumann*. Dado un estado $|\Psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, el *teorema de descomposición de Schmidt* asegura la existencia de dos bases ortonormales $\{|\varphi_i\rangle_A\}$ y $\{|\phi_i\rangle_B\}$, respectivamente de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , de manera que el estado $|\Psi_{AB}\rangle$ se escribirá como

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{\chi} \alpha_i |\varphi_i\rangle_A |\phi_i\rangle_B, \quad (5)$$

donde $\alpha_k \geq 0$ son los coeficientes Schmidt y $\chi \leq \min\{\dim\mathcal{H}_A, \dim\mathcal{H}_B\}$ es el número Schmidt; en otras palabras, lo que el resultado hace es diagonalizar la matriz de densidad del sistema original. La entropía de von Neumann de un sistema bipartito se definirá entonces como

$$S_A := S(\rho_A) = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A), \quad (6)$$

donde $\rho_A = \text{tr}_B(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|)$. Pero de (5) se deduce que

$$\rho_A = \sum_i \alpha_i^2 |\varphi_i\rangle_A \langle\varphi_i|_A, \quad (7)$$

luego S_A será equivalente a la *entropía de Shannon* del cuadrado de los coeficientes de Schmidt

$$S_A := -\sum_k \alpha_k^2 \log(\alpha_k^2). \quad (8)$$

En virtud de la simetría en $A \leftrightarrow B$ de la expresión (8), es inmediato que $S_A = S_B$. En este trabajo nos centraremos en estudiar la *entropía de Rényi*, de carácter más general, definida como

$$s_\alpha(\rho_A) := \frac{1}{1-\alpha} \log \text{tr}(\rho_A^\alpha), \quad (9)$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro. Si tomamos el límite $\alpha \rightarrow 1$, recuperamos la entropía de von Neumann (o Shannon)

$$s_1(\rho_A) := \lim_{\alpha \rightarrow 1} s_\alpha(\rho_A) = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A). \quad (10)$$

Establecidos estos conceptos fundamentales, el presente trabajo tiene como objetivo emplear la entropía de entrelazamiento para estudiar las correlaciones cuánticas del estado fundamental en ciertas cadenas de espines. En particular, estaremos interesados en determinar el grado de entrelazamiento entre un bloque de L espines contiguos y el resto de la cadena. Así, si $|GS\rangle$ representa el estado fundamental del sistema de N espines, $\rho_L = \text{tr}_{N-L}(|GS\rangle\langle GS|)$ es la matriz de densidad reducida del bloque de L espines que emplearemos en la ecuación (9).

Para ello, se desarrollará una teoría basada en el uso de *familias de polinomios ortogonales*, que permite diagonalizar completamente este tipo de sistemas. Se enunciarán los principales teoremas que justifican la aplicabilidad de la matemática a los modelos físicos que queremos resolver, atendiendo a cuestiones importantes de existencia de tales familias. Una vez acabado esto, pretendemos hacer ver que, si bien es teóricamente factible todo lo expuesto, la tarea y cómputo de los cálculos escala exponencialmente con el tamaño de la cadena, haciendo que la tarea sea computacionalmente inviable. Esto se debe principalmente a la complejidad que supone el cálculo de una recursión de polinomios de forma analítica y la diagonalización de matrices del orden del número de sitios N .

Por esto, comprobaremos que podemos pasar al continuo en nuestro modelo discreto si el número de espines es suficientemente grande, donde disponemos de las herramientas propias de la *teoría cuántica de campos* (QFT). En particular, centraremos nuestra atención en las denominadas *teorías conformes de campos* (CFT), que proporcionan fórmulas asintóticas aproximadas para la entropía de entrelazamiento del estado fundamental de su hamiltoniano correspondiente. Ello llevará a considerar densidades lagrangianas de fermiones libres de Dirac en espacio-tiempos curvos, relacionando conceptos vistos en relatividad general con las amplitudes de salto J_n de nuestra cadena.

Particularizaremos la teoría general expuesta a los casos de dos cadenas: la de Lamé y la de Rindler. Ambas poseen importantes aplicaciones para otras ramas de la física teórica y experimental, en cuanto al campo emergente de las simulaciones cuánticas se refiere. Para ambas cadenas compararemos los resultados ob-

tenidos para la entropía de entrelazamiento proporcionados por la teoría exacta y las aproximaciones asintóticas de las teorías conformes a las que tiende el modelo si el número de sitios es suficientemente grande. Con esto, pretendemos verificar la conjetura no demostrada a día de hoy que afirma:

A cada cadena inhomogénea con acoples J_n se le asocia una métrica $ds^2 = J(x)^2 dt^2 - dx^2 = J(x)^2 (dt^2 - d\tilde{x}^2)$ (en particular, la cadena homogénea está asociada al espacio de Minkowski). Entonces en el *límite termodinámico*, es decir, cuando el número de espines $N \rightarrow \infty$:

1. La entropía de entrelazamiento del estado fundamental de la cadena es la misma que de la CFT de un fermión de Dirac en un espacio-tiempo curvo con la métrica anterior.
2. Dicha entropía de entrelazamiento se obtiene a partir de la corrección al espacio-tiempo de Minkowski (conocida ya desde principio de siglo) transformando cada longitud l por la correspondiente longitud $\tilde{l} = \int_0^l dx/J(x)$.

II. CADENAS DE ESPINES XX INHOMOGÉNEAS

La forma más general que estudiaremos de un hamiltoniano de fermiones libres con saltos a primeros vecinos se escribe como

$$H := \sum_{n=0}^{N-2} J_n (e^{i\alpha_n} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_{n+1} + e^{-i\alpha_n} \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n) + \sum_{n=0}^{N-1} B_n \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n, \quad (11)$$

donde $J_n \geq 0$, $\alpha_n, B_n \in \mathbb{R}$ y los operadores $\{\hat{c}_n, \hat{c}_n^\dagger\}_{n=0}^{N-1}$ son una familia de operadores que satisfacen las *relaciones canónicas de anticonmutación*

$$\{\hat{c}_n, \hat{c}_m\} = \{\hat{c}_n^\dagger, \hat{c}_m^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{c}_n, \hat{c}_m^\dagger\} = \delta_{nm}. \quad (12)$$

No obstante, la anterior expresión puede simplificarse si trabajamos con la siguiente familia de operadores

fermiónicos

$$c_n = e^{i\beta_n} \hat{c}_n, \quad \beta_n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j, \quad (13)$$

que reducen el hamiltoniano a la forma

$$H = \sum_{n=0}^{N-2} J_n (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n) + \sum_{n=0}^{N-1} B_n c_n^\dagger c_n. \quad (14)$$

De hecho, el que los nuevos operadores c_n verifiquen las mismas relaciones de anticonmutación que los \hat{c}_n se puede generalizar de la siguiente manera. Si $b_k = \sum_l u_{kl} a_l$, con $\{a_l\}_l$ conjunto de operadores y $u_{kl} = (U)_{kl}$ coeficientes de una matriz unitaria U ($UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$), se tiene entonces que los $\{b_k\}_k$ cumplen las mismas relaciones de anticonmutación que los a_l . Usando el convenio de suma de Einstein,

$$\begin{aligned} \{b_k^\dagger, b_p\} &= (u_{kl}^* a_l^\dagger) (u_{pm} a_m) + (u_{pm} a_m) (u_{kl}^* a_l^\dagger) = \\ &= u_{kl}^* u_{pm} a_l^\dagger a_m + u_{kl}^* u_{pm} a_m a_l^\dagger = u_{kl}^* u_{pm} \{a_l^\dagger, a_m\} = \\ &= u_{kl}^* u_{pm} \delta_{lm} = u_{kl}^* u_{pl} = (U)_{pl} (U^\dagger)_{lk} = (UU^\dagger)_{pk} = \delta_{kp}. \end{aligned}$$

La otra relación se deduce análogamente como

$$\begin{aligned} \{b_k, b_p\} &= (u_{kl} a_l) (u_{pm} a_m) + (u_{pm} a_m) (u_{kl} a_l) = \\ &= u_{kl} u_{pm} \{a_l, a_m\} = u_{kl} u_{pm} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Este modelo se puede interpretar en términos físicos como el de N fermiones de espín 1/2 con amplitudes de salto J_n y potenciales químicos “on-site” B_n . Sin dificultad, uno puede comprobar que el anterior hamiltoniano conmuta con el operador número fermiónico

$$\mathcal{N} := \sum_{n=0}^{N-1} c_n^\dagger c_n, \quad (15)$$

de manera que este número cuántico se conserva para cualquier estado dado. De ahora en adelante asumiremos también que las amplitudes de salto no se anulan, es decir, $J_n > 0$ para $0 \leq n \leq N-2$. Posteriormente en el trabajo explicaremos la conveniente elección de esta condición restrictiva.

A priori, el anterior hamiltoniano parece no tener relación alguna con los modelos de espines de los que

hablamos en la introducción. Sin embargo, bajo la denominada transformación de Jordan-Wigner

$$c_n := \prod_{k=0}^{n-1} \sigma_k^z \cdot \sigma_n^+, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (16)$$

donde σ_n^α (con $\alpha = x, y, z$) denota como acostumbra la matriz de Pauli σ^α actuando sobre el sitio n -ésimo de la cadena y $\sigma_n^\pm = (\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)/2$. Se puede comprobar que la expresión (14) se transforma en el hamiltoniano de una cadena abierta XX de espín 1/2

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-2} J_n (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} B_n (\mathbb{1} - \sigma_n^z). \quad (17)$$

En efecto, para $0 \leq n \leq N-2$, ocurre que

$$\begin{aligned} c_n^\dagger c_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n-1} \sigma_k^z \frac{\sigma_n^x - i\sigma_n^y}{2} \prod_{j=0}^n \sigma_j^z \frac{\sigma_{n+1}^x + i\sigma_{n+1}^y}{2} = \\ &= \frac{\sigma_n^x - i\sigma_n^y}{2} \sigma_n^z \frac{\sigma_{n+1}^x + i\sigma_{n+1}^y}{2} = \\ &= \frac{-i\sigma_n^y \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + i\sigma_n^x \sigma_{n+1}^y}{4}. \end{aligned}$$

De lo anterior, y del hecho que $(c_n^\dagger c_{n+1})^\dagger = (c_{n+1}^\dagger c_n)$, se deduce

$$c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n = \frac{1}{2} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y). \quad (18)$$

Asimismo, para $0 \leq n \leq N-1$ obtenemos

$$\begin{aligned} c_n^\dagger c_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \sigma_k^z \frac{\sigma_n^x - i\sigma_n^y}{2} \prod_{j=0}^{n-1} \sigma_j^z \frac{\sigma_n^x + i\sigma_n^y}{2} = \\ &= \frac{\sigma_n^x - i\sigma_n^y}{2} \sigma_n^z \frac{\sigma_n^x + i\sigma_n^y}{2} = \frac{(\mathbb{1} - \sigma_n^z - \sigma_n^z + \mathbb{1})}{4} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \sigma_n^z). \end{aligned} \quad (19)$$

A efectos físicos, tanto el modelo fermiónico como el de espines son equivalentes por existir una mapeado biunívoco entre sus respectivos autoestados y autoenergías. En particular, el vacío fermiónico $|0\rangle$ se corresponde con el estado $|\uparrow \dots \uparrow\rangle$, con todos los espines apuntando hacia arriba. De forma general, el estado fermiónico

$$c_{n_0}^\dagger \dots c_{n_k}^\dagger |0\rangle, \quad 0 \leq n_0 < \dots < n_k \leq N-1, \quad (20)$$

se corresponderá con el estado

$$\sigma_{n_0}^- \dots \sigma_{n_k}^- |\uparrow \dots \uparrow\rangle \quad (21)$$

con todos los espines invertidos en las posiciones $n_0 < \dots < n_k$ de la cadena. Es por esta razón, que podemos permitirnos estudiar los modelos fermiónicos (14), ya que las conclusiones son inmediatamente trasladables al caso de cadenas de espines.

