



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CC. ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Título: Valoración y cobertura de derivados financieros: opciones financieras y el método binomial

Autor: Armando Milán Fernández

Tutor: Roberto Ferreiro Pérez

Curso académico: 2021/2022

Convocatoria de junio

Índice:

Resumen	3
1. TIPOS DE OPCIONES: AMERICANAS Y EUROPEAS	4
1.1 Definición y elementos.....	4
1.2 Clasificación.....	5
2. MODELO DE BLACK-SCHOLES DE EVOLUCIÓN DE PRECIOS	9
3. EL MÉTODO BINOMIAL	11
3.1 Introducción.....	11
3.2 Ambiente neutral al riesgo.....	12
3.3 Nomenclatura y funcionamiento del método del árbol binomial.	13
3.4 Introduciendo la volatilidad	18
4. APLICACIÓN DEL MÉTODO BINOMIAL A OPCIONES AMERICANAS ...	19
4.1 Relación entre primas de opciones americanas y europeas.....	23
5. IMPLEMENTACIÓN EN EXCEL DEL MODELO BINOMIAL	24
5.1 Resumen del proyecto.....	24
5.2 Árbol binomial	25
5.3 Creación de funciones a través de Visual Basic	27
5.4 Utilidades del proyecto.....	31
Bibliografía	33

Resumen:

Las opciones financieras son instrumentos financieros derivados que otorgan un derecho a su comprador. Son muy comunes en el ámbito inversor, pues se pueden utilizar con muchos fines (especulación, cobertura, inversión, etc.). En este trabajo se analizan los diferentes tipos de opciones existentes, así como los dos métodos más conocidos aplicados en su valoración: el método de Black-Scholes y el método binomial. Con el objetivo de poder valorar todo tipo de opciones, se implementa el modelo binomial en un documento en formato Excel, creando macros con funciones para su valoración. A su vez, se implementa el árbol binomial, propio del modelo binomial, en Excel, de forma que se pueda obtener la prima de cualquier opción introduciendo los parámetros necesarios. Para concluir, se realiza una breve comparación entre los resultados obtenidos por ambos métodos.

1. TIPOS DE OPCIONES: AMERICANAS Y EUROPEAS

1.1 Definición y elementos

Las opciones son instrumentos financieros derivados, que se establecen en contratos, los cuales implican un derecho para el comprador y una obligación para el vendedor, a comprar o vender un activo subyacente en un plazo estipulado y a un precio convenido de antemano (precio de ejercicio o *strike*). Es importante destacar el término “derecho”, pues las opciones nos otorgan el derecho, pero en ningún caso la obligación de comprar o vender un activo. En esta última característica se diferencian de otros derivados financieros, como podrían ser los futuros o los *forwards*.

Tras esta breve descripción, es de vital importancia definir algunos conceptos que se van a mencionar a lo largo de todo el trabajo, con objeto de entender a qué se hace referencia en todo momento. Un **activo subyacente** es, según la R.A.E., “un activo real o financiero en el que se basa un instrumento derivado”, es decir, en una opción sobre una acción de Meta, la acción de Meta sería el activo subyacente. El **precio de ejercicio o *strike*** es el precio al que el poseedor de la opción puede comprar o vender el activo subyacente, al que se puede ejecutar la opción. La **prima** es el precio que hay que pagar por ejercer la opción (el coste propiamente dicho), y es, en última instancia, lo que se va a tratar de conocer a la hora de comprar una opción. Es pagada por el comprador (por obtener un derecho) al vendedor (por obligarse). La **volatilidad**, según la R.A.E., es la inestabilidad de los precios en los mercados financieros. En lo que a nuestro tema atañe, podríamos ser más precisos y definirla como la variabilidad de los precios del activo subyacente. El **tipo de interés** se puede definir como una referencia de coste del dinero, indicando el precio a pagar por recibir dinero. Para ser más precisos en nuestros futuros cálculos, es fundamental calcular y tener en cuenta el **tanto instantáneo**, que, simplificando mucho su explicación, es el límite del tanto nominal cuando la periodicidad tiende a infinito. A efectos prácticos, se calcula como el logaritmo neperiano (\ln) de uno más el tipo de interés.

Como resulta lógico, no sale gratis adquirir una opción, pues, de lo contrario, todo agente interesado abriría posiciones para, por ejemplo, obtener una cobertura de riesgo de tipo de interés. Tal y como he mencionado antes, para el comprador la opción supone un derecho (y no una obligación), por ello, llegada la fecha de vencimiento, a este le interesará o no ejercerlo en función de la diferencia entre el precio fijado para la operación y el precio que en ese momento tenga el subyacente en el mercado de contado. Por ejemplo, si un comprador de una *Call* acordó hace 6 meses comprar un móvil por 600€, que en su día costaba esa cantidad, y hoy en día ese móvil cuesta en el mercado 555€, obviamente el comprador de la opción de compra no decidirá ejercerla, ya que puede encontrar ese mismo móvil por 45€ menos en el mercado. En cambio, si el móvil estuviese a la venta en el mercado por 645€, sí decidiría ejercerla, ya que se ahorraría 45€ mediante el ejercicio de la opción. En el mundo real, el comprador de esta *Call* tendría que pagar una prima por comprar la opción. Suponiendo que esta prima fuese de 5€, el beneficio del comprador será de 40€, ya que se descontaría la prima como coste. Sintetizando, el coste para el comprador de la *call* en caso de ejercerla sería de 600€ más la prima, de 5€ (un total de 605€). Al comprar esas opciones por 600€ (*strike*), está obteniendo un beneficio de 45€ (porque en el mercado valen 645€), al que, si le sustraemos la prima a pagar, se queda en una ganancia neta de 40€.

1.2 Clasificación

Al igual que con diversos conceptos económicos, podemos mencionar diferentes criterios en los cuales basar la clasificación de las opciones, siendo los principales los que se utilizan a continuación:

Según el derecho que otorgan:

- Opción de compra o *Call*: el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, a comprar el subyacente a un precio determinado, en la fecha de vencimiento establecida. En este caso, el vendedor de la opción es el que tiene la obligación de venderla, siempre y cuando el comprador decida ejercitar su derecho de comprar el subyacente. Es el vendedor el que recibe la prima del comprador, como beneficio por la obligación (suponiendo un coste para el comprador, a cambio del derecho obtenido). Un agente

utilizaría este tipo de opciones si predijese una subida de precio del subyacente, pues estaría limitando esta subida al precio de ejercicio o strike.

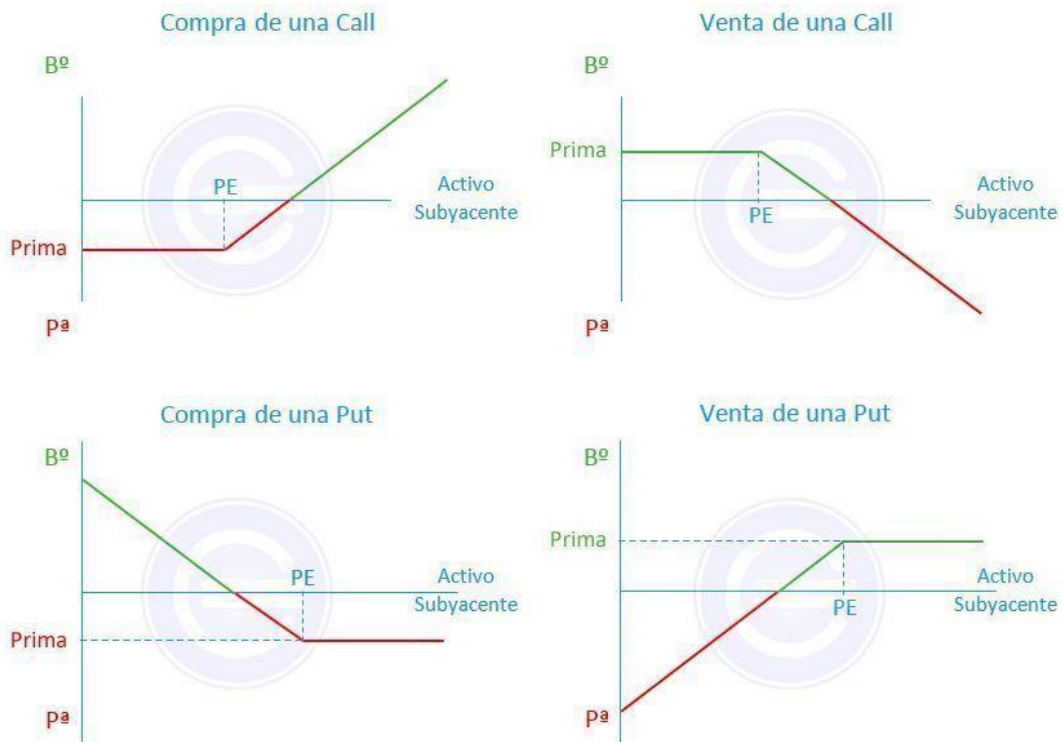
- Opción de venta o Put: el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, a vender el subyacente a un precio fijado, en la fecha de vencimiento. El comprador de la opción es el que tiene la obligación de comprar, siempre y cuando el vendedor decida ejercitar su derecho de vender el subyacente. Un agente utilizaría este tipo de opciones si predijese una bajada de precio del subyacente, pues estaría limitando esta bajada al precio de ejercicio o strike.

