

CURSO 2020/2021

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# COHOMOLOGÍA DE DE RHAM Y FIBRACIONES DE ESFERAS

RODRIGO CASADO NOGUERALES

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Madrid, 6 de julio de 2021

# COHOMOLOGÍA DE DE RHAM Y FIBRACIONES DE ESFERAS

RODRIGO CASADO NOGUERALES

**RESUMEN.** En este trabajo desarrollamos con detalle la cohomología de de Rham, desde la orientación de variedades, la integración de formas o el teorema de Stokes, pasando por la sucesión de Mayer-Vietoris, hasta la dualidad de Poincaré. Todo ello se hace tanto para las formas diferenciables con soporte compacto como no compacto. En concreto, nos detenemos a estudiar en profundidad el Lema de Poincaré y su formulación en el caso con soporte compacto, obteniendo a partir de él la invarianza homotópica de la cohomología de de Rham. Con estas herramientas calculamos la cohomología de algunos espacios concretos significativos, como las esferas. De ahí pasamos a definir el invariante de Hopf de una función diferenciable entre esferas, cuyo cálculo permite probar la esencialidad de las fibraciones de Hopf. Concluimos probando la esencialidad de estas fibraciones de forma más general como consecuencia del teorema de elevación de homotopía y del teorema de Ehresmann para sumersiones propias.

*Palabras clave:* variedades diferenciables, cohomología de de Rham, lema de Poincaré, soporte compacto, secuencia de Mayer-Vietoris, invariante de Hopf, fibraciones de Hopf, elevación de homotopía, teorema de Ehresmann, sumersión propia.

**ABSTRACT.** In this project we carry out a detailed study of the de Rham cohomology, from manifold orientation, forms integration and Stoke's theorem, including the Mayer-Vietoris sequence, up to Poincaré's duality. We do so for both compact support and non-compact support differentiable forms. We take special care to prove Poincaré's Lemma and its equivalent version for the compact support case. With these tools we calculate the cohomology of some significant concrete spaces, like that of spheres. From there we define Hopf's invariant for a differentiable function between spheres, which allows us to prove these fibrations' essentiality by calculation of this invariant. We conclude proving this essentiality in a more general fashion as a consequence of the homotopy lifting theorem and Ehresmann theorem for proper submersions.

*Keywords:* smooth manifolds, de Rham cohomology, Poincaré's Lemma, compact support, Mayer-Vietoris sequence, Hopf's invariant, Hopf's fibrations, homotopy lifting, Ehresmann theorem, proper submersion.

## ÍNDICE

Introducción	1
1. Variedades	2
2. Formas en variedades	6
3. Integración en variedades	9
4. Complejos de cocadenas y su cohomología	12
5. Homotopía	17
6. Cohomología de de Rham	19
7. El lema de Poincaré	20
8. La sucesión de Mayer-Vietoris	24
9. Algunas cohomologías importantes	27
10. Cohomología de de Rham con soporte compacto	29
11. El lema de Poincaré para soporte compacto	31
12. Mayer-Vietoris para soporte compacto	35
13. El invariante de Hopf	37
14. Fibrados de Hopf	39
15. Las fibraciones de Hopf son esenciales	41
16. Fibraciones de Hurewicz	43
17. Sumersiones esenciales	45
Referencias	48

## INTRODUCCIÓN

Un problema central de las matemáticas es la clasificación de objetos, en nuestro caso de las variedades diferenciables. En este punto se enmarca la cohomología de de Rham, debida al matemático suizo George de Rham, donde se definen espacios cocientes de formas *diferenciales* pero que son invariantes *topológicos* (de hecho, de homotopía) que distinguen variedades y proporcionan mucha información topológica. Históricamente, el estudio de las formas diferenciales de una variedad surgió en 1895 con el *Analysis situs* de Henri Poincaré y prosiguió con los *Integral Invariants* de Élie Cartan de 1922. Fue en 1928 cuando un joven de Rham logró probar en su tesis una serie de conjeturas de Cartan empleando formas diferenciales, naciendo así la rama que nos ocupa.

En este trabajo se aborda la cohomología de de Rham de variedades diferenciables haciendo un esfuerzo en incluir desde el inicio una formulación general que no excluya las variedades con borde. Comenzamos revisando en las secciones 1, 2 y 3 la asignatura Variedades Diferenciables del grado, fijando la notación y demostrando algunos resultados importantes adicionales, como el recíproco del teorema de Stokes para variedades sin borde. En la sección 4 introducimos la teoría algebraica general de la cohomología, en especial la sucesión exacta larga. Esta sección lleva a la definición de la cohomología de de Rham en la sección 6, que incluye las primeras observaciones y ejemplos. Antes, en la sección 5 fijamos las definiciones pertinentes de homotopía e introducimos los resultados

de aproximación que permitirán ver la cohomología de de Rham como un invariante homotópico continuo (luego topológico) y no sólo diferenciable.

En la sección 7 introducimos el operador de Poincaré, que nos permite probar un resultado clave que implica el Lema de Poincaré. En la sección 8 construimos una importante técnica de cálculo de cohomologías de de Rham: la secuencia de Mayer-Vietoris. En este punto hacemos un alto y en la sección 9 encontramos la cohomología de algunos espacios concretos de gran importancia, como las esferas  $\mathbb{S}^n$ . Proseguimos en la sección 10 con la cohomología con soporte compacto, y revisamos todo lo anterior en este nuevo contexto. La sección 11 desarrolla el lema de Poincaré, que en el caso compacto tiene un tratamiento muy distinto. Igualmente hay una variación significativa al establecer Mayer-Vietoris para soporte compacto, que se obtiene en la sección 12.

El resto del trabajo está dedicado a los fibrados de esferas y las fibraciones. En la sección 13 se introduce el invariante de Hopf, que es un modo de reconocer si una fibración es esencial. En la sección 14 definimos los fibrados de Hopf sobre  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{S}^4$  y  $\mathbb{S}^8$ , y en la sección 15 calculamos el invariante de Hopf del primer fibrado, advirtiendo de la dificultad de calcularlo para los otros dos. Por este motivo en las secciones siguientes estudiamos otro método alternativo. En la sección 16 se demuestra el teorema de elevación de homotopías para fibrados, con un argumento novedoso hasta donde sabemos, y concluimos el trabajo con la sección 17. En ella se demuestra el teorema de la fibración de Ehresmann, lo que nos permite concluir que una sumersión entre variedades sin borde que parte de una variedad compacta y orientada es esencial, resultado final que incluye los tres fibrados de Hopf.

## 1. VARIEDADES

Comenzamos con algunas definiciones y resultados elementales. Así fijaremos notaciones según la bibliografía de la asignatura Variedades Diferenciables del grado, fundamentalmente la referencia [GR20].

**Definiciones 1.1.** (1) Una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se llama *diferenciable* si tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en todo punto. Más generalmente,  $f : X \rightarrow Y$ , con  $X \subset \mathbb{R}^p$  e  $Y \subset \mathbb{R}^q$  arbitrarios, se llama *diferenciable* cuando para cada  $p \in X$  existe una *extensión local* diferenciable  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  en un entorno abierto  $U \subset \mathbb{R}^p$  de  $p$ :  $F|_{X \cap U} = f|_{X \cap U}$ . Escribiremos  $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ .

(2) Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un *difeomorfismo* cuando es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables; una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un *difeomorfismo local en  $p \in X$*  si es un difeomorfismo entre un entorno de  $p$  y un entorno de  $f(p)$ , y es un *difeomorfismo local* cuando lo es en todo punto de  $X$ .

Trabajaremos en todo momento en variedades sumergidas en espacios afines, aunque la mayoría de los argumentos serán válidos para variedades abstractas. Esto no supone ninguna pérdida de generalidad, pues toda variedad abstracta puede sumergirse en un espacio afín (véase [ORR20, §II.7.4]).

**Definición 1.2.** Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^q$  es una *variedad diferenciable* o simplemente una *variedad* cuando cada punto  $p \in M$  tiene un entorno  $U \subset M$  junto con un difeomorfismo  $\varphi : W \rightarrow U$  donde  $W \subset \mathbb{H}^m$  es un abierto de un *semiespacio afín*:

$$\mathbb{H}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\}.$$

La aplicación  $\varphi$  se denomina *parametrización local de  $M$  en  $p$* . El difeomorfismo inverso  $x : U \rightarrow W$  se llama *sistema de coordenadas (locales) de  $M$  en  $p$* . Un conjunto de sistemas de coordenadas locales cuyos dominios  $U$  recubren todo  $M$  se denomina un *atlas de  $M$* .

Nótese que las variedades tienen las propiedades topológicas locales de los semiespacios afines: local conexión por caminos diferenciables, local compacidad, etc; y heredan de los mismos la separación  $T_2$  o el II axioma.

El cálculo diferencial se extiende de forma sencilla a abiertos de  $\mathbb{H}^m$  sin más que trabajar con extensiones diferenciables a abiertos de  $\mathbb{R}^m$ , y en particular se puede definir la derivada de una aplicación diferenciable entre semiespacios. De la regla de la cadena se sigue que la dimensión  $m$  de la definición es localmente constante, luego constante en componentes conexas. Cuando sea igual en todas, diremos que una variedad tiene *dimensión*  $m$ , y en ocasiones escribiremos  $M^m$  o  $m = \dim(M)$ .

Es equivalente usar semiespacios más generales  $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \lambda(x) \geq 0\}$  para cualquier función afín no nula  $\lambda$ , y en ocasiones se hará así, pero no merece la pena complicar la discusión con estos  $\lambda$ . El *borde de*  $\mathbb{H}^m$  es su frontera topológica  $\{x \in \mathbb{R}^m : \lambda(x) = 0\}$ , denotada por  $\partial\mathbb{H}^m$ . Se demuestra que los difeomorfismos de semiespacios conservan el borde, y eso permite definir:

**Definición 1.3.** El *borde*  $\partial M$  de una variedad  $M$  está formado por los puntos cuya imagen por unas (luego cualesquiera) coordenadas de  $M$  está en  $\partial\mathbb{H}^m$ . El *interior de*  $M$  es el complementario  $\text{Int}(M) = M \setminus \partial M$ .  $M$  es una variedad *sin borde* si  $\partial M = \emptyset$ .

El borde  $\partial M$  es una subvariedad cerrada de  $M$  y el interior  $\text{Int}(M)$  es una subvariedad abierta, ambas sin borde. Además,  $\dim(\partial M) = \dim(M) - 1$ ,  $\dim(\text{Int}(M)) = \dim(M)$ .

Dadas dos variedades  $M^m \subset \mathbb{R}^q$  y  $N^n \subset \mathbb{R}^p$ ,  $N$  sin borde, su producto  $M \times N \subset \mathbb{R}^{q+p}$  es una variedad también. En efecto, se parametriza con el producto de coordenadas  $x : U \subset M \rightarrow W \subset \mathbb{H}^m$  e  $y : V \subset N \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \times y : U \times V \subset M \times N \rightarrow W \times W' \subset \mathbb{H}^{m+n}$ .

Para ajustarnos a la definición, hemos de excluir el borde en uno de los factores. En realidad, el desarrollo de la teoría conduce de modo natural al concepto más general de variedad con borde *anguloso*. Aquí no haremos tanto, pero inevitablemente sí deberemos considerar productos del tipo  $M \times [0, 1]$ , que no son variedades con borde. No obstante, este caso tan particular se puede tratar fácilmente con parametrizaciones de la forma  $\varphi \times \text{id}$ , que permiten realizar las mismas construcciones formales que una variedad con borde: espacio tangente, derivada, localización, espacios de formas, etc. Todo lo que digamos se referirá pues a variedades con borde o a lo sumo a estos productos  $M \times [0, 1]$ .

Recordamos ahora un concepto necesario para muchas construcciones.

**Teorema y definición 1.4** (Particiones diferenciables de la unidad). *Sea  $\{U_i\}_i$  un recubrimiento abierto de una variedad diferenciable  $M$ . Entonces existe una familia  $\{\theta_i\}_i$  de funciones diferenciables definidas sobre  $M$  tales que:*

1.  $0 \leq \theta_i \leq 1$ .
2. Son una familia localmente finita, o sea, cada punto  $p \in M$  tiene un entorno en el que se anulan todas las  $\theta_i$  menos una cantidad finita.
3. La suma  $\sum_i \theta_i$  está bien definida y es igual a 1.
4. Son una familia subordinada al recubrimiento, esto es,  $\text{sop}_M(\theta_i) \subset U_i$ .<sup>1</sup>

Como decimos, mediante particiones se construyen:

**Corolario 1.5.** (1) *Funciones meseta:* dados un cerrado  $A$  de  $M$  y un entorno abierto  $U$  de  $A$  en  $M$ , existe una función diferenciable  $\theta : M \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\theta|_A \equiv 1$  y  $\theta|_{M \setminus U} \equiv 0$ .

<sup>1</sup>Recordemos que el soporte de una función  $f : X \rightarrow Y$  respecto del subconjunto  $Z \subset X$  se define como  $\text{sop}_Z(f) = \overline{\{x \in Z : f(x) \neq 0\}}$ , donde la adherencia se toma en la topología inducida de  $Z$ .

(2) *Funciones separantes de Uryshon: dados dos cerrados disjuntos  $A$  y  $B$  de  $M$ , existe una función diferenciable  $\theta : M \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\theta|_A \equiv 1$  y  $\theta|_B \equiv 0$ .*

Dada una aplicación continua (resp. diferenciable) entre variedades  $f : M^m \rightarrow N^n$  y un punto  $p \in M$ , siempre hay coordenadas locales  $x : U \subset M \rightarrow W$ ,  $y : V \subset N \rightarrow W'$  en entornos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $f(p)$  con  $f(U) \subset V$ . Se llama *localización de  $f$*  a la aplicación continua (resp. diferenciable)

$$g = y \circ f \circ x^{-1} : W \rightarrow W'.$$

El *espacio tangente*  $T_p M$  a una variedad  $M^m \subset \mathbb{R}^q$  en un punto  $p \in M$  es la imagen de la derivada de cualquier parametrización  $\varphi$ , pues todas tienen la misma. Dada una parametrización  $\varphi$ , la base más natural de  $T_p M$  está formada por *derivadas parciales*:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p := d_{x(p)}\varphi(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x(p)), \quad e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0).$$

La derivada de una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  entre variedades es la restricción a  $T_p M$  de la derivada de cualquier extensión local  $F$ :

$$d_p f = d_p F|_{T_p M} : T_p M \rightarrow d_p F(T_p M) \subset T_{f(p)} N.$$

Esta definición es consistente y el cálculo diferencial básico se extiende a variedades automáticamente. Digamos sólo que el teorema de inversión local para variedades con borde requiere de la conservación del borde además de la biyectividad de la derivada. Dada  $f : M \rightarrow N$ , y coordenadas  $x$  de  $M$  e  $y$  de  $N$ , la matriz asociada a la derivada en términos de las bases de derivadas parciales respecto de esas coordenadas es la matriz jacobiana de su localización respecto a dichas coordenadas.

Los espacios tangentes forman el *fibrado tangente* de  $M^m \subset \mathbb{R}^q$ , que es el conjunto

$$TM = \{(p, u) \in M \times \mathbb{R}^q : p \in M, u \in T_p M\}.$$

equipado con la proyección  $\pi : TM \rightarrow M, (p, u) \mapsto p$ . Este conjunto es una variedad diferenciable de dimensión  $2m$  con borde  $\pi^{-1}(\partial M)$ . Cada parametrización  $\varphi : W \rightarrow U$  de  $M$  define la siguiente parametrización del fibrado  $TM$

$$T\varphi : TW = W \times \mathbb{R}^m \rightarrow TU = \pi^{-1}(U), \quad (x, \lambda) \mapsto \left( \varphi(x), \sum_i \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right).$$

Esta parametrización de toda la imagen inversa  $\pi^{-1}(U)$  conmuta con las proyecciones y es una *trivialización* del fibrado.

**Definición 1.6.** Un *campo tangente* a una variedad  $M$  es una aplicación  $X : M \rightarrow TM$  del tipo  $p \mapsto (p, X_p)$ . Se llama *continuo* (resp. *diferenciable*) cuando lo es como aplicación entre variedades. Cuando no se especifique, se supondrá diferenciable.

El conjunto de campos tangentes diferenciables de  $M$  se denota  $\mathfrak{X}(M)$ . Es un módulo sobre  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ , en particular es un espacio vectorial real. Todo campo se expresa en coordenadas locales  $x$  de forma unívoca

$$X_p = \sum_i X_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p,$$

y  $X$  es diferenciable si y sólo si lo son los coeficientes  $X_i(x)$ . Tenemos el endomorfismo

$$X : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \quad Xf(p) = d_p f(X_p),$$

de forma que los coeficientes anteriores son  $X_i = X(x_i)$ .

Recordamos que, como consecuencia del teorema de Picard para EDOs, los campos de variedades sin borde  $\mathfrak{X}(M)$  están en biyección con los *flujos*. Un flujo es una aplicación diferenciable  $\varphi : W \rightarrow M, (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$  definida en un entorno abierto  $W$  de  $\{0\} \times M$  en  $\mathbb{R} \times M$  que cumple:

- $\varphi_0(x) = x$  para cada  $x \in M$ .
- Para cada  $a \in M, I(a) = \{t \in \mathbb{R} : (t, a) \in W\} = (\alpha(a), \beta(a)) \subset \mathbb{R}$  es un intervalo posiblemente infinito con  $\alpha(a) < 0 < \beta(a)$ .
- Si  $s \in I(a)$ , entonces  $I(\varphi_s(a)) = I(a) - s$ .
- Si  $s \in I(a)$  y  $t \in I(\varphi_s(a))$ , entonces  $\varphi_t(\varphi_s(a)) = \varphi_{t+s}(a)$ .

Así,  $\varphi$  es el flujo asociado al campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  si  $c : I(a) \rightarrow M, t \mapsto c(t) = \varphi_t(x)$  es la curva integral maximal de  $X$  tal que  $c(0) = x$ , para cada  $x \in M$ . Es decir, es la única curva de dominio maximal cumpliendo:

$$c(0) = x, \quad c'(t) = X_{c(t)}.$$

En particular, todo flujo es el flujo maximal del campo dado por  $X_x = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \varphi_s(x)$ . A la imagen de estas curvas maximales,  $c(I(a))$ , se les llama *órbitas*, y se dice que son *completas* si  $I(a) = \mathbb{R}$ , o sea, si  $\alpha(a) = -\infty$  y  $\beta(a) = +\infty$ . Todas las órbitas conforman una partición de  $M$ . Cuando toda órbita es completa, el campo es *completo*. En tal caso, toda órbita es o bien un sólo punto, difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$  o una curva diferenciable de Jordan. Finalmente, nos será útil el siguiente resultado, conocido como Lema del Escape:

**Lema 1.7.** *Una órbita de dominio maximal  $c : I = (\alpha, \beta) \rightarrow M$  del campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  con  $\beta < +\infty$  (resp.  $\alpha > -\infty$ ) siempre escapa de cualquier compacto  $K \subset M$ . Es decir, para todo  $t \in I$  suficientemente grande (resp. pequeño),  $c(t) \notin K$ .*

Dada  $M^m \subset \mathbb{R}^q$ , denotamos por  $N_p M$  al complemento ortogonal de  $T_p M$  en  $\mathbb{R}^q$ , que tiene dimensión  $q - m$ . El *fibrado normal* de  $M^m \subset \mathbb{R}^q$  es

$$NM = \{(p, u) \in M \times \mathbb{R}^q : p \in M, u \in N_p M\},$$

equipado con la proyección  $\nu : NM \rightarrow M, (p, u) \mapsto p$ . Es una variedad de dimensión  $q$  con borde  $\nu^{-1}(\partial M)$ . Esto se prueba mediante un difeomorfismo  $x : W \subset \mathbb{R}^q \rightarrow U \subset \mathbb{R}^q$  adaptado a  $M$ , esto es, tal que  $M \cap U = \{x_i = 0 : i > m\}$ , porque en esa situación los gradientes  $\nabla_p x_i$  para  $i > m$ , son una base de  $N_p M$ .

El fibrado normal facilita la siguiente construcción de los denominados entornos tubulares (véase [ORR20, §Cap. III]).

**Proposición 1.8.** *Sea  $M^m \subset \mathbb{R}^q$  una variedad sin borde y  $NM$  su fibrado normal. Entonces la aplicación diferenciable*

$$e : NM \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad (p, u) \mapsto z = p + u$$

*es un difeomorfismo de un entorno abierto  $\Omega \subset NM$  de  $M \times \{0\}$  sobre un abierto  $W \subset \mathbb{R}^q$ .*

*Idea de la demostración.* Por argumentos de dimensión,  $e$  tiene derivada biyectiva en todo punto de  $M \times \{0\}$ , luego es difeomorfismo local en un entorno de  $M \times \{0\}$ . Se concluye probando que ese entorno contiene otro  $\Omega$  en el que  $e$  es inyectiva.  $\square$

Ahora recordemos una noción topológica.

**Definición 1.9.** Una *retracción* de una variedad  $M$  sobre otra  $N \subset M$  es una aplicación continua  $\rho : M \rightarrow N$  tal que  $\rho|_N = \text{id}_N$ . Diremos en tal caso que  $N$  es un *retracto* de  $M$ .

Volviendo al entorno tubular anterior,  $M \times \{0\}$  es un retracto de  $NM$  vía la retracción  $(p, u) \mapsto p$ , y podemos definir la retracción  $\pi : NM \rightarrow M$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Omega \subset NM & \xrightarrow{e|_{\Omega}} & W \subset \mathbb{R}^q \\
\nu|_{\Omega} \searrow & & \swarrow \pi \\
& & M
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(p, u) & \xrightarrow{e|_{\Omega}} & p + u \\
\nu|_{\Omega} \searrow & & \swarrow \pi \\
& & p
\end{array}$$

Esta retracción es *diferenciable*. Para variedades con borde hay que utilizar otro recurso, y sólo se pueden obtener retracciones *continuas*.

**Proposición y definición 1.10.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^q$  una variedad con borde. Se llama *collar* de  $\partial M$  a un entorno  $U$  de  $\partial M$  en  $M$  equipado con un difeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \partial M \times [0, 1)$  tal que  $\varphi(p) = (p, 0)$  para cada  $p \in \partial M$ . *Todo entorno abierto  $U$  de  $\partial M$  en  $M$  contiene un collar.*

*Idea de la demostración.* Se considera un entorno tubular del borde en  $\mathbb{R}^q$  y se restringe a  $M$  para tener una retracción  $\pi : U \rightarrow \partial M$  desde un abierto  $U$  de  $M$ . Después se construye una ecuación regular  $h : U \rightarrow [0, 1)$  tal que  $\partial M = h^{-1}(0)$  y se define  $\varphi : U \rightarrow \partial M \times [0, 1)$  por  $\varphi(x) = (\pi(x), h(x))$ . A partir de aquí se imita la demostración de 1.8.  $\square$

Finalmente:

**Proposición 1.11.** *Una variedad  $M \subset \mathbb{R}^q$  con borde es, salvo difeomorfismo, un conjunto cerrado de una variedad sin borde  $N \subset \mathbb{R}^q$  y es retracto de un entorno suyo  $U$  en  $M$ . Componiendo esa retracción con otra de un entorno tubular  $W$  de  $N$  en  $\mathbb{R}^q$  se obtiene una retracción continua  $\pi : W \rightarrow M$ .*

*Idea de la demostración.* Mediante un collar  $U$  de  $\partial M$  en  $M$  podemos suponer  $U = \partial M \times [0, 1)$ , y aquí tenemos el difeomorfismo

$$h : U \rightarrow \partial M \times [\frac{1}{2}, 1) \subset U, (x, t) \mapsto (x, \theta(t)),$$

donde  $\theta$  es una meseta:  $\theta \equiv \frac{1}{2}$  si  $t \leq \frac{1}{2}$ , y  $\theta \equiv t$  si  $t \geq \frac{3}{4}$ . Este  $h$  se extiende por la identidad a un difeomorfismo de  $M$  sobre un subconjunto cerrado de su interior.  $\square$

## 2. FORMAS EN VARIEDADES

Sea  $E$  un espacio vectorial real de dimensión  $m$ . Una forma *alternada* de grado  $r$  es una forma multilineal  $\alpha$  de grado  $r$  tal que para toda permutación  $\sigma$  de  $r$  elementos con signatura denotada por  $(-1)^\sigma$  se tiene:

$$\alpha^\sigma(v_1, \dots, v_r) := \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = (-1)^\sigma \alpha(v_1, \dots, v_r).$$

Estas formas son un espacio vectorial,  $\Lambda^r(E)$ . La *alternación* de una forma multilineal  $\alpha$  es la forma alternada, donde  $\sigma$  recorre todas las permutaciones de  $r$  elementos:

$$\text{Alt}(\alpha) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \alpha^\sigma.$$

El producto tensorial de dos formas alternadas de grados  $r$  y  $s$ ,

$$\alpha \otimes \beta(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s) = \alpha(u_1, \dots, u_r) \beta(v_1, \dots, v_s),$$

no es alternado, así que consideramos el *producto exterior*

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Es asociativo y antisimétrico:  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ . En particular  $\alpha \wedge \alpha = 0$  si  $r = 1$ . Dada una base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  del espacio dual  $E^*$ , los productos

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m,$$

son una base de  $\Lambda^r(E)$ , que es trivial si  $r > m$ . Si  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  es la base dual de  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , cada  $\alpha \in \Lambda^r(E)$  se escribe

$$\alpha = \sum_I \alpha_I \varphi_I, \quad \alpha_I = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}),$$

donde abreviamos con  $I$  el multi-índice  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$ ,  $\varphi_I = \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r}$ .

