UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE FILOSOFÍA
Departamento de Filosofia de la Naturaleza

TESIS DOCTORAL

Azar y probabilidad

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

María Sol de Mora Charles

Madrid, 2015

María Sol de Mora Charles

AZAR Y PROBABILIDAD

Departamento de Filosofía de la Naturaleza
Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación
Universidad Complutense de Madrid
1984

Colección Tesis Doctorales. Nº 153/84

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1984
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-19195-1984

"A Z A R Y P R O B A B I L I D A D"

Tesis Doctoral presentada por

Mª Sol de Mora Charles

Lda. en Filosofía y Letras por la
Universidad Complutense de Madrid

Bajo la dirección del Dr. Don Roberto Saumells Panadés, Catedrático de Filosofía de la Naturaleza de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Complutense de Madrid

Diciembre, 1982

INDICE

Rien ne m'est seur que la chose incertaine;
Obscur, fors ce qui est tout evident;
Doubte ne fais, fors en chose certaine;
Science tiens à soudain accident;
Je gaigne tout et demeure perdent;

François Villon (1431- ?)

(Ballade du Concours de Blois, fragmento)

1

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

La senda de la opinión es incierta y poco segura, es el reino de la probabilidad. No es facil expresarlo mejor que el propio *Parmenides* en su Poema:

Fr.3(fr.2 D-K) *Y yo te diré (pero guarda tú bien la palabra que oigas) cuáles las vías*
solas que concebir como vías de búsqueda cabe:
una, la de que es y que no puede ser que no sea,
ruta de fe y de fiar: pues a la verdad acompaña;
otra, la de que no es y que debe ser que no sea,
ésta, te aviso, es senda de toda fe desviada:
pues ni podrás conocer lo que ello no sea (que a eso jamás se alcanza) ni en ello
puedes pensar.

Fr.4(fr.3 D-K) *Pues es concebirlo lo mismo que serlo.*

Fr.5(fr.6 D-K) *Debe el concebir y el decir ser cosa que sea: pues ser es dable que sea,*
mas no lo es no ser nada; en lo cual cavilar te aconsejo,
sí, que esa era la vía de búsqueda de que primero te desvié. Pero luego
de esta también, que mortales que nada saben, seguirla errantes
fingen, discabezudos: que lo imposible en sus pechos
traza derecha la idea torcida; y ellos se mueven
sordos y ciegos al par, pasmados, tropa sin juicio,
a quienes ser y no ser se les antoja lo mismo y no lo mismo, y que siempre
hay para ellos camino de contravuelta de todo.[1]

En el mundo aparecen así dos categorías: ser y no-ser. El ser es estable y constante, el que sabe distinguir entre ser y no ser, posee la verdad, el que no sabe, se encuentra en el estadio de la opinión. El problema epistemológico de *Parmenides* es fundamentalmente el mismo que hoy en día: cómo relacionar la fijeza del pensamiento con la fluidez de las cosas. Cada época lo ha formulado de modo diferente; para los griegos era el problema del cambio, para los medievales, el problema de los Universales, para la Ilustración, era el problema de la certeza, en nuestra época, se plantea el problema de la inducción.

Los griegos, como nosotros, aceptaban que existe orden en el universo, pero el universo de los griegos era objetivo, real, y su orden era el orden de las partes en un todo, un orden cualitativo, ontológico. El universo para nosotros es algo subjetivo, ideal, de pensamiento, y su orden, cuantitativo, matemático. A los griegos les preocupaba cómo podía haber desorden en el universo, a los modernos les preocupa cómo puede haber orden fuera del universo. Se ha realizado una progresiva dominación de las matemáticas sobre la inestabilidad de la materia, y en ella el cálculo de probabilidades es una de las ramas de la matemática que más profunda influencia ha ejercido sobre el pensamiento.

En esta búsqueda, *Aristóteles* se plantea la tarea de encontrar las causas que actuan sobre la Naturaleza. ¿Será el azar una causa? Lo seguro es que, conocer, es conocer por las causas. *Aristóteles* propone cuatro tipos de causas:

I. La causa material: se dice de aquello por lo que una cosa llega a ser y que está presente como constituyente de la misma en el resultado, por ejemplo, una estatua de bronce.

II. La causa formal: se aplica a la forma o modelo, es decir, a la fórmula según la cual la cosa en cuestión es, como la fórmula de la octava musical es la razón 2:1.

III. La causa eficiente: aquello de lo que proviene inmediatamente el origen del movimiento o reposo. Así el padre es causa del niño.

IV. La causa final: es la causa como fin u objetivo. Así la salud es la causa de que hagamos deporte, etc.

Cualquier cosa puede tener una o varias de estas causas. Las cosas pueden además ser causa unas de otras. Para *Aristóteles* ninguna de esas cuatro causas es suficiente para producir un suceso y en general son necesarias las cuatro.

Ahora bien, hay sucesos que forman excepciones a las reglas habituales de la naturaleza, pues no suceden siempre, ni siquiera en la mayor parte de los casos. Suceden per accidens. Pero no todos los sucesos excepcionales o accidentales son aleatorios o de fortuna, pues éstos son además "por un fin".

Las cosas que pueden llegar a ser causas para un resultado aleatorio son bastante indeterminadas. Pero al mismo tiempo nada sucede por azar, el azar no es una causa operativa, sino sólo un nombre para un cierto tipo de conexión entre sucesos.

Aristóteles distingue entre lo fortuito y la suerte; esta última no se puede aplicar a las cosas inanimadas, a los animales inferiores ni a los niños. Los monstruos, por ejemplo, son fortuitos, pero no tienen nada que ver con la suerte. La existencia de lo excepcional se explica por una capacidad de la materia de recibir más de una determinación. Pero cuando actuan sobre la materia las mismas fuerzas, ésta recibe la misma determinación, su indeterminación no implica la contingencia. El azar sería por lo tanto simplemente un nombre para el encuentro inesperado de dos cadenas de causas rigurosas.

En la interpretación de *Mansion*, necesidad y azar son obstáculos a la actividad de la Naturaleza, son dos formas de oposición a la realidad natural. Hay para este comentador tres causas para la existencia y la producción de los seres: la naturaleza, el azar y el arte. El azar estaría en la línea de las causas eficientes. La fortuna (τύχη) es una especie de azar (αὐτόματον) que se limita a la práctica del hombre, dirigida por la inteligencia. El azar está en oposición con la constancia de los fenómenos, con el orden de los hechos naturales, siendo a la vez racional e inteligible. Pero no hay ciencia que dependa del azar ni de lo que es accidental.

Las causas que producen los efectos llamados fortuitos lo hacen por la coincidencia de su actividad sobre un lugar o punto dado, y en un momento preciso. Esas causas pueden ser infinitas.

El azar queda así definido como una causa por accidente, cuyos efectos son hechos excepcionales que pertenecen al orden de aquellos que se producen a la vista de un fin, pero que por sí mismos no se han producido con vistas al fin realizado. El azar en la naturaleza sería la realización fortuita de un fin natural, alcanzado fuera de las vías normales.

En la interpretación de *Leon Robin*, en el mundo sublunar la necesidad a veces se degrada y ya es sólo cuestión de frecuencia y de constancia aproximadas. Hay una eventualidad contingente inherente a la naturaleza. La naturaleza comete errores porque a veces falla en la consecución de sus fines. Así, todo desorden se podría considerar en tanto implica un orden.

Estas indeterminaciones y errores de la naturaleza provienen de la materia y no de la forma. Así sucede con la simple "frecuencia", puesto que se opone a lo que existe "absolutamente" y a lo que tiene lugar "siempre".

Hay una doble necesidad: una que deriva del acto eternamente real o de la forma absoluta, y otra que deriva de la contingencia, esencial a la eterna indeterminación de la materia, lo que *Robin* llama el tercer modo de la causalidad:

La primera causalidad se basaría en la "forma"; es una causalidad inmediata y absoluta, excluye la sucesión y el devenir.

La segunda causalidad es como la primera, pero considerada en el tiempo y dada la vuelta, de manera que el fin parece ser el término del proceso, cuando en realidad es lo que lo ha determinado: hay una falsa apariencia de causalidad temporal.

La tercera causalidad tiene una realidad que reside en su misma deficiencia, en la resistencia a la acción por parte de la forma, en lo que lo sensible tiene de refractario a ella.

El problema surge pues cuando aquello que debería suceder no sucede siempre. *Aristóteles* pone como ejemplo de (buena) fortuna el caso de un hombre que, proponiéndose plantar un árbol, cava la tierra y por accidente encuentra un tesoro. No era ese su propósito. Pero esta denominación es inaplicable a los seres desprovistos de actividad práctica, que no pueden elegir: los niños y los animales. Con ellos no se puede hablar de fortuna, sino de azar. Lo fortuito es lo que por sí mismo se produce en vano. Así, en la naturaleza, cuando se produce algo contrario a ella, una monstruosidad, una anomalía, no es porque se haya abolido la finalidad de la misma, sino que su tendencia a lo normal se ha visto desviada por causas internas que, no obstante, tienen sus límites (un olmo no dará nunca peras). Pero esas causas internas tienen que venir de otra cosa que de la Naturaleza, deben depender de causas exteriores.

El azar para *Aristóteles* es el trastorno producido en una serie causal normal determinada por un fin de la inteligencia o del arte o por un fin de la Naturaleza, trastorno que resulta de la intervención indeterminada e imprevisible de causas extrañas a esa serie. El azar sería una causa eficiente, sería una causalidad puramente mecánica. El tiempo es un factor del azar, pues en el tiempo se da la sucesión de las causas y de los efectos.

La libertad sería así una imperfección que nos impulsa a desear el bien del que estamos desprovistos. La libertad sería pues un signo de la miseria del hombre que, en lugar de seguir su camino, se ve obligado a elegirlo. Para la Naturaleza, en efecto, todo lo que hay en ella de libertad no puede ser más que su mal, porque es el principio mismo de sus errores y debilidades.

Como veremos, también la Edad Media se ocupó de los temas de azar y probabilidad. Incluso aparece algún intento rudimentario de calcular las probabilidades. En cualquier caso, los comienzos de una teoría de la probabilidad no son medievalmente imposibles. E.F. *Byrne* ha estudiado el concepto de probabilidad que aparece en la obra de *Sto. Tomás*. Lo primero que hay que distinguir en el pensamiento medieval, dice, es entre conocimiento y opinión. El conocimiento, en tanto es creencia verdaderamente justificada, no tiene el mismo objeto que la opinión. El uso del término probabilidad está estrechamente relacionado con el del término opinión; pero el término opinión tiene profundas raices en el hecho de la ignorancia humana.

Para Sto. Tomás, probabilidad es un calificativo de o-

pinión, la opinión es el objeto de la argumentación dialéctica, la argumentación dialéctica es el medio que tiene el hombre para transcender su propia ignorancia, y la transcendencia de la ignorancia se logra sólo en la visión beatífica de la otra vida. En otras palabras, para Sto. Tomas, al aplicar el método argumentativo a las opiniones humanas, uno establece o destruye su probabilidad, y así se mueve lentamente más allá de lo meramente probable hacia ese último punto en el que el hombre participa, de acuerdo con su capacidad, de la omnisciencia divina.[2]

En la epistemología medieval, ciencia es conocimiento, porque el conocimiento lo es de verdades universales que son verdades necesarias. La necesidad en este caso no es idéntica a nuestro concepto de necesidad lógica, concepto que no nace hasta el siglo XVII. El conocimiento de las primeras verdades está por encima de toda discusión, pues son simples y fundamentales, pero para otros objetos se llega al conocimiento mediante la demostración.

Santo Tomás pensaba que el conocimiento real e infalible es un objetivo legítimo y que a veces se alcanza. Es distinto y preferible a la opinión. Ahora se respondería a eso que todas nuestras creencias y teorizaciones pertenecen al dominio de la opinión y que deberíamos esperar que cualquier teoría sea remplazada por otra en algún momento.

La opinio de *Sto. Tomás* se refiere a creencias o doctrinas a las que no se accede mediante demostración. También se refiere a proposiciones que, al no ser universales, no pueden ser demostradas. Es la creencia que resulta de alguna reflexión, argumento o disputa. La creencia que resulta de la sensación se llama aestimatio. En la escolástica, pues, la opinión es lo que puede tener probabilidad. El límite de una probabilidad creciente de la opinión puede ser una creencia cierta, pero no es conocimiento, porque en general los objetos de opinión no son el tipo de proposiciones que pueden ser objeto de conocimiento.

Para *Sto. Tomás*, razón y causa están estrechamente relacionadas; comprender la razón para algo es comprender la causa, entender por qué ese algo. Las causas a su vez se encontrarán en las definiciones reales sobre las que descansa la ciencia. Todas las razones son demostrativas, porque las causas son causas necesarias.

La probabilidad pertenece a la opinión, donde no hay un concepto claro de evidencia, por tanto la probabilidad indica aprobación o aceptación por parte de las personas inteligentes. En la demostración no basta con la probabilidad de la proposición. Para *Byrne*, la atribución de probabilidad a la opinión tiene varias connotaciones: "En primer lugar, se refiere a la autoridad de aquellos que aceptan la opinión dada y, desde este punto de vista, "probabilidad" sugiere aprobación de la proposición aceptada y probidad de las autoridades que la aceptan. En segundo lugar, "la probabilidad" se refiere a los argumentos que se han presentado a favor de la opinión en cuestión y desde ese punto de vista sugiere una susceptibilidad de ser probado, comprobado (aunque no necesariamente demostrado). En tercer lugar, la probabilidad toma una connotación algo peyorativa, señalando que la proposión en cuestión es meramente probable, pues desde este punto de vista la proposición sería algo "a probar" y no estrictamente demostrado, como lo son las proposiciones estrictamente científicas".

Estos tres aspectos del contenido de la probabilidad se han mantenido hasta nuestros días, sólamente el primero, la apelación a una autoridad en la materia, en el caso de los autores medievales, una autoridad religiosa, ha caido en desuso. Pero la probabilidad como algo digno de aprobación, es decir como probabilidad positiva, mayor que 1/2, se mantiene en el lenguaje de cada día: "es probable que llueva mañana" supone que nos inclinamos a ese resultado más bien que al contrario. Y asimismo el sentido de algo necesitado de prueba o experimento se conserva en la actualidad, aunque en este caso, más en el aspecto científico que en el vulgar.

El lenguaje común tiene casi siempre el defecto de ser incapaz de precisar, de ser demasiado vago. Los matices que utilizamos para hablar de un suceso cuyo resultado es incierto: posible, probable, no nos proporcionan una medida, todo lo más una escala ordinal de medida: podemos comparar sucesos más o menos probables, aunque ni siquiera eso es posible en todos los casos. Como dice *Reichenbach*:

Cuando se considera con atención, finalmente se hace

> *evidente que no hay sentencias de absoluta certeza, si las sentencias no designan relaciones lógicas vacías, sino que afirman la existencia de hechos específicos.*[3]

No solamente no podemos ordenar los sucesos más o menos probables, sino que además no tenemos nunca una certeza absoluta, y la imposibilidad de un suceso, para ser efectiva, tendría que ser también una imposibilidad lógica. Pero,

> *Los filósofos se han dado por satisfechos con construir la probabilidad como una carencia de certeza originada en la imperfección del conocimiento humano y conectar el concepto de probabilidad con el de posibilidad; esto era virtualmente todo lo que la filosofía podía descubrir en tanto que limitara sus estudios al concepto de probabilidad del lenguaje de cada día.*[4]

Esta es al menos la interpretación de *Reichenbach*; una interpretación que da quizá demasiada importancia a la formulación matemática o científica de la probabilidad.Para él, tras el desarrollo científico del concepto de probabilidad, es decir, a partir de *Pascal* y *Fermat*, sólo se mantiene un aspecto de su nivel anterior: la idea de que la ignorancia del hombre está a la base del concepto de probabilidad. Las interpretaciones a partir de ahí pueden dividirse en dos grandes grupos, objetivistas y subjetivistas.

La teoría <u>subjetiva</u> de la probabilidad tiene uno de sus principales intérpretes en *Augustus de Morgan*. Este lógico y matemático sostenía que la probabilidad se refiere a un estado de ánimo, el grado de certeza o incertidumbre que caracteriza a nuestras creencias. Una proposición es verdadera o falsa, pero nuestro saber es tan limitado que es imposible estar racionalmente seguro de su verdad o falsedad. Para tener esa "creencia racional" debemos estar en posesión de los conocimientos adecuados.

Cuando se trata de sucesos que se pueden repetir indefinidamente, podemos aproximarnos a la probabilidad recurriendo a las leyes de los grandes números y mediante la aplicación de las frecuencias relativas, pero cuando se trata de sucesos aislados o irrepetibles, el problema es más complicado. Peirce hace una interpretación que evita esta dificultad. Sostiene que la probabilidad no se refiere a los sucesos, sino a las proposiciones. En lugar de hablar de un cierto suceso como "cara", la teoría de las frecuencias verdaderas discute proposiciones como ésta:"esta moneda caerá primero de cara". La probabilidad de la verdad de esta proposición debe ser la misma que la frecuencia relativa con la que aparece el suceso "cara" en una serie de lanzamientos de una moneda. En resumen, no hay probabilidad objetiva más que si hay una sucesión de pruebas repetidas indefinidamente, o al menos indefinidamente repetibles, mientras que no tiene dificultad introducir una probabilidad subjetiva relativa a una prueba aislada.

La teoría subjetiva de la probabilidad que aparece con más frecuencia es pues la que afirma que la probabilidad pertenece a las proposiciones, pero no como una propiedad intrínseca, pues sólo es un <u>grado de creencia</u> lo que aplicamos sobre ellas. Pero el término creencia tiene dos acepciones muy distintas, una de ellas sería la que se expresa del mismo modo que el conocimiento: lo que se da por supuesto, y la otra, aquella en que estamos dispuestos a admitir, al menos en principio, que lo que creemos puede no ser cierto. Para *Kneale*[5] creencia estaría bastante cerca de opinión, aunque la opinión no se aplica generalmente a los casos en que la probabilidad se considera muy alta. Pero, como decíamos antes, la creencia deberá ser "racional", para evitar que haya tantos valores de probabilidad como individuos consideren un mismo suceso. Y el grado de confianza que un hombre debe tener en aquello que cree u opina es el grado justificado por la evidencia a su disposición.

La exposición de *Popper* resulta muy clara a este respecto. Entresacamos algunos párrafos:

> *El frecuente uso de expresiones que poseen cierto matiz psicológico - tales como "esperanza matemática", "ley normal de errores", por ejemplo, etc. - sugiere una <u>interpretación subjetiva</u> de la teoría de la probabilidad, que en su forma original es más bien <u>psicologista</u>: trata el grado de probabilidad como si fuese una medida de los sentimientos de certidumbre o incertidumbre, de creencia o de duda que pueden surgir en nosotros ante ciertas aserciones o conjeturas. Cuando lo que nos ocupa son ciertos enunciados no nu-*

méricos, la palabra probable puede traducirse satisfactoriamente de este modo; pero no me parece muy apropiada una interpretación de los enunciados probabilísticos numéricos que se encamine en esa dirección.

Sin embargo existe una nueva variante de la interpretación subjetiva que merece que le dediquemos mayor atención. Esta no interpreta los enunciados probabilísticos psicológica sino lógicamente: como aserciones acerca de lo que puede llamarse la "proximidad lógica" de los enunciados... La teoría lógico-subjetiva - cuyo principal exponente es Keynes - considera la relación probabilística como un tipo especial de relación lógica entre dos enunciados... Un tercer modo de interpretar la definición mencionada (de Laplace), la interpretación objetiva, considera que todo enunciado probabilístico numérico enuncia algo acerca de la frecuencia relativa con que acontece un evento de cierto tipo dentro de una sucesión de acontecimientos.[6]

Popper declara formalmente a continuación su fe en la interpretación objetiva.

Keynes por el contrario se inclina por el concepto epistemológico. Para él la probabilidad asignada a una hipótesis gracias a alguna evidencia es una relación lógica*, como ha explicado Popper:

Todas las proposiciones son verdaderas o falsas, pero el conocimiento que tenemos de ellas depende de nuestras circunstancias; y aunque a menudo es conveniente ha-

* Por ello esta postura se ha llamado Logicismo.

blar de proposiciones como ciertas o probables, esto expresa estrictamente la relación en la que están con un corpus de conocimientos, actual o hipotético, y no con una característica de las proposiciones en sí mismas.[7]

El problema de la existencia de sucesos no repetibles, de los que no se puede por tanto observar las frecuencias, es el que empuja a los subjetivistas a intentar extender el campo de aplicación del cálculo de probabilidades al mayor número posible de sucesos. Definen así la probabilidad como el grado de creencia racional o coherente. Si un individuo es coherente en su comportamiento frente al azar, a lo incierto, estará en condiciones de asignar probabilidad a los diferentes acontecimientos posibles. Se podría así reconstruir en principio las probabilidades subjetivas que un individuo determinado asigna a cada acontecimiento.

El problema es ahora definir esa coherencia necesaria para asignar probabilidades, y los subjetivistas como *Ramsey*, *Finetti*, *Good* o *Savage* se han esforzado en conseguirlo.

Savage habla de probabilidad personal, que fué introducida por *Ramsey y Finetti*. Según ellos, la probabilidad que asignamos a cada proposición particular depende sólo de nuestro juicio personal, pero el conjunto de todas estas probabilidades asignadas debe cumplir unas severas reglas internas de coherencia. Esta postura se ha llamado personalismo.

Para *Savage* el individuo conoce todas las acciones posibles y todos los estadios posibles de la naturaleza, así como las consecuencias de cada acto. La incertidumbre por lo tanto será debida a la ignorancia acerca de cuál de los estados de la naturaleza se va a producir. *Savage* enuncia su teoría en siete axiomas, cuyas consecuencias se pueden resumir como sigue:

- Existe una probabilidad numérica, asociada a los estados de la naturaleza, y que satisface las reglas del cálculo de probabilidades.

- Se puede asociar a cada consecuencia un valor numérico, que representa su utilidad para el individuo.

- El orden de preferencia de los actos es el de sus esperanzas matemáticas, calculadas a partir de las probabilidades y de las utilidades a las que se alude más arriba.

Los axiomas de *Savage* han de aceptarse como definición de coherencia y suponer que cualquier individuo que no sea capaz de actuar así no es coherente, no sigue las reglas del comportamiento racional. Por otra parte, sucede con frecuencia que las probabilidades asignadas a varios sucesos no cumplen los axiomas del cálculo de probabilidades: unión o intersección de sucesos, etc.

En contraste con estas interpretaciones subjetivas está la familia de teorías estadísticas que se fija sobre todo en la tendencia a la estabilidad de las frecuencias, cuando el experimento que se realiza es susceptible de muchas pruebas repetidas, en principio un número indefinido de ellas.

Carnap y *Cournot* hacen una mezcla ponderada de de análisis conceptual y distinción lingüística en su concepción de la probabilidad, pues en realidad es bastante dificil separar el aspecto epistemológico y el aleatorio en el concepto de probabilidad. El mismo *Bernouilli* es para unos subjetivista y para otros frecuentista.

Observamos pues, en el concepto de probabilidad que manejamos en la actualidad, pero también en el contenido conceptual de otras épocas, dos aspectos fundamentales: el epistemológico y el aleatorio. Aunque estos dos aspectos aparecen como indisolubles en la mayoría de los casos; las variaciones se apoyan en el énfasis mayor o menor que se dé a cada uno de esos aspectos. Pero la base epistemológica se encuentra siempre en el trasfondo, unas veces como problema de definición, de conocimiento, otras como problema metafísico o moral (existencia de Dios, designio divino, conducta cotidiana, etc.)

Hemos visto rápidamente las diferentes concepciones de la probabilidad, desde el punto de vista filosófico, desde el punto de vista del lenguaje vulgar y por último desde el punto de vista de los teóricos de la teoría de la probabilidad que no se limitan al estudio puramente matemático de sus propiedades, sino que se preguntan por los fundamentos de su definición misma y por la justificación de su aplicación a los hechos del mundo empírico. Subjetivismo, psicologismo, logicismo se suceden los unos a los otros sin encontrar una solución satisfactoria al problema epistemológico original.

Todos estos aspectos se pueden reducir, simplificando, a dos: el aspecto "objetivo", estadístico y relacionado con los procesos estocásticos de las leyes del azar, y el aspecto epistemológico, por el que se aplica a asignar grados razonables de credibilidad a proposiciones en general desprovistas de todo contexto estadístico.

Hacking, en su ensayo sobre la emergencia de la probabilidad, observa el hecho curioso, ya señalado por *Todhunter*, de que el concepto de probabilidad como algo susceptible de ser medido o al menos comparado no aparece en Occidente hasta *Pascal*, y, no satisfecho con ninguna de las explicaciones de ese fenómeno propuestas por los diferentes autores, intenta su propia investigación:

> *Pero para mí, la búsqueda de precondiciones (para el nacimiento de este concepto) es más que un intento de explicación histórica. me inclino a pensar que las precondiciones para la emergencia de nuestro concepto de probabilidad determinaron la naturaleza misma de su objeto...el espacio de posibles teorías de la probabilidad. Esto significa que determinaron en parte el espacio de las interpretaciones posibles de la mecánica cuántica, de la inferencia estadística, y de la lógica inductiva.*[8]

Así pues, aunque para la leyenda la probabilidad nació en 1654, cuando *Pascal* y *Fermat* resuelven el problema de los partis, las condiciones previas para que ese mismo problema se planteara y no otro, se estaban gestando desde antiguo. La dualidad del concepto de probabilidad es hoy día aceptada por la mayoría de los autores. Incluso algunos de ellos proponen diversos términos para denominar uno y otro aspecto a fin de evitar confusiones. Así, para *Poisson* y *Cournot* la distinción se hace gracias al empleo de las palabras francesas "chance" y "probabilité", donde "chance" se aplicaría a la probabilidad inductiva y "probabilité" a la probabilidad estadística. *Condorcet* sugiere "facilité" como concepto aleatorio y "motif de croire" como concepto epistemológico, y *Russell* utilizará "credibilidad"para el concepto epistemológico.

En la Historia de las Matemáticas dirigida por *Dieudonné* , encontramos la siguiente explicación:

> *"Probabilitas" y "probabilis" parecen haber sido forjados por Cicerón y, hasta el siglo XVIII, "probable" ha conservado el sentido inicial de "merece aprobación" por parte del testimonio de las autoridades. La doctrina del "probabilismo" en teología se convirtió, en manos de los casuistas, en la posibilidad de elección, entre las opiniones "probables" en el sentido anterior, de aquellas que justificaran su acción. Pascal atacó con vehemencia esta interpretación en su sexta Provincial (1656)...Desde entonces comienza el conflicto entre probabilidad en el sentido de grado de credibilidad y probabilidad en el sentido de proporción de las chances. Esta dualidad dará lugar a rios de tinta, que riegan casi todas las obras sobre Cálculo de Probabilidades.*[9]

El término mismo de probabilidad ha sufrido algunos avatares. La palabra es de origen latino, como vemos,pero

no se
utiliza para designar la probabilidad aleatoria o medible hasta muy tardíamente; la primera vez que aparece impresa con ese sentido es en la Lógica de Port Royal, en 1662, aunque era por supuesto conocida y utilizada para la probabilidad epistemológica. Los términos de fortuna, azar (de origen árabe), chance, y sobre todo el término también latino de suerte, son utilizados con anterioridad para designar la probabilidad, en los primeros intentos de cálculo y en los juegos de azar.

No obstante algunos autores defienden que el sentido primario de esta palabra ya es evaluativo. *W. Kneale* dice que en lenguaje común se habla de igual probabilidad de varias alternativas, significando con ello que son igualmente válidas como bases para la acción. Sin embargo la palabra latina probabilis significaba, entre otras cosas, digno de aprobación, y aún no hace mucho que se hablaba en lengua inglesa de un "probable doctor". *Daniel Defoe* la utiliza en este sentido en su Roxana, en 1724, y éste es también el sentido al que hemos aludido al hablar de la probabilidad medieval y de la apelación a las autoridades en la materia correspondiente, que aprobarían, en su caso, lo sometido a su "aprobación".

Otros autores relacionan estrechamente probabilidad con credibilidad. En 1748, *Hume* hizo un feroz ataque a la credibilidad de los milagros basándose en su concepto de probabilidad. *Thomas Church* en un libro dentro de la misma controversia considera la cuestión de si puede ser creible un hecho en sí mismo, independientemente de cualquier testimonio, y concluye que no, pues todo lo que se puede decir es que tal cosa es posible o imposible, probable o improbable o, en último caso, si sucede con mucha frecuencia o raramente.

E.F.*Byrne*, como hemos visto, distinguía entre conocimiento y opinión, la distinción clásica, y asociaba la probabilidad medieval a la opinión. Para *Kneale*, la opinión es el conocimiento de que la evidencia disponible "probabiliza" una proposición en un cierto grado, pero eso no quiere decir que la opinión sea un tipo de conocimiento. Un hombre que opina racionalmente X, no conoce X, sino una relación entre X y algunos hechos que podemos llamar la evidencia disponible. *Kneale* por lo tanto utiliza opinión en el sentido de creencia distinta del conocimiento, aquella creencia que admite, al menos en principio, que lo que cree puede no ser cierto.

Esta significación de probabilidad como "aprobabilidad" está estrechamente relacionada con la casuística doctrina del probabilismo, que *Pascal* ataca en sus Cartas Provinciales. Se trata de un principio presentado por los jesuitas en el siglo XVI y que tuvo éxito, aunque fué derrotado en el XVIII. El problema comenzó cuando se descubrieron cada vez más textos sagrados y se inventaron cada vez más interpretaciones de los textos existentes. Para resolver el conflicto había dos posibilidades: atenerse a las autoridades reconocidas y aceptar sólo las Escrituras y la luz natural de la razón, o bien considerar un amplio conjunto de autoridades pero, al decidir entre ellas, considerar los efectos sociales y y morales de adoptar sus diversas doctrinas. Las diferentes sectas protestantes, incluidos los jansenistas, adoptaron la primera posición, mientras que los casuistas tomaron la segunda. El probabilismo dice que cuando las autoridades están en conflicto, puede seguirse una u otra de las opiniones probables, e incluso una opinión menos probable. Aquí probable significa apoyado por el testimonio de una autoridad, no por la evidencia. Pero tampoco se trata de permisividad, sino de elegir lo más práctico si se encuentra alguna opinión que lo apoye, aunque las opiniones de más peso sostengan lo contrario.

Los jansenistas tenían su enclave en Port Royal, en Francia, e incluían entre sus miembros a *Antoine Arnauld* (1612-1694), *Pierre Nicole* (1625-1695) y *Blaise Pascal* (1623-1662) todos los cuales se ocuparon, entre otras cosas, de probabilidad. *Arnauld* fué denunciado por los jesuitas, aunque los jansenistas permanecieron dentro de la Iglesia y la denuncia fué retirada en 1669. *Pascal* escribió las Cartas Provinciales en su defensa. *Arnauld* participó también en la redacción de la famosa Lógica de Port Royal editada en 1662, que contiene a la vez argumentos contra el probabilismo y utiliza por primera vez la palabra probabilidad en el sentido moderno: susceptible de medición, y que estudiaremos más adelante.

Galileo utiliza todavía la palabra probabilidad en su antiguo sentido. Así, para él la opinión de *Copérnico* es improbable en su tiempo, porque está en relación con la aprobación, y en cambio para *Leibniz* la hipótesis de *Copérnico* era para su época incomparablemente la más probable, pues para él la probabilidad está determinada por la evidencia y la razón. Y aunque en otros pasajes *Galileo* se base realmente en la evidencia y no en la autoridad, no hace ningún intento de medir los incrementos de probabilidad, sino que busca una demostración absoluta, y así lo hacen también la mayoría de sus contemporáneos.

Para *Bacon* la autoridad está algo modificada. Concibe una probabilidad conferida por aquellos que consideran la materia con propiedad y no ya por los sabios oficiales.

La opinión es pues el compañero de la probabilidad en la epistemología medieval. Otro concepto muy ligado al de probabilidad y que surge entre los primeros empiristas es el de signo. En los textos médicos del Renacimiento se hace una distinción característica entre causa y signo. Las causas son principalmente causas eficientes, aquello que hace que una persona enferme, y los signos son algo mediante lo cual hacemos un pronóstico (signos de muerte, premoniciones). La probabilidad surge de la frecuencia de lo que sucede "casi siempre" o "a menudo". *Fracastoro* (1483-1553) habla así: "no se deben considerar los signos como pronósticos sino sólo como signos de probabilidad", según la cita de *Hacking*.

Para *Hacking* , una de las condiciones previas de la probabilidad fué la formación del concepto de evidencia; la que algunos filósofos han llamado evidencia inductiva,que aparece por primera vez en Vanity of Dogmatizing, de *Joseph*

Granvill , en 1661 y también el los Elementae Logicae Probabilium de *Kahle*, en 1735, aunque hasta unos ochenta años después del nacimiento de la probabilidad no aparece francamente el problema de la inducción, porque no existía un concepto adecuado de evidencia. Las personas proporcionaban la evidencia del testimonio y de la autoridad, pero faltaba la evidencia proporcionada por las cosas, que no es la evidencia de los sentidos, sino una inducción.

Nuestra forma de distinción entre esos dos tipos de evidencia, la del testimonio y la de las cosas, es bastante reciente. Se estableció claramente en 1662 con la Lógica de Port Royal. En ella la evidencia del testimonio se dice externa o extrínseca, la evidencia de las cosas se dice interna y es un concepto nuevo. No debe confundirse con la verosimilitud. La evidencia interna se obtiene por inferencia, la verosimilitud se preocupa de que una cosa sea o no lo que parece o pretende ser. Este tipo de evidencia inductiva apunta más allá de sí misma, pero no es tampoco deductiva en el sentido de las demostraciones por reducción al absurdo, por ejemplo.

El concepto de evidencia interna es un legado de las ciencias experimentales, como la alquimia, la geología, la astrología o la medicina que, al no poder utilizar demostraciones, tuvieron que recurrir a alguna otra forma de prueba o comprobación. Eran ciencias que se movían en el campo de la opinión.

También hay que distinguir entre evidencia y experimento. Existen muy diversos tipos de experimentos, como la disección, el test o comprobación, etc., pero no todos proporcionan evidencia inductiva, sino de diversos tipos. Sólo la diagnosis utiliza una cosa como evidencia para otra. La evidencia inductiva significa ahora dos cosas: una evidencia extraida de una observación o experimento particular para una generalización o ley y un paso o inducción de lo particular a lo particular.

En la tradición aristotélica, la ciencia procedía por la demostración de los efectos a partir de las causas primeras. En la nueva ciencia había que inferir las causas a partir de los experimentos, de las observaciones empíricas, y se trataba de causas eficientes, no primeras.El viejo concepto de signo se transforma pues en un nuevo concepto de evidencia. Los primeros empíricos eran alquimistas, astrólogos, físicos. *Paracelso*, por ejemplo, sostenía una teoría de la similaridad, de la doctrina de las signaturas. Cada cosa tiene su signatura y el físico debe reconocerla. Las signaturas están derivadas en último término de las sentencias escritas en las estrellas, pero que son legibles también en la tierra. Todo está escrito, los nombres de las estrellas son signos y verdaderos nombres de las cosas. Los nombres son las cosas, la naturaleza es de este modo la autoridad que da testimonio de las cosas y éstas son por ello probables. Por ser la Naturaleza la autoridad, el concepto de probabilidad que ahora aparece estará conectado con regularidades y frecuencias. Hay un lenguaje divino que, al nombrar las cosas, las evoca, las crea. De ahí que la magia y la alquimia estén convencidas del poder de la evocación. Los signos pues no mienten, y nos dan una medida de la probabilidad de los sucesos inciertos. En 1640, *Hobbes* escribirá:

> *...Pues los signos son sólo conjeturales; y según se hayan equivocado raramente o con frecuencia, así su seguridad es mayor o menor; pero nunca es plena y evidente: pues aunque un hombre haya visto siempre el día y la noche sucederse el uno al otro, no puede concluir de ello que seguirán haciéndolo así, o que lo hayan hecho así eternamente; la experiencia no concluye nada de modo universal. Si los signos aciertan veinte veces y fallan una, un hombre puede apostar veinte a uno a ese suceso, pero no puede concluir que sea cierto.* [10]

Se puede decir que en este texto ya se dan todas las precondiciones para el concepto de probabilidad, sólo falta darle ese nombre. Tenemos la evidencia interna y la constatación de la frecuencia del suceso e incluso un comienzo de cálculo de las probabilidades. Tenemos ahora presente la situación en que se desarrolla la teoría de la probabilidad, el contexto filosófico y epistemológico de la época. Ya podemos observar el otro aspecto de la cuestión, el bagage técnico y matemático con el que se comenzaba. Así *Galileo* puede afirmar:

> *La filosofía está escrita en este gran libro, el univer-*

so, que permanece continuamente abierto ante nuestra vista. Pero el libro no se puede entender a menos que uno aprenda primero a comprender el lenguaje y a leer las letras en las que está compuesto. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas.[11]

Al estudiar la aparición del concepto de probabilidad nos encontramos con un doble origen, por una parte más bien frívolo e incluso condenado por la opinión en algunas ocasiones: los juegos denominados de azar, y por otra parte de meditación y profundización filosófica en problemas epistemológicos fundamentales en los que se embarcaron los mejores filósofos del siglo: *Leibniz, Pascal, Galileo.* También aparecen en estrecha relación con este concepto las ideas religiosas, y los problemas metafísicos y morales de mayor alcance, como es la demostración de la existencia de Dios, una de las primeras aplicaciones de la naciente teoría de la decisión. El aspecto subjetivo o epistemológico de la probabilidad se desarrolla paralelamente al avance de la teoría matemática,e incluso las aplicaciones más técnicas, como las tablas de mortalidad o las anualidades, aparecen teñidas de teología o de metafísica.

No entra esta investigación en las matizaciones y derivaciones más sofisticadas de la estadística actual, para centrarse sobre el concepto mismo de probabilidad que sostiene todo el edificio de la Estadística y buena parte de la Lógica inductiva actuales, pese a sus paradojas evidentes, debidas precisamente a su caracter mixto, aleatorio y epistemológico, que nos lleva al extremo de no poder disponer siquiera de una definición válida de probabilidad. Un caso parecido al de la Teoría de Conjuntos, donde disponemos también de una axiomática, aunque esté cuajada de paradojas, pero no contamos con una definición de conjunto.

Contemplaremos pues los precedentes y los primeros intentos de previsión o predicción de sucesos inciertos, lo que es conocido como la "prehistoria de la probabilidad", de los que derivan los primeros cálculos y que culminan en *Fermat* y *Pascal*, donde aparece ya el concepto formulado con rigor. Desde ese punto, los problemas que llevaban muchos años propuestos van resolviéndose con facilidad y elegancia y surgen los primeros tratados puramente técnicos. Se desarrollan los conceptos de esperanza matemática y de equiprobabilidad y, por lo tanto, la Teoría de la Decisión se perfecciona y formaliza.

Con *Bernouilli* podemos considerar totalmente construido el concepto de probabilidad. Lo que después vendrá será una mayor formalización: la axiomatización de *Kolmogorov* y otros, la Teoría de la Medida, las derivaciones lógicas de *Keynes*, *Carnap*, etc.

La teoría aparece pues curiosamente "construida" mientras que las controversias sobre la naturaleza de la probabilidad continuan. En la mayoría de los dominios de la matemática se considera que, cuando se ha elaborado una axiomática satisfactoria, el problema de los fundamentos está resuelto, pero, como hemos dicho, no ocurre así en la Teoría de la Probabilidad.

Las alternativas que aparecen a la axiomática del cálculo de probabilidades son escasas y en general se trata de condiciones "más débiles" que permitan aplicar la probabilidad a un mayor número de acontecimientos.

La misma naturaleza de los problemas que el estadístico intenta resolver es lo que impide considerar la probabilidad en un plano exclusivamente formal y eludir de ese modo las cuestiones epistemológicas.

El fondo de la cuestión es el siguiente: si la probabilidad es el reflejo de una incertidumbre, si mide el grado de certeza, surge la pregunta de si todo sentimiento de incertidumbre se puede representar mediante una probabilidad en el sentido matemático.

Se han intentado recientemente algunas innovaciones para lograr formalizar la incertidumbre. Entre ellas, por ejemplo, reducir las probabilidades a su aspecto ordinal, pero con este tipo de escala se llegaba a paradojas y además el sistema resultante era muy pobre. También se intentó asociar a cada acontecimiento un intervalo de probabilidad en lugar de un valor puntual, pero con ello se llega de nuevo al cálculo clásico. Por último, se ha intentado sustituir la probabilidad por el concepto de "sorpresa potencial": las probabilidades asociada a diferentes sucesos son independientes y con ello varios sucesos mutuamente excluyentes pueden poseer sorpresas potenciales nulas, lo cual no equivale a la certeza. Pero, con este artificio, creado por *Shakle*, el sistema es muy pobre.

También *Bertrand Russell* , en El Conocimiento Humano, hace una división en dos clases de concepto de probabilidad, el matemático y ese cierto"grado de creencia racional" :

Tanto: en la ciencia como en el sentido común sucede al revés que en lógica deductiva o en matemáticas: cuando las premisas son ciertas y el razonamiento es correcto, el resultado es sólo probable.

La probabilidad matemática surge siempre de una combinación de dos proposiciones, una de las cuales puede ser conocida completamente, mientras la otra es completamente desconocida. Por ejemplo, podemos conocer la composición de una baraja, pero desconocer la carta que va a salir.

El problema surge porque hay varios conceptos esencialmente diferentes que tienen el mismo derecho a ser denominados probabilidad y que los diferentes autores tienden a mezclar. La teoría matemática de la probabilidad está formada actualmente por un conjunto de axiomas y cualquier concepto que satisfaga dichos axiomas puede ser llamado probabilidad. Las dificultades en la elección de ese concepto serían así extra-matemáticas.

Nos encontramos pues con que el cálculo de probabilidades es aceptado por todos, pero no sucede así con el concepto de probabilidad, que es motivo de grandes controversias. Esta situación no es especial en matemáticas, como ya hemos dicho antes, ha sucedido con muchos otros temas:el cálculo infinitesimal, los números naturales, etc.

Por último, citaremos las dos tendencias fundamentales que están a la base de la Teoría de la Probabilidad: aquella que supone que el azar no es más que la medida de nuestra ignorancia, de nuestra carencia de datos , pero que vivimos en un universo regido por leyes coherentes en el que no existe lo imprevisto, y aquella que sostiene que el azar está presente en la naturaleza del universo y de nuestra experiencia. *Kasner* y *Neuman* afirman:

> *Pero sabemos muy pocas cosas de la mayor parte de los fenómenos que nos rodean. No conocemos las leyes a las que obedecen, ni siquiera sabemos si obedecen a leyes... Podemos predecir el movimiento de planetas que se encuentran a millones de kilómetros de nosotros en el espacio, pero nadie puede predecir lo que sucederá cuando se lanza al aire una moneda, o si se lanzan un par de dados sobre el tapete. Apuntamos en la cuenta del azar los sucesos de esta categoría y muchos otros. Pero azar no es más que un eufemismo para ignorancia. Decir que un suceso está determinado por el azar, es decir que no sabemos lo que le determina.*
>
> *Sin embargo, incluso en el reino del azar, sentimos una cierta regularidad, una cierta simetría, un orden en el interior del desorden. Así incluso respecto a los sucesos que atribuimos al azar, tenemos varios grados de creencia racional. La teoría de la probabilidad concierne a lo que se llama paradójicamente las "Leyes del azar".*[12]

Por el contrario, el uso de un método probabilístico para describir algunos problemas de genética y de física en el siglo pasado, palidece cuando a comienzos de siglo *Bohr, Heisenberg, Schrödinger* exponen la mecánica nuclear en una línea probabilística. Con el nacimiento de la física cuántica, el cálculo de probabilidades ya no trata con juegos de azar, sino con la estructura misma del universo y ahora la experiencia y aquello que se experimenta es esencialmente probabilístico. Por eso dice *Eddington*:

> *En el origen, la aplicación de la probabilidad a la física se limitaba casi exclusivamente al tratamiento de los errores de observación (especialmente en astronomía, que parece haber poseído la dudosa distinción de ser el tema que proporciona más vasto campo de aplicación a la teoría de los errores). Con el desarrollo de la termodinámica, y el análisis de la materia en un gran número de partículas independientes que se mueven al azar, la probabilidad ha entrado más íntimamente en los problemas fundamentales de la física. Hoy (1935) el símbolo capital de la mecánica ondulatoria, el misterioso ψ que el físico de los quanta persigue de ecuación en ecuación, es identificado con la probabilidad. En las teorías más modernas de la física, la probabilidad parece haber reemplazado al eter como "sujeto del verbo ondular".*[13]

Para terminar este capítulo introductorio, debe saber el lector que, en las traducciones que se proponen de los autores clásicos e inéditos en castellano, nos ha movido más la fidelidad a la precisión técnica que la belleza li-

teraria de la versión castellana y que además se ha renunciado a efectuar ningún tipo de uniformización o modernización del lenguaje de los diferentes autores, pues ello destruiría precisamente lo que queremos estudiar: cómo el modo de expresión, en definitiva el método de un investigador,en su conjunto, influye poderosamente sobre los resultados que obtiene, así como sobre los errores que comete, y la gran importancia que ello tiene para el desarrollo posterior de la ciencia.
En los capítulos siguientes se estudia exhaustivamente el desarrollo de las investigaciones de *Galileo*, *Cardano*, *Pascal y Fermat* etc. y se tratan de analizar las estructuras mentales o los puntos de partida científicos que los diferentes autores aplican y que condicionan sus trabajos. Al final de este estudio se recogen las conclusiones obtenidas

NOTAS A LA INTRODUCCION

1.- PARMENIDES: El Poema, versión de Agustín García Calvo.

2.- BYRNE, Edmund: Probability and Opinion, 1968, p.55.

3.- REICHENBACH, Hans: The Theory of Probability, 1971, p.3.

4.- Ibid, p. 4.

5.- KNEALE, W.: Probability and Induction, 1966, p.8.

6.- POPPER, Karl: La lógica de la investigación científica, cap. VIII, p. 138-9, 1967.

7.- KEYNES: A Treatise of Probability, 1973, cap. I, p.3-4.

8.- HACKING, Ian: The emergence of Probability, 1975, p.9.

9.- DIEUDONNE, Jean: Abregé d'Histoire des Mathématiques, 1978, II, p.281.

10.- HOBBES: Humana Nature, 1651, IV, 10.

11.- GALILEO: Discoveries and Opinions of Galileo, 1957, Stillman Drake, p.237.

12.- KASNER & NEWMAN: Les Mathématiques et l'Imagination, 1970,

13.- EDDINGTON, Sir Arthur: Nouveaux Sentiers de la Science, 1936, p.141.

BIBLIOGRAFIA

Consultar la bibliografía general al final de este trabajo.

De las obras de Aristóteles se ha utilizado en este capítulo:

*Física, II, 3, 4-6.

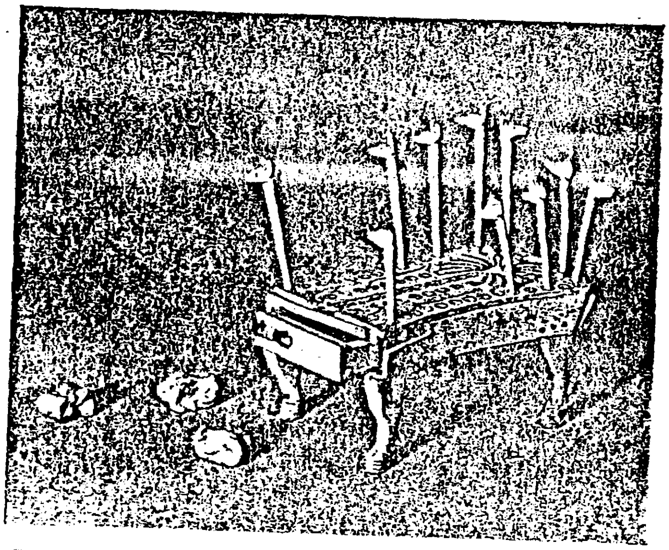
*Metafísica, Δ , 30

LA PREHISTORIA DE LA PROBABILIDAD

Si queremos rastrear el origen de la teoría matemática de la probabilidad, encontraremos grandes, si no insuperables, dificultades. Parece claro que el tránsito a lo científico se produce en los juegos de azar, pero incluso en este punto aparece la dificultad.El origen de los juegos de azar es imposible de determinar.

Los astrágalos o huesos de taba aparecen en las excavaciones arqueológicas con mucha mayor frecuencia que cualquier otro hueso del cuerpo de los animales, pero no es evidente que de ello podamos deducir que se utilizaran para juegos de los llamados "de azar". Hay otras muchas razones para su pervivencia: por ejemplo, su tamaño y forma los hacen menos frágiles que los huesos largos. Las evidencias más antiguas de utilización de las tabas para juegos de azar aparecen entre los griegos y tembién en Egipto en tiempos de la primera Dinastía. Alrededor de 1800 años antes de JC.se jugaba al precioso juego denominado "Perros y Chacales", que consta de un tablero en el que se ćolocan unos punzones con cabezas de perro o de chacal según los resultados del lanzamiento de unas tabas.

Herodoto escribe en el año 500 a. de J.C. acerca del modo en que resolviero en Libia una época de hambre que tuvo lugar alrededor del 1500 a. de J.C. Jugaban durante todo un día sin parar, de manera que no pudieran sentir el hambre,



The board game of "Hounds and Jackals" (*c.* 1800 B.C.), from the tomb of Reny-Soube at Thebes, Upper Egypt (*see page* 4)

The wooden stand is overlaid with ivory and ebony

(*By courtesy of the Metropolitan Museum of Art, New York*) y al día siguiente comían y no jugaban, y de este modo pasaron 18 años. Durante la guerra de Troya fueron inventados diversos juegos para sostener la moral de los soldados, y en general aparece en muchos autores esta utilización tolerada de los juegos en situaciones críticas o dolorosas, con el fin de distraer de las preocupaciones.

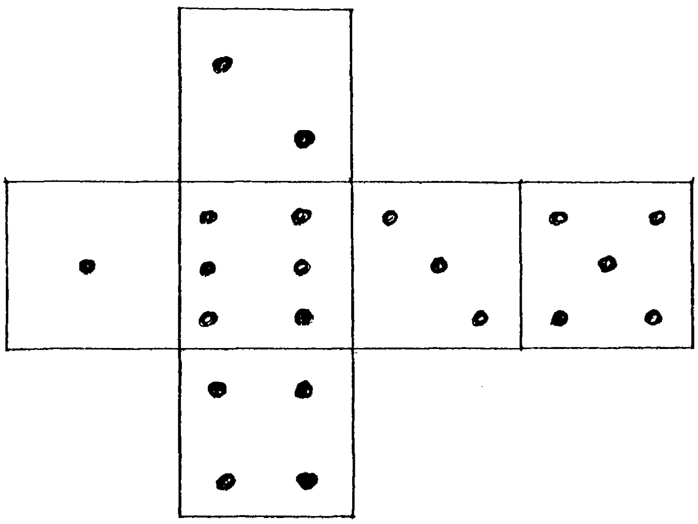
En cualquier caso, los griegos del primer milenio a.de J.C. jugaban a las tabas, (mayores y pequeños). Posterior_mente también los romanos jugaron con gran pasión con estos astrágalos.

El astrágalo tiene sólo cuatro caras, que son todas ellas desiguales. El valor que se les asignaba no era, sin embargo, proporcional a su facilidad o probabilidad. La peor tirada, una de las caras pequeñas, era el 1, al que llamaban el perro. Pero la cara opuesta valía 6, siendo casi igualmente dificil.

La mejor tirada se llamaba Venus, y se realizaba con cuatro tabas, cuando todas las caras salían distintas.

Posteriormente los astrágalos se fabricaron también en piedra, con símbolos grabados en sus caras.

El dado cúbico más antiguo que se ha encontrado data de 3000 años antes de J.C., es de cerámica y se encontró en Irak. La ordenación de los puntos sobre las caras varía bastante según los lugares y las épocas, pero la ordenación más común es la siguiente:



Las ordenaciones fijas tenían el sentido de ser rápidamente comprobables para evitar las trampas. También se han encontrado dados trucados, en los que una trampilla permitía, al correrse, introducir una bola de plomo o material semejante que daba al dado una tendencia determinada.

El juego alcanzó en Roma tal importancia que se llegó a prohibir en determinadas ocasiones y épocas del año.

Al construir dados a imagen del cubo como figura geométrica regular, parece extraño que los griegos no vieran ya la equiprobabilidad teórica de todas las caras del dado. *F.N. David* explica este enigma por dos razones: la imperfección de los dados en su ejecución material y su uso en ceremonias religiosas. La adivinación mediante dados, astrágalos y otros materiales estaba muy extendida en la antigüedad.

En las primeras épocas del Cristianismo el juego era reprobado y censurado, aunque se encuentran sorprendentes excepciones de juegos de azar "piadosos". De hecho, la prohibición no iba contra los juegos de azar en sí mismos, sino contra los vicios y calamidades que les acompañaban. Así en tiempor de Luis XI, en Francia en 1255, se prohiben "los juegos de dados y el ajedrez, la fornicación y la frecuentación de las tabernas", e incluso la fabricación de dados.

La palabra "lot", lote y también suerte, fortuna, es de origen germánico y, en los pueblos primitivos era usual el empleo del azar para sortear lotes. De esta palabra surge posteriormente la lotería.La adivinación y los sortilegios fueron considerados paganos y prohibidos por la Iglesia Católica, aunque también ella participaba en cierto modo de estos juegos de azar. Antiguamente, las vacantes importantes en la jerarquía sacerdotal se adjudicaben por sorteo, y se suponía que la elección divina se manifestaba de ese modo. Hay muchos otros casos en que el azar era asimilado a la voluntad de los dioses que mostraban así sus designios,o bien una verdad oculta.

En esta etapa, el problema de la equiprobabilidad de cada una de las posibilidades obviamente carecía de importancia, pues el dios que mostraba su voluntad por medio del azar no iba a verse estorbado por ningún dado cargado. No obstante, desde muy antiguo los hombre aprendieron a cargar los dados, lo cual hace pensar al menos en una oscura intuición no formulada de la idea de equiprobabilidad. Pero desde luego todavía no se intenta en ningún momento calcular esa probabilidad.

A los griegos se debe principalmente el desarrollo de la lógica científica y a ellos se les ocurrió la idea de enumerar las probabilidades o causas. *David* cita la anécdota del perro de caza utilizada por *Crisipo*:

> *Un perro que persigue a su presa llega a un lugar en que el camino se divide en tres. Trata de encontrar el rastro en dos de ellos y luego continúa por el tercero sin echarlo a suertes. Así, si hay un número fijo de posibilidades y se descartan todas menos una, la que queda debe ser la buena*[1].

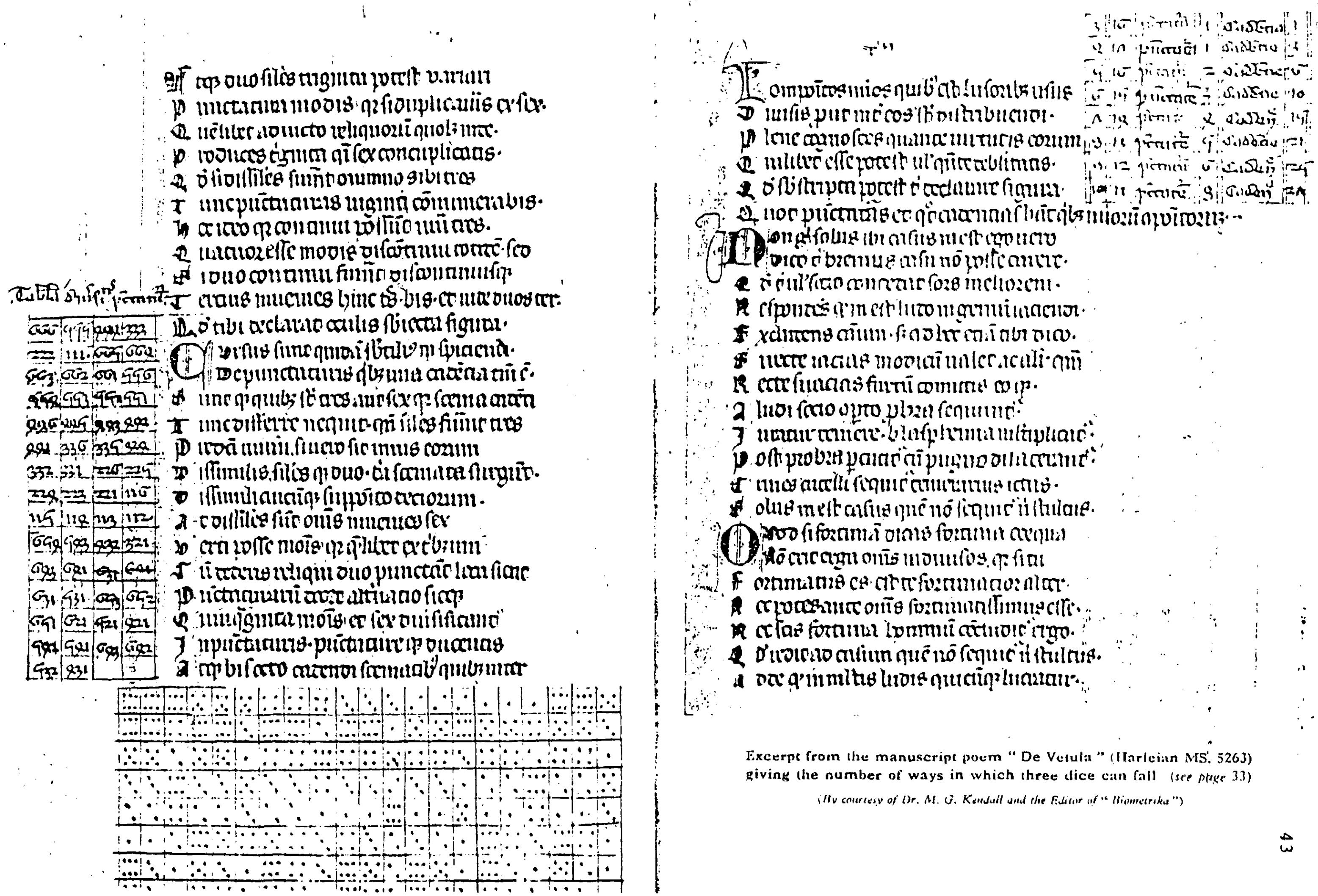
Según *M.G. Kendall*, el obispo Wibold de Cambray inventó, en el año 960, un juego de dados piadoso: se lanzaban tres dados, y cada uno de los resultados de sumar sus puntos (56), se asignaba a una de las 56 virtudes enumeradas por Wibold, de modo que quien había lanzado el dado debía concentrarse en esa virtud por un periodo determinado de tiempo. Se observa que los casos posibles considerados en este juego eran las particiones, y así será durante mucho tiempo antes de que se consideren todos los casos realmente posibles, que serían $6^3 = 216$. En el caso citado, el orden de caida de los dados no se tiene en cuenta y así parece que sucedía también en la tradición pagana.

No obstante ese es el primer tratado conocido en el que se enumeran los casos posibles. El número de particiones posibles al lanzar tres dados se enumera también en versos latinos en el poema De Vetula (c.1200) de autor no identificado que aparece reproducido en la página siguiente.

Parece claro que desde la antigüedad hasta el Renacimiento se juega sin interrupción y que durante la Edad Media todas las clases sociales jugaban a juegos de azar.

En cuanto a los tipos de juegos, los romanos parece que jugaban con cuatro astrágalos o tabas (tali) y con tres dados (tesserae). Posteriormente surgen gran cantidad de variedades de juegos de dados: el quinquenove, el azar, el primero, el juego de los tres dados, etc. Muchos de estos términos eran españoles o italianos,como el Primero, el Juego del Hombre, etc. Otros árabes, como el Hazar. En cuanto a las reglas de estos juegos, los manuales de la época las dan generalmente por sabidas, con el resultado de que solamente de aquellos juegos que han seguido jugándose hasta la actualidad pueden conocerse las reglas.

Posteriormente, con la invención de la imprenta, comienzan a aparecer tratados sobre los diferentes juegos de la época, aunque todavía en un estilo descriptivo y sin tratar de calcular ninguno de los resultados posibles. Ejemplos de estos tratados son el de *Leonico* (1456-1531), Sannutus, sive de ludo talario, o el de *Calcagnini* (1479-1541), De talorum tesserarum ac calculorum ludis ex more veterum. Hasta *Cardano* no



Excerpt from the manuscript poem "De Vetula" (Harleian MS. 5263) giving the number of ways in which three dice can fall (*see page 33*)

(By courtesy of Dr. M. G. Kendall and the Editor of "Biometrika")

encontramos un tratado que intente calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados.

El cálculo de probabilidades tarda mucho en emerger, por lo que vemos. Las razones que se ofrecen como explicación de esta circunstancia son muy variadas. La falta de un álgebra combinatoria, por ejemplo. Aunque ello no fué un obstáculo para *Galileo* ni para *Cardano*.

Otra de las teorías que se sugieren para explicar la falta de desarrollo de los conceptos de aleatoriedad y de estabilidad de los grandes números es que los mismos filósofos, sobre todo *Platón* y *Aristóteles*, esperaban encontrar regularidad, orden y repetición del movimiento en los cuerpos celestes, pero no esperaban tal cosa en los sucesos que les rodeaban, y por lo tanto, no lo buscaban. La tesis de *David* es que el paso no se dió porque el desarrollo filosófico de la época engendró un hábito de la mente que hizo imposible la construcción de hipótesis teóricas a través de los datos empíricos.

Hay otras muchas teorías para explicar por qué las ideas de frecuencia, aleatoriedad y probabilidad sólo aparecen recientemente. Algunas de ellas son enumeradas por *Hacking*:

La obsesión por el determinismo habría hecho imposible cualquier pensamiento de aleatoriedad; pero en Europa se comenzaron a comprender los conceptos de aleatoriedad, azar, probabilidad, etc. precisamente en el momento en que las opiniones teológicas sobre la presciencia divina se veían reforzadas por el éxito de los modelos mecanicistas, es decir, en el momento menos favorable si esa interpretación fuese la correcta.

También hay quien sostiene que predecir el futuro estaría prohibido por razones religiosas, y el papel de los dados en la adivinación haría impío tratar de calcular lo que los dioses iban a decir. No obstante, había muchos impíos que jugaban a los dados sin cesar y ésto hubiera sido más bien un incentivo para encontrar algunas reglas o leyes aritméticas elementales acerca de los dados. Sin contar con que los sacerdotes y adivinos solían hacer trampas en sus predicciones y les hubiera venido muy bien poder calcular con perfección y exactitud esos efectos.

Otra teoría señala que para concebir las leyes de la probabilidad serían necesarios algunos ejemplos empíricos fáciles: dados perfectos, por ejemplo. Los primeros ejemplos emplean siempre lo que *Neyman* llama un Conjunto Fundamental de Probabilidad, en el que todos los casos serían equiprobables. Por tanto, anteriormente a esto, no se habrían encontrado ejemplos empíricos de equiprobabilidad, sólo las tabas y dados imperfectos. No obstante, los dados de marfil y otros materiales muy uniformes son muy antiguos, y *Hacking* afirma haber comprobado que los dados egipcios del Museo del Cairo, de aspecto irregular, estaban tan bien equilibrados que sugerían la posibilidad de haber sido corregidos o limados para conseguirlo.