Para ilustrar ambas modalidades de opciones, procedo a formular un ejemplo muy simplificado:

La acción de PayPal cotiza hoy en día a \$93 en el índice Nasdaq. Existe la posibilidad de comprar una opción *Call* o *Put*, con un precio de ejercicio o strike de \$95. Si yo, como inversor, creo que esta acción va a valer \$100 en un año, adquiriría una opción de compra o *Call*. Al realizar esta operación, estaría obteniendo un beneficio de \$5, ya que el precio de la acción en un año realmente va a ser de \$100, pero yo la estoy adquiriendo por \$95 (precio de ejercicio o strike). Mi ganancia sería de $\$100 - \$95 = \$5$.

Si en vez de pensar que esta acción se va a revalorizar al alza, pensase que su valor va a caer a \$90, compraría una opción *Put*, y ganaría de igual manera \$5. Mi ganancia vendría de vender por \$95 (strike) una acción que en el mercado vale \$90.

Figura 1: Gráficos de opciones



Fuente: Economipedia

Figura 2: Opciones: puntos de vista

Opción "Call"	Vendedor	Comprador
Derecho u obligación	Obligación	Derecho
Expectativas del inversor	Bajistas	Alcistas
Beneficios	Prima	Ilimitados
Pérdidas	Ilimitadas	Prima

Opción "Put"	Vendedor	Comprador
Derecho u obligación	Obligación	Derecho
Expectativas del inversor	Alcistas	Bajistas
Beneficios	Prima	Ilimitados
Pérdidas	Ilimitadas	Prima

Fuente: Economipedia

Las Figuras 1 y 2 merecen mención aparte, pues son muy utilizadas a la hora de explicar teoría de opciones. Sobre todo, la Figura 1 es globalmente conocida, pues representa las cuatro operaciones existentes con opciones: compra de una *Call*, venta de una *Call*, compra de una *Put* y venta de una *Put*. La Figura 2, en forma de tabla, nos aclara

de manera escrita lo visto en la primera, dándonos detalles según la operación realizada. En la Figura 1 podemos observar una gráfica que representa la compra de una Call. En el eje de abscisas está representado el precio del activo subyacente, y en el eje de ordenadas, el beneficio obtenido por el titular del derecho (en caso de compra de una Call, el beneficio del comprador, en caso de venta de esta Call, el beneficio del vendedor). Como se puede observar, en las cuatro gráficas, la línea horizontal representada no recorre exactamente el eje x, pero es paralela al mismo. ¿Por qué sucede esto? Es porque en la compra, es el comprador el que paga la prima, pues es el que tiene el derecho. En cambio, en la venta de la Call, el vendedor está obligado a vender, y la forma de remunerar esta obligación es la prima. Es interesante también observar la relación de la recta en cuanto al beneficio, ya que cuando se compra una Call, el beneficio es creciente e ilimitado según aumenta el precio del activo subyacente, en cambio, cuando se vende una Call, el beneficio del obligado está limitado a la prima, y desciende hasta convertirse en negativo según aumenta el precio del activo subyacente. Si nos fijamos de nuevo en la gráfica de la esquina superior derecha, la recta tiene un punto de inflexión en el que empieza a crecer desde un beneficio negativo (igual a la prima). Según va aumentando el precio del subyacente, a partir de este punto, la recta no para de crecer, ilimitadamente. El punto de inflexión es el momento en el que la opción empieza a ser rentable en términos brutos, y cuando supera el eje de abscisas, el beneficio es neto (es decir, sumando el coste de la prima al coste de adquisición teniendo en cuenta el precio de ejercicio, es rentable ejercitar la opción porque el precio de mercado del subyacente es superior). En las gráficas inferiores (compra y venta de una Put) observamos el mismo “mecanismo” de funcionamiento en las gráficas. Simplemente, al ser las Put opciones de venta (es decir, que otorgan el derecho de vender) el beneficio del comprador aumenta con la disminución de precio del subyacente, y el del vendedor vuelve a ser la prima, que se reduce con la reducción del precio del subyacente. Al ser Put y Call opciones opuestas, es interesante resaltar que las gráficas de ambas son simétricas en el eje Y.

En función del momento en que pueden ejercerse:

Este criterio de clasificación distingue dos tipos muy diferentes de opciones, dividiendo a las opciones entre las que se pueden ejercer en cualquier momento y las que solo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento. A continuación, se va a detallar dicha clasificación, indicando cual es la preferida por los inversores (en la mayoría de los casos).

- Opción americana: se puede ejercer en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento (incluida). La mayoría de las opciones en el mercado son de este tipo. Son las opciones más ventajosas por su mayor libertad. A su vez, son más complejas en cuanto a su valoración, ya que el hecho de poder ejercerlas en cualquier momento dificulta el proceso de cálculo de la prima. Este tipo de opciones suele ser el favorito por los inversores, por su flexibilidad a la hora de ejercitarlas.

- Opción europea: sólo puede ejercerse en la fecha de vencimiento. Son más fáciles de valorar y son menos ventajosas para el poseedor, ya que fuerzan al mismo a esperar hasta la fecha de vencimiento.

2. MODELO DE BLACK-SCHOLES DE EVOLUCIÓN DE PRECIOS

Supuestos de partida del modelo Black-Scholes:

- No existen los costes de transacción ni impuestos.
- La tasa de interés libre de riesgo (r) y la volatilidad son constantes.
- La acción no paga dividendos.
- Venta en corto permitida.
- No existe el arbitraje sin riesgo.
- La distribución de probabilidad de los retornos sigue una distribución normal.

El modelo Black-Scholes permite obtener el precio de una opción europea, pero no de una opción americana (pues para calcular una opción americana se tendrá que aplicar el método binomial). Como se verá más adelante, la prima de una opción europea se puede obtener aplicando el método de Black-Scholes o el método del árbol binomial, y el resultado obtenido no va a ser exactamente el mismo, pero va a ser muy parecido. La

limitación del cálculo de las primas para opciones americanas tiene una explicación muy sencilla: el posible ejercicio anticipado de la acción. Al poder ejercerse en cualquier momento, va a ser necesaria la construcción de un árbol binomial, para poder así estudiar en cada nodo o rama si interesa o no el ejercicio anticipado.

Fórmula de Black-Scholes:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$\text{where } d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

c: Precio de la prima de una opción “Call” (europea).

p: Precio de la prima una opción “Put” (europea).

S₀: Precio del activo subyacente en 0 (T=0).

r: Tasa libre de riesgo (compuesta de forma continua).

T: tiempo hasta vencimiento en años.

K: Precio de ejercicio (Strike Price).

N(d₁) y (d₂): Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal.

σ: Volatilidad en tanto por uno.

Si hacemos los cálculos para una opción Call europea, con K y S₀ iguales a 100, tasa libre de riesgo igual a 7% y volatilidad igual a 20%, obtenemos un precio según Black-Scholes de 18,5292 para la prima, en cambio, aplicando el método del árbol binomial (con 3 pasos), obtenemos una prima de 18,6137. Como se puede observar, las primas no son iguales, pero distan entre ellas en apenas decimales. Como aclaración que quizá resulte útil, se pueden definir mejor los parámetros representados por los caracteres d₁ y d₂. Estos caracteres son el valor con el que se obtiene la probabilidad acumulada de una distribución normal al uso (media cero y desviación típica uno). Es decir, son los valores que, mirando en las tablas de probabilidad, nos dan la siguiente probabilidad: P(Z ≤ d₁). La probabilidad obtenida es la que en Black-Scholes se representa como N(d₁) y N(d₂). Por lo tanto, para hacer el cálculo es necesario consultar las tablas de probabilidad normal.

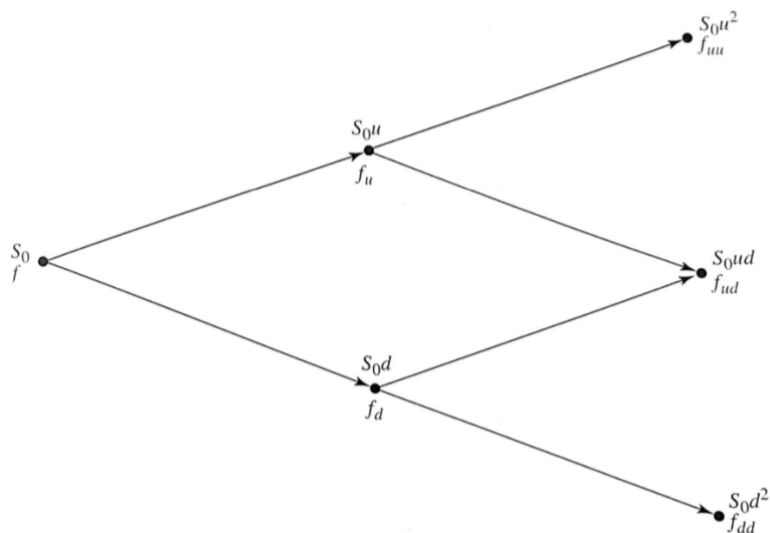
Existe una discusión acerca de qué modelo es más exacto, si el de Black-Scholes o el método binomial. En un estudio elaborado en la Universidad de Tulane (Benavides F., 2002), se concluye que el método de Black-Scholes es más eficiente cuando las condiciones son inestables, mientras que el método binomial es más útil cuando las condiciones son más estables, y se conoce con cierta certeza la evolución del precio del subyacente.