Si  $f : E \rightarrow F$  es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, su *pullback*  $f^* : \Lambda^r(F) \rightarrow \Lambda^r(E)$  está definido por

$$f^* \alpha(v_1, \dots, v_r) = \alpha(f(v_1), \dots, f(v_r)).$$

**Teorema 2.1** (del determinante). *Dada una aplicación lineal  $f : E \rightarrow F$  entre espacios vectoriales  $E$  y  $F$  ambos de dimensión  $m$ , con bases asociadas  $\{u_i\}$  y  $\{v_j\}$  respectivamente, duales de  $\{\varphi_i\}$  en  $E^*$  y de  $\{\psi_j\}$  en  $F^*$ , entonces*

$$f^*(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_m) = \det(f) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m.$$

Para definir las formas diferenciales de una variedad  $M$  consideramos

$$\Lambda^r(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \Lambda^r(T_p M).$$

**Definición 2.2.** Una *forma diferencial de grado  $r$  o  $r$ -forma* de  $M^m$  es una aplicación  $\alpha : M \rightarrow \Lambda^r(M)$  del tipo  $p \mapsto (p, \alpha_p)$ . Se dice que  $\alpha$  es *diferenciable* cuando para cualesquiera campos  $X^{(1)}, \dots, X^{(r)} \in \mathfrak{X}(M)$  es diferenciable la función

$$\alpha(X^{(1)}, \dots, X^{(r)}) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \alpha_p(X_p^{(1)}, \dots, X_p^{(r)}).$$

Denotamos por  $\Gamma^r(M)$  el conjunto de las  $r$ -formas diferenciables de la variedad  $M$ .

Siempre supondremos las formas diferenciales diferenciables. Si  $r > m = \dim(M)$  todos los  $\Lambda^r(T_p M)$  son triviales, luego  $\Gamma^r(M)$  es trivial. Las operaciones con formas se definen punto a punto, y se heredan todas las propiedades que tenía para formas alternadas.

La *diferencial* de una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es la 1-forma (diferenciable)

$$df : M \rightarrow \Lambda^1(M), \quad p \mapsto df_p := d_p f.$$

Dadas unas coordenadas  $x : U \rightarrow W$  en  $p \in M$ , la base dual de las derivadas parciales  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$  está formada por las diferenciales  $dx_{i,p}$  de las coordenadas. Por tanto, cada  $r$ -forma  $\alpha \in \Gamma^r(M)$  se expresa

$$\alpha|_U = \sum_{I \subset \mathbb{N}_r} \alpha_I dx_I, \quad dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

donde los coeficientes son las funciones diferenciables

$$\alpha_I = \alpha_{i_1, \dots, i_r} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Así, una forma es diferenciable si y sólo si lo es su actuación sobre las derivadas parciales.

Una forma de grado cero es una función diferenciable, y ya hemos definido su diferencial. Para grados arbitrarios se tiene:

**Teorema y definición 2.3.** *Existe una única aplicación lineal  $d : \Gamma^r(M) \rightarrow \Gamma^{r+1}(M)$ , denominada diferencial exterior, que cumple:*

1. Para  $r = 0$ ,  $d$  es la diferencial de funciones.
2.  $d \circ d = 0$ .
3.  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$ , para  $\alpha \in \Gamma^r(M)$ .

**Definición 2.4.** El *pullback* de una aplicación diferenciable entre variedades  $f : M \rightarrow N$  es el homomorfismo

$$f^* : \Gamma^r(N) \longrightarrow \Gamma^r(M), \quad (f^*\alpha)_p = (d_p f)^*\alpha_{f(p)}.$$

Se verifica: (i)  $id_M^* = id_{\Gamma^r(M)}$ , (ii)  $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ , (iii)  $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$ , y (iv)  $f^* \circ d = d \circ f^*$ . Es inmediato que el pullback de una inclusión  $j : M \subset N$  actúa como la restricción asociada, y denotamos  $\alpha|_M = j^*\alpha$ .

Usaremos el siguiente operador con un campo tangente  $X \in \mathfrak{X}(M)$  para  $p \geq 1$ :

$$i_X : \Gamma^p(M) \longrightarrow \Gamma^{p-1}(M), \quad \omega(\dots) \longmapsto \omega(X, \dots).$$

Completamos la sección con un breve resumen sobre orientación. Una *orientación* en un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $m$  es una clase de equivalencia para la relación entre bases de  $E$  de tener positivo el determinante del cambio de base asociado. Denotaremos la clase de equivalencia de una base  $\{u_i\}$  por  $\zeta = [u_i]$ , y la única clase distinta por  $-\zeta$ . En el caso  $m = 0$ , se conviene en que orientar  $E$  consiste en escoger un signo  $+1$  o  $-1$ . Cuando  $E = \mathbb{R}^m$ , se denota por  $\zeta^{(m)} = [e_i]$  a la orientación *estándar* determinada por la base estándar  $\{e_i\}$ . Fijada  $\zeta$ , diremos que cualquier elemento de  $\zeta$  es una base *positiva*.

**Definición 2.5** (Orientación de variedades). Una *orientación* en una variedad  $M^m$  es una elección  $\zeta_M = \{\zeta_p : p \in M\}$  de orientaciones  $\zeta_p$  de  $T_p M$  en cada  $p$  de  $M$ , tal que cada  $p \in M$  tenga un entorno coordenado  $x : U \rightarrow W$  cumpliendo, para cada  $a \in U$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_a \right] = \zeta_a.$$

Diremos entonces que  $x$  es *compatible* con  $\zeta_M$ . Una variedad  $M$  se llama *orientable* cuando exista una orientación  $\zeta_M$ ; se llama *orientada* cuando tal orientación se ha fijado.

En variedades de dimensión  $m \geq 2$ , mediante una simetría en la coordenada  $x_2$ , siempre se pueden conseguir parametrizaciones compatibles sobre abiertos de  $\mathbb{H}^m \equiv \{x_1 \geq 0\}$ . Análogamente en puntos del interior. En cambio, esto no se puede hacer en un punto del borde si  $m = 1$ . Por otro lado, dado que la jacobiana de la localización de un cambio de coordenadas es precisamente la matriz del cambio de base, se tiene que:

**Proposición y definición 2.6.** Una variedad es orientable si y sólo si existe un atlas cuyos cambios de coordenadas tienen todos determinante jacobiano positivo. Un tal atlas se llama un *atlas positivo*.

Mediante formas también se determina la orientabilidad:

**Proposición 2.7.** Una variedad  $M^m$  es orientable si y sólo si tiene una forma diferencial de grado máximo  $m$  nunca nula.

Dadas dos orientaciones en una variedad, los conjuntos donde coinciden o no son abiertos, luego su coincidencia o no en componentes conexas está determinada por la de cualquier punto. De forma similar, una variedad es orientable si y sólo si lo es su interior.

Dado un difeomorfismo local  $f : M \rightarrow N$  su derivada en un punto  $a$  es un isomorfismo lineal  $d_a f : T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$  y la imagen de una base positiva de  $T_a M$  define una orientación  $d_a f(\zeta_a)$  de  $T_{f(a)} N$ . Si  $\zeta_{f(a)} = d_a f(\zeta_a)$  decimos que  $f$  *conserva* la orientación en  $a$ , en otro caso que la *invierte*. Esto se ve por el signo del determinante de  $d_a f$  respecto de bases positivas. Decimos que  $f$  *conserva* o *invierte* la orientación cuando lo haga en todo punto.

Para enunciar en la sección siguiente el teorema de Stokes, recordamos cómo orientar el borde de una variedad orientada. En primer lugar, dado  $a \in \partial M$  y unas coordenadas

locales  $x : U \rightarrow \mathbb{H}^m = \{x_1 \geq 0\}$ , diferenciando se obtiene un isomorfismo lineal

$$d_a x : u \mapsto t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$$

del par  $T_a(\partial M) \subset T_a M$  sobre el par  $\partial \mathbb{H}^m = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ . Así, la conservación del borde nos dice que  $t_1 = 0$  si y sólo si  $t \in T_a(\partial M)$ . Pero dado que cualquier cambio de coordenadas  $y \circ x^{-1}$  va de un abierto de  $\mathbb{H}^m$  a  $\mathbb{H}^m$ , se prueba que  $t_1 < 0$  también es independiente de las coordenadas. Definimos los vectores *salientes* como aquellos tales que  $t_1 < 0$  para algún, y por tanto cualquier, sistema de coordenadas. Con todo ello:

**Definición 2.8** (Orientación del borde). Dada una variedad  $M^m$  orientada y  $a \in \partial M$ , definimos una orientación  $\partial \zeta_a$  en  $T_a \partial M$  tomando cualquier base  $\{u_2, \dots, u_m\}$  de  $T_a \partial M$  tal que para algún vector saliente  $u_1 \in T_a M$  se tenga  $\zeta_a = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ .

### 3. INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

Para la integración necesitamos introducir:

**Definición 3.1.** Dada una variedad  $M$ , denotaremos por  $\Gamma_c^r(M) \subset \Gamma^r(M)$  al conjunto de *formas diferenciales con soporte compacto*.

Es decir, aquellas que se anulan fuera de un compacto  $K \subset M$ . Empleando particiones de la unidad, junto con el teorema de cambio de variable del cálculo integral para abiertos de  $\mathbb{H}^m$ , se prueba de modo constructivo:

**Teorema y definición 3.2.** *Dada una variedad orientada  $M^m$ , existe una única aplicación lineal, denominada integral,*

$$\int_M : \Gamma_c^m(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto \int_M \omega,$$

que cumple: Si una parametrización  $\varphi$  es compatible con la orientación, y una forma  $\omega \in \Gamma_c^r(M)$  tiene soporte compacto contenido en el dominio de coordenadas asociado, entonces

$$\int_M \omega = + \int_{x(U)} h, \quad \text{donde } \varphi^* \omega = h dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Se indica el signo  $+$  porque si  $\varphi$  no es compatible con la orientación, la integral se precede de un signo  $-$ . De la unicidad resulta el teorema del cambio de variable:

**Corolario 3.3.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo entre variedades orientadas que conserva (resp. invierte) la orientación, entonces*

$$\int_N \omega = \int_M f^* \omega \quad \left( \text{resp. } \int_N \omega = - \int_M f^* \omega \right).$$

Fijados un atlas positivo  $\{U_i\}$  y una partición diferenciable de la unidad  $\{\theta_i\}$  subordinada, una fórmula explícita de cálculo es

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{x_i(U_i)} \varphi_i^*(\theta_i \omega).$$

Nótese que al tener  $\omega$  soporte compacto, la suma es finita. Después de localizar con esta fórmula, un cálculo en  $\mathbb{H}^m$  proporciona la célebre generalización del teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow):

**Teorema 3.4** (de Stokes). *Dada una variedad orientada  $M^m$ , con borde orientado según la orientación inducida, entonces si  $\omega \in \Gamma_c^{m-1}(M)$  se tiene*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}.$$

En particular, si  $M$  no tiene borde  $\int_M d\omega = 0$ .

Terminamos con el resultado que en ocasiones se denomina el recíproco del teorema de Stokes para variedades sin borde.

**Teorema 3.5.** *Dada una variedad orientada, conexa y sin borde  $M^m$ , y una forma  $\omega \in \Gamma_c^m(M)$  con integral nula  $\int_M \omega = 0$ , entonces existe  $\kappa \in \Gamma_c^{m-1}(M)$  tal que  $\omega = d\kappa$ .*

Su demostración se divide en dos partes, que recogemos en dos lemas por comodidad.

**Lema 3.6.** *El resultado anterior es cierto para el caso especial  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ .*

*Demostración.* En este supuesto especial, tenemos  $\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$  para  $f \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$  y tal que  $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = 0$ , y se trata de encontrar  $\kappa \in \Gamma_c^{m-1}(\mathbb{R}^m)$  tal que  $\omega = d\kappa$ . En primer lugar, siempre podemos escribir

$$\kappa = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} f_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

para ciertas  $f_j \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$ , donde  $\widehat{dx_j}$  significa que dicho factor no está presente en el producto alternado. Por tanto, resulta que

$$d\kappa = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Así, dada  $f \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$  con  $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = 0$ , se trata de encontrar  $f_j \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$  tales que  $f = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$ . Para ello, probaremos por inducción sobre  $n \leq m$  que:

Sea  $f \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$ ,  $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ , y denotemos  $x = (y, z)$  con  $y = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $z = (x_{n+1}, \dots, x_m)$ . Entonces, si  $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z)dy = 0$ , existen funciones  $f_j \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$  con  $j = 1, \dots, n$  tales que

$$f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}.$$

Para  $n = 1$  basta definir

$$f_1(x) = f_1(x_1, z) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, z)dt,$$

que tiene soporte compacto pues teniendo  $f$ , para  $x_1$  suficientemente pequeño el integrando es  $\equiv 0$ , mientras que para  $x_1$  suficientemente grande se tiene

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z)dt = 0.$$

Supongamos ahora que lo sabemos para  $n-1$ , con  $n \geq 2$ , y escribamos  $y' = (x_1, \dots, x_{n-1})$  de forma que  $x = (y', x_n, z)$ . Sea  $\varphi \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^{m-1})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi = 1$ . Entonces definimos

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad h(x) = \varphi(y') \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u, x_n, z)du.$$

La función  $g$  tiene soporte compacto por tenerlo  $f$  y  $\varphi$ , y es diferenciable por serlo  $h$  (ya que podemos diferenciar bajo el signo integral, por tener  $f$  soporte compacto). Más aún,

por construcción resulta que  $\int_{\mathbb{R}^{m-1}} g(y', x_n, z) dy' = 0$ , luego podemos aplicar la hipótesis de inducción a  $g$ , lo que nos proporciona funciones  $f_j \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$  tales que

$$g = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}.$$

Por otro lado, podemos escribir  $h = \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$  para  $f_n$  definida según

$$f_n(x) = f_n(y', x_n, z) = \varphi(y') \int_{-\infty}^{x_n} \left( \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u, t, z) du \right) dt.$$

Lo que probaría lo que buscamos si comprobamos que  $f_n \in \Gamma_c^0(\mathbb{R}^m)$ . Pero  $f_n$  es diferenciable, razonando como antes, y además tiene soporte compacto pues:

- Si  $\|y'\|$  es (suficientemente) grande,  $\varphi(y') = 0$ ;
- si  $\|z'\|$  es grande o  $x_n$  pequeño, el integrando  $f(u, t, z) \equiv 0$ ;
- si  $x_n$  es grande, entonces  $f \equiv 0$  y podemos reemplazar  $x_n$  por  $+\infty$ , quedando

$$f_n(x) = \varphi(y') \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u, x_n, z) du \right) dt = \varphi(y') \int_{\mathbb{R}^m} f(y, z) dy = 0.$$

□

Probado el resultado para  $\mathbb{R}^m$ , se obtiene para variedades arbitrarias a partir de la siguiente consecuencia.

**Lema 3.7.** *Dado un abierto  $W \subset M$  no vacío de una variedad orientada, conexa y sin borde  $M$ , y  $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ , entonces existe  $\kappa \in \Gamma_c^{m-1}(M)$  tal que  $\text{sop}_M(\omega - d\kappa) \subset W$ .*

*Demostración.* Directamente del resultado que acabamos de probar en  $\mathbb{R}^m$  se concluye este lema si tanto  $W$  como  $\text{sop}_M(\omega)$  están contenidos en un abierto  $U$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ . En efecto, trabajando en  $\mathbb{R}^m$ , consideramos cierta  $\omega_1 \in \Gamma_c^m(\mathbb{R}^m)$  tal que  $\text{sop}_{\mathbb{R}^m}(\omega_1) \subset W$  y  $\int_{\mathbb{R}^m} \omega_1 = 1$ . Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\omega - a\omega_1) = 0, \quad \text{si } a = \int_{\mathbb{R}^m} \omega.$$

Luego existe  $\kappa \in \Gamma_c^{m-1}(\mathbb{R}^m)$  de manera que  $\omega - a\omega_1 = d\kappa$ , de donde

$$\text{sop}_{\mathbb{R}^m}(\omega - d\kappa) = \text{sop}_{\mathbb{R}^m}(a\omega_1) \subset W.$$

Supongamos ahora que sólo tenemos  $\omega \in \Gamma_c^m(M)$  con  $\text{sop}_M(\omega) \subset U_0$  para cierto abierto  $U_0$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ . Por conexión, existe una cadena finita  $\{U_1, \dots, U_s\}$  de abiertos difeomorfos a  $\mathbb{R}^m$  tales que  $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$  para cada  $j = 0, 1, \dots, s-1$  y tal que  $U_s \subset W$ . Utilizando lo que acabamos de probar en cada abierto  $U_j$ , con  $W' = U_j \cap U_{j+1}$ , escogemos sucesivamente  $\kappa_j \in \Gamma_c^{m-1}(M)$ ,  $j = 0, 1, \dots, s-1$  tales que

$$\text{sop}_M \left( \omega - \sum_{i=0}^j d\kappa_i \right) \subset U_j \cap U_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, s-1.$$

Luego basta tomar  $\kappa = \sum_{i=0}^{s-1} \kappa_i$ , ya que al cabo de los  $s$  pasos obtenemos

$$\text{sop}_M \left( \omega - d \sum_{i=0}^{s-1} \kappa_i \right) \subset U_{s-1} \cap U_s \subset W.$$

Para concluir, si ahora  $\omega \in \Gamma_c^m(M)$  es arbitraria, escogemos un atlas cuyos dominios coordenados sean difeomorfos a  $\mathbb{R}^m$ , y una partición diferenciable de la unidad subordinada a dichos dominios,  $\{\theta_i\}$ . Entonces, al tener  $\omega$  soporte compacto, se tiene

$$\omega = \sum_i \theta_i \omega = \sum_{j=1}^k \omega_j$$

para una cantidad finita  $k$  de formas  $\omega_j = \theta_j \omega$  cuyo soporte está contenido en abiertos difeomorfos a  $\mathbb{R}^m$ . Por lo probado, existen  $\kappa_j \in \Gamma_c^{m-1}(M)$ ,  $j = 1, \dots, k$  tales que

$$\text{sop}_M(\omega_j - d\kappa_j) \subset W,$$

luego tomando  $\kappa = \sum_{j=1}^k \kappa_j$  obtenemos el resultado, ya que

$$\omega - d\kappa = \omega - d \sum_{j=1}^k \kappa_j = \sum_{j=1}^k (\omega_j - d\kappa_j).$$

□

*Demostración del teorema 3.5.* Con estos dos lemas se concluye fácilmente. Dada  $\omega \in \Gamma_c^m(M)$  con  $\int_M \omega = 0$ , consideramos un abierto difeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ ,  $W \subset M$ . En virtud del lema 3.7, existe  $\kappa \in \Gamma_c^{m-1}(M)$  tal que  $\text{sop}_M(\omega - d\kappa) \subset W$ . Pero entonces se tiene

$$\int_M (\omega - d\kappa) = \int_M \omega - \int_M d\kappa = 0 - 0 = 0,$$

la segunda integral nula como consecuencia del teorema de Stokes y de ser  $M$  sin borde. Aplicando ahora el lema 3.6 en  $W$  a la forma  $\omega - d\kappa$ , resulta que existe  $\kappa_0 \in \Gamma_c^{m-1}(M)$  tal que  $\omega - d\kappa = d\kappa_0$ , luego finalmente

$$\omega = d(\kappa + \kappa_0).$$

□

#### 4. COMPLEJOS DE COCADENAS Y SU COHOMOLOGÍA

En esta sección introducimos una serie de conceptos algebraicos generales: la cohomología de cocadenas y algunos de sus resultados elementales. Ello permitirá sistematizar el análisis de los grupos de cohomología de las formas diferenciales de una variedad.

**Definiciones 4.1.** (1) Una sucesión de espacios vectoriales  $A^i$  y de aplicaciones lineales  $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$  para  $i \in \mathbb{Z}$ , que denotaremos por  $A^* = \{A^i, d^i\}_i$ , es una *cocadena* cuando  $d^{i+1} \circ d^i = 0$  para todo  $i$ .

(2) Una cocadena  $A^* = \{A^i, d^i\}_i$  es *exacta* cuando  $\ker d^{i+1} = \text{im } d^i$  para todo  $i$ .

Es frecuente escribir las cocadenas como:

$$\dots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+2} \longrightarrow \dots$$

De forma que  $d^{i+1} \circ d^i = 0$  es equivalente a  $\text{im } d^i \subset \ker d^{i+1}$ . A no ser que queramos hacer referencia explícita al superíndice  $i$ , escribiremos simplemente  $d$ , por ejemplo  $d \circ d = 0$ .

De especial relevancia son las cocadenas cortas:

**Definición 4.2.** Una cocadena se dice *exacta corta* si es exacta y sus únicos espacios no triviales son de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

o, equivalentemente,  $f$  es inyectiva,  $g$  suprayectiva y  $\ker g = \text{im } f$ .

En ese caso  $g$  induce un isomorfismo:

$$\hat{g} : B/\operatorname{im} f \xrightarrow{\cong} C, [b] \mapsto g(b).$$

El espacio cociente  $B/\operatorname{im} f$  se suele denominar *conúcleo* de  $f$ , denotado  $\operatorname{coker} f$ . Nótese que al ser  $f$  inyectiva, también se tiene  $f : A \cong \operatorname{im} f$ . Por tanto:

**Lema 4.3.** *Dada una cocadena exacta corta  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ , entonces  $B \cong A \oplus C$ . En particular,  $B$  es de dimensión finita si y sólo si lo son  $A$  y  $C$ .*

**Observación 4.4.** Cualquier cocadena exacta  $A^* = \{A^i, d^i\}_i$  induce, para cada  $i$ , una cocadena exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} d^i \xrightarrow{j} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \operatorname{im} d^{i+1} \longrightarrow 0,$$

donde  $j : \operatorname{im} d^i \hookrightarrow A^{i+1}$  es la inclusión. Por tanto, tenemos el isomorfismo vía  $d^{i+1}$

$$A^{i+1}/\operatorname{im} d^i \xrightarrow{\cong} \operatorname{im} d^{i+1}, [a] \mapsto d^{i+1}(a);$$

y en particular se cumplirá que  $A^{i+1} \cong \operatorname{im} d^i \oplus \operatorname{im} d^{i+1}$ .

**Definiciones 4.5.** Dada una cocadena  $A^* = \{A^i, d^i\}_i$  definimos para cada  $p \in \mathbb{Z}$  su  $p$ -ésimo grupo de cohomología como el espacio vectorial dado por el cociente

$$H^p(A^*) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}.$$

Los elementos de este cociente  $H^p(A^*)$  se denominan *clases de cohomología*. A los elementos de  $\ker d$  se les llama *cociclos*. A los elementos de  $\operatorname{im} d$  se les llama *cobordes*.

Por ejemplo, una cocadena  $A^*$  es exacta si y sólo si su cohomología es nula, o sea,  $H^p(A^*) = 0$  para cada  $p$ . Definimos a continuación los morfismos que actúan convenientemente sobre las cocadenas:

**Definición 4.6.** Un *morfismo de cocadenas* entre dos cocadenas  $A^* = \{A^i, d_A^i\}_i$  y  $B^* = \{B^i, d_B^i\}_i$  es una sucesión de aplicaciones lineales  $f^i : A^i \rightarrow B^i$  tales que  $d_B^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_A^i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ . Se denota simplemente por  $f : A^* \rightarrow B^*$ .

Es decir,  $f$  conmuta con  $d$ :  $d \circ f = f \circ d$ . Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_A} & A^{i-1} & \xrightarrow{d_A} & A^i & \xrightarrow{d_A} & A^{i+1} & \xrightarrow{d_A} & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ \dots & \xrightarrow{d_B} & B^{i-1} & \xrightarrow{d_B} & B^i & \xrightarrow{d_B} & B^{i+1} & \xrightarrow{d_B} & \dots \end{array}$$

El interés, como ya se intuye, es que preservan la estructura de los grupos de cohomología.

**Lema 4.7.** *Un morfismo de cocadenas  $f : A^* \rightarrow B^*$  induce para cada  $p$  un homomorfismo lineal entre los grupos de cohomología  $p$ -ésimos de la forma:*

$$f^p : H^p(A^*) \longrightarrow H^p(B^*), [a] \mapsto [f^p(a)].$$

Normalmente escribiremos  $f : H^p(A^*) \rightarrow H^p(B^*)$ .

