

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid



APLICACIONES DE LA TEORIA DE MORSE Y
DE LA CIRUGIA AL ESTUDIO DE
HIPERSUPERFICIES Y VARIEDADES DE
DIMENSION BAJA

Memoria presentada por
Pedro María González Manchón
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas



Archive

Dirigida por el Profesor D. Enrique Outerelo Domínguez,
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Madrid, Junio de 1.996

A mis padres.

A Cristina.

Contenido

Introducción	i-v
I Sobre inmersiones y subvariedades	1
1 F-inmersiones	6
2 F-subvariedades	15
3 F subvariedades y sumersiones	34
4 F-subvariedades y transversalidad	38
II Sobre la asociación de asas	51
1 Estructura diferenciable en la asociación de asas	53
2 Asas y 4-esferas exóticas	64
III Sobre hipersuperficies de R^n dadas como ceros de funciones	69
1 Construcción de funciones con buenas propiedades	72
2 Esferas en R^n y puntos críticos en la región exterior	87
IV Sobre el problema de Kirby de simplificación de enlaces referenciados	99
1 Enlaces referenciados de Lickorish y cálculo de Kirby	104
2 El teorema fundamental de la cirugía en dimensión 3	111
3 Cadenas simples	125
Bibliografía	141

INTRODUCCIÓN

Desde el año 1960 en que S. Smale demostró la Conjetura de Poincaré en dimensiones superiores a cuatro mediante la asociación de asas ([Sm]), esta técnica cobra especial importancia en el estudio de las variedades diferenciables. Por otro lado, la técnica de cirugía de Milnor y Thom ([Mi.1]), concebida en principio como algo independiente de la asociación de asas, es fácilmente formulable a partir de ésta.

La Teoría de Morse establece la íntima conexión que existe entre la asociación de asas (y por tanto la cirugía) y las funciones de Morse (aquéllas cuyos puntos críticos son no degenerados), conexión que es formulada en los llamados Teoremas de Deformación.

Esta memoria trata algunos problemas concernientes a los fundamentos de estas ideas (asociación de asas, cirugías y funciones de Morse), y en mayor medida, algunas de sus aplicaciones al estudio de las hipersuperficies del Espacio Euclídeo y de las variedades de dimensión baja.

Con relación a los fundamentos de la asociación de asas, la sección 1 del Capítulo II establece la existencia de una estructura diferenciable con borde anguloso en la variedad topológica obtenida por asociación de asas, y frente a esta estructura o frente a la estructura diferenciable con borde diferenciable definida usualmente por la técnica del redondeamiento de esquinas ([Mi.2]), se propone una *estructura diferenciable con borde anguloso generalizado* como la natural.

El Capítulo I se sitúa así en el contexto de las variedades diferenciables Banásicas con borde anguloso y de clase arbitraria. En el estudio de este tema, la noción de subvariedad definida a partir de las cartas adaptadas ([M.O.]) ha planteado diversos problemas, entre ellos el de la transitividad. La aportación fundamental que se lleva a cabo en esta materia es la introducción de una nueva definición de inmersión (F-inmersión) y a partir de ésta de

subvariedad (F-subvariedad), mostrando como estas nuevas nociones son las naturales en este contexto. Esta naturalidad es justificada por el sentido físico de las nuevas definiciones (véase la página 4), la simplicidad con que ahora se enuncian los resultados (véanse por ejemplo el Teorema 4.7 o la Proposición 2.20) y el hecho de que aquellos resultados que son esperados (y con la vieja definición no conseguidos) son ahora ciertos, como son el caso de la transitividad (Proposición 2.8), el hecho de poder sumergir las variedades en algún Espacio de Banach como subvariedad bien situada (Proposición 2.25) o el deducir que la intersección de dos subvariedades que se cortan transversalmente es una subvariedad, sin restricciones sobre la situación de las subvariedades (Proposición 4.22). Además, el nuevo concepto de inmersión aparece ahora como el concepto dual del de sumersión (Proposición 1.2).

Ahora bien, el no poder contar con las cartas adaptadas nos lleva a veces a demostraciones más complejas. Así, el primer resultado esencial es la creación de las cartas adaptadas a partir de una F-inmersión (Teorema 1.9), que nos permitirá la comparación del concepto de F-inmersión con el de inmersión. Haciendo uso de este resultado, se demuestra que los conceptos de F-subvariedad totalmente bien situada y de subvariedad totalmente bien situada coinciden (Teorema 2.17), y que toda subvariedad bien situada es una F-subvariedad (Teorema 2.18). El resultado anterior es de gran trascendencia: el de F-subvariedad es un concepto que generaliza al de subvariedad bien situada, requisito este último imprescindible para establecer la conexión entre subvariedades y transversalidad (véanse 7.1.14 y 7.1.15 de [M.O.]). De hecho, logramos probar (Teorema 4.7) que si una aplicación es transversal a una F-subvariedad Z , su imagen inversa es entonces una F-subvariedad, sin la hipótesis adicional de que Z esté bien situada.

El Capítulo I contiene además otro resultado no trivial (Teorema 2.23), el cual, formulado de modo impreciso, asegura que localmente toda F-subvariedad es F-subvariedad y subvariedad si agrandamos la variedad ambiente de modo adecuado. Por último, este capítulo muestra un interesante ejemplo de prueba delicada sobre sumersiones y F-subvariedades (Ejemplo 3.3).

Así pues, el Capítulo I y la sección 1 del Capítulo II pueden ser entendidos como un estudio de los fundamentos de la estructura diferenciable en la asociación de asas. El resto de la memoria está dedicada al análisis de algunas aplicaciones de la Teoría de Morse y la Cirugía al estudio de hipersuperficies y variedades de dimensión baja.

Así, en la sección 2 del Capítulo II, probamos un resultado que permite obtener cualquier hipotética esfera exótica de dimensión cuatro a partir de k cirugías disjuntas de tipo $(3, 2)$ en la suma conexa de k copias de $S^2 \times S^2$ (Teorema 2.1).

El Capítulo III está dedicado íntegramente al estudio de las hipersuperficies del Espacio Euclídeo. En un primer resultado (Teorema 1.13), se construye, para cada hipersuperficie compacta de R^{n+1} no necesariamente conexa, una función de Morse propia de R^{n+1} en R con un número finito de puntos críticos y que tiene a la hipersuperficie como nivel regular. Estas buenas propiedades de la función nos van a permitir estudiar la relación entre el tipo diferenciable (o topológico o de homotopía) de la hipersuperficie y los puntos críticos de la función en la región exterior que define la hipersuperficie, a pesar de la no compacidad y falta de variedad nivel de partida de dicha región exterior. Esto queda plasmado en el Teorema 2.1 (en la sección 2 del Capítulo III), el cual, dicho de modo impreciso, asegura que la hipersuperficie es una esfera si en la región exterior no existen puntos críticos.

A partir de este resultado deducimos el Corolario 2.5, el cual, formulado también de modo impreciso, asegura que en el caso de las superficies de R^3 , éstas son difeomorfas al toro si en la región exterior existe un único punto crítico. La importancia del resultado anterior radica más en la demostración que en la curiosa información que ofrece. Dicha demostración nos da un modo general de estudiar las hipersuperficies a partir de la región exterior y los Teoremas Clásicos de Deformación de la Teoría de Morse. Un bonito ejemplo del Corolario 2.5 es el Ejemplo 2.6, en el que aparecen infinitos puntos críticos en la región acotada por la superficie y sólo uno en la región exterior.

Señalar por último, respecto al Capítulo III, la existencia de dos resultados básicos usados repetidas veces a lo largo de este capítulo. Estos son el Lema 1.9, sobre funciones propias, y el Lema 2.4 sobre la conexión de niveles regulares de aplicaciones diferenciables.

El Capítulo IV vuelve a estar dedicado a las variedades de dimensión baja, en concreto a la dimensión tres. En él se aportan algunas ideas en torno al problema de Kirby de simplificación de enlaces referenciados. Nuestra idea consiste en señalar los enlaces referenciados de Lickorish ([L.2]) como canónicos o minimales, y dar un algoritmo, al menos para ciertas importantes familias de enlaces referenciados, que transforme dichos enlaces en enlaces referenciados de Lickorish. Este algoritmo se basa en un refinamiento del llamado Teorema Fundamental de la Cirugía en 3-variedades, reflejado en el Lema 2.12 y el Corolario 2.13. Dicho refinamiento se lleva a cabo con la introducción del concepto de autorreferencia de una curva cerrada simple en el toro sólido de género arbitrario

canónicamente incluido en R^3 , denotado por M_g (Definición 2.1), y la distinción que hacemos de un homeomorfismo de torsión y su inverso (Definición 2.7 y proposiciones anteriores).

A partir del concepto de autorreferencia se define el concepto de enlace totalmente incluido en M_g . Dicho de modo resumido, el Corolario 2.15 se ve entonces como un algoritmo para transformar en enlaces referenciados de Lickorish cualquier enlace referenciado totalmente incluido en M_g .

Ahora bien, ¿qué separa a un enlace referenciado arbitrario de un enlace totalmente incluido en M_g ? Este problema es abordado en la sección 3 (del Capítulo IV) para una importante familia de enlaces referenciados, a los que denominamos cadenas simples. (Estos enlaces incluyen, por ejemplo, los recubridores cíclicos de S^3 ramificados sobre el nudo trébol). El resultado fundamental de esta sección es el Teorema 3.9, el cual, a través de dos pasos bien diferenciados y el Corolario 2.15, transforma en enlace de Lickorish cualquier cadena simple. En general, la posibilidad de transformar en enlace de Lickorish cualquier enlace referenciado depende entonces de la habilidad en la aplicación de los dos pasos antes mencionados.

La belleza y sencillez de los enlaces referenciados de Lickorish nos han llevado a proponer a éstos como enlaces canónicos o minimales para las 3-variedades, pero sería de gran importancia (para el problema de decidir cuándo dos enlaces referenciados definen la misma 3-variedad) el poder comparar dos enlaces de Lickorish entre sí, aunque esta cuestión no es analizada en la memoria.

Nos gustaría, en otro orden de cosas, hacer algunas apreciaciones que permitiesen hacer una lectura de la memoria lo más amena posible. Cada capítulo está acompañado de una extensa introducción que permite leerlos por separado. En estas introducciones se detallan los resultados más importantes que se han obtenido, muchas veces junto a aquellas ideas que nunca constituyen "resultados" pero que nos parecen fundamentales en el modo de pensar matemático. La introducción incluye además una brevísima referencia a la bibliografía esencial (que no suficiente) del capítulo, salvo en el caso del capítulo II, para el cual la bibliografía es más extensa pero menos significativa. Finalmente, en las secciones en que están divididos los capítulos se detallan con rigor las demostraciones de los resultados obtenidos.

Quisiera por último agradecer a todos los que, de algún modo, han hecho posible este trabajo. Quiero acordarme en primer lugar de mi formación en Badajoz, en el primer ciclo de la carrera. No puedo dejar de nombrar a Paco Montalvo, Maribel, Jesús Castillo, Antonio Navarro, Carlos Benítez, M. Ángeles Mulero, Teresa y Juan B. Sancho y Ricardo Faro. Ellos, además de enseñarme Matemáticas, y a pesar de (o precisamente por) sus modos de pensar tan distintos, me transmitieron una cierta idea de trascendentalidad de las Matemáticas que aún conservo. En la Universidad Complutense de Madrid terminé el segundo ciclo y completé los cursos de doctorado. De esta etapa, aún sin terminar, quisiera agradecer su siempre disponibilidad y gran interés por enseñar bien las Matemáticas a los profesores Miguel Amores, Joaquín Arregui, J.M. Martínez Ansemil, M. Ángeles Prieto Yerro, Feliciano Serrano, José Manuel Gamboa, Fernando Bombal, Raquel Mallavibarrena, Eduardo Aguirre, Juan Tarrés, J.M. Rodríguez Sanjurjo y J.M. Masqué. El profesor J.M. Sánchez Abril me contestó un buen número de preguntas que le planteé durante este tiempo. A él le estoy especialmente agradecido. Creo que muy importante durante estos años ha sido sentirme a gusto en el Departamento de Geometría y Topología, sin olvidar a muchos compañeros del Departamento de Álgebra. Enseñarme a manejar los ordenadores es algo que le agradezco a todos los que durante los últimos meses se han paseado por la sala de ordenadores. Especialmente Luis M. Pozo me ha dedicado ingentes cantidades de horas. De Esther Gil Cid he recibido también una buena dosis de ayuda: el dibujo central de la página 138 es suyo.

He dejado para el final a D. Enrique Outerelo Domínguez, director de esta tesis. Mi agradecimiento a él tiene un buen montón de motivos. Algo que ahora considero esencial, y que he aprendido de él, es la paciencia a la hora de trabajar. Cuando la desesperación cunde ante algo que no acaba de salir, él te pide que borres la pizarra y te sientes, y entonces te sugiere “volver al principio”. Son incontables también las horas de trabajo que me ha dedicado, las inacabables horas de correcciones y un largo etcétera. Por todo esto, quiero dejar patente mi agradecimiento a su persona.

Capítulo I

SOBRE INMERSIONES Y SUBVARIETADES

Aunque pueda parecer paradójico, uno de los problemas que hoy en día ocupa al topólogo diferencial consiste en decidir qué tipo de espacios deben ser objeto de su estudio. De modo genérico, a estos espacios se les ha llamado variedades diferenciables.

La primera acotación de estos objetos se debe a Gauss. Así, una variedad era un subconjunto del Espacio Euclídeo de dimensión tres de modo que en cada punto existiese un plano tangente a dicho subconjunto. A estos objetos Gauss los llamó superficies. Riemann amplió esta categoría: ya no es necesario ver las variedades incluídas en un Espacio Euclídeo de un lado, y de otro no hay razón para limitar su dimensión. Con algunos matices, Riemann había introducido la noción de variedad diferenciable que hoy en día, siglo y medio después, sigue siendo la utilizada en la Física Matemática.

Posteriormente otras importantes posibilidades han sido introducidas: el borde diferenciable en la Teoría de Integración y la Topología de dimensión baja y la dimensión infinita en el Cálculo Variacional son dos ejemplos de este hecho.

En esta necesidad de solucionar las limitaciones de los espacios tratados, ha surgido el concepto de borde anguloso. Es, por ejemplo, el modo natural de tratar el producto de variedades cuando ambas tienen borde diferenciable. Cuando uno se introduce en el estudio de estas variedades observa que no se trata simplemente de añadir complicaciones técnicas a las variedades existentes, sino que hay una nueva sensación de lo que puede ser el borde de una variedad (por ejemplo, cuando el espacio tangente en un punto del borde

es definible con curvas que se mueven por el borde exclusivamente).

En este contexto de las variedades con borde anguloso situamos este primer capítulo. En él, esencialmente, se da contestación al siguiente interrogante: ¿qué debemos entender por subvariedad de una variedad con borde anguloso?

La referencia básica de este capítulo es [M.O.]. Las variedades diferenciables Banásicas de clase arbitraria y con borde anguloso son descritas en su primer capítulo. Cualquier concepto, notación o resultado usado del que no se dé una referencia exacta puede encontrarse allí. Nuestro punto de partida es el estudio de su tercer capítulo, concerniente al tema de las inmersiones y subvariedades. Como en cualquier caso una subvariedad es definible a partir del concepto de inmersión, será precisamente en este concepto de inmersión en el que centraremos primeramente nuestro análisis.

Recordemos previamente las definiciones y resultados básicos dados en [M.O.]:

Definición de inmersión (3.2.1 de [M.O.]) Sean X y X' variedades diferenciables de clase p , $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y $x \in X$. Diremos que f es una inmersión de clase p en x si existen $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ carta de X centrada en x , $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$ con $f(U) \subset U'$, E es subespacio lineal cerrado de E' admitiendo suplementario topológico en E' , $\phi(U) \subset \phi'(U')$ y $\phi' \circ f|_U \circ \phi^{-1} = j : \phi(U) \hookrightarrow \phi'(U')$ es la inclusión.

Definición de subvariedad (3.1.1 de [M.O.]) Sea X una variedad diferenciable de clase p y X' un subconjunto de X . Entonces X' es una subvariedad de clase p de X si para cada $x' \in X'$ hay una carta $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ de X centrada en x' , un subespacio lineal cerrado E' de E que admite un suplementario topológico en E y un sistema finito y linealmente independiente Λ' de elementos de $\mathcal{L}(E', R)$, tal que $\phi(U \cap X') = \phi(U) \cap (E')_{\Lambda'}^+$, y este conjunto es un abierto de $(E')_{\Lambda'}^+$, (de una tal carta de X se dice que está adaptada al subconjunto X' en el punto x' mediante (E', Λ')).

En tal caso se construye una estructura diferenciable de clase p sobre cada subvariedad, que es coherente con la topología inducida:

Proposición (3.1.5 de [M.O.]) Sea X' una subvariedad de clase p de X . Entonces existe una única estructura diferenciable de clase p en X' tal que para cada $x' \in X'$ y cada carta $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ de X adaptada a X' en x' mediante (E', Λ') , $C' = (U \cap X', \phi|_{U \cap X'}, (E', \Lambda'))$ es una carta de esta estructura.

Ambos conceptos quedan relacionados por el siguiente resultado (el enunciado ha sido modificado):

Proposición (3.2.4 de [M.O.] Sean X' un subconjunto de X , variedad diferenciable de clase p y $j : X' \hookrightarrow X$ la aplicación inclusión. Entonces X' es una subvariedad diferenciable de clase p de X si y sólo si existe una estructura diferenciable de clase p en X' cuya topología es la inducida por X y $j : X' \hookrightarrow X$ es inmersión en todo punto de X' . En tal caso, dicha estructura diferenciable es única.

Nuestra aportación aquí es la introducción de un nuevo concepto de subvariedad: no se trata simplemente de una definición más y el análisis de sus propiedades, comparadas con las que aparecen en [M.O.], sino que pensamos que este es el **concepto natural** para subvariedades que debe sustituir a aquel otro. Esto es, por supuesto, una opinión subjetiva en un primer momento. El propósito de este capítulo es convencer al lector de este hecho.

Definición 1.1 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y $x \in X$. Se dice que f es una F -inmersión C^p en x si para toda variedad diferenciable Z de clase p y toda aplicación $h : X \rightarrow Z$ de clase p existen un entorno abierto V^x de x en X , un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' y una aplicación $g : V^{f(x)} \rightarrow Z$ de clase p de modo que $f(V^x) \subset V^{f(x)}$ y $h|_{V^x} = g \circ f|_{V^x}$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 V^x & \xrightarrow{f|_{V^x}} & V^{f(x)} \\
 & \searrow h|_{V^x} & \swarrow g \\
 & & Z
 \end{array}$$

Esta es la definición básica, y a partir de ella damos el concepto de F -subvariedad:

Definición 2.1 Un subconjunto Y de una variedad diferenciable X de clase p se dice que es una F -subvariedad de clase p de X si existe una estructura diferenciable de clase p en Y cuya topología asociada es la que induce X y la inclusión natural $j : Y \hookrightarrow X$ es F -inmersión C^p en todo punto de Y .

Obsérvese la simplicidad de las nuevas definiciones: éstas no requieren ahora el uso de cartas.

Además el nuevo concepto de F-subvariedad está dotado de un claro sentido físico (de ahí el uso de la letra F para distinguir los nuevos conceptos de los usados en [M.O.]). Si X , Y y Z son variedades diferenciables de clase p e Y es F-subvariedad C^p de X , $\Theta_{X,Y}^Z$ denotará el haz de las funciones diferenciables de X en Z que se *anulan* en Y : el sentido físico de una variedad diferenciable queda reflejado en los haces de funciones diferenciables de ésta en cualquier otra variedad. Entonces, si Y es F-subvariedad de X , se tiene la exactitud de la sucesión corta de haces

$$0 \rightarrow \Theta_{X,Y}^Z \rightarrow \Theta_X^Z \rightarrow \Theta_Y^Z \rightarrow 0$$

para cualquier variedad diferenciable Z de clase p , es decir, las aplicaciones diferenciables sobre la F-subvariedad serán localmente la restricción de las aplicaciones diferenciables sobre la variedad y ninguna otra más. Este sentido físico no se tiene para las subvariedades (véase el ejemplo 1.7).

Por otro lado, los resultados a los que dan lugar los nuevos conceptos se enuncian ahora con una enorme simplicidad, y aquellos resultados que son esperados (y con la anterior definición no conseguidos, como por ejemplo el de la transitividad) son ahora ciertos. Ahora bien, el no poder contar con las cartas adaptadas nos lleva a veces a demostraciones más complejas, algunas de gran dificultad técnica. El primero de estos resultados es la "creación" de las cartas a partir de una F-inmersión, comparando este concepto con el de inmersión. Este es el resultado esencial de la sección 1:

Teorema 1.9 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación C^p y $x \in X$. Supongamos que

- 1)- f preserva el borde localmente en x .
- 2)- f preserva el índice de los vectores tangentes interiores en x .

En estas hipótesis, f es F-inmersión C^p en x si y sólo si f es inmersión C^p en x .

En la sección 2, basándonos en el Teorema 1.9 y en bonitas combinaciones geométricas de los vectores interiores del borde anguloso, se comparan de modo exhaustivo los conceptos de F-subvariedad y subvariedad. Previamente recordamos las nociones de estar bien situado y totalmente bien situado:

Definición 2.16 Si X es F-subvariedad (o subvariedad) C^p de X' , se dice que está bien situada si $\partial X = \partial X' \cap X$, y se dice que está totalmente bien situada si $ind_X(x) = ind_{X'}(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 2.17 Sean X' una variedad diferenciable de clase p y X un subconjunto de X' . Entonces X es F -subvariedad diferenciable C^p totalmente bien situada de X' si y sólo si X es subvariedad diferenciable C^p totalmente bien situada de X' .

Teorema 2.18 Toda subvariedad diferenciable bien situada es F -subvariedad.

El resultado anterior es de gran trascendencia: el de F -subvariedad es un concepto que generaliza el de subvariedad bien situada, definición esta última imprescindible para establecer la conexión entre subvariedades y transversalidad (véanse 7.1.14 y 7.1.15 de [M.O.]). De hecho logramos probar (sin las hipótesis adicionales sobre la situación de la subvariedad -véase 7.1.14 de [M.O.]-) el siguiente resultado, test definitivo de las nuevas definiciones:

Teorema 4.7 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación C^p transversal a una F -subvariedad diferenciable Z de clase p de Y . Entonces $f^{-1}(Z)$ es F -subvariedad diferenciable de clase p de X .

Por supuesto habrá que definir "transversalidad a una F -subvariedad", pero a diferencia de lo que ocurre con los nuevos conceptos de inmersión y subvariedad, las modificaciones necesarias para la nueva definición no son en modo alguno esenciales. Aún así, para facilitar la lectura y evitar confusiones, utilizaremos el término F -transversalidad para referirnos a la transversalidad a F -subvariedades, e introduciremos de modo conciso aunque sin demostraciones aquellos resultados básicos que usaremos en la demostración del Teorema 4.7. Esto se hará en la sección 4.

La sección 2 contiene además otro importante resultado:

Teorema 2.23 Sean U' un entorno abierto de 0 en $(E')_{\Lambda}^+$, y $h : U' \rightarrow E_{\Lambda}^+$ una F -inmersión de clase p en 0 con $h(0) = 0$. Entonces existe $\Lambda'' \subset \Lambda$ tal que $h : U' \rightarrow E_{\Lambda''}^+$ es inmersión y F -inmersión de clase p en 0 .

Dicho de modo impreciso, esto significa, al menos localmente, que toda F -subvariedad es F -subvariedad y subvariedad si se agranda la variedad ambiente adecuadamente.

Por último, la sección 3 muestra un ejemplo no trivial del siguiente hecho:

Ejemplo 3.3 Si una aplicación de clase p es sumersión en todos los puntos de la imagen inversa de una F -subvariedad, para poder asegurar que esta imagen inversa es F -subvariedad, necesariamente la aplicación ha de preservar el borde en estos puntos localmente.

1 F-INMERSIONES

Definición 1.1 Sean X y X' variedades diferenciables de clase p , $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y $x \in X$. Diremos que f es una F -inmersión C^p en x si para toda variedad diferenciable Z de clase p y toda aplicación $h : X \rightarrow Z$ de clase p existen un entorno abierto V^x de x en X , un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' y una aplicación $g : V^{f(x)} \rightarrow Z$ de clase p de modo que $f(V^x) \subset V^{f(x)}$ y $h|_{V^x} = g \circ f|_{V^x}$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 V^x & \xrightarrow{f|_{V^x}} & V^{f(x)} \\
 & \searrow h|_{V^x} & \swarrow g \\
 & & Z
 \end{array}$$

Proposición 1.2 Sea $f : X \rightarrow X'$ una aplicación C^p , con $p \geq 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f es F -inmersión C^p en x .
- Existen un entorno abierto W^x de x en X , un entorno abierto $W^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' y una aplicación $\sigma : W^{f(x)} \rightarrow W^x$ de clase p con $f(W^x) \subset W^{f(x)}$ y $\sigma \circ f|_{W^x} = 1_{W^x}$.

Demostración: b) \Rightarrow a) Sean Z una variedad diferenciable C^p y $h : X \rightarrow Z$ una aplicación C^p . Por hipótesis existen W^x entorno abierto de x en X , $W^{f(x)}$ entorno abierto de $f(x)$ en X' con $f(W^x) \subset W^{f(x)}$ y existe $\sigma : W^{f(x)} \rightarrow W^x$ aplicación de clase p con $\sigma \circ f|_{W^x} = 1_{W^x}$. Tomamos $V^x = W^x$, $V^{f(x)} = W^{f(x)}$ así que $f(V^x) \subset V^{f(x)}$ y definimos $g = h|_{V^x} \circ \sigma$. Entonces $h|_{V^x} = h|_{V^x} \circ 1_{V^x} = h|_{V^x} \circ \sigma \circ f|_{W^x} = g \circ f|_{V^x}$.

a) \Rightarrow b) Por hipótesis, para la variedad diferenciable $Z = X$ y la aplicación $h = 1_X$, existen V^x entorno abierto de x en X , $V^{f(x)}$ entorno abierto de $f(x)$ en X' con $f(V^x) \subset V^{f(x)}$ y existe $g : V^{f(x)} \rightarrow X$ aplicación C^p con $g \circ f|_{V^x}$ la inclusión $j : V^x \hookrightarrow X$.

Tomamos $W^{f(x)} = g^{-1}(V^x)$ entorno abierto de $f(x)$ en $V^{f(x)}$, y por tanto en X' (nótese que $f(x) \in g^{-1}(V^x)$ pues $f(x) \in V^{f(x)}$ y $g(f(x)) = x$), y tomamos $W^x = V^x$. Es claro que $f(W^x) \subset W^{f(x)}$ (si $y \in W^x = V^x$, $f(y) \in V^{f(x)}$ y $g(f(y)) = y \in V^x$). Consideramos entonces $\sigma = g|_{W^{f(x)}} : W^{f(x)} \rightarrow W^x$ C^p . Ahora, si $y \in W^x$, entonces $\sigma(f(y)) = g(f(y)) = y$.

□

La caracterización de F-inmersión dada mediante la anterior proposición evidencia como este concepto es dual del de sumersión: una F-inmersión es aquella aplicación que localmente funciona como sección de una sumersión. Por otro lado, veremos en la sección 2 como la definición de F-inmersión provee de sentido físico a las F-subvariedades.

Comparamos ahora los conceptos dados de inmersión.

Proposición 1.3 Sean $f : X \rightarrow X'$ aplicación C^p con $p \geq 1$ y $x \in X$ con $f(x) \in \text{Int}(X')$. Entonces, si f es F-inmersión C^p en x , f es inmersión C^p en x ($p \in \mathbb{N}$ si $x \in \partial X$ y $T_x X$ es infinito dimensional).

Demostración: Como $f(x) \in \text{Int}(X')$, el resultado es consecuencia directa del siguiente lema y de 3.2.6 de [M.O.]. □

Lema 1.4 Sean $f : X \rightarrow X'$ C^p y $x \in X$. Entonces, si f es F-inmersión C^p en x , $T_x f$ es inyectiva y $T_x f(T_x X)$ admite suplementario topológico en $T_{f(x)} X'$.

Demostración: Es consecuencia directa de la primera proposición y de resultados básicos sobre suplementarios topológicos: por la proposición 1.2, existen un entorno abierto W^x de x en X , un entorno abierto $W^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' y una aplicación $\sigma : W^{f(x)} \rightarrow W^x$ de clase p con $f(W^x) \subset W^{f(x)}$ y $\sigma \circ f|_{W^x} = 1_{W^x}$. Luego $T_x(1_{W^x}) = T_{f(x)} \sigma \circ T_x(f|_{W^x})$ así que $T_x(f|_{W^x})$ (y por tanto $T_x f$) es inyectiva. Veamos que $\text{Ker}(T_{f(x)} \sigma)$ es suplementario topológico de $T_x f(T_x X)$ en $T_{f(x)} X'$.

a) $\text{Ker}(T_{f(x)} \sigma)$ es obviamente cerrado de $T_{f(x)} X'$.

b) $T_x f(T_x X)$ es cerrado de $T_{f(x)} X'$: si $\{T_x f(v_n)\}$ converge a $w \in T_{f(x)} X'$, entonces $\{v_n\} = \{T_{f(x)} \sigma \circ T_x f(v_n)\}$ converge a $T_{f(x)} \sigma(w) \in T_x X$ así que $w \in T_x f(T_x X)$.

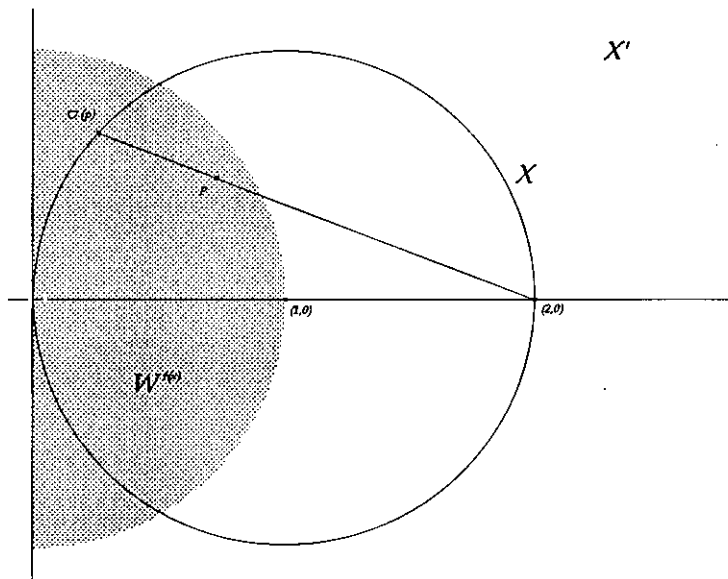
c) $T_x f(T_x X) \cap \text{Ker}(T_{f(x)} \sigma) = 0$ pues si $w \in T_x f(T_x X)$, $w = T_x f(v)$ con $v \in T_x X$, así que $T_{f(x)} \sigma(w) = T_{f(x)} \sigma \circ T_x f(v) = v$. Si además $w \in \text{Ker}(T_{f(x)} \sigma)$, entonces $v = 0$ y por tanto $w = 0$.

d) $T_{f(x)} X' = T_x f(T_x X) + \text{Ker}(T_{f(x)} \sigma)$: dado $w \in T_{f(x)} X'$, sea $v = T_{f(x)} \sigma(w) \in T_x X$. Entonces $w = T_x f(v) + (w - T_x f(v))$ con $T_x f(v) \in T_x f(T_x X)$ y $T_{f(x)} \sigma(w - T_x f(v)) = T_{f(x)} \sigma(w) - v = 0$. □

Ejemplo 1.5 La hipótesis $f(x) \in \text{Int}(X')$ es necesaria en la anterior proposición. Sean las variedades diferenciables de clase infinito

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 = 1\} \text{ y } X' = (\mathbb{R}^2)_{p_1}^+$$

y sea $f = j : X \hookrightarrow X'$ la inclusión, que es una aplicación C^∞ . Se tiene que f no es inmersión C^1 en $x = (0, 0)$, pero sí es F -inmersión C^∞ en x .



Que f no es inmersión C^1 en x se comprueba de modo análogo a lo que se hace en 3.2.7 de [M.O.]. Para probar que f es F -inmersión C^∞ en x , probamos b) de 1.2, tomando $W^x = W^{f(x)} \cap X$ donde

$$W^{f(x)} = \{(x, y) \in X' / x^2 + y^2 < 1\}$$

y $\sigma : W^{f(x)} \rightarrow W^x$ viene dada por

$$\sigma(x, y) = \left(\frac{2y^2}{(2-x)^2 + y^2}, \frac{2y(2-x)}{(2-x)^2 + y^2} \right)$$

Proposición 1.6 Sean $f : X \rightarrow X'$ aplicación C^p y $x \in \text{Int}(X)$. Entonces, si f es inmersión C^p en x , f es también F -inmersión C^p en x .

Demostración: Por hipótesis existen $C = (U, \phi, E)$ carta de X centrada en x , $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$ con $f(U) \subset U'$ y E subespacio lineal (cerrado) de E' admitiendo suplementario topológico en E' con $\phi' \circ f|_U \circ \phi^{-1} = j : \phi(U) \hookrightarrow \phi'(U')$ la aplicación inclusión. Sea F un suplementario topológico de E en E' y sea $\Theta : E \times F \rightarrow E'$ el homeomorfismo lineal dado por $\Theta(u, v) = u + v$. Como $\phi(U)$ es abierto de E , $\phi(U) \times F$ es abierto de $E \times F$, $\Theta(\phi(U) \times F)$ es abierto de E' y por tanto $\Theta(\phi(U) \times F) \cap \phi'(U')$ es abierto de $\phi'(U')$ así que de $(E')_{\Lambda'}^+$, y por supuesto contiene al cero.

Tomamos $W^x = U$, $W^{f(x)} = (\phi')^{-1}(\Theta(\phi(U) \times F) \cap \phi'(U'))$. Desde luego W^x es un entorno abierto de x en X y $W^{f(x)}$ es un entorno abierto de $f(x)$ en X' . Veamos que $f(W^x) \subset W^{f(x)}$. Sea $y \in W^x$. Claramente $f(y) \in U'$ y lo que queremos ver es que $\phi'(f(y)) \in \Theta(\phi(U) \times F) \cap \phi'(U')$, o sea que $\Theta^{-1}(\phi'(f(y))) \in \phi(U) \times F$. Pero esto ocurre si (y sólo si) $\Theta^{-1}(j \circ \phi(y)) \in \phi(U) \times F$, o lo que es lo mismo, $(\phi(y), 0) \in \phi(U) \times F$, lo que es obvio.

Definimos σ como la composición

$$\sigma : W^{f(x)} \xrightarrow{\phi'|_{W^{f(x)}}} \Theta(\phi(U) \times F) \cap \phi'(U') \xrightarrow{\Theta^{-1}|} \phi(U) \times F \xrightarrow{p_1} \phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U = W^x$$

que es trivialmente C^p . Veamos que $\sigma \circ f|_{W^x} = 1_{W^x}$ y se concluiría por 1.2. Sea $y \in W^x = U$; entonces

$$\begin{aligned} \sigma(f(y)) &= \phi^{-1}(p_1(\Theta^{-1}(\phi'(f(y)))))) = \phi^{-1}(p_1(\Theta^{-1}(j(\phi(y)))))) = \\ &= \phi^{-1}(p_1(\phi(y), 0)) = \phi^{-1}\phi(y) = y. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.7 La hipótesis $x \in \text{Int}(X)$ es necesaria en la anterior proposición. Sean las variedades diferenciables de clase C^∞ $X = [0, 1)$ y $X' = (-1, 1)$ y sea $f = j : X \hookrightarrow X'$ la aplicación inclusión, que es C^∞ . Entonces f es inmersión C^∞ en $x = (0, 0) \in X$ pero no es F-inmersión C^1 en x .

Trivialmente f es inmersión C^∞ en x . Que f no es F-inmersión C^1 en x será deducido de un resultado posterior, que asegura que las F-inmersiones preservan el borde.

Obsérvese que para la subvariedad $[0, 1)$ de $(-1, 1)$ no se tiene el sentido físico de las F-subvariedades.

El siguiente teorema vuelve a comparar los conceptos de inmersiones, pero ahora lo hará en una situación no trivial. Además nos llevará al resultado análogo al de sumersiones que se tiene en 4.1.13 de [M.O.]. Esta analogía es completa teniendo en cuenta el siguiente resultado, interesante en sí mismo.

Proposición 1.8 Sean $f : X \rightarrow X'$ aplicación C^p y $x \in X$. Supongamos que f es sumersión C^p en x y que existe un entorno W^x de x en X con $f(W^x \cap \partial X) \subset \partial X'$. Entonces $ind(v) = ind(T_x f(v))$ para todo $v \in (T_x X)^i$. (Para la definición de $(T_x X)^i$, véase la pág.68 de [M.O.]

Demostración: Por 4.1.13 (a \Leftrightarrow d) de [M.O.] existe un entorno V^x de x en X tal que f es sumersión C^p en y para todo $y \in V^x$ y además $f(V^x \cap \partial X) \subset \partial X'$. Se sigue de 4.1.14 de [M.O.] que para todo $y \in V^x$ $ind(y) = ind(f(y))$ [*]. Por 4.1.13 (a \Rightarrow c) de [M.O.] existen $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ carta de X centrada en x con $U \subset V^x$, $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$, $f(U) \subset U'$, existe $q \in \mathcal{L}(E, E')$ sobreyectiva con $Ker(q)$ admitiendo suplementario topológico en E tal que $q(\phi(U)) \subset \phi'(U')$ y $\phi' \circ f|_U \circ \phi^{-1} = q|_{\phi(U)}$.

Sea $w \in (T_x X)^i$ y veamos que $ind(w) = ind(T_x f(w))$. Para ello tómesese $v \in E_\Lambda^+$ con $\Theta_C^x(v) = w$ y un $\epsilon > 0$ con $\epsilon v \in \phi(U)$. Entonces

$$\begin{aligned} ind(w) &= ind_{E_\Lambda^+}(v) = ind_{E_\Lambda^+}(\epsilon v) = ind_X(\phi^{-1}(\epsilon v)) \stackrel{[*]}{=} ind_{X'}(f(\phi^{-1}(\epsilon v))) = \\ &= ind_{E_{\Lambda'}^+}(\phi'(f(\phi^{-1}(\epsilon v)))) = ind_{E_{\Lambda'}^+}(q(\epsilon v)) = ind_{E_{\Lambda'}^+}(q(v)) = \\ &= ind_{E_{\Lambda'}^+}(D(\phi' \circ f|_U \phi^{-1})(0)(v)) = \\ &= ind(\Theta_{C'}^{f(x)}(D(\phi' \circ f|_U \phi^{-1})(0)(v))) = ind(T_x f(w)). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.9 Sean $f : X \rightarrow X'$ aplicación C^p y $x \in X$. Supongamos que:

1)- Existe un entorno V^x de x en X con $f(V^x \cap \partial X) \subset \partial X'$ (es decir, f preserva el borde localmente en x).

2)- Para todo $v \in (T_x X)^i$ se cumple que $ind(v) = ind(T_x f(v))$ (por 1.6.17 de [M.O.] se cumple que $T_x f((T_x X)^i) \subset (T_{f(x)} X')^i$).

En estas hipótesis, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f es una F -inmersión C^p en x .
 b) $T_x f$ es inyectiva y $T_x f(T_x X)$ admite suplementario topológico en $T_{f(x)} X'$.
 c) f es una inmersión C^p en x .

Demostración:

a) \Rightarrow b) Es el lema 1.4, sin necesidad de suposiciones.

b) \Leftrightarrow c) Véase 3.2.12 de [M.O.].

c) \Rightarrow a) Sólo usa la suposición 2) -y entonces la 1) se cumple-.

Por ser f inmersión C^p en x , existen $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ carta de X centrada en x , $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$, con $f(U) \subset U'$, E es subespacio lineal de E' admitiendo suplementario topológico en E' , $\phi(U) \subset \phi'(U')$ y $\phi' \circ f|_U \circ \phi^{-1} = j : \phi(U) \hookrightarrow \phi'(U')$ la aplicación inclusión (en particular, al ser $j = D(\phi' \circ f|_U \circ \phi^{-1})(0)$ y suponer 2), tendríamos que f preserva localmente el borde en x). La demostración se basa en la siguiente afirmación:

Existe un subespacio lineal F_2 de E' con $E' = E \oplus_T F_2$ tal que si $\Theta : E \times F_2 \rightarrow E'$ es el homeomorfismo lineal que lleva (v, w) a $v + w$, entonces $(E \times F_2)_{\Lambda', \Theta}^+ = E_{\Lambda}^+ \times F_2$ (la prueba de este hecho sigue las líneas de las págs. 138 y 139 de [M.O.]).

Dividimos la demostración de esta afirmación en cuatro pasos:

$$I) E_{\Lambda}^+ = (E')_{\Lambda'}^+ \cap E$$

Claramente $\text{card}(\Lambda) = \text{ind}(x) = \text{ind}(0_x) = \text{ind}(0_{f(x)}) = \text{card}(\Lambda') = k$ así que $E = E_{\Lambda}^0 \oplus_T \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ con $x_i \in E$, $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$ donde $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ y $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle z_1, \dots, z_k \rangle$ con $z_i \in E'$, $\lambda'_i(z_j) = \delta_{ij}$ donde $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_k\}$ (proposición 1.1.4 de [M.O.]).

Por supuesto $x_i \in E_{\Lambda}^+ \subset (E')_{\Lambda'}^+$, pues f es inmersión C^p en X , y por 2) $x_i = e_i + a_{j_i} z_{j_i}$ con $e_i \in (E')_{\Lambda'}^0$, $a_{j_i} > 0$, $j_i \in \{1, \dots, k\}$, $j_i \neq j_{i'}$ si $i \neq i'$.

Dado $y \in (E')_{\Lambda'}^+ \cap E$, $y = t + \beta_1(e_1 + a_{j_1} z_{j_1}) + \dots + \beta_k(e_k + a_{j_k} z_{j_k})$ donde $t \in E_{\Lambda}^0 \subset (E')_{\Lambda'}^0$, (de nuevo, la última inclusión es por ser f inmersión), $0 \leq \lambda'_{j_i}(y) = \beta_i a_{j_i}$ así que $\beta_i \geq 0$ pues $a_{j_i} > 0$ y por tanto $y \in E_{\Lambda}^+$ (como ejercicio, que no se requiere en el resto de la demostración, puede comprobarse que $(E')_{\Lambda'}^0 \cap E = E_{\Lambda}^0$).

II) Existe $\{y_1, \dots, y_k\} \subset E$ con $E = E_{\Lambda}^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_k \rangle$ y $\lambda'_i(y_j) = \delta_{ij}$ de modo que $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_k \rangle$.

$\{y_1, \dots, y_k\}$ se consigue reordenando $\left\{\frac{x_1}{a_{j_1}}, \dots, \frac{x_k}{a_{j_k}}\right\}$. En efecto, en I) la biyección $\{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ que lleva i a j_i definida por la condición $x_i = e_i + a_{j_i} z_{j_i}$ puede tomarse la identidad reordenando previamente $\{x_1, \dots, x_k\}$ pues entonces $\lambda'_j \left(\frac{x_i}{a_i}\right) = \lambda'_j \left(\frac{x_i}{a_i} + z_i\right) = \delta_{ij}$.

III) Existe un subespacio lineal F_2 de E' con $E' = E \oplus_T F_2$ tal que $F_2 \subset (E')_{\Lambda'}^0$.

Sea H un suplementario topológico de E en E' y G un suplementario topológico de E_{Λ}^0 en $(E')_{\Lambda'}^0$, así que $E' = E \oplus_T H$ y $(E')_{\Lambda'}^0 = E_{\Lambda}^0 \oplus_T G$. Por II) se tiene $\{y_1, \dots, y_k\} \subset E$ con $E = E_{\Lambda}^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_k \rangle$ y $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_k \rangle$. Entonces $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_k \rangle = (E_{\Lambda}^0 \oplus_T G) \oplus_T \langle y_1, \dots, y_k \rangle = G + E$, y si $y \in G \cap E$, $y = x'_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$ con $x'_1 \in E_{\Lambda}^0$ de donde $y - x'_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \in (E')_{\Lambda'}^0 \cap \langle y_1, \dots, y_k \rangle$ así que $y = x'_1 \in G \cap E_{\Lambda}^0$ y por tanto $E' = E \oplus_T G$. Se toma entonces $F_2 = G$.

IV) $(E \times F_2)_{\Lambda'\Theta}^+ = E_{\Lambda}^+ \times F_2$

Si $(v, w) \in (E \times F_2)_{\Lambda'\Theta}^+$, entonces para todo $\lambda' \in \Lambda'$, $\lambda'(v+w) \geq 0$, y por III) $\lambda'(v) \geq 0$. Como $v \in E$, de I) se tiene que $v \in E_{\Lambda}^+$. Y si $(v, w) \in E_{\Lambda}^+ \times F_2$, entonces para todo $\lambda' \in \Lambda'$, $\lambda'\Theta(v, w) = \lambda'(v+w) = \lambda'(v) + \lambda'(w) \geq 0$ por III) y I), así que $(v, w) \in (E \times F_2)_{\Lambda'\Theta}^+$.

Se considera entonces $V^{f(x)} = (\phi')^{-1}(\Theta(\phi(U) \times F_2) \cap \phi'(U'))$ que es abierto de X' pues $\phi(U) \times F_2$ lo es de $E_{\Lambda}^+ \times F_2 = (E \times F)_{\Lambda'\Theta}^+$, y se considera también $V^x = U$. Definimos σ como la composición

$$V^{f(x)} \xrightarrow{\phi'|_{V^{f(x)}}} \phi'(U') \cap \Theta(\phi(U) \times F_2) \xrightarrow{\Theta^{-1}} \phi(U) \times F_2 \xrightarrow{p_1} \phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U = V^x$$

que es trivialmente C^p . Además $f(V^x) \subset V^{f(x)}$ pues si $y \in \phi(U)$, $j(y) = \Theta(j(y), 0) \in \Theta(\phi(U) \times F_2) \cap \phi'(U')$, y $\sigma \circ f|_{V^x} = 1_{V^x}$ ya que si $y \in V^x$, se tiene que $\sigma(f(y)) = \phi^{-1}(p_1(\Theta^{-1}(\phi'(f(y)))))) = \phi^{-1}(p_1(\Theta^{-1}(j(\phi(y)))))) = \phi^{-1}(p_1(\phi(y), 0)) = \phi^{-1} \circ \phi(y) = y$.

□

A continuación, dos resultados generales:

Proposición 1.10 Sea $f: X \rightarrow X'$ aplicación C^p con $p \geq 1$. Entonces

$$\{x \in X / f \text{ es } F\text{-inmersión } C^p \text{ en } x\}$$

es abierto de X .

Demostración: (compárese con la de 3.2.2 de [M.O.]) Es corolario inmediato de 1.2. □

Proposición 1.11 *Sea $f : X \rightarrow X'$ F-inmersión C^p en $x \in X$ con $p \geq 1$. Entonces f preserva el borde localmente en x , es decir, existe un entorno V^x de x en X tal que $f(V^x \cap \partial X) \subset \partial X'$. En particular, $f(x) \in \partial X'$ si $x \in \partial X$.*

Demostración: Por la anterior proposición, basta probar el "en particular".

Por 1.2 existen un entorno abierto W^x de x en X , un entorno abierto $W^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' y una aplicación $\sigma : W^{f(x)} \rightarrow W^x$ de clase p con $f(W^x) \subset W^{f(x)}$ y $1_{W^x} = \sigma \circ f|_{W^x}$. Así que σ es sumersión C^p en $f(x)$ de sección $f|_{W^x}$. Luego si $f(x) \in \text{Int}(X')$, entonces $x = \sigma(f(x))$ estaría en el interior de X por 4.1.11 de [M.O.]. \square

Definición 1.12 *Una aplicación $f : X \rightarrow X'$ de clase p se dice que es una F-inmersión C^p si f es una F-inmersión C^p en todo x de X .*

El siguiente resultado es un test fundamental para la definición dada de F-inmersión.

Proposición 1.13 *Sea $f : X \rightarrow X'$ una F-inmersión C^p , y sea $h : Z \rightarrow X$ una aplicación continua donde Z es una variedad diferenciable de clase p . Entonces h es C^p si y sólo si $f \circ h$ es C^p .*

Demostración: (compárese con la de 3.2.3 de [M.O.]) \Rightarrow) La composición de aplicaciones C^p es una aplicación C^p .