III. SUBESPACIO DE UNA PARTÍCULA

Comenzaremos trabajando con el *subespacio de Fock* asociado a los estados de excitación de una sola partícula, es decir, aquellos cuya forma sea

$$|n\rangle := c_n^\dagger |0\rangle, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (22)$$

representando un solo fermión en la posición n de la cadena. Si denotamos como H_1 a la restricción del hamiltoniano H de (14) a dicho subespacio, su matriz asociada $\mathbf{H} = (H_{nm})_{n,m=0}^{N-1}$ tiene elementos de la forma

$$H_{nm} = \langle n | H | m \rangle = J_n \delta_{m,n+1} + J_{n-1} \delta_{m,n-1} + B_n \delta_{nm}. \quad (23)$$

De manera más ilustrativa, \mathbf{H} será la matriz $N \times N$ tridiagonal

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} B_0 & J_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ J_0 & B_1 & J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & B_2 & J_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & J_{N-3} & B_{N-2} & J_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{N-2} & B_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Si además definimos las matrices $\mathbf{C} = (c_0 \dots c_{N-1})^T$ y $\mathbf{C}^\dagger = (c_0^\dagger \dots c_{N-1}^\dagger)$, tiene sentido escribir el hamiltoniano H como

$$H = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{H} \mathbf{C}. \quad (25)$$

El *teorema espectral para matrices reales simétricas* nos asegura que \mathbf{H} puede ser diagonalizada por medio de una transformación ortogonal Φ , lo que matemáticamente se expresa como

$$\Phi^T \mathbf{H} \Phi = \text{diag}(E_0, \dots, E_{N-1}), \quad (26)$$

con $E_0 \leq \dots \leq E_{N-1} \in \mathbb{R}$ los autovalores de \mathbf{H} ordenados de forma creciente. Si denotamos por

$$\phi_n(E_k) := \Phi_{nk}, \quad (27)$$

podemos definir un nuevo conjunto de operadores fermiónicos \tilde{c}_n mediante

$$\tilde{c}_k := \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n(E_k) c_n, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (28)$$

que cumplen las relaciones canónicas de anticonmutación, como ya vimos, debido a la ortogonalidad de Φ , que es una transformación unitaria. Ya que $\tilde{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \iff \mathbf{C} = \Phi \tilde{\mathbf{C}}$, de las ecuaciones (25) y (26) se sigue que

$$H = \tilde{\mathbf{C}}^\dagger (\Phi^T \mathbf{H} \Phi) \tilde{\mathbf{C}} = \sum_{n=0}^{N-1} E_n \tilde{c}_n^\dagger \tilde{c}_n. \quad (29)$$

Realmente, en virtud de la expresión anterior, hemos resuelto de forma completa el problema de caracterizar las energías del hamiltoniano original H . Ello se debe a que H es ahora diagonal en la base constituida por el conjunto de estados

$$\tilde{c}_{n_0}^\dagger \dots \tilde{c}_{n_k}^\dagger |0\rangle, \quad 0 \leq n_0 < \dots < n_k \leq N-1, \quad (30)$$

cuyas correspondientes autoenergías vendrán dadas por

$$E(n_0, \dots, n_k) = \sum_{j=0}^k E_{n_j}. \quad (31)$$

Si inspeccionamos el procedimiento expuesto, uno se da cuenta de que el paso realmente crucial es la aparentemente inocente ecuación (26), la cual escrita de forma explícita consta del sistema de N ecuaciones vectoriales

$$\sum_{m=0}^{N-1} H_{nm} \phi_m(E_k) = E_k \phi_n(E_k), \quad (32)$$

que, sustituyendo los valores de (23), se reduce a

$$E_k \phi_n(E_k) = J_n \phi_{n+1}(E_k) + B_n \phi_n(E_k) + J_{n-1} \phi_{n-1}(E_k), \quad (33)$$

donde $0 \leq n \leq N-1$ y por compacidad notacional $J_{-1} = J_{N-1} = 0$. En particular, las primeras $N-1$ ecuaciones de (33) determinan $\phi_n(E_k)$ para $n = 1, \dots, N-2$ salvo por un factor de proporcionalidad $\phi_0(E_k) \neq 0$ (intrínseco a la naturaleza de espacio vectorial del conjunto de autovectores de un autovalor dado). La última ecuación, considerando $J_{N-1} = 0$, impone

$$(E_k - B_{N-1}) \phi_{N-1}(E_k) - J_{N-2} \phi_{N-2}(E_k) = 0, \quad (34)$$

siendo éste un polinomio de grado N en la variable E_k , que determina las N energías de excitación del hamiltoniano restringido a estados de una sola partícula. Es muy conveniente seleccionar el factor $\phi_0(E_k)$ de manera que se satisfaga la condición de ortonormalidad

$$\sum_{n=0}^{N-1} \phi_n^2(E_k) = 1. \quad (35)$$

Si los autovalores E_k de \mathbf{H} son simples, la selección anterior automáticamente implica que la condición de ortonormalidad es heredada a toda la base de autovectores hallados. Ésta viene expresada por

$$\sum_{n=0}^{N-1} \phi_n(E_k) \phi_n(E_j) = \delta_{kj}, \quad 0 \leq j, k \leq N-1, \quad (36)$$

o equivalentemente como

$$\sum_{k=0}^{N-1} \phi_n(E_k) \phi_m(E_k) = \delta_{nm}, \quad 0 \leq n, m \leq N-1. \quad (37)$$

Este comportamiento “bueno” de los autovalores de \mathbf{H} se puede asegurar si pedimos $J_n > 0$, siendo esta una condición suficiente que ya anunciamos sin aparente justificación al presentar el modelo (14).

IV. FAMILIAS DE POLINOMIOS ORTOGONALES (FPO)

La expresión de recurrencia (33) de los elementos $\phi_n(E_k)$ se asemeja a las relaciones de tres términos que satisfacen un sistema finito de polinomios ortogonales $\{P_n(E) : n = 0, \dots, N\}$. De forma más precisa,

dichos polinomios P_n se pueden tomar mónicos para todo n y satisfacen la relación de recurrencia

$$P_{n+1}(E) = (E - b_n)P_n(E) - a_n P_{n-1}(E), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (38)$$

donde $a_0 := 0$ y $P_0(E) := 1$. Como única condición a los coeficientes de la relación, pedimos

$$a_n > 0, \quad 1, \dots, N-1, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (39)$$

Si bien no existe ninguna razón por la cual N debiera ser un número finito, puede suceder que la familia ortogonal finita se obtenga truncando una familia infinita de polinomios ortogonales $\{P_n : n = 0, 1, \dots\}$, aunque no es una condición necesaria.

Teorema 1 *Si los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos (38) verifican que $a_n > 0$ si $n \geq 1$, entonces se tiene que los ceros de cada polinomio P_n con $1 \leq n \leq N$ son reales y simples.*

Necesitamos además un par de definiciones para trabajar con estas familias de polinomios:

Definición 1 *Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números complejos y sea \mathcal{L} una función compleja definida en el espacio vectorial de los polinomios que verifica:*

- $\mathcal{L}(x^n) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- $\mathcal{L}(\alpha_1 \pi_1(x) + \alpha_2 \pi_2(x)) = \alpha_1 \mathcal{L}(\pi_1(x)) + \alpha_2 \mathcal{L}(\pi_2(x)),$

para todo $\alpha_i \in \mathbb{C}$ y todo polinomio $\pi_i(x)$ ($i = 1, 2$). Diremos entonces que \mathcal{L} es un funcional determinado por la sucesión de momentos $\{\mu_n\}$, siendo μ_n el momento de orden n .

Definición 2 *Una sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ se dice una sucesión de polinomios (débilmente) ortogonales respecto al funcional \mathcal{L} siempre y cuando para $m, n \in \mathbb{N}$ se tenga:*

1. $P_n(x)$ es un polinomio de grado n ,
2. $\mathcal{L}(P_m(x)P_n(x)) = 0$ si $m \neq n$,
3. $\mathcal{L}(P_n^2(x)) \neq (\geq) 0$.