*Demostración.* Veamos que la definición dada de  $f$  es consistente. En primer lugar, no depende del representante escogido: dados  $a_1, a_2 \in \ker d^p$  tales que  $a_2 - a_1 = d_A^{p-1} a'$ , ambos arrojan la misma clase de cohomología vía  $f$  pues

$$f^p(a_2) - f^p(a_1) = f^p(a_2 - a_1) = f^p \circ d_A^{p-1} a' = d_B^{p-1} \circ f^{p-1} a' \in \operatorname{im} d_B^{p-1}.$$

Por otro lado, dada una clase  $[a] \in H^p(A^*)$ , o sea,  $[a] = a + \text{im } d_A^{p-1}$  con  $d_A^p a = 0$ , entonces

$$d_B^p \circ f^p(a) = f^{p+1} \circ d_A^p a = f^{p+1}(0) = 0,$$

luego  $[f^p(a)]$  pertenece a  $H^p(B^*)$ .  $\square$

Podemos introducir a su vez las cocadenas de cocadenas:

**Definición 4.8.** Una *sucesión de cocadenas* (resp. una *sucesión exacta de cocadenas*) es una sucesión de cocadenas  $\{A_k^*\}_k$  y de morfismos de cocadenas  $\{f_k : A_k^* \rightarrow A_{k+1}^*\}_k$  tales que para cada  $i$  la sucesión

$$\dots \longrightarrow A_{k-1}^i \xrightarrow{f_{k-1}^i} A_k^i \xrightarrow{f_k^i} A_{k+1}^i \xrightarrow{f_{k+1}^i} A_{k+2}^i \longrightarrow \dots$$

es una cocadena (resp. exacta). Es decir,  $\{A_k^i, f_k^i\}_k$  es una cocadena (resp. exacta), o sencillamente,  $f_{k+1}^i \circ f_k^i = 0$  (resp.  $\text{im } f_k^i = \ker f_{k+1}^i$ ) para cada  $k$  e  $i$ .

**Definición 4.9.** Una sucesión de cocadenas es *exacta corta* si es exacta y de la forma

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0.$$

Como vemos, en las sucesiones de cocadenas nos fijamos en la dirección transversa a la dirección de  $d$  para buscar nuevas cocadenas. Su interés es:

**Lema 4.10.** Dada una sucesión exacta corta de cocadenas, entonces se tiene para cada  $p$  la cocadena exacta

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f} H^p(B^*) \xrightarrow{g} H^p(C^*).$$

*Demostración.* Dado que  $g^i \circ f^i = 0$ , la sucesión es de hecho una cocadena:

$$g \circ f([a]) = [g^i \circ f^i(a)] = [0].$$

Pero también es exacta: dada  $[b] \in \ker g \subset H^p(B^*)$ , se tiene  $g^p(b) = d_C^p c$  para cierto  $c \in C^{p-1}$ . Dado que  $g^{p-1}$  es suprayectiva, existe  $b' \in B^{p-1}$  con  $c = g^{p-1}(b')$ , luego

$$g^p(b) = d_C^{p-1} \circ g^{p-1}(b') = g^p \circ d_B^{p-1}(b').$$

Y por tanto  $b - d_B^{p-1}(b') \in \ker g^p$ . Dado que  $\ker g^p = \text{im } f^p$ , existe a su vez  $a \in A^p$  tal que  $f^p(a) = b - d_B^{p-1}(b')$  y  $a$  es un cociclo pues  $f^{p+1}$  es inyectiva y tenemos

$$f^{p+1} \circ d_A^p(a) = d_B^p \circ f^p(a) = d_B^p(b - d_B^{p-1}(b')) = 0 - 0 = 0.$$

Finalmente  $f([a]) = [f^p(a)] = [b]$  ya que  $b - f^p(a) = d_B^{p-1}(b')$ .  $\square$

Uno pudiera esperar que la anterior sucesión de cohomologías fuese de hecho exacta corta, pero esto no es así en general. En concreto,  $g : H^p(B^*) \rightarrow H^p(C^*)$  no es necesariamente suprayectiva a pesar de sí serlo  $g^p$ , ya que dada  $[c] \in H^p(C^*)$  no podemos asegurar que exista  $b \in B^p$  tal que  $g^p(b) = c$  y que sea además un cociclo, y similar con la inyectividad de  $f$ . La solución a este fenómeno se halla con la siguiente definición.

**Definición 4.11.** Dada una sucesión exacta corta de cocadenas  $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$  se denomina *morfismo de conexión* a las aplicaciones lineales  $\partial^p$

$$\partial^p : H^p(C^*) \longrightarrow H^{p+1}(A^*), [c] \longmapsto \left[ (f^{p+1})^{-1} (d_B^p ((g^p)^{-1}(c))) \right].$$

Donde por la imagen inversa  $(g^p)^{-1}(c)$  nos referimos a cualquier punto de la preimagen de  $c$  por  $g^p$ , ya que de acuerdo con el siguiente resultado, esta arbitrariedad sólo es aparente.

Antes de ello, vemos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo, donde la flecha diagonal indica el morfismo de conexión  $\partial$ , que se puede entender como  $\partial \approx f^{-1} \circ d \circ g^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & A^{p+1} & \xrightarrow{f} & B^{p+1} & \xrightarrow{g} & C^{p+1} \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow d_A & & \uparrow d_B & \searrow \partial & \uparrow d_C \\
0 & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{f} & B^p & \xrightarrow{g} & C^p \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow d_A & & \uparrow d_B & \searrow \partial & \uparrow d_C \\
0 & \longrightarrow & A^{p-1} & \xrightarrow{f} & B^{p-1} & \xrightarrow{g} & C^{p-1} \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

**Lema 4.12.** *El morfismo de conexión  $\partial$  está bien definido.*

*Demostración.* Sea  $[c] = c + \text{im } d_C^{p-1} \in H^p(C^*)$ , con  $d_C^p(c) = 0$ . Por ser  $g^p$  suprayectiva, siempre existe algún  $b \in B^p$  tal que  $g^p(b) = c$ . Se trata de comprobar una serie de aspectos:

(1) Para cualquier preimagen  $b \in (g^p)^{-1}(c)$ ,  $d_B^p(b)$  está contenido en  $\text{im } f^{p+1} = \ker g^{p+1}$ :

$$g^{p+1} \circ d_B^p(b) = d_C^p \circ g^p(b) = d_C^p(c) = 0.$$

(2) Siempre se obtiene una clase de cohomología, esto es,  $a = (f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))$  es un cociclo: si  $f^{p+1}(a) = d_B^p(b)$ , esto se desprende de la inyectividad de  $f$  y de que

$$f^{p+2} \circ d_A^{p+1}(a) = d_B^{p+1} \circ f^{p+1}(a) = d_B^{p+1} \circ d_B^p(b) = 0.$$

(3) La clase obtenida no depende de la preimagen de  $c$  escogida: dados  $b_1, b_2 \in (g^p)^{-1}(c)$ , sean también  $a_i = (f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b_i))$ . Entonces,  $b_2 - b_1 \in \ker g^p = \text{im } f^p$ , luego existe  $a' \in A^p$  tal que  $f^p(a') = b_2 - b_1$  y

$$a_2 - a_1 = (f^{p+1})^{-1}(d_B^p(f^p(a'))) = (f^{p+1})^{-1}(f^{p+1} \circ d_A^p(a')) = d_A^p(a').$$

(4) Finalmente, la clase obtenida no depende del representante de  $[c]$  escogido: sean  $c_1, c_2 \in \ker d_C^p$  tales que  $c_2 - c_1 = d_C^{p-1}(c')$  para  $c' \in C^{p-1}$ . Sean con la notación anterior  $g^p(b_i) = c_i$ ,  $a_i = (f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b_i))$ . Como  $g^{p-1}$  es suprayectiva, existe  $b' \in B^{p-1}$  tal que  $g^{p-1}(b') = c'$ . Entonces,

$$g^p(b_2 - b_1 - d_B^{p-1}(b')) = c_2 - c_1 - d_C^{p-1} \circ g^{p-1}(b') = c_2 - c_1 - d_C^p(c') = 0,$$

luego existe  $a' \in A^p$  tal que  $f^p(a') = b_2 - b_1 - d_B^{p-1}(b')$ . Para terminar, resulta que

$$\begin{aligned}
f^{p+1}(a_2 - a_1) &= d_B^p(b_2 - b_1) = d_B^p(d_B^{p-1}(b') + f^p(a')) \\
&= d_B^p \circ d_B^{p-1}(b') + d_B^p \circ f^p(a') = 0 + d_B^p \circ f^p(a') = f^{p+1} \circ d_A^p(a'),
\end{aligned}$$

y usando de nuevo la inyectividad de  $f^{p+1}$ , concluimos que  $a_2 - a_1 = d_A^p(a')$ .  $\square$

El morfismo de conexión  $\partial$  actúa como escalón, engarzando los grupos de cohomología para construir una sucesión exacta de cocadenas a partir de las cocadenas involucradas.

**Lema 4.13.** *Dada una sucesión exacta corta de cocadenas  $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ , la siguiente sucesión de espacios y aplicaciones lineales es una cocadena exacta:*

$$H^p(B^*) \xrightarrow{g} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(A^*)$$

*Demostración.* Se trata de una cocadena:  $\partial \circ g = 0$ , ya que dado  $[b] \in H^p(B^*)$  con  $d_B^p b = 0$

$$\partial \circ g([b]) = \partial([g^p(b)]) = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))] = [(f^{p+1})^{-1}(0)] = [0].$$

Recíprocamente, veamos que es exacta. Supongamos que tenemos  $\partial([c]) = [0]$  para  $[c] \in H^p(C^*)$  y sea  $[b] \in H^p(B^*)$  con  $g^p(b) = c$ . Por hipótesis existe  $a \in A^p$  tal que

$$(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b)) = d_A^p(a),$$

luego si consideramos  $b' = b - f^p(a) \in B^p$ , se tiene

$$g^p(b') = g^p(b) - g^p \circ f^p(a) = c - 0 = c.$$

Pero ahora  $b'$  sí es un cociclo, luego define una clase de cohomología preimagen de  $[c]$ :

$$d_B^p(b') = d_B^p(b) - d_B \circ f^p(a) = d_B^p(b) - f^{p+1} \circ d_A^p(a) = d_B^p(b) - d_B^p(b) = 0.$$

□

**Lema 4.14.** *Dada una sucesión exacta corta de cocadenas  $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ , la siguiente sucesión de espacios y aplicaciones lineales es una cocadena exacta:*

$$H^p(C^*) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f} H^{p+1}(B^*)$$

*Demostración.* En primer lugar,  $f \circ \partial = 0$  ya que dado  $[c] \in H^p(C^*)$  se tiene

$$f \circ \partial([c]) = [d_B^p((g^p)^{-1}(c))] = [0].$$

Recíprocamente, sea  $f([a]) = 0$  para  $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ , es decir,  $f^{p+1}(a) = d_B^p(b)$  para cierto  $b \in B^p$ . Entonces,  $c = g^p(b) \in C^p$  proporciona una preimagen de  $[a]$ , pues es un cociclo:

$$d_C^p(c) = d_C^p \circ g^p(b) = g^{p+1} \circ d_B^p(b) = g^{p+1} \circ f^{p+1}(a) = 0,$$

y claramente

$$\partial([c]) = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))] = [a].$$

□

Resumimos estos lemas, junto con el lema 4.10, en la siguiente *sucesión exacta larga*.

**Teorema 4.15.** *Dada una sucesión exacta corta de cocadenas  $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ , la siguiente sucesión de espacios y aplicaciones lineales es una cocadena exacta:*

$$\dots \xrightarrow{g} H^{p-1}(C^*) \xrightarrow{\partial} H^p(A^*) \xrightarrow{f} H^p(B^*) \xrightarrow{g} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f} \dots$$

El siguiente lema nos será útil al estudiar las formas diferenciales con soporte compacto.

**Lema 4.16.** *Consideremos una cocadena exacta  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ . Entonces, también es exacta la sucesión dual*

$$A^d \xleftarrow{f^d} B^d \xleftarrow{g^d} C^d,$$

donde  $A_i^d$  es el espacio dual de  $A_i$  y  $f^d : B^d \rightarrow A^d$ ,  $\beta \mapsto f^d(\beta) = \beta \circ f$ , y análogo para  $g^d$ .

*Demostración.* De ser  $\text{im } f \subset \ker g$ , o sea,  $g \circ f = 0$ , se concluye que  $f^d \circ g^d = (g \circ f)^d = 0$ , es decir,  $\text{im } g^d \subset \ker f^d$ . Recíprocamente, sea  $\beta \in \ker f^d$ , es decir,  $\beta \in B^d$  tal que  $f^d(\beta) = \beta \circ f = 0$ . Esto es equivalente a tener  $\beta|_{\text{im } f} \equiv 0$ . Ahora bien, por hipótesis  $\ker g \subset \text{im } f$  luego en particular  $\beta|_{\ker g} \equiv 0$ . Entonces el número  $\beta(g^{-1}(c))$  para cierto  $c \in \text{im } g$  no depende de qué elemento de la preimagen de  $c$  escojamos, luego podemos definir  $\gamma \in C^d$  según  $\gamma(c) = \beta(g^{-1}(c))$  para cada  $c \in \text{im } g$ , y arbitrariamente<sup>2</sup> sobre algún complemento directo de  $\text{im } g$ . De esto resulta que  $g^d(\gamma) = \gamma \circ g = \beta$ , luego  $\beta \in \text{im } g^d$  y

<sup>2</sup>Este paso requiere usar alguna forma del Lema de Zorn si la dimensión de  $C$  es infinita.

efectivamente  $\ker f^d \subset \operatorname{im} g^d$ .  $\square$

**Definición 4.17.** Dos morfismos de cocadenas  $f, g : A^* \rightarrow B^*$  son *homótopos* si existen morfismos lineales  $s^p : A^p \rightarrow B^{p-1}$  tales que para cada  $p$  se cumple

$$d_B^{p-1} \circ s^p + s^{p+1} \circ d_A^p = f^p - g^p : A^p \longrightarrow B^p.$$

Al operador  $s^p : A^p \rightarrow B^{p-1}$  se le llama *operador de homotopía*.

La propiedad  $d \circ s + s \circ d = f - g$  significa que en los siguientes diagramas es lo mismo descender hacia  $B$  vía las flechas verticales de  $f - g$  que mediante la suma de las dos diagonales adyacentes dadas por  $s$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_A} & A^{i-1} & \xrightarrow{d_A} & A^i & \xrightarrow{d_A} & A^{i+1} & \xrightarrow{d_A} & \dots \\ & \searrow s & \downarrow f-g & \swarrow s & \downarrow f-g & \swarrow s & \downarrow f-g & & \\ \dots & \xrightarrow{d_B} & B^{i-1} & \xrightarrow{d_B} & B^i & \xrightarrow{d_B} & B^{i+1} & \xrightarrow{d_B} & \dots \end{array}$$

La elección del término *homótopos* se entenderá en la sección 7. Baste de momento:

**Lema 4.18.** *Dos morfismos de cocadenas homótopos  $f, g : A^* \rightarrow B^*$  inducen la misma aplicación entre grupos de cohomología*

$$f = g : H^p(A^*) \longrightarrow H^p(B^*).$$

*Demostración.* Dados  $s^p : A^p \rightarrow B^{p-1}$  con  $d_B^{p-1} \circ s^p + s^{p+1} \circ d_A^p = f^p - g^p$ , resulta

$$f([a]) - g([a]) = [(f^p - g^p)(a)] = [(d_B^{p-1} \circ s^p + s^{p+1} \circ d_A^p)(a)] = [0 + s^{p+1}(0)] = [0].$$

$\square$

Para terminar esta sección, recogemos en el último lema la siguiente observación útil.

**Lema 4.19.** *Dadas cocadenas  $\{A_\alpha^* : \alpha \in A\}$ , se tiene que*

$$H^p\left(\bigoplus_\alpha A_\alpha^*\right) \cong \bigoplus_\alpha H^p(A_\alpha^*).$$

*Demostración.* Sea  $B^i = \bigoplus_\alpha A_\alpha^i$ . Definimos de la única manera natural

$$d_B^i : B^i \longrightarrow B^{i+1}, \quad (a_\alpha)_\alpha \longmapsto (d_{A_\alpha}^i a_\alpha)_\alpha,$$

obteniendo la cocadena  $\{B^i, d_B^i\}_i$ . Por tanto, observando que para cada  $p$  se cumple

$$\ker d_B^p = \bigoplus_\alpha \ker d_{A_\alpha}^p, \quad \operatorname{im} d_B^p = \bigoplus_\alpha \operatorname{im} d_{A_\alpha}^p,$$

se establece fácilmente un isomorfismo mediante la aplicación

$$H^p(B^*) \longrightarrow \bigoplus_\alpha H^p(A_\alpha^*), \quad [(a_\alpha)_\alpha] \longmapsto [(a_\alpha)]_\alpha.$$

$\square$

## 5. HOMOTOPÍA

En esta sección se recogen las definiciones usuales de homotopía entre aplicaciones continuas y de equivalencia de homotopía entre espacios. Su importancia en el contexto de la cohomología de de Rham es que, en virtud de los resultados de aproximación, las definiciones en términos de continuidad topológica son equivalentes en términos de diferenciabilidad. Esto permite ver a la cohomología de de Rham como un funtor de las aplicaciones continuas entre variedades, y no sólo diferenciables.

**Definiciones 5.1.** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos.

(1) Una *homotopía* es una aplicación continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ . En ocasiones será conveniente ver el argumento  $t \in [0, 1]$  como parámetro, para obtener las aplicaciones continuas  $H_t : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto H(x, t)$ .

(2) Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son *homótopas vía  $H$*  cuando se tenga una homotopía  $H$  tal que  $H_0 = f$ , y  $H_1 = g$ .

(3) Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son *homótopas* cuando lo sean vía alguna homotopía. Escribiremos simplemente  $f \simeq g$ .

Recordemos que la homotopía entre aplicaciones continuas establece una relación de equivalencia. Más aún, dadas aplicaciones continuas entre espacios topológicos  $f_\nu : X \rightarrow Y$ ,  $g_\nu : Y \rightarrow Z$ , para  $\nu = 0, 1$ , tales que  $f_0 \simeq f_1$  y  $g_0 \simeq g_1$ , entonces también  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ , sin más que considerar la composición de las respectivas homotopías.

Se ha de distinguir la noción de homotopía estándar de la siguiente.

**Definición 5.2.** Dos aplicaciones propias<sup>3</sup>  $f, g : X \rightarrow Y$  son *propiamente homótopas* cuando sean homótopas vía una homotopía propia.

Ambas nociones son claramente distintas, puesto que la homotopía propia no está definida entre aplicaciones que no sean propias. Más aún, dos aplicaciones propias y homótopas no son necesariamente propiamente homótopas. Por ejemplo,  $\mathbb{R}$  con la topología usual tiene el tipo topológico de un punto luego todas las aplicaciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son homótopas, mientras que existen 4 clases de homotopía propia (una aplicación continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es propia si y sólo si su límite cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  es  $\pm\infty$ , y dos aplicaciones propias son propiamente homótopas si y sólo si sus límites en  $\pm\infty$  coinciden).

**Definiciones 5.3.** (1) Una aplicación continua (resp. propia)  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia de homotopía* (resp. *propia*) cuando existe otra aplicación continua (resp. propia)  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  (resp. con homotopía propia). A una tal aplicación  $g$  se le llama *inversa homotópica de  $f$* .

(2) Dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  tienen el mismo *tipo de homotopía* (resp. *propia*) cuando existe una equivalencia de homotopía (resp. propia) entre ellos.

Como es sabido, la equivalencia de homotopía entre espacios topológicos, propia o no, es una relación de equivalencia. Especial interés tiene el tipo de homotopía trivial:

**Definición 5.4.** Un espacio topológico  $X$  es *contráctil* cuando la identidad del espacio es homótopa a una aplicación constante. Equivalentemente, cuando tiene el tipo de homotopía de un punto.

**Ejemplo 5.5.** Un subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  se llama *estrellado* si existe un punto  $x_0 \in X$  tal que para cada  $x \in X$  el segmento  $[x_0, x] = \{\lambda x + (1 - \lambda)x_0 : \lambda \in [0, 1]\}$  está contenido en  $X$ . Todo subconjunto estrellado equipado con la topología inducida de  $\mathbb{R}^n$  es contráctil, ya que se tiene la siguiente homotopía entre la identidad y la aplicación constante  $x_0$ :

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow X, \quad (x, t) \longmapsto tx + (1 - t)x_0.$$

**Definición 5.6.** Sea  $\rho : M \rightarrow N$  una retracción. Si además  $j \circ \rho \simeq \text{id}_M$  para la inclusión  $j : N \hookrightarrow M$ , entonces diremos que  $\rho$  es una *retracción de deformación*, y que  $N$  es un *retracto de deformación* de  $M$ .

La aplicabilidad de estas nociones puramente topológicas a las construcciones diferenciables asociadas a la cohomología de de Rham estriba en los siguientes resultados, que

<sup>3</sup>Una aplicación continua es propia si la imagen de un conjunto compacto es a su vez compacta.

extraemos de [ORR20]. Consideremos un conjunto localmente cerrado de un espacio afín,  $X$ , y una variedad con borde  $M$ . Usando particiones diferenciables de la unidad, junto con la existencia de collares 1.10, se consigue primero probar que toda aplicación continua  $f : X \rightarrow M$  puede ser aproximada de forma arbitrariamente buena por funciones diferenciables  $X \rightarrow M$ . Después, empleando la proposición 1.11, se consigue obtener que todo par de aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow M$  suficientemente próximas son homótopas, y por una homotopía propia si eran propias. En particular, obtenemos las siguientes importantes consecuencias para nosotros:

**Teorema 5.7.** *Sean  $M, N$  dos variedades.*

(1) *Dada una aplicación continua (resp. propia)  $f : M \rightarrow N$ , existe una aplicación diferenciable (resp. propia)  $g : M \rightarrow N$  (resp. propiamente) homótopa a  $f$ .*

(2) *Dadas dos aplicaciones diferenciables  $f, g : M \rightarrow N$  (resp. propiamente) homótopas, entonces son homótopas vía una homotopía diferenciable (resp. propia).*

## 6. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

En esta sección introducimos ya la cohomología de de Rham, siguiendo la construcción algebraica de la sección 4. Como ya recordamos en la sección 2, dada una variedad diferenciable  $M$  las formas diferenciales de grado  $p \geq 0$  sobre  $M$ ,  $\Gamma^p(M)$ , junto con la diferencial exterior,  $d$ , forman una sucesión de la forma:

$$\dots \longrightarrow \Gamma^{p-1}(M) \xrightarrow{d^{p-1}} \Gamma^p(M) \xrightarrow{d^p} \Gamma^{p+1}(M) \xrightarrow{d^{p+1}} \Gamma^{p+2}(M) \longrightarrow \dots$$

tal que  $d \circ d = d^{p+1} \circ d^p = 0$ . Por tanto, es una cocadena que denotaremos  $\Gamma^*(M)$  (siendo absolutamente precisos, hemos de extender esta sucesión a todo  $p \in \mathbb{Z}$  definiendo  $\Gamma^p(M) = 0$  para  $p < 0$ ). Es usual llamar, redefiniendo los cociclos y cobordes de la sección 4 para el caso particular de las formas:

**Definiciones 6.1.** (1) Una forma diferencial  $\omega \in \Gamma^p(M)$  se llama *cerrada* si  $\omega \in \ker d^p$ , es decir, es un cociclo. Se denota el conjunto de las formas cerradas de orden  $p$  por  $Z^p(M)$ , que coincide con el núcleo  $\ker d$ .

(2) Una forma diferencial  $\omega \in \Gamma^p(M)$  se llama *exacta* si  $\omega \in \operatorname{im} d^{p-1}$ , es decir, es un coborde. Se denota el conjunto de las formas exactas de orden  $p$  por  $B^p(M)$ , que coincide con la imagen  $\operatorname{im} d$ .

Como  $d \circ d = 0$  toda forma exacta es cerrada:  $B^p(M) \subset Z^p(M)$ .

**Definición 6.2.** El  $p$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham de  $M$  es

$$H^p(M) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1} \cong Z^p(M) / B^p(M).$$

Es decir, los grupos de cohomología de la cocadena  $\Gamma^*(M)$ , que denotaremos conjuntamente por  $H^*(M)$ . Los elementos del cociente  $H^p(M)$ , las *clases de cohomología*, son

$$[\omega] = \omega + B^p(M)$$

con  $\omega \in \Gamma^p(M)$  tal que  $d\omega = 0$ .

En particular, para  $p = 0$  resulta  $H^0(M) = \ker d / \{0\} \cong Z^0(M) \subset \Gamma^0(M) = \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ , es decir, el conjunto de funciones diferenciables definidas sobre  $M$  cuya derivada es nula, que son localmente constantes. Esto nos proporciona:

**Lema 6.3.**  *$H^0(M)$  es el espacio vectorial formado por las funciones constantes sobre las componentes conexas de  $M$ . En particular,  $\dim_{\mathbb{R}} H^0(M)$  es el número de componentes conexas de  $M$ , que puede ser un entero positivo o infinito (numerable).*

Nótese que las variedades, al ser segundo axioma y localmente conexas, tienen a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas.