\Leftarrow) Sea $z \in Z$. Como f es F-inmersión C^p en $h(z)$, existen un entorno abierto $W^{h(z)}$ de $h(z)$ en X , un entorno abierto $W^{f(h(z))}$ de $f(h(z))$ en X' y una aplicación $\sigma : W^{f(h(z))} \rightarrow W^{h(z)}$ de clase p con $f(W^{h(z)}) \subset W^{f(h(z))}$ y $\sigma \circ f|_{W^{h(z)}} = 1_{W^{h(z)}}$. Como h es continua, existe un entorno abierto U^z de z en Z tal que $h(U^z) \subset W^{h(z)}$. Así que $h|_{U^z} = 1_{W^{h(z)}} \circ h|_{U^z} = \sigma \circ f|_{W^{h(z)}} \circ h|_{U^z}$, por tanto es C^p . \square

Proposición 1.14 *(compárese con el enunciado de 3.2.16 de [M.O.]) Sea $f : X \rightarrow X'$ una F-inmersión C^p en $x \in X$ y sea $g : X' \rightarrow X''$ una F-inmersión C^p en $f(x) \in X'$. Entonces la composición $g \circ f : X \rightarrow X''$ es F-inmersión C^p en x .*

Demostración: Sean Z una variedad diferenciable C^p y $h : X \rightarrow Z$ una aplicación de clase p . Como f es F-inmersión C^p en x , existen un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' ,

una aplicación $\alpha : V^{f(x)} \rightarrow Z$ de clase p y un entorno abierto U^x de x en X de modo que $f(U^x) \subset V^{f(x)}$ y $h(y) = \alpha \circ f(y)$ para todo $y \in U^x$.

Como g es F-inmersión C^p en $f(x)$, claramente $g|_{V^{f(x)}} : V^{f(x)} \rightarrow X''$ es F-inmersión C^p en $f(x)$, así que existen un entorno abierto $V^{g(f(x))}$ de $g(f(x))$ en X'' , una aplicación $\beta : V^{g(f(x))} \rightarrow Z$ de clase p y un entorno abierto $U^{f(x)}$ de $f(x)$ en $V^{f(x)}$ (así que en X'') de modo que $g(U^{f(x)}) \subset V^{g(f(x))}$ y $\alpha(y') = \beta \circ g(y')$ para todo $y' \in U^{f(x)}$.

Como f es continua y $f(x) \in U^{f(x)}$, el conjunto V^x definido como $U^x \cap f^{-1}(U^{f(x)})$ es abierto de X y $x \in V^x$. Además $g \circ f(V^x) \subset V^{g(f(x))}$ ($g \circ f(V^x) = g(f(V^x)) \subset g(U^{f(x)}) \subset V^{g(f(x))}$) y para todo $y \in V^x$ se tiene que $h(y) = \alpha \circ f(y) = \beta \circ g \circ f(y)$, la primera igualdad porque $y \in V^x \subset U^x$, y la segunda igualdad porque $f(y) \in U^{f(x)}$ dado que $y \in V^x$. \square

Corolario 1.15 *La composición de dos F-inmersiones C^p es una F-inmersión C^p .*

Proposición 1.16 (compárese con el enunciado de 3.2.19 de [M.O.]) *Sean $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X''$ aplicaciones de clase p , tales que la composición $g \circ f$ es F-inmersión C^p en $x \in X$. Entonces f es F-inmersión C^p en x .*

Demostración: Sea Z una variedad diferenciable de clase p y sea $h : X \rightarrow Z$ una aplicación de clase p . Como $g \circ f$ es F-inmersión C^p en $x \in X$ existen un entorno abierto $V^{g(f(x))}$ de $g(f(x))$ en X'' , una aplicación $\alpha : V^{g(f(x))} \rightarrow Z$ de clase p y un entorno abierto U^x de x en X de modo que $g \circ f(U^x) \subset V^{g(f(x))}$ y $h(y) = \alpha \circ g \circ f(y)$ para todo $y \in U^x$. Claramente $V^{f(x)} = g^{-1}(V^{g(f(x))})$ es abierto de X' y $\beta = \alpha \circ g|_{V^{f(x)}} : V^{f(x)} \rightarrow Z$ es C^p puesto que g lo es, y $f(U^x) \subset V^{f(x)}$ dado que $g(f(U^x)) \subset V^{g(f(x))}$. Además para todo $y \in U^x$ se tiene que $h(y) = \alpha \circ (g \circ f)(y) = \beta \circ f(y)$. \square

Corolario 1.17 *Sean $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X''$ aplicaciones de clase p , tales que la composición $g \circ f$ es F-inmersión C^p . Entonces f es F-inmersión C^p .*

Proposición 1.18 *Sean $f : X \rightarrow X'$ F-inmersión C^p en $x \in X$ y $g : Y \rightarrow Y'$ F-inmersión C^p en $y \in Y$. Entonces la aplicación $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ es F-inmersión C^p en (x, y) .*

Demostración: Como f es F-inmersión C^p en x , existen U^x entorno abierto de x en X , $V^{f(x)}$ entorno abierto de $f(x)$ en X' con $f(U^x) \subset V^{f(x)}$ y existe una aplicación

$\alpha : V^{f(x)} \rightarrow U^x$ de clase p con $\alpha \circ f|_{U^x} = 1_{U^x}$. Como g es F-inmersión C^p en y , existen U^y entorno abierto de y en Y , $V^{g(y)}$ entorno abierto de $g(y)$ en Y' con $g(U^y) \subset V^{g(y)}$ y existe una aplicación $\beta : V^{g(y)} \rightarrow U^y$ de clase p con $\beta \circ g|_{U^y} = 1_{U^y}$.

Entonces $U^x \times U^y$ es un entorno abierto de (x, y) en $X \times Y$, $V^{f(x)} \times V^{g(y)}$ es un entorno abierto de $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ en $X' \times Y'$, $(f \times g)(U^x \times U^y) = f(U^x) \times g(U^y) \subset V^{f(x)} \times V^{g(y)}$ y $\alpha \times \beta : V^{f(x)} \times V^{g(y)} \rightarrow U^x \times U^y$ es C^p verificando que $(\alpha \times \beta) \circ (f \times g)|_{U^x \times U^y} = 1_{U^x} \times 1_{U^y} = 1_{U^x \times U^y}$. \square

Corolario 1.19 Sean $f : X \rightarrow X'$ y $g : Y \rightarrow Y'$ F-inmersiones C^p . Entonces $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ es F-inmersión C^p .

2 F-SUBVARIEDADES

Como se anunciaba en la introducción a este capítulo, el concepto de F-inmersión nos conduce a una nueva definición de subvariedad:

Definición 2.1 Sean X una variedad diferenciable de clase p con $p \geq 1$ e Y un subconjunto de X . Diremos que Y es una F-subvariedad diferenciable de clase p de X si existe una estructura diferenciable $[\mathcal{A}]$ de clase p en Y tal que:

- 1) La topología $T_{[\mathcal{A}]}$ asociada a $[\mathcal{A}]$ es la topología que Y hereda de X .
- 2) La aplicación inclusión $j : (Y, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X$ es F-inmersión C^p .

En tal caso, la estructura diferenciable en la F-subvariedad es única:

Proposición 2.2 Sea Y una F-subvariedad de clase p de X . Entonces existe una única estructura diferenciable $[\mathcal{A}]$ en Y cumpliendo 1) y 2).

Demostración: (compárese con la prueba de 3.1.5 de [M.O.]) Supuestas $[\mathcal{A}]$ y $[\mathcal{B}]$ estructuras diferenciables de clase p en Y verificando 1) y 2), probaremos que la aplicación

$$1_Y : (Y, [\mathcal{A}]) \rightarrow (Y, [\mathcal{B}])$$

es un difeomorfismo de clase p .

Como $[\mathcal{A}]$ y $[\mathcal{B}]$ verifican 1), 1_Y es homeomorfismo y que es C^p se sigue de la condición 2) para $[\mathcal{B}]$ y la proposición 1.13. De igual manera se prueba que su inversa es de clase p . \square

Observación 2.3 Si Y es F -subvariedad diferenciable de clase p de X , hablaremos simplemente de Y para referirnos a la variedad diferenciable $(Y, [\mathcal{A}])$, donde $[\mathcal{A}]$ es la única estructura diferenciable C^p en Y que cumple las condiciones 1) y 2) de la definición 2.1.

Proposición 2.4 Sean X una variedad diferenciable C^p y V un abierto de X . Entonces V es F -subvariedad de X y su estructura diferenciable como tal coincide con la definida en el ejemplo B) después de 1.2.19 de [M.O.].

Proposición 2.5 Sean $f : X \rightarrow X'$ un C^p difeomorfismo e Y una F -subvariedad C^p de X . Entonces $f(Y)$ es F -subvariedad C^p de X' y $f|_Y : Y \rightarrow f(Y)$ es C^p difeomorfismo.

Proposición 2.6 Si Y es F -subvariedad de X e Y' es F -subvariedad de X' , entonces la variedad diferenciable producto $Y \times Y'$ es F -subvariedad de $X \times X'$ (y la estructura diferenciable producto de las estructuras de subvariedad es la estructura de subvariedad del producto).

Demostración: Es consecuencia del corolario 1.19. \square

Proposición 2.7 Sean Y F -subvariedad C^p de X , Z variedad diferenciable de clase p y $f : Z \rightarrow Y$ una aplicación. Entonces f es de clase p si y sólo si la composición $j \circ f$ es de clase p , donde $j : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Demostración:

\Rightarrow) La composición de aplicaciones de clase p es de clase p .

\Leftarrow) Como $j \circ f$ es continua e Y es subespacio topológico de X , f es continua. Entonces se concluye por la proposición 1.13. \square

Una de las primeras razones que nos indujeron a pensar en un nuevo concepto de subvariedad fue el problema no resuelto de la transitividad de éstas. Con las nuevas definiciones, la solución es clara:

Proposición 2.8 (compárese con el enunciado de 3.1.16 de [M.O.]) Sean Z variedad diferenciable de clase p y $X \subset Y \subset Z$ subconjuntos. Supongamos que Y es F -subvariedad C^p de Z y X es F -subvariedad C^p de Y . Entonces X es F -subvariedad C^p de Z (y la estructura diferenciable que hace a X F -subvariedad de Z es la que la hace F -subvariedad de Y).

Demostración: Es consecuencia directa de la propiedad transitiva de las topologías iniciales y el Corolario 1.15. \square

Un resultado en la misma dirección es el siguiente:

Proposición 2.9 (compárese con el enunciado de 3.2.20 de [M.O.]) Sean Z una variedad diferenciable de clase p y $X \subset Y \subset Z$ subconjuntos. Supongamos que X e Y son F -subvariedades diferenciables C^p de Z . Entonces X es F -subvariedad diferenciable C^p de Y .

Más aún, tenemos el siguiente resultado: sean Y y Z variedades diferenciables de clase p , $X \subset Y \subset Z$ subconjuntos y X F -subvariedad C^p de Z . Suponemos que las aplicaciones inclusiones

$$X \hookrightarrow Y \quad \text{y} \quad Y \hookrightarrow Z$$

son de clase p y la topología de Y es la que hereda de Z . Entonces X es F -subvariedad diferenciable C^p de Y (mediante la estructura diferenciable que la hace F -subvariedad de Z).

Demostración: Es consecuencia del Corolario 1.17. \square

Proposición 2.10 Sean X variedad diferenciable de clase p e Y un subconjunto de X tal que para todo $y \in Y$ existe un entorno abierto V^y de y en X de modo que $Y \cap V^y$ es F -subvariedad C^p de X . Entonces Y es F -subvariedad diferenciable de clase p de X .

Demostración: Sean $[\mathcal{X}]$ la estructura diferenciable de X y para cada $y \in Y$, $[\mathcal{A}_y]$ la única estructura diferenciable C^p en $Y \cap V^y$ tal que $T_{[\mathcal{A}_y]} = T_{[\mathcal{X}]|_{Y \cap V^y}}$ y la inclusión $(Y \cap V^y, [\mathcal{A}_y]) \hookrightarrow X$ es F -inmersión C^p . Se cumplen las siguientes condiciones:

$$1) Y = \bigcup_{y \in Y} (Y \cap V^y)$$

2) Para todos $x, y \in Y$ se tiene que $(Y \cap V^x) \cap (Y \cap V^y)$ es abierto de $(Y \cap V^x, T_{[\mathcal{A}_x]})$: $(Y \cap V^x) \cap (Y \cap V^y) = (Y \cap V^x) \cap V^y$ es abierto de $(Y \cap V^x, T_{[\mathcal{A}_y]})$ dado que V^y es abierto de X y $T_{[\mathcal{A}_y]} = T_{[X]}|_{Y \cap V^y}$.

3) Para todos $x, y \in Y$, $[\mathcal{A}_x]|_{(Y \cap V^x) \cap (Y \cap V^y)} = [\mathcal{A}_y]|_{(Y \cap V^x) \cap (Y \cap V^y)}$. En efecto, ambas estructuras diferenciables hacen a $(Y \cap V^x) \cap (Y \cap V^y)$ F-subvariedades C^p de X por la proposición 2.8, así que coinciden por la proposición 2.2.

Por 2.4.5 de [M.O.] existe una única estructura diferenciable $[\mathcal{Y}]$ de clase p en Y tal que para todo $y \in Y$, $Y \cap V^y$ es abierto de $(Y, T_{[\mathcal{Y}]})$ y $[\mathcal{Y}]|_{(Y \cap V^y)} = [\mathcal{A}_y]$. Claramente esta estructura diferenciable hace a Y F-subvariedad diferenciable C^p de X . \square

La relación entre F-subvariedades y sumersiones (véase 4.1.1 de [M.O.]) es ahora fácilmente obtenible:

Proposición 2.11 *Sean $f : X \rightarrow X'$ aplicación de clase p y Z una F-subvariedad C^p de X' . Supongamos que para cada $x \in f^{-1}(Z)$, f es sumersión de clase p en x y existe un entorno V^x de x en X tal que $f(V^x \cap \partial X) \subset \partial X'$. Entonces $f^{-1}(Z)$ es F-subvariedad C^p de X .*

Demostración: Sea $x \in f^{-1}(Z)$. De 4.1.13 d) de [M.O.] se tiene un entorno abierto V de x en X , un abierto V' de X' con $f(V) \subset V'$, una variedad diferenciable X'' de clase p sin borde y una aplicación $h : V \rightarrow X''$ de clase p tal que $(h, f|_V) : V \rightarrow X'' \times V'$ es C^p difeomorfismo. Claramente $V \cap f^{-1}(Z) = (h, f|_V)^{-1}(X'' \times (V' \cap Z))$, así que $V \cap f^{-1}(Z)$ es F-subvariedad de clase p de V (por las proposiciones 2.4, 2.8 y 2.9 se tiene que $V' \cap Z$ es F-subvariedad C^p de V' pues V' es abierto de X' y Z es F-subvariedad C^p de X' . Luego se aplican las proposiciones 2.6 y 2.5). Por la proposición 2.8 se verifica que $V \cap f^{-1}(Z)$ es F-subvariedad C^p de X . El resultado se sigue ahora de la proposición 2.10. \square

El siguiente resultado es una generalización de 4.1.11 de [M.O.]:

Proposición 2.12 *Sea $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p . Supongamos que $T_x f$ es sobreyectiva para cierto $x \in X$. Entonces $\text{ind}_X(x) \geq \text{ind}_{X'}(f(x))$.*

Demostración: Sean $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ carta de X centrada en x y $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$ con $f(U) \subset U'$. Sea $g = \phi' \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \phi'(U')$

la localización de f en x , así que $(\Theta_C^{f(x)})^{-1} \cdot T_x f \cdot \Theta_C^x = Dg(0) : E \rightarrow E'$. Sean $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ y $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}$, tales que $E = E_\Lambda^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ con $y_i \in E$, $\lambda_j(y_i) = \delta_{ij}$ y $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ con $x_i \in E'$, $\lambda'_j(x_i) = \delta_{ij}$. Queremos probar que $m \geq n$.

Por hipótesis $Dg(0)$ es sobreyectiva, y en cualquier caso $Dg(0)(E_\Lambda^0) \subset (E')_{\Lambda'}^0$ (1.2.10 de [M.O.]). Estos dos hechos son suficientes para comprobar que la aplicación composición

$$p_2 \circ Dg(0) \circ i : \langle y_1, \dots, y_m \rangle \xrightarrow{i} E \xrightarrow{Dg(0)} E' \xrightarrow{p_2} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

es sobreyectiva (dado $w \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ existe $v \in E$ tal que $p_2 \circ Dg(0)(v) = w$, $v = e + \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ con $e \in E_\Lambda^0$, así que $p_2 \circ Dg(0) \circ i(\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i) = p_2 \circ Dg(0)(v - e) = p_2 \circ Dg(0)(v) - p_2 \circ Dg(0)(e) = p_2 \circ Dg(0)(v) = w$). \square

Corolario 2.13 *Sea $f : X \rightarrow X'$ una sumersión C^p en $x \in X$. Entonces $ind_X(x) \geq ind_{X'}(f(x))$.*

Consecuencia del anterior corolario y el hecho esencial de que el concepto de F-inmersión es el dual del de sumersión (proposición 1.2) es el siguiente resultado:

Corolario 2.14 *Sea $f : X \rightarrow X'$ una F-inmersión C^p en $x \in X$. Entonces $ind_X(x) \leq ind_{X'}(f(x))$. En particular, si $x \in \partial X$, entonces $f(x) \in \partial X'$.*

Nos disponemos ahora a establecer una relación exhaustiva entre los conceptos de F-subvariedad y subvariedad. Las relaciones establecidas aquí, aparte de su obvia necesidad, son usadas de modo básico para establecer la relación entre el concepto de F-subvariedad y el de transversalidad, que se dará en la sección 4. Dos hechos claves serán obtenidos: toda F-subvariedad totalmente bien situada es una subvariedad, y toda subvariedad bien situada es una F-subvariedad. En ambos casos, la demostración se basa en el Teorema 1.9 y en bonitas ideas geométricas sobre el borde anguloso y sus vectores interiores. Veamos previamente una importante observación y una definición:

Observación 2.15 *Supóngase que X es una F-subvariedad y una subvariedad de clase p de X' , así que existen estructuras diferenciables $[\mathcal{A}]$ y $[\mathcal{B}]$ en X tales que $T_{[\mathcal{A}]} = T_{[\mathcal{B}]}$ y son las inducidas por X' , la inclusión $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ es F-inmersión C^p y la inclusión*

$j : (X, [\mathcal{B}]) \hookrightarrow X'$ es inmersión C^p . Entonces

$$1_X : (X, [\mathcal{A}]) \rightarrow (X, [\mathcal{B}])$$

es obviamente homeomorfismo, es de clase p por 3.2.3 de [M.O.] y su inversa es de clase p por la proposición 1.13, de modo que $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}]$.

Definición 2.16 (véase 3.1.10 de [M.O.] para las mismas definiciones en subvariedades) Sea X una F -subvariedad de clase p de X' . Diremos que X está bien situada en X' si $\partial X = \partial X' \cap X$ y que X está totalmente bien situada en X' si para todo $x \in X$, $ind_X(x) = ind_{X'}(x)$.

Teorema 2.17 Sean X' una variedad diferenciable de clase p y X un subconjunto de X' . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) X es subvariedad C^p totalmente bien situada de X' .
- b) X es F -subvariedad C^p totalmente bien situada de X' .

Demostración: a) \Rightarrow b) Sea $j : X \hookrightarrow X'$ la inclusión de X en X' . Para probar que X es F -subvariedad diferenciable C^p de X' , consideramos $[\mathcal{A}]$ la estructura diferenciable C^p de X que da a) y que hace que $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ sea inmersión y $T_{[\mathcal{A}]}$ la topología inicial asociada a j . Basta pues probar que $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ es F -inmersión de clase p . Para ello probaremos la condición 2) del Teorema 1.9 (la condición 1) se tiene por estar X totalmente bien situada en X').

Sean pues $x \in X$, $w \in (T_x X)^i$ y comprobemos que $ind(w) = ind(T_x j(w))$. Para ello tomamos cartas $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ de X centrada en x , y $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ de X' centrada en $j(x)$ con $j(U) \subset U'$ de modo que E sea subespacio lineal de E' en donde admite suplementario topológico, $\phi(U) \subset \phi'(U')$ y la localización sea la inclusión, o sea $\phi' \circ j|_{U \circ \phi^{-1}} = i : \phi(U) \hookrightarrow \phi'(U')$, así que $D(\phi' \circ j|_{U \circ \phi^{-1}})(0)$ es la inclusión $i : E \hookrightarrow E'$.

Sea $v \in E_\Lambda^+$ con $\Theta_C^x(v) = w$, así que $T_x j(w) = T_x j \circ \Theta_C^x(v) = \Theta_{C'}^x \circ i(v) = \Theta_{C'}^x(v)$. Entonces, si elegimos $\epsilon > 0$ con $\epsilon v \in \phi(U)$, tenemos

$$\begin{aligned} ind(w) &= ind_{E_\Lambda^+}(\epsilon v) = ind_X(\phi^{-1}(\epsilon v)) = \\ ind_{X'}(j(\phi^{-1}(\epsilon v))) &= ind_{(E')_\Lambda^+}(\phi' \circ j \circ \phi^{-1}(\epsilon v)) = ind_{(E')_\Lambda^+}(\epsilon v) = \\ ind_{(E')_\Lambda^+}(v) &= ind(T_x j(w)). \end{aligned}$$

b) \Rightarrow a) De nuevo usaremos fundamentalmente el Teorema 1.9. Por hipótesis existe una estructura diferenciable $[\mathcal{A}]$ de clase p en X tal que $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ es F-inmersión C^p y homeomorfismo sobre la imagen. Se trata de probar que $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ es inmersión de clase p .

Sea $x \in X$. Como X está totalmente bien situada en X' , para poder aplicar el Teorema 1.9 basta demostrar la condición 2) de sus hipótesis. Sea pues $w \in (T_x X)^i$ y veamos que $\text{ind}(w) = \text{ind}(T_x j(w))$.

Sean $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ carta de X centrada en x , $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $j(x)$ con $j(U) \subset U'$ y llamamos g a la localización de j en estas cartas, es decir, $g = \phi' \circ j|_U \circ \phi^{-1}$. Como $\text{ind}_X(x) = \text{ind}_{X'}(j(x))$, se tiene que $\text{card}(\Lambda) = \text{card}(\Lambda')$, y obviamente g es F-inmersión C^p en 0 con $g(0) = 0$. Además, si $v \in E_\Lambda^+$ con $\Theta_C^x(v) = w$, entonces $\text{ind}(w) = \text{ind}_{E_\Lambda^+}(v)$ y $\text{ind}(T_x j(w)) = \text{ind}(Dg(0)(v))$. Así pues, es suficiente demostrar la siguiente afirmación:

Sean U un abierto de E_Λ^+ con $0 \in U$ y $g : U \rightarrow (E')_\Lambda^+$, una F-inmersión C^p en 0 con $g(0) = 0$. Supongamos que $\text{card}(\Lambda) = \text{card}(\Lambda')$. Entonces $Dg(0) : E \rightarrow E'$ conserva el índice de los vectores, es decir, $\text{ind}_{E_\Lambda^+}(v) = \text{ind}_{(E')_\Lambda^+}(Dg(0)(v))$ para todo $v \in E_\Lambda^+$.

Como g es F-inmersión C^p en 0, por la proposición 1.10 es F-inmersión C^p en todo punto de un cierto entorno abierto W^0 de 0 en U . Entonces por el corolario 2.14 se tiene que $\text{ind}_{E_\Lambda^+}(x) \leq \text{ind}_{(E')_\Lambda^+}(g(x))$ para todo $x \in W^0$. Además, de acuerdo con la proposición 1.2, existen U^0 entorno abierto de 0 en U y V^0 entorno abierto de 0 en $(E')_\Lambda^+$, con $g(U^0) \subset V^0$ y existe una aplicación $\sigma : V^0 \rightarrow U^0$ de clase p tal que $1_{V^0} = \sigma \circ g|_{U^0}$. En particular $1_E = D(\sigma \circ g|_{U^0})(0) = D\sigma(0) \cdot Dg(0) : E \rightarrow E$. De 1.2.10 de [M.O.] se sigue que

$$Dg(0)(E_\Lambda^+) \subset (E')_\Lambda^+, \quad D\sigma(0)((E')_\Lambda^+) \subset E_\Lambda^+$$

y

$$Dg(0)(E_\Lambda^0) \subset (E')_\Lambda^0, \quad D\sigma(0)((E')_\Lambda^0) \subset E_\Lambda^0$$

Por supuesto

$$D\sigma(0)(Dg(0)(E_\Lambda^0)) = E_\Lambda^0.$$

Pongamos $\text{card}(\Lambda) = n = \text{card}(\Lambda')$ siendo $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}$.

Paso 1: $\text{ind}(Dg(0)(v)) \geq \text{ind}(v)$ para todo $v \in E_\Lambda^+$.

Si $v \in E_\Lambda^+$, $Dg(0)(v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(tv)}{t}$ e $ind\left(\frac{g(tv)}{t}\right) = ind(g(tv)) \geq ind(tv) = ind(v)$, la desigualdad porque $tv \in W^0$ si $t > 0$ es suficientemente pequeño. Luego $Dg(0)(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ con $ind(y_n) \geq ind(v)$ y es fácil comprobar entonces que $ind(Dg(0)(v)) \geq ind(v)$.

Paso 2: si $ind(v) = n$, entonces $ind(Dg(0)(v)) = n$.

Es trivial por el paso 1 y las igualdades $card(\Lambda) = n = card(\Lambda')$. Es, de hecho, la inclusión $Dg(0)(E_\Lambda^0) \subset (E')_{\Lambda'}^0$.

Paso 3: si $ind(v) = n - 1$, entonces $ind(Dg(0)(v)) = n - 1$.

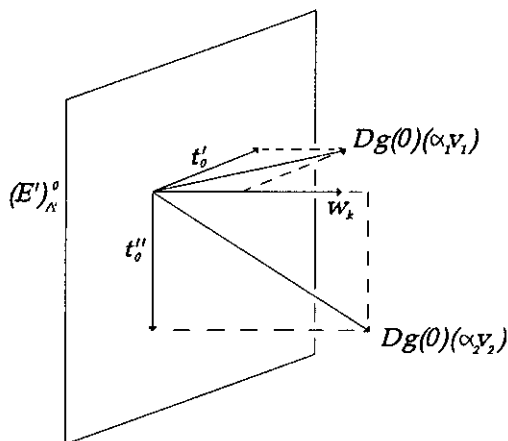
Si $v \in E_\Lambda^+$ con $ind(v) = n - 1$, por el paso 1, $Dg(0)(v)$ tiene índice $n - 1$ ó n , y si fuese n , $Dg(0)(v) \in (E')_{\Lambda'}^0$, así que $D\sigma(0)(Dg(0)(v)) \in E_\Lambda^0$ pero esto es el propio v que no está en E_Λ^0 pues su índice es $n - 1$, no n .

Paso 4: si $ind(v) = n - 2$, entonces $ind(Dg(0)(v)) = n - 2$.

Sean $\{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ con $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$ de modo que $E = E_\Lambda^0 \oplus_T \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ y $v \in E_\Lambda^+$ con $ind(v) = n - 2$. Abusando de la notación, supongamos que $v = e_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ con $e_0 \in E_\Lambda^0$, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$. Como $Dg(0)(E_\Lambda^0) \subset (E')_{\Lambda'}^0$, $ind(Dg(0)(v)) = ind(Dg(0)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2))$. Además $Dg(0)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = Dg(0)(\alpha_1 v_1) + Dg(0)(\alpha_2 v_2)$ y por el paso 3, $Dg(0)(\alpha_1 v_1)$ y $Dg(0)(\alpha_2 v_2)$ tienen índice $n - 1$. Sea $\lambda'_i \in \Lambda'$ el único elemento de Λ' que no se anula en $Dg(0)(\alpha_1 v_1)$ y $\lambda'_j \in \Lambda'$ el único elemento de Λ' que no se anula en $Dg(0)(\alpha_2 v_2)$, así que

$$\lambda'_i(Dg(0)(\alpha_1 v_1)) > 0 \quad \text{y} \quad \lambda'_j(Dg(0)(\alpha_2 v_2)) > 0.$$

Si fuese $i \neq j$, obviamente $Dg(0)(\alpha_1 v_1) + Dg(0)(\alpha_2 v_2)$ tendría índice $n - 2$ y habríamos acabado. Supongamos pues que $i = j$ (véase la figura de la página siguiente). Entonces $Dg(0)(\alpha_1 v_1) = t'_0 + \beta_1 w_k$ y $Dg(0)(\alpha_2 v_2) = t''_0 + \beta_2 w_k$ donde $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle w_1, \dots, w_n \rangle$, $w_i \in E'$ con $\lambda'_i(w_j) = \delta_{ij}$, $t'_0, t''_0 \in (E')_{\Lambda'}^0$, $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 > 0$ (véase 1.6.17 de [M.O.]) y $k \in \{1, \dots, n\}$. Tomamos $\tilde{v}_1 = \frac{-\beta_2}{\beta_1} \alpha_1 v_1$ y $\tilde{v}_2 = \alpha_2 v_2$ así que $Dg(0)(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) = \frac{-\beta_2}{\beta_1}(t'_0 + \beta_1 w_k) + t''_0 + \beta_2 w_k = \frac{-\beta_2}{\beta_1} t'_0 + t''_0 \in (E')_{\Lambda'}^0$. Luego $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 \in E_\Lambda^0$, pero $\lambda_1(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) = \frac{-\beta_2}{\beta_1} \alpha_1 \neq 0$, lo que es una contradicción.



Paso 5: $ind(v) = ind(Dg(0)(v))$ para todo $v \in E_\Lambda^+$.

Teniendo en cuenta los pasos anteriores, puede suponerse que $ind(v) = n - k$ con $k \geq 3$, es decir, $v = e_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ con $\alpha_i > 0$ y $k \geq 3$ (de nuevo abusamos de la notación por simplicidad). Es claro que $ind(Dg(0)(v)) = ind(Dg(0)(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k))$, $Dg(0)(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = Dg(0)(\alpha_1 v_1) + \dots + Dg(0)(\alpha_k v_k)$, y que $Dg(0)(\alpha_i v_i)$ tiene índice $n - 1$ por el paso 3. Luego se tiene una aplicación

$$\{1, \dots, k\} \xrightarrow{\tau} \{1, \dots, n\}$$

definida por la condición de que $\lambda'_{\tau(i)}$ es el único elemento de Λ' con $\lambda'_{\tau(i)}(Dg(0)(\alpha_i v_i)) > 0$. Es trivial ver que si τ es inyectiva, entonces $ind(Dg(0)(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k)) = n - k$ y el paso 5 estaría concluido, y con él la prueba del teorema.

Supongamos que no es inyectiva. Por comodidad en la notación, supongamos que $\tau(1) = r = \tau(2)$ para un cierto $r \in \{1, \dots, n\}$. Así que λ'_r es el único elemento de Λ' que no se anula en $Dg(0)(\alpha_1 v_1)$ y es el único elemento de Λ' que no se anula en $Dg(0)(\alpha_2 v_2)$. O sea $\lambda'_r(Dg(0)(\alpha_1 v_1)) > 0$, $\lambda'_r(Dg(0)(\alpha_2 v_2)) > 0$ y $\lambda'_i(Dg(0)(\alpha_1 v_1)) = 0 = \lambda'_i(Dg(0)(\alpha_2 v_2))$ para todo $i \in \{1, \dots, n\} - \{r\}$. Resulta entonces obvio que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ tiene índice $n - 2$ en E_Λ^+ y $Dg(0)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = Dg(0)(\alpha_1 v_1) + Dg(0)(\alpha_2 v_2)$ tiene índice $n - 1$ en $(E')_\Lambda^+$, en contradicción con el paso 4. \square

Veamos ahora como el concepto de F-subvariedad es una generalización del concepto de subvariedad bien situada:

Teorema 2.18 *Sea X una subvariedad diferenciable de clase p de X' bien situada. Entonces X es F-subvariedad C^p de X' .*

Demostración: Sea $j : X \hookrightarrow X'$ la inclusión. Por hipótesis, existe una estructura diferenciable $[\mathcal{A}]$ de clase p en X tal que $T_{[\mathcal{A}]}$ es la topología que X hereda de X' y $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ es una inmersión C^p . Sea $x \in X$ y veamos que j es F-inmersión C^p en x .

Como $j : (X, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow X'$ es inmersión en x de clase p , existen $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ carta de $(X, [\mathcal{A}])$ centrada en x , $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $j(x) = x$ con $j(U) = U \subset U'$, E es subespacio lineal de E' admitiendo suplementario topológico en E' , $\phi(U) \subset \phi'(U')$ y $\phi' \circ j|_U \circ \phi^{-1} = i : \phi(U) \hookrightarrow \phi'(U')$ la inclusión. Además

$$i(\partial(\phi(U))) \subset \partial(\phi'(U'))$$

e

$$i(Int(\phi(U))) \subset Int(\phi'(U'))$$

dado que X está bien situada en X' . Así pues, la cuestión ha sido reducida a un problema local:

Sean V un entorno abierto de 0 en E_Λ^+ , $E' = E \oplus_T F$ e $i : V \hookrightarrow (E')_\Lambda^+$, la inclusión. Supongamos que $i(\partial V) \subset \partial(E')_\Lambda^+$, e $i(Int V) \subset Int(E')_\Lambda^+$. Entonces i es F-inmersión C^p en 0.

Paso 1: se verifica que $card(\Lambda) \leq card(\Lambda')$.

Sean $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_m\}$ así que $E = E_\Lambda^0 \oplus_T \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ con $x_i \in E$, $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$ y $E' = (E')_\Lambda^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ con $y_i \in E'$, $\lambda'_i(y_j) = \delta_{ij}$. Por supuesto $D(i)(0) = i : E \hookrightarrow E'$ y cumple que $Di(0)(\partial E_\Lambda^+) \subset \partial(E')_\Lambda^+$, y $Di(0)(Int(E_\Lambda^+)) \subset Int(E')_\Lambda^+$. Tenemos que

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + \alpha_{11}y_1 + \dots + \alpha_{1m}y_m \\ \dots \\ x_n = t_n + \alpha_{n1}y_1 + \dots + \alpha_{nm}y_m \end{cases}$$

donde $t_i \in (E')_{\Lambda'}^0$, y $\alpha_{ij} \geq 0$. Consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Nótese que toda fila debe tener un elemento distinto de cero, pues de no ocurrir así para la fila i -ésima, entonces $x_1 + \dots + x_n \notin \partial E_{\Lambda}^+$ y $x_1 + \dots + x_n \in (E')_{\Lambda'}^0 \cap (E')_{\Lambda}^+ \subset \partial((E')_{\Lambda'}^+)$. Así, para cada fila $j \in \{1, \dots, m\}$ existe un $i_j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_{i_j j} \neq 0$.

Supongamos ahora que $n > m$. Se tiene entonces $x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \in \partial E_{\Lambda}^+$, pero por otro lado $x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \notin \partial(E')_{\Lambda'}^+$ ya que si $k \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda'_k(x_{i_1} + \dots + x_{i_m}) \geq \lambda'_k(x_{i_k}) = \lambda'_k(t_{i_k} + \alpha_{i_k 1}y_1 + \dots + \alpha_{i_k m}y_m) = \lambda'_k(\alpha_{i_k k}y_k) = \alpha_{i_k k} > 0$.

Paso 2: Existe una aplicación inyectiva $\tau : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\lambda'_{\tau(j)}|_E = r_j \lambda_j$ con cierto $r_j > 0$.

Como para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $x_1 + \dots + \hat{x}_j + \dots + x_n \in \partial(E)_{\Lambda}^+$, $x_1 + \dots + \hat{x}_j + \dots + x_n = (t_1 + \dots + \hat{t}_j + \dots + t_n) + (\alpha_{11} + \dots + \hat{\alpha}_{j1} + \dots + \alpha_{n1})y_1 + \dots + (\alpha_{1m} + \dots + \hat{\alpha}_{jm} + \alpha_{nm})y_m \in \partial(E')_{\Lambda'}^+$ de modo que existe una fila $i = i(j)$ con $\alpha_{1i} = \dots = \hat{\alpha}_{ji} = \dots = \alpha_{ni} = 0$. Definimos entonces $\tau(j) = i(j)$ y $r_j = \lambda'_{\tau(j)}(x_j)$ que es mayor que cero pues $\lambda'_{\tau(j)}(x_1 + \dots + x_n) > 0$ y $\lambda'_{\tau(j)}(x_1 + \dots + \hat{x}_j + \dots + x_n) = 0$.

Es ahora una cuestión fácil comprobar que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\lambda'_{\tau(j)}|_E = r_j \lambda_j$$

(sobre E_{Λ}^0 se anulan pues $E_{\Lambda}^0 \subset (E')_{\Lambda'}^0$, en $x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n$ valen cero y en x_j valen r_j).

Veamos que la aplicación τ es inyectiva. Si, por ejemplo, $\tau(1) = \tau(2) = s \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_{2s} = \dots = \alpha_{ns} = 0$ ($\tau(1) = s$) y $\alpha_{1s} = \alpha_{3s} = \dots = \alpha_{ns} = 0$ ($\tau(2) = s$), así que $\alpha_{1s} = \alpha_{2s} = \alpha_{3s} = \dots = \alpha_{ns} = 0$ contradiciendo el que toda fila tiene un elemento no nulo.

Paso 3: Sea V un entorno abierto de 0 en E_{Λ}^+ , y $E' = E \oplus_T F$. Sea $i : V \hookrightarrow (E')_{\Lambda'}^+$ la inclusión. Supongamos que $n = \text{card}(\Lambda) \leq \text{card}(\Lambda') = m$ y existe una aplicación inyectiva $\tau : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un $r_i > 0$ con $\lambda'_{\tau(i)}|_E = r_i \lambda_i$. Entonces la inclusión i es F-inmersión C^∞ en 0.

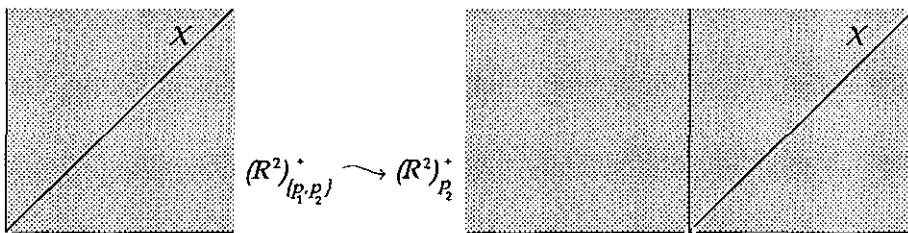
Consideramos $\Lambda'' = \{\lambda'_{\tau(1)}, \dots, \lambda'_{\tau(n)}\}$ que tiene cardinal n . Obviamente $(E')^+_{\Lambda''} \subset (E')^+_{\Lambda''}$, y es suficiente probar que $i : V \hookrightarrow (E')^+_{\Lambda''}$ es F-inmersión C^∞ en 0. Ahora bien, $D(i)(0) = i : E \hookrightarrow E'$ es inyectiva y su imagen E admite suplementario topológico F en E' , de modo que será suficiente probar las condiciones 1) y 2) del Teorema 1.9 para deducir que $i : V \hookrightarrow (E')^+_{\Lambda''}$ es F-inmersión (y también inmersión) C^∞ en 0.

Dado que $Di(0) = i$, bastará ver que $i : V \hookrightarrow (E')^+_{\Lambda''}$ conserva el índice de los puntos de V , es decir, que para todo $x \in V$, $ind_{E^+_{\Lambda''}}(x) = ind_{(E')^+_{\Lambda''}}(x)$. Pero esto se comprueba fácilmente dado que $\lambda'_{\tau(i)}|_E = r_i \lambda_i$ con $r_i > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por supuesto, los pasos 1, 2 y 3 concluyen la demostración del teorema. □

Observación 2.19 *La idea que subyace en la demostración del teorema anterior puede ser ilustrada mediante el siguiente ejemplo:*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \geq 0\}$$

es subvariedad bien situada de clase infinito de $(\mathbb{R}^2)^+_{\{p_1, p_2\}}$ y se demuestra que también es F-subvariedad eliminando algún elemento de $\{p_1, p_2\}$ para poder aplicar el Teorema 1.9.



El nuevo concepto de subvariedad permite establecer una equivalencia sin restricciones sobre el borde (compárese con 3.3.10 de [M.O.]) entre el hecho de que una aplicación sea de clase p y que su gráfica sea F-subvariedad:

Proposición 2.20 Sean X y X' variedades diferenciables de clase p y $f : X \rightarrow X'$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) f es de clase p .

2) $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times X' / x \in X\}$ es F -subvariedad C^p de $X \times X'$ con $\partial G_f \subset \partial X \times X'$ y para todo $x \in X$, $T_{(x, f(x))}(p_1|_{G_f}) : T_{(x, f(x))}G_f \rightarrow T_x X$ es homeomorfismo lineal.

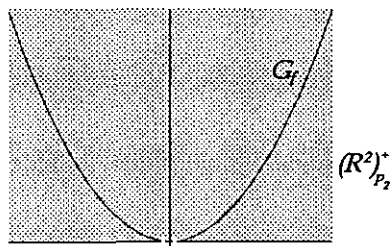
Además, en tal caso X y G_f son C^p difeomorfas.

Demostración: Es como en 3.3.10 de [M.O.], salvo en la parte 1) \Rightarrow 2), donde ahora la aplicación $\Gamma_f : X \rightarrow X \times X'$ dada por $\Gamma_f(x) = (x, f(x))$ es F -inmersión de clase p por ser la sección de la sumersión $p_1 : X \times X' \rightarrow X$. \square

De hecho, puede probarse lo siguiente:

Proposición 2.21 (compárese con 3.2.28 de [M.O.]) Sean $f : X \rightarrow X'$ una F -inmersión de clase p en un punto x de X y $g : X \rightarrow X''$ una aplicación de clase p . Entonces la aplicación $(f, g) : X \rightarrow X' \times X''$ es F -inmersión C^p en x .

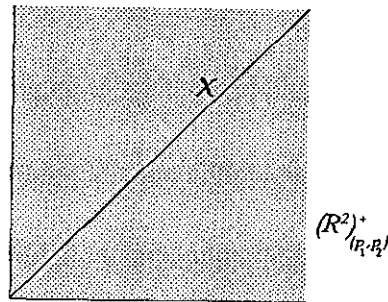
Ejemplo 2.22 La aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida por $f(t) = (t, t^2)$ es de clase infinito, así que por la proposición 2.20 se tiene que $G_f = \{(t, t^2) \in (\mathbb{R}^2)_{p_2}^+ / t \in \mathbb{R}\}$ es F -subvariedad C^∞ de $(\mathbb{R}^2)_{p_2}^+$ (y no es subvariedad).



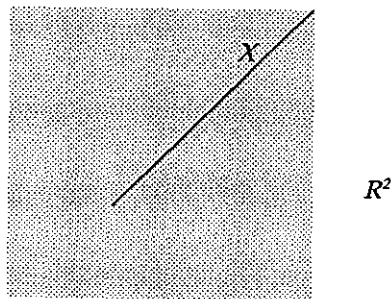
Para concluir el estudio comparativo entre los conceptos de F -subvariedad y subvariedad, estableceremos un nuevo e interesante resultado que las relaciona al menos localmente: si U es entorno abierto de 0 en E_Λ^+ y $h : U \rightarrow (E')_\Lambda^+$ es F -inmersión de clase p en cero, por el teorema 3.2.6 de [M.O.] se tiene que $h : U \rightarrow E'$ es inmersión de clase p en 0 , así que, localmente, toda F -subvariedad es subvariedad si se ve en un sitio

más grande sin borde. El interés del nuevo resultado radica en que podemos agrandar la variedad ambiente con cuidado para que la F-subvariedad que teníamos se convierta en subvariedad sin dejar por ello de ser F-subvariedad (siempre, se entiende, localmente). El siguiente ejemplo ilustra la naturalidad de este proceso:

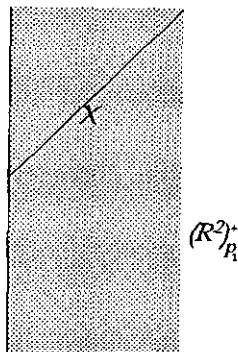
$$X = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 / t \geq 0\} \text{ es F-subvariedad de } (\mathbb{R}^2)_{\{p_1, p_2\}}^+$$



por lo que es subvariedad de \mathbb{R}^2 ,



y, lo que es más interesante, es subvariedad y F-subvariedad de $(\mathbb{R}^2)_{p_1}^+$:



Teorema 2.23 Sean U' un entorno abierto de 0 en $(E')_{\Lambda'}^+$, y $h : U' \rightarrow E_{\Lambda}^+$ una F -inmersión de clase p en 0 con $h(0) = 0$. Entonces existe $\Lambda'' \subset \Lambda$ tal que $h : U' \rightarrow E_{\Lambda''}^+$ es inmersión y F -inmersión de clase p en 0.

Demostración: Por ser $h : U' \rightarrow E_{\Lambda}^+$ F -inmersión de clase p en 0 con $h(0) = 0$, existen W entorno abierto de 0 en E_{Λ}^+ , V' entorno abierto de 0 en U' (y por tanto en $(E')_{\Lambda'}^+$) y una aplicación $q : W \rightarrow V'$ de clase p de modo que $h(V') \subset W$ y $1_{V'} = q \circ h|_{V'}$. En particular $q(0) = 0$ y $1_{E'} = Dq(0) \circ Dh(0)$.

Sean $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}$ y $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ así que $E' = (E')_{\Lambda'}^0 \oplus_T \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ con $x_i \in E'$, $\lambda'_j(x_i) = \delta_{ij}$ y $E = (E)_{\Lambda}^0 \oplus_T \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ con $y_i \in E$, $\lambda_j(y_i) = \delta_{ij}$. Por el corolario 2.14, $n \leq m$.

Sea

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

la matriz de coeficientes reales definida por las ecuaciones

$$Dh(0)(x_i) = e_i + \alpha_{i1}y_1 + \dots + \alpha_{im}y_m \quad \text{con } e_i \in E_{\Lambda}^0 \quad \text{e } i \in \{1, \dots, n\},$$

y sea

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{m1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

la matriz de coeficientes reales definida por las ecuaciones

$$Dq(0)(y_j) = e'_j + \beta_{j1}x_1 + \dots + \beta_{jn}x_n \quad \text{con } e'_j \in (E')_{\Lambda'}^0 \quad \text{y } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Obsérvese que $\alpha_{ir} \geq 0$ y $\beta_{js} \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $r \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ y $s \in \{1, \dots, n\}$, al conservarse los vectores tangentes interiores mediante la diferencial.

Dado que $x_i = Dq(0) \circ Dh(0)(x_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que la matriz producto $\beta\alpha$ es la identidad $I_{n \times n}$.

Como $\beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{21}\alpha_{12} + \dots + \beta_{m1}\alpha_{1m} = 1$, existe $i_1 \in \{1, \dots, m\}$ con $\beta_{i_1 1}\alpha_{1i_1} > 0$, así que $\beta_{i_1 1} > 0$ y por tanto $\alpha_{2i_1} = \dots = \alpha_{ni_1} = 0$ de acuerdo con la primera fila de $\beta\alpha$, $\alpha_{1i_1} > 0$ así que $\beta_{i_1 2} = \dots = \beta_{i_1 n} = 0$ de acuerdo con la primera columna de $\beta\alpha$.

Razonando de modo análogo para cada elemento de la diagonal y la fila y columna que lo contienen, obtenemos $\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ tales que

$$\beta_{i_1 1} > 0, \dots, \beta_{i_n n} > 0,$$

$$0 = \beta_{i_1 2} = \dots = \beta_{i_1 n} = \beta_{i_2 1} = \beta_{i_2 3} = \dots = \beta_{i_2 n} = \dots = \beta_{i_n 1} = \dots = \beta_{i_n n-1},$$

$$\alpha_{1 i_1} > 0, \dots, \alpha_{n i_n} > 0,$$

y

$$0 = \alpha_{2 i_1} = \dots = \alpha_{n i_1} = \alpha_{1 i_2} = \alpha_{3 i_2} = \dots = \alpha_{n i_2} = \dots = \alpha_{1 i_n} = \dots = \alpha_{n-1 i_n}.$$

Tomamos $\Lambda'' = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}\} \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = \Lambda$. Reordenando Λ si es preciso, podemos suponer que $i_j = j$ y por tanto que $\Lambda'' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (obsérvese que $i_j \neq i_{j'}$ si $j \neq j'$), así que las matrices α y β tienen ahora la siguiente forma:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

y

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots \\ & \ddots & \dots \\ 0 & \beta_{nn} & \dots \end{pmatrix}$$

con $\alpha_{ii} > 0$ y $\beta_{ii} > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Por supuesto se tiene bien definida la aplicación $h : U' \rightarrow E_{\Lambda}^+$ dado que $E_{\Lambda}^+ \subset E_{\Lambda''}^+$ pues $\Lambda'' \subset \Lambda$ y obviamente $Dh(0)$ es inyectiva y su imagen admite suplementario topológico en E (pues $h : U' \rightarrow E_{\Lambda}^+$ es F-inmersión C^p en 0). Además $ind_{(E')_{\Lambda'}^+}(v) = ind_{E_{\Lambda''}^+}(Dh(0)(v))$ por la elección hecha de Λ'' , así que para concluir es suficiente comprobar la condición 1) del Teorema 1.9, es decir, que h preserva el bordé localmente en 0.