Teorema 2 *En las mismas condiciones del teorema anterior, si denotamos como $E_0 < \dots < E_{N-1}$ las N raíces reales del último polinomio P_N de la familia, existen $w_k > 0$ ($0 \leq k \leq N-1$) momentos de orden k tales que la familia de polinomios P_n con $0 \leq n \leq N-1$ es ortogonal respecto del funcional positivo*

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k p(E_k). \quad (40)$$

En particular lo anterior implica que

$$\langle P_n, P_m \rangle := \mathcal{L}(P_n P_m) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k P_n(E_k) P_m(E_k) = 0, \quad (41)$$

si $0 \leq n \neq m \leq N-1$. Querriamos ahora obtener expresiones explícitas para el cuadrado de la norma $\gamma_n := \langle P_n, P_n \rangle$ de cada polinomio P_n y los momentos w_k . Para ello, tomamos el producto escalar de la expresión (38) con el polinomio P_{n-1} ($1 \leq n \leq N-1$), obteniéndose así

$$0 = \langle EP_{n-1}, P_n \rangle - a_n \gamma_{n-1} = \gamma_n - a_n \gamma_{n-1}. \quad (42)$$

Asumiendo que $\gamma_0 = \mathcal{L}(1) = 1$ (pues siempre podremos usar $\tilde{\mathcal{L}} := r\mathcal{L}$ con $r > 0$ debidamente escogido) se deduce que

$$\gamma_n = \prod_{k=1}^n a_k, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (43)$$

y tendrá sentido pues escribir

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k P_n(E_k) P_m(E_k) = \gamma_n \delta_{nm}, \quad 0 \leq n, m \leq N-1. \quad (44)$$

Ahora bien, haciendo uso del hecho de que las raíces de P_{N-1} son simples, se tendrá

$$\pi_k(E) := \frac{P_{N-1}(E)}{E - E_k} = \prod_{n=0, n \neq k}^{N-1} (E - E_n), \quad (45)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \pi_k, P_{N-1} \rangle &= \gamma_{N-1} = w_k P_{N-1}(E_k) \prod_{n=0, n \neq k}^{N-1} (E_k - E_n) = \\ &= w_k P_{N-1}(E_k) P'_N(E_k). \end{aligned} \quad (46)$$

Juntando las ecuaciones (43) y (46), obtenemos la forma explícita de los w_k

$$w_k = \frac{\prod_{n=1}^{N-1} a_n}{P_{N-1}(E_k)P'_N(E_k)}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (47)$$

Establecido todo lo expuesto, los resultados de esta sección se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 3 *Sea $\{P_n : n = 0, \dots, N\}$ una familia finita de polinomios débilmente ortogonales definida mediante la relación de recurrencia (38), con coeficientes a_n, b_n satisfaciendo la condición (39). Entonces se tendrá la condición de ortogonalidad (44), donde los coeficientes w_k ($k = 0, \dots, N-1$) están dados por (47) y $\gamma_n > 0$ por la ecuación (43).*

V. CONEXIÓN DE LAS FPOS FINITAS Y LA CADENA INHOMOGÉNEA XX

Comparando las relaciones de ortogonalidad del modelo de fermiones (37) con la de las FPOs (44), tenemos que los coeficientes de matriz $\phi_n(E_k)$ la verificarán si definimos

$$\phi_n(E_k) = \sqrt{\frac{w_k}{\gamma_n}} P_n(E_k), \quad 0 \leq k, n \leq N-1, \quad (48)$$

donde el lado derecho de la expresión es un número real por las consideraciones de la sección anterior. Ahora querríamos saber la relación entre las constantes del modelo fermiónico J_n, B_n y aquellas de la relación de recurrencia polinomial a_n, b_n . Para ello, comenzamos sustituyendo la ecuación (48) en (38), llegando a

$$\sqrt{\gamma_{n+1}}\phi_{n+1}(E_k) = (E_k - b_n)\sqrt{\gamma_n}\phi_n(E_k) - \sqrt{\gamma_{n-1}}a_n\phi_{n-1}(E_k) = 0, \quad 0 \leq n \leq N-2 \quad (49)$$

$$\iff \sqrt{a_{n+1}}\phi_{n+1}(E_k) = (E_k - b_n)\sqrt{\gamma_n}\phi_n(E_k) - \sqrt{a_n}\phi_{n-1}(E_k) = 0, \quad 0 \leq n \leq N-2 \quad (50)$$

$$P_N(E_k) = 0 = (E_k - b_{N-1})\phi_{N-1}(E_k) - \sqrt{a_{N-1}}\phi_{N-2}(E_k), \quad (n = N-1), \quad (51)$$

donde hemos hecho uso de la definición de $\gamma_n = a_n\gamma_{n-1}$ de la expresión (43). Comparando el sistema de ecuaciones anterior con el que se obtuvo para los elementos de la matriz del hamiltoniano fermiónico (33) y (34), se concluyen inmediatamente las relaciones

$$J_n = \sqrt{a_{n+1}}, \quad B_n = b_n, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (52)$$

Resumimos esta sección en el siguiente teorema

Teorema 4 *Sea $\{P_n : n = 0, \dots, N\}$ una familia finita de polinomios ortogonales definida mediante la relación de recursión (38), con $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$. Entonces la cadena abierta inhomogénea XX con hamiltoniano asociado (17) - o equivalentemente el sistema de fermiones libres con hamiltoniano (14) - y de coeficientes*

$$J_n = \sqrt{a_{n+1}}, \quad B_n = b_n \quad (53)$$

es diagonal en la base (28)-(30), donde las energías de excitación de los estados de una sola partícula

$E_0 < \dots < E_{N-1}$ son los ceros del polinomio P_N y los coeficientes de matriz $\phi_n(E_k)$ de la ecuación (28) vienen dados por la expresión (48).

Observación 1 *Si quisiéramos partir del modelo general de fermiones libres, basta con modificar la expresión (48) por*

$$\phi_n(E_k) = e^{-i\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i} \sqrt{\frac{w_k}{\gamma_n}} P_n(E_k), \quad 0 \leq k, n \leq N-1. \quad (54)$$

Nótese que la matriz Φ definida con los elementos de matriz $\phi_n(E_k)$ seguirá siendo unitaria por la condición de ortogonalidad de los propios polinomios P_n . De esta forma, el espectro del modelo solo dependerá de $|J_n| > 0, B_n \in \mathbb{R}$ por lo que el espectro de la cadena XX con $B_n = 0$ ($n = 0, \dots, N-1$) será simétrico respecto del 0.

VI. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO DE UNA CADENA

La entropía de entrelazamiento bipartita de un sistema cuántico compuesto por dos subsistemas A, B en un estado con matriz de densidad ρ vimos se definía como

$$S_A := s(\rho_A), \quad (55)$$

donde $\rho_A := \text{tr}_B \rho$ es la matriz de densidad reducida del subsistema A y s es un funcional de entropía. Cuando ρ representa un estado puro, se vio que el teorema de descomposición de Schmidt asegura que $S_A = s(\rho_A) = s(\rho_B) = S_B$.

A efectos prácticos, calcular S_A se vuelve una tarea imposible incluso de forma numérica para sistemas relativamente pequeños debido a que conlleva encontrar los autovalores de la matriz ρ_A . Para la cadena de espines $1/2$, si tomamos A como un conjunto de L sitios consecutivos, el tamaño de ρ_A es de 2^L , de crecimiento exponencial en L . Sin embargo, podemos explotar el hecho de que, para sistemas fermiónicos equivalentes, basta con diagonalizar una matriz $L \times L$. En efecto, consideremos que el sistema de fermiones libres se encuentra en el autoestado de energía

$$|M\rangle := \tilde{c}_0^\dagger \tilde{c}_1^\dagger \dots \tilde{c}_{M-1}^\dagger |0\rangle, \quad (56)$$

donde las M energías más bajas E_k de autoestados de una sola partícula han sido excitadas. Consideremos A el subsistema conformado por los L primeros fermiones $0, \dots, L-1$, y suponemos que ya hemos ordenado los operadores fermiónicos de manera que $E_0 < \dots < E_{L-1}$. Definimos la matriz de correlación $C_A := (C_{ij})_{0 \leq i, j \leq L-1}$ mediante la expresión

$$C_{ij} := \langle M | c_i^\dagger c_j | M \rangle = \langle c_i^\dagger c_j \rangle, \quad (57)$$

o, equivalentemente, podemos emplear la matriz de densidad del subsistema ρ_A

$$C_{ij} = \text{tr}(c_i^\dagger c_j \rho_A). \quad (58)$$

Por lo tanto, necesitaríamos invertir la ecuación anterior para así computar la matriz de densidad ρ_A a partir de la matriz de correlación C_A . Dado que la matriz C_A es hermítica, puede ser diagonalizada por

medio de una transformación unitaria U en una matriz diagonal G

$$G_{mn} = \sum_{i, j=0}^{N-1} u_{im}^* C_{ij} u_{jn} = \langle g_m^\dagger g_n \rangle \delta_{mn}, \quad (59)$$

donde $g_m = \sum_j u_{jm} c_j$. Asimismo, la matriz de densidad del subsistema A debe verificar

$$G_{mn} = \text{tr}(g_m^\dagger g_n \rho_A) = \nu_m \delta_{mn}, \quad (60)$$

de lo cual se deduce que la matriz ρ_A no está correlacionada en esta base y se puede escribir como

$$\rho_A = \rho_0 \otimes \dots \otimes \rho_{L-1}, \quad (61)$$

donde ρ_m es la matriz de densidad correspondiente al m -ésimo modo fermiónico excitado por g_m^\dagger .

En representación matricial, los operadores g_m, g_m^\dagger y ρ_m tienen la forma

$$g_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_m^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_m = \begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \beta_m^* & 1 - \alpha_m \end{pmatrix} \quad (62)$$

donde α_m y β_m son los elementos de matriz de ρ_m que deseamos determinar. Dado que

$$\langle g_m \rangle = \text{tr}(g_m \rho_A) = \beta_m = 0, \quad (63)$$

tendremos entonces que

$$\text{tr}(g_m^\dagger g_m \rho_A) = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_m \end{pmatrix} \right] = \nu_m, \quad (64)$$

de lo que concluimos que $\alpha_m = \nu_m$. Por lo tanto, de esta discusión se deduce que la entropía de entrelazamiento bipartita S_A se puede calcular mediante la fórmula

$$S_A = \sum_{i=0}^{L-1} s^{(2)}(\nu_i), \quad (65)$$

donde ν_0, \dots, ν_{L-1} son los autovalores de C_A y $s^{(2)}(x) = s[\text{diag}(x, 1-x)]$ es la entropía binaria asociada con el funcional s . Se puede demostrar que tanto C_A como $1 - C_A$ son positivas semi-definidas por lo que $0 \leq \nu_i \leq 1$. Por ejemplo, tenemos la entropía de Rényi s_α

$$s_\alpha^{(2)}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \log(x^\alpha + (1-x)^\alpha), \quad (66)$$

o la de von Neumann

$$s^{(2)}(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x), \quad (67)$$

donde tomamos como convenio que $0 \log 0 := 0$.

