UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias
Master en Investigación en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias
Mención: Matemáticas

TRANSICIÓN BACHILLETATO – UNIVERSIDAD: VALORACIÓN DE UNA PRÁCTICA DE MODELIZACIÓN

Trabajo de investigación (Modulo 6) presentado a la Universidad Autónoma de Barcelona por

Marta García Valldecabres

Como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias.

Realizado con la tutoría de la Profesora Lourdes Figueiras

Bellaterra, 23 de junio de 2009

Agradecimientos

Muchas personas han hecho posible la finalización de este trabajo de investigación. Deseo agradecer la ayuda constante de Nuestro Padre Dios y de la Santísima Virgen. También quiero agradecer el apoyo constante de mis padres y hermanos, especialmente de Montse. Agradezco la ayuda de mis profesores, compañeros de trabajo y alumnos de la Universidad Simón Bolívar de Caracas (Venezuela), en especial al profesor Freddy Rojas, a mis compañeras, las profesoras Yamilet Quintana y María Dunia, y a mis alumnos de la cohorte 2007-08, que recuerdo con cariño. A todos los profesores y compañeros de estudio de la Universidad Autómona de Barcelona (España), en especial a las profesoras Lourdes Figueiras, que me acompañó a lo largo de la elaboración de este trabajo de investigación, y Nuria Gorgorió, coordinadora del master en el momento en el que ingresé. Quiero agradecer especialmente a las instituciones que financiaron parte de este proyecto de Master, la Fundación Alberto Vollmer (Venezuela), el Ministerio de Educación, Política Social y Deporte (España) y a la Universidad Autónoma de Barcelona (España).

Resumen

Este trabajo de investigación es un análisis que valora el *Proyecto para un Descubrimiento* realizado por 48 estudiantes del Curso de Iniciación Universitaria (CIU) de la Universidad Simón Bolívar durante el curso de matemáticas I (septiembre a diciembre del 2007). La valoración consistió en describir cómo los estudiantes pusieron en práctica un proceso de modelización en matemáticas y unas habilidades de estudio/aprendizaje de matemáticas.

Las *bases teóricas del análisis* son dos, por una parte, la transición de las matemáticas del bachillerato a las universitarias, ya que es el contexto de la experiencia de los estudiantes del CIU, y por otra, la modelización en matemáticas, porque es la metodología del Proyecto para un Descubrimiento. El *diseño de la investigación* contempla que los datos habían sido recogidos con antelación y las consecuentes limitaciones que ello impone.

Con el *análisis de datos*, el lector puede captar la variedad de fenómenos didácticos producidos a raíz de la experiencia de modelización. Se pueden destacar como ejemplos, la variedad de caminos para la comprobación de los resultados de un problema y la necesidad de asimilar mejor el concepto de comprobación de resultados en matemáticas. Las perspectivas que se abren para próximos trabajos de investigación son también variadas e interesantes para quien desee profundizar en alguno de los temas tratados en esta investigación.

Palabras claves: De las matemáticas de bachillerato a las universitarias. Continuidad en la transición. Proyecto de modelización. Habilidades matemáticas. Curso de nivelación.

ÍNDICE

ABREVIATURAS

Et al.	Y otros.
Cfr.	Confróntese.
CIU	Curso de Iniciación Universitaria.
COVEM	Congreso Venezolano de Educación Matemática.
CIES	Congreso Internacional de Calidad e Innovación en la Educación Superior.
D.F.	Distrito Federal.
ESO	Educación Secundaria Obligatoria.
GIH	Grupos de Inteligencias Homogéneas.
Ibíd.	El mismo.
IBO	Organización del Bachillerato Internacional.
IM	Inteligencias Múltiples.
Inf.	Informe.
Fig.	Figura.
Núm.	Número.
Obj.	Objetivo.
RSME	Real Sociedad de Educación Matemática.
UAB	Universidad Autónoma de Barcelona.
USB	Universidad Simón Bolívar.

INTRODUCCIÓN

Un problema que preocupa a los docentes universitarios es la preparación en matemáticas de los estudiantes recién egresados del bachillerato que quieren acceder a la universidad venezolana, especialmente si los estudiantes desean incorporarse a carreras de ingeniería y ciencias.

Como otras universidades internacionales conscientes de este problema, la Universidad Simón Bolívar (Caracas - Venezuela) inició durante el curso académico 2005-06 un programa llamado Curso de Iniciación Universitaria (CIU), que es un curso de nivelación. Los estudiantes inscritos son seleccionados entre los que se detectó -a través de la prueba interna de admisión-, por una parte una débil preparación para iniciar los cursos de la universidad, y por otra parte unas posibilidades de superación y de nivelación. Ese programa, en el área de matemáticas se propone transmitir los conocimientos y habilidades que necesitarán esos estudiantes para comenzar con éxito los cursos de matemáticas del Ciclo Básico -primer curso de universidad que es común para todas las carreras-.

Así pues, la transición o cambio de etapa de las matemáticas del bachillerato a las de la universidad es, con toda propiedad, el contexto del curso de nivelación de matemáticas del CIU ya que los estudiantes del CIU han egresado de la Educación Media y Diversificada venezolana (bachillerato) y todavía no se han incorporado a una carrera universitaria. La realidad del contexto de transición en matemáticas del Proyecto para un Descubrimiento fue la razón por la cual este trabajo de investigación se elaboró desde la perspectiva de la línea de investigación sobre el fenómeno de la transición de las matemáticas en las diverses etapas de formación.

Cada vez son más los profesores universitarios que utilizan actividades de aplicación y de modelización en clases de matemáticas como parte de la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje y del proceso de evaluación de los progresos de sus alumnos. La práctica de modelización que ahora se valora se inserta en este tipo de actividades de aprendizaje y de evaluación. En este trabajo de investigación se valora el Proyecto para un Descubrimiento (modelar mediante ecuaciones algebraicas) de la asignatura matemática I del CIU. Proyecto realizado por 48 estudiantes con la metodología de trabajo en grupo, según se detalla en el apartado 1.4. del primer capítulo.

La estructura de esta memoria tiene cinco partes. El primer capítulo titulado Problema de Investigación se divide en cuatro apartados en los que se plantea el problema de la continuidad en la transición de las matemáticas del bachillerato y las de la universidad, se explica el contexto en el que se realizó la experiencia de modelización, se presentan los objetivos de la investigación que consistió en analizar cómo influía la realización del Proyecto para un Descubrimiento en la continuidad de la transición en matemáticas entre la etapa de bachillerato y la universitaria, y por último se presenta el Proyecto que se valora en este trabajo de investigación.

El segundo capítulo desarrolla el Marco Teórico de la investigación. Tiene dos apartados, uno trata de la transición de las matemáticas del bachillerato a las universitarias ya que es el contexto de la experiencia de los estudiantes del CIU, y otro, de la modelización en matemáticas porque es la metodología del Proyecto para un Descubrimiento. El tercer capítulo explica el Diseño Metodológico, el cual contempla que los datos habían sido recogidos con antelación y las consecuentes limitaciones que ello impone, se presentan esos datos con los que se contaba al inicio de proceso sistemático de este trabajo de investigación y los instrumentos elaborados para la organización y análisis de los datos.

El cuarto capítulo recoge el Análisis de los Datos, que recorre los objetivos específicos (cfr. 1.3.) con la ayuda del vaciado de datos del instrumento de análisis correspondiente, que evidencia cada objetivo. Las referencias constantes (con explicaciones y/o figuras) a las respuestas de los informes entregados por los estudiantes son un apoyo para seguir la secuencia del análisis. Este capítulo constituyó el meollo del trabajo de investigación y a partir de él se redactaron las Conclusiones de este trabajo. El Anexo final de este escrito recoge parte de los documentos que constituyeron los datos principales para la investigación y que ejemplifican lo que se va exponiendo principalmente en el capítulo 4.

Capítulo 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este primer capítulo está estructurado en cuatro apartados, el primero plantea el problema de la continuidad en la transición de las matemáticas del bachillerato y las de la universidad (cfr. 1.1.), el segundo explica el contexto en el que se realizó la experiencia de modelización del curso de matemáticas I del programa CIU (cfr. 1.2.), el tercero presenta los objetivos de la investigación que consistió en analizar cómo influyó la realización del Proyecto para un Descubrimiento en la continuidad de la transición en matemáticas entre la etapa de bachillerato y la universitaria (objetivo general), concretado en describir cómo los estudiantes pusieron en práctica un proceso de modelización y unas habilidades de estudio/aprendizaje, e interpretar los errores/dificultades de la práctica (objetivos específicos) (cfr. 1.3.), y el cuarto apartado presenta la práctica que se valora en este trabajo de investigación recogiendo los objetivos, el desarrollo y evaluación del Proyecto de Modelización (cfr. 1.4.).

1.1. Definición y justificación del problema

La educación matemática, por ser una labor de ámbito social, es un proceso complejo en el que aparecen muchas variables. Unas están relacionadas con las personas involucradas, y otras, con los programas impartidos, con el nivel académico o con las instituciones docentes. Estas variables afectan la formación matemática de los jóvenes durante el tiempo de su preparación en el ámbito de la educación formal. La experiencia adquirida por los profesores de matemáticas de bachillerato y de universidad les permite observar que tanto el esfuerzo de los docentes por intervenir en el proceso de enseñanza y aprendizaje como el esfuerzo de los estudiantes por prepararse académicamente en el área de matemáticas tienen relación con las experiencias previas y con la motivación en el momento de enseñar o de aprender.

La transición en las matemáticas de bachillerato a las universitarias es un tema que preocupa a docentes y a investigadores desde hace más de una década (1998, p. 20; RSME en prensa). La llegada a la universidad es un momento de un proceso de transición que debería ser continuo y se percibe de diversas maneras, concretamente, los profesores universitarios captan su especial importancia porque amplifica situaciones problemáticas. En una investigación realizada en contexto canadiense, los profesores Kajander y Lovric (2005, p. 157) comentan que han observado una actitud de aprendizaje superficial en los estudiantes de bachillerato y esperan que la modifiquen al entrar en la universidad. De manera que esta nueva actitud les permita aprender matemáticas de una manera más profunda que incluya la capacidad de pensar por sí mismos y la habilidad de transferir sus conocimientos a nuevas situaciones.

El proceso de transición entendido como un continuo requiere que la enseñanza en bachillerato incluya como parte de su función educativa, la preparación para que los estudiantes se enfrenten al estilo de la enseñanza universitaria en el primer curso de universidad, y asimismo, la enseñanza en la universidad ha de incluir entre sus funciones la de facilitar un adecuado desempeño académico al joven recién ingresado (RSME en prensa).

En este trabajo se han tomado en consideración las reflexiones sobre la transición en esta etapa recogidas en literatura relevante, por ejemplo en autores como Gúzman, Hodgson et al. (1998), Kajander y Lovric (2005), y Cretchley, Jourdan et al. (2007). Estos autores describen tres experiencias similares a nivel universitario que tratan de cubrir la brecha de la preparación en matemáticas del alumno que sale del bachillerato e ingresa en la universidad. Respecto a este trabajo de investigación, esos programas formativos han servido para captar lo extendido que está el problema planteado así como la preocupación de los docentes universitarios para hacer menos dramático el ingreso a la universidad (realidad que reflejan). Además, ha permitido corroborar la necesidad tanto de programas que atiendan la transición en el ámbito universitario como de intervenciones docentes significativas (tanto en bachillerato como en la universidad) para favorecer esta transición.

Investigadores del área han reflexionado sobre los diversos tipos de dificultades que aparecen con frecuencia en este momento educativo y se cuestionan acerca de las acciones educativas con las que podrían mejorar esta situación (Guzmán, Hodgson et al. 1998). Dificultades y acciones educativas que conviene tener en cuenta al plantear investigaciones en el área de la didáctica de la matemática acerca de qué intervenciones docentes -o qué tipo de cursos de transición- y de qué manera éstas favorecen el momento de cambio de etapa de los estudiantes. Y teniendo en consideración las experiencias señaladas, qué variables conviene considerar según las circunstancias en que se dan esos cursos. Estudios que se dejan abiertos para ser retomados más adelante.

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta ahora, esta investigación se propone dar respuesta a las preguntas que se enuncian a continuación.

El Proyecto para un Descubrimiento realizado en el curso de nivelación matemática I del Curso de Iniciación Universitaria (CIU),
¿permite a los estudiantes una adecuada asimilación
de un proceso de modelización matemática?, ¿les ayuda a mejorar en algunas habilidades básicas del estudio/aprendizaje en matemáticas?

1.2. Contexto de la experiencia

Entre las iniciativas a nivel universitario que tratan de cubrir la brecha de la preparación en matemáticas de los estudiantes que desean iniciar estudios de educación superior en la Universidad Simón Bolívar (USB) en Caracas (Venezuela), se encuentra un programa experimental de nivelación que se viene desarrollando desde el curso académico 2005-06, llamado Curso de Iniciación Universitaria (CIU). Este programa dirigido a estudiantes ya egresados del bachillerato que, habiendo presentado la prueba de admisión en la universidad, requerían consolidar conocimientos, desarrollar habilidades y destrezas intelectuales, así como adquirir otros aspectos asociados al desarrollo personal, hábitos de trabajo y de formación ciudadana para así contar con mayores oportunidades de éxito en sus estudios universitarios (ingenierías, ciencias puras, arquitectura, etc). Es por ello que el programa CIU es una innovación educativa en el ámbito de la USB y es referencia para otras universidades venezolanas.

Ese curso dura un año académico y procura impartir una formación integral para nivelar a los estudiantes antes de que ingresen formalmente al primer curso de universidad y abarca las siguientes áreas: lengua, matemáticas, destrezas intelectuales, física, inglés, química, biología y formación ciudadana. Las tres primeras son el eje vertebrador del programa ya que sobre ellas se estructuran las demás. Cada asignatura tiene un diseño curricular orientado a mejorar la preparación de los estudiantes hacia el logro del éxito en el programa general de estudios del Ciclo Básico de la USB (primer curso de universidad).

Concretamente, la preparación que los estudiantes adquieren a través del bloque de las tres asignaturas de matemáticas, amplía la base de conocimientos y hábitos intelectuales que necesitan para cursar con éxito los primeros cursos de matemáticas universitarias. Las matemáticas del CIU se insertan en lo que hoy se denomina transición de las matemáticas de bachillerato a las de la universidad, y en este sentido tratan de facilitar la continuidad de dicha transición en alumnos que provienen de sectores menos favorecidos tanto social como culturalmente y que presentan carencias, detectadas previamente, para el estudio de las matemáticas.

Después de dos años de experiencia en impartir el programa de las asignaturas de matemáticas del CIU y de valorar tanto los contenidos matemáticos como los aspectos didácticos de los materiales escritos utilizados – Dunia y García (2007), García y Olmedo (2007)-, el equipo de profesores del departamento de matemática de la USB responsables de dictar estas asignaturas realizaron un esfuerzo por mejorar algunos aspectos del curso. En primer lugar, eligieron un libro de texto Precálculo de Stewart, Redlin y Watson (2006) que sirviera de guía tanto para los profesores como para los estudiantes, y en base a él se reformuló tanto la metodología del curso como los contenidos de los programas de las asignaturas.

En el programa del primer curso de matemática del CIU se lee:

> El enfoque de esta primera matemática es formativo y pretende proporcionar a los estudiantes fundamentos del cálculo que son esenciales para un buen desempeño en esta área del conocimiento matemático.

> Además de tomar en cuenta el ámbito conceptual, se trata de capacitar a los estudiantes en la lectura y comprensión del libro de texto, en la resolución de problemas, en la comunicación escrita y verbal de sus ideas matemáticas, en descubrir, razonar y demostrar hechos matemáticos, puros o aplicados.
> Se contempla una metodología activa, teórico-práctica en las clases (tipo taller), atendiendo a los tres niveles diferenciales que proporciona el libro de texto: ejercicios, ejercicios de aplicación y descubrimiento, escritura y aprendizaje en grupo.
> La evaluación consiste en 2 pruebas departamentales de 40 % cada una, y 20% queda a libre programación de cada profesor. (cfr. Programa de la asignatura Matemáticas I del CIU, curso 07-08).

Con pocas ideas fundamentales, este texto presenta el enfoque, la metodología y la evaluación que se debía desarrollar durante el curso. Además, se observa una relación directa de la finalidad del curso de matemática I y los objetivos de la investigación (cfr. 1.3.). El Proyecto de Modelización que se analiza en esta investigación (cfr. 1.4.) fue planificado, desarrollado y evaluado como parte del 20% que quedaba a libre programación de cada profesor (durante el mes de noviembre del 2007) dentro del curso de matemáticas I del CIU.

El diseño de la investigación contempla que los datos habían sido recogidos con antelación. Se tomó conciencia de que la sistematización del estudio fue posterior a la obtención de los datos y de que esta realidad estaría presente a lo largo del desarrollo de esta investigación. Así pues, se hizo un esfuerzo para adaptar tanto el problema como los objetivos de investigación a los datos disponibles.

1.3. Objetivos de la investigación

En este trabajo se pretende analizar cómo influye la práctica innovadora Proyecto para un Descubrimiento (cfr.1.4.) del primer curso de matemáticas del programa CIU -curso selectivo de nivelación para ingresar en la universidad-, en la continuidad de la transición en matemáticas entre la etapa de bachillerato y la universitaria.

Para desarrollar este objetivo general, este trabajo de investigación se delimitará a los siguientes objetivos específicos:

1. Describir cómo los estudiantes pusieron en práctica un proceso de modelización en el contexto del Proyecto para un Descubrimiento.
2. Describir cómo los estudiantes pusieron en práctica diversas habilidades consideradas básicas para el estudio/aprendizaje de matemáticas.
3. Interpretar las dificultades/errores de los estudiantes respecto a las habilidades básicas (obj. 2) y respecto al proceso de modelización (obj. 1).

1.4. Proyecto para un Descubrimiento

Stewart, Redlin y Watson (2006) explican en su libro que una manera de hacer participar a los estudiantes y volverlos alumnos activos es fomentar un modo de trabajar en clase que los involucre en proyectos extensos que los hagan sentir que logran algo importante cuando los terminan. Esta metodología es llamada por ellos Proyecto para un Descubrimiento, y en general, consiste en un conjunto de actividades desafiantes pero accesibles, con el objeto de que los estudiantes exploren con mayores detalles un aspecto interesante del tema que acaban de aprender.

Ahora bien, dicen que cuando el diseño de los Proyectos para un Descubrimiento lo permite, es posible añadir el trabajo colaborativo (o en grupo) para realizarlos. En tal caso es necesario tener un criterio que permita la formación de grupos de trabajo efectivo, en los que los alumnos estén personalmente integrados de manera que desarrollen el contenido del Proyecto de forma adecuada.

El Proyecto de Modelización titulado Ecuaciones a través de las Épocas del capítulo 1 del libro de texto (Stewart, Redlin et al. 2006, p. 75.) fue la tarea asignada en el curso de matemática I como Proyecto de Modelización (cfr. fig 1.1.). Este Proyecto se planificó según lo que se expone a continuación.

Objetivos del Proyecto de Modelización. El Proyecto consistió en el desarrollo de una actividad que intenta elevar por una parte la comprensión conceptual de un contenido matemático (modelización mediante ecuaciones lineales) y por otra parte procura aumentar el nivel de compromiso de los estudiantes con su propio proceso de aprendizaje.

- *Objetivo general del Proyecto*: Promover un aprendizaje activo-colaborativo en estudiantes del Curso de Iniciación Universitaria (CIU) de la Universidad Simón Bolívar (USB) mediante una estrategia didáctica innovadora y motivante.

- *Objetivos específicos del Proyecto*:

1. Comprender el proceso de modelización mediante ecuaciones algebraicas (de primer grado y una variable) a través de problemas planteados en diversas épocas y culturas.
2. Desarrollar una actividad de riqueza matemática a través de un aprendizaje desde la interacción social en el aula.
3. Motivar el aprendizaje de las matemáticas a través de la cercanía a problemas históricos, es decir, desde la perspectiva histórica.
4. Activar diversos procesos de aprendizaje de matemáticas: resolución de problemas, argumentación y comunicación (oral y escrita), precisión en el uso del lenguaje matemático (escrito).
5. Reflexionar sobre las propias experiencias de aprendizaje y su relación con la vida cotidiana.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Ecuaciones a través de las épocas

Las ecuaciones se han utilizado para resolver problemas a través de toda la historia registrada, en todas las civilizaciones. (Véase por ejemplo el ejercicio 85 de la página 74.) A continuación presentamos un problema de Babilonia (alrededor de 2000 años antes de nuestra era).

> Encontré una piedra, pero no la pesé. Después añadí un séptimo y luego un onceavo del resultado; pesé todo y encontré que pesaba una mina. ¿Cuál era el peso original de la piedra?

La respuesta dada en la tablilla es de $\frac{2}{3}$ mina, 8 sheqel, y $22\frac{1}{2}$ se, donde 1 mina = 60 sheqel y 1 sheqel = 180 se.

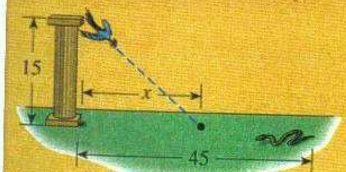
En el antiguo Egipto, el saber cómo resolver problemas planteados en palabras era un secreto altamente valorado. El Papiro Rhind (alrededor de 1850 años antes de nuestra era) contiene muchos de dichos problemas (véase pág. 716). El problema 32 en el papiro dice:

> Una cantidad, su tercio, su cuarto, sumados juntos se convierten en 2. ¿Cuál es la cantidad?

La respuesta en la notación egipcia es $1 + \bar{4} + \overline{76}$, donde la barra indica "recíproco", como nuestra notación 4^{-1}.

El matemático griego Diofanto (alrededor de 250 antes de nuestra era) escribió el libro *Arithmetica*, el cual contiene muchos enunciados de problemas y ecuaciones. El matemático indio Bhaskara (siglo XII antes de nuestra era, véase pág. 144) y el matemático chino Chang Ch'iu-Chien (siglo VI antes de nuestra era) también estudiaron y escribieron sobre ecuaciones. Naturalmente, las ecuaciones siguen siendo importantes en la actualidad.

1. Resuelvan el problema babilonio y demuestren que su respuesta es correcta.
2. Resuelvan el problema egipcio y demuestren que su respuesta es correcta.
3. Los egipcios y babilonios antiguos utilizaban ecuaciones para resolver problemas prácticos. Por los problemas que se han dado aquí, ¿cree usted que habrán disfrutado de plantear y resolver problemas sólo por gusto?
4. Resuelva este problema de la India del sigo XII antes de nuestra era.



> Un pavo real está posado en lo alto de una columna de 15 codos y la guarida de una serpiente está al pie de la columna. El pavo ve a la serpiente cuando ésta se encuentra a 45 codos de su madriguera, y se lanza en forma oblicua sobre ella cuando se desliza hacia su agujero. ¿A cuántos codos de la madriguera de la serpiente se encuentran, suponiendo que cada uno se desplaza una distancia igual?

5. Considere este problema de la China del siglo VI.

> Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos juntos valen una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagan un total de 100, se pueden comprar con 100 monedas?

Este problema tiene varias respuestas. Aplique el ensayo y error para encontrar por lo menos una respuesta. ¿Es un problema práctico o un acertijo? Escriba un ensayo corto para sustentar su opinión.