Para ello probaremos que existe un abierto U'' de $(E')_{\Lambda'}^+$ con $0 \in U'' \subset U'$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $h(U'' \cap (E')_{\lambda_i}^0) \subset E_{\lambda_i}^0$ (esto conllevaría que $h(\partial U'') \subset \partial E_{\Lambda''}^+$). De no ser así, existirían $i \in \{1, \dots, n\}$ y una sucesión $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (E')_{\lambda_i}^0$, $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V' \subset U' \subset (E')_{\Lambda'}^+$ con $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \in E'$ y $\lambda_i(h(v_k)) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideramos entonces la aplicación dada por la composición

$$\lambda_i|_{V' \circ q} : W \xrightarrow{q} V' \hookrightarrow (E')_{\Lambda'}^+ \xrightarrow{\lambda_i|_{(E')_{\Lambda'}^+}} [0, +\infty)$$

que es de clase p obviamente. Fijemos un $k \in \mathbb{N}$. Como $v_k \in V'$, $h(v_k) \in W$ y $\lambda'_i \circ q(h(v_k)) = \lambda'_i(q \circ h(v_k)) = \lambda'_i(v_k) = 0$ pues $v_k \in (E')_{\lambda'_i}^0$. Como $\lambda_i(h(v_k)) > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $h(v_k) + ty_i \in W$ y por tanto $D(\lambda'_i|_{V'} \circ q)(h(v_k))(y_i)$ coincide con el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda'_i \circ q(h(v_k) + ty_i)}{t}$$

donde ahora t toma tanto valores positivos como negativos, así que dicho límite es cero, o sea

$$D(\lambda'_i|_{V'} \circ q)(h(v_k))(y_i) = 0 \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Como $\lambda'_i|_{V'} \circ q$ es de clase p y $\{h(v_k)\} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} h(0) = 0$ pues $\{v_k\} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, se tiene que $D(\lambda'_i|_{V'} \circ q)(h(v_k)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} D(\lambda'_i|_{V'} \circ q)(0)$, y por tanto

$$D(\lambda'_i|_{V'} \circ q)(0)(y_i) = 0.$$

Por otro lado, y de acuerdo con la Regla de la Cadena,

$$D(\lambda'_i|_{V'} \circ q)(0)(y_i) = D(\lambda'_i|_{V'})(0) \cdot D(q)(0)(y_i) = \lambda'_i(Dq(0)(y_i)) = \beta_{ii} > 0$$

lo que es una contradicción. □

Concluimos esta sección demostrando el Teorema de Inmersión de Whitney para F-subvariedades. La prueba de este resultado es básicamente la dada en III.3.8 de [M.O.1] y sólo ciertas funciones adicionales son requeridas en su desarrollo. Nosotros damos aquí la demostración por razones de completitud.

Para formular el resultado de modo más conciso, establecemos la definición de F-inmersión difeomórfica de clase p y obtenemos la caracterización esperada de ésta.

Definición 2.24 Una aplicación $f : X \rightarrow X'$ de clase p se dice que es una F-inmersión difeomórfica de clase p si:

- 1) f es F-inmersión C^p .
- 2) f es homeomorfismo sobre la imagen.

Proposición 2.25 Sea $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f es F-inmersión difeomórfica C^p .
- b) $f(X)$ es F-subvariedad C^p de X' y $f : X \rightarrow f(X)$ es C^p difeomorfismo.

Demostración: Es análoga a 3.3.2 de [M.O.], sustituyendo 3.2.4 de [M.O.] por la definición de F-subvariedad. \square

Proposición 2.26 (*Teorema de Inmersión de Whitney para F-subvariedades*) Sea X una variedad diferenciable de clase p compacta y Hausdorff, localmente de dimensión finita n fija. Entonces existen $q \in \mathbb{N}$, $\Lambda \subset \{p_1, \dots, p_q\}$ y una F-inmersión C^p difeomórfica cerrada $f : X \rightarrow (R^q)_\Lambda^+$ tal que $f(X)$ es F-subvariedad bien situada de $(R^q)_\Lambda^+$.

Demostración: Como X es compacta y Hausdorff, podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es conexa y de dimensión finita n . Como en III.3.8 de [M.O.1], se tienen:

i) $C_1 = (U_1, \phi_1, (R^n, \Lambda_1)), \dots, C_m = (U_m, \phi_m, (R^n, \Lambda_m))$ cartas de X con $\Lambda_i \subset \{p_1, \dots, p_n\}$, $\phi_i(U_i) = (R^n)_{\Lambda_i}^+$ y $X = \bigcup_{i=1}^m \phi_i^{-1}(B(0, 1) \cap (R^n)_{\Lambda_i}^+)$.

ii) Una aplicación $\lambda : R^n \rightarrow [0, 1]$ de clase infinita con $B[0, 1] = \lambda^{-1}(1)$ y $(B(0, 2))^c = \lambda^{-1}(0)$.

iii) Aplicaciones $\mu_i : X \rightarrow R$ de clase p dadas por

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \lambda(\phi_i(x)) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{si } x \notin U_i \end{cases}$$

para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

iv) Aplicaciones $f_i : X \rightarrow (R^n)_{\Lambda_i}^+$ de clase p dadas por

$$f_i(x) = \begin{cases} \mu_i(x)\phi_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ (0, \dots, 0) & \text{si } x \notin U_i \end{cases}$$

para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Construimos además las siguientes aplicaciones:

v) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_i : (R^n)_{\Lambda_i}^+ \rightarrow (R^n)_{\Lambda_i}^+$ es una aplicación de clase infinita verificando

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} (0, \dots, 0) & \text{si } x \in B[0, 1] \cap (R^n)_{\Lambda_i}^+ \\ (1, \dots, 1) & \text{si } x \in (B(0, 2))^c \cap (R^n)_{\Lambda_i}^+ \end{cases}$$

Una tal α_i puede venir dada como la composición

$$(R^n)_{\Lambda_i}^+ \hookrightarrow R^n \xrightarrow{s} [0, 1] \xrightarrow{c} (R^n)_{\Lambda_i}^+$$

donde $\epsilon(t) = (t, \dots, t)$ y s es cualquier aplicación de clase infinita que verifique que $s(B[0, 1]) = \{0\}$ y $s((B(0, 2))^c) = 1$.

vi) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $g_i : X \rightarrow (R^n)_{\Lambda_i}^+$ es la aplicación de clase p dada por

$$g_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(\phi_i(x)) & \text{si } x \in U_i \\ (1, \dots, 1) & \text{si } x \notin U_i \end{cases}$$

La aplicación g_i es de clase p porque $\{U_i, X - \phi_i^{-1}(B[0, 2])\}$ es un recubrimiento abierto de X , $g_i|_{X - \phi_i^{-1}(B[0, 2])}$ es constante y $g_i|_{U_i} = \alpha_i \circ \phi_i$.

vii) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $h_i : X \rightarrow (R^n)_{\Lambda_i}^+$ es la aplicación de clase p dada por $h_i(x) = f_i(x) + g_i(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $h_i = f_i + g_i$.

Entonces $((R^n)_{\Lambda_1}^+ \times R) \times \dots \times ((R^n)_{\Lambda_m}^+ \times R) = (R^q)_{\Lambda}^+$ donde $q = m(n+1)$ y $\Lambda = \{p_{k_1}, \dots, p_{k_s}\}$ con $s \leq mn$, y la aplicación de clase p

$$f = ((h_1, \mu_1), \dots, (h_m, \mu_m)) : X \rightarrow ((R^n)_{\Lambda_1}^+ \times R) \times \dots \times ((R^n)_{\Lambda_m}^+ \times R) = (R^q)_{\Lambda}^+$$

es F-inmersión difeomórfica cerrada con $f(X)$ bien situada en $(R^q)_{\Lambda}^+$.

En primer lugar veremos que f es inyectiva. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Por definición de μ_i y ser $X = \bigcup_{i=1}^m \phi_i^{-1}(B(0, 1) \cap (R^n)_{\Lambda_i}^+)$, se tiene que $X = \bigcup_{i=1}^m \mu_i^{-1}(1)$. Tómese entonces un $i \in \{1, \dots, m\}$ con $x \in \mu_i^{-1}(1)$. Si $y \notin \mu_i^{-1}(1)$, claramente $f(x) \neq f(y)$, y si $y \in \mu_i^{-1}(1)$, en particular $x, y \in U_i$ y por tanto

$$h_i(x) = f_i(x) + g_i(x) = \mu_i(x)\phi_i(x) + g_i(x) = \phi_i(x) + g_i(x) = \phi_i(x)$$

(la última igualdad es consecuencia de que $\phi_i(x) \in B[0, 1]$, ya que $\lambda(\phi_i(x)) = \mu_i(x) = 1$ y $\lambda^{-1}(1) = B[0, 1]$). Y, análogamente, $h_i(y) = \phi_i(y)$, así que $h_i(x) \neq h_i(y)$.

Como f es de clase p e inyectiva, X es compacto y $(R^q)_{\Lambda}^+$ es Hausdorff, f es homeomorfismo sobre la imagen y ésta es cerrada.

Veamos ahora que f es F-inmersión de clase p . En primer lugar, nótese que

$$X = \bigcup_{i=1}^m \phi_i^{-1}(B(0, 1) \cap (R^n)_{\Lambda_i}^+) = \bigcup_{i=1}^m \text{Int}(\mu_i^{-1}(1))$$

($x \in \mu_i^{-1}(1) \Leftrightarrow \mu_i(x) = 1 \Leftrightarrow \lambda(\phi_i(x)) = 1 \Leftrightarrow \phi_i(x) \in B[0, 1] \Leftrightarrow x \in \phi_i^{-1}(B[0, 1])$) y se tiene la igualdad $\text{Int}(\phi_i^{-1}(B[0, 1])) = \phi_i^{-1}(B(0, 1))$. Luego si $x \in X$, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ con $x \in \phi_j^{-1}(B(0, 1)) = \text{Int}(\mu_j^{-1}(1))$. Entonces $h_j : X \rightarrow (R^n)_{\Lambda_j}^+$ es F-inmersión de clase p en

x pues sobre $\phi_j^{-1}(B(0,1))$ se verifica que $h_j = f_j + g_j = f_j = \phi_j$, la penúltima igualdad porque si $y \in \phi_j^{-1}(B(0,1)) = \text{Int}(\mu_j^{-1}(1))$, $\lambda(\phi_j(y)) = 1$, así que $\phi_j(y) \in B[0,1]$ y por tanto $g_j(y) = \alpha_j(\phi_j(y)) = (0, \dots, 0)$.

Entonces, por la proposición 2.21, f es F-inmersión C^p en x .

Por último, se trata de ver que la F-subvariedad $f(X)$ de clase p de $(R^q)_\Lambda^+$ está bien situada. Por supuesto, es suficiente ver que $f(\text{Int}X) \subset \text{Int}((R^q)_\Lambda^+)$. Si $x \in \text{Int}X$, $f(x) = ((h_1(x), \mu_1(x)), \dots, (h_m(x), \mu_m(x))) \in ((R^n)_{\Lambda_1}^+ \times R) \times \dots \times ((R^n)_{\Lambda_m}^+ \times R) = (R^q)_\Lambda^+$ y por tanto $\text{ind}_{(R^q)_\Lambda^+}(f(x)) = \sum_{i=1}^m \text{ind}_{(R^n)_{\Lambda_i}^+}(h_i(x))$. Sea $i \in \{1, \dots, m\}$ y veamos que $\text{ind}_{(R^n)_{\Lambda_i}^+}(h_i(x)) = 0$. Si $x \notin \phi_i^{-1}(B(0,2))$, $h_i(x) = g_i(x) = (1, \dots, 1)$ y por tanto $\text{ind}_{(R^n)_{\Lambda_i}^+}(h_i(x)) = 0$, y si $x \in \phi_i^{-1}(B(0,2))$, $x \in U_i$ y $h_i(x) = f_i(x) + g_i(x) = \mu_i(x)\phi_i(x) + g_i(x) = \lambda(\phi_i(x))\phi_i(x) + g_i(x)$, $\lambda(\phi_i(x)) > 0$ pues $\phi_i(x) \in \text{Int}((R^n)_{\Lambda_i}^+)$ ya que $x \in \text{Int}X$ y $g_i(x) = (b_1, \dots, b_n)$ con $b_j \geq 0$, así que $\text{ind}_{(R^n)_{\Lambda_i}^+}(h_i(x)) = 0$. \square

Problema. ¿Es posible encontrar, para cada variedad diferenciable de clase p dada, un Espacio de Banach E , un subconjunto finito y linealmente independiente $\Lambda \subset \mathcal{L}(E, R)$ y una F-subvariedad totalmente bien situada de E_Λ^+ de clase p difeomórfica a la variedad dada? Puede intentarse responder a esta pregunta al menos para variedades diferenciables de dimensión finita (véanse [M.O.2] y [A.M.O.P.]).

3 F-SUBVARIIDADES Y SUMERSIONES

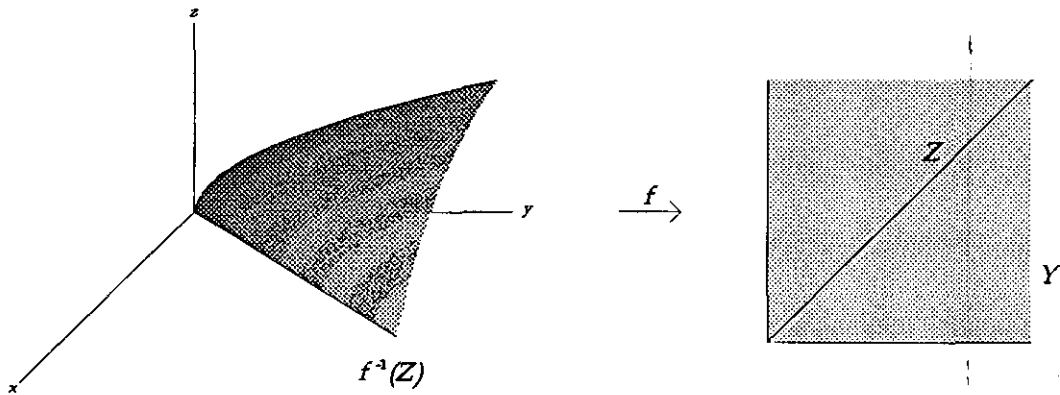
En la sección 2 probamos el siguiente resultado:

Proposición 2.11 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y Z una F-subvariedad C^p de X' . Supongamos que para cada $x \in f^{-1}(Z)$, f es sumersión de clase p en x y f preserva el borde localmente en x . Entonces $f^{-1}(Z)$ es F-subvariedad C^p de X .

Así pues, en este punto el resultado anterior es análogo al que se tenía para subvariedades (véase 4.2.1 de [M.O.]). Nuestro propósito en esta sección es demostrar que la condición de que f preserve el borde localmente en x es imprescindible. Incluimos también un ejemplo (igualmente original) de la necesidad de la condición sobre el borde en 4.2.1 de [M.O.]. De hecho empezaremos por aquí:

Ejemplo 3.1 Sean $X = (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$, $Y = (R^2)_{\{p'_1, p'_2\}}^+$ y $Z = \{(t, t) \in Y / t \geq 0\} \subset Y$.

Por supuesto X e Y son variedades diferenciables de clase infinita y Z es subvariedad C^∞ de Y . Consideramos la aplicación $f : X \rightarrow Y$ de clase infinita dada por $f(x, y, z) = (y, x + z^2)$ para cada $(x, y, z) \in X$. Entonces f es sumersión C^∞ en todo punto de $f^{-1}(Z)$ pero $f^{-1}(Z)$ no es subvariedad diferenciable C^1 de X .



Que $f^{-1}(Z) = \{(x, y, z) \in X / y = x + z^2\}$ no es subvariedad diferenciable C^1 de X se demuestra de modo análogo a lo que se hace en 3.2.7 de [M.O.].

Veamos que para todo $p \in f^{-1}(Z)$, f es sumersión C^∞ en p . Claramente Df es sobreyectiva en todo punto de X , así que si $p \in \text{Int}X$, f es sumersión C^∞ en p . Sea pues $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Diferenciamos dos casos:

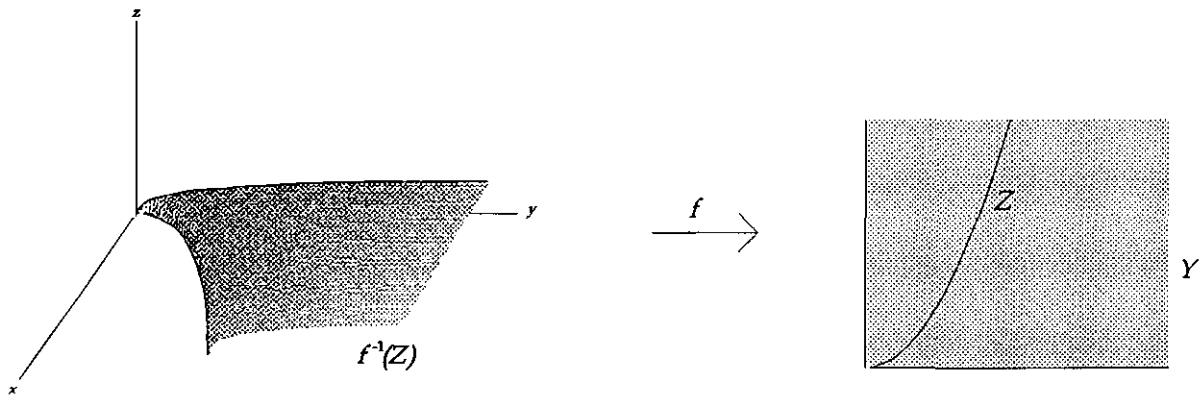
Si $z_0 = 0$, entonces la aplicación $\sigma : Y \rightarrow X$ dada por $\sigma(x, y) = (y, x, 0)$ es sección local C^∞ de f en p , ya que $\sigma(f(x_0, y_0, 0)) = \sigma(y_0, x_0) = (x_0, y_0, 0)$ y $f(\sigma(x, y)) = f(y, x, 0) = (x, y)$.

Y si $z_0 > 0$, como $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(Z)$, $y_0 = x_0 + z_0^2$ así que $y_0 > 0$, y como $p \in \partial X$, $x_0 = 0$. Entonces la aplicación $\sigma' : Y \rightarrow X$ dada por $\sigma'(x, y) = (0, x, +\sqrt{y})$ es sección local C^∞ de f en $p = (0, y_0, z_0)$, pues $\sigma'(f(0, y_0, z_0)) = \sigma'(y_0, z_0^2) = (0, y_0, z_0)$ y $f(\sigma'(x, y)) = f(0, x, +\sqrt{y}) = (x, y)$.

Observación 3.2 Z es F -subvariedad C^∞ de Y (esto se obtiene del teorema 2.18 ó de la proposición 1.2) y $f^{-1}(Z)$ es F -subvariedad C^∞ de X pues es (salvo difeomorfismos) la gráfica de la aplicación de clase infinita $h : Y \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $h(x, z) = x + z^2$.

El siguiente ejemplo es más elaborado y la demostración de que la imagen inversa de la F -subvariedad no es una F -subvariedad es delicada, aunque sea fácil ver que tal imagen inversa no es subvariedad:

Ejemplo 3.3 Sean X e Y las variedades diferenciables de clase infinito definidas en el ejemplo anterior, y sea $Z = \{(x, y) \in Y / y = x^2\} \subset Y$, que es F -subvariedad diferenciable de clase infinita de Y (pero, por el típico problema de tangencia, no es subvariedad). Consideramos la aplicación de clase infinita $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(x, y, z) = (y, x + z^4)$. Entonces f es sumersión de clase infinita en todo punto de $f^{-1}(Z) = \{(x, y, z) \in X / x = y^2 - z^4\}$ pero $f^{-1}(Z)$ no es F -subvariedad de X .



En primer lugar veamos que f es sumersión en todo punto de $f^{-1}(Z)$. Claramente $Df(x)$ es sobreyectiva para todo punto x de X , así que si $p \in \text{Int}X$, f es sumersión C^∞ en p . Sea pues $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Diferenciamos dos casos:

Si $z_0 = 0$, entonces la aplicación $\sigma : Y \rightarrow X$ dada por $\sigma(x, y) = (y, x, 0)$ es sección local C^∞ de f en p , ya que $\sigma(f(x_0, y_0, 0)) = \sigma(y_0, x_0) = (x_0, y_0, 0)$ y $f(\sigma(x, y)) = f(y, x, 0) = (x, y)$.

Y si $z_0 > 0$, como $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(Z)$, $x_0 = y_0^2 - z_0^4$ así que $y_0 > 0$, y como $p \in \partial X$, $x_0 = 0$. Entonces la aplicación $\sigma' : Y \rightarrow X$ dada por $\sigma'(x, y) = (0, x, +\sqrt[4]{y})$ es sección local C^∞ de f en $p = (0, y_0, z_0)$, pues $\sigma'(f(0, y_0, z_0)) = \sigma'(y_0, z_0^4) = (0, y_0, z_0)$ y $f(\sigma'(x, y)) = f(0, x, +\sqrt[4]{y}) = (x, y)$.

Demostramos a continuación que $f^{-1}(Z) = \{(x, y, z) \in (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+ / x = y^2 - z^4\}$

no es F-subvariedad C^1 de $(R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$. Si lo fuese, existiría una estructura diferenciable $[\mathcal{A}]$ de clase 1 en $f^{-1}(Z)$ de modo que $T_{[\mathcal{A}]}$ es la topología usual de $f^{-1}(Z)$ y $j : (f^{-1}(Z), [\mathcal{A}]) \hookrightarrow (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$ es F-inmersión de clase 1.

Sea $C = (U, \phi, (E, \Lambda))$ una carta de $f^{-1}(Z)$ centrada en $p = (0, 0, 0)$. Podemos suponer que $\phi(U)$ es convexo, y necesariamente $E \approx R^2$ por razones topológicas. Además, $\text{card}(\Lambda) = 2$ necesariamente (si fuese $\text{card}(\Lambda) \in \{0, 1\}$, existiría un $\epsilon > 0$ y una curva de clase infinita $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (R^2)_\lambda^+$ con $\beta(0) = 0$ y $D\beta(0) \neq 0$, y por tanto $\alpha = j \circ \phi^{-1} \circ \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$ sería C^1 con $\alpha(0) = 0 \in (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$ así que tendríamos $D\alpha(0) = 0$ por un lado, y por otro $D\alpha(0) = Dj(0, 0, 0) \circ D\phi^{-1}(0, 0) \circ D\beta(0) \neq 0$ ya que $D\beta(0) \neq 0$, $D\phi^{-1}(0, 0)$ es isomorfismo y $Dj(0, 0, 0)$ es inyectiva).

Consideramos la aplicación composición $h = j|_U \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$ que sería F-inmersión C^1 y homeomorfismo sobre la imagen. Luego existirían un entorno abierto V de $(0, 0)$ en $(R^2)_{\{p'_1, p'_2\}}^+$ y un entorno abierto W de $(0, 0, 0)$ en $(R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$ y una aplicación $q = (q_1, q_2) : W \rightarrow V$ de clase 1 con $h(V) \subset W$ y $q \circ h = 1|_V$.

Como $h(0, 0) = (0, 0, 0)$, $\phi(U)$ es convexo y h es homeomorfismo sobre la imagen, se verifica, por razones puramente topológicas, que

$$h(\text{Int}(\phi(U))) \subset \text{Int}(R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+ \quad (\text{I.1})$$

y

$$h(t, 0) \in (R^3)_{p_3}^0 \text{ para todo } (t, 0) \in \phi(U) \quad (\text{I.2})$$

$$h(0, s) \in (R^3)_{p_1}^0 \text{ para todo } (0, s) \in \phi(U) \quad (\text{I.3})$$

o bien

$$h(t, 0) \in (R^3)_{p_1}^0 \text{ para todo } (t, 0) \in \phi(U) \quad (\text{I.4})$$

$$h(0, s) \in (R^3)_{p_3}^0 \text{ para todo } (0, s) \in \phi(U) \quad (\text{I.5})$$

Por comodidad, asumiremos que se cumplen (I.2) y (I.3) ((I.1) por supuesto). Tomemos $x \in f^{-1}(Z) \cap (R^3)_{p_1}^0 \cap U \cap W$ distinto de $(0, 0, 0)$ y un entorno abierto V^x de x en $\{0\} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ con $V^x \subset W$ y V^x sin borde en $\{0\} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Consideramos la aplicación $q_1|_{V^x} : V^x \rightarrow [0, +\infty)$ que es de clase 1, y $q_1(x) = q_1(h(0, s)) = 0$, la primera igualdad porque $x \in U$ y se cumplen (I.1) y (I.3) y la segunda igualdad porque $(q_1(h(0, s)), q_2(h(0, s))) = q(h(0, s)) = (0, s)$. Por el Lema de Invariancia del Borde (véase 1.2.12 de [M.O.]) se cumple que $D(q_1|_{V^x})(x) = 0$, y por tanto $\frac{\partial q_1}{\partial y}(x) = 0$. Como la aplicación q es de clase 1, se tiene que $\frac{\partial q_1}{\partial y}(0, 0, 0) = 0$.

Llegaremos a una contradicción probando que $\frac{\partial q_1}{\partial y}(0, 0, 0) \neq 0$. Para ello consideremos la aplicación $g : [0, +\infty) \rightarrow (R^3)_{\{p_1, p_2, p_3\}}^+$ de clase 1 dada por $g(t) = h(t, 0)$. Se cumple que

$$Dg(0)(1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(h_1(t, 0), h_2(t, 0), h_3(t, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{((h_2(t, 0))^2, h_2(t, 0), 0)}{t} = (0, \lambda, 0),$$

la segunda igualdad por (I.2) e $\text{im}(h) \subset f^{-1}(Z)$ y la última igualdad porque

$$D((h_2(-, 0))^2)(0) = 2h_2(0, 0)D(h_2(-, 0))(0) = 0$$

ya que $h_2(0, 0) = 0$. Ahora bien, $q_1 \circ g = 1|_{[0, +\infty)}$ $((q_1(g(t)), q_2(g(t))) = q(g(t)) = q(h(t, 0)) = (t, 0))$ de modo que

$$1 = D(q_1 \circ g)(0)(1) = D(q_1)(0, 0, 0)(Dg(0)(1)) = D(q_1)(0, 0, 0)(0, \lambda, 0) = \lambda \frac{\partial q_1}{\partial y}(0, 0, 0),$$

así que $\frac{\partial q_1}{\partial y}(0, 0, 0) \neq 0$, y la demostración del ejemplo está concluida.

4 F-SUBVARIEDADES Y TRANSVERSALIDAD

La transversalidad es una de las ideas claves en la Topología Diferencial, permitiendo construir subvariedades como imágenes inversas, invariantes algebraicos de variedades y de aplicaciones diferenciables, etc.

En esta sección tratamos de establecer la relación existente entre transversalidad y el nuevo concepto de subvariedad introducido, en lo que se podría considerar como el test definitivo para la nueva definición. Este test es superado con creces: adaptando la definición de transversalidad a una F-subvariedad (aunque esto sea sólo una cuestión formal), el resultado básico no necesita ahora de hipótesis extraordinarias sobre la situación de la F-subvariedad. En efecto, probaremos el siguiente resultado:

Teorema 4.7(compárese con 7.1.14 de [M.O.]) *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación de clase p que es transversal a Z , una F-subvariedad C^p de Y . Entonces $f^{-1}(Z)$ es F-subvariedad de X .*

Dado que la definición de transversalidad a una F-subvariedad será necesariamente distinta a la dada en 7.1.1 de [M.O.], al menos formalmente por no disponer ahora de cartas adaptadas, usaremos el término F-transversalidad para referirnos a ella, y para facilitar la lectura y evitar confusiones, introduciremos de modo conciso y sin demostraciones aquellos resultados básicos que usaremos en la demostración del Teorema 4.7. La demostración de

éste usa 7.1.14 de [M.O.] en su parte fácil, y en su parte más delicada nos muestra que, en cierto sentido, sólo puede haber transversalidad a una F-subvariedad bien situada.

Como consecuencia de 4.7, obtendremos que la intersección de dos F-subvariedades que se cortan F-transversalmente es una F-subvariedad, sin necesidad de hipótesis adicionales sobre la situación de éstas (proposición 4.22). La comparación de este resultado con 7.3.5 de [M.O.] es una forma más de ver como el concepto de F-subvariedad se impone de modo natural al de subvariedad.

Definición 4.1 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y X'' una F-subvariedad diferenciable de clase p de X' , con $j' : X'' \hookrightarrow X'$ la inclusión. Diremos que f es F-transversal a X'' en un punto $x \in X$ si $f(x) \notin X''$ o bien $f(x) \in X''$ y entonces existen un entorno abierto U de x en X , una carta $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ de X' centrada en $f(x)$ con $f(U) \subset U'$, y existe un suplementario topológico F de $E'' = (\Theta_{C'}^{f(x)})^{-1}(T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X''))$ en E' tales que la aplicación de clase p definida por la composición

$$h : U \xrightarrow{f|_U} U' \xrightarrow{\phi'} \phi'(U') \hookrightarrow E' \xrightarrow{\Theta^{-1}} E'' \times F \xrightarrow{p_2} F$$

es sumersión de clase p en x , donde $\Theta : E'' \times F \rightarrow E'$ es el homeomorfismo lineal dado por $\Theta(u, v) = u + v$.

En tal caso, escribiremos $f \overline{\cap}_x^F X''$. Usaremos la notación $f \overline{\cap}_A^F X''$ para decir que $f \overline{\cap}_x^F X''$ para todo $x \in A$, $A \subset X$, y $f \overline{\cap}^F X''$ para $f \overline{\cap}_X^F X''$.

Observación 4.2 En cualquier caso, aunque h no sea sumersión de clase p en x , si $f(x) \in X''$ se cumple que (las pruebas son inmediatas):

- $T_x h = \Theta_{C_1}^0 \cdot \Theta^{-1} \cdot (\Theta_{C'}^{f(x)})^{-1} \cdot T_x f$ donde $C_1 = (F, 1_F, F)$ es la carta canónica de F .
- $\text{Ker}(T_x h) = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X''))$.

Corolario 4.3 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p F-transversal a una F-subvariedad X'' de clase p de X' . Sea $j' : X'' \rightarrow X'$ la inclusión. Supongamos que $x \in X$ con $f(x) \in X''$ y $f \overline{\cap}_x^F X''$. Entonces:

- $T_{f(x)}X' = \text{im}(T_x f) + T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X'')$.
- $(T_x f)^{-1}(T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X''))$ admite suplementario topológico en $T_x X$.

Observación 4.4 *Nótese que las condiciones a) y b) equivalen a la siguiente condición:*

La aplicación composición

$$\alpha : T_x X \xrightarrow{T_x f} T_{f(x)} X' \xrightarrow{q} T_{f(x)} X' / T_{f(x)} j'(T_{f(x)} X'')$$

es sobreyectiva y $\text{Ker}(\alpha)$ admite suplementario topológico en $T_x X$.

La siguiente proposición recoge la información básica en torno al nuevo concepto de transversalidad:

Proposición 4.5 *Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y X'' una F -subvariedad de clase p de X' . Sea $j' : X'' \rightarrow X'$ la inclusión. Supongamos que $x \in B_k X$, y $f(x) \in X''$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $f \overline{\cap}_x^F X''$.

ii) $f|_{B_k X} \overline{\cap}_x^F X''$.

iii) $T_{f(x)} X' = \text{im}(T_x(f|_{B_k X})) + T_{f(x)} j'(T_{f(x)} X'')$ y $(T_x(f|_{B_k X}))^{-1}(T_{f(x)} j'(T_{f(x)} X''))$ admite suplementario topológico en $T_x(B_k X)$.

iv) Para todo U entorno abierto de x en X , para toda carta $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ de X' centrada en $f(x)$ con $f(U) \subset U'$ y para todo suplementario topológico F de $E'' = (\Theta_{C'}^{f(x)})^{-1}(T_{f(x)} j'(T_{f(x)} X''))$ en E' la aplicación de clase p definida por la composición

$$h : U \xrightarrow{f|_U} U' \xrightarrow{\phi'} \phi'(U') \hookrightarrow E' \xrightarrow{\Theta^{-1}} E'' \times F \xrightarrow{p_2} F$$

es sumersión de clase p en x , donde $\Theta : E'' \times F \rightarrow E'$ es el homeomorfismo lineal dado por $\Theta(u, v) = u + v$.

El siguiente resultado nos muestra que las dos definiciones de transversalidad dadas son equivalentes, siempre que tengamos a la vez una F -subvariedad y una subvariedad:

Proposición 4.6 *Sea $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p , y supongamos que X'' es al mismo tiempo F -subvariedad y subvariedad C^p de X' . Entonces $f \overline{\cap}_x^F X''$ si y sólo si $f \overline{\cap}_x X''$.*

Demostración: Se sigue directamente de las definiciones y la observación 2.15. Es también deducible de la proposición 4.5 (i \Leftrightarrow iii) y su análoga 7.1.7 de [M.O.] y la observación 2.15. \square

Pasamos ya a enunciar y demostrar el resultado más importante de esta sección:

Teorema 4.7 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p con $p \geq 1$ y X'' una F -subvariedad diferenciable de clase p de X' . Supongamos que $f \overline{\neq}^F X''$. Entonces se tienen:

1) Para todo $x \in f^{-1}(X'')$ existe un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' tal que $V^{f(x)} \cap X''$ es subvariedad diferenciable bien situada de X' .

2) $f^{-1}(X'')$ es F -subvariedad diferenciable totalmente bien situada de clase p de X .

Demostración: En primer lugar probaremos 2) a partir de 1). Por la proposición 2.10 basta encontrar para cada $x \in X$ con $f(x) \in X''$ un entorno abierto W^x de x en X tal que $W^x \cap f^{-1}(X'')$ sea F -subvariedad diferenciable totalmente bien situada de X . Por 1) existe un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' tal que $V^{f(x)} \cap X''$ es subvariedad diferenciable bien situada de X' . Consideramos $W^x = f^{-1}(V^{f(x)})$. Por la proposición 4.6 $f|_{W^x} \overline{\neq}(X'' \cap V^{f(x)})$. Como $X'' \cap V^{f(x)}$ es subvariedad diferenciable bien situada de X' , por 7.1.14 de [M.O.] $(f|_{W^x})^{-1}(X'' \cap V^{f(x)}) = W^x \cap f^{-1}(X'')$ es subvariedad diferenciable totalmente bien situada de X , así que también es F -subvariedad totalmente bien situada de X por el Teorema 2.17.

Ahora probamos 1). Por la proposición 4.5, podemos suponer que $\partial X = \emptyset$. Sea $j' : X'' \hookrightarrow X'$ la inclusión, y sea $x \in X$ con $f(x) \in X''$:

a) Supongamos que $f(x) \in \text{Int}X'$. Por ser X'' F -subvariedad de X' , $f(x)$ estaría en $\text{Int}X''$ y se concluiría tomando un abierto $V^{f(x)}$ de X' con $f(x) \in V^{f(x)}$ tal que $V^{f(x)} \cap \partial X' = \emptyset$.

b) No es posible el caso $f(x) \in \partial X' \cap \text{Int}X''$. Como $\partial X = \emptyset$ y $f(x) \in \partial X'$, se tiene que

$$T_x f(T_x X) \subset T_{f(x)}(B_{k'} X')$$

siendo $k' = \text{ind}(f(x))$ en X' , y al ser $f(x) \in \partial X' \cap \text{Int}X''$, se deduce que

$$T_{f(x)} j'(T_{f(x)} X'') \subset T_{f(x)}(B_{k'} X'),$$

obteniendo ambas implicaciones a partir de 1.2.10 de [M.O.]. Luego

$$T_x f(T_x X) + T_{f(x)} j'(T_{f(x)} X'') \subset T_{f(x)}(B_{k'} X') \not\subset T_{f(x)} X',$$

(el contenido estricto por ser $k' \neq 0$), así que $f \overline{\neq}_x^F X''$.

c) Supongamos que $f(x) \in \partial X' \cap \partial X''$. En este caso, dividiremos la demostración en tres pasos:

c.1) Se verifica que $ind_{X''}(f(x)) = ind_{X'}(f(x))$.

Sean $C = (U, \phi, E)$ carta de X centrada en x , $C'' = (U'', \phi'', (E'', \Lambda''))$ carta de X'' centrada en $f(x)$, y $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$ de modo que $f(U) \subset U'$ y $j'(U'') = U'' \subset U'$.

Por supuesto $card(\Lambda'') = ind_{X''}(f(x)) = n$ y $card(\Lambda') = ind_{X'}(f(x)) = m$. Pongamos $\Lambda'' = \{\lambda''_1, \dots, \lambda''_n\}$ y $\Lambda' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_m\}$ así que $E'' = (E'')^0_{\Lambda''} \oplus_T \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ donde $x_i \in E''$ y $\lambda''_j(x_i) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $E' = (E')^0_{\Lambda'} \oplus_T \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ donde $y_r \in E'$ y $\lambda'_s(y_r) = \delta_{rs}$ para todo $r, s \in \{1, \dots, m\}$. Como $j' : X'' \hookrightarrow X'$ es F-inmersión de clase p en $f(x)$, por el Corolario 2.14 se tiene que $n = ind_{X''}(f(x)) \leq ind_{X'}(f(x)) = m$. Por otro lado, se tiene la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 T_x X & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} X' & \xleftarrow{T_{f(x)} j'} & T_{f(x)} X'' \\
 \uparrow \Theta_C^x & & \uparrow \Theta_{C'}^{f(x)} & & \uparrow \Theta_{C''}^{f(x)} \\
 E & \xrightarrow{D(\phi' \circ f|_{U \circ \phi^{-1}})(0)} & E' & \xleftarrow{D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)} & E''
 \end{array}$$

y por ser $f \bar{\cap}_x^F X''$, se cumple que

$$E' = D(\phi' \circ f|_{U \circ \phi^{-1}})(0)(E) + D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)(E'').$$

Por 1.2.10 de [M.O.] se tiene que $D(\phi' \circ f|_{U \circ \phi^{-1}})(0)(E) \subset (E')^0_{\Lambda'}$, $(\partial X = \emptyset)$ y también $D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)(E'')^0_{\Lambda''} \subset (E')^0_{\Lambda'}$. Entonces la aplicación composición

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \hookrightarrow E'' \xrightarrow{D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)} E' \xrightarrow{p_2} \langle y_1, \dots, y_m \rangle$$

es sobreyectiva.

En efecto, dado $w \in \langle y_1, \dots, y_m \rangle$, acabamos de ver que existen elementos $v \in E''$ y $u \in E$ con $w = D(\phi' \circ f|_{U \circ \phi^{-1}})(0)(u) + D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)(v)$. Sea $e'' \in (E'')^0_{\Lambda''}$ con $v = e'' + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Entonces se tiene

$$p_2 \circ D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) = p_2 \circ D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)(v - e'') =$$

$$p_2(w - D(\phi' \circ f|_{U \circ \phi^{-1}})(0)(u)) - p_2(D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)(e'')) = w.$$

Por tanto $n \geq m$ y hemos concluido c.1) (hasta aquí, en cualquier caso, hemos demostrado que $\text{ind}_{X''}(f(x)) = \text{ind}_{X'}(f(x))$ para todo $x \in f^{-1}(X'')$, pero no sabemos nada de los puntos de X'' que no están en la imagen por f de X).

c.2) $j' : X'' \hookrightarrow X'$ es inmersión de clase p en un entorno de $f(x)$.

Por 3.2.2 de [M.O.] es suficiente demostrar que $j : X'' \rightarrow X'$ es inmersión de clase p en $f(x)$, pero esto se sigue del Teorema 1.9: por ser j' F-inmersión de clase p , se tiene la condición 1) de dicho teorema, y la condición 2) es consecuencia inmediata de la afirmación realizada en la demostración del Teorema 2.17 (b \Rightarrow a), ya que $\text{ind}_{X''}(f(x)) = \text{ind}_{X'}(f(x))$ por c.1).

c.3) Existe un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' tal que $X'' \cap V^{f(x)}$ es subvariedad diferenciable bien situada de X' .

De acuerdo con c.2), sólo nos queda ver lo de la buena situación. Si $y \in \partial X''$, entonces $y \in \partial X'$ pues X'' es F-subvariedad diferenciable de clase p de X' , así que de no ser cierto c.3), existiría una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos incluidos en $\text{Int}X'' \cap \partial X'$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = f(x)$. Llegaremos entonces a una contradicción viendo que en tal caso f no sería F-transversal a X'' en x .

Para ello, tomamos $C'' = (U'', \phi'', (E'', \Lambda''))$ carta de X'' centrada en $f(x)$ y $C' = (U', \phi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $f(x)$, con $j'(U'') = U'' \subset U'$. Como $y_n \in \partial X''$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda'(\phi''(y_{n_k})) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, siendo $\{y_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{y_n\}$, que seguiremos denotando por $\{y_n\}$.

Por 1.2.10 de [M.O.], al ser $y_n \in \text{Int}X''$ se tiene que $D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(\phi''(y_n))(E'') \subset (E')_{\lambda'}^0$. Como $\{\phi''(y_n)\}$ converge a 0, $D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(0)(E'') \subset (E')_{\lambda'}^0$, (en efecto, $D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}}) : \phi''(U'') \rightarrow \mathcal{L}(E'', E')$ es continua pues j' es de clase p con $p \geq 1$, así que la evaluación $e : \phi''(U'') \times E'' \rightarrow E'$ dada por $e(z, v'') = D(\phi' \circ j'|_{U'' \circ (\phi'')^{-1}})(z)(v'')$ es continua y por otro lado $(E')_{\lambda'}^0$ es un subespacio cerrado de E').

Definimos H como el subespacio lineal

$$H = \Theta_{C'}^{f(x)}((E')_{\lambda'}^0) \not\subseteq T_{f(x)}X' \quad (I.6)$$

Como $(E')_{\lambda'}^0 \subset (E')_{\lambda'}^0$, si $k' = \text{ind}_{X'}(f(x)) = \text{card}(\Lambda')$, entonces

$$T_{f(x)}(B_{k'}X') = \Theta_{C'}^{f(x)}((E')_{\lambda'}^0) \subset \Theta_{C'}^{f(x)}((E')_{\lambda'}^0) = H. \quad (I.7)$$

Además $T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X'') = T_{f(x)}j'(\Theta_{C''}^{f(x)}(E'')) = \Theta_{C'}^{f(x)}(D(\phi' \circ j'|_{U''} \circ (\phi'')^{-1})(0)(E'')) \subset \Theta_{C'}^{f(x)}((E')_{\lambda'}^0) = H$, o sea

$$T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X'') \subset H \quad (\text{I.8})$$

Por I.6, I.7, I.8 y $T_x f(T_x X) \subset T_{f(x)}(B_{k'}X')$ ($\partial X = \emptyset$) se tiene que

$$T_x f(T_x X) + T_{f(x)}j'(T_{f(x)}X'') \subset T_{f(x)}(B_{k'}X') + H \subset H \not\subset T_{f(x)}X'$$

y por tanto $f \nrightarrow_x^F X''$. De modo que c.3) es cierto y la demostración del teorema está concluida. \square

La relación entre F-transversalidad y sumersiones queda reflejada en el siguiente resultado:

Proposición 4.8 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p , X'' una F-subvariedad de X' y $x \in f^{-1}(X'')$. Entonces:

a) Si $x \in \text{Int}X$, $f(x) \in \text{Int}(X')$ o bien X'' está totalmente bien situada en X' , y f es sumersión de clase p en x , entonces $f \nrightarrow_x^F X''$.

b) Si $x \in \text{Int}X$, $f(x) \in \text{Int}(X')$ o bien f preserva el borde localmente en x , y $f \nrightarrow_x^F \{f(x)\}$, entonces f es sumersión de clase p en x .

Demostración: Análoga a la de 7.1.12 de [M.O.]. \square

Haciendo uso de 7.1.18 de [M.O.], la proposición 4.6 y el Teorema 4.7, obtenemos una prueba rápida del siguiente resultado:

Proposición 4.9 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p y X'' una F-subvariedad cerrada de clase p de X' . Entonces $\{x \in X / f \nrightarrow_x^F X''\}$ es un abierto de X .

Demostración: Sea $x \in X$ con $f \nrightarrow_x^F X''$. Si $f(x) \notin X''$, existe un entorno abierto V^x de x en X tal que $f(V^x) \subset X' - X''$ por ser X'' cerrado, así que $f \nrightarrow_{V^x}^F X''$. Si $f(x) \in X''$, por el Teorema 4.7 existe un entorno abierto $V^{f(x)}$ de $f(x)$ en X' tal que $V^{f(x)} \cap X''$ es subvariedad bien situada de X' . Tomamos un entorno abierto U^x de x en X con $f(U^x) \subset V^{f(x)}$. Entonces para todo $y \in U^x$, $f \nrightarrow_y^F X''$ si y sólo si $f|_{U^x} \nrightarrow_y^F (X'' \cap V^{f(x)})$, lo que equivale (por la proposición 4.6) a que $f|_{U^x} \nrightarrow_y^F (X'' \cap V^{f(x)})$. El resultado se sigue ahora de 7.1.18 de [M.O.]. \square

Antes de dirigirnos a nuestro último objetivo en este capítulo, nos gustaría hacer un comentario sobre la **representación local** de la F-transversalidad. Para F-subvariedades se tiene el resultado análogo (con igual demostración) a 7.1.19 de [M.O.]:

Proposición 4.10 *Sea $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p , X'' una F-subvariedad totalmente bien situada de X' y $x \in f^{-1}(X'')$ con $\text{ind}(x) = k$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $f \overline{\cap}_x^F X''$.

b) *Existen $C = (U, \phi, (E \times G \times R^k, \Lambda p_3))$ carta de X centrada en x con $\Lambda = \{p'_1, \dots, p'_k\}$ y $\phi(U) = V_1 \times V_2 \times V_3$; $C' = (U', \phi', (E \times E'', \Lambda'' p_2))$ carta de X' centrada en $f(x)$, $f(U) \subset U'$, $\phi'(U') = V_1 \times V''$ y $\phi'(U' \cap X'') = \{0\} \times V''$, y una aplicación $\mu : V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow V''$ de clase p tal que $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, \mu(y_1, y_2, y_3))$ para cada $(y_1, y_2, y_3) \in V_1 \times V_2 \times V_3$.*

De este resultado no puede esperarse mejora alguna que venga dada por el nuevo concepto de F-transversalidad, dado que, de acuerdo con el Teorema 4.7, la F-transversalidad conlleva el que la F-subvariedad es (localmente en los puntos de la imagen de f) subvariedad bien situada. Así pues, una mejora en la anterior proposición conllevaría lo mismo para subvariedades bien situadas.

El resto de la sección está dedicado a obtener el siguiente resultado:

Proposición 4.22 *Supongamos que X e Y son F-subvariedades de Z que se cortan F-transversalmente. Entonces su intersección es una F-subvariedad.*

En lo que sigue, y de modo breve y conciso, introducimos la noción de transversalidad de F-subvariedades a través de familias de aplicaciones F-transversales, y probamos el resultado anterior basándonos en el Teorema 4.7.

Definición 4.11 *Sea $\mathcal{F} = \{f_1 : X_1 \rightarrow Y, \dots, f_n : X_n \rightarrow Y\}$ una familia de n aplicaciones de clase p , todas con valores en una misma variedad diferenciable Y . Diremos que \mathcal{F} es F-transversal en $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ si*

$$(f_1 \times \dots \times f_n) \overline{\cap}_{(x_1, \dots, x_n)}^F \Delta$$

donde $\Delta = \{(y, \dots, y) \in Y^n / y \in Y\}$ es la diagonal de Y^n .

Observación 4.12 Δ es F -subvariedad de Y^n pues es de hecho subvariedad bien situada de Y^n , así que \mathcal{F} es F -transversal en $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ si y sólo si \mathcal{F} es transversal en $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$.

Demostración: Lo primero se sigue del Teorema 2.18, aunque puede probarse directamente, y lo segundo es consecuencia de la proposición 4.6. \square

Corolario 4.13 Sean $\mathcal{F} = \{f_1 : X_1 \rightarrow Y, \dots, f_n : X_n \rightarrow Y\}$ una familia de aplicaciones de clase p , y $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ con $f_1(x_1) = \dots = f_n(x_n) = y \in Y$, y supongamos que $k_i = \text{ind}(x_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $k = \sum_{i=1}^n k_i$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) \mathcal{F} es F -transversal en (x_1, \dots, x_n) .
- b) \mathcal{F} es transversal en (x_1, \dots, x_n) .
- c) La aplicación composición

$$\alpha_k : T_x(B_k(\prod_{i=1}^n X_i)) \xrightarrow{T_x(\prod_{i=1}^n f_i)|_{B_k(\prod_{i=1}^n X_i)}} T_{(y, \dots, y)} Y^n \xrightarrow{q} T_{(y, \dots, y)} Y^n / T_{(y, \dots, y)} j'(T_{(y, \dots, y)} \Delta)$$

es sobreyectiva y su núcleo admite suplementario topológico, donde $j' : \Delta \hookrightarrow Y^n$ es la inclusión.

- d) La aplicación composición

$$\hat{\alpha}_k : \prod_{i=1}^n T_{x_i}(B_{k_i} X_i) \xrightarrow{\prod_{i=1}^n T_{x_i}(f_i|_{B_{k_i} X_i})} (T_y Y)^n \xrightarrow{\hat{q}} (T_y Y)^n / D'$$

es sobreyectiva y su núcleo admite suplementario topológico, donde D' es la diagonal de $(T_y Y)^n$.