Retornando a la teoría desarrollada sobre las familias finitas de polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n=0}^N$ asociadas al modelo fermiónico, se puede escribir de manera inmediata la matriz de correlación C_A mediante

$$\langle M | \tilde{c}_n^\dagger \tilde{c}_m | M \rangle = \langle M | \tilde{c}_n^\dagger \tilde{c}_m | M \rangle \delta_{mn} = \delta_{nm} \chi_{\mathcal{M}}(n), \quad (68)$$

donde $\chi_{\mathcal{M}}$ es la función característica del conjunto $\mathcal{M} = \{0, \dots, M-1\}$. Podemos invertir fácilmente la relación (28) de manera que

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_k(E_n) \tilde{c}_n, \quad (69)$$

y operamos para obtener la fórmula

$$C_{ij} = \sum_{n=0}^{M-1} \phi_i(E_n) \phi_j(E_n), \quad (70)$$

o, equivalentemente, sustituyendo (48)

$$C_{ij} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{w_n}{\sqrt{\gamma_i \gamma_j}} P_i(E_n) P_j(E_n). \quad (71)$$

VII. LA CADENA DE LAMÉ

Ahora calcularemos la entropía de entrelazamiento de una de las posibles cadenas de tipo Lamé, en el caso en el que las constantes del modelo vendrán dadas por

$$J_n = \sqrt{(n+1)(N-n-1)\left(N-n-\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \quad (72)$$

y $B_n = 0$ para todo n . Esta elección de los B_n no ha sido elegida arbitrariamente, sino que nos permitirá obtener una fórmula asintótica para la entropía de entrelazamiento de Rényi en el régimen de “half-filling” $M = \lfloor N/2 \rfloor$ empleando una teoría de campos conformes.

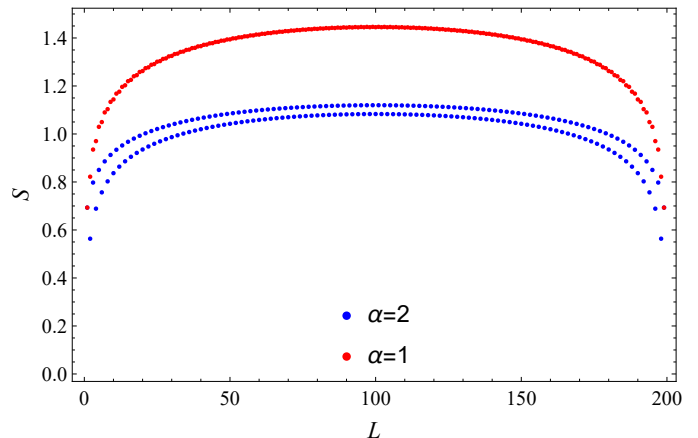


Figura 1. Entropía de entrelazamiento del estado fundamental de la cadena de Lamé para $N = 200$ para dos valores distintos de α en función del tamaño del bloque L . Para $\alpha = 2$ se obtienen aparentemente dos curvas debido a las oscilaciones de paridad que se dan para $\alpha > 1$ en la entropía de Rényi. La entropía es simétrica respecto del centro de la cadena por serlo los acoples J_n .

Podemos particularizar la expresión del hamiltoniano fermiónico libre (14) para $B_n = 0$, reescribiéndolo de una forma más simétrica como

$$H(\mathbf{J})_N = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2-1} J_{m+N/2-1} (d_m^\dagger d_{m+1} + d_{m+1}^\dagger d_m), \quad (73)$$

donde $\mathbf{J} = \{J_m\}_{m=0}^{N-2}$, $d_m := c_{m+N/2-1}$, y $m = -N/2+1, -N/2, \dots, N/2-1$ enteros o semi-enteros dependiendo de si N es par o impar.

Para derivar el límite en el continuo de este modelo, introduciremos un parámetro de separación de sitios a , imponiendo a su vez que $x = ma$, y haciendo $a \rightarrow 0$ a la vez que $N \rightarrow \infty$ de manera que $a(N-1)/2$ tienda a un límite finito l (igual a la mitad de la longitud de la cadena). Puesto que estamos en el régimen de half-filling, podemos expandir los operadores fermiónicos d_m en modos “lentos” $\psi_{L,R}(x)$ en torno a los puntos de Fermi $\pm k_F$, siendo $k_F = \pi/(2a)$ el momento de Fermi en half-filling, como

$$d_m \simeq \sqrt{a} (e^{ik_F x} \psi_L(x) + e^{-ik_F x} \psi_R(x)). \quad (74)$$

De esta forma, haciendo una expansión de Taylor a

primer orden

$$\psi(x+a) \simeq \psi(x) + a\partial_x\psi(x), \quad (75)$$

y usando que $k_F a = \pi/2$, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{d_{m+1}}{\sqrt{a}} &\simeq (e^{ik_F(x+a)}\psi_L(x+a) + e^{-ik_F(x+a)}\psi_R(x+a)) = \\ &= i(e^{ik_Fx}\psi_L(x+a) - e^{-ik_Fx}\psi_R(x+a)) = \\ &= i(e^{ik_Fx}\psi_L(x) - e^{-ik_Fx}\psi_R(x)) + \\ &+ ia(e^{ik_Fx}\partial_x\psi_L(x) - e^{-ik_Fx}\partial_x\psi_R(x)). \end{aligned} \quad (76)$$

Ahora bien, como los campos $\psi_{L,R}(x)$ varían despacio, los términos cruzados del producto $d_m^\dagger d_{m+1} + d_{m+1}^\dagger d_m$ (como por ejemplo $iae^{2ik_Fx}\psi_R^\dagger(x)\psi_L(x)$) desaparecen al sumar sobre el índice m . Teniendo esto en consideración, se tiene

$$\begin{aligned} d_m^\dagger d_{m+1} &= ia(e^{-ik_Fx}\psi_L^\dagger(x) + e^{ik_Fx}\psi_R^\dagger(x))(e^{ik_Fx}\psi_L(x) - e^{-ik_Fx}\psi_R(x)) + \\ &+ ia^2(e^{-ik_Fx}\psi_L^\dagger(x) + e^{ik_Fx}\psi_R^\dagger(x))(e^{ik_Fx}\partial_x\psi_L(x) - e^{-ik_Fx}\partial_x\psi_R(x)) = \\ &= ia^2(\psi_L^\dagger(x)\partial_x\psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x)\partial_x\psi_R(x) - e^{2ik_Fx}\psi_L^\dagger(x)\partial_x\psi_R(x) + e^{2ik_Fx}\psi_R^\dagger(x)\partial_x\psi_L(x)), \end{aligned}$$

donde $\simeq 0$ indica términos que desaparecerán del hamiltoniano una vez hayamos sumado en m . Considerando que $a = \Delta x = x_{m+1} - x_m$ entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-N/2+1}^{N/2-1} J_{m+\frac{N}{2}-1} d_m^\dagger d_{m+1} + h.c. \simeq \\ &\simeq ia \sum_m J_{m+\frac{N}{2}-1} (\psi_L^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_R(x)) \Delta x. \end{aligned}$$

Definiendo

$$J_{m+N/2-1} = J_{(x+l)/a-\frac{1}{2}} := J(x; a), \quad (77)$$

como $ma \in [-l + a/2, l - a/2]$ (los límites de integración), y $m + N/2 - 1 = (x+l)/a - 1/2$, entonces podemos cambiar $\sum_m \Delta x \mapsto \int dx$ y así llegamos a

$$H \simeq ia \int_{-l}^l J(x; a) [\psi_L^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_R(x)] dx. \quad (78)$$

Para la cadena de Lamé (72) presentada al comienzo,

tenemos

$$\begin{aligned} J(x; a) &= \frac{l^2}{a^2} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(\left(1 + \frac{a}{2l}\right)^2 - \frac{x^2}{l^2}\right)} \simeq \\ &\simeq \frac{l^2}{a^2} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{\kappa^2 x^2}{l^2}\right)} =: \frac{l^2}{a^2} J(x), \end{aligned} \quad (79)$$

donde

$$\kappa := \left(1 + \frac{a}{2l}\right)^{-1} = \frac{2l}{2l+a} = 1 - \frac{1}{N}. \quad (80)$$

Aunque $\kappa \rightarrow 1$ a medida que $N \rightarrow \infty$ y por lo tanto $J(x) \simeq 1 - x^2/l^2$, se mantiene κ en lugar de escribir un 1 en $J(x)$ ya que más adelante necesitaremos que la integral $\int_0^l J(x)^{-1} dx$ sea convergente. Sustituyendo en (78) la expresión (79), se tiene

$$H \simeq \frac{il^2}{a} \int_{-l}^l J(x) [\psi_L^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_R(x)] dx. \quad (81)$$

Imponemos las condiciones de contorno [1]

$$\psi_L(\pm l) = \pm i \psi_R(\pm l), \quad (82)$$

y integramos por partes para obtener la expresión

equivalente

$$H \simeq \frac{2il^2}{a} \int_{-l}^l \left[J(x) \left(\psi_L^\dagger(x) \partial_x \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \partial_x \psi_R(x) \right) + \frac{J'(x)}{2} \left(\psi_L^\dagger(x) \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x) \right) \right] dx, \quad (83)$$

con $J' := \partial_x J$. La densidad lagrangiana asociada al hamiltoniano (81), ignorando constantes multiplicativas sin implicaciones a la física del sistema, es

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger \partial_t \psi_L + \psi_R^\dagger \partial_t \psi_R - J(\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R) - \frac{J'}{2} (\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R). \quad (84)$$

En efecto, deberemos de comprobar que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mu \in \{L,R\}} \pi_\mu(x) \partial_t \psi_\mu(x) - \mathcal{L} = \\ &= iaJ(x) \left[\psi_L^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_R(x) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\pi_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi_\mu(x))} = i\psi_\mu^\dagger(x).$$

Sustituyendo lo anterior en la transformada de Legendre se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \cancel{i\psi_L^\dagger \partial_t \psi_L} + \cancel{i\psi_R^\dagger \partial_t \psi_R} - \cancel{i\psi_L^\dagger \partial_t \psi_L} - \cancel{i\psi_R^\dagger \partial_t \psi_R} + \\ &+ iJ(\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R) + i\frac{J'}{2} (\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R). \end{aligned}$$

Su hamiltoniano asociado es

$$H = \int_{-l}^l \mathcal{H} dx = i \int_{-l}^l J(\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R) + \frac{J'}{2} (\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R) dx,$$

y haciendo uso de que el último término se puede integrar por partes podemos reescribirlo como

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{J'}{2} (\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R) dx &= \frac{J}{2} \underbrace{(\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R)}_{=0} \Big|_{-l}^l - \\ &- \int_{-l}^l \frac{J}{2} (\partial_x (\psi_L^\dagger \psi_L) - \partial_x (\psi_R^\dagger \psi_R)) dx. \end{aligned}$$

El término primero es nulo recordado las condiciones de contorno $\psi_L(\pm l) = \pm i\psi_R(\pm l)$ y que $J(l) = J(-l)$, ya que

$$\begin{aligned} &(\psi_L^\dagger(\pm l)\psi_L(\pm l) - \psi_R^\dagger(\pm l)\psi_R(\pm l)) = \\ &= (\psi_L^\dagger(\pm l)\psi_L(\pm l) - (\pm i)\psi_L^\dagger(\pm l)(\mp i)\psi_L(\pm l)) = 0. \end{aligned}$$

En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} H &= \frac{i}{2} \int_{-l}^l J [2\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - 2\psi_R^\dagger \partial_x \psi_R - \partial_x (\psi_L^\dagger \psi_L) + \partial_x (\psi_R^\dagger \psi_R)] dx = \\ &= \frac{i}{2} \int_{-l}^l J [\psi_L^\dagger \partial_x \psi_L - (\partial_x \psi_L^\dagger) \psi_L - \psi_R^\dagger \partial_x \psi_R + (\partial_x \psi_R^\dagger) \psi_R] dx = \frac{i}{2} \int_{-l}^l J(x) [\psi_L^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_x \psi_R(x)] dx. \end{aligned}$$

Como este hamiltoniano difiere del de (81) en un factor constante multiplicativo, ambos son físicamente equivalentes.