**Ejemplo 6.4.** Por el lema que acabamos de probar, se tiene que  $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Dado que  $H^p(\mathbb{R}) = 0$  si  $p \neq 0, 1$ , sólo falta encontrar  $H^1(\mathbb{R})$ . Pero dada  $\omega \in \Gamma^1(\mathbb{R})$ , será  $\omega = f dx$  para cierta  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , y la función

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

es una primitiva de  $\omega$ ,  $dg = \omega$ . Es decir,  $H^1(\mathbb{R}) = 0$ , de forma que:

$$H^p(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Terminamos la sección con unas construcciones. Dada una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  entre variedades, su *pullback*  $f^* : \Gamma^p(N) \rightarrow \Gamma^p(M)$  conmuta con la diferencial

$$f^* \circ d = d \circ f^*,$$

que es precisamente la condición 4.6 para ser un morfismo de cocadenas. Así, los pullback inducen morfismos de cocadenas  $f^* : \Gamma^*(N) \rightarrow \Gamma^*(M)$ , con diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & \Gamma^{i-1}(N) & \xrightarrow{d} & \Gamma^i(N) & \xrightarrow{d} & \Gamma^{i+1}(N) & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & \Gamma^{i-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Gamma^i(M) & \xrightarrow{d} & \Gamma^{i+1}(M) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

En virtud del lema 4.7, inducen homomorfismos lineales bien definidos en cohomología:

$$f^* : H^p(N) \longrightarrow H^p(M), \quad [\omega] \longmapsto [f^*\omega].$$

Si  $g \circ f = \text{id}_M$  entonces  $f^* \circ g^* = \text{id}_{H^*(M)}$  con lo que  $f^*$  será suprayectiva y  $g^*$  inyectiva.

De forma similar, el producto exterior  $\wedge$  de formas diferenciables pasa a cohomología de forma natural definiendo

$$\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \longrightarrow H^{p+q}(M), \quad ([\omega_1], [\omega_2]) \longmapsto [\omega_1 \wedge \omega_2].$$

Se comprueba fácilmente que esta definición es buena: si  $\eta_1 - \xi_1 = d\omega_1$  en  $\Gamma^p(M)$ , y  $\eta_2 - \xi_2 = d\omega_2$  en  $\Gamma^q(M)$ , resulta que

$$\begin{aligned} \eta_1 \wedge \eta_2 - \xi_1 \wedge \xi_2 &= \eta_1 \wedge (\eta_2 - \xi_2) + (\eta_1 - \xi_1) \wedge \xi_2 = \eta_1 \wedge d\omega_2 + d\omega_1 \wedge \xi_2 \\ &= (-1)^p d(\eta_1 \wedge \omega_2) + d(\omega_1 \wedge \xi_2) = d((-1)^p \eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \xi_2), \end{aligned}$$

donde además hemos usado que  $d\eta_i = d\xi_i = 0$  por representar clases de cohomología.

## 7. EL LEMA DE POINCARÉ

En esta sección introducimos el operador de Poincaré, que permite estudiar la construcción de la cohomología de de Rham y los pullback entendidos como funtores. De hecho, mediante los resultados de la sección 5, hay functorialidad con aplicaciones continuas entre variedades diferenciables. Comenzamos probando el resultado central de la sección:

**Teorema 7.1.** *Sea  $M^m$  una variedad y consideremos la variedad producto  $M \times [0, 1]$ . Sea  $\pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $(x, t) \mapsto x$  la proyección sobre  $M$ , y  $\sigma_{t_0}$  la inclusión a tiempo fijo  $t_0 \in [0, 1]$ , es decir,  $\sigma_{t_0} : M \rightarrow M \times [0, 1]$ ,  $x \mapsto (x, t_0)$ . Entonces,  $\pi_M^* : H^p(M) \rightarrow H^p(M \times [0, 1])$  y  $\sigma_{t_0}^* : H^p(M \times [0, 1]) \rightarrow H^p(M)$  son isomorfismos mutuamente inversos.*

*Demostración.* De ser  $\pi_M \circ \sigma_{t_0} = \text{id}_M$ , se desprende inmediatamente que  $\sigma_{t_0}^* \circ \pi_M^* = \text{id}_{H^p(M)}$ . Por tanto, debemos demostrar que también  $\pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^* = \text{id}_{H^p(M \times [0,1])}$ , para lo que definimos:

**Definición 7.2.** El *operador de Poincaré* es el operador  $\mathbb{R}$ -lineal

$$\mathcal{L}^p : \Gamma^p(M \times [0, 1]) \longrightarrow \Gamma^{p-1}(M \times [0, 1]), \quad \omega \longmapsto \int_{t_0}^t (i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega)_{(x,s)} ds,$$

donde llamamos  $t$  a la proyección sobre el factor  $[0, 1]$ .

Hay que comentar un par de aspectos de esta definición. En primer lugar, dadas unas coordenadas locales  $x : U \rightarrow W$  de  $M$  y teniendo en cuenta las observaciones realizadas en la sección 1 para considerar el producto  $M \times [0, 1]$ , entonces

$$(x, t) : U \times [0, 1] \longrightarrow W \times [0, 1], \quad (p, t) \longmapsto (x(p), t)$$

son coordenadas locales de  $M \times [0, 1]$ , donde abusamos ligeramente de la notación al escribir  $x \equiv x \circ \pi_M$ . Nótese además que  $\frac{\partial}{\partial t}$  está definido en todo  $M \times [0, 1]$ .

En segundo lugar, estamos definiendo una integral de formas en  $M \times [0, 1]$  respecto a  $t$  como se sigue: localmente, integramos los coeficientes de cualquier desarrollo en derivadas parciales de unas coordenadas locales  $y : U \rightarrow W$  de  $M \times [0, 1]$ , de forma que:

$$\int_{t_0}^t \omega_{(x,s)} ds \Big|_U = \sum_I \left( \int_{t_0}^t f_I(x, s) ds \right) dy_I,$$

para los coeficientes  $f_I = \omega(\frac{\partial}{\partial y_I})$ . Entonces, por la linealidad de la integral esto es independiente de las coordenadas, ya que al cambiar de coordenadas se lleva a cabo la misma transformación lineal sobre los coeficientes antes que después de la integración.

Pues bien, se trata de demostrar que  $\text{id}$  y  $\pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^*$  son operadores homótopos de la cocadena  $H^*(M \times [0, 1])$  vía el operador de homotopía dado por  $\mathcal{L}$ , es decir, que

$$\text{id} - \pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^* = d \circ \mathcal{L} + \mathcal{L} \circ d,$$

lo que, de acuerdo con 4.18, nos daría lo buscado.

Para verlo, consideramos cualquier dominio de coordenadas de la forma  $U \times [0, 1]$  asociado a un sistema de coordenadas  $x : U \rightarrow W$  de  $M$ . En este entorno, toda  $p$ -forma se escribe como combinación lineal de factores de la forma

$$f(x, t) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \quad \text{ó} \quad f(x, t) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}},$$

con  $f \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1])$ . Por linealidad de las expresiones, podemos trabajar individualmente para cada tipo de factor. Estudiemos primero la actuación de  $\mathcal{L}$ . Por un lado,

$$\mathcal{L}(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = 0$$

puesto que  $dx_i(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$ , mientras que al ser  $dt(\frac{\partial}{\partial t}) = 1$  se tiene

$$\mathcal{L}(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}})_{(x,t)} = \int_{t_0}^t (f(x, s) ds) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}.$$

Por otro lado, dado que  $\sigma_{t_0}^*$  compone las formas con  $d_x \sigma_{t_0} = \sigma_0$ , resulta que  $\sigma_{t_0}^*(dt) = 0$ , mientras que  $\sigma_{t_0}^*(dx_i) = dx_i$ , de donde obtenemos que

$$(\pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^*)(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})_{(x,t)} = f(x, t_0) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

así como

$$(\pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^*)(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}) = 0.$$

Consideremos  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ , y calculemos:

$$\begin{aligned} (d \circ \mathcal{L} + \mathcal{L} \circ d)\omega &= \mathcal{L}(d\omega) \\ &= \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ &= (f(x, t) - f(x, t_0)) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \omega - \pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^*(\omega). \end{aligned}$$

Luego se tiene lo pedido. Sea ahora  $\omega = f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}$ . Calculamos

$$\begin{aligned} (d \circ \mathcal{L} + \mathcal{L} \circ d)\omega &= d(\mathcal{L}\omega) + \mathcal{L}(d\omega) \\ &= d \left( \int_{t_0}^t (f(x, s) ds) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \right) \\ &\quad + \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} + f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ &= f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} = \omega = \omega - \pi_M^* \circ \sigma_{t_0}^*(\omega). \end{aligned}$$

□

Si en la anterior demostración en lugar del factor  $[0, 1]$  trabajamos sobre un producto  $M \times (a, b)$  con la posibilidad de que sea  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ , exactamente los mismos argumentos y cálculos son válidos. En particular, nos interesa el corolario:

**Corolario 7.3.** *Sea  $M^m$  una variedad y consideremos la variedad producto  $M \times \mathbb{R}$ . Sea  $\pi_M : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $(x, t) \mapsto x$  la proyección sobre  $M$ , y  $\sigma_{t_0}$  la inclusión a tiempo fijo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , es decir,  $\sigma_{t_0} : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (x, t_0)$ . Entonces,  $\pi_M^* : H^p(M) \rightarrow H^p(M \times \mathbb{R})$  y  $\sigma_{t_0}^* : H^p(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M)$  son isomorfismos mutuamente inversos.*

El primer corolario que obtenemos es la siguiente versión del Lema de Poincaré.

**Corolario 7.4.** *La cohomología de de Rham de  $\mathbb{R}^m$  está dada por*

$$H^p(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Conocido el caso  $m = 1$  dado por ejemplo 6.4, se obtiene inmediatamente para  $m$  arbitraria razonando por inducción y empleando el corolario 7.3. □

Otra consecuencia esencial de 7.1 es que por ser el tiempo  $t_0$  arbitrario,  $\sigma_{t_1}^* = (\pi_M^*)^{-1} = \sigma_{t_2}^*$  para cualesquiera  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ . Esto implica:

**Teorema 7.5.** *Dos aplicaciones diferenciables  $f, g : M \rightarrow N$  homótopas vía una homotopía diferenciable verifican*

$$f^* = g^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M).$$

*Demostración.* Dada una homotopía  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $H_0 = f$ ,  $H_1 = g$ , consideramos su pullback

$$H^* : \Gamma^p(N) \longrightarrow \Gamma^p(M \times [0, 1]).$$

Observando que  $\sigma_t^* \circ H^* = (H \circ \sigma_t)^* = H_t^*$ , se tiene

$$f^* = H_0^* = \sigma_0^* \circ H^* = \sigma_1^* \circ H^* = H_1^* = g^*.$$

□

Obtenemos ya la mencionada funtorialidad con aplicaciones continuas. Como toda aplicación continua es homótopa a una aplicación diferenciable por 5.7, podemos definir:

**Definición 7.6.** Dada una aplicación continua  $\varphi : M \rightarrow N$  entre variedades, se define su *pullback* como el morfismo de grupos de cohomología

$$f^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$$

para cualquier aplicación diferenciable  $f$  homótopa a  $\varphi$ .

**Teorema 7.7.** *El pullback de aplicaciones continuas entre variedades diferenciables está bien definido. Además, dadas variedades  $M$ ,  $N$  y  $Q$ , se verifica:*

1. Si  $\varphi \simeq \psi : M \rightarrow N$  son aplicaciones continuas homótopas, entonces

$$\varphi^* = \psi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M).$$

2. Si  $\varphi : M \rightarrow N$ ,  $\psi : N \rightarrow Q$  son aplicaciones continuas, se tiene

$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*.$$

3. El pullback de la identidad es la identidad,  $\text{id}_M^* = \text{id}_{H^*(M)}$ .

*Demostración.* Ya sabemos por 5.7(1) que siempre existe una  $f : M \rightarrow N$  diferenciable para la definición de  $\varphi^*$ . Ahora bien, si tenemos dos  $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ , dado que ambas son homótopas a  $\varphi$ , entonces son homótopas entre sí. Por 5.7(2), entonces  $f_1$  y  $f_2$  de hecho son diferenciablemente homótopas, luego por 7.5 resulta  $f_1^* = f_2^*$ , y  $\varphi^*$  está bien definida. Por el mismo argumento, se concluye también 1, ya que los representantes diferenciables  $f \simeq \varphi$  y  $g \simeq \psi$  son homótopos,  $f \simeq g$ .

Para terminar, 3 es inmediato, y 2 se concluye observando que la composición de los representantes diferenciables  $f \simeq \varphi$  y  $g \simeq \psi$  cumple que  $g \circ f \simeq \psi \circ \varphi$ . □

**Corolario 7.8.** *Una equivalencia de homotopía  $\varphi : M \rightarrow N$  induce un isomorfismo*

$$\varphi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M).$$

*Demostración.* Se desprende inmediatamente de 7.7, ya que si  $\psi : N \rightarrow M$  es la inversa homotópica de  $\varphi$ , o sea,  $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_M$  y  $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_N$ , entonces por 7.7 resulta:

$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^* = \text{id}_M^* = \text{id}_{H^*(M)}, \quad \psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^* = \text{id}_N^* = \text{id}_{H^*(N)};$$

de forma que  $\varphi^*$  es un isomorfismo, con inversa  $\psi^*$ . □

Su principal consecuencia es la invariancia homotópica de los grupos de cohomología:

**Corolario 7.9.** *Dos variedades con igual tipo de homotopía tienen cohomologías de de Rham isomorfas. En particular, si  $N$  es un retracto de deformación de  $M$ , entonces  $H^*(M) = H^*(N)$ .*

*Demostración.* La primera parte se desprende inmediatamente de 7.7. Para los retracts de deformación  $\rho : M \rightarrow N$ , si  $j : N \hookrightarrow M$  es la inclusión, basta observar que al ser  $j \circ \rho \simeq \text{id}_M$  y  $\rho \circ j = \text{id}_N$ ,  $\rho$  y  $j$  son homotópicamente equivalentes.  $\square$

En particular, dos variedades homeomorfas tienen espacios de cohomología de de Rham isomorfos. Esto hace un guiño al *Teorema de de Rham*, que nos dice que la cohomología de de Rham de una variedad es isomorfa a su cohomología singular (con coeficientes  $\mathbb{R}$ ).

**Observación 7.10.** Otra forma de obtener el corolario 7.3 para  $\mathbb{R}$  y para cualquier intervalo de la recta real a partir de 7.1 es observar que cualquier intervalo  $I = [a, b]$ , donde  $a$  y  $b$  pueden ser infinitos y el símbolo  $|$  puede denotar intervalo abierto o cerrado, tiene una retracción  $\rho$  de deformación sobre un intervalo cerrado difeomorfo a  $[0, 1]$ . Entonces, 7.9 aplicado a la retracción de deformación  $\text{id}_M \times \rho$  nos da el resultado.

**Ejemplo 7.11.** La esfera  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es retracto de deformación de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , luego  $H^*(\mathbb{S}^n) = H^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ . Para ello, definimos el retracto

$$\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Para ver que es de deformación, construimos la homotopía

$$H : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad (x, t) \longmapsto (1-t)x + t\rho(x).$$

Concluimos con una versión más fuerte del Lema de Poincaré.

**Corolario 7.12.** *Si  $M$  es contráctil, entonces*

$$H^p(M) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, \\ 0, & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

*Demostración.*  $M$  es contráctil si y sólo si la identidad es homótopa a una aplicación constante, digamos igual a cierto punto  $x_0 \in M$ . Aplicando el teorema 7.5, se concluye

$$\text{id}_M^* = x_0^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(M).$$

Ahora bien, para  $p > 0$ ,  $x_0^* = 0$ , puesto que la derivada de esta aplicación es nula. Por tanto,  $\text{id}_{H^p(M)} = 0$  y se concluye que  $H^p(M) = 0$ . Por otro lado, el caso  $p = 0$  viene dado por 6.3, donde  $H^0(M) = \mathbb{R}^n$  con  $n = 1$  al ser la variedad conexa por ser contráctil. En realidad, recuperamos ahora ese mismo resultado, ya que para  $p = 0$  la aplicación  $x_0^*$  consiste en evaluar las funciones de  $H^0(M)$  en el punto  $x_0$ :

$$x_0^* : H^0(M) \longrightarrow H^0(M), \quad \omega \longmapsto (x_0^*\omega)_x = \omega_{x_0}.$$

Dado que  $x_0^* = \text{id}_{H^0(M)}$ , toda forma de grado 0 es constante, y puesto que siempre existen formas de grado 0 no nulas, se concluye que  $\dim H^0(M) = 1$ .  $\square$

## 8. LA SUCESIÓN DE MAYER-VIETORIS

En esta sección se introduce una técnica fundamental de cálculo de la cohomología de de Rham: la sucesión de Mayer-Vietoris. Ésta permite calcular  $H^p(M)$  de una variedad  $M$  expresada como unión de dos subvariedades abiertas,  $M = M_1 \cup M_2$ , en términos de las cohomologías de los "factores", es decir, de  $H^p(M_1)$ ,  $H^p(M_2)$  y  $H^p(M_1 \cap M_2)$ . Por iteración, esto nos permite calcular  $H^p(\bigcup_i^n M_i)$  en términos de  $H^p(M_\alpha)$ , donde  $\alpha = \{i_1, \dots, i_r\}$  recorre los subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  y  $M_\alpha = \bigcap_{i \in \alpha} M_i$ . Si por ejemplo se consigue que los factores  $M_\alpha$  sean uniones disjuntas de abiertos contráctiles de  $M$ , entonces se puede aplicar el Lema de Poincaré 7.12 junto con 8.3 para averiguar  $H^p(M_\alpha)$ .

La construcción consiste en observar que las inclusiones entre los subconjuntos proporcionan una cocadena exacta corta, que por 4.15 proporciona una sucesión exacta larga.

**Teorema 8.1.** *Sean  $M$  una variedad diferenciable, y  $M_\nu$ ,  $\nu = 1, 2$ , dos abiertos de  $M$  tales que  $M = M_1 \cup M_2$ . Sean las inclusiones  $i_\nu : M_\nu \hookrightarrow M$  y  $j_\nu : M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M_\nu$ . Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \Gamma^*(M) \xrightarrow{I} \Gamma^*(M_1) \oplus \Gamma^*(M_2) \xrightarrow{J} \Gamma^*(M_1 \cap M_2) \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta corta, donde  $I(\omega) = (i_1^*\omega, -i_2^*\omega)$ , y  $J(\omega_1, \omega_2) = j_1^*\omega_1 + j_2^*\omega_2$ .

*Demostración.* En primer lugar, el pullback  $i^* : \Gamma^p(M) \rightarrow \Gamma^p(N)$  de una inclusión  $i : N \hookrightarrow M$  es la restricción de las formas de  $\Gamma^p(M)$  a  $N$ . En particular,  $M_\nu$  y  $M_1 \cap M_2$  son abiertos de  $M$  luego se trata de una restricción puntual (como aplicación alternada siguen actuando sobre  $T_p M$ ). Es decir,  $i^*(\omega) \equiv \omega|_U$  para el abierto  $U$  adecuado.

Dicho lo cuál, se comprueba inmediatamente que es una sucesión de cocadenas, pues:

$$J \circ I(\omega) = J(i_1^*\omega, -i_2^*\omega) = j_1^*(i_1^*\omega) + j_2^*(-i_2^*\omega) = j^*\omega - j^*\omega = 0,$$

ya que  $j_\nu \circ i_\nu = j : M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M$  para cada  $\nu$ . Recíprocamente,  $J(\omega_1, \omega_2) = 0$  significa que  $\omega_1|_{M_1 \cap M_2} = -\omega_2|_{M_1 \cap M_2}$  luego podemos definir bien  $\omega \in \Gamma^p(M)$  según

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 & \text{en } M_1, \\ -\omega_2 & \text{en } M_2; \end{cases}$$

que es diferenciable por ser los  $M_\nu$  abiertos. Dado que  $i_1^*(\omega) = \omega_1$  y  $i_2^*(\omega) = -\omega_2$ , concluimos que  $I(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ . Por otro lado, la inyectividad de  $I$  es clara:  $I(\omega) = 0$  significa  $i_\nu^*(\omega) \equiv \omega|_{M_\nu} = 0$  para cada  $\nu = 1, 2$ , y al ser  $M = M_1 \cup M_2$  esto equivale a que  $\omega = 0$ .

Por último,  $J$  es suprayectiva: dada  $\omega \in \Gamma^p(M_1 \cap M_2)$  tomamos una partición de la unidad subordinada a  $\{M_1, M_2\}$ , digamos  $\{\theta_1, \theta_2\}$  con  $\text{sop } \theta_\nu \subset M_\nu$ , y definimos

$$\omega_1 = \begin{cases} \theta_2 \omega & \text{en } M_1 \cap M_2, \\ 0 & \text{en } M_1 \setminus \text{sop } \theta_2, \end{cases} \quad \omega_2 = \begin{cases} \theta_1 \omega & \text{en } M_1 \cap M_2, \\ 0 & \text{en } M_2 \setminus \text{sop } \theta_1. \end{cases}$$

Claramente  $\omega_\nu \in \Gamma^p(M_\nu)$  serán diferenciables, una vez visto que están bien definidas. Pero  $\text{sop } \theta_\nu \subset M_\nu$  implica que para  $\mu \neq \nu$  resulta  $M_\nu \setminus M_\mu \subset M_\nu \setminus \text{sop } \theta_\mu$  luego de hecho estamos recubriendo cada  $M_\nu$ . Además en la intersección de estos dominios de definición ambas expresiones se anulan, luego coinciden. Para terminar, es una preimagen de  $\omega$ :

$$J(\omega_1, \omega_2) = (\theta_2|_{M_1 \cap M_2} \omega) + (\theta_1|_{M_1 \cap M_2} \omega) = (\theta_2|_{M_1 \cap M_2} + \theta_1|_{M_1 \cap M_2}) \omega = \omega.$$

□

Dado que estamos trabajando con pullbacks, tenemos morfismos de cocadenas:

$$I : \Gamma^*(M) \longrightarrow \Gamma^*(M_1) \oplus \Gamma^*(M_2),$$

$$J : \Gamma^*(M_1) \oplus \Gamma^*(M_2) \longrightarrow \Gamma^*(M_1 \cap M_2).$$

Por tanto podemos pasar a cohomología de de Rham. Una vez en cohomología, usamos el lema 4.19 para escribir

$$H^p(\Gamma^*(M_1) \oplus \Gamma^*(M_2)) \cong H^p(\Gamma^*(M_1)) \oplus H^p(\Gamma^*(M_2)).$$

Así, en virtud del teorema 4.15, hemos probado el resultado central de la sección:

**Teorema 8.2** (Mayer-Vietoris). *Sean  $M$  una variedad diferenciable, y  $M_\nu$ ,  $\nu = 1, 2$  dos abiertos de  $M$  tales que  $M = M_1 \cup M_2$ . Entonces, se tiene la sucesión exacta larga*

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^p(M) \xrightarrow{I} H^p(M_1) \oplus H^p(M_2) \xrightarrow{J} H^p(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(M) \xrightarrow{I} \dots$$

donde usamos las notaciones del teorema 8.1 para  $I$  y  $J$ , y del teorema 4.15 para  $\partial$ :

$$\begin{aligned} I^p &: H^p(M) \longrightarrow H^p(M_1) \oplus H^p(M_2), & [\omega] &\longmapsto ([i_1^*\omega], [-i_2^*\omega]), \\ J^p &: H^p(M_1) \oplus H^p(M_2) \longrightarrow H^p(M_1 \cap M_2), & ([\omega_1], [\omega_2]) &\longmapsto [j_1^*\omega_1 + j_2^*\omega_2], \\ \partial^p &: H^p(M_1 \cap M_2) \longrightarrow H^{p+1}(M), & [\omega] &\longmapsto [(I^{p+1})^{-1}(d^p(J^p)^{-1}(\omega))]. \end{aligned}$$

A la vista de las preimágenes de  $I^p$  y de  $J^p$ , podemos describir explícitamente  $\partial$ . Dada  $[\omega] \in H^p(M_1 \cap M_2)$ , al tenerse  $d\omega = 0$ , resulta (notando que  $d\theta_1 + d\theta_2 = d1 = 0$ )

$$\partial([\omega]) = [-d\theta_1 \wedge \omega] = [+d\theta_2 \wedge \omega].$$

donde se entiende que se extiende por cero fuera de  $M_1 \cap M_2$ .

Las técnicas desarrolladas en esta sección proporcionan la siguiente observación.

**Corolario 8.3.** *Dada una variedad  $M$  igual a la unión disjunta de abiertos  $\{M_\alpha \subset M : \alpha \in A\}$ , entonces tenemos el isomorfismo*

$$I : H^p\left(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}\right) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha} H^p(M_{\alpha}),$$

con  $I$  dado por la fórmula de 8.2 en cada factor  $\alpha$  (excluyendo signos).