Demostración: Es consecuencia de la anterior observación y de 7.2.2 de [M.O.]. \square

Un caso especial es cuando $\mathcal{F} = \{f_1 : X_1 \rightarrow Y, f_2 : X_2 \rightarrow Y\}$ es una pareja de aplicaciones de clase p con valores en una misma variedad diferenciable Y . Escribimos entonces $f_1 \overset{F}{\pitchfork}_{(x_1, x_2)} f_2$ si \mathcal{F} es F -transversal en (x_1, x_2) , y el anterior corolario se enuncia así:

Corolario 4.14 Sean $\mathcal{F} = \{f_1 : X_1 \rightarrow Y, f_2 : X_2 \rightarrow Y\}$ una pareja de aplicaciones de clase p , y $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ con $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y \in Y$, y supongamos que $k_i = \text{ind}(x_i)$ para $i = 1, 2$, y $k = k_1 + k_2$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $f_1 \overline{\cap}_{(x_1, x_2)}^F f_2$

b) $f_1 \overline{\cap}_{(x_1, x_2)} f_2$

c) La aplicación composición

$$\hat{\alpha}_k : T_{x_1}(B_{k_1}X_1) \times T_{x_2}(B_{k_2}X_2) \xrightarrow{T_{x_1}(f_1|_{B_{k_1}X_1}) \times T_{x_2}(f_2|_{B_{k_2}X_2})} T_y Y \times T_y Y \xrightarrow{\hat{q}} (T_y Y \times T_y Y)/D$$

es sobreyectiva y su núcleo admite suplementario topológico, donde D es la diagonal de $T_y Y \times T_y Y$.

d) La aplicación

$$\beta_+ : T_{x_1}(B_{k_1}X_1) \times T_{x_2}(B_{k_2}X_2) \xrightarrow{T_{x_1}(f_1|_{B_{k_1}X_1}) + T_{x_2}(f_2|_{B_{k_2}X_2})} T_y Y$$

es sobreyectiva y su núcleo admite suplementario topológico.

e) La aplicación

$$\beta_- : T_{x_1}(B_{k_1}X_1) \times T_{x_2}(B_{k_2}X_2) \xrightarrow{T_{x_1}(f_1|_{B_{k_1}X_1}) - T_{x_2}(f_2|_{B_{k_2}X_2})} T_y Y$$

es sobreyectiva y su núcleo admite suplementario topológico.

En particular se tiene la siguiente observación, que es esencial en lo que sigue:

Observación 4.15 Sean $\mathcal{F} = \{f_1 : X_1 \rightarrow Y, f_2 : X_2 \rightarrow Y\}$ una pareja de aplicaciones de clase p , y $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ con $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y \in Y$. Entonces, si $f_1 \overline{\cap}_{(x_1, x_2)}^F f_2$, se verifica que $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y \in \text{Int}Y$.

Demostración: Se sigue de d) del corolario anterior y 2.1.10 de [M.O]. □

Proposición 4.16 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p , X'' una F -subvariedad C^p de X' con $j' : X'' \hookrightarrow X'$ la inclusión, y $x \in f^{-1}(X'')$. Entonces si $f \overline{\cap}_{(x, f(x))}^F j'$ se tiene que $f \overline{\cap}_x^F X''$ y $f(x) \in \text{Int}X'$.

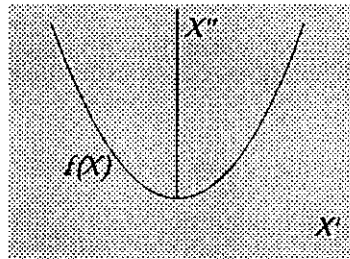
Demostración: Como $f \overline{\neq}_{(x,f(x))}^F j'$, por la observación anterior se tiene que $f(x) \in \text{Int}(X')$, y como X'' es F -subvariedad de X' , $f(x) \in \text{Int}(X'')$. Se concluye entonces de acuerdo con el Teorema 4.7, la proposición 4.6 y 7.2.8 de [M.O.]. \square

Proposición 4.17 Sean $f : X \rightarrow X'$ una aplicación de clase p , X'' una F -subvariedad C^p de X' con $j' : X'' \hookrightarrow X'$ la inclusión, y $x \in f^{-1}(X'')$. Entonces si $f(x) \in \text{Int}(X')$ y $f \overline{\neq}_x^F X''$, se tiene que $f \overline{\neq}_{(x,f(x))}^F j'$.

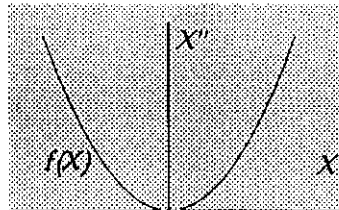
Demostración: Como $f(x) \in X'' \cap \text{Int}(X')$ y X'' es F -subvariedad de X' , $f(x) \in \text{Int}(X'')$, y el resultado se sigue ahora de 4.6 y 7.2.8 de [M.O.]. \square

Sobre esta última proposición, tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.18 La proposición anterior no es cierta con el concepto de transversalidad: si $X = \mathbb{R}$, $X' = \mathbb{R}^2$, $X'' = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ y $f : X \rightarrow X'$ es la aplicación de clase infinita dada por $f(t) = (t, t^2)$, entonces $f \overline{\neq}_0 X''$, $f(0) = (0, 0) \in \text{Int}(X')$ pero $f \overline{\neq}_{(0,(0,0))} j'$ donde $j' : X'' \hookrightarrow X'$ es la inclusión.



Ejemplo 4.19 Si $X = \mathbb{R}$, $X' = (\mathbb{R}^2)_{p_2}^+$, $X'' = \{(0, y) \in X' / y \geq 0\}$ y $f : X \rightarrow X'$ es la aplicación de clase infinita dada por $f(t) = (t, t^2)$, entonces $f \overline{\neq}_0^F X''$ y $f \overline{\neq}_{(0,(0,0))}^F j'$ donde $j' : X'' \hookrightarrow X'$ es la inclusión (obsérvese que $f(0) \notin \text{Int}(X')$).



Definición 4.20 Sean X_1, X_2 F -subvariedades diferenciables de clase p de X , y $j_1 : X_1 \hookrightarrow X$, $j_2 : X_2 \hookrightarrow X$ las inclusiones. Diremos que X_1 y X_2 son F -transversales en $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ si $\mathcal{F} = \{j_1, j_2\}$ es F -transversal en (x_1, x_2) , y en tal caso escribiremos $X_1 \overline{\cap}_{(x_1, x_2)}^F X_2$. Si X_1 y X_2 son F -transversales en todo punto de $X_1 \times X_2$, escribiremos $X_1 \overline{\cap}^F X_2$.

Observación 4.21 Si $x_1 \neq x_2$, obviamente $X_1 \overline{\cap}_{(x_1, x_2)}^F X_2$, así que el caso interesante es cuando $x_1 = x_2 (= x) \in X_1 \cap X_2$. En tal caso, escribiremos simplemente $X_1 \overline{\cap}_x^F X_2$ y diremos que X_1 y X_2 se cortan F -transversalmente en x .

Proposición 4.22 Sean X_1 y X_2 F -subvariedades de clase p de X tales que $X_1 \overline{\cap}^F X_2$. Entonces $X_1 \cap X_2$ es F -subvariedad C^p de X .

Demostración: Sean $j_1 : X_1 \hookrightarrow X$ y $j_2 : X_2 \hookrightarrow X$ las inclusiones, así que por hipótesis $j_1 \overline{\cap}^F j_2$, y por 4.16 $j_1 \overline{\cap}^F X_2$. De acuerdo entonces con el Teorema 4.7 $X_1 \cap X_2 = (j_1)^{-1}(X_2)$ es F -subvariedad de clase p de X_1 totalmente bien situada, y por la proposición 2.8, $X_1 \cap X_2$ es F -subvariedad C^p de X . \square

Capítulo II

SOBRE LA ASOCIACIÓN DE ASAS

Cuando se aborda el tema de la asociación de asas para construir variedades diferenciables, suelen surgir inmediatamente ciertas dudas en torno a los objetos que se están tratando, provocadas por el modo excesivamente técnico con que se introduce la estructura diferenciable. En muchos casos, el problema es resuelto de un modo bastante indirecto: así, por ejemplo, en dimensión tres se presupone conocida la equivalencia entre las categorías diferenciable y topológica, y se trabaja con esta última (en donde la definición de la asociación de asas es directa), o en dimensión cuatro se supone igualmente conocida la equivalencia entre las categorías diferenciable y P.L [Go], para la cual es fácil también manejar la construcción de la asociación de asas [R.S.].

En la categoría diferenciable en cambio, la estructura diferenciable se introduce mediante la técnica de lo que Milnor llamó “redondeamiento de esquinas”. Esta idea fue usada primeramente para introducir una estructura diferenciable en el producto cartesiano de dos variedades con borde diferenciable [Mi.2], y citada por S.Smale [Sm] como el modo natural de introducir la estructura diferenciable en la asociación de asas. Ahora bien, dado que las variedades con borde anguloso dan lugar al contexto natural en el que, sin forzamientos, viven las variedades producto, ¿no ocurrirá lo mismo con las variedades obtenidas por asociación de asas, es decir, no tendrán éstas cabida más natural dentro del contexto de las variedades con borde anguloso? El propósito de la primera sección de este capítulo es analizar esta situación. Desgraciadamente, nuestra respuesta a la anterior cuestión no es un sí tan claro como en el caso del producto de variedades. No obstante,

ciertos aspectos de la cuestión son aclarados: en primer lugar, a diferencia de lo que ocurre con el producto de variedades, la definición de una estructura diferenciable en la variedad topológica que se obtiene al asociar un asa requiere de importantes y no fáciles teoremas de isotopía, cuando no hay compacidad. La construcción detallada que hacemos del proceso dejará patente este hecho. En segundo lugar, dicha construcción nos permitirá obtener una estructura diferenciable con borde anguloso de modo trivial.

Aún así, algunas reflexiones posteriores a la elaboración de esta memoria nos inducen a pensar que, si bien la idea esencial expuesta anteriormente (las variedades con borde anguloso son el contexto natural para la asociación de asas) es correcta, debemos previamente considerar un tipo más general de variedades con borde anguloso: aquellas que localmente sean la unión de varios semiespacios del Espacio Modelo, aunque tal unión no sea convexa. Un paso previo al desarrollo de esta idea sería demostrar el teorema de la función inversa para estos objetos locales (véase [M.O.] para una demostración en el caso de las variedades tratadas en el primer capítulo de la memoria).

Como ejemplo ilustrativo en el uso de la cirugía, técnica íntimamente conectada con la asociación de asas, la sección 2 está dedicada a demostrar un resultado sobre el tema de las esferas exóticas de dimensión cuatro. La dimensión cuatro es la más baja en la que se pueden encontrar dos variedades diferenciables no difeomorfas pero sí homeomorfas, es decir, existen variedades topológicas de dimensión cuatro que soportan al menos dos estructuras diferenciables esencialmente distintas. Sobre este tema, una cuestión muy analizada pero aún sin respuesta es la de saber si existe una variedad diferenciable homeomorfa a la esfera usual de dimensión cuatro, pero no difeomorfa. Este es el llamado problema de la existencia de las esferas exóticas de dimensión cuatro (véanse por ejemplo [A.K.] y [Go.1]).

Nuestra aportación en este tema es dar un modo de obtener cualquier hipotética esfera exótica de dimensión cuatro mediante la técnica de la cirugía. Probaremos lo siguiente:

Teorema 2.1 *Si M es una esfera exótica de dimensión cuatro, existe un número natural k tal que M se obtiene de la suma conexa de k copias de $S^2 \times S^2$ mediante k cirugías disjuntas de tipo $(3, 2)$.*

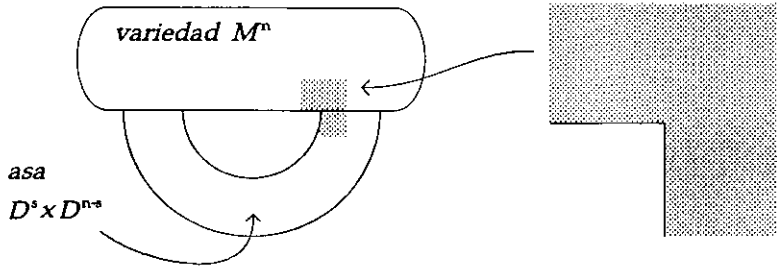
A lo largo de este capítulo quedará patente la relación que existe entre la asociación de asas, la técnica de cirugía y las funciones de Morse (puntos críticos y sus índices). Esta conexión, usada de modo fundamental en el Teorema 2.1, estará presente en los restantes capítulos de la memoria.

1 ESTRUCTURA DIFERENCIABLE EN LA ASOCIACIÓN DE ASAS

En esta sección introducimos con rigor una estructura diferenciable en la variedad topológica que se obtiene por asociación de asas. El desarrollo detallado de este proceso nos permitirá obtener tanto una variedad diferenciable con borde diferenciable (lo que usualmente se define), como una variedad con borde anguloso (en el contexto de [M.O.]). En cambio, el propósito que se persigue es mostrar que ninguna de las dos posibilidades anteriores es la más natural para tratar la asociación de asas. Este hecho quedará patente a partir del Lema 1.4, el cual nos mostrará con sencillez el contexto natural en donde surgen las variedades obtenidas por asociación de asas. Como suele ser norma común, dicho contexto coincide con la intuición geométrica.

Para concretar la idea expuesta, recordamos brevemente algunos conceptos bien conocidos: si E es un espacio de Banach y $\lambda \in \mathcal{L}(E, R)$ (las aplicaciones lineales y continuas de E en R), E_λ^+ denota el conjunto de vectores $x \in E$ tales que $\lambda(x) \geq 0$, y se le llama semiespacio de E definido por λ . Si $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es un conjunto finito y linealmente independiente de aplicaciones lineales y continuas de E en R , E_Λ^+ denota la intersección de los semiespacios $E_{\lambda_i}^+$, $i \in \{1, \dots, n\}$, o sea $E_\Lambda^+ = \bigcap_{i=1}^n E_{\lambda_i}^+$. De E_Λ^+ se dice que es el cuadrante de E definido por $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Los objetos locales que sirven para definir las variedades diferenciables con borde anguloso (tal y como se estudian en [M.O.] y en el capítulo primero de esta memoria) son entonces estos cuadrantes de Espacios de Banach. Así, por ejemplo, las variedades diferenciables de dimensión dos están construidas (salvo isomorfismos) con algunos de los siguientes cuadrantes: R^2 , $\{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 \geq 0\}$, o bien $\{(x_1, x_2) \in R^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. En cambio, al analizar la asociación de asas, observaremos que es otro el tipo de objeto local que aparece en la construcción, definible en general como $\bigcup_{i=1}^n E_{\lambda_i}^+$, ahora no convexo. La idea geométrica la recoge el siguiente

ejemplo: si el asa es de tipo uno y de dimensión dos, el objeto local que se presenta es $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0 \text{ ó } x_2 \geq 0\}$ (véase la figura):



Así pues, parece importante ampliar la categoría de las variedades con borde anguloso, para incluir aquellos objetos que localmente puedan ser también la unión (no necesariamente convexa) de semiespacios del espacio modelo. Un punto clave en esta cuestión sería demostrar el Teorema de la Función Inversa en esta nueva situación local. La prueba que aparece en [M.O.] en el contexto más restringido necesita fuertemente de la convexidad del objeto, pero quizás otra prueba distinta pueda darse en la situación más general. Este trabajo no se ha llevado a cabo en la memoria.

Para simplificar la exposición, tendremos en cuenta lo siguiente:

Observación 1.1 *A lo largo de esta sección el término variedad diferenciable será sinónimo de variedad diferenciable de clase infinita, Hausdorff y paracompacta. Igualmente, supondremos que toda aplicación y estructura diferenciable es de clase infinita.*

Notación 1.2 *A lo largo de esta sección usaremos la siguiente notación:*

$$R_+ = \{t \in \mathbb{R} / t \geq 0\}, \quad R_- = \{t \in \mathbb{R} / t \leq 0\},$$

$$D^s = \{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s / x_1^2 + \dots + x_s^2 \leq 1\},$$

y D_i^s denotará una copia (la i -ésima) de D^s .

Necesitamos previamente recordar algunos resultados esenciales sobre los entornos collares cuando el borde de las variedades no es compacto. El caso compacto nos servirá para introducir la técnica de cirugía que relacionaremos con la asociación de asas: supongamos que X^n e Y^n son dos variedades diferenciables de dimensión n con borde diferenciable, A y B son la unión de varias componentes conexas de los bordes de X^n e Y^n respectivamente,

no necesariamente compactos, y $f : A \rightarrow B$ es un difeomorfismo. Consideramos la variedad diferenciable suma $X \sqcup Y$ ([M.O.], proposición 2.4.1), y en ella la menor relación de equivalencia tal que $a \in A$ está relacionado con $f(a) \in B$. El espacio cociente obtenido por esta relación de equivalencia es denotado por $q : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$. No es difícil ver que dicho espacio es una variedad topológica. Se hace en cambio más complejo dotar de estructura diferenciable a dicha variedad topológica, y que dicha estructura sea única en algún sentido. Esto requiere de la teoría de entornos collares:

Definición (Collar) Si A es la unión de varias componentes conexas del borde de una variedad diferenciable X , un collar c de A en X es una inmersión difeomórfica $c : A \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tal que $c(a, 0) = a$ para todo $a \in A$.

Es trivial comprobar que c es una aplicación abierta y en particular $\text{im}(c) \cap \partial X = A$.

Teorema A (Existencia de collares) Si A es la unión de varias componentes conexas del borde de una variedad diferenciable X de dimensión finita y con borde diferenciable, existe un collar c de A en X .

Teorema B (Isotopía de collares) Si A es la unión de varias componentes conexas del borde de una variedad diferenciable X de dimensión finita y con borde diferenciable, y c_0, c_1 son dos collares de A en X , existe una aplicación diferenciable $C : (A \times \mathbb{R}_+) \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ la aplicación $C_t = C(-, t) : A \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ es un collar de A en X , $C_0 = c_0$ y $C_1 = c_1$.

Teorema C (Isotopía ambiente de los gérmenes de collares) Si A es la unión de varias componentes conexas del borde de una variedad diferenciable X de dimensión finita y con borde diferenciable, y c_0, c_1 son dos collares de A en X , existe una aplicación diferenciable $D : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ la aplicación $D_t = D(-, t) : X \rightarrow X$ es un difeomorfismo, $D_0 = 1|_X$, y existe un abierto $\Omega \subset A \times \mathbb{R}_+$ que contiene a $A \times \{0\}$ y tal que $D_1 \circ c_0|_\Omega = c_1|_\Omega$.

Una sencilla demostración del Teorema A puede verse en [Hi], en la página 113. Una demostración de este resultado para variedades diferenciables modeladas en Espacios de Hilbert se encuentra en [M.O.], pág. 263. El Teorema B aparece demostrado en [Ko], pág. 50. El Teorema C se deduce a partir del Teorema B haciendo uso del Teorema de Extensión de Isotopía de Thom cuando no hay compacidad, aunque sí velocidad acotada (véase [Hi], pág. 181, Teoremas 1.7 y 1.8 y comentario posterior).

Volvamos a la variedad topológica cociente $q : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$, obtenida al identificar todo punto $a \in A$ con $f(a) \in B$, donde $f : A \rightarrow B$ es un difeomorfismo entre A , la unión de varias componentes conexas del borde de X , y B , la unión de varias componentes conexas del borde de Y . Consideramos c_A un collar de A en X , y c_B un collar de B en Y . Sea $g : A \times \mathbb{R} \rightarrow X \sqcup_f Y$ la aplicación dada por $g(a, t) = q(c_A(a, -t))$ si $t \in \mathbb{R}_-$, y $g(a, t) = q(c_B(f(a), t))$ si $t \in \mathbb{R}_+$. Es inmediato entonces probar que existe una única estructura diferenciable en $X \sqcup_f Y$ de modo que las "inclusiones" $q|_{X-A} : X - A \rightarrow X \sqcup_f Y$, $q|_{Y-B} : Y - B \rightarrow X \sqcup_f Y$, y la aplicación $g : A \times \mathbb{R} \rightarrow X \sqcup_f Y$ (unión de los collares c_A y c_B) son inmersiones difeomórficas abiertas.

Haciendo uso de la unicidad de collares (Teorema C), se demuestra que dicha estructura diferenciable es única salvo difeomorfismo con la condición de que las inclusiones $q|_X : X \rightarrow X \sqcup_f Y$, y $q|_Y : Y \rightarrow X \sqcup_f Y$ sean inmersiones difeomórficas. Además este difeomorfismo puede ser escogido de modo que sea la identidad sobre X o sobre Y (véase [Hi], pág. 184).

La técnica de cirugía (véase [Mi.1]) es un ejemplo de la anterior construcción, en el caso en que A (así que también B) son compactas. Con precisión, definimos:

Definición 1.3 (*Cirugía de Milnor-Thom*) Sean M^n una variedad diferenciable de dimensión $n \in \mathbb{N}$, y $f : S^p \times D^{n-p} \rightarrow \text{Int}M^n$ una inmersión difeomórfica. Claramente $M^n - f(S^p \times \text{Int}D^{n-p})$ es una variedad diferenciable y $f(S^p \times \partial D^{n-p})$ es una componente conexa del borde de $M^n - f(S^p \times \text{Int}D^{n-p})$ si $p > 0$ y son dos si $p = 0$. Por supuesto $D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ es una variedad diferenciable con borde $S^p \times S^{n-p-1}$ y $f|_{S^p \times \partial D^{n-p}} : S^p \times \partial D^{n-p} \rightarrow f(S^p \times \partial D^{n-p})$ es un difeomorfismo. Denotaremos entonces por $\mathcal{X}(M^n, f)$ a la variedad diferenciable

$$(M^n - f(S^p \times \text{Int}D^{n-p})) \bigsqcup_{f|_{S^p \times \partial D^{n-p}}} D^{p+1} \times S^{n-p-1}$$

y diremos que se ha obtenido de M^n mediante una cirugía de tipo $(p+1, n-p)$ por la inmersión f .

La definición anterior es diferente a la que aparece en el artículo de Milnor [Mi.1]. La estructura diferenciable definida en tal artículo usa la técnica de encolamiento, lo que evita los importantes teoremas de collares. En cualquier caso, es un ejercicio no difícil comprobar que ambas definiciones proporcionan variedades diferenciables difeomorfas.

Pasemos ya al análisis con detalle de la estructura diferenciable en la asociación de asas. Sea $(M^n, [\mathcal{M}])$ una variedad diferenciable de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ y con borde diferenciable. Sean $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y

$$f_1 : \partial D_1^s \times D_1^{n-s} \rightarrow \partial M^n, \dots, f_k : \partial D_k^s \times D_k^{n-s} \rightarrow \partial M^n$$

una colección de k inmersiones difeomórficas con imágenes disjuntas. Vamos a definir una nueva variedad diferenciable de dimensión finita n y con borde diferenciable

$$\mathcal{X}(M^n; f_1, \dots, f_k; s)$$

de la que diremos que se ha obtenido de M^n por asociación de k asas de tipo s mediante las instrucciones $\{f_i\}$.

El espacio topológico subyacente se obtiene de M y $\bigsqcup_{i=1}^k D_i^s \times D_i^{n-s}$ identificando los puntos que se corresponden por las aplicaciones $\{f_i\}$. Veremos que la variedad topológica así definida tiene una estructura diferenciable natural salvo en las “esquinas” $\partial D_i^s \times \partial D_i^{n-s}$ ($i \in \{1, \dots, k\}$). La estructura diferenciable global se obtendrá entonces por el proceso de redondear las esquinas. Dicha técnica fue usada por Milnor en [Mi.2] para el caso del producto de variedades diferenciables con borde diferenciable. En [Sm] se afirma que la situación local en ambos casos es esencialmente la misma, así que la construcción de Milnor puede usarse también en este caso para dar una definición correcta.

En lo que sigue, analizamos esto con detenimiento. Por supuesto, si $s = 0$, la variedad topológica $\mathcal{X}(M^n; f_1, \dots, f_k; 0)$ es homeomorfa a la unión disjunta de M^n y k copias del disco D^n , y se puede considerar aquí la estructura diferenciable suma. En general, para simplificar la notación, supondremos que asociamos una única asa. El resultado esencial es:

Lema 1.4 *Sea $(M^n, [\mathcal{M}])$ una variedad diferenciable de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ y con borde diferenciable. Sean $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f : \partial D^s \times D^{n-s} \rightarrow \partial M^n$ una inmersión difeomórfica. En $M^n \bigsqcup D^s \times D^{n-s}$ consideramos la relación de equivalencia inducida por f , esto es, la menor relación de equivalencia tal que cada $p \in \partial D^s \times D^{n-s}$ está relacionado con $f(p) \in \partial M^n$. Denotamos por*

$$q : M^n \bigsqcup D^s \times D^{n-s} \longrightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$$

el paso al cociente inducido por la relación de equivalencia, y por $T_{\mathcal{X}}$ la topología cociente en $\mathcal{X}(M^n; f; s)$. Se tiene el siguiente diagrama de aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc}
 M^n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \downarrow i \\
 \bar{i} \cap & & \\
 M^n \sqcup D^s \times D^{n-s} & \xrightarrow{\quad q \quad} & \mathcal{X}(M^n; f; s) \\
 \bar{j} \cup & & \uparrow j \\
 D^s \times D^{n-s} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} &
 \end{array}$$

donde $\bar{i} : M^n \hookrightarrow M^n \sqcup D^s \times D^{n-s}$ y $\bar{j} : D^s \times D^{n-s} \hookrightarrow M^n \sqcup D^s \times D^{n-s}$ son las inclusiones naturales y por definición $i = q \circ \bar{i}$ y $j = q \circ \bar{j}$. Se tiene entonces lo siguiente:

i) $i : M^n \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ y $j : D^s \times D^{n-s} \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ son inyectivas, $T_{\mathcal{X}}$ es la topología final asociada a las "inclusiones" $i : (M^n, T|_{[\mathcal{M}]}) \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ y $j : (D^s \times D^{n-s}, T) \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$. Además $i : (M^n, T|_{[\mathcal{M}]}) \rightarrow (\mathcal{X}(M^n; f; s), T_{\mathcal{X}})$ y $j : (D^s \times D^{n-s}, T) \rightarrow (\mathcal{X}(M^n; f; s), T_{\mathcal{X}})$ son homeomorfismos sobre la imagen y aplicaciones cerradas, $(\mathcal{X}(M^n; f; s), T_{\mathcal{X}})$ es Hausdorff y paracompacto y $(\mathcal{X}(M^n; f; s), T_{\mathcal{X}})$ es compacto si y sólo si M^n lo es.

ii) Dado un collar $h_2 : \partial D^{n-s} \times R_+ \rightarrow D^{n-s}$ de ∂D^{n-s} en D^{n-s} , existe entonces una inmersión difeomórfica $T : f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}) \times R \rightarrow \partial M^n$ tal que $T(f(x, y), t) = f(x, h_2(y, t))$ para todo $t \in R_+$, $x \in \partial D^s$, $y \in \partial D^{n-s}$. (A una tal T se le llama bicollar de $f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$ en ∂M^n).

iii) Sean $h_1 : \partial D^s \times R_+ \rightarrow D^s$ un collar de ∂D^s en D^s , $h_2 : \partial D^{n-s} \times R_+ \rightarrow D^{n-s}$ un collar de ∂D^{n-s} en D^{n-s} , $c : \partial M^n \times R_+ \rightarrow M^n$ un collar de ∂M^n en M^n y $T : f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}) \times R \rightarrow \partial M^n$ un entorno bicollar de $f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$ en ∂M^n tal que $T(f(x, y), t) = f(x, h_2(y, t))$ para todo $t \in R_+$, $x \in \partial D^s$, $y \in \partial D^{n-s}$. Sea $A = \mathcal{X}(M^n; f; s) - j(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$. Se verifica entonces que la aplicación

$$g : \partial D^s \times \text{Int} D^{n-s} \times R \rightarrow A$$

dada por

$$g(x, y, s) = \begin{cases} j(h_1(x, -s), y) & \text{si } s \leq 0 \\ i(c(f(x, y), s)) & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

está bien definida, y existe una única estructura diferenciable $[\mathcal{A}]$ en A tal que

$$i|_{M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})} : (M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}), [\mathcal{M}]|_{M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})}) \longrightarrow (A, [\mathcal{A}]),$$

y

$$j|_{D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s}} : (D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s}) \longrightarrow (A, [\mathcal{A}])$$

son inmersiones difeomórficas y la aplicación

$$g : \partial D^s \times \text{Int}D^{n-s} \times R \rightarrow (A, [\mathcal{A}])$$

es inmersión difeomórfica abierta.

Además $T_{[\mathcal{A}]} = T_{\mathcal{X}}|_A$, y si $[\mathcal{A}']$ es otra estructura diferenciable en A tal que

$$i|_{M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})} : (M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}), [\mathcal{M}]|_{M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})}) \rightarrow (A, [\mathcal{A}'])$$

y

$$j|_{D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s}} : D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s} \rightarrow (A, [\mathcal{A}'])$$

son inmersiones difeomórficas, entonces $(A, [\mathcal{A}'])$ y $(A, [\mathcal{A}])$ son variedades difeomorfas.

iv) La aplicación

$$D : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R \times R_+ \rightarrow \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+))$$

definida como el producto $D = 1_{\partial D^s \times \partial D^{n-s}} \times d^{-1}$, donde

$$d : (R_+ \times R) \cup (R \times R_+) \rightarrow R \times R_+$$

es la aplicación dada por $d(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \frac{2\theta + \pi}{3}, r \sin \frac{2\theta + \pi}{3})$ ($0 \leq r, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) es homeomorfismo, $D(x, y, 0, 0) = (x, y, 0, 0)$ para todo $(x, y) \in \partial D^s \times \partial D^{n-s}$ y la restricción

$$D| : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R \times R_+ - \{(0, 0)\}) \rightarrow \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+) - \{(0, 0)\})$$

es un difeomorfismo.

v) La aplicación $G : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+)) \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ dada por

$$G(x, y, t, s) = \begin{cases} j(h_1(x, -s), h_2(y, t)) & \text{si } s \leq 0, t \geq 0 \\ i(c(T(f(x, y), t), s)) & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

está bien definida y existe una única estructura diferenciable $[\mathcal{X}]$ en $\mathcal{X}(M^n; f; s)$ tal que la inclusión

$$(A, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow (\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}])$$

y la composición

$$F : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R \times R_+ \xrightarrow{D} \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+)) \xrightarrow{G} (\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}])$$

son inmersiones difeomórficas abiertas. Además $T_{[\mathcal{X}]} = T_{\mathcal{X}}$ y $(\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}])$ es una variedad diferenciable de dimensión finita n con borde diferenciable. De hecho, este borde

es el resultado de hacer en ∂M^n una cirugía de tipo $(s, n-s)$ mediante la inmersión difeomórfica $f|_{\partial D^s \times D^{n-s}} : \partial D^s \times D^{n-s} \rightarrow \partial M^n$, es decir:

$$\partial(\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}]) = (\partial M^n - f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s})) \bigsqcup_{f|_{\partial D^s \times \partial D^{n-s}}} D^s \times \partial D^{n-s}$$

En particular, el tipo diferenciable del borde es independiente de la elección de las aplicaciones h_1, h_2, c y T .

Demostración: i) La demostración es sencilla.

ii) Por supuesto $f(\partial D^s \times D^{n-s})$ es subvariedad diferenciable de ∂M^n , $\partial(f(\partial D^s \times D^{n-s})) = f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$ y la aplicación $\tau : f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}) \times R_+ \rightarrow f(\partial D^s \times D^{n-s})$ definida por $\tau(f(x, y), t) = f(x, h_2(y, t))$ es un collar de $f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$ en $f(\partial D^s \times D^{n-s})$. Ahora extendemos el collar t a una inmersión difeomórfica $T : f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}) \times R \rightarrow \partial M^n$. Esto es posible como consecuencia del Teorema de Extensión de Isotopía de Thom (véase [Hi], comentario que sigue al teorema de la pág. 182).

iii) Es trivial comprobar que g está bien definida (ésto incluye ver que su imagen está contenida en A). Notamos ahora lo siguiente:

1) Si $s \geq 2$, $f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s})$ es una componente conexa de $\partial M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}) = \partial(M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}))$, y si $s = 1$, $f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s})$ son dos componentes conexas de $\partial M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}) = \partial(M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}))$.

2) Si $s \geq 2$, $\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s}$ es una componente conexa de $\partial(D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times D^{n-s})$, y si $s = 1$, $\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s}$ es una componente conexa de $\partial(D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times D^{n-s})$.

3) La restricción $f| : \partial D^s \times \text{Int} D^{n-s} \rightarrow (f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s}), [\mathcal{M}]|_{f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s})})$ es un difeomorfismo.

De acuerdo entonces con 1), 2) y 3), y haciendo uso del Teorema C (los gérmenes de dos collares son siempre ambiente isotópicos), iii) se sigue entonces sin más que observar que la aplicación g consiste en unir el collar $\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s} \times R_+ \rightarrow D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s}$ de $\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s}$ en $D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s}$ que lleva (x, y, s) a $(h_1(x, s), y)$, y el collar $f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s}) \times R_+ \rightarrow M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$ de $f(\partial D^s \times \text{Int} D^{n-s})$ en $M^n - f(\partial D^s \times \partial D^{n-s})$ que lleva $(f(x, y), s)$ a $c(f(x, y), s)$.

iv) La demostración es inmediata.

v) Es fácil ver que la aplicación G está bien definida. Se comprueba además que G verifica las siguientes propiedades:

a) $G(x, y, 0, 0) = j(x, y) = i(f(x, y))$ para todo $x \in \partial D^s$, $y \in \partial D^{n-s}$.

b) $\text{im}(G) = i(\text{im}(T) \times R_+) \cup j(\text{im}(h_1) \times \text{im}(h_2))$.

c) Si V es un subconjunto de $\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+))$, se verifica que $i^{-1}(G(V)) = \{c(T(f(x, y), t), s) \in M^n / (x, y, t, s) \in V \cap \partial D^s \times D^{n-s} \times R \times R_+\}$ y $j^{-1}(G(V)) = \{(h_1(x, -s), h_2(y, t)) \in D^s \times D^{n-s} / (x, y, t, s) \in V \cap \partial D^s \times D^{n-s} \times R_+ \times R_-\}$.

d) $i^{-1}(\text{im}(G)) = i(\text{im}(T) \times R_+)$ y $j^{-1}(\text{im}(G)) = \text{im}(h_1) \times \text{im}(h_2)$.

e) G es una aplicación abierta.

f) G es inyectiva y continua, así que es un homeomorfismo sobre la imagen.

g) $G(\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+) - \{(0, 0)\})) \subset A$, y la restricción

$$G| : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+) - \{(0, 0)\}) \longrightarrow (A, [\mathcal{A}])$$

es una inmersión difeomórfica abierta.

Para demostrar g), nótese en primer lugar que

$$\{\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R_+ \times (R_- - \{0\}), \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R \times R_+) - (R_+ \times \{0\})), \\ \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R_+ - \{0\}) \times R\}$$

es un recubrimiento por abiertos de $\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+) - \{(0, 0)\})$.

Ahora bien, $G(x, y, t, s) = j(h_1(x, -s), h_2(y, t))$ si $(x, y, t, s) \in \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R_+ \times (R_- - \{0\})$, así que G es inmersión en todo punto de $\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R_+ \times (R_- - \{0\})$ pues h_1 , h_2 y $j|_{D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s}} : D^s \times D^{n-s} - \partial D^s \times \partial D^{n-s} \rightarrow (A, [\mathcal{A}])$ son inmersiones difeomórficas (la última aplicación por iii).

Igualmente, $G(x, y, t, s) = i(c(T(f(x, y), t), s))$ si $(x, y, t, s) \in \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R \times R_+ - R_+ \times \{0\})$, así que G es inmersión en todo punto de $\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R \times R_+ - R_+ \times \{0\})$ pues c , T , f y la aplicación $i|_{M^n - f(\partial D^s \times D^{n-s})} : (M^n - f(\partial D^s \times D^{n-s}), [\mathcal{M}]|_{M^n - f(\partial D^s \times D^{n-s})}) \rightarrow (A, [\mathcal{A}])$ son inmersiones difeomórficas (la última aplicación de acuerdo con iii).

Y que G es inmersión en todo punto de $\partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R_+ - \{0\}) \times R$ es consecuencia de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R_+ - \{0\}) \times R & \xrightarrow{G|} & (A, [\mathcal{A}]) \\
 & \searrow \Theta & \swarrow g \\
 & & \partial D^s \times \text{Int}D^{n-s} \times R
 \end{array}$$

donde Θ es la inmersión difeomórfica definida por $\Theta(x, y, t, s) = (x, h_2(y, t), s)$ para todo $(x, y, t, s) \in \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R_+ - \{0\}) \times R$.

La información restante de v es ahora fácil de obtener. \square

A la vista del resultado anterior, es ahora fácil obtener una estructura diferenciable con borde anguloso en la variedad topológica $(\mathcal{X}(M^n; f; s), T_{\mathcal{X}})$. Enunciado con precisión, se tiene lo siguiente:

Lema 1.5 *El Lema 1.4 es cierto si cambiamos iv) por iv_{∂}) y v) por v_{∂}), donde los nuevos apartados iv_{∂}) y v_{∂}) son:*

iv_{∂}) La aplicación

$$D_{\partial} : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R_+ \times R_+ \longrightarrow \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+))$$

definida como el producto $D_{\partial} = 1_{\partial D^s \times \partial D^{n-s}} \times d_{\partial}^{-1}$, donde

$$d_{\partial} : (R_+ \times R) \cup (R \times R_+) \rightarrow R_+ \times R_+$$

es la aplicación dada por $d_{\partial}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \frac{2\theta+\pi}{6}, r \sin \frac{2\theta+\pi}{6})$ ($0 \leq r, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) es homeomorfismo, $D_{\partial}(x, y, 0, 0) = (x, y, 0, 0)$ para todo $(x, y) \in \partial D^s \times \partial D^{n-s}$ y la restricción

$$D_{\partial}| : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times (R_+ \times R_+ - \{(0, 0)\}) \longrightarrow \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+) - \{(0, 0)\})$$

es un difeomorfismo.

v_{∂}) La aplicación $G : \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+)) \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ dada por

$$G(x, y, t, s) = \begin{cases} j(h_1(x, -s), h_2(y, t)) & \text{si } s \leq 0, t \geq 0 \\ i(c(T(f(x, y), t), s)) & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

está bien definida y existe una única estructura diferenciable $[\mathcal{X}_\partial]$ en $\mathcal{X}(M^n; f; s)$ tal que la inclusión

$$(A, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow (\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}_\partial])$$

y la composición

$$F_\partial: \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times R_+ \times R_+ \xrightarrow{D_\partial} \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+)) \xrightarrow{G} (\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}_\partial])$$

son inmersiones difeomórficas abiertas. Además $T_{[\mathcal{X}_\partial]} = T_{\mathcal{X}}$ y $(\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}_\partial])$ es una variedad diferenciable de dimensión finita n con borde anguloso: $\partial^2(\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}_\partial]) = i(f(\partial D^s \times \partial D^{n-s}))$ y $\partial^k(\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}_\partial]) = \emptyset$ si $k > 2$.

Terminamos la sección con la discusión que se anunciaba en la introducción en torno a las estructuras diferenciables con borde diferenciable (Lema 1.4) y con borde anguloso (Lema 1.5) dadas en la asociación de asas. En ambos casos, dicha estructura diferenciable se consigue introduciendo una aplicación auxiliar, D para el caso con borde diferenciable, y D_∂ para el caso con borde anguloso (en el contexto de [M.O.]). Ahora bien, ¿por qué el uso de estas aplicaciones auxiliares para “forzar” la estructura diferenciable en la asociación de asas? Lo natural, a nuestro entender, sería dotar a $\mathcal{X}(M^n; f; s)$ de la única “estructura diferenciable” tal que la inclusión $(A, [\mathcal{A}]) \hookrightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ y la aplicación $G: \partial D^s \times \partial D^{n-s} \times ((R_+ \times R) \cup (R \times R_+)) \rightarrow \mathcal{X}(M^n; f; s)$ (como se definen en el Lema 1.4) son inmersiones difeomórficas abiertas. En tal caso, la estructura diferenciable en $\mathcal{X}(M^n; f; s)$ podría tal vez caracterizarse como la única (salvo difeomorfismos) para la cual las inclusiones i y j son inmersiones difeomórficas (nótese que la aplicación $i: (M^n, [\mathcal{M}]) \rightarrow (\mathcal{X}(M^n; f; s), [\mathcal{X}])$ no es siquiera diferenciable). Queda pues abierta la puerta al estudio de las variedades con borde anguloso generalizado, es decir, las variedades diferenciables modeladas con uniones de semiespacios del Espacio Modelo.

2 UN MODO DE OBTENER CUALQUIER HIPOTÉTICA ESFERA EXÓTICA DE DIMENSIÓN CUATRO

El propósito de esta sección es establecer un modo de obtener cualquier hipotética esfera exótica de dimensión cuatro a partir de la técnica de cirugía. En la prueba del resultado básico interviene de modo fundamental la relación que existe entre las funciones de Morse (puntos críticos y sus índices), la asociación de asas y la técnica de cirugía. Esta conexión estará igualmente presente en los capítulos posteriores.

Una esfera exótica de dimensión cuatro es una variedad diferenciable homeomorfa a S^4 y no difeomorfa. Aunque en la actualidad se conocen ejemplos de variedades topológicas compactas y sin borde de dimensión cuatro que admiten al menos dos estructuras diferenciables esencialmente distintas, tal cuestión es desconocida para el caso de la esfera topológica de dimensión cuatro. Nuestra aportación en este punto viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 2.1 *Si M es una esfera exótica de dimensión cuatro, existe un número natural k tal que M se obtiene de la suma conexa de k copias de $S^2 \times S^2$ mediante k cirugías disjuntas de tipo (3, 2).*

Demostración: Como M es homeomorfa a S^4 , M y S^4 comparten la forma de intersección, así que por un conocido resultado de Wall (Teorema 2 de [Wa]), M y S^4 son h -cobordantes, es decir, existe una variedad diferenciable compacta W^5 de dimensión cinco tal que $\partial W^5 \approx M \sqcup S^4$ (la suma de las variedades M y S^4) y $M \hookrightarrow W^5$ y $S^4 \hookrightarrow W^5$ son equivalencias de homotopía.

Sea $f : W^5 \rightarrow [0, 1]$ una función de Morse para el h -cobordismo $(W^5; S^4, M)$, esto es, f es de clase infinita, $S^4 = f^{-1}(0)$, $M = f^{-1}(1)$ y todos los puntos críticos de f están incluidos en $\text{Int}W^5$ y son no degenerados. Como $H_0(W^5, S^4; \mathbb{Z}) = 0$, la función f puede tomarse sin puntos críticos de índice 0 ([Mi], Teorema 8.1). Además, al ser $S^4 \hookrightarrow W^5$ una equivalencia de homotopía, W^5 y S^4 son simplemente conexas, por lo que f puede tomarse también sin puntos críticos de índice 1. Entonces la función $-f : W^5 \rightarrow [-1, 0]$ es de Morse para el h -cobordismo $(W^5; S^4, M)$ y no tiene puntos críticos de índice 4 ó 5. De igual manera se puede entonces modificar esta función f hasta que no tenga puntos

críticos de índice 0 ni 1, sin que por ello aparezcan puntos críticos de índice 4 ó 5.

Obtenemos así una función de Morse $f : W^5 \rightarrow [0, 1]$ para el h -cobordismo $(W^5; S^4, M)$ con sólo puntos críticos de índice 2 y 3, y por el Teorema 4.8 de [Mi] podemos suponer que verifica además que

$$\{x \in C(f) / \text{ind}(x) = 2\} \subset f^{-1}(0.2)$$

y

$$\{x \in C(f) / \text{ind}(x) = 3\} \subset f^{-1}(0.3).$$

Sean $N = f^{-1}(0.25)$ la variedad diferenciable de dimensión cuatro compacta y sin borde obtenida como la imagen inversa del valor regular 0.25, $k = \text{card}\{x \in C(f) / \text{ind}(x) = 2\}$ y $r = \text{card}\{x \in C(f) / \text{ind}(x) = 3\}$. Es conocido entonces que $f^{-1}([0, 0.25])$ es una variedad diferenciable compacta de dimensión cinco que se obtiene de $f^{-1}([0, 0.1])$ por asociación de k asas disjuntas de tipo (2, 3) (Segundo Teorema de Deformación de la Teoría de Morse, [S.T], proposición X.9.16), así que por el apartado v) del Lema 1.4 la variedad diferenciable N se obtiene de S^4 mediante k cirugías disjuntas de tipo (2, 3). Del mismo modo se demuestra que M se obtiene a partir de N mediante r cirugías disjuntas de tipo (3, 2).

Supongamos de momento que $w_2(\tau_N) \in H^2(N; \mathbb{Z}_2)$, la segunda clase de Stieffel-Whitney de N , es trivial. Entonces (véase [Ma], pág. 12) N es difeomorfa a $\#_k S^2 \times S^2$, la suma conexa de k copias de $S^2 \times S^2$ (se entiende S^4 si $k = 0$), y M se obtendría de $\#_k S^2 \times S^2$ mediante r cirugías disjuntas de tipo (3, 2).

Ponemos ahora $W = \#_k S^2 \times S^2$ y $f_1 : S^2 \times D^2 \rightarrow W, \dots, f_r : S^2 \times D^2 \rightarrow W$ una colección de r inmersiones difeomórficas preservando la orientación tales que $M = \mathcal{X}(W, f_1, \dots, f_r)$. Sea $X = W - \cup_{i=1}^r f_i(S^2 \times \text{Int}D^2)$. Se tiene que $H_i(W, X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^r$ si $i = 2, 4$ y es nula en cualquier otro caso. Esto es debido a que

$$\begin{aligned} H_i(W, X; \mathbb{Z}) &\approx H_i(\cup_{j=1}^r S^2 \times D^2, \cup_{j=1}^r S^2 \times S^1; \mathbb{Z}) \approx \oplus_{j=1}^r H_i(S^2 \times D^2, S^2 \times S^1; \mathbb{Z}) \approx \\ &\oplus_{j=1}^r H^{4-i}(S^2 \times D^2, \mathbb{Z}) \approx \oplus_{j=1}^r H_{i-2}(S^2, \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

donde se ha usado el teorema de escisión, el teorema de la homología de una unión disjunta y los teoremas de dualidad de Lefschetz -variedades con borde- y de Poincaré. De forma similar se prueba que $H_i(M, X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^r$ si $i = 3, 4$, siendo trivial en los otros casos. Consideramos parte de las sucesiones de homología de los pares topológicos (M, X) y

(W, X) (se sobreentienden los coeficientes enteros):

$$\dots \rightarrow H_3(M) \rightarrow H_3(M, X) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_2(M, X) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(M) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H_3(W, X) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(W) \rightarrow H_2(W, X) \rightarrow H_1(X) \rightarrow \dots$$

En la primera sucesión, $H_3(M, X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^r$ y los grupos $H_3(M; \mathbb{Z})$, $H_2(M; \mathbb{Z})$, $H_2(M, X; \mathbb{Z})$ y $H_1(M; \mathbb{Z})$ son triviales, de donde $H_2(X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^r$ y $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$. En la segunda sucesión $H_3(W, X; \mathbb{Z})$ y $H_1(X; \mathbb{Z})$ son triviales, mientras que $H_2(X; \mathbb{Z}) \approx H_2(W, X; \mathbb{Z})$ y $H_2(W; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{2k}$. Estos cálculos prueban que $k = r$. Además $k \in \mathbb{N}$ pues de lo contrario f no tendría puntos críticos, así que M no sería una esfera exótica.

Para concluir la demostración basta observar que el h -cobordismo $(W^5; M, S^4)$ puede tomarse sumergido en R^5 , lo que permite evitar el Teorema de Wall ya citado. En efecto, al ser M homeomorfa a S^4 , $\pi_1(M)$ es trivial, $w_2(\tau_M) = 0$ y el índice de M (esto es, la signatura de la forma de intersección de M) es cero, por lo que existe una inmersión difeomórfica $i : M \rightarrow R^5$ (véase [Co]). Por el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer se tiene que $R^5 - M$ es la unión de dos abiertos disjuntos G_0 y G_1 , uno de ellos acotado (pongamos G_0) y tal que $\overline{G_0}$, que es $G_0 \cup M$, es una variedad diferenciable compacta de dimensión cinco con borde M . Se verifica también que $\overline{G_1} = G_1 \cup M$, y aplicando el Teorema de Seifert y van Kampen a la unión $R^5 = \overline{G_0} \cup \overline{G_1}$ se deduce que $\overline{G_0}$ es simplemente conexo (pues M lo es), y por la sucesión de homología de Mayer-Vietoris de esta unión se deduce que $\overline{G_0}$ tiene la homología de un punto. (De hecho esto demuestra, de acuerdo con [Mi], pág. 110, que $\overline{G_0}$ es homeomorfa a D^5).