3. EL MÉTODO BINOMIAL

3.1 Introducción

El método del árbol binomial, más conocido como modelo binomial, es el utilizado para calcular el valor de la prima de opciones americanas y europeas. Precisamente por conseguir ser útil para el cálculo de primas de opciones americanas, es un método que ha logrado un gran renombre.

Figura 3: Árbol Binomial de dos pasos



Fuente: Libro *Options, Futures and Derivatives*, John C. Hull

En la Figura 3 se puede observar un árbol binomial de dos pasos. El término “pasos” hace referencia a la cantidad de veces que aplicamos un cambio de precio en el activo subyacente, es decir, la cantidad de veces que el activo subyacente sube o baja de precio (de aquí viene el término binomial, ya que de cada nodo salen dos flechas, de subida y de bajada de precio). Por lo tanto, para calcular el número exacto de nodos finales que vamos a obtener, se ha de elevar el número 2 al número de pasos que se realicen. Como se observa, hay cuatro nodos finales, aunque el nodo S_{0ud} coincida con el S_{0du} . Suponiendo que la subida (u) es igual a 1,2 y la bajada (d) igual a 0,8, con un precio inicial de 100, tendríamos 120 y 80 en el primer paso. En el segundo paso, obtendríamos 144, 115,2, 115,2 y 78,8. Si desglosamos el cálculo de los números obtenidos, tenemos que 144 es el número resultante de multiplicar el precio del subyacente inicial por dos veces la subida (u), es decir, $100 * 1,2^2$. La clave del acortamiento del árbol viene ahora, pues según la propiedad conmutativa de la multiplicación, es exactamente lo mismo $S_0 * u * d$ que $S_0 * d * u$. La utilidad de esto, aunque parezca simple y ridícula, es muy elevada, pues permite simplificar los nodos finales de un árbol enormemente. A partir de este momento, y como es normal, se va a trabajar con árboles simplificados o recombinados (cuando sucede esto, se dice que el árbol recombina). A su vez, cuando los parámetros u y d sean los mismos constantemente, diremos que estamos ante árboles homogéneos (durante este trabajo nos moveremos en un mundo con árboles homogéneos). Más adelante se verá que, en el método binomial, $d = 1 / u$. Es decir, que la bajada es uno dividido entre la subida.

3.2 Ambiente neutral al riesgo

Es de vital importancia destacar que el método que estamos analizando se desarrolla en un ambiente neutral al riesgo, es decir, supone que los flujos crecen a una tasa igual a la tasa libre de riesgo. En este ambiente neutral al riesgo, la rentabilidad esperada de una acción es la tasa libre de riesgo, y la tasa de descuento aplicada a los pagos futuros de una opción es, del mismo modo, la tasa libre de riesgo. Si aplicásemos este modelo en el mundo real, habría una confusión en cuanto a qué tasa de descuento aplicar a los pagos futuros. Es también importante resaltar que el modelo supone que no existe posibilidad de arbitraje, que es el aprovechamiento de la diferencia de precio de

un mismo activo financiero en diferentes mercados, con el fin de obtener un rendimiento económico.

3.3 Nomenclatura y funcionamiento del método del árbol binomial.

Una vez aclarados estos temas, podemos entrar en detalle sobre cómo funciona este método, sobre cuál es su base. El método binomial aplica una metodología inductivo-regresiva, es decir, partiendo del valor de la opción en los nodos finales del árbol, trabajamos hacia atrás, calculando el valor o *payoff* de la opción en cada nodo, llegando al último nodo, que sería el valor actual de la prima de la opción. En caso de tratarse de opciones americanas, en cada nodo valoraríamos si es ventajoso o no el ejercicio anticipado de la opción.

Supongamos que estamos valorando opciones sobre acciones. La letra **S** o (S_0) hace referencia al precio actual del activo subyacente (de la acción), el cual puede aumentar, en la cuantía **u** (proveniente de “*up*”), llegando a un precio de $S_0 * u$; o puede disminuir, en la cuantía **d** (proveniente de “*down*”), llegando a un precio de $S_0 * d$. Nótese que el término **u** siempre va a ser mayor que uno, y, el término **d**, menor que uno, ya que son factores de aumento y disminución, respectivamente. La letra **p** hace referencia a la probabilidad de que el precio aumente (a $S_0 * u$) en un mundo con inversores neutrales al riesgo, por lo que $1-p$ sería la probabilidad de que el precio de la acción disminuya ($S_0 * d$). Es de capital importancia destacar que esta **p** es la probabilidad neutral al riesgo, pues la probabilidad real no influye en el precio de la opción. La letra **f** hace referencia a al precio o pago de la opción en ese momento, también llamado *payoff*, y siguiendo la lógica anterior, **f_u** es el pago que nos da la opción si el precio de la acción aumenta, y **f_d** el pago que nos da la opción si el precio de la acción disminuye. La letra **r** (o **R**) es la tasa libre de riesgo, y, como nos encontramos en un ambiente neutral al riesgo, es la que se va a usar para las operaciones financieras necesarias. En muchos textos teóricos, se define una variable **a**, como la variable de descuento, siendo **a** igual a $e^{-r*\Delta t}$. En este caso, no se considera necesario definir este parámetro, pues se va a trabajar con $e^{-r*\Delta t}$ directamente. Además, en nuestro desarrollo del modelo binomial, dada la tasa libre de riesgo, vamos a hacer una transformación hacia un tanto instantáneo libre de riesgo. El tanto instantáneo es igual al $\ln(1+r)$.

T o **t** es el número de años que comprende un árbol, **n** (o **N**) el número de pasos y Δt la amplitud de los periodos. Por lo tanto, está implícito que $\Delta t = T/n$ (si, por ejemplo, estamos en un árbol de un año, con 4 pasos, Δt será igual a 0,25 años). Es interesante ejemplificar esta parte, pues al final se va a tratar de una de las variables fundamentales sujetas a cambio. Si queremos valorar una opción call sobre una acción a un año, lo más lógico sería realizar un árbol binomial con cambio de precio diario (se pudiésemos estimarlo). Es decir, **T** sería igual a 1, **n** a 365 (días que tiene un año), y, por lo tanto, Δt sería igual a 0,0027 (cifra que se usa en última instancia para los cálculos del método binomial). Para denominar la volatilidad, se va a utilizar la letra sigma (σ), expresada en tanto por ciento, pero utilizada en tanto por uno a la hora de realizar los cálculos. Las letras **K** o **E**, van a hacer referencia al precio de ejercicio o *strike*, es decir, al precio al que se podrá ejercer la opción. En el campo de las opciones sobre activos subyacentes que pagan dividendos, nombraremos a los pagos o dividendos con la letra **q**.

Una vez detallada la nomenclatura que se va a utilizar, se ha de explicar el funcionamiento práctico del modelo de forma más exacta. Esta explicación se va a centrar en desarrollar el método binomial para opciones europeas, pues se dedicará el siguiente apartado al desarrollo para opciones americanas. Como se ha mencionado en el primer párrafo de este apartado, el método binomial es regresivo, de tal manera que se empiezan valorando los nodos finales y, yendo hacia atrás, paso por paso, obteniendo el valor de la opción en cada nodo, se logra llegar al momento actual, en el cual se obtiene el valor de la prima a fecha actual. Si se vuelve a centrar la atención en la Figura 3, se puede observar que, por cada nodo, existen dos “datos”: el precio del activo subyacente en esa fecha (S_t) y el *payoff* (f). Si bien ya se ha explicado cómo se calcula el precio del activo subyacente, es necesario aclarar cómo se haya el *payoff*, ya que es lo que se busca en última instancia. Para el cálculo de este dato, se han de distinguir dos fórmulas: la aplicada en la última columna del árbol, y la aplicada en las anteriores (partiendo de la anterior, y descontando esta de forma retroactiva). Ambas fórmulas se van a mostrar a continuación, junto con su explicación en el siguiente párrafo.