*Demostración.* Se comprueba fácilmente observando que si las variedades son disjuntas

$$I : \Gamma^p\left(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}\right) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha} \Gamma^p(M_{\alpha}), \quad \omega \longmapsto (i_{\alpha}^*\omega)_{\alpha}$$

es un isomorfismo, y empleando de nuevo 4.19.  $\square$

Por tanto, al calcular la cohomología de de Rham podemos reducirnos a variedades conexas. Concluimos con resultados que proporcionan condiciones para la finito generación de la cohomología de de Rham e ilustran la potencia de la sucesión de Mayer-Vietoris.

**Corolario 8.4.** *Sea  $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$  una unión finita de abiertos convexos  $U_i \subset \mathbb{R}^q$ . Entonces, los espacios  $H^p(U)$  son de dimensión finita.*

*Demostración.* Veámoslo por inducción en el número de factores convexos. Para  $n = 1$  el resultado se desprende del lema de Poincaré, 7.12, pues convexo implica estrellado y en particular contráctil. Supuesto el resultado para  $n - 1$ ,  $n > 1$ , consideremos  $V = \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ , de forma que  $U = V \cup U_n$ . En virtud de 8.2 se tiene la secuencia exacta larga

$$\dots \xrightarrow{J} H^{p-1}(V \cap U_n) \xrightarrow{\partial} H^p(U) \xrightarrow{I} H^p(V) \oplus H^p(U_n) \xrightarrow{J} \dots$$

La observación 4.4 nos da que  $H^p(U) \cong \text{im } \partial^{p-1} \oplus \text{im } I^p$ . Ahora bien, por hipótesis de inducción  $\dim H^p(V)$  es finita para todo  $p$  luego también  $\dim (H^p(V) \oplus H^p(U_n))$ , pues  $H^p(U_n)$  es el caso  $n = 1$ . Más aún,  $V \cap U_n = \bigcup_{i \neq n} (U_i \cap U_n)$  con  $U_i \cap U_n$  convexos por serlo cada  $U_r$ , luego por hipótesis de inducción  $\dim H^p(V \cap U_n)$  es finita. En resumen,  $\dim(\text{im } \partial^{p-1})$  es finita por serlo la del espacio de partida y  $\dim(\text{im } I^p)$  por serlo la del de llegada, y concluimos que  $\dim H^p(U)$  es finita.  $\square$

**Corolario 8.5.** *Dada  $M$  compacta, entonces los espacios  $H^*(M)$  son de dimensión finita.*

*Demostración.* Consideremos, en virtud de 1.11, un entorno  $V \subset \mathbb{R}^q$  de  $M$  con una retracción continua  $\rho : V \rightarrow M$ . Por ser  $M$  compacta, podemos encontrar una cantidad finita  $n$  de bolas abiertas  $U_i \subset \mathbb{R}^q$  tales que  $M \subset U = \bigcup_i U_i \subset V$ . Si consideramos la restricción  $\rho|_U : U \rightarrow M$ , también es una retracción. Por tanto, si  $j : M \hookrightarrow U$  es la inclusión,  $j^* : H^*(U) \rightarrow H^*(M)$  es suprayectiva al tenerse  $j^* \circ \rho|_U^* = (\rho|_U \circ j)^* = \text{id}_M^* = \text{id}_{H^*(M)}$ . Dado que  $U$  es una unión finita de abiertos convexos, el corolario anterior nos dice que su cohomología es finito generada, luego también la de  $M$ .  $\square$

## 9. ALGUNAS COHOMOLOGÍAS IMPORTANTES

Los resultados de la sección 7 junto con la secuencia de Mayer-Vietoris 8.2 ya nos permiten calcular de forma sencilla los grupos de cohomología de muchos espacios importantes.

**Ejemplo 9.1.** Calculemos  $H^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  para el plano perforado  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Dado que la dimensión es 2, sólo hemos de calcular para grado  $p = 0, 1, 2$ . Por conexión,  $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$ , y consideramos los abiertos

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 = 0\}, \\ V &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}, \end{aligned}$$

de forma que  $M = U \cup V$ . La secuencia exacta larga queda

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^p(M) \xrightarrow{I} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{J} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial} \dots$$

Tanto  $U$  como  $V$  son estrellados, luego podemos aplicar el lema de Poincaré 7.12. Más aún,  $U \cap V = H_+ \sqcup H_-$  es la unión disjunta de los abiertos estrellados  $H_{\pm} = \{\pm x_1 > 0\}$ , luego podemos usar de nuevo 7.12 para  $H^p(H_{\pm})$  junto con 8.3 para escribir  $H^p(U \cap V) = H^p(H_+) \oplus H^p(H_-)$ , de forma que

$$0 \rightarrow H^0(M) = \mathbb{R} \xrightarrow{I} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{J} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} H^1(M) \xrightarrow{I} 0 \xrightarrow{J} 0 \xrightarrow{\partial} H^2(M) \xrightarrow{I} 0,$$

de donde se concluye fácilmente que  $H^1(M) = \mathbb{R}$ ,  $H^2(M) = 0$ . En efecto,  $\dim H^2(M) = 0$  pues  $\partial$  es una biyección por exactitud. Para  $H^1(M)$ , observamos que al ser  $I^0$  inyectiva,  $1 = \dim \operatorname{im} I^0 = \dim \ker J^0$  luego  $2 - 1 = 1 = \dim \operatorname{im} J^0 = \dim \ker \partial^0$ . De nuevo  $2 - 1 = 1 = \dim \operatorname{im} \partial^0 = \dim \ker I^1$ , y finalmente se tiene  $\ker I^1 = H^1(M)$ . Es decir,

$$H^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, 1, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, 1. \end{cases}$$

**Observación 9.2.** Podríamos haber usado la expresión explícita de los operadores  $I, J, \partial$ . Por ejemplo,  $J^0 : H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$  es  $[j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)]$  para funciones constantes  $\omega_i \equiv a_i$ , y se puede expresar como  $J^0(a_1, a_2) = a_1 - a_2$  con  $\operatorname{im} J^0 = \mathbb{R} = \ker J^0$ .

Visto un primer ejemplo del uso de Mayer-Vietoris, obtenemos un resultado más general.

**Proposición 9.3.** *Sea un conjunto cerrado propio  $A \subsetneq \mathbb{R}^m$ , y sea  $M = \mathbb{R}^{m+1} \setminus A$ , donde se identifica  $A \equiv A \times \{0\}$ . Entonces*

$$\begin{aligned} H^{p+1}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A) &\cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus A), \quad p \geq 1, \\ H^1(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A) &\cong H^0(\mathbb{R}^m \setminus A)/\mathbb{R}, \\ H^0(\mathbb{R}^{m+1} \setminus A) &\cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos los abiertos de  $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^m \times (0, +\infty) \cup \mathbb{R}^m \setminus A \times (-1, +\infty), \\ U_2 &= \mathbb{R}^m \times (-\infty, 0) \cup \mathbb{R}^m \setminus A \times (-\infty, +1). \end{aligned}$$

que verifican  $M = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^m \setminus A \times (-1, +1)$ . Es fácil ver que  $U_i$  son contráctiles, por ejemplo mediante una homotopía en dos pasos: desplazamos una unidad arriba en  $U_1$  y abajo en  $U_2$  la coordenada  $x_{m+1}$ , y una vez en  $\{\pm x_{m+1} > 0\}$  contraemos por interpolación lineal a cualquier punto fijo tal que  $\pm x_{m+1} > 0$ . Por otro lado,  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^m \setminus A \times (-1, +1)$  tiene la cohomología de  $\mathbb{R}^m \setminus A$ , pues tenemos el retracto de deformación

$$\rho : \mathbb{R}^m \setminus A \times (-1, +1) \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus A \times \{0\}, \quad (x, x_{m+1}) \longmapsto (x, 0),$$

que es de deformación pues podemos interpolar linealmente el punto  $(x, x_{m+1})$  y el  $(x, 0)$ . Es decir, se tiene que  $H^*(U_1 \cap U_2) = H^*(\mathbb{R}^m \setminus A)$ .

Calculemos ya  $H^*(M)$ . Dado que  $A \neq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus A$  es conexo, luego  $H^0(M) = \mathbb{R}$ , mientras que  $H^*(U_i)$  nos lo da el Lema de Poincaré. Aplicamos Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow H^0(M) = \mathbb{R} \xrightarrow{I} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{J} H^0(\mathbb{R}^m \setminus A) \\ \xrightarrow{\partial} H^1(M) \xrightarrow{I} 0 \oplus 0 \xrightarrow{J} H^1(\mathbb{R}^m \setminus A) \xrightarrow{\partial} H^2(M) \xrightarrow{I} 0 \oplus 0 \xrightarrow{J} H^2(\mathbb{R}^m \setminus A) \xrightarrow{\partial} H^3(M) \xrightarrow{I} \dots$$

Razonando como antes llegamos a que  $\text{im } J^0 = \mathbb{R} = \ker \partial^0$ . Dado que  $\partial^0$  es suprayectiva, concluimos que  $H^1(M) = \text{im } \partial^0 = H^0(\mathbb{R}^m \setminus A) / \ker \partial^0 = H^0(\mathbb{R}^m \setminus A) / \mathbb{R}$ . Finalmente, vemos que para  $p \geq 1$  se obtiene siempre

$$0 \xrightarrow{J} H^p(\mathbb{R}^m \setminus A) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(M) \xrightarrow{I} 0.$$

Por tanto,  $\partial$  es un isomorfismo, y se concluye lo pedido.  $\square$

**Corolario 9.4.** *La cohomología de un espacio perforado  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ,  $m \geq 2$ , está dada por*

$$H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, m - 1, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, m - 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Se obtiene inmediatamente por inducción en  $m$ , conocido el caso  $m = 2$  y aplicando la proposición 9.3 con  $A = \{0\}$ .  $\square$

**Observación 9.5.** El caso especial  $m = 1$  está dado por  $H^0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2$  y 0 si  $p \neq 0$ , en virtud de 8.3 y 6.4. Por tanto, una vez conocido el resultado 9.3, el caso  $m = 2$  se obtiene también a partir de esta observación.

En virtud del ejemplo 7.11, a la vez hemos obtenido:

**Corolario 9.6.** *La cohomología de las esferas  $\mathbb{S}^m$  para  $m \geq 1$  está dada por*

$$H^p(\mathbb{S}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, m, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, m. \end{cases}$$

*En particular las esferas no son contráctiles.*

De hecho, se obtiene fácilmente la cohomología del espacio varias veces perforado.

**Corolario 9.7.** *Dados  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^m$  todos distintos, la cohomología del espacio  $n$  veces perforado  $\mathbb{R}^m \setminus \{a_j\}_{j=1}^n$ ,  $m \geq 2$ , está dada por*

$$H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{a_j\}_{j=1}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = 0, \\ \mathbb{R}^n, & \text{si } p = m - 1, \\ 0, & \text{si } p \neq 0, m - 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Conocido el caso  $n = 1$ , se razona por inducción. Supongamos el resultado para  $n - 1$ ,  $n > 1$ , y sean  $V = \mathbb{R}^m \setminus \{a_j\}_{j=1}^n$ ,  $V_1 = \mathbb{R}^m \setminus \{a_j\}_{j=1}^{n-1}$ ,  $V_2 = \mathbb{R}^m \setminus \{a_n\}$ . La hipótesis de inducción proporciona  $H^*(V_1)$ , y  $H^*(V_2)$  es el caso  $n = 1$ . Dado que  $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^m$  y  $V_1 \cap V_2 = V$ , por Mayer-Vietoris resulta para cada  $p$

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^p(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{I} H^p(V_1) \oplus H^p(V_2) \xrightarrow{J} H^p(V) \xrightarrow{\partial} 0.$$

Que para  $p = 0$  queda

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{I} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{J} H^0(V) \xrightarrow{\partial} 0$$

que proporciona directamente  $H^0(V) = \mathbb{R}$ . Para  $p \geq 1$ , al ser  $H^p(\mathbb{R}^m) = 0$  es

$$0 \xrightarrow{I} H^p(V_1) \oplus H^p(V_2) \xrightarrow{J} H^p(V) \xrightarrow{\partial} 0$$

luego  $J$  es una biyección y se concluye el resultado.  $\square$

No entraremos en este trabajo a analizar las aplicaciones usuales de la cohomología de de Rham por preferir dedicar espacio a otros contenidos. Sólo comentamos que como ya se dijo, la cohomología de de Rham encierra una rica información topológica de la variedad, lo que permite probar teoremas clásicos de la topología como el teorema del punto fijo de Brouwer, el de la *bola peluda*, y usando el teorema de extensión de Urysohn-Tietze, también el teorema de separación de Jordan-Brouwer, la invariancia de la dimensión y del dominio, el de la aplicación abierta... Los detalles pueden consultarse en [MT97, §7]. Por ejemplo, como corolario inmediato se obtiene:

**Corolario 9.8.** *Si dos abiertos afines  $U \subset \mathbb{R}^m$  y  $V \subset \mathbb{R}^n$  son homeomorfos, entonces  $m = n$ .*

*Demostración.* Sea  $W \subset U$  un entorno de un punto cualquiera  $a \in U$  y  $D \subset W$  una bola cerrada de centro  $a$ . Las inclusiones  $D \setminus \{a\} \subset W \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^m \setminus \{a\}$  inducen la sucesión

$$H^{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{a\}) \rightarrow H^{m-1}(W \setminus \{a\}) \rightarrow H^{m-1}(D \setminus \{a\}).$$

Pero  $D \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^m \setminus \{a\}$  es un retracto de deformación, luego

$$H^{m-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{a\}) \rightarrow H^{m-1}(D \setminus \{a\}) = \mathbb{R}$$

es un isomorfismo que factoriza a través de  $H^{m-1}(W \setminus \{a\})$ . Concluimos que  $H^{m-1}(W \setminus \{a\})$  no es trivial. Si existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  aplicamos esto a  $W = h^{-1}(B)$  donde  $B \subset V$  es una bola abierta de centro  $h(a)$ . Por la invarianza por homeomorfismo de la cohomología deducimos que  $H^{m-1}(B \setminus h(a))$  no es trivial, lo que sólo ocurre si  $n = m$ .  $\square$

## 10. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM CON SOPORTE COMPACTO

En esta sección introducimos la cohomología de formas con soporte compacto. La construcción es paralela a la que venimos haciendo, y la detallamos aquí por completitud señalando las diferencias. Nos permitirá concluir enunciando la Dualidad de Poincaré.

Denotamos el conjunto de  $p$ -formas con soporte compacto de la variedad  $M$  por  $\Gamma_c^p(M)$ . Claramente, la diferencial de una forma con soporte compacto tiene de nuevo soporte compacto, luego se tiene la cocadena  $\Gamma_c^*(M)$  de la forma

$$\dots \longrightarrow \Gamma_c^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Gamma_c^p(M) \xrightarrow{d} \Gamma_c^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \Gamma_c^{p+2}(M) \longrightarrow \dots$$

Se definen las *formas cerradas y exactas con soporte compacto* como en la sección 6, denotadas por  $Z_c^p(M)$  y  $B_c^p(M)$  respectivamente, de forma que  $B_c^p(M) \subset Z_c^p(M)$ .

**Definición 10.1.** El  $p$ -ésimo grupo de cohomología de de Rham con soporte compacto de  $M$  es

$$H_c^p(M) = Z_c^p(M)/B_c^p(M).$$

Nótese que una forma exacta con soporte compacto es la diferencial de otra forma con soporte compacto, que no es lo mismo que una forma con soporte compacto que además es exacta. Es decir, si bien  $Z_c^p(M) = Z^p(M) \cap \Gamma_c^p(M)$ , en general  $B_c^p(M) \subset B^p(M) \cap \Gamma_c^p(M)$ . Esta distinción no es trivial, pues el contenido puede ser estricto. Por ejemplo, en  $M = \mathbb{R}$  consideramos  $\omega = f dx = dg$  donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es una función diferenciable escalón

tal que  $g(x) = 0$  para  $x \leq 0$ , y  $g(x) = 1$  para  $x \geq 1$ . Entonces,  $\omega \in B^1(M)$  tiene soporte compacto contenido en  $[0, 1]$ , pero no existe ninguna otra función diferenciable y con soporte compacto  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega = dh$ .

Naturalmente, si  $M$  es compacta toda forma tiene soporte compacto luego  $\Gamma^*(M) = \Gamma_c^*(M)$ , y en particular  $H^*(M) = H_c^*(M)$ . Así,  $H_c$  es relevante en el caso no compacto.

Igual que en el caso no compacto, para  $p = 0$  resulta  $H_c^0(M) = Z_c^0(M) \subset \Gamma_c^0(M)$ , es decir, son las funciones diferenciables de  $M$  con derivada nula, luego localmente constantes. Ahora bien, ahora además han de tener soporte compacto, lo que obliga a que sólo puedan ser no nulas sobre componentes conexas compactas de  $M$ . Esto nos proporciona:

**Lema 10.2.**  *$H_c^0(M)$  es el espacio vectorial formado por las funciones constantes sobre las componentes conexas compactas de  $M$ . En particular,  $\dim_{\mathbb{R}} H_c^0(M)$  es el número de componentes conexas compactas de  $M$  si hay una cantidad finita.*

Existe una pequeña diferencia, puesto que una forma de  $H_c^0(M)$  sólo puede ser no nula sobre una cantidad finita de componentes conexas compactas. Por tanto, en el caso de que  $M$  tenga infinitas componentes de este tipo,  $H_c^0(M)$  es isomorfo al subespacio de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formado por aquellos vectores con una cantidad finita de coordenadas no nulas, a diferencia de ser  $H^0(M) \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en el caso de que  $M$  tenga infinitas componentes conexas.

El teorema de Stokes 3.4 y su recíproco 3.5 proporcionan:

**Corolario 10.3.** *Dada una variedad orientada, conexa y sin borde  $M^m$ , se tiene el isomorfismo dado por la integral de formas*

$$\int_M : H_c^m(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*Demostración.* El enunciado es equivalente a comprobar que la secuencia

$$\Gamma_c^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Gamma_c^m(M) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

es una cocadena exacta. En primer lugar,  $\int_M$  es suprayectiva, pues siempre existen formas con integral no nula (basta trabajar en un entorno coordenado). Además, por la observación final del teorema de Stokes 3.4,  $\int_M \circ d = 0$  ya que  $M$  no tiene borde, y el recíproco del teorema de Stokes nos proporciona la exactitud.  $\square$

**Ejemplo 10.4.** Por los resultados que acabamos de ver, se tiene que  $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$  mientras que  $H_c^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (como se ve también mediante argumentos como los del ejemplo 6.4).

Al igual que en la cohomología usual, las operaciones de pullback y producto exterior pasan a cohomología, pero hemos de asegurar que el resultado tiene soporte compacto. Esto es claro para el producto  $\wedge$ , donde de hecho al ser

$$\text{sop}_M(\omega \wedge \eta) \subset \text{sop}_M(\omega) \cap \text{sop}_M(\eta),$$

basta con que uno de los dos factores tenga soporte compacto. Ahora bien, dada  $f : M \rightarrow N$  diferenciable, se tiene por continuidad

$$\text{sop}_M(f^*\omega) = \overline{\{x \in M : (f^*\omega)_x \neq 0\}} \subset \overline{f^{-1}\{y \in N : \omega_y \neq 0\}} \subset f^{-1}(\text{sop}_N(\omega)).$$

Por tanto, para que el pullback  $f^*$  esté bien definido al restringirnos a formas con soporte compacto hemos de exigir algo más; en concreto, se pide que  $f$  sea propia, en cuyo caso induce un morfismo de cocadenas  $f^* : \Gamma_c^*(N) \longrightarrow \Gamma_c^*(M)$  y pasa a cohomología:

$$f^* : H_c^*(N) \longrightarrow H_c^*(M).$$

Nuestro objetivo ahora es reproducir los resultados obtenidos en la sección 7 para el caso compacto. En realidad, sólo tenemos que observar lo siguiente. Atendiendo a la definición del operador de Poincaré  $\mathcal{L}$  de 7.2, se comprueba inmediatamente que preserva el soporte compacto, es decir, al restringirlo se obtiene:

$$\mathcal{L}^p : \Gamma_c^p(M \times [0, 1]) \longrightarrow \Gamma_c^{p-1}(M \times [0, 1]), \quad \omega \longmapsto \int_{t_0}^t (i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega)_{(x,s)} ds,$$

ya que el integrando se anula fuera de cierto compacto. Más aún, tanto  $\pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$  como  $\sigma_{t_0} : M \rightarrow M \times [0, 1]$  son propias,  $\pi_M$  en virtud de la compacidad de  $[0, 1]$ . Así, sus pullback operan entre espacios de formas con soporte compacto. En fin, llevando a cabo los mismos argumentos de la demostración de 7.1, conseguimos probar que:

**Corolario 10.5.** *Sea  $M^m$  una variedad y consideremos  $M \times [0, 1]$ . Sea  $\pi_M$  la proyección sobre  $M$ , y  $\sigma_{t_0}$  la inclusión a tiempo fijo  $t_0 \in [0, 1]$ . Entonces,  $\pi_M^* : H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M \times [0, 1])$  y  $\sigma_{t_0}^* : H_c^p(M \times [0, 1]) \rightarrow H_c^p(M)$  son isomorfismos mutuamente inversos.*

En consecuencia se repiten para aplicaciones y homotopías propias los resultados de la sección 7, con las mismas demostraciones. Nótese la utilidad de obtener homotopías propias en 5.7 cuando las aplicaciones de partida lo son. Obtenemos:

**Teorema y definición 10.6.** *Dos aplicaciones diferenciables, propia y diferenciablemente homótopas,  $f, g : M \rightarrow N$  inducen el mismo morfismo  $f^* = g^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$ . En virtud de 5.7, está bien definido el pullback de una aplicación continua propia  $\varphi : M \rightarrow N$ :*

$$f^* : H_c^*(N) \longrightarrow H_c^*(M)$$

para cualquier aplicación diferenciable  $f$  propiamente homótopa a  $\varphi$ . Además, dadas variedades  $M, N$  y  $Q$ , se verifica:

(1) Si  $\varphi \simeq \psi : M \rightarrow N$  son aplicaciones continuas propiamente homótopas, entonces

$$\varphi^* = \psi^* : H_c^*(N) \longrightarrow H_c^*(M).$$

(2) Si  $\varphi : M \rightarrow N$ ,  $\psi : N \rightarrow Q$  son aplicaciones continuas propias, se tiene

$$\psi^* \circ \varphi^* = (\psi \circ \varphi)^*.$$

(3) El pullback de la identidad es la identidad,  $\text{id}_M^* = \text{id}_{H_c^*(M)}$ .

En particular, recuperamos:

**Corolario 10.7.** *Una equivalencia de homotopía propia  $\varphi : M \rightarrow N$  induce un isomorfismo*

$$\varphi^* : H_c^*(N) \longrightarrow H_c^*(M).$$

Por tanto, dos variedades con igual tipo de homotopía propia tienen cohomologías de de Rham con soporte compacto isomorfas.

## 11. EL LEMA DE POINCARÉ PARA SOPORTE COMPACTO

El Lema de Poincaré para variedades contráctiles 7.12 también se recupera para la cohomología con soporte compacto, pero no aporta nada nuevo: una variedad *propriamente contráctil* ha de ser compacta, luego  $H^*(M) = H_c^*(M)$  y nos vale 7.12. En particular, así no obtenemos la cohomología con soporte compacto de  $\mathbb{R}^m$ , pues no es compacto. De hecho, el corolario 7.3 es falso para el caso compacto:  $H_c^m(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$  por 10.3 y veremos que  $H_c^m(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) = \{0\}$ . Vemos así lo crucial de que el factor  $[0, 1]$  tenga borde, pues requerimos de su compacidad. Para conseguir un análogo a 7.3 en soporte compacto hemos de buscar un isomorfismo en el que tenga lugar cierto decalaje del grado, a diferencia de

lo que ocurre con  $\pi_M^* : H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M \times [0, 1])$ . Concretamente este decaje ha de ser en una unidad, como veremos a continuación siguiendo el esquema de [AT11].

Sea  $M$  una variedad, y consideremos una función  $e \in \Gamma_c^0(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} e(t)dt = 1$ , y sea  $\varepsilon = [edt]$ ; es decir, un generador de  $H^1(\mathbb{R})$ . Definimos

$$e_* : \Gamma_c^p(M) \longrightarrow \Gamma_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}), \quad \omega \longmapsto e\omega \wedge dt.$$

Entonces,  $e_*$  es un morfismo de cocadenas, pues  $d \circ e_*(\omega) = d(e\omega \wedge dt) = ed\omega \wedge dt = e_* \circ d(\omega)$ . Por tanto, pasa a cohomología e induce un morfismo

$$e_* : H_c^p(M) \longrightarrow H_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}), \quad [\omega] \longmapsto [e\omega \wedge dt] = [\omega] \wedge \varepsilon.$$

Estamos cometiendo un leve abuso al escribir  $\omega \equiv \pi_M^*\omega$  y  $\varepsilon \equiv \pi_{\mathbb{R}}^*\varepsilon$  y omitir los pull-back de las proyecciones. Además, mantendremos el mismo convenio de notación de la demostración de 7.1 para los sistemas de coordenadas.