Entonces, si $j : D^5 \rightarrow G_0$ es una inmersión difeomórfica arbitraria, se tiene que $W^5 = \overline{G_0} - j(IntD^5)$ es el h -cobordismo buscado. W^5 es, desde luego, una variedad diferenciable compacta y de dimensión cinco cuyo borde es la suma de M y S^4 , y por ser $\overline{G_0}$ simplemente conexo y tener la homología de un punto, $S^4 \rightarrow W^5$ y $M \rightarrow W^5$ son equivalencias de homotopía. Por lo tanto, $N = f^{-1}(0.25)$ es una subvariedad diferenciable de R^5 compacta y de codimensión uno, por lo que $w_2(\tau_N) = 0$. En efecto, si ν^1 es el fibrado normal de N en R^5 , se verifica que $\tau_{R^5}|_N \approx \tau_N \oplus \nu^1$ y $0 = w_2(\tau_{R^5}|_N) = w_2(\tau_N \oplus \nu^1) = w_2(\tau_N) + w_1(\tau_N) \smile w_1(\nu^1) = w_2(\tau_N)$, la última igualdad porque N es orientable.

□

De acuerdo pues con el teorema anterior, el estudio de la existencia de esferas exóticas de dimensión cuatro se ve englobado dentro del estudio de las colecciones de k nudos

disjuntos S^2 en $\#_k S^2 \times S^2$ con fibrado normal trivial. Por ejemplo, para $k = 1$, puede probarse que si $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^2 \times S^2$ es una inmersión difeomórfica, entonces $\mathcal{X}(S^2 \times S^2, f)$ es homeomorfa a S^4 si y sólo si $S^2 \times S^2 - f(S^2 \times \{0\})$ es simplemente conexo.

Observamos finalmente que las hipotéticas esferas exóticas de dimensión cuatro son en cualquier caso subvariedades diferenciables de R^5 de codimensión uno ([Co]). En el capítulo siguiente probaremos que las hipersuperficies que se obtienen como la imagen inversa de un valor regular por una función de R^5 en R de Morse y propia, que no tiene puntos críticos en la región exterior, son homeomorfas a S^4 , así que candidatas a esferas exóticas. Más sencillo será probar que una hipersuperficie de R^5 homeomorfa a S^4 es una esfera exótica si todas las funciones de Morse propias de R^5 en R que la describen como nivel regular tienen puntos críticos en la región exterior.

Capítulo III

SOBRE HIPERSUPERFICIES DE R^n DADAS COMO CEROS DE FUNCIONES

Los teoremas esenciales de la Teoría de Morse Clásica establecen la relación entre los puntos críticos de una función de Morse definida en una variedad sin borde anguloso y cómo los niveles regulares de la variedad se van obteniendo de otros niveles regulares por asociación de asas. Estos resultados han sido generalizados a variedades con borde anguloso (véanse por ejemplo [Va] y [H.L.]).

Nuestro propósito en cambio es analizar esta relación para hipersuperficies del Espacio Euclídeo y funciones de Morse definidas sobre éste para las que dicha hipersuperficie es un nivel regular. La diferencia básica con los Teoremas Clásicos es la consideración de los puntos críticos de la componente conexa no acotada que define la hipersuperficie en el Espacio Euclídeo. Con mayor precisión: estudiamos la relación entre una subvariedad diferenciable M^n de R^{n+1} conexa compacta sin borde de codimensión uno, y los puntos críticos en la componente conexa no acotada de una función de clase infinita $f : R^{n+1} \rightarrow R$ tal que M^n coincida con los ceros de f y el cero sea un valor regular de f (sección 2). Ahora bien, esta función f debe ser lo suficientemente agradable como para permitir el estudio de esta relación: por supuesto, si M es la fibra no vacía de un valor regular de una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ diferenciable y propia, entonces M es una hipersuperficie de R^{n+1} compacta y sin borde (no necesariamente conexa). Demostraremos (sección 1) que el recíproco de este resultado es también cierto.

La referencia más importante para este capítulo es [Mi]: todos los conceptos esenciales cuya definición no sea precisada pueden encontrarse allí. Igualmente se tiene allí la fuente de muchos de los resultados que usaremos. Otros dos puntos claves, el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer y un teorema de Deformación de la Teoría de Morse, se encuentran en [G.P.] y [S.T] respectivamente.

El capítulo está dividido en dos secciones. El objetivo de la primera sección es construir, para cualquier subvariedad diferenciable M^n de R^{n+1} compacta sin borde de codimensión uno, una aplicación diferenciable $f : R^{n+1} \rightarrow R$ con $M^n = f^{-1}(0)$ que tenga el mayor número posible de buenas propiedades. Probamos así el siguiente resultado:

Teorema 1.13 *Sea M^n una subvariedad diferenciable de clase infinita de R^{n+1} compacta sin borde de codimensión uno. Entonces existe una función de clase infinita $f : R^{n+1} \rightarrow R$ propia y de Morse con un número finito de puntos críticos tal que $M^n = f^{-1}(0)$ y el cero es un valor regular de f .*

Desde luego, si M es la fibra no vacía de un valor regular de una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ diferenciable y propia, entonces M es una subvariedad diferenciable de R^{n+1} de codimensión uno, compacta y sin borde, aunque no necesariamente conexa: el teorema anterior puede entenderse como el recíproco de este resultado bien conocido.

Por otro lado, las buenas propiedades de la aplicación obtenida en el Teorema 1.13 nos van a permitir estudiar la relación entre el tipo diferenciable (o topológico o de homotopía) de M^n y los puntos críticos de f en la componente conexa no acotada del complementario de M^n en R^{n+1} . Este es el objetivo de la sección 2, cuyo resultado más importante es el siguiente:

Teorema 2.1 *Sea M^n una subvariedad diferenciable de clase infinita de R^{n+1} , conexa, compacta y sin borde, y de codimensión uno, obtenida como la fibra de un valor regular de una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ de clase infinita. Supongamos que f cumple la condición de Palais-Smale o tiene sus fibras compactas.*

Entonces, si f no tiene puntos críticos en la componente conexa no acotada de $R^{n+1} - M^n$, se verifica que:

- i) M^n es una 3-esfera de homotopía si $n = 3$.*
- ii) M^n es homeomorfa a S^4 si $n = 4$.*
- iii) M^n es difeomorfa a S^n si $n \geq 5$ ó $n = 2$.*

Algunas aplicaciones de este resultado son analizadas también en la sección 2. Para dimensiones altas se obtiene una caracterización de las subvariedades diferenciables M^n de R^{n+1} compactas conexas sin borde que son difeomorfas a S^n cuando $n \geq 5$, como aquellas para las que existe una función diferenciable $f : R^{n+1} \rightarrow R$ con $M^n = f^{-1}(0)$, el 0 es valor regular de f , f es propia y de Morse y no tiene puntos críticos en la componente conexa no acotada del complementario de M^n en R^{n+1} (Corolario 2.8). Por otro lado, para superficies sumergidas en R^3 , se deduce un curioso resultado:

Corolario 2.5 *Sea S una superficie conexa sumergida en R^3 dada como la fibra de un valor regular de una aplicación diferenciable $f : R^3 \rightarrow R$ propia. Entonces, si f tiene un único punto crítico en la componente conexa no acotada de $R^3 - S$, y es no degenerado, S es difeomorfa al toro.*

El anterior resultado se aplica a un ejemplo concreto: en dicho ejemplo hay que resaltar la existencia de una cantidad infinita de puntos críticos en la región acotada que nos define la superficie en R^3 , así que, en este caso, el recurrir a los puntos críticos de esta región no nos aporta información sobre la superficie.

Por otra parte, contrario a lo que en un primer momento se podría pensar, no existe relación entre el índice del punto crítico de la región exterior y el modo en que el toro está sumergido en R^3 (dado que el índice del punto crítico es siempre dos), de modo que nuestro estudio sólo decide el tipo de homotopía de la superficie, y no cómo está sumergida. Esto está en consonancia con una idea clave de la Teoría de Morse: la relación entre los índices de los puntos críticos y la homología de los niveles regulares.

De hecho, la idea de la demostración del Corolario 2.5 nos permite el estudio de las hipersuperficies (en dimensiones arbitrarias) a partir de los puntos críticos de la región exterior, mediante el uso de los Teoremas de Deformación Clásicos de la Teoría de Morse. Así, por ejemplo, podemos obtener un cálculo de la homología de la hipersuperficie a partir de los puntos críticos (y sus índices) de la región exterior, análogo al que se obtiene en las Desigualdades de Morse a partir de los puntos críticos en la región acotada.

Por último, hacer notar que en las demostraciones de los teoremas principales es esencial el siguiente resultado de carácter topológico, que probamos en la sección 1:

Lema 1.9 *Sea $f : R^{n+1} \rightarrow R$ una aplicación diferenciable con $n \geq 1$. Supongamos que f es de fibras compactas y no acotada superiormente. Entonces f es una aplicación propia.*

1 CONSTRUCCION DE FUNCIONES CON BUENAS PROPIEDADES

Como se anunciaba en la introducción a este capítulo, el propósito de esta sección es la construcción de una función con el mayor número de buenas propiedades cuyo conjunto de ceros sea una hipersuperficie compacta dada del Espacio Euclídeo. Por buenas propiedades de la función estamos entendiendo aquellas que nos permitan obtener cierta información sobre la hipersuperficie que tenemos.

En este proceso de obtención de información sobre la hipersuperficie a partir de la función, usaremos de modo básico la Teoría de Deformación de Morse, de modo que dos propiedades esenciales que debe verificar nuestra función serán la de ser de Morse y la condición de Palais-Smale (requisito éste último sobre la compacidad de la función). De hecho conseguiremos que ésta sea propia, condición que implica el ser de Palais-Smale.

Otra propiedad importante de la función será el que tenga una cantidad finita de puntos críticos, y en particular tendremos finitos puntos críticos en la región no acotada que define nuestra hipersuperficie compacta en el Espacio Euclídeo. Estas propiedades de la función constituyen las hipótesis básicas a partir de las cuales iniciamos nuestro estudio de la hipersuperficie en la sección 2.

Enunciemos con precisión el problema que ahora nos ocupa: por supuesto, si $f : R^{n+1} \rightarrow R$ es una aplicación de clase infinita y propia, la imagen inversa no vacía de cualquier valor regular de f es una subvariedad diferenciable de clase infinito de R^{n+1} compacta sin borde, de codimensión uno, aunque no necesariamente conexa. El teorema principal de esta sección es más que el recíproco de este resultado bien conocido. Antes de enunciarlo, recordamos alguna notación básica:

Observación 1.1 *A lo largo de este capítulo, M^n denotará una subvariedad diferenciable de clase infinita de R^{n+1} , sin borde y de codimensión uno. Toda esta información será resumida diciendo que M^n es una hipersuperficie de R^{n+1} , y si $n = 2$, diremos que M^2 es una superficie de R^3 . Igualmente toda aplicación y variedad diferenciable se supondrá de clase infinita.*

Teorema 1.13 *Sea M^n una hipersuperficie compacta de R^{n+1} . Entonces existe una función diferenciable $f : R^{n+1} \rightarrow R$ de Morse, propia y con un número finito de puntos críticos, de modo que 0 es un valor regular de f y M^n es su imagen inversa.*

Parece interesante plantearse el anterior problema para subvariedades diferenciables compactas sin borde de codimensión uno de una variedad diferenciable arbitraria, no necesariamente el Espacio Euclídeo. Como veremos después, este resultado no es cierto con esta generalidad, debido a que hay variedades en las que no se cumple el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer. ¿Es cierto el resultado cuando en la variedad ambiente se verifica dicho teorema?

En lo que sigue recordamos brevemente el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer e introducimos alguna de la notación más usada en este capítulo:

Sea M^n una hipersuperficie compacta y conexa de R^{n+1} . Entonces, por el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer, el complementario de M^n en R^{n+1} tiene exactamente dos componentes conexas, a las que llamaremos G_0 y G_1 , y ambas son abiertos de R^{n+1} ; una de ellas es acotada (pongamos G_0) y la otra no lo es, y M^n es la frontera común de ambas, es decir $Fr(G_0) = M^n = Fr(G_1)$ (véase por ejemplo [G.P.]). Se verifica además que $\overline{G_0} = G_0 \cup M^n$ y $\overline{G_1} = G_1 \cup M^n$ son subvariedades diferenciables de R^{n+1} , ambas conexas y de dimensión $n+1$, $\overline{G_0}$ es compacta y el borde de ambas coincide con su frontera topológica, es decir $\partial(\overline{G_0}) = M^n = \partial(\overline{G_1})$. (Para ver que $\overline{G_0}$ y $\overline{G_1}$ son subvariedades de R^{n+1} de borde M^n , nótese que si $x \in M^n$, puede conseguirse una carta de R^{n+1} adaptada a $\overline{G_i}$ ($i = 0, 1$) mediante una carta de R^{n+1} adaptada a M^n con dominio conexo, y teniendo en cuenta que G_0 y G_1 son las componentes conexas de $R^{n+1} - M^n$).

Para probar el resultado esencial de esta sección necesitamos un lema de carácter topológico sobre aplicaciones propias, que demostramos a continuación. Este lema será usado también en la demostración del Teorema 2.1. Introducimos antes una serie de definiciones que usaremos aquí y en el resto del capítulo:

Definición 1.2 *Una aplicación diferenciable $f : R^{n+1} \rightarrow R$ se dice que cumple la condición de Palais-Smale si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R^{n+1}$ con $\{\|Df(x_n)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a 0 y tal que $\{f(x_n) / n \in \mathbb{N}\}$ es acotado se verifica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.*

La condición de Palais-Smale se introdujo en la Topología Diferencial para poder obtener resultados sobre deformación en la Teoría de Morse sin necesidad de que la variedad fuese compacta (véase [P.S.]).

Definición 1.3 Una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ continua se dice que es de fibras compactas si para todo $t \in R$ se cumple que $f^{-1}(t)$ (la fibra de f en t) es compacta.

Definición 1.4 Una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ continua se dice que es propia si f es cerrada y de fibras compactas.

Definición 1.5 Una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ continua se dice que es cuasi-propia si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subset R$.

Los conceptos anteriores están relacionados por la siguiente proposición:

Proposición 1.6 Sea $f : R^{n+1} \rightarrow R$ una aplicación continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) Para todo $\mu \in R$, $\mu > 0$, existe $N > 0$ tal que si $\|x\| > N$, entonces $|f(x)| > \mu$.
- ii) f es cuasipropia.
- iii) f es propia.

Además, si f es diferenciable, cualquiera de estas condiciones conlleva que la aplicación f es de fibras compactas y verifica la condición de Palais-Smale.

Demostración: La prueba de esta proposición es elemental:

i) \Rightarrow ii) Sea K un compacto de R , así que existe un $\mu \in R$, $\mu > 0$ con $K \subset (-\mu, \mu)$. Por hipótesis, para este μ existe un $N > 0$ tal que si $\|x\| > N$, entonces $|f(x)| > \mu$. Luego si $x \notin B[0, N]$, $\|x\| > N$, así que $|f(x)| > \mu$, o sea $f(x) \notin (-\mu, \mu)$, de modo que $x \notin f^{-1}(K)$, y por tanto $f^{-1}(K) \subset B[0, N]$ es acotado. Como por supuesto $f^{-1}(K)$ es cerrado de R^{n+1} , se tiene que $f^{-1}(K)$ es compacto de R^{n+1} .

ii) \Rightarrow i) Sea $\mu \in R$, $\mu > 0$. Por hipótesis $f^{-1}([-\mu, \mu])$ es compacto de R^{n+1} , y por tanto es acotado. Sea $N \in R$, $N > 0$ tal que $f^{-1}([-\mu, \mu]) \subset B(0, N)$. Entonces si $x \in R^{n+1}$ tiene norma estrictamente mayor que N , $x \notin B(0, N)$, así que $x \notin f^{-1}([-\mu, \mu])$, es decir $|f(x)| > \mu$.

ii) \Leftrightarrow iii) Es consecuencia de que R es localmente compacto y Hausdorff (véase [G.M.O.O.P.], proposición III.4.68).

Veamos ahora que si f es propia y diferenciable, entonces cumple la condición de Palais-Smale. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de R^{n+1} tal que $\{f(x_n)/n \in \mathbb{N}\}$ esté acotado, así que existe un $r \in R$, $r > 0$ con $\{f(x_n)/n \in \mathbb{N}\} \subset [-r, r]$. Entonces $f^{-1}([-r, r])$ es compacto, y por tanto la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente al estar incluida en este compacto. \square

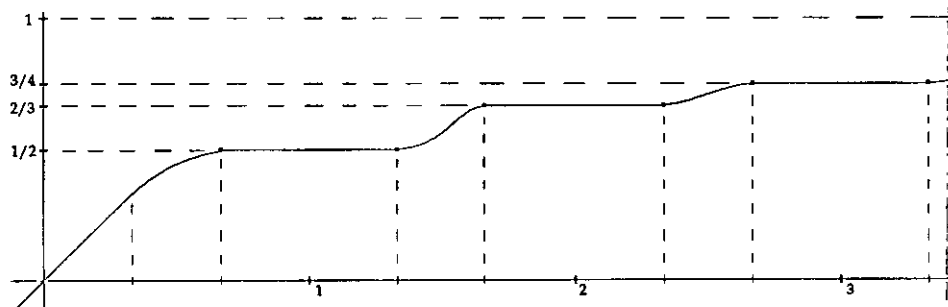
Ejemplo 1.7 La aplicación diferenciable $f : R^2 \rightarrow R$ dada por $f(x, y) = xy$ cumple la condición de Palais-Smale pero no es de fibras compactas.

En efecto, si $(x_0, y_0) \in R^2$, entonces

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

por lo que $\{\|Df(x_n, y_n)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 si y sólo si $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0, así que f es de Palais-Smale. Por otro lado, ninguna fibra de f es compacta.

Ejemplo 1.8 La aplicación diferenciable $f : R \rightarrow R$ dada por la gráfica



es de fibras compactas y no cumple la condición de Palais-Smale.

Para ver que f no cumple la condición de Palais-Smale, basta fijarse en la sucesión $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por supuesto $\{\|Df(n)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0, $\{f(n)/n \in \mathbb{N}\}$ está acotado pero $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes.

Lema 1.9 *Sea $f : R^{n+1} \rightarrow R$ una aplicación diferenciable, con $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es de fibras compactas y no acotada superiormente. Entonces f está acotada inferiormente y es propia.*

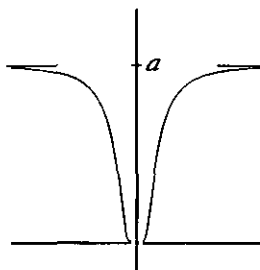
Demostración: Como la aplicación f es de clase infinita, por el Segundo Teorema de Sard ([M.O.], 8.3.10), el conjunto de los valores regulares de f es denso en R . En particular existe una sucesión $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset R$ de valores regulares de f convergente a $+\infty$, y las fibras de estos puntos $f^{-1}(t_m)$ pueden suponerse que son no vacías pues f no está acotada superiormente (e $\text{im}(f)$ es un intervalo de R al ser R^{n+1} conexo y f continua). Como además f es de fibras compactas, $f^{-1}(t_m)$ es una subvariedad diferenciable compacta sin borde y no vacía de R^{n+1} , y por el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer (una versión más general), $R^{n+1} - f^{-1}(t_m)$ tiene un número finito de componentes conexas, todas acotadas salvo una que no es acotada, y todas abiertas (aquí es necesaria la hipótesis $n \in \mathbb{N}$). Sea \mathcal{A}_m la componente conexa no acotada de $R^{n+1} - f^{-1}(t_m)$. Entonces $f(\mathcal{A}_m) \subset (t_m, +\infty)$ (en efecto, si existiese $p \in \mathcal{A}_m$ con $f(p) < t_m$, por ser f continua, \mathcal{A}_m conexo y estar \mathcal{A}_m incluido en el complementario de $f^{-1}(t_m)$, sería $f(\mathcal{A}_m) \subset (-\infty, t_m)$, y por tanto f estaría acotada superiormente al ser $R^{n+1} - \mathcal{A}_m$ compacto). Que f está acotada inferiormente se sigue entonces de que $f(\mathcal{A}_m)$ lo está (por t_m) y $R^{n+1} - \mathcal{A}_m$ es compacto (nótese que sólo hemos usado el que haya un valor regular de f con fibra no vacía y compacta).

Veamos ahora que f es propia, probando que para todo $\mu \in R$, $\mu > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\|x\| > N$, entonces $|f(x)| > \mu$. Ahora bien, como la sucesión $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $+\infty$, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{m_0} > \mu$, y al ser $R^{n+1} - \mathcal{A}_{m_0}$ compacto, existe $N > 0$ con $R^{n+1} - \mathcal{A}_{m_0} \subset B[0, N]$. Entonces, si $x \in R^{n+1}$ es tal que $\|x\| > N$, $x \notin B[0, N]$, por lo que $x \notin R^{n+1} - \mathcal{A}_{m_0}$, o sea $x \in \mathcal{A}_{m_0}$, de donde $|f(x)| \geq f(x) > t_{m_0} > \mu$. \square

Los siguientes ejemplos muestran la necesidad de las hipótesis en el lema anterior:

Ejemplo 1.10 *La condición " $n \in \mathbb{N}$ " del Lema 1.9 es necesaria: la aplicación diferenciable $f : R \rightarrow R$ dada por $f(t) = e^t$ es de fibras compactas, no está acotada superiormente y no es propia ($f^{-1}([-1, 1])$ no es compacto).*

Ejemplo 1.11 La condición “ f no está acotada superiormente” del Lema 1.9 es necesaria: la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \beta(x^2 + y^2)$ donde $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación diferenciable de gráfica



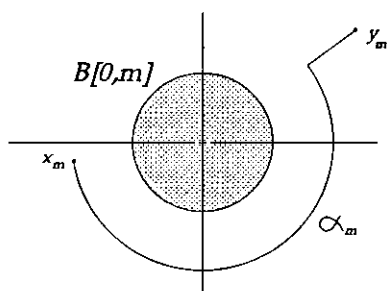
es C^∞ , sus fibras son compactas (o son vacías, o es un punto o son circunferencias), pero f no es propia pues, por ejemplo, $f^{-1}([a - 1, a + 1])$ no es compacto. (La gráfica de f se obtiene rotando la de β sobre el eje z).

El anterior resultado es cierto aunque la aplicación f sea sólo continua, pero la demostración anterior clarifica cómo están situadas las fibras de f en la situación que realmente nos interesa, que es el caso diferenciable. Incluimos aquí, por razones de completitud, una prueba del caso continuo:

Proposición 1.12 Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua, con $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es de fibras compactas y no acotada superiormente. Entonces f está acotada inferiormente y es propia.

Demostración: Si f no fuese propia existiría un compacto $K \subset \mathbb{R}$ con $f^{-1}(K)$ no acotado, y por tanto existiría una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ convergente (en norma) a $+\infty$ y tal que $\{f(x_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a λ , para cierto $\lambda \in K$. Como f es continua y no está acotada superiormente, existe una sucesión $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ convergente (en norma) a $+\infty$ y tal que $\{f(y_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $+\infty$. Tomando subsucesiones si fuese necesario, podemos suponer que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\|x_m\| > m$, $\|y_m\| > m$, $f(x_m) < \lambda + 1$ y $f(y_m) > \lambda + 1$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ elegimos un arco α_m con extremos x_m e y_m tal que $\|p\| > m$ para todo $p \in \alpha_m$ (aquí usamos la condición $n \in \mathbb{N}$, para que sea $n + 1 \geq 2$):



Como $f(x_m) < \lambda + 1$ y $f(y_m) > \lambda + 1$ para cada $m \in \mathbb{N}$, por continuidad de f existe $z_m \in \alpha_m$ con $f(z_m) = \lambda + 1$. Entonces $\{z_m / m \in \mathbb{N}\}$ es no acotado (si bien es cierto que podrían existir $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ distintos pero con $z_{m_1} = z_{m_2}$), y está incluido en la fibra de $\lambda + 1$, contradiciendo el que esta fibra es compacta.

Si f no estuviese acotada inferiormente, se razonaría de modo análogo tomando la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset R^{n+1}$ con las condiciones de que converja en norma a $+\infty$ y la sucesión $\{f(x_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converja a $-\infty$, y considerando $\lambda = 0$. \square

Pasamos ya a enunciar y demostrar el resultado básico de esta sección:

Teorema 1.13 *Sea M^n una hipersuperficie compacta de R^{n+1} . Entonces existe una función diferenciable $f : R^{n+1} \rightarrow R$ de Morse y propia, con un número finito de puntos críticos, de modo que 0 es un valor regular de f y $f^{-1}(0) = M^n$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que la hipersuperficie es conexa, y pensemos en S^{n+1} como la compactificación de Alexandroff de R^{n+1} , de modo que la hipersuperficie de R^{n+1} lo es ahora de S^{n+1} , y divide a la esfera en dos componentes conexas que la tienen por borde.

La adherencia de cada una de estas componentes es un cobordismo, y como tal admite una función de Morse (así que el borde de este cobordismo es el nivel cero de las dos funciones de Morse). Por la compacidad de estos cobordismos, necesariamente las funciones de Morse poseen un número finito de puntos críticos.

Ahora las dos funciones de Morse construidas se pueden pegar para dar una función de Morse sobre toda la esfera, manteniendo exactamente los puntos críticos de las dos funciones iniciales, y el hecho de que su nivel cero sea M^n . Esto se hace siguiendo las ideas del Teorema 3.4 de [Mi] y haciendo uso de la unicidad en el Teorema 1.4 de la misma

referencia.

Mediante el lema de Morse, conseguiremos de hecho que la función de Morse construida sobre la esfera tenga un único máximo y un único mínimo absolutos, y por el Teorema de Extensión de Isotopía de Thom podremos suponer que el máximo es el punto que hemos usado para compactificar R^{n+1} . De este modo habremos conseguido una función de Morse sobre R^{n+1} con un número finito de puntos críticos, que tiene a 0 por valor regular, la fibra de éste es M^n , y todas las fibras de la aplicación son compactas.

Ahora bien, la aplicación así obtenida puede no ser propia. Para asegurar esta condición (manteniendo las propiedades ya conseguidas), la componemos con un difeomorfismo que “desacota” la función, y se concluye entonces por el Lema 1.9.

A continuación escribimos los detalles de la argumentación anterior, destacando los primeros pasos por separado por ser interesantes en si mismos:

I) Sea Σ^n una subvariedad diferenciable de S^{n+1} , conexa, compacta sin borde y de codimensión uno. Entonces existe una aplicación diferenciable

$$H : S^{n+1} \rightarrow R$$

de Morse, tal que $\Sigma^n = H^{-1}(0)$ y 0 es valor regular de H (nótese que por la compacidad de S^n la aplicación H tendrá un número finito de puntos críticos).

La prueba de este hecho está contenida básicamente en las ideas del libro de Milnor, [Mi]: se basa en la existencia de funciones de Morse para cobordismos arbitrarios y en la idea de la demostración del Lema 3.7 sobre el pegado de funciones de Morse.

Por el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer, $S^{n+1} - \Sigma^n$ tiene exactamente dos componentes conexas, a las que llamamos A_0 y A_1 . Ambas son abiertos de S^{n+1} y $Fr(A_0) = \Sigma^n = Fr(A_1)$. Fácilmente se puede ver que $\bar{A}_0 = A_0 \cup \Sigma^n$ y $\bar{A}_1 = A_1 \cup \Sigma^n$ son subvariedades de S^{n+1} de la misma dimensión, ambas son compactas y ambas comparten el borde diferenciable, que es $\partial(\bar{A}_0) = M^n = \partial(\bar{A}_1)$.

Para el cobordismo $(\bar{A}_0; \Sigma^n, \emptyset)$ es conocida la existencia de una función diferenciable $f_0 : \bar{A}_0 \rightarrow [-1, 0]$ con $\Sigma^n = f_0^{-1}(0)$, $\emptyset = f_0^{-1}(-1)$, $C(f_0) \subset A_0$ y todos estos puntos críticos son no degenerados ([Mi], Teorema 2.5). Del mismo modo, para el cobordismo $(\bar{A}_1; \Sigma^n, \emptyset)$ existe una función diferenciable $f_1 : \bar{A}_1 \rightarrow [0, 1]$ con $\Sigma^n = f_1^{-1}(0)$, $\emptyset = f_1^{-1}(1)$, $C(f_1) \subset A_1$ y todos estos puntos críticos son no degenerados (f_i es lo que se llama una función de Morse para el cobordismo $(\bar{A}_i; \Sigma^n, \emptyset)$).

Al ser \overline{A}_i compacto, el número de puntos críticos de f_i es finito, así que existe un $\epsilon > 0$ tal que $f_0^{-1}([-\epsilon, 0]) \cap C(f_0) = \emptyset$ y $f_1^{-1}([0, \epsilon]) \cap C(f_1) = \emptyset$, por lo que, si denotamos $B_0 = f_0^{-1}([-\epsilon, 0])$ y $B_1 = f_1^{-1}([0, \epsilon])$, se tiene que $(B_0; f_0^{-1}(-\epsilon), \Sigma^n)$ y $(B_1; \Sigma^n, f_1^{-1}(\epsilon))$ son cobordismos, $f_0|_{B_0} : B_0 \rightarrow [-\epsilon, 0]$ es función de Morse del cobordismo $(B_0; f_0^{-1}(-\epsilon), \Sigma^n)$, $f_1|_{B_1} : B_1 \rightarrow [0, \epsilon]$ es función de Morse del cobordismo $(B_1; \Sigma^n, f_1^{-1}(\epsilon))$ y ambas funciones de Morse no tienen puntos críticos.

Para cada $i \in \{0, 1\}$ se toma un campo tipo-gradiente $\xi_i : B_i \rightarrow T(B_i)$ para $f_i|_{B_i}$ (véase [Mi], Lema 3.2), y se considera el normalizado de este campo, es decir $\eta_i = \frac{1}{\xi_i(f_i|_{B_i})} \xi_i$, de modo que $\eta_i(f_i|_{B_i})$ es la función constante uno.

De modo análogo a la demostración del Teorema 3.4 de [Mi] (un cobordismo es producto si y sólo si tiene una función de Morse sin puntos críticos), se tiene lo siguiente: si $\alpha^{\eta_0} : D(\eta_0) \rightarrow B_0$ es el flujo de η_0 , entonces $\Sigma^n \times [-\epsilon, 0] \subset D(\eta_0)$, $\alpha^{\eta_0}|_{\Sigma^n \times [-\epsilon, 0]} : \Sigma^n \times [-\epsilon, 0] \rightarrow B_0$ es difeomorfismo, y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^n \times [-\epsilon, 0] & \xrightarrow{\alpha^{\eta_0}|_{\Sigma^n \times [-\epsilon, 0]}} & B_0 \\ & \searrow p_2 & \swarrow f_0|_{B_0} \\ & & [-\epsilon, 0] \end{array}$$

De igual modo, si $\alpha^{\eta_1} : D(\eta_1) \rightarrow B_1$ es el flujo de η_1 , entonces $\Sigma^n \times [0, \epsilon] \subset D(\eta_1)$, $\alpha^{\eta_1}|_{\Sigma^n \times [0, \epsilon]} : \Sigma^n \times [0, \epsilon] \rightarrow B_1$ es difeomorfismo, y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^n \times [0, \epsilon] & \xrightarrow{\alpha^{\eta_1}|_{\Sigma^n \times [0, \epsilon]}} & B_1 \\ & \searrow p_2 & \swarrow f_1|_{B_1} \\ & & [0, \epsilon] \end{array}$$

Sea $g : \Sigma^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^{n+1}$ la aplicación definida por

$$g(\sigma, s) = \begin{cases} \alpha^{\eta_0}(\sigma, s) & \text{si } s \leq 0 \\ \alpha^{\eta_1}(\sigma, s) & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

Al ser α^{η_0} y α^{η_1} flujos, la aplicación g está bien definida. Sea $[\mathcal{A}]$ la estructura diferenciable de clase infinita usual de S^{n+1} , y $[\mathcal{P}]$ la estructura diferenciable producto de $\Sigma^n \times (-\epsilon, \epsilon)$. Claramente existe una estructura diferenciable de clase infinita $[\mathcal{B}]$ en S^{n+1} tal que las inclusiones $(A_0, [\mathcal{A}|_{A_0}]) \hookrightarrow (S^{n+1}, [\mathcal{B}])$ y $(A_1, [\mathcal{A}|_{A_1}]) \hookrightarrow (S^{n+1}, [\mathcal{B}])$, y la aplicación $g : (\Sigma^n \times (-\epsilon, \epsilon), [\mathcal{P}]) \rightarrow (S^{n+1}, [\mathcal{B}])$ son inmersiones difeomórficas abiertas. Por supuesto $T_{[\mathcal{B}]} = T_{[\mathcal{A}]}$.

Entonces la aplicación $F : (S^{n+1}, [\mathcal{B}]) \rightarrow [-1, 1]$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \in \bar{A}_0 \\ f_1(x) & \text{si } x \in \bar{A}_1 \end{cases}$$

está bien definida (si $x \in \bar{A}_0 \cap \bar{A}_1$, entonces $x \in \Sigma^n$, y por tanto $f_0(x) = 0 = f_1(x)$) y verifica las siguientes condiciones:

i) $F^{-1}(0) = \Sigma^n$

ii) F es diferenciable, puesto que las aplicaciones $F|_{A_0} = f_0 : (A_0, [\mathcal{A}|_{A_0}]) \rightarrow [-1, 1]$, $F|_{A_1} = f_1 : (A_1, [\mathcal{A}|_{A_1}]) \rightarrow [-1, 1]$ y $F \circ g = p_2 : (\Sigma^n \times (-\epsilon, \epsilon), [\mathcal{P}]) \rightarrow [-1, 1]$ son diferenciables. Para ver que $F \circ g = p_2$, nótese que si $s \leq 0$, entonces

$$F \circ g(\sigma, s) = F(\alpha^{\eta_0}(\sigma, s)) = f_0(\alpha^{\eta_0}(\sigma, s)) = s,$$

la penúltima igualdad pues $\alpha^{\eta_0}(\sigma, s) \in B_0 \subset A_0$ y la última por la conmutatividad del primer diagrama, y si $s \geq 0$, entonces

$$F \circ g(\sigma, s) = F(\alpha^{\eta_1}(\sigma, s)) = f_1(\alpha^{\eta_1}(\sigma, s)) = s,$$

la penúltima igualdad pues $\alpha^{\eta_1}(\sigma, s) \in B_1 \subset A_1$ y la última por la conmutatividad del segundo diagrama.

iii) $C(F) = C(f_0) \cup C(f_1)$ (así que $C(f)$ es finito), y todos son no degenerados. Dado que $F|_{A_i} = f_i$ y $[\mathcal{A}|_{A_i}] = [\mathcal{B}|_{A_i}]$ para $i = 0, 1$, es suficiente ver que $\Sigma \cap C(F) = \emptyset$, y ésto es consecuencia de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma^n \times [-\epsilon, \epsilon], [\mathcal{P}]) & \xrightarrow{g} & (S^{n+1}, [\mathcal{B}]) \\ & \searrow p_2 & \swarrow F \\ & & [-1, 1] \end{array}$$

vista en ii), y de que g es inmersión difeomórfica abierta con $g(\Sigma^n \times \{0\}) = \Sigma^n$.

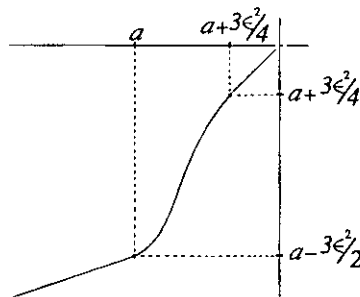
iv) 0 es un valor regular de F , de nuevo por la conmutatividad del diagrama anterior y por ser $\Sigma^n = F^{-1}(0)$.

Ahora bien, como $[\mathcal{A}]$ y $[\mathcal{B}]$ son estructuras diferenciables de clase infinita en S^{n+1} obtenidas al pegar los cobordismos \bar{A}_0 y \bar{A}_1 mediante la identidad de Σ^n , existe un difeomorfismo $G : (S^{n+1}, [\mathcal{A}]) \rightarrow (S^{n+1}, [\mathcal{B}])$ con $G(\Sigma^n) = \Sigma^n$ (véase el Teorema 1.4 de [Mi]). Entonces es trivial comprobar que una solución para I) es la aplicación composición $H = F \circ G : (S^{n+1}, [\mathcal{A}]) \rightarrow [-1, 1]$.

II) *La aplicación H de I) puede tomarse con la condición adicional de tener un único punto máximo y un único punto mínimo absolutos.*

Como S^{n+1} es conexo y compacto, existen $a, b \in R$, $a < b$ con $H(S^{n+1}) = [a, b]$ (por supuesto H no era constante). Como $H^{-1}(\{a, b\}) \subset C(H)$, el conjunto de puntos extremos absolutos de la función es finito.

Supongamos que $H^{-1}(a) = \{x, x_1, \dots, x_r\}$. Por el Lema de Morse ([Mi], Lema 2.2) existe una carta $C = (U, \phi, R^{n+1})$ de S^{n+1} centrada en x tal que $H(\phi^{-1}(y_1, \dots, y_{n+1})) = y_1^2 + \dots + y_{n+1}^2 + a$ para todo $(y_1, \dots, y_n) \in \phi(U)$, $U \cap \Sigma^n = \emptyset$ y $U \cap C(H) = \{x\}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B[0, \epsilon] \subset \phi(U)$ y $a + \epsilon^2 < 0$, y sea $V = \phi^{-1}(B[0, \epsilon])$. Claramente $V = U \cap \{x \in S^{n+1} / H(x) \leq a + \epsilon^2\}$. Consideramos entonces una aplicación diferenciable y estrictamente creciente $h : (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0)$, con $h(a) = a - \frac{\epsilon^2}{2}$ y $h(t) = t$ para todo $t \in (a + \frac{3\epsilon^2}{4}, 0)$.



Entonces la aplicación $\tilde{H} : S^{n+1} \rightarrow R$ definida por

$$\tilde{H}(y) = \begin{cases} H(y) & \text{si } y \notin V \\ h(H(y)) & \text{si } y \in V \end{cases}$$

es diferenciable, $\tilde{H}^{-1}(0) = H^{-1}(0) = \Sigma^n$, $C(\tilde{H}) = C(H)$ y siguen siendo todos no degenerados; en cambio x es ahora el único punto mínimo absoluto de \tilde{H} , dado que $\tilde{H}(S^{n+1}) = [a - \frac{\epsilon^2}{2}, b]$ y $\tilde{H}^{-1}(a - \frac{\epsilon^2}{2}) = \{x\}$. De modo análogo se procedería a dejar un único punto máximo absoluto.

III) Sea Σ^n una subvariedad diferenciable de S^{n+1} , conexa, compacta y sin borde, y de codimensión uno. Sean p y q dos puntos de una misma componente conexa de $S^{n+1} - \Sigma^n$. Entonces existe un difeomorfismo $\Lambda_1 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ tal que $\Lambda_1(\Sigma^n) = \Sigma^n$ y $\Lambda_1(p) = q$.

Dados dos puntos distintos de una variedad diferenciable, por el Teorema de Extensión de Isotopía de Thom ([Hi], pág. 180), deducimos la existencia de un difeomorfismo que lleva un punto en el otro y es difeotópico a la identidad. Además, esta difeotopía se puede construir con soporte en cualquier abierto que contenga un camino diferenciable que conecte los dos puntos, así que bastaría tomar un camino que no cortase a Σ^n y como abierto la componente conexa de $S^{n+1} - \Sigma^n$ que contiene a los puntos. De modo más detallado, sea $\tau : I \rightarrow S^{n+1}$ un camino diferenciable conectando p y q sin cortar a Σ^n , es decir, $\tau(0) = p$, $\tau(1) = q$ e $im(\tau) \subset A$, donde A es la componente conexa de $S^{n+1} - \Sigma^n$ que contiene a los puntos p y q . La aplicación $\gamma : \{p\} \times I \rightarrow S^{n+1}$ dada por $\gamma(p, t) = \tau(t)$ es una isotopía con $im(\gamma) \subset A$, $\gamma_0(p) = \tau(0) = p$ y $\gamma_1(p) = \tau(1) = q$, así que por el resultado ya citado existe una difeotopía $\Lambda : S^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$ con $\Lambda_1 \circ \gamma_0 = \gamma_1$ y $sop(\Lambda) \subset A$, así que $\Lambda_1 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ es un difeomorfismo con $\Lambda_1(\Sigma^n) = \Sigma^n$ (de hecho $\Lambda_t|_{S^{n+1}-A} = 1|_{S^{n+1}-A}$ para todo $t \in I$) y $\Lambda_1(p) = \Lambda_1(\gamma_0(p)) = \gamma_1(p) = q$, como queríamos demostrar.

Concluimos ahora la prueba del caso conexo: sea $i : R^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ una inmersión difeomórfica con $S^{n+1} - i(R^{n+1}) = \{N\}$ donde $N = (0, \dots, 0, 1)$ es el "polo norte" de S^{n+1} , y sea $\Sigma^n = i(M^n)$, así que Σ^n es subvariedad diferenciable de S^{n+1} , conexa, compacta sin borde y de codimensión uno. Por I) y II) existe una aplicación diferenciable $H : S^{n+1} \rightarrow R$ con $H^{-1}(0) = \Sigma^n$, 0 es valor regular de H , el conjunto $C(H)$ de los puntos críticos de H es finito y todos son no degenerados, y H tiene un único punto máximo absoluto p ,

y un único mínimo absoluto. Sea A_1 la componente conexa de $S^{n+1} - \Sigma^n$ que contiene a N , y sea A_0 la otra componente conexa de $S^{n+1} - \Sigma^n$. Al ser 0 un valor regular de H y $\Sigma^n = H^{-1}(0)$, por argumentos de conexión tenemos que $H(A_0) \subset (-\infty, 0)$ y $H(A_1) \subset (0, +\infty)$ ó viceversa. Podemos suponer (considerando la aplicación $-H$ si fuese necesario), que $H(A_0) \subset (-\infty, 0)$ y $H(A_1) \subset (0, +\infty)$, de modo que tanto p como N estén en A_1 , y por III) existe un difeomorfismo $\Lambda_1 : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ con $\Lambda_1(\Sigma^n) = \Sigma^n$ y $\Lambda_1(N) = p$. Consideramos entonces la aplicación composición

$$\tilde{f} : R^{n+1} \xrightarrow{i} S^{n+1} \xrightarrow{\Lambda_1} S^{n+1} \xrightarrow{H} R$$

que es obviamente diferenciable y verifica las siguientes propiedades:

i) $\tilde{f}^{-1}(0) = M^n$ ($\tilde{f}^{-1}(0) = i^{-1}(\Lambda_1^{-1}(H^{-1}(0))) = i^{-1}(\Lambda_1^{-1}(\Sigma^n)) = i^{-1}(\Sigma^n) = M^n$).

ii) 0 es valor regular de \tilde{f} (pues lo es de H).

iii) El conjunto $C(\tilde{f})$ de los puntos críticos de \tilde{f} es finito y todos son no degenerados ($C(H)$ es finito, todos sus puntos son críticos no degenerados, Λ_1 es un difeomorfismo y la aplicación i es inmersión difeomórfica abierta).

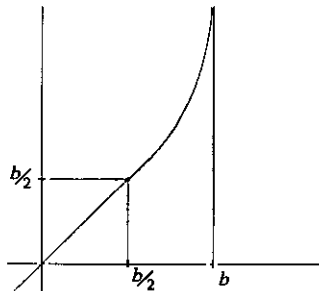
iv) \tilde{f} es de fibras compactas. En efecto, si $b = H(p)$ es el valor máximo de H , entonces

$$\tilde{f}(R^{n+1}) \cap [0, +\infty) = H(\Lambda_1(i(R^{n+1}))) \cap [0, +\infty) =$$

$$H(\Lambda_1(S^{n+1} - \{N\})) \cap [0, +\infty) = H(S^{n+1} - \{p\}) \cap [0, +\infty) = [0, b),$$

la última igualdad debido a que p es el único punto máximo absoluto de H . Entonces, si $\lambda \in \text{im}(\tilde{f})$, $\tilde{f}^{-1}(\lambda) = i^{-1}(\Lambda_1^{-1}(H^{-1}(\lambda)))$ es homeomorfo a $\Lambda_1^{-1}(H^{-1}(\lambda))$ dado que $N \notin \Lambda_1^{-1}(H^{-1}(\lambda))$ ($H(\Lambda_1(N)) = H(p) = b > \lambda$ al estar la imagen de \tilde{f} contenida en $(-\infty, b)$), y toda fibra de $H \circ \Lambda_1$ es compacta porque S^{n+1} es compacto.

Sea ahora $\alpha : (-\infty, b) \rightarrow R$ el difeomorfismo de gráfica



La aplicación buscada es la composición $f = \alpha \circ \tilde{f} : R^{n+1} \rightarrow R$. Como $\alpha(0) = 0$ y α es difeomorfismo, la aplicación f mantiene todas las propiedades de \tilde{f} . Pero además f no está acotada superiormente ($f(R^{n+1}) = \alpha(\tilde{f}(R^{n+1})) \supset \alpha([0, b)) = [0, +\infty)$), así que por el Lema 1.9, f es propia y la demostración del caso conexo está concluida.

El caso no conexo sigue esencialmente los pasos anteriores, aunque conviene hacer algunas matizaciones: en primer lugar, una generalización del Teorema de Separación de Jordan-Brouwer nos separa la esfera en una componente conexa más de las que tenga M^n , quedando cada componente conexa de la hipersuperficie como una componente conexa de la frontera de exactamente dos de estas componentes. En segundo lugar, al dar las funciones de Morse, una para cada cobordismo en que queda dividida la esfera, se toma la precaución siguiente: si A es una componente conexa de M^n y X e Y son los dos cobordismos que la tienen por borde (cobordismos colindantes), la función de Morse para X debe ser negativa si la de Y es positiva. Que esto se puede conseguir (a pesar de que estos cobordismos pueden llegar a tener varias componentes conexas de M^n como borde) es consecuencia también del Teorema de Separación de Jordan-Brouwer generalizado. Un tercer detalle a tener en cuenta surge a la hora del pegado de las funciones de Morse. Para ello se toman dos cobordismos colindantes al azar y se pegan sus funciones de Morse. Ahora la nueva función toma valores tanto negativos como positivos, pero ésto no es un obstáculo para pegarle una función de Morse definida sobre un nuevo cobordismo colindante con el cobordismo que se ha formado con la unión de los dos anteriores (el proceso de pegado de las funciones es esencialmente el mismo, aunque la primera función no sea ahora una función de Morse del cobordismo propiamente dicho: toma valores en $(-1, 1)$ y la imagen inversa del 0 no es solamente el borde). Repitiendo este proceso, se obtiene una función de Morse sobre la esfera, tal que M^n es la fibra del valor regular 0. No es difícil, haciendo uso del Lema de Morse, probar que se puede conseguir la función de modo que tenga un único máximo absoluto, y que éste esté en la componente conexa en que cae el punto de la esfera que hemos utilizado para compactificar R^{n+1} (para ello, tómesese un máximo relativo de esta componente -al menos hay un extremo relativo, y si es necesario, podemos trabajar con la aplicación opuesta-, y como en II), "estiramos este punto hacia arriba"). El resto de la demostración es ya completamente análogo a lo que se hace para el caso conexo. \square

A la vista del teorema anterior, una cuestión que se plantea de modo natural es la de si el resultado es válido cuando sustituimos el Espacio Euclídeo por una variedad arbitraria como variedad ambiente. La respuesta es negativa, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14 *Consideramos la subvariedad diferenciable $Z = S^1 \times \{(1, 0)\}$ del toro $S^1 \times S^1$, que es compacta, conexa y sin borde, y de codimensión uno. Entonces no existe una función diferenciable del toro en R para la cual $S^1 \times \{(1, 0)\}$ sea una fibra regular.*

La razón de ésto radica en que el complementario de Z en $S^1 \times S^1$ es conexo. Así, si Z fuese la imagen inversa de 0 por una función diferenciable $f : S^1 \times S^1 \rightarrow R$, entonces necesariamente $f(S^1 \times S^1 - Z) \subset (0, +\infty)$ ó $f(S^1 \times S^1 - Z) \subset (-\infty, 0)$, y por tanto todos los puntos de Z serían extremos relativos (así que puntos críticos).

Como se puede observar en el ejemplo anterior, no se tiene un análogo del Teorema de Separación de Jordan-Brouwer para el toro, motivo suficiente para que no funcione la prueba del Teorema 2.1 en la situación del ejemplo. Esto plantea de modo natural una interesante cuestión:

Problema. Supongamos que X es una variedad diferenciable conexa sin borde y que Z es una subvariedad diferenciable de X , compacta, conexa y sin borde, y de codimensión uno tal que $X - Z$ tiene exactamente dos componentes conexas ambas con frontera común Z . ¿Existe entonces una función de Morse sobre X , propia y con un número finito de puntos críticos, que tenga a Z como fibra regular?

Por supuesto, si X es compacta, la cuestión anterior tiene una respuesta afirmativa, hecho que se demuestra como el apartado I) del caso conexo del Teorema 1.13 (desde luego la función obtenida de este modo es propia por la compacidad de X).