$$f_n = \text{Max} (S_t - K; 0) \quad [1]$$

$$f = e^{-r \cdot \Delta t} (p * f_u + (1 - p) * f_d) \quad [2]$$

En las fórmulas anteriores se pueden ver reflejados algunos de los cálculos necesarios para hallar la prima de una opción Call europea (para una Put europea se detallarán más adelante los cambios). Como hemos indicado, se comienza a calcular desde la última columna de nodos, es decir, desde el último paso. La forma de operar comienza pues, en la última columna, calculando el *payoff* en estos nodos. Para esto, se utiliza la primera fórmula: $\text{Max}(S_t - K; 0)$, la cual nos da la cifra máxima entre la resta del precio del subyacente en ese nodo (S_t) menos el precio de ejercicio (K) y cero. Se puede llamar a esta última columna la columna de vencimiento, ya que será la columna que represente las posibilidades existentes en el vencimiento. Simplificando el concepto, la fórmula que nos da los *payoffs* no es más que el beneficio que se obtendría ejerciendo la opción a vencimiento (como ya se ha visto, este beneficio viene dado por la diferencia entre el precio del activo subyacente en ese momento y el precio de ejercicio fijado). En este cálculo es en el cual se va a dar la diferencia entre Call y Put. Lo visto anteriormente es de aplicación para una Call. Aplicando la lógica, obtendríamos que, para una Put, habría que hacer la resta de forma opuesta, es decir, resolver $\text{Max}(K - S_t; 0)$, obteniendo así el posible beneficio de la opción de venta (precio de ejercicio menos el precio del subyacente en ese momento, pues que cuanto menor sea este (S_t), mayor será el beneficio). El hecho de hacer el máximo entre la suma o resta y cero es que, al tratarse de opciones, el ejercicio es opcional, por lo que, si el resultado es menor que cero, es decir, una pérdida, nadie ejercitaría la opción.

Ya se tendrían calculados los precios del subyacente en todos los nodos, y los *payoffs* en el momento del vencimiento, es decir, en la última columna. Lo único que faltaría, sería aplicar la fórmula que nos permite arrastrar hacia atrás los datos para llegar al valor de la opción hoy. Para esto, se utiliza la fórmula número dos, la cual no es más que un descuento de una especie de media ponderada. El primer término ($e^{-r^* \Delta t}$) es el factor de descuento, equivalente a $1 / (e^{r^* \Delta t})$, por el cual descontamos el segundo término de la fórmula. A priori, conocemos todos los componentes de la fórmula, pues es sabido que p es la probabilidad neutral al riesgo de que aumente el precio del subyacente y f_u y f_d son los *payoffs* cuando el precio sube y baja, respectivamente, los cuales hemos calculado en el párrafo anterior. Entonces, solo nos queda desglosar el cálculo de p , para tener todas las herramientas para hallar el valor de una opción europea.

$$p = \frac{e^{r*\Delta t} - d}{u - d} \quad [3]$$

La fórmula N.º 3 detalla el proceso de cálculo de la probabilidad neutral al riesgo. Para obtener esta probabilidad, es necesario conocer el proceso de construcción de una cartera sin riesgo, es decir, una cartera que, para una subida y para una bajada, el payoff fuese el mismo. Definimos una cartera en la que se compran A acciones (*long position*) y se abre una posición en corto en una opción de venta sobre esa acción (*short position*). En caso de un aumento de precio del subyacente, el valor de la cartera sería de $S * u * A - f_u$, y en caso de una bajada, de $S * d * A - f_d$. Como se quiere una cartera sin riesgo (*riskless portfolio*), se han de igualar ambos valores de la cartera, es decir,

$$S * u * A - f_u = S * d * A - f_d$$

$$\text{Y despejando } A, \text{ se obtiene } A = \frac{f_u - f_d}{S * u - S * d}$$

Como se observa, A es el ratio que muestra el cambio en el precio de la opción (f) cuando cambia el precio del subyacente (S). Para calcular el valor presente de la cartera, es necesario descontar el valor, por lo que se tendría:

$$(S * u * A - f_u) * e^{-r\Delta t}.$$

El coste de crear la cartera sería $S * A - f$, que igualándolo con la ecuación anterior (el valor de la opción descontado) y despejando f se tendría:

$$f = S * A * (1 - u * e^{-r\Delta t}) + f_u * e^{-r\Delta t}$$

Si se sustituye A en la ecuación anterior, se obtiene:

$$f = S * \left(\frac{f_u - f_d}{S * u - S * d} \right) * (1 - u * e^{-r\Delta t}) + f_u * e^{-r\Delta t}$$

De donde, operando y despejando, obtenemos:

$$f = e^{-r\Delta t} * (p * f_u + (1 - p) * f_d) \quad [2]$$

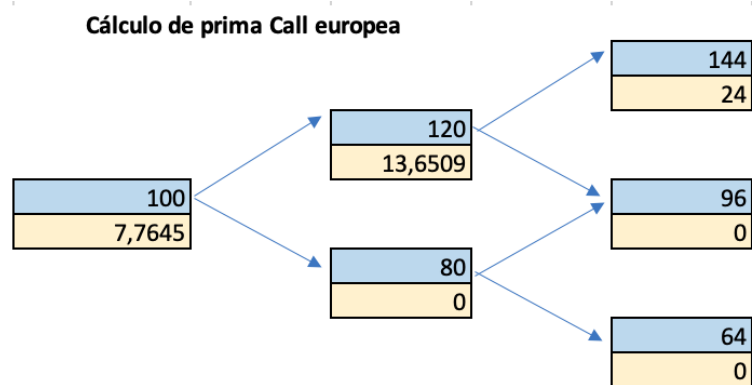
Y, despejando p,

$$p = \frac{e^{r*\Delta t} - d}{u - d} \quad [3]$$

Una vez aclarado el cálculo de p , se puede comenzar con el cálculo de la prima, pues se tienen todos los elementos necesarios para su cómputo. A continuación, para afianzar el cálculo de primas, se presenta un sencillo ejemplo:

Ejemplo 1: Cálculo de prima Call europea

S	100
K	120
u	1,2
d	0,8
r	7%
p	0,589049272
1-p	0,410950728
Δt	0,5
T	1
n	2

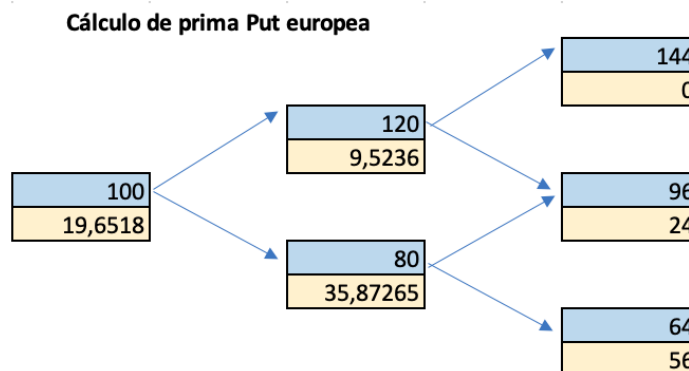


Fuente: elaboración propia

Con los datos dados, se calcula la prima siguiendo las instrucciones anteriormente dadas: para los recuadros sombreados en azul, se multiplica S por u y por d , según suba o baje el precio. Tras tener calculados los precios del subyacente en los diferentes nodos, se procede al cómputo de p , aplicando la fórmula número 3. Una vez se tiene p calculada (y, por tanto, $1-p$), se han de calcular los payoffs, utilizando las fórmulas 1 y 2. Para la última columna, se utiliza la fórmula 1, y se puede comprobar que, en el primer nodo de esta columna, el payoff es 24, es decir, el resultado de restar $S_t - K$ ($144-120$), que, siendo superior a cero, supone el máximo de ambos términos. En cambio, en el segundo nodo de la última columna, vemos un 0: esto es porque el máximo entre $S_t - K$ y cero, en este caso, es igual a 0 (pues $S_t - k$ resulta ser -24). Teniendo ya resultas todas las celdas azules y la última columna de las amarillas, solo es necesario aplicar la fórmula número 2 de forma retrospectiva para obtener la prima de esta opción. Si se aplica dicha formula, se obtienen las cifras que se pueden observar en el ejemplo, llegando a obtener una cifra de 7,7645, el precio de la opción hoy en día, es decir, la prima.

Ejemplo 2: Cálculo de prima Put europea

S	100
K	120
u	1,2
d	0,8
r	7%
p	0,58904927
1-p	0,41095073
Δt	0,5
T	1
n	2



Fuente: elaboración propia

En el ejemplo 2, se puede observar exactamente la misma opción que en el ejemplo 1, pero, esta vez, se trata de una opción de venta o *Put*. El procedimiento es exactamente el mismo, con una salvedad: los *payoffs* de la última columna están calculados de forma diferente, como ya se ha explicado anteriormente. Es fácil comprobarlo: en este caso, la operación es $\text{Max}(K - S_t; 0)$, por eso en el primer nodo es 0, en el segundo 24 ($120 - 96$), y, en el último, 56 ($120 - 64$). Puede sorprender la prima tan elevada en comparación con el ejemplo anterior, pero tiene una explicación muy sencilla: la elevada diferencia entre el precio de ejercicio o *strike* (K) y el precio del subyacente al inicio (S). Al ser una opción de venta con un *strike* elevado, es lógico que sea un opción más cara, pues las posibilidades de que el precio del subyacente aumente por encima del precio de ejercicio de reducen, tanto por el elevado *strike* como por la probabilidad neutral al riesgo (superior para una subida que, para una bajada, como se puede observar en el cuadro verde).