**Teorema 11.1.** *Dada  $M^m$ , el morfismo  $e_* : H_c^p(M) \longrightarrow H_c^{p+1}(M \times \mathbb{R})$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Deseamos encontrar una inversa de  $e_*$ , que encontraremos en la siguiente versión modificada del operador de Poincaré de 7.2:

$$\mathcal{L}^p : \Gamma_c^p(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Gamma_c^{p-1}(M), \quad \omega \longmapsto \omega_x = (-1)^{p-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega)_{(x,s)} ds,$$

donde definimos la integral en  $t \in \mathbb{R}$  como en 7.1. De nuevo, hay un ligero abuso de notación, ya que en realidad hablamos de la integral de  $\sigma_t^* \circ i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega$ , que nos da la actuación sobre el espacio adecuado,  $T_x M$ . Que el operador está bien definido es claro razonando como en 7.1 y observando que el integrando se anula fuera de cierto compacto.

El primer paso es demostrar que  $\mathcal{L}$  es un morfismo de cocadenas. Razonando localmente, consideramos un sistema de coordenadas de  $M$ ,  $x : U \subset M \rightarrow W \subset \mathbb{H}^m$ . Dado que toda  $p$ -forma  $\omega \in \Gamma_c^p(M \times \mathbb{R})$  se escribe como combinación lineal de factores de tipo

$$f(x, t) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \quad \text{ó} \quad f(x, t) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}},$$

con  $f \in \Gamma_c^0(U \times \mathbb{R})$ , podemos trabajar individualmente para cada tipo de factor:

$$\mathcal{L}(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = 0$$

pues  $dx_i(\frac{\partial}{\partial t}) = 0$ , mientras que  $dt(\frac{\partial}{\partial t}) = 1$  luego

$$\mathcal{L}(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}) = (-1)^{p-1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}.$$

Entonces calculamos

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \circ d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \\ &= \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &= (-1)^p \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = 0 = d \circ \mathcal{L}(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}), \end{aligned}$$

ya que al tener  $f$  soporte compacto es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} f(x, t) = 0 - 0 = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \circ d(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}) &= \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \right) \\
&= (-1)^{p+1} \sum_{i=1}^m \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \\
&= d \left( (-1)^{p-1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \right) = d \circ \mathcal{L}(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}).
\end{aligned}$$

O sea,  $d \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ d$  y se trata de un morfismo de cocadenas, luego pasa a cohomología  $\mathcal{L} : H_c^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{*-1}(M)$ . Veamos ahora que  $e_*$  y  $\mathcal{L}$  son mutuamente inversos en cohomología. Por un lado, es claro que  $\mathcal{L} \circ e_* = \text{id}_{\Gamma_c^p(M)}$ , ya que dada  $\omega \in \Gamma_c^p(M)$ :

$$\mathcal{L} \circ e_*(\omega) = \mathcal{L}(e\omega \wedge dt) = (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^p e(s)\omega_x ds = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e(s) ds \right) \omega_x = \omega.$$

Por último, vamos a construir un operador de homotopía  $\mathcal{S}^p : \Gamma_c^p(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_c^{p-1}(M \times \mathbb{R})$  entre  $e_* \circ \mathcal{L}$  y  $\text{id}_{\Gamma_c^p(M \times \mathbb{R})}$ . Este operador, también inspirado en el de Poincaré, es:

$$(\mathcal{S}^p \omega)_{(x,t)} = \int_{-\infty}^t (i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega)_{(x,s)} ds - E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (i_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega)_{(x,s)} ds,$$

para la función diferenciable

$$E(t) = \int_{-\infty}^t e(s) ds.$$

El operador  $\mathcal{S}$  está bien definido pues para  $t$  suficientemente grande ambos sumandos coinciden, en virtud del soporte compacto de  $e$  y de  $\omega$ , y por tanto  $\mathcal{S}\omega$  tiene soporte compacto. Vamos a demostrar que  $\mathcal{S} \circ d + d \circ \mathcal{S} = \text{id}_{\Gamma_c^p(M \times \mathbb{R})} - e_* \circ \mathcal{L}$  mediante las técnicas anteriores, o sea localmente y para los dos tipos de factores. Se tiene

$$\mathcal{S}(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = 0$$

como antes, mientras que

$$\mathcal{S}(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}) = \left( \int_{-\infty}^t f(x, s) ds - E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}.$$

Comenzamos con  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ :

$$\begin{aligned}
(d \circ \mathcal{S} + \mathcal{S} \circ d)\omega &= \mathcal{S}(d\omega) \\
&= \mathcal{S} \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \right) \\
&= \left( \int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds - E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\
&= f(x, t) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \omega = (\text{id} - e_* \circ \mathcal{L})\omega,
\end{aligned}$$

razonando como antes para  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(x, t)$ . Por otro lado, para  $\omega = f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}$ :

$$\begin{aligned} (\text{id} - e_* \circ \mathcal{L})\omega &= \omega - e(t)(-1)^{p-1} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \wedge dt \\ &= \omega - e(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}. \end{aligned}$$

Nótese que actúa  $\mathcal{L}$ , no  $\mathcal{S}$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} (d \circ \mathcal{S})\omega &= d \left[ \left( \int_{-\infty}^t f(x, s) ds - E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \right] \\ &= \omega - e(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s) ds \right) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left( \int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds - E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}. \end{aligned}$$

junto con

$$\begin{aligned} (\mathcal{S} \circ d)\omega &= \mathcal{S} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^m \left( \int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds - E(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, s) ds \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}. \end{aligned}$$

Juntando todo,  $(d \circ \mathcal{S})\omega + (\mathcal{S} \circ d)\omega = (\text{id} - e_* \circ \mathcal{L})\omega$ , luego hemos terminado.  $\square$

La consecuencia fundamental que obtenemos es el lema de Poincaré para la cohomología con soporte compacto.

**Corolario 11.2.** *La cohomología de de Rham con soporte compacto de  $\mathbb{R}^m$  es*

$$H_c^p(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } p = m, \\ 0, & \text{si } p \neq m. \end{cases}$$

*Demostración.* Conocido el caso  $m = 1$  dado por ejemplo 10.4, se obtiene inmediatamente para  $m$  arbitraria razonando por inducción y empleando el teorema 11.1.  $\square$

**Observación 11.3.** Se ve que para cada  $0 \leq p \leq m$

$$H_c^p(\mathbb{R}^m) = H^{m-p}(\mathbb{R}^m).$$

Este fenómeno no es más que la Dualidad de Poincaré, que no demostraremos por preferir estudiar las fibraciones de esferas, pero que ya está al alcance de la teoría. De hecho, es muy fácil de enunciar con lo que ya tenemos. Sea  $M^m$  una variedad orientable sin borde, condición que permite usar la integral en cohomología como ya sabemos.

Por lo comentado en la sección 10, podemos definir

$$\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \longrightarrow H_c^{p+q}(M), \quad [(\omega_1), (\omega_2)] \longmapsto [\omega_1 \wedge \omega_2].$$

Si  $q = m - p$  podemos integrar la forma  $\omega_1 \wedge \omega_2$  y definir la forma bilineal real:

$$H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [(\omega_1), (\omega_2)] \longmapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Ocurre que esta forma bilineal es no degenerada y define un isomorfismo

$$\int_M : H^r(M) \longrightarrow H_c^{m-r}(M)^*, \quad [\omega] \longmapsto \int_M \omega \wedge \cdot.$$

Esta es la dualidad de Poincaré.

## 12. MAYER-VIETORIS PARA SOPORTE COMPACTO

Veamos ahora cómo se obtiene una sucesión de Mayer-Vietoris para soporte compacto. La construcción de la sección 8 no sirve, pues el pullback de las inclusiones no está definido en  $\Gamma_c^*(M)$ , ya que las inclusiones de abiertos claramente no son propias. Así, en lugar del pullback, dada una inclusión  $i : U \hookrightarrow M$  de un abierto  $U$  de  $M$ , definimos

$$i_* : \Gamma_c^*(U) \longrightarrow \Gamma_c^*(M), \quad \omega \longmapsto \begin{cases} \omega_x, & x \in U, \\ 0, & x \in M \setminus \text{sop}_U(\omega). \end{cases}$$

Por su parte, esta aplicación sólo está bien definida entre formas con soporte compacto. Además, es un funtor covariante y no contravariante como los pullback. En concreto, si tenemos inclusiones  $U \hookrightarrow_i V \hookrightarrow_j W$ , entonces  $(j \circ i)_* = j_* \circ i_*$ . Además, también son morfismos de cocadenas entre  $\Gamma_c^*(U)$  y  $\Gamma_c^*(M)$ , pues es indistinto aplicar  $d$  antes que después de  $i_*$ , o sea,  $i_* \circ d = d \circ i_*$ . El resultado clave, análogo al de la sección 8, es:

**Teorema 12.1.** *Sea  $\{M_1, M_2\}$  un recubrimiento abierto de la variedad  $M$ , y las inclusiones  $i_\nu : M_\nu \hookrightarrow M$  y  $j_\nu : M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M_\nu$ ,  $\nu = 1, 2$ . Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \Gamma_c^*(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\tilde{J}} \Gamma_c^*(M_1) \oplus \Gamma_c^*(M_2) \xrightarrow{\tilde{I}} \Gamma_c^*(M) \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta corta, donde  $\tilde{J}(\omega) = (j_{1*}\omega, -j_{2*}\omega)$ , y  $\tilde{I}(\omega_1, \omega_2) = i_{1*}\omega_1 + i_{2*}\omega_2$ .

*Demostración.* La comprobación es análoga a la de 8.1. Es una sucesión de cocadenas:

$$\tilde{I} \circ \tilde{J}(\omega) = \tilde{I}(j_{1*}\omega, -j_{2*}\omega) = i_{1*}(j_{1*}\omega) - i_{2*}(j_{2*}\omega) = j_*\omega - j_*\omega = 0,$$

donde  $i_\nu \circ j_\nu = j : M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M$ . Recíprocamente,  $I(\omega_1, \omega_2) = i_{1*}\omega_1 + i_{2*}\omega_2 = 0$  implica que  $\text{sop}_M(i_{\nu*}\omega_\nu) \subset M_\nu$  para  $\nu \neq \mu$ , luego de hecho  $\text{sop}_{M_\nu}(\omega_\nu) \subset M_1 \cap M_2$ , con lo que  $\omega_1|_{M_1 \cap M_2}$  es una primitiva vía  $\tilde{J}$  de  $(\omega_1, \omega_2)$ . La inyectividad de  $\tilde{J}$  es inmediata, y finalmente el argumento para la sobreyectividad de  $\tilde{I}$  también requiere una partición de la unidad subordinada a  $\{M_1, M_2\}$ , digamos  $\{\theta_1, \theta_2\}$ . Dada  $\omega \in \Gamma_c^p(M)$ , definiendo

$$\omega_1 = (\theta_1\omega)|_{M_1}, \quad \omega_2 = (\theta_2\omega)|_{M_2},$$

entonces claramente  $\tilde{I}(\omega_1, \omega_2) = \omega$ , y  $\omega_\nu \in \Gamma_c^p(M_\nu)$  pues  $\text{sop}_{M_\nu}(\theta_\nu\omega) \subset M_\nu$ . En efecto,  $\{x \in M_\nu : \theta_\nu\omega \neq 0\} \subset \text{sop}_M(\theta_\nu) \cap \text{sop}_M(\omega)$ , luego el conjunto donde  $\omega_\nu$  es no nula está contenido en el compacto de  $M_\nu$  dado por  $\text{sop}_M(\theta_\nu) \cap \text{sop}_M(\omega)$ .  $\square$

En virtud del teorema 4.15 y el lema 4.19, obtenemos:

**Teorema 12.2** (Mayer-Vietoris para soporte compacto). *Sea  $\{M_1, M_2\}$  un recubrimiento abierto de la variedad  $M$ . Entonces, se tiene la sucesión exacta larga*

$$\dots \xleftarrow{\tilde{\partial}} H_c^p(M) \xleftarrow{\tilde{I}} H_c^p(M_1) \oplus H_c^p(M_2) \xleftarrow{\tilde{J}} H_c^p(M_1 \cap M_2) \xleftarrow{\tilde{\partial}} H_c^{p-1}(M) \xleftarrow{\tilde{I}} \dots$$

donde usamos las notaciones del teorema 12.1 para  $\tilde{I}$  y  $\tilde{J}$ , y del teorema 4.15 para  $\tilde{\partial}$ .

Aquí,  $\tilde{\partial}$  es la aplicación borde de esta cocadena, distinta de  $\partial$  de 8.2. Nótese que el sentido de las flechas es el inverso del de 8.2. La expresión de  $\tilde{\partial}$  es, dada  $[\omega] \in H_c^{p+1}(M)$ :

$$\tilde{\partial}([\omega]) = [(+d\theta_1 \wedge \omega)|_{M_1 \cap M_2}] = [(-d\theta_2 \wedge \omega)|_{M_1 \cap M_2}].$$

Así, si  $j : M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M$  es la inclusión, en términos de los pullback y las extensiones por cero tenemos que, para  $[\omega'] \in H^p(M_1 \cap M_2)$  y  $[\omega] \in H_c^{p+1}(M)$ :

$$\partial([\omega']) = [j^*(-d\theta_1 \wedge \omega')], \quad \tilde{\partial}([\omega]) = [j_*(+d\theta_1 \wedge \omega)].$$

Aplicando el lema 4.13 a la anterior cocadena exacta larga, se obtiene:

**Corolario 12.3.** *En las hipótesis de 12.2, se tiene la sucesión exacta larga*

$$\dots \xrightarrow{\tilde{\partial}^*} H_c^p(M)^* \xrightarrow{\tilde{I}^*} H_c^p(M_1)^* \oplus H_c^p(M_2)^* \xrightarrow{\tilde{J}^*} H_c^p(M_1 \cap M_2)^* \xrightarrow{\tilde{\partial}^*} H_c^{p-1}(M)^* \xrightarrow{\tilde{I}^*} \dots$$

donde  $*$  denota aplicación o espacio dual.

La versión para soporte compacto de 8.3 es:

**Corolario 12.4.** *Dada una variedad  $M$  igual a la unión disjunta de abiertos  $\{M_\alpha \subset M : \alpha \in A\}$ , entonces tenemos el isomorfismo*

$$\tilde{I} : H^p(\mathcal{F}^*) \longrightarrow H_c^p\left(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}\right),$$

con  $\tilde{I}$  dado por la fórmula de 12.2 y la cocadena  $\mathcal{F}^*$  dada por la diferencial  $d$  y los espacios

$$\mathcal{F}^p = \{(\omega_{\alpha})_{\alpha} \in \bigoplus_{\alpha} \Gamma_c^p(M_{\alpha}) : \omega_{\alpha} = 0, \text{ excepto una cantidad finita}\}.$$

*Demostración.* El resultado está dado por el morfismo de cocadenas

$$\tilde{I} : \mathcal{F}^p \longrightarrow \Gamma_c^p\left(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}\right), \quad (\omega_{\alpha})_{\alpha} \longmapsto \sum_{\alpha} i_{\alpha*}\omega,$$

donde la suma está bien definida pues a lo sumo sumamos una cantidad finita de términos no nulos, todos con soporte compacto. El resultado se sigue al ser la inversa de  $\tilde{I}$  también morfismo de cocadenas, bien definida en virtud del soporte compacto,

$$\tilde{I}^{-1} : \Gamma_c^p\left(\bigcup_{\alpha} M_{\alpha}\right) \longrightarrow \mathcal{F}^p, \quad \omega \longmapsto (i_{\alpha}^*\omega)_{\alpha},$$

para las inclusiones  $i_{\alpha} : M_{\alpha} \hookrightarrow M$ . □

La sucesión de Mayer-Vietoris para soporte compacto es similar al caso no compacto, pero invierte la posición de  $H^*(M)$  y  $H^*(M_1 \cap M_2)$ . Alternativamente, la sucesión dual toma la misma forma, pero invierte el orden en el que se recorre el grado  $p$ . Si la dimensión de los espacios de cohomología compacta es finita, entonces son isomorfos a sus duales.

Para concluir, ejemplificamos las técnicas de cálculo de la sección 9 en el caso compacto, pero empleando 10.7, 11.2, 12.4 y 12.2, así como 10.3 en caso de que no haya borde.

**Ejemplo 12.5.** Veamos que el cálculo de  $H_c^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  es análogo al de 9.1. Dado que la dimensión es 2, sólo hemos de calcular para grado  $p = 0, 1, 2$ . Consideramos

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 = 0\}, \\ V &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}, \end{aligned}$$

de forma que  $M = U \cup V$ . Tanto  $U$  como  $V$  tienen el tipo de homotopía propia de  $\mathbb{R}^2$ , luego podemos aplicar 11.2. Más aún,  $U \cap V = H_+ \sqcup H_-$  es la unión disjunta de los abiertos  $H_{\pm} = \{\pm x_1 > 0\}$ , que también tienen el tipo de homotopía propia de  $\mathbb{R}^2$ , y por 12.4 resulta  $H_c^p(U \cap V) = H_c^p(H_+) \oplus H_c^p(H_-)$ . Entonces, 12.2 da la cocadena larga exacta

$$0 \oplus 0 \xrightarrow{\tilde{I}} H_c^0(M) \xrightarrow{\tilde{\partial}} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\tilde{J}} 0 \oplus 0 \xrightarrow{\tilde{I}} H_c^1(M) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{J}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{I}} H_c^2(M) \xrightarrow{\tilde{\partial}} 0.$$

De aquí, o de haber una única componente conexa que además es no compacta, se concluye que  $H_c^0(M) = 0$ . Por 10.3,  $H_c^2(M) = \mathbb{R}$ , y de aquí  $H_c^1(M) = \mathbb{R}$ . Es decir,

$$H_c^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } p = 1, 2. \end{cases}$$

De hecho, mediante exactamente la misma argumentación de 9.7, se obtiene:

**Ejemplo 12.6.** Dados  $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^2$  todos distintos, se tiene

$$H_c^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0, \\ \mathbb{R}^n & \text{si } p = 1, \\ \mathbb{R} & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

Razonamos por inducción. Conocido  $n = 1$ , supongámoslo para  $n - 1$  y sean  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_j\}_{j=1}^n$ ,  $V_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_j\}_{j=1}^{n-1}$ ,  $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_n\}$ . La hipótesis de inducción proporciona  $H_c^*(V_1)$ , y  $H_c^*(V_2)$  es el caso  $n = 1$ . Dado que  $V_1 \cup V_2 = \mathbb{R}^2$  y  $V_1 \cap V_2 = V$ , por 12.2 obtenemos

$$\dots \xleftarrow{\tilde{\delta}} H_c^p(\mathbb{R}^2) \xleftarrow{\tilde{I}} H_c^p(V_1) \oplus H_c^p(V_2) \xleftarrow{\tilde{J}} H_c^p(V) \xleftarrow{\tilde{\delta}} \dots$$

y esta cocadena acaba con  $p = 2$ , quedando

$$0 \xleftarrow{\tilde{\delta}} H_c^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \xleftarrow{\tilde{I}} H_c^2(V_1) \oplus H_c^2(V_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow{\tilde{J}} H_c^2(V) \xleftarrow{\tilde{\delta}} H^1(\mathbb{R}^2) = 0.$$

Esto proporciona directamente  $H_c^2(V) = \mathbb{R}$ . Para  $p \leq 1$  es

$$0 \xleftarrow{\tilde{J}} H_c^p(V_1) \oplus H_c^p(V_2) \xleftarrow{\tilde{I}} H_c^p(V) \xleftarrow{\tilde{\delta}} 0,$$

luego  $\tilde{I}$  es una biyección y se concluye el resultado al ser  $H_c^1(V_1) = \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $H_c^1(V_2) = \mathbb{R}$ .

### 13. EL INVARIANTE DE HOPF

Cerramos el trabajo aplicando algunos de los resultados de la Cohomología de de Rham para comprobar que las fibraciones de Hopf, que se introducen en la siguiente sección, son esenciales, esto es, no nulhomótopas. La primera conexión con la cohomología de variedades, concretamente de las esferas, está en el siguiente concepto. Trabajaremos con la orientación usual de las esferas como borde: tomamos como positivas las clases de las bases  $\{u_i\}_i$  de  $T_x \mathbb{S}^m$  tales que  $[x, u_1, \dots, u_m]$  es la orientación estándar de  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Consideremos una aplicación diferenciable  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$  para  $m \geq 2$  y el pull-back inducido  $f^* : \Gamma^m(\mathbb{S}^m) \rightarrow \Gamma^m(\mathbb{S}^{2m-1})$ , junto con un generador (recuérdese 9.6) de  $H^m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{R}$ ,  $\omega_m \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$ , tal que  $\int_{\mathbb{S}^m} \omega_m = 1$ . Entonces  $f^* \omega_m \in \Gamma^m(\mathbb{S}^{2m-1})$  es cerrada por ser  $d\omega_m = 0$  por la dimensión, y dado que  $0 < m < 2m - 1$  entonces  $H^m(\mathbb{S}^{2m-1}) = 0$  y existe  $\alpha \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$  tal que

$$d\alpha = f^* \omega_m.$$

**Definición 13.1.** El *invariante de Hopf* de la aplicación diferenciable  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$  es

$$\text{Inv}_H(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

**Proposición 13.2.**  $\text{Inv}_H(f)$  está bien definido y es invariante por homotopía.

*Demostración.* Ya hemos visto que siempre existe alguna primitiva  $\alpha$  de  $f^* \omega_m$  para definir  $\text{Inv}_H(f)$ . Veamos que además no depende de la primitiva ni del representante  $\omega_m$  escogidos.

Sean  $\alpha, \beta \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$  tal que  $d\alpha = d\beta = f^*\omega_m$ . Entonces  $d(\alpha - \beta) = 0$ , luego al igual que antes existe  $\gamma \in \Gamma^{m-2}(\mathbb{S}^{2m-1})$  con  $d\gamma = \alpha - \beta$ . Aplicando el teorema de Stokes a la esfera  $\mathbb{S}^{2m-1}$ , que no tiene borde, y usando que  $d(f^*\omega_m) = 0$ , se concluye lo buscado:

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d(\gamma \wedge f^*\omega_m) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} (\alpha - \beta) \wedge f^*\omega_m + (-1)^{m-2} \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \gamma \wedge d(f^*\omega_m).$$

Sean ahora  $\omega, \omega' \in \Gamma^m(\mathbb{S}^m)$  con integral igual a 1. Por el recíproco del teorema de Stokes 3.5 existe  $\beta \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^m)$  tal que  $\omega' - \omega = d\beta$ , y si como antes  $d\alpha = f^*\omega$ , se tiene

$$f^*\omega' = f^*(\omega + d\beta) = d(\alpha + f^*\beta),$$

y una primitiva de  $f^*\omega'$  es  $\alpha' = \alpha + f^*\beta$ . La independendencia del generador resulta de ser:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha' \wedge d\alpha' &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} (\alpha + f^*\beta) \wedge d(\alpha + f^*\beta) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha + \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge df^*\beta + \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} f^*\beta \wedge d(\alpha + f^*\beta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha + (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} (d(\alpha \wedge f^*\beta) - d\alpha \wedge f^*\beta) + \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} f^*(\beta \wedge (\omega + d\beta)). \end{aligned}$$

Todos los términos distintos de  $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge d\alpha$  son nulos:  $\beta \wedge (\omega + d\beta) = 0$  pues es una forma de  $\mathbb{S}^m$  con orden mayor que  $m$ , y análogo para  $d\alpha \wedge f^*\beta = f^*(\omega \wedge \beta) = 0$ . Además, aplicando de nuevo el teorema de Stokes en  $\mathbb{S}^{2m-1}$  sin borde, se ve que  $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} d(\alpha \wedge f^*\beta) = 0$ .

Visto que está bien definida, sea una homotopía diferenciable  $H : \mathbb{S}^{2m-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^m$ . Como antes,  $H^*\omega_m \in \Gamma^m(\mathbb{S}^{2m-1} \times [0, 1])$  es cerrada luego exacta (usando 7.1 junto con 9.6), con primitiva  $\beta \in \Gamma^{m-1}(\mathbb{S}^{2m-1} \times [0, 1])$ . En el producto  $\mathbb{S}^{2m-1} \times [0, 1]$  (ambos factores orientados de la forma usual), con borde  $M \times \{0, 1\}$ , podemos aplicar el teorema de Stokes con la orientación inducida en el borde: la orientación de  $M$  en  $M \times \{1\}$  y la opuesta a la de  $M$  en  $M \times \{0\}$ . Al ser  $d(\beta \wedge d\beta) = d\beta \wedge d\beta = H^*(\omega_m \wedge \omega_m) = 0$  conseguimos

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{2m-1} \times [0, 1]} d(\beta \wedge d\beta) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1} \times \{1\}} \beta \wedge d\beta - \int_{\mathbb{S}^{2m-1} \times \{0\}} \beta \wedge d\beta = \text{Inv}_H(H_1) - \text{Inv}_H(H_0),$$

puesto que con la inclusión  $\sigma_t : \mathbb{S}^{2m-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1} \times [0, 1], x \mapsto (x, t)$  se tiene  $d \circ \sigma_t^* \beta = \sigma_t^* \circ d\beta = \sigma_t^* \circ H^*\omega_m = H_t^*\omega_m$ , luego  $\sigma_t^*\beta$  es primitiva de  $H_t^*\omega_m$  para cada  $t \in [0, 1]$ .  $\square$

Ahora que ya sabemos que  $\text{Inv}_H(f)$  es invariante por homotopía diferenciable, podemos proceder como se hizo para el pullback de aplicaciones continuas, es decir:

**Definición 13.3.** El *invariante de Hopf* de la aplicación continua  $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ ,  $\text{Inv}_H(\varphi)$ , es  $\text{Inv}_H(f)$  para cualquier  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$  diferenciable homótopa a  $\varphi$ .