La teoría económica, defendida por *L.E. Maistrov* diría que la ciencia se desarrolla para responder a necesidades económicas. Se podría afirmar que la ciencia se desarrolla en respuesta a los problemas que ella misma crea o bien en respuesta a problemas que le son impuestos desde el exterior. Hasta muy recientemente lo que ha sucedido ha sido que el estímulo provenía de otras disciplinas.En el siglo XVII, los seguros y las anualidades que estaban en uso obligaron a calculas las esperanzas de vida, etc. En el siglo XVIII fué necesaria una teoría de la medida, sobre todo en astronomía. A finales del siglo XIX el análisis de los datos biológicos exigió la creación de la biométrica o psicometría. La mecánica estadística requiere una profundización en el análisis del concepto de probabilidad. Las necesidades de la agricultura y los experimentos de la medicina han desarrollado la estadística en el siglo XX. Todas estas necesidades podrían analizarse como económicas, pero sigue sin quedar explicado el origen mismo de la probabilidad. Como dice *Hacking*, es cierto que los primeros cálculos de posibilidades fueron en Europa los de *Paccioli*, en 1494, pero estas obras teóricas no eran capaces de resolver los problemas que planteaban. Nadie sabía resolver esos problemas antes de 1660 y, a partir de ese momento, todo el mundo sabía.

La génesis económica de la probabilidad sería una explicación externa. También se podría dar una explicación interna: las matemáticas no habrían dispuesto de una riqueza suficiente de ideas o de medios para generar el cálculo de probabilidads. Desde luego es evidente que faltaba un simbolismo adecuado que hiciera facil la adición o cualquier otra operación aritmética, de hecho la probabilidad matemática parece tener un origen árabe y los primeros probabilistas fueron italianos.

En cualquier caso, lo interesante no es tanto saber cómo y por qué llegaron los hombres a estudiar objetos como el concepto de probabilidad (ese sería un tema para los historiadores), sino cómo nació ese concepto. Las condiciones previas para la probabilidad consistirían en algo que no es probabilidad, pero que sufrió una transformación y se convirtió en probabilidad. El doble caracter epistemológico y aleatorio al que antes hemos aludido y que caracteriza a la probabilidad que nace con *Pascal y Fermat* es una de las claves para su nacimiento.

Todhunter escribe en 1865 su libro sobre la Historia de la Teoría matemática de la Probabilidad desde el tiempo de Pascal al de Laplace, y en él dedica sólo seis páginas de las 618 de la obra a los predecesores de *Pascal*. Esto, desde el punto de vista de la Teoría de la Probabilidad, es lo correcto, como acabamos de comentar, pues antes de Pascal no se resolvían los problemas fundamentales de la probabilidad, punto que analizaremos detalladamente a continuación, y posteriormente a *Laplace*, la teoría estaba ya construida.

La pervivencia de esos primeros juegos de azar a los que hemos aludido como punto de partida del concepto de probabilidad, se pone de relieve en la curiosa enumeración de juegos prohibidos que estaba vigente en Venecia en época tan reciente como 1940.(Ver lámina pagina siguiente).La fuerza y la fascinación que ejerce el azar sobre el hombre es perdurable y ha sido científicamente fructífera, como se verá.

IL QUESTORE
DELLA PROVINCIA DI VENEZIA

Vista la domanda prodotta dal Sig. ______________________________
di ________________ con la quale chiede il permesso di tenere giuochi leciti nel suo esercizio di ______________ in Comune di ______________ in via ______________ N. ____

Visti gli art. 86 e 110 del T.U. delle Leggi di P. S. approvato con R.D. 18-6-1931 n. 773 e art. 194 e 195 del relativo Regolamento 6-5-1940 n. 635;

PERMETTE

al suddetto Sig. ______________________________ di praticare giuochi leciti nel suo esercizio sotto l'osservanza delle Leggi e Regolamenti in vigore con la comminatoria di revoca in caso di trasgressioni.

TABELLA DEI GIUOCHI PROIBITI

CARTE

Basetta	Goffo	Ramino
Bestia	Lanzichenetto	Rubbly
Berlina	Lasquenet	Stoppa
Burro	Mazzetti (Erbette)	Sette e mezzo
Biribizzo	Macao o gioco del 9	Spili
Cucù	Maus	Tombolone
Caratella	Mercantè	Toppa
Camuffo	Mercante in fiera	Trenta Quaranta
Concincina	Pitocchetto	Trentuno
Cricche Chiogglotte	Primiera	Turchinetto
Conchino o Conchen	Piattello (35 mediatore)	Turchetto
Dodici punti	Passa e manca dieci	Undici e mezzo
Ecartè	Ponsette	Ventun - punto
Flussata	Poker	Zecchinetta
Faraone	Ponto	
Fott ball star o tempo	Quindici	

BIGLIARDO

Battifondo	Campanello	Ponte
Bigliardo inglese	Giardinetto	Rossa bianca
Bigliardo a trottola	Macao con birilli	Rossa nera
Bigliardino	Nove o carretella	Trucco inglese

ALTRI GIUOCHI

Albero imperiale	Lotteria mercantile	Gomet
Bianca o bella bianca	Morra	Jumbo
Bigliardino americano	Morra muta	Pit Ball
Bamaffo	Mettimetto	Rotor Mondial
Carosello	Buldozer	Super Jumbo
Cavallini	Derby Luxus	Tre carte
Dadi	Gru Pesca	Tre noci
Apparecchi tipo Flipper	Rotor	Tre portafogli
Astoria	Slot-Machines	Tornello (Pirla)
Ideal	Pirla	Treno lampo
Gru Magnetiche	Passatella	Virotto
Rotary	Pari e dispari	Duplex
Rol a Top	Pesca reale	Gru Elettriche
Fiera	Riffa	Rotamint
Gibellino	Roulette	Royal Luxus
Indovinello	Testa o croce	Unione Luxus
Lottino	Tombola	

Sono vietati, altresì, le scommesse di qualsiasi genere e tutti gli apparecchi da giuoco che offrano la possibilità di vincere un qualsiasi premio, anche se questo sia costituito da una consumazione ovvero dalla semplice ripetizione della partita.

E' vietato, infine, ai minori degli anni 18 (diciotto) di partecipare a qualsiasi genere di giuochi, anche se leciti.

Il divieto deve essere reso noto con apposito cartello affisso al pubblico a cura del titolare della presente autorizzazione.

I contravventori saranno puniti a termine degli artt. 650 - 718 e 723 del C.P., salva ogni altra sanzione che in linea amministrativa, potrà essere applicata a carico del titolare della presente autorizzazione.

Venezia, li ______________ IL QUESTORE

Grafiche F.lli MORELLI - Dolo - Venezia - Tel. 410.012

NOTAS

1.- DAVID, F.N.: Games, Gods and Gambling, 1962, cap.III, p. 23.

Láminas extraidas de la obra anterior y de la Alcaldía de Venecia.

LOS PRIMEROS CALCULOS

En el siglo XVI aparecen algunos tratados comerciales en los que se intenta una "aritmética" de los fenómenos aleatorios, aunque los casos de aleatoriedad son los menos en esos ámbitos y sus autores no tenían noción de que trataban con un nuevo tema. Les interesaba sobre todo el reparto de las ganancias, y sus estudios son considerados como el comienzo del álgebra en Europa.

Como hemos visto en el capítulo anterior, las afirmaciones interesantes sobre el tema de la probabilidad aparecieron mucho antes que los cálculos mismos. Los cálculos aproximados y los primeros intentos de generalización aparecen ya en autores como *Tartaglia*, *Peverone*, *Cardano* y *Galileo*, todos ellos previos a la matematización que realizarán *Pascal* y *Fermat* ya en el siglo XVII.

En estos inicios del cálculo de probabilidades se encuentran dos tipos diferentes de problemas: los problemas de combinatoria y los de juegos de azar repetidos, donde una de las dificultades principales era la de la división de las ganancias en un juego interrumpido antes de su conclusión.

Los problemas de combinatoria, por su parte, permanecen ligados a los signos y a la magia hasta que el signo mismo se libera de ese entorno en el siglo XVII. *Raimundo Lulio* es considerado como el creador de la teoría de combinaciones. Esperaba representar todos los elementos del mundo por sus signos o símbolos verdaderos y después, por combinación de esos signos, producir signos verdaderos para todos los posibles componentes del universo. Este mismo proyecto es el que anima a *Leibniz* al escribir el *Ars Combinatoria*, que es probablemente uno de los proyectos de formalización más ambiciosos e interesantes. La enumeración de las combinaciones es sin embargo muy antigua, la primera que se conoce es la de los resultados posibles de tres dados, descrita por *Kendall*, y es un método para predecir el futuro (El poema latino manuscrito *De Vetula*, probablemente del siglo XIII). Hasta *Pascal* no se liga la combinatoria a los problemas de la división de las apuestas.

Los problemas de la división son también muy antiguos. En el siglo XV, en Italia, encontramos intentos de aplicar el álgebra recién aprendida a los problemas de juegos. Dos o más jugadores compiten por un premio que se logrará cuando alguno de ellos haya ganado n juegos. Si el juego se interrumpe de mutuo acuerdo antes de ese momento, ¿Cómo repartir o "dividir" el premio?

Luca Paccioli se plantea este mismo problema con juegos de pelota. La obra por la que es famoso, desde el punto de vista de la probabilidad, es la *Summa di Arithmetica, Geometria e Proporcionalita*, impresa en Venecia en 1494. En esta obra, *Paccioli* hace una refundición del *Liber Abaci* de *Leonardo el Pisano*, por lo tanto no se trata de una obra muy original, ni tampoco se puede decir que *Paccioli* fuera un gran matemático, no obstante su mérito estriba en que recopila los conocimientos matemáticos de la época. Uno de sus ejemplos es el siguiente:

> *"A y B están jugando un juego honesto* (equitativo) *de* <u>*balla*</u>. *Se han puesto de acuerdo en continuar hasta que uno de ellos haya ganado seis juegos. El juego se detiene no obstante cuando A ha ganado cinco juegos y B, tres. ¿Cómo deben dividirse las apuestas?"*

Nosotros diríamos que 7 a 1, pero *Paccioli* considera que 5 a 3, y durante bastante tiempo nadie fué capaz de encontrar la solución correcta.

Cardano (1501-1576) en su obra <u>*Liber*</u> <u>*de*</u> <u>*Ludo*</u> <u>*Aleae*</u>, escrita alrededor de 1546, pero publicada después de su muerte, en 1663, intenta también resolver este tipo de problemas. El manuscrito se va corrigiendo a sí mismo sin volver hacia atrás, de forma que aparecen errores que después son eliminados. Aunque hay que decir que sus errores son pocos y provienen del métodos empleado: *Cardano* carecía todavía de una simbología adecuada y tenía que recurrir constantemente a los ejemplos concretos. En particular, no utilizaba, salvo inconscientemente los teoremas de unión e intersección de sucesos que llamamos teoremas de la probabilidad total o compuesta y que veremos más adelante. Utiliza dos métodos: el recuento directo de las diferentes posibilidades y el razonamiento a partir de la ganancia media, cuando el recuento le resulta demasiado largo o complicado. Este último medio le proporciona sólo una aproximación, que no le pasa inadvertida, pero es incapaz de dar razón de las discrepancias. Como ilustración proponemos aquí una traducción de las partes de su obra, inédita en castellano, en las que se hace un estudio bastante exhaustivo de los problemas de dados, omitiendo aquellos capítulos anecdóticos y los que tratan de juegos de cartas ya en desuso y desconocidos en nuestros días. El interés de este análisis radica a nuestro juicio en el método que sigue el autor para obtener sus conclusiones: la comparación con la igualdad o probabilidad 0,5 que resulta muy original, aunque en ocasiones le lleva a generalizaciones apresuradas y a errores. Comienza la obra con unas consideraciones y consejos acerca de las condiciones en las cuales se debe jugar: lugar apropiado, contrincantes y dados honestos, es decir, no trucados, y en el capítulo noveno entra de lleno en el estudio del caso más sencillo: un único dado.

<u>*Del lanzamiento de un dado*</u>

El astrágalo tiene cuatro caras, y así también cuatro puntos (valores o números diferentes). *El verdadero dado, seis; dándole seis revoluciones debe aparecer cada punto, pero si alguno se repite, es necesario que los otros no aparezcan; los puntos son representados sobre planos, de manera que se puede ver y por tanto dibujar (el astrágalo) c apoyado sobre cualquiera de los lados; aunque no está ahora en uso como tal y los niños juegan con ellos haciéndolos girar como una peonza y como si no tuvieran forma de dado. Por otra parte, la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, y así un punto sale (en el dado) en tres tira-*

das, pues en seis se completa la revolución, o bien saldrá uno de tres puntos en una tirada, por ejemplo, se puede obtener 1, 3 o 5 de igual manera que 2, 4 o 6.

La igualdad se produce cuando la probabilidad es 1/2. En el caso de un solo dado, la probabilidad de cualquiera de sus caras, supuesto el dado perfecto, es 1/6, luego la igualdad estará en tres tiradas: 3/6 = 1/2. Es cierto que uno de tres puntos saldrá con igualdad en una tirada , por ejemplo, $p(\text{número par}) = p(2) \cup p(4) \cup p(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$. Pero para que un punto determinado salga en tres tiradas, sólo tendría razón Cardano si no fuera posible que ese punto saliese dos o tres veces en las tres tiradas, como si habiendo salido una sola vez, desapareciera ya del dado y no pudiera repetirse, volver a salir. Este sería el caso si estuviéramos sacando bolas numeradas de una urna, con números del 1 al 6, ninguno repetido, y cada vez que sacásemos una bola de la urna no la volviéramos a introducir en ella. Pero para eso necesitaríamos un número de bolas mucho mayor, tendiendo a infinito, pues si no, las probabilidades no se mantendrían constantes en cada extracción. La fórmula que debe aplicarse aquí y que *Cardano* desconocía, dado que no utilizaba ninguna fórmula, es:

$$\begin{aligned} p(A \cup B \cup C) &= p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) \\ &\quad - p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C) = 1/6 + 1/6 + 1/6 \\ &\quad - 1/36 - 1/36 - 1/36 - 1/216 = 89/216. \end{aligned}$$

y no 108/216. Para obtener 108 habría que hacer:

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$, es decir, como si las intersecciones fueran imposibles y su probabilidad, por lo tanto, cero.

> *Por tanto, se pactará con seguridad de acuerdo con esta propiedad, si el dado es justo, y tanto más o menos cuanto más difiera de la verdadera igualdad. Como dije, esto contribuye verdaderamente para comprender mejor, pero apenas nada en la práctica.*

Cardano se refiere aquí a que, al carecerse todavía de una teoría contrastada, aún en los casos en que tenían la razón, los matemáticos se veían en dificultades para convencer de ello a los jugadores, que llegaban a sus acuerdos privados sin escucharles, e incluso los mismos matemáticos no estaban muy seguros de sus cálculos.

> *Capítulo Décimo*
>
> *Por qué fué condenado el juego por Aristóteles*
>
> *Por tanto, si descendemos a hablar del juego, y del mismo juego de azar, del que hablaremos más adelante, no excusaré a nadie, especialmente a aquellos que, para el gran perjuicio del ánimo, apuestan dinero, y declaro infame al juego de azar, pues el hombre se lucra en él a costa de su amigo y contra la voluntad de éste. Pues lo óptimo es el lucro de aquellos que lo quieren y lo saben; en segundo lugar, de los que lo saben y no lo quieren. En el primero de estos géneros están los juristas y los médicos, en el segundo, los mercaderes. El tercer género es el de aquellos que saben pero no quieren y además son ami-*

gos, como sucede en el juego de azar. El cuarto es el de los que no lo quieren ni saben, como al hacer trampas. El quinto es el de los que no quieren y saben pero no son amigos, como en el robo.

(Aristóteles, Etica a Nicómaco, 4. capí 1 in fine) expone otras causas cuando dice: "Los jugadores como los ladrones, como los bandidos, son viles, pues están sórdidamente inclinados al lucro; todo lo que hacen lo hacen por esta causa y por ello incurren en reprobación. Aunque los ladrones corren grandes riesgos procurándose el dinero de los demás, y en cambio los jugadores se lucran a costa de los amigos, a los que más bien deberían dar. Por tanto, los que se quieren lucrar donde no deben, están sórdidamente inclinados al lucro, y todos ellos, al llevar a cabo tales actos, son hombres viles"; además, un jugador es perjuro y blasfemo y es al mismo tiempo pródigo y avaro, y si no fuera así por naturaleza, se volverá iracundo; alimenta vanas esperanzas y es un corruptor de la juventud. Los cristianos hacían todo esto, y por ello eran condenados por los antiguos, en cambio no admitían los juramentos, de modo que perseguían los pecados menores. En cuanto a los príncipes, entre los que este mal toma auge, ellos quieren permitírselo todo, y de este modo, como dije antes, el juego de azar es una cosa pésima para la república. No obstante, en tiempos de grandes desgracias y temor y cuando incluso las más grandes mentes están *perturbadas, el juego es más eficaz contra las preocupaciones que el ajedrez, pues establece una esperanza en la fortuna; y no implica al hombre entero como éste. Los juegos corporales en esos momentos son insanos y peligrosos.*

Capítulo Undécimo

Del lanzamiento de dos dados

En el lanzamiento de dos dados, los puntos iguales dos a dos son 6, los desiguales son 15, y duplicados son 30, por lo tanto todos son 36.

Los puntos iguales dos a dos serán (1,1), (2,2), (3,3) (4,4), (5,5) ,y (6,6). Los desiguales son 15:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5) (1,6)

(2,3), (2,4), (2,5), (2,6)

(3,4), (3,5), (3,6)

(4,5), (4,6)

(5,6) Y duplicados, es decir, en la otra permutación, son otros 15:

(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)

(3,2), (4,2), (5,2), (6,2)

(4,3), (5,3), (6,3)

(5,4), (6,4),

(6,5) así son las combinaciones de 6 elementos tomados dos a dos. En total serían las variaciones de 6 elementos tomadas dos a dos: $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$, y si incluimos los repetidos, variaciones con repetición de 6 elementos tomados dos a dos: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$.

y la mitad de todos esos puntos es 18. Y en y en 18 hay dos circuitos de igualdad con puntos distintos, luego son 9 tiradas;

Por ejemplo, para cualquier par de puntos distintos (3,4) existe también el (4,3) y la probabilidad de obtener uno de los dos será 2/36. Para obtener la igualdad, es decir, 18 en el numerador, habrá que multiplicar por 9, es decir, hacer 9 tiradas independientes. Pero ya hemos visto que eso sólo es cierto en el caso de que no pudieran salir los resultados deseados más que una sola vez en las 9 tiradas.

y el punto doble (1,1) puede y no puede salir igualmente en 18 combinaciones de dos puntos, y lo mismo sucede con el 2 doble y el 3.

El (1,1) es el 1/18 de la igualdad, pues su probabilidad es 1/36, pero eso no quiere decir que si hacemos 18 tiradas obtengamos la igualdad, es decir, que la probabilidad de que salga en una o varias de esas tiradas sea 1/2.

En cuanto al 1 y el 2, pueden salir de dos maneras, por tanto en 9 tiradas tienen la igualdad, y que salgan más frecuentemente o más raramente es debido a la fortuna.

Aquí vuelve a cometer el mismo error, si se trata de que salga uno de los dos pares una sola vez y fuera imposible que salieran más de una, entonces el cálculo sería correcto.

El punto 1 está en 11 casos en el circuito, por lo tanto, en algo menos que la igualdad, y en dos tiradas la igualdad será más que 1/6 y menos que 1/4.

En efecto, los once casos son (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6), (6,1). El cálculo es cierto sí el 1 ha de salir en cada una de las dos tiradas. Sea A = (que salga 1 en la primera tirada), B = (que salga 1 en la segunda tirada), entonces $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = (11/36)(11/36) = 121/1296$. La igualdad será $1296/2 = 648$, y por lo tanto $121 = 648/5{,}3$ y $1/5{,}3$ es menos que $1/4$ y más que $1/6$.

En tres tiradas baja a cerca de un circuito completo;

Para que en tres tiradas salga algún 1, se aplica la fórmula anterior, $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \frac{11 \cdot 11 \cdot 11}{36^3} = 1331/46656$ y $46656/2 = 23328$; luego $1331 = 23328/17{,}5$ es decir, casi 1/18 de la igualdad.

> *pero para que salga dos veces, la igualdad está cerca de la duodécima parte. La razón de ello es que la sucesión es según un orden y que sin orden, falla. Pues una sucesión repetida es tal que surjan dos veces del circuito los puntos favorables, sacados sucesivamente; es decir, en 3600 tiradas, cuya igualdad es la mitad, a saber, 1800 tiradas, pues en ellas puede igualmente suceder y no suceder. Y no fallan todos los circuitos, excepto en que en uno se pueden repetir dos y tres veces. Pero esto se conoce por conjeturas y aproximación, y no hay en ello una razón exacta. No obstante sucede que en muchos circuitos las cosas acontecen de manera muy próxima a las conjeturas.*

Aquí *Cardano* se da cuenta de las dificultades que surgen con las posibilidades de repetición del mismo suceso varias veces en una serie de pruebas, aunque todavía no da con la fórmula exacta, pero ya sabe que sus métodos son sólo aproximativos. En efecto, en tres tiradas, la probabilidad de obtener dos éxitos, es decir, dos veces un 1 al menos en uno de los dados, sería, aplicando la fórmula de las probabilidades binomiales, mucho mayor de lo que calcula *Cardano:*

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{2} (11/36)^2 . (25/36) = 9075/46656$$

y esta probabilidad es 1/2,6 de la igualdad.

Capítulo Duodécimo

Del lanzamiento de tres dados

> *Los tres puntos iguales de tres dados se basan, excepto en un aspecto, en los precedentes, puesto que son 6. Los puntos en que hay dos semejantes y el tercero dispar son 30; y como cada uno de ellos aparece de tres maneras, serán 90.*

En efecto, $2 \times C_{6,2} = 30$ y $3 \times 30 = 90$, pues si tenemos la combinación (3,4) podemos hacer (3,3,4) o bien (3,4,4) y además cada una de ellas se puede permutar de tres maneras: (3,3,4), (3,4,3), (4,3,3).

> *Los puntos con tres valores distintos son 20, y como varían de 6 maneras cada una de las 20 tiradas, el circuito de todos ellos será 216, y la igualdad estará en 108.*

Las $C_{6,3} = 20$, y sus permutaciones serían 6 en cada caso por ejemplo, (1,3,5). (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3) y (5,3,1), luego $20 \times 6 = 120$, o si se quiere $V_{6,3} = 120$, por lo tanto $120 + 90 + 6 = 216$, y $216/2 = 108$.

Voy a establecer como ejemplos algunos casos sencillos con sus diversos resultados. Entre esos casos sencillos hay seis con un doblete cuyo tercer punto se puede elegir de 5 modos. Así pues, al ser 6 los puntos, habrá 30 modalidades, o sea, 30 variedades de tiradas.

Los dobletes son seis: 11, 22, 33, 44, 55, 66, y cada uno se puede combinar con los otros cinco puntos, por ejemplo, (3,3,1), (3,3,2), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6). Además, cada uno de estos cinco se puede permutar de tres maneras, por ejemplo, (3,3,1), (3,1,3), (1,3,3):

Se pueden colocar en tres variantes, lo que hacen 90, Pero en los 20 que son todos puntos diferentes, al variarlos de seis maneras, serán 120.

Los puntos diferentes serán $V_{6,3} = 120$, pues habrá $C_{6,3} = 20$ maneras de elegirlos y cada una de ellas se puede permutar a su vez de seis maneras, por ejemplo, 145, 154, 415, 514, 541. Los puntos iguales o tripletes tienen una probabilidad de 1/216, es decir, 1/108 de la igualdad. Es el caso de (1,1,1), (2,2,2) etc.

Luego el caso de tres puntos iguales es la centésimo-octava parte de la igualdad, los que tienen un doblete, al ser tres, son la parte treintaiseisava, como en el caso de dos dados era la décimoctava. Así ahora sucede en 18 tiradas, que son la sexta parte de 108, lo que comparado con lo anterior supone una frecuencia triple. Y decimos que esa es la ley de los dobletes, que esa es la justa razón *de las apuestas.*

Como las otras veces, no se puede multiplicar por el número de tiradas para obtener la igualdad, eso equivaldría a obtener una media, es decir, una aproximación bastante errónea. El error está siempre en la unión de sucesos que no son incompatibles y que por tanto se solapan.

En cuanto a dos puntos desiguales, como el 1 y el 2, así distinguiremos: si se les añade un 1 se hará de 3 maneras, si un 2 lo mismo, luego serán 6.

(El (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2) (2,1,2) y (2,2,1))

Además aparece de otras cuatro maneras,

Que son (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,2,6)

y colocando en su lugar las 6 variantes singulares diferentes, serán pues 24, y con las 6 que quedaron al principio, serán 30.

En efecto, cada uno de ellos, por ejemplo (1,2,4), se puede permutar de seis maneras: (1,2,4), (1,4,2), (2,1,4), (4,1,2) y (4,2,1), luego 6 x 4 = 24 y 24 + 6 = 30.

Pero 35 a 36 tiene la misma proporción de igualdad comparada con 108, pues en relación con 12 es casi la sexta parte, pero no exactamente.

Aquí se refiere al cáculo erróneo anterior, en el que decía que para que salga dos veces un punto en tres tiradas, la igualdad está cerca de la duodécima parte.

Pues los tres números desiguales, como 1,2,4, tienen respecto al número de la igualdad, la misma proporción exactamente que los puntos semejantes en dos dados.

Esto es cierto, porque la probabilidad de obtener, por ejemplo, p(1,2,4) = 6/216, y esto es lo mismo que p(2,2) = 1/36.

> *Pues el número singular por sí mismo, en un dado, tiene la proporción de un tercio, por lo tanto, si son tres dados, obtendremos la proporción de igualdad, de forma que de 216 combinaciones se encontrará el punto singular en 108 y no se encontrará en otros tantos casos, pues esta es exactamente la razón, como para un punto, con dos dados, respecto a todo el circuito es en tres tiradas, es decir, respecto a la igualdad en la mitad de ellas.*

Aquí *Cardano* actua como si para él la probabilidad de n tiradas fuese el producto de la probabilidad de una tirada p por el número de tiradas. Así la probabilidad de obtener un 1 es 1/6 en una tirada, y sería 12/36 en dos tiradas, es decir, 2 x 6/36, y 108/216 en tres tiradas, o sea, 3 x 36/216, de manera que obtener un 1 en tres tiradas tiene probabilidad 1/2. Los resultados correctos son 1/6, 11/36 y 91/216. En los dos primeros no se equivoca porque le es facil escribir todos los resultados posibles, pero al intentar hallar una regla general se conforma aquí con una generalización demasiado apresurada. Ya en el caso de dos tiradas el 11 le parecía una aproximación del 12 que debería aparecer según sus cálculos. De todos modos este resultado absurdo le extraña y lo rectifica más adelante, ya que en seis tiradas tendríamos el caso seguro, de probabilidad 1, y en más de seis tiradas lo sobrepasaríamos. Se trata del mismo tipo de error que hemos comentado antes: confunde la independencia de cada tirada, es decir, la probabilidad de tener un valor determinado en cada tirada, con la probabilidad de obtener ese valor al menos una vez en un número determinado de tiradas.

Capítulo Décimotercero

De los números compuestos, tanto hasta seis como superiores, tanto en dos dados como en tres.

En dos dados, el doce y el once constan respectivamente de dos 6 y de 6 y 5. El diez, de dos 5 y de 6 y 4, pero éste último se puede variar de dos maneras, por lo tanto en total será la duodécima parte del circuito y la sexta de la igualdad. En el caso del nueve están el 5 y el 4 y el 6 y el 3, de forma que serán la novena parte del circuito y las dos novenas partes de la igualdad. El ocho se forma a partir de dos 4, de 3 y 5 y de 2 y 6. Estas cinco posibilidades forman aproximadamente la séptima parte del circuito y las dos séptimas partes de la igualdad. El siete se forma con 6 y 1, 2 y 5, 4 y 3, el total de los puntos es por tanto seis, la tercera parte de la igualdad y la sexta del circuito. El seis es como el ocho, el cinco como el nueve, el cuatro como el diez, el tres como el once y el dos como el doce.

El doce sólo tiene una manera de formarse con dos dados: (6,6) y lo mismo le sucede al dos: (1,1). El once puede formarse de dos maneras: (6,5) y (5,6), así como el tres:

(1,2) y (2,1). El diez se forma de tres modos: (5,5), (4,6) y (6,4) y también el cuatro: (2,2), (1,3) y (3,1). El nueve se puede formar de cuatro maneras: (5,4), (4,5),(3,6) y (6,3) y lo mismo le sucede al cinco: (2,3), (3,2), (1,4), (4,1). El ocho se forma de cinco modos: (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4) y el seis igualmente: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2) y (3,3). Y por último el siete se puede componer de seis maneras: (1,6) (6,1), (2,5) (5,2), (3,4), (4,3).

Como el total del circuito, es decir, todos los casos posibles, son 36, la igualdad será la mitad, o sea, 18. Por lo tanto el doce y el uno tienen como probabilidad 1/36, o sea 1/18 de la igualdad; el once y el tres tienen como probabilidad 2/36 = 1/18, y 1/9 de la igualdad; el diez y el cuatro tienen la probabilidad 3/36 = 1/12 y 1/6 de la igualdad; el nueve y el cinco tendrán la probabilidad 4/36 = 1/9 y 2/9 de la igualdad; el ocho y el seis tendrán la probabilidad 5/36 = 1/7,2, aproximadamente 2/7 de la igualdad y por último el siete tiene la probabilidad 6/36 = 1/6 y la tercera parte de la igualdad.

> *Pero en el juego del Fritillo hay que añadir once puntos, porque se puede obtener el valor con un solo dado, así el dos se obtiene de doce maneras, lo que supone dos tercios de la igualdad y un tercio del circuito. El tres por lo tanto se obtiene de trece modos, el cuatro de catorce, el cinco de quince, lo que supone diez doceavos de la igualdad y cinco doceavos del circuito completo y el*

seis se obtiene de dieciseis modos, lo que está muy próximo de la igualdad.

Suertes á obtener con dos dados:

2	12	uno	3	11	dos	4	10	tres
5	9	cuatro	6	8	cinco		7	seis
							8	dieciocho (Igualdad (en el Fritillo)

Suertes y Fritillos á obtener con tres dados

Suertes			Fritillos	
3	18	uno	3	ciento quince
4	17	tres	4	ciento veinticinco
5	16	seis	5	ciento veintiseis
6	15	diez	6	ciento treinta y seis
7	14	quince	7	treinta y tres
8	13	veintiuno	8	treinta y seis
9	12	veinticinco	9	treinta y siete
10	11	veintisiete	10	treinta y seis
			11	treinta y ocho
			12	veintiseis

Circuito 216

Igualdad 108

Del mimso modo que en las suerte hay números como:

13	veintiuno
14	quince.

Además, un punto tiene 108, dos puntos tienen 111.

En tres dados tenemos tres puntos. El tres supera la igualdad en el Fritillo. En la suerte, el tres se obtiene de una sola manera, es decir, la centésimoctava parte de la igualdad. El cuatro en el Fritillo tiene 120, en la Suerte es la treintaiseisava parte de la igualdad o 1/72 del circuito. El cinco surge de un 1 doble o de un 2 doble, por tanto en la Suerte será la décimoctava parte de la igualdad; pero en el Fritillo hay 126, esto es más de la sexta parte de la igualdad. El seis se obtiene en la Suerte con diez ternas: tres 2, dos 1 y un 4, y 3, 2, 1. En el Fritillo hay las mismas posibilidades y además aquellas que lo hacen con dos dados, es decir, dos 3, 1 y 5, 4 y 2; estos son 15 y con los otros diez son 25, de manera que tenemos 133. El siete se obtiene en la Suerte de 15 maneras, en el Fritillo deja de ser la mitad o de tener la igualdad; por tanto, sólo hay estas posibilidades y las que se producen por dos dados, es decir, 1 y 6, 2 y 5, 4 y 3, y por lo tanto son 18; la suma es 33, menos de la tercera parte de la igualdad. El ocho en la Suerte tiene 21 posibilidades; los puntos en el Fritillo son la tercera parte de la igualdad, a saber, 36. El punto nueve en la Suerte tiene 25, en el Fritillo doce más, es decir, 37. El diez en la Suerte tiene 27, en el Fritillo tiene nueve más, esto es, 36. Los números restantes corresponden por orden a las Suertes, como se puede ver. En el Fritillo el once sólo tiene 33 y el doce 26. Los números que restan por encima del doce son iguales a los de las Suertes.

Capítulo Decimocuarto

De los puntos combinados

En el caso de dos dados debemos entrar en un razonamiento del tipo siguiente, que el punto 1 tiene once tiradas (favorables) y el punto 2 igualmente, y el 3, y así todos los puntos singulares, pero el punto 1 y el 2 no tienen 22 casos sino 20.

Las tiradas favorables son los casos posibles favorables, en este caso, los pares de valores en que aparece el 1 una o dos veces. En cuanto al"punto 1 y el 2" se refiere a los casos en que aparece el 1, o el 2, o ambos, que son: once para el 1: (1,1). (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6), (6,1); nueve para el dos: (2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6), (6,2). Y si fuera el caso de obtener un 1, un 2 o un 3, o dos cualesquiera de ellos, habría que añadir además siete casos: (3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3).

Pues el 1 tiene once y el 2 nueve. Y así si se añade el 3, no serán veintinueve ni treinta y uno, sino veintisiete, y los números de las tiradas que se obtienen de este modo se pueden ver en la tabla:

Total de casos	*11*	para un punto
	20 (=11+) *9*	para dos puntos
	27 (=20+) *7*	para tres puntos
	32 (=27+) *5*	para cuatro puntos
	35 (=32+) *3*	para cinco puntos
	36 (=35+) *1*	para seis puntos (suceso seg

Así, si se consideran todas las tiradas se obtienen 36, pues con ello el circuito se hace perfecto, y es necesario que todas las tiradas contengan algún punto, de modo que se completa el número del circuito. Sin embargo, si alguien dice, quiero un 1 o un 2 o un 3, tú sabes que son 27 tiradas favorables, y como en el circuito son 36, las tiradas restantes en las que estos puntos no salen serán 9, y la proporción por tanto será de 3 a 1. En cuatro tiradas con la misma fortuna, los puntos 1, 2, o 3 saldrán tres veces, y sólo habrá una tirada en la que no esté ninguno de ellos; sin embargo, si apuesta tres ases el que espera los puntos 1 a 3, y el otro apuesta uno, el primero ganará tres veces y ganará tres ases, el otro una vez y ganará tres ases, por tanto el circuito de cuatro tiradas siempre será aquitativo. Así pues, éste es el razonamiento para jugar en condiciones iguales, pues si otro apuesta más, jugará en condiciones injustas y con pérdidas, y si apuesta menos, con ventaja. Igualmente, si se incluye el 4, serían 32 las tiradas y el número de tiradas restantes sería sólo 4. Por lo tanto la apuesta será ocho veces mayor que la del oponente porque la proporción de 32 a 4 es 8 a 1, y lo mismo en los otros casos; no es necesaria aquí la comparación con la media. Del mismo modo podemos decir en los casos restantes: si queremos dos 1 o dos 2 tenemos dos tiradas favorables, y quedan 34, cuya proporción es de 17 a 1, y así, si queremos el 1 doble, la proporción será de 35 a 1, y todas las reglas anteriores deben reducirse a esta regla, como debe discernirse de la igualdad de las apuestas. Por ejemplo, para que aparezca un 1, como son once tiradas favorables, la proporción debe ser de 25 a 11, un poco más de 2 a 1.

Los mismos razonamientos se observan en tres dados, tanto en los puntos simples como en los compuestos, y proponemos como anteriormente (Cap. XIV in fine), que las tiradas para un punto son 108, por lo tanto será necesario establecer 6 términos de los cuales el máximo sea 108 y los restantes guarden distancia igual entre sí y respecto a aquel y tales que completen 216, como se ve en la tabla:

(para un punto)	91	30	
(para dos puntos se añade)	61	24	
" tres " " "	37	18	diferencias
" cuatro " " "	19	12	
" cinco " " "	7	6	
" seis " " "	1		
	216	(total de casos posibles)	

Pero ningún punto obtiene la mitad de todo el circuito, pues la proporción es de 91 a 125, o muy próxima, si la invertimos, de 25 a 18, mayor por lo tanto que de 4 a 3. Luego el que así apostase a que no salía (el punto) ganará, en tanto que en siete tiradas no haya salido, y si apuesta cuatro, ganará todavía tres. Del mismo modo se considera en los restantes casos, pues es evidente que con dos dados los incrementos son iguales. Pero para tres tenemos un exceso igual, como se muestra en la tabla. No obs-

> *tante, quedan otras consideraciones más sutiles, pues también los matemáticos pueden engañarse, aunque con otras razones. No quiero que esto quede oscuro, porque muchos, no comprendiendo a Aristóteles, se han engañado en su propio detrimento. Pues hay una regla general, esto es, considerar todo el circuito, y el número de tiradas que representan los modos en que puede darse (el punto) y comparar ese número con el número del resto del circuito, y de acuerdo con esa proporción deben establecerse las apuestas para jugar en condiciones equitativas.*
>
> *Pero si fueran necesarias dos tiradas, los multiplicaremos entre sí, y al resto correspondiente a esos números entre sí, y si fueran tres o cuatro haríamos lo mismo y en proporción a los números así obtenidos tendríamos que hacer la comparación. Así si fuera necesario que alguien sacara un 1 dos veces, en ese caso sabes que el número correspondiente es 91, y el resto es 125;*

Vemos aquí aparecer el valor exacto 91, que proviene de la fórmula $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C) = 36/216 + 36/216 + 36/216 - 6/216 - 6/216 - 6/216 + 1/216 = 91/216$, probabilidad de obtener un punto determinado al tirar tres dados (o un dado tres veces) con el primero de ellos, o con el segundo, o con el tercero, o bien con dos o con los tres dados. En el Capítulo XII *Cardano* había establecido erróneamente que eran 108 los casos favorables, pero ahora rectifica.

así, si multiplicamos cada uno de esos números por sí mismo y obtenemos 8.281 y 15.625, y la proporción es aproximadamente de 2 a 1. Si apostase el doble, contendería bajo condiciones injustas, aunque en opinión de algunos, la condición de que alguien ofrezca doble apuesta sería mejor. Por lo tanto, en tres tiradas sucesivas, si se necesita un 1, la proporción sería de 753.571 a 1,953.125, proporción que es próxima a 5 a 2, aunque algo mayor.

Si queremos que un suceso determinado se repita y en su repetición es independiente de los resultados anteriores y posteriores, la fórmula adecuada es la que aplica implícitamente *Cardano*: $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C) = (91/216) \cdot (91/216) \cdot (91/216) = 753.571/216^3$.

Capítulo Decimoquinto

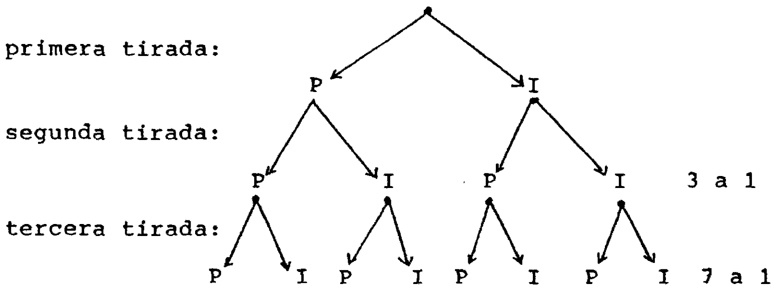
Del error que se comete respecto a este punto

Pero este razonamiento parece ser falso, incluso en el caso de la igualdad, como por ejemplo, que obtener una de tres caras escogidas en una tirada con un dado es igual a obtener una de las otras tres, pues de acuerdo con esto, el razonamiento sería justo igualmente para dos tiradas que para tres o cuatro, lo cual es absurdo. Pues si un jugador con dos dados puede obtener igualmente número par o impar, de eso no se deduce que pueda obtenerlo igualmente en tres tiradas sucesivas. Pero cuando obtiene un número impar en la

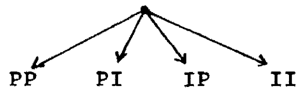
primera tirada,

> *en la segunda y en la tercera, puede equivocarse en el cálculo de ocho maneras diferentes. Por tanto en las comparaciones en que hay igualdad, como en el caso de los números pares e impares, del producto del número de tiradas por sí mismo restaremos uno, y la proporción que el resto tenga con la unidad será la proporción de las apuestas que hay que establecer. Así, en dos tiradas sucesivas, multiplicaremos dos por sí mismo, lo que será 4, restaremos uno, el resto es tres, por lo tanto, un jugador apostará correctamente 3 contra 1; pues si está compitiendo por impar y saca par, es decir, si después de un par obtiene par o impar, ha perdido, o si después de un impar obtiene par. Así pierde tres veces y gana una.*

Trata ahora *Cardano* de generalizar el caso de un dado, en el que efectivamente la probabilidad de obtener un número impar es igual a la de obtener par, 1/2, al caso de dos dados en el que obtener al menos un número impar tiene una probabilidad de 25/36, lo mismo que la probabilidad de obtener al menos un número par, pero diferente de 1/2. Asímismo en el caso de tiradas sucesivas difiere si se trata de obtener el mismo suceso (obtener número impar) en <u>todas y cada una</u> de ellas o sólo <u>al menos en una</u> de ellas. En el caso que parece estudiar aquí, el de todas y cada una de tres tiradas con dos dados, como son sucesos independientes, la probabilidad de obtener al menos un número impar en cada una de las tres tiradas con dos dados sería $(25/36)^3$. En cuanto a las apuestas, el resultado que da *Cardano* en el párrafo anterior es válido sólo en el caso de un dado y en las dos primeras tiradas, en el resto el método no funciona:



Si se tratase de dos dados, ya en la primera tirada, los resultados serían:



es decir, 3 a 1, y en la segunda tirada serían ya de 15 a 1.

> *Y para tres tiradas sucesivas multiplicaremos tres por sí mismo; el resultado es 9; quitemos uno, el resto es 8. La proporción de 8 a 1 es válida para tres tiradas sucesivas y, para cuatro tiradas esta proporción es de 15 a 1, y para cinco, de 24 a 1. Así en 125 tiradas sólo habrá cinco series de tiradas en sus lugares propios, es decir, con el mismo número de tiradas pares consecutivas, de manera que deben comenzar con un número impar en el primero, o en el sexto, o en el onceavo lugar pues si no, habría más de cinco consecutivos del mismo orden. Todo este razonamiento se puede demostrar a partir del número de lugares en cada uno de los circuitos mencionados, aunque en los casos que implican multiplicación parece ser falso. Por*

ejemplo, si consideramos el número 20, las apuestas son de 7.999 a 1. Sin embargo, apenas se puede creer que en 7.999 tiradas un jugador pueda sacar número par perpetuamente veinte veces. Pero eso lo hemos demostrado; porque aunque sólo lo consiga una vez de 8.000, este razonamiento puede equivocarnos; incluso en un número infinito de jugadas es necesario que suceda, pues la magnitud del circuito es la longitud de tiempo que pone de manifiesto todas las formas.

Volvamos ahora a los casos en que las comparaciones no son igualitarias, por ejemplo, en el caso antes mencionado en que queremos un 1, un 2 o un 3 en cualquiera de los dados, la proporción es de 3 a 1. Para hacer el estudio más facil, consideremos sólo un dado. Tomemos por tanto un astrágalo con cuatro caras, que tenga un número par en una cara y un número impar en las otras tres, e investiguemos las apuestas para las sucesivas apariciones de una cara impar. Demos a las caras impares los nombres a, b, y c, y a la cara par, d, y en las comparaciones de las secuencias supongamos que hay cuatro columnas como se ve en la figura:

A	B	C	D
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c
d	d	d	d

La primera comienza en A, la segunda en B y así se combina la segunda tirada, haciendo dieciseis combinaciones, de las cuales nueve serán impares ambas (tiradas) y las otras siete pares y así, si son tres caras, habría cuatro combinaciones impares y el resto serían cinco pares; y si fueran cinco caras y cuatro fuesen impares, de 25 tiradas saldrían 16 combinaciones impares y quedarían 9 pares. En todos estos casos se multiplica el número total por sí mismo, e igualmente el número de caras similares por sí mismo y se compara éste con el resto, y de forma semejante si sólo son tres caras, de las que dos nos son favorables, multiplicaremos el número total por sí mismo y luego aquel número por sí mismo y esta parte se comparará con el resto; y si en un dado nos es favorable el 1 y el 2, multiplicaremos seis, el número de caras, por sí mismo, y serán 36, y dos por sí mismo son cuatro, por tanto la proporción será de 4 a 32 o inversamente de 8 a 1. Y si son necesarias tres tiradas, multiplicaremos seis por sí mismo y luego ese producto otra vez por lo mismo, que hacen 216, y 2 multiplicado por sí mismo y otra vez por 2 da 8; restamos 8 de 216, el resultado será la proporción de 208 a 6 y de 26 a 1. Y si son necesarias cuatro tiradas, haciendo el mismo razonamiento como se ve en la tabla, y restando uno de otro queda la proporción de 80 a 1. Y esto en el caso de un sólo dado, pero el mismo razonamiento se utiliza para dos o tres dados, como en el ejemplo que proponemos: Sean los casos favorables el 1, el 2 o el 3, pero en tres tiradas su-

> *cesivas y, como dije antes, el número del circuito es 36 y las tiradas favorables 27. Como se ha visto ahora, multiplicamos 36 por sí mismo tres veces y resultan 46.656. Multiplicamos 27 por sí mismo tres veces y resulta 19.683, la razón es pues mayor que 4 a 3 y menos que 3 a 2, esto es, la razón del resto al menor. De forma semejante se ha establecido que, con tres dados, un valor, cualquiera que sea, tiene a su favor 12 casos de 216, que es todo el circuito, por tanto si se requiere que ese punto salga tres veces, multiplicaremos todo el circuito, como hemos visto, y el resultado es 9.324.125 que, dividido por el menor, esto es, 753.571, nos da la proporción de las apuestas a hacer, un poco mayor que 12 a 1, por lo que queda patente que cualquier otro razonamiento no es satisfactorio, y que este es generalmente cierto.*

En el párrafo anterior, el autor comienza utilizando astrágalos o huesos de taba como dados de cuatro caras, todas ellas equiprobables, lo que está bastante lejos de la realidad, aunque el argumento de la equiposibilidad, condición necesaria para que la própiedades de la definición de probabilidad se cumplan, no se había planteado todavía explícitamente. Pero sabemos que *Cardano* conocía la tendencia que podía tener un dado, incluso un dado no trucado, a caer sobre una de sus caras:

> *Todo dado, aunque sea un dado permitido, tiene un punto favorecido, ya sea por su forma o por otra causa, o*

por casualidad y por ello, si se cambia un número grande por uno pequeño o viceversa, se comprende que la diferencia será grande.

de manera que no deja de ser curioso que en el caso del astrágalo ni siquiera mencione esta propiedad. Pero suponiendo la equiprobabilidad, la probabilidad ahora no es 1/2 para las caras pares o impares, sino 3 a 1 por haber tres caras impares y una par. El razonamiento con un solo dado es correcto, si se supone un dado perfecto o equilibrado. Si se trata en general de un suceso cuya probabilidad es 2/6, que tiene que realizarse dos veces seguidas, su probabilidad, suponiendo a las repeticiones sucesos independientes, es 4/36, o sea de 8 a 1 como dice *Cardano*. También en el caso de varios dados llega a la solución correcta, aplicando el teorema: $p(A\cap B\cap C) = p(A)p(B)p(C)$, si los sucesos A,B,C son independientes. Resuelve pues el problema de las apuestas para que el juego sea equitativo, aunque no así el del reparto de ganancias, el famoso problema "de la división" que tanto preocupó a matemáticos y jugadores de la época y que *Peverone* intenta también resolver sin éxito, pero estando a punto de lograrlo.

Tartaglia (1499-1559), el rival de *Cardano*, en un juego en el que se trata de ganar 6 partidas, interrumpido habiendo obtenido A, cinco y B, tres, propone como solución el reparto 2 a 1. Parece haber razonado como sigue, A está dos juegos por delante de B. Esto es un tercio del número total de juegos necesario para ganar. Por lo tanto A debe tomar

1/3 de la apuesta. El resto se divide por igual, obteniendo así A una ventaja sobre B en razón de 2 a 1. El mismo *Tartaglia* no era optimista respecto a su solución porque:

> *La resolución de una cuestión semejante debe ser judicial más bien que matemática porque de cualquier modo que se haga la división, será causa de litigio.*[1]

Peverone publica, en 1558, su obra *Due brevi e facili trattati, l'uno d'arithmetica, l'altro di geometria ne i quali si contengono alcune cose nuove piacevoli é utili, si a gentilhuomini come a artegiani.* En esta obra emplea un argumento basado en el número de juegos que faltaban a cada jugador para ganar y no en el de los que cada uno había ganado. En el capítulo titulado *De giuochi,* De los juegos, dice:

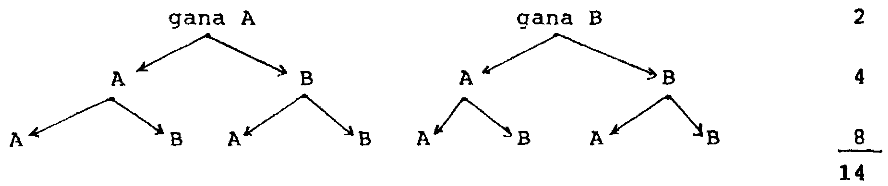
> *Jugando ocurren los hechos más extraños nunca oidos. Como ejemplo, dos juegan a diez partidas, es decir, a diez juegos. Y el primero ha ganado 7, el segundo 9, entonces ocurre algún inconveniente de modo que no se puede terminar. Se quiere saber cuánto debe recibir cada uno del depósito si es así. Al que ha ganado siete de diez, le faltan tres, igualmente al que ha ganado nueve de diez le falta uno, la progresión de 3 es 6 y la de 1 es 1; por lo tanto, dividiendo el depósito en 7 partes, 6 tocan al segundo y una parte al primero.*
>
> *Otro ejemplo*
>
> *Uno dice, quiero jugar con este pacto, que tú no puedas vencer si no ganas tres juegos y yo, ganando uno,*

quiero haber vencido. Y pongamos el caso de que aquel que necesita ganar tres juegos ponga en juego 2 escudos; el otro estaría obligado a poner 12 escudos; esta es la razón, que si jugasen a un juego bastaban 2 escudos, y con dos juegos, 6 escudos, porque venciendo sólo dos juegos ganaría 4 escudos, pero ello es con el peligro de perder el segundo juego vencido el primero; pero debe ganar 6 escudos y, con tres juegos, 12 escudos porque se dobla la dificultad y el peligro.

Otro ejemplo

Dos están jugando, y uno ha apostado 4 contra 5 y el segundo 13 contra 16, queriendo saber quién ha hecho mejores condiciones; esto se sabe por la regla de tres, multiplicando 5 por 13 son 65 y en cuatro partes son 16 y 1/4 y eso es lo que debería poner el segundo, es decir, 13 contra 16 y 1/4.

Como se ve, está a punto de llegar a la solución correcta. *Kendall* apunta que si *Peverone* se hubiera atenido a sus propias reglas, habría enconctrado la solución exacta. Efectivamente, si a B sólo le queda un juego para ganar y se apuestan dos escudos, entonces, si a A le quedase sólo un juego, su apuesta sería de dos, si le quedasen dos juegos, la apuesta sería de 2 + 4 = 6 escudos, y si le quedasen tres juegos, sería de 2 + 4 + 8 = 14, es decir, 14 a 2 o bien 7 a 1, porque el conjunto de sucesos posibles en este caso serían:



Peverone conocía las progresiones aritméticas y, si se hubiera atenido a su propia regla, hubiera obtenido la solución correcta un siglo antes que *Fermat* y *Pascal*, el tercer término de la progresión era 8 y no 6.

Como ya hemos mencionado, el libro de *Cardano* salió a la luz después de su muerte, en 1663, pero es probable que fuera conocido parcialmente por los matemáticos de la época. Parece seguro que sus cálculos fueron conocidos por *Galileo* entre 1613 y 1623, cuando publica *Sopra le scoperte de i Dadi* y da una solución completa de este tipo de problemas mediante la correcta enumeración de todas las posibilidades. El ejemplo de *Galileo* combina tres dados y ésta es la traducción que proponemos de su opúsculo, que apareció sin título:

Sobre las tiradas de dados

El hecho de que en el juego de dados algunos puntos sean más ventajosos que otros tiene una razón claramente manifiesta, la cual es que unos salen más fácilmente y con más frecuencia que otros, lo cual depende de que se pueden formar con más números diferentes. Así el 3 y el 18 son puntos que sólo se pueden componer con tres números, a saber, el 6,6,6 y el 1,1,1, y no de otro modo, por lo cual son más difíciles de obtener que, por ejemplo, el 6 o el 7, que se pueden componer de más maneras, esto es, el 6 con 1,2,3 y con 2,2,2 y con 1,1,4, y el 7 con 1,1,5; 1, 2,4; 1,3,3; 2,2,3. No obstante, aunque el 9 y el 12 se pueden componer de tantas maneras como el 10 y el 11, por lo que deberían ser considerados de la misma utilidad, no evita que la larga observación haya hecho que los jugadores estimen más ventajosos el 10 y el 11 que el 9 y el 12. Y que el 9 y el 10 (y lo que se dice de estos, entiéndase igualmente del 12 y el 11) se forman con igual diversidad de números, es manifiesto, puesto que el nueve se compone con 1,2,6; 1,3,5; 1,4,4; 2,2,5; 2,3,4; 3,3,3; que son seis trios ., y el diez con 1,3,6; 1,4,5; 2,2,6; 2,3,5; 2,4,4; 3,3,4 y no de otro modo, lo que hacen seis combinaciones. Ahora yo, para servir a quien me ha ordenado que saque a la luz aquello que se me ocurra sobre tal dificultad, expondré mi pensamiento, con la esperanza, no solamente de resolver estas dudas, sino también abrir el camino para poder obtener de manera exacta las razones por las cuales todas las particularidades del juego han sido ordenadas y ajustadas con gran cuidado y juicio.

Y para conducirme hacia mi objetivo con la mayor claridad de que soy capaz, comienzo considerando cómo teniendo un dado seis caras, puede detenerse sobre cada una de ellas de manera indiferente al ser lanzado, y sólo pueden hacerse con él seis tiradas que sean diferentes las unas de las otras. Pero si nosostros arrojamos el segundo dado, que también tiene otras seis caras, junto con el primero, podremos hacer 36 tiradas diferentes entre sí, puesto que cada cara del primer dado puede emparejarse con cualquiera del segundo, y en consecuencia producir seis tiradas diferentes; por lo que es manifiesto que tales combinaciones serán seis veces 6, es decir, 36. Y si añadimos el tercer dado, como cada una de sus seis caras se puede emparejar con cualquiera de las 36 tiradas de los otros dos dados, tendremos que las tiradas de tres dados serán seis veces 36, es decir, 216, todas diferentes entre sí. Pero como los puntos de los lanzamientos de tres dados no son sino 16, esto es, 3, 4, 5, etc. hasta 18, entre los cuales se tienen que repartir las dichas 216 tiradas, es necesario que a algunos de ellos les pertenezcan muchas [tiradas]; y si encontrásemos cuántas tocan a cada uno habríamos abierto el camino para llegar a conocer lo que buscamos; y bastará con hacer tal investigación desde el 3 hasta el 10, porque lo que convenga a uno de estos números convendrá también a lós inmediatamente superiores.

Para la clara comprensión de lo que resta se deben notar tres particularidades. La primera es que aquellos puntos con tres dados cuya composición resulta de tres números semejantes, no se puede producir más que con una sola tirada o lanzamiento de los dados: y así el tres no se puede formar más que con tres caras iguales; y el seis, cuando se deba componer con tres 2, no se logrará más que con una sola tirada. Segunda: el punto que se consigne con tres números, dos de ellos iguales y el tercero distinto, puede producirse con tres tiradas, como por ejemplo, el cuatro, que surge del 2 y de los dos ases, puede hacerse con tres tiradas distintas, es decir, cuando el primer dado descubre un 2 y el segundo y tercero descubren un as; cuando el segundo dado descubre un 2 y el primero y el tercero un as; y finalmente cuando el tercer dado descubre un 2 y el primero y el segundo ases. Y así por ejemplo el ocho, puesto que resulta de 3,3,2, puede producirse igualmente de tres modos; a saber, descubriendo el primer dado un 2 y los otros un 3 cada uno; o descubriendo el segundo un 2 y el primero y el tercero un 3; o finalmente descubriendo el tercero un 2 y el primero y el segundo un 3. Tercera: que aquellos puntos que se componen de tres números diferentes pueden producirse de seis maneras. Como por ejemplo el ocho, si se compone con 1,3,4, se puede hacer con seis tiradas diferentes: primera, cuando el primer dado es un 1, el segundo un 3 y el tercero un 4; segunda, cuando el primer dado es también un 1, pero el segundo es un 4 y el tercero un 3; tercera, cuando el segundo dado es un 1, el primero un 3 y el tercero un 4; cuarta, haciendo el segundo también un 1, el primero un 4 y el tercero un 3; quinta, cuando siendo el tercer dado un 1, el primero es 3 y el segundo 4; sexta, cuando con el 1 del tercer dado el primero sea 4 y el segundo 3.

Por tanto, hasta aquí hemos establecido estos tres principios fundamentales: primero, que los tripletes, es decir, los puntos de las tiradas con tres dados que se componen de tres números iguales, no se producen más que de un sólo modo; segundo, los tríos que nacen de dos números iguales y el tercero diferente se producen de tres maneras; tercero, aquellos que nacen de tres números todos diferentes se producen de seis maneras. De estos fundamentos podemos deducir facilmente de cuántos modos, o mejor dicho en cuántas tiradas diferentes se pueden formar todos los números de tres dados, lo cual se comprende cómodamente en la siguiente tabla: en la parte superior de la misma están anotadas las tiradas, desde el 10 hasta el tres, y debajo de éstas, los diferentes tríos de los cuales pueden resultar cada una de ellas; junto a ellos están colocados los números según los cuales se puede diversificar cada trío y bajo los que finalmente se recoge la suma de todos los modos posibles de producir esas tiradas:

	10		9		8		7		6		5		4		3	
1	6.3.1.	6	6.2.1.	6	6.1.1.	3	5.1.1.	3	4.1.1.	3	3.1.1.	3	2.1.1.	3	1.1.1.	1
3	6.2.2.	3	5.3.1.	6	5.2.1.	6	4.2.1.	6	3.2.1.	6	2.2.1	3				
6	5.4.1.	6	5.2.2.	3	4.3.1.	6	3.3.1.	3	2.2.2.	1						
10	5.3.2.	6	4.4.4	3	4.2.2.	3	3.2.2	3								
15	4.4.2.	3	4.3.2.	6	3.3.2.	3										
21	4.3.3.	3	3.3.3.	1												
25		27		2		1		15		10		6				
27																
108																

Por ejemplo, como en la primera casilla tenemos el punto diez, y bajo él seis tríos de números con los cuales se puede componer igualmente, que son, 6,3,1, 6,2,2, 5,4,1, 5,3,2, 4,4,2, 4,3,3, y como el primer trío, 6,3,1, está compuesto por tres números diferentes, se puede (como se ha dicho más arriba) construir con seis tiradas de dados diferentes; por lo tanto, junto a ese trío, 6,3,1, se anota un 6; y estando el segundo, 6,2,2, compuesto de dos números iguales y otro distinto, no puede producirse más que en tres tiradas diferentes, por tanto se anota a su lado un 3; el tercer trío, 5,4,1, compuesto de tres números distintos, puede hacerse con seis tiradas; por tanto se anota el número 6; y así todas las demás. Y finalmente, al pie de la columna de números de las tiradas se recoge la suma de todas; donde se ve cómo el punto diez se puede hacer con 27 tiradas de dados diferentes; pero el punto nueve solamente con 25, el ocho con 21, el siete con 15, el seis con 10, el cinco con 6, el cuatro con 3 y finalmente el tres con 1; todos los cuales, sumados juntos, ascienden a 108; y habiendo otras tantas tiradas para los números superiores, a saber, los puntos once, doce, trece, catorce, quince, dieciseis, diecisiete y dieciocho, se recoge la suma de todas las tiradas posibles a hacer con las caras de tres dados, que son 216. Y con esta tabla todo el mundo que comprenda el juego podrá ir midiendo muy exactamente todas las ventajas, por mínimas que sean, del zara, del *incontri, o de cualquier regla o límite particular que en ese juego se observe, etc.*

El Zara era un juego con tres dados cuyas reglas, en opinión de E.H. *Thorne*, serían semejantes a las del Hazard.

Hemos visto pues que, aunque hay el mismo número de particiones que sumen 9 y 10, sin embargo la probabilidad de 9 es en la práctica menor que la de 10 y ello porque no se trata de combinaciones (en el sentido matemático), sino de variaciones con repetición, es decir, que todos los casos (igualmente) posibles no son las particiones como se había pensado durante mucho tiempo. Así $VR_{6,3} = 6^3 = 216$. *Galileo* dice que los jugadores, mediante largas observaciones, han llegado a la conclusión de que el 10 y el 11 son más ventajosos que el 9 y el 12; luego son las permutaciones y no las particiones las equiprobables. Por supuesto ninguno de los autores que hemos estudiado hasta aquí utiliza la palabra probabilidad ni probable, y mucho menos el concepto de equiprobable. *Hacking* dice que hubiera sido más facil comprobar la proporción relativa del 4 y el 3, sin embargo en los juegos de dados el 4 y el 3 eran "azares", es decir, puntos muy difíciles de obtener y sin embargo la fortuna de aquellos que apostaban al 9 y al 12 era mejor conocida. Se diría pues que fué la observación empírica lo que resolvió en primer lugar estos problemas, y no los cálculos.

No obstante, *Galileo* practicaba el cálculo de frecuencias. En cuanto a la equiprobabilidad, aunque no está explícita, se puede deducir implícitamente de la obra de *Cardano*, cuando habla del circuito completo de resultados y de los dados honestos. Sin embargo, el libro de *Cardano* cayó en el olvido y hasta 1660 no fué publicado, lo que hace decir a *Hacking* que el concepto de probabilidad tal como es entendido en la actualidad no nació hasta esa fecha, cuando *Fermat* y *Pascal* dieron a estos cálculos su desarrollo y perfección formal.

Bibliografía

- CARDANUS, Hieronymus.- Liber de Ludo Aleae, Lyon, 1663.
- GALILEO GALILEI.- Sopra le scoperte de i Dadi (título de la edición de Florencia, 1898, salió sin título en 1613-23)
- HACKING, Ian.- The emergence of Probability, Cambridge U. Press, 1975.
- PEARSON, E.S. & KENDALL, Sir Maurice.- Studies in the History of Statistics and Probability, vol I, London, Griffin, 1970.
- PEVERONE, Giobattista.- Due brevi e facili trattati..., Lione, 1558.