2 ESFERAS EN R^n Y PUNTOS CRITICOS EN LA REGION EXTERIOR

De modo breve, el hilo conductor de los Teoremas de Deformación de la Teoría de Morse puede resumirse así: supongamos que $a < b$ son dos valores regulares de una aplicación diferenciable $f : X \rightarrow R$ de Morse definida sobre una variedad diferenciable compacta X . (El que la aplicación sea de Morse significa que todos sus puntos críticos son no degenerados, y en particular están aislados. Así, como la variedad ambiente es compacta, el número total de puntos críticos es finito). Los Teoremas de Deformación de la Teoría de Morse nos relacionan los niveles $f^{-1}(a)$ (variedad que suponemos conocida y a la que convenimos en llamar nivel de partida) y $f^{-1}(b)$, de acuerdo con los puntos críticos de $f^{-1}(a, b)$ y los índices de estos puntos. Así, por ejemplo, si no hay ningún punto crítico en $f^{-1}(a, b)$, se tiene que $f^{-1}(b)$ y $f^{-1}(a)$ son difeomorfas (Primer Teorema de Deformación de la Teoría de Morse), y si se tiene un único punto crítico de índice $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^{-1}(b)$ es una variedad que se obtiene de $f^{-1}(a)$ por una modificación esférica (cirugía en el sentido de Milnor-Thom) de tipo $(k, n + 1 - k)$, donde n es la dimensión de $f^{-1}(a)$. Esto, por supuesto, no determina el tipo diferenciable de $f^{-1}(b)$, pero provee de una información de gran importancia; por ejemplo, permite la comparación de las homologías de los dos niveles (Desigualdades de Morse), la relación entre los grupos de homotopía ([Mi.1]), etc.

Un interesante ejemplo de la situación anterior es cuando M^n es una hipersuperficie compacta y conexa del Espacio Euclídeo y $f : R^{n+1} \rightarrow R$ es una función de Morse que la tiene por una de sus fibras regulares. De acuerdo con el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer, las ideas expuestas anteriormente se podrían aplicar considerando los puntos críticos de la región acotada que define la hipersuperficie en el Espacio Euclídeo, que es compacta, y el conjunto vacío como variedad nivel de partida.

Pero ¿qué ocurre si nuestra función tiene puntos críticos degenerados en la región acotada, y no los tiene en la región no acotada (región exterior)? (Por supuesto, esta posibilidad no es nada rara, como se puede ver en el ejemplo 2.6). En este caso, la

Teoría de Morse Clásica no puede ser aplicada a la componente conexa no acotada por no disponer de ciertas condiciones de compacidad. El propósito de esta sección es resolver el problema que se presenta en esta situación.

Para explicar la solución aportada, volvamos por un momento a la situación en que todos los puntos críticos de la región acotada son no degenerados. Haciendo entonces uso del Lema de Morse se puede modificar la función para que tenga un único extremo absoluto en esta componente, así que, tomando un valor regular lo suficientemente cercano al valor extremo, tenemos la situación general descrita arriba, en donde ahora la variedad nivel de partida es una esfera.

Supongamos ahora que nuestra función tiene sólo una cantidad finita de puntos críticos en la región no acotada, y que todos son no degenerados. Si la función se pudiese extender diferenciablemente a la esfera (compactificación de Alexandroff del Espacio Euclídeo por un punto), y este punto fuese un extremo absoluto (supongamos que es un máximo), entonces, como antes, la imagen inversa de cualquier valor regular mayor que todos los valores críticos (de la función definida sobre el Espacio Euclídeo) sería una esfera, y obtendríamos una función de Morse sobre un cobordismo compacto en la región exterior, con nivel de partida conocido.

Nuestra solución marcha de este modo, aunque por motivos diferentes, pues en general es falso que las funciones de Morse sobre el Espacio Euclídeo puedan extenderse diferenciablemente a la esfera, vista ésta como su compactificación de Alexandroff. El resultado básico que nos permite este acercamiento al problema es el Teorema 2.1. Por otro lado, este acercamiento queda precisado en la demostración del Corolario 2.5.

Demostramos a continuación el teorema esencial de esta sección. La prueba recorre algunos de los resultados más importantes de la Topología Diferencial (Teorema de Separación de Jordan-Brouwer, Teorema del h-Cobordismo, un fuerte teorema de Deformación de la Teoría de Morse en el caso no compacto) y otros resultados e ideas de la Topología Algebraica:

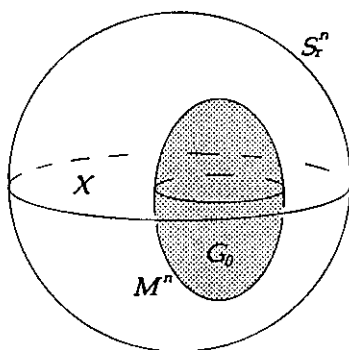
Teorema 2.1 *Sea M^n una hipersuperficie compacta y conexa de R^{n+1} ($n \geq 2$), y sea $f : R^{n+1} \rightarrow R$ una aplicación diferenciable con $M^n = f^{-1}(0)$ y 0 valor regular de f . Supongamos que f cumple la condición de Palais-Smale o bien es de fibras compactas.*

Entonces, si f no tiene puntos críticos en la componente conexa no acotada de $R^{n+1} - M^n$, se verifica que:

- i) M^n es una 3-esfera de homotopía si $n = 3$.
- ii) M^n es homeomorfa a S^4 si $n = 4$.
- iii) M^n es difeomorfa a S^n si $n \geq 5$ ó $n = 2$.

Demostración: Sean G_0 y G_1 las dos componentes conexas de $R^{n+1} - M^n$, así que $Fr(G_0) = M^n = Fr(G_1)$ y una de ellas, pongamos G_0 , es acotada. Además G_0 y G_1 son abiertos de R^{n+1} y $\bar{G}_i = G_i \cup M^n$ son subvariedades diferenciables de R^{n+1} , con $\partial(\bar{G}_i) = M^n$, para $i = 0, 1$.

Como M^n es compacta, existe un $r > 0$ con $M^n \subset B(0, r)$, así que $\bar{G}_0 \subset B(0, r)$ por argumentos de conexión. Entonces $X = \bar{G}_1 \cap B[0, r]$ es subvariedad diferenciable de clase infinita de R^{n+1} con $\partial X = M^n + S_r^n$ la unión disjunta de M^n y S_r^n , donde S_r^n es la esfera de radio r y centro el origen de R^{n+1} .



Es suficiente entonces demostrar que X es un h-cobordismo entre M^n y S_r^n si $n \geq 2$, es decir, las inclusiones

$$M^n \hookrightarrow X \quad \text{y} \quad S_r^n \hookrightarrow X$$

son equivalencias de homotopía. En efecto, en tal caso tendríamos que M^n y S_r^n tienen el mismo tipo de homotopía, lo que probaría i), y por ser cierta la Conjetura de Poincaré en dimensión cuatro ([F.Q.], Corolario 7.1B), tendríamos ii), es decir M^4 es homeomorfa a S^4 ; iii) en el caso $n \geq 5$ sería consecuencia directa del Teorema del h-cobordismo por

ser S_r^n simplemente conexa ([Mi], Teorema 9.1), y para $n = 2$, el que M^2 tenga el tipo de homotopía de S^2 conduce por supuesto a que M^2 y S^2 son difeomorfas.

Se trata pues de ver que $M^n \hookrightarrow X$ y $S_r^n \hookrightarrow X$ son equivalencias de homotopía. Por un argumento ya típico, es suficiente probar que M^n , X , S_r^n son simplemente conexas y la inclusión $M^n \hookrightarrow X$ es equivalencia de homotopía (en efecto, en tal caso $H_*(X, S_r^n; \mathbb{Z}) \approx H_*(X, M^n; \mathbb{Z})$ por la Dualidad de Lefschetz, y esta cohomología es trivial por la equivalencia de homotopía $M^n \hookrightarrow X$. Como X y M^n son variedades topológicas (con y sin borde respectivamente), tienen el tipo de homotopía de un CW -complejo, por lo que la inclusión $S_r^n \hookrightarrow X$ sería una equivalencia de homotopía por el Teorema de Whitehead). Como los G_i son conexos, $M^n = f^{-1}(0)$ y 0 es valor regular de f , podemos suponer que $f(G_0) \subset (-\infty, 0)$ y $f(G_1) \subset (0, +\infty)$.

Supongamos que f cumple la condición de Palais-Smale. Entonces, si $C(f) \cap G_1 = \emptyset$, existe un difeomorfismo

$$\psi : M^n \times [0, +\infty) \rightarrow \overline{G}_1$$

con $\psi(x, 0) = x$ para todo $x \in M^n$.

En efecto, obsérvese que existe $\epsilon > 0$ con $f(C(f)) \cap [-\epsilon, 0] = \emptyset$, pues de lo contrario habría una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{G}_0$ de puntos críticos de f tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$. Por compacidad de \overline{G}_0 hay una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in \overline{G}_0$. Por la continuidad de f , $f(x) = 0$ así que $x \in M^n$, y por la continuidad de Df , $Df(x) = 0$, pero 0 es valor regular de f . Ahora, como f cumple la condición de Palais-Smale (se entiende R^{n+1} con su métrica Riemanniana usual, que es completa) y $f(C(f)) \cap [-\epsilon, 0] = \emptyset$, existe ([S.T], proposición X.5.16) un difeomorfismo $h : f^{-1}(0) \times (-\epsilon, +\infty) \rightarrow f^{-1}(-\epsilon, +\infty)$ con $h(x, 0) = x$ para todo $x \in f^{-1}(0)$ y $h(f^{-1}(0) \times \{d\}) = f^{-1}(d)$ para todo $d \in (-\epsilon, +\infty)$, de modo que la aplicación $\psi : M^n \times [0, +\infty) \rightarrow \overline{G}_1$ dada por $\psi(x, t) = h(x, t)$ es difeomorfismo y $\psi(x, 0) = x$ para todo $x \in M^n$. (Obsérvese que la aplicación f es, automáticamente, de fibras compactas).

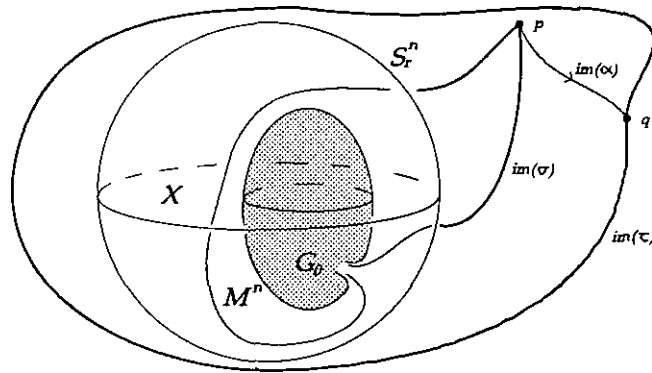
Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^n & \hookrightarrow & \overline{G}_1 \\ & \searrow j_0 & \nearrow \psi \\ & & M^n \times [0, +\infty) \end{array}$$

donde $j_0(x) = (x, 0)$ es obviamente conmutativo, por lo que la inclusión $M^n \hookrightarrow \overline{G}_1$

es una equivalencia de homotopía. Por otro lado, la inclusión $X \hookrightarrow \bar{G}_1$ es también una equivalencia de homotopía, pues existe (es trivial su construcción) un retracts de deformación fuerte de \bar{G}_1 en X . Como $M^n \subset X \subset \bar{G}_1$, se deduce entonces (véase [R.F.], pág. 63, prop.7) que la inclusión $M^n \hookrightarrow X$ es una equivalencia de homotopía.

Veamos que \bar{G}_1 es simplemente conexo. Para ello tomamos $d > 0$ tal que la intersección $\psi(M^n \times [d, +\infty)) \cap B[0, r]$ sea vacía (como $\psi^{-1}(B[0, r] \cap \bar{G}_1)$ es compacto de $M^n \times [0, +\infty)$, existe un $d > 0$ con $\psi^{-1}(B[0, r] \cap \bar{G}_1) \subset M \times [0, d)$, así que $B[0, r] \cap \bar{G}_1 \subset \psi(M^n \times [0, d))$). Sea $p \in \bar{G}_1$ y $\sigma : I \rightarrow \bar{G}_1$ una aplicación continua con $\sigma(0) = p = \sigma(1)$ y veamos que $[\sigma] = 0 \in \pi_1(\bar{G}_1, p)$. Consideramos la aplicación $F : \bar{G}_1 \times [0, d] \rightarrow \bar{G}_1$ dada por $F(x, t) = \psi(p_1(\psi^{-1}(x)), t + p_2(\psi^{-1}(x))) (= F_t(x))$, que es continua con $F_0 = 1_{\bar{G}_1}$. Definimos τ como la composición $\tau = F_d \circ \sigma : I \xrightarrow{\sigma} \bar{G}_1 \xrightarrow{F_d} \bar{G}_1$. Nótese que $\tau(0) = F_d(\sigma(0)) = F_d(p) = F_d(\sigma(1)) = \tau(1) (= q)$, y que $im(\tau) \cap B[0, r] = \emptyset$ dado que $F_d(\bar{G}_1) \subset \psi(M^n \times [d, +\infty))$ que no corta a $B[0, r]$. Sea $H : I \times I \rightarrow \bar{G}_1$ la aplicación continua dada por $H(s, t) = F_{td}(\sigma(s)) (= H_t(s))$. Se tiene que $H_0 = \sigma$, $H_1 = \tau$ y $H(0, t) = H(1, t)$ para todo $t \in I$. Consideramos el camino $\alpha : I \rightarrow \bar{G}_1$ dado por $\alpha(t) = H(0, t)$, que conecta $p = \alpha(0)$ con $q = \alpha(1)$.



Entonces la aplicación $h_\alpha : \pi_1(\bar{G}_1, p) \rightarrow \pi_1(\bar{G}_1, q)$ dada por $h_\alpha([\gamma]) = [\alpha^{-1} * \gamma * \alpha]$ es un isomorfismo,

$$h_\alpha([\alpha * \tau * \alpha^{-1}]) = [\alpha^{-1} * \alpha * \tau * \alpha^{-1} * \alpha] = [\tau]$$

y $[\tau] = 0 \in \pi_1(\bar{G}_1, q)$ puesto que $im(\tau) \cap B[0, r] = \emptyset$, $R^{n+1} - B(0, r) \subset \bar{G}_1$ (ya que $\bar{G}_0 \subset B(0, r)$) y $n \geq 2$. Que \bar{G}_1 es simplemente conexo se sigue ahora al probar que $[\sigma] = [\alpha * \tau * \alpha^{-1}] \in \pi_1(\bar{G}_1, p)$. Pero esto no es más que un resultado básico en Teoría de Homotopía:

Lema 2.2 Sean σ y τ caminos cerrados en un espacio topológico X con $\sigma(0) = p = \sigma(1)$ y $\tau(0) = q = \tau(1)$, y supongamos que existe una aplicación continua $H : I \times I \rightarrow X$ con $H_0 = \sigma$ y $H_1 = \tau$ y la condición adicional $H(0, t) = H(1, t)$ para todo $t \in I$. Consideramos el camino $\alpha : I \rightarrow X$ dado por $\alpha(t) = H(0, t) (= H(1, t))$, así que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Entonces $[\sigma] = [\alpha * \tau * \alpha^{-1}] \in \pi_1(X, p)$.

Así pues, la demostración del teorema en el caso en que la aplicación f cumple la condición de Palais-Smale está terminada. Supongamos ahora que f es de fibras compactas: si f no fuese acotada superiormente, entonces por el Lema 1.9 f sería propia, así que se cumpliría la condición de Palais-Smale y aplicaríamos la parte del teorema ya probada. Si f es acotada superiormente, $f(G_1) = (0, b]$ ó $f(G_1) = (0, b)$ con $b > 0$. Al suponer que $C(f) \cap G_1 = \emptyset$, estamos en la segunda situación. Consideramos entonces un difeomorfismo $\beta : (-\infty, b) \rightarrow R$ estrictamente creciente y tal que $\beta(t) = t$ para todo $t \leq b/2$. Entonces la aplicación composición

$$g : R^{n+1} \xrightarrow{f} (0, b) \xrightarrow{\beta} R$$

es diferenciable, $g^{-1}(0) = (\beta \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(\beta^{-1}(0)) = f^{-1}(0) = M^n$, 0 es valor regular de g (pues β es difeomorfismo), g es de fibras compactas ($g^{-1}(t) = f^{-1}(\beta^{-1}(t))$ es compacto pues f era de fibras compactas), y g no está acotada superiormente ($g(G_1) = \beta(f(G_1)) = \beta(0, b) = (0, +\infty)$). Entonces, por el Lema 1.9, g es propia y por tanto cumple la condición de Palais-Smale. Se concluye entonces aplicando la parte del teorema ya probada. \square

Nótese que en la prueba anterior, hemos obtenido lo siguiente:

Observación 2.3 En las hipótesis del Teorema 2.1, se verifica en cualquier caso que f es una aplicación de fibras compactas.

Nuestro propósito es ahora demostrar un resultado para superficies de R^3 . Aparte de la curiosa información que obtendremos, lo esencial en este resultado es la idea de la demostración, que nos permite usar los Teoremas de Deformación de la Teoría de Morse a partir de los puntos críticos de la región exterior a una hipersuperficie en dimensiones arbitrarias (ésta es la filosofía de la sección 2). Previo a este resultado, introducimos un lema de carácter general sobre la conexión de las hipersuperficies que vienen dadas como los ceros de funciones:

Lema 2.4 Sea $f : R^{n+1} \rightarrow R$ una aplicación diferenciable de fibras compactas ($n \in \mathbb{N}$). Entonces, si $\lambda \in R$ es un valor regular de f que es cota superior de $f(C(f))$, se verifica que $f^{-1}(\lambda)$ es conexo (tal vez vacío).

Demostración: Veamos en primer lugar que, si existe un valor regular λ de f que es cota superior de $f(C(f))$ y su imagen inversa es no vacía, entonces $C(f)$ está acotado. En efecto, la imagen inversa de un tal valor regular es una hipersuperficie compacta, y por el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer, su complementario tiene un número finito de componentes conexas, todas acotadas excepto una, a la que llamamos \mathcal{M} . Por la existencia de extremos relativos, todas las componentes acotadas tienen puntos críticos de f , así que los valores que f toma en ellos son menores que λ (λ es cota superior de $f(C(f))$). Entonces, por la conexión de \mathcal{M} y ser λ un valor regular de f , necesariamente $f(\mathcal{M}) \subset (\lambda, +\infty)$ y por tanto no hay puntos críticos en \mathcal{M} ya que λ es cota superior de $f(C(f))$. En conclusión, $C(f)$ está incluido en la unión de las componentes conexas acotadas de $R^{n+1} - f^{-1}(\lambda)$, así que está acotado.

Nótese también que podemos suponer que f no está acotada superiormente. En efecto, como f es continua y R^{n+1} es conexo, $im(f)$ es un intervalo. Sea $b \in R \cup \{+\infty\}$ el supremo de $im(f)$. Si f está acotada superiormente, $b \in R$. Ahora, si $b \in im(f)$, claramente $b \in f(C(f))$: en tal caso, si λ es un valor regular de f que es cota superior de $f(C(f))$, se tiene que $\lambda > b$ y por tanto $f^{-1}(\lambda)$ es vacío. La otra posibilidad es que $b \notin im(f)$: si a es el ínfimo de $im(f)$, entonces $a < b$ y existe $c \in R$, $a < c < b$. Consideramos entonces un difeomorfismo $\alpha : (-\infty, b) \rightarrow R$ con la condición $\alpha(t) = t$ para todo $t \leq c$, y la aplicación diferenciable $g = \alpha \circ f$. Esta función es también de fibras compactas, y no está acotada superiormente. Ahora, si λ es un valor regular de f que es cota superior de $f(C(f))$, entonces $\alpha(\lambda)$ es un valor regular de g que es cota superior de $g(C(g))$, y por supuesto, $f^{-1}(\lambda) = g^{-1}(\alpha(\lambda))$.

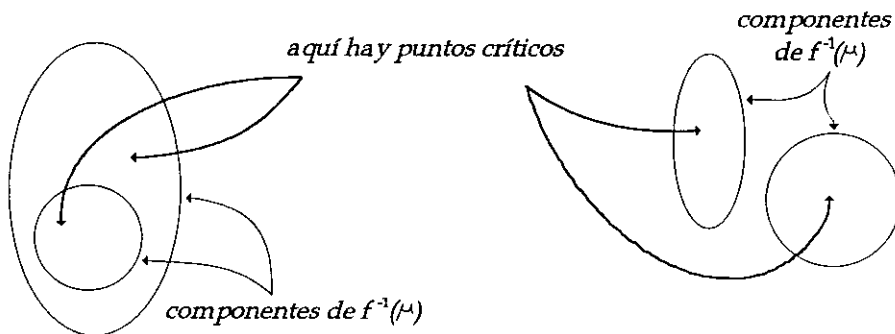
Supongamos pues que f no está acotada superiormente, de modo que f es propia por el Lema 1.9. Se verifica entonces que $f^{-1}(\lambda_1)$ y $f^{-1}(\lambda_2)$ son difeomorfas si $\lambda_1 < \lambda_2$ son dos valores regulares de f que son cotas superiores de $f(C(f))$: en efecto, por ser f propia, $(f^{-1}([\lambda_1, \lambda_2]); f^{-1}(\lambda_1), f^{-1}(\lambda_2))$ es un cobordismo compacto, y trivialmente

$$f|_{f^{-1}([\lambda_1, \lambda_2])} : f^{-1}([\lambda_1, \lambda_2]) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2]$$

es una función de Morse sobre este cobordismo, sin puntos críticos. Así, por el Primer Teorema de Deformación de la Teoría de Morse, las fibras $f^{-1}(\lambda_1)$ y $f^{-1}(\lambda_2)$ son variedades

difeomorfos.

De acuerdo con todo lo anterior, es suficiente demostrar la existencia de un valor regular para f , que sea cota superior de $f(C(f))$ y su fibra sea conexa, en la situación en que f es una aplicación propia no acotada superiormente y $f(C(f))$ está acotado superiormente. Es un argumento de conexión un tanto delicado: por un lado, ya hemos visto que en esta situación $C(f) \subset B(0, s)$ para cierto $s > 0$. Es trivial entonces que si μ es un valor regular de f con $f^{-1}(\mu) \cap B(0, s) = \emptyset$, existe una componente conexa A de $R^{n+1} - f^{-1}(\mu)$ que contiene a $C(f)$. Por el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer generalizado y la existencia de extremos relativos, si μ es un valor regular de f y $R^{n+1} - f^{-1}(\mu)$ tiene más de dos componentes conexas, al menos dos de estas componentes conexas tienen puntos críticos de f (véase figura), y por tanto no existe una componente conexa de $R^{n+1} - f^{-1}(\mu)$ que contenga a $C(f)$. Por todo lo anterior, si no hay un valor regular de f cota superior de $f(C(f))$ con fibra conexa, tendríamos que $f(B[0, s])$ no estaría acotado. \square



Corolario 2.5 Sea S una superficie conexa de R^3 que se obtiene como los ceros de una función $f : R^3 \rightarrow R$ diferenciable y propia, siendo 0 un valor regular de f . Entonces, si f tiene un único punto crítico en la componente conexa no acotada de $R^3 - S$, y es no degenerado, S es difeomorfa al toro.

Demostración: Sea G_1 la componente conexa no acotada de $R^3 - S$. Trabajando con $-f$ si fuese necesario, podemos suponer que $f(G_1) \subset (0, +\infty)$, y de hecho se da la igualdad al ser f no acotada superiormente (puesto que f es propia y acotada inferiormente). Entonces, si p es el único punto crítico de f en G_1 , tomando $\lambda > f(p)$ se tiene el cobordismo compacto $(f^{-1}([0, \lambda]); S, f^{-1}(\lambda))$ ($f^{-1}([0, \lambda])$ es compacto pues f es propia) y la función

de Morse sobre este cobordismo dada por

$$f|_{f^{-1}([0, \lambda])} : f^{-1}([0, \lambda]) \rightarrow [0, \lambda]$$

con un único punto crítico p (la función es de Morse pues este punto es no degenerado). Entonces, por el Segundo Teorema de Deformación de la Teoría de Morse (véase [S.T], proposición X.9.16), $f^{-1}((-\infty, \lambda])$ se obtiene de $f^{-1}((-\infty, 0])$ por asociación de un asa de tipo k , donde k es el índice del punto crítico p no degenerado, así que $f^{-1}(\lambda)$ se obtiene de $f^{-1}(0)$ por una modificación esférica (cirugía en el sentido de Milnor-Thom ([Mi.1])) de tipo $(k, 3 - k)$, y por tanto $f^{-1}(0)$ se obtiene de $f^{-1}(\lambda)$ por una cirugía de tipo $(3 - k, k)$.

Por otro lado, como λ es un valor regular de f que es cota superior de $f(C(f))$, y f es de fibras compactas por ser propia, se verifica que $f^{-1}(\lambda)$ es conexo, por el Lema 2.4.

De modo que $f^{-1}(\lambda)$ es una superficie compacta y conexa de R^3 , que se obtiene como la fibra regular de una aplicación propia, y no existen puntos críticos en la componente conexa no acotada de $R^3 - f^{-1}(\lambda)$. Entonces, por el Teorema 2.1, la variedad $f^{-1}(\lambda)$ es difeomorfa a la esfera S^2 , y por tanto nuestra superficie se obtiene de S^2 mediante una cirugía de tipo $(3 - k, k)$, o sea, existe una inmersión difeomórfica $h : S^{3-k-1} \times D^k \rightarrow S^2$ tal que

$$S = (S^2 - h(S^{3-k-1} \times \text{Int}(D^k))) \bigsqcup_{h|_{S^{3-k-1} \times S^{k-1}}} (D^{3-k} \times S^{k-1})$$

Ahora bien, si $k = 1$, $S = S^2 + S^2$ que no es conexo, y si $k = 2$, $S^0 = \partial(D^1)$, así que S es el toro (por supuesto k no puede ser 0 ni 3, pues al ser $S^{-1} = \partial D^0 = \emptyset$, para $k = 0$ quedaría $S = \emptyset$ y para $k = 3$ tendríamos $S = S^2 + S^2$ no conexo; en cualquier caso, siempre podemos asumir que $k = 1$ ó 2 por la eliminación de los puntos críticos extremos relativos cuando el cobordismo y las dos partes señaladas de su borde son conexos: véase [Mi], Teorema 8.1). \square

Para ilustrar los resultados anteriores, desarrollaremos un sencillo ejemplo en el que se decide el tipo diferenciable de la hipersuperficie de acuerdo con el corolario, mediante el conocimiento de los puntos críticos en la región de fuera, mientras que en la región acotada que encierra la superficie existen infinitos puntos críticos, y por tanto ninguna información es obtenible de éstos mediante la Teoría de asociación de asas.

Ejemplo 2.6 Sea $g : R^3 \rightarrow R$ la aplicación polinómica dada por

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2 + 6x_1^2 - 10x_2^2 - 10x_3^2 + 9.$$

Entonces $S = g^{-1}(0)$ es una superficie de R^3 difeomorfa al toro $S^1 \times S^1$.

Por supuesto g es diferenciable y

$$Dg(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_1x_3^2 + 12x_1 \\ 4x_2^3 + 4x_1^2x_2 + 4x_2x_3^2 - 20x_2 \\ 4x_3^3 + 4x_1^2x_3 + 4x_2^2x_3 - 20x_3 \end{pmatrix}$$

así que $C(g) = \{(0, 0, 0)\} \cup \{(0, x_2, x_3) \in R^3 / x_2^2 + x_3^2 = 5\}$ y por tanto $C(g) \cap g^{-1}(0) = \emptyset$, es decir, 0 es un valor regular de g . Trivialmente g es no acotada, y sus fibras son compactas (la parte homogénea de mayor grado, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2$, es siempre positiva para todo $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$). Así, por el Lema 1.9, g es propia. Por otro lado, un sencillo cálculo del Hessiano de g en $(0, 0, 0)$ nos dice además que este punto crítico es no degenerado (con índice dos).

Algo no tan inmediato es demostrar que S es conexo. Para ello notése lo siguiente: i) $C(g)$ tiene exactamente dos componentes conexas. ii) $\{(0, 0, 0)\} \subset A$, donde A es la única componente conexa no acotada de $R^3 - S$ ($g(t, 0, 0) = t^4 + 6t^2 + 9 > 0$ para todo $t \geq 0$). iii) Toda componente conexa de $R^3 - S$ que esté acotada debe tener puntos críticos (debido a la existencia de extremos relativos). Las observaciones anteriores, junto con el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer nos dan la conexión de S .

Por otro lado g tiene un único punto crítico en la componente conexa no acotada de $R^3 - S$: ésta es $\{p \in R^3 / g(p) > 0\}$ y $C(g) \cap \{p \in R^3 / g(p) > 0\} = \{(0, 0, 0)\}$. Entonces, por el corolario 2.5, S es difeomorfo al toro.

Para concluir este capítulo obtendremos un recíproco del Teorema 2.1 para las esferas sumergidas en el Espacio Euclídeo.

Proposición 2.7 Sea M^n una hipersuperficie de R^{n+1} , con $n \geq 4$. Entonces si M^n es difeomorfa a S^n , existe una aplicación diferenciable $f : R^{n+1} \rightarrow R$ tal que 0 es un valor regular de f , $M^n = f^{-1}(0)$, f tiene un único punto crítico y es no degenerado (así que f es de Morse), y además f es propia.

Demostración: Denotemos por N y S los polos norte y sur de S^{n+1} respectivamente, es decir, $N = (0, \dots, 0, 1)$ y $S = (0, \dots, 0, -1)$. Sea $j : R^{n+1} \hookrightarrow S^{n+1}$ una inmersión

difeomórfica con $S^{n+1} - j(R^{n+1}) = \{N\}$, y sea $\Sigma = j(M^n)$, así que Σ es subvariedad diferenciable de S^{n+1} , difeomorfa a S^n . Por el Teorema de Schoenflies diferenciable en dimensión mayor o igual que cinco ([Mi], pág.112) existe una aplicación diferenciable $H : S^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$, cada $H_t = H(-, t)$ es un difeomorfismo, $H_0 = 1_{S^{n+1}}$ y $H_1(\Sigma) = i(S^n)$, donde $i : S^n \hookrightarrow S^{n+1}$ está dada por $i(y_1, \dots, y_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1}, 0)$.

Sea $h : S^{n+1} \rightarrow R$ la aplicación altura, es decir, $h(y_1, \dots, y_{n+2}) = y_{n+2}$. Por supuesto h es diferenciable, $h^{-1}(0) = i(S^n)$, $C(h) = \{N, S\}$ y ambos son no degenerados. Por comodidad supongamos que $h(H_1(N)) > 0$ (desde luego no es 0 ya que $h^{-1}(0) = i(S^n) = H_1(\Sigma)$ y $N \notin \Sigma$, pues de hecho $N \notin j(R^{n+1})$). Como en III) del Teorema 2.1, se demuestra que existe un difeomorfismo $\alpha : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ con $\alpha(i(S^n)) = i(S^n)$ y $\alpha(H_1(N)) = N$. Es claro entonces que $h(\alpha(H_1(j(R^{n+1})))) = [-1, 1]$, y si $\tau : [-1, 1] \rightarrow [-1, +\infty)$ es un difeomorfismo con $\tau(t) = t$ para todo $t \leq 1/2$, una solución viene dada por la composición f de τ con la aplicación composición

$$R^{n+1} \xrightarrow{j} S^{n+1} \xrightarrow{H_1} S^{n+1} \xrightarrow{\alpha} S^{n+1} \xrightarrow{h} [-1, 1]$$

definida sobre la imagen. Por supuesto f es de clase infinita,

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= j^{-1}(H_1^{-1}(\alpha^{-1}(h^{-1}(\tau^{-1}(0))))) = j^{-1}(H_1^{-1}(\alpha^{-1}(h^{-1}(0)))) = \\ &= j^{-1}(H_1^{-1}(\alpha^{-1}(i(S^n)))) = j^{-1}(H_1^{-1}(i(S^n))) = j^{-1}(\Sigma) = M^n, \end{aligned}$$

$C(f) = j^{-1}(H_1^{-1}(\alpha^{-1}(C(h)))) = j^{-1}(H_1^{-1}(\alpha^{-1}(\{N, S\})))$ y se tenía que $\alpha(H_1(N)) = N$, de donde $C(f)$ es un único punto crítico (por supuesto no degenerado), y además 0 es un valor regular de f . Por la construcción de f y la compacidad de S^{n+1} es fácil ver que f es de fibras compactas, y no está acotada superiormente gracias al difeomorfismo τ , así que por el Lema 1.9, la aplicación f es propia. \square

Corolario 2.8 *Sea M^n una hipersuperficie compacta y conexa de R^{n+1} con $n \geq 5$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) M^n es difeomorfa a S^n .

ii) Existe una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ diferenciable, 0 es valor regular de f , $M^n = f^{-1}(0)$, f no tiene puntos críticos en la componente conexa no acotada de $R^{n+1} - M^n$, y f cumple la condición de Palais-Smale.

iii) Existe una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ diferenciable, 0 es valor regular de f , $M^n = f^{-1}(0)$, f no tiene puntos críticos en la componente conexa no acotada de $R^{n+1} - M^n$, y f es de fibras compactas.

iv) Existe una aplicación $f : R^{n+1} \rightarrow R$ diferenciable, 0 es valor regular de f , $M^n = f^{-1}(0)$, f no tiene puntos críticos en la componente conexa no acotada de $R^{n+1} - M^n$, y f es propia.

Demostración: Por supuesto iv) \Rightarrow ii) y iii), y por el Teorema 2.1 tanto ii) como iii) implican i). Finalmente, por la proposición anterior, i) \Rightarrow iv). \square

Capítulo IV

SOBRE EL PROBLEMA DE KIRBY DE SIMPLIFICACION DE ENLACES REFERENCIADOS

Un problema fundamental de la Topología de dimensión baja es obtener una presentación de los objetos que estudia, y un modo de saber cuándo dos presentaciones dadas lo son del mismo objeto.

A comienzos de la década de los sesenta, W. B. Lickorish obtiene una tal presentación para las variedades diferenciables de clase infinita orientables, conexas, compactas y sin borde, de dimensión tres ([L.1]). Cualquier variedad de este tipo (nos referiremos a ellas simplemente como 3-variedades) se obtiene retirando los interiores de una colección finita y disjunta de toros sólidos incluidos en la esfera de dimensión tres, y volviéndolos a pegar de un modo determinado.

A la colección de los toros sólidos en S^3 y al modo en que deben ser pegados de nuevo se les llama instrucciones de cirugía. Dichas instrucciones pueden ser concretadas señalando una colección de curvas cerradas simples (1-nudos) disjuntas en S^3 y un número entero (referencia) para cada curva: los toros sólidos que se retiran son entornos tubulares de estas curvas, y las referencias nos indican la manera de volver a pegar los toros sólidos. A una familia finita y disjunta de 1-nudos en S^3 , junto con las referencias, se le llama enlace referenciado en S^3 , y si L es un tal enlace referenciado, a la 3-variedad que obtenemos siguiendo las instrucciones de cirugía que éste nos marca, la denotamos por M_L^3 .

Aún más, Lickorish demuestra ([L.2] y [L.3]) que toda 3-variedad es M_L^3 donde L pertenece a una clase muy especial de enlaces referenciados. Los 1-nudos de estos enlaces referenciados se obtienen a partir de las curvas canónicas (longitudes, meridianos y curvas de enlace) del toro de género arbitrario, canónicamente incluido en S^3 , cavadas a distinta profundidad en el toro sólido que acota, y las referencias sólo pueden ser uno y menos uno. Es pues bastante razonable referirnos a estos enlaces referenciados con el nombre de enlaces de Lickorish.

Por otro lado, a finales de la década de los setenta, R. C. Kirby ([K.2]) introduce dos modos de manipular los enlaces referenciados (a estas manipulaciones las llamaremos movimientos de Kirby), y demuestra que las variedades M_L^3 y $M_{L'}^3$ son difeomorfas si y sólo si L' se obtiene de L mediante una serie de estos movimientos y sus inversos (en tal caso, diremos que L y L' son enlaces referenciados ∂ -equivalentes y escribiremos $L \sim L'$). En general, al conjunto de las posibles combinaciones de estos movimientos se le conoce con el nombre de Cálculo de Kirby.

Kirby planteó entonces la posibilidad de obtener un algoritmo para decidir cuando dos enlaces referenciados definen la misma 3-variedad. A finales de los ochenta, en vista del escaso progreso habido en esta cuestión, Kirby vuelve a plantear el mismo problema, ahora desglosado en las siguientes cuestiones ([K.1], págs. 15 y 16):

- 1- ¿Qué debemos entender por enlace "canónico" o "minimal" de una 3-variedad?
- 2- Encontrar un algoritmo para que, a partir de un enlace referenciado L arbitrario, podamos construir mediante movimientos de Kirby un enlace referenciado L' canónico o minimal (resolver esta cuestión al menos para familias interesantes de enlaces referenciados).

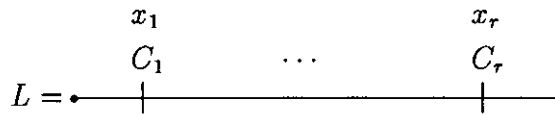
Este capítulo trata estas cuestiones. Nuestra idea es considerar los enlaces de Lickorish como minimales o canónicos, e intentar responder, al menos en ciertos casos, a la segunda cuestión. Nos centraremos así en los enlaces que llamaremos cadenas simples (éstos incluyen, por ejemplo, los recubridores cíclicos de S^3 ramificados sobre el nudo trébol [Ro]).

En particular, el problema de decidir cuándo un enlace referenciado es un diagrama de Heegaard 4-dimensional, se reducirá a saber cuando un diagrama de Heegaard 3-dimensional que es composición de homeomorfismos de torsión a lo largo de meridianos, longitudes y curvas de enlace es $\#_{\lambda} S^1 \times S^2$ (véase [Mo]).

El punto de partida en nuestro proceder es un refinamiento de lo que Rolfsen ([Ro]) llama Teorema Fundamental de la Cirugía sobre 3-variedades, probado en [L.1]. Para ello introducimos previamente los siguientes conceptos y notación:

Sea M_g el toro sólido de género g canónicamente incluido en S^3 y sea $S_g = \partial M_g$. Sea c_g un collar de S_g en M_g . Un enlace referenciado L se dice incluido en M_g si las componentes de L son 1-nudos en S_g "cavados" en M_g a distinta profundidad mediante el collar c_g .

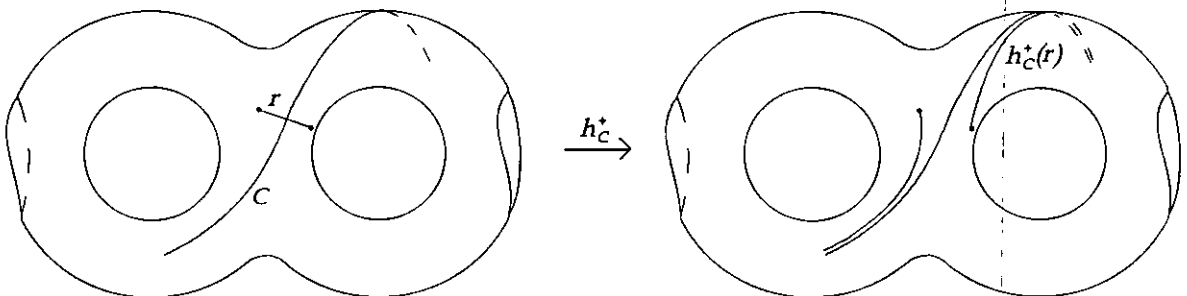
Si A es un 1-nudo en S_g , llamaremos autorreferencia de A al número entero $a = lk(A, c_g(A \times 1))$ (para la definición de número de enlace lk , véase [Ro], págs. 132 y siguientes). Entonces, un enlace referenciado L se dice totalmente incluido en M_g si está incluido en M_g y además los números de referencia de cada componente de L vienen dados por la autorreferencia del 1-nudo correspondiente en S_g más o menos 1 (es decir, los 1-nudos en S_g casi determinan lo que han de ser las referencias). Un enlace referenciado L incluido en M_g se puede expresar mediante la semirrecta real de acuerdo con el siguiente diagrama:



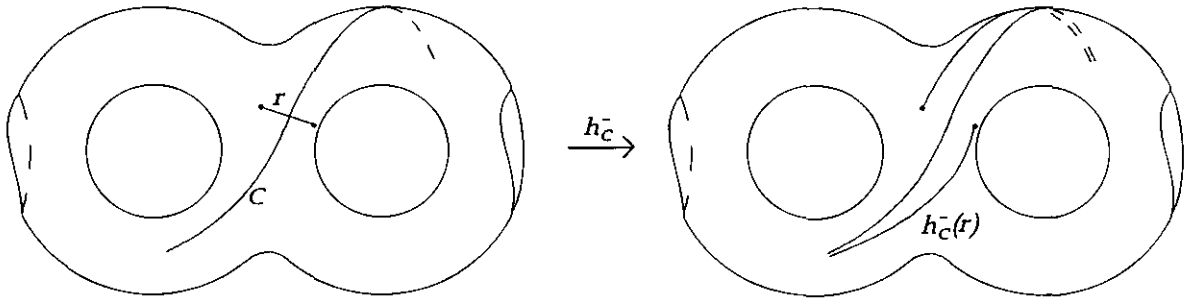
Es decir, las componentes de L son $c_g(C_i \times \{s_i\})$ donde cada C_i es un 1-nudo en S_g , $s_i \in (0, +\infty)$ con $s_1 < \dots < s_r$ y $x_i \in \mathbb{Z}$ es la referencia de $c_g(C_i \times \{s_i\})$.

Por definición, un enlace de Lickorish es un enlace referenciado totalmente incluido en M_g de modo que los 1-nudos en S_g correspondientes son meridianos, longitudes o curvas de enlace canónicos de S_g .

Si C es un 1-nudo en S_g , h_C denota el homeomorfismo de torsión de S_g sobre C (véanse [L.1] y [L.2]). En el desarrollo de nuestras ideas será esencial destacar el sentido en que se torsiona S_g a lo largo de la curva C : distinguiremos así el homeomorfismo h_C^+ (expresado en el siguiente dibujo),



de su inverso h_C^- :



Nuestro refinamiento del Teorema Fundamental de la Cirugía sobre 3-Variedades queda ahora plasmado en el siguiente resultado:

Corolario 2.15 *Sea el enlace referenciado totalmente incluido en M_g*

$$L = \bullet \begin{array}{c} a_1 + \epsilon_1 \\ | \\ A_1 \end{array} \dots \begin{array}{c} a_r + \epsilon_r \\ | \\ A_r \end{array}$$

(así que los A_i son 1-nudos en S_g , $\epsilon_i = \pm 1$ y $a_i = lk(A_i, c_g(A_i \times 1))$ son las autorreferencias de A_i), y supongamos que el homeomorfismo de S_g definido por la composición

$$h_{A_1}^{-\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{A_r}^{-\epsilon_r}$$

coincide con

$$h_{B_1}^{\delta_1} \circ \dots \circ h_{B_s}^{\delta_s}$$

siendo B_i longitudes, meridianos o curvas de enlace canónicos de S_g y $\delta_i = \pm 1$.

Entonces el enlace incluido en M_g

$$L' = \bullet \begin{array}{c} -\delta_1 \\ | \\ B_1 \end{array} \dots \begin{array}{c} -\delta_s \\ | \\ B_s \end{array}$$

que es de Lickorish, se obtiene de L mediante movimientos de Kirby.

Ahora, dado cualquier enlace referenciado L , para obtener un enlace referenciado L' de Lickorish mediante movimientos de Kirby, debemos previamente encontrar un enlace referenciado L_1 incluido en M_g que sea ∂ -equivalente a L (paso 1), y en segundo lugar, tal vez modificando los 1-nudos en S_g ligeramente, obtener un enlace referenciado L_2 a su vez ∂ -equivalente a L_1 , L_2 ya totalmente incluido en M_g (paso 2). Entonces el enlace referenciado L' buscado se obtendría algorítmicamente a partir de L_2 mediante el corolario 2.15 haciendo uso de los pasos de [L.2] y [L.3].

Resulta entonces de interés resolver los pasos 1 y 2 para familias importantes de enlaces referenciados. Esto se lleva a cabo con éxito para las llamadas cadenas simples, que comprenden, por ejemplo, los recubridores cíclicos de S^3 ramificados sobre el nudo trébol (véase [Ro], págs. 304 y siguientes).

La belleza y "sencillez" (véase por ejemplo el comentario en [Ro], pág. 279) de los enlaces referenciados de Lickorish nos ha llevado a proponer a éstos como enlaces canónicos o minimales para las 3-variedades, pero sería de gran importancia (para el problema inicial de decidir cuándo dos enlaces referenciados definen la misma 3-variedad) el poder comparar dos enlaces de Lickorish entre sí, aunque esta cuestión no es analizada en la memoria.

El capítulo está dividido en tres secciones: en la primera se recuerdan las definiciones y los resultados básicos ya conocidos; la segunda sección refina lo que Rolfsen llama Teorema Fundamental de la Cirugía en dimensión tres ([L.1], [L.2], [L.3] y [Ro]), obteniendo el Corolario 2.15. Para ello se introduce aquí el concepto de autorreferencia de un 1-nudo en S_g (y a partir de esta definición se da la interesante noción de enlace totalmente incluido en M_g), y se distingue entre un homeomorfismo de torsión y su inverso. Por último, la sección 3 aplica estas ideas a una interesante familia de enlaces referenciados: las cadenas simples.

Las referencias básicas usadas en este capítulo son [L.1], [L.2], [L.3], [K.1], [K.2] y [Ro] (capítulos 2,7 y 9). Estas referencias hacen mención en ocasiones a la categoría diferenciable, y en otras a la topológica: queremos por ello recordar aquí la equivalencia entre ambas categorías cuando de la dimensión tres se trata. A lo largo del capítulo utilizaremos el término *inmersión topológica* para referirnos a una aplicación entre espacios topológicos que es homeomorfismo sobre la imagen.

1 ENLACES REFERENCIADOS DE LICKORISH Y CALCULO DE KIRBY

En esta sección introducimos de modo breve las definiciones y resultados básicos ya conocidos que serán usados en el capítulo. Esencialmente éstos son: enlaces referenciados como instrucciones de cirugía, el toro sólido M_g canónicamente incluido en S^3 y su borde, $S_g = \partial M_g$, las curvas canónicas de S_g (meridianos, longitudes y curvas de enlace), el Teorema Fundamental de la Cirugía en dimensión tres de Lickorish, el Cálculo de Kirby y el Teorema Fundamental del Cálculo de Kirby.

Definición 1.1 (1-nudo en S^3 orientado) *Un 1-nudo J en S^3 es una subespacio de S^3 homeomorfo a la circunferencia S^1 . Así pues, si J es un 1-nudo en S^3 , existe una inmersión topológica $\alpha : S^1 \rightarrow S^3$ con $J = \alpha(S^1)$, y una orientación en J se obtiene como la clase de isotopía con imagen incluida en J de una tal inmersión topológica.*

Definición 1.2 (Número de referencia) *Llamamos referencia de un 1-nudo en S^3 a un número entero que le asociamos arbitrariamente.*

Definición 1.3 (Número de enlace de dos 1-nudos orientados disjuntos) *Sean J y K dos 1-nudos disjuntos en S^3 . Entonces $H_1(S^3 - K; \mathbb{Z})$ es isomorfo a \mathbb{Z} , y si J es n -veces un generador de este grupo, se dice que n es el número de enlace de J y K , y escribimos $lk(J, K) = n$. La ambigüedad sobre el signo de n desaparece si elegimos un generador concreto para $H_1(S^3 - K; \mathbb{Z})$ y orientamos J , o lo que es lo mismo, suponemos ambos nudos orientados y seguimos el siguiente convenio: consideramos una proyección regular de $J \cup K$, y en cada punto en que J cruza por debajo de K , contamos:*

$$+1 \text{ para } \begin{array}{c} K \\ \downarrow \\ \longrightarrow J \end{array} \quad \text{y} \quad -1 \text{ para } \begin{array}{c} K \\ \uparrow \\ \longrightarrow J \end{array}$$

La suma de estos números es entonces $lk(J, K)$.

Observación 1.4 *Si $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ es una inmersión topológica con $f(S^1 \times \{(0, 0)\}) = K$, entonces $f(\{(1, 0)\} \times \partial D^2)$ genera $H_1(S^3 - K; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$.*

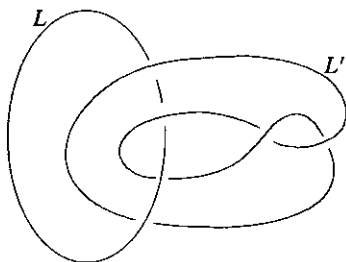
Definición 1.5 (Toro sólido) *Un toro sólido es un espacio homeomorfo a $S^1 \times D^2$. Un toro sólido de género $g \in \mathbb{N}$ es un espacio homeomorfo a la suma conexa (a lo largo del borde) de g toros sólidos.*

Definición 1.6 (Ánima, Curva de Referencia y Número de referencia de una inmersión topológica de $S^1 \times D^2$ en S^3) *El ánimo de una inmersión topológica $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ es el 1-nudo orientado $J = f(S^1 \times \{(0,0)\})$ (suele denotarse con la letra \mathcal{A}_f), y su curva de referencia es el 1-nudo orientado $K = f(S^1 \times \{(1,0)\})$ (suele denotarse con la letra \mathcal{R}_f). El número de referencia de f es el número entero $n = lk(\mathcal{A}_f, \mathcal{R}_f)$ (\mathcal{A}_f y \mathcal{R}_f son 1-nudos disjuntos y orientados de S^3).*

Observación 1.7 *Dado un 1-nudo orientado J en S^3 con referencia $n \in \mathbb{Z}$, existe una inmersión topológica $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ tal que $J = \mathcal{A}_f$ y $n = lk(J, \mathcal{R}_f)$. Además f es única a menos de isotopía ambiente de S^3 .*

Definición 1.8 (Enlace en S^3) *Llamaremos enlace en S^3 a una colección finita de 1-nudos disjuntos en S^3 .*

Observación 1.9 *Cada nudo de un enlace puede ser trivial o estar anudado, y dos nudos distintos pueden estar o no "enlazados" entre si. Nótese que dos nudos orientados L y L' pueden estar enlazados entre si aunque su número de enlace $lk(L, L')$ sea cero:*



Definición 1.10 (Enlace referenciado en S^3) *Llamaremos enlace referenciado L en S^3 a un enlace en S^3 en el que a cada componente le hemos asociado una referencia. Escribiremos*

$$L = \{(L_1, n_1), \dots, (L_r, n_r)\}$$

para denotar el enlace referenciado en S^3 dado por los 1-nudos disjuntos L_i , y las referencias $n_i \in \mathbb{Z}$ para cada L_i ($i \in \{1, \dots, r\}$).