6. Escriba un ensayo corto para explicar cuántas ecuaciones afectan su propia vida en el mundo actual.

Figura 1.1. Enunciado del Proyecto para un descubrimiento.
Ecuaciones a través de las épocas

Desarrollo del proyecto. A continuación se describe cómo se implementó esta estrategia innovadora entre los estudiantes del CIU de la USB.

- *Formación de grupos colaborativos*. Basados en la teoría de inteligencias múltiples (Gardner 1983; Gardner 1995) como marco de referencia para la generación de Grupos Inteligentes Homogéneos (GIH) se conformaron los equipos de estudiantes. Los instrumentos utilizados –cfr. Malatesta y Quintana (2004) y (2007)- para lograr una satisfactoria distribución de estudiantes, que ahora no se van a detallar, fueron: un Test que detecta las Inteligencias Múltiples (IM) en cada alumno y una forma de representación de las inteligencias múltiples de cada alumno llamada Sistema Tela de Araña (STA), fundamentales para la selección de los estudiantes de cada grupo.
  Por primera vez, unas pocas semanas antes, los estudiantes realizaron un proyecto con la misma metodología y los mismos grupos de GIH, hecho decisivo para el adecuado desarrollo del Proyecto de Modelización.

- *Trabajo en grupos*. Cada grupo discutió el proyecto durante dos sesiones de clase de 2 horas cada una, justo en las semanas 8 y 9 del trimestre (cada trimestre se desarrolla en 12 semanas) y el equipo de alumnos contó con diez días consecutivos para completar el informe escrito. Esto permitió que los estudiantes dedicaran mayor tiempo del habitual en clase de matemáticas y fuera de clase a la reflexión y discusión de varios problemas, la selección de la argumentación que consideraron adecuada.

- *Elaboración del informe.* Gracias a la elaboración del informe del primer proyecto, cada grupo de estudiantes se desenvolvió con agilidad en la etapa de elaboración escrita del informe. Las pautas para la elaboración y la corrección del informe fueron explicadas previamente y con detalle a los alumnos: el significado del enfoque de resolución de problemas con parte de la metodología de Poyla (Stewart, Redlin et al. 2006, pp. 138-141), el cronograma de ejecución de la tarea asignada (fechas de asignación y de entrega) y los aspectos a evaluar en el informe (formativos y sumativos). Además, se hizo explicito que el escrito final debía ser la puesta en común del esfuerzo de todos los integrantes del grupo.

Evaluación del Proyecto. El proyecto fue evaluado tanto en su aspecto formativo, como el sumativo.

- *Plantilla para la evaluación*. La plantilla diseñada para corregir los informes está inspirada en la que se utiliza para corregir las tareas del portafolio en la asignatura de matemáticas del programa Bachillerato Internacional (IBO 2005) (cfr. Fig. 1.2. del Anexo). Durante la corrección, el instrumento ayudó a que el profesor evaluador se fijara en los siguientes aspectos: presentación, uso del lenguaje matemático, comunicación, procedimientos, resultados obtenidos, representaciones visuales y material de apoyo.

- *Corrección del informe escrito*. Con la ayuda de la plantilla para la evaluación se obtuvo información adecuada para detectar los aciertos y las dificultades de cada pregunta del proyecto. Los comentarios acerca de los aciertos y errores se desglosaron en los comentarios escritos en la plantilla de corrección y en las anotaciones explicativas a las respuestas de cada pregunta del informe de cada grupo.

- *Reflexión sobre la práctica.* Por una parte, el instrumento de corrección hizo reflexionar a los estudiantes sobre el proceso de aprendizaje, y por otra parte, en diversos momentos del desarrollo de la práctica, se facilitó que los estudiantes reflexionaran sobre su propia práctica. Por ejemplo, la reflexión de los estudiantes pudo observarse durante el aprendizaje desde: la colaboración en la pequeños grupos (inquietudes, dificultades, retos), la puesta en común de la experiencia guiada por el docente y después de haber entregado el informe, el volver a reflexionar en los pequeños grupos las respuestas del informe ya corregido (aciertos, comentarios, equivocaciones, sugerencias).

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En el curso académico 2007-08 el programa experimental de nivelación para preparar a los estudiantes que desean ingresar a las carreras de ingeniería, ciencias y arquitectura en la universidad Simón Bolívar (USB) se inició por tercer año consecutivo. Los profesores del departamento de matemáticas de la USB fueron adaptando los cursos de matemáticas de este programa al perfil de los estudiantes que recibía cada año en sus aulas. En el área de matemáticas, estos alumnos requerían consolidar conocimientos, desarrollar habilidades y destrezas intelectuales, y adquirir hábitos de trabajo (en matemáticas y en otras áreas del conocimiento). Recordemos que la mayoría de los alumnos provenían de sectores menos favorecidos tanto social como culturalmente y que éstos presentaban carencias -detectadas previamente- para el estudio de las matemáticas. En ese curso académico los profesores del CIU eligieron un libro de texto -Precálculo de Stewart, Redlin y Watson (2006)- que sirviera de guía tanto para los profesores como para los estudiantes, y en base a él se reformuló la metodología del curso y los contenidos de los programas del bloque de las asignaturas de matemáticas.

Los procesos de modelización no son necesarios en los cursos de matemáticas anteriores al ingreso en la universidad, porque esta etapa de estudios comunes para todas las carreras (matemáticas de bachillerato en ciencias o en humanidades) está centrada en el aprendizaje de conocimientos y habilidades básicas hacia las matemáticas. Ahora bien, en la medida que avanzan los cursos de matemáticas universitarias se percibe como más necesario el aprendizaje de los procesos de modelización ya que es una forma de integrar los contenidos y habilidades matemáticas con lo que será en un futuro próximo el desarrollo de la profesión de ingenieros y científicos (Campos, García et al. 2002).

Este segundo capítulo desarrolla el marco teórico del trabajo de investigación. El capítulo se ha estructurado en dos apartados, por una parte se tratará de la transición de las matemáticas del bachillerato a las universitarias (cfr. 2.1.) ya que es el contexto de la experiencia de los estudiantes del CIU, y por otra, de la modelización en matemáticas (cfr. 2.2.), porque es la metodología del Proyecto para un Descubrimiento. Desde estas perspectivas teóricas se llevó a cabo el diseño metodológico (cfr. cap. 3) y el análisis de los datos (cfr. cap. 4). El análisis de datos requirió mayor literatura de investigación en el tema de modelización que en el de transición.

2.1. La transición de las matemáticas del bachillerato a las universitarias

En la Universidad Simón Bolívar (USB) ha aumentado la diversidad de los estudiantes. Los estudiantes del CIU provienen de sectores menos favorecidos social y culturalmente, por esto la continuidad en la transición se ha comenzado a tratar como una problemática a la cual hay que atender. Así pues, quienes han de colaborar con la continuidad en la transición de las matemáticas de bachillerato a las de la universidad, concretamente, los profesores de matemáticas de los cursos de nivelación en la USB, necesitan nuevas herramientas didácticas para transmitir los conceptos matemáticos básicos. Ahora bien, como comentan Rodríguez y Zuazua (2002, versión actualizada 2004), la ciencia matemática se ha desarrollado de una manera espectacular y ese desarrollo ha sido compatible con el acceso a la ciencia matemática de un amplio sector de la sociedad, porque lo fundamental en el mundo de las matemáticas permanece intacto -los conocimientos básicos y las habilidades son los mismos hoy que hace varias décadas-, pero la transmisión de los conocimientos matemáticos se ha modificado utilizando actualmente metodologías más significativas para estudiantes y profesores. Sin embargo, no se puede olvidar que la herramienta (didáctica) más útil para estos docentes es la profunda comprensión del concepto matemático que enseñan.

Al programa y a los estudiantes del CIU se les pueden aplicar las siguientes palabras que nos centran en la problemática de la transición del bachillerato a la universidad de la realidad latinoamericana:

> (…) la problemática de la transición bachillerato-universidad es hoy un fenómeno de preocupación y un tema de debate. Los sistemas de elite y selectivos cada vez son más exclusivos y menos extendidos. La revisión de la investigación pone de manifiesto que en el análisis de la transición a la universidad se han hecho estudios que describen resultados académicos al final de un determinado período y seguimientos de cohortes específicas en referencia a centros específicos, pero no se ha producido un planteamiento comprensivo y profundo que permita constatar el conjunto de factores psicosociales relacionados con la calidad de las transiciones académicas. La transición a la universidad es un proceso complejo que comporta para el estudiante cambios personales y vitales significativos, con consecuencias que afectan también el marco social. La transición de los estudios secundarios a los estudios superiores debe considerarse en un espacio temporal amplio que se intensifica en el año anterior y el año siguiente al momento concreto del cambio. Al final del segundo año -primer año en la universidad- ya puede valorarse la resolución favorable de la transición (Rodríguez, Fita et al. 2004, pp. 392-393).

Entonces, los profesores responsables de la calidad de la transición académica del CIU han de tener en cuenta el análisis de los resultados académicos de matemáticas obtenidos por los estudiantes del CIU (al comenzar y al terminar este año de nivelación), así como el seguimiento de los alumnos durante los siguientes años de carrera en la USB. Las investigaciones acerca de la calidad de la transición académica en la universidad venezolana que determinen las variables que intervienen en ese cambio de etapa en matemáticas, son cada vez más necesarias. Deulofeu (2009) comentaba que el problema principal para hacer un estudio acerca de la transición en las matemáticas del bachillerato a la universidad es la poca bibliografía existente en cuanto a la investigación empírica, así como la mezcla entre las experiencias de innovación -principalmente cursos de nivelación- y lo que es propiamente la investigación que aporte datos sobre cuáles son los aspectos que determinan el problema. Este mismo profesor decía que el problema de la transición existe y está suficientemente detectado, pero no está claro que las vías de solución propuestas lo resuelvan de manera satisfactoria porque seguramente se requieran acciones más contundentes –generales, y a medio o largo plazo-, lo cual dificulta la experimentación.

El CIU es un curso de nivelación que condiciona el ingreso del alumno a la universidad, y como condiciona el ingreso es un caso particular de esa etapa de continuidad en la transición hacia la universidad porque el alumno ya ha salido del bachillerato, está inscrito en un curso de preparación para ingresar en la carrera y ya participa de la vida universitaria. Por esto, se trata de un curso académico en el que se entrecruzan las tres etapas de la transición que señalan algunos investigadores (Ibíd., 2004). Una etapa previa centrada en intereses variados en la que el estudiante del último año de bachillerato enfoca sus esfuerzos académicos hacia el acceso en las instituciones elegibles para su educación superior y hacia las carreras consideradas afines a sus intereses y/o circunstancias; éstos esfuerzos incluyen la concreción del proyecto profesional que será parte del proyecto de vida del estudiante. La segunda etapa consiste en el momento clave del proceso de matriculación al CIU y los primeros contactos con la institución y/o carrera escogida, así como las primeras semanas de clase con experiencias nuevas en las que el estudiante comienza a situarse como universitario (académica, social y personalmente). Y una tercera etapa, el primer curso en la universidad, al final del cual se podrá valorar la transición como favorable, desfavorable, etc., en el alumno del CIU será favorable la transición si aprueba el curso y se inscribe en la carrera deseada.

El curso de matemáticas I del CIU busca disminuir la escasa preparación en el área de matemáticas de alumnos que desean ingresar a las carreras de ingeniería o de ciencias de la USB, por ello el contenido de los artículos sobre la transición de las matemáticas de bachillerato a las de la universidad son de interés para este marco teórico, concretamente los de Cretchley, Jourdean et al. (2007), Kajander y Lovric (2005) y, Guzmán, M., Hodgson, B., et al. (1998). En esos textos, se narran experiencias -principalmente cursos de nivelación- que buscan disminuir la escasa preparación en el área de matemáticas de los estudiantes que ingresan a la universidad. De la misma manera que hace el curso de nivelación CIU, esos cursos de nivelación son un refuerzo potente para la entrada en la universidad de estudiantes que aumentan la diversidad en las aulas (Rodríguez y Zuazua, (2002, versión actualizada 2004)). Esos artículos presentan estudios de investigación y experiencias de innovación realizadas con jóvenes que ingresarían a carreras científicas y, especialmente, a las ingenierías, por lo que constituyen experiencias en parte análogas y en parte diferentes a las de los estudiantes del curso de nivelación CIU que desean ingresar a carreras científicas o a ingenierías (cfr. 1.2.).

En la USB se implementó el curso de nivelación de matemáticas del CIU para un grupo de estudiantes seleccionados, que no estaban en condiciones de iniciar el primer curso de matemáticas universitarias en la USB (cfr. 1.2.). Se organizaron a los estudiantes en grupos de no más de 30 alumnos por clase (aula), por lo que el curso académico 2007-08 inició con 8 secciones de un total aproximado de 240 estudiantes inscritos el curso de matemáticas. Las matemáticas del CIU se imparten en tres trimestres (de 12 semanas cada uno), en tres asignaturas que se dictan y evalúan independientemente pero que tienen una estructura unitaria. Los Fundamentos del Précalculo fueron el contenido del primer trimestre y por tanto de la asignatura de matemáticas I. Existen experiencias similares, como la del grupo de 71 estudiantes que ingresarían a carreras de ingeniería en Universidad de Southern Queensland (Australia) en la cohorte del 2006, los cuales recibieron también un curso de Fundamentos en Matemática durante un semestre previo al inicio de los estudios de la carrera (Cretchley, Jourdan et al. 2007).

Los profesores Kajander y Lovric (2005) de la Universidad de McMaster (Ontario, Canadá) relatan otra experiencia análoga de transición y explican cómo surgió el texto titulado Manual de Repaso de Matemáticas (Lovric 2001) que los alumnos utilizaron (voluntariamente durante 3 - 4 semanas previas al inicio del curso 2001-02), para adquirir los conocimientos y habilidades matemáticas, y así conseguir nivelar la preparación para enfrentar con éxito los cursos de matemática universitaria. Este manual de repaso promueve en los jóvenes el ejercicio de lo que en el ámbito educativo se denomina autonomía del estudiante para gestionar su aprendizaje (Guerrero 2006). Es interesante destacar que el contenido de ese documento de repaso está estructurado en dos partes, la primera parte narrativa procura motivar a los estudiantes a la reflexión acerca de sus futuras experiencias como universitarios –e incluye información sobre la universidad y sobre los primeros cursos de matemáticas-, y la segunda dedicada a repasar las matemáticas que necesitarían en los primeros cursos de la universidad. También los cursos de matemáticas del CIU hacen hincapié en éstas características de los procesos de enseñanza y aprendizaje eficaces: la motivación de los estudiantes a través de experiencias positivas, la reflexión sobre la práctica -que corrige los errores- y especialmente, la autonomía para gestionar su aprendizaje. El curso llamado Laboratorio de Matemáticas (Guzmán, Hodgson et al. 1998; Guzmán s/f) constituye otra experiencia de nivelación durante las cinco semanas precedentes a las clases de cálculo en la Universidad Complutense (Madrid), en la que se procura que los estudiantes adquieran procedimientos básicos y se introduzcan de manera eficaz en el trabajo de hacer matemáticas. Los cursos del CIU tratan de introducir a los alumnos en ese quehacer matemático de una manera progresiva a lo largo del curso académico dividido en tres trimestres.

A través de la prueba interna de admisión de la USB cada año quedan seleccionados los estudiantes que podrán inscribirse en el CIU. En esa prueba se detecta la débil preparación para iniciar los cursos de matemáticas en la universidad, y las posibilidades de superación/nivelación de las personas escogidas. También en la Universidad de Southern Queensland (Australia) aplicaron una prueba (pre-test) a los 206 estudiantes de nuevo ingreso a carreras de ingeniería y de ciencias de la cohorte del 2006. El pre-test detectó el nivel de competencias matemáticas: tenían razonables (suficientes) habilidades en varias áreas de matemáticas (aritmética, fracciones y leyes de potenciación) y carencias en las habilidades de otras áreas (álgebra, funciones y trigonometría). Otra experiencia para detectar el nivel de preparación de los estudiantes tuvo lugar en la Universidad de McMaster (Ontario, Canadá) al inicio del curso 2001. Como consecuencia de la modificación del currículo de secundaria en el año 1997 se presentó una “doble cohorte” de jóvenes que habían dedicado en la secundaria 4 ó 5 años respectivamente al estudio de las matemáticas. Se les aplicó un cuestionario para detectar factores de éxito en los primeros cursos de cálculo de la universidad, instrumento que constaba de dos partes, una narrativa en la que se les pedía la descripción de experiencias en los cursos de matemáticas de secundaria y algunos comentarios sobre las expectativas del primer curso de cálculo de la universidad, y otra referente a los contenidos para identificar el grado de conocimiento y de habilidades matemáticas. Con el análisis de los resultados obtenidos del cuestionario se evidenció que esos jóvenes necesitaban entender mejor los conceptos matemáticos y no sólo ser hábiles en los aspectos técnicos/computacionales de matemáticas. Los profesores del CIU también procuran incidir en la comprensión de los conceptos matemáticos de sus alumnos.

Los profesores del CIU han comenzado a investigar acerca de las dificultades de los estudiantes para aprender matemáticas. De manera análoga a la experiencia de la universidad Complutense de Madrid (Guzmán, Hodgson et al. 1998), en la que los docentes consiguieron describir las principales dificultades que percibían los estudiantes con respecto a esta transición al analizar el cuestionario contestado por varios grupos de primer curso de universidad. Los tipos de dificultades que los alumnos encontraban (encuentran) al ingresar a los primeros cursos de matemáticas de la universidad son las relacionadas con el estilo de enseñanza de los profesores universitarios (forma en la que presentan las matemáticas y forma en la que organizan la clase), las relacionadas con el estilo cognitivo que se utiliza en la universidad (cambios bruscos en las formas de pensar en las matemáticas de bachillerato y las de la universidad), y las que surgen de la carencia de herramientas apropiadas para aprender matemáticas.

Además, los docentes del CIU siguen sorprendiéndose ante la persistencia y el entusiasmo de los estudiantes del curso de nivelación de matemáticas que, habiendo finalizado con éxito ese año académico, han logrado una madurez intelectual. La percepción de los profesores del CIU se parece a lo que afirman con asombro y más allá de los resultados obtenidos en su investigación Cretchley, Jourdean et al. (2007): el modo en el que los estudiantes afrontan el estudio personal es el principal factor que modifica sus habilidades matemáticas. Los profesores Kajander y Lovric (2005) confirmaron otros fenómenos didácticos interesantes a través del seguimiento de los estudiantes de la doble cohorte en la Universidad de McMaster (Ontario, Canadá): la necesidad de dedicar mayor tiempo a hacer matemáticas antes de ingresar a los cursos de cálculo de la universidad, la escasa experiencia en el uso de libros de texto durante secundaria, la relación entre las buenas experiencias en las matemáticas de secundaria y el éxito en los cursos de la universidad, así como la importancia que para el alumno supone el asumir con responsabilidad su preparación para la matemática universitaria. También en Canadá, a través de la comparación de los cuestionarios de los estudiantes de la “doble cohorte” se confirmó que haber dedicado más horas a las matemáticas antes de ingresar a la universidad (en secundaria) es beneficioso para el estudiante, y el hecho de que los jóvenes tengan un año más de edad al ingresar a la universidad repercute notoriamente en su madurez como personas (intelectual, social y emocionalmente). Por ello, esos investigadores finalizan su artículo con la consideración de que la madurez personal del alumno es más importante que la edad cronológica en orden al éxito en los primeros cursos de matemáticas en la universidad.

La USB procura reforzar las capacidades personales de los estudiantes del CIU. Lo hace a través de los profesores de cada curso del programa y del departamento de orientación mediante la ayuda individual cuando es necesaria. Desde el punto de vista institucional se les ayuda a familiarizarse con los lugares que han de frecuentar (comedores, bibliotecas, aulas, actividades deportivas, etc.). El proceso de la transición en las matemáticas del CIU es complejo y multifactorial ya que en él intervienen aspectos relacionados tanto con el nuevo universitario como con su entorno e interacción entre ambos. Como explican Rodríguez y Fita (2004), el proceso de transición será más o menos favorable o dificultoso según los recursos con los que cuente cada estudiante. Las características de estos recursos se pueden desglosar en primer lugar, en los personales de cada estudiante, pues en la transición interviene todo lo que el alumno es como persona, es decir, el background que posee, los hábitos académicos-escolares, los intereses intelectuales-profesionales, el sentido de compromiso con el propio aprendizaje, la madurez como persona, la facilidad de organización y de uso de recursos materiales (el uso del tiempo, bibliotecas, libros), la capacidad de interacción entre personas y de adaptación con el nuevo estilo de estudios, etc.. En segundo lugar, los del ambiente y los del apoyo familiar, los cambios en esta etapa tienen dimensiones efectivas respecto a los recursos materiales pues con frecuencia el estudiante ha de trasladarse de ciudad, y afectivas ya que el apoyo familiar refuerza la madurez emocional con que el joven tiene que enfrentarse a las nuevas circunstancias. Y en tercer lugar están los recursos socio-culturales, la diiversidad de costumbres sociales, la relación solidaria o no con los compañeros, la relación con la institución respecto a la orientación y seguimiento en los estudios y en la adaptación a la nueva institución.

A lo largo del año académico del CIU –de asistencia obligatoria- se procura que los alumnos mejoren paulatinamente su rendimiento académico, y en caso de que no logren un progreso adecuado, generalmente son los mismos estudiantes los que deciden retirarse de la USB en busca de estudios que se adapten mejor a sus circunstancias y cualidades personales. Interesa resaltar ahora dos rasgos de esta transición: el grado de satisfacción del estudiante con la carrera elegida es proporcional a la adaptación con la inclinación profesional, con las capacidades personales y también con las circunstancias de cada estudiante; y la motivación cultural hacia esa carrera es un potente impulso de aprendizaje. Por esto, los alumnos del CIU tienen oportunidad de conocer los planes de estudio de las carreras que ofrece la universidad, e incluso pueden solicitar un cambio a la carrera que satisfaga mejor sus inclinaciones.

El profesorado de matemáticas del CIU que capta las dificultades de los estudiantes en esta etapa de transición, se cuestiona acerca de las nuevas perspectivas de su labor educativa, de su capacidad para facilitar la transición (Guzmán, Hodgson et al. 1998; RSME en prensa), y procuran elegir la metodología que logre motivar, rellenar lagunas de conocimiento matemático, adaptar el lenguaje al de los estudiantes -sin ir en detrimento de la calidad de la matemàtica-, enseñar a trabajar en matemáticas desarrollando hábitos de pensamiento, y ayudar a adquirir hábitos de estudio (de silencio, de esfuerzo y de constancia).

Actualmente, como en el caso del CIU, muchos profesores universitarios utilizan actividades de aplicación y de modelización en clases de matemáticas como parte de la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje y del proceso de evaluación de los progresos de sus alumnos (Niss, Blum et al. 2007). El grado de satisfacción de profesores y alumnos parece que va en aumento con estas propuestas prácticas de matemáticas. Los profesores de matemáticas del CIU están conscientes de los retos que tienen por delante y procuran asumir su rol de formadores durante el curso de nivelación.