Con esto, la densidad lagrangiana (84) coincide con la de un fermión libre sin masa de Dirac en un espacio-tiempo curvo para una métrica adecuada que

deduciremos más adelante.

Ahora procederemos a calcular la métrica de fondo mediante la expresión general de las densidades lagrangianas en este tipo de teorías (1 + 1) dimensio-

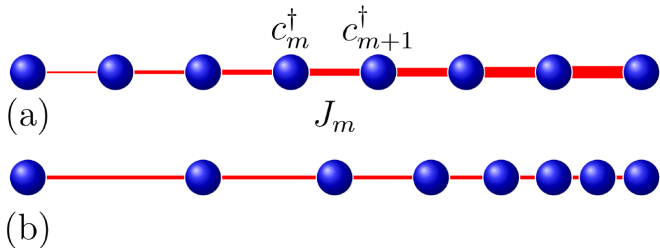


Figura 2. (a) Ilustración de una cadena inhomogénea para $N = 8$ sitios. (b) Correspondiente cadena después de deformatar la coordenada $x \mapsto \tilde{x}$ según la métrica inducida por los coeficientes de acoplo $J_m \mapsto J(x)$.

nales

$$\mathcal{L}_F = e \bar{\Psi} \not{D} \Psi, \quad \Psi := \begin{pmatrix} \psi_l \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0. \quad (85)$$

En esta expresión $e = \det(e_\mu^a)$ es el determinante de las componentes de la base dual de la base $E_a^\mu = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu^b$ (con $a, \mu \in \{0, 1\}$) y $\not{D} = E_a^\mu \gamma^a D_\mu$. Las matrices γ en este contexto vendrán dadas por $\gamma^0 = i\sigma^x$, $\gamma^1 = \sigma^y$, y

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b], \quad (86)$$

donde $\gamma_a = \eta_{ab} \gamma^b$ y $(\eta_{ab}) = \text{diag}(-1, 1)$, y ω_μ^{ab} es la conexión de espín. Con esto, la métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ está dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b, \quad (87)$$

y la conexión de espín vendrá determinada completamente por la métrica a través de las ecuaciones

$$\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a (\nabla_\mu E^b)^\nu = e_\nu^a (\partial_\mu E^{b\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu E^{b\lambda}) = -\omega_\mu^{ba}, \quad (88)$$

donde $(\Gamma_{\lambda\mu}^\nu)$ son los símbolos de Christoffel de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Podemos inicialmente suponer como ansatz que las bases duales (e_μ^a) y (E_a^μ) son diagonales. Ello implica que

$$\mathbf{g} = (\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b)_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} -(e_0^0)^2 & 0 \\ 0 & (e_1^1)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(e_0^0)^2 & 0 \\ 0 & 1/(e_1^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Para calcular las derivadas covariantes, desarrollamos primero los valores de los conmutadores $[\gamma_a, \gamma_b]$, siendo los únicos no nulos los correspondientes a $(a, b) = (0, 1), (1, 0)$,

$$[\gamma_0, \gamma_1] = \eta_{0\mu} \eta_{1\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -i[\sigma^x, \sigma^y] = 2\sigma^z = -[\gamma_1, \gamma_0]. \quad (90)$$

Sustituyendo lo anterior en la expresión de la derivada covariante D_μ se obtiene

$$D_0 = \partial_0 + \frac{1}{8} \omega_0^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] = \partial_0 + \frac{1}{8} (\omega_0^{01} - \omega_0^{10}) 2\sigma^z = \partial_0 + \frac{1}{2} \omega_0^{01} \sigma^z,$$

donde en la última cadena de igualdades hemos usad el hecho de que $\omega_\mu^{ab} = -\omega_\mu^{ba}$. De forma totalmente análoga, para $\mu = 1$ se llega a

$$D_1 = \partial_1 + \frac{1}{2} \omega_1^{01} \sigma^z. \quad (91)$$

A continuación, debemos de desarrollar la expresión $\gamma^0 \not{D} = \gamma^0 E_a^\mu \gamma^a D_\mu$ como sigue

$$\begin{aligned} \gamma^0 E_a^\mu \gamma^a D_\mu &= \gamma^0 (g^{\mu\nu} \eta_{ac} e_\nu^c) \gamma^a D_\mu = \gamma^0 g^{\mu a} \eta_{aa} e_a^\mu \gamma^a D_\mu = \\ &= \gamma^0 g^{aa} \eta_{aa} e_a^\mu \gamma^a D_a = -\frac{1}{e_0^0} D_0 + \frac{1}{e_1^1} i\sigma^x \sigma^y D_1. \end{aligned}$$

Multiplicando ahora por $e = \det(e_\mu^a) = e_0^0 e_1^1$ la expresión anterior, recordando que $\sigma^x \sigma^y = i\sigma^z$, entonces llegamos a que

$$\begin{aligned} e \gamma^0 \not{D} &= -e_1^1 D_1 + e_0^0 i(i\sigma^z) D_1 = \\ &= -[e_1^1 \partial_t + \frac{1}{2} e_1^1 \omega_0^{01} \sigma^z + e_0^0 \sigma^z \partial_x + \frac{1}{2} e_0^0 \omega_1^{01}], \end{aligned}$$

o equivalentemente que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= e \bar{\Psi} \not{D} \Psi = \Psi^\dagger e \gamma^0 \not{D} \Psi = \\ &= -\Psi^\dagger \left(e_1^1 \partial_t + e_0^0 \sigma^z \partial_x + \frac{1}{2} e_1^1 \omega_0^{01} \sigma^z + \frac{1}{2} e_0^0 \omega_1^{01} \right) \Psi. \end{aligned}$$

Dado que la densidad lagrangiana (84) se puede escribir en notación vectorial de campos como

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger \left(\partial_t - J \sigma^z \partial_x - \frac{J'}{2} \sigma^z \right) \Psi, \quad (92)$$

comparando coeficientes entre ambas densidades se deduce que

$$e_0^0 = J, \quad e_1^1 = -1, \quad \omega_0^{01} = -J', \quad \omega_1^{01} = 0. \quad (93)$$

De lo anterior y (89), se obtiene a su vez

$$ds^2 = -J^2(x)dt^2 + dx^2. \quad (94)$$

Recordamos que la expresión de los símbolos de Christoffel es

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= \frac{1}{2}g^{im}(g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}) = \\ &= \frac{1}{2}g^{ii}(g_{ki,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}), \end{aligned} \quad (95)$$

donde en el último paso hemos usado que \mathbf{g} , \mathbf{g}^{-1} son diagonales. Los símbolos que resultan son (teniendo en cuenta que $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$)

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{J'}{J} = \partial_x \log J, \quad \Gamma_{11}^0 = 0 \quad (96)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}(2JJ') = JJ' = \frac{1}{2}\partial_x J^2, \quad \Gamma_{01}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = 0. \quad (97)$$

Para finalmente calcular el tensor de Ricci, empleamos la fórmula

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma - \left(\log |g|^{1/2}\right)_{,\alpha\beta} + \\ &+ \left(\log |g|^{1/2}\right)_{,\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\delta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta, \end{aligned} \quad (98)$$

donde $(\log |g|^{1/2}) = \log J$, obteniendo así

$$R_{00} = (J'^2 + JJ'') + \left(\frac{J'}{J}JJ'\right) - \left(2\frac{J'}{J}JJ'\right) = JJ'', \quad (99)$$

$$R_{10} = R_{01} = 0, \quad (100)$$

$$R_{11} = -\left(-\frac{J'^2}{J^2} + \frac{J''}{J}\right) - \left(\frac{J'}{J}\right)^2 = -\frac{J''}{J}. \quad (101)$$

Juntando pues todo lo anterior, el escalar de curvatura será

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\mu}R_{\mu\mu} = -\frac{1}{J^2}(JJ'') - \frac{J''}{J} = -2\frac{J''}{J}. \quad (102)$$

Si se sustituye la ecuación de $J(x)$ para la cadena de Lamé, uno observa que $\mathcal{R} > 0$ en todos los puntos de la cadena y que $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \pm l$.