Observación 1.11 *Toda familia finita de inmersiones topológicas con imágenes disjuntas $\{f_1 : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3, \dots, f_r : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3\}$ define un enlace referenciado*

$$L = \{(L_1, n_1), \dots, (L_r, n_r)\}$$

considerando $L_i = \mathcal{A}_{f_i}$ y $n_i = \text{lk}(L_i, \mathcal{R}_{f_i})$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Recíprocamente, si

$$L = \{(L_1, n_1), \dots, (L_r, n_r)\}$$

es un enlace referenciado en S^3 , existen r inmersiones topológicas

$$f_1 : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3, \dots, f_r : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$$

con imágenes disjuntas, de modo que $L_i = \mathcal{A}_{f_i}$ y $n_i = \text{lk}(L_i, \mathcal{R}_{f_i})$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Además la familia $\{f_i\}$ es única salvo isotopía de S^3 , si imponemos la condición adicional de que los f_i recorran los 1-nudos L_i en un sentido determinado.

Definición 1.12 *(Enlaces referenciados como instrucciones para asociar asas) Si*

$$L = \{(L_1, n_1), \dots, (L_r, n_r)\}$$

es un enlace referenciado en S^3 , W_L^4 denotará la 4-variedad con borde, compacta y conexa, obtenida al asociar r asas de tipo dos $D^2 \times D^2$ al disco D^4 de acuerdo con el enlace referenciado L , esto es:

$$W_L^4 = \mathcal{X}(D^4; f_1, \dots, f_r; 2) = D^4 \bigsqcup_f \left(\bigsqcup_{i=1}^r D_i^2 \times D_i^2 \right)$$

siendo

$$f : \bigsqcup_{i=1}^r \partial D_i^2 \times D_i^2 \rightarrow S^3$$

la aplicación que lleva p a $f_i(p)$ si $p \in \partial D_i^2 \times D_i^2$, donde

$$f_1 : \partial D_1^2 \times D_1^2 = S^1 \times D^2 \rightarrow S^3, \dots, f_r : \partial D_r^2 \times D_r^2 = S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$$

son inmersiones topológicas con imágenes disjuntas, y tales que $L_i = \mathcal{A}_{f_i}$ y $n_i = \text{lk}(L_i, \mathcal{R}_{f_i})$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Observación 1.13 *La definición anterior es consistente de acuerdo con la Observación 1.11: por un lado, esta observación nos dice que existe la familia de inmersiones topológicas $\{f_i\}$ con las condiciones requeridas, y por otro lado, si $\{f_i\}$ y $\{f'_i\}$ son*

dos familias distintas cumpliendo estas condiciones, existe una aplicación $H : S^3 \times I \rightarrow S^3$ continua, tal que cada nivel $H_t = H(-, t)$ es un homeomorfismo, $H_0 = 1_{S^3}$ y $H_1 \circ f_i = f'_i \circ \alpha_i$ siendo $\alpha_i : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ la identidad si f_i y f'_i recorren L_i en un mismo sentido, y $\alpha_i = CS \times 1_{D^2}$ si f_i y f'_i recorren L_i en sentido opuesto, donde $CS : S^1 \rightarrow S^1$ es la aplicación $CS(\theta) = -\theta$. Por supuesto, α_i puede extenderse a un homeomorfismo α'_i de $D^2 \times D^2$, y H_1 puede extenderse a un homeomorfismo H'_1 de D^4 pues H_1 es isotópico a la identidad:

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xleftarrow{f_i} & \partial D_i^2 \times D_i^2 \subset D_i^2 \times D_i^2 \\
 \downarrow H_1 & & \downarrow \alpha_i \quad \downarrow \alpha'_i \\
 S^3 & \xleftarrow{f'_i} & \partial D_i^2 \times D_i^2 \subset D_i^2 \times D_i^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 D^4 \sqcup D_1^2 \times D_1^2 \sqcup \dots \sqcup D_r^2 \times D_r^2 & & \\
 \downarrow H'_1 & \downarrow \alpha'_1 & \dots \downarrow \alpha'_r \\
 D^4 \sqcup D_1^2 \times D_1^2 \sqcup \dots \sqcup D_r^2 \times D_r^2 & &
 \end{array}$$

Resulta obvio entonces que $H'_1 \sqcup \alpha'_1 \sqcup \dots \sqcup \alpha'_r$ establece un homeomorfismo entre $\mathcal{X}(D^4; f_1, \dots, f_r; 2)$ y $\mathcal{X}(D^4; f'_1, \dots, f'_r; 2)$.

Definición 1.14 (Enlaces referenciados como instrucciones de Cirugía) Si

$$L = \{(L_1, n_1), \dots, (L_r, n_r)\}$$

es un enlace referenciado en S^3 , M_L^3 denotará la 3-variedad sin borde, compacta y conexa obtenida al hacer r cirugías de tipo $(2, 3)$ disjuntas a S^3 de acuerdo con el enlace referenciado L , es decir:

$$M_L^3 = \mathcal{X}(S^3; f_1, \dots, f_r) = (S^3 - (\bigcup_{i=1}^r f_i(S^1 \times \text{Int}D^2))) \bigsqcup_F (\bigcup_{i=1}^r D_i^2 \times S_i^1)$$

siendo

$$F : \partial(\bigcup_{i=1}^r D_i^2 \times S_i^1) = \bigcup_{i=1}^r S_i^1 \times S_i^1 \rightarrow \bigcup_{i=1}^r f_i(S^1 \times \partial D^2) = \partial(S^3 - (\bigcup_{i=1}^r f_i(S^1 \times \text{Int}D^2)))$$

la aplicación que lleva p a $f_i(p)$ si $p \in S_i^1 \times S_i^1$, donde

$$f_1 : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3, \dots, f_r : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$$

son inmersiones topológicas con imágenes disjuntas, y tales que $L_i = \mathcal{A}_{f_i}$ y $n_i = lk(L_i, \mathcal{R}_{f_i})$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Observación 1.15 *La definición anterior es consistente de acuerdo con la Observación 1.11: por un lado, esta observación nos dice que existe la familia de inmersiones topológicas $\{f_i\}$ con las condiciones requeridas, y por otro lado, si $\{f_i\}$ y $\{f'_i\}$ son dos familias distintas cumpliendo estas condiciones, existe una aplicación $H : S^3 \times I \rightarrow S^3$ continua, tal que cada nivel H_t es un homeomorfismo, $H_0 = 1_{S^3}$ y $H_1 \circ f_i = f'_i \circ \alpha_i$ siendo $\alpha_i : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ la identidad si f_i y f'_i recorren L_i en un mismo sentido, y $\alpha_i = CS \times 1_{D^2}$ si f_i y f'_i recorren L_i en sentido opuesto. Claramente $\alpha_i|_{S^1 \times S^1}$ puede extenderse a un homeomorfismo α''_i de $D^2 \times S^1$:*

$$\begin{array}{ccccc}
 S^3 - \bigcup_{i=1}^r f_i(S^1 \times \text{Int}D^2) & \xleftarrow{f_i} & S^1_i \times S^1_i \subset D^2_i \times S^1_i & & \\
 \downarrow H_1 & & \downarrow \alpha_i|_{S^1 \times S^1} & & \downarrow \alpha''_i \\
 S^3 - \bigcup_{i=1}^r f'_i(S^1 \times \text{Int}D^2) & \xleftarrow{f'_i} & S^1_i \times S^1_i \subset D^2_i \times S^1_i & & \\
 \\
 (S^3 - \bigcup_{i=1}^r f_i(S^1 \times \text{Int}D^2)) \sqcup D^2_1 \times S^1_1 \sqcup \dots \sqcup D^2_r \times S^1_r & & \downarrow \alpha''_1 & \dots & \downarrow \alpha''_r \\
 \downarrow H_1 & & & & \\
 (S^3 - \bigcup_{i=1}^r f'_i(S^1 \times \text{Int}D^2)) \sqcup D^2_1 \times S^1_1 \sqcup \dots \sqcup D^2_r \times S^1_r & & & &
 \end{array}$$

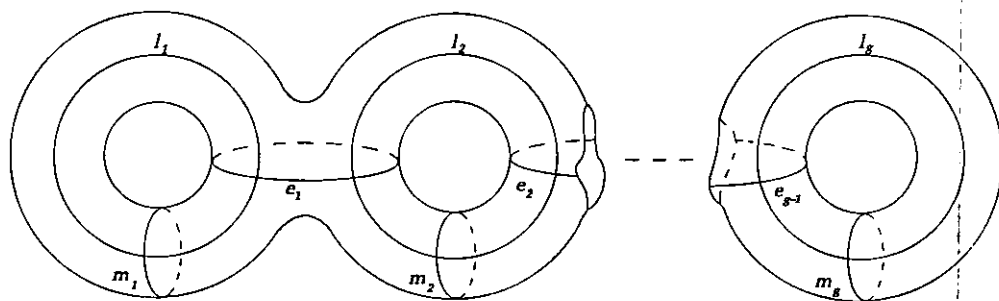
Resulta obvio entonces que $H_1 \sqcup \alpha''_1 \sqcup \dots \sqcup \alpha''_r$ establece un homeomorfismo entre $\mathcal{X}(S^3; f_1, \dots, f_r)$ y $\mathcal{X}(S^3; f'_1, \dots, f'_r)$.

La relación entre las dos construcciones anteriores viene dada por el siguiente resultado, de prueba trivial:

Proposición 1.16 *Si L es un enlace referenciado en S^3 , entonces $M^3_L \approx \partial W^4_L$ (dado que ya habíamos probado que W^4_L estaba bien definida, esto es otro modo de ver que M^3_L está bien definida también).*

En lo que sigue, introducimos la notación que usaremos para referirnos al toro sólido de género arbitrario, canónicamente incluido en el Espacio Eucídeo de dimensión tres, y señalaremos sus curvas canónicas:

Definición 1.17 M_g denotará el toro sólido de género g canónicamente incluido en S^3 . Su borde es la superficie orientable del mismo género, y lo llamaremos S_g . Usaremos también la notación c_g para un collar de S_g en M_g , es decir, c_g es una inmersión topológica de $S_g \times R_+$ en M_g tal que $c_g(x, 0) = x$ para todo $x \in S_g$. En el siguiente dibujo mostramos las curvas canónicas de S_g , esto es, sus longitudes l_i , meridianos m_i y curvas de enlace e_j (en S_g hay g meridianos y g longitudes, y $g - 1$ curvas de enlace):



Por ejemplo, si $g = 1$, podemos tomar $M_1 = H(S^1 \times D^2)$ donde H es la aplicación $S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ dada por $H((x, y), (a, b)) = ((2+a)x, (2+a)y, b)$, y para géneros arbitrarios, usamos sumas conexas de esta aplicación.

Observación 1.18 $V_g = \text{Adh}(S^3 - M_g)$ es también un toro sólido de género g incluido en S^3 , $\partial V_g = S_g = \partial M_g$ y $S^3 = V_g \sqcup_{1_{S_g}} M_g$.

Observación 1.19 (ver [Ro], págs. 29 a 32) Si T es un toro sólido incluido en R^3 (en S^3), m_T , l_T y l_T^p denotan el meridiano, una longitud y la longitud preferida de T . La longitud preferida de un toro sólido incluido en R^3 está caracterizada por tener número de enlace cero con el ánima del toro sólido. Obsérvese que, para $g = 1$, se tienen las siguientes igualdades: $l_{V_1}^p = m_{M_1}$, $m_{V_1} = l_{M_1}^p$ y $l_{V_1} = l_{M_1}$.

Observación 1.20 Normalmente sobreentenderemos la letra $g \in \mathbb{N}$, así que escribiremos M , S , c y V para referirnos a M_g , S_g , c_g y V_g respectivamente.

Definimos a continuación los enlaces incluidos en M y los enlaces referenciados de Lickorish; la formalización de estos conceptos bien conocidos nos simplificará posteriores enunciados y demostraciones:

Definición 1.21 (*Enlaces incluidos en M*) Sea $\{C_1, \dots, C_r\}$ una colección finita de 1-nudos en S . Entonces, si $s_1, \dots, s_r \in (0, +\infty)$ con $s_i \neq s_j$ si $i \neq j$, diremos que el enlace en S^3 definido por

$$L = \{c(C_1 \times \{s_1\}), \dots, c(C_r \times \{s_r\})\}$$

está incluido en M . (Es posible que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$, pero en cualquier caso $c(C_i \times \{s_i\}) \cap c(C_j \times \{s_j\}) = \emptyset$ pues $s_i \neq s_j$).

Definición 1.22 (*Enlace referenciado de Lickorish*) Un enlace referenciado en S^3 se dice de Lickorish si es un enlace referenciado incluido en M con dos condiciones adicionales:

1) Los 1-nudos en S que lo definen son meridianos, longitudes o curvas de enlace canónicos de S .

2) Todos los números de referencia del enlace son 1 ó -1 .

Con las definiciones introducidas, el Teorema Fundamental de Lickorish de la Cirugía en Dimensión Tres se enuncia así (véanse [L.1], [L.2], [L.3] y [Ro]):

Teorema 1.23 Dada cualquier 3-variedad conexa, compacta, sin borde y orientable N^3 , existe un enlace referenciado de Lickorish L con $N^3 \approx M_L^3$.

Definición 1.24 Se conoce con el nombre de Cálculo de Kirby la combinación de los movimientos $\Theta.1$ y $\Theta.2$ ó sus inversos definidos en [K.2]. Dos enlaces referenciados L y L' se dicen entonces ∂ -equivalentes si existe una secuencia de movimientos de Kirby que permitan obtener L' a partir de L , y en tal caso escribiremos $L \sim L'$.

Teorema 1.25 Sean L y L' dos enlaces referenciados en S^3 . Entonces M_L^3 y $M_{L'}^3$ son homeomorfas si y sólo si $L \sim L'$.

Corolario 1.26 Para todo enlace referenciado L en S^3 , existe un enlace referenciado de Lickorish L' con $L \sim L'$.

Demostración: Por el Teorema Fundamental de la Cirugía en dimensión tres, existe un enlace referenciado L' de Lickorish tal que $M_L^3 \approx M_{L'}^3$. Entonces, por el Teorema del Cálculo de Kirby, $L \sim L'$. □

En [K.1] (págs. 15 y 16), R.C Kirby plantea el problema de determinar lo que debemos entender por enlace “canónico” o “minimal” L de una 3-variedad diferenciable compacta sin borde N^3 (así que $N^3 \approx M_L^3$), y dar un algoritmo usando sus movimientos para pasar de un enlace referenciado arbitrario a uno canónico (sugiere, al menos, resolver estos problemas para familias importantes de enlaces referenciados). Es la belleza y “sencillez” de los enlaces de Lickorish, junto con el corolario 1.26, lo que nos lleva a proponer a estos enlaces como una posibilidad de enlaces canónicos o minimales para los enlaces referenciados en S^3 .

El propósito de la siguiente sección es, mediante un refinamiento del Teorema Fundamental de la Cirugía de Lickorish, dar un algoritmo para transformar en enlaces de Lickorish una subfamilia de los enlaces incluidos en M , aquellos a los que llamaremos enlaces totalmente incluidos en M . Ahora bien, ante un enlace referenciado arbitrario, dos son los pasos que lo separan de ser un enlace totalmente incluido en M . En el paso 1 se trata de encontrar un enlace L_1 que sea ∂ -equivalente al de partida, y que esté incluido en M , y el paso 2 consiste en, tal vez modificando ligeramente los nudos de L_1 en S , conseguir un enlace ∂ -equivalente totalmente incluido en M . Ambos pasos son descritos con todo detalle para una familia importante de enlaces referenciados (las cadenas simples), objetivo éste de la sección 3.

2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA CIRUGIA EN DIMENSION 3

El propósito de esta sección es lograr un refinamiento de lo que Rolfsen llama Teorema Fundamental de la Cirugía en Dimensión 3 (Teorema 1.23). Este refinamiento será concretado en el Corolario 2.15, que es el resultado más importante de la sección: mediante este corolario y la información contenida en [L.1], [L.2] y [L.3], se obtiene un algoritmo para transformar en enlaces de Lickorish cierta subfamilia de enlaces incluidos en M . Esta subfamilia la constituirán los enlaces totalmente incluidos en M .

Préviamente introducimos las dos ideas claves que usaremos en el desarrollo de esta sección: el concepto de autorreferencia de un 1-nudo en S , y la distinción que hacemos de un homeomorfismo de torsión y su inverso. El concepto de enlace referenciado totalmente incluido en M es introducido precisamente a partir de la definición de autorreferencia de un 1-nudo en S^3 .

Pasamos ya a detallar las nuevas definiciones:

Definición 2.1 (*Autorreferencia de un 1-nudo C en S*) Sea C un 1-nudo en S , no necesariamente orientado. Elegimos $\alpha : S^1 \rightarrow S$ una inmersión topológica con $\alpha(S^1) = C$, y consideramos la también inmersión topológica $\alpha_1 : S^1 \rightarrow M$ dada por $\alpha_1(\theta) = c(\alpha(\theta), 1)$. Llamaremos entonces autorreferencia de C al número entero $lk(\alpha, \alpha_1)$ (los 1-nudos α y α_1 están orientados y son disjuntos); usaremos la notación $lk(C, C \times 1)$ para denotar la autorreferencia de un 1-nudo C en S .

Observación 2.2 *Nótese que la definición anterior es consistente: por un lado, si cambiamos la orientación de α , cambia la de α_1 , y por otro lado la definición es independiente del entorno collar c de S en M por la unicidad (salvo isotopía) de tales entornos.*

Observación 2.3 *Las autorreferencias de las curvas canónicas de S son todas cero.*

Supongamos ahora que C es una curva cerrada simple en una superficie orientable de género arbitrario. Por supuesto, dicho nudo tiene en la superficie un entorno tubular cerrado trivial, $C \times [-1, 1]$. Un homeomorfismo de torsión de la superficie dado mediante C , se obtiene cortando la superficie por C , dando una giro completo a $C \times [0, 1]$, y volviendo a pegar. Desde luego, este modo de presentar los homeomorfismos de torsión es informal, pero bastante intuitivo. En [L.1] y [L.2], Lickorish denota por h_C al homeomorfismo de torsión definido por la curva simple C , sin distinguir en qué sentido giramos $C \times [0, 1]$ antes de volver a pegar. Para nuestros propósitos, esta distinción cobrará especial importancia. Así, diferenciaremos h_C^+ de su inverso h_C^- , de acuerdo con el sentido del giro. En lo que sigue, veremos un modo de llevar a cabo esta distinción en S .

En primer lugar, veamos un resultado de prueba trivial:

Proposición 2.4 Sea A la corona del plano complejo ($\approx R^2$) definida por $A = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} / 1 \leq r \leq 2, \theta \in R\}$. Entonces, las aplicaciones

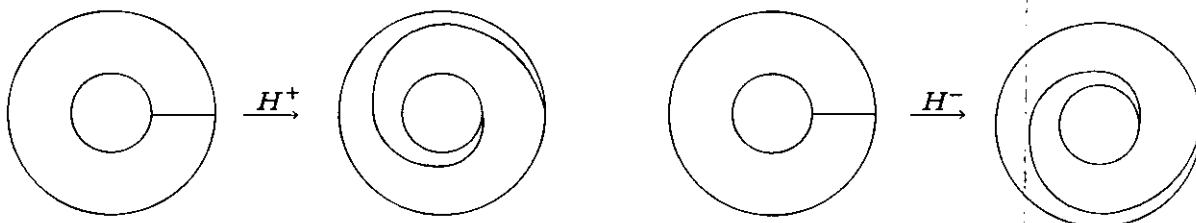
$$H^+ : A \rightarrow A$$

definida por $H^+(re^{i\theta}) = re^{i(\theta-2r\pi)}$ y

$$H^- : A \rightarrow A$$

definida por $H^-(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+2r\pi)}$ son homeomorfismos, uno el inverso del otro.

En la siguiente figura se representan esquemáticamente estos homeomorfismos:



Consideramos A con la orientación que hereda de R^2 , éste canónicamente orientado, y S con la orientación que tiene como borde de M , donde M está orientada de acuerdo con la orientación canónica de R^3 . Es decir, si $p \in S$, una base $\{u, v\}$ de $T_p S$ define la orientación de S en p si $\{u, v, N_p\}$ es una base positivamente orientada de R^3 , donde $N_p \in T_p M$ es el vector normal de S en p dirigido hacia fuera de M .

Sean C un 1-nudo en S y $e : A \rightarrow S$ una inmersión topológica preservando la orientación tal que C coincida con $e(S_{3/2}^1)$, donde $S_{3/2}^1$ es la circunferencia formada por los complejos de módulo $3/2$.

Proposición 2.5 Las aplicaciones $h_C^+(e) : S \rightarrow S$ dada por

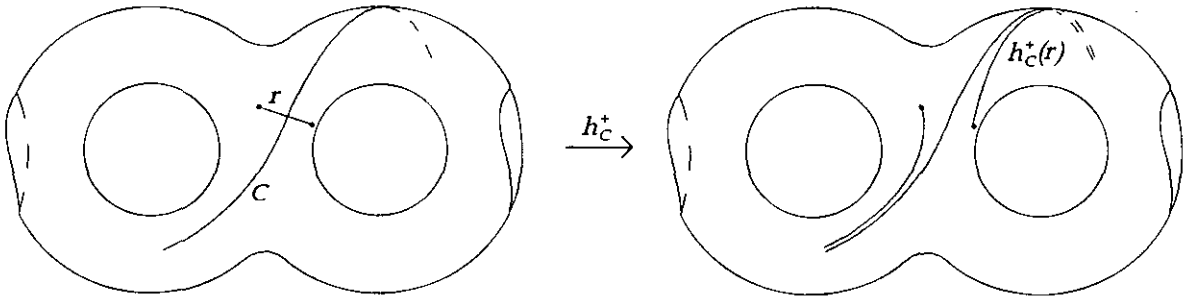
$$h_C^+(e)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \text{im}(e) \\ e \circ H^+ \circ e^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{im}(e) \end{cases}$$

y $h_C^-(e) : S \rightarrow S$ dada por

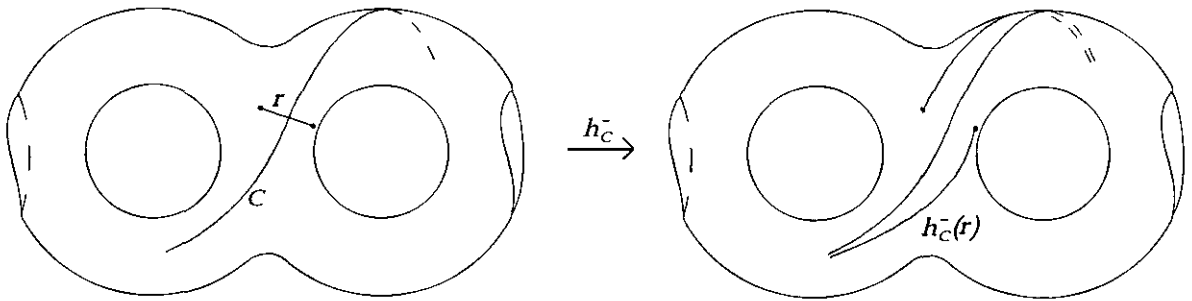
$$h_C^-(e)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \text{im}(e) \\ e \circ H^- \circ e^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{im}(e) \end{cases}$$

están bien definidas, y son homeomorfismos.

Lo que sigue, es un modo gráfico de entender la diferencia geométrica entre los dos homeomorfismos anteriores: camínese por C , en cualquier sentido, como si M fuese un extraño planeta, o sea con el cuerpo fuera de M . Entonces $h_C^+(e)$ transformará el rayo r que se acerca por la derecha en un rayo que nos acompañará en el camino:



Por el contrario, $h_C^-(e)$ transformará el rayo r que se acerca a nosotros por la derecha en un rayo que se alejará en dirección opuesta a nosotros:



Proposición 2.6 Sean $e, e' : A \rightarrow S$ dos inmersiones topológicas preservando la orientación, tales que $e(S_{3/2}^1) = C = e'(S_{3/2}^1)$. Entonces $h_C^+(e)$ y $h_C^+(e')$ son homeomorfismos de S isotópicos (e igualmente lo son $h_C^-(e)$ y $h_C^-(e')$).

Demostración: Es consecuencia de la unicidad de los entornos tubulares cerrados: en nuestro caso, los fibrados normales son de dimensión uno y se les ha impuesto la condición adicional de que los entornos tubulares preserven la orientación. \square

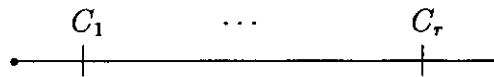
De acuerdo con la anterior proposición, la siguiente definición es consistente:

Definición 2.7 Dado un 1-nudo C en S , definimos h_C^+ (respectivamente h_C^-) como la clase de homeomorfismos de S módulo isotopía definida por $h_C^+(e)$ (respectivamente $h_C^-(e)$), siendo $e : A \rightarrow S$ cualquier inmersión topológica preservando la orientación (recuérdense las orientaciones fijadas en A y en S) tal que $C = e(S_{3/2}^1)$.

Haciendo uso del concepto de autorreferencia de un 1-nudo en S , introducimos a continuación el concepto de enlace totalmente incluido en M , y a partir de éste, podremos redefinir de modo obvio lo que es un enlace referenciado de Lickorish. Veamos antes un modo de presentar los enlaces referenciados incluidos en M que nos será muy útil a partir de ahora:

Definición 2.8 (*Presentación de un enlace incluido en M mediante la semirrecta real*)

Si C_1, \dots, C_r son 1-nudos en S , entonces

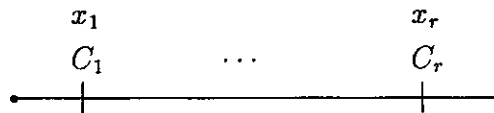


denota el enlace incluido en M

$$\{c(C_1 \times \{s_1\}), \dots, c(C_r \times \{s_r\})\}$$

donde $s_1, \dots, s_r \in (0, +\infty)$ y $s_1 < \dots < s_r$.

Si C_1, \dots, C_r son 1-nudos en S , y $x_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces



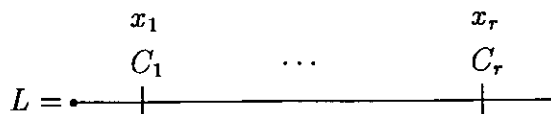
denota el enlace referenciado incluido en M

$$\{(c(C_1 \times \{s_1\}), x_1), \dots, (c(C_r \times \{s_r\}), x_r)\}$$

donde $s_1, \dots, s_r \in (0, +\infty)$ y $s_1 < \dots < s_r$.

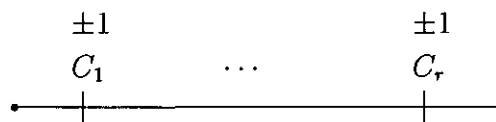
Observación 2.9 Si en las definiciones anteriores consideramos distintos números reales positivos $s'_1 < \dots < s'_r$ y/o distinto entorno collar c' de S en M , el enlace (referenciado) que obtendríamos sería isotópico al original, por la unicidad (salvo isotopía) del entorno collar.

Definición 2.10 (*Enlace referenciado totalmente incluido en M*) El enlace referenciado incluido en M definido por



se dice totalmente incluido (en M) si para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ se tiene que $x_i = lk(C_i, C_i \times 1) \pm 1$.

Observación 2.11 De acuerdo con la definición anterior, un enlace referenciado en S^3 de Lickorish es un enlace totalmente incluido en M con la condición adicional de que los 1-nudos en S son meridianos, longitudes o curvas de enlace canónicos de S . Así pues, teniendo en cuenta la observación 2.3, un enlace de Lickorish tiene una presentación mediante la semirrecta real del tipo

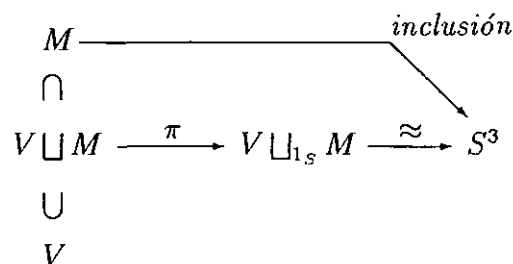


donde las curvas C_i están entre los meridianos, longitudes o curvas de enlace canónicos de S .

Pasamos ahora al objetivo fundamental de esta sección, que es dar una prueba detallada del Teorema 1.23 escribiendo en forma de corolarios el refinamiento que hacemos de éste. En un principio, la demostración marcha como en [L.1] y [Ro] (páginas 277-279), e introducimos las modificaciones en la segunda parte de ésta.

Como es bien conocido, dada cualquier variedad N^3 de dimensión tres, compacta sin borde y conexa, existe un homeomorfismo $h : S \rightarrow S$ tal que $N^3 = M \sqcup_h M$, es decir, N^3 es la variedad que se obtiene al pegar dos copias de M mediante el homeomorfismo h . Dado que existe un homeomorfismo de M que restringido a S invierte la orientación, podemos suponer que h preserva la orientación.

Es claro que $V \sqcup_{1_S} M$ es homeomorfo a S^3 por un homeomorfismo que sobre M es la inclusión de éste en S^3 . Es decir, tenemos la conmutatividad del cuadro superior en el siguiente diagrama:



Para probar la anterior afirmación, observemos en primer lugar que podemos suponer $n = 1_S$. En efecto, considerando en tal caso $h_1 = h \circ n$ y $\beta_1 = h_1^{-1} \circ f$, entonces

$$\beta_1 = h_1^{-1} \circ f = n^{-1} \circ h^{-1} \circ f = n^{-1} \circ \beta = n^{-1} \circ n \circ h_{A_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{A_r}^{\epsilon_r} = h_{A_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{A_r}^{\epsilon_r}$$

y por otro lado, $M \sqcup_h M \approx M \sqcup_{h_1} M$ puesto que n es extendible a un homeomorfismo de M al ser isotópico a la identidad de S .

Por comodidad en la notación, supondremos que $r = 2$, es decir, $\beta = h_{A_1}^{\epsilon_1} \circ h_{A_2}^{\epsilon_2}$. La definición de $h_{A_1}^{\epsilon_1}$ y $h_{A_2}^{\epsilon_2}$ supone elegidas inmersiones topológicas que preservan la orientación, $e_1 : A \rightarrow S$ con $e_1(S_{3/2}^1) = A_1$ y $e_2 : A \rightarrow S$ con $e_2(S_{3/2}^1) = A_2$ (véase la Definición 2.7).

Consideramos $K_2 = c(im(e_2) \times [1, 2])$ y $K_1 = c(im(e_1) \times [3, 4])$, que son dos toros sólidos en $IntM$ (topológicos o, si trabajamos en la categoría diferenciable, variedades diferenciables con borde anguloso), y disjuntos (están "cavados" en M a distinta profundidad, siendo K_2 el más superficial).

Consideramos también las aplicaciones

$$\tau_2 : M - IntK_2 \rightarrow M - IntK_2$$

definida por

$$\tau_2(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \notin c(e_2(IntA) \times [0, 2]) \\ c \circ (h_{A_2}^{\epsilon_2} \times 1_{R_+}) \circ c^{-1}(p) & \text{si } p \in c(im(e_2) \times [0, 1]) \end{cases}$$

y

$$\tau_1 : M - IntK_1 \rightarrow M - IntK_1$$

definida por

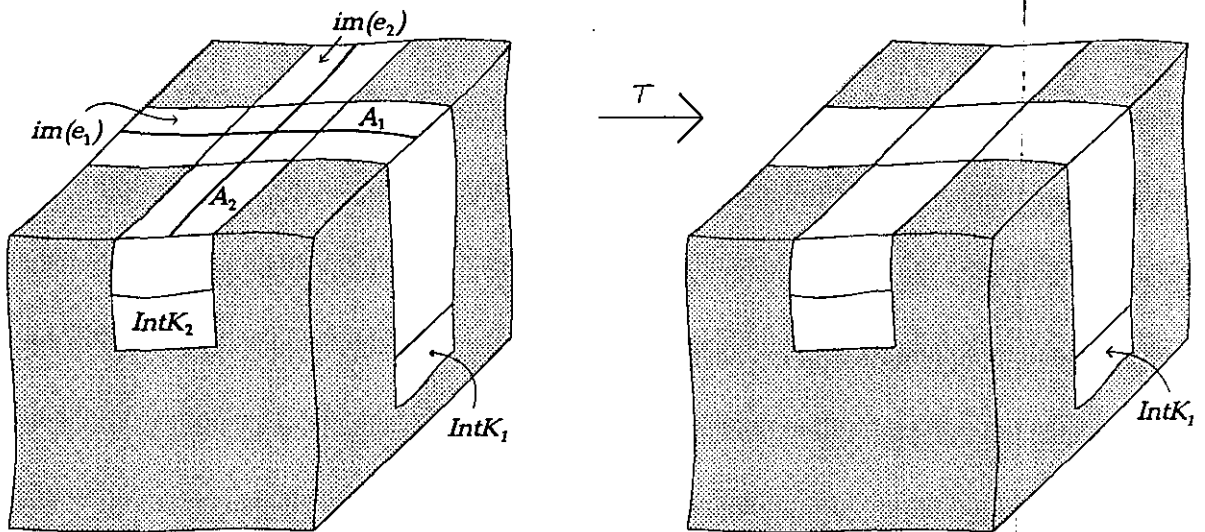
$$\tau_1(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \notin c(e_1(IntA) \times [0, 4]) \\ c \circ (h_{A_1}^{\epsilon_1} \times 1_{R_+}) \circ c^{-1}(p) & \text{si } p \in c(im(e_1) \times [0, 3]) \end{cases}$$

Se verifica que τ_2 (e igualmente τ_1) está bien definida, pues si $p \notin c(e_2(IntA) \times [0, 2])$ y $p \in c(im(e_2) \times [0, 1])$ necesariamente $p = c(e_2(z), t)$ con $z \in \partial A$. Entonces $c((h_{A_2}^{\epsilon_2} \times 1_{R_+})(c^{-1}(p))) = c((h_{A_2}^{\epsilon_2} \times 1_{R_+})(e_2(z), t)) = c(h_{A_2}^{\epsilon_2}(e_2(z), t)) = c(e_2(z), t) = p$, la penúltima igualdad pues $z \in \partial A$. Es fácil también comprobar que τ_2 y τ_1 son homeomorfismos.

Como $K_1 \subset M - IntK_2$ y τ_2 es la identidad sobre K_1 , se tiene entonces el homeomorfismo $\tau_2 : M - (IntK_2 \cup IntK_1) \rightarrow M - (IntK_2 \cup IntK_1)$. Por otro lado, si definimos

$\tau_1(K_2) = K'_2$, K'_2 es, por supuesto, un toro sólido incluido en $M - \text{Int}K_1$, y se tiene el homeomorfismo $\tau_1 : M - (\text{Int}K_2 \cup \text{Int}K_1) \rightarrow M - (\text{Int}K'_2 \cup \text{Int}K_1)$. Podemos entonces considerar el homeomorfismo composición

$$\tau : M - (\text{Int}K_2 \cup \text{Int}K_1) \xrightarrow{\tau_2} M - (\text{Int}K_2 \cup \text{Int}K_1) \xrightarrow{\tau_1} M - (\text{Int}K'_2 \cup \text{Int}K_1)$$



Se verifica entonces que $\tau(\partial K_2) = \partial K'_2$ ($\tau(\partial K_2) = \tau_1(\tau_2(\partial K_2)) = \tau_1(\partial K_2) = \partial K'_2$) y $\tau(\partial K_1) = \partial K_1$ ($\tau(\partial K_1) = \tau_1(\tau_2(\partial K_1)) = \tau_1(\partial K_1) = \partial K_1$), y además $\tau|_S = \beta$. En efecto, ésto último es consecuencia de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} S \\ \downarrow h_{A_2}^{\epsilon_2} \\ S \\ \downarrow h_{A_1}^{\epsilon_1} \\ S \end{array} & \subset & \begin{array}{c} M - (\text{Int}K_2 \cup \text{Int}K_1) \\ \downarrow \tau_2 \\ M - (\text{Int}K_2 \cup \text{Int}K_1) \\ \downarrow \tau_1 \\ M - (\text{Int}K'_2 \cup \text{Int}K_1) \end{array} \\
 \beta \swarrow & & \searrow \tau \\
 & &
 \end{array}$$

Sea α_2 un 1-nudo en ∂K_2 tal que $\tau(\alpha_2)$ es el meridiano de K'_2 , y sea α_1 un 1-nudo en ∂K_1 tal que $\tau(\alpha_1)$ es el meridiano de K_1 . Supongamos que $g_2 : S^1 \times D^2 \rightarrow M$ y $g_1 : S^1 \times D^2 \rightarrow M$ son inmersiones topológicas tales que $\text{im}(g_2) = K_2$, $\text{im}(g_1) = K_1$ y además $g_2(S^1 \times (1, 0)) = \alpha_2$, $g_1(S^1 \times (1, 0)) = \alpha_1$. Entonces N^3 es el resultado de hacer cirugía en S^3 mediante g_1 y g_2 , dado que la condición necesaria y suficiente para que un homeomorfismo del borde de un toro sólido se pueda extender a todo el toro sólido es

que lleve meridiano a meridiano. Concluiremos entonces que $N^3 \approx M_L^3$ si demostramos lo siguiente:

α_2 es una longitud de K_2 con $lk(\alpha_2, \mathcal{A}_{K_2}) = a_2 + \epsilon_2$ donde $a_2 = lk(A_2, A_2 \times 1)$ y \mathcal{A}_{K_2} es el ánima de K_2 , y α_1 es una longitud de K_1 con $lk(\alpha_1, \mathcal{A}_{K_1}) = a_1 + \epsilon_1$ donde $a_1 = lk(A_1, A_1 \times 1)$ y \mathcal{A}_{K_1} es el ánima de K_1 .

Para empezar, nótese que α_2 es el 1-nudo de ∂K_2 tal que $\tau_2(\alpha_2) = m_{K_2}$ y α_1 es el 1-nudo de ∂K_1 tal que $\tau_1(\alpha_1) = m_{K_1}$. En efecto, obsérvese que τ induce el homeomorfismo entre los bordes $\tau : \partial K_2 \xrightarrow{\tau_2} \partial K_2 \xrightarrow{\tau_1} \partial K'_2$ y si $\tau_2(\alpha_2) = m_{K_2}$, entonces $\tau(\alpha_2) = \tau_1(m_{K_2}) = m_{K'_2}$, siendo la última igualdad consecuencia de que τ_1 se extiende a un homeomorfismo de K_2 en K'_2 . Igualmente, τ induce también el homeomorfismo $\tau : \partial K_1 \xrightarrow{\tau_2} \partial K_1 \xrightarrow{\tau_1} \partial K_2$ así que si $\tau_1(\alpha_1) = m_{K_1}$, entonces $\tau(\alpha_1) = m_{K_1}$ dado que $\tau_2|_{\partial K_1} = 1|_{\partial K_1}$. Así, el Teorema 1.23 se sigue ahora del siguiente resultado:

Lema 2.12 Sean B un 1-nudo en S , ϵ un signo, y $e : A \rightarrow S$ una inmersión topológica preservando la orientación con $e(S_{3/2}^1) = B$. Sea $W = c(im(e) \times [n, n+1])$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Entonces W es un toro sólido incluido en $IntM$, la aplicación

$$\delta : M - IntW \rightarrow M - IntW$$

definida por

$$\delta(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \notin c(e(IntA) \times [0, n+1]) \\ c \circ (h_B^\epsilon \times 1_{R_+}) \circ c^{-1}(p) & \text{si } p \in c(im(e) \times [0, n]) \end{cases}$$

está bien definida, es homeomorfismo, $\delta(\partial W) = \partial W$ y $\delta|_S = h_B^\epsilon$.

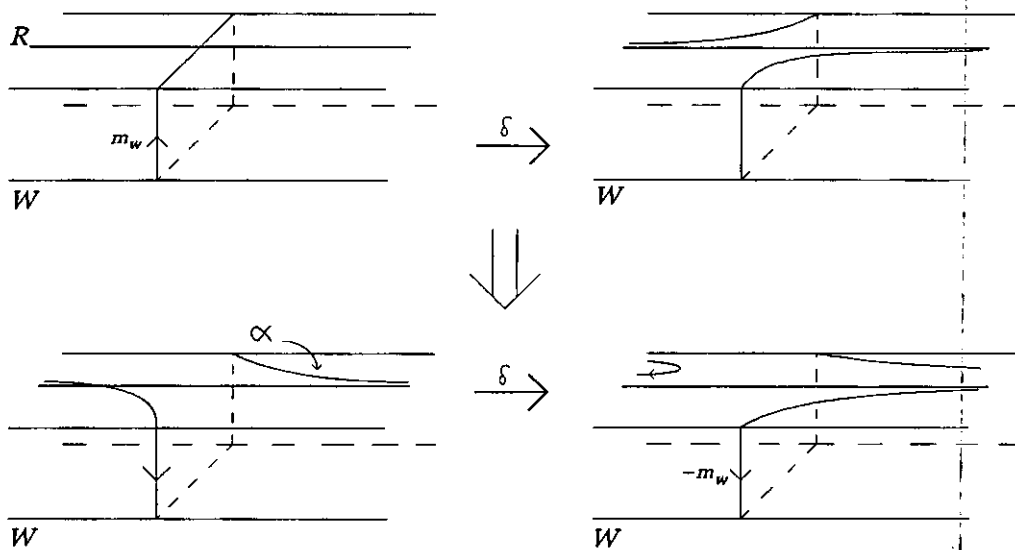
Además $\delta(\alpha) = m_W$ (m_W es el meridiano de W) donde α es una longitud de W tal que $lk(\alpha, \mathcal{A}_W) = lk(B, B \times 1) + \epsilon$ siendo $\mathcal{A}_W = c(B \times \{n+1/2\})$ el ánima de W .

Demostración: La prueba de la primera parte es inmediata (igual que para $\delta = \tau_2$ ó τ_1). Veamos el además. Para ello consideremos el 1-nudo R en ∂W definido como $R = c(B \times \{n\})$. Claramente $b = lk(B, B \times 1) = lk(R, \mathcal{A}_W)$, así que $[R] = [l_W^p] - a[m_W] \in \pi_1(\partial W)$ donde l_W^p es la longitud preferida de W -toro sólido incluido en S^3 , y m_W es meridiano de W , con $lk(m_W, \mathcal{A}_W) = -1$.

Supongamos entonces que $\epsilon = +$, y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{h_B^+} & S \\
 \cap & & \cap \\
 M - IntW & \xrightarrow{\delta} & M - IntW \\
 \cup & & \cup \\
 \partial W & \xrightarrow{\delta} & \partial W \subset W \\
 \alpha & & m_W = \delta(\alpha)
 \end{array}$$

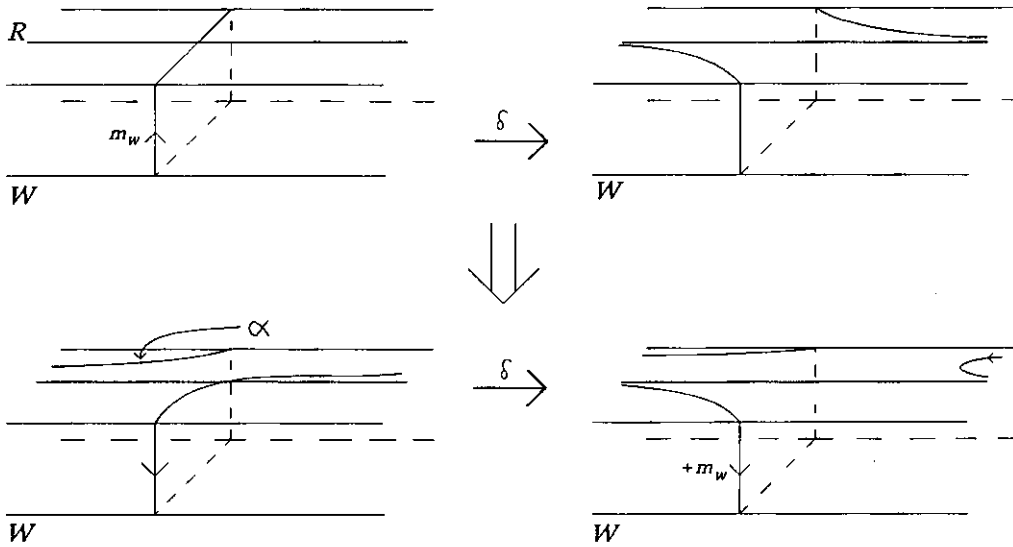
Es entonces claro que $[\alpha] = [R] - [m_W] = [l_W^p] - b[m_W] - [m_W] = [l_W^p] + (-b - 1)[m_W]$ (véase la figura), por lo que α es una longitud de W con $lk(\alpha, \mathcal{A}_W) = b + 1$.



Supongamos ahora que $\epsilon = -$, y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{h_B^-} & S \\
 \cap & & \cap \\
 M - IntW & \xrightarrow{\delta} & M - IntW \\
 \cup & & \cup \\
 \partial W & \xrightarrow{\delta} & \partial W \subset W \\
 \alpha & & m_W = \delta(\alpha)
 \end{array}$$

Es entonces claro que $[\alpha] = [R] + [m_W] = [l_W^p] - b[m_W] + [m_W] = [l_W^p] + (-b + 1)[m_W]$ (véase la figura en la página siguiente), por lo que α es una longitud de W con $lk(\alpha, \mathcal{A}_W) = b - 1$.



□

Corolario 2.13 Sean C_1, \dots, C_r 1-nudos en S y $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ signos. Se verifica entonces que $M \sqcup_h M \approx M_L^3$ donde

$$h = h_{C_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{C_r}^{\epsilon_r}$$

y L es el enlace referenciado totalmente incluido en M con una presentación mediante la semirrecta real dada por

$$L = \bullet \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & 1 & 1 & c_1 - \epsilon_1 & & c_r - \epsilon_r \\ m_1 & l_1 & \cdots & m_g & l_g & C_1 & \cdots & C_r \end{array}$$

donde $c_i = lk(C_i, C_i \times 1)$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Demostración: Nótese en primer lugar que h preserva la orientación por ser composición de homeomorfismos de torsión. Tomando entonces $f = h_{l_g}^+ \circ h_{m_g}^+ \circ \dots \circ h_{l_1}^+ \circ h_{m_1}^+ : S \rightarrow S$ y $\beta = h^{-1} \circ f$, se tiene que

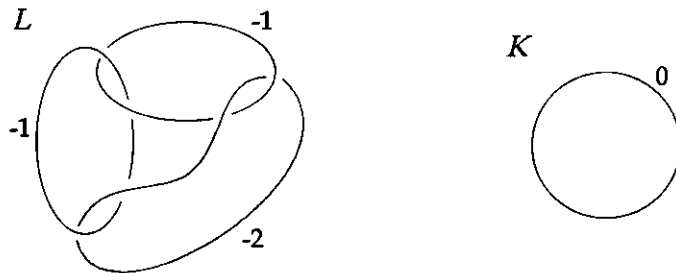
$$\beta = h^{-1} \circ f = h_{C_r}^{-\epsilon_r} \circ \dots \circ h_{C_1}^{-\epsilon_1} \circ h_{l_g}^+ \circ h_{m_g}^+ \circ \dots \circ h_{l_1}^+ \circ h_{m_1}^+$$

De acuerdo entonces con el teorema, se verifica que $M \sqcup_h M \approx M_L^3$, donde

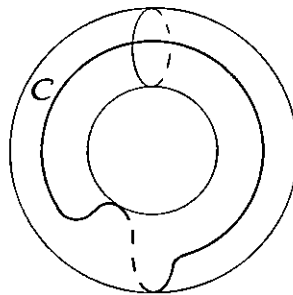
$$L = \bullet \begin{array}{cccccc} d_1 + 1 & d'_1 + 1 & & d_g + 1 & d'_g + 1 & c_1 - \epsilon_1 & & c_r - \epsilon_r \\ m_1 & l_1 & \cdots & m_g & l_g & C_1 & \cdots & C_r \end{array}$$

siendo $c_i = lk(C_i, C_i \times 1)$, $d_i = lk(m_i, m_i \times 1)$ y $d'_i = lk(l_i, l_i \times 1)$, pero $d_i \neq 0 = d'_i$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$ (Observación 2.3), así que el corolario está probado. \square

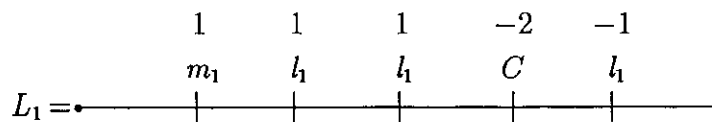
Ejemplo 2.14 *Los siguientes enlaces referenciados L y K son ∂ -equivalentes:*



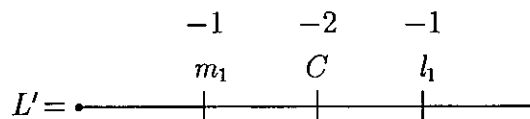
En efecto, si C es la curva cerrada simple de S_1 dibujada en la figura,



entonces $c = lk(C, C \times 1) = -1$, así que por el Corolario 2.13, $M_1 \sqcup_h M_1 \approx M_{L_1}^3$ donde h es el homeomorfismo composición $h = h_l^- \circ h_C^+ \circ h_l^+$ y



Por una sencilla combinación de movimientos de Kirby, $L_1 \sim L'$ donde



que es L (salvo isotopía de S^3). Ahora bien, se tiene que $h(m_1) = h_l^-(h_C^+(h_l^+(m_1))) = h_l^-(h_C^+(l_1 + m_1)) = h_l^-(-m_1 + l_1 + 2m_1) = h_l^-(l_1 + m_1) = m_1$, por lo que $M_1 \sqcup_h M_1 \approx L(0, 1) = S^1 \times S^2 \approx M_K^3$. Que $L \sim K$ se sigue ahora del Teorema 1.25.