Notas

1.- TARTAGLIA, Nicolo: General Trattato di Numeri e Misure, 1556, I. fol.266 1.

90 bis

E L P R O B L E M A D E L O S "P A R T I S"

EL PROBLEMA DE LOS "PARTIS"

Hemos visto hasta aquí los esfuerzos de *Cardano* y otros autores para establecer los conjuntos de casos favorables y de casos posibles de un suceso aleatorio como el lanzamiento de un dado, es decir, los primeros cálculos combinatorios,que se enfrentan sobre todo con dificultades de expresión y de formulación. Estas dificultades impiden la resolución de los problemas planteados y, en muchos casos, una formulación clara basta para dicha resolución.

El paso fundamental en el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad se da, no en Italia, sino en Francia. El Renacimiento en Francia fué algo más tardío que en Italia. Las principales contribuciones de los científicos franceses del siglo XVII fueron en el dominio de las matemáticas puras y aplicadas. La correspondencia entre *Pascal* y *Fermat*, que pasaremos a comentar a continuación, se ocupa fundamentalmente del llamado problema de la división, o de los lotes o"partis": si una partida se termina antes de que ninguno de los jugadores haya alcanzado el número de partidas por el que se apostó, cómo deberá repartirse entre ellos la cantidad total apostada.

En esta correspondencia ya no se trata de un reto entre matemáticos, al estilo de los italianos en los siglos XVI y XVII y de los mismos franceses en el XVIII, sino de una correspondencia entre colegas o incluso entre amigos en la que se pide iluminación sobre los problemas que alguno de los corresponsales no ha sido capaz de resolver. Es notable que en esta época los descubrimientos matemáticos que se lleven a cabo sean enormes en comparación con la parte de ellos que se hace pública. El reconocimiento de sus iguales les parece suficiente a los autores y no recurren con mucha frecuencia a la publicación. Comienzan también en este momento las sociedades científicas, como la que privadamente sostenía *Marin Mersenne* (1588-1648) en Paris. Una vez por semana se reunían en su casa los matemáticos y científicos más prominentes de la época: *Gassendi, Déscartes, Carcavi, Roberval, Desargues, Pascal.*

Pronto nacerán las grandes sociedades oficiales: la Royal Society of London, en 1660, y la Académie des Sciences de Paris, en 1665.

Fué *Carcavi* quien puso a *Fermat* en contacto con el círculo de *Mersenne* en 1636. *Pierre de Fermat* (1601-1665) no era un matemático o un geómetra, como se decía en la época. Estudió leyes en la Universidad de Toulouse y era hombre de gran cultura. Se le ha llegado a llamar el príncipe de los amateurs, pero en cualquier caso, su capacidad para los cálculos era extraordinaria y superaba a la de *Pascal*, como veremos a continuación. Al principio a *Pascal* le costará trabajo comprender el método de *Fermat* y le pondrá objecciones que van siendo rebatidas por este último. En el diálogo, *Pascal* propone un método que él cree general e independiente de la combinatoria, pero que no es tal, y paulatinamente va llegando a la solución correcta.

El problema propuesto tiene una dificultad fundamental: no se trata de suponer los diversos casos posibles (efectivamente posibles), sino de considerar las diversas posibilidades sucesivas que dependen de las posibilidades de partida. Son posibilidades abstractas y sólo eventualmente reales. El procedimiento de *Fermat* consiste en hacer un esquema en el que se escriben sucesivamente todos los casos abstractamente posibles a partir de una situación dada.

El término posibilidad significa pues cosas muy diferentes: casos, asociaciones de casos, situaciones reales, situaciones abstractas, combinaciones de las mismas. El término probabilidad aún presenta mayores dificultades. De hecho en la correspondencia entre *Pascal* y *Fermat* no aparece todavía; en su lugar se utiliza el término "chance".

Veamos a continuación esta correspondencia, cuya importancia fundamental en el nacimiento de la moderna Teoría de la Probabilidad justifica su inserción aquí, ya que no existen versiones en lengua castellana de la misma. La correspondencia aparece en las Oeuvres de Fermat, vol I, editadas por *P. Tannery & C. Henry*, en Gauthier-Villars et fils, Paris, 1894, y también en Oeuvres de Pascal, edición de 1779. Seguiremos aquí ambas referencias por ese orden. La que proponemos a continuación como primera carta está colocada por el editor de *Pascal*, *Bossut*, entre la LXXXIV y la LXXXV:

Pierre de Fermat (1601-1665) - Blaise Pascal (1623-1662)

Correspondencia: de 1654 a 1656

Año 1654

(Carta LXIX / IV, p. 441-442)

FERMAT A PASCAL

Esta carta no tiene fecha y es respuesta a una carta de Pascal que se ha perdido.

Señor,

Si intento hacer un punto (determinado) con un sólo dado, en ocho tiradas; si convenimos, cuando el dinero ya está en juego, que yo no jugaré la primera tirada, es necesario según mi principio, que extraiga del juego 1/6 del total para desinteresarme (del mismo) en razón de dicha primera tirada.

Que si todavía después de eso convenimos en que yo no jugaré la segunda tirada, para mi indemnidad deberé retirar una sexta parte del resto, que es 5/36 del total.

Y si después de eso convenimos en que no jugaré la tercera tirada, para mi indemnidad deberé retirar la sexta parte del resto, que es 25/216 del total.

Y si después de eso todavía convenimos en que no jugaré la cuarta tirada, deberé retirar un sexto del resto, que es 125/1296 del total, y convengo con Vd. que ese es el valor de la cuarta tirada, suponiendo que se hayan tratado ya las precedentes.

Pero Vd. me propone en el último ejemplo de su carta (utilizo sus propios términos) que si intento encontrar el seis en ocho tiradas y si ya he jugado tres veces sin encon-

trarlo, si mi jugador me propone que no juegue mi cuarta tirada y quiere desinteresarme de ello porque podría obtenerlo (el seis), *me pertenecerá 125/1296 de la suma total de nuestras apuestas.*

Lo cual sin embargo no es cierto según mi principio. Pues en ese caso, al no haber obtenido nada con las tres primeras tiradas el que tiene el dado en su poder, y siguiendo en juego la suma total, el que tiene el dado y conviene en no jugar su cuarta tirada, debe tomar para su indemnidad 1/6 del total.

Y si hubiese jugado cuatro veces sin encontrar el punto buscado, y se conviniera que no jugase la quinta, tendría igualmente para su indemnidad 1/6 del total. Pues al permanecer en juego la suma entera, no sólo se deduce del principio, sino que incluso es de sentido común que cada tirada tiene que proporcionar una ventaja igual.

Le ruego pues que me haga saber si estamos de acuerdo con el principio, como creo, o si diferimos solamente en la aplicación.

Estoy, de todo corazón, etc.

FERMAT

No aparece tampoco la respuesta a esta carta. Puede suponerse que se trata de una de las primeras, pues en ellas no aparece todavía el problema con la claridad de formulación que aparecerá a continuación. Por ello renunciamos a comentarlo hasta ver la siguiente carta, respuesta de *Pascal* a otra de *Fermat*, también perdida, en la que éste le exponía su método para resolver el problema de la división.

PASCAL a FERMAT   [LXX / Va, p.179-183]

Miércoles, 20 de julio de 1654

Señor,

1. La impaciencia me domina tanto como a Vd. y, aunque estoy todavía en el lecho, no puedo dejar de decirle que he recibido ayer por la noche, de parte del señor de Carcavi, su carta acerca de los lotes, que admiro más de lo que soy capaz de expresar. No puedo extenderme, pero, en una palabra, ha encontrado Vd. los dos lotes de los dados y de las partidas con perfecta justeza: estoy muy satisfecho de ello, pues ahora ya no dudo de estar en la verdad, tras la admirable coincidencia en que me encuentro con Vd.

Admiro mucho más el método de las partidas que el de los dados: he visto a varias personas encontrar el de los dados, como el caballero de Méré, que es quien me ha propuesto estas cuestiones, y también el señor de Roberval; pero el señor de Méré nunca había podido encontrar el justo valor de las partidas, ni un sistema para llegar a él, de suerte que yo resultaba ser el único en conocer esa proporción.

2. El método de Vd. es muy seguro y es el primero que me vino a la mente en esta investigación; pero, como el trabajo de las combinaciones es excesivo, he encontrado un resumen de las mismas y propiamente otro método más corto y claro, que desearía poderle exponer aquí en pocas palabras: pues en lo sucesivo querría abrirle mi corazón si es posible, tanto placer siento de ver nuestro acuerdo. Veo bien que la verdad es la misma en Toulouse que en Paris.

Es así más o menos como hago para saber el valor de cada una de las partidas, cuando juegan dos jugadores, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno ha puesto en juego 32 pistolas:

Considere pues, señor, que si el primero gana, le pertenecen 64 (pistolas); si pierde, le pertenecen 32. Por lo tanto, si prefieren no arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "Estoy seguro de tener 32 pistolas, pues incluso la pérdida me las da; pero en cuanto a las otras 32, puede ser que las consiga yo, puede ser que las consiga Vd., el azar es el mismo. Dividamos pues estas 32 pistolas por la mitad, y déme además las 32 que tengo seguras". Tendrá por lo tanto 48 pistolas, y el otro 16.

Supongamos ahora que el primero tenga <u>dos</u> partidas, y el otro, <u>ninguna</u>, y comienzan a jugar una partida. La suerte de esa partida es tal que, si el primero la gana, obtiene todo el dinero, 64 pistolas; si el otro la gana, han vuelto al caso precedente, en el que el primero tendrá <u>dos</u> partidas y el otro <u>una</u>.

Ahora bien, hemos demostrado ya que en este caso pertenecen al que tiene las dos partidas, 48 pistolas: luego si no quieren jugar esa partida, debe razonar así: "Si la gano, ganaré todo, es decir, 64; si la pierdo, me pertenecerán legítimamente 48; por lo tanto, déme las 48 que tengo seguras incluso en el caso de que pierda, y repartamos las otras 16 por la mitad, puesto que hay tanta probabilidad de que las gane Vd. como yo". Así él tendrá 48 y 8, que son 56 pistolas.

Supongamos por fin que el primero no tenga más que una partida y el otro ninguna. Vd. verá, señor, que si comienzan una nueva partida, la suerte es tal que , si el primero la gana, tendrá dos partidas contra nada, y de salida, por el caso precedente, le pertenecen 56; si la pierde, están empatados a una partida, por lo tanto le pertenecen 32 pistolas. Luego debe decir: "Si no quiere jugarla, déme 32 pistolas que tengo seguras, y dividamos el resto de 56 por la mitad. De 56, reste 32, quedan 24; divida pues las 24 por la mitad, Vd. toma 12 y yo 12 que, con las 32, hacen 44".

Luego por este medio, como Vd. ve, mediante simples sustracciones, para la primera partida le pertenecen, del dinero del otro, 12 pistolas; para la segunda, otras 12; y para la última, 8.

Así que, para no hacer más misterio, como Vd. lo verá ya todo claro, y yo no lo hacía más que para comprobar que no me equivocaba, el valor (entiendo el valor sobre el dinero del otro únicamente) de la última partida de dos es doble que el de la [última] partida de tres y cuádruple que el de la última partida de cuatro, y óctuple que el de la última partida de cinco, etc.

3. Pero la proporción de las primeras partidas no es

tan fácil de encontrar: es así, pues no quiero ocultar nada, éste es el problema del que tanto me ocupaba, porque en efecto me gusta mucho:

Dado un número cualquiera de partidas, encontrar el valor de la primera.

Sea el número dado de partidas, por ejemplo, 8. Tómense los ocho primeros números pares y los ocho primeros números impares, a saber:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

y

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multiplíquense los números pares de esta manera: el primero por el segundo, el producto por el tercero, el producto por el cuarto, el producto por el quinto, etc.; multiplíquense los números impares de la misma manera: el primero por el segundo, el producto por el tercero, etc.

El último producto de los pares es el denominador y el último producto de los impares es el numerador de la fracción que expresa el valor de la primera partida de ocho: es decir, que si juega cada uno el número de pistolas expresado por el producto de los pares, le pertenecerá del dinero del otro el número expresado por el producto de los impares.

Lo que se demuestra, pero con mucho trabajo, mediante las combinaciones tal como Vd. las ha imaginado, y yo no he podido demostrarlo por esta otra vía que acabo de decirle, sino únicamente por la de las combinaciones. Y estas son las proposiciones que llevan a ello, que son propiamente proposiciones aritméticas relacionadas con las combinaciones, de las que tengo algunas bellas propiedades:

4. Si de un número cualquiera de letras, por ejemplo de ocho:

A, B, C, D, E, F, G, H,

toma Vd. todas las combinaciones posibles de 4 letras y luego todas las combinaciones posibles de 5 letras, y luego de 6, de 7 y de 8, etc. y tomando así todas las combinaciones posibles desde la multitud que es la mitad del todo hasta el todo, digo que si reuniese la mitad de las combinaciones de 4 con cada una de las combinaciones superiores, la suma será el número correspondiente de la progresión cuaternaria a comenzar por el binario, que es la mitad del conjunto.

Por ejemplo, se lo diré en latín, porque el francés no sirve para esto:

*"Si de unas letras cualesquiera, por ejemplo, 8:

A, B, C, D, E, F, G, H,

se suman todas las combinaciones de cuatro, de cinco, de seis, etc., hasta de ocho, digo que si se suman la mitad de las combinaciones de cuatro, a saber 35 (la mitad de 70), con todas las combinaciones de cinco, es decir, 56, más todas las combinaciones de seis, o sea 28, más todas las combinaciones de siete, es decir, 8, más todas las combinaciones de ocho, es decir, 1, se habrá formado el cuarto número de la progresión de cuatro cuyo origen es el dos; digo el cuarto

* En latín en el original, lo que está entre comillas.

número porque 4 es la mitad de 8.

Los números de la progresión de cuatro cuyo origen es 2, serán pues:

2, 8, 32, 128, 512, etc.

de los cuales el primero es el 2, el segundo el 8, el 32 el tercero y el 128 el cuarto, y este 128 corresponde a

+ 35, la mitad de las combinaciones de 4 letras
+ 56 combinaciones de 5 letras
+ 28 combinaciones de 6 letras
+ 8 combinaciones de 7 letras
+ 1 combinación de 8 letras."

5. Hasta aquí la primera proposición que es puramente aritmética, la otra se refiere a la doctrina de las partidas y es así:

Hay que decir previamente esto: si se tiene <u>una</u> partida de cinco, por ejemplo, y que por lo tanto faltan 4, el juego estará decidido infaliblemente en 8, que es el doble de 4.

El valor de la primera partida de 5 sobre el dinero del otro es la fracción que tiene por numerador la mitad de las combinaciones de 4 sobre 8 (tomo 4 porque es igual al número de las partidas que faltan y 8 porque es el doble de 4) y por denominador ese mismo numerador más todas las combinaciones superiores.

Así, si tengo <u>una</u> partida de cinco, me pertenecen, del dinero de mi adversario, 35/128; es decir que si él ha puesto 128 pistolas, yo tomo 35 y dejo el resto, 93.

Ahora bien, esta fracción 35/128 es la misma que esta otra: 105/384, que está hecha por multiplicación de los pares para el denominador y por multiplicación de los impares para el numerador.

Sin duda verá Vd. bien todo esto, si se toma un poco de trabajo; por eso creo que es inutil insistir más.

6. No obstante le envío una de mis viejas tablas; no tengo posibilidad de copiarla, así que la reharé.

Verá en ella, como siempre, que el valor de la primera partida es igual al de la segunda, lo que se comprueba facilmente mediante las combinaciones.

Verá igualmente que los números de la primera línea aumentan siempre; los de la segunda igual; los de la tercera igual.

Pero a continuación los de la cuarta disminuyen, y los de la quinta, etc. Lo cual es extraño.

	Si cada uno juega a 256 en					
Me pertenecen, de las 256 pistolas de mi adversario, por la	6 partidas	5 partidas	4 partidas	3 partidas	2 partidas	1 part
1^a partida	63	70	80	96	128	25
2^a partida	63	70	80	96	128	
3^a partida	56	60	64	64		
4^a partida	42	40	32			
5^a partida	24	16				
6^a partida	8					

Me pertenecen, de las 256 de mi adversario, por	Si cada uno juega a 256 en 6 partidas	5 partidas	4 partidas	3 partidas	2 partidas	1 parti
la 1ª partida	63	70	80	96	128	256
las 2 primeras	126	140	160	192	256	
las 3 primeras	182	200	224	256		
las 4 primeras	224	240	256			
las 5 primeras	248	256				
las 6 primeras	256					

7. No tengo tiempo de enviarle la demostración de una dificultad que asombraba mucho al Señor (de Méré), *pues él tiene muy buena inteligencia, pero no es geómetra* (eso es, como Vd. sabe, un gran defecto) y no comprende siquiera que una línea matemática sea infinitamente divisible y cree comprender muy bien que está compuesta de un número finito de puntos, y jamás he podido sacarle de ahí. Si Vd. pudiera hacerlo, le volveríamos perfecto.*

Así pues me decía que había encontrado falsedad en los números, por la razón siguiente:

Si se intenta hacer un seis con un dado, hay una ventaja en intentarlo en cuatro (tiradas) *como de 671 a 625.*

*Si se intenta hacer sonnés** con dos dados, hay desventaja en intentarlo en 24.*

Y sin embargo 24 es a 36 (que es el número de caras de los dos dados) como 4 es a 6 (que es el número de caras de un dado).

* No es geómetra, esto es, no sabe matemáticas.

** Sonnez : el seis doble.

Esto provocaba su gran escándalo, que le hacía decir a todo el mundo que las proposiciones no eran constantes y que la Aritmética se desmentía: pero Vd. verá la razón con mucha facilidad por los principios mismos que conoce.

Pondré en orden todo lo que he hecho sobre esto cuando termine los Tratados geométricos en los que trabajo hace ya algún tiempo.

8. También he hecho (tratados) aritméticos, respecto a los cuales le suplico me envíe su opinión acerca de esta demostración.

Propongo el lema que todo el mundo sabe: que la suma de tantos números como se quiera de la progresión contínua desde la unidad, como

1, 2, 3, 4,

tomada dos veces, es igual al último, 4, tantas veces como el próximo más grande, 5; es decir, que la suma de los números contenidos en A, tomada dos veces, es igual al producto

A <u>in</u> (A + 1).

Ahora, llego a mí proposición:

*"La diferencia de dos cubos próximos cualesquiera, restada la unidad, es el sexto de todos los números contenidos en la raiz del menor.

Sean dos raices, R y S, diferentes en una unidad, digo: $R^3 - S^3 - 1$ iguala a la suma de los números contenidos en S multiplicada por seis.

Si llamamos A a S, entonces R es

* En latín en el original lo encerrado entre comillas.

$A + 1.$

Por tanto, el cubo de la raiz R o A + 1, es

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3.$$

Pero el cubo de S, o A, es

$$A^3,$$

y la diferencia de estos es

$$3A^2 + 3A \ \underline{aeq.}\ R^3 - S^3 - 1$$

Pero dos veces la suma de los números contenidos en A o en S, según el lema,

$$A \ \underline{in}\ (A + 1), \text{ esto es } A^2 + A:$$

por lo tanto, seis veces la suma de los números contenidos en A iguala

$$3A^2 + 3A.$$

Pero

$$3A^2 + 3A \ \underline{aeq.}\ R^3 - S^3 - 1;$$

por lo tanto,

$R^3 - S^3 - 1$ es igual a seis veces la suma de los números contenidos en A o en S.

Como queríamos demostrar."

Nadie me ha puesto dificultades en esto, pero se me ha dicho que no me las ponían por la razón de que todo el mundo está hoy día acostumbrado a este método; y yo pretendo que, sin hacerme gracia, se debe admitir esta demostración como de un género excelente; no obstante espero su opinión con toda sumisión.

Todo lo que he demostrado en Aritmética es de esta natu-

raleza.

9. He aquí otras dos dificultades todavía:

He demostrado una proposición plana sirviéndome del cubo de una línea comparada al cubo de otra; pretendo que esto es puramente geométrico con el más estricto rigor.

Igualmente he resuelto el problema:

"Dados cuatro cualesquiera de cuatro planos, cuatro puntos y cuatro esferas, encontrar una esfera que, tocando a las esferas dadas, pase por los puntos dados y deje sobre los planos porciones de esfera capaces de ángulos dados."

Y este otro:

"Dados tres cualesquiera de tres círculos, tres puntos, tres líneas, encontrar un círculo que, tocando los círculos y los puntos, deje sobre las líneas un arco capaz de un ángulo dado."

He resuelto estos problemas de forma plana, no empleando en la construcción más que círculos y líneas rectas; pero en la demostración me sirvo de lugares sólidos, de parábolas o hipérboles; pretendo no obstante que, puesto que la construcción es plana, mi solución es plana y debe pasar por tal.

Importunarle tanto tiempo es reconocer bien mal el honor que Vd. me hace sufriendo estas disquisiciones (siempre pienso decirle sólo dos palabras), si no le dijera lo que siento en el corazón, y que es lo siguiente, que cuanto más le conozco, más le admiro y le honro y que, si viera Vd. hasta qué punto es así, concedería un lugar en su amistad a este que es, señor, su etc.

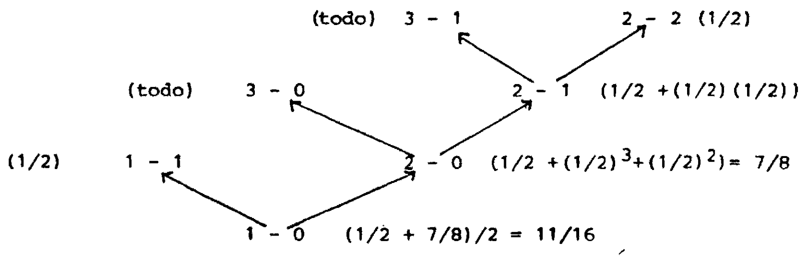
PASCAL

Como hemos dicho, no se conserva la carta de *Fermat* de la que es respuesta esta carta de *Pascal* del 20 de julio de 1654. En ella, según el mismo *Pascal* reconoce, *Fermat* le mostraba su solución al problema de la división de las apuestas. Esta solución era la correcta, pero *Pascal* le encuentra el defecto de ser algo larga y complicada a causa de basarse en las combinaciones, y cree haber obtenido un método más corto y claro.

N.P. David desconfía de esta solución y afirma que lo más probable es que *Pascal* no había encontrado la respuesta al problema hasta que no recibió la respuesta de *Fermat* y ve la prueba de ello en que el primero en realidad no comprende perfectamente el método del segundo. No lo comprenderá hasta bastante después.

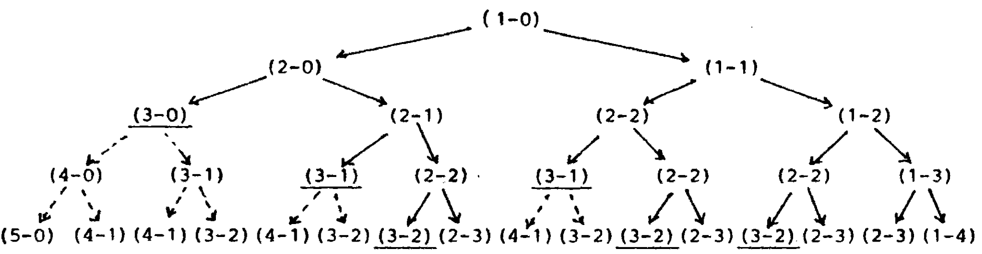
Los cálculos del caso particular del párrafo 2. son correctos. *Pascal* calcula en función de las partidas que faltan a cada jugador para terminar el juego, es decir, para ganar. No calcula sobre las "chances" o posibilidades de ganar sino sobre la partida de ganancia segura. El método que emplea consiste en empezar por el final y remontarse poco a poco hasta la primera partida. Este ejemplo consiste en dos jugadores que juegan a tres partidas y apuestan cada uno 32 pistolas.

El esquema sería como sigue:



Las cantidades entre paréntesis son las proporciones del dinero de las apuestas que el 1^{er}jugador debe tomar. Se llega a la cantidad correcta de 11/16. Los párrafos siguientes son intentos de generalización del método.

El método de *Fermat* es el contrario, y merece la pena analizarlo, pues es la base de los ejemplos posteriores, en las cartas del 24 y 29 de agosto, con tres jugadores. *Fermat* calcula en función de las partidas jugadas. El esquema de los resultados posibles en cada una de las partidas resultaría así:

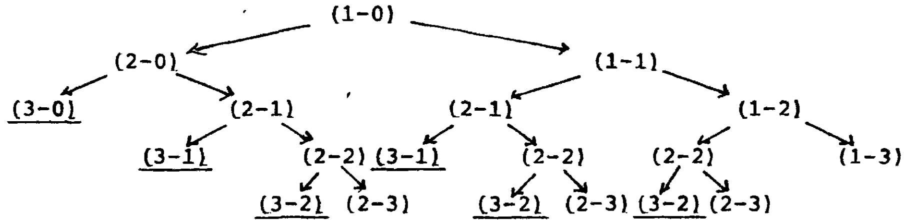


Los resultados subrayados corresponden a los casos en que el primer jugador gana el juego. Las lineas de puntos indican que, tras haber ganado uno de los jugadores (el primero), los resultados siguientes sólo se darían si la partida no se interrumpiese. El resultado de 1/4 + 2/8 + 3/16 = 11/16 extraido directamente del esquema, parece indicar, según la idea de *Fermat*, que el numerador sería función de un objetivo preciso, sacar ... en ... jugadas, mientras que el denominador sería función de un conjunto sin objetivo.

Son necesarias cuatro partidas completas para ue aparezcan todas las posibilidades, es decir, para que en la última línea haya ganado en todos los casos uno de los dos jugadores, no haya partidas sin terminar en ninguna de las ramas. Pero con ello surge la dificultad, tenemos una fracción formada por las partidas favorables <u>reales</u> divididas por las partidas posibles <u>abstractas</u>. Esta dificultad se puede soslayar aplicando otros métodos de cálculo. En lenguaje moderno de combinaciones, hay sólo una manera de ganar todas las partidas, o de perderlas todas, $C_{4,4}= 1$, hay cuatro maneras de ganar tres (o una), $C_{4,3}= C_{4,1}= 4$, y hay seis maneras de ganar dos partidas, $C_{4,2}= 6$. De todas ellas, hay 11 que le dan al primer jugador la victoria definitiva. La fracción sería pues:

$$\frac{\sum_{p=2}^{4} C_{4,p}}{\sum_{p=0}^{4} C_{4,p}} = \frac{11}{16} .$$

Otro razonamiento es el que se basa en la noción de equiprobabilidad. Con él no es necesario considerar más que los casos realmente posibles, y el esquema quedaría así:



El cálculo sería:

$$1/4 + (2/6)(3/4) + (3/6)(3/6)(3/4) = 11/16$$

1/4 : hay una posibilidad entre cuatro de ganar en la tercera línea, para el jugador A.

(2/6).(3/4) : hay dos posibilidades entre seis de ganar en la cuarta línea, que a su vez provienen de tres posibilidades de las cuatro de la tercera línea.

(3/6)(3/6)(3/4) : hay tres posibilidades entre seis de ganar en la quinta línea que provienen de tres posibilidades de seis de la cuarta línea, que a su vez provienen de las tres posibilidades de cuatro de la tercera línea.

Este es el método moderno, que evita objecciones como las de *Roberval*, que veremos más adelante.

En el punto 7. se trata la conocida anédota del *caballero de Méré*: la Aritmética es contradictoria, por la razón siguiente, si intentamos obtener un seis con un dado, hay ventaja en hacerlo en cuatro tiradas, es decir, la probabilidad es mayor de 1/2. En efecto, la probabilidad de obtener un seis con un dado es 1/6. La probabilidad de no obtener ningún seis es 5/6. La probabilidad de no obtener un seis en n tiradas será de $(5/6)^n$, y por lo tanto la probabilidad de obtener al menos un seis en n tiradas será $1 - (5/6)^n$. Si n es igual a cuatro tiradas, entonces

$$1 - (5/6)^4 = 671/1296 = 0,5177.$$

En cambio, hay desventaja en obtener dos seises con dos dados (sonnés) en 24 tiradas: la probabilidad de dos seises es de 1/36. La probabilidad de no obtener dos 6 será por lo tanto 35/36. La probabilidad de no obtenerlos en n tiradas será $(35/36)^n$. La probabilidad de obtener dos 6 al menos una vez en n tiradas será $1 - (35/36)^n$. Si $n = 24$, entonces

$$1 - (35/36)^{24} = 0,4914,$$

es decir, menor que 1/2. Para $n = 25$, la probabilidad es de 0,5055. Y a pesar de todo ello 24 es a 36 (casos posibles con dos dados), como 4 es a 6 (casos posibles con un dado). En esto veía el *caballero de Méré* la contradicción, puesto que las proporciones no serían constantes y la Aritmética se contradiría. En cualquier caso, la capacidad de *Méré* como jugador no era nada desdeñable, puesto que era capaz de distinguir entre una probabilidad de 0,4914 y otra de 0,5177.

En el punto 8. se trata de demostrar que la diferencia de los cubos de dos números naturales consecutivos cualesquiera, restándole la unidad, es igual a seis veces la suma de todos los números contenidos en el más pequeño:

$$(A + 1)^3 - A^3 - 1 = 3A^3 + 3A = \frac{6A(A + 1)}{2}.$$

Pascal añade todavía dos proposiciones geométricas más. En cambio no demuestra el error de *Méré* alegando falta de tiempo.

(Carta LXXI/ IV, p.444-445)

FERMAT a CARCAVI

Domingo, 9 de agosto de 1654

Señor,

1. Me he sentido encantado de haber tenido sentimientos conformes a los del señor Pascal, pues estimo infinitamente su genio y le creo muy capaz de lograr todo lo que se proponga. La amistad que me ofrece me es tan querida y digna de consideración que no creo deba refrenarme de hacer algún uso de ella en la impresión de mis Tratados.

Si ello nops choca, podríais ambos ser procuradores de esta edición, de la que consiento seais los maestros; podríais aclarar o desarrollar lo que parezca demasiado conciso y descargarme de un cuidado que mis ocupaciones me impiden tener. Deseo incluso que esta obra aparezca sin mi nombre, dejandoos la elección de todas las designaciones que podrán marcar el nombre del autor, al que calificareis como vuestro amigo.

2. He aquí el método que he imaginado para la Segunda Parte, que contendrá mis invenciones acerca de los números. Este trabajo todavía es sólo una idea, y no podría ponerla ahora por completo sobre el papel; pero enviaré sucintamente al señor Pascal todos mis principios y mis primeras demostraciones, y respondo por adelantado de que sacará de ello cosas, no sólo nuevas y desconocidas hasta aquí, sino incluso sorprendentes.

Si une usted su trabajo con el suyo, todo podrá suceder y concluirse en poco tiempo, y entre tanto se podrá sacar a la luz la Primera Parte que tiene usted en su poder.

Si al señor Pascal le parece bien mi proposición, que está fundada principalmente sobre la gran estima que tengo de su genio, de su saber y de su inteligencia, comenzaré en primer lugar por informarle de mis invenciones numéricas. Adios.

Soy, señor, su muy humilde y obediente servidor,

FERMAT

Desgraciadamente, estos proyectos de *Fermat* nunca se llegaron a realizar.

Pierre de Carcavi fué, como *Fermat*, Consejero en el Parlamento de Toulouse, fué corresponsal de *Mersenne* y llegó a ser miembro de la Academia. Era íntimo amigo de *Pascal*, introdujo a *Fermat* en el círculo de *Mersenne* en 1636, y *Pascal* le escribió a *Fermat* por sugerencia suya.

(Carta LXXIII / IV, p.435-437)

FERMAT a PASCAL

Sábado, 29 de agosto de 1654

Señor,

1. Nuestras espadas no dejan de cruzarse y estoy tan admirado como usted de que nuestros pensamientos se ajusten tan exactamente que parece que hayan tomado una misma ruta y recorrido el mismo camino. Sus últimos Tratados sobre el Triángulo Aritmético y su aplicación son una auténtica prueba de ello; y si mis cálculos no me engañan, su onceava consecuencia iba en la posta de París a Toulouse, mientras que mi proposición sobre los números figurados, que en efecto es la misma, iba de Toulouse a París.

No me asusta errar mientras haya encuentros como estos, y estoy persuadido de que el verdadero medio para evitar el error es el de competir con usted. Pero si dijera más, la coconvertirla en un cumplido y nosotros hemos borrado este enemigo de las conversaciones dulces y amables.

Ahora me toca a mí entregarle algunas de mis invenciones numéricas; pero el fin del Parlamento aumenta mis ocupaciones y me atrevo a esperar de su bondad que me ofrecerá un respiro justo y casi necesario.

2. No obstante responderé a su cuestión de los tres jugadores que juegan dos partidas. Cuando el primero tiene una y los otros no tienen una, su primera solución es la verdadera, y la división del dinero debe hacerse en 17, 5 y 5; la

razón de ello es manifiesta y se basa siempre en el mismo principio, las combinaciones muestran en primer lugar que el primero tiene a su favor 17 azares iguales, mientras que cada uno de los otros (dos) no tiene más que cinco.

3. Por otra parte, no hay nada que en el porvenir no le comunique con toda franqueza. Medite entretanto, si lo juzga oportuno, esta proposición:

Las potencias cuadradas de dos, aumentadas en la unidad, son siempre números primos.

El cuadrado de 2, aumentado en la unidad, hace 5, que es número primo.

El cuadrado del cuadrado hace 16, que, aumentado con la unidad, hace 17, número primo.

El cuadrado de 16 hace 256 que, aumentado con la unidad, hace 257, número primo.

El cuadrado de 256 es 65.536 que, aumentado en la unidad, es 65.537, número primo.

Y así hasta el infinito.

Es una propiedad de cuya verdad le respondo. La demostración es muy dificultosa y le confieso que todavía no he podido encontrarla por completo; no le propondría buscarla si yo lo hubiera conseguido.

Esta proposición sirve para la invención de números que estén en una razón dada con sus partes alícuotas, sobre lo cual he hecho descubrimientos considerables. Hablaremos de ello en otra ocasión.

Soy, señor, su, etc.

FERMAT

Entre esta carta y la anterior parecen haberse cruzado algunas que no se conservan. *Pascal* habría propuesto ya la objección de que cuando hay más de dos jugadores, el método de *Fermat* no sirve. Aquí *Fermat* lo resuelve sumariamente sin explicación y su carta se cruza con la de *Pascal* del 24 de agosto. *Fermat* se verá obligado posteriormente a volver sobre el tema para explicarle a *Pascal* dónde está su error.

En cuanto al punto 1., la consecuencia onceava del Tratado del Triángulo aritmético se enunciaba así:

"Cada célula de la dividente es doble de la que le precede en su rango, paralelo o perpendicular".

Las células de la dividente son las que atraviesa la bisectriz del ángulo recto que forman todas las células en la figura:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

En cuanto a la proposición de *Fermat* de los números figurados, es la de la Observación XLVI sobre *Diofanto*. *Fermat* no dice que ya había descubierto el triángulo aritmético ocho años atrás, en 1636. La demostración de esta proposición la hizo *Fermat* a petición de *Mersenne*.

[Carta LXXII / Va, p.184-188]

PASCAL *a* FERMAT

Lunes, 24 de agosto de 1654

Señor,

1. No pude abrirle todo mi pensamiento en lo referente a los lotes de varios jugadores en el último correo, e incluso siento cierta repugnancia de hacerlo, por miedo a que esta admirable coincidencia que había entre nosotros y que me era tan preciosa, comience a desmentirse, pues temo que seamos de opiniones diferentes sobre este tema. Quiero exponerle todas mis razones, y usted me hará el favor de corregirme si me equivoco, o de confirmarme si he dado con lo cierto. Se lo pido de buena fe y sinceramente, pues sólo me tendré por seguro cuando usted esté de mi lado.

Cuando no hay más que <u>dos</u> jugadores, su método, que procede por combinaciones, es muy seguro; pero cuando hay <u>tres</u>, creo tener la demostración de que no es justo, a no ser que proceda usted de otra manera que yo no he comprendido. Pero el método que le he expuesto y que suscribo en todos los casos es común a todas las condiciones imaginarias de todo tipo de partidas, mientras que el de las combinaciones (del que no me sirvo más que en los encuentros particulares en los que es más corto que el general) no es bueno más que en estas únicas ocasiones y no en las demás.

Estoy seguro de que me haré entender, pero necesitaré algún discurso y usted alguna paciencia.

2. He aquí como procede usted cuando hay dos jugadores:

Si dos jugadores, jugando varias partidas, se encuentran en el punto de que faltan dos partidas al primero y tres al segundo, para encontrar el lote es necesario, dice usted, ver en cuántas partidas estará el juego absolutamente decidido.

Es facil suponer que será en cuatro partidas, de lo cual concluye usted que hay que ver de cuántas maneras cuatro partidas se combinan entre dos jugadores y cuántas combinaciones hay para hacer ganar al primero y cuántas para el segundo y repartir el dinero según esa proporción. A mí me hubiera costado trabajo entender ese discurso si no lo hubiese sabido por mí mismo previamente; también usted lo había escrito con ese pensamiento. Así, para ver cómo se combinan cuatro partidas entre dos jugadores, hay que imaginar que juegan con un dado de dos caras, (puesto que no son más que dos jugadores) como a cara o cruz, y que lanzan cuatro de esos dados (porque juegan cuatro partidas); y ahora hay que ver cuántos resultados diferentes pueden tener esos dados. Eso es facil de calcular: puede haber dieciseis, que es el segundo grado de cuatro es decir, el cuadrado. Pues figurémonos que una de las caras está marcada con a, favorable al primer jugador, y la otra con b, favorable al segundo; luego estos cuatro dados pueden asentarse en una de estas dieciséis posiciones:

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

y porque le faltan dos partidas al primer jugador, todas las caras que tienen dos a le hacen ganar: luego hay 11 a su favor; y como le faltan tres partidas al segundo, todas las caras en que hay tres b pueden hacerle ganar: luego hay cinco de esas. Así pues, deben repartir la suma como 11 a cinco.

Este es su método cuando hay dos jugadores; sobre lo cual dice usted que, si hubiera más, no sería difícil hacer los lotes con el mismo método.

3. Tengo que decirle al respecto, señor, que estos lotes para dos jugadores, basados sobre las combinaciones, son muy justos y muy buenos; pero que, si hay más de dos jugadores, no será siempre justo, y voy a decirle la razón de esa diferencia.

Comuniqué su método a nuestros amigos, al cual el señor de Roberval me hizo esta objección:

Es un error basarse para hacer la división sobre la suposición de que se juega en cuatro partidas, puesto que, cuando faltan dos partidas al uno y tres al otro, no es necesario que se jueguen cuatro partidas, pudiendo suceder que no se jueguen más que dos o tres, o quizá en realidad cuatro.

Y así no veía por qué se pretende hacer la división justamente sobre una condición fingida de que se jugarán cuatro partidas, a la vista de que la condición natural del juego es que no se seguirá jugando en cuanto uno de los jugadores haya ganado, y que si eso no era falso, al menos no estaba demostrado, de manera que se tenían ciertas sospechas de que habíamos hecho un paralogismo.

Yo le respondí que no me basaba tanto en ese método de las combinaciones, que verdaderamente no está en su lugar en esta ocasión, como sobre mi otro método universal, al que nada escapa y que lleva consigo su demostración, que encuentra precisamente la misma división que el de las combinaciones; y además le demostré la verdad de la división entre dos jugadores por las combinaciones de esta manera:

¿No es cierto que, si dos jugadores, encontrándose en la situación hipotética de que le falten dos partidas a uno y tres al otro convienen ahora de buen grado en que se jueguen cuatro partidas completas, es decir, que se lancen a la vez los cuatro dados con dos caras, no es verdad, dije, que si han pactado jugar las cuatro partidas, la división debe ser, tal como hemos dicho, según la multitud de resultados favorables a cada uno?

El estuvo de acuerdo, y ello en efecto es demostrativo; pero negó que la misma cosa se mantuviera cuando no se ajustaran a jugar las <u>cuatro</u> partidas. Yo le dije pues así:

¿No está claro que los mismos jugadores, al no estar obligados a jugar las cuatro partidas, pero querer abandonar el juego en cuanto uno de ellos hubiese alcanzado ese número pueden, sin perjuicio ni ventaja, atenerse a jugar las cuatro partidas enteras y que esta convención no cambia de ninguna manera su condición? Pues si el primero gana las dos primeras partidas de <u>cuatro</u> y así ha ganado, ¿se negará a jugar todavía dos partidas más, puesto que si las gana no habrá ganado más, y si las pierde no habrá ganado menos? Pues las dos que el otro ha ganado no le bastan, porque le hacen falta tres, y así no hay bastante con cuatro partidas para que puedan llegar los dos a conseguir el número de ellas que les faltan.

Ciertamente es facil considerar que al uno y al otro les será absolutamente igual e indiferente jugar en las condiciones naturales de su juego, que es terminar en cuanto uno tenga su número, o bien jugar las cuatro partidas enteras; luego, puesto que esas dos condiciones son iguales e indiferentes, los lotes deben ser parecidos en la una y en la otra. Pues es justo cuando está obligados a jugar cuatro partidas, como lo he mostrado, es justo también en el otro caso.

He aquí como lo demostré, y si usted lo observa con cuidado, esta demostración está basada sobre la igualdad de las dos condiciones, verdadera y fingida, respecto de dos jugadores, y que en la una y en la otra uno mismo ganará siempre y, si uno gana o pierde en una, ganará o perderá en la otra, y nunca los dos lo conseguirán.

4. Sigamos el mismo argumento para tres jugadores y supongamos que le falta una partida al primero, que le faltan dos al segundo y dos al tercero. Para hacer la división, siguiendo el mismo método de las combinaciones, hay que buscar primero en cuántas partidas estará decidido el juego, como hemos hecho cuando había dos jugadores: lo estará en tres, pues no podrían jugar tres partidas sin que haya llegado necesariamente la decisión.

Hay que ver ahora de cuántas maneras se combinan tres partidas entre tres jugadores y cuántas hay favorables al uno, cuántas al otro y cuántas al último y, siguiendo esta proporción, distribuir el dinero del mismo modo que se ha hecho en la hipótesis de los dos jugadores.

Para ver cuántas combinaciones hay en total, es facil: es la tercera potencia de tres, es decir, su cubo, 27. Pues si se lanzan tres dados a la vez (puesto que hay que jugar tres partidas), que tengan cada uno tres caras (puesto que hay tres jugadores), una marcada a favorable al primero, otra b para el segundo, la otra c para el tercero, es evidente que esos tres dados lanzados a la vez pueden caer en 27 posiciones diferentes, a saber:

a	a	a	a	a	a	a	a	a										c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Ahora bien, al primero no le falta más que <u>*una*</u> *partida, luego todas las posiciones en que hay una* <u>*a*</u> *le son favorables: de ellas hay 19.*

Al segundo le faltan <u>*dos*</u> *partidas, luego todas las posiciones en que hay dos* <u>*b*</u> *le son favorables: de ellas hay 7.*

Al tercero le faltan <u>*dos*</u> *partidas, luego todas las posiciones en que hay dos* <u>*c*</u> *le son favorables: de ellas hay 7.*

Si de aquí se concluyera que hay que dar a cada uno según la proporción 19, 7, 7, se cometería un error demasiado grosero, y no creo que usted lo hubiera hecho así, pues hay algunas caras favorables a la vez al primero y al segundo, como <u>*abb*</u>*, pues el primero encuentra en ella una* <u>*a*</u> *que le falta y el segundo las dos* <u>*b*</u> *que necesita; y lo mismo es* <u>*acc*</u> *para el primero y el tercero.*

Luego no hay que contar esas caras que son comunes a dos como si valieran la suma entera para cada uno, sino únicamente la mitad. Pues, si apareciese la posición <u>*acc*</u>*, el primero y el tercero tendrían el mismo derecho a la suma al alcanzar ambos sus puntos, luego repartirían el dinero por la mitad;*

pero si aparece la posición dab, el primero gana solo. Hay que hacer el cómputo de la siguiente manera:

Hay 13 posiciones que le dan todo al primero y 6 que le dan la mitad y 8 que no le dan nada; luego, si la suma entera es una pistola, hay 6 caras que valen cada una 1/2 pistola y 8 que no valen nada.

Luego, en caso de división, hay que multiplicar:

	13 por una pistola, que hacen	13
	6 por media, que hacen	3
	8 por cero, que hacen	0
Suma	27	Suma 16

y dividir la suma de los valores, 16 por la suma de las posiciones, 27, que da la fracción 16/27 que es lo que pertenece al primero en caso de división, a saber, 16 pistolas de 27.

El lote del segundo y del tercer jugador se encontrarán de la misma manera:

	Hay 4 posiciones que le valen 1 pistola; multiplicar	4
	Hay 3 posiciones que le valen 1/2 pistola; multiplicar	$1\frac{1}{2}$
	Y 20 posiciones que no le valen nada	0
Suma	27	Suma $5\frac{1}{2}$

Luego al segundo jugador le pertenecen 5 pistolas y 1/2 de 27, y otro tanto al tercero, y esas tres sumas, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, y 16 juntas, hacen las 27.

5. He aquí de qué manera en mi opinión habría que hacer los lotes mediante las combinaciones, siguiendo su método, a no ser que tenga usted alguna otra cosa sobre este tema que

yo no pueda saber. Pero si no me equivoco, esta división no es justa.

La razón de ello es que se supone una cosa falsa, que se juega infaliblemente en tres partidas, mientras que la condición natural de este juego es que se juegue hasta que uno de los jugadores haya conseguido el número de partidas que le hace falta, en cuyo caso el juego cesa.

No es que no pueda suceder que se jueguen tres partidas, pero puede suceder también que no se jueguen más que una o dos y ninguna (de ellas) necesariamente.

¿Pero de qué proviene, se podría preguntar, el que no esté permitido hacer en este encuentro la misma suposición fingida que cuando había dos jugadores? He aquí la razón:

En la verdadera condición de esos tres jugadores no hay más que uno que pueda ganar, pues la condición es que, en cuanto uno ha ganado, el juego cesa. Pero en la condición fingida, dos pueden obtener el número de partidas necesario, a saber, si el primero gana una que le falta y uno de los otros las dos que le faltan; pues aún así no habrán jugado más que tres partidas, mientras que, cuando no había sino dos jugadores, la condición fingida y la verdadera coincidían para las ventajas de los jugadores en conjunto; y eso es lo que hace la extrema diferencia entre la condición fingida y la verdadera.

Si los jugadores, encontrándose en estado de hipótesis, es decir, si le falta una partida al primero y dos al segundo y dos al tercero, se ponen ahora de acuerdo y convienen en la condición de que se jugarán tres partidas completas, y que aquellos que hayan obtenido el número que les falta tomarán la suma entera, si son los únicos que la han obtenido, o si se da el caso de que la hayan obtenido dos, la dividirán en partes iguales, en ese caso la división debe hacerse como acabo de decir, que el primero tenga 16, el segundo $5\frac{1}{2}$, el tercero $5\frac{1}{2}$, de 27 pistolas, y suponiendo esta condición así, la demostración está implícita en lo dicho.

Pero si juegan simplemente a condición, no de que se jueguen necesariamente tres partidas, sino solamente hasta que uno de ellos haya obtenido su número de partidas, y que entonces cese el juego sin dar oportunidad a otro de obtener las suyas, entonces al primero le pertenecen 17 pistolas, al segundo 5 y al tercero 5, de 27.

Y esto se encuentra con mi método general, que determina también que en la condición precedente son necesarias 16 para el primero, $5\frac{1}{2}$ para el segundo y $5\frac{1}{2}$ para el tercero, sin servirse de las combinaciones, pues se aplica en todos los casos sin obstáculo.

6. Estos son, señor, mis pensamientos sobre este tema, en el cual no tengo otra ventaja sobre usted que la de haberlo meditado mucho más; pero eso es poca cosa referida a usted, puesto que sus primeras ojeadas son más penetrantes que la longitud de mis esfuerzos.

No dejo de presentarle mis razones para esperar su jui-

cio sobre ellas. Creo haberle hecho conocer así que el método de las combinaciones es bueno entre dos jugadores por accidente, como también lo es a veces entre tres jugadores, como cuando le falta <u>una</u> partida al uno, <u>una</u> al otro y <u>dos</u> al al otro, porque en este caso el número de partidas en las que el juego estará terminado no basta para hacer ganar a dos; pero no es general y no es bueno generalmente más que en el caso en que se ajustan a jugar un cierto número de partidas exactamente.

De suerte que, como usted no contaba con mi método cuando me propuso los lotes de varios jugadores, sino únicamente con el de las combinaciones, temo que tengamos ahora diferentes opiniones sobre este tema.

Le suplico me informe de qué manera procede en la búsqueda de esta división. Recibiré su respuesta con respeto y alegría, aunque sus sentimientos me sean contrarios. Soy, etc.

PASCAL

Esta carta, que se cruza con la de *Fermat*, no parece respuesta a ninguna de éste, o en cualquier caso, se habría perdido. En el comienzo de la misma analiza de nuevo el caso de dos jugadores y de la división de las apuestas como introducción para la exposición del caso de tres jugadores al que, según *Pascal*, no se puede aplicar el mismo método.

En el punto 3. aparece la conocida objección de Roberval, al que no le parece lógico tener en cuenta situaciones irreales en las que la partida ya ha sido ganada por uno de los jugadores. Lo que les preocupa a todos ellos no es lo heterogeneo de la fracción: partidas favorables reales sobre partidas posibles abstractas, ni la paradoja que consiste en contar como casos perdidos las ganancias superiores a tres partidas, como por ejemplo, en los casos 4-1, 5-0, sino, como señala *Pierre Raymond*,

> *"el interés y el riesgo de contar situaciones irreales en el denominador".*

La respuesta de *Pascal* es muy interesante desde el punto de vista de la historia del razonamiento. Puesto que una vez que ha ganado el jugador A, el continuar jugando hasta completar las cuatro partidas no puede hacerle perder, es decir, no cambia para nada el resultado final, no hay ninguna razón válida para que se oponga a hacerlo. Este no es el caso cuando hay tres jugadores, porque al continuar el juego, un tercero podría ganar antes que el primero. El razonamiento es válido, aunque a posteriori. El método basado en la noción de equiprobabilidad que hemos expuesto antes no requiere esta operación y es por lo tanto preferible. Pero, como dice *Pierre Raymond*:

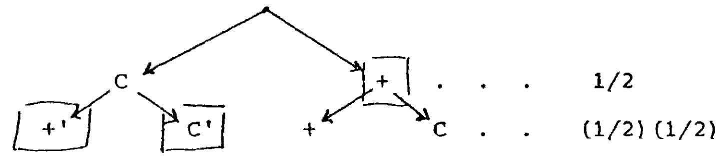
> *"La dificultad que experimenta Pascal reside exactamente en la conceptualización de lo que es una tabla de combinaciones: no se trata de inscribir solamente todas las especies de un género (como para una clasificación), ni tampoco todas las posibilidades de un suceso; hay que combinar entre ellas posibilidades puramente abstractas, cuya eventualidad no está*

marcada por ninguna realidad".

Cita también como ejemplo el caso de *D'Alembert*: *"D'Alembert tenía dificultades para considerar cuatro posibilidades para dos tiradas de una moneda, a fin de obtener una vez cruz, cuando el juego está terminado si la obtengo a la primera, excluyendo así realmente las posibilidades cruz-cruz y cruz-cara. El consideraba tres"posibilidades": +, C-+ y C-C, de ahí dos'chances'sobre tres de obtener una vez cruz en dos tiradas. Laplace, criticando a D'Alembert, consideraba cuatro"posibilidades": +-+, +-C, C-+, C-C (es decir, asociaciones verticales y parcialmente ficticias de los casos), de ahí salen tres'chances'sobre cuatro. Los manuales recientes consideran las cosas en dos etapas: primero + o C, de ahí una probabilidad sobre dos de obtener +; luego +' o C', a partir de C (la partida se detiene después de +), de ahí una probabilidad sobre dos de obtener +' a partir de una probabilidad sobre dos de obtener C. En total por lo tanto tres probabilidades sobre cuatro de obtener +. El resultado, idéntico al de Laplace, evitaría considerar posibilidades irreales (+-+', +-C'). En realidad la fracción 1/4 para +' sólo se obtiene aritméticamente,pero designa una posibilidad sobre cuatro, las otras tres comprenden las dos simetrías ficticias +' y C' que dependen de +; estas simetrías sólo son ficticias a partir del momento en que se fija como objetivo el obtener + al menos una vez en dos tiradas posibles, si no (+ una vez sobre dos tiradas reales), esas combinaciones tie-*

nen el mismo derecho que las otras; de hecho la fracción de las probabilidades hace intervenir un numerador función de un objetivo preciso y un denominador función de un conjunto sin objetivo".

El esquema sería:



p = 1/2 + (1/2)(1/2) = 3/4.

En el punto 4. pasa a discutir el ejemplo de tres jugadores. Si estudiamos la tabla, obtenemos el resultado: AAA, AAA, AAA, AAA, BBB, ABC, AAA, ABC, CCC, teniendo en cuenta el orden de las jugadas y no considerando que se lanzan los tres dados a la vez, como dice *Pascal*. De este resultado se concluye que A:B:C como 17:5:5, pero *Pascal* dice que es 19:7:7, aunque dándose cuenta que no es correcto. Resulta fascinante ver a un gran matemático luchar así con una dificultad sin poder resolverla pero intuyendo que los resultados no son correctos. Calculando por los juegos que faltan para ganar y por las combinaciones obtiene $16:5\frac{1}{2}:5\frac{1}{2}$, pero también intuye que es falso, y afirma que ello se debe a jugar sin detenerse cuando uno de los jugadores ya ha ganado, él que había tan bien replicado a *Roberval* contra esa misma objección, ahora parece aceptar una excepción en este caso particular. En realidad está bastante confuso. Llega a decir que si se detiene el juego cuando uno de ellos gana, entonces sí que la solución es 17:5:5. Sólo por casualidad es bueno el método de *Fermat*, según *Pascal*, en alguno de los casos discutidos, pero no tiene generalidad.

En su carta del 25 de septiembre, *Fermat* responde cumplidamente y explica con más detenimiento su método, como vamos a ver a continuación.

(Carta LXXIV / IV, p.437-441)

FERMAT a PASCAL

Viernes, 25 de septiembre de 1654

Señor,

1. No tema usted que nuestra coincidencia se desmienta, usted mismo la ha confirmado cuando pensaba destruirla, y me parece que respondiendo al señor de Roberval por usted, también usted ha respondido por mí.

Tomo el ejemplo de los tres jugadores, al primero de los cuales le falta una partida, y dos a cada uno de los otros dos, que es el caso que me propone usted.

No encuentro más que 17 combinaciones para el primero y 5 para cada uno de los otros dos; pues cuando dice usted que la combinación acc *es buena para el primero y para el tercero, parece no recordar que todo lo que se hace después de que uno de los jugadores ha ganado, ya no sirve para nada. Puesto que esta combinación ha hecho ganar al primero desde la primera partida, ¿qué importa que el tercero gane dos a continuación ya que, aunque ganase treinta, todo eso sería superfluo?*

Esto viene de que, como usted ha notado muy bien, esa ficción de extender el juego a un cierto número de partidas no sirve más que para facilitar la regla y (según mi opinión) hacer todos los azares iguales, o bien, más inteligiblemente, para reducir todas las fracciones a un común denominador.

Y para que no dude usted más, si en lugar de tres partidas extiende usted, en el caso propuesto, la ficción hasta cuatro, no habrá sólo 27 combinaciones, sino 81, y se tendrá que ver cuántas combinaciones harán ganar al primero una partida antes que dos a cada uno de los otros, y cuántas harán ganar a cada uno de los otros dos partidas antes que una al primero. Verá usted que las combinaciones para que gane el primero serán 51 y las de cada uno de los otros dos 15, lo que se reduce a la misma proporción.

Que si toma cinco partidas o cualquier número que quiera, siempre encontrará tres números en la proporción 17,5,5.

Y así tengo derecho a decir que la combinación acc no es más que para el primero y no para el tercero, y que cca no es más que para el tercero y no para el primero, y que mi regla de las combinaciones es la misma en tres jugadores que en dos, y general para todos los números.

2. Ya ha podido usted ver por mi carta precedente que yo no dudaba de la solución verdadera de la cuestión de los tres jugadores, respecto a la cual le enviaba los tres números decisivos: 17, 5, 5. Pero como el Sr. Roberval estaría quizá más satisfecho viendo una solución sin ningún artifi-

cio, y dado que ésta puede a veces producir métodos abreviados para muchos casos, héla aquí en el ejemplo propuesto:

El primero puede ganar en una sola partida, o en dos, o en tres.

Si gana en una sola partida, es necesario que con un dado que tenga tres caras encuentre la favorable a la primera tirada. Un solo dado produce tres azares: ese jugador tiene por lo tanto a su favor 1/3 de los azares cuando no juega más que una partida.

Si juega dos, puede ganar de dos maneras, o cuando el segundo jugador gana la primera y él la segunda, o cuando el tercero gana la primera y él la segunda. Ahora bien, dos dados producen 9 azares: ese jugador tiene por lo tanto a su favor 2/9 de los azares cuando se juegan dos partidas.

Si se juegan tres, no puede ganar más que de dos maneras, o cuando el segundo gana la primera (partida), el tercero la segunda y él la tercera, o cuando el tercero gana la primera, el segundo la segunda y él la tercera; pues si el segundo o el tercer jugador ganasen las dos primeras, ganarían el juego en lugar del primer jugador. Pero tres dados son 27 azares, luego ese primer jugador tiene 2/27 de los azares cuando se juegan tres partidas.

La suma de los azares que hacen ganar al primer jugador es por consiguiente 1/3, 2/9 y 2/27, lo que hace en total 17/27.

Y la regla es buena y general en todos los casos, de modo que, sin recurrir al artificio, las combinaciones verdaderas en cada número de partidas proporcionan su solución y hacen ver lo que he dicho al comienzo, que la extensión a un cierto número de partidas no es otra cosa que la reducción de diversas fracciones a un mismo denominador. Este es en pocas palabras todo el misterio, que nos volverá a colocar sin duda en buena inteligencia, puesto que el uno y el otro no buscamos sino la razón y la verdad.

3. Espero enviarle para San Martín un resumen de todo lo que he inventado de consideración respecto a los números. Me permitirá usted ser conciso y hacerme entender solamente por un hombre que lo comprende todo con medias palabras.

Lo más importante que encontrará en él se refiere a la proposición de que todo número está compuesto de uno, dos, o tres triángulos; de uno, dos, tres o cuatro cuadrados; de uno, dos, tres, cuatro o cinco pentágonos; de uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis hexágonos, y así al infinito.

Para lograrlo, hay que demostrar que todo número primo que sobrepase en la unidad a un múltiplo de cuatro, está compuesto de dos cuadrados, como 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Dado un número primo de esta naturaleza, como 53, encontrar, por la regla general, los dos cuadrados que lo componen.

Todo número primo que sobrepase en la unidad a un múltiplo de 3, está compuesto de un cuadrado y del triple de otro cuadrado, como 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Todo número primo que sobrepase en uno o en 3 a un múltiplo de 8, está compuesto de un cuadrado y del doble de otro cuadrado, como 11, 17, 19, 41, 43, etc.

No hay ningún triángulo en números cuya área sea igual a un número cuadrado.

A esto le seguirá la invención de muchas proposiciones que Bachet confiesa haber ignorado, y que faltan en el Diofanto.

Estoy persuadido que en cuanto se haya familiarizado usted con mi forma de demostrar este tipo de proposiciones, le parecerá bella y le permitirá hacer muchos nuevos descubrimientos; pues como usted sabe, es necesario que multi pertranseat ut augeatur scientia.

Si me queda tiempo, hablaremos a continuación de los números mágicos, y recordaré mis viejas ideas sobre este tema.

Soy, señor, de todo corazón, vuestro, etc.

FERMAT

Deseo la salud del Sr. de Carcavi como la mía propia y soy todo suyo. Le escribo a usted desde el campo, y ello puede retrasar quizá mis respuestas durante estas vacaciones.

[Carta LXXV / IV, p. 443]

PASCAL a FERMAT

Martes, 27 de octubre de 1654

Señor,

Su última carta me ha satisfecho a la perfección. Admiro su método para los lotes, tanto más porque lo comprendo bien; es enteramente suyo, no tiene nada en común con el mío *y llega facilmente al mismo resultado. Nuestra comprensión se ha restablecido.*

Pero, señor, si en esto he competido con usted, deberá buscar en otra parte quien le siga en sus invenciones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho usted el honor de enviarme. Le confieso que esto me sobrepasa ampliamente; sólo soy capaz de admirarlas y le suplico humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlas. Todos nuestros amigos las vieron el sábado pasado y las apreciaron de todo corazón: no es facil soportar la espera de cosas tan bellas y deseables. Piense pues en ello, si le place y esté usted seguro de que soy, etc.

PASCAL

Paris, 27 de octubre de 1654.

Con esto concluye la correspondencia que se conserva entre *Pascal* y *Fermat* acerca del problema de los lotes. El problema esta resuelto, y es el segundo quien ha llegado a la solución más elegante y clara y también más general. *Pascal* reconoce que es un método nuevo, enteramente diferente del suyo, aunque no dice que el suyo llevaba a errores de bulto, ni que antes de la última carta de su amigo no había llegado a comprender donde estaba el quid de la cuestión.

A continuación y sobre este mismo tema, veamos unos fragmentos de cartas cruzadas entre *Huygens* , *Carcavi* y *Fermat* donde se comenta el método de este último y se intentan las aplicaciones del mismo a juegos de dados, cartas, etc. La solución definitiva del problema comienza a ser conocida y comprendida, y se convertirá enseguida en algo de uso general.

(Carta LXXVII / Corresp. Huyg. n^{o}301)

FERMAT a CARCAVI

Junio 1656

...1. Si A y B juegan con dos dados de suerte que, si A consigue 6 puntos con sus dos dados antes de que B obtenga 7, el jugador A gana, y si B obtiene 7 antes de que A haya obtenido (6), el jugador B habrá ganado, y además el jugador A tiene la primacía, la ventaja de A sobre B es como de 30 a 31.

2. Si el jugador A tiene la primacía para la primera vez y a continuación la tiene el jugador B para la segunda vez, y así alternativamente (en cuyo caso A lanzará el dado la primera vez, y luego B dos veces seguidas, y luego A dos veces seguidas, y así hasta el final), de este modo la parte del jugador A es a la del jugador B como 10355 es a 12276.

3. Si el jugador A juega para empezar dos veces y luego el jugador B tres veces, luego el jugador A dos veces y a continuación el jugador B tres veces, y así hasta el infinito, el jugador A que comienza no juega nunca más que dos tiradas y el jugador B tres (suponiendo siempre que A intenta obtener 6 y B, 7), la parte de A a B es como 72360 a 87451.