2.2. Modelización en matemáticas

La experiencia de modelización durante el curso de matemáticas I del CIU está en correspondencia con la metodología activa y basada en aplicaciones práctica, que se implementa cada vez más en las aulas universitarias. El uso de la modelización y de las aplicaciones en las clases de matemáticas -gestionadas adecuadamente-, pueden ser beneficiosas tanto al proceso de enseñanza y aprendizaje como al proceso de evaluación de los progresos de los alumnos. Esta metodología puede aumentar la motivación de los profesores y de los alumnos, puede promover actitudes positivas y estudiantes comprometidos con su propio aprendizaje, así como sucedió al utilizarla con los estudiantes del CIU 2007-08.

Para los profesores y estudiantes del CIU, las prácticas de modelización constituyeron una experiencia de búsqueda de una mejor formación matemática y una mejor formación profesional porque se promovieron competencias necesarias para la vida cotidiana en los jóvenes que no se habían planteado durante los cursos de bachillerato. Por ello, el contenido de los artículos sobre prácticas de modelización son de interés para este marco teórico, concretamente los de Aravena y Giménez (2002), Gómez y Fortuny (2002), Campos, García et al. (2002) y Gavilán (2002). Estos artículos presentan estudios de investigación y/o innovación con jóvenes universitarios que ingresaron a carreras científicas y, especialmente, a las ingenierías, por lo que constituyen experiencias en parte análogas y en parte diferentes a las de los estudiantes del curso de nivelación CIU que desean ingresar a carreras científicas o a ingenierías (cfr. 1.2.), y en esas experiencias se destacan los beneficios de las prácticas sobre el aprendizaje de los estudiantes. Algunas de las competencias a desarrollar en los estudiantes del CIU a través del Proyecto de Modelización fueron las siguientes: la capacidad para resolver problemas reales con actitud crítica, una comprensión más amplia de la aplicabilidad de los conceptos de matemáticas, el desarrollo de la creatividad y el descubrimiento en las prácticas de matemáticas, la capacidad para integrar los conceptos matemáticos con los de otras áreas del conocimiento científico y la capacidad para apreciar el poder de la matemática. Aravena y Caamaño (2007) destacan la importancia actual de esta forma de trabajar en clase de matemáticas:

> En los últimos años, las investigaciones en Didáctica de la matemática dan cuenta que uno de los temas que han concitado la atención es el diseño de actividades basado en la modelización de situaciones reales y de las ciencias, transformándose en una vía prometedora tanto para enfrentar las dificultades y deficiencias como para elevar la calidad de los aprendizajes matemáticos. En diferentes países y condiciones, su inclusión en el currículo ha permitido desarrollar capacidades de tipo cognitivas, metacognitivas y de formación transversal que ayudan a comprender el rol de la matemática en una sociedad moderna (2007, p. 8).

En la inclusión este tipo de actividades en el currículo de matemáticas del CIU, influyeron varias razones: el argumento formativo porque se trata de medios adecuados para conseguir un desarrollo de competencias generales en los estudiantes que permitieran estimular el interés por el descubrimiento, la creatividad y la confianza en sus propias actividades y recursos; el argumento de competencia crítica porque la sociedad está cada vez más matematizada y presenta modelos matemáticos en casi todas las actividades, competencia entendida como la capacidad de reconocer, comprender, analizar y evaluar las actividades cotidianas a través de la matemática, y que facilitará la formación de ciudadanos activos en la resolución de problemas relevantes en la sociedad; el argumento de una visión integrada de las matemáticas porque facilita el desarrollo de una visión interdisciplinar de las matemáticas; la contribución a que los alumnos adquieran destrezas e interioricen conceptos y métodos matemáticos que aumenten la motivación hacia el estudio de la matemática porque se aprenden ideas significativas a través de situaciones interesantes que pueden ser exploradas, es decir, porque los temas de aprendizaje adquieren mayor consistencia cuando se enseñan en contextos de aplicación; y el argumento de utilidad matemática porque su objetivo es preparar a los alumnos a usar la matemática en la resolución de problemas de la vida real y de otras áreas.

Antes de seguir avanzando, conviene ponerse de acuerdo acerca del significado y terminología propia de este tema, ya que esto es necesario para entender de qué se trata. A partir de la bibliografía revisada, los profesores Gómez y Fortuny (2002) elaboraron una síntesis de los conceptos clave de este tema, y afirman que la matematización es la transformación mental en términos matemáticos de situaciones de la realidad, es un proceso de abstracción mental -esquema mental- como paso previo a la modelización escrita. La modelización es el arte de aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real y la interpretación es el conjunto de habilidades que permiten plasmar el modelo en forma escrita. El modelo (matemático) es la terna (A, M, f) donde A representa un conjunto de objetos del mundo real, M un conjunto de expresiones matemáticas y f una correspondencia entre A y M.

Así pues, la modelización consiste en presentar un problema real y a continuación formularlo en términos matemáticos. El siguiente organigrama muestra el proceso de modelización:

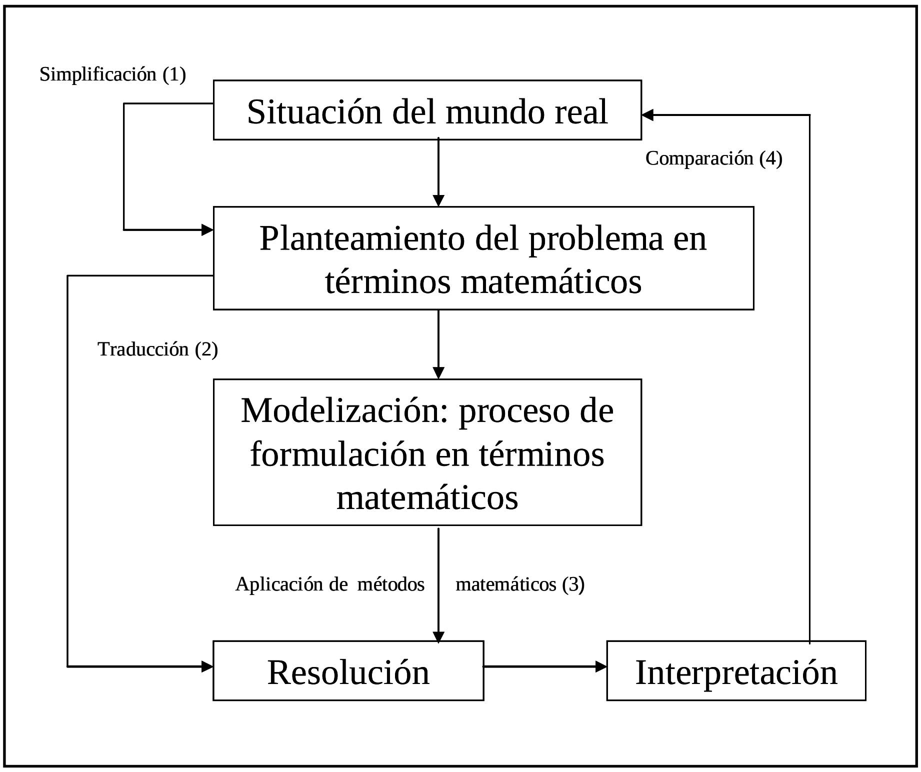


Figura 2.1. Organigrama del proceso de modelización. Gómez y Fortuny (2002, p. 9)

El libro de texto utilizado en el curso de matemáticas del CIU propone la práctica de modelado con ecuaciones descrita y analizada respectivamente en los apartados 1.4. y 4 de este trabajo de investigación. Las siguientes palabras del texto exponen la finalidad de los profesores Stewart, Redlin y Watson al reeditar su libro de Precálculo (2006) y ayudan a entender la importancia de esas prácticas de modelización:

> Al escribir esta quinta edición nuestro objetivo era mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de instrucción. El cambio principal de esta edición es un mayor énfasis en el modelado y las aplicaciones (…)
> Muchos de los cambios de esta edición tuvieron origen en nuestra propia experiencia en la enseñanza, pero lo más importante es que hemos escuchado con mucha atención a quienes han usado este libro, entre ellos, a muchos de nuestros colegas más cercanos.
> ENFOQUE EN EL MODELADO. El tema del modelado se usa en todo el libro para uniformar y aclarar las diversas aplicaciones de los conceptos preliminares del cálculo. En esas secciones y subsecciones de modelado realizamos un esfuerzo especial para aclarar el proceso esencial de pasar los enunciados de los problemas al lenguaje matemático.
> Modelos de construcción. Hay numerosos problemas de aplicación en los cuales se proporciona al alumno un modelo para que lo analice. Pero el material sobre modelado, donde a los estudiantes se les pide que construyan modelos matemáticos está organizado en secciones y subsecciones muy bien definidas. (…) (2006, pp. xix-xxi).

En la sección 1.6 del libro, titulada Modelado mediante ecuaciones, se lee, “muchos problemas de las ciencias, economía, finanzas, medicina y otros numerosos campos se pueden traducir a problemas de álgebra. Ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil”. Por esto, en esa sección se usan las ecuaciones (algebraicas) como modelos matemáticos para resolver problemas de la vida cotidiana y aparecen ejemplos muy variados -resueltos o propuestos- de temas cotidianos asociados con conceptos matemáticos (que ahora se indican entre paréntesis): el costo del alquiler de un automóvil (función afín), las inversiones de dinero (porcentajes), las dimensiones de un póster (área y perímetro), medida de un terreno para la construcción (área de un rectángulo), la altura de un edificio (triángulos semejantes), las mezclas y concentraciones (cantidades y proporciones), el tiempo necesario para hacer un trabajo (trabajo por unidad de tiempo), problema de distancia-velocidad-tiempo (distancia = rapidez x tiempo), la energía que gasta un ave para volar (energía usada = energía por unidad de longitud x longitud de vuelo), entre otros. Estos ejemplos susceptibles de ser modelizados muestran la relación de las variadas situaciones cotidianas con las matemáticas curriculares.

La práctica de modelización Proyecto para un Descubrimiento gestionada por los profesores del CIU (cfr. 1.4.) tiene similitudes con las innovaciones que se han realizado en otras universidades e instituciones educativas. Respecto a la experiencia didáctica de modelización se puede destacar que fue una práctica de trabajo colaborativo realizada por 48 estudiantes con diversas debilidades en el área de matemática, en este caso, consistió de un Proyecto de Modelización con ecuaciones algebraicas (idéntico para los 16 grupos de alumnos) cuya duración fue de diez días consecutivos. La duración del Proyecto permitió a los estudiantes del CIU pasar por diversas fases de aprendizaje. La evaluación procuró ser principalmente formativa, tanto durante el proceso de ejecución del proyecto y elaboración escrita del informe final, como con la evaluación del informe. Durante el tiempo de realización hasta llegar al informe escrito, se percibió en los estudiantes un proceso de maduración de las ideas, de reflexión hasta la redacción y de compromiso académico. Entre los aspectos evaluados se incluyó la forma de argumentar en matemáticas, la precisión en el lenguaje matemático y la de comunicar por escrito las propias ideas.

Aravena y Giménez (2002) describen una experiencia análoga de trabajo por proyectos en grupo con duración de cinco meses desde una situación del mundo real relacionada con la especialidad de la ingeniería de esos estudiantes y susceptible de ser formulada en términos de una función polinómica. Se llevó a cabo en una asignatura de álgebra lineal de la carrera de ingeniería de la Universidad Católica de Chile, cuyos estudiantes tenían una formación matemática débil (como los del CIU). Se distinguieron varias fases en la ejecución del proyecto: una inicial de elección del tema y de reconocimiento de las principales preguntas, una de elaboración en la que los estudiantes se enfrentaron a la creación del modelo y la mejora del mismo, una de avance del desarrollo de la actividad, introduciendo las modificaciones y diseñando el informe, y una última fase de comunicación mediante la exposición pública por grupos. Estos autores afirman que la evaluación de proyectos es una tarea compleja que no es posible realizarla mediante una prueba de tiempo fijo porque hay que tener en cuenta diversas capacidades del estudiante como son: el conocimiento y desarrollo técnico, las habilidades de investigación y organización, las habilidades de comunicación y la transferencia de la aplicación, entre otras. Aravena y Caamaño (2007) en una práctica de secundaria (equivalente a 3º ESO en la comuna de Talca, Chile) con un contexto diferente a la anterior, diseñaron una propuesta integradora (de las matemáticas con otras áreas de conocimiento) algebraico-geométrica-analítica en el tema de las funciones, porque fenómenos del mundo real y de las ciencias se modelan por funciones. Las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes pudieron ser regulados a través de las actividades de aula. También durante la práctica del CIU los estudiantes se percataron de dificultades y obstáculos en el aprendizaje de matemáticas (de ecuaciones).

Otra experiencia análoga a la de modelización del CIU es la de Gómez y Fortuny (2002) quienes estudiaron la posibilidad de implementar técnicas de modelización a través del diseño de unidades didácticas y de trabajos por proyectos en el primer curso de escuelas universitarias de ingeniería. Estos profesores explican cómo llevaron a la práctica la unidad didáctica de álgebra denominada Modelización de un sistema de resortes, cuyo contenido curricular de física era la Ley de Hooke y de matemáticas eran las matrices y las operaciones con éstas. Los alumnos podían aprender la necesidad y existencia del cálculo matricial (conceptos matemáticos) como modelo matemático de situaciones profesionales futuras (utilidad de las matemáticas). Los proyectos propuestos a los grupos de estudiantes fueron tomados de problemas reales con contenido de álgebra lineal y tenían una componente de investigación que las unidades didácticas no podían cubrir; aspectos de esta componente son: el trabajo fuera del aula, la búsqueda de información, la consulta de libros de textos etc.. El Proyecto para un Descubrimiento del CIU también tuvo esta componente investigativa.

La propuesta didáctica de Campos, García et al. (2002) fue la de un proyecto práctico utilizando la última tecnología (programas matemáticos) con la finalidad de proporcionar a los futuros profesionales (ingenieros) una formación en contenidos básicos y aptitudes que les proporcionaran una autonomía formativa que necesitaría más adelante. Ese proyecto se basó en el planteamiento y resolución de ejercicios tipo práctico que simulaban situaciones cercanas a las de un ingeniero, frecuentes en su futuro profesional. La aplicación de esta experiencia en dos contextos universitarios diversos -en una asignatura optativa (de segundo curso) denominada “Matemáticas asistidas por ordenador” en la escuela politécnica de Valencia (España), y otra en la

Universidad Paulista de Sao Paulo (Brasil)-, puede interpretarse en el sentido de que las actividades de modelización son un recurso didáctico potente, independientemente del contexto de aplicación. Se repartieron los proyectos disponibles (planteados como problemas abiertos) entre los grupos de dos o tres de estudiantes (según el aspecto de ingeniería de su preferencia), los alumnos recibieron dirección y apoyo de profesores cooperadores (de otros departamentos, quienes cooperaron con el de la asignatura). Este esquema de docencia se llama de colaboración interdisciplinar. Hacemos la observación de que la autonomía en el trabajo de equipo fue una característica del aprendizaje que se promovió en la práctica del CIU.

Respecto a los beneficios en los alumnos del CIU que utilizaron este modo de aprender se pueden destacar los siguientes: les ayudó a la persistencia en un aprendizaje activo (los estudiantes analizaron, exploraron, argumentaron y debatieron entre ellos); fue un modo de practicar habilidades sociales (trabajo en equipo en un clima de confianza); contribuyó al desarrollo de la autonomía del alumno respecto al propio aprendizaje, y favoreció la capacidad de enfrentarse con confianza a problemas nuevos; se trató de prácticas de resolución de problemas y de reflexión sobre el concepto matemático de ecuaciones algebraicas (poco utilizadas por estos alumnos en secundaria); promovió la motivación hacia el aprendizaje (anteriormente no habían trabajado de esa forma en las clases de matemáticas) y sirvió de estímulo hacia las habilidades cognitivas y reflexivas. Los autores de los artículos de modelización a los que se ha hecho referencia en este apartado de modelización, refieren los beneficios en los alumnos que participaron las prácticas gestionadas por ellos.

Aravena y Giménez (2002) refieren cómo su práctica contribuyó al desarrollo de la autonomía del alumno respecto al propio aprendizaje, ayudó al desarrollo de la motivación (estos factores son los que más afectan al desarrollo de capacidades de orden superior), estimuló las capacidades cognitivas y reflexivas (especialmente en alumnos con poca iniciativa, creatividad, espíritu crítico y persistencia ante situaciones no rutinarias), y además, favoreció la capacidad del estudiante para enfrentarse, con flexibilidad y confianza, a problemas nuevos y complejos en un mundo en permanente cambio, también reflejó la integración del contenido aprendido. Los mismos autores en otra experiencia (2007) reflejan beneficios en los estudiantes de secundaria, destacan que se afianzó en ellos la importancia de la utilización de conceptos y procedimientos del tema de funciones, además encontraron sentido a los conceptos, algoritmos y procesos algebraicos, y notaron una mejoría en la comunicación y argumentación de los alumnos sobre la práctica, sin temor a equivocarse (aspecto clave para aprender matemáticas). Estos beneficios también estaban previstos en el Proyecto para un Descubrimiento.

Los profesores Gómez y Fortuny (2002) refieren tres tipos de beneficios de las prácticas de modelización: los heurísticos o el conjunto de habilidades para solucionar problemas matemáticos que nos involucran, los epistemológicos o el utilitarismo matemático con connotaciones matemática-realidad y los cognitivos o producciones de conocimientos matemáticos. Campos, García et al. (2002) hablan de los beneficios desde otra perspectiva, los alumnos: recibieron una formación matemática transversal porque asociaron conceptos de otras áreas y los manipularon para encontrar soluciones originales de problemas reales, esto contribuyó a su formación integral tanto respecto a los contenidos temáticos como al desarrollo de otras habilidades relacionadas con su futura profesión; reforzaron las habilidades de comunicación y de trabajo en equipo cuando presentaron y defendieron oralmente las propias ideas; y además, estuvieron motivados porque la contextualización de la práctica les resultó atractiva. Estos beneficios manifiestan cómo esa práctica fomentó habilidades plenamente coincidentes con las que se valoran positivamente desde el mundo profesional, algunas preguntas de la práctica promovieron la reflexión necesaria para su futuro laboral y se hizo compatible la enseñanza de las nuevas tecnologías informáticas con la enseñanza teórica (saliendo favorecidas esas dos áreas de aprendizaje).

El desarrollo del proyecto de modelización también influyó en el profesorado del CIU porque le permitió detectar aspectos en los que el estudiante tiene más o menos dificultad para aprender el tema e incluso darse cuenta de las ayudas necesarias, donde centrarlas y cómo han de ser, de manera que el estudiante estuviera mejor informado de lo que sabe hacer y de donde tiene dificultades. Idea que también reflejan Aravena y Giménez (2002) en su experiencia didáctica de modelización. Gómez y Fortuny (2002) recogen unas ideas sobre el papel del profesorado y sobre la mejora de la calidad docente en esta metodología de aprendizaje, lo hacen con las siguientes palabras:

> A nivel de aportaciones en la mejora de la calidad docente, se consigue la visión del modelaje como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana y como metodología que proporciona las producciones matemáticas necesarias para el currículo del ingeniero. Estos argumentos avalan la necesidad de incluir la metodología de la modelización matemática como herramienta docente en los currículos académicos (…) Estos conocimientos se adquieren de una manera más profunda y cualitativa que de la manera tradicional (rutinaria), pues se presentan en el contexto usual de la especialidad (Ibíd., 2002, p. 20).

El aspecto de colaboración durante el desarrollo de la práctica Proyecto para un Descubrimiento entre los alumnos del CIU hace referencia a “otro concepto de modelo” que también se utiliza en educación matemática (Gavilán 2002). Ahora, la terminología modelo se refiere a la metodología didáctica que consiste en resolver problemas en una clase cooperativa, es decir, el modelo se refiere a la forma de trabajar de los estudiantes del CIU (no es el que se ha tomado como concepto de modelo en este trabajo de investigación, cfr. Fig. 2.1.). Gavilán (2002) señala beneficios de este modo de trabajar de sus alumnos (de tercero de ESO) que también se percibieron en los estudiantes del CIU. Los estudiantes asumieron un papel protagonista respecto a su propio aprendizaje y a la gestión del trabajo en grupo, así pues, los miembros del grupo se responsabilizaron también del aprendizaje de los demás; los alumnos permanecieron implicados en un aprendizaje activo (analizando, explorando, debatiendo, etc); pusieron en práctica habilidades sociales, trabajando en un clima de confianza; quedó patente que prepararse para enseñar algo a alguien (explicaciones entre alumnos) impulsa a reorganizar los propios conocimientos, y que además, el alumno que escucha recibe la explicación que necesita en el momento que la necesita y con un lenguaje familiar. Los estudiantes sigue un modelo de aprendizaje no lineal, que la autora llama “aprendizaje en espiral”, en el que se repiten distintas secuencias de estrategias en un avance progresivo; este modelo se complementa con el llamado “dientes de sierra”, donde se producen avances y retrocesos continuos en una línea de progreso hacia la solución del problema; la secuencia de avance más común en los grupos de trabajo se denomina de “ochos sucesivos” pues planifican, ejecutan, evalúan local y globalmente y vuelven a planificar… tomando caminos de aprendizaje, a veces divergentes y a veces coincidentes.

Así pues, el soporte de este marco teórico permitió avanzar en los siguientes capítulos, el dedicado al diseño metodológico y el del análisis de los datos.

Capítulo 3

DISEÑO METODOLÓGICO

El diseño metodológico de esta investigación se ha inspirado en la modalidad de la investigación evaluativa aunque no pueda catalogarse como tal porque no cumple con los aspectos mínimos requeridos para ello. Se tomó la decisión de seguir algunas pautas de este tipo de investigación para el desarrollo del actual estudio, ya que se pretende analizar (valorar) cómo influye la práctica innovadora Proyecto para un Descubrimiento del primer curso de matemáticas del programa CIU en el momento en el que el alumno deja el bachillerato y entra en la universidad.

Teniendo en cuenta que una de las razones de la investigación evaluativa consiste en justificar (o no) productos educativos, esta modalidad resulta apta para este estudio, ya que se basa en una experiencia y unos documentos escritos antes del desarrollo sistemático de la investigación. También se puede afirmar que tiene sentido el análisis evaluativo de diversos aspectos de este curso porque se trata de una experiencia innovadora de un programa con pocos años de funcionamiento. Cualquier evaluación puede utilizarse con un objetivo formativo (como mejorar un programa) o un objetivo sumativo (decidir si ese programa ha de mantenerse). Este trabajo se adapta a los que tienen un objetivo formativo porque se trata de valorar un Proyecto de Descubrimiento en un curso de nivelación para considerar los beneficios o inconvenientes de la experiencia.

Como se adelantaba en el párrafo anterior, dicen McMillan y Schumacher (2005, pp. 558-561) que la investigación evaluativa en el ámbito educativo por una parte se propone determinar el valor de un programa, un producto o un procedimiento, y por otra se realiza basada en ciertas razones como la planificación, la mejora y la justificación (o no) de procedimientos, programas y/o productos. El significado de esta modalidad de investigación se refleja en las siguientes palabras:

> La evaluación es la aplicación de las habilidades de investigación para determinar el valor de una práctica educativa. La investigación evaluativa ayuda a tomar decisiones en un lugar(es) determinado(s) e incrementa el conocimiento científico disponible sobre una práctica específica (…). Las decisiones son aquéllas que planifican y mejoran una práctica o que justifican (o no) la adopción extendida de una práctica. Un evaluador es a la vez un investigador y un educador cuyo trabajo resulta esencial para el funcionamiento global de las organizaciones educativas (Ibid, 558).