Por los resultados 5.7, siempre existe tal  $f$ , y junto con este lema, la definición es buena e invariante por homotopía continua. Así, cualquier aplicación nulhomótopa  $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$  cumple  $\text{Inv}_H(\varphi) = 0$ , y esto da una herramienta para probar la esencialidad de las fibraciones de Hopf:  $\text{Inv}_H(f) \neq 0$  implica que son esenciales. Hemos de decir que esto sólo sirve si  $m$  es par, pues en caso contrario  $\text{Inv}_H(f) = 0$  (en efecto, sería  $\alpha \wedge d\alpha = \frac{1}{2}d(\alpha \wedge \alpha)$ , y aplicamos el teorema de Stokes), y por supuesto  $\text{Inv}_H(f) = 0$  no implica que  $f$  sea nulhomótopa. Pero este invariante es muy importante en topología algebraica cuando  $m$  es par, y en particular en las dimensiones que nos ocupan aquí:  $m = 2, 4, 8$ .

Observamos por último que si tenemos un generador de  $H^{2m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$ , digamos  $\omega_{2m-1} \in \Gamma^{2m-1}(\mathbb{S}^{2m-1})$  con  $\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \omega_{2m-1} = 1$ , entonces se tiene, para la primitiva  $\alpha$  de  $f^*\omega_m$ ,

$$[\alpha \wedge d\alpha] = \text{Inv}_H(f)[\omega_{2m-1}],$$

como se comprueba inmediatamente escribiendo  $[\alpha \wedge d\alpha] = \lambda[\omega_{2m-1}]$  e integrando.

## 14. FIBRADOS DE HOPF

En lo que resta de trabajo vamos a estudiar un ejemplo concreto de:

**Definición 14.1.** Un *fibrado* es una aplicación continua suprayectiva  $f : E \rightarrow X$  tal que cada punto de  $X$  tiene un entorno  $U$  con un homeomorfismo  $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que

$$\begin{array}{ccc} E & \supset & f^{-1}(U) \xrightarrow{h} U \times F \\ \downarrow f & & \downarrow f| \swarrow \pi \\ X & \supset & U \end{array}$$

es conmutativo, donde  $\pi$  es la proyección sobre el primer factor. A tal entorno  $U$  se le llama *trivializante*, y a  $h$  una *trivialización local*;  $E$  es el *espacio total*,  $X$  es la *base* y  $F$  la *fibra*. Abreviaremos diciendo simplemente que tenemos un fibrado  $F \rightarrow E \rightarrow_f X$ .

Es terminología usual llamar *fibras* a  $f^{-1}(x)$  para cada  $x \in X$  en contextos más generales. Con este lenguaje, las fibras de un fibrado son homeomorfas a  $F$  y se organizan localmente en  $E$  como en el producto  $U \times F$ , pero no necesariamente de forma global, si no que pueden estar "torcidas", como en una banda de Möbius ( $[0, 1] \rightarrow \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ) o en una botella de Klein ( $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ).

**Definición 14.2.** Los *fibrados<sup>4</sup> de Hopf* son fibrados donde todos los espacios involucrados son esferas. Se puede probar que sólo hay tres (ejercicio 5 de [Hat01, §4.D]): son aplicaciones como las de la sección anterior,  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$  con fibra  $\mathbb{S}^{m-1}$ , para  $m = 2, 4, 8$ .

En realidad, si entendemos como esfera a  $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$  tenemos un cuarto fibrado de Hopf en el que  $m = 1$ . Este caso corresponde a trabajar en la recta proyectiva real  $\mathbb{RP}^1$ , que se puede ver como cociente de  $\mathbb{S}^1$  identificando puntos antipodales. La proyección  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$  es el fibrado tras componer con un homeomorfismo entre  $\mathbb{RP}^1$  y  $\mathbb{S}^1$ , pero éste es un caso muy trivial, que de hecho es un recubridor.

El resto de fibrados, que al tener  $m \geq 2$  sí permiten hablar de su invariante de Hopf, se obtienen mediante las  $\mathbb{R}$ -álgebras<sup>5</sup> de los complejos  $\mathbb{C}$ , cuaterniones  $\mathbb{H}$  y octoniones  $\mathbb{O}$ . Para cada anillo de división  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  se toma el plano  $\mathbb{F}^2$ , que al coincidir con  $\mathbb{R}^{2m}$  para  $m = 1, 2, 4, 8$  puede ser dotado de topología. Tras eliminar el origen de cada plano, la recta proyectiva  $\mathbb{FP}^1$  es el cociente de  $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$  por la relación de equivalencia:

$$(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1}z_0 = z_1'^{-1}z_0' & \text{si } z_1, z_1' \neq 0, \\ z_1 = z_1' = 0 & \text{en c.c.} \end{cases} \iff \begin{cases} z_0^{-1}z_1 = z_0'^{-1}z_1' & \text{si } z_0, z_0' \neq 0, \\ z_0 = z_0' = 0 & \text{en c.c.} \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que es una relación de equivalencia. Para ver que las dos caracterizaciones mostradas son la misma hay que emplear que en estas álgebras se cumple  $(zw)^{-1} = w^{-1}z^{-1}$  para cualesquiera  $z, w \neq 0$ . De hecho, para las comprobaciones algebraicas que siguen recordamos que en  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  se tiene:

- $rz = zr$ , para todo  $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{F}$  y  $z \in \mathbb{F}$ ,
- $|z|^2 = zz^* = z^*z$  y es la norma usual de  $\mathbb{R}^m$ , luego  $z^{-1} = z^*/|z|^2$  si  $z \neq 0$ ,
- $|zw| = |z||w|$ ,
- $(zw)^* = w^*z^*$ , luego  $(zw)^{-1} = w^{-1}z^{-1}$  si  $z, w \neq 0$ ,
- $z(z^*w) = (zz^*)w$  y  $(wz)z^* = w(zz^*)$ , luego  $z(z^{-1}w) = w$  y  $(wz)z^{-1} = w$ .

<sup>4</sup>Probamos en las siguientes secciones que son fibraciones, de ahí la denominación usual como fibración de Hopf, pero hasta que no lo probemos mantenemos la terminología de fibrado.

<sup>5</sup>Estas álgebras se obtienen a partir de  $\mathbb{R}$  por el procedimiento de Caley-Dickson, que proporciona álgebras duplicando el número de coordenadas y definiendo un producto y una involución, la conjugación.

Recordamos a su vez que el producto de  $\mathbb{H}$  y de  $\mathbb{O}$  no es conmutativo, y más aún tampoco asociativo en  $\mathbb{O}$ . Por este motivo se ha definido como se ha hecho la relación que da el cociente de  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ , ya que la prescripción habitual  $(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1)$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  con  $(z_0, z_1) = \lambda(z'_0, z'_1)$  no da una relación transitiva en  $\mathbb{O}$  por su no asociatividad. En particular, no podemos definir  $\mathbb{O}\mathbb{P}^n$  para  $n \neq 1$ . En cualquier caso, esto da la identificación

$$p : \mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1, (z_0, z_1) \mapsto (z_0 : z_1),$$

y decimos identificación porque equipamos  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  con la topología imagen directa de  $p$ . Es fácil comprobar que  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  con esta topología es separado. Más aún, la restricción de  $p$  a la esfera unidad  $\mathbb{S}^{2m-1} \subset \mathbb{F}^2$  sigue siendo suprayectiva luego se obtiene una identificación cerrada, puesto que una aplicación continua entre el compacto  $\mathbb{S}^{2m}$  y el espacio separado  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  es cerrada. En particular, la recta proyectiva  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  es compacta y se obtiene añadiendo a  $\mathbb{F}$  un punto. Por tanto,  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  es homeomorfa a la compactificación de Alexandroff por un punto de  $\mathbb{F}$ , digamos  $\mathbb{F}^* \equiv \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ . Lo vemos explícitamente a través de la biyección

$$\psi : \mathbb{F}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}^*, (z_0 : z_1) \mapsto z_1^{-1}z_0, \quad z_1^{-1}z_0 := \infty \text{ si } z_1 = 0,$$

que de hecho es un homeomorfismo por ser los espacios compactos y separados, y ser  $\psi$  continua (por la propiedad universal del cociente). Finalmente, es bien sabido que  $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}^m$  tiene por compactificación de Alexandroff a la esfera  $\mathbb{S}^m$ , luego tenemos un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{F}^* \rightarrow \mathbb{S}^m$  fácil de explicitar por proyección estereográfica (como se verá en la siguiente sección). De esta forma, los fibrados de Hopf son:

$$f = \varphi \circ \psi \circ p : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m.$$

Una fibra  $f^{-1}(x)$  es una recta vectorial con coeficientes en  $\mathbb{F}$  de  $\mathbb{F}^2$  cortada con  $\mathbb{S}^{2m-1}$ , luego es un subespacio real  $\mathbb{R}^m$  cortado con  $\mathbb{S}^{2m-1}$ , es decir, una esfera  $\mathbb{S}^{m-1}$ , como dijimos. Esta fibra son los coeficientes que dan la proporcionalidad “residual” que aún queda en las fibras de  $\mathbb{S}^{2m-1} \subset \mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$  cuando restringimos la identificación  $p$ .

Dado que  $\varphi$  y  $\psi$  son homeomorfismos, sólo falta ver que  $p : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1$  es un fibrado. Para ello, se define el recubrimiento de  $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$  dado por los abiertos  $U_i = \{z_i \neq 0\}$ ,  $i = 0, 1$ , junto con las aplicaciones  $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{S}^{m-1}$  y  $g_i : U_i \times \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow p^{-1}(U_i)$ ,  $i = 0, 1$ :

$$\begin{aligned} h_0(z_0, z_1) &= ((z_0 : z_1), z_0/|z_0|), & g_0((z_0 : z_1), \lambda) &= (\lambda, \lambda(z_0^{-1}z_1)) / \|(\lambda, \lambda(z_0^{-1}z_1))\|, \\ h_1(z_0, z_1) &= ((z_0 : z_1), z_1/|z_1|), & g_1((z_0 : z_1), \lambda) &= (\lambda(z_1^{-1}z_0), \lambda) / \|(\lambda(z_1^{-1}z_0), \lambda)\|. \end{aligned}$$

Nótese que el orden tanto de los factores como de los paréntesis es importante en  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ . Se comprueba algebraicamente que cada  $h_i$  es una biyección con inversa  $g_i$ , ambas bien definidas (en particular se ve explícitamente que las  $g_i$  no dependen del representante de  $(z_0 : z_1)$ ). Dado que son continuas entre compactos separados, cada  $h_i$  es un homeomorfismo luego una trivialización local, y así  $p$  un fibrado.

En resumen, tenemos los tres fibrados complejo, cuaterniónico y octoniónico:

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^7 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^4, \quad \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^{15} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^8.$$

No podríamos reproducir la construcción para los *sedeniones* ( $m = 16$ ) y en adelante, ya que todas las sucesivas álgebras a partir de  $\mathbb{O}$  contienen divisores de 0.

**14.3. Fibrado de Hopf complejo.** Si se restringe  $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  a  $\mathbb{S}^3$  se obtiene la identificación cerrada  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , el cociente de  $\mathbb{S}^3$  módulo proporcionalidad vía coeficientes  $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ . El fibrado de Hopf es  $f = \varphi \circ \psi \circ p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  con fibra  $\mathbb{S}^1$ .

Se puede entender bien qué está ocurriendo mediante coordenadas polares. Antes de tomar la proyección estereográfica  $\varphi$ , es  $\psi \circ p : (z_0, z_1) = (r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \mapsto r_0/r_1 e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$ ,

con  $r_0^2 + r_1^2 = 1$ . Para un ratio fijo  $\rho = r_0/r_1 \in (0, \infty)$ , los ángulos  $\theta_i$  recorren independientemente  $\mathbb{S}^1$  luego forman un toro en  $\mathbb{S}^3$ , digamos  $T_\rho$ . Dejando variar  $\rho \in (0, \infty)$  estos toros rellenan todo  $\mathbb{S}^3$  excepto los casos límite  $T_0$  y  $T_\infty$ , donde al ser respectivamente  $z_0 = 0$  ó  $z_1 = 0$  degeneran en los círculos unidad de cada factor  $\{0\} \times \mathbb{C}$  y  $\mathbb{C} \times \{0\}$  de  $\mathbb{C}^2$ . Si hacemos una proyección estereográfica de  $\mathbb{S}^3$  sobre  $\mathbb{R}^3$  desde  $(0, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $T_\infty$  se corresponde con el círculo unidad del plano  $xy$  en torno al eje  $z$ , mientras que  $T_0$  se convierte en el eje  $z$ . Los toros  $T_\rho$  varían continuamente entre  $T_0$  y  $T_\infty$ , llenando  $\mathbb{R}^3$ . Cada  $T_\rho$  está formado por todas las fibras donde  $|z_0/z_1| = \rho$ , cada una de ellas asociada a un valor fijo de  $\theta_0 - \theta_1$ . Éstas forman círculos que se enrollan dando una vuelta longitudinal y una vuelta meridional, generando así todo  $T_\rho$ .

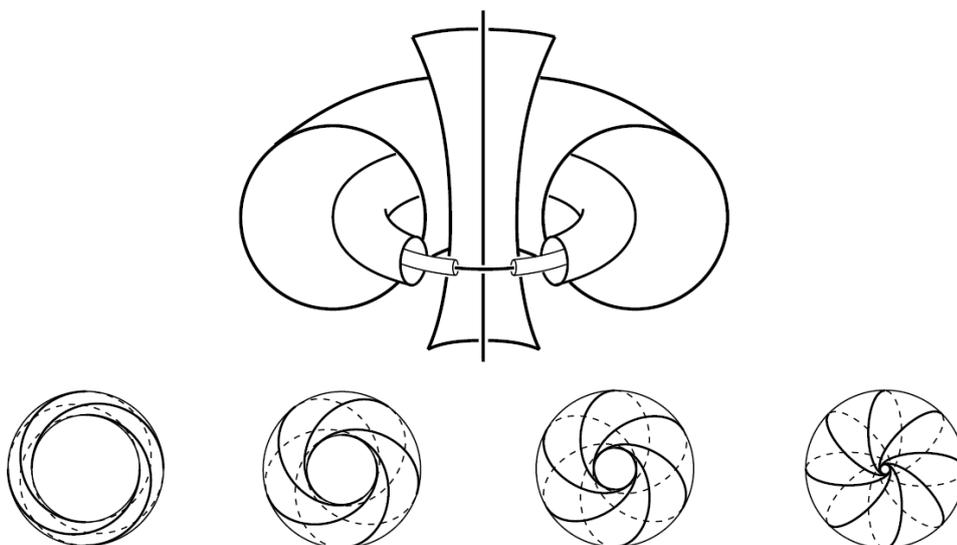


FIGURA 1. Proyección estereográfica de  $\mathbb{S}^3$  sobre  $\mathbb{R}^3$  desde  $(0, 1)$  de los toros formados por las fibras del fibrado de Hopf  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow_f \mathbb{S}^2$  (imagen extraída de [Hat01, Example §4.45]).

## 15. LAS FIBRACIONES DE HOPF SON ESENCIALES

En esta sección hallamos la fórmula explícita de los fibrados de Hopf  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ , para con ella calcular el invariante de Hopf. Pero hacemos ese cálculo sólo para  $m = 2$  pues para  $m = 4, 8$  la complejidad algebraica es exagerada. Nos conformamos aquí con el caso complejo pues en las siguientes secciones probamos la esencialidad de los tres fibrados por otro método que no requiere cálculos.

**Proposición 15.1.** *Los fibrados de Hopf  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$  están dados por la fórmula:*

$$f(z_0, z_1) = (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^* z_0),$$

entendiendo  $\mathbb{S}^{2m-1} \subset \mathbb{R}^{2m} \equiv \mathbb{F}^2$  y el producto y conjugación  $z \mapsto z^*$  de  $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ .

En particular,  $f$  es diferenciable pues el producto de  $\mathbb{F}$  es bilineal y la conjugación lineal.

*Demostración.* Como hemos visto,  $f$  es la composición  $f = \varphi \circ \psi \circ p$  de tres aplicaciones:

- La identificación  $p : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^1$ ,  $(z_0, z_1) \mapsto (z_0 : z_1)$ .

- El homeomorfismo  $\psi : \mathbb{F}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}^*$ :

$$\psi : (z_0 : z_1) \mapsto \begin{cases} z_1^{-1}z_0, & \text{si } z_1 \neq 0, \\ \infty, & \text{si } z_1 = 0, \end{cases} \quad \psi^{-1} : z \mapsto \begin{cases} (z : 1), & \text{si } z \neq \infty, \\ (1 : 0), & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

- La proyección estereográfica desde  $(1, 0) \in \mathbb{S}^m$ ,  $\varphi : \mathbb{F}^* \rightarrow \mathbb{S}^m$ :

$$\varphi : z \mapsto \begin{cases} \frac{(|z|^2 - 1, 2z)}{|z|^2 + 1}, & \text{si } z \neq \infty, \\ (1, 0), & \text{si } z = \infty, \end{cases} \quad \varphi^{-1} : (t, w) \mapsto \begin{cases} \frac{w}{1-t}, & \text{si } t \neq 1, \\ \infty, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Utilizando las propiedades del álgebra  $\mathbb{F}$  y componiendo las tres fórmulas:

$$f(z_0, z_1) = \varphi(z_1^{-1}z_0) = \frac{(|z_1^{-1}z_0|^2 - 1, 2z_1^{-1}z_0)}{|z_1^{-1}z_0|^2 + 1} = \frac{(|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^*z_0)}{|z_0|^2 + |z_1|^2} = (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^*z_0),$$

fórmula también válida si  $z_1 = 0$ . □

Pasamos ya al invariante de Hopf:

**Proposición 15.2.** *El invariante de Hopf de los fibrados de Hopf  $\mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow_f \mathbb{S}^m$  es  $\text{Inv}_H(f) = 1$ , luego son aplicaciones esenciales.*

*Demostración para  $m = 2$ .* Como decimos, sólo lo probamos para  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Escribimos  $(z_0, z_1) = (x + iy, u + iv) = (x, y, u, v)$  y tenemos

$$f(x, y, u, v) = (x^2 + y^2 - u^2 - v^2, 2(xu + yv), 2(yu - xv)).$$

Como en  $\mathbb{S}^3$  es  $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ , tenemos que  $x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 2(x^2 + y^2) - 1$ .

Necesitamos un generador  $\omega_2$  de  $H^2(\mathbb{S}^2)$  con integral igual a 1, que será un múltiplo de la forma de volumen de la esfera,

$$\Omega_x = \det(x, \dots) = x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Entonces  $\omega_2 = \frac{1}{4\pi}\Omega$ , porque  $4\pi = \int_{\mathbb{S}^2} \Omega$  es el volumen de la esfera. Ahora recubrimos el abierto  $x_3 \neq 0$ , cuyo complementario tiene medida nula y de cara a integración es irrelevante, con los dominios de coordenadas  $U_{\pm} = \{\pm x_3 > 0\}$  y parametrizaciones  $\phi^{\pm} : \mathbb{D}^2 \rightarrow U_{\pm}, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$  ( $\mathbb{D}^2$  es el disco unidad). En esta situación:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{4\pi}\Omega = \frac{1}{4\pi}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \det\left(x, \frac{\partial \phi^{\pm}}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi^{\pm}}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = \frac{1}{4\pi x_3} dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Calculamos  $f^*\omega_2$  con  $(f_1, f_2, f_3) = (2(x^2 + y^2) - 1, 2(xu + yv), 2(yu - xv))$ , y operando:

$$f^*\omega_2 = \frac{1}{4\pi f_3} df_1 \wedge df_2 = \frac{1}{2\pi(yu - xv)} d(x^2 + y^2) \wedge d(xu + yv) = -\frac{1}{\pi} d(xdy + udv),$$

cuya primitiva evidente  $\alpha = \frac{-1}{\pi}(xdy + udv)$  vale en todo  $\mathbb{S}^3$  por continuidad. Finalmente:

$$\alpha \wedge d\alpha = \frac{1}{\pi^2}(xdy + udv) \wedge (dx \wedge dy + du \wedge dv) = \frac{1}{\pi^2}(xdy \wedge du \wedge dv + udv \wedge dx \wedge dy).$$

Al integrar, por simetría ambos sumandos dan el mismo resultado:

$$\text{Inv}_H(f) = \int_{\mathbb{S}^3} \alpha \wedge d\alpha = \frac{2}{\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} xdy \wedge du \wedge dv.$$

Resolvemos la integral con las coordenadas angulares  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,  $\beta, \gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ :

$$(x, y, u, v) = (\cos \gamma \cos \beta \cos \alpha, \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha, \cos \gamma \sin \beta, \sin \gamma).$$

De forma que

$$\text{Inv}_H(f) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \gamma \cos^3 \beta \cos^2 \alpha \, d\gamma d\beta d\alpha.$$

Recordando la relación entre la función *Gamma de Euler*,  $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ , y la función *beta*,  $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta,$$

junto con que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  y  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ , concluimos

$$\text{Inv}_H(f) = \frac{2}{\pi^2} 2\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \beta\left(\frac{1}{2}, 2\right) \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{2} = 1.$$

En particular,  $\text{Inv}_H(f) \neq 0$  implica que  $f$  es esencial. Más aún,  $\alpha \wedge d\alpha$  es un generador de  $H^3(\mathbb{S}^3)$  con integral 1, por lo comentado al final de la sección 13.  $\square$

## 16. FIBRACIONES DE HUREWICZ

El objetivo de esta sección es demostrar que todo fibrado es una fibrición de Hurewicz, y con ello probar sin cálculos que los fibrados de Hopf son esenciales. Antes introducimos la siguiente terminología: dados espacios topológicos  $E$ ,  $X$ ,  $Y$ , y aplicaciones  $f : E \rightarrow X$  y  $h : Y \rightarrow X$ , decimos que  $\tilde{h} : Y \rightarrow E$  es una *elevación de  $h$*  si  $f \circ \tilde{h} = h$ , o sea, si  $\tilde{h}$  hace conmutativo el triángulo:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{h} & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

**Definición 16.1.** Una aplicación  $f : E \rightarrow X$  es una *fibración de Hurewicz* o simplemente una *fibración* si toda homotopía  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  con una elevación  $\tilde{H}_0$  de  $H_0$  tiene una elevación  $\tilde{H}$  tal que  $(\tilde{H})_0 = \tilde{H}_0$ .

**Ejemplo 16.2.** El ejemplo más sencillo de fibrición es el de un producto  $E = X \times F$  y la proyección asociada,  $\pi : X \times F \rightarrow X$ , pues dados  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  y  $\tilde{H}_0 = (H_0, g_0) : Y \rightarrow X \times F$  basta definir  $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow X \times F$ ,  $(x, t) \mapsto (H_t, g_0)$ .

El resultado central es:

**Teorema 16.3** (Elevación de homotopías). *Todo fibrado  $F \rightarrow E \rightarrow_f X$  es una fibrición.*

*Demostración.* Este resultado es válido con gran generalidad (véase [Der59]), pero aquí lo vamos a utilizar para variedades así que supondremos que  $Y$  es segundo axioma y tiene particiones continuas de la unidad para simplificar la técnica de demostración habitual (por 1.4 las variedades las tienen de hecho diferenciables).

Se trata de conseguir  $\tilde{H}$  a partir de  $H$  y  $\tilde{H}_0$ , haciendo conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{H}_0} & E & \supset & f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F & & \tilde{x} & \xrightarrow{h} & (f(\tilde{x}), \zeta(\tilde{x})) \\
\downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f & & \downarrow f| & & \swarrow \pi & & \downarrow f & & \swarrow \pi \\
Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X & \supset & U & & & & f(\tilde{x}) & & 
\end{array}$$

En un conjunto  $S \subset Y \times [0, 1]$  tal que  $H(S) \subset U$  para cierto entorno trivializante, el homeomorfismo  $h$  permite trabajar en  $U \times F$  y el problema es trivial, como se ha visto en 16.2. Con esta idea se va a descomponer  $Y \times [0, 1]$  en conjuntos de este tipo sobre los que ir extendiendo  $\tilde{H}_0$ , con cuidado de que encolen bien para dar una  $\tilde{H}$  continua globalmente.