3.4 Introduciendo la volatilidad

En el mundo de los derivados financieros, al igual que en la economía en general, existe la volatilidad, concepto ya definido en el apartado 1.1. Hasta este momento no se ha tenido en cuenta en ninguno de los cálculos realizados, pues no se ha incluido para simplificar la explicación, pero es de vital importancia, ya que es una variable que afecta de manera directa al precio de la opción. Teniendo en cuenta la volatilidad, se va a poder hacer un ajuste de los parámetros de subida (u) y de bajada (d) del subyacente, para así incluirla en el modelo, y obtener la prima verdadera. A continuación, se muestra el cálculo del factor de subida y del factor de bajada como una función de la volatilidad.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad [4]$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u} \quad [5]$$

Quizá puede parecer que es un cambio muy significativo en el proceso de cálculo, pero no lo es. Sí es un cambio significativo en cuanto al resultado, es decir, en cuanto al valor de la opción, pero no en cuanto al proceso de cálculo. Si se mira hacia atrás, en el modelo desarrollado hasta este momento, u y d se tomaban como parámetros dados, en cambio, ahora pasan a ser variables en función de la volatilidad y de $\sqrt{\Delta t}$. No cambian los cálculos gran cosa por este motivo, porque simplemente hay que computar estas dos variables (u y d), y todo lo demás se mantiene igual, aplicando estos cambios. Se procedería de manera exacta a la ya expuesta, calculando el valor del subyacente en cada nodo (aplicando las nuevas variables u y d), y calculando el valor de la prima.

4. APLICACIÓN DEL MÉTODO BINOMIAL A OPCIONES AMERICANAS

En este apartado se va a desarrollar el método binomial, explicado en el punto anterior, aplicándolo a opciones americanas, es decir, a opciones cuyo ejercicio se va a poder realizar antes del vencimiento. Como se va a analizar más adelante, esto suele suceder en opciones Put, ya que en las opciones Call sin dividendos (se ha de recordar que toda nuestra explicación trata sobre opciones que no remuneran con dividendos) nunca va a tener sentido ejercerlas antes del vencimiento.

Una vez aclarada la introducción, procedamos a analizar cómo se puede incluir el derecho a ejercer la opción antes de vencimiento. Para que sea más fácil la interpretación, se van a disponer las fórmulas vistas en el apartado interior, con objeto de poder compararlas y modificarlas.

$$f_n = \text{Max}(S_t - K; 0) \quad [1]$$

$$f = e^{-r*\Delta t} (p * f_u + (1 - p) * f_d) \quad [2]$$

$$p = \frac{e^{r*\Delta t} - d}{u - d} \quad [3]$$

Las fórmulas arriba expuestas ya están analizadas y desarrolladas, pero conviene recordar que son las relativas a una opción Call europea (para una opción Put europea, se daría una alteración en la fórmula N°1). Sin embargo, las otras dos fórmulas seguirían intactas. Pues bien, analizando la utilidad de las tres fórmulas en orden, la primera nos daría el valor de la opción o *payoff* en el vencimiento; la segunda, el valor de la opción o *payoff* en los pasos anteriores al vencimiento (por eso se descuentan con el factor $e^{-r*\Delta t}$); y, la tercera, nos da la probabilidad de que el precio del activo subyacente aumente.

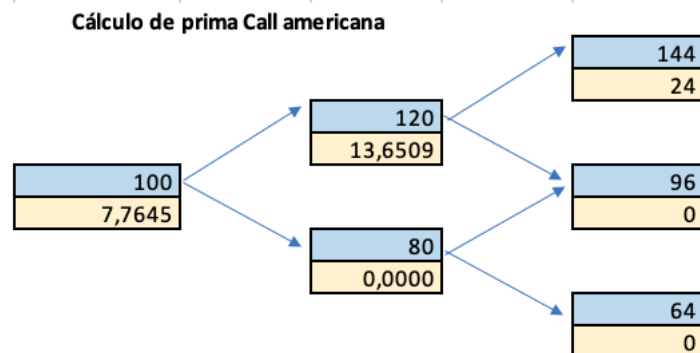
Tras refrescar cada fórmula, se puede comenzar a imaginar qué fórmula es la que sufrirá alteración, o qué se añadirá a alguna de estas tres fórmulas. Por lógica pura, la fórmula 1 ha de permanecer inalterable (pues nos da el *payoff* a vencimiento, que seguirá siendo el mismo). La fórmula 3, que es la que nos da la probabilidad neutral al riesgo de que aumente el activo subyacente, ha de permanecer inalterable también, pues a un activo en el mercado no le va a afectar si se crea una opción americana o europea sobre él (no porque alguien vaya a abrir una posición en una opción Put americana sobre la acción de Twitter esta acción va a cambiar de precio). Por descarte, se llega a que, efectivamente, es la fórmula 2 la que se ve alterada, pues es la que, a fin de cuentas, nos da información acerca del valor de la opción en cada nodo intermedio, incluido el nodo inicial, cuyo resultado al aplicar dicha función es la prima. Una vez determinada la fórmula a modificar, se ha de imaginar que se da la opción de ejercer la opción en los nodos intermedios: ¿a qué precio se ejercería la opción?, ¿cuál sería el *payoff*? Pues bien, si ahora existe la opción de ejercer el derecho en cualquier momento, habrá que valorar, antes de nada, si merece la pena o no ejercerlo. Para poder conocer este dato, es tan sencillo como comparar el valor sin ejercer (*payoff*) en ese nodo, con el valor teórico (si se ejerce) en el mismo nodo. Tras tener esto claro, simplemente habría que computar la fórmula en la que se pudiese valorar esto. Esta fórmula consistirá en encontrar el máximo entre ambos datos (*payoff* y valor si se ejerce). Entonces, partiendo de la fórmula número dos, $e^{-r*\Delta t} (p * f_u + (1 - p) * f_d)$, se pasaría a comparar la misma con el valor de ejercer, es decir, $S_t - K$ en caso de ser una opción Call, y $K - S_t$ en caso de ser una opción Put. Por lo tanto, se concluye en la siguiente fórmula (para Call):

$$f = \max((e^{-r*\Delta t} * (p * f_u + (1 - p) * f_d)); S_t - K) \quad [6]$$

Tal y como se ha detallado, la fórmula número 6 establece el máximo entre el *payoff* de la opción en un nodo concreto y el valor en caso de ejercer, para una Call americana (recordemos que para un *Put* sería simplemente cambiar $St - K$ por $K - St$). A continuación, se presentan dos ejemplos, para los dos tipos de opciones, del cálculo de primas en cada uno.

Ejemplo 3: Cálculo de prima Call americana

S	100
K	120
u	1,2
d	0,8
r	7%
p	0,5890493
1-p	0,4109507
Δt	0,5
T	1
n	2



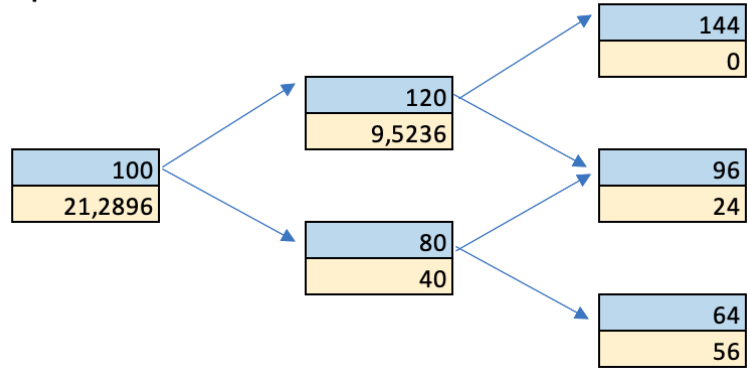
Fuente: elaboración propia

En el ejemplo 3 se puede observar un árbol binomial, el cuál calcula la prima de la opción con los datos introducidos. Antes de comenzar a analizarlo, conviene compararlo con el ejemplo 1, pues son exactamente los mismos datos. Se observa que la prima es exactamente la misma, es más, todos los *payoffs* son exactamente iguales. Esto es así porque nunca interesa ejercer una opción Call americana antes del vencimiento, pues sería algo ilógico. Indagando en la funcionalidad del árbol del ejemplo 3, aunque parezca exactamente el mismo, en cada nodo anterior a la última fila (nodos intermedios), la fórmula es diferente a la del árbol del ejemplo 1. Es decir, en los nodos intermedios, los *payoffs* (casillas sombreadas en amarillo) están calculados con la fórmula N.º 4: $\max(e^{-r*\Delta t} * (p * f_u + (1 - p) * f_d)); St - K$, mientras que en el ejemplo 1 (opción Call europea), están calculados con la fórmula N.º 2: $e^{-r*\Delta t} (p * f_u + (1 - p) * f_d)$. Aunque, como ya se ha matizado, en opciones Call americanas no tenga efecto, en el ejemplo que se muestra a continuación se demuestra cómo sí lo tiene en opciones Put americanas.