Para obtener la fórmula de la entropía de entrelazamiento de Rényi $S_{A,\alpha}$ de la cadena de Lamé, es necesario pasar a la forma conformemente plana de la métrica (94)

$$ds^2 = J^2(-dt^2 + d\tilde{x}^2), \quad (103)$$

a través del cambio de variable

$$\tilde{x} := \int_0^x J(y)^{-1} dy. \quad (104)$$

Si ahora volvemos a emplear la expresión (79) obtenida para $J(x)$ se obtiene

$$\tilde{x} = l \operatorname{arcsn}(x/l; \kappa) = lF(\operatorname{arcsin}(x/l); \kappa), \quad (105)$$

donde

$$F(\theta; \kappa) := \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (106)$$

es la integral elíptica incompleta de primera especie. Así $\tilde{x} \in [-\tilde{l}, \tilde{l}]$, donde la longitud conforme \tilde{l} vendrá descrita por

$$\tilde{l} = lF(\pi/2; \kappa) = K(\kappa)l = K(1 - N^{-1})l. \quad (107)$$

Obsérvese que a medida que $N \rightarrow \infty$

$$\tilde{x} \simeq l \operatorname{arctanh}(x/l), \quad (108)$$

a excepción de las proximidades de los puntos $x = \pm l$. Se puede demostrar que la longitud conforme de la cadena \tilde{l} diverge logarítmicamente cuando $N \rightarrow \infty$, es decir

$$K(1 - N^{-1}) = \frac{1}{2} \log N + \mathcal{O}(1). \quad (109)$$

Como ya auguramos, el que la densidad lagrangiana \mathcal{L} , asociada con el límite en el continuo de la cadena, coincida con la de un fermión sin masa de Dirac en un espacio-tiempo curvo con métrica de fondo $ds^2 = J^2(-dt^2 + d\tilde{x}^2)$, permite que el comportamiento de la entropía de entrelazamiento del sistema bipartito S_A cuando $N \rightarrow \infty$ pueda ser analizado estudiando

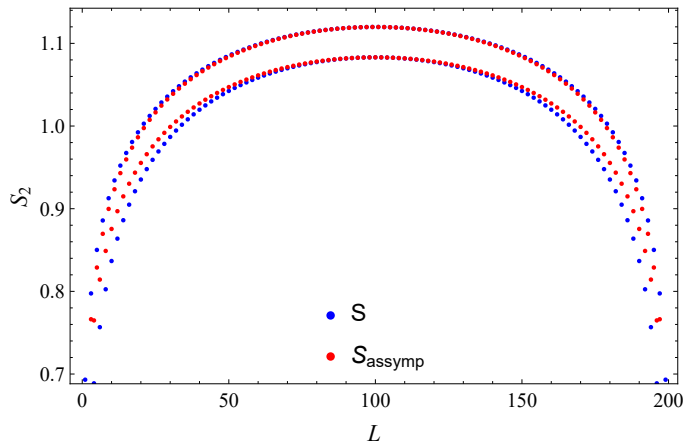


Figura 3. Comparación entre la entropía de entrelazamiento exacta para $\alpha = 2$ en función del tamaño del bloque L y la aproximación asintótica proporcionada por la correspondiente teoría conforme para la métrica asociada para una cadena con $N = 200$.

la acción euclídea correspondiente a la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_F = e^{\bar{\Psi}\not{D}\Psi}$. Ésta se escribirá, salvo por constantes multiplicativas no físicamente relevantes, en coordenadas isotermas complejas como

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{1}{12}(1 + \alpha^{-1}) \log \left\{ \frac{4}{\pi} L_{rel}(1 - L_{rel}) NK \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cos \left(\frac{\pi \operatorname{arctanh}(1 - 2L_{rel})}{2K(1 - 1/N)} \right) \right\} + \gamma_\alpha, \quad (114)$$

siendo γ_α una constante no-universal independiente de x, l y N . Es más, dado que a medida que $N \rightarrow \infty$ el comportamiento del término de cos es del orden

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{1}{12}(1 + \alpha^{-1}) \log \left[\frac{4}{\pi} L_{rel}(1 - L_{rel}) NK \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right] + \gamma_\alpha, \quad (115)$$

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{1}{12}(1 + \alpha^{-1}) \log \left[\frac{2}{\pi} L_{rel}(1 - L_{rel}) N \log N \right] + \tilde{\gamma}_a, \quad (116)$$

donde de nuevo $\tilde{\gamma}_a$ es una constante independiente

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi} \int J(x) (\psi_L^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_z \psi_L + \psi_R^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_z \psi_R) dz \wedge d\bar{z}. \quad (110)$$

En la Referencia [2], los autores concluyen que el valor de la entropía de entrelazamiento de Rényi $S_{A,\alpha}$ para este modelo bipartito en el que $A = [-l, x]$ tiene un comportamiento de la forma

$$S_{A,\alpha} = \frac{1}{12}(1 + \alpha^{-1}) \log \left(\frac{2\tilde{l}}{\eta\pi} J(x) \cos \left(\frac{\pi\tilde{x}}{2\tilde{l}} \right) \right), \quad (111)$$

donde η es un cutoff ultravioleta independiente de x y de l . Si nuestro sistema de fermiones original esta particionando como $A = \{0, \dots, L - 1\}$, definiendo $L_{rel} = L/N \in [0, 1]$ se tiene

$$\frac{l - x}{2l} = L_{rel} \iff \frac{x}{l} = 1 - 2L_{rel}, \quad (112)$$

además de que

$$J(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{l^2} = 4L_{rel}(1 - L_{rel}), \quad (113)$$

hasta términos de orden $\mathcal{O}(N^{-1})$. Sustituyendo en la ecuación (111) el valor de \tilde{x} y recordando que $l = a(N - 1)/2 \simeq aN/2$, se llega a

$(\log N)^{-2}$ (salvo para valores de L_{rel} muy cercanos a 0 o 1, podemos despreciarlo, obteniendo así fórmulas suficientemente exactas de carácter asintótico para S_A

de x, l y N . Así se concluye que en términos de N , el

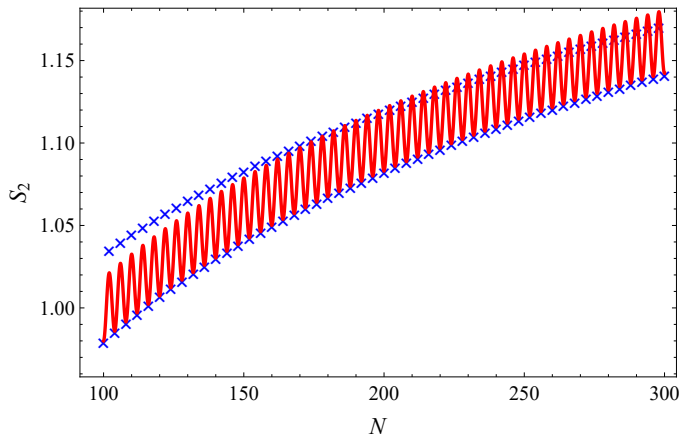


Figura 4. Comparación entre la entropía de entrelazamiento exacta para $\alpha = 2$ (curvas azules) en función del tamaño del bloque N con $L_{rel} = 1/2$, y la aproximación asintótica proporcionada por la correspondiente teoría conforme para la métrica asociada (línea roja).

comportamiento de las expresiones anteriores va como

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{1}{12}(1 + \alpha^{-1}) \log N + \mathcal{O}(\log \log N). \quad (117)$$

Finalmente, por medio de simulaciones numéricas como la que se ilustra en la Figura 5 se puede corroborar que la constante γ_α tiene una dependencia con α muy próxima a la que se obtienen analíticamente para la cadena XX homogénea

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ \frac{1}{3} \log 2 + \int_0^\infty \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha^2} (\text{acscht} - \text{csch}(t/\alpha)) \text{cscht} - \frac{e^{-2t}}{6} \right] \frac{dt}{t} \right\}. \quad (118)$$

VIII. LA CADENA DE RINDLER

Toda la discusión de las secciones anteriores se basaba en la búsqueda de un método que nos permitiera obtener fórmulas para aproximar asintóticamente la entropía de entrelazamiento de nuestra cadena fermiónica inicial. Ello nos condujo al paso al continuo de nuestro modelo discreto de N sitios, y el subsiguiente artificio de traducir el problema a una teoría de fermiones libres de Dirac en un espacio tiempo curvo. Ahora bien, es provechoso considerar la situación en reverso; esto es, si queremos estudiar fenómenos físicos (como la entropía del vacío o del estado fundamental $|GS\rangle$) en un cierto espacio tiempo curvo al cual no tenemos acceso, ¿podríamos hacer ingeniería inversa partiendo de una métrica deseada para así inferir de qué modelo de cadena de espines XX inhomogénea proviene?

Aunque las habilidades tecnológicas no nos permitan hacer medidas directas en espacio-tiempos curvos, existen propuestas de estrategias para desarrollar *simuladores cuánticos* con la tecnología actual, como

sería el caso de los átomos hiper-enfriados en entramados ópticos [3]. Se hipotetiza en la literatura actual que el vacío de Dirac de ciertos espacio-tiempos estáticos se puede caracterizar mediante los denominados *entramados ópticos curvos* [4], donde átomos fermiónicos se distribuyen a lo largo de una red óptica con amplitudes de salto inhomogéneas, simulando así un índice de refracción dependiente de la posición. Esto último recibe también el tratamiento de *métrica óptica*.

Ya comprobamos que la ecuación (73) es la versión discretizada del hamiltoniano de un fermión de Dirac en un $(1+1)$ D espacio-tiempo curvo con una métrica de la forma (94). Concretamente, si $J(x) = J_0$ es constante, recuperamos el espacio-tiempo de Minkowski en un intervalo espacial finito. La *métrica de Rindler* se corresponde a la estructura espacio-temporal que percibe un observador moviéndose con aceleración constante “ a ” en una métrica de Minkowski, y vendrá dada por

$$J(x) = J_0 + ax, \quad \iff \quad J_n = J_0 + \frac{an}{N}, \quad (119)$$

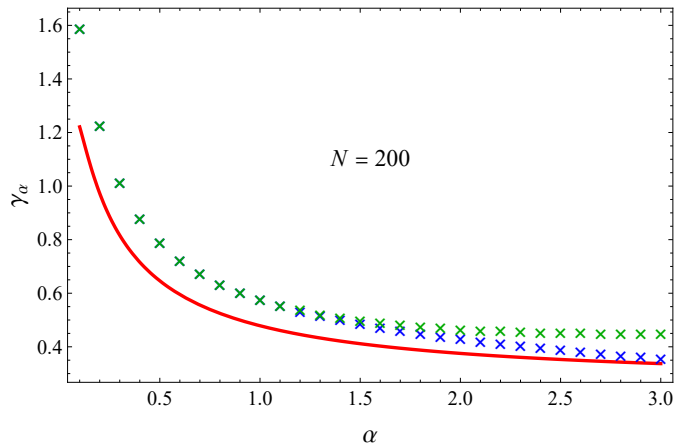


Figura 5. Parámetro γ_α para la cadena de Lamé (cruces azules y verdes para cada paridad) comparadas con la cantidad análoga de la cadena XX homogénea (línea roja).

donde J_0 y a son parámetros libres. Nótese la presencia de un *horizonte* en $x_h = -J_0/a$, punto en el cual la velocidad local de la luz se anula. Esto implica que ninguna información podrá cruzar este punto, quedando así separado el espacio-tiempo en dos *cuñas de Rindler* [5]. De acuerdo con lo presentado en las Refs. [6], [7], la entropía de entrelazamiento de un subsistema constituido por un bloque de tamaño $A = \{1, \dots, L\}$ del estado fundamental de un sistema conforme con carga central c en una cadena de N sitios se escribirá en el límite termodinámico como

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{c}{12}(1+\alpha^{-1}) \log \left[\frac{N}{\pi \Delta x} \sin \left(\frac{\pi L}{N} \right) \right] + S_{nonuniv.,\alpha}, \quad (120)$$

donde $c = 1$ para fermiones libres, $\Delta x = l/N$ es el cut-off ultravioleta, y $S_{nonuniv.}$ (anteriormente definido como γ_α) es una constante no universal dependientes de α , que se pueden calcular explícitamente para el caso de fermiones libres [8], [9].