Fijado  $y \in Y$ ,  $\{y\} \times [0, 1]$  es compacto y dado que los entornos trivializantes recubren  $X$ , existe una cantidad finita  $n(y)$  de abiertos  $W_j^y \subset Y$  y  $V_j^y \subset [0, 1]$  tales que  $\{y\} \times [0, 1] \subset \bigcup_{j=1}^{n(y)} W_j^y \times V_j^y$  y  $H(W_j^y \times V_j^y) \subset U_j^y$  para un entorno trivializante  $U_j^y$ . Tomamos  $W^y = \bigcap_{j=1}^{n(y)} W_j^y$ , de forma que  $H(W^y \times V_j^y) \subset U_j^y$  para cada  $j$  y  $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^{n(y)} V_j^y$ . De nuevo por la compacidad del espacio métrico  $[0, 1]$ , existe un número  $\rho^y > 0$  de Lebesgue tal que  $0 < t' - t < \rho^y$  implica que  $[t, t'] \subset V_j^y$  para algún  $j$ . Por tanto, escogemos una partición  $\{t_0^y = 0 < t_1^y < \dots < t_{m(y)}^y = 1\}$  tal que para cada  $i = 1, \dots, m(y)$  es  $t_i^y - t_{i-1}^y < \rho^y$ , luego  $W^y \times [t_{i-1}^y, t_i^y] \subset W^y \times V_i^y$  para cierto  $V_i^y$ .

Los  $W^y$  recubren  $Y$  y por ser segundo axioma tenemos  $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} W^k$  para ciertos  $W^k = W^{y_k}$ , cada uno con una partición  $\{t_i^k\}_{i=0}^{m(k)}$ ; denotamos  $m(k) = m(y_k)$ ,  $t_i^k = t_i^{y_k}$ ,  $V_i^k = V_i^{y_k}$ ,  $U_i^k = U_i^{y_k}$ . Sea por último  $\{\varphi_k\}_k$  una partición continua de la unidad subordinada a  $\{W^k\}_k$ . Definimos las aplicaciones  $\psi_0 \equiv 0$  junto con  $\psi_k = \sum_{l=1}^k \varphi_l$ . Entonces,  $\psi_k : Y \rightarrow [0, 1]$  son continuas y cumplen  $\psi_0 = 0 \leq \psi_k \leq \psi_{k+1} \leq 1$ . Definimos los cerrados

$$Z_k = \{(y, t) \in Y \times [0, 1] : t \leq \psi_k(y)\},$$

que verifican:

- (1)  $Z_0 = Y \times \{0\} \subset Z_k \subset Z_{k+1}$  para todo  $k$ .
- (2)  $Y \times [0, 1] = \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k$ . En efecto, por local finitud de  $\{\varphi_k\}_k$ , cualquier  $y \in Y$  tiene un entorno  $\Omega_y$  con cierto  $k_0$  tal que  $\varphi_k|_{\Omega_y} \equiv 0$  para  $k \geq k_0$ , luego  $\psi_k \equiv \psi_{k_0} \equiv 1$  en  $\Omega_y$ . Entonces,  $\Omega_y \times [0, 1] \subset Z_{k_0}$  y los  $Z_k$  recubren  $Y \times [0, 1]$ .
- (3)  $Z_k \setminus Z_{k-1} = \{(y, t) : \psi_{k-1}(y) < t \leq \psi_k(y)\} \subset \overline{\{(y, t) : \varphi_k(y) > 0\}} = \overline{\text{sop}(\varphi_k) \times [0, 1]}$ . Dado que  $\text{sop}(\varphi_k) \subset W^k$ , tenemos la partición  $\{t_i^k\}_{i=0}^{m(k)}$  correspondiente. Entonces, para cada  $i$  se tiene además  $W^k \times [t_{i-1}^k, t_i^k] \subset W^k \times V_i^k \subset H^{-1}(U_i^k)$ .
- (4)  $(y, t) \in Z_k \setminus Z_{k-1}$  implica que  $\psi_{k-1}(y) < t$  y que  $(y, \psi_{k-1}(y)) \in Z_k \setminus Z_{k-1}$ . En efecto, al ser  $Y$  segundo axioma tendremos una sucesión  $(y_n, t_n) \rightarrow (y, t)$  tal que  $\psi_{k-1}(y_n) < t_n \leq \psi_k(y_n)$ . Por tanto, directamente  $\psi_{k-1}(y) < t$ , y además existe una sucesión creciente de naturales  $m_n$  tales que  $\psi_{k-1}(y_n) + 1/m_n \leq \psi_k(y_n)$ , por lo que  $(y, \psi_{k-1}(y)) \in Z_k \setminus Z_{k-1}$ .
- (5)  $Z_k = Z_{k-1} \cup \overline{Z_k \setminus Z_{k-1}}$  por ser los  $Z_k$  cerrados y crecientes, y además  $Z_{k-1} \cap \overline{Z_k \setminus Z_{k-1}} \subset \{(y, t) : t = \psi_{k-1}(y, t)\}$ , por (4).

Vamos a construir la elevación  $\tilde{H}$  a partir de  $\tilde{H}_0$  mediante elevaciones parciales  $\tilde{H}^k : Z_k \rightarrow E$  tales que  $\tilde{H}^k|_{Z_{k-1}} = \tilde{H}^{k-1}$ . Conseguidas las  $\tilde{H}^k$  como ahora veremos, obtenemos  $\tilde{H}$  tomando  $\tilde{H}(y, t) = \tilde{H}^k(y, t)$  para cualquier  $k$  con  $(y, t) \in Z_k$ , que siempre existe por (2). También por (2)  $\tilde{H}$  así definida es continua: toda  $y \in Y$  tiene un entorno  $\Omega_y$  y cierto  $k_0$  tal que  $\Omega_y \times [0, 1] \subset Z_{k_0}$ , luego  $\tilde{H} = \tilde{H}^{k_0}$  en  $\Omega_y \times [0, 1] \subset Z_{k_0}$ , en donde  $\tilde{H}^{k_0}$  es continua.

Para construir  $\tilde{H}^k$  razonamos por inducción. Ponemos  $\tilde{H}^0 := \tilde{H}_0$  definida en  $Z_0 = Y \times \{0\}$  y suponemos definida  $\tilde{H}^{k-1}$ ,  $k > 1$ . Por (5), basta definir  $\tilde{H}^k$  como  $\tilde{H}^{k-1}$  en  $Z_{k-1}$

y extenderla en los puntos de  $\overline{Z_k \setminus Z_{k-1}}$ , y esto lo haremos para cada cerrado

$$F_i^k := \overline{Z_k \setminus Z_{k-1}} \cap (Y \times [t_{i-1}^k, t_i^k]), \quad i = 0, \dots, m(k).$$

De nuevo por inducción, definimos  $\tilde{H}_0^k := \tilde{H}^{k-1} : Z_{k-1} \rightarrow E$  y suponemos dada  $\tilde{H}_{i-1}^k : Z_{k-1} \cup (\overline{Z_k \setminus Z_{k-1}} \cap (Y \times [0, t_{i-1}^k])) \rightarrow E$ ,  $i > 0$ . Entonces, por (3) se tiene

$$F_i^k \subset \text{sop}(\varphi_k) \times [t_{i-1}^k, t_i^k] \subset W^k \times V_i^k \subset H^{-1}(U_i^k)$$

para el abierto trivializante  $U_i^k$ . Se tiene el diagrama conmutativo, denotando  $x = f(\tilde{x})$ :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i^k) & \xrightarrow{h_i^k} & U_i^k \times F & & \tilde{x} & \xrightarrow{h_i^k} & (x, \zeta_i^k(\tilde{x})) \\ \downarrow f| & & \swarrow \pi & & \downarrow f & & \swarrow \pi \\ U_i^k & & & & x & & \end{array}$$

Sea  $(y, t) \in F_i^k$ . Se tiene  $(y, \psi_{k-1}(y)) \in Z_{k-1}$ , luego podemos calcular  $\tilde{H}_{i-1}^k(y, \psi_{k-1}(y))$ . Más aún, por hipótesis es  $t_{i-1}^k \leq t \leq \psi_k(y)$ , luego por la construcción  $\tilde{H}_{i-1}^k$  está definida en  $\{y\} \times [0, t_{i-1}^k]$  y podemos evaluar  $\tilde{H}_{i-1}^k(y, t_{i-1}^k)$ . En cualquier caso, está bien definido:

$$\tilde{x} = \tilde{H}_{i-1}^k(y, \text{int}\{\psi_{k-1}(y), t_{i-1}^k, \psi_k(y)\}),$$

donde  $\text{int}\{a, b, c\} = b$  si  $a \leq b \leq c$ , es el valor intermedio. Nótese que podemos suponer que el valor intermedio no es  $\psi_k(y)$  pues  $\psi_{k-1}(y) \leq \psi_k(y)$  y  $t_{i-1}^k \leq \psi_k(y)$ , y que  $\text{int}\{f, g, h\}$  es una función continua si lo son  $f, g, h$ . Finalmente, gracias al homeomorfismo  $h_i^k$  definimos:

$$\tilde{H}_i^k(y, t) = \begin{cases} (h_i^k)^{-1}(H(y, t), \zeta_i^k(\tilde{x})) & \text{si } (y, t) \in F_i^k = \overline{Z_k \setminus Z_{k-1}} \cap (Y \times [t_{i-1}^k, t_i^k]), \\ \tilde{H}_{i-1}^k(y, t) & \text{si } (y, t) \in Z_{k-1} \cup (\overline{Z_k \setminus Z_{k-1}} \cap (Y \times [0, t_{i-1}^k])). \end{cases}$$

Esta prescripción es continua en  $F_i^k$  por estar contenido en  $W^k \times V_i^k$  y ser todas las aplicaciones compuestas continuas. Para terminar, sólo queda ver que  $\tilde{H}_i^k$  está bien definida en la intersección de los dos cerrados donde la hemos definido, lo que también da su continuidad. Dado un tal  $(y, t)$ , si  $(y, t) \in Z_{k-1}$  por (5) cumple  $t = \psi_{k-1}(y)$ , lo cuál unido a  $t_{i-1}^k \leq t$  por estar en  $F_i^k$  da  $t = \text{int}\{\psi_{k-1}(y), \psi_k(y), t_{i-1}^k\}$  ya que  $t_{i-1}^k \leq t = \psi_{k-1}(y) \leq \psi_k(y)$ . Pero si  $(y, t) \notin Z_{k-1}$  entonces  $(y, t)$  está en  $\overline{Z_k \setminus Z_{k-1}} \cap (Y \times [0, t_{i-1}^k])$  y en  $F_i^k$ , luego ha de ser  $t = t_{i-1}^k$ , y de nuevo es  $t = \text{int}\{\psi_{k-1}(y), \psi_k(y), t_{i-1}^k\}$  ya que  $\psi_{k-1}(y) \leq t = t_{i-1}^k \leq \psi_k(y)$ . En cualquiera de los dos casos resulta que:

$$(h_i^k)^{-1}(H(y, t), \zeta_i^k(\tilde{x})) = (h_i^k)^{-1}(x, \zeta_i^k(\tilde{x})) = (h_i^k)^{-1}(h_i^k(\tilde{x})) = \tilde{x} = \tilde{H}_{i-1}^k(y, t). \quad \square$$

Por tanto, como las esferas son segundo axioma y tienen particiones de la unidad, los fibrados de Hopf son en realidad *fibraciones de Hopf*, como se las suele denominar.

## 17. SUMERSIONES ESENCIALES

Dedicamos la última sección a probar un teorema muy general de homotopía, que implica que los fibrados de Hopf son esenciales. En primer lugar:

**Definición 17.1.** Una *sumersión* es una aplicación diferenciable entre variedades  $f : M \rightarrow N$  cuya derivada es en todo punto suprayectiva.

Las sumersiones nos interesan aquí porque:

**Teorema 17.2** (de Ehresmann). *Una sumersión propia entre variedades sin borde  $f : M^m \rightarrow N^n$ , con  $N$  conexa, es un fibrado, luego por 16.3 una fibración.*

*Demostración.* La afirmación es local en  $N$  (por conexión de  $N$ , la fibra no dependerá del entorno), luego basta tratar el caso  $N = \mathbb{R}^n$ . Vamos a probar que es suprayectiva y que existe un difeomorfismo  $g : \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) \rightarrow M$  tal que  $f \circ g$  es la proyección sobre el primer factor. Adaptaremos el argumento de [Dun18, Theorem §8.5.10]

Dado que  $f$  tiene derivada suprayectiva, para cada  $a \in M$  podemos encontrar un entorno coordinado  $a \in U \subset M$  adaptado de forma que las coordenadas  $x : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  verifiquen  $f = \pi \circ x$ ,  $\pi$  la proyección sobre  $\mathbb{R}^n$ . Para ello basta localizar  $f$  en un entorno coordinado auxiliar, extender  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  y sumar a la localización de  $f$  una aplicación lineal que complete el rango de la derivada hasta ser  $m$ . El teorema de la función inversa nos da entonces las coordenadas buscadas. Nótese que  $f(U) = \pi(W)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Con dominios de este tipo  $U_i$  recubrimos todo  $M$ , con coordenadas  $x^{(i)}$ . Empleando una partición diferenciable de la unidad  $\{\theta_i\}_i$  subordinada a  $\{U_i\}_i$ , construimos los campos tangentes:

$$X^{(j)} = \sum_i \theta_i \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

que están bien definidos por la local finitud de  $\{\theta_i\}_i$  y ser  $\text{sop}(\theta_i) \subset U_i$ . Consideremos una curva integral maximal de  $X^{(j)}$ ,  $c : (\alpha, \beta) \rightarrow M$ . Se tiene:

$$(f \circ c)'(t) = d_{c(t)}f(c'(t)) = d_{c(t)}f(X_{c(t)}^{(j)}) = d_{c(t)}f\left(\sum_i \theta_i \frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}} \Big|_{c(t)}\right).$$

Pero en cada punto  $c(t)$  a lo sumo una cantidad finita de  $\theta_i$  son no nulas, luego podemos sacar el sumatorio fuera. Más aún,  $d_x f\left(\frac{\partial}{\partial x_j^{(i)}} \Big|_x\right) = \frac{\partial f \circ (x^{(i)})^{-1}}{\partial x_j} \Big|_{x^{(i)}(x)} = \frac{\partial \pi}{\partial x_j} \Big|_{x^{(i)}(x)} = e_j$ , luego:

$$(f \circ c)'(t) = \sum_i \theta_i(c(t)) e_j = e_j.$$

Es decir,  $f(c(t)) = f(c(0)) + te_j$ . Supongamos que  $\beta < +\infty$  (para  $\alpha > -\infty$  se razona igual), entonces  $\|f(c(t)) - f(c(0))\| \leq \beta$  para  $t \geq 0$ , o sea  $f(c(t))$  nunca abandona la bola compacta  $K$  centrada en  $f(c(0))$  de radio  $\beta$  para tiempos grandes. Pero  $f$  era propia luego  $c(t)$  nunca abandona el compacto  $f^{-1}(K)$ , y esto es imposible por el Lema del Escape 1.7.

Así, todos los flujos  $\varphi^{(j)}$  de  $X^{(j)}$  son completos. Más aún,  $f(M)$  es un abierto por ser unión de los  $f(U_i)$ , pero también es un cerrado por ser propia, luego de hecho  $f(M) = \mathbb{R}^n$ . En particular  $f^{-1}(0)$  es una variedad no vacía y sin borde, de dimensión  $m - n$ . Definimos  $g : \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) \rightarrow M$  por la fórmula diferenciable:

$$g(t_1, \dots, t_n, x) = \varphi_{t_1}^{(1)} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{(n)}(x)$$

Dado que  $\varphi_t^{(j)}(x) = c(t)$  cumple  $f \circ \varphi_t^{(j)}(x) = f(x) + te_j$ ,  $f \circ g(t_1, \dots, t_n, x) = t_1 e_1 + f \circ \varphi_{t_2}^{(2)} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{(n)}(x) = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n + f(x)$ . Pero  $x \in f^{-1}(0)$ , luego efectivamente  $f \circ g = \pi$ . Más aún,  $g$  tiene inversa diferenciable, ya que dada  $y \in M$ , definimos

$$t_j = f_j(y), \quad 1 \leq j \leq n, \quad x = \varphi_{-t_n}^{(n)} \circ \dots \circ \varphi_{-t_1}^{(1)}(y).$$

Esto define bien una inversa pues  $x \in f^{-1}(0)$ :  $f(x) = f \circ \varphi_{-t_n}^{(n)} \circ \dots \circ \varphi_{-t_1}^{(1)}(y) = -t_n e_n + f \circ \varphi_{-t_{n-1}}^{(n-1)} \circ \dots \circ \varphi_{-t_1}^{(1)}(y) = -(t_1 e_1 + \dots + t_n e_n) + f(y) = 0$ , puesto que  $t_j = f_j(y)$ .

En particular, las fibras  $f^{-1}(a)$  son una familia de variedades parametrizada por  $a \in \mathbb{R}^n$ , donde todas las variedades son difeomorfas: basta definir, para la anterior preimagen  $x$  de  $y$  tal que  $y = g(f(y), x)$ , el difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$ ,  $\phi(y) = g(f(y) + a, x)$  que

transforma  $f^{-1}(0)$  en  $f^{-1}(a)$  (difeomorfismo por ser una composición de  $\varphi^{(i)}$ ).  $\square$

Visto lo anterior obtenemos:

**Proposición 17.3.** *Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  una sumersión propia nulhomótopa entre variedades sin borde, y  $F = f^{-1}(y)$  la fibra sobre un punto  $y \in f(M)$ . Entonces la inclusión  $F \subset M$  induce un morfismo inyectivo  $H^*(M) \hookrightarrow H^*(F)$ .*

*En particular  $\dim H^p(M) \leq \dim H^p(f^{-1}(y))$  para cada  $p \geq 0$ , luego  $H^p(M) = 0$  para  $p > m - n$ .*

*Demostración.* Por hipótesis tenemos una homotopía  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que para cierto  $y_0 \in N$  es  $H_0 = f$  y  $H_1 \equiv y_0$ . Podemos suponer que  $N$  es conexa y que  $y_0 \in f(M)$ , ya que la imagen de  $H$  está contenida en una componente conexa de  $N$ : los caminos  $t \mapsto H_t(x)$  conectan los puntos de  $H(M \times [0, 1])$  con  $y_0$ . Por tanto, 17.2 dice que  $f$  es un fibrado con fibra  $F = f^{-1}(y)$  para  $y \in f(M)$ , que tomamos como  $y_0$ , luego una fibración.

Dado que  $H_0 = f$  tiene la elevación  $\tilde{H}_0 = \text{id}_M$ , existe una elevación  $\tilde{H} : M \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\tilde{H}_0 = \text{id}_M$  y  $f \circ \tilde{H} = H$ . En particular, es  $f \circ \tilde{H}_1 \equiv y_0$ , luego  $\tilde{H}_1(M)$  está contenido en la fibra  $F = f^{-1}(y_0)$ . Entonces,  $\tilde{H}_1$  es homótopa a la identidad como aplicación de  $M$  en  $M$ , luego induce la identidad en cohomología y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(M) & \xrightarrow{\tilde{H}_1^* = \text{id}_{H^p(M)}} & H^p(M) \\ \downarrow j^* & \nearrow \tilde{H}_1^* & \\ H^p(F) & & \end{array}$$

donde  $j$  es la inclusión  $F \subset M$ . De aquí se concluye que  $j^* : H^p(M) \rightarrow H^p(F)$  es inyectiva.  $\square$

En la situación anterior, por ser  $f$  propia podemos plantear que  $f$  sea además propiamente nulhomótopa, pero entonces  $M = H_1^{-1}(y_0)$  es compacta y en tal caso toda sumersión es propia. Por tanto:

**Proposición 17.4.** *Toda sumersión  $f : M^m \rightarrow N^n$  entre variedades sin borde, con  $M$  compacta y orientada, es esencial.*

*Demostración.* Si  $f$  fuese nulhomótopa, entonces por 17.3  $H_c^m(M) = H^m(M) = 0$  (puesto que  $m > m - n$ ). Pero dado que  $M$  es orientada y sin borde, 10.3 dice que  $H_c^m(M_\alpha) = \mathbb{R}$  para cada componente conexa  $M_\alpha$  de  $M$ , luego  $H_c^m(M) \neq 0$  y esto es una contradicción.  $\square$

Terminamos esta sección y la memoria viendo que el resultado anterior se aplica a las fibrationes de Hopf, de manera que las tres son esenciales:

**Proposición 17.5.** *Las fibrationes de Hopf  $f : \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ ,  $m = 2, 4, 8$ ,*

$$f(z_0, z_1) = (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2z_1^* z_0),$$

*son sumersiones, luego esenciales.*

*Demostración.* Se trata de ver que la derivada  $d_z f : T_z \mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow T_{f(z)} \mathbb{S}^m$  es suprayectiva en cualquier  $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{S}^{2m-1}$ . Dado que  $f$  es la restricción a  $\mathbb{S}^{2m-1}$  de la aplicación diferenciable  $F : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  dada por la misma fórmula,  $\ker(d_z f) = T_z \mathbb{S}^{2m-1} \cap \ker(d_z F)$  y basta comprobar que la dimensión de esa intersección es  $(2m - 1) - m = m - 1$ . Para

ello derivamos:

$$d_z F = \begin{pmatrix} 2\langle \cdot, z_0 \rangle & -2\langle \cdot, z_1 \rangle \\ 2z_1^*(\cdot) & 2(\cdot)^* z_0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\langle u, z_0 \rangle - 2\langle v, z_1 \rangle \\ 2z_1^* u + 2v^* z_0 \end{pmatrix},$$

donde en la primera fila tenemos el producto escalar usual y en la segunda las operaciones de  $\mathbb{F}$ , que son lineales. Dado que  $(u, v) \in T_z \mathbb{S}^{2m-1}$  si y sólo si  $\langle (z_0, z_1), (u, v) \rangle = 0$ , las ecuaciones de  $(u, v) \in T_z \mathbb{S}^{2m-1} \cap \ker(d_z F)$  son:

$$\begin{cases} \langle z_0, u \rangle + \langle z_1, v \rangle = 0, \\ \langle z_0, u \rangle - \langle z_1, v \rangle = 0, \\ z_1^* u + v^* z_0 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \langle z_0, u \rangle = 0, & (1 \text{ ecuación}), \\ \langle z_1, v \rangle = 0, & (1 \text{ ecuación}), \\ z_1^* u + v^* z_0 = 0, & (m \text{ ecuaciones}). \end{cases}$$

Para que  $\ker(d_z f)$  tenga dimensión  $m-1$  hemos de tener  $2m - (m-1) = m+1$  ecuaciones independientes de entre las  $m+2$  recogidas, y es claro que  $m+1$  es el número máximo pues la dimensión de  $T_{f(z)} \mathbb{S}^m$  es  $m$ . Si  $z_0 = 0$  entonces es  $z_1 \neq 0$  y multiplicando la segunda ecuación por  $(z_1^*)^{-1}$  se consigue:

$$\begin{cases} \langle z_1, v \rangle = 0, \\ z_1^* u = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \langle z_1, v \rangle = 0, \\ u = 0, \end{cases}$$

es decir,  $m+1$  ecuaciones independientes. Si  $z_0 \neq 0$  es:

$$\begin{cases} \langle z_0, u \rangle = 0, \\ \langle z_1, v \rangle = 0, \\ z_1^* u + v^* z_0 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \langle z_0, u \rangle = 0, \\ v + ((z_1^* u) z_0^{-1})^* = 0, \end{cases}$$

necesariamente por tener el segundo sistema  $m+1$  ecuaciones independientes y no poder haber más en el primero. Así, en ambos casos se sigue lo que queremos y hemos terminado.  $\square$

## REFERENCIAS

- [Der59] J. E. Derwent. «On the covering homotopy theorem». En: *Akad. Wetensch. Proc. Ser. A62 = Indag. Math.* 21 MR107858 54.00 (55.00) (1959), págs. 275-279.
- [MT97] I. Madsen y J. Tornehave. *From Calculus to cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes*. Primera edición. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 0521580595.
- [Hat01] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Primera edición. 2001. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [AT11] M. Abate y F. Tovena. *Geometria Differenziale*. Primera edición. Springer, 2011. ISBN: 97888470-19201.
- [Dun18] B. I. Dundas. *A Short Course in Differential Topology*. Primera edición. Cambridge University Press, 2018. ISBN: 9781108425797.
- [PJR19] J. D. Porras, M. Jaenada y J. M. Ruiz. *Topología algebraica muy elemental en dimensión muy baja*. Primera edición. Sanz y Torres, 2019. ISBN: 9788417765118.
- [GR20] J. M. Gamboa y J. M. Ruiz. *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*. Cuarta edición. Sanz y Torres, 2020. ISBN: 9788417765866.
- [ORR20] E. Outerelo, J. Á. Rojo y J. M. Ruiz. *Topología diferencial, un curso de iniciación*. Segunda edición. Sanz y Torres, 2020. ISBN: 9788417765842.