Ejemplo 4: Cálculo de prima Put americana

S	100
K	120
u	1,2
d	0,8
r	7%
p	0,5890493
1-p	0,4109507
Δt	0,5
T	1
n	2

Cálculo de prima Put americana



Fuente: elaboración propia

En el ejemplo 4 se puede observar un árbol binomial. Es necesario comparar este ejemplo con el ejemplo 2, presentado en el apartado 3.3, para así llegar a comprender en su totalidad la diferencia entre las opciones europeas y americanas. En el caso anterior (ejemplo 3 comparado con ejemplo 1), las primas y los *payoffs* intermedios coincidían en su totalidad, en cambio, comparando este ejemplo con el 2, no coinciden las primas. Esto es así debido a la posibilidad del ejercicio anticipado que ofrece esta opción Put, que no existía en la opción del ejemplo 2. Como ya se ha explicado en el párrafo anterior, la fórmula usada para la opción Call europea y americana es diferente, pues en este caso sucede exactamente lo mismo, matizando simplemente el cambio de Call a Put, siendo entonces $e^{-r*\Delta t} (p * f_u + (1 - p) * f_d)$ la fórmula para la opción europea Put y $\max(e^{-r*\Delta t} * (p * f_u + (1 - p) * f_d); K - St)$, la fórmula para la opción americana Put. Nótese que en la primera fórmula no incide el hecho de que se trate de una Put (afecta a los *payoffs* de la última columna de nodos, e indirectamente a todos los cálculos, pero la fórmula en cuestión no se ve alterada); pero en la segunda fórmula, al poder ejercerse en los nodos intermedios, sí le afecta directamente (pasa de $St - K$ a $K - St$).

Pues bien, comparando este ejemplo con el ejemplo 2, observamos diferencias en el *payoff* del nodo de la segunda columna, segunda fila y en la prima de la opción en el momento actual. ¿A qué se debe esta diferencia? A la posibilidad de ejercicio anticipado. Si analizamos la diferencia del nodo intermedio, podemos ver que en el ejemplo 2, el valor del *payoff* es de 35,87 (redondeado), y, en el ejemplo 4, es de 40. Esta diferencia es debida a la fórmula que se aplica en cada caso, por supuesto, pero en el fondo, la

posibilidad de ejercer la Put americana de forma anticipada convierte el “*payoff*” en 40, cifra resultante de realizar $120 - 80$ ($K - S_t$), es decir, de ejercer la opción en ese momento. Así obtenemos el máximo entre ambos valores (*payoff* de la opción Put y el valor de ejercicio si se ejercitase). Como consecuencia, la prima de la opción cambia, pues con alterar simplemente un nodo, la prima va a cambiar por pura lógica.

4.1 Relación entre primas de opciones americanas y europeas

Es interesante, tras comprender ambos tipos de opciones, el hecho de comparar sus primas, para poder llegar a establecer una relación fiable entre las mismas. Aunque pueda parecer que siempre es ventajoso tener la oportunidad de ejercer el derecho anticipadamente, esto no es así, pues como se verá a continuación, hay casos en los que no supone ninguna ventaja. Para este apartado, se va a utilizar un estudio publicado por Universidad Politécnica de Valencia, en el cual se profundiza sobre el tema (Burgos Simon, et al., 2020). En este estudio se concluye la siguiente relación entre primas:

- Prima de Call americana = Prima de Call europea.
- Prima de Put americana \geq Prima de Put europea.

Es conveniente matizar, como ya se ha hecho en ocasiones anteriores, que estos resultados son obtenidos trabajando con opciones cuyos subyacentes no pagan dividendos. Como es lógico, a estas conclusiones se llega comparando opciones de diferentes tipos con las mismas características. Si se ponen en relación las conclusiones obtenidas con los ejemplos mostrados en los apartados anteriores, se comprueba que, efectivamente, se cumplen las relaciones. En nuestro caso, se ha de comparar el ejemplo 1 con el ejemplo 3 (Call europea y Call americana) y el ejemplo 2 con el ejemplo 4 (Put europea y Put americana). Como ya se ha visto y explicado, las primas de ambas Call eran exactamente iguales en nuestros ejemplos ($7,76=7,76$), y, en las Put, la prima era mayor en la opción americana que en la europea ($21,29 > 19,65$). Se cumple así lo obtenido en el estudio mencionado, pudiendo confirmar el resultado de este.

En el archivo Excel se puede observar una hoja de elaboración propia en la que se demuestra lo expuesto anteriormente con ejemplos (Hoja 2: europeas y americanas).

5. IMPLEMENTACIÓN EN EXCEL DEL MODELO BINOMIAL

5.1 Resumen del proyecto

Tras haber analizado el método de Black-Scholes y el método binomial, vamos a implantar el segundo en Excel, ya que el primero (Black-Scholes) se basa en la aplicación de unas fórmulas muy sencillas. Para este proceso, se ha decidido usar la plataforma digital Excel por su completa utilidad en lo que se necesitaba, así como por poseer un lenguaje de programación propio, el lenguaje VBA (Visual Basic for Applications), a través del cual se han creado una serie de macros con funciones capaces de calcular las primas de las opciones deseadas.

Antes de comenzar con el proceso en cuestión, he de aclarar que yo, como estudiante de Administración y Dirección de Empresas, no tengo conocimiento alguno sobre programación, por lo que todo lo elaborado en esta parte es pura investigación, aprendizaje y posterior aplicación. En primer lugar, desarrollé un árbol binomial simple en Excel, para ir probando como funcionaba todo. Tras ver que funcionaba, me aventuré a desarrollar la primera función a través de una macro en Visual Basic (VB en adelante). Con la debida investigación, conseguí llegar a desarrollar una macro, que más adelante, junto con mi tutor, descubrimos que solo valía para opciones europeas: la macro estaba basada en la distribución estadística binomial, por lo que, al posibilitar el ejercicio anticipado, la función no era útil. Tras esta primera dificultad, me decidí a intentar desarrollar otra macro que no se basase en la distribución binomial, sino que se basase en el árbol como tal, y a través del método regresivo calculase la prima de las opciones. Para mi alegría, esta funcionó, por lo que terminé desarrollando cuatro funciones, una para cada posible caso (opción Call o Put, europea o americana). Tras este éxito, me dispuse a mejorar y desarrollar los árboles binomiales manualmente, mediante un método descrito a lo largo de los siguientes párrafos. El resultado final ha sido una hoja de Excel que permite obtener las primas de cualquier tipo de opción, introduciendo una serie de datos necesarios para su cálculo.

Como primer paso en la metodología general, aplicable tanto para las macros como para los árboles creados, ha sido la definición de los parámetros y las variables. Los parámetros que introducir son el precio del activo subyacente (S), el precio de ejercicio o Strike (E o K), el tipo de interés (r), el número de pasos (n), el tiempo hasta vencimiento (t), y la volatilidad (σ). A partir de estos parámetros, el modelo creado calcula las variables

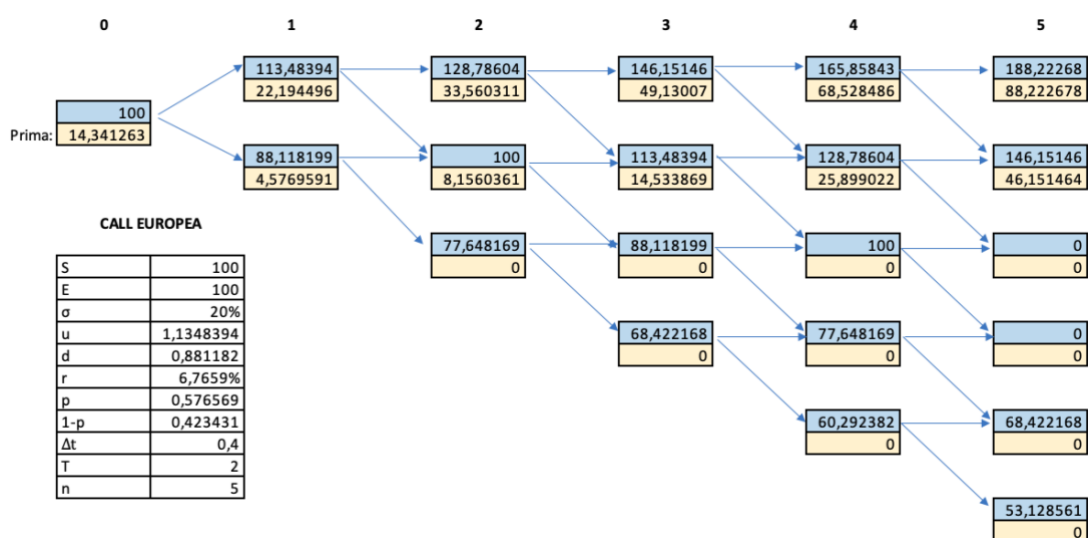
de subida (u) y bajada (d) de precio del subyacente, el tiempo entre pasos (Δt) y la probabilidad neutral al riesgo de aumento de precio del subyacente (p). A lo largo del trabajo ya ha sido explicado el cálculo de cada una de las variables, por lo que sería redundante detenerse en este momento para su repetida explicación.