Al igual que sucedía con el caso de la cadena de Lamé, la expresión (120) se corresponde a la entropía de entrelazamiento del GS de un hamiltoniano homogéneo, correspondiente a una métrica de Minkowski. Cuando los fermiones de Dirac se introducen en una métrica óptica suave como en (94), la conformi-

dad de la teoría implica que debemos de sustituir las magnitudes de (120) por sus deformadas según la nueva métrica. Esto es, la longitud del bloque L se debe transformar según

$$L \mapsto \tilde{L} = \int_{x_0}^{L\Delta x} \frac{dx}{J(x)}, \quad N \mapsto \tilde{N} = \int_{x_0}^{N\Delta x} \frac{dx}{J(x)}. \quad (121)$$

No debemos de olvidar la deformación del cut-off UV

$$\Delta x \mapsto \Delta \tilde{x}(L) = \frac{\Delta x}{J(L)}, \quad (122)$$

donde notemos que ya no es de magnitud constante, sino que depende del sitio de la cadena L , consistente con el hecho de que la métrica depende de la posición. Así, obtenemos finalmente

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{1}{12}(1+\alpha^{-1}) \log \left[\frac{\tilde{N}}{\pi \Delta \tilde{x}} \sin \left(\frac{\pi \tilde{L}}{\tilde{N}} \right) \right] + S_{nonuniv.,\alpha}. \quad (123)$$

Particularizando las ecuaciones (121), (122) y (123) para el caso de la métrica de Rindler, encontramos que la entropía asintótica de la cadena puede aproximarse como

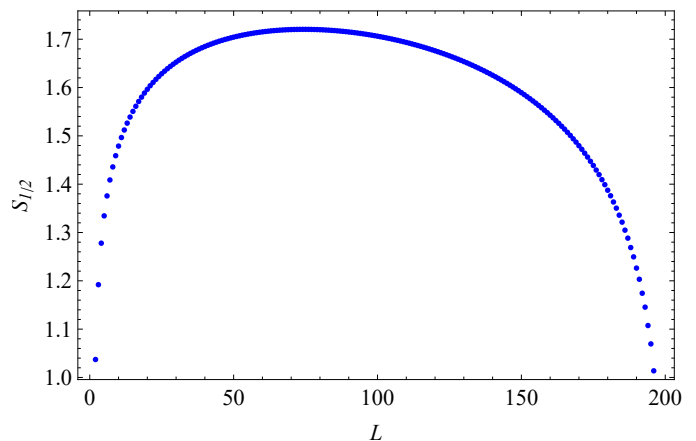


Figura 6. Entropía de entrelazamiento del estado fundamental para la cadena de Rindler ($\alpha = 1/2$) para $\beta = 2$. Nótese la asimetría de la curva de entropía, en comparación con las obtenidas en la Figura 1 puesto que los J_n son asimétricos respecto al eje central de la cadena.

$$S_{A,\alpha} \simeq \frac{1}{12}(1 + \alpha^{-1}) \log \left[\frac{(N + bL) \log(1 + b)}{\pi b} \sin \left(\frac{\pi \log(1 + bL/N)}{\log(1 + b)} \right) \right] + S_{nonuniv.,\alpha}, \quad (124)$$

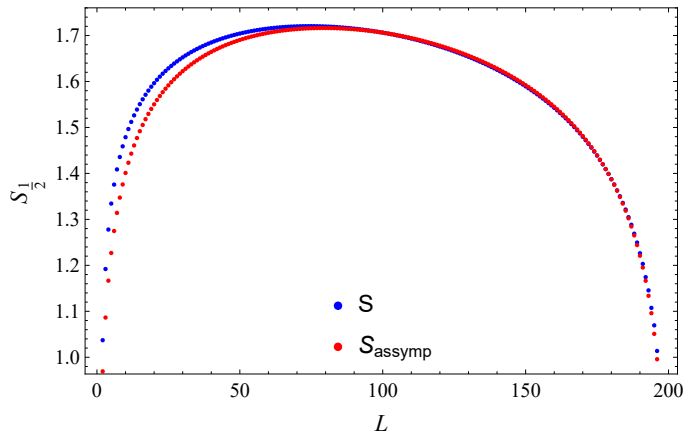


Figura 7. Comparación entre la entropía de entrelazamiento exacta para $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ en función del tamaño del bloque L y la aproximación asintótica proporcionada por la correspondiente teoría conforme para la métrica asociada para $N = 200$.

donde $\beta = a/J_0$ y $b = N\beta$. El que la entropía dependa únicamente del cociente de a y J_0 es debido a que podemos escribir $J(x)$ como

$$J(x) = J_0 \left(1 + \frac{ax}{J_0} \right) = J_0(1 + \beta x) = J_0 \left(1 + \frac{bx}{N} \right), \quad (125)$$

luego el factor constante J_0 es absorbido en las constantes multiplicativas del hamiltoniano (83), por lo que carece de sentido físico. En virtud de lo comentado, se tomará $J_0 = 1$ para el resto del trabajo, y b será el parámetro que se mantendrá libre. Hacemos notar que, si bien existen las oscilaciones de paridad para $\alpha > 1$, éstas supondrán una pequeña corrección a la entropía de entrelazamiento tal y como predice CFT.

IX. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado el problema de calcular la entropía de entrelazamiento del estado fundamental de un sistema cuántico, así como la dificultad que ello acarrea. Si bien ya comentamos que

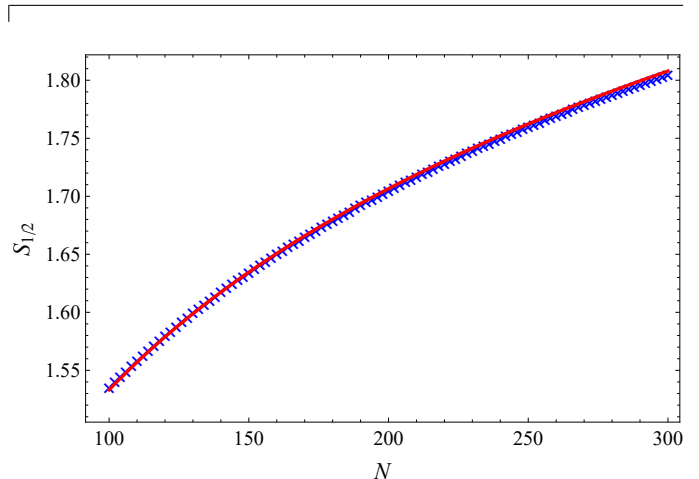


Figura 8. Comparación entre la entropía de entrelazamiento exacta para $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ en función del tamaño del bloque N con $L_{rel} = 1/2$, y la aproximación asintótica proporcionada por la correspondiente teoría conforme para la métrica asociada.

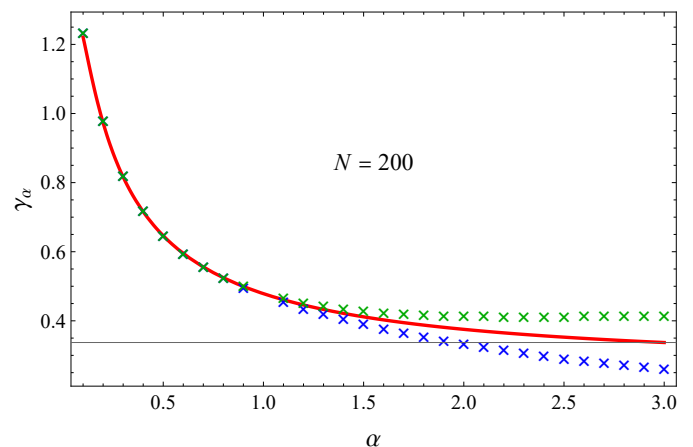


Figura 9. Parámetro γ_α para la cadena de Rindler con $\beta = 2$ (cruces azules y verdes) comparadas con la cantidad análoga de la cadena XX homogénea (línea roja).

en la gran mayoría de los modelos este cálculo resulta imposible debido al crecimiento exponencial de las matrices involucradas, hemos presentado una familia muy amplia de sistemas en los cuales existen técnicas alternativas que reducen el problema a uno resoluble: las cadenas de espines de tipo XX. Partiendo de la

estructura hamiltoniana de estos modelos, hemos introducido transformaciones adecuadas que transforman un modelo de espines $1/2$ en uno de fermiones libres sometidos a un cierto potencial químico. De esta forma, hemos podido reducir la situación a estudiar el espacio de una partícula, y la energía asociada a la excitación de cada uno de los distintos modos en dicho espacio, encontrándose así una relación entre la entropía de entrelazamiento y la matriz de correlación del sistema.

Visto ya que el cálculo de la entropía del GS estaba relacionada con la diagonalización de un tipo especial de matrices tridiagonales, surgió de forma natural la cuestión del estudio abstracto de familias finitas de polinomios ortogonales. Con esta herramienta matemática hemos sido capaces tanto de diagonalizar de forma sistemática mediante fórmulas cerradas nuestro hamiltoniano, como de obtener el espectro de nuestro sistema, que sería suma de cada una de las energías asociadas a las excitaciones de los distintos modos de una partícula. El inconveniente principal de este enfoque es la necesidad de, primero, aplicar una recursión polinomial a tres términos de forma exacta, para después tener que encontrar las raíces del último polinomio, de grado creciente con el número de espines. Claramente, para cadenas con un número físicamente realista de sitios, este método se vuelve computacionalmente inviable, y es ahí cuando la teoría de campos conforme entra en juego.