4. Las cuestiones se diversifican y el método cambia en el juego de cartas. Por ejemplo, yo propongo:

Si tres jugadores, A, B, C, apuestan con 52 cartas (que es el número de un juego completo) que ganará el que obtenga más pronto un corazón, suponiendo que A toma la primera car-

ta, B la segunda y C la tercera, y que se conserva este mismo orden hasta que uno de ellos haya ganado;

5. Si dos jugadores juegan al Primero con 40 cartas, uno intenta obtener Primero en las cuatro primeras cartas que se le hayan repartido y el otro apuesta a que el anterior no lo conseguirá, ¿cuál es su parte?

6. Todas estas cuestiones tienen métodos y reglas diferentes. Si no se pueden encontrar, se las explicaré con todas sus demostraciones; la más sutil y la más difícil es la de la parte verdadera de aquel que está en posesión del dado en el juego de la suerte contra los otros.

7. Sea todavía otra, si usted quiere, dos jugadores que juegan al piquet; el primero intenta obtener tres ases en sus doce primeras cartas; ¿cuál es la parte de éste contra el otro que apuesta a que no conseguirá los tres ases?

El texto precedente es un extracto dirigido por *Carcavi* a *Huygens*. En la carta que le acompañaba, el 22 de junio de 1656, decía *Carcavi*:

"El señor Fermat me ha enviado hace ya algunos días la solución de lo que usted había propuesto referente a la división de los juegos, y verá usted por el extracto que le hago de su carta, que posee la demostración general de este tipo de cuestiones, y concluirá ciertamente con nosotros, no solamente para la resolución de este problema, sino también para una cantidad de otras bellas especulaciones que tenemos de él, tanto en lo que se refiere a los números como

a la geometría, que es uno de los más grandes genios de nuestro siglo. Hace ya mucho tiempo que trato de sacar de él lo que puedo para dárselo al público..."

La cuestión propuesta por *Huygens* es la última de su Tratado De Ratiociniis in ludo aleae, cuyo borrador acababa de terminar y de enviar (el 6 de mayo de 1656) a *Schooten* para que acabase de traducirlo al latín. Dice lo siguiente:

"PROPOSITIO XIV.- Si ego et alius duabus tesseris alternatim jaciamus hac conditione ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primum senarium jaciat, ita videlicet ut ipsi primum jactum concedam, invenire rationem meae ad ipsius sortem".

Si yo y otro jugador lanzamos alternativamente dos dados con la condición de que yo gane en cuanto saque siete puntos y él lo mismo en cuanto saque seis, mientras que yo le dejo lanzar los dados el primero, encontrar la razón de mi suerte a la suya.

A continuación veamos un extracto de la respuesta de *Huygens*, que fué comunicado a *Fermat* y *Pascal* y donde comenta todo lo anterior, así como la respuesta del propio *Carcavi* a *Huygens*, también en extracto.

[Carta LXXVII bis / Corresp. Huyg. n°308]

HUYGENS a CARCAVI

Jueves, 6 de julio de 1656

... 1. He visto, por la solución que el señor de Fermat ha dado de mi problema, que tiene el método universal para

hallar todo lo que pertenezca a esta materia, y que yo únicamente deseaba conocer al proponerlo. La misma razón de 30 a 31 está en el tratado que envié al señor Schooten hace dos meses: en el mismo se encuentra también un Teorema del que me sirvo en todas estas cuestiones de los lotes del juego; y lo expondré aquí, porque de otro modo no podría hacerle ver que he resuelto los problemas que el señor de Fermat ha propuesto, siendo el cálculo de algunos de ellos tan largo que no tengo paciencia suficiente para buscar su resultado último; es por eso que en estos casos, tras haberle explicado el mencionado teorema me contentaré con exponer el método por el cual se puede llegar a ello.

2. El Teorema es el siguiente:

Si el número de los azares que hay a favor de $\underline{b}$ es $\underline{p}$, y el número de azares que hay a favor de $\underline{c}$ es $\underline{q}$, eso vale tanto como si tuviéramos

$$\frac{bp + cq}{p + q}$$

Por ejemplo, si yo tuviera dos azares a favor de obtener 1/3 de lo que se ha puesto en juego y 5 azares a favor de obtener 1/2 de ello, multiplico 1/3 por 2 y 1/2 por 5. Luego sumo esos productos, que son 2/3 y 5/2; la suma es 19/6, la cual se divide por 5 + 2, es decir, 7; luego tengo 19/42. Digo que me pertenece 19/42 de lo que hay puesto en juego.

3. La primera de las cuestiones del señor de Fermat es la siguiente: A y B juegan con dos dados. A ganará obteniendo 6 puntos. B ganará obteniendo 7 puntos. A lanzará el dado la primera vez y luego B dos veces seguidas, y luego A dos veces seguidas, y así hasta que uno u otro haya ganado.

Para hacer los lotes llamaré $\underline{d}$ a lo que está puesto en juego, y pondré $\underline{x}$ por la parte que pertenece al jugador A.

Ahora bien, es evidente que, cuando A haya efectuado su primera tirada y B sus dos tiradas seguidas, y luego A una de sus dos tiradas, sin que ni el uno ni el otro haya obtenido sus puntos, entonces A tendrá de nuevo la misma apariencia de ganar que tenía desde el comienzo, y que por consiguiente le corresponderá de nuevo la misma parte de lo que está en juego, es decir, $\underline{x}$.

De salida, cuando A acaba de hacer la primera de sus dos tiradas seguidas, tendrá

cinco azares a favor de $\underline{d}$

y 32 azares a favor de $\underline{x}$,

pues de 36 tiradas diferentes que producen dos dados, hay 5 de 6 puntos, es decir, que le proporcionen $\underline{d}$ o lo que haya puesto en juego, y 31 que le hacen fallar los 6 puntos y así le proporcionan $\underline{x}$, dejándole en la situación de poder hacer todavía una tirada antes de que le llegue el turno a B. Pero

5 azares a favor de $\underline{d}$

y 31 azares a favor de $\underline{x}$

valen, a causa del teorema precedente, $\frac{5d + 31x}{36}$. Esta es pues la parte de A cuando A hace la primera de sus dos tiradas seguidas.

La tirada anterior es cuando B realiza la última de sus dos tiradas y gana obteniendo 7 puntos, los cuales se obtienen de 6 modos diferentes y entonces A pierde, luego en este caso A tendrá

6 azares a favor para obtener 0 o nada

y 30 azares a favor para obtener $\frac{5d + 31x}{36}$,

pues entonces le tocará el turno de hacer dos tiradas seguidas; cuyos azares, por el teorema precedente, valen

$$\frac{150d + 930x}{1296}$$

Esta es pues la parte de A cuando B hace la última de sus dos tiradas seguidas.

Cuando B realiza la primera de sus dos tiradas, A tendrá

6 azares a favor para obtener 0,

30 azares para $\frac{150d + 930x}{1296}$

lo que vale $\frac{4500d + 27900x}{46656}$.

Y cuando A hace la primera tirada de todas, A tendrá

5 azares a favor para obtener d

31 azares para obtener $\frac{4500d + 27900x}{46656}$

lo que vale $\frac{372780d + 864900x}{1679616}$

Esto es igual a x, y x es de salida igual a $\frac{10355}{22631}$

La parte del jugador A es pues $\frac{10355}{22631}$ de lo que se ha puesto en juego, y el resto, $\frac{12276}{22631}$, es la parte de B, y la una es a la otra como 10355 es a 12276, que son los mismos números del señor de Fermat.

4. En la segunda cuestión, en la que supone que el jugador A juega primeramente dos veces, y luego el jugador B tres veces y a continuación el jugador A (dos veces y luego el jugador B) tres veces, el método es semejante en todo y encuentro también los mismos números que el señor de Fermat, pero él los traspone; es decir, que la parte de A es a la de B como 87451 a 72360, y no lo que él ha puesto, 72360 a 87451.

5. La tercera cuestión es cuando tres jugadores, A, B y C apuestan con las 52 cartas que quien consiga antes un corazón ganará, y se supone que A toma la primera carta, B la segunda, C la tercera y así sucesivamente hasta que uno de ellos haya ganado.

Hay 13 corazones entre esas 52 cartas, por eso, si llegase a suceder que se tomasen las otras 39 según dicho orden sin que nadie hubiese logrado un corazón, entonces le tocaría el turno al jugador A de tomar una carta y ganaría con seguridad. Luego cuando C toma la carta 39 en el caso en que hasta entonces nadie haya obtenido un corazón, es seguro que A tiene 13 azares para perder y 1 azar para obtener todo lo que hay puesto en juego, que llamaré $\underline{d}$ como antes. Luego tendrá

13 azares a favor de obtener 0

y 1 azar para obtener $\underline{d}$,

eso vale $\frac{1d}{14}$ según nuestro teorema; de ahí concluyo que cuando B toma la carta trigésimo-octava, A tendrá

13 azares a favor para obtener 0

y dos azares para obtener 1d/14

(es cuando B no consigue obtener un corazón, pues entonces le corresponde a C tomar la trigésimo-novena); tales azares valen 1d/105.

Cuando A tome la trigésimo-séptima, A tendrá

13 azares a favor de obtener <u>d</u>

y tres azares para obtener 1d/105

lo que vale $\frac{1368}{1680}$ d.

Así retrocediendo siempre de carta en carta, se sabrá al final cuál es la parte de A cuando toma la primera de todas las cartas y de la misma manera se encontrará la parte de B y el resto será la que corresponda a C.

7. La quinta y última cuestión es cuando dos jugadores juegan al piquet y el primero intenta obtener tres ases en las doce primeras cartas y el otro apuesta a que no lo conseguirá. Para resolver esto supondré que toma sus doce cartas una a una, pues eso no tiene importancia. Si sucede, pues, que el que lo intenta habiendo tomado 11 cartas, ya ha encontrado dos ases, entre las otras 25 cartas que quedan habrá todavía dos ases, y tendrá de salida en este caso dos azares a su favor para ganar, o sea, para obtetener <u>d</u>, y 23 azares para obtener 0, es decir, para perder, lo que vale 2d/25.

Si ha encontrado dos ases cuando ha tomado 10 cartas, tendrá pues

2 azares a favor para obterner d

y 24 azares para obtener $2d/25$,

es decir, para obtener dos ases en sólo 11 cartas; estos azares valen $49d/325$.

Pero cuando ha tomado 10 cartas, si todavía sólo tiene un as, habrá entre las 26 restantes tres ases; por eso entonces tendrá

3 azares a favor para tener $2d/25$, es decir, para tener dos ases en 11 cartas

y 23 azares para obtener 0, es decir, para tener un as en 11 cartas,

pues así no podría ganar; tales azares valen $3d/325$.

Cuando ha tomado 9 cartas, si obtuvo dos ases, tendrá

dos azares a favor para obtener d

y 25 azares para obtener $49d/325$, es decir, para obtener dos ases en sólo 10 cartas

tales azares valen $\frac{1875}{8775}$ d.

Pero si habiendo tomado 9 cartas no consiguió más que un as, tendrá

3 azares a favor para obtener $49d/325$, es decir, dos ases en 10 cartas

y 24 azares para tener $3d/325$, o sea, un as en 10 cartas,

lo que vale $\frac{219}{8775}$ d.

Y por fin, si entre esas 9 cartas no hay todavía ningún as, tendrá

4 azares a favor para obtener 3d/325, o sea, un a en 10 cartas

y 23 azares para obtener 0, o sea, ningún as en 10 cartas,

pues entonces no podría ganar; tales azares valen $\frac{12}{8775}$ d.

Así con este método, retrocediendo cada vez en una carta, conoceré por fin la parte del jugador A cuando todavía no ha tomado ninguna carta y por consiguiente no tiene aún ningún as; siendo esta parte d, el resto será la parte del jugador B. Que era lo que había que encontrar.

8. Si estuviera bien informado del estado de la cuestión en el juego de azar que el señor de Fermat dice ser el más difícil, intentaría resolverlo también. En cuanto a los que acabo de tratar, le ruego, señor, que me haga el favor de comunicarlos al señor Milon y que me haga saber si lo que han hallado los señores de Fermat y Pascal está de acuerdo con lo que yo explico. Deseo también intensamente saber si se sirven del mismo teorema que yo...

(Carta LXXVIII / Corresp. Huyg. nº336)

CARCAVI a HUYGENS

Jueves, 28 de septiembre de 1656

Señor,

1. Hace ya mucho tiempo que mostré a los señores de Fermat y Pascal lo que usted se tomó la molestia de enviar al señor Mylon y a mí referente a los lotes, pero no he podido

responderle porque la cosa no ha dependido absolutamente de mí y las posibilidades de esos señores no han coincidido siempre con el deseo que yo tenía de satisfacerle.

El señor Pascal se sirve del mismo principio que usted y lo enuncia del siguiente modo:

Si hay un número de azares cualesquiera, como por ejemplo, 10 que proporcionan cada uno 3 pistolas, y dos que proporcionan cada uno 4 pistolas, y tres que hacen perder cada uno tres pistolas, hay que sumar todas las cantidades y todos los azares y dividir lo uno por lo otro. El cociente es lo que se busca, lo cual viene a ser el mismo enunciado que el de usted.

2. Pero (Pascal) no ve cómo se puede aplicar esta regla al ejemplo siguiente:

Si se juega a seis partidas, por ejemplo de piquet, una cierta suma y uno de los jugadores tiene dos, tres o cuatro partidas y se quiere abandonar el juego, qué lotes hay que hacer cuando a uno le queda una partida, o dos, o tres, etc. o bien cuando uno tiene dos partidas y el otro una, etc.

Y el mencionado señor Pascal no ha encontrado la regla más que cuando a uno de los jugadores le quedan dos partidas (si se juega a varias partidas), pero no tiene la regla general. Este es su enunciado:*

A quien tiene la primera partida de lo que se quiera, por ejemplo, de seis, le pertenece del dinero del perdedor

* Este enunciado no es correcto, y está en desacuerdo con el ejemplo.

el producto de tantos de los primeros números pares como partidas se jueguen, excepto una, dividido por el producto de otros tantos de los primeros números impares. El primer producto será la apuesta del perdedor, el segundo producto será la parte que pertenece al ganador.

Por ejemplo, si se juega a cuatro partidas, tómense los tres primeros números pares: 2, 4, 6; multiplíquense unos por otros, resulta 48; tómense los tres primeros números impares: 1, 3, 5, el producto es 15, que pertenecerán al ganador del dinero del perdedor, si cada uno apostaba 48 pistolas.

Esta regla sirve para la primera y la segunda partidas cuando el que tiene dos tiene el doble del que tiene una. El señor Pascal posee la demostración, pero la cree muy difícil.

3. He aquí otra proposición que ha hecho al señor de Fermat, y que juzga sin comparación más difícil que todas las demás:

Dos jugadores juegan con la condición que la fortuna del primero sea 11 y la del segundo 14; un tercero lanza los tres dados por ellos y, cuando sale un 11, el primero marca un punto y, cuando sale un 14, el segundo marca un punto por su parte. Juegan a doce puntos, pero a condición de que, si el que lanza el dado obtiene 11 y así el primero marca un punto, si sucede que el dado muestre un 14 en la tirada siguiente, el segundo no marca punto, sino que quita uno al primero, y así recíprocamente, de suerte que si el dado muestra seis veces 11 y el primero marca seis puntos, si después el dado muestra un 14 tres veces seguidas, el segundo no marcará nada, sino que restará tres puntos al primero. Además, si sucede que el dado arroje después seis veces seguidas un 14, no quedará nada al primero y el segundo tendrá tres puntos, y si todavía obtiene ocho veces seguidas un 14 sin que aparezca un 11 entre ellas, el segundo tendrá once puntos y el primero nada, y si saca cinco veces seguidas un 14, habrá ganado.

La cuestión pareció tan difícil al señor Pascal que dudó de que el señor de Fermat la resolviera, pero él me envió al momento esta solución:

"El que tiene la fortuna con 11 puede apostar contra el que tiene la fortuna con 14 a 1156 contra 1, pero no 1157 contra 1".

y así la verdadera razón de estos lotes estaba entre los dos (números); ante lo cual el señor Pascal comprendió que el señor Fermat había resuelto muy bien lo que le había propuesto, y me dió los números verdaderos para que se los enviara y le testimoniara que por su parte no le había propuesto una cosa que él mismo no hubiera resuelto antes. Son estos:

150 094 635 296 999 121

129 746 337 890 625.

Pero lo que encontrará usted más digno de consideración es que dicho señor de Fermat tiene la demostración, como asímismo por su parte el señor Pascal, aunque al parecer se han *servido de un método diferente.*

... 4. He enviado su libro al señor de Fermat, por el que le da las más humildes gracias por haber tenido la bondad de habérmelo entregado...*

* Se trata de los primeros opúsculos de *Huygens*, dirigidos por él a *Claude Mylon* para *Carcavi* y *Fermat*. El resto de la carta de *Carcavi* se refiere a asuntos ajenos a su relación con *Fermat* y *Pascal*.

Las cartas que reproducimos a continuación son las últimas que se cruzaron entre *Pascal* y *Fermat*, pues el primero murió en 1662 y el segundo en 1665. El rechazo de *Pascal* a la propuesta de *Fermat* no es todo lo cortés y afectuoso que se podría esperar tras una relación como la de ambos, y ello ha motivado interpretaciones desfavorables para *Pascal* por parte de muchos autores. *David*, por ejemplo, achaca esta actitud a la humillación que *Pascal* habría sufrido ante el genio de *Fermat*. Siempre fué tras él en los descubrimientos referentes al cálculo de probabilidades y tardó mucho más en comprender los problemas que el propio *Fermat*. Se insinua incluso la influencia que su fracaso como geómetra pudo tener en su decisión de abandonar las matemáticas y convertirse por segunda vez. La personalidad de *Pascal* no aparece bajo una luz favorable a través de sus cartas y de sus otras obras, mientras que *Fermat* en cambio, parece haber sido un hombre que incluso después de trescientos años atrae a todos los que lo leeen, dice *David*.

En cualquier caso, *Pascal* y *Fermat* nunca se encontraron. Si bien puede decirse que *Fermat* era matemáticamente superior a *Pascal*, a este último se debe una de las más brillantes y famosas aplicaciones de la teoría de la probabilidad, una de las más atrevidas, también, la apuesta acerca de la existencia de Dios, que veremos a continuación.

[Carta CVII / IV, p.445]

FERMAT *a* PASCAL

Domingo, 25 de julio de 1660

Señor,

En cuanto he sabido que estamos más cerca el uno del otro de lo que estábamos antes, no he podido resistirme a un proyecto amistoso del que he rogado al señor Carcavi que fuera mediador: en una palabra, pretendo abrazarle y conversar algunos días con usted; pero como mi salud no es más fuerte que la suya, me atrevo a esperar que en consideración a ello me hará gracia de la mitad del camino, y me favorecerá usted indicando un lugar entre Clermont y Toulouse, al que no dejaré de acudir hacia finales de septiembre o a comienzos de octubre.

Si no toma usted ese partido, corre el riesgo de encontrarme en su casa y tener en ella dos enfermos al mismo tiempo. Espero sus noticias con impaciencia y soy, de todo corazón,

Todo suyo,

FERMAT

En Toulouse, el 25 de julio de 1660

(Carta CVIII / IV, p.446-448)

PASCAL a FERMAT

Martes, 10 de agosto de 1660

Señor,

Es usted el hombre más galante del mundo y soy seguramente uno de los que mejor sabe reconocer ese tipo de cualidades y admirarlas infinitamente, sobre todo cuando están unidas a los talentos que se encuentran en usted de forma singular. Todo ello me obliga a testimoniarle de mi puño y letra mi agradecimiento por la oferta que me hace, a pesar del trabajo que me cuesta escribir y leer por mí mismo; pero el honor que usted me hace me es tan querido que nunca le respondería demasiado pronto.

Le diré pues, señor, que si yo tuviera salud, hubiera volado a Toulouse y no hubiera tolerado que un hombre como usted hubiera dado un paso por un hombre como yo. Le diré también que aunque sea usted aquel que tengo por el mayor geómetra de toda Europa, no sería esa cualidad la que me habría atraido, sino que me imagino tanto espíritu y honestidad en su conversación que por ello le hubiera buscado.

Pues, por hablarle francamente de la Geometría, encuentro que es el más elevado ejercicio del espíritu; pero al mismo tiempo la tengo por tan inutil que hago poca diferencia entre un hombre que sólo es geómetra y un habil artesano. También lo llamo el más bello oficio del mundo, pero al fin no es más que un oficio, y a menudo he dicho que es bueno para ensayar, pero no para emplear nuestra fuerza.

De suerte que no daría dos pasos por la geometría y estoy seguro de que usted es de mi opinión. Pero además ahora estoy dedicado a estudios tan alejados de ese tema que apenas me acuerdo de su existencia. Me había dedicado a ello hace un año o dos por razones bien singulares, y habiéndolas satisfecho, es posible que no vuelva a pensar en ello.

Por otra parte mi salud no es todavía suficientemente buena, pues estoy tan debil que no puedo andar sin bastón ni mantenerme a caballo, y no puedo hacer más que tres o cuatro leguas como máximo en carroza. Así he venido desde Paris aquí en veintidós días. Los médicos me ordenan las aguas de Bourbon para el mes de septiembre, y estoy comprometido tanto como es posible, desde hace dos meses, a ir desde allí a Poitou por el agua hasta Saumur, para quedarme hasta Navidad con el señor duque de Roannez, gobernador de Poitou, que tiene para mí sentimientos que no merezco. Pero como pasaré por Orleans yendo a Saumur por el rio, si mi salud no me permite hacer otra cosa, iré de ahí a Paris.

Este es, señor, el estado de mi vida presente, del que estoy obligado a darle a usted cuenta para asegurarle de la imposibilidad en que me encuentro de recibir el honor que se digna usted ofrecerme y que deseo poder reconocer un día, o en usted o en sus señores hijos, a los que aprecio mucho, pues tengo una particular veneración por aquellos que llevan el nombre del primer hombre del mundo.

Soy, etc.

PASCAL

Desde Bienassis, el 10 de agosto de 1660.

(Carta CIX / Corresp. de Huyg. n°824)

FERMAT a HUYGENS

Diciembre de 1660

Señor,

Me he enterado con alegría, pero no sin una cierta envidia, que mis amigos de Paris tienen el honor de poseerle desde hace algún tiempo. Le aseguro, señor, que si mi salud estuviera suficientemente fuerte para los viajes, iría con gran placer a tomar parte en su dicha. No es de hoy, ni simplemente por la relación del señor de Carcavi, mi persuasión de que sus cualidades son extraordinarias. Era suyo antes de que estuviera usted en Francia, y cuando se me preguntó mi opinión sobre su Saturno, respondí con atrevimiento y sin haberlo visto siquiera que, puesto que salía de su mano, no podía faltarle nada para la perfección. Sus otras obras que he conocido y admirado me han obligado a hablar de este modo y tengo más razones para hacerlo así que aquel

"Qui nunquam visae flagrabat amore puellae"*

Su grande y justa reputación es la única y verdadera garantía de todos sus libros. Se me hace tarde verlos y confirmar por su lectura el juicio que me he hecho de ellos por adelantado y la pasión que sus otros escritos me han desper-

tado, de ser toda mi vida con gran respeto su muy humilde y obediente servidor,

FERMAT

* Juvenal , Sat. IV, 113.

Bibliografía

- DAVID, F.N.- Gambling, gods and games, London, Ch. Griffin, 1962
- ------.- "Dicing and gaming", Biometrica, 42, 1955, p. 1-15.
- FERMAT, Pierre de.- Oeuvres, Paris, ed.por P. Tannery y C. Henry, 4 vol. 1891-1922. (Correspondencia, vol II, p.288-331).
- HACKING, Ian.- The emergence of probability, London, Cambridge U. Press, 1975
- PASCAL, Blaise.- Oeuvres, ed. L. Lafuma, Paris, 1951/ ed. Jacques Chevalier, Paris, La Pleiade, Gallimard, 1954.
- RAYMOND, Pierre.- De la combinatoire aux probabilités, Paris, 1975.

LA PROVIDENCIA Y LOS LÍMITES DE LAS LEYES MATEMÁTICAS DEL AZAR: PASCAL, ARBUTHNOT, WILKINS

En el siglo XVII comienza una corriente matemático-teológica que intenta conectar la estadística y las leyes de la probabilidad con la divinidad. El designio divino intervendría según estos autores en las leyes de la naturaleza, modificándolas y haciéndolas acordes con las necesidades naturales de supervivencia y equilibrio, y no con las leyes de la probabilidad. Esta corriente continúa durante el siglo XVIII.

Los autores más significativos son los lógicos de Port Royal, *Pascal* con su famoso pari, el obispo *John Wilkins*, *Bernard Nieuwentyt*, *William Derham*, *John Arbuthnot*, *Johann Peter Süssmilch* y por último, podemos considerar el tandem formado por *Thomas Bayes* y *Richard Price* que combinan matemáticas y teología. Entre todos estos hay algunos más interesantes y de ellos hablaremos más extensamente. Comenzaremos por la apuesta acerca de la existencia de Dios, como tema un poco apartado del designio divino y su influencia sobre los seres vivos. En este caso es el hombre el que ha de tomar una decisión, pero una decisión sobre la divinidad y para ello puede servirse de la teoría de la probabilidad. Esta es la gran novedad.

El texto del tan conocido y comentado pari de *Pascal* forma parte de los papeles que se encontraron sin publicar a la muerte del autor. Se trata como hemos dicho de dos hojas manuscritas por ambas caras, con notas al margen, correcciones y tachaduras; su extensión es por lo tanto mínima, pero la sola ordenación de los diferentes párrafos y notas al margen plantea innumerables dificultades. Su interés es enorme, tanto desde el punto de vista de la Metafísica o de la Religión, como desde el punto de vista de la Teoría de la Probabilidad. De hecho se trata de una de las primeras tentativas de aplicar las teorías en formación,a partir de los problemas planteados por los juegos de azar, a situaciones o problemas extramatemáticos y menos frívolos que el del juego. El arte de conjeturar se transforma aquí en la más moderna Teoría de la Decisión, o al menos esa es la interpretación que, siguiendo a autores como *Hacking*, vamos a dar a continuación, aplicando el máximo rigor posible a los razonamientos. Veremos que el método es totalmente adecuado a la marcha del diálogo y a sus conclusiones.

Como decimos más arriba, se han discutido mucho las diferentes ordenaciones posibles del manuscrito de *Pascal*. Es dificil insertar las notas al margen en el lugar exacto proyectado por el autor. Incluso hay dudas en cuanto a la sucesión de las diferentes caras de las dos hojas manuscritas. Uno de los autores que han tratado el tema últimamente, *Per Lønning* (1980)[1], critica duramente la interpretación de *Brunet*, cuyo texto seguimos aquí, y en menor medida, la ordenación propuesta por éste último.

Pascal contrapone en este texto el infinito y la nada, siguiendo su inclinación por las antítesis de gran efecto, y ello en relación con la extensión: nuestra alma encuentra en el cuerpo número, tiempo, dimensiones. Alma y cuerpo tienen un encuentro accidental, son dos sustancias heterogéneas que no pueden derivar la una de la otra, que han efectuado una síntesis sin la reflexión y sin la cooperación del hombre.

No hay una desproporción tan grande entre nuestra justicia y la de Dios como entre la unidad y el infinito, dice *Pascal*. Esta aparente paradoja se explica porque, así como lo finito es pura nada en presencia de lo infinito, el hombre por el contrario es algo ante Dios, no porque ello se derive de un cálculo racional, sino porque hay un milagro, consistente en la elección por parte de Dios, en la soberanía de Su misericordia.

Pero, ¿Dios existe o no existe? La razón no puede dilucidarlo. En el extremo de una distancia infinita se juega a cara o cruz y nosotros nos vemos obligados a apostar a ciegas (?). Veremos que no es totalmente a ciegas, pues tenemos recursos para calcular qué es lo que más nos conviene apostar. *Pascal* justifica en otros textos la posibilidad de una apuesta como esta según las reglas del cálculo de probabilidades que él mismo había establecido junto con *Fermat*: el problema de los lotes, de los "partis", o de la división:

"Para comprender las reglas de los 'partis', la primera cosa que hay que considerar es que el dinero que los ju-

gadores han puesto en juego ya no les pertenece, pues han abandonado su propiedad; pero han recibido a cambio el derecho a esperar lo que el azar puede darles, según las condiciones que han convenido de antemano." [2]

y también en otro lugar, en las Pensées:

"Si no hubiera que hacer nada, excepto por aquello que es seguro, no se debería hacer nada por la religión, pues no es algo seguro. Pero cuántas cosas se hacen por algo incierto, los viajes por mar, las batallas. Así pues digo que no habría que hacer nada en absoluto, pues nada es seguro..."

"Ahora bien, cuando se trabaja para mañana y para lo incierto, se actua con razón, pues se debe trabajar por lo incierto según la regla de los 'partis', que está demostrada.

San Agustín ha visto que se trabaja para lo incierto... pero no ha visto la regla de los 'partis' que demuestra que se debe hacer..." [3]

En el Pari aparece otra frase que puede resultar paradójica: *Pascal* aconseja a su interlocutor que, para creer, hay que comenzar a hacer como si ya se tuviera la fe, hacer decir misas, seguir una vida piadosa, etc. "Incluso eso os hará creer de manera natural y os hará perder la razón". La expresión original, "vous abêtira", se traduce literalmente como: os hará como los animales, os bestializará. Pero en este caso, para *Pascal*, s'abêtir significa para el hombre considerar con realismo su naturaleza animal, para vencer las seducciones de la misma y cesar de pretender que está conducido por la razón allí donde evidentemente es presa de sus inclinaciones no racionales.

Es notable observar que, en el Pari, *Pascal* no menciona apenas el infierno, parece como si para él la posibilidad de no ganar esa beatitud, esa vida eternamente feliz, fuera ya el mismo infierno, considerado como cero absoluto. No aparece un infinito negativo que pudiera ser comparable matemáticamente al infinito positivo de la beatitud.

Los textos de *Pascal* están plagados de bellas imágenes matemático-poéticas, como su alusión a "una esfera infinita, cuyo centro estaría en todas partes y su circunferencia en ninguna" y que propone como imagen del universo. O, en el mismo Pari, "en el extremo de una distancia infinita se juega un juego, cuyo resultado será cara o cruz." Hasta la famosa frase, "el corazón tiene sus razones que la razón no conoce."

La argumentación utilizada por *Pascal* en el Pari es, no obstante, una argumentación matemática que pertenece a lo que modernamente se llamaría Teoría de la Decisión. Si esquematizamos el razonamiento y aceptamos las premisas básicas que *Pascal* establece y que veremos a continuación, nos encontramos con una argumentación perfectamente correcta basada en tres de los criterios de decisión fundamentales: el criterio de dominancia, el criterio de esperanza matemática o expectación y el criterio de esperanza dominante.

La Teoría de la Decisión se ha convertido posteriormente en una rama de la Estadística. Básicamente, resuelve el problema de tomar una decisión sobre la acción más conveniente a adoptar cuando es incierto lo que va a suceder. Hay que establecer una lista exhaustiva de las posibles hipótesis en el universo o estado de la cuestión que estemos estudiando, las observaciones o datos experimentales que sean relevantes para esas hipótesis y un inventario de las posibles decisiones y de la posible utilidad de tomar cada una de ellas en los diversos estados del universo y, una vez que contemos con todo ello, se trata de establecer la decisión óptima.

Un caso particular de este problema general es aquel en que no es posible efectuar ningún experimento. Este es el caso del Pari, pues el interlocutor de *Pascal* es alguien imparcial y no puede aceptar como evidencia milagros o testimonios ajenos, que ya supondrían la fe.

Criterio de dominancia.- el caso particular más sencillo que puede presentarse en este criterio es el que se da cuando un curso de acción es preferible en todos los casos, sea cual sea el'universo',es decir, las condiciones dadas del problema. Supongamos que tenemos un conjunto exhaustivo de los posibles estados del problema: E_1, E_2,... y supongamos que en alguno de estos estados, la utilidad U_{i1} de efectuar la acción A_1 es mayor que la utilidad U_{ij} de efectuar cualquier otra acción A_j. En ningún otro estado del problema, la utilidad de A_1 es menor que la de A_j. Entonces, en ninguna circunstancia (para cualquier j) A_j tendrá mejores consecuencias que A_1 y, en algunas circunstancias, A_1 será mejor que A_j. Cuando todo esto sucede, se dice que A_1 domina sobre A_j. Si una acción domina a todas las demás, la solución a nuestro problema de decisión es emprender la acción dominante.

La argumentación de *Pascal* está dirigida al tipo de persona que, no estando convencida de las pruebas ofrecidas por la religión y tampoco de los argumentos de los ateos, permanece en suspenso entre un estado de fe y otro de descreimiento. Alguien totalmente neutral. No se inclina hacia ninguno de esos estados. La argumentación comienza pues estableciendo que no es necesario conocer lo que algo es para conocer su existencia; ese algo existe o no existe. Se ha partido de la premisa de que, o no hay Dios, o hay un Dios con las características enumeradas por la Iglesia Católica. El Dios de los musulmanes o de los budistas, por ejemplo, no es admitido como posibilidad. En cuanto a la lista de posibles acciones, *Pascal* considera que, o actuamos con completa indiferencia hacia Dios, o bien actuamos de tal manera como si creyésemos en su existencia y en sus mandatos. Llevamos una vida mundana o bien una vida piadosa, y *Pascal* considera las dos acciones posibles independientemente de la fe. Es cierto que la fe no puede decidirse, pero *Pascal* acepta como inherente a la naturaleza humana el que la fe es contagiosa: si uno se une a gente piadosa, abandona los malos hábitos, vive como si creyera, entonces se convertirá en un creyente. *Pascal* habla para un hombre que no sabe si seguir este camino o bien vivir indiferente a la moralidad preconizada por la Iglesia. Las dos acciones posibles no son pues creer en Dios o no creer, sino actuar o no de manera que uno llegue con mucha probabilidad a creer en Dios. Esto es para *Pascal* apostar a que Dios existe.

El problema está en este caso constituido por dos posibles estados del mundo: Dios existe o no existe; y dos posibles cursos de acción: vivir de forma mundana o piadosa. Veamos ahora las utilidades. Si Dios no existe, las consecuencias de ambos cursos de acción son parecidas. Uno puede vivir del modo que quiera y no sufrir ningún efecto perjudicial proviniente de una intervención sobrenatural. Pero si Dios existe, entonces apostar a que no existe y llevar una vida en consonancia supone perder "una eternidad de vida y de felicidad", una vida "infinitamente feliz". Se pierde "todo" a cambio de "nada". Por tanto, la acción de apostar a que Dios existe domina sobre la de apostar a que no existe en todos los casos. El problema se resuelve por el criterio de dominancia.

La argumentación como se ve es válida. Las premisas en cambio son dudosas. Pocos no creyentes aceptarían que la partición de *Pascal* agota todas la posibilidades.

Hasta aquí hemos supuesto que, si Dios no existe, entonces cualquier acción tiene parecida utilidad, pero el libertino nos dirá que en ese caso la vida mundana es preferible a la piadosa. El interlocutor de *Pascal* sugiere: *Je gage peut-être trop*. En este caso, "Dios existe" no es dominante, pues hay una circunstancia, cuando Dios no existe, en que aceptar el llevar una vida piadosa es menos util que hacer la apuesta contraria. Es decir, que hay una acción que es preferible en un determinado estado del problema, E_k, a la acción que propugnábamos antes, A_1. *Pascal* propone entonces el criterio siguiente.

Criterio de la esperanza matemática o de la media.- El argumento de la dominancia no tiene en cuenta la verosimilitud de los diversos estados del problema posibles. Aunque A_1 sea dominante sólo en un estado muy improbable del problema, entonces, como A_1 no puede ser nunca peor que ninguna otra acción, sigue mereciendo la pena efectuar A_1. Pero supongamos que ninguna acción domina, aunque creemos saber qué estados del problema son más probables que otros e incluso podemos adjudicar una probabilidad a cada estado. Entonces, si asignamos una probabilidad p_i a cada E_i posible, sea U_{ij} la utilidad de efectuar A_j si el estado es E_i. El valor esperado o esperanza matemática de A_j es el valor medio de emprender la acción A_j, es decir, $\sum_i p_i U_{ij}$. La conclusión es que hay que emprender la acción con esperanza matemática más elevada.

Ahora se requiere por lo tanto el argumento de la esperanza matemática; en la situación existencial del agnóstico, la ganancia óptima si Dios no existe es la salvación, una vida infinitamente feliz, de valor incomparablemente mayor. Por tanto, si hay la misma posibilidad de la existencia que de la no existencia de Dios, la esperanza que proporciona el escoger una vida piadosa sobrepasa a la de escoger una vida mundana, de ahí se concluye que lo mejor es actuar de manera piadosa y que además esta elección tiene una ventaja adicional: actuando como si se creyera en Dios, se llega a creer efectivamente.

Esta argumentación de la esperanza se basa en una premisa dificil de aceptar, la equiprobabilidad de los dos estados posibles del problema. Para que ello fuese correcto necesitaríamos contar con alguien que esté exactamente igual de dudoso de la existencia que de la no existencia de Dios. Pero si no hubiese esa equiprobabilidad, acudiríamos a un tercer criterio, el de la esperanza dominante.

Criterio de esperanza dominante.- Puede suceder que no conozcamos o no podamos ponernos de acuerdo sobre las probabilidades de los diferentes estados posibles del problema. En el mejor de los casos podemos estar de acuerdo sobre un conjunto de posibles asignaciones de probabilidad a esos estados E_i. Por ejemplo, si aceptamos que una moneda tiene tendencia a caer de cara, pero no podemos fijar lo grande que es esa tendencia.

Si en alguna asignación de probabilidad admisible la esperanza de A_1 excede a la de cualquier otra acción y en ninguna otra asignación admisible la esperanza de A_1 es menor que la de cualquier otra, se dice que A_1 tiene esperanza dominante. Por lo tanto se ha de emprender la acción con esperanza dominante.

Invocamos pues otra premisa: la salvación es infinitamente preferible a las alegrías de la vida mundana, que son finitas. Además, aunque no conozcamos la probabilidad que hay de que Dios exista, no es cero, de otro modo, no habría problema. Existe una probabilidad finita de que Dios exista. Por pequeña que ésta sea, la esperanza de la estrategia piadosa excederá a la de la mundana, luego debe seguirse la estrategia piadosa porque es la que posee una esperanza dominante:

> *... Hay una eternidad de vida y de felicidad. Y siendo así, aunque hubiera una infinidad de azares de los cuales uno solo estuviera a vuestro favor, todavía tendríais razón en arriesgar una [vida] para obtener dos, y actuaríais con poco sentido, estando obligado a jugar, rehusando jugar una vida contra tres en un juego en el que, de una infinidad de azares, hay uno a vuestro favor, si hubiera una infinidad de vida infinitamente feliz a ganar, un azar de ganancia contra un número finito de azares de pérdida, y lo que os jugais es finito: eso quita toda posibilidad de tomar partido.*

La jugada pues, es obligada. *Jacques Chevalier* , en su edición de las Pensées, pone la siguiente nota a este pasaje:[4]

> *"Es decir, de apostar vuestra vida actual contra una eternidad de vida y de felicidad. En efecto, un infinito de segundo orden [como es una infinidad de vida y de felicidad], multiplicado por la unidad [una posibilidad], equivaldría al producto de un infinito de primer orden [como es una infinidad de azares], por otro infinito de primer orden [como sería una infinidad de vida] y sobrepasa, como sucede en el ca-*

so considerado, al producto de un infinito de primer orden (infinidad de azares) por un número finito (los bienes finitos de esta vida), producto que representa la ventaja máxima del jugador que se inclina por la vida presente y apuesta contra Dios."

Los tres argumentos son perfectamente válidos, aunque ninguno sea convincente, porque descansan sobre premisas discutibles. Pero la utilidad de la Teoría de la Decisión para cualquier tipo de problema quedaba demostrada.

Pascal no utiliza todavía el término probabilidad, ni habla de una medida cuantitativa del grado de creencia, pero su posición epistemológica es la misma que la del que tira una moneda al aire sin conocer sus propiedades aleatorias.

Las Pensées no fueron publicadas por los editores de Port Royal hasta 1670, ocho años después de la muerte de *Pascal* , pero las páginas finales de la Lógica de Port Royal (1662) contenían un breve resumen de estas ideas. *Leibniz* y *Locke* se hacen eco de ellas, aunque *Leibniz* prefiere los argumentos metafísicos de *Platón* y *Sto. Tomás* a los morales de *Pascal*. Para *Voltaire* la utilización de la teoría de juegos en este caso no es apropiada dada la gravedad del tema. Han sido muchos los autores que se han ocupado del Pari desde el punto de vista de la religión.

A continuación proponemos una traducción del texto del Pari ateniéndonos al establecido por *Georges Brunet*[5] en 1956 y que cuenta con la aprobación de *Jean Mesnard* , el más autorizado editor de *Pascal*. Los paréntesis son de *Brunet*, pero su contenido es de *Pascal*. Los párrafos entre corchetes son anotaciones al margen.

Blaise PASCAL *(1623-1662)*

La Apuesta: INFINITO-NADA

- Nuestra alma es arrojada en el cuerpo, donde encuentra número, tiempo, dimensiones. Razona sobre esto, y lo llama naturaleza, necesidad, y no puede creer otra cosa.

- La unidad añadida al infinito no le aumenta en nada, como tampoco un pie (aumenta) *a una medida infinita. Lo finito se anonada en presencia de lo infinito y se convierte en pura nada.*

-[Así nuestro espíritu delante de Dios, así nuestra justicia ante la justicia divina.]

-[No hay desproporción tan grande entre nuestra justicia y la de Dios como entre la unidad y el infinito.]

-[La justicia de Dios ha de ser enorme, como su misericordia. Mas la justicia para con los réprobos es menos enorme y debe chocar menos que la misericordia para con los elegidos.]

- Sabemos que hay un infinito e ignoramos su naturaleza. Como sabemos que es falso que los números sean finitos, así pues es cierto que hay un infinito en número, pero no sabemos lo que es. Es falso que sea par, es falso que sea impar, pues añadiéndole la unidad no cambia de naturaleza. Sin embargo es un número, y todo número es par o impar. Es verdad que ello se entiende de todo número finito.

-[Así, bien se puede tener conocimiento de que hay un Dios sin saber lo que es.]

- Conocemos pues la existencia y la naturaleza de lo finito porque somos finitos y extensos como él.

- Conocemos la existencia de lo infinito, e ignoramos su naturaleza, porque tiene extensión, como nosotros, pero no límites como nosotros.

Pero no conocemos ni la existencia ni la naturaleza de Dios, porque no tiene extensión ni límites.

-[Pero por la fe conocemos su existencia, por la gloria conocemos su naturaleza.]

[Ahora bien, ya he mostrado que se puede conocer la existencia de una cosa sin conocer su naturaleza.]

-[¿No habrá pues una verdad sustancial, cuando vemos tantas cosas verdaderas que no son la verdad misma?]

- Hablemos ahora según las luces naturales.

Si hay un Dios, es infinitamente incomprehensible, porque al no tener ni partes ni límites, no tiene ninguna relación con nosotros. Somos pues incapaces de saber ni lo que es, ni si es. Siendo así, ¿quién se atreverá a intentar resolver esta cuestión? No seremos nosotros, que no tenemos ninguna relación con él.

-[¿Quién censurará pues a los cristianos por no poder dar razón de su creencia, ellos que profesan una religión de la que no pueden dar razón? Declaran exponiéndolo al mundo que es una tontería, <u>stultitiam</u>, y os quejais de que no la demuestren. Si la demostraran, no mantendrían su palabra: es al carecer de pruebas cuando no carecen de sentido.- Sí, pero aunque eso excuse a aquellos que la ofrecen como tal, y les evite la censura de exhibirla sin razón, eso no excusa a los que la acogen.- Examinemos pues ese punto, y digamos:]

- Dios es o no es, pero, ¿de qué lado nos inclinaremos nosotros? La razón no puede determinar nada en este caso. Hay un caos infinito que nos separa. En el extremo de esa distancia infinita se juega un juego, cuyo resultado será cara o cruz. ¿Qué apostareis? Por la razón no podeis hacer ni lo uno ni lo otro. Por la razón no podeis deshacer ninguno de los dos.

No acuseis pues de falsedad a aquellos que han hecho una elección, pues no sabeis nada del asunto.

- No, pero les censuraría por haber hecho, no esa elección, sino una elección, pues aunque aquel que elija cruz y el otro estén en falta del mismo modo, los dos están en falta. Lo justo es no apostar.

- Sí, pero hay que apostar. Eso no es voluntario, estais embarcado. ¿Cuál (decisión) tomareis entonces? Veamos, puesto que hay que elegir, veamos lo que os interesa menos. Teneis dos cosas que perder.

- lo verdadero y el bien, y dos cosas a arriesgar, vuestra razón y vuestra voluntad, vuestro conocimiento y vuestra beatitud.

-[y vuestra naturaleza tiene dos cosas de las que huir, el error y la miseria.

- Vuestra razón no resulta más herida

[puesto que hay que elegir necesariamente]

escogiendo lo uno o lo otro.

[Este punto está concluido.]

¿Pero y vuestra beatitud? (Veamos, si elegís cruz: que Dios existe, y perdeis, qué es lo que perdeis). Pesemos la ganancia y la pérdida eligiendo cruz, que Dios es. Estimemos estos dos casos: si ganais lo ganais todo, si perdeis no perdeis nada. Apostad pues que existe sin dudar. (A)

- Estamos muy obligados con aquellos que advierten de los defectos, porque mortifican. Enseñan que se ha estado equivocado

[no impiden que se esté (equivocado) en el porvenir, pues tenemos muchos otros defectos para estarlo,]

preparan el ejercicio de la corrección y la exención de un defecto.

- (A) Eso es admirable. Sí, hay que apostar, pero quizá arriesgo demasiado.

- Veamos. Puesto que hay el mismo azar de ganancia y de pérdida, si no tuvierais a ganar más que dos vidas por una, todavía podríais apostar (pero si hubiera tres a ganar, habría que jugar, puesto que estais en la necesidad de jugar) y seríais imprudente si, estando forzado a jugar, no arriesgaseis vuestra vida para ganar tres en un juego en el que hay azares semejantes de pérdida y de ganancia. Pero hay una eternidad de vida y de felicidad. Y siendo así, aunque hubiera una infinidad de azares de los cuales uno sólo estuviera a vuestro favor, todavía tendríais razón en arriesgar una para obtener dos, y actuaríais con poco sentido, estando obligado a jugar, rehusando jugar una vida contra tres en un juego en el que, de una infinidad de azares, hay uno a vuestro favor, si hubiera una infinidad de vida infinitamente feliz a ganar. Pero aquí hay una infinidad de vida infinitamente feliz a ganar, un azar de ganancia contra un número finito de azares de pérdida, y lo que os jugais es finito: eso quita toda posibilidad de tomar partido. En cualquier sitio en que se encuentre el infinito y en el que no haya una infinidad de azares de pérdida contra el de ganancia, no hay nada que sopesar, hay que darlo todo. Y cuando se está forzado a jugar, hay que renunciar así a la razón para [elegir] conservar la la vida, en lugar de arriesgarla por una ganancia infinita tan próxima a llegar como la pérdida de la nada.

Pues no sirve de nada decir que es incierto si se ganará y que es cierto que se arriesga, y que la infinita distancia que hay entre la <u>certeza</u> de que uno se está exponiendo y la <u>incertidumbre</u> de lo que se ganará, iguala el bien finito que se está arriesgando de manera cierta al infinito que es incierto. No es así. Todo jugador arriesga con certeza, para ganar con incertidumbre, y sin embargo arriesga de manera cierta lo finito para ganar de manera incierta lo finito.

[sin pecar contra la razón]

No hay infinidad de distancia entre esta certeza de lo que uno expone y la incertidumbre de la ganancia: eso es falso. Hay, en realidad, infinitud entre la certidumbre de ganar y la certidumbre de perder. Pero la incertidumbre de ganar es proporcional a la certidumbre de lo que se arriesga, según la proporción de los azares de ganancia y de pérdida. Y de ahí viene que si hay tantos azares de un lado como del otro, hay que jugar la partida de igual a igual. Y entonces la certidumbre de lo que uno expone es igual a la incertidumbre de la ganancia, por más que ella esté infinitamente distante. Y así nuestra proporción tiene una fuerza infinita, cuando hay lo finito para arriesgar en un juego con azares semejantes de ganancia y de pérdida y con el infinito a ganar. Esto es demostrativo, y si los hombres son capaces de alguna verdad, ésta lo es. (B)

[Fin de este discurso.]

¿Pero qué mal os puede acaecer tomando este partido? Sereis fiel, honesto, humilde, agradecido, bienhechor, amigo, sincero, veraz... Es cierto que no os encontrareis en los placeres corrompidos, en la gloria, en la molicie. ¿Pero no tendreis otros?

Os digo que con ello ganareis en esta vida, y que a cada paso que deis en ese camino, vereis tanta certidumbre de ganancia, y tanta nada en lo que arriesgais, que comprendereis al fin que habeis apostado por una cosa cierta, infinita, por la cual no habeis dado nada.

- (B) Lo confieso, lo reconozco, pero aún así, ¿no hay ningún medio de ver el reverso del juego?

- Sí, la Escritura y lo demás, etc.

- Sí, pero tengo las manos atadas y la boca muda. Se me fuerza a apostar y no estoy en libertad, no se me deja libre.

[y yo estoy hecho de tal modo que no puedo creer, ¿qué quereis que haga entonces?]

-[Es verdad (no podeis creer), pero sabed al menos que vuestra impotencia para creer, puesto que la razón os conduce a ello y que no obstante no podeis, viene de vuestras pasiones. Trabajad pues, no para convenceros por la argumentación de las pruebas de Dios, sino para la disminución de vuestras pasiones. Quereis ir hacia la fe y no sabeis el camino, quereis curaros de la infidelidad y pedís los remedios para ello. Aprended de aquellos...]

-(Es verdad, pero) aprended de aquellos que han estado atados como vos y que ahora apuestan todo lo que poseen.

[son gentes que conocen ese camino que vos queríais seguir, y curados de un mal del que quereis sanar. Seguid] la manera por la que ellos han comenzado, es decir, haciendo como si creyeran, tomando agua bendita, haciendo decir misas, etc. Incluso eso os hará creer de manera natural y os hará perder la razón.

- Pero eso es lo que yo temo.

- ¿Y por qué? ¿Qué teneis que perder?

[Pero para mostraros que así se llega a ello y que eso disminuye las pasiones, que son vuestros grandes obstáculos, etc.]

- Oh, ese discurso me transporta, me encanta, etc.

- Si este discurso os gusta y os parece convincente, sabed que lo pronuncia un hombre que se ha puesto de rodillas antes y después, para rogar a ese ser infinito y sin partes al que él somete todo lo suyo, que tome también lo vuestro para vuestro propio bien y para su gloria, y que así la fuerza se aune con esta bajeza.

- La costumbre es nuestra naturaleza. Quien se acostumbra a la fe, la cree, y no puede dejar de temer el Infierno

[y no cree otra cosa.]

Quien se acostumbra a creer que el Rey es terrible, etc. ¿Quién duda pues que nuestra alma, estando acostumbrada a ver número, espacio, movimiento, crea en eso y nada más que en eso?

- (Una imagen de Dios en su inmensidad indivisible)

- ¿Creeis que sea imposible que Dios sea infinito, sin partes?

- Sí

- Quiero entonces haceros ver una cosa infinita e indivisible. Es un punto que se mueve por todas partes con una velocidad infinita. Pues es uno en todas partes y está entero en cada lugar.

Que este efecto de la naturaleza, que os parecía imposible anteriormente, os haga comprender que puede haber otros que no conoceis todavía. No saqueis de vuestro aprendizaje la consecuencia de que no os queda nada que saber, sino que os quedan infinidad de cosas que saber.

- Es falso que seamos dignos de que los otros nos amen. Es injusto que lo pretendamos. Si naciésemos razonables e indiferentes y conociéndonos a nosotros mismos y a los demás, no daríamos esta inclinación a nuestra voluntad. Y sin embargo nacemos con ella, luego nacemos injustos. Pues todo tiende a sí mismo. Ello va contra todo orden. Hay que tender a lo general, y la pendiente hacia uno mismo es el comienzo de todo desorden, en la guerra, en la política, en la economía, en el cuerpo particular del hombre.

La voluntad por lo tanto está depravada. Si los miembros de las comunidades naturales y civiles tienden al bien del cuerpo, las comunidades por su parte deben tender a otro cuerpo más general del que ellas son miembros. Se debe por lo tanto tender a lo general. Luego nacemos injustos y depravados.

[Ninguna religión aparte de la nuestra ha enseñado que el hombre nace en pecado.]

[Ninguna secta de filósofos lo ha dicho, ninguna ha dicho la verdad.]

[Ninguna secta ni religión ha estado siempre sobre la tierra más que la religión cristiana. (C]]

- Es el corazón el que siente a Dios y no la razón. Eso es la fe: Dios sensible al corazón, no a la razón.

- El corazón tiene sus razones

[que la razón no conoce en absoluto.]

se comprueba en mil cosas. Digo que el corazón ama naturalmente al ser universal y a sí mismo, según que se entregue o se endurezca contra el uno o contra el otro a su elección.

Habeis rechazado lo uno y conservado lo otro. ¿Es por razón por lo que amais?

- Sólo la religión cristiana hace al hombre amable y feliz a la vez. Con honestidad (hay que ser odioso o desgraciado) no se puede ser amable y feliz a la vez.

(C) La única ciencia que va contra el sentido común y la naturaleza de los hombres es la única que ha subsistido siempre entre ellos.

En 1662 se publica la llamada Lógica de Port-Royal, cuyo título completo era:"La Lógica o el Arte de Pensar, que contiene, además de las reglas comunes, varias observaciones nuevas, propias para formar el juicio." El libro tiene dos autores, *Antoine Arnauld* y *Pierre Nicole*.

Esta es, según todas las apariencias, la primera vez que se utiliza la palabra probabilidad (probabilité) para denotar algo medible, y ello sucede en 1662, en las últimas páginas de esta Lógica. De esta obra se hicieron posteriormente cinco ediciones sucesivas, la última y definitiva en 1683, pero ninguna alteraba la parte IV, que se titula Del Método.

El arte de pensar consistirá,pues, en sopesar las diversas posibilidades, las probabilidades de las distintas alternativas y compararlas antes de decidir, moviéndonos al menos en una escala ordinal, es decir, de mayor o menor probabilidad, aunque todavía no se les adjudique un valor numérico. Hasta que surge la probabilidad en su sentido medible, no nace la probabilidad en su sentido epistemológico como concepto significativo para la lógica.

Parece ser que, de los dos autores de la Lógica, es *Arnauld* quien escribe la última parte, el Libro IV, donde se habla de probabilidad. *Arnauld* sostuvo además una correspondencia con *Leibniz* sobre el Discurso de Metafísica leibniciano y escribió la Gramática de Port-Royal.

Los tres primeros libros de la Lógica versan sobre la Concepción, el Juicio y el Razonamiento, el cuarto habla del Método, que se basa en el razonamiento deductivo no silogístico, muy empleado en matemáticas. Los cuatro últimos capítulos son los que versan propiamente sobre probabilidad e inician el estudio de un nuevo tipo de inferencia no deductiva.

Hay que distinguir entre dos tipos de razonamiento no deductivo: la inferencia y la decisión que no cuenta con la certeza, por un lado, y la teorización por otro. Esta última es la creación especulativa de una teoría abstracta para explicar los fenómenos, junto con una comprobación de la misma. Lo específicamente probabilístico serían la inferencia y la decisión. Como dice *Hacking*, "la rama de la Filosofía de la Ciencia que ahora se llama 'Probabilidad e Inducción' comienza con la Lógica de Port-Royal."

En los sucesos que dependen de la fe humana, la Lógica nos da unas reglas de decisión en las que están ya implícitas las probabilidades comparables entre sí en una escala ordinal:

> *...Para juzgar de la verdad de un suceso, y determinarme a creerlo o a no creerlo, no hay que considerarlo desnudo y en sí mismo, como se haría con una proposición de Geometría; sino que hay que tener en cuenta a todas las circunstancias que lo acompañan, tanto interiores como exteriores. Llamo circunstancias interiores a las que pertenecen al hecho mismo, y exteriores a las que se refieren a las personas por cuyo testimonio nos sentimos inclinados a creerlo. Haciéndolo así, si todas esas circunstancias son tales que no sucede nunca o muy raramente que circunstancias semejantes estén acompañadas de falsedad, nuestro espíritu se inclina naturalmente a creer que eso es cierto, y tiene razón en hacerlo, sobre todo en la conducción de la vida, que no exige una certidumbre mayor que esta certidumbre moral, y que incluso debe contentarse en diversas ocasiones con la probabilidad mayor.*[6]

En el caso de los milagros también se han de seguir las reglas de decisión, y no se ha de hacer, ni como los libertinos que "no quieren creer más que lo que está en proporción a su razón", ni como los crédulos que hacen un caso de conciencia de dudar de ningún milagro basándose para ello sobre la potencia y la bondad de Dios."Todo eso es muy bueno en sí, pero muy debil para persuadirnos de un milagro en particular, puesto que Dios no hace todo lo que puede hacer; y no es un argumento el que haya sucedido un milagro para que hayan sucedido otros semejantes en otras ocasiones."[7]

Encontramos también un uso de la palabra probable en el sentido de "con probabilidad favorable" al juzgar de los hechos futuros:

> *Pues así como se debe creer probablemente que un hecho ha sucedido cuando las circunstancias ciertas que se conocen son tales que ordinariamente vienen seguidas de tal efecto, así se debe creer también probablemente que sucederá, cuando las circunstancias presentes son tales que son seguidas ordinariamente de un efecto tal.* [8]

Y a continuación encontramos ya una aplicación matemática, a los juegos, de esta teoría, donde se aplica el concepto de probabilidad en el sentido que todos conocemos:

> *Hay juegos en los que diez personas ponen cada una un escudo y sólo hay una que lo gana todo y todas las demás pierden; así cada uno sólo arriesga perder un escudo y puede ganar nueve. Si sólo se considera la ganancia y la pérdida en sí, parecería que todos tienen ventaja en ello, pero además hay que considerar que si todos pueden ganar nueve escudos y sólo se debe al azar perder uno, también es nueve veces más probable para cada uno que perderá su escudo y no ganará los nueve. Así cada uno tiene nueve escudos a esperar, un escudo a perder, nueve grados de probabilidad de perder un es-*

cudo y uno solo de ganar los nueve escudos; lo que deja la cosa en una perfecta igualdad.

Todos los juegos que son de este tipo son equitativos, tanto como pueden serlo los juegos, y los que están fuera de esta proposición son manifiestamente injustos. Y por ello se puede hacer ver que hay una injusticia evidente en estas especies de juegos que se llaman Loterías, porque el dueño de la Lotería toma de ordinario sobre el total una décima parte como mejora para él; todo el cuerpo de jugadores es engañado de la misma manera que si un hombre jugase a un juego igual, es decir, donde hay tanta apariencia de ganancia como de pérdida, a diez pistolas contra nueve. Ahora bien, si esto es desventajoso para todo el cuerpo, también lo es para cada uno de los que lo componen, puesto que viene de ahí el que la probabilidad de la pérdida sobrepase a la probabilidad de la ganancia, que la ventaja que se espera no sobrepase a la desventaja a la que se expone, que es perder lo que se ha apostado.[9]

Continua el autor utilizando las frecuencias para medir la probabilidad de sucesos naturales, como la muerte a causa de los rayos. Pero además se da cuenta de que un problema de decisión requiere el cálculo de la esperanza matemática, lo que involucra no sólo a la probabilidad de que el suceso acaezca, sino a su utilidad. Hay un sólo caso en que la probabilidad no debe tenerse en cuenta, cuando la utilidad o ganancia es infinita, como ya hemos visto que decía *Pascal*.

A veces hay tan poca apariencia de éxito en alguna cosa que, por ventajosa que sea y por pequeña que sea la que se arriesga para obtenerla, es util no arriesgarla. Así, sería una tontería jugar veinte soles contra diez millones de libras, o contra un reino, a condición de que no se pudiera ganar más que en el caso de que un niño, ordenando al azar las letras de una imprenta, compusiera de golpe los veinte primeros versos de la Eneida de Virgilio. Así cuando se piensa en ello, no hay momento de la vida en que uno no la esté arriesgando más que un príncipe que arriesgara su reino jugándolo con esta condición.

Estas reflexiones parecen pequeñas, y lo son en efecto si se queda uno ahí; pero se las puede hacer servir para cosas más importantes; y el principal uso que se debe extraer de ellas es hacernos más razonables en nuestras esperanzas y en nuestros temores. Hay por ejemplo, muchas personas que se espantan excesivamente cuando oyen tronar. Si el trueno les hace pensar en Dios y en la muerte, sea en buena hora, nunca se piensa en ello demasiado; pero si es sólo el peligro de morir por el rayo lo que les causa esta aprensión extraordinaria, es facil hacerles ver que no es razonable. Pues de dos millones de personas, es mucho si hay una que muera de esta manera; e incluso se puede decir que no hay muerte violenta que sea menos común. Así pues, puesto que el temor de un mal debe ser proporcionado no sólo a la importancia del mal, sino también a la probabilidad del suceso, como no *hay género de muerte más raro que morir por el rayo, así tampoco hay otro que deba causarnos menos temor, visto que además ese temor no sirve de nada para hacernoslo evitar.*

Por todo ello no solamente hay que desengañar a esas personas que toman precauciones extraordinarias e inoportunas para conservar su vida y su salud, mostrándoles que esas precauciones son un mal más grande de lo que puede serlo el peligro tan lejano del accidente que temen; sino también hay que desengañar a tantas personas que no razonan en sus empresas de otro modo que de éste: hay peligro en este negocio, luego es malo; hay ventaja en aquel, luego es bueno; puesto que no es ni por el peligro ni por las ventajas, sino por la proporción que hay entre ellos por lo que hay que juzgar.

... Sólo las cosas infinitas, como la eternidad y la salvación no pueden ser igualadas por ninguna ventaja temporal; y así no se las debe poner nunca en la balanza con ninguna de las cosas del mundo. Por eso el menor grado de facilidad para salvarse vale más que todos los bienes del mundo juntos y el peligro menor de perderse es más considerable que todos los males temporales considerados solamente como males.[10]

La probabilidad se vuelve posible sólo cuando los signos se convierten en evidencia interna. En la Lógica aparece una nueva y explícita distinción entre evidencia interna y externa. El mundo ya no es evidencia externa diseñada o escrita por Dios, sino evidencia interna que sólo puede ser explicada por la existencia de un Dios. Hasta aquí había dos tipos de evidencia únicamente: por demostración o por testimonio. Ahora aparece la experiencia, como algo mixto entre las dos. Lo que en la Lógica de Port-Royal se llama evidencia interna es pues algo nuevo, se trata de un lazo de unión entre los objetos de conocimiento y los objetos de opinión que hasta ese momento se habían considerado irreconciliables.