Debido a la cantidad de datos recogidos que se manejan durante experiencias de ámbitos científicos y sociales existe una tendencia creciente a utilizar esos datos en investigaciones de diversas áreas. Así pues, partiendo de esa realidad y para este caso se decidió utilizar documentos escritos con anterioridad al comienzo sistemático de esta investigación. Por otra parte, el estudio se desarrolla en el ámbito del paradigma de investigación cualitativa, predominando la explicación e interpretación de los diversos fenómenos educativos. Los documentos escritos que forman el cuerpo de datos, se analizan en su contenido para dar respuesta a las preguntas y a los objetivos de la investigación. El tratamiento de los datos fue principalmente descriptivo e interpretativo. En esta investigación no se diseñaron instrumentos de recogida de datos porque se utilizaron los datos recogidos antes del inicio sistemático de la misma. Teniendo esto en cuenta, a continuación se explican qué datos se manejaron, para después pasar a analizarlos.

3.1. Datos

Los datos recogidos antes del inicio sistemático de este estudio, por una parte, hizo que las preguntas y los objetivos de la investigación se adaptaran a ellos, y por otra, añadieron algunas limitaciones al trabajo final del master, sin embargo, a partir de ahora se podrá observar que estos datos responderán a los objetivos planteados. A continuación se hace una descripción de los datos de partida:

- *Informe escrito*, realizado en grupo, del Proyecto para un Descubrimiento, titulado Modelización mediante ecuaciones a través de las épocas (Stewart, Redlin et al. 2006, p. 75). El enunciado del proyecto puede consultarse en el capítulo 1, fig. 1.1. Los informes se numeraron del 1 al 16 para facilitar la organización de los datos[1].
- *Evaluación de cada uno de esos informes*, utilizando un instrumento con un formato particular, que se adaptó del usado en las tareas de la carpeta de los estudiantes de bachillerato internacional (IBO 2005, pp. 20-21). La plantilla de corrección puede verse en el Anexo, fig. 1.2. Los instrumentos de evaluación de los informes, se numeraron igualmente del 1 al 16 para facilitar la organización de los datos (a cada informe y su correspondiente instrumento de evaluación se les asignó la misma numeración).
- *Apartado de uso del libro de la encuesta de percepción* estudiantil sobre el proceso de enseñanza con estrategias didácticas para el desarrollo de las IM (cuestionario de valoración de los Proyectos), rellenado por los estudiantes al final del curso.
- Además, se cuenta con el *programa de matemática I* del CIU y con algunas *notas de campo* tomadas durante el curso por el docente.

[1] Cuando se haga referencia a uno de ellos se nombrará de las siguientes maneras: para el caso del informe realizado por el grupo 7 se dirá, “Informe 7” o “inf. 7”.

3.2. Instrumentos para el análisis de datos

A lo largo del proceso del diseño metodológico hubo una serie de ajustes en los instrumentos para el análisis debido a que en esta investigación se utilizaron datos recogidos previamente. Para el análisis de los datos según los objetivos previstos se diseñaron diversos instrumentos en forma de cuadros o parrillas, en este apartado se explica el proceso de elaboración de los mismos. La tabla 1 indica la relación entre los objetivos específicos del trabajo de investigación, los datos que ofrecen esa información y los instrumentos de análisis de datos con los que se evidencia cada objetivo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	DATOS QUE OFECEN ESA INFORMACIÓN	INSTRUMENTO DE ANÁLISIS QUE EVIDENCIA EL OBJETIVO
1. Describir cómo pusieron en práctica un proceso de modelización en el contexto de un Proyecto para un Descubrimiento	- Informe de los alumnos - Informe de evaluación en la plantilla usada por el profesor	- Instrumentos 1 y 1(5)
2. Describir cómo pusieron en práctica diversas habilidades básicas para el estudio y aprendizaje.	- Informe de los alumnos - Informe de evaluación en la plantilla usada por el profesor - Encuesta de valoración	- Instrumento 2 - Instrumento 3
3. Interpretar las dificultades y errores respecto a las habilidades básicas y al proceso de modelización	- Conclusiones del análisis hecho en los objetivos n. 1 y 2	

Tabla 1. Relación entre objetivos, datos disponibles e instrumentos de análisis

Se eligieron tres hábitos de estudio/aprendizaje para analizarlos, son los siguientes*: la argumentación en matemáticas, la precisión en el lenguaje matemático* y *el uso del libro de texto.*

Teniendo en cuenta que no se elaboraron instrumentos para la recogida de datos, se ha puesto especial atención en explicar cómo ha sido el desarrollo o proceso de diseño de los instrumentos para la organización de los datos. A continuación se presenta cada uno de los instrumentos diseñados y para cada uno de ellos se definen las categorías de análisis correspondientes.

Instrumento 1.

Este instrumento se elaboró (cfr. Fig. 3.1.) recogiendo los pasos para plantear ecuaciones que modelen situaciones formuladas en palabras, del texto del curso de Stewart, Redlin y Watson (2006). Estos autores hablan de cuatro pasos (que se usaron para categorizar los datos), que son:

- Paso 1. *Identificar la variable.*
- Paso 2. *Expresar todas las incógnitas en términos de la variable.*
- Paso 3. *Plantear el modelo.*
- Paso 4. *Resolver la ecuación y comprobar la respuesta.*

El cuarto paso, en el instrumento 1 se prefirió desdoblar en dos pasos de organización de los datos: resolución de la ecuación (paso 4) y comprobación de la respuesta (paso 5). Así pues, el proceso de modelización quedó estructurado en cinco pasos o categorías con los que se organizaron los datos que hacían referencia al primer objetivo específico (cfr. Fig. 3.1.).

Este instrumento se rellenó con los datos encontrados entre las respuestas a las preguntas núm. 1, 2 y 4 del informe de los estudiantes, así como con los datos del informe de evaluación en la plantilla usada por el profesor. Específicamente, de la plantilla de evaluación se utilizaron los datos de los apartados núm. 3, 4, 5 y 6, referidos a *comunicación, procedimientos, resultados obtenidos y, representaciones gráficas y visualización* respectivamente. En la fig. 3.1., los números que están en las diversas casillas (categorías) hacen referencia al vaciado de los datos, es decir, al número de informe (cfr. 4.1).

Los cuadros grises de este instrumento (cfr. Fig. 3.1.) indican las preguntas cuyas respuestas no se valoraron con esas categorías. Y los números que aparecen en la parrilla se refieren al vaciado de los datos (cfr. 4.1.).

	PROCESO DE	PREGUNTA DEL PROYECTO														
	MODELIZACIÓN	Pregunta 1				Pregunta 2				Pregunta 3	Pregunta 4				Pregunta 5	Pregunta 6
		1	2	3	4	1	2	3	4							
	Sí identifica la variable	5	6	7	8	5		7	8							
		9	10	11	12	9	10	11	12							
Paso 1		13	14	15	16	13	14	15	16							
	No identifica la variable						**6**						**7**			
		1	2	3	4	1	2	3	4		1	2	3	4		
	Sí expresa las incognitas	5	6	7	8	5		7	8		5	6				
	en términos de la variable	9	10	11	12	9	10	11	12		9	10	11	12		
Paso 2		13	14	15	**16**	13	14	15	16		13	14	15	16		
	No expresa las incognitas						**6**						**7**	**8**		
	en términos de la variable															
		1	2	3	4	1	2	3	4		1	2	3	4		
	Sí plantea el modelo mediante	5	6	7	8	5	**6**	7	8		5	6	7	8		
	una ecuación algebraica	9	10	11	12	9	10	11	12		9	10	11	12		
Paso 3			14	15	16	13		15	16		13	14	15	16		
	No plantea el modelo mediante															
	una ecuación algebraica															
		13					14									
		1	2	3	4	1	2	3	4		1	2	3	4		
	Sí resuelve la ecuación	5	6	7	8	5	6	7	8		5	6	7	8		
	correctamente	9	10	11	12	9	10	11	12		9	10	11	12		
Paso 4			14	15	16	13		15	16		13	14	15	16		
	No resuelve la ecuación															
	correctamente															
		13					**14**									
		1	2	3	4	1	2	3	4					4		
	Sí comprueba el resultado	5	6	7	8	5	6	7	8							
		9	10	11	12	9	10	11						12		
Paso 5				15	16	13		15	16			**14**	15			
											1	2	3			
	No comprueba el resultado										5	6	7	8		
									12		9	10	11			
		13	**14**				**14**				13			16		

Figura 3.1. Instrumento 1. Proceso de modelización. Los números que aparecen en la parrilla se refieren al vaciado de los datos (cfr. 4.1).

Como ejemplos de las respuestas de las preguntas núm. 1 y núm. 2 del informe, se pueden leer las elaboradas por dos grupos de estudiantes (cfr. Fig. 3.2. y 3.3. del Anexo).

Instrumentos 1(5).

El enunciado de la pregunta núm. 5 (cfr. Fig. 1.1 del apartado 1.4.) propone que se inicie la resolución del problema con soluciones particulares, de manera luego los estudiantes podían seguir razonando hasta generalizar. Así pues, con las respuestas a este problema se puede analizar el proceso de generalización implícito en el proceso de modelización desde una óptica distinta a la de las preguntas núm. 1, 2 y 4.

Como las posibles respuestas de la pregunta núm. 5 no se ajustaban a las categorías del instrumento 1 (los pasos para plantear ecuaciones), se decidió buscar otras categorías y elaborar un instrumento distinto (cfr. Fig. 3.4.) que permitiera conocer el *uso de las estrategias utilizadas y el nivel de generalización* realizado por los estudiantes en un problema que se podía resolver a través del ensayo y error (vía aritmética). Entonces, las categorías utilizadas quedaron así:

- *Uso de una estrategia.*
- *Número de soluciones.*
- *Nivel de generalización.*
- *Comprobación.*

Así pues, el proceso de generalización de la pregunta núm. 5 quedó estructurado en estas categorías con las que se organizaron los datos de las respuestas a esa pregunta y que hacían referencia al primer objetivo específico (cfr. 1.3).

El instrumento 1(5) se rellenó con los datos encontrados en el informe de los estudiantes; y con los datos del informe de evaluación. Específicamente, del informe del profesor, se utilizaron los de los apartados núm. 3, 4, 5 y 6, referidos a *comunicación, procedimientos, resultados obtenidos* y, *representaciones gráficas y visualización* respectivamente. Como solución creativa y visual, puede verse en la fig. 3.5 del Anexo que es parte de la respuesta de la pregunta núm. 5 del informe 11.

Instrumento 2.

Se elaboró para detectar el nivel de logro de dos habilidades básicas para el estudio/aprendizaje en matemáticas, la argumentación matemática y la precisión en el lenguaje matemático. Permitió organizar los datos que hacían referencia al segundo objetivo específico. Este instrumento se muestra en la figura 3.7.

La categorización de los diversos niveles de logro de esas habilidades están inspirados en las destrezas básicas que se evalúan en las tareas del portafolio del alumno de bachillerato internacional (IBO 2005, pp. 6-11). Después de hacer la transcripción de las respuestas correspondientes, los niveles de logro detectados respecto a esas dos habilidades básicas quedaron estructurados respectivamente en 4 y 3 categorías, las cuales aparecen definidas en la figura 3.6. y permitieron organizar los datos que hacían referencia al segundo objetivo específico (cfr. 1.3).

La parte de argumentación del instrumento 2 se rellenó con los datos encontrados en las respuestas a las preguntas núm. 3 y 6 del informe de los estudiantes, así como con los datos del informe de evaluación en la plantilla usada por el profesor, específicamente, se tomaron los datos de los apartados núm. 3, 4, 5 y 6 de esta plantilla, que corresponden a comunicación, a procedimientos, a resultados obtenidos y a las de representaciones gráficas y visualización.

En cambio, para la parte de precisión en el lenguaje, se buscaron los datos entre las respuestas de las preguntas núm.1, 2, 4 y 5 del informe, así como con los datos del informe de evaluación en la plantilla usada por el profesor. Específicamente se tomaron los datos de los apartados núm. 2 y 6 de esta plantilla, que corresponden al *uso del lenguaje matemático* y a las *representaciones gráficas y visualización*.

	PROCESO DE RESOLUCIÓN / MODELIZACIÓN				
		Pregunta 5			
		1	2		4
	Implícita	5	**6**	**7**	
		9	10		12
			14		**16**
	Explícita, pero no sistemática				8
Uso de estrategia					
				3	
	Explícita, sistemática y creativa				
				11	
		13		**15**	
			2		
	Sólo una solución particular			7	8
			10	11	12
Número de soluciones				15	16
		1		3	4
	Más de una solución particular	5	6		
		9			
		13	14		
		1	2		4
	No se intuye, ni se generaliza	5	6	7	8
		9	10	11	12
			14	15	16
				3	
	Se intenta /intuye generalización				
Nivel de generalización					
	Se generaliza				
		13			
		1	2	3	4
	Sí comprueba la unicidad de las soluciones	5	6	7	8
		9	10	11	12
Comprobación			14	15	16
	No comprueba la unicidad de las soluciones				
		13			

Figura 3.4. Instrumento 1(5). Proceso de resolución/generalización. Los números que aparecen en la parrilla se refieren al vaciado de los datos (cfr. 4.1).

HABILIDADES BÁSICAS		
	1	Proporciona explicaciones inadecuadas
Argumentación matemática	2	Proporciona pocas explicaciones y no desarrolla las ideas
	3	Proporciona explicaciones, pero son poco claras
	4	Proporciona explicaciones completas y claras
Precisión en el lenguaje	1	Utiliza terminología inadecuada
matemático	2	Utiliza terminología adecuada, con alguna omisión
	3	Utiliza terminología adecuada en todo momento

Figura 3.6. Niveles de logro de las habilidades de estudio/aprendizaje. Inspiradas en las destrezas básicas que se evalúan en las tareas de la carpeta del alumno de bachillerato internacional.

Los cuadros grises de este instrumento (cfr. Fig. 3.7.) indican las preguntas cuyas respuestas no se valoraron con esas categorías. Y los números que aparecen en la parrilla se refieren al vaciado de los datos (cfr. 4.1).

HABILIDADES		PREGUNTA DEL PROYECTO																							
BÁSICAS		Pregunta 1				Pregunta 2				Pregunta 3				Pregunta 4				Pregunta 5				Pregunta 6			
																						1			
	1																							**7**	
																							10		
													4												
	2									5	6	7													
										9	10	11													
Argumentación																									16
matemática										1	2	3												3	
	3												8										6		8
																						9		11	12
																								15	
																							2		4
	4																					5			
													12												
										13	14	15	16									13	**14**		
				3														1			**4**				
	1		6	7	8											**7**				**7**	8				
																			10						
		13					**14**														16				
		1												**1**											
Precisión en el lenguaje	2					5											8	**5**							
matemático									12					9	10										
				15				15	16								16								
			2		4	1	2	3	4						2	3	4		2	3					
	3	5					6	7	8					5	6				6						
		9	10	11	12	9	10	11								11	12	9		11	12				
			14		16	13								13	14	15		**13**	14	15					

Figura 3.7. Instrumento 2. Nivel de logro de dos habilidades básicas de estudio/aprendizaje. Los números que aparecen en la parrilla se refieren al vaciado de los datos (cfr. 4.2). Los números de la segunda columna se refieren a las categorías (cfr. Fig. 3.6).

A continuación se muestra con algunas frases de los estudiantes las categorías y los niveles de categorización, según sus respuestas[2]. Veámoslo en cada una de las habilidades.

Argumentación matemática (preguntas núm. 3 y 6):

- Nivel 1. *Proporciona explicaciones inadecuadas*:

  "nuestra vidas están incrementadas de ecuaciones, no necesariamente algebraicas, al momento de tomar decisiones tenemos distintas incognitas" (núm. 6); "cada situación podemos plantearla como una ecuación, por ejemplo, tener un buen trabajo es igual a estudiar y tener ganas de superarse" (núm. 6).

[2] Las transcripciones son textuales y entre paréntesis se indicará la pregunta a la que corresponde esa respuesta.

- Nivel 2. *Proporciona pocas explicaciones y no desarrolla las ideas*:

  "cuando encontraban la respuesta correcta se sentian satisfechos y exitosos" (núm. 3); "el planteamiento y resolución de problemas contribuia a una respuesta en búsqueda de eso desconocido" (núm. 3); "(…) parece ser planteado por gusto ya que no especifican la cantidad inicial sino la final de forma que sacar la cantidad sea un reto" (núm. 3); "en la rutina diaria, aunque no nos demos cuenta, usamos innumerables ecuaciones, debido a que en nuestra cotidianidad utilizamos números y cantidades" (núm. 6).

- Nivel 3. *Proporciona explicaciones, pero son poco claras*:

  "(…) no por gusto, sino por necesidad, tenian la costumbre de construir pirámides y templos y para eso necesitaban medidas exactas (…)" (núm. 3); "utilizaban ecuaciones para resolver problemas de su vida cotidiana (…) y hallaban su respuesta planteando modelos de ecuaciones" (núm. 3); "Las ecuaciones que afectan nuestra vida diaria son infinitas. Por ejemplo, cuando me quiero ir de vacaciones debo saber un promedio de cuanto dinero gastaré en comida, alojamiento y entretenimiento, para así llevar la cantidad necesaria o un poco más" (núm. 6); "En efecto, la mayoría de los objetos electrónicos dependen de complejos algoritmos para su funcionamiento. Es decir, dependemos de ecuaciones para usar una calculadora, una computadora, microondas, entre otros" (núm. 6).

- Nivel 4. *Proporciona explicaciones completas y claras*:

  "(…) Por lo anteriormente expuesto podemos concluir que los egipcios y babilonios no resolvían problemas solo por gusto. No obstante con el paso de los años fueron sobresaliendo grandes matemáticos. Estos sí planteaban y resolvían problemas prácticos por gusto y por deseo de esclarecer las grandes incógnitas del algebra que surgían en esa época" (núm. 3); "Las ecuaciones nos brindan la grandioza habilidad para calcular escenarios futuros en diferentes areas, esto con el fin de saber el comportamiento de las variables, y ver si nuestras acciones están bien encaminadas al logro de una meta. Las utilidades de las ecuaciones y matematicas en general en nuestro mundo son tan amplias que logra influir en el avance positivo en areas tan importantes como la medicina (..), desde la forma de la botella está matemáticamente calculada para rendir la materia prima con que son elaboradas" (núm. 6).

Precisión en el lenguaje matemático (preguntas núm. 1, 2, 4 y 5):

- Nivel 1. *Utiliza terminología inadecuada*:

  Errores al elegir la ecuación que modela el problema; confunden la variable y los datos en función de la variable, a pesar de que la variable estaba definida (visualmente) en el enunciado del problema; usan de manera equivocada el signo de igualdad.

  "un onceavo del resultado, (1/11).x = x/11", en lugar de, (1/11).(x + x/7) (núm. 1); "x/3 + x/4 = 2" en lugar de, x + x/3 + x/4 = 2 (núm. 2); "3 pollos = 1 moneda; 84 pollos = 28 monedas" (núm. 5).

- Nivel 2. *Utiliza terminología adecuada, con alguna omisión*:

  En las respuestas se omiten las unidades, algún símbolo de división mal situado en la ecuación (núm.1); al hacer la comprobación usan aproximaciones de dos cifras significativas sin indicarlo, dando lugar a expresiones "1,99 = 2" (núm. 2); en las respuestas se omiten las unidades (núm. 4); usa variables x, y, z sin definirlas previamente (núm.5).

- Nivel 3. *Utiliza terminología adecuada en todo momento*:

  Esto no implica que las respuestas sean completas y correctas. Por ejemplo, véase que la pregunta núm. 4., incluye en este nivel a la mitad de los informes (cfr. datos del instrumento 1(5) y 4.2).

Instrumento 3.

Otro hábito de estudio/aprendizaje que se analizó fue la *valoración del libro de texto* del curso durante la ejecución del proyecto. Para ello, se utilizaron las respuestas de los alumnos a una parte de la “encuesta de percepción estudiantil sobre el proceso de enseñanza con estrategias didácticas para el desarrollo de las inteligencias múltiples (IM)”, concretamente, el apartado llamado “opinión sobre el libro del curso”. Esto quiere decir, que se valora el libro de texto desde la perspectiva del estudiante y que las cuestiones planteadas (cfr. Fig. 3.8) a los alumnos sobre su apreciación del libro de texto del curso fueron valoradas con un puntaje del 1 al 5 en la forma de escala de Likert.

Valoración del libro de texto

	NA	1	2	3	4	5	PROMEDIO
F		1		3	19	21	4,34
C				3	12	29	4,59
A			2	3	12	27	4,45
S		1	3	7	18	15	3,98
D			6	12	24	2	3,50
I		1		4	10	29	4,50

NA	No aplica
1	Deficiente
5	Excelente

F	**F**acilidad de lectura y comprensión del contenido del libro
C	Existe **C**orrespondencia entre programa y libro del curso
A	**A**decuada presentación y desarrollo de los contenidos del libro
S	Los **S**ignificados de los objetos matemáticos del libro, corresponden a los que tenías previamente
D	Asígnale un puntaje al grado de **D**ificultad del contenido del libro del curso
I	¿Qué grado de **I**mportancia tiene para ti el uso de este libro en el curso?

Figura 3.8. Instrumento 3. Valoración del libro de texto desde la perspectiva de los alumnos.

El prólogo del libro de texto que se utilizó en las matemáticas I del CIU recomienda a los estudiantes lo que sigue:

> Este libro fue escrito a fin de que lo use como guía para conocer a fondo las matemáticas previas al cálculo. En seguida se presentan algunas recomendaciones para ayudarle a aprovechar al máximo este curso.
>
> Primero debe leer la sección adecuada del texto antes de intentar resolver los problemas de la tarea. Leer un texto de matemáticas es muy diferente a leer una novela, el periódico o cualquier otro libro. Podría encontrar que debe leer una vez tras otra un párrafo para poder entenderlo. Ponga especial atención a los ejemplos y resuélvalos usted mismo con lápiz y papel mientras los va leyendo. De esta manera será capaz de resolver la tarea con más rapidez y comprensión.
>
> No cometa el error de tratar de memorizar cada regla o hecho que se encuentre. Las matemáticas no son memorización. Las matemáticas son el arte de resolver problemas, no sólo una colección de datos. Para conocer a fondo el tema, debe resolver problemas, muchos problemas. Resuelva tantos como pueda. Asegúrese de escribir la solución en una forma lógica, paso por paso. No deseche un problema si no puede resolverlo en ese momento. Trate de entenderlo mejor, vuelva a leerlo con todo cuidado y relaciónelo con lo que ya aprendió de su maestro y de los ejemplos del libro. Luche con él hasta que lo resuelva. Hecho esto unas cuantas veces, empezará a entender de lo que realmente se tratan las matemáticas. (…) (Stewart, Redlin et al. 2006, pp. xxv).