Corolario 2.15 *Sea el enlace referenciado totalmente incluido en M*

$$L = \bullet \begin{array}{ccccccc} & a_1 + \epsilon_1 & & & & & a_r + \epsilon_r \\ & A_1 & & \cdots & & & A_r \\ \hline & | & & & & & | \\ \hline \end{array}$$

(así que las A_i son 1-nudos en S , $\epsilon_i = \pm 1$ y $a_i = lk(A_i, A_i \times 1)$ son las autorreferencias de los A_i), y supongamos que el homeomorfismo de S definido por la composición

$$h_{A_1}^{-\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{A_r}^{-\epsilon_r}$$

coincide con la composición

$$h_{B_1}^{\delta_1} \circ \dots \circ h_{B_s}^{\delta_s}$$

donde las curvas B_i son longitudes, meridianos o curvas de enlace canónicos de S , y $\delta_i = \pm 1$. Entonces $L \sim L'$ donde

$$L' = \bullet \begin{array}{ccccccc} & -\delta_1 & & & & & -\delta_s \\ & B_1 & & \cdots & & & B_s \\ \hline & | & & & & & | \\ \hline \end{array}$$

Demostración: Obsérvese que $L \sim L_1$ donde

$$L_1 = \bullet \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & & -1 & -1 & & a_1 + \epsilon_1 & & a_r + \epsilon_r \\ m_1 & l_1 & \cdots & m_g & l_g & l_1 & m_1 & \cdots & l_g & m_g & & A_1 & \cdots & A_r \\ \hline \end{array}$$

(ésto es consecuencia de que h_A^+ es el inverso de h_A^- o puede probarse directamente mediante combinaciones del cálculo de Kirby). De igual modo, $L' \sim L_2$ donde

$$L_2 = \bullet \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & & -1 & -1 & & -\delta_1 & & -\delta_s \\ m_1 & l_1 & \cdots & m_g & l_g & l_1 & m_1 & \cdots & l_g & m_g & & B_1 & \cdots & B_s \\ \hline \end{array}$$

Entonces, si $h = h_{l_1}^+ \circ h_{m_1}^+ \circ \dots \circ h_{l_g}^+ \circ h_{m_g}^+ \circ h_{A_1}^{-\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{A_r}^{-\epsilon_r}$, por el Corolario 2.13 $M \sqcup_h M \approx M_{L_1}^3$. Como además $h = h_{l_1}^+ \circ h_{m_1}^+ \circ \dots \circ h_{l_g}^+ \circ h_{m_g}^+ \circ h_{B_1}^{\delta_1} \circ \dots \circ h_{B_s}^{\delta_s}$ con B_i meridianos, longitudes o curvas de enlace canónicos de S y $\delta_i = \pm 1$, se tiene que $M \sqcup_h M \approx M_{L_2}^3$, también por el Corolario 2.13. Así que $M_{L_1}^3 \approx M \sqcup_h M \approx M_{L_2}^3$, $L \sim L_1$ y $L' \sim L_2$ con lo que $L \sim L'$, que es lo que queríamos demostrar.

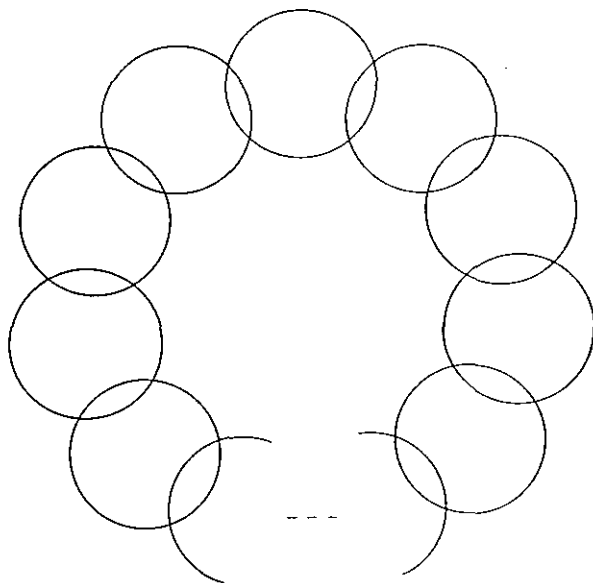
□

3 CADENAS SIMPLES

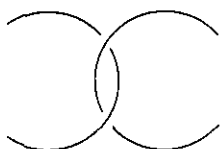
El propósito de esta sección es, aplicando los resultados obtenidos en la sección 2, encontrar un algoritmo que transforme en enlaces referenciados de Lickorish cierta importante familia de enlaces referenciados: la familia de las cadenas simples. Dicho de modo informal, estos enlaces referenciados son las pulseras en las que dos eslabones contiguos se han enlazado de modo arbitrario, y considerando todas las posibles referencias. Esta colección de enlaces referenciados engloba, por ejemplo, la familia de los recubridores cíclicos de S^3 ramificados sobre el nudo trébol (véase [Ro], págs. 304-308).

Nuestro modo de proceder está dividido básicamente en dos pasos, que destacamos por sí mismos, dado que constituyen una regla general para intentar analizar otras posibles familias interesantes de enlaces referenciados. La posibilidad de tener éxito con otras familias depende entonces de la habilidad en la aplicación de estos pasos.

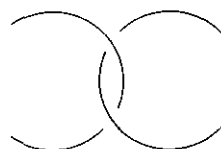
Definición 3.1 *Un enlace L en S^3 se dice que es una cadena simple si tras una isotopía de S^3 aparece como*



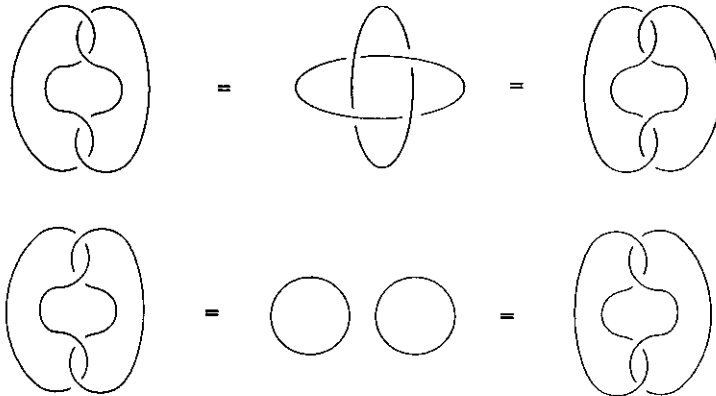
situado en un plano, salvo los "enlazamientos", que pueden ser



ó bien



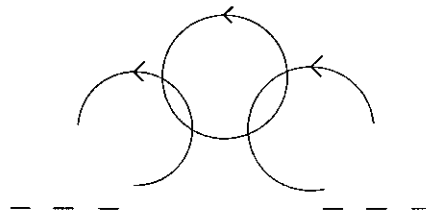
Ejemplos 3.2 *La única cadena simple con una componente es el nudo trivial. En cambio, cadenas simples con dos componentes tenemos las dos siguientes:*



Obsérvese que existe un homeomorfismo (la simetría $s : R^3 \rightarrow R^3$ que lleva un punto (x, y, z) a $(x, y, -z)$) que transforma una cadena simple con dos componentes en la otra (piénsese del papel como el plano $z = 0$). Pero esta simetría invierte la orientación de R^3 (el determinante de su jacobiano es negativo) así que no es isotópico a la identidad de R^3 , y no parece haber una isotopía de S^3 que lleve el primer enlace en el segundo.

Proposición 3.3 *El número de cadenas simples con n componentes módulo isotopías de S^3 es a lo más $n + 1$. El número de cadenas simples con n componentes módulo isotopías de S^3 y simetrías por un plano de R^3 es $\lceil (n + 1)/2 \rceil$, el menor entero mayor que $(n + 1)/2$.*

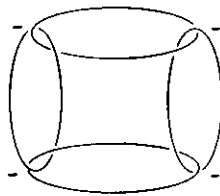
Demostración: Para $n = 1$ ó 2 véanse los ejemplos anteriores. Supongamos ahora que $n \geq 3$. Orientamos cada componente del enlace de acuerdo con el siguiente esquema:



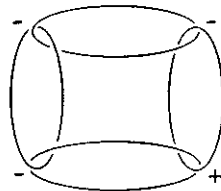
Si hay n componentes, hay n enlazamientos, y junto a cada enlazamiento escribimos un signo (de modo que este signo coincide con $lk(L_i, L_j)$ de acuerdo con las orientaciones elegidas para L_i y L_j):



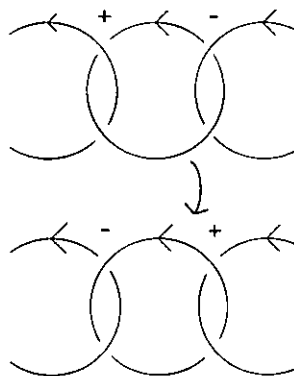
Así, fijada una primera componente, la cadena simple de n componentes queda determinada por n signos consecutivos, contados de acuerdo con la orientación elegida. Por ejemplo, $---$ es



y $--+-$ es



Nótese que $...-+...$ es igual a $...+-...$ por un giro de una componente y un cambio de orientación en ésta,



con lo que, módulo isotopías de S^3 , hay a lo más $n+1$ cadenas simples con n componentes:

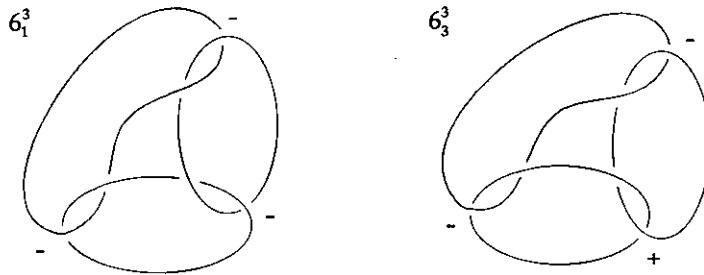
$$+ \dots +, \quad + \dots + -, \quad \dots, \quad + - \dots -, \quad - \dots -.$$

Supongamos ahora que una cadena simple L está (salvo enlazamientos) en un plano y es del tipo $++--$. Sea s la simetría de R^3 respecto de este plano, de modo que el nuevo enlace $s(L) = L'$ sigue siendo una cadena simple y es $--++$. Así que $++--$ por una simetría se transforma en $--++$, que es isotópico a $+++--$, de modo que a lo sumo hay $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ cadenas simples con n componentes módulo isotopías y simetrías por un plano de R^3 . Que hay exactamente $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ y no menos es consecuencia de que las isotopías de S^3 y simetrías de S^3 por un plano conservan el número

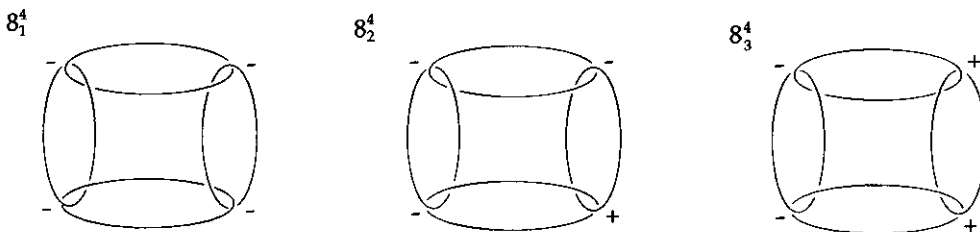
$$|(\text{número de signos } +) - (\text{número de signos } -)|.$$

□

Ejemplos 3.4 (los números corresponden a la notación usada en [Ro]). Hay dos cadenas simples con 3 componentes módulo isotopías de S^3 y simetrías por un plano de R^3 :



Hay tres cadenas simples con 4 componentes módulo isotopías de S^3 y simetrías por un plano de R^3 :



Cuando trabajamos con cadenas simples referenciadas (o sea, cadenas simples en donde se ha escogido una referencia para cada componente del enlace), sencillas combinaciones de movimientos del Cálculo de Kirby (ver [Ka] y [K.1]), nos permiten establecer una serie

de equivalencias entre las cadenas simples referenciadas, que limitarán las posibilidades para las referencias de las cadenas simples. Para establecer el resultado necesario en este sentido, es importante aclarar lo siguiente:

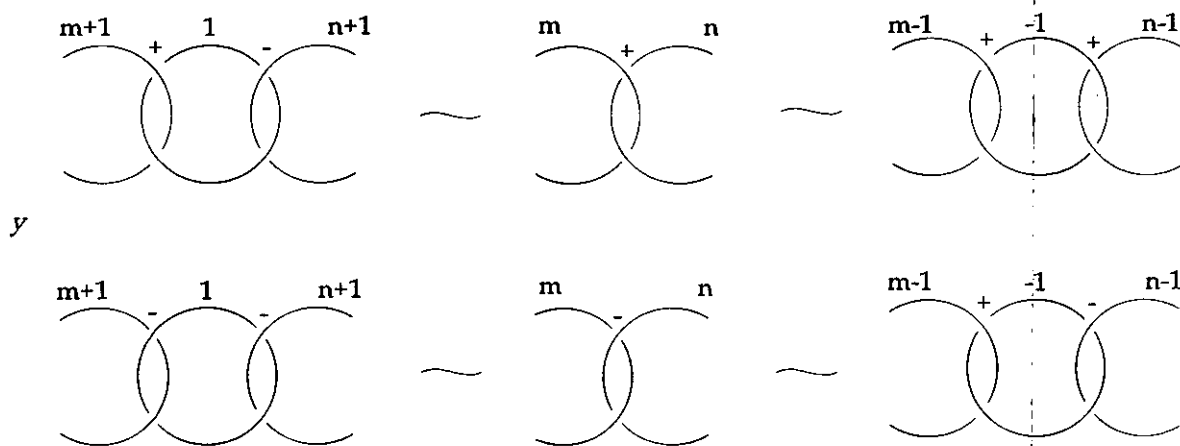
Observación 3.5 Si D_1 y D_2 son partes de dos enlaces referenciados L_1 y L_2 , la notación $D_1 \sim D_2$ significa lo siguiente:

i) Existe una bola cerrada de R^3 tal que L_1 y L_2 coinciden en el complementario de su interior, y dentro de ésta vienen dados por D_1 y D_2 respectivamente.

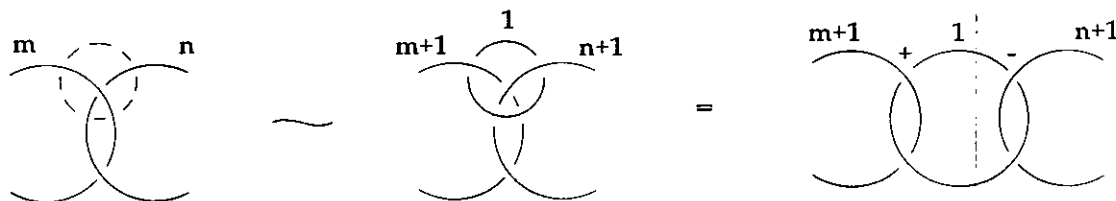
ii) Se tiene que $L_1 \sim L_2$, y esta equivalencia se puede obtener por movimientos del Cálculo de Kirby que tienen lugar en el interior de la bola señalada exclusivamente.

De acuerdo con lo anterior, establecemos el siguiente resultado:

Proposición 3.6 Se tienen las siguientes equivalencias de enlaces referenciados:



Demostración: Si introducimos una nueva componente trivial con referencia $+1$, queda:



Introduciendo una nueva componente trivial con referencia -1 :

The diagram shows an equality between three link diagrams. The first diagram on the left has two components, m and n , with a crossing between them. A dashed circle represents a new component being added. The middle diagram has three components: $m-1$, -1 , and $n-1$. The -1 component is a small loop that has crossed both $m-1$ and $n-1$. The rightmost diagram shows the same three components, but the crossings involving the -1 component have been resolved, resulting in three separate components: $m-1$, -1 , and $n-1$.

Probamos ahora los casos inferiores. Introduciendo una nueva componente trivial con referencia $+1$:

The diagram shows an equality between three link diagrams. The first diagram on the left has two components, m and n , with a crossing between them. A dashed circle represents a new component being added. The middle diagram has three components: $m+1$, 1 , and $n+1$. The 1 component is a small loop that has crossed both $m+1$ and $n+1$. The rightmost diagram shows the same three components, but the crossings involving the 1 component have been resolved, resulting in three separate components: $m+1$, 1 , and $n+1$.

Finalmente, introduciendo una nueva componente trivial con referencia -1 , queda:

The diagram shows an equality between three link diagrams. The first diagram on the left has two components, m and n , with a crossing between them. A dashed circle represents a new component being added. The middle diagram has three components: $m-1$, -1 , and $n-1$. The -1 component is a small loop that has crossed both $m-1$ and $n-1$. The rightmost diagram shows the same three components, but the crossings involving the -1 component have been resolved, resulting in three separate components: $m-1$, -1 , and $n-1$.

□

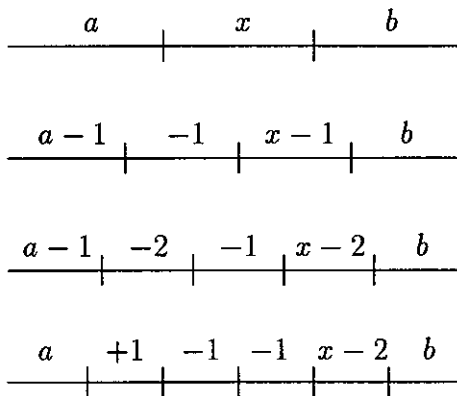
Como consecuencia de lo anterior, se tiene el siguiente resultado, que limita nuestro problema al caso en que todas las referencias son uno o menos uno, y quizás un único cero.

Lema 3.7 *Existe un algoritmo para transformar mediante el cálculo de Kirby cualquier cadena simple referenciada L de dos ó más componentes en una cadena simple referenciada L' de manera que L' cumple una de las dos condiciones siguientes:*

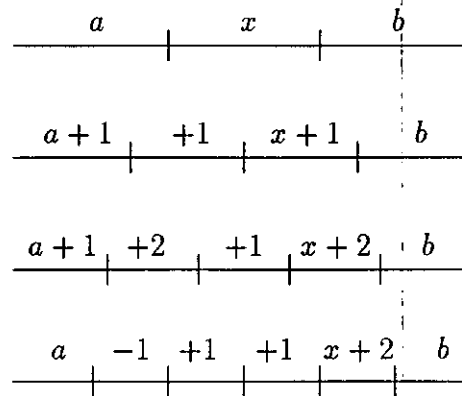
- 1) *Toda componente de L' tiene referencia $+1$ ó -1 .*
- 2) *Toda componente de L' tiene referencia $+1$ ó -1 salvo una componente que tiene referencia 0 .*

Demostración: Supongamos que x es la referencia de una componente de L tal que $|x| \geq 2$. En las siguientes representaciones de las cadenas simples, cada segmento es una componente de la cadena, y el enlazamiento de dos componentes consecutivas viene representado por un pequeño segmento vertical; cuando dos representaciones aparecen una debajo de la otra, significa que son ∂ -equivalentes. Se tiene entonces, de acuerdo con la proposición anterior, lo siguiente:

si $x \geq 2$

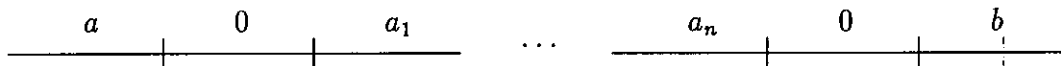


si $x \leq -2$

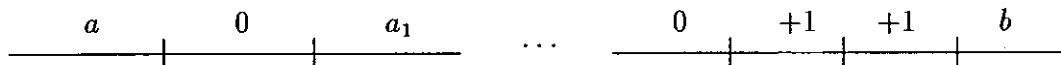


Nótese que el anterior cálculo es igualmente válido en el caso en que la cadena simple L tenga dos componentes.

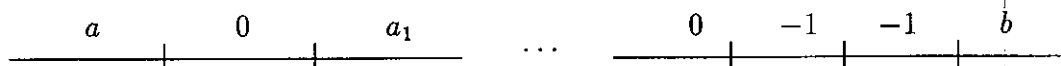
Repetiendo este proceso sobre todas las componentes con referencias x con $|x| \geq 2$, por movimientos de Kirby llegaríamos a una cadena simple con referencias $+1, -1$ y tal vez varios ceros. Ahora se hace desaparecer cada par de ceros:



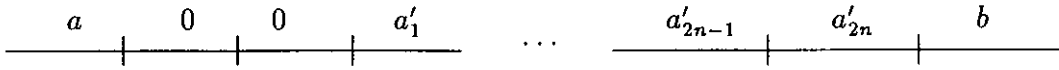
se transforma en



si $a_n = -1$, y en



si $a_n = +1$. Repitiendo este proceso n veces, nuestra cadena simple referenciada original se transforma en la cadena simple referenciada



con los $a'_i = \pm 1$, lo que se transforma en



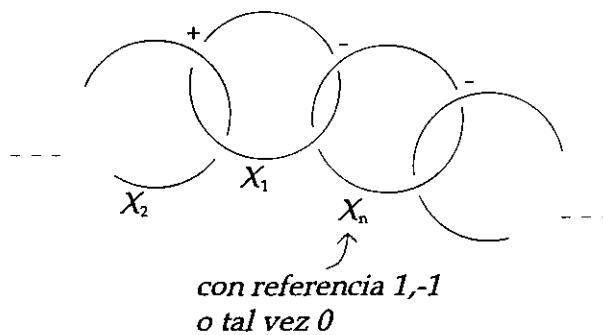
De este modo todas las referencias quedan uno ó menos uno, salvo quizás un cero, y el lema está demostrado. □

Observación 3.8 *(directa de la prueba del lema)* Si el número de componentes con referencia par es impar, quedará una componente con referencia cero, y si el número de componentes con referencia par es par, todas las componentes quedarán con referencia $+1$ ó -1 .

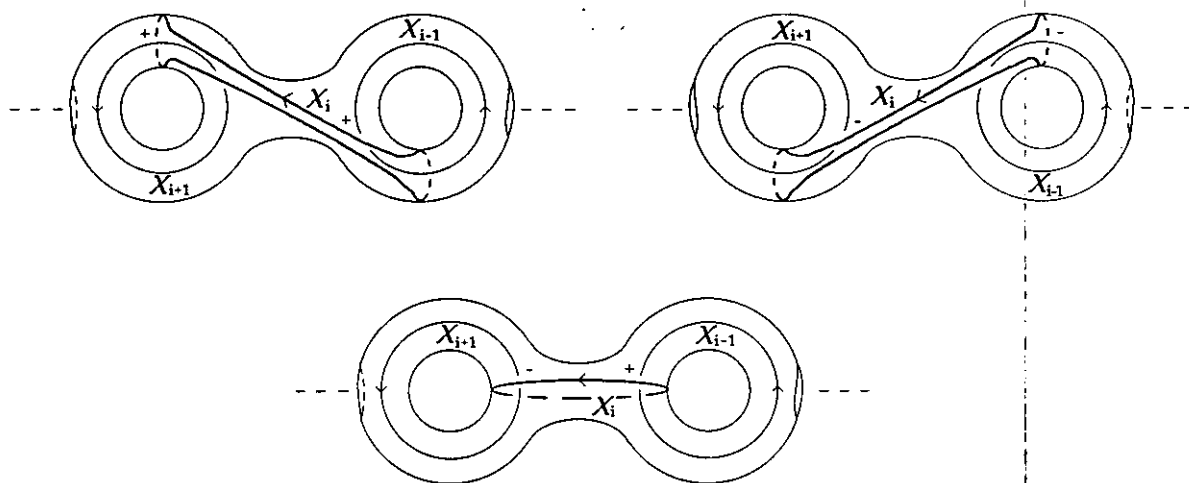
Pasamos ya a demostrar el resultado más importante de esta sección:

Teorema 3.9 *Existe un algoritmo para transformar en enlace referenciado de Lickorish cualquier cadena simple referenciada.*

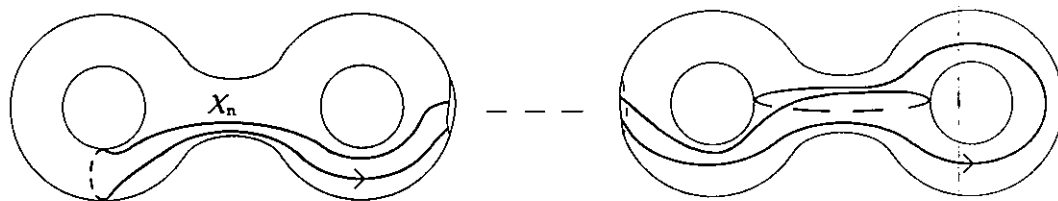
Demostración: Por el Lema 3.7, podemos suponer que todas las referencias de la cadena simple referenciada son $+1$ ó -1 , salvo quizás un cero, y por la Proposición 3.3 que el enlace es (salvo isotopías de S^3 y simetrías por un plano de R^3) del tipo $+\dots+ -\dots--$ (tal vez $-\dots-$), donde la componente con referencia cero (si la hay) ocupa el lugar intermedio entre los dos últimos signos menos:



El primer paso consiste en encontrar un enlace incluido en M isotópico a nuestra cadena simple. Si el número n de componentes de la cadena simple es par, escribimos las componentes X_i con i impar como longitudes canónicas de M_g donde $g = (n/2) + 1$, poniendo X_1 como longitud $g - 1$, X_3 como longitud $g - 2$, hasta X_{n-1} como primera longitud. Ahora dibujamos las componentes X_i con i par, pero $i \neq n$ (se tienen tres posibilidades de acuerdo con los signos):

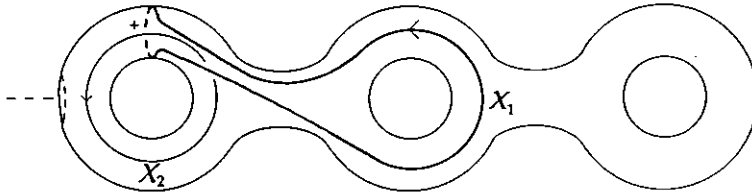


La componente X_n es la siguiente:

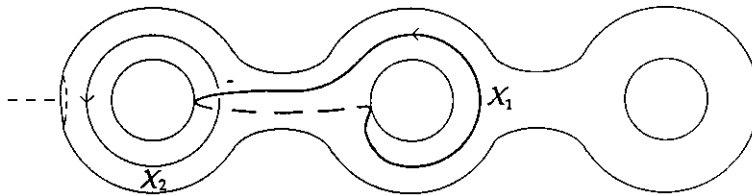


Si el número n de componentes de la cadena simple es impar, tomamos $g = ((n+1)/2) + 1$, y ahora son las componentes X_i con i par las longitudes canónicas de M , poniendo X_2 como longitud $g - 2$ de M , X_4 como longitud $g - 3$ de M , hasta X_{n-1} como longitud 1 de M . Las componentes X_i con i impar ($i \neq 1, n$) van de acuerdo con los signos, con las tres posibilidades ya analizadas, mientras que la componente X_n es igual que en el caso

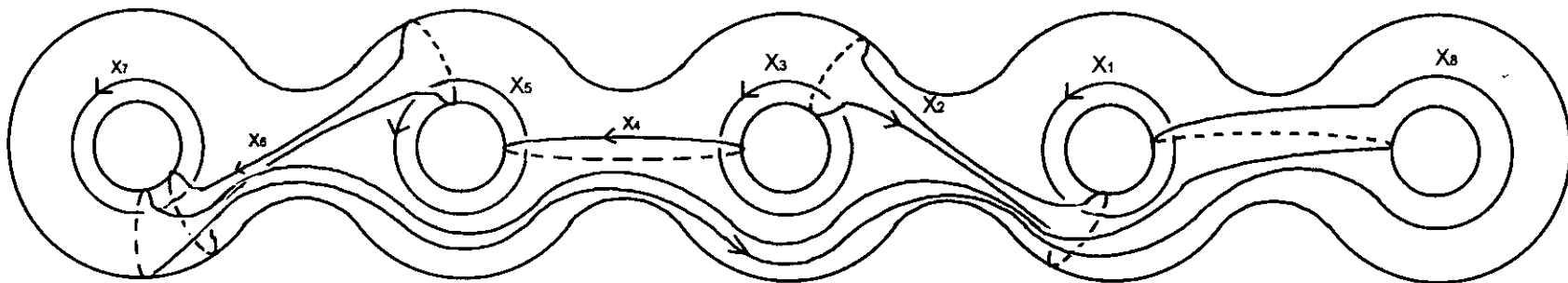
en que n es par. Para la componente X_1 hay ahora dos posibilidades, dependiendo de que la cadena simple empiece con un signo $+$,



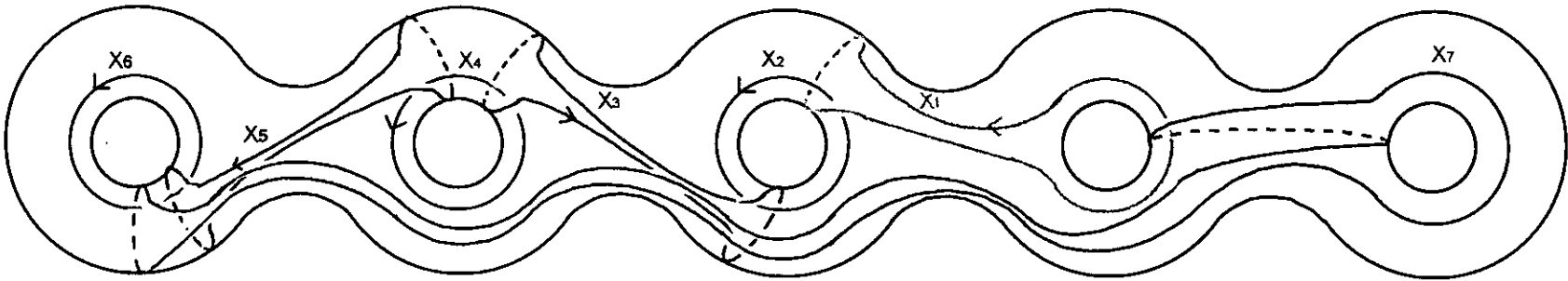
o bien sea $- \dots -$:



En cuanto a las “profundidades” a las que deben cavarse estas curvas en M para obtener un enlace incluido en M isotópico a nuestra cadena simple basta tomar dos precauciones: las longitudes serán las curvas más hundidas, y la última curva (la correspondiente a X_n) la más superficial. Como ejemplos, calculamos el enlace incluido en M isotópico a la cadena simple de 8 componentes $+++-----$, y el enlace incluido en M isotópico a la cadena simple de 7 componentes $+++-----$ (véase la página siguiente).



Cadena simple + + + - - - -

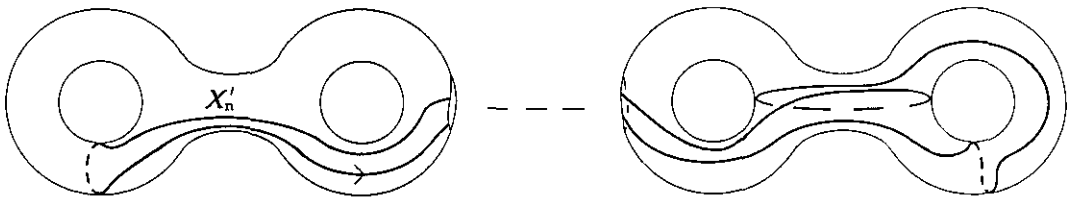


Cadena simple + + + - - - -

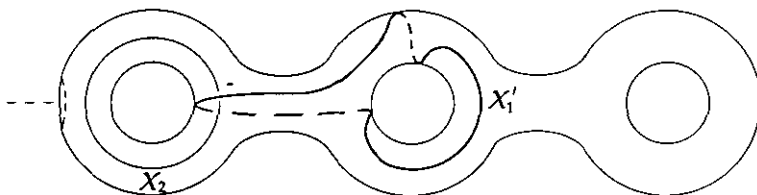
El **segundo paso** consiste en modificar las curvas cerradas simples en S para ajustar sus autorreferencias a las referencias de las componentes de nuestro enlace. Nótese que todas las autorreferencias de las curvas cerradas simples en S construidas en el primer paso son cero salvo la autorreferencia de la curva correspondiente a la componente X_n de la cadena simple, que es $+1$, y salvo la curva correspondiente a la componente X_1 en el caso en que n es impar y la cadena simple es $-\dots-$, cuya autorreferencia es también $+1$.

Así, como las referencias de la cadena simple son ± 1 , salvo quizás cero para la componente X_n , los ajustes necesarios son los siguientes:

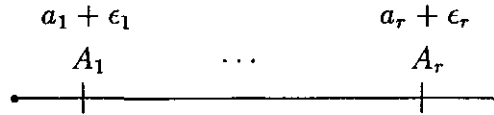
i) Si la referencia de X_n es ± 1 , la curva cerrada simple en S que le corresponde debe ser modificada ligeramente hasta obtener una curva con autorreferencia cero y que no varíe el tipo del enlace. Una tal curva es:



ii) Si n es impar y la cadena simple es del tipo $-\dots-$, la curva cerrada simple en S que corresponde a X_1 se modifica ligeramente hasta obtener una curva con autorreferencia cero y que no varíe el tipo de enlace. Una tal curva es:



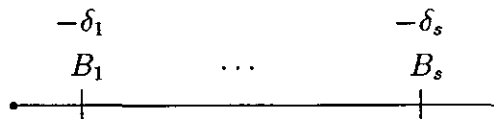
Hemos obtenido entonces un enlace referenciado totalmente incluido en M isotópico a nuestra cadena simple de partida. Supongamos que la siguiente es una presentación de este enlace referenciado totalmente incluido en M mediante la semirrecta real:



(así que las A_i son 1-nudos en S , $\epsilon_i = \pm 1$ y $a_i = lk(A_i, A_i \times 1)$). Consideramos el homeomorfismo de S definido por la composición

$$h = h_{A_1}^{-\epsilon_1} \circ \dots \circ h_{A_r}^{-\epsilon_r}$$

Por [L.2] y [L.3] se pueden encontrar (de modo algorítmico) curvas B_i de entre los meridianos, longitudes y curvas de enlace canónicos de M y signos $\delta_i = \pm 1$ tales que $h = h_{B_1}^{\delta_1} \circ \dots \circ h_{B_s}^{\delta_s}$. Entonces, por el Corolario 2.15, el enlace de Lickorish presentado mediante la semirrecta real dado por

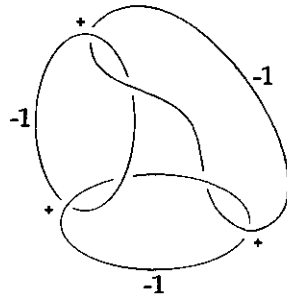


es ∂ -equivalente a la cadena simple referenciada de partida.

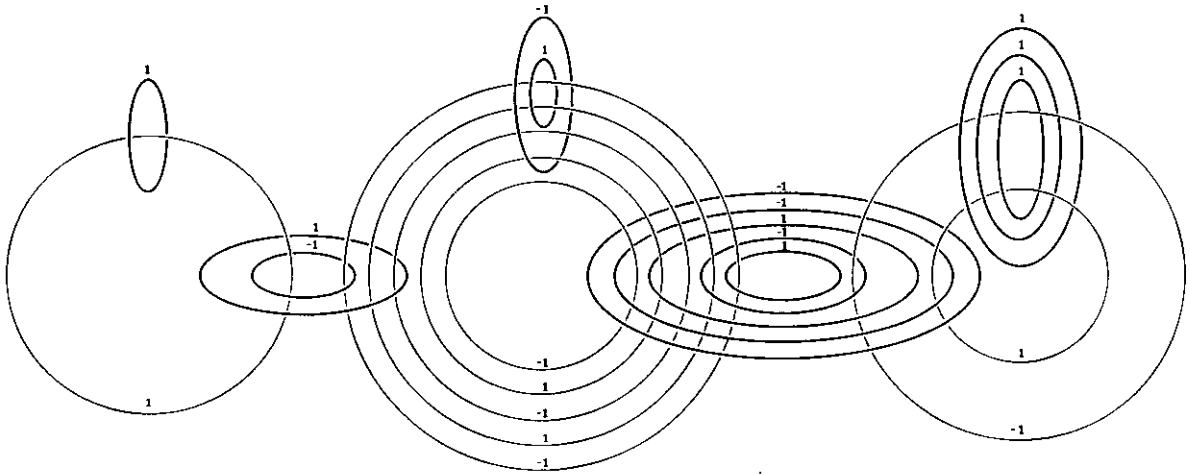
□

Concluimos este capítulo mostrando un ejemplo de aplicación del teorema anterior. Previamente enunciamos un sencillo resultado, generalización del Lema 1(i) de [L.2], necesario en la aplicación de los pasos de [L.1] y [L.2] cuando usamos la notación h_C^+ y h_C^- para los homeomorfismos de torsión de S a lo largo de una curva cerrada simple C en S :

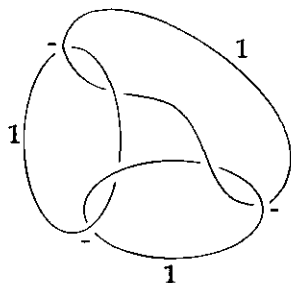
Lema 3.10 Sean B y C dos curvas cerradas simples de S , h un homeomorfismo de S tal que $h(B) = C$ y ϵ un signo arbitrario. Entonces h_B^ϵ es isotópico a la composición $h^{-1} \circ h_C^\epsilon \circ h$.



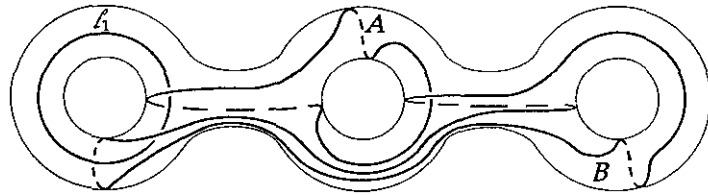
Ejemplo 3.11 *La cadena simple de tres componentes dibujada arriba es ∂ -equivalente al enlace de Lickorish*



La 3-variedad que define el ejemplo elegido es el recubridor cíclico de S^3 con tres hojas ramificado sobre el nudo trébol (véase [Ro], pág. 304). Por una simetría respecto del plano en donde descansa el enlace, se obtiene el enlace ∂ -equivalente



Entonces, de acuerdo con la demostración del Teorema 3.9 (compruébese directamente), este enlace es isotópico al enlace L' totalmente incluido en M_3 siguiente:



es decir, L' es el enlace con presentación mediante la semirrecta real siguiente:

$$L' = \bullet \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ B \quad A \quad l_1 \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$$

Consideramos entonces el homeomorfismo de S_3 dado por la composición $h = h_B^- \circ h_A^- \circ h_{l_1}^-$. De acuerdo entonces con los pasos en [L.2] y [L.3] y el lema 3.10, se demuestra que

$$h_A^- = h_{e_1}^+ \circ h_{l_2}^+ \circ h_{m_2}^- \circ h_{l_2}^- \circ h_{e_1}^-$$

y

$$h_B^- = h_{e_2}^+ \circ h_{m_3}^- \circ h_{e_2}^+ \circ h_{l_2}^+ \circ h_{m_3}^- \circ h_{m_2}^+ \circ h_{m_3}^- \circ h_{m_2}^+ \circ h_{l_3}^- \circ h_{e_2}^- \circ h_{l_1}^- \circ h_{m_1}^- \circ h_{m_2}^- \circ h_{m_1}^+ \circ h_{l_2}^- \circ h_{e_1}^- \circ h_{l_1}^- \circ h_{e_1}^+ \circ h_{l_2}^+ \circ h_{m_1}^- \circ h_{m_2}^+ \circ h_{m_1}^+ \circ h_{l_1}^+ \circ h_{e_2}^+ \circ h_{l_3}^+ \circ h_{m_2}^- \circ h_{m_3}^+ \circ h_{m_2}^- \circ h_{m_3}^+ \circ h_{l_2}^- \circ h_{e_2}^- \circ h_{m_3}^+ \circ h_{e_2}^-$$

por lo que

$$h = h_{e_2}^+ \circ h_{m_3}^- \circ h_{e_2}^+ \circ h_{l_2}^+ \circ h_{m_3}^- \circ h_{m_2}^+ \circ h_{m_3}^- \circ h_{m_2}^+ \circ h_{l_3}^- \circ h_{e_2}^- \circ h_{l_1}^- \circ h_{m_1}^- \circ h_{m_2}^- \circ h_{m_1}^+ \circ h_{l_2}^- \circ h_{e_1}^- \circ h_{l_1}^- \circ h_{e_1}^+ \circ h_{l_2}^+ \circ h_{m_1}^- \circ h_{m_2}^+ \circ h_{m_1}^+ \circ h_{l_1}^+ \circ h_{e_2}^+ \circ h_{l_3}^+ \circ h_{m_2}^- \circ h_{m_3}^+ \circ h_{m_2}^- \circ h_{m_3}^+ \circ h_{l_2}^- \circ h_{e_2}^- \circ h_{m_3}^+ \circ h_{e_2}^- \circ h_{e_1}^+ \circ h_{l_2}^+ \circ h_{m_2}^- \circ h_{l_2}^- \circ h_{e_1}^- \circ h_{l_1}^-$$

y por el Corolario 2.15 se tiene que $L' \sim L^*$ donde L^* es el enlace de Lickorish siguiente:

$$L^* = \bullet \begin{array}{c} -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \\ e_2 \ m_3 \ e_2 \ l_2 \ m_3 \ m_2 \ m_3 \ m_2 \ l_3 \ e_2 \ l_1 \ m_1 \ m_2 \ m_1 \ l_2 \ e_1 \ l_1 \ e_1 \ l_2 \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \hline 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ m_1 \ m_2 \ m_1 \ l_1 \ e_2 \ l_3 \ m_2 \ m_3 \ m_2 \ m_3 \ l_2 \ e_2 \ m_3 \ e_2 \ e_1 \ l_2 \ m_2 \ l_2 \ e_1 \ l_1 \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array}$$

El enlace de Lickorish del ejemplo se obtiene entonces mediante combinaciones del Cálculo de Kirby sobre L^* .



Bibliografía

- [A.K.] AKBULUT, S; KIRBY, R: *A Potencial Counterexample in dimension 4 to the Poincaré Conjecture, the Schoenflies conjecture and the Andrews-Curtis conjecture*. *Topology* **24** (1985), 375–390.
- [A.M.O.P.] ARMAS, S; MARGALEF, J; OUTERELO, E; PADRÓN, E: *Embedding of a Urysohn Differentiable Manifold with Corners in a Real Banach Space*. Proceedings of the Winter School “Geometry and Physics (Srni, 1991)”. *Rend. Circ. Math. Palermo (2) Suppl.* **30** (1993), 143–152.
- [Co] COCHRAN, T: *Embedding 4-Manifolds in S^5* . *Topology*, Vol. **23**, No. 3 (1984), 257–269.
- [F.Q.] FREEDMAN, M.H; QUINN, F; S: *Topology of 4-Manifolds*. Princeton Univ. Press, 1990.
- [G.M.O.O.P.] GARCÍA, M; MARGALEF, J; OLANO, C; OUTERELO, E; PINILLA, J.L: *Topología I-V*. Alhambra, Madrid, 1975, 1979, 1980 y 1982.
- [Go] GOMPF, R. E: *Problems in 4-Manifold Topology*. *Topology Proceedings*, Vol. **15** (1990), 29–38.
- [Go.1] GOMPF, R. E: *Killing the Akbulut-Kirby 4-sphere, with relevance to the Andrews-Curtis and Schoenflies problems*. *Topology* **30** (1991), 97–115.
- [G.P.] GUILLEMIN, V; POLLACK, A: *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [H.L.] HAMM, H.A; LÊ DŨNG TRÁNG: *Un Théorème de Zariski du type de Lefschetz*. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup., série 4, t. 6* (1973), 317–355.
- [Hi] HIRSCH, M. W: *Differential Topology*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ka] KAPLAN, S.J: *Constructing Framed 4-Manifolds with given almost Framed Boundaries*. *Trans. A.M.S.*, **254** (1979), 237–263.

- [K.1] KIRBY, R.C: *The Topology of 4-Manifolds*. Lecture Notes in Math. Vol. 1374. Springer-Verlag, 1989.
- [K.2] KIRBY, R.C: *A Calculus for Framed Links in S^3* . Inv. Math., **45** (1978), 35–56.
- [Ko] KOSINSKI, A. A: *Differential Manifolds*. Academic Press. Inc., 1992.
- [L.1] LICKORISH, W.B.R: *A Representation of Orientable Combinatorial 3-Manifolds*. Ann. of Math., **76** (1962), 531–540.
- [L.2] LICKORISH, W.B.R: *A Finite Set of Generators for the Homeotopy Group of a 2-Manifold*. Proc. Camb. Phil. Soc., **60** (1964), 769–778.
- [L.3] LICKORISH, W.B.R: *On the Homeotopy Group of a 2-Manifold (Corrigendum)*. Proc. Camb. Phil. Soc., **62** (1966), 679–681.
- [Ma] MANDELBAUM, R: *Four-Dimensional Topology: an introduction*. Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. **2**, No. 1, (1980), 1–159.
- [M.O.] MARGALEF, J; OUTERELO, E: *Differential Topology*. Mathematics Studies. Vol. **173** North Holland, Amsterdam, 1992.
- [M.O.1] MARGALEF, J; OUTERELO, E: *Topología Diferencial*. C.S.I.C. Madrid, 1988.
- [M.O.2] MARGALEF, J; OUTERELO, E: *Embedding of Hilbert Manifolds with Smooth Boundary into Semispace of Hilbert Spaces*. Archivum Mathematicum (Brno), Tomus **30**, (1994), 145–164.
- [Mi] MILNOR, J: *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton Mathematical Notes, 1965.
- [Mi.1] MILNOR, J: *A Procedure for killing the Homotopy Groups of Differentiable Manifolds*. Proc. Sympos. Pure Math, Vol. **3** Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1961), 39–55.
- [Mi.2] MILNOR, J: *Differentiable manifolds which are homotopy spheres*. (mimeographed), Princeton University, 1959.
- [Mo] MONTESINOS, J.M: *Heegaard Diagrams for Closed 4-Manifolds*. Geometric Topology, Proceedings of the 1977 Georgia Topology Conference, Academic Press, (1979), 219–238.

- [P.S.] PALAIS, R. S; SMALE, S: *A Generalized Morse Theory*. Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964) 165–172.
- [R.F.] ROHLIN, V; FUCHS, D: *Premier Cours de Topologie. Chapitres Géométriques*. Éditions MIR, Moscou, 1981.
- [Ro] ROLFSEN, D: *Knots and Links*. Publish or Perish, Boston, 1994.
- [R.S.] ROURKE, C. P; SANDERSON, B. J: *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag, 1972.
- [S.T] SEMINARIO DE TOPOLOGIA I-XVII. Publicación de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Madrid, 1970-1975.
- [Sm] SMALE, S: *Generalized Poincaré's Conjecture in Dimensions greater than Four*. Annals of Mathematics, Vol. **74**, 2, (1961), 391–406.
- [Va] VAKHRAMEEV, S. A: *Critical Point Theory for Smooth Functions and its Application to some Optimal Control Problems*. Journal of Soviet Mathematics. Vol. **67**, No.1, (1993), 2713–2811.
- [Wa] WALL, C. T. C: *On Simply-connected 4-Manifolds*. Journal of London Math. Soc., **39** (1964), 141–149.