John Wilkins (1614-1672), obispo de Chester, fué el primer secretario, junto con *Oldenburg*, de la Royal Society de Londres. Una de sus primeras sedes fueron precisamente las habitaciones de *Wilkins* en el Wadham College. Su obra está constituida por cuatro libros muy heterogéneos, publicados unos hacia 1640 y los otros hacia 1670. Dos son los temas principales de los mismos: el uno es el lenguaje, el otro el argumento probable. La idea de "característica real o universal" que utilizó posteriormente *Leibniz*, y el término mismo, son de *Wilkins* entre otros. La primera de sus obras sobre el lenguaje, "Mercury, or the Secret and Swift messenger, showing how a man may with privacy and speed communicate his thoughts to a friend at a distance", publicada en 1641, es un código secreto en realidad, y no tiene gran importancia. En 1668, en cambio, publica su"Essay Towards A Real Character and a Philosophical Language". La tesis de estas dos obras sería que todo lenguaje es convencional, y así, junto al aspecto convencional de los signos era necesaria una teoría de su aspecto natural, que es la evidencia interna y la probabilidad.

"The Discovery of a World in the Moone, or a Discourse tending to prove that 'tis probable there may be another habitable world in that planet", escrito en 1640, es un ensayo sobre el uso de la evidencia probable. Se apela con frecuencia a la autoridad como criterio, aunque la obra está expuesta en forma demostrativa. En 1672, después de la muerte del autor, se publica "Of the Principles and Duties of Natural Religion". En esta obra se expone la teoría del designio divino. El mundo es una evidencia interna, que sólo puede ser explicada por la existencia de un Dios. El autor propone tres categorías de evidencia: demostración, testimonio y experiencia. Esta última es mixta, y depende a la vez de los sentidos y del entendimiento, de nuestra propia observación y de las pruebas repetidas que realicemos de los sucesos o acciones.

Hemos visto cómo *Pascal* se atrevía a hacer de Dios un objeto de decisión y no de creencia. *Wilkins* se atreve a hacer de Dios un objeto de opinión probable, del mismo orden que la creencia en que el sol saldrá también mañana.

El designio divino aparece explícitamente justificado en *William Derham* (1657-1735), que establece una relación entre los comienzos de la Estadística en autores como *Graunt*, *Petty* y *King* y las concepciones filosófico-teológicas de *Newton*, ejerciendo gran influencia sobre los autores europeos. Fué miembro de la Royal Society de Londres y publicó frecuentemente en las Philosophical Transactions.

Durante casi dos siglos la mayor parte de Europa había estado empeñada en controversias teológicas, la gente estaba cansada de ellas y se volvía ya hacia los nuevos resultados de la ciencia de la naturaleza, preguntándose si se podría encontrar la justificación de los principios religiosos generales en esos misteriosos fenómenos y no en los textos que cada lector podía interpretar de manera distinta. Según la interpretación de *Pearson*[11], *Newton* consideraba a Dios como omnipresente, vigilando o supervisando continuamente el funcionamiento de sus propias leyes. *Leibniz* le acusaba por ello de herejía, afirmando que Dios había hecho un mundo perfecto y que no sólo sería innecesario, sino la negación de su perfección, el suponer que Dios supervisaba sus operaciones. Así pues, la tarea de *Derham* sería poner en claro, posiblemente por primera vez, el argumento a partir del designio. En el siglo XVIII se consideraba que los artículos de la fe religiosa debían deducirse de las leyes de la naturaleza de una manera simple y fácil. El interés de *Derham* para nosotros estriba en que no limitaba su atención a la armonía y a la perfección del universo mostrada en las leyes físicas y en los organismos animales, sino que ampliaba la noción de leyes físicas estables a la de ratios estadísticas estables, y hallaba en las relaciones estadísticas,entre el hombre y los animales de su entorno,evidencias de la perfección de las ordenanzas divinas.

Las principales obras de este autor fueron la Physico-Theology de 1713 y la Astro-Theology de 1715. La primera de ellas sobre todo resulta interesante. No hay nada en el mundo orgánico ni inorgánico que no haya sido directamente creado por la divinidad para un propósito útil, generalmente para el hombre. Esta es la tesis principal de *Derham*. Veamos algunas citas de su Físico-Teología:

> *Si todos los animales del globo se hubieran formado por azar (chance), o hubieran sido colocados al azar, o sin la Divina Providencia, sus órganos podrían haber sido diferentes de como son y su lugar y residencia confundidos y mezclados. Sus órganos (por ejemplo) de respiración, de visión y de movimiento, hubieran sido apropiados para cualquier medio o no hubieran necesitado ninguno; sus estómagos hubieran servido para cualquier alimento y su sangre y la cobertura de sus cuerpos estaría hecha para cualquier clima o para un único clima. Por consiguiente todo el mundo animal hubiera estado en una mezcolanza confusa, inconveniente y desordenada. A un animal le hubiera faltado comida, al otro habitación, y a la mayoría de ellos seguridad. Se hubieran congregado todos en uno o en pocos lugares, hubieran tomado descanso sólo en las zonas templadas; y hubieran codiciado un sólo alimento, el más facil de alcanzar, el más especioso a la vista; y así se habrían envenenado, habrían muerto o se habrían incomodado enormemente los unos a los otros. Pero tal como las cosas están dispuestas, el globo está cubierto por igual, de manera que ningún lugar carece de sus habitantes propios y ninguna criatura está despojada de su lugar propio y de todas las cosas necesarias para su vida, su salud y su placer...*[12]

Esta argumentación supone la tesis de que todos los seres fueron creados de golpe, a la vez. Pero si no hubieran sido creados simultaneamente, si se hubieran sucedido gradualmente los unos a los otros, adaptándose lentamente a sus entornos, como iba a poner de manifiesto la teoría evolucionista, sólo podemos considerar en la divinidad una presciencia de lo que iba a devenir a través de millones de años la creación de individuos mucho más simples.

> *Como la materia está admirablemente bien ordenada, y considerando el crecimiento del mundo, no habría suficiente lugar, comida y otras cosas necesarias para todas las criaturas vivientes sin otro gran acto de la divina sabiduría y de la providencia, que es el equilibrar el número de individuos de cada especie de criaturas en el lugar al que están asignados...*[13]

Para *Derham* el exacto equilibrio del número de individuos de cada especie es necesario para la estabilidad de la creación. Esta estabilidad numérica es un acto de la sabiduría divina. La estabilidad de las ratios estadísticas es una ordenanza divina para mantener al mundo creado en su condición. Estas ideas sobre el incremento de población fueron expresadas en 1711, y posteriormente desarrolladas por *Malthus* y *Charles Darwin*. Hasta que fué aceptada la teoría de la evolución, estas ideas fueron las dominantes.

Derham no llega muy lejos en el desarrollo de la teoría de la estabilidad de las ratios estadísticas, pero fué el original creador de la misma. Sus tablas no son muy completas y sus resultados no siempre científicos. Por ejemplo, asigna una correlación negativa entre la longitud de la vida y la fertilidad total, niega la poligamia puesto que hay un hombre por cada mujer, indicándose con ello el deseo de la divinidad; el exceso de hombres es de utilidad por causa de los peligros a los que están expuestos, las guerras, etc. Este tipo de argumento lo encontraremos también en *Arbuthnot.*

En opinión de *Hacking*, la historia de la emergencia de la probabilidad termina con la publicación, en 1711, del Ars Conjectandi de *Bernouilli*, y en efecto con esta obra quedan ya planteados todos lo problemas que presenta el intento de definir un concepto como el de probabilidad. Entre esos varios problemas filosóficos se encuentra el de la chance o azar en un universo determinista.

Uno de los autores que creían en el designio divino y que afirmaban que la mayoría de nuestras asignaciones de probabilidad eran a posteriori, es *John Arbuthnot* (1667-1735). *Arbuthnot* fué médico y también hombre de letras y humorista. Genio en una época de genios, amigo y colega de *Swift*, *Pope* y *Addison*. *Swift* escribió de él: "El doctor tiene más ingenio que todos nosotros y su humanidad es igual a su ingenio". La primera de sus publicaciones científicas fué en 1692, una traducción al inglés de la obra de *Huygens* De Ratiociniis in Ludo Aleae. Hace muchas adiciones propias al trabajo de *Huygens*. El prefacio y aproximadamente la mitad del texto son de *Arbuthnot*. Es en el prefacio donde aparecen muchas de sus ideas sobre su interpretación de la probabilidad. Veamos a continuación algunos extractos significativos:

Una gran parte de este Discurso es una traducción del tratado de Mons. Huygens, De Ratiociniis in Ludo Aleae, alguien que en su cultivo de la filosofía sólo tiene un superior y pocos o ningún igual. Toda esta tarea la he emprendido para mi propia diversión y para satisfacción de algunos amigos que han andado disputando de vez en cuando sobre las proporciones de los azares, en algunos casos que aquí se deciden. Todo lo que se requería eran unas pocas horas para perder y nada más que algo de trabajo para el cerebro; mi intención al publicarlo era hacer su utilidad más general y quizá persuadir con él a algún hacendado bisoño para que mantenga su dinero dentro del bolsillo; y si con ello provocase los clamores de los tahures, no me importaría mucho, puesto que no es obligación del mundo abastecerlos.

Encontrareis aquí un método muy claro y facil del cálculo de los azares del juego, que un hombre puede entender sin conocer la cuadratura de las curvas, o la doctrina de las series o las leyes centrífugas de los cuerpos, o los periodos de los satélites de Júpiter; sí, sin llegar a los Elementos de Euclides. No se requiere para comprender todo esto más que sentido común y aritmética práctica; exceptuando algunos toques de Algebra, como en las tres primeras proposiciones, donde el lector, sin ser sospechoso de papismo, puede aplicar una fuerte fe implícita; aunque debo confesar que ella no me ha aconsejado mucho en estos menesteres; preferiría pues que el lector mismo investigara y creo que no encontrará desagradable la especulación.

El éxito de cualquier hombre en cualquier negocio es proporcional a su conducta y fortuna. Fortuna (en el sentido de la mayoría de la gente) significa un suceso que depende del azar y coincide con mi deseo; y mala fortuna significa un suceso contrario a mi deseo. Un suceso que depende del azar (chance) es aquel cuyas causas inmediatas no conozco y por lo tanto no puedo ni predecirlo ni producirlo (pues no hay herejía en creer que la Providencia permite que las materias ordinarias circulen por el cauce de las Causas Segundas). Ahora bien, supongo que todo lo que un hombre inteligente puede hacer en un caso como estos es apoyarse, en sus negocios, sobre los sucesos que tienen la mayoría o las más poderosas causas segundas, y esto es cierto tanto para los grandes sucesos del mundo como para los juegos ordinarios. Es imposible que un dado, con una determinada fuerza y dirección, no caiga sobre una cara determinada, solo que yo no conozco la fuerza y la dirección que le hace caer sobre una cara determinada y por tanto le llamo a eso azar, aunque no es sino falta de arte (conocimiento); lo único que puedo hacer es apostar donde hay el mayor número de posibilidades y por consiguiente la mayor probabilidad de ganar; y todo el arte del juego en que haya algo de azar debe reducirse en último término a esto, a calcular en los casos dudosos qué cara tiene más posibilidades, y aunque esto no se puede hacer en medio del juego precisamente para una unidad (jugada), no obstante un hombre que conoce los principios puede hacer una con-

jetura que será una directriz suficiente para él y, aunque es posible que pierda, si existe alguna posibilidad contra él, sin embargo al escoger el lado más seguro, podrá en tal caso separarse más contento de su dinero...

El lector observará aquí la fuerza de los números que se puede aplicar con éxito incluso a aquellas cosas que uno imaginaría no están sujetas a reglas. Muy pocas cosas conocemos que no puedan ser reducidas a un razonamiento matemático y, cuando no pueden serlo, eso es un signo de que nuestro conocimiento de ellas es muy pequeño y confuso; y donde se puede hacer un razonamiento matemático es una gran locura utilizar cualquier otro, como palpar una cosa en la oscuridad cuando tenemos una vela al lado. Creo que el cálculo de la Cantidad de Probabilidad debe ser considerado como una especulación muy util y entretenida y aplicado a gran número de sucesos que son accidentales, además de a los juegos; sólo que estos casos serán infinitamente más confusos, porque dependen de posibilidades que la mayor parte de los hombres ignoran; y como ya he apuntado antes, todas las políticas del mundo no son más que un tipo de análisis de la cantidad de probabilidad de sucesos casuales, y un buen político no es más que alguien diestro en tales cálculos; solo que los principios que se utilizan en la solución de tales problemas no pueden estudiarse en un lugar cerrado, sino que deben adquirirse mediante la observación de la humanidad.[14]

La segunda de sus obras que tiene relación con la probabilidad es"Un argumento a favor de la Divina Providencia, tomado de la constante regularidad observada en los nacimientos de ambos sexos", que fué publicada en las Philosophical Transactions de la Royal Society de Londres en 1710. Estudia un periodo de 82 años, de 1629 a 1710. En esta obra emplea dos tipos de razonamiento, de los cuales uno sólo es válido, y pretende inferir la acción de la Divina Providencia a partir de la estadística.

Arbuthnot sostiene que es muy improbable que si el mero azar gobierna los resultados de lanzar un gran número de monedas, no nos resulte a veces una gran preponderancia de caras (o de cruces). La conclusión falsa (para la estadística) que saca de ello es que la estabilidad estadística constante no puede ser debida al azar. Según él los nacimientos no son debidos al azar, porque entonces la probabilidad sería $(1/2 + 1/2)^{82}$, y es imposible que en 82 ocasiones se haya dado el mismo suceso, a saber, han nacido más hombres que mujeres, por lo tanto la providencia ha influido en la ley matemática. No se le ocurrió que también una distribución binomial del tipo $(p + q)^{82}$ donde p y q no son 1/2, sería una distribución aleatoria, debida al azar. La persistencia en la superioridad de los varones en los nacimientos muestra que es el arte y no el azar el que gobierna.

Utiliza las tablas basadas en bautizados y no en nacidos, y como *John Graunt*, es un defensor de la monogamia. Por su interés particular y por la utilización de parecidas argumentaciones por parte de otros autores, vale la pena reproducir aquí su Memoria completa y seguir sus correctos razonamientos, cuya traducción proponemos así:

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS

Para los meses de octubre, noviembre y diciembre de 1710

II., pag. 186-190

Un Argumento en favor de la Divina Providencia, tomado de la constante regularidad observada en los nacimientos de ambos sexos. Por el Dr. John Arbuthnott, Físico Ordinario de Su Majestad, y miembro del Colegio de Médicos y de la Royal Society.

Entre las numerosas huellas de la Divina Providencia que se encuentran en las obras de la Naturaleza, hay una muy notable a observar en el exacto equilibrio que se mantiene entre el número de hombres y el de mujeres; pues por este medio se consigue que la especie nunca decaiga ni perezca, puesto que cada macho puede tener su hembra, y de una edad proporcionada. Esta igualdad de varones y hembras no es efecto del azar (chance), sino de la Divina Providencia, trabajando para un buen fin, como aquí se demuestra:

Supongamos un dado con dos caras, M y F (que llamaremos Cara y Cruz), para hallar todas las probabilidades de un número determinado cualquiera de tales dados, sea el binomio M + F elevado a la potencia cuyo exponente es el número dado de dados; los coeficientes de los términos nos proporcionarán todas las probabilidades deseadas. Por ejemplo, en dos *dados de dos caras M + F, las probabilidades (chances) son* $M^2 + 2\ MF + F^2$, *esto es, una probabilidad para M doble, una para F doble y dos para M único y F único; en cuatro de tales dados las probabilidades son* $M^4 + 4\ M^3F + 6\ M^2F^2 + 4\ MF^3 + F^4$ *es decir, una probabilidad para M cuádruple, una para F cuádruple, cuatro para M triple y una F, cuatro para una M y F triple, y seis para M doble y F doble; y en general, si el número de dados es n, todas sus probabilidades estarán expresadas en esta serie*

$$M^n + \frac{n}{1}\times M^{n-1}F + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times M^{n-2}F^2 + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times M^{n-3}F^3 + \text{etc.}$$

Se ve claramente que cuando el número de dados es par, hay tantas M como F en el término medio de esta serie, y en todos los otros términos hay mayoría de M o mayoría de F.

Por lo tanto, si un hombre intenta, con un número par de dados, obtener tantas M como F, tiene todos los términos excepto el término central contra él; y su lote es a la suma de todas las probabilidades como el coeficiente del término central es a la potencia de 2 elevada a un exponente igual al número de dados: así en dos dados su lote es 2/4 o 1/2, en tres dados 6/16 o 3/8, en seis dados 20/64 o 5/16, en ocho 70/256 o 35/128, etc.*

Para encontrar este término central en cualquier potencia o número de dados, se continúa la serie $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, *etc. hasta que el número de términos sea igual a* $\frac{1}{2}n$. *Por ejemplo,*

* Parece un error, el lote mencionado es para cuatro dados, no para tres.

el coeficiente del término central de la décima potencia es $\frac{10}{1} \times \frac{9}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{7}{4} \times \frac{6}{5} = 252$, la décima potencia de 2 es 1024, por lo tanto, si A intenta obtener en una tirada con diez dados un número igual de M y F, tiene 252 oportunidades (chances) de 1024 a su favor, es decir que su lote es 252/1024 o bien 63/256, que es menos que 1/4.

Con ayuda de los logaritmos sería facil extender este cálculo a un número muy grande, pero no es ese mi objetivo presente. Se puede ver por lo que se ha dicho que con un número de dados muy grande, el lote de A se haría muy pequeño; y por consiguiente (suponiendo que M denota al macho y F a la hembra) que en el vasto número de los mortales habría sólo una pequeña parte de todos los casos posibles en los que sucediera, en cualquier tiempo determinado, que nacieran un número igual de machos y hembras.

Realmente hay que confesar que esta igualdad de machos y hembras no es matemática sino física, lo cual altera mucho el cálculo precedente; pues en este caso el término central no dará exactamente las posibilidades (chances) de A, sino que sus posibilidades se quedarán en alguno de los términos junto al central y se inclinarán a un lado o a otro. Pero es muy improbable (si gobierna el mero azar) que alcancen nunca los extremos, pues este suceso es sabiamente evitado por la prudente Economía de la Naturaleza; y para juzgar de la sabiduría del mecanismo debemos observar que los accidentes externos a los que están sujetos los machos (que deben buscar su alimento con peligro) hace grandes estragos entre ellos, y que estas pérdidas exceden con mucho a las del otro sexo, ocasionadas por las enfermedades que inciden en él, como la experiencia nos enseña. Para reparar estas pérdidas, la previsora Naturaleza, por disposición de su sabio Creador, proporciona más machos que hembras, y ello en proporción casi constante. Esto aparece en las tablas anejas, que contienen observaciones de los nacimientos en Londres para 82 años. Así pues, para reducir todo esto a cálculo, propongo lo siguiente.

Problema: A apuesta contra B que cada año nacerán más machos que hembras. Hallar el lote de A o el valor de su esperanza.

Es evidente por lo que se ha dicho que el lote de A para cada año es menor que $1/2$; (pero que el argumento puede ser más fuerte) sea su lote igual a $1/2$ para un año. Si intenta hacer lo mismo 82 veces seguidas, su lote será $(1/2)^{82}$, lo cual se calcula facilmente mediante la tabla de logaritmos que sería $1/4836000000000000000000000$. Pero si A apuesta con B no sólo que el número de machos superará al de hembras todos los años, sino que este exceso tendrá lugar en una proporción constante, y la diferencia estará dentro de límites fijos; y esto no sólo para 82 años, sino para los siglos de los siglos, y no sólo en Londres, sino en todo el mundo; (lo cual es de hecho altamente probable y prevé que cada macho pueda tener una hembra del mismo país y de edad apropiada) entonces las posibilidades de A se acercarán a una cantidad infinitamente pequeña, al menos menor que cualquier fracción fijada. De ahí se sigue que lo que gobierna es el Arte y no el Azar [Chance].

En Física no parece haber una causa más probable que atribuir a esta igualdad en los nacimientos que la de que la generación de nuestros primeros padres estuvo al principio formada por un número igual de ambos sexos.

Escolio. De ahí se deduce que la poligamia es contraria a la ley de la Naturaleza y a la justicia, y a la propagación de la raza humana; pues donde machos y hembras están en igual número, si un hombre toma veinte esposas, diecinueve hombres deberán vivir en celibato, lo que repugna al designio de la Naturaleza; y no es probable que veinte mujeres sean fecundadas igualmente por un hombre que por veinte.

BAUTIZADOS			BAUTIZADOS		
Año	Machos	Hembras	Año	Machos	Hembras
1629	5.218	4.683	1641	5.470	5.200
1630	4.858	4.457	1642	5.460	4.910
1631	4.422	4.102	1643	4.793	4.617
1632	4.994	4.590	1644	4.107	3.997
1633	5.158	4.839	1645	4.047	3.919
1634	5.035	4.820	1646	3.768	3.395
1635	5.106	4.928	1647	3.796	3.536
1636	4.917	4.605	1648	3.363	3.181
1637	4.703	4.457	1649	3.079	2.746
1638	5.359	4.952	1650	2.890	2.722
1639	5.366	4.784	1651	3.231	2.840
1640	5.518	5.332	1652	3.220	2.908

	BAUTIZADOS			BAUTIZADOS	
Año	*Machos*	*Hembras*	*Año*	*Machos*	*Hembras*
1653	3.196	2.959	1682	6.909	6.744
1654	3.441	3.179	1683	7.577	7.158
1655	3.655	3.349	1684	7.575	7.127
1656	3.668	3.382	1685	7.484	7.246
1657	3.396	3.289	1686	7.575	7.119
1658	3.157	3.013	1687	7.737	7.214
1659	3.209	2.781	1688	7.487	7.101
1660	3.724	3.247	1689	7.604	7.167
1661	4.748	4.107	1690	7.909	7.302
1662	5.216	4.803	1691	7.662	7.392
1663	5.411	4.881	1692	7.602	7.316
1664	6.041	5.681	1693	7.676	7.483
1665	5.114	4.858	1694	6.985	6.647
1666	4.678	4.319	1695	7.263	6.713
1667	5.616	5.322	1696	7.632	7.229
1668	6.073	5.560	1697	8.062	7.767
1669	6.506	5.829	1698	8.426	7.626
1670	6.278	5.719	1699	7.911	7.452
1671	6.449	6.061	1700	7.578	7.061
1672	6.443	6.120	1701	8.102	7.514
1673	6.073	5.822	1702	8.031	7.656
1674	6.113	5.738	1703	7.765	7.683
1675	6.058	5.717	1704	6.113	5.738
1676	6.552	5.847	1705	8.366	7.779
1677	6.423	6.203	1706	7.952	7.417
1678	6.568	6.033	1707	8.379	7.687
1679	6.247	6.041	1708	8.239	7.623
1680	6.548	6.299	1709	7.840	7.380
1681	6.822	6.533	1710	7.640	7.288

Otro autor que utiliza parecidos argumentos religiosos respecto a la poligamia y al designio divino es *Bernard Nieuwentyt* (1654-1718), holandés. Sus primeras obras están escritas en latín y tratan del cálculo diferencial e infinitesimal, pero su obra principal se titula Het regt gebruik der Wereldbeschouwingen, "El recto uso de la contemplación de la Naturaleza", publicado en Amsterdam, en 1715, en el que sigue la argumentación de *Arbuthnot* en cuanto a la desigualdad de los nacimientos de varones y hembras, apoyando la demostración de éste, aunque no parece comprender el fallo de atribuir 1/2 a p y a q; y para él la causa de esa desigualdad es debida al designio divino y no al azar, en el sentido que ya hemos visto en repetidos casos. Su obra sin embargo se inclina más del lado del hombre que de los animales, es un anatomista; se ocupa de las partes del cuerpo humano y de sus interrelaciones y coordinación que tantos servicios prestan al hombre, en lugar del equilibrio ecológico entre las diferentes especies que tanto interesaba a *Derham*.

Matemáticas y teología siguen combinándose también en pleno siglo XVIII. Como exponentes significativos de esta tendencia veremos el caso de *Thomas Bayes* (1702-1761) y *Richard Price* (1723-1791). La teología era un tema de vital importancia para los hombres del siglo XVIII; así como sus abuelos habían reaccionado contra el dogmatismo de Roma, ellos reaccionaban contra el dogmatismo de los Reformadores. Además, el nacimiento de la Filosofía de la Naturaleza hacía pensar que el caracter de la divinidad se revelaría en el estudio científico de sus obras. *Newton* (1642-1727), no había encontrado en la explicación mecánica del Universo ninguna razón para que persistieran en el futuro las secuencias pasadas, y supuso que esa persistencia provenía de una persistencia en la volición de la divinidad. Por otra parte, dudaba de la divinidad de Cristo, aunque creía que era un mediador entre los hombres y Dios. Estas ideas religiosas de *Newton* influyeron a los matemáticos del siglo XVIII. Como señala *Karl Pearson*, en las Cuatro Disertaciones de *Price*, en 1768, hay una sobre los Milagros, en la que intenta refutar a *David Hume* utilizando el Teorema de *Bayes* y otra sobre la Providencia, en la que expone la doctrina newtoniana de una divinidad activadora. La divinidad actua de acuerdo con los principios generales que llamamos leyes de la naturaleza y que de hecho no son más que modos de las operaciones divinas. La uniformidad en las leyes de la naturaleza se explica por la rectitud de la divinidad que da al hombre la oportunidad de formar planes de conducta coherentes. Se trata pues de una visión antropocéntrica, de una vuelta a las ideas ptolomeicas donde el hombre era el centro de la tierra y la tierra el centro del universo.

Bayes fué elegido miembro de la Royal Society en 1742. Sin embargo la obra por la que la posteridad le conoce no apareció hasta después de su muerte. Dos años después de ésta, *Price* comunicó a la Royal Society en una carta de 10 de noviembre de 1763, el artículo titulado An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. Fué leido el 23 de diciembre de 1763 y publicado en las Philosophical Transactions, 53, 1763, p. 370-418.

Price dice en su presentación de *Bayes* que éste, en una introducción anterior a su ensayo, decía que su propósito era encontrar un método para juzgar respecto de la probabilidad de que un suceso tenga lugar en unas circunstancias dadas, suponiendo que no sabemos nada sobre él excepto que ha tenido un cierto número de éxitos y de fracasos bajo las mismas circunstancias. Se trata pues de aplicar al futuro, a priori, un cierto método basado en el conocimiento de lo que ha sucedido en el pasado. Sigue diciendo:

> *(Bayes) añade que pronto se dió cuenta de que no sería muy difícil hacer eso, siempre que se pudiera encontrar alguna regla de acuerdo con la cual pudiéramos estimar la chance de que la probabilidad de que tenga lugar un suceso perfectamente desconocido se encuentre entre dos grados de probabilidad determinados cualesquiera, previamente a cualquier experimento hecho acerca de él; y que le parecía que la regla debería ser suponer que había la misma chance de que se encontrara entre dos grados equidiferentes cualesquiera; lo cual, si se aceptaba, todo el resto podía calcularse facilmente con el modo común de proceder en la doctrina de la probabilidad. De acuerdo con esto, encuentro entre sus papeles una solución muy ingeniosa a este problema en este sentido. Pero después consideró que el postulado sobre el cual había argumentado podía quizá no ser considerado razonable por to-*

dos; y por tanto decidió establecer la proposición en otra forma en la cual pensaba que está contenida la solución del problema, y con un escolio para explicar las razones por las que lo pensaba, en lugar de introducir en su razonamiento matemático alguna cosa que pudiera admitir disputa. Este, como observarán, es el método que ha seguido en este ensayo.

Toda persona sensata se dará cuenta de que el problema mencionado no es en absoluto una mera especulación curiosa en la doctrina de la probabilidad, sino que es necesaria su resolución para una base segura para todos nuestros razonamientos referentes a los hechos pasados, y lo que es probable que suceda a partir de ahora. El sentido común es suficiente en realidad para mostrarnos que, a partir de la observación de lo que en casos anteriores ha sido consecuencia de una cierta causa o acción, uno puede emitir un juicio que es verosímil sea consecuencia de ella de nuevo, y que cuanto mayor sea el número de experimentos que tenemos para apoyar una conclusión, más razón tendremos para darlo por seguro. Pero es cierto que no podemos determinar, al menos no con toda precisión, en qué grado los experimentos repetidos confirman una conclusión, sin la discusión particular del problema antes mencionado; que por tanto es necesario sea considerado por cualquiera que quiera dar una clara cuenta de la fuerza del <u>razonamiento analógico</u> o <u>inductivo</u>; del que hasta ahora no parecemos saber mucho más que de hecho unas veces nos convence y otras no; y que así como es el medio para informarnos de muchas verdades, de las que de otro modo hubiéramos permanecido ignorantes, así con toda probabilidad es fuente de muchos errores, que quizá podrían haber sido evitados en cierta medida, si la fuerza de este tipo de razonamiento hubiera sido entendida por nosotros con más claridad y distinción.

Estas observaciones prueban que el problema que se investiga en este ensayo no es menos importante que curioso. Creo que se puede añadir que es también un problema que nunca antes ha sido resuelto. El Sr. de Moivre, el gran estudioso de esta parte de las matemáticas, en sus Leyes del Azar (Chance), siguiendo a Bernouilli, y con un alto grado de exactitud, ha dado reglas para hallar la probabilidad, esto es, que si se hacen un gran número de pruebas para cada suceso, la proporción del número de veces en que éste aparece respecto al número de veces en que fracasa en esas pruebas, diferirá en menos de unos límites prefijados de la proporción entre la probabilidad de su éxito y de su fracaso en una sola prueba. Pero no conozco a nadie que haya mostrado cómo deducir la solución del problema inverso, es decir, "dado el número de veces en que un suceso desconocido ha sucedido y fracasado, hallar la chance de que la probabilidad de que suceda esté entre dos grados de probabilidad cualesquiera prefijados". Lo que el Sr. de Moivre ha realizado no puede por lo tanto considerarse suficiente para hacer innecesaria la consideración de este punto; especialmente puesto que las reglas que él ha dado no pretenden ser rigurosamente exactas, excepto en el supuesto de que el número de pruebas realizadas sea infinito;

de lo cual no es obvio cuál debe ser el número de pruebas en la práctica para obtener una exactitud suficiente.

El Sr. de Moivre dice que el problema que ha resuelto es el más difícil que se puede proponer sobre el tema del azar (chance). Ha aplicado su solución a un propósito muy importante, y con ello ha mostrado que están muy equivocados aquellos que han insinuado que la Doctrina del Azar es de consecuencia trivial en matemáticas, y no puede tener un lugar en ninguna investigación seria. El propósito al que me refiero es mostrar qué razón tenemos para creer que hay en la constitución de las cosas leyes fijas de acuerdo con las cuales tienen lugar los sucesos, y que por tanto, la trama del mundo debe ser efecto de la sabiduría y el poder de una causa inteligente; y así confirmar el argumento tomado a partir de las causas finales para la existencia de la Divinidad. Será facil ver que el problema inverso resuelto en este ensayo es aplicable más directamente a este propósito; pues nos muestra, con claridad y precisión, en todo caso de cualquier orden particular de recurrencia de sucesos, qué razón hay para pensar que tal recurrencia u orden es derivado de causas estables o regulaciones innatas, y no de cualquiera de las irregularidades del azar.

Las dos últimas reglas de este ensayo aparecen sin deducir. He decidido hacer esto porque esas deducciones ocupan mucho espacio y alargarían mucho este ensayo; y también porque dichas reglas, aunque son de considerable utilidad, no responden al propósito para el que se han enunciado con la perfección que sería de desear. No obstante, si se considerase adecuada una comunicación de las mismas, están a disposición. En algunos lugares he puesto notas cortas, y en conjunto he añadido una aplicación de las reglas del ensayo en algunos casos particulares, para proporcionar una idea más clara de la naturaleza del problema y mostrar lo lejos que se puede llegar en la solución del mismo.

Comprendo que su tiempo está tan ocupado que no puedo esperar razonablemente que examine minuciosamente cada parte de lo que ahora le envío. Algunos de los cálculos, particularmente en el Apéndice, no se pueden hacer sin mucho trabajo. Lo he tratado con tanto cuidado que creo que no hay ningún error material en ellos; pero si hubiera tales errores, yo soy la única persona que debe ser considerada responsable por ello.

El Sr. Bayes consideró adecuado comenzar su trabajo con una breve demostración de las leyes generales del azar. La razón para hacer esto, como dice en su introducción, no era sólo que el lector no tuviera que tomarse el trabajo de buscar en otra parte los principios sobre los que se argumenta, sino porque no sabía dónde remitirle para una clara demostración de los mismos. También pide disculpas por la peculiar definición que da de la palabra chance ó probabilidad. Su intención era cortar toda disputa sobre el significado de la palabra que en lenguaje común es utilizada con diferentes sen-

tidos por personas de diferentes opiniones, y según se apliquen a hechos pasados o futuros. Pero cualesquiera que puedan ser los diferentes sentidos, todos ellos (observa) permitirán una esperanza que depende de la verdad de cualquier hecho pasado, o del acaecer de cualquier suceso futuro y debe ser estimada tanto más válida cuanto el hecho es más plausible que sea cierto o el suceso más posible que suceda. Por lo tanto, en lugar del sentido propio de la palabra probabilidad, ha dado el que todos permitirán que sea su propia medida en cada caso en que la palabra sea usada...

En efecto, la definición de *Bayes* dice así:

The probability of any event is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's happening. By chance I mean the same as probability.

Hemos visto, pues, a través de la carta de *Price*, el sentido y las intenciones del artículo de Bayes. El artículo mismo es de caracter mucho más técnico. Pero encontramos el argumento de que la regularidad de los sucesos muestra la existencia de una divinidad que mantiene las leyes de la naturaleza. El problema con que comienza el escrito parece basarse en el llamdo "principio de distribución uniforme de la ignorancia"; sólo conocemos de un suceso el número de veces que ha tenido lugar en un número determinado de pruebas, y queremos determinar la probabilidad de que su probabilidad de suceder esté entre dos grados o valores cualesquiera. Pero si escuchamos a una autoridad como *Karl Pearson*, debemos aceptar que *Bayes* no estaba contento con la distribución uniforme de la probabilidad como postulado del cual partir. *Pearson* dice, tras analizar las diferencias entre lo que se llama ahora Teorema de Bayes generalizado y el texto original, que el asunto tiene una gran oscuridad, debido a las múltiples interpretaciones posibles respecto al caso que Bayes consideraba, pero que su opinión es que *Bayes* no llega a conseguir obtener el Teorema de Bayes.

Aunque esta relación de la teoría de la probabilidad con la religión se prolonga hasta el siglo XVIII, la confirmación de la misma como teoría científica, matemática, se produce ya a partir de 1660, y culmina con la obra de *Bernoulli*. La teoría se diversifica y estudia diferentes áreas de problemas que veremos a continuación.

Notas

1.- LØNNING, Per: Cet effrayant pari, Paris, 1980

2.- PASCAL, Blaise: Oeuvres, ed. L. Lafuma, 1963, p.57.

3.- PASCAL, Blaise: Pensées, ediciones Brunet,p.234/ Lafuma, 577. 1951, 1963.

4.- PASCAL, Blaise: Oeuvres, ed. Jacques Chevalier, La Pleiade, 1954,p. 1509.

5.- BRUNET, Georges: Le pari de Pascal, prefacio de Jean Mesnard, 1956.

6.- ARNAULD & NICOLE: La Logique ou l'Art de Penser, Flammarion 1970, p. 414-415.

7.- Ibid, p.418-419.

8.- Ibid, p. 425.

9.- Ibid, p. 428-429.

10.- Ibid, p. 429-430.

11.- PEARSON, Karl: Lectures on The History of Statistics in the 17th & 18th Centuries, 1921-33.

12.- DERHAM, William.- Physico-Theology, 1713, p.253-5

13.- Ibid, p.256.

14.- ARBUTHNOT, John: Prefacio a su traducción De Ratiociniis in Ludo Aleae, de Huygens, citado por Pearson (v. nota 11)

Bibliografía

ARBUTHNOT, John.- Of the Laws of Chance, or a Method of Calculation of the Hazards of Game, London, 1692

________.- "An Argument for divine providence taken from the constant regularity observed in the births of both sexes", Phil Trans., 27, 1710, p.186-190.

- ARNAULD, Antoine & NICOLE, Pierre.- La logique ou l'art de penser, Paris, 1662
- BAYES, Thomas.- "An essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances", Phil. Trans., 53, 1763, p.370-418
- BRUNET, Georges.- Le pari de Pascal, Paris, 1956. Prefacio de Jean Mesnard.
- DERHAM, William.- Physico-Theology, 1713
- HACKING, Ian.- The emergence of probability, Cambridge U. P., 1975.
- LØNNING, Per.- Cet effrayant pari, Paris, 1980
- NIEUWENTYT, Bernard.- Het regt gebruik der Werelbeschouwingen Amsterdam, 1715. Ed. inglesa: The Religious Philosopher, or the Right use of contemplating the Works of the Creator., 1719.
- PASCAL, Blaise.- Oeuvres, ed. Jean Mesnard
- PRICE, Richard.- Prólogo al Teorema de Bayes, 1763
- SUSSMILCH, Johan Peter.- Die Göttliche Ordnung, 1761.
- WILKINS, John.- The mathematical and philosophycal works, London, 1708.

LOS OTROS PROBLEMAS QUE APARECEN EN 1660

Una vez resuelto el problema de los lotes o de la repartición de las ganancias, las aplicaciones de la Teoría de la Probabilidad comienzan a ser evidentes. Hemos visto como *Pascal* inicia la Teoría de la Decisión, la Lógica de Port Royal descubre la necesidad de las medidas numéricas, las anualidades reciben un nuevo impulso con *John Hude* y *J. de Witt, John Graunt* ha iniciado la inferencia estadística, acabamos de ver las aplicaciones a la demostración del designio divino, y a continuación veremos como *Leibniz* comienza sus estudios sobre probabilidad con una aplicación a los casos legales dudosos.

También aparecen ahora los grandes temas, como el de la esperanza matemática, la equiprobabilidad, y por último el arte de conjeturar y el primer teorema del límite, obra de *Bernouilli*.

Los juegos de azar, de los que se llegó a deducir la teoría de la probabilidad, no son los instrumentos imprescindibles para llegar a medir las probabilidades epistemológicas. Prueba de ello es que *Leibniz* lo hizo partiendo de otro punto: los casos legales dudosos.

Cuando tenía entre 18 y 20 años, en 1665, publicó un escrito en el que utilizaba números para representar lo que él llamaba grados de probabilidad. Este escrito se llamaba De conditionibus. En aquella época *Leibniz* no sabía aún muchas matemáticas ni conocía las corrientes de pensamiento en Europa. Su mejor profesor sobre este tema había sido *Erhard Weigel* en Jena, en 1663. *Weigel* sostenía que todo conocimiento podría axiomatizarse sobre un plano euclideo, y además tenía una gran fe en la aritmética, pero no dominaba la geometría cartesiana ni conocía la doctrina de las probabilidades. Por otra parte sabía mucho sobre jurisprudencia y tenía varios proyectos para hacer de la ley una ciencia deductiva. *Leibniz* por su parte tenía en su propia familia varios especialistas en leyes, así pues gozaba de una fuerte formación legal. Su tesis doctoral en Nuremberg versaba precisamente sobre los casos dudosos en la ley, aunque no le fué aceptada, quizá por su excesiva juventud.

Parece evidente que la probabilidad no es extraña a la ley. La evidencia es primordialmente una noción legal. El jurista debe distinguir entre el testimonio y la circunstancia. Así, la ley romana tenía unas ciertas escalas de evidencia. *Leibniz*, en el escrito sin título conocido como los Preceptos para hacer avanzar las ciencias, alude ya a estos jurisconsultos romanos:

> *No sería tan difícil como uno se imagina escribir geométricamente, pues es fácil evitar la forma lógica, y las equivocaciones cesan por el medio de definiciones nominales inteligibles; y como es difícil demostrarlo todo, se puede suponer lo que parece más claro, siempre que las suposiciones no sean en un número demasiado grande ni tan difíciles como las conclusiones. Hay que saber además que no faltan demostraciones en la moral y en las materias que parecen más*

inciertas e incluso enteramente fortuitas. De lo cual se puede juzgar por las demostraciones De Alea de los señores Pascal, Huygens y otros y por las de Mons. el Pensionista de Wit, referentes a las rentas vitalicias... Se puede incluso avanzar audazmente una paradoja divertida, pero cierta, que no hay autores cuya manera de escribir se parezca más al estilo de los geómetras que el de los antiguos jurisconsultos romanos, cuyos fragmentos se encuentran en las Pandectas. [1]

Leibniz comprendió el papel que desempeñaba la teoría de la probabilidad y le llamó "jurisprudencia natural" en muchas ocasiones, por ejemplo, en una de sus cartas a *Thomas Burnett*:

Hace falta una jurisprudencia natural, por la cual se aprende demostrativamente la manera de estimar los grados de las pruebas. Pues varios argumentos probables unidos producen a veces una certeza moral y otras veces no. [2]

La matemática es el modelo del razonamiento sobres verdades necesarias, pero la jurisprudencia debe ser nuestro modelo cuando deliberamos sobre contingencias. De hecho,

... toda forma de los procedimientos en justicia no es otra cosa en efecto más que una especie de lógica aplicada a las cuestiones de derecho... Los matemáticos de nuestro tiempo han comenzado a estimar el azar con ocasión de los juegos... El fundamento sobre el cual se ha construido viene a ser tomar una media aritmética entre varias suposiciones igualmente admisibles... Más de una vez he dicho que haría falta una nueva especie de lógica, que trataría de los grados de probabi-

lidad.[3]

Locke, en su Ensayo sobre el entendimiento humano, dice que la probabilidad es "likeness to be true". La misma connotación de la palabra implica una proposición para la cual existirían argumentos o pruebas que la hacen pasar o ser recibida como cierta. Cuando la experiencia y el testimonio coinciden, la probabilidad deja tan poca libertad a creer o no creer como la demostración. Desgraciadamente, con frecuencia los testimonios no coinciden y hay lo que Port Royal llamaba desacuerdo entre la evidencia externa y la interna. En este caso es imposible reducir a reglas los diversos grados en los que los hombres dan su asentimiento a algo. *Leibniz* no se siente tan pesimista y señala que los juristas ya tienen toda una familia de reglas para los grados de acuerdo o al menos de demostración. *Hacking* analiza como sigue el De Conditionibus:

> *En general, si consideramos las proposiciones de la forma "si q entonces r" donde q es una disyunción de alternativas mutuamente excluyentes, y tenemos un conjunto de condiciones cada una de las cuales es suficiente para r, entonces pueden darse tres casos. Cualquier disyunción de q excluye a cada una de esas condiciones. En ese caso, Leibniz dice que la condición para r es imposible, y tenemos jus nullum, ningún derecho en absoluto. Si todo elemento de q asegura alguna condición suficiente para r, entonces la condición se llama necesaria, y tenemos jus purum. Sin embargo, si alguna*

disyunción asegura una condición para r, mientras el resto proporciona una condición para no-r, entonces tenemos sólo un derecho condicional y la condición se dice incierta (incerta en la versión de 1665) o contingente (contingens en 1672). Cuando en q las condiciones para r son inciertas, parte de q favorece a r y otra parte favorece a su opuesto. Tenemos así una especie de implicación parcial: parte de q implica r. Cuando la implicación es completa, Leibniz la denota por la cifra 1, cuando la condición es imposible, usa la cifra 0; cuando la condición es incierta la implicación debe denotarse por una fracción. Además, esas fracciones denotan lo que se llama en derecho "los grados de prueba" o su "grado de probabilidad". Leibniz no intentó evaluar esos grados fraccionarios de probabilidad.[4]

En la época en que *Leibniz* empezaba a pensar en su nuevo tipo de lógica, basado sobre los grados de probabilidad, estaba trabajando en su Arte Combinatoria, aunque no hizo la conexión entre probabilidad y combinatoria hasta después de su larga estancia en Paris en 1672-76, cuando conoció a fondo la obra de *Pascal*, *Huygens* y otros.

Como se ha visto hasta aquí, *Leibniz* tomó la probabilidad numérica como una noción epistemológica primaria. Los grados de probabilidad son los grados de certeza.

Desde el comienzo pensó la teoría de la probabilidad como la lógica de los sucesos contingentes. Veamos dos de las consecuencias de considerar la lógica inductiva como jurisprudencia natural. En primer lugar, el concepto de probabilidad condicionada, que se desarrolló muy lentamente en su aspecto matemático y carecía hasta hace muy poco tiempo de una notación adecuada; $p(A/B)$. La carencia de este concepto puede hacer dificultoso el razonamiento y conducir a error. Algunos filósofos opinan que la probabilidad en general es condicional. Cuando se piensa en términos de juegos de azar no se llega de modo natural a esa conclusión, hay que partir de un punto de vista epistemológico. En los procesos legales, por el contrario, toda inferencia es relativa o condicionada a la evidencia válida para la corte; de ese modo *Leibniz* dió por supuesto, con la ley por modelo, "que la probabilidad está en proporción a lo que conocemos". O, como escribió con frecuencia, toda conclusión probabilística lo es ex datis, relativa y derivada de los datos dados. Podemos, en el mejor de los casos, medir la extensión en la cual los datos garantizan o respaldan nuestras inferencias:

> *Incluso cuando no se trata más que de probabilidades, se puede siempre determinar lo que es más verosímil ex datis. Es verdad que esta parte de la lógica útil no se encuentra todavía en ningún sitio, pero sería de una maravillosa utilidad en la práctica, cuando se trata de presunciones, indicios y conjeturas, para conocer los grados de probabilidad cuando hay cantidad de razones aparentes de una y otra parte en alguna deliberación importante. Así, cuando no se tienen suficientes condiciones dadas para demostrar la certeza, por-*

que la materia es solamente probable, siempre se pueden dar al menos demostraciones referentes a la probabilidad misma. No hablo aquí de esta probabilidad de los casuistas, que se funda en el número y la reputación de los Doctores, sino de aquella que se extrae de la naturaleza de las cosas en proporción a lo que se conoce de ellas y que se puede llamar verosimilitud.[5]

La evidencia del testimonio ha sido pues reemplazada por una evidencia interna, que *Leibniz* llama aquí verosimilitud.

La otra influencia de la ley sobre la probabilidad se refiere a la evidencia mixta. El mito de que todo problema de probabilidad puede reducirse a un conjunto de casos favorables o desfavorables persistió durante siglos. Si sólo tenemos un derecho condicional a algo, entonces existen algunas disyutivas de condiciones cada una de las cuales, al cumplirse, es suficiente para el jus purum. Y existe otro conjunto con el significado opuesto. Así el principio de análisis basado en casos favorables y desfavorables es un principio seguro para el derecho. *Leibniz*, al tomar la ley como modelo para la probabilidad, toma también este análisis en casos (los romanos utilizaban la palabra casu para sucesos que tienen lugar involuntariamente). *Bernouilli* continuó en esta linea. Cuando todas las alternativas apuntan en una sola dirección, tenemos la situación pura; cuando hay conflicto, tenemos una situación mixta. Muchos juegos de azar admiten este análisis en casos, de ahí la popularidad del método.

Desde el punto de vista aleatorio, la esperanza matemática o espectación es la ganancia media en una serie de jugadas similares. Podemos traducir el total de ganancias o pérdidas de una jugada repetida en ganancia media y observar la esperanza con más facilidad que la probabilidad. Sin embargo el concepto de valor medio es nuevo, y antes de 1650 no se calculaban valores medios.

Es en la correspondencia entre *Fermat* y *Pascal* donde se encuentra el cálculo de la esperanza tal como ahora se entiende. El científico que estableció por primera vez de manera sistemática las nuevas proposiciones que surgieron de los problemas planteados y resueltos por *Pascal* y *Fermat*, el que definió de manera definitiva la esperanza matemática, fué *Cristian Huygens* (1629-1695).

La obra en la que expone estos conceptos es el primer texto impreso sobre probabilidad: De Ratiociniis in Ludo Aleae, publicado en 1657, en holandés y latín.

En Holanda era entonces muy conocida la Geometría de *Descartes*, no sólo por los estudiosos, sino también por los hombres de negocios, como *John Hude* o *John de Witt*. Además, en sus viajes a Paris, *Huygens* tuvo noticia de la correspondencia entre *Fermat* y *Pascal* y conoció a *Roberval* y otros.

En 1656 envía a Paris, precisamente a *Roberval*, un manuscrito sobre juegos de azar, con la esperanza de que

Fermat o *Pascal* lo viesen y aprobasen sus soluciones. Al cabo de cuatro meses llegó la confirmación de que el trabajo era correcto por intermedio de *Carcavi*. Entretanto *Huygens* había resuelto inmediatamente los problemas que *Fermat* le propuso y que incluiría al final de su tratado. En las páginas 137 a 150 de esta Tesis se encuentran fragmentos de las cartas cruzadas entre *Fermat*, *Carcavi* y *Huygens*.

Huygens introduce la gran novedad de la cuantificación de la noción de "chance". Sigue a *Pascal* en sus razonamientos, pero donde *Pascal* hablaba de derechos sobre la suma apostada, él habla de "chance" de ganancia, da un valor para la posibilidad. Y define: "La chance que se tiene de ganar en un juego tiene un valor tal que, si se posee ese valor, puede uno procurarse esa misma chance mediante un juego equitativo". Aquí chance aparece como probabilidad numérica.

En cuanto al método empleado, sigue los pasos de *Pascal* reduciendo cualquier problema de partis al caso simple, paso a paso. El progreso de *Huygens* consiste en la explicitación de la noción de chance y en la composición de un verdadero tratado pedagógico, pero se limita a los juegos de azar y hay una ausencia de combinatoria, así como se encuentra a faltar la aplicación de otros métodos matemáticos ya conocidos a este cálculo de probabilidades.

Huygens comenzaba todos sus tratados con un conjunto de reglas o axiomas peculiares de la ciencia que estuviera desarrollando. Por eso su texto sobre probabilidad tiene las mismas aspiraciones de rigor que un tratado moderno. En dicho texto se intenta conocer el valor de cada jugada en particular, es decir, si se invita a alguien a jugar con una lista dada de premios que dependen de los diversos resultados, se preguntará el precio exacto o equitativo de hacer la jugada. La respuesta típica ya conocida es que una jugada vale la esperanza matemática de la misma. Ahora esta respuesta es evidente y generalmente aceptada, pero en tiempos de *Huygens* había que justificarla. En principio se puede establecer que la esperanza es el precio equitativo porque, si jugamos repetidamente en los mismos términos, la esperanza es la ganancia media. Si pagamos más que la esperanza tendremos tendencia a perder y si pagamos menos, tendremos tendencia a ganar. Pero el juego resulta equitativo si jugamos muchas veces. El problema se presenta si jugamos una sola vez. La probabilidad del suceso aislado parece contradecir siempre las reglas.

En De Ludo Aleae se utiliza la palabra expectatio en una tentativa de traducción del original holandés realizada por el propio *Huygens* y a él le debmos el término que es el empleado en inglés (expectation) en lugar de esperanza (hope), utilizada en francés y en español.

Huygens considera que existe una situación básica en la que conocemos el precio del juego: la lotería. En una lotería sin trampas es claro que cualquier apostador debe pagar el mismo precio por cualquier billete. Además, si el precio es X, entonces cada uno de los n billetes debe costar X/n. Si cuestan más, el dueño de la lotería sacará provecho sin riesgo, si cuestan menos, los apostadores podrían formar un club para ganar sin riesgo. Así cada jugador paga X y en ese caso el premio debe ser nX.

Se da por supuesto que los billetes no son más baratos si se compra una docena, por ejemplo. Además, se pueden combinar las loterías, de forma que el premio de una lotería sea un billete para la otra. Como dice *Hacking* [6], si a es es el precio equitativo del billete 1 en la lotería A y b es el precio equitativo del billete 2 en la lotería B, cuyo premio es la cantidad a, entonces b es también el precio para una lotería como B, cuyo premio es el billete 1 para la lotería A. *Huygens* inventa el concepto de jugadas equivalentes. Por ejemplo, para establecer el precio de un billete T, buscaremos una lotería equitativa tal que al apostador le sea indiferente tener un billete de ella o tener T, entonces el precio de T debe ser el mismo que el de dicha lotería. Las probabilidades desiguales se representan por la posesión de más de un billete de cierta lotería equitativa.

Spinoza también menciona la esperanza matemática y su justificación en una carta de 1666, donde se llama igualmente esperanza (kans) a la equiprobabilidad. Es la carta a *Jean van der Meer*, escrita originalmente en holandés, y traducida al latín póstumamente; en ella utiliza los dos términos, sorte = posibilidad, azar, y expectatio = esperanza matemática, que en inglés es expectation y en holandés kans, el mismo término que utilizaba *Huygens*. Hay que hacer notar que la traducción francesa de Robert Misrabi emplea erroneamente chance para traducir expectatio e incluso intenta una justificación para discrepar en esto de la traducción de Appuhn, que proponía attente. La carta citada dice:

> *Un jugador es leal cuando sus posibilidades de perder o ganar o sus esperanzas son las mismas que las de su adversario... Si un jugador propone dos números para adivinar uno de ellos y el otro jugador debe ganar, si acierta, la misma suma que perderá si no acierta, entonces las dos esperanzas son iguales: la del que adivina y la del que propone adivinar. Igualmente si el jugador debe adivinar un número de tres y ganar, si acierta, una suma doble de la que perderá si no acierta; el azar y la esperanza son los mismos para los dos... y así sucesivamente... Se deduce de ello que aquel que propone el juego está en la misma situación que el que intenta adivinar, tantas veces como quiere, un número entre varios números dados y arriesga en cada conjetura una suma que es el número de ensayos dividido por la cantidad de números dados.*[7]

El tratado de *Huygens* fué muy bien recibido por los matemáticos de la época y, durante medio siglo, fué la única introducción a la teoría de la probabilidad, hasta llegar a la época de grandes investigaciones: 1690-1710 en que se publican las obras de *Montmort*, *Bernouilli*, *Moivre*, etc.

Uno de los problemas que plantea *Huygens*, su proposición XIV, fué resuelto o planteado por muchos autores, entre ellos, *Spinoza, Pascal, Fermat, Montmort, Bernouilli*, etc. Dice lo siguiente:

> *Si otro jugador y yo lanzamos sucesivamente dos dados con la condición de que yo habré ganado cuando haya sacado 7 puntos y él cuando haya sacado 6, mientras que yo le dejo hacer la primera tirada, encontrar la relación entre mi esperanza y la suya.*[8]

La solución que propone *Huygens* es la correcta, 31:30, pues la probabilidad que tiene el otro de obtener un 6 es 5/36 y por tanto perderá su turno con una probabilidad de 31/36, mientras que el propio autor tiene una probabilidad de 6/36 de obtener un 7 con dos dados y 30/36 de que le corra el turno, luego:

* probabilidad de que el otro no obtenga el 6 y por lo tanto yo juegue y obtenga el 7:

  $$(31/36)(6/36) = 31/216,$$

* probabilidad de que obtenga el 6 el oponente:

  $$5/36 = 30/216$$

luego la razón es de 31:30 a favor de *Huygens*.

La proposición por la que empieza el tratado es precisamente la que introduce la noción de esperanza (kans):

Tener la misma esperanza de obtener a o b me vale $\frac{a+b}{2}$.

Otro aspecto de la esperanza matemática que surgió por aquellos días es el concepto de "esperanza de vida". En 1662 *John Graunt* estableció, partiendo de las tablas de mortalidad que se recogían en Londres, la primera tasa de mortalidad. En 1669, un hermano de *Huygens*, *Ludwig*, le pide que calcule la esperanza de vida de un niño en el momento de la concepción, aunque aún no se planteaba en estos términos. De hecho, el caso está planteado con bastante ambigüedad y los datos sobre todo no son muy fiables. Dada la gran mortalidad infantil de la época le sale una esperanza de 18,22 años y la media de edad de la población era de 11 años. En nuestros días la mortalidad infantil ha bajado mucho y la media de edad se acerca mucho a la esperanza de vida.

El primer uso que se le da a estas estadísticas son las llamadas anualidades de vida, un contrato por el cual el comprador paga una suma establecida a cambio de una anualidad. Las ciudades holandesas vendían regularmente anualidades para hacerse con capital, de forma que estos contratos eran familiares para *Huygens*.

El origen de la palabra Estadística data del siglo XVI y se aplicaba en un principio a lo "concerniente al Estado", consideraciones políticas en un principio, y más tarde económicas, hasta que confluye con la llamada Aritmética Política y ésta es rebautizada como Estadística. Comienza la Estadística propiamente dicha como el estudio sistemático de datos cuantitativos acerca del Estado. El padre de la Estadística es *John Graunt*, que publica en 1662 sus Natural and Political Observations on the London Bills of Mortality. *Graunt* y *William Petty* estudiaron sobre todo las tablas de mortalidad y trataron de hallar la esperanza de vida. Sobre este tema se extiende *Karl Pearson* en las lecciones que explicó en el University College de Londres acerca de la Historia de la Estadística en los siglos XVII y XVIII, libro de referencia, pero que nos aleja de nuestro tema.

Algo semejante sucede con el tema de la anualidades, que se desarrolla en esta época, y que aquí nos limitaremos a esbozar. Dos partes, A y B, pueden acordar que A pague a B un tanto alzado (suma total) mientras que B lo devuelve a A en plazos anuales. Si B necesita el dinero y A desea la renta, eso se llama un préstamo con interés. Cuando A quiere un ingreso seguro en un periodo fijado, esos plazos se llaman anualidades. Las anualidades, al contrario que los préstamos, eran una forma típica de agenciar el dinero para el erario público, en parte porque un gobierno podía firmar una obligación a cambio de una suma al contado, y en cambio la usura era sospechosa y no un negocio propio de un estado.

Las anualidades,no obstante,son muy antiguas. *Ulpiano*, el jurista romano del siglo III, ya dejó una tabla de anualidades. En cuanto al precio de las mismas, se han hecho a lo largo de la historia muchos cálculos diferentes, más o menos caprichosos y casi todos falsos. La regla del interés compuesto tiene sus dificultades de cálculo. El primer intento de fijar precios sensatos para las anualidades fué el de *John de Witt* en 1671, en Holanda, respecto a las anualidades llamadas de vida, o perpetuas.

Uno de los problemas más graves de las primeras definiciones de probabilidad es el de que deben partir del supuesto de la equiposibilidad de todos los casos posibles. Esto crea grandes dificultades de aplicación en cuanto salimos de la órbita de los modelos matemáticos e incluso se ha acusado a esta definición de ser circular, pues en la equiposibilidad hay ya supuesta y escondida una probabilidad, una equiprobabilidad.

Ya *Leibniz*, en 1678, definió la probabilidad con la definición atribuida comunmente a *Laplace* (finales del XVIII) número de casos favorables dividido por el número total de casos igualmente posibles. Fué pues el inventor de la equiposibilidad. Lo inadecuado de esta definición parece evidente y ha sido señalado repetidas veces. *Poincaré* , en su Filosofía de la Ciencia dice a este respecto:

> *Nos vemos oblicados a definir lo probable por lo probable. ¿Cómo sabremos que dos casos posibles son igualmente probables? ¿Será por una convención? Si colocamos al comienzo de cada problema una convención explícita, todo irá bien; no tendremos más que aplicarle las reglas de la aritmética y llegaremos hasta el final del cálculo sin que nuestro resultado pueda dejar lugar a dudas; pero cuando querramos hacer la menor aplicación será necesario demostrar que nuestra convención era legítima y nos volveremos a encontrar en presencia de la misma dificultad que habíamos creido eludir.*[9]

Kasner y *Newman* proponen una definición aproximativa de equiprobabilidad:

> *Dos sucesos contingentes serán considerados como equiprobables si en ausencia de toda prueba o después de haber examinado todas las pruebas apropiadas no puede esperarse uno de los sucesos más que el otro.*[10]

¿Cómo podemos decir que dos sucesos son equiprobables sin saber nada de ellos? Se invoca aquí el <u>principio de razón insuficiente</u>, enunciado por primera vez por *Bernouilli* y que dice así: "Si ignoramos completamente la forma en que puede acontecer un suceso y no tenemos ninguna base razonable para predecirlo, puede suceder con tanta verosimilitud de una forma como de otra". Como el principio reposa sobre la ignorancia, dicen *Kasner* y *Newman*, parece que el cálculo de probabilidades sería más eficaz cuando los que lo empleasen tuvieran"una ignorancia bien equilibrada".

Maurice Boudot concreta más la crítica y corrige a *Poincaré*:

> *Se ha protestado contra este método con el pretexto de que la derivación del concepto de equiprobabilidad constituye un círculo vicioso. Ese no es el problema, pues es facil responder que toda magnitud física está definida indicando los procesos operacionales que permiten dar un sentido a las ideas de igualdad y de suma de dos magnitudes. Lo que es discutible en la práctica de Laplace es que nos remite a situaciones donde es posible determinar sucesos equiprobables.*

Y para ello hay que utilizar el principio de razón insuficiente, o principio de indiferencia:

> *Se supone que existen sucesos tales que no hay ninguna razón para que se produzca el uno más bien que el otro, lo cual es negar el principio de razón. Pero para añadir que esos sucesos deben ser considerados como equiprobables, puesto que ninguna razón podría dar cuenta de la diferencia de sus probabilidades; lo que nos conduce a suponer que nada carece de razón.*[11]

La crítica de *Hans Reichenbach* se concreta sobre este principio de indiferencia que es el fundamento de toda determinación a priori de la probabilidad: no tenemos ninguna razón para favorecer ninguna de las caras del dado, por lo tanto son equiprobables.

> *Algunos autores presentan el argumento con un disfraz proporcionado por el concepto de equiposibilidad: los casos que satisfacen el principio de "no razón para lo contrario" se dicen equiposibles y, por lo tanto, equiprobables. Esta adición ciertamente no mejora el argumento, aunque haya tenido su origen en un matemático tan eminente como Laplace, puesto que obviamente representa un círculo vicioso. Equiposible es equivalente a equiprobable.*

Además la inferencia es falaz, pues la ausencia de razón para lo contrario no puede garantizar la igual probabilidad.

> *La ausencia de razón para lo contrario es una condición*

> *de nuestro conocimiento; la equiprobabilidad es una condición que se cumple para objetos físicos. ¿Por qué un suceso físico habría de seguir la dirección de la ignorancia humana? Quizá no tengamos razón para preferir una cara del dado a la otra; pero entonces tampoco tenemos razón para suponer que las caras son igualmente probables. Transformar la ausencia de razón en una razón positiva representa una proeza del arte oratorio digna de una abogado defensor, pero no es tolerable en la corte lógica.*[12]

La razón del éxito perdurable de la definición de *Laplace* estaría en el caracter doble de la probabilidad. Las probabilidades aleatorias tienen que ver con el estado físico de las monedas o de los seres humanos. Las probabilidades epistemológicas conciernen a nuestro conocimiento.