Para responder al tercer objetivo específico, *interpretar las dificultades/errores* que tuvieron los estudiantes en el proyecto, tanto respecto al proceso de modelización como al de las habilidades básicas, se llevo a cabo una reflexión a partir de las descripciones que se obtuvieron como respuesta a los dos primeros objetivos específicos (cfr. 4.1. y 4.2.) y a partir de las reflexiones teóricas recogidas en el capítulo 2.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE LOS DATOS

El objetivo de este trabajo de investigación es analizar cómo influye la práctica innovadora Proyecto para un Descubrimiento -descrita en el capítulo inicial de este trabajo, en el apartado 1.4.- del primer curso de matemáticas del programa CIU en el momento en el que el alumno deja el bachillerato y entra en la universidad, es decir, se desea conocer si esta práctica permite a los estudiantes una adecuada asimilación de un proceso de modelización matemática y si les ayuda a mejorar en algunas habilidades básicas del estudio/aprendizaje en matemáticas. Para desarrollar este análisis se seguirán los objetivos específicos de la investigación (cfr. 1.3.) que se recuerdan a continuación:

1. Describir cómo los estudiantes pusieron en práctica un proceso de modelización en el contexto del Proyecto para un Descubrimiento.
2. Describir cómo los estudiantes pusieron en práctica diversas habilidades consideradas básicas para el estudio/aprendizaje de matemáticas.
3. Interpretar las dificultades/errores de los estudiantes respecto a las habilidades básicas y respecto al proceso de modelización.

El enunciado del proyecto pretende: centrar el interés del alumno desde el inicio presentando elementos de la historia de las matemáticas, ayudar a reflexionar acerca de las matemáticas en la vida cotidiana, y también permitir a los jóvenes "hacer matemáticas"[3] en clase. Sin embargo, no se disponen de evidencias que permitan afirmar que el Proyecto de Modelización consiga efectivamente estos tres pretensiones en los estudiantes. El enunciado comienza con las siguientes palabras[4]:

> *Las ecuaciones se han utilizado para resolver problemas a través de toda la historia registrada, en todas las civilizaciones. A continuación presentaremos un problema de Babilonia (alrededor de 2000 años antes de nuestra era).* (…).
>
> *En el antiguo Egipto, el saber cómo resolver problemas planteados en palabras era un secreto altamente valorado. El Papiro de Rhind (alrededor de 1850 años antes de nuestra era) contiene muchos de dichos problemas. El problema 32 en el papiro dice:* (…).
>
> *El matemático griego Diofanto (alrededor de 250 antes de nuestra era) escribió el libro Arithmetica, el cual contiene muchos enunciados de problemas y ecuaciones. El matemático indio Bhaskara (siglo XII antes de nuestra era) y el matemático chino Chang Ch'iu-Chien (siglo VI antes de nuestra era) también estudiaron y escribieron sobre ecuaciones. Naturalmente, las ecuaciones siguen siendo importantes en la actualidad.* (Stewart, Redlin et al. 2006, p. 75).

[3] Concepto clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.
[4] Debido a la relevancia de esta práctica para este trabajo de investigación, cuando aparezcan partes del texto del enunciado del Proyecto se utilizará letra cursiva.

4.1. Descripción del proceso de modelización

Para describir cómo los estudiantes pusieron en práctica un proceso de modelización en el contexto del Proyecto para un Descubrimiento se tuvo en cuenta lo que se había explicado detalladamente en las clases de teoría del curso. El proceso de modelización (mediante ecuaciones lineales) que se presenta en la sección 1.6. titulada Modelado mediante ecuaciones del capítulo 1 del libro de texto del curso (Stewart, Redlin et al. 2006, pp. 58-75) ayudó a definir las categorías correspondientes. En el apartado 3.2. se explicó con detalle esa categorización.

En las parrillas de organización de datos de las figuras 3.1. y 3.4. se observan los aciertos y errores obtenidos en los informes, los cuales ayudarán a describir lo que sucedió en cada uno de los pasos del proceso (escogido) de modelización. A continuación, a través de las respuestas del informe de los alumnos y con la ayuda del contenido de las figuras 3.1. y 3.4., se describe lo que se ha caracterizado como proceso de modelización. Se utilizan las respuestas a las preguntas núm. 1, 2, 4 y 5. La descripción que se presenta ahora se apoya en los informes de los alumnos, los cuales aparecen referenciados con el número de informe donde corresponda.

<u>El enunciado de la pregunta núm. 1</u> dice así:

Resuelvan el problema babilonio y demuestren que su respuesta es correcta.

> (Problema babilonio) *Encontré una piedra, pero no la pesé. Después añadí un séptimo y luego un onceavo del resultado; pesé todo y encontré que pesaba una mina. ¿Cuál era el peso original de la piedra?*
>
> *La respuesta dada en la tablilla es de* $\frac{2}{3}$ *mina, 8 sheqel, y* $22\frac{1}{2}$ *se,*
>
> *donde 1 mina = 60 sheqel y 1 sheqel = 180 se.*

Como se observa en la primera columna de la parrilla en la figura 3.1. y analizando detalladamente la respuesta de cada informe se puede decir que:

- Pasos 1 y 2. *Identificación de la variable y expresar las incógnitas en términos de la variable*: se realizaron correctamente en todos los casos.
- Pasos 3 y 4. *Plantear el modelo mediante una ecuación algebraica y resolver la ecuación*. En algún caso faltó explicitar los procedimientos seguidos (inf. 7); en un caso se explican los procedimientos al final de la resolución del problema (inf. 9), en este informe hubiera sido preferible ir explicando en la medida que se resolvía el problema. Únicamente el informe 13 los realizó incorrectamente:

  "un onceavo del resultado", lo expresan mediante la ecuación "(1/11).x =x/11", en lugar de utilizar la expresión adecuada, "(1/11).(x + x/7)".
- Paso 5. *Comprobar el resultado*: se realiza incorrectamente en los informes 13 (cfr. Fig. 4.1. del Anexo) y en el 14. A a continuación, se explicitarán diversos fenómenos detectados en otros informes respecto a la comprobación de los resultados en este problema.

Respecto a la *comprobación de los resultados* (paso 5), se pueden destacar los siguientes fenómenos (peculiaridades o dificultades) en el aprendizaje:

- Se realiza bien el procedimiento de la comprobación respecto al resultado de la tablilla, pero la respuesta explícita es incoherente porque con ella podrían haberse dado cuenta de su error en los pasos 3 y 4, plantear la ecuación y resolverla (inf. 13). Puede observarse en la figura 4.1. del Anexo.
- Se utiliza otro procedimiento de comprobación del resultado respecto al resultado de la tablilla: sustituyen este resultado de la tablilla en la ecuación (modelo) que se había planteado en el paso 3 y chequearon bien que se cumpliera esa relación, sin embargo faltó orden y secuenciación en la respuesta, faltó explicar qué se hacía y por qué (inf. 16).
- Falta explicitar que están comprobando la respuesta obtenida en el paso 4, resolver la ecuación, respecto al resultado de la tablilla (inf. 6, 7 y 12); falta desarrollar explícitamente los cálculos de la respuesta que los babilonios habían dado al problema en la tablilla (inf. 11); después de comprobar el resultado, falta explicitar la respuesta del problema (inf. 5, 8, 9); en algún caso, se explicita verbalmente cada procedimiento operativo (inf. 3) de la comprobación.

<u>El enunciado de la pregunta núm. 2</u> dice así:

Resuelvan el problema egipcio y demuestren que su respuesta es correcta.

> (Problema egipcio) *Una cantidad, su tercio, su cuarto, sumados juntos se convierten en 2. ¿Cuál es la cantidad?*
>
> *La respuesta en la notación egipcia es* $\bar{1}+\bar{4}+\overline{76}$, *donde la barra indica el "recíproco", como nuestra notación* 4^{-1}.

Como se observa en la segunda columna de la parrilla de la figura 3.1. y analizando detalladamente la respuesta de cada informe, se puede decir que:

- Pasos 1 y 2. *Identificación de la variable y expresar las incógnitas en términos de la variable.* Se realizaron correctamente en todos los casos excepto en uno, en el que se omiten los dos primeros pasos y directamente se escribe la ecuación que modela el problema, es decir, el proceso de modelización comienza con el paso 3 (inf. 6).
- Pasos 3, 4 y 5. *Plantear el modelo mediante una ecuación algebraica, resolver la ecuación y comprobar el resultado.* Se realizaron correctamente en todos los casos excepto en uno (inf. 14); en algún caso faltó explicitar los procedimientos seguidos (inf. 7); y en un caso se explican los procedimientos al final de la resolución del problema (inf. 9), en este informe hubiera sido preferible ir explicando en la medida que se resolvía el problema.
- Paso 5. *Comprobar el resultado*, se realiza incorrectamente en dos casos (inf. 12 y 14). A continuación se explicitarán diversos fenómenos detectados en otros informes respecto a la comprobación en este problema.

Respecto a la *comprobación de los resultados* (paso 5) se pueden destacar los siguientes fenómenos (peculiaridades o dificultades) en el aprendizaje:

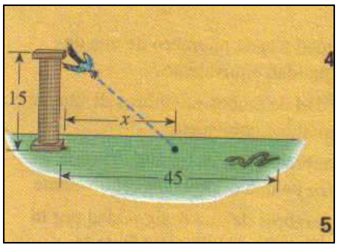
- Se realiza bien el procedimiento de la comprobación respecto al resultado obtenido en el paso 4 y la ecuación del paso 3, pero se hace sin utilizar el resultado dado en notación egipcia que aparece en el enunciado (inf. 12); se realiza bien el procedimiento de la comprobación respecto al resultado obtenido en el paso 4 y la ecuación del paso 3 (que era incorrecta), pero se hace sin utilizar el resultado en notación egipcia que aparece en el enunciado (inf. 14).

- En un caso se utilizan dos procedimientos de comprobación del resultado (inf.1): uno respecto a la respuesta dada en el enunciado en notación egipcia y otro en base al resultado obtenido por los estudiantes.
- Falta desarrollar explícitamente los cálculos de la respuesta dada en notación egipcia (inf. 11 y 15); falta explicitar que están comprobando la respuesta obtenida en el paso 4 respecto al resultado dado en notación egipcia (inf. 6, 7 y 10); después de comprobar el resultado falta explicitar la respuesta del problema (inf. 8); en algún caso se explicita verbalmente cada procedimiento operativo (inf. 3) de la comprobación (cfr. Fig. 4.2. del Anexo).

<u>El enunciado de la pregunta núm. 4</u> dice así:

Resuelva este problema de la India del siglo XII antes de nuestra era.

> *Un pavo real está posado en lo alto de una columna de 15 codos y la guarida de una serpiente está al pie de la columna. El pavo va a la serpiente cuando ésta se encuentra a 45 codos de su madriguera, y se lanza en forma oblicua sobre ella cuando se desliza hacia su agujero. ¿A cuántos codos de la madriguera de la serpiente se encuentran, suponiendo que cada uno se desplaza una distancia igual?*



Como se observa en la cuarta columna de la parrilla en la figura 3.1. y analizando detalladamente la respuesta de cada informe, se puede decir que:

- Paso 1. *Identificación de la variable.* Se elimina porque la variable aparece identificada de forma gráfica en el enunciado; en un caso, además de hacer el dibujo identificando equivocadamente la variable, también se realiza de forma equivocada el paso 2, *expresar las demás incógnitas en términos de la variable* (inf. 7 y fig. 4.9. del Anexo).
- Paso 2. *Expresar incorrectamente las incógnitas en función de la variable.* En un caso, se expresa equivocadamente "el desplazamiento de la serpiente y del pavo real", pero se realizan bien los pasos 3 y 4 (inf. 8 y fig. 4.3. del Anexo).
- Pasos 3 y 4. *Plantear el modelo mediante una ecuación algebraica y resolver la ecuación.* Falta dar algún razonamiento explícito de la selección de la ecuación algebraica (teorema de Pitágoras) que modela el problema en el paso 3 (inf. 6); en algún caso, se explicita (también visualmente) cada procedimiento operativo (inf. 3); se explican los procedimientos al final de la resolución del problema (inf. 9), en este informe hubiera sido preferible ir explicando en la medida que se resolvía el problema.
- Paso 5. *Comprobar el resultado.* Se omite en casi todos los informes.

Además, respecto a la *comprobación de los resultados* (paso 5) se pueden destacar los siguientes fenómenos (peculiaridades o dificultades) en el aprendizaje:

- Después de resolver la ecuación, falta explicitar la respuesta del problema (inf. 16).
- En un caso, al terminar el problema se hacen un interesante comentario reflexivo:

  "Ya que el ave y la serpiente se desplazan a una misma velocidad, entonces ambos recorren la misma distancia. Lo que nos sirve de referencia al momento de analizar el problema" (inf. 14).
- Se hace una generalización incorrecta al utilizar un resultado aproximado durante la comprobación (inf. 12 y fig. 4.4. del Anexo).

<u>El enunciado de la pregunta núm. 5</u> dice así:

Considere este problema de la China del siglo VI.

> Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos juntos valen una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagan un total de 100, se pueden comprar con 100 monedas?
>
> *Este problema tiene varias respuestas. Aplique el ensayo y error para poder encontrar por lo menos una respuesta. ¿Es un problema práctico o un acertijo? Escriba un ensayo corto para sustentar su opinión.*

Como se observa en la última columna del instrumento 1(5), (cfr. fig. 3.4.) y analizando detalladamente la respuesta de cada informe se puede decir:

- *Usa una estrategia* que es *explícita, sistemática y creativa.* Lo hacen así en el 25% de los casos (inf. 3, 11, 13 y 15); en un caso, es *explícita pero no sistemática* (inf. 8); y en los demás, la estrategia está *implícita*. En un informe se lee:

  "Para solucionar este problema utilizamos el ensayo y error y desde el principio notamos que la solucion se asercaba más si se comenzaba por los pollos debido a que estos incrementos muy poco el dinero pero elevan la cantidad de especies que debía ser 100 de manera que el resto podría ser completado entre gallos y gallinas que completarian la insuficiencia de monedas con pocas especies, cosa que ubiece resultado más dificil de haber comenzado por los gallos o las gallinas" (inf. 8).

  La figura 4.5. del Anexo recoge una respuesta (inf. 3) donde se observa la utilización de una estrategia aritmética buena en la que falta sistematización para comunicar los procedimientos realizados; y, las figuras 4.6. y 4.7. del Anexo recogen otras respuestas (inf. 11 y 13) en las que se observa, una estrategia aritmética interesante, y otra creativa y visual respectivamente.
- *Número de soluciones particulares.* El número de soluciones posibles para este problema eran tres: la mitad de las respuestas presentan sólo una solución particular y la otra mitad más de una (dos o tres).
- *Nivel de generalización*. En la mayoría de los casos *ni se intuye, ni se realiza*; en un caso *se intenta/intuye* la generalización (inf. 3 y fig. 4.5. del Anexo); y sólo en uno *se generaliza* (inf. 13 y fig. 4.7. del Anexo).
- *Comprueba la unicidad de las soluciones.* Solo en un caso las comprueban (inf. 13 y fig. 4.7. del Anexo).

4.2. Descripción de las habilidades básicas

De acuerdo a lo que se lee en el programa del curso de matemáticas I del CIU, entre los objetivos claves del curso están: “capacitar a los estudiantes en la lectura y comprensión del libro texto, en la resolución de problemas, en la comunicación escrita y verbal de sus ideas matemáticas, en descubrir, razonar y demostrar hechos matemáticos, puros o aplicados”. Así pues, el curso buscaba explícitamente que los estudiantes reforzaran o adquiriesen algunos hábitos básicos de estudio/aprendizaje. En este trabajo se analizan tres de ellos: la argumentación, la precisión en el lenguaje y el uso del libro de texto.

Entonces, para describir cómo los estudiantes pusieron en práctica diversas habilidades consideradas básicas para el estudio/aprendizaje de matemáticas en el contexto del Proyecto para un Descubrimiento se tuvo en cuenta, por una parte los insuficientes hábitos de lecto-escritura de los estudiantes del curso (según indicaban los parámetros del examen de admisión a la universidad), y por otra parte la importancia dada durante el curso a la adecuada comunicación de los propios argumentos/procedimientos matemáticos (para corregir posibles errores) (cfr. Apartado 1.2).

En la parrilla de organización de datos de la figura 3.7. (cfr. Instrumento 2 en el apartado 3.2.) se observan los niveles de *argumentación matemática* y *de precisión en el lenguaje matemático* de cada informe. Ahora bien, para entender cómo hay que interpretar los datos de la parrilla conviene recordar las categorías de análisis (cfr. fig. 3.6. en el apartado 3.2). En la figura 3.8. aparecen organizados los datos referentes a la percepción de los estudiantes sobre *el uso del libro de texto* (cfr. Instrumento 3 del apartado 3.2.).

A partir de los datos de la figura 3.7. se puede afirmar con respecto a la argumentación matemática que las respuestas a las preguntas núm. 3 y 6 de los informes presentan variedad de niveles de argumentación. Concretamente, en la pregunta núm. 3, poco más del 50% de las respuestas están entre los niveles 3 y 4 (los más altos); en cambio, en la pregunta núm. 6, el 70% de las respuestas están entre los niveles 3 y 4. De igual manera, se puede decir que las respuestas a las preguntas núm. 1, 2, 4 y 5 de los informes presentan diversos niveles de precisión en el lenguaje matemático. En un porcentaje aproximado de 50% de los casos, se utiliza terminología adecuada en todo momento. Sin embargo, en casi un 40% de las respuestas a la pregunta núm. 5 se utiliza terminología inadecuada. A continuación, se explica cómo los estudiantes pusieron en práctica diversas habilidades consideradas básicas para el estudio/aprendizaje.

En primer lugar se describe lo que se observó en las preguntas núm. 3 y 6 respecto a las categorías escogidas para analizar la *argumentación matemática*. Esta descripción se apoya en los informes de los alumnos los cuales aparecerán referenciados con el correspondiente número de informe.

El enunciado de la tercera pregunta dice así:

> *Los egipcios y los babilonios antiguos utilizaban ecuaciones para resolver problemas prácticos. Por los problemas que se han dado aquí, ¿cree usted que habrán disfrutado de plantear y resolver problemas sólo por gusto?*

Con los datos de la tercera columna del instrumento 2 (cfr. Fig. 3.7.) y analizando detalladamente la transcripción de las respuestas de cada informe, a continuación se describe lo que sucedió con las respuestas en cada uno de los niveles en que se categorizaron:

- Nivel 2*. Proporciona pocas explicaciones y no desarrolla las ideas.* Las respuestas incluidas en este nivel reflejan que los estudiantes han de aprender a desarrollar las ideas expuestas, a ejemplificar con situaciones del comercio o la construcción y, en esta pregunta concreta, a aprender a explicar las finalidades (gusto y necesidad) que tenían al plantear problemas. Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

  "(…) el hacerlo contribuia a una respuesta en búsqueda de eso desconocido, asimismo solventar actividades presentes en su vida cotidiana." (inf. 5).

  "(…) tenían la necesidad de utilizar ecuaciones para resolver los distintos problemas que se les presentaban a diario y luego al pasar el tiempo se hicieron más importantes al momento de construir edificaciones, etc." (inf. 9).

  "Si creo que disfrutaron planteando problemas, ya que esto les facilitaba su vida diaria, resolviendo las incógnitas que se les presentaban y no era por gusto sino por necesidad." (inf. 6).

  "Consideramos que (…) si disfrutaban al realizar los ejercicios matemáticos. Creemos que ellos también los hacían por curiosidad ya que era un reto para ellos resolverlos y cuando encontraban la respuesta correcta se sentían satisfechos y exitosos, también consideramos que realizaban los ejercicios por necesidad es decir necesitaban encontrarle respuesta a alguna cosa o acto en su vida" (inf. 4).

- Nivel 3*. Proporciona explicaciones, pero son poco claras.* Las respuestas incluidas en este nivel tienen ejemplos con los que se explican las finalidades (gusto y necesidad) que los egipcios y babilonios tenían al plantear los problemas, pero las explicaciones son poco claras. Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

  "(…) Estos problemas de sus vidas cotidianas eran necesarios resolverlos y hallaban su respuesta planteando modelos de ecuaciones." (inf. 2).

  "A lo largo de la historia el ser humano ha observado el ambiente que lo rodea siempre con una incognita (…) más que por gusto diriamos que por curiosidad, curiosidad por saber las cosas, para ello por supuesto deberian dedicar tiempo y lo harian con gusto, es decir, con entusiasmo no en el sentido de que solo lo hacian por realizar. Este tipo de ecuaciones requeria de tiempo y esfuerzo pero sobre todo curiosidad por aquello que se desconoce y que se quiere conocer y que en muchos casos nos puede ser muy útil." (inf. 3).

  "El resolver problemas matemáticos para esos pueblos era considerado un secreto altamente valorado, por lo cual es absurdo pensar que los resolvian por gusto, las pirámides, esculturas y demás edificaciones creadas por estas culturas son una muestra real de que eran muy abanzados en el conocimiento arquitectónico (lo que hoy en día requiere ciertos conocimientos en el area de las matemáticas)." (inf. 8).

- Nivel 4*. Proporciona explicaciones completas y claras.* Las respuestas incluidas en este nivel tienen explicaciones completas y claras que, además, son ejemplificadas con referencia a las finalidades (gusto y necesidad) que los egipcios y babilonios tenían al plantear problemas; la calidad de la expresión escrita sea mejorable. Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

  "Los problemas planteados son situaciones factibles que pueden ocurrir en la vida cotidiana sin importar la época. En el caso específico de los babilonios y egipcios deducimos que planteaban y resolvían estos problemas con la finalidad de satisfacer necesidades que bien pudieran ser del tipo comercial o cotidianos. Por lo anteriormente expuesto podemos concluir que los egipcios y babilonios no resolvían problemas solo por gusto. No obstante con el pasar de los años fueron sobresaliendo grandes matemáticos. Estos sí planteaban y resolvían problemas prácticos por gusto y por deseo de esclarecer grandes incógnitas del algebra que surgían en esa época." (inf. 13).

"(…) Como por ejemplo, para la construcción de pirámides egipcias era necesario resolver ecuaciones para saber cuanto material sería utilizado o también para sacar cuentas de dinero. Es por esto que era y es indispensable el uso de ecuaciones, ya que estas se encuentran en la mayor parte de nuestra vida diaria (…)." (inf. 12).

"(…) le permitía a los individuos facilitar su vida y además, aumentar la presición de los cálculos realizados dejando espacio para la comprobación. Sin la presencia de estas ecuaciones no hubiese sido posible la construcción de los imponentes monumentos (…)." (inf. 15).

El enunciado de la sexta pregunta dice así:

Escriba un ensayo corto para explicar cuántas ecuaciones afectan su propia vida en el mundo actual.

Con los datos de la sexta columna del instrumento 2 (cfr. Fig. 3.7.) y analizando detalladamente la transcripción de las respuestas de cada informe, a continuación se describe lo que sucedió con las respuestas en cada uno de los niveles en que se categorizaron:

- Nivel 1. *Proporciona explicaciones inadecuadas.* Las respuestas incluidas en este nivel reflejan que los estudiantes tienen que mejorar la comprensión del concepto de incógnita y ecuación (dan explicaciones inadecuadas) y así comunicar ideas coherentes, porque falta precisión en el lenguaje matemático utilizado, presentan ejemplos inadecuados (algunos no son propiamente relaciones matemáticas). Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

  "Nuestras vidas constantemente estan incrementadas de ecuaciones no necesariamente algebraicas, al momento de tomar decisiones tenemos distintas incognitas, que se determinan a través de la cantidad de opciones que tenemos para escoger, en total aún no sabemos cuantas incognitas afectan nuestra vida actual sin embargo, tenemos ejemplos de algunos de ellos que son: El momento en que decidimos estudiar o no para un examen, cuando elegimos el tipo de ropa que vamos a usar, las opciones de carrera a elegir, en que universidad realmente queremos estudiar, ir a una marcha o no, acudir a las asambleas o ir a clases, (…). Al despejar la incognita es decir, la decisión que tomaremos, afectara nuestra vida quizas de forma negativa o por el contrario positiva y el resultado se obtendrá de acuerdo a nuestra incognita que seria la consecuencia." (inf. 1).