Hemos desarrollado paso a paso cómo trasladar un modelo discreto, como es una cadena de espines con $N \rightarrow \infty$, a un hamiltoniano continuo asociado a un fermión libre de Dirac en un cierto espacio-tiempo curvo. Para teorías cuánticas de campos, existe ya numerosa literatura en la que se ha calculado fórmulas para la entropía de entrelazamiento correspondiente al estado fundamental de un hamiltoniano dado en un espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, lo que nosotros hemos obtenido no es una métrica plana, sino generalmente dependiente de la posición en la que nos encontremos en nuestro espacio de longitud finita; ello se debe a que las cadenas con las que trabajamos no son homogéneas y tienen parámetros de salto J_n dependientes de n . Por lo tanto, la conjetura razonable sería el emplear esas mismas fórmulas existentes para métricas planas, que involucran magnitudes como

la longitud de la cadena, pero empleando en su lugar esas mismas magnitudes deformadas de acuerdo a la métrica.

Para corroborar todo lo expuesto relativo al marco teórico planteado, se realizaron simulaciones numéricas con *Mathematica* para dos casos de cadenas particulares: la cadena de Lamé y la cadena de Rindler. Centrándonos primero en la Figura 1 se ve que, en el caso de la cadena de Lamé, la entropía en función del tamaño del bloque L posee simetría respecto del centro de la cadena, heredada de la misma simetría ya existente en las constantes J_n de la ecuación (72). Asimismo, si $L \rightarrow 0$ o $L \rightarrow N$ se observa que la entropía decrece abruptamente; intuitivamente esto tiene sentido ya que en estas situaciones el subsistema A no es comparable al tamaño del sistema B , siendo uno mucho mayor que el otro, por lo que cabría esperar una interacción mucho menor entre ambos, con una menor correlación. El máximo se alcanza en $L = N/2$ en parte porque al tener el mismo tamaño, existe una mayor cantidad de pares de espines, cada uno de un subsistema diferente, que pueden interactuar dos a dos, dando lugar así a más correlaciones. A parte, el haber trabajado con valores de α por encima de 1 ilustra las oscilaciones en la entropía de entrelazamiento de Rényi, que ya predice la teoría pero cuya naturaleza no discutimos por salirse de los objetivos de este trabajo.

En la Figura 3 comparamos la aproximación a la entropía proporcionada por el modelo continuo de una CFT y la obtenida mediante métodos analíticos exactos. Lo primero que se aprecia es el excelente ajuste que se obtiene en ambas ramas de la entropía (según la paridad de L), lo cual justifica y valida las aproximaciones que se han empleado en la teoría. Por otro lado, este ajuste es peor conforme nos acercamos a tamaños de bloque extremos, siendo éste mejor para la curva superior que para la inferior. Esto se debe en parte a que la teoría conforme predice el comportamiento de S_{assymp} con la libertad de un parámetro de desplazamiento vertical γ_α que va sumado, como se muestra en la expresión (114). A la hora de ajustar las aproximaciones a los valores calculados de la entropía, por simplicidad no hemos llegado a calcular dichas constantes no-universales, y en su lugar hemos ajustado haciendo un promedio con los tres puntos

centrales de la cadena $\{N/2, N/2 \pm 1\}$.

Ahora bien, lo anterior nos ha permitido corroborar la dependencia de las aproximaciones con el tamaño del bloque L del subsistema, perdiendo toda información acerca de su dependencia en el tamaño de la propia cadena N , ya que todo término dependiente de este parámetro era absorbido en el término de la constante γ_α por trabajar a N fijo. Es por ello que en la Figura 4 hacemos lo propio estudiando $S_{\text{assymp}}(N)$, fijando como tamaño del bloque $L = N/2$. De nuevo, se tiene una perfecta predicción de la aproximación que se ajusta a la dependencia en N de ambas oscilaciones de paridad, especialmente para la curva inferior. Juntando estos resultados con los de la figura comentada anteriormente, tenemos prueba de la validez de las expresiones asintóticas deducidas en la sección correspondiente a esta cadena.

Con el fin de estudiar diferencias y similitudes entre distintas cadenas, se repitieron los mismo cálculos para la cadena de Rindler. A la vista de la Figura 6, comprobamos el comportamiento universal de la entropía de entrelazamiento en las cadenas cuando el tamaño del bloque L es mínimo o máximo. Para esta cadena, en contraposición con lo obtenido para la de Lamé, se tiene una clara asimetría de la entropía respecto al centro de la cadena, consecuencia inmediata de la existente en los coeficientes J_n de Rindler. Si nos fijamos en cuán buena es la aproximación asintótica de la teoría conforme en la Figura 7, vemos de nuevo el excelente ajuste que proporcionan las expresiones deducidas en la correspondiente sección. Es pertinente comentar que para esta cadena el ajuste es prácticamente perfecto en la mitad derecha del tamaño del bloque L , mientras que es peor en la mitad izquierda; posiblemente esto ocurra por la misma asimetría inherente a la cadena que hemos comentado. No obstante, las formas de ambas curvas casan cualitativamente entre sí y ponen de manifiesto la validez de las fórmulas empleadas. Por último, al fijarnos en la Figura 8 es claro que la expresión de S_{assymp} , ahora vista como función del tamaño de la cadena N , es un excelente sustituto al cálculo explícito por medio de diagonalización analítica del modelo, considerando el ajuste preciso que obtenemos en todo el intervalo analizado.

Teniendo todo lo expuesto en cuenta, podemos

concluir que las cadenas de espines son modelos ideales por poseer fórmulas asintóticas para la entropía de entrelazamiento del estado fundamental, cuya validez hemos comprobado de primera mano mediante simulaciones. A su vez, hemos podido verificar la conjetura con la que partíamos en la introducción de este trabajo, que afirmaba que las fórmulas asintóticas para una teoría conforme en $(1+1)$ D dimensiones eran las de una métrica plana con las magnitudes deformadas de acuerdo a la métrica inducida por los coeficientes J_n . Estas fórmulas, a diferencia de la diagonalización analítica del modelo, permiten una expresión cerrada de la entropía de entrelazamiento en función del tamaño del sistema, lo cual proporciona información acerca de su comportamiento crítico. Es más, la expresión (120) posee como parámetro de ajuste libre la *carga conforme* de la teoría, que en todo el análisis se ha tomado como $c = 1$, y que corresponde a la de una teoría de fermiones libres. Esta elección se tomó por ser la que se especifica en la literatura, pero el excelente ajuste de las expresiones confirma que de hecho es la elección correcta, y es consistente con expresar la densidad lagrangiana del modelo continuo en términos de la densidad de un fermión libre sin masa de Dirac en un espacio-tiempo curvo (85).

Los resultados obtenidos abren paso a una gran variedad de caminos a considerar para futura investigación. Por ejemplo, sería interesante indagar en la naturaleza física de las oscilaciones de paridad que se observan para la entropía de entrelazamiento de Rényi para valores de $\alpha > 1$, estudiando y deduciendo fórmulas analíticas para la dependencia de γ_α con α para las distintas cadenas inhomogéneas. No obstante, sí que pudimos ilustrar mediante las Figuras 5 y 9 los asertos que se hacen en la literatura acerca de la pequeña corrección ($\sim 0,4$ si $\alpha > 1$) que dichas oscilaciones suponen a la entropía. Sería interesante considerar mejores ajustes de las fórmulas asintóticas, mediante técnicas más refinadas que los métodos empleados en este trabajo, que consistieron en tomar una cantidad finita de puntos y promediar el error punto/aproximación. Otra ruta posible es intentar extrapolar las técnicas de teorías conformes a cadenas con parámetros B_n no idénticamente nulos, o con momento de Fermi arbitrario; recordemos que en nuestra discusión hacemos un uso fuerte de que esta-

mos en el régimen de half-filling para desarrollar los operadores fermiónicos como modos lentos en torno a dichos puntos. El análisis que seguimos se basa específicamente en la entropía de entrelazamiento bipartita de un sistema, pero podría ser ilustrativo tratar de generalizar la discusión a otras clases de entropías multipartitas ([10], [11]) como podrían ser las medidas de Schmidt, el entrelazamiento geométrico, o la medida de “tangle” de Coffman. Finalmente, un último punto a mencionar es que se desconoce a día de hoy

el por qué, para ciertas cadenas, la constante no universal γ_α es tan próxima a la de la homogénea XX , dada por la fórmula exacta (118). Prueba de ello lo encontramos en las simulaciones presentadas en las Figuras 5 y 9, donde para la cadena de Rindler el ajuste es perfecto hasta llegar a valores de $\alpha > 1$, momento a partir del cual las oscilaciones de paridad se comportan con tendencias opuestas a la seguida por la cadena homogénea pero que no son tan distantes cuantitativamente hablando.

-
- [1] G. Ramírez, J. Rodríguez-Laguna, and G. Sierra, Entanglement over the rainbow, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2015**, P06002 (2015).
- [2] E. Tonni, J. Rodríguez-Laguna, and G. Sierra, Entanglement Hamiltonian and entanglement contour in inhomogeneous 1d critical systems, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2018**, 043105 (2018).
- [3] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen(De), and U. Sen, Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond, *Advances in Physics* **56**, 243–379 (2007).
- [4] O. Boada, A. Celi, J. I. Latorre, and M. Lewenstein, Dirac equation for cold atoms in artificial curved spacetimes, *New Journal of Physics* **13**, 035002 (2011).
- [5] R. Wald, *General relativity* (The University of Chicago Press, 1984).
- [6] P. Calabrese and J. Cardy, Entanglement entropy and quantum field theory, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2004**, P06002 (2004).
- [7] P. Calabrese and J. Cardy, Entanglement entropy and conformal field theory, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 504005 (2009).
- [8] B.-Q. Jin and V. E. Korepin, Quantum spin chain, toeplitz determinants and the fisher–hartwig conjecture, *Journal of Statistical Physics* **116**, 79–95 (2004).
- [9] M. Fagotti, P. Calabrese, and J. E. Moore, Entanglement spectrum of random-singlet quantum critical points, *Phys. Rev. B* **83**, 045110 (2011).
- [10] M. Ma, Y. Li, and J. Shang, Multipartite entanglement measures: a review (2023), [arXiv:2309.09459 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/2309.09459).
- [11] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, Distributed entanglement, *Physical Review A* **61**, 10.1103/physreva.61.052306 (2000).
- [12] F. Finkel and A. González-López, Inhomogeneous XX spin chains and quasi-exactly solvable models, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2020**, 093105 (2020).
- [13] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials* (Dover Publications, 2016).
- [14] J. I. Latorre and A. Riera, A short review on entanglement in quantum spin systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 504002 (2009).
- [15] B. n. Mula, S. N. Santalla, and J. Rodríguez-Laguna, Casimir forces on deformed fermionic chains, *Phys. Rev. Res.* **3**, 013062 (2021).