5.2 Árbol binomial

El primer paso dado al comenzar con el proyecto fue la planificación de cómo implementar un árbol binomial en Excel. La idea inicial era automatizar a través de una macro un árbol binomial para que, cuando se introdujese el número de pasos, se dibujase automáticamente en la hoja de Excel. Esta idea fue frustrada con apenas dos días de investigación: para ser realistas, los pasos debían poder llegar, al menos, a 250, cifra con la que si no se tenía un conocimiento avanzado de programación en VB, del que yo carezco, era difícil de programar. Tras este golpe de realidad, comencé a desarrollar un árbol binomial de forma manual, el cual era capaz de calcular las primas de cualquier tipo de opción. Comencé con un número de pasos probatorio, siendo mi primer árbol de 3 pasos, y terminé realizando árboles más extensos que calculaban a la perfección las primas.

Respecto a la metodología, aunque ha sido explicada junto con el modelo binomial con anterioridad, conviene recordarla brevemente. Se ha dispuesto un árbol en el cual, partiendo del paso 0 ($n=0$), se han ido sacando nuevos nodos por cada paso adicional, y en cada nodo se muestra el precio del activo subyacente en la cuadrícula superior (de color azul), y el payoff de la opción en la cuadrícula inferior (de color amarillo). De cada nodo, salen dos nuevos nodos, uno que muestra el aumento del subyacente y, otro, con la bajada. A continuación, se añade una fotografía de uno de los árboles iniciales.

Fotografía 1: Árbol Binomial Call europea



Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, el árbol no está compuesto al uso, pues los aumentos de precio del subyacente se muestran en horizontal. Esto está diseñado así, para que, en el caso de dibujar un árbol extenso, no haya conflicto con el espacio en la hoja de Excel. Respecto a la fotografía 1 en cuestión, observamos una tabla de datos, que contiene tanto los parámetros (introducidos) como las variables ya calculadas (automáticamente, tras introducir los parámetros). Es importante introducir el número correcto de pasos (n), pues el árbol no funcionará correctamente si se introduce un número de pasos diferente al dibujado en el árbol. En este caso, si se quisiera introducir un $n=6$, sería necesario dibujarlo en el árbol (para esto sirven exactamente la macros, porque ahorran tener que dibujar el árbol, pudiendo poner un número de pasos infinito).

En cuanto a las fórmulas usadas, son exactamente las mismas que las explicadas en los respectivos apartados. Para calcular la p, la d y la u, se han usado las fórmulas 3, 4 y 5, respectivamente. Para la Δt se ha dividido t/n . Para los precios del subyacente (cuadros azules), se ha comenzado multiplicando S por u y d, respectivamente, y repitiendo este paso se han obtenido los valores (fijando en Excel u y d se logra que copiando y pegando se agilice el proceso). Para los payoffs de la opción (cuadros amarillos) de la última columna ($n = 5$) se ha aplicado la fórmula 1, ya que se trataba de una Call. Para los payoffs intermedios (cuadros amarillos) se ha utilizado la fórmula 2, pues el ejemplo se trata de una opción europea (en caso de opción americana, se utilizaría la fórmula 6). Al fin y al cabo, son los cuadros amarillos, los que, aplicando un método regresivo, acaban dándonos la prima actual de la opción. Para este cálculo de payoffs

intermedios, se fijan todos los parámetros, salvo f_u , f_d y St (en el caso de las americanas). Esto se hace así, porque con un simple copia y pega se puede aplicar el método binomial, llegando a la prima actual, y, por tanto, a nuestro resultado. En el Excel complementario a este documento se pueden observar todas las fórmulas, a la vez que el funcionamiento del árbol, pudiendo cambiar los parámetros para calcular diferentes primas.

5.3 Creación de funciones a través de Visual Basic

Si he de definir el objetivo principal de este proyecto, elegiría este apartado por su utilidad, por el trabajo que tiene detrás y por su exactitud a la hora de calcular las primas. Visual Basic es un lenguaje de programación diseñado para Microsoft, el cual permite, entre otras muchas cosas, crear macros en Excel. Gracias a VB, he podido desarrollar cuatro macros que a su vez consisten en cuatro funciones, una para cada tipo de opción. Estas funciones funcionan, en términos generales, gracias a un sistema basado en el árbol binomial, el cual mediante un método retrospectivo va calculando los payoffs en los diferentes nodos. Es interesante aclarar que es similar a haber introducido un árbol binomial en VB, como el explicado en el apartado anterior. A través del desarrollo de un código, he podido crear la función encargada de calcular tanto los precios del activo subyacente en los diferentes periodos, como los ya mencionados payoffs.

Al abrir el documento Excel, si se va a la pestaña “Programador” y se entra en “Visual Basic”, se pueden observar los 4 módulos creados, y, en cada uno de ellos, una función con el procedimiento explicado en color verde. Antes de comenzar con la explicación metodológica, conviene especificar la nomenclatura usada, así como los parámetros introducidos y las variables calculadas. Los parámetros que introducir por el usuario son S , E , t , σ , n y r (precio del subyacente, precio de ejercicio (K o E), duración, volatilidad, número de pasos e interés, respectivamente). Quiero destacar que el r introducido va a ser el tanto instantáneo (es decir, el $\ln(1+i)$, siendo i el tipo de interés anual). Las variables para calcular por nuestra función van a ser u , d y p (cuyas fórmulas ya han sido expuestas). La variable Δt está calculada implícitamente, es decir, en las fórmulas está introducido (t/n) directamente.

Para explicar la forma de proceder, me voy a centrar primero en el código que calcula una opción Call europea, para luego analizar el que calcula la Call americana. En

ambas explicaciones, matizaré lo necesario para cambiar el código y convertirlo útil para acciones Put.

Código 1: Prima Call europea

```
'Elaboro la funcion con sus parámetros
Public Function CallEuropea(S As Double, E As Double, t As Double, sigma As Double, n As Long, r As Double)

'Defino las variables
Dim m As Long, i As Long
Dim u As Double, d As Double, p As Double

'Establezco el cálculo de las variables
u = Exp(sigma * Sqr(t / n))
d = 1 / u
p = (Exp(r * t / n) - d) / (u - d)

'Defino la matriz
ReDim V(n, n) As Double

'Calculo los payoffs o valores finales. LLamo (n a N) y (m a n) por facilidad operativa.
For i = 0 To n
    V(i, n) = WorksheetFunction.Max(S * (u ^ (i)) * (d ^ (n - i)) - E, 0)
Next i

'Calculo los payoffs o valores de la opción en los nodos intermedio. Al ser europea se usa la funcion de exp (...).
For m = n - 1 To 0 Step -1
    For i = 0 To m
        V(i, m) = Exp(-r * (t / n)) * (p * V((i + 1), (m + 1)) + (1 - p) * V(i, (m + 1)))
    Next i
Next m

'Defino el resultado, el cual se encontrará en la posición (0,0), por el la prima a día de hoy
CallEuropea = V(0, 0)

End Function
```

```
Sub CallEurop()
MsgBox ("prima=" & CallEuropea(150, 140, 4, 0.12, 6, 0.067659))
End Sub
```

Fuente: elaboración propia

En la imagen anterior se puede observar el código encargado de crear una función que calcula la prima de cualquier opción europea, introduciendo los parámetros ya indicados. En letra verde, están explicados los pasos dados para crear la función, para la mejor comprensión del código. Si analizamos este código, vemos que los tres primeros pasos son muy claros: primero se definen los parámetros a introducir, después se definen las variables y después se calculan dichas variables (en base a los parámetros). La definición en lenguaje VBA se distingue, en este caso, con “*Long*” y “*Double*”. *Long* se usa para parámetros o variables que son números enteros, y *Double* para los que pueden contener decimales. Tras definir lo anteriormente mencionado, se pasa a definir la matriz que va a recrear nuestro árbol binomial. La definimos como una matriz llamada V, de n filas y n columnas. La matriz sería V (n, n).

Conviene en este punto introducir una nueva fórmula, no usada anteriormente por su falta de utilidad práctica, si bien para este caso es enormemente útil. Se trata, simplemente, de una fórmula que ayuda a obtener los valores del subyacente en el último paso. Aunque en nuestra función no se calcula por separado el precio del subyacente y los payoffs, está implícito en todo el código el precio del subyacente.

$$S_n = S_0 * u^i * d^{(n-i)} \quad [7]$$

Simplemente consiste en multiplicar el precio inicial del subyacente por el factor de subida y de bajada, elevando el primero al número de fila que corresponda, y el segundo al número total de pasos menos el número de fila que corresponda. De esta manera se calculan todos los precios del subyacente finales, los cuales, al restarles el precio de ejercicio, nos dan el payoff en ese paso de cada nodo de la opción, a través de una función de máximo que selecciona entre este resultado y cero (fórmula 1). Aquí es donde se habría de introducir el primer cambio para convertir esta Call europea en una Put europea. Para esto, sería tan simple como cambiar el orden de la resta, y en vez de restar es strike a la fórmula 7, se haría al revés, restando la solución a la fórmula 7 al precio de ejercicio o strike. Es importante destacar que esta operación está definida desde $i = 0$ hasta n , siendo una matriz $V(i, n)$.