  "Muchos de los momentos de nuestra vida pueden ser expresados a través de ecuaciones que resolvemos muchas veces sin saber que son ecuaciones de forma rapida y sencilla. Como por ejemplo: Clases + Periodo de tiempo en el autobús + almuerzo = dia en la USB, Comer + Dormir + Ir al baño = necesidades diarias, Titulo + trabajo + familia = metas cumplidas." (inf. 7).

- Nivel 2. *Proporciona pocas explicaciones y no desarrolla las ideas.* La única respuesta clasificada en esta subcategoría desarrolla poco las ideas (se pide un ensayo y la respuesta es un párrafo), falta precisión en las ideas y en los ejemplos (se presentan de una manera general). Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

  "En la rutina diaria, aunque no nos demos cuenta, usamos innumerables ecuaciones, debido a que en nuestra cotidianidad utilizamos números y cantidades, tanto para cocinar como para ir de compras tenemos en cuenta los números." (inf. 16).

- Nivel 3. *Proporciona explicaciones, pero son poco claras.* Las respuestas incluidas en este nivel reflejan que se proporcionan ejemplos adecuados y al desarrollar las ideas falta claridad. Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

"En nuestra vida son diversas las ocasiones en las que utilizamos las ecuaciones, al momento de hacer un compra, al momento de organizar nuestro tiempo, al momento de calcular una distancia, etc. Por ejemplo: Al ir a una bodega a comprar una galleta que cuesta 600 bs y al pagar con un billete de de 1000 bs, podríamos usar una ecuación sencilla para calcular el vuelto $600 + x = 1000$, entonces $x = 400$." (inf. 6).

"Ya sabemos que las ecuaciones se originaron desde hace muchos años por necesidad del ser humano, es decir, que constantemente en nuestra vida aplicamos muchas ecuaciones sin darnos cuenta, por ejemplo cuando vamos a comprar comida como pollo, podemos pedir 1 kilo y medio y la variable sería cuanto vale el kilo de pollo. (…)." (inf. 9).

"En nuestra vida diaria estamos rodeados de matemática, estamos rodeados de ecuaciones con tan solo caminar se producen muchas fuerzas y forman ecuaciones, la resistencia del suelo al caminar, la gravedad, etc. También podemos decir que todos los aparatos electronicos funcionan en forma de ecuaciones por ejemplo el codigo binario en las computadoras, pero las ecuaciones nos afectan las podemos utilizar para resolver una incognita o con el solo hecho de que estas nos rodean ya nos afectan positiva o negativamente, si tomamos la ecuación de la fuerza de la gravedad es una fuerza que nos afecta y cuya ecuación también es importante, un químico cuando desea saber la concentración de un liquido, un empresario que invierte su dinero y desea saber cuales son los intereses y muchas otras ocaciones en las cuales las ecuaciones nos afectan y podriamos utilizarlas para resolver muchas incognitas siempre que estemos concientes de que deben regir un orden y hacerse de forma adecuada." (inf. 3).

"En nuestra cotidianidad las ecuaciones intervienen de infinidad de maneras en cosas tan comunes como ir al mercado, resivir un vuelto de un pasaje, cada calculo minucioso de hasta el ultimo grano de cemento y arena utilizado en cada una de nuestras viviendas. (…) cualquier situación u objeto que se desee como por ejemplo, si salgo de mi casa rumbo a la playa con una velocidad de 80 Km/h y la playa esta a una distancia de 400 Km. Cuanto tardaría en llegar? $x = 400/80 = 5$ horas, tiempo $(x) =$ distancia / (Km/h), y asi como este miles de ejemplos y formulas para cientos de situaciones."(inf. 8).

"Existe una considerable cantidad de ecuaciones que afectan nuestro día, las usamos para calcular cuanto tiempo nos lleva hacer diferentes cosas, o para saber cuanto jugo preparar (concentraciones), etc. Para llenar las cosas con agua, como la lavadora, se llena en 5 ½ minutos, pero si le ponemos la manguera se llena en 3 ½. También para el dinero que tenemos en el banco; para calcular cuanto cemento debemos batir; cuantos metros de piedra comprar. Las ecuaciones estan a nuestro alrededor, las usamos hasta sin saberlo pero solo hay que prestar atención y veremos que las ecuaciones facilitan nuestra vida." (inf. 11).

- Nivel 4. *Proporciona explicaciones completas y claras.* A pesar de que la calidad de la expresión escrita sea mejorable, las respuestas incluidas en este nivel incluyen explicaciones que son ejemplificadas, y además, son claras y completas. Se transcribe la respuesta completa de uno de los informes, en ella se percibe el esfuerzo por redactar "un ensayo" según pide el enunciado de la pregunta (inf. 14). Algunas respuestas pueden leerse a continuación:

"(…) entre esas podemos nombrar, cuando queremos ahorrar para comprarnos alguna cosa como un carro o una casa, etc, primero debemos saber cuál es el valor monetario del producto o la cosa que queremos comprar, cuáles son nuestros ingresos de dinero y cuánto dinero nos faltaría o sobraría para comprar ese producto, la última pregunta viene siendo la variable, también aplicamos ecuaciones cuando queremos invertir en algún negocio, ya que calculamos a través de ecuaciones cuál puede ser nuestra ganancia. (…)." (inf. 4).

"En nuestra propia vida en el mundo actual afectan muchas ecuaciones que nos ayudan a conocer el dinero que invertimos en nuestros gastos entre estos: el alquiler del apartamento, seguros de vidas, gastos alimenticios entre otros. Las ecuaciones también nos ayudan a calcular distancias que recorremos, el tiempo que empleamos en nuestras actividades y hasta para resolver problemas de matemática. Las ecuaciones las utilizamos en todos los momentos de nuestra vida diaria desde situaciones simples hasta complejas, logrando asi ayudarnos a encontrar la soluciones de nuestros problemas diarios. Lo esencial para hallar soluciones es saber como plantear las ecuaciones." (inf. 2).

"(…) Resulta imposible establecer un número exacto de las ecuaciones que afectan nuestra vida ya que estas vienen acompañadas por el tipo de vida que llevemos. (…)." (inf. 13).

> "Las matematicas no son tan precarias en la vida y en el mundo, hay veces que están más presentes de lo que creemos. Si la humanidad no hubiese inventado las matematicas probablemente no tendríamos casas donde vivir, carreteras que recorrer, y obviamente autos que conducir, puesto que para todo esto dependen los numeros, calculos de areas, pesos y volumenes representado por numeros medidas, las cuales son determinadas mediante ecuaciones. El planteamiento de las ecuaciones, y por ende las ecuaciones mismas, nacen del modelamiento de situaciones que pueden reflejar el comportamiento de una variable o problemas que se encuentran en nuestra vida diaria. Como por ejemplo:-¿Cuánto dinero debo ahorrar para financiar vacaciones?,-¿Cómo elegir la mejor alternativa para invertir? Las ecuaciones nos brindan la grandioza habilidad para calcular escenarios futuros en diferentes areas, esto con el fin de saber el comportamiento de las variables, y ver si nuestras acciones están bien encaminadas al logro de una meta. Las utilidades de las ecuaciones y matematicas en general en nuestro mundo son tan amplias que logra influir en el avance positivo en areas tan importantes como la medicina. Y creo son esos avances tan sorprendentes que muchas veces perdemos de vista. Los pequeños detalles de nuestra vida que también están influenciados por esta area y sus ecuaciones, desde la forma de la botella está matemáticamente calculada para rendir la materia prima con que son elaboradas. Y asi una gran cantidad de cosa que vemos alrededor, tenemos que tener en cuenta que las ecuaciones matemáticas estuvieron presente en su realización." (inf. 14).

Ahora se pasa a describir lo que se observó en las preguntas núm. 1, 2, 4 y 5 con respecto a la *precisión en el lenguaje matemático* y según las categorías (niveles) escogidas. Esta descripción se apoya en los informes de los alumnos, los cuales aparecen referenciados con su número correspondiente.

Los enunciados a las preguntas núm. 1, 2, 4 y 5 pueden recordarse del apartado 4.1. o también de la figura 1.1. del apartado 1.4. Con los datos de la primera, segunda, cuarta y quinta columna del instrumento 2 (cfr. Fig. 3.7.) y analizando detalladamente las respuestas de cada informe, se describe lo que sucedió con las respuestas en cada uno de los niveles en que se categorizaron:

- Nivel 1. *Utiliza terminología inadecuada.* A continuación, se presentan las particularidades de cada una de las preguntas.

  Pregunta núm.1: en un caso, error al plantear la ecuación (el modelo) por incomprensión en el enunciado (inf.13); uso inadecuado del signo suma seguido del numerador de una fracción, en vez del signo de fracción (inf. 3, 6, 7 y 8), lo cual se puede observar en la figura 4.8. del Anexo; y además, en varios casos, en la respuesta se omiten las unidades (minas) (inf. 7 y 8).

  Pregunta núm. 2: en un caso, error al plantear la ecuación (el modelo) por incomprensión en el enunciado (inf. 14 y cfr. Fig. 3.3 del Anexo).

  Pregunta núm. 4: en un caso, incoherencia respecto a la variable indicada en el dibujo del enunciado y la variable definida en el problema (inf. 7 y cfr. Fig. 4.9. del Anexo); en un caso, se omite el uso de unidades en todo momento y no se da explícitamente la respuesta (inf. 16).

  Pregunta núm. 5: en varios casos, se igualan cantidad de monedas con cantidad de animales (inf. 1, 8, 10 y 16; cfr. como ejemplo la fig. 4.10. del Anexo); en un caso, se intenta resolver este problema con los pasos de modelización del libro de texto (cfr. 3.2.), pero ese esquema por pasos no se ajusta al problema (inf. 4 y cfr. Fig. 4.11. del Anexo).

- Nivel 2. *Utiliza terminología adecuada, con alguna omisión.* A continuación, se presentan las particularidades de cada una de las preguntas.

Pregunta núm.1: en varias respuestas se omiten las unidades (minas) (por ejemplo en el inf. 1).

Pregunta núm. 2: la respuesta en notación egipcia la llaman “notación científica” (inf. 5); al hacer la comprobación se afirma “1,99 = 2”, en vez de indicar que se trata de una aproximación (inf.12 y cfr. Fig. 4.4. del Anexo); falta precisión en el número de cifras significativas del resultado, no se indica cuántos números decimales se están utilizando (inf. 15 y 16).

Pregunta núm. 4: en la respuesta dicen “aplicamos fórmula (…)” en vez de “aplicamos el teorema de Pitágoras” (inf. 1); falta precisión al expresar las incógnitas (inf. 8); en varias respuestas se omiten las unidades (codos) (por ejemplo en el inf. 9); falta precisión al nombrar los parámetros (inf. 10).

Pregunta núm. 5: en la respuesta aparece una confusión de términos, al llamar “gallos” a los tres tipos de aves (los gallos, las gallinas y los pollos) que aparecen en el enunciado del problema (cfr. 4.1. e inf. 5).

- Nivel 3. *Utiliza terminología adecuada en todo momento.* A continuación se presenta la particularidad de dos de las respuestas a la pregunta núm. 2.

  Pregunta núm. 2: escribe la ecuación, la resuelve y da el resultado sin explicar por qué se hace (inf. 6 y 7).

A continuación se describe cómo valoraron los estudiantes el *uso del libro de texto*, para ello se utilizan los datos del instrumento 3 (cfr. Fig. 3.8. y el apartado 3.2.) y los del diagrama de barras que aparece en la figura 4.12., diagrama elaborado a partir de los datos recogidos del cuestionario (cfr. 3.1). Como se observa en el diagrama de barras de la figura 4.12., los estudiantes percibieron de un modo positivo la experiencia del uso del libro a lo largo del curso, y en concreto, valoraron positivamente el libro como apoyo para la realización del Proyecto. Se pueden observar los altos valores de los promedios a cada ítem. Ahora se describen los resultados obtenidos en cada uno de los ítems que se usaron en la categorización:

- *Facilidad de la lectura y comprensión del libro de texto*: afirmativo en el 86% de los casos. En el diario del profesor se lee, “Estoy utilizando el método socrático y/o de la pregunta para dar la clase; hoy hicimos una lectura comentada del libro, sección 1.6, modelaje mediante ecuaciones: comienza leyendo un alumno o la profesora. Quien lee comenta lo que entendió, a veces otros alumnos explican o preguntan algo, y finalmente la profesora completa las ideas, si es necesario (…)”.
- *Existe correspondencia entre el contenido del programa y el libro de texto*: afirmativo en el 92% de los casos. En el diario del docente se lee, “(…) y luego se les indicó a los estudiantes que, de manera individual, hicieran en su cuaderno el ejemplo 1, 2... de ese apartado del libro, y sin mirar cómo se resuelve en el libro (procedimiento y resultados), se les dio unos 5 minutos para cada problema y, a continuación, se comentó en grupo algún aspecto del problema menos entendido”.
- *Adecuada presentación y desarrollo de los contenidos del libro*: afirmativo en el 90% de los casos; en el prefacio del libro de texto se lee:

> ¿Qué es lo que los estudiantes realmente necesitan saber antes de estudiar cálculo? ¿Con qué herramientas deben contar los maestros para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas son el motivo por el cual hemos escrito este libro. (…). En este libro hemos incluido todos estos métodos para enseñar los conceptos preliminares del cálculo con el fin de mejorar el eje de las habilidades fundamentales. Al escribir esta quinta edición nuestro objetivo era

mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de instrucción. El cambio principal de esta edición es un mayor énfasis en el modelado y las aplicaciones. (Stewart, Redlin et al. 2006, xix).

- *Los significados de los objetos matemáticos se correspondían a los que tenían previamente*: afirmativo en el 80% de los casos. Se lee en el diario del docente, "se explicaron conceptos menos conocidos como la relación y diferencia entre perímetro/área; la razón, proporción, %, cociente... a través de un ejemplo de la vida diaria (alimentación); criterios de semejanza de triángulos; etc... Era necesario asimilar y manejar estos conceptos para resolver los problemas ya realizados en el texto, y otros propuestos. (…). Se observó la dificultad general respecto del problema de las concentraciones de jugo de naranja... al que se le dedicó más tiempo para aclarar conceptos y enseñar a razonar con ellos".
- *Asígnale un puntaje al grado de dificultad del contenido del libro de curso*: el porcentaje asignado fue de 70%. Este dato tiene sentido al relacionarlo con el 92% del segundo ítem, *existe correspondencia entre el contenido del programa y el libro de texto* y al 90% del último ítem, *¿Qué grado de importancia tiene para ti el uso de este libro a lo largo del curso?*. A mayor correspondencia del libro con el contenido del curso y a mayor uso del libro durante el curso, menor grado de dificultad del contenido del libro. También da sentido a este 70% que uno de los objetivos principales del curso fuera capacitar a los estudiantes en la lectura y comprensión del libro de texto (cfr. 1.2).
- *¿Qué grado de importancia tiene para ti el uso de este libro a lo largo del curso?*: el porcentaje asignado fue de 90%. En el diario del docente se lee, "se les indicó que leyeran las páginas 138-145 del libro de texto sobre los principios generales de la resolución de problemas de Polya como ayuda para resolver los problemas del proyecto y otros de la sección 1.6.". Además, parte de la metodología del curso era que los estudiantes hubieran leído previamente el apartado correspondiente del libro, lo que constituyó una constante referencia al libro a lo largo del curso.

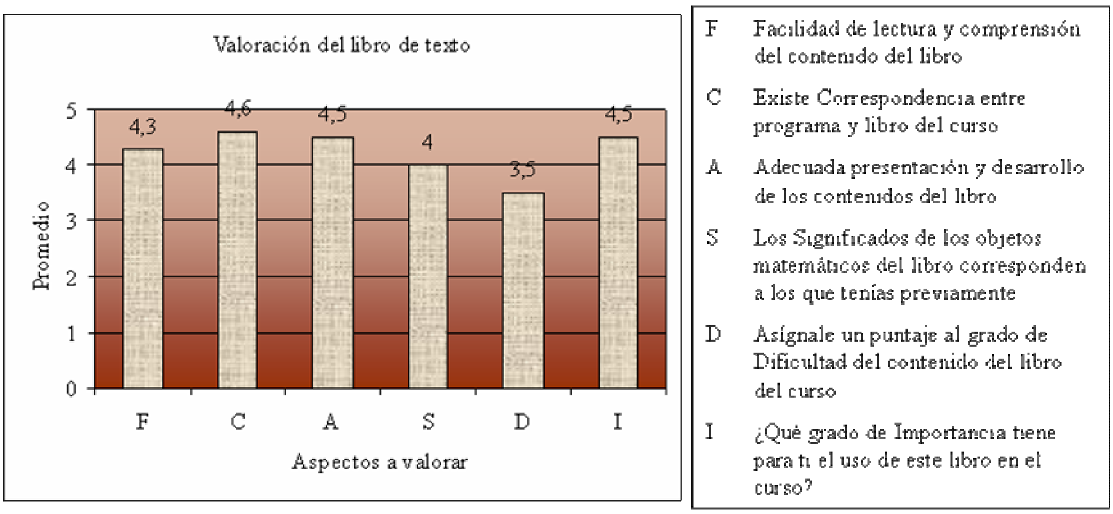


Figura 4.12. Diagrama de barras. Valoración del libro de texto desde la percepción de los estudiantes. El cuestionario correspondiente estaba planteado en la forma de escala de Likert 1 a 5.

4.3. Interpretación de las dificultades/errores

Con las descripciones realizadas del proceso de modelización y de las habilidades básicas de estudio/aprendizaje (cfr. 4.1. y 4.2.), ahora se trata de reflexionar acerca de las dificultades/errores de los estudiantes que han ido apareciendo en esas descripciones, siempre que sea posible a la luz de las investigaciones referenciadas en el marco teórico de este trabajo de investigación (cfr. cap. 2). Las posibles interpretaciones obtenidas de esta manera estarán escritas en los próximos párrafos.

Después reflexionar sobre las descripciones que se obtuvieron en el apartado 4.1. de este capítulo, hay varios fenómenos que llaman la atención en los problemas (preguntas) núm. 1, 2 y 4 respecto al *proceso de modelización*.

- Preguntas núm. 1 (inf 13) y pregunta núm 2 (inf. 14): sólo en dos casos se realizan incorrectamente los pasos 3 y 4 del proceso de modelización, *plantear el modelo* mediante una ecuación algebraica y *resolver la ecuación* (inf. 13 y cfr. Fig. 4.1 del Anexo e inf. 14 y cfr. Fig. 4.13. del Anexo, respectivamente); se trata de un error que podría deberse a la falta de comprensión (del enunciado) del problema unida a la falta del hábito de reflexión sobre la pràctica.
- Pregunta núm. 1 (inf. 13 y cfr. Fig. 4.1. del Anexo) y pregunta núm. 2 (inf. 12 y 14).

  Se realiza bien el procedimiento de la comprobación respecto al resultado obtenido en el paso 4, *resolver la ecuación*, y la *ecuación planteada* en el paso 3; sin embargo, en varios casos se hace sin utilizar el resultado que aparece en el enunciado del problema (inf. 12 y 14; cfr. Fig. 4.13. del Anexo). Sería necesario investigar si estos errores se produjeron por falta de asimilación de un aspecto del concepto matemático de comprobación del resultado, es decir, por falta de asimilación de la necesidad de comparar los resultados obtenidos por vías diversas.

  Además, en uno de estos casos, los estudiantes se podrían haber percatado de su equivocado planteamiento del problema (inf. 13 y cfr. Fig. 4.1.del Anexo). Este error podría provenir en la falta de reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje.
- Pregunta núm. 1 (inf. 6, 7 y 12) y pregunta núm. 2 (inf. 6, 7 y 10).

  En estos casos no se explicitan los procedimientos de la comprobación. Sería necesario investigar si estas omisiones/dificultades para comunicar explícitamente los resultados se produjeron por la falta de asimilación del concepto matemático de comprobación del resultado y/o por la costumbre de realizar algoritmos sin dar explicaciones.
- Pregunta núm. 1 (inf. 3 y 9), pregunta núm. 2 (inf. 8) y pregunta núm. 4 (inf. 16).

  No se explicita la respuesta del problema. Sería necesario investigar si esta omisión/dificultad para comunicar explícitamente los resultados de los problemas se produjeron porque las matemáticas suelen entenderse como hacer algoritmos, sin percatarse de que se están resolviendo problemas que requieren una respuesta (o solución).

- Pregunta núm. 4 (inf. 6) e incluso en otros casos.

  No se explicitan los motivos de selección de una ecuación algebraica como modelo del problema; igualmente, esta omisión/dificultad pudiera ser por el mismo motivo señalado en el párrafo anterior.

- Pregunta núm. 4.

  Las ausencias del último paso de modelización, la comprobación del resultado son frecuentes en esta pregunta. Este tipo de omisiones/dificultades podrían estar relacionadas con la forma de enunciar el problema que no pide expresamente la comprobación del resultado obtenido, y tampoco da una respuesta correcta obtenida por otra vía para ser confrontada con la obtenida por quien resuelve el problema. Los enunciados de las preguntas núm. 1 y 2 del proyecto sí pedían expresamente esa comprobación (demostración). Esas omisiones también podrían estar relacionadas con una escasa iniciativa y autonomía del estudiante en el propio aprendizaje.

- Pregunta núm. 5.

  El enunciado de esta pregunta inicia con las siguientes palabras: "Este problema tiene varias respuestas. Aplique el ensayo y error para poder encontrar por lo menos una respuesta". La mayoría de los informes presentan una o varias respuestas particulares, además sin explicar las estrategias utilizadas y sin comprobar la unicidad o no de la(s) solución(es) encontradas; y por lo tanto tampoco generalizan los resultados. Estas omisiones/dificultades (en este problema) podrían estar relacionadas con el enunciado de la pregunta y también con la explicación (única) del libro de texto acerca de los pasos para modelizar (con ecuaciones algebraicas).

  De hecho, en el informe 3 se lee: "Aunque conseguimos plantear una especie de pequeña ecuación, en la mayoría del problema en vez de operaciones matemáticas se utiliza el tanteo y el enunciado bien dice –aplique ensayo y error…-. (…) no hemos logrado resolver todo en forma de ecuación".

  En general, estas respuestas reflejan poca creatividad e intuición al ser contestadas. Esta dificultad de los estudiantes para resolver problemas podría deberse al escaso hábito de realizar de actividades creativas e innovadoras en clase de matemáticas.

Después de reflexionar sobre las descripciones que se obtuvieron en el apartado 4.2. de este capítulo, hay varios fenómenos en las preguntas núm. 3 y 6 que llaman la atención respecto a los hábitos básicos de estudio/aprendizaje, concretamente al de *argumentación matemàtica*:

- Pregunta núm. 3: pide una opinión razonada respecto al trabajo matemático de la antigüedad.