Hacking, al analizar el término posibilidad, distingue entre dos construcciones gramaticales: posible que y posible para. "Posible que" se refiere a nuestro estado de conocimiento, es algo de caracter epistemológico. "Posible para" dice que algo es físicamente posible e independiente de nuestro conocimiento de ello. Pero también en otras lenguas, como el alemán, sucede algo semejante. *Hacking* cita a *von Mises*:

> *El lenguaje ordinario reconoce diferentes grados de posibilidad o realizabilidad. Un suceso se puede llamar posible o imposible, pero también se le puede decir muy o poco posible (schwer oder leicht möglich), según la cantidad de esfuerzo que debe hacerse para llevarlo a cabo. Es sólo poco*

posible escribir a mano 40 palabras por minuto; es imposible escribir 120. No obstante es muy posible hacerlo usando una máquina de escribir... En este sentido decimos que dos sucesos son igualmente posibles si requieren el mismo esfuerzo para producir cada uno de ellos. Esto es lo que Jacques Bernouilli, un precursor de Laplace, llamó quod pari facilitate mihi obtingeri possit... Pero esto no es lo que quiere decir la definición de Laplace. Podemos decir que un suceso es "más posible" (eher möglich) que otro cuando deseamos expresar nuestra conjetura sobre cualquier cosa que se pueda esperar que suceda. No puede haber duda de que la equiposibilidad, tal como se utiliza en la definición clásica de probabilidad, debe entenderse en este sentido, en tanto denota conjeturas igualmente garantizadas.[13]

En lo que respecta a la probabilidad aleatoria se han utilizado diferentes términos para señalar la equiprobabilidad. *Cardano* utilizaba el término aristotélico de potentia, o poder de un suceso para acontecer. *Galileo* hablaba de los sucesos que se daban con igual facilidad, utilizando la palabra latina facile. Otro de los términos utilizados era proclividad. *Huygens* utiliza los dos, facile y proclivi. *Bernouilli* utilizaba facilidad, proclividad y posibilidad como casi sinónimos. Este autor toma el término equiposibilidad de *Leibniz*, que lo había asociado con probabilidad. En su memoria De incerti aestimatione, de 1676, *Leibniz* afirma que la probabilidad es el grado de posibilidad. Esta sería la fuente última de la definición laplaciana de probabilidad. *Leibniz* intenta en este escrito justificar la solución del problema de la división que en esa fecha ya estaba resuelto. Justificaría así el uso de la esperanza matemática para calcular las cantidades equitativas a repartir a cada jugador cuando el juego se interrumpe.

Para *Leibniz* el problema de la división es una parte de la jurisprudencia, al determinar los derechos de los diversos litigantes. *Huygens* no se preguntaba qué es lo que hace que una lotería sea equitativa, *Leibniz* sí, y profundizaba más en los fundamentos. Su conclusión, dice, puede alcanzarse por dos caminos: en su primera argumentación emplea una versión del principio de indiferencia (término acuñado por *Keynes* en su tratado sobre probabilidad, 1921), cuya versión más antigua era, como hemos dicho, un principio negativo de razón suficiente (o de razón insuficiente, como dice *von Kries* en su libro de 1871). *Leibniz* establece el principio o criterio general de indiferencia, que parece ser un criterio epistemológico, pues utiliza los términos aestimatione y opinio. Por otra parte, afirma que "la probabilidad es un grado de posibilidad" y da una indicación de lo que entiende por posibilidad hablando de varios sucesos aeque faciles seu aeque possibiles, esto es, "igualmente fáciles, es decir, igualmente posibles." Más tarde matizará esta "facilidad" interpretando facil como factible (faisable, en francés), pues son palabras con la misma raiz latina, faciendo. En otro lugar dice que facile es lo muy posible, es decir, que requiere poco para ser conducido a la existencia.

Esos grados de posibilidad a que *Leibniz* alude deben ser también objeto de conocimiento, deben ser conocidos con grados variables de precisión. *Leibniz* se inclinó a veces por decir que debíamos determinar esos grados a priori, pero *Bernouilli* le convenció de que hay ocasiones en que sólo podremos informarnos de ello a posteriori. En esos casos,

> *Todavía se estiman las verosimilitudes (vraisemblances) a posteriori, por la experiencia, y se debe recurrir a ellas a falta de razones a priori. Por ejemplo, es igualmente posible (vraisemblable) que un niño nazca varón o hembra, porque el número de varones y hembras es casi igual en todo el mundo. Se puede decir que lo que sucede más a menudo es más o menos factible (faisable) en el presente estado de cosas, reuniendo todas las consideraciones que deben concurrir en la producción de un hecho.*[14]

Aquí encontramos ya el inicio de la idea de frecuencia relativa con la que se dan los diferentes resultados de un experimento y también la tendencia o propensión determinada por el "presente estado de cosas".

Leibniz alude a veces a una noción epistemológica y otras veces a una noción aleatoria, y las relaciones entre ellas diciendo: *quod facile est in re, id probabilie est in mente.*[15] La probabilidad es pues un grado de certeza, no física, sino epistemológica.

Lagrange, en 1770, utiliza esos términos de manera muy clara. En su libro sobre errores, facilité denota la propensión o tendencia física a dar errores de magnitud variable y le interesa inferir, de una ley conocida de esa facilidad de error y de un conjunto dado de observaciones, la probabilidad de que una cantidad desconocida se encuentre en un intervalo dado.

Por fin, en su Ensayo filosófico sobre las probabilidades, publicado en 1814, poco después de su Teoría analítica de las probabilidades, *Laplace* nos proporciona la definición que se ha hecho clásica. El propósito del Ensayo es *exponer, sin el apoyo del análisis, los principios y resultados generales de esta teoría; aplicándolos a las cuestiones más importantes de la vida, que no son en efecto, en su mayor parte, sino problemas de probabilidad.*[15]

La ignorancia estaría a la base del azar:

> *Todos los sucesos, incluso aquellos que por su pequeñez no parecen obedecer las grandes leyes de la naturaleza, son una consecuencia de ellas y tan necesaria como las revoluciones del sol. En la ignorancia de los lazos que los unen al sistema entero del universo, se les ha hecho depender de las causas finales o del azar, según que aconteciesen y se sucediesen con regularidad o sin orden aparente; pero estas causas imaginarias han ido retrocediendo sucesivamente con los límites de nuestro conocimiento y desaparecen por entero ante la sana filosofía que no ve en ellas más que la expresión de la ignorancia en que estamos de las verdaderas causas.*[16]

Por tanto, ante los sucesos sin orden aparente, llamamos azar a un cierto grado de nuestra ignorancia. Y de ahí surge el concepto de probabilidad:

> *La probabilidad es relativa en parte a esta ignorancia y en parte a nuestros conocimientos.*[17]

Algo podemos conocer, y es cuándo ninguno, entre varios sucesos, tiene prioridad para realizarse; es decir que podemos identificar y clasificar los sucesos del mismo género. La definición de *Laplace* es exactamente como sigue:

> *La teoría de los azares (hasards) consiste en reducir todos los sucesos del mismo género a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que nos encontremos igualmente indecisos sobre su existencia; y en determinar el número de casos favorables al suceso cuya probabilidad se busca. La razón de este número al de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es por tanto sino una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles.*[18]

Laplace establece también el límite superior bajo el cual se situan los valores de esa fracción:

> *Cuando todos los casos son favorables a un suceso, su probabilidad se transforma en certeza y su expresión se hace igual a la unidad. Desde este punto de vista, certeza y probabilidad son comparables, si bien hay una diferencia esencial entre los dos estados de ánimo cuando una verdad le ha sido rigurosamente demostrada o cuando percibe una pequeña fuente de error.*[19]

En los casos intermedios, es decir, en las cosas que no son más que probables (vraisemblables), la diferencia en los datos que cada hombre tiene de ellas es una de las causas principales de la diversidad de opiniones que, según se ve, reina entre los mismos objetos. Este es el problema que se le presenta a la probabilidad siempre que se considera epistemológicamente.

Laplace enumera a continuación los principios fundamentales de su Cálculo de Probabilidades, distinguiendo los sucesos independientes y dependientes, la probabilidad condicionada, y también estudia los casos en que se trata de conocer la probabilidad de sucesos futuros en función de la probabilidad de cada una de sus causas y se plantea la situación que dió origen al teorema de *Bayes* , en 1763, la predicción de la composición de una urna de la que se han extraido ya algunas bolas.

Más adelante, *Laplace* introduce la noción de esperanza matemática, de la siguiente manera:

> *La probabilidad de los sucesos sirve para determinar la esperanza o el temor de las personas interesadas en la existencia de aquellos. La palabra esperanza tiene diversas acepciones: expresa generalmente la ventaja de aquel que espera un bien cualquiera mediante suposiciones que no son más que probables. Esta ventaja, en la teoría del azar, es el producto de la suma esperada por la probabilidad de obtenerla: es la suma parcial que debe recuperarse cuando no se quieren*

correr los riesgos del suceso, suponiendo que el reparto se haga proporcionalmente a las probabilidades. Este reparto es el único equitativo, cuando se hace abstracción de todas las circunstancias extrañas; porque con un grado igual de probabilidad se tiene un derecho igual sobre la suma esperada. Llamaremos a esta ventaja esperanza matemática.[20]

Posteriormente, *Laplace* hace un estudio de las aplicaciones del Cálculo de Probabilidades, comenzando por los juegos, que fueron también su origen, como ya hemos mencionado repetidas veces, continuando con las leyes de la probabilidad que resultan de la multiplicación indefinida de los sucesos, la investigación de los fenómenos y de sus causas, los términos medios que hay que elegir entre los resultados de un gran número de observaciones, las tablas de mortalidad, la duración media de la vida, los matrimonios y asociaciones cualesquiera, los beneficios y las pérdidas que dependen de la probabilidad de los sucesos de las elecciones y de las decisiones de las asambleas, de las ilusiones en la estimación de la probabilidad y los diversos medios de aproximarse a la certeza. La obra de *Laplace* termina con un resumen de la historia del cálculo de probabilidades hasta su tiempo. En ella insiste en la idea de que su comienzo tiene lugar con *Pascal* y *Fermat*.

En resumen, este autor sostiene que, estando el mundo determinado como lo está, no puede haber probabilidad en las cosas; las fracciones de probabilidad surgen de la mezcla entre nuestro conocimiento y nuestra ignorancia. Se trata de casos que son para nosotros igualmente posibles. Su probabilidad sería pues un concepto puramente epistemológico.

Pero, cuando habla de la probabilidad de las causas, está infiriendo, de los datos observados, una distribución de probabilidad desconocida; se trata de una distribución de causas y se quiere descubrir la verdadera distribución. *Laplace* dice que cuantos más datos experimentales se recogen, mejor conocida es la verdadera probabilidad. Es decir, que se trata de descubrir un grado de probabilidad desconocido. Y por lo tanto, los casos igualmente posibles de dicto son aquellos que sabemos son iguales porque sabemos que son igualmente posibles en re, es decir, en sus características físicas. El mismo *Laplace* es equívoco y subraya unas veces el aspecto epistemológico y otras el aleatorio u objetivo de la probabilidad.

La idea de equiposibilidad es una creación de *Leibniz*, y ella le permitió concebir la probabilidad como una parte integrante de su metafísica y su epistemología. De ese modo se inició lo que más tarde se llamaría Lógica Inductiva, con autores como *Keynes*, *Jeffreys* o *Carnap*.

Como ya hemos señalado, *Leibniz* pensaba que la ciencia de la probabilidad era "un nuevo tipo de lógica", pero esta idea quedó sin recoger hasta 1920. Más tarde, en 1940, *Carnap* estableció su programa, considerado como clásico para la Lógica Inductiva y que desarrolla así:

I.- Todo razonamiento inductivo, en el sentido de no deductivo o no demostrativo, es un razonamiento en términos de probabilidad.

II.- Por tanto la lógica inductiva, la teoría de los principios del razonamiento inductivo, es lo mismo que la lógica de la probabilidad.

III.- El concepto de probabilidad sobre el que debe basarse la lógica inductiva es una relación lógica entre dos proposiciones; es el grado de confirmación de una hipótesis (o conclusión) sobre las bases de alguna evidencia (o premisas) dadas.

IV.- El llamado concepto de frecuencia de probabilidad, tal como se usa en las investigaciones estadísticas, es un importante concepto científico por derecho propio, pero no es adecuado para el concepto básico de la lógica inductiva.

V.- Todos los principios y teorías de la lógica inductiva son analíticos.

VI.- Por lo tanto, la validez del razonamiento inductivo no depende de ningún supuesto sintético, como el debatido principio de uniformidad del mundo.

Hay dos conceptos fundamentales de probabilidad y ambos son importantes para la ciencia. Ambos son objetivos para este autor.

I.- La probabilidad es el grado de confirmación de una hipótesis *h* con respecto a una proposición evidente *e*, por ejemplo, un informe de una observación. Este es un concepto lógico, semántico. Una sentencia sobre este concepto se basa, no sobre la observación de los hechos, sino sobre el análisis lógico; si es verdadero, es L-verdadero (analítico).

II.- La probabilidad es la frecuencia relativa de una propiedad de los sucesos o de las cosas con respecto a otra. Una sentencia sobre este concepto es fáctica, empírica.[21]

También distingue *Carnap* el concepto clásico de probabilidad, definido por *Laplace y Bernouilli.* La definición I sería la sostenida por *Keynes y Jeffrey,* una relación lógica objetiva entre proposiciones. La definición II es la frecuencia relativa de *von Mises, Reichenbach,* etc.

Carnap formaliza estas definiciones al modo moderno, como funciones de dos argumentos, cuyos valores son números reales del intervalo (0,1). Pero ya *Leibniz* decía que siempre podemos estimar qué sucesos, bajo unas circunstancias dadas, pueden esperarse con mayor probabilidad:

> *Nam etiam probabilitates calculo ac demonstrationi subjiciuntur, cum aestimari semper possit, qodnam ex datis circumstantiis probabilius sit futurum.*[22]

Esta relación general es además <u>formal</u>: sólo depende de la forma y no del contenido de las sentencias en cuestión. Ese era precisamente el sueño de *Leibniz,* llegar a simbolizar cualquier sentencia mediante signos, de manera que en caso de discrepancia entre diversas teorías, o de discusión sobre determinada proposición, la solución sería, según su famosa frase, calculemos:

> *Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumare sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: calculemus.*[23]

Un aspecto de la lógica inductiva sobre el que *Jeffreys* y otros han insistido vehementemente es que las probabilidades inductivas son relativas a la evidencia. No podemos hablar de la probabilidad de p, sólo podemos referirnos a la probabilidad de p en relación con r. *Leibniz*, con la jurisprudencia por modelo, pensaba ya la probabilidad como relacional y objetiva.

Supongamos que nuestro universo del discurso puede ser representado mediante cierto conjunto de alternativas disjuntas, dice *Hacking*. Si podemos asignar probabilidades a priori al conjunto de alternativas sobre la base de algún dato t (como una evidencia tautológica) entonces podemos calcular la probabilidad a posteriori de cualquier suceso relativo a cualquier dato en el universo del discurso. Este fué el objetivo de *Carnap* y *Jeffreys* , desarrollar esas distribuciones a priori para distintos universos. En el caso de probabilidades a priori relativas a evidencias tautológicas, a un conjunto de posibilidades con la misma estructura formal se le asignará la misma probabilidad a priori:

Y nuestros campesinos se han servido de ello hace mucho tiempo siguiendo su matemática natural. Por ejemplo, cuando hay que vender alguna herencia o tierra, ellos forman tres bandas de estimadores; estas bandas se llaman Schurzen en bajo sajón, y cada banda hace una estimación del bien en cuestión. Supuesto que una estima el valor en 1000 escudos, la otra en 1400, la tercera en 1500, se toma la suma de las tres estimaciones, que es 3900, y como había tres bandas se toma el tercio que es 1300 como valor medio; o bien lo que es lo mismo, se toma la suma de las terceras partes de cada estimación. Es el axioma aequalibus aequalia, para suposiciones iguales tiene que haber consideraciones iguales.[24]

Desgraciadamente no es facil saber cuándo son iguales los supuestos, es decir, cuáles son los casos igualmente probables en el caso de la lógica inductiva. Ya vimos que en el caso de los datos empíricos pasaba lo mismo. Los electrones obedecen las leyes de Fermi-Dirac, los fotones las de Bose-Eistein y los dados las de Maxwell-Boltzmann. *Carnap*, para los casos más simples, es partidario de una función de probabilidad c*, basada sobre las estadísticas de Bose-Einstein, que asignan igual probabilidad a cada partición u ordenación, y establece también un continuo de probabilidades a priori del que excluye sólo las probabilidades de Maxwell-Boltzmann, porque no permiten el aprendizaje a partir de la experiencia. No obstante, no hay un buen método para elegir las probabilidades a priori.

Actualmente se piensa que la propensión (aleatoria o física) a existir de alguna posibilidad, sólo se da para un pequeño número de sucesos, pero la opinión de *Leibniz* es que toda posibilidad tiene propensión a existir. Según él todo mundo posible tiene alguna tendencia a existir y nuestro mundo, el realmente existente, es aquel con la mayor propensión, el mejor de los mundos posibles.

Posible, para *Leibniz*, significa internamente coherente. Fué el primer pensador moderno que comprendió que la demostración es una cuestión formal, ligada a la forma de las sentencias y no a su contenido. Algo es necesariamente verdadero si es demostrable mediante identidades en un número finito de pasos. En la creación o "radical originación de las cosas", los objetos posibles luchan o compiten por la existencia: lo posible reclama la existencia por su misma naturaleza en proporción a su posibilidad, es decir, a su grado de esencia.

La metafísica de *Leibniz* y su teoría de la probabilidad se corresponden isomórficamente. Lo que es facil <u>in re</u> se corresponde con lo que es probable <u>in mente</u>. En la metafísica, Dios no está eligiendo entre descripciones internamente no contradictorias aquella que describe un mundo más perfecto, el papel de Dios es concebir las posibilidades, y el grado de posibilidad es precisamente la probabilidad, luego aquellas cosas cuyo grado de posibilidad sea mayor en la mente de Dios serán las que accederán a la existencia. De forma semejante, en nuestro mundo, las propensiones o tendencias objetivas a suceder de los diferentes resultados son el fundamento de nuestras expectativas mentales, las probabilidades.

Leibniz combina los dos aspectos de la probabilidad, por un lado la probabilidad como relación entre hipótesis y evidencia, y por el otro, como expresión de propensiones físicas.

La Característica Universal, que está basada sobre ideas simples, nos permitiría establecer un conjunto de alternativas que formarían "un conjunto fundamental de probabilidad", al que podemos aplicar una distribución uniforme de probabilidades a priori. Sabemos por la metafísica que todo elemento tiene una propensión a existir; como nuestro conocimiento es finito, sólo podemos asignar a cada elemento la misma probabilidad a priori, pero lentamente iremos corrigiendo esa distribución uniforme y, a medida que sepamos más, nuestras asignaciones de probabilidad tenderán asintóticamente a un máximo para el mundo real, es decir, para las posibilidades con mayor propensión. Así pues *Leibniz* no creía que la Característica estuviera fijada a priori, sino que habría que irla modificando continuamente, ajustándola a medida que nuestro conocimiento aumentase.

En resumen, para *Leibniz* existe una distribución objetivamente correcta de las probabilidades a priori para un conjunto de posibilidades dado. Esa distribución es la que corresponde a la propensión a existir de cada posibilidad. Esa posibilidad o, mejor dicho, la facilidad que tiene una posibilidad para acceder a la existencia es lo que *Leibniz* llama Arte de Conjeturar:

> *El arte de conjeturar está fundado sobre lo que es más o menos facil, o bien más o menos factible, pues el latín* *facilis* *derivado* *a faciendo* *quiere decir factible (faisable) literalmente: por ejemplo, con dos dados, es igualmente factible obtener doce puntos que obtener once, pues lo uno y lo otro sólo puede hacerse de una manera; pero es tres veces más factible obtener siete, porque ello se puede hacer obteniendo 6 y 1, 5 y 2, 4 y 3 y aquí una combinación es tan factible como la otra... El señor Bernouilli ha cultivado esta materia siguiendo mis exhortaciones. Todavía se estiman las verosimilitudes* *a posteriori*, *por la experiencia, y se debe recurrir a ellas a falta de razones* *a priori*: *por ejemplo, es igualmente verosimil que el niño que debe nacer sea varón o hembra, porque el número de niños y niñas viene a ser casi igual en este mundo. Se puede decir que lo que se hace más o menos es también lo más o menos factible en el presente estado de cosas, poniendo juntas todas las consideraciones que deben concurrir en la producción de un hecho.*[25]

Jacques Bernouilli escribió su Ars Conjectandi durante veinte años, y nunca lo publicó. Después de su muerte, en 1705, su sobrino Nicholas lo editó en Basilea, en 1713. El libro contiene las innovaciones conceptuales más decisivas en la primera historia de la probabilidad.

Aunque *Bernouilli* es conocido como el padre de la concepción subjetiva de la probabilidad, casi todas las escuelas lo reclaman para sí. Su Ars Conjectandi tiene cuatro partes, la primera es una versión perfeccionada del libro de *Huygens* sobre juegos de azar. *Bernouilli* tenía el don de las explicaciones claras y los ejemplos intuitivos. El fué quien determinó la ley de la adición de las probabilidades, aclarando que sólo es válida para sucesos disjuntos y para ello propone el siguiente ejemplo:

> *Si a dos personas sentenciadas a muerte se les ordena lanzar los dados con la condición de que quien saque el menor número de puntos será ejecutado, mientras el que saque el número mayor será perdonado, y ambos serán perdonados si el número de puntos es el mismo, hallamos que la esperanza de uno de ellos es 7/12 (21/36)... de ello no se deduce que el otro tenga una esperanza de 5/12, pues es evidente que ambos tienen la misma chance, así pues el segundo hombre tiene una esperanza de 7/12, lo que daría para ambos una esperanza de 7/6, es decir, más de una vida completa. La razón es que no existe un suceso en el que no se salve al menos uno de los dos, mientras que hay varios en los que ambos son perdonados.*[26]

En la segunda parte del libro se plantea un estudio general sobre teoría de combinaciones. En la tercera parte propone y resuelve algunos problemas de juegos de azar, con gran elegancia y generalidad. Pero la cuarta parte es la más importante, en ella se formula por primera vez una concepción subjetiva de la probabilidad y se demuestra el primer teorema del límite, la famosa ley de los grandes números.

En esta parte IV se intenta mostrar la aplicación de la probabilidad matemática a cuestiones sociales: temas de economía, moral y política. Se trataría pues de una continuación de la Lógica de Port Royal y de su Ars Cogitandi. Tras el arte de pensar comenzaría el arte de conjeturar.

Las investigaciones matemáticas no progresan sólo por relación con las doctrinas anteriores, sino que se hacen a partir de ellas, se las apropian, las integran transformándolas. Así sucede con *Huygens* visto por *Bernouilli* y también sucede con el Teorema de Bernouilli que hoy en día es citado con una formulación y una demostración que no son en absoluto las del autor. *Bernouilli* transforma las demostraciones de *Huygens* haciéndolas más rápidas y sencillas y con frecuencia generalizándolas.

Es una ventaja para el desarrollo de una teoría matemática el variar los enunciados de una misma situación, de un mismo problema, de una misma solución. Además *Bernouilli* efectua relaciones intra-matemáticas: entre las estructuras probabilística y aritmética, hace un empleo frecuente de los coeficientes del binomio, de las soluciones gráficas, de los logaritmos, etc.

El concepto de Probabilidad lo define así:"La probabilidad es el grado de certeza y difiere de la certeza absoluta como la parte difiere del todo". Esta noción de grado de certeza se encuentra ya en *Leibniz* (De aestimatione, 1678) que, como hemos dicho, estuvo en relación con Jacques y con su hermano John. La originalidad de *Bernouilli* consiste en ver lo que la noción de certeza implica para la probabilidad. Considera que la certeza es de dos tipos: objetiva y subjetiva. Cualquier cosa que va a ocurrir es ya objetivamente cierta. La omnisciencia y omnipotencia del Creador garantiza la certeza objetiva absoluta que se deriva de las causas primeras.

Nuestros juicios individuales sobre la certeza contrastan con la certeza objetiva. Un suceso es cierto en relación con un conjunto dado de información, si es imposible que la información sea correcta y a la vez el suceso no se produzca. La probabilidad es el grado de este tipo de certeza. Una certeza completa de esta clase se puede obtener a través de la demostración o de la observación directa. A veces casi podemos lograr una certeza subjetiva completa. Entonces tenemos certeza moral. Ya *Leibniz* había hablado de lo que es infinitamente probable o moralmente cierto. *Bernouilli* habla además de la certeza infinitamente pequeña, que sería lo mismo que imposibilidad moral.

El subjetivismo de *Bernouilli* es menos el del punto de vista personalista que el de los físicos. *Heisenberg* dice: "la función de probabilidad contiene el elemento objetivo de la tendencia y el elemento subjetivo del conocimiento incompleto", cuando escribe acerca de un aspecto esencial de la teoría cuántica. Las afirmaciones de probabilidad acerca de un sistema en un compuesto dependen de las "afirmaciones acerca de nuestro conocimiento del sistema, que por supuesto son subjetivas". Subjetivas sí, pero no mero objeto de opinión, pues esas llamadas probabilidades subjetivas pueden todavía ser comprobadas repitiendo el experimento muchas veces.

De Finetti se refiere a algo distinto, considera las probabilidades subjetivas como un indicador de grados de creencia puramente personales. Las probabilidades son desconocidas en tanto yo puedo no conocer mi propia mente.

Una teoría intermedia es la probabilidad lógica o inductiva, según la cual cualquier cuerpo de evidencia E determina unívocamente una probabilidad para una hipótesis h. Esto se representa como una función c(h,E) que significa el grado en el que E confirma h.

Bernouilli estaba interesado en estimar las probabilidades aleatorias desconocidas. También deseaba saber lo seguro que se podía estar de cualquier proposición acerca de probabilidades aleatorias, aunque no llegó a plantear el tema de la probabilidad (epistemológica) de la probabilidad aleatoria.

El problema básico de esta parte cuarta del libro es cómo combinar evidencias de diferentes tipos, En los modelos simplificados de juegos de azar existe un conjunto fundamental de probabilidad de casos igualmente probables. En la vida real tenemos una variedad de evidencias, unas a favor de una opinión dada y otras en contra. Incluso hoy no hay una buena manera de combinar diferentes tipos de evidencia en una sola proposición sobre probabilidad. El problema real de la probabilidad epistemológica es precisamente éste de combinar tipos de evidencia, pero *Bernouilli* no lo consiguió. Adopta un modelo y lo explica utilizando la terminología de sucesos contingentes y necesarios: una proposición se llama necesaria en relación con nuestro conocimiento cuando su contraria es incompatible con lo que sabemos. Es contingente si no hay contradicción con lo que sabemos.

Exceptuando algunas situaciones muy particulares, *Bernouilli* dice que las probabilidades pueden aplicarse aproximadamente a la realidad cuando la infinitud de una serie de elementos tiende a borrar las diferencias interindividuales.

Utiliza también los conceptos de suceso puro o simple y suceso mixto o compuesto, que se entrelazan con los de contingente y necesario. Él ve claramente que las probabilidades derivadas de la evidencia compuesta o mixta son aditivas. Las frecuencias también son aditivas, esto es, la frecuencia relativa de dos sucesos mutuamente excluyentes dentro de una clase de referencia es la suma de sus frecuencias individuales.

Las probabilidades no son grados de creencia, sino grados de certeza. Así, incluso si tenemos sucesos A y B, disjuntos, la probabilidad de A o B no tiene por qué ser la suma de las probabilidades de A y de B. Aún es más sorprendente que la probabilidad de A y de su contrario puedan ambas exceder de 1/2:

> *Si además de los argumentos que cuentan a favor de una cosa, se presentan otros argumentos puros que indican lo opuesto de la cosa, los argumentos de ambos tipos deben ser sopesados separadamente de acuerdo con las reglas precedentes, de forma que se pueda obtener una razón entre la probabilidad de la cosa y la probabilidad del opuesto de la misma. Aquí se debe notar que si los argumentos de cada lado son suficientemente fuertes, puede suceder que la probabilidad absoluta de cada lado exceda notablemente a la mitad de la certeza. Así, cada una de las alternativas es probable, aunque hablando relativamente una pueda serlo menos que la otra. De modo que puede suceder que una cosa posea 2/3 de certeza y su opuesta posea 3/4 de certeza. De esta manera cada una de las alternativas será probable, pero no obstante la cosa será menos probable que su opuesta, en razón de 2/3 a 3/4 o de 8 a 9.* [27]

Vemos que, aunque no desarrollado, el problema planteado por *Bernouilli* es importantísimo. También plantea los problemas que resultan de los teoremas de adición y producto de probabilidades, es decir de sucesos compatibles e independientes.

La parte IV del Ars Conjectandi: "Usum & Applicationem Praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis", además de las aplicaciones a las que alude el título, demuestra el primer teorema del límite. Su importancia es enorme en la Teoría de la Probabilidad. La interpretación de este resultado es todavía materia de controversia, pero su base matemática, lo que *Bernouilli* demostró efectivamente, no se discute. Parte de una situación de probabilidad en la que se efectuan pruebas repetidas. Es necesario pues que la repetición del experimento sea posible. Hay una probabilidad p, constante y desconocida de éxito S en cualquier prueba dada. Cuando se han efectuado n pruebas, se observa una proporción de éxitos S_n. *Bernouilli* parte por lo tanto de la variable aleatoria S_n/n, frecuencia del suceso A, de probabilidad p, en n pruebas independientes, que puede tomar los valores

$$r/n \qquad \text{para} \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots\ n$$

con probabilidades

$$p_r = \binom{n}{r} \; p^r \, q^{n-r}$$

según la ley binomial, también debida a *Bernouilli*.

Resulta entonces que, dados ε, α positivos y arbitrariamente pequeños, se puede fijar

$$n > \frac{pq}{\alpha\,\varepsilon^2}$$

de modo que

$$\Pr \left\{ \left| S_n/n - p \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \alpha$$

Es decir, que hay una probabilidad tan próxima a 1 como queramos de que, tomando n suficientemente grande pero fijo, sea

$$| S_n/n - p | < \varepsilon$$

Si convenimos en considerar como un suceso "prácticamente seguro" al suceso de probabilidad $1 - \alpha$, podremos decir que, como consecuencia del Teorema, el suceso

$$| S_n/n - p | < \varepsilon$$

en que S_n es el número de veces que se realiza A en una serie de n pruebas, es prácticamente seguro para

$$n > \frac{pq}{\alpha \, \varepsilon^2}$$

Esto viene a dar una cierta precisión a la ley de la estabilidad de las frecuencias o ley de los grandes números.

Además, para cualquier error dado ε , demuestra cómo computar un número n tal que la probabilidad de obtener S_n en el intervalo $[p - \varepsilon , p + \varepsilon]$ es mayor que cualquier probabilidad dada $1 - \alpha$. En particular, cuando $1 - \alpha$ es 0,999, tenemos una certeza moral de que S_n caerá en el intervalo fijado.

Se trata ahora de aplicar esta teoría matemática a las realidades sociales. Nuestra apreciación de un suceso depende de nuestros conocimientos; si éstos fueran suficientes, podríamos determinar por completo el futuro. El margen de incertidumbre disminuye progresivamente cuando el número de experiencias aumenta o bien tiende hacia un límite. Esto es lo que *Bernouilli* trata de determinar, pues en la práctica hace mucho que se sabe que las proporciones de casos observados en grandes números están más próximas a la exactitud que los observados en pequeñas cantidades.

La demostración de *Bernouilli* es larga y compleja y es un buen ejemplo de la distinción entre el razonamiento y la demostración matemática. El razonamiento dice que al aumentar el número de pruebas se tiende hacia una certeza moral. La diferencia entre la frecuencia real y la probabilidad matemática tiende a cero cuando el número de experiencias tiende a infinito.

La demostración de *Bernouilli* es sobre todo una consecuencia de sus anteriores investigaciones sobre combinatoria, pues procede sumando los términos medios en el desarrollo binomial. Es el inventor de la llamada distribución Binomial o Pruebas de Bernouilli. En este trabajo se muestra que para p dada, la proporción observada de éxitos, es decir S_n, tenderá a p cuando crece n. Supongamos que no conocemos p. *Bernouilli* introduce su teorema precisamente para aquellos casos en que no tenemos un conocimiento a priori de p. En la vida real encontramos regularidades estadísticas, pero no un conjunto fundamental de probabilidad o sistema completo de sucesos. Necesitamos pues un método para determinar el número de casos cuando la mera reflexión no basta. "Lo que no podemos deducir a priori podemos al menos deducirlo a posteriori", dice el autor. "Este método empírico de determinar el número de casos mediante pruebas no es nuevo ni poco usual, pues el celebrado autor del Ars Cogitandi prescribe un método similar en la última parte de su obra".

A pesar de que este método empírico de razonamiento sea familiar, aún quedan tres cosas que hacer. En primer lugar, debe probarse que el método es válido "a partir de los primeros principios", en segundo lugar, debemos descubrir si hay un límite superior para la certeza que se puede lograr de esta manera o si, cuando el número de pruebas aumenta, nos acercamos a una certeza moral. En tercer lugar debemos investigar el número efectivo de pruebas requerido para llegar a un nivel dado de certeza. Nuestras estimaciones además se encontrarán en un intervalo entre dos límites.

Bernouilli quiere estimar un parámetro desconocido p. Un estimador es una función F de los datos para los posibles valores del parámetro, en este caso, los valores posibles de p. *Bernouilli* usa un estimador de intervalo, que aplica datos dados sobre un conjunto de valores posibles de p que se encuentra entre dos límites.

El resultado de n pruebas, S_n, es una variable aleatoria. Para cualquier estimador F el valor estimado $F(S_n)$ es por tanto una variable aleatoria. Cuando F es un estimador de intervalo, los valores de $F(S_n)$ son intervalos que se espera contendrán la probabilidad desconocida p.Si F debe ser un estimador informativo, útil, debemos esperar que los intervalos $F(S_n)$ sean bastante pequeños. *Bernouilli* considera estimadores que estiman la p desconocida en algún intervalo pequeño del S_n observado.

No podemos conseguir un estimador informativo que sea correcto con certeza. No obstante parece natural pedir que F dé usualmente la respuesta correcta. Por tanto, muy frecuentemente las n pruebas sobre nuestro espacio de probabilidades darán resultados S_n tales que $F(S_n)$ incluye el parámetro desconocido verdadero.

También parece natural pedir que, para cualquier resultado particular r, si observamos r y no conocemos nada más acerca del espacio (y por lo tanto estimamos p mediante F(r)) entonces, a la luz de este resultado r, podamos estar muy seguros de que p está en F(r).

Pero estos dos desideratum no son equivalentes necesariamente. Parece razonable pedir que un estimador sea usualmente exacto, también parece razonable requerir que nuestro estimador sea digno de crédito en cada ocasión que se utilice. Un estimador puede ser usualmente exacto pero no ser creible en todas las ocasiones.

El mismo *Bernouilli* es ambiguo, según el análisis de *Hacking*. Quiere conocer el número n tal que podamos estar moralmente seguros de que nuestro valor estimado de p es casi exacto. Pero si comparamos estas dos proposiciones: a) si efectuo n pruebas estoy moralmente seguro de que mi estimador dará la respuesta correcta, b) habiendo hecho n pruebas y observado S_n estoy moralmente seguro de que mi valor estimado $F(S_n)$ es correcto; el primer caso se refiere a las virtudes de un estimador antes de las pruebas y el segundo se refiere a la evaluación después de la prueba. En el primer caso, el criterio de ser usualmente correcto puede ser suficiente, pero para la evaluación después de la prueba necesitaremos un estimador que sea fiable en cada ocasión en que se utilice. Parece que *Bernouilli* estuvo interesado sólo en la evaluación previa a los experimentos.

En resumen, *Bernouilli* es capaz de calcular, para cualquier valor dado de p desconocido, la probabilidad de obtener un S_n tal que $F(S_n)$ incluye ese valor de p. Esta sería una probabilidad de estar en lo cierto o de tener razón. El lo expresa así: "Sin tener en cuenta al valor verdadero de p, la probabilidad de que un valor estimado $F(S_n)$ incluya el valor verdadero es al menos $1 - \alpha$ ".

Cuando ε es suficientemente grande para que α sea pequeño, se puede concluir que el estimador F es usualmente exacto y por lo tanto bueno para la estimación previa al experimento.

Bernouilli muestra que, cuando la proporción observada de caras en n lanzamientos de una moneda es S_n, debe haber una gran probabilidad de obtener S_n si la verdadera probabilidad desconocida de obtener cara es cercana a S_n. Pero hay infinitas hipótesis arbitrarias sobre las que S_n sería igualmente probable. Esta es una dificultad tradicional que surge regularmente. La respuesta de *Bernouilli* es que, en caso de duda, se escoja la hipótesis más sencilla.

El propio *Bernoulli* era consciente de la importancia de este teorema, al que llamaba su teorema aúreo:

Este es pues el problema que ahora deseo publicar aquí, habiéndolo considerado profundamente durante veinte años, y es un problema cuya novedad, así como su gran utilidad, junto con su grave dificultad, exceden en peso y valor a todos los restantes capítulos de mi doctrina.[28]

El argumento se desarrolla en líneas generales así: Si r/t se considera como la probabilidad de un suceso en una sola prueba o ensayo y s/t es su complementario, la suma de los 2n+1 términos centrales será proporcional a la probabilidad de que en nt pruebas el número de veces que el suceso se cumple estará ente nr-n y nr+n. Por tanto, la razón de los límites de ese suceso para el número total de pruebas será (r-1)/t y (r+1)/t; ahora se elige n convenientemente. Por ejemplo, para r = 30, s = 20, r+s = t = 50; y para una probabilidad de 999/1000 de que la razón del número de veces que el suceso aparece respecto al número total de sucesos está entre 31/50 y 29/50, es suficiente con hacer 25.500 pruebas. Hasta aquí se trata de una probabilidad directa, pero ahora intenta darle la vuelta al argumento: supongamos una urna con bolas negras y blancas en la proporción de 3 blancas para 2 negras. Si el muestreo es con reemplazamiento y hacemos 25.500 pruebas de extraer una única bola, devolviendo la bola después de cada prueba, sólo hay una probabilidad de $1/10^3$ de que la proporción de bolas blancas observada se encuentre fuera de los límites 29/50 y 31/50. Supongamos ahora que no se conoce la composición de colores dentro de la urna. Se hace como antes un gran número de pruebas sin reemplazamiento, con el resultado de que se extrae bola blanca R veces y bola negra S veces. Se infiere entonces que la proporción de bolas blancas es R/(R+S). Esta inferencia era justificada por *Bernouilli* con una apelación al destino:

> *Si se pudieran repetir así los sucesos por toda la eternidad, llegando por ese medio de la probabilidad a la certeza, nos encontraríamos con que todas las cosas en el mundo suceden por causas determinadas y de acuerdo con reglas determinadas y que nos veríamos forzados a aceptar una cierta necesidad entre las cosas más aparentemente fortuitas, o por así decir, una fatalidad. Yo no sé si Platón en su teoría sobre la circulación de las cosas quería aludir a esto cuando predecía que en el curso de innumerables siglos todo revierte a su original estado.*[29]

Notas

1.- LEIBNIZ, W.: Preceptes pour avancer les sciences. Philosophischen Schriften, Band 7, IX, p.167 (ed Gerhardt).

2.- LEIBNIZ, W.: Carta a Thomas Burnett. Philosophischen Schriften, Band 3, VII, p.194 (ed. Gerhardt).

3.- LEIBNIZ, W.; Nouveaux Essais sur l'Entendement par l'Auteur du Système de l'Harmonie Preestablie. Livre IV, Chap. XVI, 9, p.447 (ed. Gerhardt).

4.- HACKING, I.: The Emergence of Probability, cap. 10. p. 88

5.- (v. nota 1)

6.- HACKING, I.: The emergence of Probability, p. 96.

7.- SPINOZA: Oeuvres Complètes. Lettre XXXVIII, au très honoré Jean Van der Meer, Voorburg, 1er Octobre 1666, (p. 1196 ed. Gallimard 1954).

8.- HUYGENS: Van Rekeningh in Spelen van Geluck, ed. holandés-francés de F. van Schooten, Amsterdam, vol XIV de las Oeuvres Complètes, p.86-87.

9.- POINCARE: La science et l'hipothèse, cap. XI, ed Flammarion 1902.

10.- KASNER & NEWMAN: Les mathématiques et l'imagination, ed. francesa F. Le Lionnais, 1970, p. 164.

11.- BOUDOT, M.: Logique inductive et probabilité, chap. V, IIe partie, p. 115.

12.- REICHENBACH, H.: The Theory of Probability, ed. ingl. E. Hutten y M. Reichenbach, 1971, cap.9, p. 353.

13.- VON MISES, R.: Probability, Statistics and Truth, trad.

ingl. H. Geisinger, 1951, p. 78.

14.- LEIBNIZ: Carta a Bourguet de 22 de marzo de 1714 (Die philosophischen Schriften, Band 3, p. 570.)

15.- LEIBNIZ: Sämtliche Schriften und Briefen, IV, II, p.492 ed. Preussischen Akademie der W. Berlin.

16.- LAPLACE: Essai philosophique sur les probabilités, 1814, p. 1.

17.- Ibid p. 2.

18.- Ibid p. 4.

19.- Ibid, p.5.

20.- Ibid, p. 19.

22.- LEIBNIZ.- Sin título, sobre la Caracteristica Universalis. Die Philosophischen Schriften, 7, XI, p.188.

21.- CARNAP: Logical Foundations of Probability, 1950, p.15.

23.- LEIBNIZ: Ibid, XIV, p. 200.

24.- LEIBNIZ: Nouveaux Essais, IV, XVI, 9. Die philosophischen Schriften, 5, p. 447.

25.- LEIBNIZ: Carta a Bourguet de 22 de marzo 1714, Die philosophischen Schriften, 3, p. 569-70.

26.- BERNOUILLI: Ars Conjectandi, ed. Basel 1975, Werke, tomo III, Parte I, Propositio IV, Annotat. p.114.

27.- BERNOUILLI: Ibid, Parte IV, cap. III, 7., p. 246.

28.- BERNOUILLI: Ibid, Parte IV, cap. IV, p. 250.

29.- BERNOUILLI: Ibid, Parte IV, final de la obra, p.259.

261.bis

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En la Introducción, y en el capítulo acerca de la Prehistoria de la Probabilidad se planteaba ya el problema del origen del concepto de probabilidad en su formulación actual, es decir, en su doble caracter aleatorio y epistemológico, y se exponían las diversas razones que unos y otros autores proponen para su emergencia tardía, que puede además localizarse en una fecha concreta, la de 1660, por ser ese el momento en que se publica la primera alusión explícita a una probabilidad medible. No quiere ello decir que el concepto de probabilidad tenga un nacimiento concreto, puntual. Durante largo tiempo se habían ido gestando las condiciones previas, el ambiente, las ideas filosóficas y los adelantos matemáticos teóricos y de notación que confluyeron en el mismo.

"La noción de probabilidad desempeñó un papel primordial en el pensamiento humano sólo cuando se le pudo dar una expresión matemática y esa expresión matemática a su vez se abrió camino hasta el mismo corazón de las ciencias empíricas". Esta frase de *Burne* resume en nuestra opinión la mejor postura para comprender el nacimiento y desarrollo de la Teoría de la Probabilidad. En cuanto al por qué de ese interés de los hombres por el tema del azar, no parece necesario explicar la fascinación que siempre ejerce sobre los humanos lo desconocido, lo imprevisible. Los niños griegos que recibían un premio escolar consistente en un determinado número de astrágalos ya lo sabían. Las autoridades que prohibían el juego debido a los juramentos y blasfemias que los jugadores dejaban escapar en el calor de la pasión también lo comprendían así.

A los primeros intentos de exposición del problema durante la Edad Media sucede, a finales del siglo XV, el nuevo impulso de difusión que proporciona la imprenta. Gracias a esa difusión se conoce en ese momento la tradición aritmética griega.

Todas las civilizaciones han producido teóricos del número, pues este es un tema que ha fascinado a la humanidad. El documento más antiguo que se conserva sobre el tema es babilonio, y data de alrededor del 1900 a. de J.C. El desarrollo de la teoría de los números se ha producido en Europa a partir de la tradición griega. Alrededor del siglo IV surge la figura de *Diofanto* de Alejandría, cuya Aritmética ha sido el texto fundamental durante más de catorce siglos. Los problemas más complicados estaban planteados en esta obra y resueltos con mucha sagacidad y habilidad. Pero la ciencia avanzó muy lentamente desde entonces, hasta llegar a *Vieta* y a *Bachet*. Citando a *Legendre* podemos ver en líneas generales cuál fué el desarrollo posterior:

> *Vieta, añadiendo nuevos grados de perfección al álgebra, resolvió varios problemas difíciles sobre los números. Bachet, en su obra titulada Problemas entretenidos y deleitosos resolvió la ecuación indeterminada de primer grado por un método general y bastante ingenioso. A este mismo sabio se debe un excelente comentario sobre Diofanto, que fué después enriquecido con notas marginales de Fermat.*

Fermat, uno de los geómetras cuyos trabajos más contribuyeron a acelerar el descubrimiento de los nuevos cálculos, abrió rutas nuevas. Tenemos de él un gran número de teoremas interesantes, pero los ha dejado casi todos sin demostración. El espíritu de la época era proponerse problemas unos a otros. Con frecuencia se ocultaba el método propio, con el fin de reservarse los nuevos triunfos tanto para sí mismo como para la propia nación; pues había sobre todo rivalidad entre los geómetras franceses e ingleses. De ahí viene que la mayor parte de las demostraciones de Fermat se hayan perdido, y las pocas que nos quedan nos hacen lamentar más aún la pérdida de las que faltan.

De Fermat a Euler, los geómetras, ocupados enteramente en el descubrimiento y aplicación de los nuevos cálculos, no se ocuparon de la teoría de los números. Euler fué el primero que lo hizo... Sus investigaciones le condujeron a demostrar dos de los teoremas de Fermat, a saber, 1º que si a es un número primo, y x un número cualquiera no divisible por a, la fórmula $x^{a-1} - 1$ es siempre divisible por a; 2º que todo número primo de la forma $4n + 1$ es la suma de dos cuadrados.

Euler ha sido durante largo tiempo el único geómetra que se ha ocupado de la teoría de los números. Por fin Lagrange entró también en la misma carrera y sus primeros pasos han estado señalados por éxitos iguales a los que él ya había obtenido en investigaciones de un género más sublime.[1]

Vemos pues que la teoría de los números ha avanzado históricamente con impulsos irregulares. De *Diofanto* en la antiguedad clásica, debemos saltar hasta *François Viète*,(1540-1603), que transformó el álgebra sirviéndose de letras para representar las cantidades y precisando sus relaciones con la geometría. De los descubrimientos de *Fermat* ya hemos tenido atisbos en algunos fragmentos de sus cartas a *Pascal*, pero después hemos de esperar hasta el suizo *Leonard Euler* (1707-1783), para un nuevo desarrollo, continuado después por *Lagrange* (1736-1813). No obstante las propiedades aparentemente mágicas de los números fascinan a los matemáticos y a los que lo son menos, y en particular a los geómetras que inventaron la teoría de la probabilidad. Veremos como esta preocupación les desvía a veces de su camino y les induce a errores.

Hemos visto que ya a principios del siglo XVI el problema fundamental de probabilidad, el de la división de las apuestas en un juego, estaba planteado. Era un problema acuciante, introducido en el ámbito matemático por una necesidad práctica: se jugaba mucho, se jugaba desesperadamente, en todas las clases sociales. *Peverone* propone su solución (errónea) en 1494. *Cardano* escribe su Liber de Ludo Aleae en 1546, aunque no fué publicado hasta 1663, fecha clave para la probabilidad, como ya hemos mencionado anteriormente. Es de suponer que, a pesar de las dificultades de difusión, la obra de *Cardano* era conocida por bastantes personas. En el método de este autor encontramos muchos puntos de interés, en esencia los siguientes:

El manuscrito de *Cardano* tiene la particularidad de irse corrigiendo a sí mismo sin volver atrás, quizá por ser un escrito póstumo que fué tratado con el debido respeto por los editores. Carecían aún los geómetras de una simbología adecuada, motivo por el cual debía recurrir constantemente a ejemplos concretos. Utiliza en lineas generales dos métodos: el recuento directo de las diferentes posibilidades, lo que él llama el "circuito completo", y el razonamiento a partir de la media, cuando la enumeración de los casos le parece demasiado complicada. Este último método sabe que no es exacto, que es una burda aproximación, pero todo el que haya visto alguna vez los cálculos por los que se halla la solución de una ecuación de segundo grado,pudo imaginar las horas de interminables cálculos que llevaron a sus autores hasta la fórmula, el atajo por el cual, mediante una habil artimaña, un truco, se puede encontrar las soluciones con facilidad. Así era normal que, ante la perspectiva de cálculos interminables, los matemáticos intentaran encontrar el correspondiente atajo, a veces con demasiada prisa, pues tratanto el caso con más paciencia y entrando de lleno en la dificultad hubieran llegado mucho antes a la solución y sin tanto esfuerzo como parecían creer.

Adolecen también estos primeros cálculos de falta de precisión en la descripción de los problemas. Los sucesos descritos son muchas veces equívocos, pueden ser interpretados de diversas maneras, cada una de las cuales comporta una solución diferente. Esta falta de claridad en la concepción provoca como es natural muchas dificultades en la solución.

Cardano introduce el concepto de "igualdad" para la probabilidad 1/2, porque ello simboliza el juego equitativo o justo, en el que ninguno de los jugadores tiene ventaja. Habla de "circuitos de igualdad" para designar el conjunto de sucesos cuya unión tiene probabilidad 1/2. Para comprender mejor las dificultades de este concepto debemos repasar brevemente los conceptos de sucesos compatibles e incompatibles, dependientes e independientes.

Los sucesos compatibles son aquellos que pueden darse a la vez, por ejemplo, al tirar un dado, obtener 2 y obtener número par. Los sucesos incompatibles son mutuamente excluyentes, no pueden darse a la vez. Este es el caso de los ejemplos de *Cardano*, que compara generalmente tiradas sucesivas entre sí que,por ser sucesivas, son naturalmente sucesos incompatibles, pertenecen a conjuntos disjuntos de posibilidades. El error aparece cuando no se da cuenta de que los sucesos no son en ese caso incompatibles.

Los sucesos independientes son aquellos cuyos resultados no se influyen entre sí, por ejemplo, las sucesivas tiradas de un dado: el haber obtenido tres veces un seis no hace más difícil que antes la obtención de un cuarto seis, cada vez que se tira el dado hay la misma probabilidad de obtenerlo (1/6).Los sucesos independientes son los más comunes en el caso de los dados, por ello *Cardano* encuentra menos dificultades al suponerlos independientes, pues sólo podemos considerar sucesos dependientes, con los dados, dentro de la misma tirada. Veremos esto con más claridad en los cálculos mismos.

Es curioso comprobar que los mismos jugadores que reclamaban un cálculo exacto de las probabilidades no confiaban mucho en los resultados que les ofrecían los geómetras e incluso el propio *Cardano*, que era a la vez jugador y geómetra, confiaba poco en la utilidad práctica de sus cálculos teóricos, a pesar de considerarlos como correctos, tal vez en parte porque le era muy dificil convencer a su contrincante de la justeza de su reparto de las apuestas.

Los cálculos de los casos posibles con dos dados son absolutamente correctos y no presentan ya ninguna dificultad para el autor. Aquí se consideran ya sucesos compuestos de la intersección de dos sucesos simples, por ejemplo, el resultado (1,1) al tirar los dos dados mencionados. Aquí hay que aplicar los conceptos de casos dependientes o independientes, pues la fórmula que se aplica a la intersección de dos sucesos es la siguiente: $p(A \cap B) = p(A/B)\ p(B)$ y sólo cuando la probabilidad de A condicionada a B no tiene sentido y es simplemente la probabilidad de A, porque A y B son independientes, entonces es $p(A \cap B) = p(A)\ p(B)$, fórmula que aplica implícitamente *Cardano*. No obstante, en este caso no se equivoca, pues las tiradas de diversos dados son siempre independientes unas de otras. Las dificultades aparecen cuando tiene que considerar diversas alternativas, es decir cuando pueden suceder una o varias de las posibilidades a la vez. Esto implica una unión de sucesos, cuya fórmula es $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, que sólo cuando A y B son incompatibles hace que $p(A \cap B) = 0$ y por lo tanto la fórmula quede $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. No obstante, *Cardano* se da cuenta de la dificultad y, aunque todavía no da con la solución, señala que esta es sólo una aproximación, una conjetura (pag. 60).

Así le sucede que en el caso de tres dados, en que el problema se complica aún más, se decide por multiplicar una probabilidad por el número de tiradas para obtener la mencionada "igualdad" o probabilidad 1/2, obteniendo así de hecho una media aritmética. Podemos ver un ejemplo típico de este razonamiento en la pag.64.

Cardano, por su parte no habla de probabilidad, sino de posibilidades y de "total del circuito", aquí ya está implícita la idea de equiposibilidad de todos los casos posibles, idea que introduce grandes dificultades en la definición de probabilidad y que ha sido tratada por casi todos los autores. Otra de las ideas de *Cardano* es la de tiradas favorables, que está en la base de la definición atribuida a *Laplace*. Aquí la regla general está perfectamente entendida y por fín, en la página 72, bien aplicada. En cuanto a la definición, queda establecida así:

Pues hay una regla general, esto es, considerar todo el *circuito, y el número de tiradas que representan los modos en que puede darse el punto y comparar ese número con el número del resto del circuito, y de acuerdo con esa proporción deben establecerse las apuestas para jugar en condiciones equitativas.*

Todo el circuito son todos los casos posibles, los modos en que puede darse el punto son los casos favorables, según la terminología clásica. El hecho de comparar esos números y no dividirlos se debe a que lo que interesa es la proporción en que deben estar las apuestas y no el valor teórico de la probabilidad de ese suceso o resultado de los dados en concreto.

El razonamiento sin prejuicios ni conocimientos superfluos mal aplicados, seguro y justo, le conduce al resultado exacto, incluso sin conocer fórmula alguna, incluso sin haber definido siquiera muchos de los conceptos que luego se consideraron necesarios para ello.

En cambio vemos en la página 74 cómo decide aplicar propiedades aritméticas intentando generalizar el caso de un dado al de dos dados o al de varias tiradas sucesivas. Estas "chapuzas" aritméticas de restar uno, etc. no están justificadas lógicamente por el propio *Cardano* , aparecen como una especie de "idea feliz" y en cambio confunde el caso de obtener un determinado suceso en todas y cada una de varias tiradas con el de obtenerlo al menos en una de ellas. La solución sólo es correcta para el caso más simple y la generalización no es válida.

En conclusión, *Cardano* resuelve perfectamente, tras algunas tentativas, el problema de la apuestas, pero no consigue llegar a resolver el de la división, es decir el reparto de las ganancias cuando el juego se interrumpe antes de su conclusión. El enfoque de este autor no se va a repetir en los autores posteriores, que consideran superado poco a poco el tema de los juegos equitativos. Ya es conocido generalmente cuándo un juego es justo y cuándo no, en cambio el problema de la división persiste. *Tartaglia* insiste en el tema de la desconfianza de los jugadores respecto a las soluciones de los "geómetras", porque cualquiera que sea el modo en que se haga la división, será causa de litigio, dice.

Peverone, en 1558, toma el problema al revés, y considera los juegos que le quedan por ganar a cada jugador y no los que ya ha ganado cada uno. Enuncia una regla correcta pero, curiosamente, no la sabe emplear, ni siquiera lo intenta, y decide sin más investigación que en el tercer juego "se dobla la dificultad y el peligro" y multiplica por dos el resultado anterior. (pag. 81). El método de este autor es seguido posteriormente por *Fermat* y se puede decir que es el punto de vista correcto desde el cual contemplar el problema, pero topamos una vez más con una decisión apresurada que evite cálculos farragosos, cálculos que en realidad no lo eran tanto.

Galileo aborda más directamente que los anteriores el problema de la equiprobabilidad. Ya *Cardano* hablaba de astrágalos y dados honestos, no trucados y se encontraba en su concepción de circuito completo una idea de la equiposibilidad de cada elemento de ese circuito. *Galileo* habla de un dado perfecto, que puede detenerse indiferentemente sobre cualquiera de sus caras. (pag. 83). Este es uno de los puntos importantes que quedan pendientes todavía en nuestros días. El modelo matemático de la probabilidad requiere, para la aplicación de la definición, la equiprobabilidad de todos los casos posibles; pero este modelo es escasamente aplicable a los sucesos o experimentos empíricos.

El problema de la división de las apuestas en el caso de un juego que se interrumpe antes de su término ha quedado aislado, concretado, en el momento en que los científicos franceses toman el relevo de los italianos y en el siglo XVII *Pascal* y *Fermat* entran en contacto. En esa época nacen también las primeras sociedades científicas y sus publicaciones periódicas: la Royal Society de Londres, en 1660 y la Académie des Sciencies de Paris en 1665.

La solución de *Fermat* comporta una importante innovación metodológica, consistente en la consideración de todos los casos abstractamente posibles, incluidos aquellos que parecen superfluos por ser posteriores a la terminación del juego, por haber ganado ya alguno de los contrincantes. Se da por primera vez el salto de la práctica del juego a un concepto verdaderamente general.

El primer planteamiento de *Fermat* consiste en considerar lo que el jugador que acepta no jugar una tirada debe retirar de las apuestas hechas como compensación por la ventaja que concede (pag. 94 y 95).

Pascal por su parte, huye del método basado en las combinaciones. Esta decisión se hace comprensible si pensamos en las horas de cálculos interminables que debió pasar en calcular diversos problemas numéricos de los que investigaba, y que le habían desanimado de intentar calcular variaciones en ejemplos de más de tres elementos. Busca por lo tanto caminos más cortos, unas veces con mayor fortuna que otras.

Así, por ejemplo, en los cálculos de las pag.97 y 98, razona con admirable claridad:

> *Cuando juegan dos jugadores, por ejemplo, en tres partidas, y cadauno ha puesto en juego 32 pistolas... si el primero gana, le pertenecen 64 pistolas; si pierde, le pertenecen 32. Por lo tanto, si prefieren no arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: 'Estoy seguro de tener 32 pistolas, pues incluso la pérdida me las da; pero en cuanto a las otras 32, puede ser que las consiga yo, puede ser que las consiga Vd. el azar es el mismo. Dividamos pues estas 32 pistolas por la mitad, y déme además las 32 que tengo seguras'. Tendrá por tanto 48 pistolas y el otro 16...*

Y continua así analizando cada una de las tiradas, que eran tres, sin cometer ningún error, pues no se ha puesto a intentar aplicar cálculos generalizados. La dificultad de la generalización de un procedimiento se presenta aquí de manera evidente, más adelante en el mismo razonamiento se ve incluso obligado a pasar al latín, porque no es capaz de continuar en francés.

El planteamiento del problema es aquí todavía "Dado un número cualquiera de partidas, encontrar el valor de la primera", (pag.99). La solución que propone es muy ambiciosa en su concepción, pero al intentar aplicar un método general cae de nuevo en la magia de los números y propone un método basado en lo primeros números pares e impares y en diversas combinaciones de los mismos.

Los métodos de resolución de *Pascal* y *Fermat* difieren en primer lugar por lo siguiente: el primero calcula en función de las partidas que faltan a cada jugador para terminar el juego, es decir, para ganar. No calcula sobre las posibilidades de ganar sino sobre la partida de ganancia segura. Empieza por el final y se va remontando poco a poco hasta la primera partida (pag. 107). En cambio *Fermat* comienza por el principio y va avanzando de partida en partida, pero considerando todas la posibilidades de obtener el valor ganador en un número determinado de tiradas, incluidas aquellas que son meramente abstractas (pag. 108). LLega hasta el momento en que en todos los casos haya ganado uno de los dos jugadores en la tirada de que se trate. Tendríamos pues, para calcular la probabilidad de un resultado, una fracción en la que habría en el numerador las partidas favorables reales y en el denominador las partidas posibles abstractas.

Pascal, en su respuesta del 24 de agosto 1654, expone la famosa objección de *Roberval* a este método de resolución (pag. 119). En el caso de dos jugadores, cuando le faltan para ganar dos partidas al uno y tres al otro,

> *Es un error basarse para hacer la división sobre la suposición de que se juega en cuatro partidas, puesto que, cuando le faltan dos partidas al uno y tres al otro, no es necesario que se jueguen cuatro partidas, pudiendo suceder que no se jueguen más que dos o tres, o quizá en realidad las cuatro.*
>
> *Y así no veía por qué se pretende hacer la división justamente sobre una condición fingida de que se jugarán cuatro partidas, a la vista de que la condición natural del juego es que no se seguirá jugando en cuanto uno de los jugadores haya ganado y que si eso no era falso, al menos no estaba demostrado.*

En las páginas 120-122 encontramos la respuesta de *Pascal* : si uno de los dos ya ha ganado, le será indiferente seguir jugando hasta completar las cuatro partidas, puesto que eso en nada alterará el resultado del juego. Podemos ver el esquema correspondiente en la página 108 de este trabajo.

Pero a continuación, al aplicar el mismo método al caso de tres jugadores, se ve cómo *Pascal* no lo ha comprendido enteramente, no es capaz de aplicarlo y vuelve sobre sus afirmaciones anteriores, le parece ahora que el juego debería detenerse y asegura que si no se ha pactado terminar el número de partidas en cualquier caso, incluso cuando ya ha ganado alguno de los tres, el método no vale, los resultados son diferentes en uno y otro caso, así pues concluye:

> *Creo haberle hacho conocer así que el método de las combinaciones es bueno entre dos jugadores por accidente, como también lo es a veces entre tres jugadores, como cuando le falta una partida al uno, una al otro y dos al otro, porque en este caso el número de partidas en las que el juego estará terminado no basta para hacer ganar a dos; pero no es general y no es bueno generalmente más que en el caso en que se ajustan a jugar un número determinado de partidas exactamente.*

El método no es general, en su opinión, sólo es válido en algunos casos por accidente, por casualidad. Este es un momento fundamental para comprobar hasta qué punto es *Fermat* y no *Pascal* quien está en disposición de resolver este problema, de hecho quien lo ha resuelto ya en esa época, como se observa por la carta siguiente, de 25 de septiembre, en la que *Fermat*, corrigiendo con gran delicadeza el error de su corresponsal (pag. 131-132), al mismo tiempo aprueba completamente la respuesta de *Pascal* a *Roberval* y propone aún otra explicación:

> *Pero como el señor de Roberval estaría quizá más satisfecho viendo una solución sin nigún artificio, y dado que ésta puede a veces producir métodos abreviados para muchos casos, héla aquí en el ejemplo propuesto (pag.133)... Y la regla es buena y general en todos los casos, de modo que, sin recurrir al artificio, las combinaciones verdaderas en cada número de partidas proporcionan su solución y hacen ver lo*

que he dicho al comienzo, que la extensión a un cierto número de partidas no es otra cosa que la reducción de diversas fracciones a un mismo denominador. Este es en pocas palabras todo el misterio, que nos volverá a colocar sin duda en buena inteligencia, puesto que el uno y el otro no buscamos sino la razón y la verdad.

La dificil facilidad de *Fermat* es asombrosa. La solución le parece lo más sencillo del mundo, una reducción de fracciones a común denominador. Y así es, naturalmente, pero solamente una mente tan clara y lúcida como la suya podía ver la generalización donde otros se perdían en farragosas consideraciones. Su seguridad es absoluta, no pone en duda ni un instante que está en lo cierto, es *Pascal* quien tiene el problema de aceptar aprender sin ofenderse, si es que realmente busca la razón y la verdad y no otra cosa. *Fermat* en sus cartas no esconde nunca su método, no se guarda ningún triunfo, no extravía a su corresponsal con falsas pistas. En casi todas sus cartas incluye también enunciados aritméticos, problemas numéricos, pero nunca se deja influir por ellos en el sentido de perderse intentando acortar el desarrollo lógico con ninguna propiedad mágica de los números primos o de los cuadrados perfectos.