El siguiente paso es simplemente la aplicación de la fórmula 2, ya que se trata de una opción europea. Esta es la fórmula que se va a encargar de ir descontando los *payoffs* finales hasta llegar a la prima de la opción. Definiendo un nuevo parámetro, $m = n - 1$ (es decir, m va a ser la posición de las columnas), y volviendo a estar definida desde $i = 0$ hasta m , nos calcula todos los payoffs, incluida la prima a fecha actual. Por último, se define que el resultado de la fórmula ha de ser la matriz $V(0, 0)$, es decir, la posición primera del árbol binomial, donde se encuentra la prima de la opción. De esta manera habríamos creado la fórmula que calcula las primas de opciones Call y Put europeas.

Centrándonos ahora en opciones americanas, los cinco primeros pasos son idénticos, con la misma distinción para Call y Put en el quinto paso, en el cual variará el orden de la resta del *strike* y el precio del subyacente en cada nodo.

Código 2: Prima Call americana

```
'Elaboro la funcion con sus parámetros
Public Function CallAmericana(S As Double, E As Double, t As Double, sigma As Double, n As Long, r As Double)

'Defino las variables
Dim m As Long, i As Long
Dim u As Double, d As Double, p As Double

'Establezco el cálculo de las variables
u = Exp(sigma * Sqr(t / n))
d = 1 / u
p = (Exp(r * t / n) - d) / (u - d)

'Defino la matriz
ReDim V(n, n) As Double

'Calculo los payoffs o valores finales. LLamo (n a N) y (m a n) por facilidad operativa.
For i = 0 To n
    V(i, n) = WorksheetFunction.Max(S * (u ^ i)) * (d ^ (n - i)) - E, 0)
Next i

'Calculo los payoffs o valores de la opción en los nodos intermedio. Al ser americana se usa la funcion de max (...).
For m = n - 1 To 0 Step -1
    For i = 0 To m
        V(i, m) = WorksheetFunction.Max(Exp(-r * (t / n)) * (p * V(i + 1, (m + 1)) + (1 - p) * V(i, (m + 1))), S * (u ^ i)) * (d ^ (m - i)) - E)
    Next i
Next m

'Defino el resultado, el cual se encontrará en la posición (0,0), por el la prima a día de hoy.
CallAmericana = V(0, 0)

End Function
```

```
Sub CallAmerico()
MsgBox ("prima=" & CallAmericana(150, 140, 4, 0.12, 6, 0.067659))
End Sub
```

Fuente: elaboración propia

En la imagen anterior se observa el código para una opción Call americana. Como se iba diciendo, coinciden exactamente los cinco primeros pasos. El gran cambio llega en el sexto paso, cuando se ha de aplicar la definida en este trabajo como la fórmula N.º 6. Todo lo demás se mantiene exactamente igual, pero es importante advertir este cambio, pues modificando solo una línea del código cambia todo de golpe. El cambio es simple: aplicar la fórmula número seis, el máximo entre el *payoff* de la opción (que ya se tenía en el código anterior) y el valor de ejercer la opción en ese momento. Para obtener el valor del subyacente en cada nodo, se utiliza la fórmula número 7, cambiando la *n* por el nuevo parámetro *m* ($m = n - 1$), y, posteriormente, restando el *strike* a este valor, se obtiene el valor de ejercicio en ese momento para una Call. Como siempre, para obtener el de una Put sería alterar el orden de la resta. Por lo tanto, si para las opciones europeas el hecho de que se trate de una Call o una Put supone un cambio en el código, para las opciones americanas supone dos cambios (pues la fórmula 6 lleva incluido el valor de ejercicio en su función de máximo).

Tras programar los códigos y crear las funciones, he introducido una línea para que, al ejecutar el código, salga un cuadro informándonos del valor de la prima (según los parámetros introducidos).

Si volvemos a repasar los códigos (están disponibles los cuatro en el documento de Excel), observamos que, en realidad, estamos dibujando un árbol binomial imaginario, y aplicando el método binomial para descontar los *payoffs* o valores de ejercicio en el vencimiento. Se hace distinción entre los cuatro tipos de opciones, ya que es la forma más rápida de obtener las primas (se podrían desarrollar solo dos códigos, para americanas y europeas, y modificar el código cada vez que se quisiese calcular la prima de un Call o de una Put).

5.4 Utilidades del proyecto

Tras crear árboles binomial capaces de calcular primas de opciones de pasos limitados, y desarrollar un código para traspasar esta barrera, pudiendo calcular opciones con pasos ilimitados, se da por concluido el proyecto. Se tienen dos procedimientos por los que calcular primas de opciones, los cuales obtienen el mismo resultado exacto (con la limitación anteriormente expuesta). En este apartado, se van a analizar las posibilidades que existen en el Excel elaborado.

Utilizando las cuatro funciones, llamadas de esta manera: *CallEuropea*, *PutEuropea*, *CallAmericana* y *PutAmericana*, tenemos la posibilidad de conocer la prima de la opción que deseemos. A través del árbol, con un número limitado de pasos, también lo podemos hacer. Además de esta funcionalidad, con el documento de Excel se pueden optimizar los parámetros y las variables utilizando el complemento *Solver*. En el apartado “datos”, si pinchamos en “*Solver*”, nos permite establecer un objetivo cambiando algún parámetro. Esto es útil, por ejemplo, si queremos encontrar una opción con un subyacente que crezca a una razón u deseada. Es decir, si queremos encontrar una opción con un subyacente con crecimiento de, por ejemplo, 1,5 por paso ($u = 1,5$), bastaría con establecer este objetivo, haciendo cambiar el parámetro volatilidad, por ejemplo. De esta manera, *Solver* automáticamente nos fijaría una $u = 1,5$ y encontraría la volatilidad a asumir para que esto suceda. Es importante remarcar que para que *Solver* funcione, el objetivo tiene que ser una variable (como u , que es una función de la volatilidad y de la amplitud de los intervalos), y, el parámetro a cambiar tiene que formar parte de la función que define esta variable.

Al haber implantado el método binomial en Excel, podemos comparar los resultados de las primas calculadas con los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de Black-Scholes. Procedamos con un ejemplo teórico: Opción Call europea con $S=100$, $K=120$, $\sigma=15\%$, $r=6\%$, $t=1$ y $n=4$. Aplicando la función creada en Excel, obtenemos una prima de 5,375, exactamente igual a la obtenida creando un árbol en Excel y aplicando el método binomial. En cambio, cuando calculamos la prima aplicando Black-Scholes, obtenemos una prima de 5,794. Como es lógico, existe una pequeña diferencia entre ambas primas, siendo ligeramente superior la obtenida mediante Black-Scholes. Si calculamos la prima de una Put con los mismos parámetros, mediante el método binomial obtenemos una prima de 11,805, y mediante Black-Scholes obtenemos una prima de 12,225. Volvemos a observar una pequeña diferencia, volviendo a ser superior la obtenida a través de Black-Scholes.

Gracias a este proyecto se ha hecho posible la valoración instantánea de opciones, a través de fórmulas creadas en Excel. La valoración que, en última instancia, más éxito tiene, es la de las opciones americanas, pues su prima no puede ser calculada por el método de Black-Scholes, por lo que su cálculo queda limitado a la aplicación del método binomial, que para una opción realista es necesario automatizar, pues es prácticamente imposible dibujar a mano árboles realistas.

Bibliografía

Benavides F., J., 2002. EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE DOS MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES A LA ADMINISTRACIÓN DE PORTAFOLIOS. *Scielo*, 18(85), pp. 0-100.

Burgos Simon, C., Cortes Lopez, J. C. & Navarro Quiles, A., 2020. *Relación entre los precios de Opciones Europeas y de Opciones Americanas de tipo Call y de tipo Put, cuyos subyacentes no pagan dividendos*, Valencia: Universidad Politécnica de Valencia. CNMV, s.f. *Comisión Nacional del Mercado de Valores*. [En línea]

Available at: <https://bit.ly/3wSXjpv>

[Último acceso: 7 Mayo 2022].

Ferreiro Perez, R., s.f. *Valoración de opciones mediante el método del árbol binomial*, Madrid: UCM.

Hull, J. C., 2015. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 9ª edición ed. Toronto: Pearson.

Usuario-o365devx, 2022. *Microsoft-Introducción a VBA en Office*. [En línea]

Available at: <https://bit.ly/3aFuc1D>

[Último acceso: 1 05 2022].

Velayos Morales, V., s.f. *Economipedia*. [En línea]

Available at: <https://bit.ly/3wVQpRu>

[Último acceso: 8 Mayo 2022].