  La presencia de respuestas con escaso desarrollo de las ideas expuestas manifiesta una dificultad que podría estar relacionada con los escasos de hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito (inf. 5, 7 y 9; cfr. 4.2).

  Además, respuestas de otros informes dan explicaciones poco claras unidas a ejemplos que según los estudiantes reflejan las finalidades de los babilonios y egipcios al plantear problemas, dificultad que pudiera deberse al mismo motivo señalado en el párrafo anterior (inf. 2, 3 y 8; cfr. 4.2).

- Pregunta núm. 6: pide una reflexión acerca de cómo nos afectan las ecuaciones algebraicas en la vida ordinaria.

  Las respuestas con explicaciones inadecuadas (incoherentes) reflejan las dificultades de los estudiantes para asimilar conceptos matemáticos (incógnita, ecuación). Estas dificultades podrían estar relacionadas con las metodologías (algorítmicas) de enseñanza utilizadas por los docentes (inf. 1 y 7; cfr. 4.2).

  Otras respuestas en las que el desarrollo de las ideas es poco claro, reflejan dificultades de los estudiantes que podrían deberse a los escasos hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito (inf. 3, 8 y 11; cfr. 4.2).

Después de reflexionar sobre las descripciones que se obtuvieron en el apartado 4.2. de este capítulo, hay varios fenómenos que llaman la atención en las preguntas núm. 1, 2, 4, y 5 respecto a los hábitos básicos de estudio/aprendizaje, concretamente el de *precisión del lenguaje matemático*. Las respuestas de cada nivel (categoría) / pregunta, se podrían interpretar de las siguientes maneras:

- En las respuestas de nivel 1 de la pregunta núm.1.

  Los errores al plantear la ecuación para modelizar el problema por incomprensión en el enunciado podrían estar relacionados con la carencia del hábito de chequear para lograr exactitud, aunque tampoco se descarta que esté relacionado con las dificultades lecto-comprensivas del lenguaje escrito (inf. 13); también ocurre este fenómeno en un caso (inf. 14) de la pregunta núm. 2.

  El uso inadecuado del signo suma seguido del numerador de una fracción, en vez de colocar a continuación el signo de fracción, podría deberse a las evaluaciones en matemáticas que son sólo o proncipalmente sumativas, sin insistir en los aspectos formativos. Es decir, estos errores/dificultades podrían deberse, en este caso, a carencias en el hábito de precisión en el lenguaje matemático (inf. 3, 6, 7 y 8).

  La omisión de las unidades (minas) en algunas respuestas, dificultad que pudiera deberse al mismo motivo señalado en el párrafo anterior (inf. 7).

- En las respuestas de nivel 1 de la pregunta núm. 4.

  La incoherencia observada respecto a la variable indicada en el dibujo del enunciado y la variable definida en el problema, podría deberse a la falta del hábito de chequear para lograr exactitud (inf. 7 y cfr. fig. 4.9. del Anexo).

  Los casos en los que la respuesta al problema no se da explícitamente, manifiestan una dificultad que podría estar relacionada a la falta de hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito (inf. 16 y cfr. 4.2).

- En las respuestas de nivel 1 de la pregunta n. 5.

  En los casos en que se produce el error de equiparar (igualar) cantidad de monedas con cantidad de animales, sería necesario investigar si se relaciona con las evaluaciones poco formativas o principalmente sumativas (inf. 1, 8, 10 y 16; cfr. por ejemplo la fig. 4.10. del Anexo).

  En un caso se intenta resolver con el esquema de los pasos para modelizar (cfr. Instrumento 1 del apartado 3.2) que no se ajusta al problema, esta dificultad podría estar relacionada con la falta de iniciativa y autonomía de los estudiantes en el propio aprendizaje (inf. 4 y cfr. Fig. 4.11. del Anexo).

- En las respuestas de nivel 2 de la pregunta 2.

  Al hacer la comprobación se presentan errores que son consecuencia de aproximar con números decimales (inf. 12, 15 y 16; cfr. Fig. 4.4. del Anexo) que podrían deberse a la falta del hábito de chequear para lograr exactitud y/o a la falta de reflexión en el propio aprendizaje.

- En las respuestas de nivel 3 de la pregunta n. 2.

  En varios casos se escribe la ecuación, se resuelve y se da el resultado omitiendo las explicaciones para entender el por qué se hace. Esta dificultad de explicitar los procedimientos sería necesario investigar si tiene relación con la falta de hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito (inf. 6 y 7; cfr. 4.2).

Después de reflexionar sobre las descripciones que se obtuvieron en el apartado 4.2. de este capítulo, hay varios fenómenos que llaman la atención respecto a los hábitos básicos de estudio/aprendizaje, concretamente el de *uso del libro de texto*

- El ítem *Asígnale un puntaje al grado de dificultad del contenido del libro de curso* es el dato con menos promedio (3,5 puntos). Esta realidad (ni dificultad/ni error) sería necesario investigar si se relaciona con la correspondencia entre el contenido del programa y el libro de texto, y/o con el grado de importancia del uso del libro (cfr. 4.2).
- El ítem *Los significados de los objetos matemáticos se correspondían a los que tenían previamente* es el dato con el segundo menor promedio (4 puntos). Esta valoración podrían estar relacionada con las carencias de conocimientos matemáticos previos en los estudiantes (cfr. 4.2).

CONCLUSIONES

La finalidad de este trabajo de investigación era conocer si el Proyecto para un Descubrimiento realizado en la (primera) asignatura de nivelación de matemáticas del Curso de Iniciación Universitaria (CIU) permitía a los estudiantes una adecuada asimilación de un proceso de modelización matemática y si les ayudaba a mejorar en algunas habilidades básicas del estudio/aprendizaje en matemáticas (cfr. 1.1.), es decir, si facilitaba la continuidad en la transición de las matemáticas de bachillerato a las de la universidad en esos aspectos. El análisis de los datos (cfr. 4.1. y 4.2.) permite dar respuestas a estas dos cuestiones desde la experiencia práctica desarrollada por los estudiantes del CIU (cfr. 1.4).

El Proyecto para un Descubrimiento permitió, en casi todos los casos, una adecuada asimilación de un *proceso de modelización matemática* mediante ecuaciones algebraicas (cfr. 3.2. y preguntas núm. 1, 2 y 4 en 1.4.) excepto en dos aspectos: la comprobación de los resultados y la explicitación los resultados obtenidos (cfr. 4.1). Los estudiantes hacen o intentan hacer la comprobación de resultados cuando se les pide expresamente (cfr. preguntas núm 1 y 2, en 1.4.), en caso contrario, tienden a omitirla (cfr. pregunta núm 4, en 1.4.). Sin embargo, en un problema (en un caso) el Proyecto dificultó la adecuada asimilación de ese proceso modelización matemática mediante ecuaciones algebraicas porque el enunciado del problema sugería que fuera resuelto por ensayo y error, buscando inicialmente soluciones particulares (cfr. 3.2. y pregunta núm. 5, en 1.4.). En la mayoría de los informes, los estudiantes encontraron respuestas a este problema sin explicitar la estrategia utilizada; en un sólo caso, se realizó la generalización y se comprobó la unicidad de las soluciones (cfr. 4.1. y fig. 4.7 del Anexo). Los cuatro informes en los que se explicita la estrategia de resolución reflejan los múltiples y variados caminos para resolver ese problema (cfr. 4.1. y fig. 3.5, 4.5, 4.6 y 4.7 del Anexo): posible tema para las futuras investigaciones.

En cambio, respecto a las *habilidades de aprendizaje/estudio*, argumentación matemática y precisión en el lenguaje matemático (cfr. 3.2. y preguntas núm. 3 y 6; y núm. 1, 2, 4 y 5 respectivamente) se puede afirmar que los estudiantes presentaron diversos niveles de argumentación y de precisión en el lenguaje al elaborar el informe del Proyecto para un Descubrimiento. El análisis de los datos permitió describir el tipo de errores, dificultades y omisiones de los estudiantes respecto a esas habilidades (cfr. 4.2. y fig. 4.3., 4.4., 4.8., 4.9. y 4.10. del Anexo) e interpretar algunas dificultades/errores de los estudiantes respecto a esas habilidades básicas (cfr. 4.3.). También se comprobó que los alumnos percibieron el uso del libro de texto (otra habilidad de aprendizaje/estudio analizada) de manera positiva (cfr. 3.2, 4.2. y fig. 4.12).

Gracias a los planteamientos teóricos del problema de la continuidad en la transición de las matemáticas del bachillerato a las de la universidad y de las potencialidades didácticas de las actividades de modelización/aplicación en la clase de matemáticas, el análisis de los datos permitió plantearse nuevas preguntas sobre las relaciones de causa y efecto entre las posibles interpretaciones señaladas en el apartado 4.3. y las dificultades/errores explicitadas en los apartados 4.1 y 4.2. Esto quiere decir que las *posibles interpretaciones de las dificultades/errores* que los estudiantes experimentaron/cometieron a lo largo del desarrollo del Proyecto, podrían constituir nuevas perspectivas para la investigación de la continuidad en la transición de las matemáticas del bachillerato a las de la universidad y del uso de la metodología de modelización en las asignaturas de matemáticas en la universidad. Teniendo en cuenta los aspectos teóricos y prácticos de este trabajo de investigación, se podría investigar si la falta de iniciativa y/o autonomía de los estudiantes en el propio aprendizaje (el modo en el que los estudiantes afrontan el estudio personal) es la causa principal de esas dificultades/errores. En la literatura sobre el tema de las dificultades/errores en matemáticas es probable que existan investigaciones que den respuesta a las interpretaciones del apartado 4.3., pero en este trabajo no se han tenido en cuenta. Otras causas posibles sobre las dificultades/errores de los estudiantes del CIU al realizar el Proyecto, se presentan a continuación.

Los *errores/dificultades relacionados con la asimilación del proceso de modelización* podrían deberse a (cfr. 4.3): la falta de asimilación de un aspecto del concepto matemático de comprobación del resultado (la comparación de resultados obtenidos por vías diversas), la costumbre de realizar algoritmos sin dar explicaciones, el concepto sobre qué son las matemáticas (suelen entenderse como hacer algoritmos) y qué es "hacer matemáticas" (resolver problemas que requieren una respuesta), la dificultad para comprender el enunciado del problema puede ir unida a la falta del hábito de reflexión sobre la propia práctica o sobre los propios aprendizajes (cfr. fig. 4.13. del Anexo), asi como a la forma plantear (o enunciar) la pregunta y/o forma de plantear (o explicar) un tema en el libro de texto.

Los *errores/dificultades relacionados con las diversas habilidades de aprendizaje/estudio* podrían deberse a las causas que se exponen a continuación (cfr. 4.3). En el caso de la *argumentación matemàtica*, a los escasos de hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito y a las metodologías algorítmicas de enseñanza utilizadas por los docentes. En el caso de *precisión en el lenguaje matemático*, a la falta del hábito de chequear para lograr exactitud, a la falta de reflexión sobre el propio aprendizaje, a la falta de hábitos lecto-comprensivos del lenguaje escrito, las evaluaciones sumativas y poco formativas, a la falta de hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en el lenguaje verbal escrito. Y en el caso del *uso del libro de texto*, la correspondencia entre el contenido del programa y el libro de texto, el grado de importancia dado al uso del libro y las carencias de conocimientos matemáticos previos en los estudiantes podrían ser las causas de las dificultades para su uso.

Es interesante revisar ahora, de nuevo, los objetivos del Proyecto para un Descubrimiento (cfr. 1.4.) porque algunos buscaban cubrir justamente algunas de las *posibles causas de los errores/dificultades de aprendizaje* (cfr. 4.3). El objetivo principal del Proyecto era desarrollar una actividad que intentara elevar, por una parte la comprensión conceptual de un contenido matemático (modelización mediante ecuaciones lineales), y por otra parte el nivel de compromiso de los estudiantes con su propio proceso de aprendizaje (promoción de los diversos procesos de aprendizaje y la reflexión sobre los fenómenos de la vida cotidiana relacionados con las ecuaciones algebraicas). Y, precisamente, en la interpretación de las causas posibles de los errores/dificultades cometidos por los estudiantes al realizar el Proyecto se encontraron, por una parte la falta de conocimientos previos, y por otra parte la falta de compromiso de los estudiantes con su propio aprendizaje (cfr. 4.3).

La metodología del Proyecto para un Descubrimiento (Stewart, Redlin et al. 2006) utilizada para realizar el Proyecto de Modelización (cfr. 1.4. y 2.2.) promovía la participación activa de los estudiantes, fomentaba, por una parte un modo de trabajar en clase que los involucrara en Proyectos extensos con actividades desafiantes pero accesibles que les ayudaran a explorar y reflexionar con mayores detalles un aspecto interesante del tema que acaban de aprender, y, por otra parte la reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje a través del enfoque formativo de la actividad. Y, precisamente, en la interpretación de las causas posibles de los errores/dificultades cometidos por los estudiantes al realizar el Proyecto se encontraron la falta de reflexión sobre el propio aprendizaje, la falta de hábitos lecto-comprensivos del lenguaje escrito y las evaluaciones sumativas poco formativas.

Además, los objetivos específicos del Proyecto de Modelización señalaban que el aprendizaje: se desarrollaría desde la interacción social en el aula (mediante grupos colaborativos), se motivaría el aprendizaje de las matemáticas a través de la perspectiva histórica, se activarían diversos procesos de aprendizaje de matemáticas (resolución de problemas, argumentación y comunicación, precisión en el uso del lenguaje matemático), y los estudiantes reflexionarían sobre las propias experiencias de aprendizaje de matemáticas y su relación con la vida cotidiana. Y, precisamente, en la interpretación de las causas posibles de los errores/dificultades cometidos por los estudiantes al realizar el Proyecto se encontraron: los escasos hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito, las metodologías algorítmicas de enseñanza utilizadas por los docentes, la falta del hábito de chequear para lograr exactitud y la falta de hábitos de redacción-comunicación de las propias ideas en lenguaje verbal escrito.

Referencias bibliográficas

Aravena, M. y C. Caamaño (2007). "Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile." Estudios pedagógicos **XXXIII**(2): 7-25.

Aravena, M. y J. Giménez (2002). "Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos." Uno: Revista de didáctica de las matematicas **31**: 44-56.

Campos, F., L. García, et al. (2002). "Las prácticas de modelización físico-matemática: innovación universitaria desde un punto de vista internacional" Uno: Revista de didáctica de las matematicas **31**: 24-33.

Cretchley, P., N. Jourdan, et al. (2007). "Secondary-Tertiary Transition: What Mathematics Skills Can and Should We Expect This Decade?" Mathematics: Essential Research, Essential Practice **2**: 463-472.

Deulofeu, J. (2009). Comunicación personal. M. García. Barcelona**:** Tutoría del Módulo 1 del master

Dunia, M. y M. García (2007). Evaluación de los materiales Didácticos de matemáticas del Ciclo de Iniciación Universitaria (CIU). VI Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM), Maracay Universidad Pedagógica Experimental Libertador

García, M. y K. Olmedo (2007). Una Propuesta para la Evaluación de la asignatura de Matemáticas del programa. Curso de Iniciación Universitaria (CIU) I Congreso Internacional de Calidad e Innovación en la Educación Superior (CIES), Caracas, Universidad Simón Bolívar.

Gardner, H. (1983). Frames of the Mind: The Theory of Multiple Intelligences. New York, Basic Books, INC.

Gardner, H. (1995). Inteligencias Múltiples. La teoría en la Práctica, Paidos Ibérica.

Gavilán, P. (2002). "Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa " Uno: Revista de didáctica de las matematicas **31**: 34-43.

Gómez, J. y J. Fortuny (2002). "Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias." Uno: Revista de didáctica de las matematicas **31**: 7-23

Guerrero, E. (2006). "Un punto de retorno. Una experiencia de estudiantes de bachillerato universitario." Mexicana de Investigación educativa **11-29**: 483-507.

Guzmán, M. (s/f, 06-01-09). "Laboratorio de Matemáticas." Consultado: 12/12/08, en http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/.

Guzmán, M., B. Hodgson, et al. (1998). Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education, Berlin, Proceedings of the International Congress of Mathematicians.

IBO (2005). Material de ayuda al profesor de Matemáticas Nivel Medio (NM): evaluación interna. Madrid, Organización del Bachillerato Internacional.

Kajander, A. y M. Lovric (2005). "Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience." International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **36** (2–3): 149–160.

Lovric, M. (2001). "Manual de Repaso de Matemáticas." Consultado: 12/12/08, en www.math.mcmaster.ca/lovric/rm.html.

Malatesta, M. y Y. Quintana (2004). "Metodologías e Implicaciones Docentes de la Enseñanza: Inteligencias Múltiples." EDUCARE **8(2)**: 85-100.

Malatesta, M. y Y. Quintana (2007). Inteligencias Múltiples y Enseñanza de Geometría. Mérida, Venezuela, Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

McMillan, J. y S. Schumacher (2005). Investigación educativa. Una introducción conceptual. Madrid, Pearson. Addison Wesley.

Niss, M., W. Blum, et al. (2007). Introduction. Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study. G. Blum, Henn y Niss, International Commission on Mathematical Instruction **10:** 1-32.

Rodríguez, R. y E. Zuazua (2002, versión actualizada 2004). "Enseñar y aprender Matemáticas." Revista de Educación del MEC **329**: 239-256.

Rodríguez, S., E. Fita, et al. (2004). "El rendimiento académico en la transición secundaria - universidad." Revista de Educación **334**: 391-414.

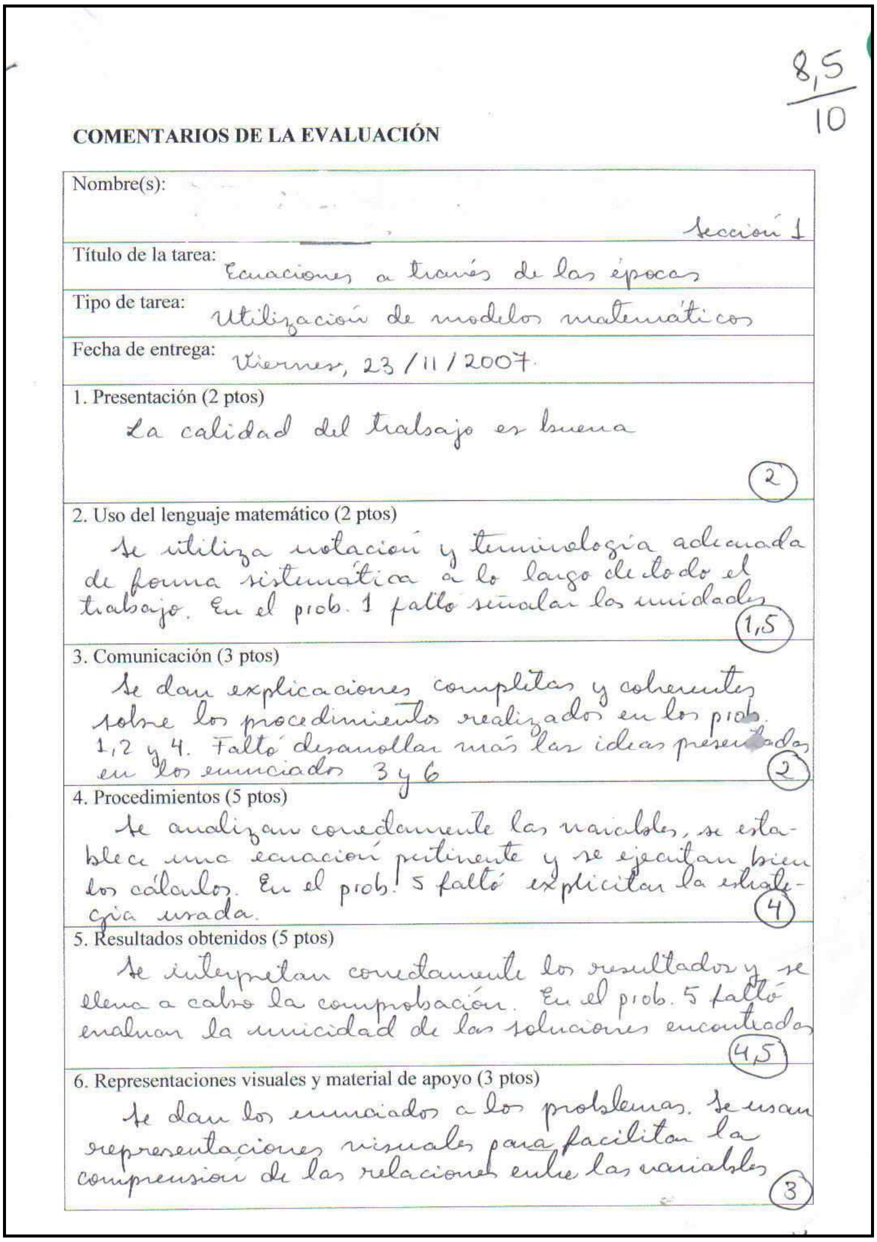
RSME (en prensa). Desde el Bachillerato a la Universidad en Matemáticas (Conclusiones). IV Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Stewart, J., L. Redlin, et al. (2006). Precálculo. México (D. F.), Thomson Editores.

ANEXO

Figuras de instrumentos y de partes de los informes de los alumnos

Figuras del capítulo 1



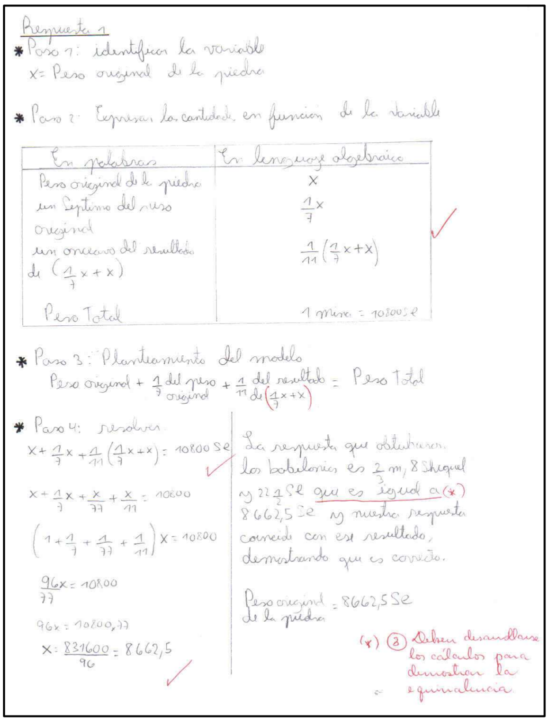
8,5 / 10

COMENTARIOS DE LA EVALUACIÓN

Nombre(s):	Sección 1
Título de la tarea:	Ecuaciones a través de las épocas
Tipo de tarea:	Utilización de modelos matemáticos
Fecha de entrega:	Viernes, 23/11/2007.
1. Presentación (2 ptos)	La calidad del trabajo es buena — 2
2. Uso del lenguaje matemático (2 ptos)	Se utiliza notación y terminología adecuada de forma sistemática a lo largo de todo el trabajo. En el prob. 1 faltó señalar las unidades — 1,5
3. Comunicación (3 ptos)	Se dan explicaciones completas y coherentes sobre los procedimientos realizados en los prob. 1, 2 y 4. Faltó desarrollar más las ideas presentadas en los enunciados 3 y 6 — 2
4. Procedimientos (5 ptos)	Se analizan correctamente las variables, se establece una ecuación pertinente y se ejecutan bien los cálculos. En el prob. 5 faltó explicitar la estrategia usada. — 4
5. Resultados obtenidos (5 ptos)	Se interpretan correctamente los resultados y se lleva a cabo la comprobación. En el prob. 5 faltó evaluar la unicidad de las soluciones encontradas — 4,5
6. Representaciones visuales y material de apoyo (3 ptos)	Se dan los enunciados a los problemas. Se usan representaciones visuales para facilitar la comprensión de las relaciones entre las variables — 3

Figura 1.2. Plantilla para la corrección de los informes (un ejemplo).