Y por fin *Pascal* se rinde, admite humildemente su derrota. El problema de los partis está resuelto de manera definitiva, pero ello marca también el fin de la relación entre los dos hombres. Nunca llegarán a conocerse personalmente, y sólo cruzarán dos cartas más,(páginas 151-154) donde *Pascal* se negará al encuentro. Sus razones no son suficientemente convincentes, la humillación había sido demasiado grande. Le llama el mejor geómetra de Europa, sin duda con razón, pero añade que la Geometría es inútil, es buena para ensayar, pero no para emplear nuestra fuerza. No obstante, si bien como matemático *Pascal* no tenía el atrevimiento y la osadía del genio, en otros campos es indudable su capacidad. Así en las aplicaciones de esa misma teoría que entre él y *Fermat* habían creado, llega tan lejos como era posible imaginar: la apuesta acerca de la existencia de Dios, que comentaremos más adelante.

La solución de *Fermat* comienza a ser conocida por los matemáticos de la época. En 1656, *Carcavi* le comentaba ya a *Huygens* que *Fermat* tenía la solución general (pag.138).

En el siglo XVII aparece el designio divino como algo que interviene en las leyes de la naturaleza y las modifica. La apuesta de *Pascal* es la primera tentativa de aplicar una de las primeras derivaciones de la teoría de la probabilidad a los problemas de la filosofía o de la vida cotidiana. En este caso se trata de decidir la norma de acción y el comportamiento que se ha de observar en esta vida con el fin de asegurarse el mejor resultado posible ante una situación aleatoria como es la indemostrabilidad de la existencia de Dios por otras vias que las teológicas, que ya presuponen la fe, es decir, ante la imposibilidad de una demostración científica.

Independientemente de su enfoque, que es nuevo y original además de ambicioso, se pueden observar en cuanto al método empleado dos puntos significativos: la aplicación rigurosa de una naciente Teoría de la Decisión que proviene del Arte de Pensar (Lógica de Port-Royal) y que enlazará con el Ars Conjectandi de *Bernouilli*, publicado en 1713, y la naturaleza misma del texto de *Pascal*, que es un texto inédito en vida del autor, por lo tanto no fué corregido por él, y ofrece curiosas particularidades: algunos puntos aparecen sin desarrollar, simplemente se encuentra un etc. en lugar de la argumentación completa. Aparecen también notas al margen que son psoteriores a la primera redacción y que se insertan con dificultad en la continuidad del razonamiento.

El título de la Apuesta es en realidad Infini-Rien, una contraposición entre el infinito y la nada. Aparece la infinitud divina pero también el infinito matemático, incluso diversos tipos de infinito matemático. que se contraponen a nuestra nada, a la finitud de placer que se obtiene en una vida mundana, vivida de espaldas a Dios.

En una situación en la que la ciencia no puede hacer nada por nosotros, pues la incertidumbre no es la via de la ciencia, apostar puede parecer una locura irresponsable algo poco digno de consideración o estima, si no fuera por la esperanza: el jugador apuesta porque espera ganar, pero también se hacen con una esperanza los viajes por mar, las batallas...(pag. 160).

Es este un texto que ha tenido gran influencia a la vez sobre teólogos filósofos y matemáticos.Se ha comentado desde todos los puntos de vista y ha tenido ensalzadores y críticos, como el propio *Voltaire*. Desde el punto de vista matemático, es notable observar lo bien que se ajusta a la Teoría de la Decisión tal como se aplica en la actualidad, con todo el bagaje matemático simbólico moderno. En las páginas 162 a 166 se expone esta teoría esquemáticamente. Se observa pues el caracter de solución definitiva que tiene la teoría inventada por *Pascal*, sus sucesivos perfeccionamientos metodológicos sólo se han aplicado a la simbolización y expresión modernas, y a generalizaciones de menor importancia.

En esta misma dirección apuntan los últimos capítulos de la Lógica de Port-Royal, que constituyen unas reglas para la conducta de cada día. El arte de pensar en sus últimas páginas, la parte IV que se titula Del Método, enseña cómo se debe conducir el hombre ante las diversas alternativas que le ofrece en mundo en aquellas ocasiones de incertidumbre en las que debe tomar una decisión: la creencia en los sucesos excepcionales o milagrosos, los sucesos futuros, etc.

Lo más notable de esta parte IV es que aparece por primera vez en ella la palabra probabilidad en el sentido actual, como algo medible y a la vez epistemológico. En este momento se efectua explícitamente la unión (1662). En las pag. 181-184 se encuentran diversos ejemplos de aplicación de este "nuevo" concepto.

La inferencia y la decisión aparecen ahora como un nuevo tipo de razonamiento no deductivo, que se desarrolla ayudado por un nuevo tipo de evidencia: la evidencia interna. Esta evidencia ya no depende del testimonio de la autoridad. Los signos se convierten ahora en evidencia interna y por fin la probabilidad se vuelve posible. El mundo ya no es evidencia externa, el libro escrito por Dios, sino evidencia interna que sólo se explica por la existencia de ese Dios.

La decisión se aplica en función de la utilidad de cada acción y de su probabilidad de llegar a la existencia. En la página 183 encontramos ejemplos famosos de sucesos de probabilidad muy pequeña que, aunque se aplique a ganancias enormes no nos producen acciones recomendables, como es el caso de componer al azar, mezclando letras, la Eneida de Virgilio, aunque con ello ganásemos un reino.

> *Por todo ello, no solamente hay que desengañar a esas personas que toman precauciones extraordinarias e inoportunas para conservar su vida y su salud, mostrándoles que esas precauciones son un mal más grande de lo que puede serlo el peligro tan lejano del accidente que teman; sino también hay que desengañar a tantas personas que no razonan en sus empresas de otro modo que de éste: hay peligro en este negocio, luego es malo; hay ventaja en aquel, luego es bueno; puesto que no es ni por el peligro ni por las ventajas, sino por la proporción que hay entre ellos, por lo que hay que juzgar.*
>
> *...Sólo las cosas infinitas, como la eternidad y la salvación no pueden ser igualadas por ninguna ventaja temporal;*

y así no se las debe poner nunca en la balanza con ninguna de las cosas del mundo.

En la obra de *John Wilkins* aparece también esta idea de la evidencia interna, o evidencia probables. El mundo es considerado como evidencia interna que sólo se explica por la existencia de un Dios. Ahora Dios es también objeto de opinión probable. La evidencia propuesta por *Wilkins* es triple: demostración, testimonio y experiencia; pero la experiencia depende a la vez de los sentidos y del entendimiento y es la evidencia que corresponde a la probabilidad.

En esta época las ciencias de la Naturaleza fascinan y se busca en ellas la justificación de los principios religiosos. Todos los filósofos y científicos del momento se ocupan de los problemas de la intevención de la divinidad en las leyes del universo, como *Newton o Leibniz*. *Derham*, cuya obra entra ya en el siglo XVIII, se ocupa todavía de ello, aplicando sus investigaciones a las relaciones estadísticas entre el hombre y los animales, lo que ahora llamaríamos el equilibrio ecológico. Para este autor, los seres vivos fueron creados por Dios en un perfecto equilibrio en cuanto a su número, habitat y vecindad de unos y otros. Las proporciones estadísticas se mantienen desde entonces. La teoría evolucionista aún no había visto la luz. En cualquier caso, las correlaciones estadísticas nacen con *Derham*.

En esta línea del designio divino encontramos a otro autor de gran talla, *Arbuthnot*, traductor de la obra de *Huygens* al inglés. Su concepto de probabilidad es muy moderno, hay un orden de la naturaleza y la matematización es siempre posible, aunque la ignorancia humana a veces la dificulte:

> *El lector observará aquí la fuerza de los números, que se puede aplicar con éxito incluso a aquellas cosas que uno imaginaría no están sujetas a reglas. Muy pocas cosas conocemos que no puedan ser reducidas a un razonamiento matemático y, cuando no pueden serlo, eso es un signo de que nuestro conocimiento de ellas es muy pequeño y confuso: y donde se puede hacer un razonamiento matemático es una gran locura utilizar cualquier otro, como palpar una cosa en la oscuridad cuando tenemos una vela al lado. Creo que el cálculo de la Cantidad de Probabilidad debe ser considerado como una especulación muy util y entretenida y aplicado a gran número de sucesos que son accidentales, además de a los juegos; solo que estos casos serán infinitamente más confusos, porque dependen de posibilidades que la mayor parte de los hombres ignoran; y como ya he apuntado antes, todas las políticas del mundo no son más que un tipo de análisis de la cantidad de probabilidad de sucesos casuales, y un buen político no es más que un diestro en tales cálculos; solo que los principios que se utilizan en la solución de tales problemas no pueden estudiarse en un lugar cerrado, sino que deben adquirirse mediante la observación de la humanidad.* [2]

En su interesante ensayo acerca de la probabilidad de los nacimientos de hombres y mujeres y de la intervención del designio divino respecto a la proporción constante que se observa entre ambos sexos (según los datos por él recogidos), utiliza la distribución binomial, cuyo fundamento se puede encontrar en el Apéndice al final de estas Conclusiones. Los razonamientos de *Arbuthnot* son correctos, aunque supone que la probabilidad de nacer hombre o mujer es a priori 1/2 y por lo tanto el que haya más hombre que mujeres es debido a una intervención exterior, de la divinidad. Por otra parte, no reconoce como ley de la estabilidad de las frecuencias el que, en los ochenta y dos años que considera, la proporción entre hombre y mujeres se haya mantenido y lo considera más bien como una jugada de dados, cuya repetición ochenta y dos veces parece extraña.

También aprovecha la argumentación para defender la monogamia, aunque desde el punto de vista exclusivamente masculino, pues "si un hombre toma veinte esposas, diecinueve hombres deberían vivir en celibato, lo que repugna al designio de la Naturaleza". No se le ocurre el ejemplo contrario, en el que una mujer tomase veinte esposos, tal vez porque esa eventualidad repugnaba más a la moral de la época que la otra, que al menos resultaba bastante pensable.

También *Nieuwentyt* es partidario de la teoría del designio divino, aunque su campo de aplicación preferido es el mismo cuerpo del hombre: las interrelaciones de los diferentes órganos y la coordinación de los mismos para la utilización por parte del hombre.

Todavía en el siglo XVIII encontramos rastros de estas aplicaciones morales de la Teoría de la Probabilidad. *Bayes* y *Price* apelan también al designio divino. Los hombres del XVIII reaccionan contra un nuevo dogmatismo, el de los reformadores. Las leyes de la Naturaleza no son más que modoe de las operaciones divinas, la doctrina newtoniana triunfa, (pag. 202).

Bayes introduce las probabilidades a priori, basadas en el conocimiento de las frecuencias de un suceso en el pasado. Partiendo del conocimiento del pasado se trata de calcular el futuro. El suceso por lo tanto ha de ser repetible a voluntad. Pero en cambio con este método podemos desconocer por completo de qué suceso se trata, podemos no saber nada de él excepto sus frecuencias pasadas. La propuesta de *Bayes* es en cierto modo inversa a la de *Moivre*: no requiere un número infinito de pruebas ni parte de la probabilidad para ver como la frecuencia se aproxima a ella, sino que parte de un número dado de frecuencias para llegar a la probabilidad. Esto en lines generales, augnue hay que matizar. *Price* lo exponía así:

> *El señor de Moivre, el gran estudioso de esta parte de las matemáticas, en sus Leyes del Azar, siguiendo a Bernouilli, y con un alto grado de exactitud, ha dado reglas para hallar la probabilidad, esto es, que si se hacen un gran número de pruebas para cada suceso, la proporción del número de veces en que este aparece respecto al número de veces en que fracasa en esas pruebas, diferirá en menos de unos lími-*

tes prefijados de la proporción entre la probabilidad de su éxito y de su fracaso en una sola prueba. Pero no conozco a nadie que haya mostrado cómo deducir la solución del problema inverso, es decir, "dado el número de veces en que un suceso desconocido ha sucedido y fracasado, hallar la chance de que la probabilidad de que suceda esté entre dos grados de probabilidad prefijados cualesquiera". (pag. 205).

También aquí, en todo caso de cualquier orden particular de recurrencia de sucesos, hay razones para pensar que esa recurrencia es derivada de causas estables e innatas y no de cualquiera de las irregularidades del azar. La trama del mundo tiene leyes fijas. El designio divino actua.

Otra idea interesante que se ha adjudicado a Bayes es el principio de distribución uniforme de la ignorancia. Bajo este nombre ingenioso se esconde el ya tratado concepto de equiprobabilidad de los casos posibles. Según algunos autores, *Bayes* supondría este principio, pero una autoridad de la talla de *Karl Pearson* afirma que el primero no estaba satisfecho con partir de ese principio, aunque lo aceptase como hipótesis de trabajo. Hay que tener en cuenta que el texto de *Bayes* es (de nuevo) un texto póstumo, es decir, no enteramente concluido por el autor y que los problemas son a veces equívocos, se prestan a diversas interpretaciones. En el apéndice se puede encontrar la expresión moderna del Teorema de Bayes.

Tras la resolución definitiva de los principales problemas planteados por la Teoría de la Probabilidad, comienzan rápidamente las diversas aplicaciones a desarrollarse. Ya hemos visto muchas de las aplicaciones de la misma, algunas de las cuales surjen casi contemporaneamente a la teoría misma. En la página 212 se encuentra un resumen de las mismas. Una de las aplicaciones más originales se debe a *Leibniz*, que introduce la idea de jurisprudencia natural y que reclama la aparición de una nueva lógica que trataría de los grados de probabilidad. La certeza moral es uno de los conceptos fundamentales de este autor. Los grados de probabilidad serían en realidad los grados de certeza.

Pero es en la jurisprudencia natural donde aparecen las probabilidades condicionadas o relativas a los datos por las que tanto se interesó *Bayes*. Para varios autores toda probabilidad es condicional, está en proporción a lo que conocemos. En este caso también la ausencia de notación adecuada impedía el cálculo de esas probabilidades. Ya vimos que ello producía los errores de *Cardano* e impedía el desarrollo de estas ideas de *Leibniz*. Para llegar a este concepto, además, no se puede partir de los juegos de azar, hay que partir de un punto de vista epistemológico.

La evidencia interna es considerada por *Leibniz* bajo el nombre de verosimilitud. También a él le debemos el término caso favorable o desfavorable, meramente posible. Los romanos utilizaban ya la palabra casu para sucesos que tienen lugar involuntariamente, pero es *Leibniz* quien la introduce a través de la jurisprudencia.

La media aritmética ya era conocida y empleada en tiempos de *Cardano*, pero después se le da un nuevo y más interesante contenido, rebautizándola como esperanza matemática. Es *Huygens* quien lo hace, designando con ese término la esperanza de ganancia media en una serie de jugadas similares. Así la chance o probabilidad es ahora de ganancia y no se trata de derechos sobre la suma apostada. Por otra parte, la chance aparece ya como probabilidad numérica.

Este autor es el primero que compone un tratado pedagógico sobre probabilidad, una exposición sistemática y ordenada. Le interesa el precio exacto o equitativo de cada jugada, es decir, la esperanza matemática de la misma. Para esperanza utiliza el término latino expectatio, que da lugar después al inglés expectation. Introduce asimismo el concepto de jugadas equivalentes, cuyo precio puede ser una cantidad determinada de dinero o bien un billete para otro juego o loteria equivalente en cuanto a sus posibilidades de ganancia. (página 222).

De 1690 a 1710 comienzan las grandes investigaciones; la teoría de la probabilidad comienza a desgajarse en sus diferentes ramas posteriores. Así se calculan las primeras esperanzas de vida, la demografía y los estudios de población nacen. Las anualidades, que eran muy antiguas se desarrollan y sobre todo, se calculan correctamente por primera vez. La estadística comienza su andadura.

El problema de la equiprobabilidad sin embargo continúa sin resolver. El inventor del concepto fué el propio *Leibniz*, que habla de casos favorables y de casos igualmente posibles. En favor de esta equiposibilidad, o para hacerla posible teóricamente, *Bernouilli* enuncia el principio de razón insuficiente: "si ignoramos completamente la forma en que puede acontecer un suceso y no tenemos ninguna base razonable para predecirlo, puede suceder con tanta verosimilitud de una forma como de otra". *Reichenbach* rechazará posteriormente este principio algo dudoso:

> *La ausencia de razón para lo contrario es una condición de nuestro conocimiento; la equiprobabilidad es una condición que se cumple para objetos físicos. ¿Por qué un suceso físico habría de seguir la dirección de la ignorancia humana?* (pag. 230).

Algunos otros intentos de justificación de este principio se han traducido en otros tantos términos aproximativos. Igual probabilidad se ha transformado en igual facilidad, igual potencia, proclividad o inclinación. *Leibniz* identifica facil con factible. (páginas 232-233).

En el siglo XIX *Laplace* escribe sus dos famosos tratados. Las ideas no han cambiado mucho; la ignorancia es lo que está a la base del azar. Las cuestiones más importantes de la vida son en su mayor parte problemas de probabilidad. El enunciado de su definición de probabilidad es el mismo que el de *Leibniz* pero matizado, por esa razón quizá le es atribuido al primero con preferencia a su inventor:

> *La teoría de los azares consiste en reducir todos los sucesos del mismo género a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que nos encontremos igualmente indecisos sobre su existencia; y en determinar el número de casos favorables al suceso cuya probabilidad se busca. La razón de este número al de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es por tanto sino una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles.* (pag. 235).

Laplace expone por fin los conceptos de sucesos dependientes e independientes y la probabilidad condicionada, planteando la situación que dió origen al teorema de Bayes. Para él el mundo está determinado, la probabilidad surge de la mezcla entre nuestro conocimiento y nuestra ignorancia.

El siglo XX introduce con fuerza el aspecto lógico de la probabilidad, ya preconizado por *Leibniz*. Surge la lógica inductiva. *Carnap* ofrece nuevas definiciones de probabilidad, las de logicistas y frecuentistas:

I.- La probabilidad es el grado de confirmación de una hipótesis <u>h</u> con respecto a una proposición evidente <u>e</u>, por ejemplo, un informe de una observación. Este es un concepto lógico, semántico. Una sentencia sobre este concepto se basa, no sobre la observación de los hechos, sino sobre el análisis lógico; si es verdadero, es L-verdadero (analítico).

II.- La probabilidad es la frecuencia relativa de una propiedad de los sucesos o de las cosas con respecto a otra. Una sentencia sobre este concepto es fáctica, empírica. (página 242).

En cuanto a los casos igualmente posibles, se descubre también que el modelo matemático considerado como único posible hasta entonces, no lo era. Otros modelos se adaptan mejor a ciertos fenómenos físicos. Así surgen las leyes de Fermi-Dirac. Bose-Einstein y Maxwell-Boltzmann (pag. 242).

La tendencia de las dos definiciones antes enunciadas es claramente objetiva, pero también el subjetivismo se ha desarrollado. El padre de la concepción subjetiva de la probabilidad es *Bernouilli*, con su arte de conjeturar. Entre sus innovaciones encontramos el concepto de sucesos incompatibles y la ley de adición de probabilidades. Mejora las demostraciones de *Huygens* utilizando otros métodos matemáticos que no se habían aplicado antes a esta rama de la ciencia, como son las soluciones gráficas, los logaritmos, el desarrollo del binomio que da lugar a la ley binomial o de pruebas de Bernouilli. La probabilidad para él es el grado de certeza, y una certeza infinitamente pequeña sería lo mismo que la imposibilidad moral. Se trataría pues de un subjetivismo no personalista, sino físico, pues se basa en observaciones que se pueden volver a comprobar.

Distingue asimismo entre sucesos contingentes y necesarios, una proposición se dice necesaria en relación con nuestro conocimiento cuando su contraria es incompatible con lo que sabemos. Es contingente si no hay contradicción con lo que sabemos.

Uno de los principales méritos de *Bernouilli* es el llamado primer Teorema del Límite (pag.252) que da precisión matemática a la ley de estabilidad de las frecuencias o ley de los grandes números, ya conocida desde antes. Este teorema sin embargo tiene el problema de que el suceso considerado debe poder repetirse a voluntad. No sirve para sucesos únicos, pues sólo cuando el número de pruebas aumenta, nos acercamos a la certeza moral.

Bernouilli cree en la fatalidad. Todas las cosas en el mundo suceden por causas determinadas y de acuerdo con reglas determinadas. Lo fortuito es sólo una apariencia.

Esta ciencia de la probabilidad, como tantas otras ciencias empíricas, comenzó pues en la experiencia, en la comprobación empírica, pero la idea de azar había nacido antes. Se podría decir que la idea de azar es metafísica, en todo caso filosófica y después es cuando pasa a la ciencia, pero, una vez la ciencia construida, axiomatixada, el azar vuelve de nuevo a la metafísica: así *Pascal*, *Arbuthnot*, *Bayes*.

El entrelazamiento de las dos caras de la probabilidad es tan indisoluble que nunca podrá hacerse una teoría de la probabilidad puramente matemática o puramente filosófica o lógica. Ahora todos son conscientes de este hecho, aunque es dificil afirmar que antes de 1660 la probabilidad, aun no formulada con ese nombre, todavía sin nombre propio, no fuese considerada dual. Este caracter ha estimulado siempre la creatividad, hasta el punto de que una de las últimas aplicaciones más técnicas y especializadas de la teoría, el caso de la física, llega a la conclusión, de enormes consecuencias filosóficas, de que estamos en un universo probabilista. No hay leyes inmutables, la materia se conduce de acuerdo (o en desacuerdo) con el azar. Pero ésta es sólo una etapa más de la historia del concepto de probabilidad. Lo que tiene verdadera importancia es que, como hemos visto, al recorrer los conceptos claves de la teoría nos encontramos siempre con un trasfondo filosófico que nos obliga a preguntarnos por el fundamento de ese concepto, por las relaciones que tiene con el mundo empírico, Recordemos por ejemplo, las "posibilidades irreales" que *Pascal y Fermat* se ven obligados a considerar.

Así *Bernouilli* se dará cuenta que el único objeto verdadero del sistema de los posibles es el infinito, pues sólo al nivel del infinito la diferencia entre lo posible y lo real tiende a cero.

Sería repetitivo repasar ahora los diferentes argumentos a favor de la relación entre matemáticas y filosofía, pero no podemos resistirnos a terminar citando una frase de *Whitehead* en su obra La ciencia y el mundo moderno:

> *No llegaré a decir que hacer la historia del pensamiento sin estudiar detenidamente las ideas matemáticas de las su-*

cesivas épocas equivale a suprimir el personaje de Hamlet en la obra del mismo título. Quizá sería excesivo. Pero es ciertamente lo mismo que suprimir el papel de Ofelia. Y esta comparación es singularmente exacta. Pues Ofelia es esencial en la obra, es encantadora y un poco loca. Diríamos que la investigación matemática es una locura divina del espíritu humano, un refugio contra la urgencia de los acontecimientos contingentes.

Notas

1.- LEGENDRE, A.M.: Théorie des Nombres, 1798.

2.- ARBUTHNOT, John: Prefacio a su traducción De Ratiociniis in Ludo Aleae, de Huygens, citado por Pearson.

El resto de las notas conducen a las páginas de esta misma tesis, donde aparecen todas las citas debidamente documentadas.

295 bis

APÉNDICE

APENDICE

Probabilidades: Definición.- Axiomas y teoremas fundamentales.- Análisis combinatorio: variaciones, permutaciones y combinaciones.- Distribuciones de probabilidad: la distribución Binomial.

Aunque en general se dice que una muestra es un subconjunto de una población, tomado al azar o por otros métodos de selección, y que la población es el conjunto total o universo, al hablar de probabilidades se suele denominar espacio muestral al conjunto total de los sucesos o resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, si lanzamos un dado y observamos el número que aparece en la cara superior del mismo, el espacio muestral del experimento que consiste en hacer una sola tirada sería:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

puesto que el dado tiene seis caras con esos números. Cada uno de ellos sería un suceso elemental, es decir, el suceso más simple que se puede considerar en este experimento concreto.

Cualquier subconjunto de ese espacio muestral S sería un suceso. Todos los sucesos posibles vienen dados por el conjunto de "partes de S". Puede haber por lo tanto sucesos con un sólo valor, con dos, con tres, etc. hasta con seis valores, lo que constituiría el suceso seguro. Por ejemplo, el suceso

$$A = \{2,4,6\}$$

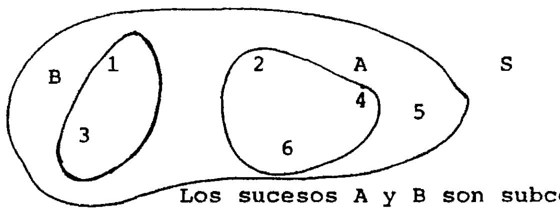
consistiría en obtener 2, 4 o 6, es decir, obtener número par o múltiplo de dos al tirar el dado una sola vez.

El suceso

$$B = \{1,3\}$$

consistiría en obtener un 1 o un 3 al tirar el dado una vez.

Se puede representar el espacio muestral mediante diagrmas de Venn, que son los utilizados en Teoría de Conjuntos, dad la aplicabilidad de esta teoría a la probabilidad. Veremos que hay una gran analogía que nos permite considerar a los sucesos como conjuntos o subconjuntos del espacio muestral, considerado a su vez como espacio total y que se pueden efectuar las operaciones de unión e intersección de conjuntos conservando sus propiedades. En nuestro ejemplo del dado, el diagrama de Venn sería:



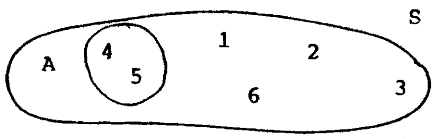
Los sucesos A y B son subconjuntos de S.

El espacio muestral S es evidentemente el <u>suceso seguro</u>, luego p(S) = 1, ya que S se puede considerar como unión de los seis sucesos:

$$S = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$$

y para que se cumpla S, basta con que aparezca uno de los seis resultados, cosa que es segura si tiramos un dado que tenga números en todas sus caras. En cambio, es imposible que el resultado de tirar un dado normal sea, por ejemplo, 27 y la probabilidad de ese suceso imposible sería p(27) = 0.

Mediante los diagramas de Venn ya podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso A, pues, a la vista del gráfico:



basta con dividir el número de puntos de A por el número total de puntos del espacio muestral. En este caso:

p(A) = 2/6 = 1/3

Pero existen definiciones rigurosas del concepto de probabilidad. Se puede definir a priori la probabilidad de un suceso mediante la regla establecida por Laplace. La probabilidad a priori es mensurable cuando se conocen el número de resultados igualmente posibles de un experimento y el número de ellos que es favorable a nuestro suceso.

Una definición más técnica de probabilidad sería la siguiente: "A todo suceso A de un espacio muestral S se le puede asociar un número mediante una función p(A) tal que p(A) $\geq$ 0, que se llama probabilidad de A y que cumple las siguientes propiedades:

* La probabilidad del espacio muestral es p(S) = 1
* Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces p(A $\cup$ B) = p(A) + p(B)."

De esta definición y axiomas básicos se pueden deducir todas las demás propiedades de la función de probabilidad. Para no complicar demasiado nuestra aproximación a la idea de probabilidad, vamos a considerar una definición sencilla y los dos teoremas fundamentales que resumen lo más esencial de la teoría. Veamos en primer lugar la definición de Laplace:

<u>Probabilidad simple</u> de un suceso cualquiera A, es

$$p(A) = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

Por ejemplo, si lanzamos al aire una moneda, cuyos casos posibles son sólo dos, cara o cruz, la probabilidad del suceso A = $\{$ cara$\}$, será 1/2, pues sólo hay un caso favorable a que salga cara. En el ejemplo anterior con el dado, los casos posibles son 6 y los casos favorables a que salga número par (suceso A) son tres: 2, 4 y 6, luego la p(A)= 3/6. Como dijimos antes, esta fórmula implica que conocemos o podemos calcular facilmente el número de casos posibles y el de casos favorables, lo cual no siempre es cierto.

<u>Teorema de la probabilidad total</u>.

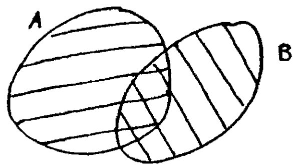
Si consideramos la unión de dos sucesos cualesquiera, podemos definir su probabilidad como:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

La probabilidad de la unión, $p(A \cup B)$ es la probabilidad de que tenga lugar el suceso A o el B o ambos, es por lo tanto un nuevo suceso.

La probabilidad de la intersección, $p(A \cap B)$ es la probabilidad de que tengan lugar el suceso A y el B, ambos a la vez. Es decir, $A \cap B$ es un suceso que se cumple cuando se cumplen a la vez A y B.

Si estudiamos el teorema mediante un diagrama de Venn, comprobamos que, si los conjuntos A y B no son disjuntos, es decir, si los sucesos A y B son <u>compatibles</u>, al calcular la probabilidad de A y la de B se pasa dos veces por la intersección de A y B, por lo tanto habría que restar una vez la probabilidad de la intersección, para no "repetir" los valores, del mismo modo que al calcular la unión de conjuntos se toman los elementos del uno y del otro paro sin escribir dos veces aquellos que se encuentran en ambos conjuntos.



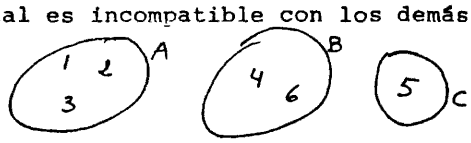
En este caso A y B no son disjuntos, $A \cap B \neq \emptyset$ es decir, los sucesos A y B son compatibles.

*Caso particular del Teorema: Si los conjuntos A y B son disjuntos, es decir, no tienen ningún punto común, $A \cap B = \emptyset$ o lo que es lo mismo, los sucesos A y B son <u>incompatibles</u>, entonces la $p(A \cap B) = 0$, porque la probabilidad del conjunto vacío es cero, sería la probabilidad de que al hacer un experimento o prueba no saliera ningún resultado. Por ejemplo, en el caso del dado, sería el suceso de que el dado quedase reposando sobre una arista en lugar de sobre una cara, posibilidad que se descarta.

Por tanto, si sustituimos este valor en la fórmula general del teorema, tendremos para el caso en que los sucesos son incompatibles o mutuamente excluyentes:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - 0 = p(A) + p(B)$$

En el ejemplo particular de lanzar un dado una sola vez, cada suceso elemental es incompatible con los demás, pues al tirar el dado una vez, sólo se puede obtener



un valor, es decir, una cara del dado y ninguna otra. Luego los sucesos no elementales pueden considerarse en este ejemplo como unión de sucesos elementales incompatibles.

Generalizando, podemos decir que la unión de cualquier número de sucesos $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se define como el suceso B que consiste en la ocurrencia de al menos uno de los A_i. Si la unión de los A_i es un suceso seguro o cierto S, y los A_i son incompatibles entre sí, se dice que tenemos un sistema completo de sucesos y, en este caso

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots = p(S) = 1$$

Como hemos visto, se define la unión de los sucesos A y B como el suceso C que se verifica siempre que se verifique A o B. Escribimos $C = A \cup B$. Por ejemplo, si

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{2,4,6\} \qquad \text{entonces}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}.$$

Se puede comprobar que la unión de sucesos cumple las siguientes propiedades:

a) conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

b) asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Y también es evidente que, si S es el suceso seguro,

$$A \cup S = S \quad \text{y} \quad A \cup A = A.$$

Si definimos el suceso contrario de A, que se verifica cuando no se verifica A, y lo denotamos por $\bar{A}$, entonces

$$A \cup \bar{A} = S$$

Por ejemplo, en el caso del dado, si A = 1,3,5,6

$\bar{A} = \{2,4\}$ y $S = \{1,2,3,4,5,6\} = A \cup \bar{A}$.

Teorema de la probabilidad compuesta

Ya sabemos qué clase de suceso es el $A \cap B$, ahora enunciamos el teorema siguiente:

$$p(A \cap B) = p(A)\ p(B/A) = p(B)\ p(A/B)$$

donde p(A/B) es la probabilidad del suceso A condicionada a que se haya producido el suceso B, y podemos despejarla de la ecuación anterior, de forma que la probabilidad condicionada se define:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{y análogamente}$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Este teorema se llama también teorema de la multiplicación. Veamos un ejemplo tomado del libro Métodos estadísticos del profesor Sixto Rios:

"Consideremos familias de dos hijos. Si designamos con v varón y con h hembra, el espacio muestral está formado por cuatro puntos: {vv, vh, hv, hh}.

Asociemos una probabilidad 1/4 a cada uno de ellos. Preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga dos varones (suceso A) y cuál es la probabilidad de que tenga dos varones una familia que ya tiene uno?

$p(A) = 1/4$, pues A es uno de los puntos del espacio muestral considerado, $A = \{vv\}$.

La probabilidad de que una familia tenga al menos un varon es $p(B) = 3/4$, porque $B = \{vv, vh, hv\}$. Luego la probabilidad de que tenga dos varones una familia que tiene uno es $pA/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$.

A primera vista parece que la respuesta debería ser 1/2.

Supongamos que la pregunta es la probabilidad de que una familia tenga dos varones (A), suponiendo que el primer hijo es varón (suceso $C = \{vv, vh\}$). Entonces

$$p(A/C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2."$$

Si los sucesos A y B son independientes entre sí, la probabilidad condicionada $p(A/B) = p(A)$ y también $p(B/A) = p(B)$. En este caso, el teorema se convierte en

$$p(A \cap B) = p(A)\ p(B).$$

Un ejemplo de independencia de sucesos nos lo da, en el caso del dado, "la probabilidad de sacar un 6 en la segunda tirada condicionada a haber sacado un 5 en la primera tirada". $p(B/A) = p(B)$, pues cada tirada es independiente de las anteriores y de las posteriores; cada vez que tiramos un dado tenemos la misma probabilidad de que salga cualquiera de los valores, aunque nos pueda parecer que algunos números se resisten a salir, o que si ya han salido tres 6 seguidos es menos probable que salga otro que al empezar a tirar.

La intersección de sucesos, que hemos definido como el suceso $D = A \cap B$, que se verifica siempre que se verifiquen A y B, cumple las siguientes propiedades:

a) conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

b) asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Como ya hemos visto, los sucesos A y B se dicen incompatibles cuando si se verifica el uno no puede verificarse el otro. En ese caso es evidente que $A \cap B$ no se verifica nunca. Se dice entonces que es el <u>suceso imposible</u>, y se denota $\emptyset$. De lo anterior se deduce facilmente

$$A \cap S = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

También se comprueba que cada una de las dos operaciones unión e intersección es <u>distributiva</u> respecto de la otra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

<u>TEOREMA DE BAYES</u>

Si tenemos un sistema exhaustivo de n sucesos mutuamente excluyentes $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, y otro suceso B para el que son conocidas las probabilidades condicionadas $p(B/A_i)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$, que se llaman también <u>verosimilitudes</u>, y si conocemos además las $p(A_i)$, tendremos

$$p(B) = p(B \cap S) = p(B \cap (\bigcup_i A_i)) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) =$$
$$= \sum_i p(A_i)\ p(B/A_i)$$

El teorema dice que

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$$

y como ya conocemos el valor de $p(B)$ y la $p(A_i \cap B) = p(A_i)p(B/A_i)$, sustituyendo estos valores en la ecuación anterior,

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)\ p(B/A_i)}{\sum_i p(A_i)p(B/A_i)} .$$

Las probabilidades $p(A_i)$ se suelen llamar probabilidades a priori, de las causas o de las hipótesis, y las $p(A_i/B)$ se llaman probabilidades a posteriori. Esta fórmula de Bayes sólo se puede emplear si se conocen y tienen sentido tanto las probabilidades a priori como los demás elementos que entran en ella.

Ley de los grandes números

Si tenemos una bolsa en la que hay cuatro bolas blancas y una roja y hacemos un número elevado de ensayos, por ejemplo, 10.000, consistentes en extraer una bola de la bolsa al azar y anotar la frecuencia observada de la bola roja, es decir, el número de veces que hemos sacado la bola roja, comprobaremos que esa frecuencia se acerca a medida que aumenta el número de ensayos a la probabilidad definida por Laplace:

p(roja) = 1/5, pues hay 5 casos posibles y uno favorable.

Esta relación que se comprueba entre los sucesos observados y la teoría matemática, nos proporciona una evidencia experimental a la que se suele llamar ley de los grandes números: cuando el número de experiencias tiende a infinito, la frecuencia observada tiende a la probabilidad teórica.

Ley multiplicativa de las probabilidades

Es una aplicación del teorema de la probabilidad compuesta. Sea un suceso A cuya probabilidad p(A) es conocida, si la multiplicamos por sí misma n veces:

$$p(A\ p(A) \ldots {}^{(n} \ldots p(A) = \left[p(A)\right]^n.$$

Permutaciones, Variaciones, Combinaciones

El análisis combinatorio forma el fundamento teórico de una parte importante de los métodos estadísticos. Las permutaciones, variaciones y combinaciones son los problemas clásicos del análisis combinatorio.

Una permutación es una ordenación de un conjunto de objetos; diferentes ordenaciones dan lugar a permutaciones diferentes. Se trata de encontrar una fórmula que nos proporcione el número de permutaciones posibles de los elementos de un conjunto dado.

Si tenemos un conjunto con pocos elementos, podremos calcular sus permutaciones escribiendo todas las posibles ordenaciones distintas. Por ejemplo, si $S = \{a, b, c\}$, las permutaciones de S se calculan fijando primero uno de los elementos, el a, y cambiando de sitio los otros dos de todas las maneras posibles: abc, acb. Luego fijaremos el b y haremos lo mismo: bac, bca, y por último el c: cab, cba. De este modo hemos obtenido las seis permutaciones:

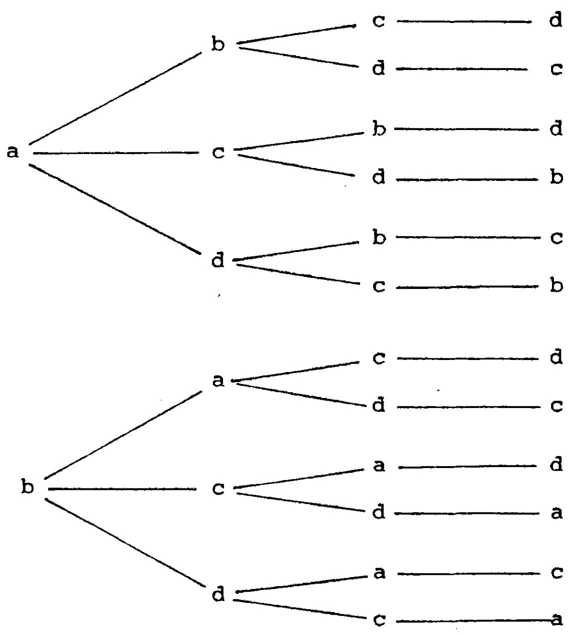
abc acb

bac bca

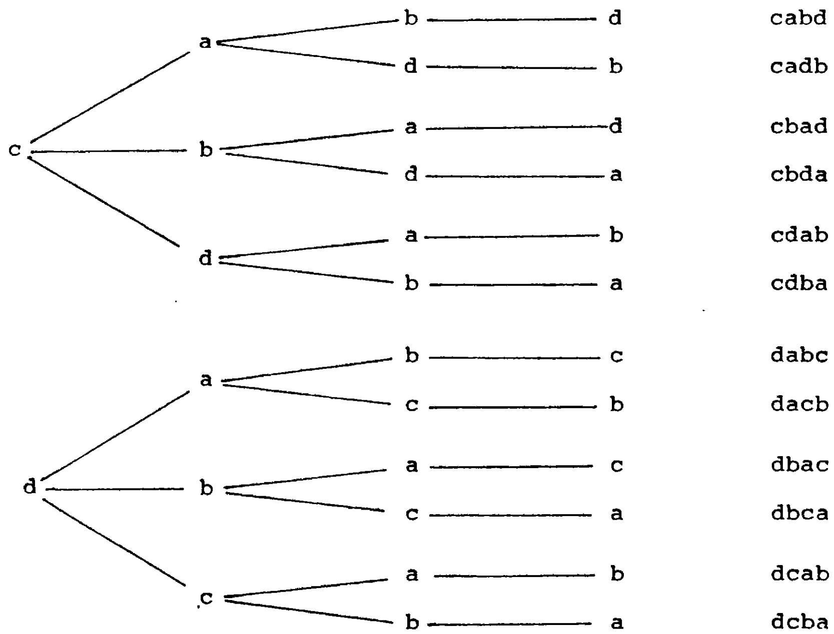
cab cba

Lo que hemos hecho es colocar cada una de las tres letras en primer lugar, quedándonos dos para el segundo lugar y una para el tercero: 3 x 2 x 1 = 6.

Si fuesen cuatro los elementos, el método sería más largo, pero esencialmente el mismo, y obtendríamos los siguientes pasos:



abcd
abdc
acbd
acdb
adbc
adcb
bacd
badc
bcad
bcda
bdac
bdca



Como se puede observar, el número de permutaciones crece muy rápidamente, de ahí el interés de emplear una fórmula matemática que nos evite la tarea de escribir todas y cada una de las posibilidades.

Generalizando el proceso, si tenemos n objetos diferentes, sus permutaciones serían:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ 2\cdot 1$$

y esta fórmula general se simboliza: n! y se denomina <u>factorial de n</u>. De manera que las permutaciones de n elementos serán:

$$P_n = n!$$

Para cualquier caso particular, por ejemplo, las distintas maneras en que seis corredores pueden llegar a la meta, no hay más que aplicar la fórmula anterior:

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

<u>Variaciones</u>

En el caso de las permutaciones hemos considerado siempre todos los elementos del conjunto S, pero si sólo tomamos los subconjuntos con r elementos de S y queremos saber de cuantas maneras se pueden elegir y ordenar, tendremos par el primer elemento, como antes, n posibilidades, para el segundo n-1, y así sucesivamente hasta el objeto r, que tendrá n-r+1 posibilidades.

Luego las $V_{n,r}$ variaciones de n elementos tomados de r en r, serán:

$$V_{n,r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

Sean por ejemplo las letras a,b,c,d,e,f = S, queremos saber de cuántas maneras distintas se pueden escoger y ordenar de tres en tres,

$$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot \ldots (6-3+1) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

y si tomamos dos de ellas,

$$V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$$

Regla práctica.- el primer número (n) nos da el valor con el que empezamos a multiplicar y el segundo (r) nos da el número de factores que emplearemos. Así $V_{6,2} = 6 \cdot 5$.

Si escribimos las variaciones de las seis letras tomadas de dos en dos, serán:

ab	ba	bc	cb	cd	dc	de	ed	ef	fe
ac	ca	bd	db	ce	ec	df	fd		
ad	da	be	eb	cf	fc				
ae	ea	bf	fb						
af	fa								

Combinaciones

Hasta aquí hemos tenido en cuenta el orden en que se disponían los elementos, pero si lo único que nos interesa es de cuántas maneras distintas se pueden elegir los subconjuntos de S con r elementos, de forma que se diferencien unos de otros únicamente en los elementos que contienen y no en el orden en que están colocados, entonces estamos calculando las combinaciones de n elementos tomados de r en r.

Un ejemplo de combinaciones sería el de los alumnos de una Universidad que deben elegir dos asignaturas entre cinco optativas. Sólo se consideran elecciones distintas aquellas que tengan al menos una asignatura distinta, independientemente del orden en que se enuncien.

Si dividimos las variaciones antes calculadas por el número de permutaciones, r!, que se pueden hacer en cada subconjunto distinto con r elementos, tendremos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = C_{n,r} = \binom{n}{r}$$

donde $\binom{n}{r}$ se enuncia "n sobre r" y es el número combinatorio o número de combinaciones de n elementos tomados de r en r.

Otra forma de escribir $\binom{n}{r}$ es

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

puesto que $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ (n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots\ 2\cdot 1$ y $(n-r)! = (n-r)(n-r-1)\ldots\ 2\cdot 1$, por tanto si sustituimos estos valores en la ecuación anterior, queda:

$$\frac{n(n-1)\ldots\ (n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots\ 2\cdot 1}{r!\ \ (n-r)(n-r-1)\ldots\ 2\cdot 1}$$

y simplificando los factores que se repiten en numerador y denominador queda:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} \quad \text{como antes.}$$

Hasta aquí hemos estudiado las distintas maneras de ordenar un grupo de elementos distintos entre sí, mediante la combinatoria: permutaciones, variaciones y combinaciones; pero se nos presenta ahora el problema de ordenar de todas las maneras posibles un grupo de elementos en el cual varios de ellos son indistinguibles, o si se quiere, están repetidos. Por ejemplo, un conjunto formado por una bola roja, una negra y tres blancas, sin numerar.

Un caso típico es el de conocer los distintos números que se pueden formar con varias cifras dadas. Si no repetimos ninguna de ellas, no cabe duda de que no estamos formando todos los números posibles. Veamos el ejemplo de los números de tres cifras que se pueden formar con el 2, 3 y 4. Serían:

344	434	443	433	343	334	244	424	442
233	323	332	224	242	422	223	232	322
234	324	243	342	423	432	333	222	444

es decir, 27 números distintos. Para calcular esto se utilizan las variaciones con repetición, cuya fórmula es

$$VR_{r,n} = r^n$$

que se lee: variaciones con repetición de r elementos tomados de n en n (y en las que pueden aparecer repetidos los r elementos de todas las maneras posibles). n puede ser mayor, igual o menor que r. En nuestro ejemplo,

$$VR_{3,3} = 3^3 = 27.$$

Otro ejemplo clásico de variaciones con repetición es el de las Quinielas, donde tres resultados posibles, 1, X, 2, deben ordenarse en una serie de 14 cifras o resultados. Los casos posibles son muchísimos:

$$VR_{3,14} = 3^{14}.$$

Puede darse el caso de que no queramos conocer todos los casos posibles, sino únicamente aquellos en que un determinado elemento (o varios) se repite dos o más veces. En este caso se utilizan las permutaciones con repetición, cuya fórmula es

$$PR^n_{r,s,t,\ldots} = \frac{n!}{r!\ s!\ t!\ldots}$$

donde $r + s + t + \ldots = n$

y se lee: permutaciones con repetición de n elementos, de los cuales hay r iguales, s iguales, t iguales,...

Por ejemplo, si queremos saber en cuántas de las quinielas posibles aparece once veces el 1, dos veces la X y una vez el 2, se calcularían:

$$PR^{14}_{11,2,1} = \frac{14!}{11!\ 2!\ 1!} = 14 \times 13 \times 6 = 1092.$$

Si queremos saber cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar con el 1 y el 2, en los que se repita dos veces el 2, se calcularía:

$$PR^{3}_{2,1} = \frac{3!}{2!\ 1!} = 3,$$ es decir, los casos

122, 212, 221; y si tomamos todos los casos: $VR_{2,3} = 2^3 = 8$ serían:

serían:	122	212	221	222
	211	121	112	111

de forma que $$VR_{2,3} = \sum_{r=0}^{3} PR^{3}_{r,3-r}$$

es decir, $$PR^{3}_{0,3} + PR^{3}_{1,2} + PR^{3}_{2,1} + PR^{3}_{3,0} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

y en general,

$$VR_{2,n} = \sum_{r=0}^{n} PR^{n}_{r,n-r}$$

Es decir que las permutaciones con repetición son siempre un subconjunto de las variaciones con repetición.

DISTRIBUCION BINOMIAL O PRUEBAS DE BERNOUILLI

Como vimos en el tema anterior, dado un suceso A, podemos definir $\bar{A}$, el suceso contrario de A, de tal manera que $\bar{A}$ se cumple siempre que no se cumple A. Por lo tanto podemos decir que A y $\bar{A}$ son sucesos independientes y mutuamente excluyentes.

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \qquad A \cup \bar{A} = S \qquad \text{y por lo tanto,}$$

$$p(A \cap \bar{A}) = p(\emptyset) = 0 \qquad p(A \cup \bar{A}) = p(S) = 1$$

Como $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) = 1$, entonces

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}).$$

En el caso de que hagamos varias pruebas sucesivas del experimento aleatorio que estemos estudiando, podemos considerar el suceso intersección $A \cap \bar{A}$ como el suceso que se cumple cuando en la primera prueba se cumple A y en la segunda prueba se cumple $\bar{A}$. En este caso la intersección no tiene por qué ser vacía y, dado que los sucesos siguen siendo independientes se tendrá

$$p(A \cap \bar{A}) = p(A)\ p(\bar{A}).$$

Supongamos ahora que consideramos un experimento aleatorio en el que el suceso A significa éxito del experimento y el suceso $\bar{A}$ significa fracaso del mismo.

Sea la $p(A) = p$ y la $p(\bar{A}) = q = 1 - p$

Si adjudicamos a A el valor 1 y a $\bar{A}$ el valor 0, tendremos la distribución de probabilidades, para una sola prueba:

x_i	p_i
0	q
1	p
	1

Si se efectuan tres pruebas sucesivas, independientes entre sí y bajo las mismas condiciones, los resultados posibles (espacio muestral) forman el conjunto de los sucesos siguientes:

$$AAA \quad AA\bar{A} \quad A\bar{A}A \quad \bar{A}AA \quad \bar{A}\bar{A}A \quad \bar{A}A\bar{A} \quad A\bar{A}\bar{A} \quad \bar{A}\bar{A}\bar{A}$$

es decir, son las $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.

Como A y $\bar{A}$ son sucesos independientes, sus probabilidades serán:

$$P(AAA) = p(A \cap A \cap A) = p(A)\ p(A)\ p(A) = ppp = p^3$$

y así sucesivamente en los otros casos:

ppp   ppq   pqp   qpp   qqp   qpq   pqq   qqq

son las probabilidades respectivas.

Si ahora definimos una variable aleatoria x = número de éxitos en una de esas pruebas compuestas, sería:

$$p(x=3) = p(AAA) = p^3$$

$$p(x=2) = p\left[(AA\bar{A}) \cup (A\bar{A}A) \cup (\bar{A}AA)\right] = p(AA\bar{A}) + p(A\bar{A}A) + p(\bar{A}AA) = 3p^2q$$

$$p(x=1) = p\left[(A\bar{A}\bar{A}) \cup (\bar{A}A\bar{A}) \cup (\bar{A}\bar{A}A)\right] = p(A\bar{A}\bar{A}) + p(\bar{A}A\bar{A}) + p(\bar{A}\bar{A}A) = 3pq^2$$

$$p(x=0) = p(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = q^3$$

De esta manera ya hemos definido la distribución binomial para el caso particular en que n = 3 pruebas consecutivas. En el caso general de n pruebas, el espacio muestral estaría formado por

x_i	p_i
0	q^3
1	$3pq^2$
2	$3p^2q$
3	p^3
	1

$$VR_{2,n} = 2^n \text{ casos.}$$

Y <u>un</u> suceso con r éxitos tendrá n-r fracasos, puesto que n es el número total de pruebas, por lo tanto su probabilidad será $p^r q^{n-r}$.

Si queremos saber cuántos de estos sucesos habrá, tendremos que calcular las permutaciones con repetición de n sucesos en los que se repite r veces A por un lado y n-r veces $\bar{A}$ por el otro, es decir,

$$PR^{n}_{r,n-r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} \quad \text{que coincide con el valor} \binom{n}{r}$$

luego la probabilidad de que se produzca alguno de esos sucesos con r éxitos y n-r fracasos será

$$p(x=r) = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}\ p^{r}q^{n-r} = \binom{n}{r} p^{r}q^{n-r}$$

A esto se le llama frecuencia de la variable binomial x, discreta, de parámetros n y p. Esa variable toma los valores entreos $r = 0,1,2,\ldots,n$, y la distribución se denota

$B(n,p)$

La media o esperanza matemática es np, y la desviación típica es $\sqrt{npq}$.

Veamos ahora un ejemplo de distribución Binomial, extraido de la "Introducción a la Inferencia Estadística" de W.C. Guenter:

* Si un dado corriente (con 6 caras) se tira 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que se presente un 6 exactamente 2 veces?

Solución

El resultado del experimento aleatorio se considera éxito si sale el 6, A, y fracaso si sale otro número, $\bar{A}$.

- Para cada tirada la probabilidad permanece constante y es $p = 1/6$, por lo tanto $q = 5/6$, pues $p(1,2,3,4,5) = 5/6$.

- Las tiradas sucesivas son independientes unas de otras.

- El dado se tira n = 4 veces.

Por tanto, el modelo binomial parece el apropiado para esta situación, con n = 4 y r = 2, es decir, B(n,p) = B(4; 1/6).

Aplicando la fórmula de la función de probabilidad:

$$p(x=2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} = \binom{4}{2} (1/6)^2 \ (5/6)^2 = 150/1296$$
$$= 25/216 = 0{,}115.$$

* ¿Cuál será la probabilidad de obtener dos o menos veces un 6?

Solución

Obtener dos o menos veces un 6 significa obtenerlo cero, una o dos veces (es la probabilidad de la unión de esos sucesos), luego

$$p(\text{ningún } 6) = p(x = 0) = \binom{4}{0} (1/6)^0 \ (5/6)^4 = 625/1296 = 0{,}48$$
$$p(\text{un } 6) = p(x = 1) = \binom{4}{1} (1/6)^1 \ (5/6)^3 = 500/1296 = 0{,}385$$
$$p(\text{dos } 6) = p(x = 2) = \binom{4}{2} (1/6)^2 \ (5/6)^2 = 150/1296 = 0{,}115$$

Como los tres sucesos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades:

$$p(x \leq 2) = 0{,}48 + 0{,}385 + 0{,}115 = 0{,}98.$$

Ajuste de una distribución de frecuencias observada mediante una distribución Binomial.

Si tenemos que estudiar la distribución de una muestra cualquiera y queremos saber si la población total se distribuye según el modelo binomial, deberemos ajustar a una distribución binomial la distribución de frecuencias que tenemos.

Para ello, calcularemos en primer lugar la media $\bar{x}$ de la distribución de frecuencias observada:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{N}$$

x_i	n_i
0	n_1
1	n_2
...	...
n	n_k
	N

y después igualaremos ese valor a la media o esperanza matemática de la distribución Binomial, α

$$\alpha = \bar{x}$$

es decir, $np = \bar{x}$, y como conocemos n, podemos despejar $p = \bar{x}/n$ y tendremos ya los dos parámetros de la distribución binomial $B(n,p)$.

A continuación calcularemos las frecuencias relativas y absolutas <u>teóricas</u>, es decir, las probabilidades que como vimos antes vienen dadas por la función:

$$p(x = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

Dispondremos la tabla de cálculos así: (ver página siguiente)

Ya calculadas las probabilidades p_i que hacen oficio de frecuencias relativas teóricas, si las multiplicamos por n, obtendremos las <u>frecuencias absolutas teóricas</u> n_{ti}, que podemos comparar con las n_i para comprobar si difieren mucho. Sus sumas respectivas deben ser las mismas.

x_i	$\binom{n}{r}$	p^r	q^{n-r}	$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} = p_i$	$n_{ti} = np_i$	n_i
0	$\binom{n}{0}$	1	q^n	p_o	n_{to}	n_o
1	$\binom{n}{1}$	p	q^{n-1}	p_1	n_{t1}	n_1
...	...	...	...	...	...	...
n	$\binom{n}{n}$	p^n	1	p_n	n_{tn}	n_n
				1	n_{ti}	N

La variable x_i es el número de éxitos r del experimento, y por lo tanto toma los valores enteros 0,1,2,...,n

Para saber si la población se distribuye efectivamente según una distribución Bibomial, habrá que hacer la prueba de "contrastar la bondad del ajuste".

La tabla de la distribución binomial que incluimos a continuación nos da ya calculados los valores de p(x = r) con lo que nos evita el trabajo de efectuar los cálculos anteriores.

Condiciones de validez de la ley Binomial

Si la muestra es relativamente pequeña con relación a la población (en la práctica menos del 10%), se puede aplicar la ley Binomial. Si la muestra es mayor, habría que utilizar la ley hipergeométrica .

Un ejemplo de ley Binomial se encuentra en los sondeos de una población en la que los individuos se clasifican en dos categorías respecto a ese sondeo: el número de individuos r que pertenecen a una de esas categorías sigue la ley Binomial cuyos parámetros son la extensión de la muestra, n, y la proporción de individuos, r, que pertenecen a la anterior categoría.

La distribución empírica u observada se separa siempre más o menos de la ley teórica a causa de las fluctuaciones debidas al azar, pues la ley teórica nos da probabilidades con las que solo al cabo de un número infinito de experiencias coincidirán las frecuencias observadas. Por otra parte, la elección de la muestra provoca errores, al no poder ser un reflejo absolutamente exacto de la población a la que representa. De todas las distribuciones binomiales posibles, se puede demostrar matemáticamente que la más cercana a nuestra distribución observada es la que tiene la misma media que ella.

TABLA DE PROBABILIDADES BINOMIALES

Valores de

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad n = 1, 2, \ldots 10 \quad p = 0{,}01;\ 0{,}05;\ \ldots;\ 0{,}50$$

n	x \ p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	$\frac{1}{3}$	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2222	.2389	.2880	.3341	.3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0282	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0138	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0494	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

Bibliografía

- GUENTER, W.C. : Introducción a la Inferencia Estadística, Madrid, ed. del Castillo, 1968.

- RIOS, Sixto: Métodos Estadísticos, ed. del Castillo, Madrid, 1969.

- Apuntes de clase , multicopiados, de la asignatura Estadística Aplicada a las Ciencias Formales II, confeccionados por M.S. de Mora Charles, 1980.

322 bis

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA GENERAL

- ABBOTT, Edwin: Le Pays plat, roman de plusieurs dimensions, ed. Little Brown, Boston, 1929.
- ADLER, I.: Probability and Statistics for Everyman: How to Understand and Use the Laws of Chance, John Day, New York, 1963.
- AHRENS, W.: "Mathematatik im Spiel und in der Liebe", Zeitschr. f. Bücherfreunde, 8, 1916, 81-95.
- ---- : Mathematische Unterhaltungen und Spiele, B.G. Teubner, Leipzig, 1910-18, 2 vol.
- ALBERTI, L.B.: Della pittura e della statua, Milano, 1804.
- ANONIMO: "A calculation of the Credibility of Human Testimony", Phil. Trans. Roy. Soc. London, 21, 359-365, 1699.
- ARBUTHNOT, John: Of the Laws of Chance or, a Method of Calculation of the Hazards of Game, Londosn, 1692.
- ----- : "An argument for divine providence taken from the constant regularity obsrved in the births of both sexes", Phil. Trans. Roy. Soc. London, 27, 186-190, 1710.
- ARCHIBALD, R.C.: "A rare pamphlet of De Moivre and some of his discoveries", Isis, 8, 671-684, 1926.
- ----- : "Abraham de Moivre", Nature, 117, 551, 1926.
- ARISTOTELES: ed W.D. Ross, 11 vols, Clarendon Press, Oxford, 1908-1952, Metafísica, 1064^b15 - 1065^a5, Física 195b-196b.
- ARNAULD, Antoine & NICOLE, Pierre: La logique ou l'Art de

penser, Flammarion, Paris, 1970 (1662).

- AUSTIN, John L.: Sense and Sensibilia, Clarendon Press, Oxford, 1962.
- --- : How to do things with words, Oxford U. Press, London, 1971.
- AYER, Alfred J.: "Chance", in Mathematical Thinking in Behavioral Sciences, Freeman & Co., London, 1968/ Alianza Ed., Madrid, 1974 "Matemáticas en las Ciencias del Comportamiento".
- --- : Probability and Evidence, Mc. Millan Co., New York, 1972.
- BACHELARD, Gaston: Le nouvel esprit scientifique, Felix Alcan, Paris, 1934.
- --- : La formation de l'esprit scientifique, J. Vrin, Paris, 1938.
- BACHELIER, L. J-B: "Théorie de l'espéculation", Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 17, 21-86, 1900.
- --- : Les lois des grandes nombres du calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- BACON, Francis: Instauratio Magna, London, (1620), Pars secunda operis quae dicitur Novum Organum, trad. ingl. Thomas Fowler, Oxford, 1878.
- BAYLEY, C.B.: The greek atomists and Epicurus, Oxford, 1928.
- --- : Epicurus, the extant remains, Oxford, 1926.
- BARKER, S.F.: Induction and Hypothesis: A Study of the Logic of Confirmation, Ithaca, New York, Cornell Press, 1957.

- BARNES, L.: "Probability and the Logic of Induction" Scripta Mathematica, II, 192-196, (1945).
- BARNETT, S.: "Philosophy of Probability", The Philos. Rew., 30, 585-601, (1921)
- BARNWELL, R.G.: A Sketch of the Life and Times of John de Witt, etc. Pudney and Russel, New York, 1856.
- BARONE, Jack & NOVIKOFF, Albert: "A History of the Axiomatic Formulation of Probability from Borel to Kolmogorov, Part I", A. for H. of E.S., 18, 123-190, 1977-78.
- BARTLETT, M.S.: Essays on Probability and Statistics, London (1956), 1962.
- BASS, W.A.: Some Difficulties in the Theory of Probability, Ann Harbor, Mich. U. Microfilms, 1954.
- BAYES, Thomas: "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances", Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, 53, 370-418, (1763). Presentación de Richard Price.
- BELL, E.T.: Mathématiciens, Simon & Schuster, New York, 1937 trad. franc. Payot, Paris,
- BÉNAVENT, Alain: La chance et le droit, Libr. gén. de droit, Paris, 1973.
- BENNETT, O.: The Nature of Demostrative Proof according to the Principles of Aristotle et Saint Thomas Aquinas, Catholic U. of Am. Press, Washington, 1943.
- BENTLEY, Richard: Correspondence, C. Wordsworth, London, 1842.
- BERAN, Rudolph: "Upper and Lower Risks and Minimax Procedures",

Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1970.

- BERGMANN, Peter G.: Basic Theories of Physics: Heat and Quants, Prentice-Hall, New York, 1951.
- BERKELEY, George: The Works of George Berkeley, ed. A.A. Luce & T.E. Jessop, 9 vols. London, 1948-57.
- --- : An Essay towards a New Theory of Vision, Dublin, (1709).
- --- : A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge, Dublin, (1710).
- --- : De motu sive de motus principio and natura, et de causa communicationis motivum, London, (1721).
- --- : Siris, Dublin & London, (1744).
- BERNOUILLI, Daniel: "Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde informanda" Acta Acad. Petrop. para 1777, pars prior, 3-23/ Trad. ingl. G.D. Allen. Biometrika 48, 1-18, 1961.
- ---- : Specimen Theoriae novae de mensura sortis, trad. ingl. C. Sommer, 1967.
- BERNOUILLI, Jacques: Opera, 2 vol. Cramer-Philibert, Ginebra 1744./Werke, Birkhauser, Basel, 1969-75.
- --- : Ars Conjectandi, Basel, (1713), Impensis Thurnisiorum.
- BERNOUILLI, Nicolaus: De Usu Artis conjectandi in jure, Basel, 1709.

- BERTRAND, J.: Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1907.

- BIENAYMÉ, I.: "Considérations à l'appui de la découverte de Laplace, sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés", C.R.Ac.Sci. Paris, 37, 309, 1853.

- BIERMANN, Kurt-Reinhard: "Über eine Studie von G.W.Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Forschungen u. Fortschritte, 29, 110-113, 1955.

- --- : "Eine untersuchung von G.W. Leibniz über die jährliche Sterblichkeitsrate", ibid, 29, 205-208, 1955.

- --- : "Überblick über die Studien von G. W. Leibniz zur Wahrscheinlichkeitsrechnung", Sudhoffs Archiv Vierteljahrsschrift f. Gesch., 51, 79-85, 1967.

- --- : "Spezielle Untersuchungen zur Kombinatorik durch G.W. Leibniz, Forschungen u. Fortschritte, 30, 1956.

- --- : "Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Centaurus, 5, 142-150,

- --- : "Die Behandlung des "Probleme des dés" in den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Monatsber. d. Deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin, 7, 69-76, 1965.

- --- : "Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Wissenschaftliche Annalen, 5, 542-548, 1956.

- --- : "Über die Untersuchung einer speziellen Frage der Kombinatorik durch G.W. Leibniz", Forschungen u. Fortsritte, 28, 357-361, 1954.
- BIERMANN, K. & FAAK, Margot: "G.W. Leibniz, "De incerti aestimatione", Forschungen u. Fortschritte, 31, 45-50, 1957.
- --- : "G.W. Leibniz und die Berechnung der Sterbenwahrscheinlichkeit bei J. de Witt", Ibid, 33, 168-173, 1959.
- --- : "Ein Beitrag zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung in memoriam G.W.Leibniz, Jakob Bernouilli und M. Planck", Deutsche Akad. d. Wissenschaften zu Berlin, 148-152, 1956.
- --- : "Gottfried Wilhelm Leibniz", Wiss. und Fortschr., 16, 482-487, 1966.
- BILLETTES, Filleau des: "Proposition pour la création des rentes viagères", Correspondance des controleurs généraux des finances avec les intendants des provinces, ed. A.M. de Boislisle, Paris, 1883., 2, 570-8.
- BIRKHOFF, G.D.: "Intention, Reason and Faith in Science", Science, n.s.88, 601-609, 1938.
- BIRNBAUM, Allan: "John Arbuthnot" The American Statistician 21, 22-29, 1967.
- BLACK, Max: Nature des Mathématiques, Harcourt Brace, New York,
- --- : Inducción y probabilidad, ed Cátedra, Madrid, 1979, trad. esp. Beneyto.

- BLISS, G.A.: "Interpretaciones matemáticas de los fenómenos geométricos y físicos" American Math. Month., 40, 1933.
- BOCHENSKI, I.M.: A History of Formal Logic, U. of Notre Dame Press, 1961.
- BOHENER, P.: Medieval Logic; an Outline of its Development from 1250 to c.1400, Chicago & Manchester, U. of Chicago Press, 1952.
- BOHR, Niels: Atomic Theory and the Description of Nature, MacMillan, New York, 1934.
- --- : Atomic Physics and Human Knowledge, Interociencе, New York, 1958.
- BOLL, Marcel: Les certitudes du hasard, PUF, Paris, 1941, 1966.
- BOOLE, George: An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, MacMillan, London, (1854), Dover, 1958, 1962.
- --- : Studies in Logic and Probability, Watts, London, 1952.
- BOREL, Emile: Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, Gauthier-Villars, Paris,(1925),4 vol.
- --- : Le Jeu, la Chance et las théories scientifiques modernes, Gallimard, Paris, (1941).
- --- : Le Hasard, Alcan, Paris, 1938.
- --- : Les Probabilités et la vie, PUF, Paris, (1943) 1967.
- --- : Probabilité et Certitude, PUF, Paris, (1950), 1969.

- BOREL, Ernest: "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques", Rend. Circ. mat. di Palermo, XXVII, 247-270, 1909.
- BORN, M.: Natural Philosophy of Cause and Chance, Clarendon Press, Oxford, 1949.
- --- : Experiments and Theory in Physics , Cambridge U. Press, 1954.
- BOSMANS, H.: "Sur un point de l'histoire du calcul des probabilités (Pascal et Huygens)", Ann. Soc. Scientifique, 43, 318-326, 1924.
- BOUDOT, Maurice: Logique inductive et Probabilité, Armand Colin, Paris, 1972.
- --- : "Probabilité et Logique de la argumentation selon Jacques Bernouilli", Les Études Philosophiques N.S. 28, 265-288, 1967.
- BOURSIN, Jean-Louis: Les structures du hasard, Seuil, Paris, trad. esp. Martinez Roca, Barcelona, 1968.
- BOURSIN, J. & CAUSSAT, P: Autopsie du hasard, Bordas, Paris, 1970.
- BOYER, Carl B.: History of Analytic Geometry, Scripta Mathematica, New York, 1956.
- --- : The History of the Calculus and its conceptual development, Dover, New York, 1959.
- --- : "Note on an early graph of statistical data, Huygens, 1669", Isis, 37, 148-9, 1947.
- BRAITHWAITE, Richard B.: Scientific Explanation, Cambridge

U. Press, 1953, 1968.

- --- : Theory of Games as a tool for the moral philosopher, Cambridge U. Press, 1955.
- BRAKEL, J. van: "Some remarks on the Prehistory of the Concept of Probability Statistical", A. for H. of E.S., 16, 119-136, 1976-77.
- BRIDGMAN, Percy W.: The logic of modern Physics, Macmillan, New York, 1927.
- BROAD, C.D.: "Theorems connecting Probability with Induction" Mind, 53, 193-214, 1944.
- BROGLIE, Louis de: Physics and Microphysics, Pantheon Books New York, 1955.
- --- : New Perspectives in Physics, Basic Books, New York, 1962.
- ---- : L'evolution de la physique et de la philosophie, Alcan, Paris, 1935.
- BROWN, G.S.: Probability and Scientific Inference, New York Longmans, Green, 1957.
- BROWNE, W.: Christiani Hugenii Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae, Or the value of all chances in games of fortune: cards, dice, wagers, lotteries &c.mathematically demonstrated, London,(1714).
- BRUNET, Georges: Le pari de Pascal, Desclée de Brower, Paris 1956, prefacio de Jean Mesnard.
- BRUNSCHVICG, Leon: Les étapes de la Philosophie Mathématique Blanchard, Paris, 1972, prefacio de J. Desanti.

- BUNGE, Mario: "What is Chance?" Science and Society, 15, 209-231, 1951.

- --- : The place of the causal principle in modern science, Cambridge, Mass. Harward U. 1959.

- --- : Intuition and Science, Prentice Hall, 1962

- BURKE, K.: A Grammar of Motives and a Rethoric of Motives, World, Cleveland, 1962.

- BURTT, Edwin A.: The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science, Routledge & Kegan Paul, London, 1925, 1932.

-BUTLER, Joseph: The Analogy of Religion, Natural and Revealed, to the Constitution and Course of Nature, London, (1736).

- BYRNE, Edmund F.: Probability and Opinio, Nijhoff, The Hague, (1968).

- CAJORI, Florian: Historia de las Matemáticas, MacMIllan, New York, 1919.

- --- :"Historia de las paradojas de Zenon sobre el movimiento", American Math. Month., 22, 1-6, 292-297, 1915.

- CALDIN, E.F.: The Power and Limits of Science, Champman & Hall, London, 1949.

- CANTELLI, F.P.: "Una teoria astratta del calcolo delle probabilitá", Ist. Ital. Attuari, 3, 1932.

- CANTOR, Georg: Gesamelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts..., Olms, Hildesheim, 1962

- ČAPEC, Milic: The Philosophical Impact of Contemporary Physics, Van Nostrand, New York, 1961.

- CARAMUEL, John: "Kybeia, quae combinatoriae genus est, de alea, et ludis fortunae serio disputans" Mathesis Biceps, II, Campaniae, 972-1036, (1736).
- CARDANO, Geronimo: Opera Omnia, Amsterdam, 10 vol./ed Facs. Stuttgart, Fromman Verlag, 1966.
- --- : De ludo Aleae, (1663), trad. ingl. Gould en Ore, 1952, p. 183-241.
- CARGILE, James: "Pascal's wager" Philosophy, 41, 250-7, 1966.
- CARNAP, Rudolf: Logical Foundations of Probability, University of Chicago Press, 1962, (1950).
- --- : The Nature and aplication of Inductive Logic, U. of Chicago Press, 1951.
- --- : "¿Qué es la probabildiad?", Mathematical Thinking in Behavioral Sciences, Freeman & Co. London, 1968,/trad. esp. Alianza Ed. Madrid, 1974.Con otros aut.
- --- : Philosophical Foundations of Physics, trad. esp. Miguens, Ed. Sudamericana, B. Aires, 1969.
- --- : The Continuum of the Inductive Methods, Chicago, (1952).
- --- : "Probability as a Guide in Life", The Journal of Philosophy, 44, 141-148, 1947.
- CARRERAS ARTAU, Joaquin: "Algunos antecedentes hispanos de la combinatoria de Leibniz", Anales de la Asoc. Esp. para el progreso de las Ciencias, año 13, 3, 649-57, 1948.

- CASTELNUOVO, G.: "Determinismo e probabilitá" Scientia, 53, 1-12, 1933.
- CEÑAL, Ramón: La combinatoria de Sebastián Izquierdo, Instituto de España, Madrid, 1974.
- --- : "Leibniz y Cristobal de Rojas y Espínola", Rev. Filos., V, 377-417, 1946.
- CESARI, P.: Les Determinismes et la Contingence, PUF, Paris 1950.
- CHAMBERS, L.P.: "Search for Certainty" Monist, 38, 481-493, 1928.
- CHEYNE, George: Philosophical Principles of Natural Religion containing the Elements of Natural Philosophy and the Proofs for Natural Religion arising from them, London, (1705).
- CHERNHOFF, Herman & MOSES, Lincoln E.: Elementary Decision Theory, Wiley & Sons, New York, 1959.
- CHILD, A.: "Problem of Truth in the Sociology of Knowledge" Ethics, 58, 18-34, 1947.
- CHOISNARD, P.: Les Précurseurs de l'Astrologie scientifique et la Tradition: Ptolémée, S. Thomas d'Aquin et Kepler, Paris, 1929.
- CHURCHMAN, C.W.: "Probability Theory", Philosophy of Science, 12, 147-173, 1945.
- CHWISTECK, L.: The limits of science: Outline of the logic and methodology of the Exact Sciences, Harcourt Brace, London, 1948.

- CICERON: De Divinatione, De Fato, trad. ingl. V.A. Falconer, Heinemann, London, 1964.
- CIOFFARI, V.: Fortune and Fate from Democritus to St. Thomas Aquinas, Columbia U. Press, New York, 1935.
- --- : The conception of Fortune and Fate in the Works of Dante, Oxford U. Press, London, 1941.
- --- : Fortune in Dante's 14th Century Commentators, Cambridge, Mass., 1944.
- COHEN, John: "Probabilidad subjetiva", en Mathematical Thinking in Behavioral Sciences, Freeman & Co., London, 1968 / Alianza Ed. Madrid, 1974.
- --- : Chance, Skill and Luck; the Psychology of Guessing and Gambling, Penguin Books, Baltimore, 1960.
- COHEN, J. & Hansel, C.E.M.: Risk and Gambling: The study of subjetive Probability, Phil. Library, New York, 1956.
- COHEN, Morris & NAGEL, Ernest: Introducción a la lógica y al método científico, Harcourt Barce, New York, (1934) trad. esp. Miguez, Amorrortu, B. Aires, 1976.
- COLLET, François: Fait inédit de la vie de Pascal, Paris, (1848).
- COMP. B.H.: "Definitions of Probability", American Math. Month., 39, 285-288, 1932.
- COMPTON, A.H.: "Do we live in a world of chance?", Yale Rev. n.s. 21, 86-99, 1931.
- CONDORCET, Jean A.N.de: Elements du calcul des probabilités, Paris, (1805).

- --- : Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Paris, 1785, reed. Chelsea, 1973.
- COPELAND, A.H.: "Fundamental concepts of the Theory of Probability", American Math. Month., 48, 522-530, 1941.
- COURANT, Richard: Cálculo diferencial e integral, vol I, Blakie and Son, London, 1934.
- COURNOT, Antoine-Augustin: Exposition de la Théorie des chances et des probabilités, Paris, (1843).
- --- : Considerations sur la marche des idées et des évenements dans les temps modernes, 2 vol. Boivon, Paris, 1934.
- --- : An essay on the Foundations of our knowledge, Paris,(1851), ed. ingl. Liberal Arts P. New York, 1956.
- COUSIN, D.R.: "Carnap's theories of truth", Mind, 59, 1-22, 1950.
- COUTURAT, Louis: La logique de Leibniz, Olms, Hildesheim, reed. 1961, Paris, (1901).
- COX, R.T.: The algebra of Probable Inference, Johns Hopkins U.Press, Baltimore, 1961.
- CRAIG, John: Theologiae Christiane Principia Mathematica, London, (1699). 1964.
- --- : "A calculation of the credibility of human testimony", Phil. Trans. Roy. Soc. London, 21, 359-65, 1699.
- CRAMER, Harald: The elements of the Probability Theory, New

York, 1955.

- --- : Mathematical Methods of Statistics, 1946
- CRISSMAN, P.: "Causation, Chance, Determinism and Freedom in Nature", Scientific Month., 61, 455-464, 1945.
- CURRY, H.B.: A Theory of Formal Deducibility, Notre Dame Math. Lectures, 6, 1950.
- --- : Foundations of Mathematical Logic, McGraw Hill, New York, 1963.
- CZUBER, Emanuel: Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, Leipzig y Berlin, 1923.
- --- : "Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendung", Jahresbericht der deut. Math.Vereinigung, 7, 2, 1899.
- DAMPIER, W.: A History of Science and its Relations with Philosophy and Religion, Cambridge U. Press, 1949.
- DANTZIG, Tobias: El número, lenguaje de la ciencia, McMillan, 1933.
- DARNWELL, R.G.: A Sketch of the Life and Times of John de Witt, Grandpensionary of Holland, to which is added his treatise of life annuities, New York, (1856).
- DARWIN, C.G.: "Logic and Probability in Physics", Discovery n.s. 1, 332-344, 1938.
- DAVENANT, Charles: Essay upon the Probable Methods of Making a People Gainers in the Ballance of Trade, London, (1699).

- DAVID, Florence N.: Games, Gods and Gambling, Ch. Griffin London, (1962).
- --- : Biometrika, 42, 1-15, 1955, "Dicing and Gaming".
- DAW, R.H. & PEARSON, E.S.: "Abraham de Moivre's 1733 derivation of the normal curve: a bibliographical note", Biometrika, 59, 177-80, 1972.
- DAY, John P.: Inductive Probability, Humanities Press, New York, 1961.
- DELHOMME, J.: La pensée interrogative, PUF, Paris, 1954.
- DELTEIL, R.: Probabilités geométriques, 1926.
- DEMAN, T.: "Probabilis au moyen age", Revue des sciences philos. et théol., 22, 260-90, 1933.
- --- : "Probabilisme", Dictionnaire de Theologie catholique, 13, cols. 417-619, 1936.
- DEMPSTER, A.P.: "New methods for reasoning towards posterior distributions based on sample data", Ann. Math. Stat. 37, 355-74, 1966.
- --- : "Upper and lower probability inferences based on a sample from a finite univariate population" Biometrika, 54, 515-528, 1967.
- --- : "Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping", Ann. Math. Statis. 38, 325-39, 1967.
- --- : Probability (cap 2. de The Theory of Statistical Inference: A Critical Analysis) Research

Report S-3, Department of Statistics, Harvard, 1968.

- DERHAM, William: Physico-Theology, or a Demonstration of the Being and Attributes of God from his Works of Creation, London, (1713).
- --- : Astro-Theology, or a Demosntration of the Being and Attributes of God from a Survey of the Heavens, London, (1715).
- DEUTSCH, K.W.: Applications of Game Theory to International Politics: Some Opportunities and Limits, Princeton University, undated.
- DIDEROT, Denis: Pensées philosophiques, The Hague, 1746. (Las Additions que incluyen el comentario al Infini-Rien de Pascal se escribieron hacia 1760 y se imprimen tradicionalmente al final de las nuevas ediciones, por ej,: Oeuvres Philosophiques , ed. P. Verniere, Paris, 1956).
- DIJSTERHUIS, E.J.: The Mechanization of the World Picture, Oxford, Clarendon Press, 1961.
- DINGLE, H.: "The Meaning of Probability", Nature, 136, 423-436, 1935.
- DOROLLE, M.: Le Raisonnement par Analogie, PUF, Paris, 1949.
- DOTTERER, R.H.: "Ignorance and Equal Probability", Philosophy of Science, 8, 297-303, 1941
- DRAKE, S.: Galileo: Two New Sciences, University of Wisconsin Press, 1974.
- DREYER, J.L.E.: "Medieval Cosmology" en Theories of the Uni-

verse, ed. M.K. Munitz; New York: Free Press of Glencoe, 1957), p. 115-138.

- DUBS, H.H.: "The Principle of Insufficient Reason: Reply to R.H. Dotterer", Philosophy of Science, 9, (1942), 123 131.
- DUCASSE, C.J.: "Some Observations concerning the Nature of Probability", The Journal of Philosophy, 38, 193-403 1941.
- DUGAS, R.: A History of Mechanics, Central Books, New York, 1955.
- DUHEM, Pierre: Le Systeme du Monde; Histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic, 10 vols. Hermann, 1954-1959.
- EDDINGTON, Sir Arthur S.: Espacio, Tiempo y Gravitación, Cambridge U. Press, 1920.
- --- : Nouveaux Sentiers de la Science, Hermann, Paris, 1936. MacMIllan, New York, 1935.
- EINSTEIN, Albert & INFELD, Leopold: The Evolution of Physics; the Growth of Ideas from Early Concepts to Relativity and Quanta, New York, Simon & Schuster, 1938.
- EISENHART, Churchill: "The development of the concept of best mean of a set of measurements from antiquity to the present day", Duplicated presidential address to the 131st meeting of the American Statistical Assoc. 1971.

- --- : "The background and evolution of the method of least squares" International Statistical Institute, Otawa, 1963.
- EISENHART, C. & ZELEN, M.: "Elements of Probability", Handbook of Physics, McGraw Hill, New York, 1958.
- EISENRING, M.E.: Johan Heinrich Lambert und die wissenschaftliche Philosophie der Gegenwart, Zürich, 1942.
- ELLIS, Leslie: The Mathematical and Other Writings of Leslie Ellis, Cambridge, England, 1863.
- ENRIQUES, Federico: Historia de la Lógica, Henry Hold, New York, 1929.
- ERISMANN, T.: Wahrscheinlichkeit im Sein und Denken; eine Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihrer Geltung im Naturgeschehen, A.Sexl, Viena, 1954.
- EVANS, H.P. & KLEENE, S.C.: "Postulational Basis for Probability", American Mathematical Monthly, 46, 141-148, 1939.
- FELLER, William: An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2 vol. Wiley and Sons, New York, (1950), trad. esp. S. Morales, ed Limusa, Mexico, 1973.
- FELLNER, W.: "Distortion to subjective Probabilities as a reaction to uncertainty" Quarterly Journal of Econom. 75, 670-689, 1961.
- FERMAT, Pierre de: Oeuvres, P. Tannery & C. Henry, 4 vol. Paris, 1891-1922. Correspondencia con Pascal en vol . II, p.288- 331).

- FERRIANI, Maurizio: "Storia e'preistoria' del concetto di probabilità nell'età moderna", Rivista di Filosofia, 69, 129-153, 1978.

- FINDLAY, J.N.: "Probability without Nonsense", Philosophical Quarterly, 2, 218-239, 1952.

- FINE, Terry: Theories of Probability, Academic Press, New York, (1973).

- DE FINETTI, Bruno: "Sul significato della probabilità", Fund. Math. 17, 298-329, 1931.

- --- : Teoria delle Probabilità, Oldembourg, Wien 1981, trad. alem.

- --- : "La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives", Ann. de l'Institut Henry Poincaré, 7, 1-68, 1964, trad. franc.

- FISHER, Ronald A.: Statistical Methods and Scientific Inference, Oliver, Londres, (1956), 1959.

- --- : "Uncertain Inference", American Academy of Arts and Sciences Proceedings, 71, 245-258, 1936

- FONTENELLE, Bernard: "Eloge de Jacques Bernouilli", Histoire de l'Académie Royale des Sciences, vol. para 1705, 148-149.

- FOUCAULT, Michel: Les Mots et les Choses, trad ingl. The Order of Things, London 1970, Paris (1966).

- FRACASTORO, Giralmo: De sympathia et antipathia rerum liber unus: De contagione et contagiosis morbis et eorum curatione, libri iii, Venice, (1546), trad. ingl.

- C.Wright, Fracastoro's De contagione, New York, 1930.
- FRANK, P.: Betwen Physics and Philosophy, Cambridge Mass. Harvard U.P., 1941.
- --- : Moderne Science and its Philosophy, Harvard U.P. Cambridge, Mass. 1949.
- --- : Philosophy of Science, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1957.
- FRÉCHET, M.R.: Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, 1938,
- --- : Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dependants, I, 1940, II 1943.
- --- : Géneralités sur les probabilités. Éléments aléatoires, 1937.
- --- : Le Calcul des Probabilités à la portée de tous, Dunod, Paris, 1924.
- FREUDENTHAL Hans:"Models in applied probability", Synthese, 12, 1960.
- --- : "Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeits-theorie und der mathematische Statistik", Grundzüge der Mathematik, ed. H.Behnke, Göttingen, IV, 149-95, 1966.
- FRUIN-JAPIKSE: Brieven van Johan de Witt, N. Japikse ed., Amsterdam, Hüller, IV,(1670-1672), 1913.
- FRY, T.C.: "Fundamental Concepts in the Theory of Probability" American Mathematical Monthly, 41, 206-217, 1934.

- FRYE, A.M. & LEVI, A.W.: Rational Belief, Harcourt-Brace, New York, 1941.
- GADOL, Joan: L.B. Alberti, universal man of the early Renaissance, Chicago, London, 1969.
- GALILEO GALILEI: Opere, Edizione Nazionale ed. A.A. Favaro, Florencia, 20 vol. 1890-1909. (vol. VIII, p.591-4, Sopra le scoperte dei dadii, trad. ingl. E.H.Thorne en David, 1962).
- --- : Discoveries and Opinions of Galileo, ed. Stillman Drake, New York, 1957.
- --- : Discorsi e demostrazioni matematische intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali, Leiden, Elsevir, (1638), reed. Turin 1958, trad. ingl. Crew & Salvio, New York, 1914, 1952.
- GARBER, Daniel & ZABELL, Sandy: "On the Emergence of Probability" A. for H. of E.S., 21, 33-53, 1979-80.
- GARDNER, M.: Logic Machines and Diagrams, McGraw Hill, New York, 1958.
- GASSENDI, Pierre:Opera Omnia, Lyon, 6 vol. (1658)
- GAUSS, Karl Friedrich: Werke, 12 vol. Göttingen, 1870-1927, Olms, Hildesheim, 1973.
- GENDRE, J.L.: Introduction a l'Etude du Jugement probable, PUF, Paris, 1947.
- GILES, Robin: "A logic for subjective belief", Harper & Hooker, ed. vol.I, 41-72, 1976.
- GILLIES, D.A.: An Objective Theorie of Probability, Methuen,

London, 1973.

- GILLESPIE, Charles C.: Les fondements intellectuels de l'introduction des probabilités en physique, Palais de la découverte, Paris, 1963.
- --- : "intellectual factors in the Bacground of Analysis by Probabilities", Scientific Change, ed. A.C.Crombie, London, W.Heffer, 1963, 431-453.
- GINI, Corrado: "Gedanken zum theorem von Bernouilli", Schweizerische Zeitschrift fur Volkswirtschaft und Statistik, 82, 401-13, 1946.
- GINZBURG, B.: "Probability and the Philosophie Foundations of Scientific Knowledge", The Philosophical Review, 43, 258-78, 1934.
- GLANVILL, Joseph: The Vanity of Dogmatizing: or Confidence in Opinions manifested in a Discourse of the Shortness and Uncertainty of our Knowledge, London, (1661), ed. rev. 1665.
- GLASS, D.V.: "Graunt's life table" Journal of the Institute of Actuaries, 76, 60-4, 1950.
- --- : "John Graunt and his 'Natural and Political Observations'", Proceedings of the Royal Society, B, 159 2-37, 1963.
- GNEDENKO, B.V.: The Theory of Probability, Chelsea, New York, 1962, trad. ingl.
- GNEDENKO, B.V.& KINCHIN, A.: An elementary introduction to the theory of Probability, trad. Borin, New York, Dover, 1962.

- GONSETH, F.: ed. Philosophie Néo-Scolastique et Philosophie ouverte, PUF, Paris, 1954.
- GOOD, Irving John: Probability and the Weighing of Evidence, Griffin, New York, 1950.
- --- : "The Measure of a Non-measurable Set", Logic, Methodology and Philosophy of Science, ed. Nagel, Suppes & Tarski, Stanford U.Press, 319-329, 1962.
- --- : "Kinds of Probability", Science, 129, 443-447, 1959.
- GOODFELLOW, L.D.: "The human element in Probability", Journal of General Psychology, 23, 201-205, 1940.
- GRANBOULAN, Geneviève: Le Probable, tesis, BNP, 4° R Pièce 5638.
- GRANGER, Thomas: Divine Logike, London,(1620).
- GRAUNT, John: Natural and political observations... made upon the bills of mortality, London, (1662)/ed. W.F. Willcox, Baltimore, 1939.
- GRAVES, H.F.: Argument : Deliberation and Persuasion in Modern Practice, Cordon, New York, 1938.
- GRAVESANDE, Wilhelm J.: Oeuvres philosophiques et mathématiques, ed. J.N.S.Allamand, Amsterdam, 2 vol. (1774).
- HAAS, Karlheinz: "Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde", Centaurus, 4, 235-284, 1956.
- HACKING, Ian: The emergence of probability, Cambridge U. P. London, (1975).
- --- : Leibniz and Descartes: proof and eternal truths,

Oxford U. Press, London, (1973).

- --- : Logic of Statistical Inference, Cambridge U.P. London, (1965).

- --- : "Jacques Bernouilli's art of conjecturing", Brit. J.Phil. Sci., 22, 209-229, (1971).

- --- : "Equiposibility theories of probability", Ibid 339-355, 1971.

- --- : "The Leibniz-Carnap program for inductive logic" Journal of Philosophy, 68, 597-610, 1971.

- HAHN, R.: "Laplace's first formulation of scientific determinism in 1773", Actes du XIe Congrès International d'Histoire des Sciences, 2, 1965, 167-71, 1967.

- HAILPERIN, Theodore: Boole's Logic and Probability, North-Holland, Amsterdam, 1976.

- HALLEY, Edmond: "An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslau: with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives", Phil. Trans. of the Roy. Soc. London, 17, 596-610, 1693.

- HALMOS, Paul Richard: "Foundations of Probability", American Math. Month., 51, 493-510, 1944.

- HARDING, T.S.: "Science versus Absolutism: Science Approaches Truth by a series of Approximations", Sewance Review, 44, 472-481, 1936.

- HARDY, G.H.: Curso de Matemáticas Puras, Cambridge U. Press, 6ª ed. 1933.

- HARPER, W.L.& HOOKER, C.A.: eds. Foundations of Probability Theory, Statistical Inference and Statistical Theories of Science, Reidel, Dordrecht, 1976.
- HARRÉ, R.: An Introduction to the Logic of the Sciences, trad. esp. Labor, Barcelona, 1967, (1960).
- HASOFER, A.M.: "Random mechanisms in talmudic literature", Biometrika, 54, 316-321, 1967.
- HAWKINS, D.: "Existential and Epistemic Probability", Philosophy of Science, 10, 255-261, 1943.
- HAY, W.H.: "Professor Carnap and Probability", Philosophy of Science, 19, 170-177, 1952.
- HEISENBERG, Werner: Philosophic Problems of Nuclear Physics Faber & Faber, London, 1952.
- --- : Physics and Philosophy, Harper, New York, (1958).
- --- : The Physicist's Conception of Nature, Harcourt-Brace, New York, 1958.
- HEMPEL, C.C.: Aspects of Scientific Explanation, The Free Press, New York, 1965.
- HENDRIKS, Frederick: Contributions to the History of Insurance and of the Theory of Life Contingencies, C.& E. Layton, London, 1852-3.
- HENNY, Julian: "Niklaus und Johann Bernouillis Forschschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Pierre Rémond de Montmort", Die Werke von Jacob Bernouilli, vol 3, 457-507, 1976.

- HOBBES, Thomas: Humane Nature, or The fundamental Elements of Policy being A discovery of the Faculties, Acts and Passions of the Soul of Man, from their Original cause; According to such philosophical Principles as are not commonly known or asserted, Printed by T. Newcomb for John Holden at the Anchor in the New-Exchange, 1651.
- HOFMANN, Joseph E.: Leibniz in Paris 1672-1676: His Growth to Mathematical Maturity, Cambridge U. Press, 1974.
- HOGBEN, Lancelot T.: Statistical Theory, Allen & Unwin, London, 1957.
- HUBER, Peter: "The use of Choquet capacities in Statistics" Bulletin of the International Statistical Institute, XLV, 4, 181-188, 1973.
- HUDDE, Johannes: Correspondencia con Chr. Huygens en 1853-4 en Oeuvres de Huygens, vol VII, 95-96.
- HUME, David: A Treatise of Human Nature, being an attempt to introduce the experimental method of reasoning into moral subjects, London, (1739).
- --- : Philosophical Essays concerning the Human Understanding, London, (1748).
- --- : Dialogues Concerning Natural Religion, London, (1779).
- HUYGENS, Christian: Oeuvres complètes, 22 vol. , Nijhoff, La Haya, 1888-1950. Vol XIV, 1-79, "De Ratiociniis in Ludo Alea" (1657), trad. ingl. Arbuthnot (1692) y Browne (1714).

- HUYGENS, L.: Correspondencia con Chr. Huygens, en Oeuvres de Huygens, vol.VI.
- ISAYE, G.: La Théorie de la Mesure et l'Existence d'un Maximum selon Saint Thomas, Beauchesne, Paris, 1940.
- JAMES, William: The Will to Believe and other Essays in Popular Philosophy, London, New York, (1897).
- JEANS, Sir James H.: Le misterieux universe, MacMillan, New York, 1930, trad. franc. Hermann, Paris.
- --- : Physics and Philosophy, Macmillan, New York & Cambridge, 1943.
- JEFFNER, Anders: Butler and Hume on Religion, a comparative analysis, Stockholm (1966).
- JEFFREYS, Harold: The Theory of Probability, Clarendon Press, Oxford, (1939), 1948, 1961.
- --- : Scientific Inference, Cambridge, 1957.
- --- : "On some Criticisms of the Theory of Probability", Philosophy of Math., 22, 337-359, 1936.
- --- : "Probability and Quantum Theory", Philosophy of Math., n.s. 7, 815-831, 1942.
- --- : "Bertrand Russell on Probability", Mind, 59, 313-319, 1950.
- JOHNSON, W.E.: "Probability: The Relations of Proposal to Supposal", Mind, 41, 1-16, 1932.
- --- : "Probability: Axioms", Mind, 41, 281-296, 1932.
- --- : "Probability: The Deductive and Inductive

Problems", Mind, 41, 409-423, 1932.

- JUNKERSFELD, Julienne: The Aristotelian-Thomistic concept of chance, Notre Dame, Indiana, 1945.
- KAHN, Hermann: "Random Sampling (Montecarlo) Techniques in Neutron Attenuation Problems", Nucleonics, 6, n^{o}5, 27-33, 1950, n^{o}6, 60-65, 1950.
- KAC, Mark: "Probability", Mathematical Thinking in Behavioral Sciences, Freeman & Co. London, 1968, trad. esp. Alianza Ed. Madrid, 1974.
- --- : "Random Walk in the presence of absorbing barriers" Ann. Math. Stat., 16, 1945.
- --- : Probability and Related Topics in Physical Sciences, New York, Interscience, 1959.
- KASM, B.: L'Idée de Preuve en Métaphysique, PUF, Paris, 1959.
- KASNER, E.& NEWMAN, J.: Mathematics and the Imagination, Simon and Schuster, New York, 1970.
- KATSOFF, L.O.: "Modality and Probobility" The Philosophical Review, 46, 78-85, 1937.
- KATZ, J.J.: The Problem of Induction and its Solution, U. of Chicago Press, 1962.
- KELLWAYE, Simon: A defensative against the Plague, London, (1593).
- KENDALL, M.G.: "The beginnings of a probability calculus", Biometrika, 43, 1-14, 1956.
- --- : "Where shall the history of statistics begin?"

Biometrika, 47, 447-449, 1960.

- KEPLER, J.: Opera Omnia, Francofurti a M., (1870).
- KERR, H.P.: Opinion and Evidence: Cases for Argument and Discusion, Harcourt-Brace, New York, 1963.
- KEYNES, John M.: A Treatise of Probability, Harper and Row, 1962, MacMillan 1973, (1921).
- KEYSER, Cassius J.: Filosofía Matemática, Dutton, New York, 1922.
- KHINTCHINE, A.: "Über einen Satz der Wahrscheinlichkeits-rechnung", Fund. Math., 6, 9-20, 1924.
- KING, Amy & DEAD, Cecil: Pathways to Probability: History of the Mathematics of Certainty and Chance, Holt Rinehart & Winston, New York, 1963.
- KING, Gregory: Natural and Political Observations and Conclusions upon the State and Conditions of England, (1696), reed. Barnett in Two Tracts by Gregory King, Baltimore, 1936.
- KING-Farlow, John: "Toulmin's analysis of Probability", Theoria, 29, 12-26, 1963.
- KLEIN, Felix: Matemáticas elementales desde un punto de vista superior, MacMillan, New York, 1932.
- KLINE, Morris: Mathematics and the Physical World, Crowell, New York, 1959.
- --- : Mathematical Thought from ancient to modern times, New York, 1927.

- KNEALE, William: Probability and Induction, Clarendon Press, Oxford, 1966 (1949).
- KNEALE, William & Martha: The Development of Logic, Oxford, 1962
- KNOBLOCH, Eberhard: "Zur Herkunft und weiteren Verbreitung des Emblems in der Leibnizschen Dissertatio de arte Combinatoria", Studia leibnitiana, 3, 290-2, 1971.
- KOESTLER, Arthur: The roots of Coincidence, trad. esp. Hangling, Kairós, Barcelona, 1974,(1973).
- KOESTLER, A.& HARDY, A. &HARVIE, R.: Le Hasard et l'Infini Tchou,Paris, 1977, trad. fran.
- KOHLI, Karl: "Zur Publicationsgeschichte der Ars Conjectandi", Die Werke von Jacob Bernouilli, vol 3, 391-401, 1975
- --- : "Spieldauer: Von Jakob Bernouillis Lösung der fünften Aufgaben von Huygens bis zu den Arbeiten von de Moivre", Ibid, 403-455, 1975 (1967).
- --- : "Aus den Briefwechsel zwuischen Leibniz und Jakob Bernouilli", Ibid, 509-513.
- KOHLI, K.& VAN DER WAERDEN, B.L.: "Bewertung von Leibrenten" Ibid, 515-539.
- KOLMOGOROFF, A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, (1933).trad. ingl. New York 1950, Chelsea, 1956, trad. esp. Alianza Ed. Madrid, 1973, en La Matemática, su contenido, métodos y significado.

- KOOPMAN, B.O.: "The Axioms and Algebra of Intuitive Probability", Annales of Mathematics, 41, 269-292, 1940.
- KÖRNER, Stefan: ed. Observation and Interpretation, London, (1957).
- KOYRÉ, A.: Études Galiléennes, 3 vol. Hermann, Paris, 1939.
- --- : La Révolution astronomique, Hermann, Paris, 1960
- --- : Concept and Experience in Newton's Scientific Thought, U. of Chicago Press, 1962.
- KUEBLER, C.G.: The argument from Probability in Early Attic Oratory, U. of Chicago Press, 1944.
- KUHN, Thomas S.: The Structure of Scientific Revolutions, U. of Chicago Press, 1962. trad. esp.
- --- : "The function of Dogma in Scientific Research" Scientific Change, Heinemann, London, ed. Crombie, 1963.
- KYBURG, Henry E.: Probability and the Logic of Rational Belief, Middletown, Conn. 1961.
- --- : "Probability and Randomness", Theoria, 29, 27-55, 1963.
- KYBURG, H.& SMOKLER, H.: Studies in Subjective Probability Wiley, New York, (1964).
- LACHELIER, J.: Du Fondement de l'Induction, Alcan, Paris, 1924.
- LADRIERE, J.: Les limitations internes des Formalismes, Nauwelaerts, Paris y Lovaina, 1957.
- LAGRANGE,L.: Memoria sobre la utilidad de la media (1770),

en Oeuvres, ed. Senet et Darboux, Hildesheim, Olms, 1973,/Gauthier Villars, Paris, 1867-1892, 14 vol.

- --- : Essai d'arithmétique politique, (1796), reed. 1847, 1966.

- LAGUNA T. de: "On Keynes' Theory of Probability", The Phil. Review, 39, 227-242, 1930.

- LAMBERT, Johan Heinrich: "Phänomenologie der Lehere von dem Schein", Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung..., II, 217-435, Leipzig, (1764), red. Olms, Hildesheim, 1965.

- --- : Logische und philosophische Abhandlungen, 2 Vol. Berlin, 1782-7.

- LAPLACE, Pierre S.: Oeuvres, 14 vol. Gauthier-Villars, Paris 1878-1912.

- --- : Essai philosophique sur les probabilités (1795), reed. Culture et Civilisation, Bruxelles, 1967. trad. esp. Espasa Calpe, B. Aires, 1947.

- --- : Théorie analytique des probabilités, Culture et Civilisation, Bruxelles, 1967. Paris (1812).

- --- :"Mémoire sur la probablité des causes par événements", Mem. Acad. Sci. Sav. Etranger, 6, 621-656, 1774.

- LAURENT, H.: Théorie des jeux de hasard, Blanchard, Paris, 1965.

- LAVELLE, Louis: La Dialectique du Monde Sensiblè, PUF, Paris, 1954.

- --- : Manuel de Méthodologie dialectique, PUF, Paris, 1962.

- LEBLANC, H.: "Two Probability Concepts", The Journal of Philosophy, 55, 679-688, 1956.
- LECLERCQ, R.: Histoire et Avenir de la Méthode Expérimentale Masson, Paris, 1960.
- LEGENDRE, A.M.: Théorie des Nombres, Blanchard, Paris, 1955.
- LE GOFF, J.: Les Intellectuels au Moyen Age, Seuil, Paris, 1960.
- LEHMANN, E.L.: Some Early Instances of Confidence Statements Statistical Lab. U. of California, Berkeley, ONR 5 Tech. Rep. to the Office of Naval Research, (1958).
- LEIBNIZ, Gottfried W.: Die philosophischen Schriften von G.W.L., ed C.I. Gerhardt, Berlin, 1875-1890, 7 vol. Olms, Hildesheim, 1965.
- --- : De conditionibus, Leipzig, (1669).
- --- : Leibnizens mathematische Schriften, ed. C.I. Gerhardt, London, Berlin, Halle, 1849-1863, 7 vol.
- --- : Opera Omnia, ed. J. Dutens, Geneva, 1768, 6 vol.
- --- : Opuscules et fragments inédits de Leibniz, ed. L. Couturat, Paris, 1903.
- --- : Sämtliche Schriften und Briefen, Preuss. Akad. der Wiss., Berlin, 1923 a...
- LEONARDO DA VINCI: Tratado de Pintura, ed. Angel Gonzalez, Editora Nal. Madrid, 1976.

- LEVINAS, E.: Totalité et Infini: Essai sur l'Exteriorité, The Hague, Nijhoff, 1961.
- LEVINSO, H.C.: Chance, Luck and Statistics, the Science of Chance, Dover, New York, 1963.
- LEVY, Hyman: Ciencia Moderna, Knopf, 1939.
- LEVY, Paul: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris 1925.
- --- : "Les fondements du Calcul des probabilités", Rev. de Métaphysique et de Morale, 68, 25-56, 1963.
- LEWIS, C.I.: An Analysis of Knowledge and Valuation, La Salle, Illinois, 1947.
- LEWIS, Geneviève: Lettres de Leibniz à Arnauld, Paris, 1952.
- LIAPOUNOV, A.: "Una proposition générale du calcul des probabilités", C.R. Ac. Sci. Paris, 132, 814-815, 1901.
- LINFOOT, E.H.: "On the Law of Large Numbers" Royal Soc. of London, Phil Trans. 227, 417-451, 1928.
- LINNIK, Ju.: Décomposition des lois de probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- LE LIONNAIS, François: et al. Les Grands courants de la pensée mathématique, Seuil, Paris, 1948, trad. esp. Miguez, Eudeba, B. Aires, 1976.
- LOCKE, John: An Essay Concerning Human Understanding, London, (1690).
- --- : An Early Draft of Locke's Essay, ed. R.I. Aaron & J.Gibb, Oxford, 1936.
- LODGE, Thomas: A Treatise of the Plague containing the Nature,

Signs, and Accidents of the Same, London, (1603).

- LOEVE, Michel: Probability Theory, Van Nostrand, Princeton, 2 vol., 1963/ trad. esp. Butron, Tecnos, Madrid, 1976.
- --- : Probability Methods in Physics, Univ. of California Press, 1948.
- "Sur les systèmes d'événements", Ann.Univ. Lyon, 1942.
- LOMNICKI, A.: "Nouveaux fondements du calcul des probabilités" Fund. Math., 4, 34-71, 1923.
- LØNNING, Per: Cet effrayant pari: Une pensée pascalienne et ses critiques, Vrin, Paris, 1980.
- LUCAS, John R.: The Concept of Probability, Clarendon Press, Oxford, (1970).
- LUCE, R.D. & RAIFFA, H.: Games and Decisions: Introduction and Critical Survey, Wiley, New York, 1957.
- LUKACZ, E.: Characteristic fünctions, 1960.
- MABBUT, George: Tables for Renewing and Purchasing of the Leases of Cathedral Churches and Colleges, Cambridge, (1686).
- McCRACKEN, Daniel D.: "El método de Montecarlo", Mathematical Thinking in Behavioral Sciences, London, Freeman & Co. 1968, trad. esp. Alianza Ed. Madrid, 1974.
- MACH, Ernst: Populär-wissenschaftliche Vorlesung, Leipzig, (1892), trad. ingl. Chicago, 1895.
- --- : Die Mechanik in Ihrer Entwiclung, Leipzig, (1883) trad. ingl. Mc.Cormack, La Salle, III, 1960.
- MADDEN, E.H.: "Aristotle's treatment of probabiliny and signs"

Phil. of Science, 24, 167-72, 1957.

- MAHNKE, Dietrich: "Leibnizens Synthese von Universal-mathematik und Individualmetaphysik" Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, 7, 305-611, 1925.
- MAISTROV, L.E.: Probability Theory, A historical sketch, Academic Press, New York, 1974.Trad ingl., (1964).
- MALÉCOT, Gustave: Probabilités et hérédité, PUF, Paris,1966.
- MALLARMÉ, Stéphane: Un coup de dés jamais n'abolira le Hasard Gallimard, Paris, 1914.
- MANSION, Augustin: Introduction à la Physique Aristotelicienne, Inst. Sup. de Phil. de l'Université de Louvain, 1945.
- MARGENAU, H.: The Nature of Physical Reality, McGraw Hill, New York, 1950.
- --- : "Probability and Causality in Quantum Physics" The Monist, 42, 161-188, 1932.
- --- : "Causality and Modern Physics", The Monist, 41, 1-36, 1931.
- MARGOLIN, Jean Claude: "Science et Cosmos dans la pensée de Jerome Cardan", Actes du XIe Congrès internationale d'histoire des sciences, 1965, 2, 253-8.
- MARKOV, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, trad. alem. 1912.
- MASERES, Francis: The Doctrine of Permutations and Combinations, London, (1795).
- MATALON, Benjamin: "Epistemología de las Probabilidades", Logique et Connaissance Scientifique, trad. esp. Prelooker, Paidos, Argentina, 1979.

- MAUDUIT, Michel: Traité de religion contre les athées, les déistes et les nouveaux pyrrhoniens, Paris, (1677).
- MÉRÉ, Chevalier de la: Le jeu de l'Hombre, Barbin, Paris, 1674 y 1682.
- --- : Oeuvres Complètes, 3 vol. F. Roches, Paris, 1930.
- MERZ, J.T.: Historia del pensamiento europeo en el siglo XIX Blackwood & Sons, Edimburgo, 1923.
- MESNARD, Jean: Pascal et les Roannez, Bruges, (1965).
- MISES, Richard von: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Springer, Wien, (1928), 1972, trad. ingl. McMillan New York, 1957.
- MOIVRE, Abraham de: Doctrine of Chances or a Method of Calcuting the Probabilities of Events in Play, London, (1718) Chelsea, New York, 1967.
- --- : "De Mensura sortis seu de probabilitate Eventum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus" Phil. Trans. Roy. Soc. London, 27, 213-64, 1711.
- --- : A Treatise of Annuities upon Lives, London (1725), 1756.
- --- : Approximatio ad summan terminorum binomii $(a+b)^n$ in seriam expansi, London (1733).
- MONGE, Jean: Métaphysique du Hasard, Doin, Paris, 1976.
- MONOD, Jacques: Le Hasard et la nécesité, Seuil, Paris, 1970, trad. esp. Ferrer Lerin, Barral, Barcelona, 1970.
- MONTMORT, Pierre R. de: Essai d'Analyse sur les jeux de

hasard, Quillam, Paris, (1708).

- MORGAN, Augustus de: Budget of Paradoxes, Open Court, Chicago, 1940.
- --- : An Essay on Probabilities, London, 1838
- --- : "On a question in the theory of probabilities", Trans. of the Cambridge Phil. Soc., 6, 423-30 1838.
- NAGEL, Ernest: Principles of the Theory of Probability, U. of Chicago Press, (1939).
- --- : "The Frequency Theory of Probability", The Journal of Philosophy, 30, 533-554, (19330.
- --- : "Verificability, Truth and Verification", The Journal of Phil., 31, 141-148, 1934.
- NAGEL, E. & NEWMAN, James: Gödel's Proof, New York, 1958.
- NEWMAN, John Von & MORGENSTERN, Oscar: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton u. Press,(1944), 1972.
- NEWBOLD, E.M.: "Practical Applications of the Statistics of Repeated Events", J.Roy. Statist. Soc., 90.
- NEWTON, Isaac: The Mathematical Papers of I. Newton, ed. D.T. Whiteside and M.A.Hoskin, Cambridge, 1967 et seq.
- --- : I. Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy, ed. I.B. Cohen, Cambridge, Mass. 1958.
- --- : Philosophiae naturalis principia mathematica, London, (1687) ed. facsimil, Koyré- Cohen, Cambridge, 1972.
- --- : Chronology of ancient kingdoms amended, London, (1728).

- NEYMAN, Jerzy: First course on probability and statistics, New York, (1950).
- NIEUWENTYT, Bernard: Het regt gebruik der Werelbeschouwingen Amsterdam, (1715), ed ingl."The religious Philosopher, or the Rigth use of contemplating the Works of the Creator", 1719.
- OBERTELLO, Luca: John Locke e Port-Royal.Il Problema della probabilità, Trieste (1964).
- ORCIBAL, M.J.: "Le fragment infini-rien et ses sources", Blaise Pascal, l'homme et l'oeuvre, Cahiers de Royaumont, Philosophie, 1, Paris, 159-86, (1956).
- ORE, Øystein: Cardano, the gambling Scholar, Princeton, U.P. (1953).
- --- : "Pascal and the invention of probability theory" American Math, Month., 67, 409-19, 1960.
- --- : Niels Henrik Abel, Birkhäuser, Basel, 1950.
- PACIOLI, Luca: De divina proportione
- --- : Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità, Venice, (1494).
- PARACELSUS: Sämtliche Werke, ed. K. Sudhoff, 14 vol. Munich, 1922-3. Trad. ingl. extractos: Paracelsus, Selected Writings, ed. J.Jacobi, Trans. N.Guterman, London, 1951.
- PARRATT, L.G.: Probability and Experimental Errors in Science: An Elementary Survey, Wiley, London, 1961.
- PARZEN, Emanuel: Modern Probability theory and its applications, Wiley, New York, 1960.

- PASCAL, Blaise: Oeuvres Completes, ed. Lafuma, Paris, 1951, ed. Jacques Chevalier, Gallimard, 1954. El Pari, v. ed. Brunet.
- PEARSON, E.S.& KENDALL, M.G.: eds. Studies in the History of Statistics and Probability, Hafner, Darien, London, (1970).
- PEARSON, Karl: The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries, ed por E.S. Pearson, Griffin, London, 1978. (1921-1933).
- --- : "Abraham de Moivre", Biometrika, 16, Nature, 117, 551-2, 1926.
- --- : "Historical note on the origin of the normal curve of errors", Biometrika, 16, 402-4, 1924.
- --- : "James Bernouilli's Theorem" Biometrika, 17, 201-10, 1925.
- --- : "Biometry and chronology", Biometrika, 20A, 241-62, 424, 1928.
- --- : "Laplace", Biometrika, 21, 202-16, 1929.
- PEIRCE, Charles S.: Chance, Amour et Logique, Harcourt-Brace, New York, 1923.
- --- : Collected Papers of Charles S. Peirce, ed. Hartshorne, Weiss & Burks, 8 vol. Cambridge, Mass. 1931-1958.
- PERRIN, F.: Méchanique statistique quantique, 1939.
- PETTY, William: "Review of Graunt", Le Journal des Savants, 2, 359-70, (1662) (1666).

- --- : The Discourse made before the Royal Society the 26 November 1674, concerning the Use of Duplicate Proportion, London, (1674).
- --- : Another Essay in Political Arithmetic, concerning the Growth of the City of London, London, (1683).
- --- : Observations upon the Dublin Bills of Mortality London, (1683).
- --- : Two Essays in Political Arithmetic concerning the People, Housing, Hospitals etc. of London and Paris, London, (1687).
- --- : Observations upon the Cities of London and Rome, London, (1687).
- --- : Five Essays in Political Arithmetic, London, (1687), (1699).
- PEVERONE, Giobattista F.: Due brevi e facile trattati, il primo d'arithmetica, l'altro di geometria..., Lione, (1558).
- PIAGET,Jean: La Genese de l'Idée de Hasard chez l'Enfant, PUF, Paris, 1951.
- PLACKETT, R.L.: "The principle of the arithmetic mean", Biometrika, 45, 130-5, 1958.
- --- : "The discovery of the method of least squares", Biometrika, 50, 239-51, 1972.
- PLANCK, Max: The Universe in the Light of Modern Physics, Norton, New York, 1931.
- --- : The Philosophy of Physics, Norton, New York, 1936.

- --- : Scientific Autobiography, Philosophical Library, New York, 1949.
- POINCARÉ, Henri: Filosofía de la Ciencia, U. Autónoma de Mexico, 163-191, 1964, trad. esp. Eli de Gortari.
- --- : Calcul des probabilités,Quinquet, Naud, Paris, (1896).
- --- : La valeur de la Science, Flammarion, Paris, (1905).
- --- : Science et Méthode, Paris, (1908).
- --- : La Science et l'Hypothèse, Paris, 1929.
- POISSON, Siméon D.: Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, precédées des regles générales du calcul des probabilités, Paris, (1837).
- POLLARD, William G.: Chance and Providence: God's Action in a World Governed by Scientific Law, London, 1958.
- POLYA, G.: "Sur quelques points de la théorie des probabilités", Ann. Inst. H. Poincaré, 1, 1931.
- --- : Mathematics and Plausible Reasoning, vol II, Patterns of Plausible Inference, Princeton, 1954.
- POPPER, Karl R.: The logic of Scientific Inference, Hutchinson & Co. Londres, (1959), trad. esp. Sanchez de Zabala, Tecnos, Madrid, 1967.
- --- : Conjectures and Refutations, London, 1963.
- --- : "The propensity interpretation of probability", British Journal for the Phil. of Sci., 10,25-42, 1959.

- PREVOST, Pierre & LHUILIER, Simon: "Mémoire sur l'application du Calcul des probabilités à la valeur du témoignage", _Mémoires de l'Acad. Roy. des Sci. et Belles Lettres à Berlin_, 1800, (1797), 120-152.
- PRICE, Richard: _A Review of the Principal Questions and Difficulties in Morals_, London, (1758), Oxford, 1948.
- --- : Prólogo al Teorema de Bayes (v. Bayes).
- RABINOVITCH, Nachum L.: _Probability and statistical inference in ancient and medieval Jewish literature_, U. Toronto Press, 1973.
- --- : "Probability in the Talmud", _Biometrika_, _56_, 437-41, 1969.
- RAMSEY, Frank P.: _The Foundations of Mathematicals and Other Logical Essays_, ed. R.B.Braithwaite, Londres, (1931).
- RASHDALL, H.: _The Universities of Europe in the Middle Ages_, 3 vol. Clarendon Press, Oxford, 1936.
- RAVIER, Emile: _Bibliographie des Oeuvres de Leibniz_, Paris, 1937.
- RAYMOND, Pierre: _De la combinatoire aux probabilités_, Maspepero, Paris, 1975.
- REICHENBACH, Hans: _Wahrscheinlichkeitslehre_, Leiden, (1935), trad. ingl. U. of California Press, 1949, Hutten & M. Reichenbach.
- --- : _Gesammelte Werke_ in 9 Banden, Hrsg. A. Kasylah & M. Reichenbach, Braunschweig, Vieweg, 1977-
- --- : _Selected Writings_, 1909-1953, ed. M. Reichenbach & R.S.Cohen, Reidel, Holland, 1978.

- RENYI, Alfred: Letters on probability, Wayne State U. Press 1973.
- ROBERVAL, Gilles P. de: Lettres, en Henry, C.,"Huygens et Roberval", Leyde, 1879.
- --- : De Mundi Systemate, Paris, 1647.
- ROBIN, Leon: Aristote, PUF, paris, 1944.
- ROSS, Sir W. David: Aristotle, Methuen, London, (1923) 1964.
- RUSSELL, Bertrand: Human Knowledge: Its Scope and Limits, Simon & Schuster, New York, (1948).
- --- : Mysticism and Logic, Longmans Green, New York, 1919. Trad. franc. Payot, Paris.
- --- : History of Western philosophy, London, 1962.
- SAATY, T.: ed. Lectures in modern mathematics, Wiley, New York, 1965.
- SAMBURRSKY, S.: "On the Possible and Probable in Ancient Greece", Osiris, 12, 35-48, 1956.
- SANGUINETTI, Juan José: La Filosofía de la Ciencia según Sto. Tomás, Publ. de la Fac. Fil. y L. de la U. de Navarra, col. Filosofía, 25, Pamplona, 1977.
- SAURIN, Joseph: "Éloge de Jacques Bernouilli", Journal des Sçavants, 34, I, 126-139, 1706.
- SAUVEUR, Joseph: "Supputation des avantages du banquier dans le jeu de la bassete", Journal des Sçavants, 38-45, 1679.
- SAVAGE, Leonard J.: The Foundations of Statistics, Wiley,

New York, 1954.

- --- y otros : The Foundations of Statistical Inference: A Discusion, New York, 1962
- SCHNEIDER, Ivo: "Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667-1754)", Archives for H. of E.Sc., 5, 258-300, 1968.
- SERVIEN, Pius: Le Choix au Hasard: Mesure d'Egalités physiques et Calcul des Probabilités, Hermann, Paris, 1941.
- --- : Base physique et Base mathématique de la Théorie des Probabilités:vers une nouvelle forme de la théorie, Hermann, Paris, 1942.
- --- : Probabilités et Physique, hermann, Paris, 1945.
- --- : Probabilités et Quanta, Hermann, Paris, 1948.
- --- : Hasard et Probabilités, PUF, paris, 1949.
- --- : Science et Hasard, Payot, paris, 1952.
- SEXTO EMPIRICO: Obras, ed. bilingüe inglés-griego, Loeb Classical Library, London, 3 vol. 1933-6, trad. R.G. Bury.
- SHAFER, Glenn: "Non aditive probabilities in the Work of Bernouilli and Lambert", A. for H. of E.Sc., 19, 309-370, 1978.
- --- : A Mathematical Theory of Evidence, Princeton, U.P., 1976.
- --- :"Review of Ian Hacking's The Emergence of Probability", The Journal of the Am. Stat. Ass., 71, 519-521, 1976.

- --- : "A Theory of Statistical Evidence" en Harper & Hooker, eds. Vol II, pag.365-436, 1976.
- SHELL, E.D.: "S. Pepys, I. Newton and probability", The Am. Statistician, 17, 4, 27-30, 1960.
- SHEYNIN, O.B.: "On the prehistory of the theory of probability", A. for the H. of E.Sc., 12, 97-141, 1974.
- --- : "S.D. Poisson's Work in probability", Ibid, 18, 245-300, 1977-8.
- --- : "Early history of the Theory of Probability" Ibid, 17, 201-259, 1977.
- --- : "P.S. Laplace's Work on Probability", Ibid, 16, 137-187, 1976-7.
- --- : "J.H. Lambert's Work on Probability", Ibid, 7, 244-256, 1970-71.
- --- : "Newton and the Classical Theory of Probability", Ibid, 7, 217-243, 1970-71.
- --- : "On the early history of the law of large numbers", Biometrika, 55, 459-467, 1968.
- --- : "Daniel Bernouilli on the normal law", Biometrika, 57, 199-202, 1970.
- SIMPSON, Thomas: The Nature and Laws of Chance, Cave,(1740).
- SMITH, C.A.B.: "Consistency in statistical inference and decision", J.Roy. Stat. Soc. Ser. B, 23, 1-25, 1961.
- --- : "Personal probability and statistical analysis", J.Roy. Statist. Soc. Ser. A, 128, 469-499, 1965.

- SPINOZA, Benedict de : Carta a van der Meer sobre expectación, en Opera, ed. van Vloten y J.P.N. Land, The Hague, 2 vol. (1882), II, 521-4.
- SPITZER, F.: Principles of random walk, Van Nostrand, Princeton, 1964.
- STEINHAUS, H.: "Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure", Fund. Math, 4, 286-310, 1923.
- --- : Instantaneas matemáticas, G.E. Stechert, New York, 1938.
- STIGLER, Stephen M.: "Napoleonic Statistics: The Work of Laplace", Biometrika, 1975.
- STROWSKI, Fortunat: Pascal et son temps, Paris, 3 vol, 1930.
- SUN TSE: El Arte de la Guerra (IV a. de Jc.), trad esp.
- SUPPES, Patrick: "The measurement of belief", J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 36, 160-175, 1974.
- SÜSSMILCH, Johan Peter: Die Göttliche Ordnung, Berlin, (1741).
- SWANN, W.F.G.: La arquitectura del Universo, MacMillan, New York, 1934.
- TARTAGLIA, Nicolo: General Trattato di Numeri et Misure, Venecia, (1556).
- TATON, René: "Review of Ore's translation of Cardano (1563)" Revue d'Histoire des Sciences, 1, 288-289, 1954.
- --- : Reason and Chance in Scientific Discovery, Hutchinson, London, 1957.
- --- : Causalités et Accidents de la découverte scientifique, Masson, Paris, 1955.

- TCHEBYCHEV, P.: _Oeuvres_, 2 vol. St. Petersburgo, 1899-1907
- --- : "Des valeurs moyennes", _J. de Math_, _12_, 1867.
- THATCHER, A.R.: "A note on the early solutions of the problem of the duration of play", _Biometrika_, _44_, 515-9, 1957.
- THORNDIKE, Lynn: _A History of Magic and Experimental Science_, 8 vol. MacMillan, New York, 1923-58.
- THORNTON, C.Fry: _Probability and Its Engineering Uses_, New York, 1937.
- THRALL, R.M. COOMBS, C.H. & DAVIS, R.L.: _Decision Processes_ Wiley, New York, 1954.
- TODHUNTER, Isaac: _A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace_, (1865), MacMillan, Cambridge, 1949.
- --- : _History of the Calculus of Variations during the nineteenth century_, (1861), Chelsea, New York 1962.
- TOMAS DE AQUINO: _Summa contra Gentiles_
- --- : _Summa Theologica_, vol 19 y 20.
- TOULMIN, Stephen E.: _The Uses of Argument_, Cambridge U.P. 1958.
- --- : _Philosophy of Science_, Harper, New York, 1960.
- --- : "Probability", _Proceed. of the Aristotelian Soc._, vol sup. _24_, 27-62, 1950.

- USPENSKY, J.: Introduction to mathematical probability.
- VARIOS AUTORES: Pour une Histoire de la Statistique, Tome I, Institut Nat. de la stat. et des et. econom., Paris.
- --- : Philosophers speak for themselves, vol I , Ed. T.V.Smith, Chicago, 1956.
- VASSILIEF, A.: "Le bicentenaire de la loi des grands nombres", L'enseignement Mathématique, 16, 2, 92-100, 1914.
- VENN, John: The Logic of Chance, (1866), Chelsea, London, 1888, New York, 1962.
- VOLTAIRE, Francois M. Arouet: Sur les pensées de M. Pascal Lettre XXV de Lettres Philosophiques, Amsterdam, (1734) ed. G.Lanson, Paris, 1917.
- VLEK, Charles: Psychological studies in probability and decision making, Leiden, Univ. Pub. 1973.
- WALKER, Helen M.: "Abraham de Moivre", Scripta Mathematica, 2, 316-33, 1934.
- --- : Studies in the History of Statistical Method, Baltimore, Williams & Wilkins, 1929.
- WALLIS, John: "A discourse of combinations, alternations and aliquot parts", A Treatise of Algebra, London, 104-52, (1685).
- WEAWER, Warren: Lady Luck, Doubleday Co., 1963.
- --- : "The Reign of Probability", Scientific Month. 31, 457-466, 1930.

- WESTERGAARD, Harald L.: *Contributions to the History of Statistics*, P.S.King, London, (1932), 1969.
- WHITEHEAD, Alfred N.: *Introducción a las matemáticas*, H.Holt, New York, 1911.
- WHITWORTH, William Allen: *Choice and Chance: With One Thousand Exercises*, Hafner, London, 1951.
- WIENER, N.: "Differential Space", *J. Math. Phys. M.I.T.*, *2*, 131-174, 1923.
- --- : *Collected Works*, Cambridge, Mass, 1976
- WILHELM, Kurt: "Chevalier de Méré und sein Verhaltnis zu Blaise Pascal", *Romanische Studien*, *34*, Berlin, 1936.
- WILKINS, John: *The Discovery of a World in the Moon or a Discourse tending to Prove that itis probable there may be another habitable world in that planet*, London, (1638).
- --- : *Mercury or the Secret and Swift Messenger*, London, (1641).
- --- : *An Essay towards a Real Character and a Philosophical Language*, London, (1668).
- --- : *The mathematical and philosophical Works*,
- --- : *On the Principles and Duties of Natural Religion*, London, (1675).
- WITT, Jan de: *Waerdye van lyf-renten naer proportie van losrenten*, (1671), S'Gravenhage, trad. ingl. Hendriks (1852-53). trad. franc. Chateleux, 1937.

- WOLF, A.: A History of Science, Technology and Philosophy in the Eighteenth Century, Allen & Unwin, London, 1938.
- WOLLENSCHLÄGER, Karl: "Der Matematische Briefwechsel zwischen Johann I. Bernouilli und Abraham de Moivre", Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 43, 151-317, 1932.
- WRIGHT, G.H. von: The Logical Problem of Induction, (1941) Oxford, 1957.