Figuras del capítulo 3



Respuesta 1

* Paso 1: identificar la variable

x= Peso original de la piedra

* Paso 2: Expresar las cantidades en función de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Peso original de la piedra	x
un Septimo del peso original	$\frac{1}{7}x$
un onceavo del resultado de $(\frac{1}{7}x+x)$	$\frac{1}{11}(\frac{1}{7}x+x)$
Peso Total	1 mina = 10800 Se

* Paso 3: Planteamiento del modelo

Peso original + $\frac{1}{7}$ del peso original + $\frac{1}{11}$ del resultado de $(\frac{1}{7}x+x)$ = Peso Total

* Paso 4: resolver

$x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}(\frac{1}{7}x+x) = 10800$ Se

$x+\frac{1}{7}x+\frac{x}{77}+\frac{x}{11} = 10800$

$\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{77}+\frac{1}{11}\right)x = 10800$

$\frac{96}{77}x = 10800$

$96x = 10800 \cdot 77$

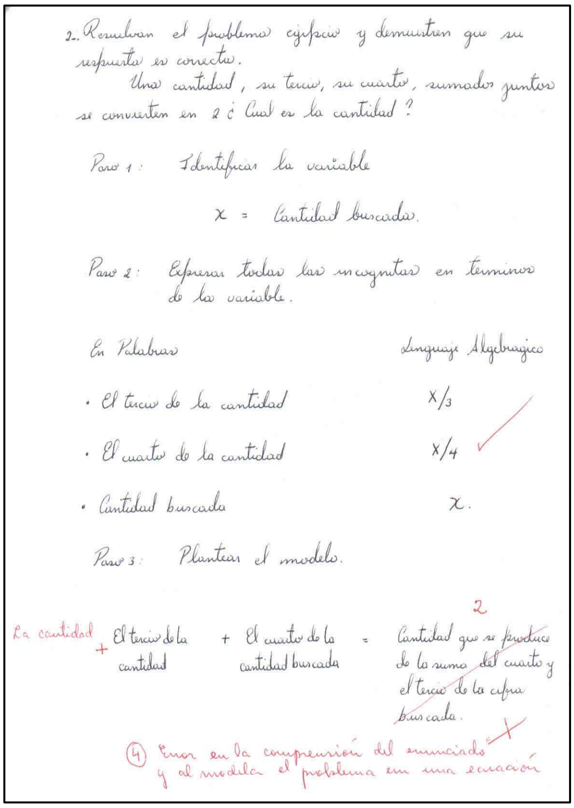
$x = \frac{831600}{96} = 8662{,}5$

La respuesta que obtuvieron los babilonios es $\frac{2}{3}$ mi, 8 Shequel y $22\frac{1}{2}$ Se que es igual a (*) 8662,5 Se y nuestra respuesta coincide con ese resultado, demostrando que es correcto.

Peso original de la piedra = 8662,5 Se

(*) 3 Deben desarrollarse los cálculos para demostrar la equivalencia.

Figura 3.2. Respuesta a la pregunta núm. 1. Ejemplo de la secuencia de los pasos de modelizacón. La comprobación es implícita.



2. Resuelvan el problema egipcio y demuestren que su respuesta es correcta.

Una cantidad, su tercio, su cuarto, sumados juntos se convierten en 2 ¿Cuál es la cantidad?

Paso 1: Identificar la variable

x = Cantidad buscada.

Paso 2: Expresar todas las incognitas en terminos de la variable.

En Palabras	Lenguaje Algebraico
• El tercio de la cantidad	$x/3$
• El cuarto de la cantidad	$x/4$
• Cantidad buscada	x.

Paso 3: Plantear el modelo.

La cantidad + El tercio de la cantidad + El cuarto de la cantidad buscada = 2 ~~Cantidad que se produce de la suma del cuarto y el tercio de la cifra buscada.~~

4 Error en la comprensión del enunciado y al modelar el problema en una ecuación

Figura 3.3. Respuesta de la pregunta núm. 2. (Informe 14) Error al plantear la ecuación que modeliza el problema.

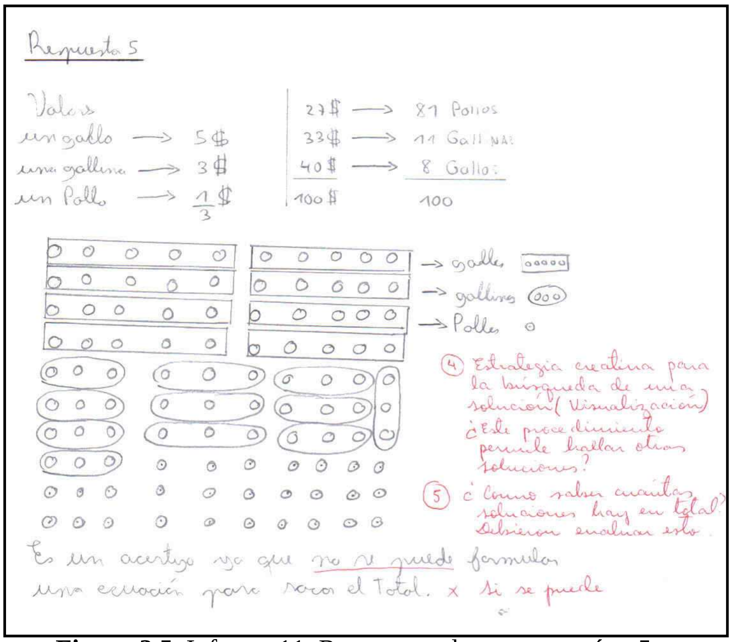


Figura 3.5. Informe 11. Respuesta a la pregunta núm. 5.
Estrategia creativa y visual.

Figuras del capítulo 4

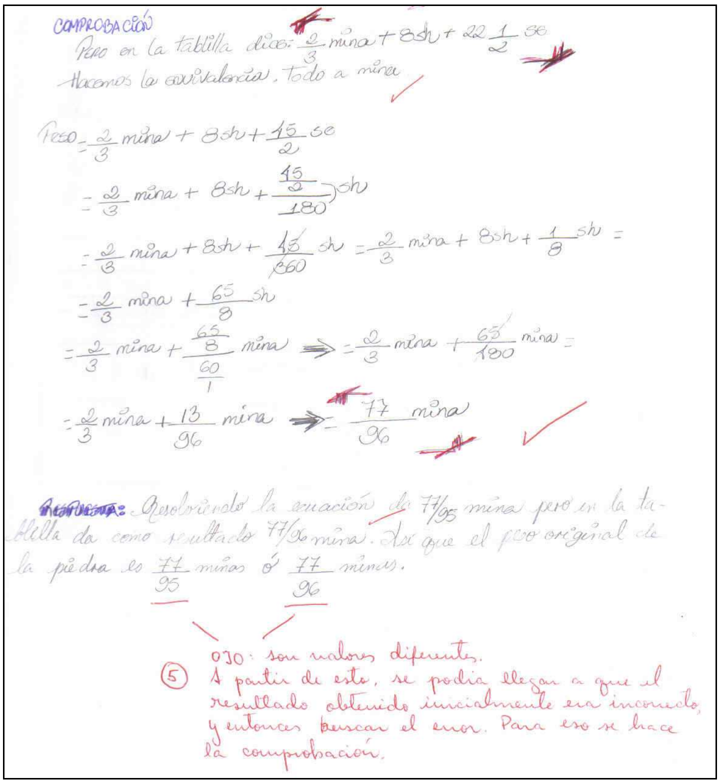


Figura 4.1. Informe 13. Respuesta a la pregunta núm. 1.
Después de realizar la comprobación, paso 5,
la respuesta explícita al problema es incoherente.

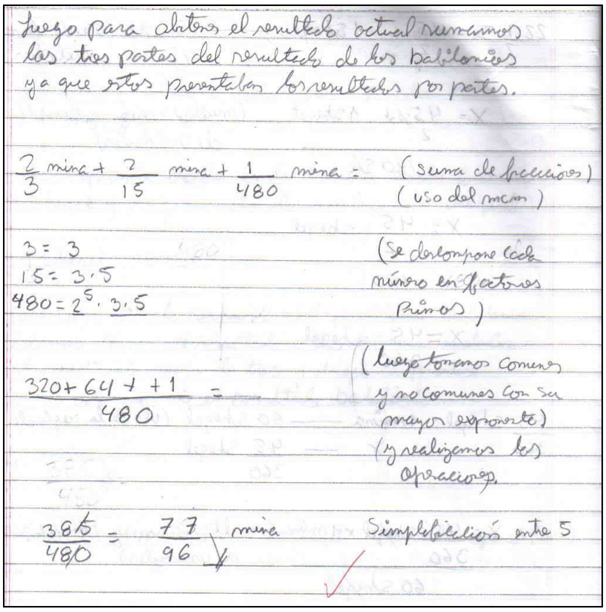


Figura 4.2. Informe 3. Respuesta a la pregunta núm. 2.
Se explicitan los procedimientos operativos.

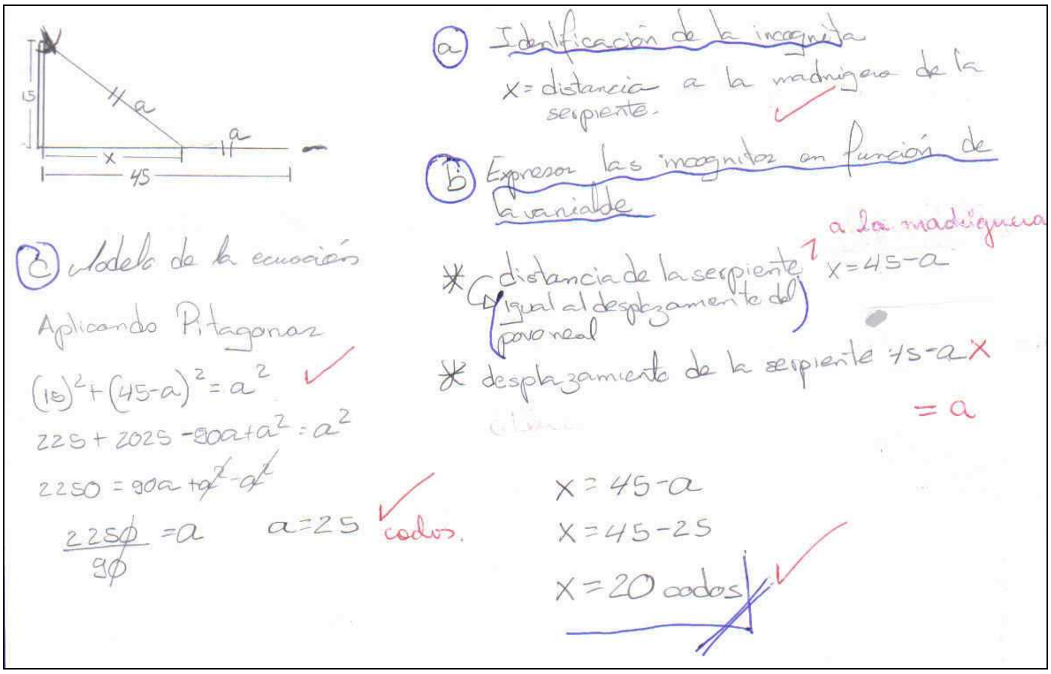


Figura 4.3. Informe 8. Respuesta a la pregunta núm. 4.
Expresa incorrectamente la incógnita en función de la variable.

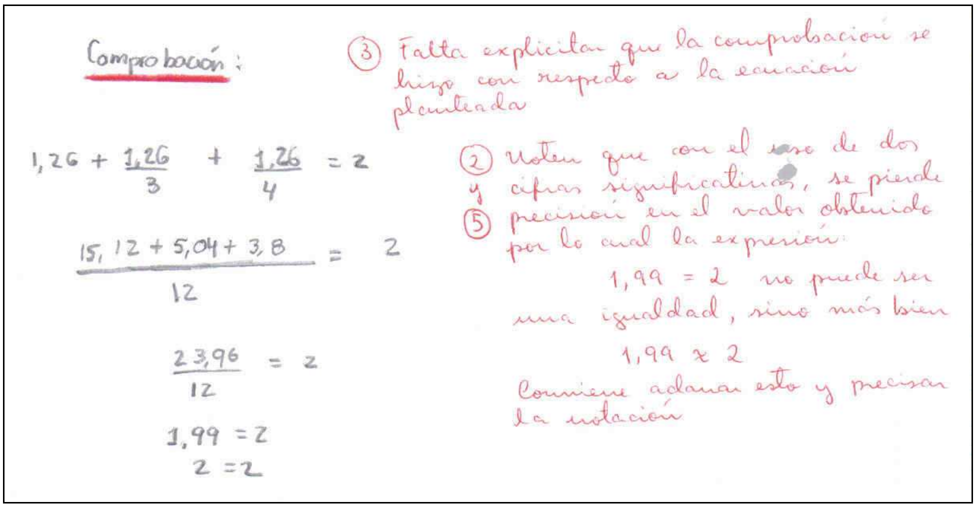


Figura 4.4. Informe 12. Respuesta a la pregunta núm. 2. Al utilizar un resultado aproximado se hace una generalización incorrecta

5. Considere este problema de la china del siglo VI.

Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos juntos valen una moneda, ¿Cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagen un total de 100, se pueden comprar con 100 monedas?

1er Paso identificar la variable: en este caso podemos expresar que la variable sería encontrar los números que nos lleven a obtener 100 aves = a 100 monedas

2do Paso expresar todas las incógnitas en terminos de la variable.

x: número de gallos
y: número de gallinas
z: número de pollos

x gallo + y gallinas + z pollos = 100
x(5) y(3) z(1) = 100
Además: x + y + z = 100

3er Paso Plantear modelo = Para que la cantidad de gallos y gallinas sean igual a sus respectivos precios, utilizamos a los pollos para igualar aves y monedas

1 gallina ⟶ 3 monedas
3 pollos ⟶ 1 moneda
4 aves ⟶ 4 monedas

1 gallo ⟶ 5 monedas
2(3 pollos) ⟶ 2(1)
7 aves 7 monedas

4. Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta

Para ello utilizamos el tanteo o ensayo y error relacionando los multiplos de las cantidades 4 y 7 que nos relacionen gallinas con pollos y gallos con pollos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48

7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

4 8 10
28 + 32 + 40 = 100

10+8 = 18 {1 gallina + 3 pollos = 4 aves; 3 mon + 1 mon = 4 mon}

4 {1 gallo + 6 pollos = 7 aves; 5 mon + 2 mon = 7 mon}

18 gallinas + 54 pollos = 72 aves
54 mon + 18 mon = 72 mon

4 gallos + 24 pollos = 28 aves
20 mon + 8 mon = 28 mon

18 gallinas ⟶ 54 mon
4 gallos ⟶ 20 monedas
54+24 = 78 pollos ⟶ 18+8 = 26 monedas
100 aves 100 monedas

8 11
56 + 44 = 100

11 {1 gallina + 3 pollos = 4 aves; 3 mon + 1 mon = 4 mon}

8 {1 gallo + 6 pollos = 7 aves; 5 mon 2 mon = 7 mon}

11 gallinas + 33 pollos = 44 aves
33 mon + 11 mon = 44 mon

8 gallos + 48 pollos = 56 aves
40 mon + 16 mon = 56 mon

11 gallinas ⟶ 33 mon
8 gallos ⟶ 40 mon
81 pollos ⟶ 27 mon
100 100

(3) Falta sistematización en la comunicación de los procedimientos realizados

Figura 4.5. Informe 3. Respuesta a la pregunta núm. 5. Estrategia aritmética buena en la que falta sistematización para comunicar los procedimientos realizados.

Problema Chino del siglo VI

Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos juntos valen una moneda, ¿Cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagan un total de 100, se pueden comprar con 100 monedas?

Respuesta:

En primer lugar, es necesario que se encuentre una combinación de gallos, gallinas y pollos para las que la cantidad de monedas sea igual.

1 Gallo ―― 5 monedas
3 Pollos ―― 1 moneda
3 Pollos ―― 1 moneda
7 animales ―― 7 monedas

Esta combinación debe repetirse varias veces. En efecto, doce veces. Es decir:

7 animales ― 7 monedas × 12 =
84 animales ―― 84 monedas

12

Por otra parte, conseguimos otra combinación que sumada a la combinación anterior de como resultado 100 animales y 100 monedas.

Es decir:

3 Pollos ―― 1 moneda
3 Pollos ―― 1 moneda
1 Gallina ―― 3 monedas
1 Gallina 3 monedas

Esta combinación debe repetirse dos veces

8 animales ― 8 monedas × 2 =
16 animales ― 16 monedas

En total:

84 animales ―― 84 monedas
16 animales ―― 16 monedas
100 animales ―― 100 monedas

Respuesta final:

Para comprar 100 animales con 100 monedas se necesitan comprar: 84 pollos, 12 gallos y 4 gallinas.

13

Figura 4.6. Informe 11. Respuesta a la pregunta núm. 5. Estrategia aritmética interesante.

5. Considere este problema de la China del siglo VI.

Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos junto valen una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagan un total 100, se pueden comprar con 100 monedas?

3 pollos cuestan $\rightarrow$ 1 moneda

1 pollo cuesta $\rightarrow \frac{1}{3}$ moneda

IDENTIFICAR LA VARIABLE

$x \rightarrow$ Número de gallinas

$y \rightarrow$ NÚMERO DE gallos

$z \rightarrow$ NÚMERO DE pollos

- 1 gallina cuesta 3 monedas
- 1 gallo cuesta 5 monedas
- 1 pollo cuesta $\frac{1}{3}$ moneda

Relaciones que nos da el Problema Chino

Se quiere comprar 100 individuos haciendo combinaciones y que no cueste mas de 100 monedas, es decir:

I.- $x+y+z=100$ unidades

II.- $3x+5y+\frac{1}{3}z=100$ monedas

De la ecuación I tengo: $z=100-x-y \Rightarrow$ III

SUSTITUIR I EN II

$3x+5y+\frac{1}{3}(100-x-y)=100$

SIMPLIFICAR

$\frac{8}{3}x+\frac{14}{3}y=\frac{200}{3}$

$\frac{8}{3}x+\frac{14}{3}y=\frac{200}{3}$

Continúo simplificando y obtengo

$4x+7y=100$

Como "x" y "y" representan número de animales vivos, y no podemos tener una gallina partida por la mitad ni la fracción de un gallo, concluyo que "x" y "y" deben ser números enteros positivos (naturales).

Luego tomamos en cuenta lo que dice el problema y aplicamos "ensayo y error".

Hay que buscar valores de "x" y "y" enteros positivos que satisfagan la relación $4x+7y=100$

Por lo tanto tenemos:

si $x=4 \Rightarrow y=\frac{100-4x}{7}=\frac{100-4.4}{7}=\frac{84}{7}=12$

Como $z=100-x-y=100-4-12=84$

$x=4 \quad y=12 \quad z=84$

Ahora veamos si satisface la segunda ecuación:

$3x+5y+\frac{z}{3}=100$ monedas

$3(4)+5(12)+\frac{84}{3}=100 \Rightarrow 12+60+28=100$

$100=100 \Rightarrow$ si se cumple

De manera similar también encontramos otras dos soluciones:

si $x=11 \Rightarrow y=\frac{100-44}{7}=8$

$z=100-x-y \Rightarrow z=100-11-8=81$

$x=11 \quad y=8 \quad z=81$

- si $x=18 \Rightarrow y=\frac{100-4.18}{7}=4$

$z=100-x-y \Rightarrow z=100-18-4$

$z=78$

$x=18 \quad y=4 \quad z=78$

Tenemos que tener en cuenta que z debe ser un múltiplo de 3 ya que tres pollos cuestan 1 moneda.

Soluciones

Solución I	Solución II	Solución III
$x=4$	$x=11$	$x=18$
$y=12$	$y=8$	$y=4$
$z=84$	$z=81$	$z=78$

★ ¿Es un problema práctico o un acertijo?

El problema planteado es práctico. Llegamos a esta conclusión analizando la metodología utilizada para llegar a las respuestas. Primero establecimos dos ecuaciones distintas y fuimos sustituyendo valores que satisfacieran tanto a "x" como a "y" en las ecuaciones, para donde se utilizó el ensayo y error, el sentido común y lógico.

Descartamos que fuese un acertijo porque estos se pueden resolver solo con lógica y no hubiese requerido el uso de fórmulas algebraicas para encontrar resultados que cumplieran con las condiciones del planteamiento.

(4) Muy buena estrategia

Figura 4.7. Informe 13. Respuesta a la pregunta núm. 5.
Se comprueba la unicidad de las soluciones.

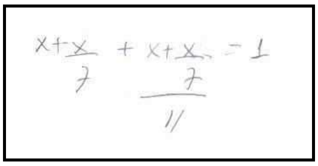


Figura 4.8. Informe 8. Respuesta a la pregunta núm. 1.
Uso inadecuado del signo suma seguido del numerador de una fracción.

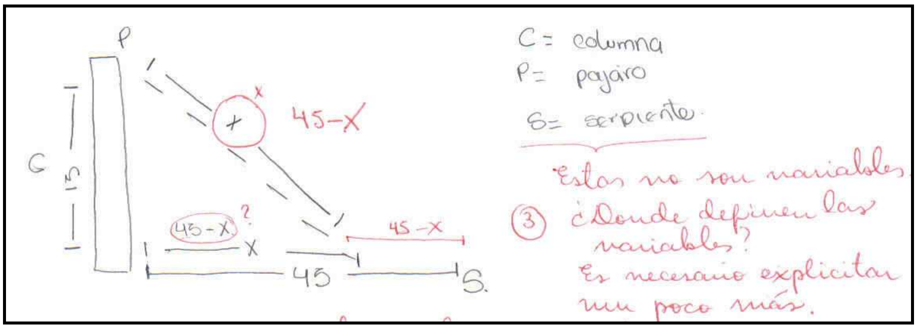


Figura 4.9. Informe 7. Respuesta a la pregunta núm 4. Incoherencias respecto
a la variable indicada en el dibujo del enunciado y la variable definida en el problema.

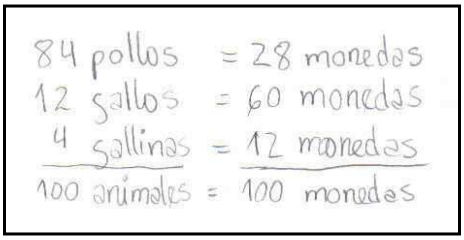


Figura 4.10. Informe 10. Respuesta a la pregunta núm. 5.
Iguala monedas con número de animales

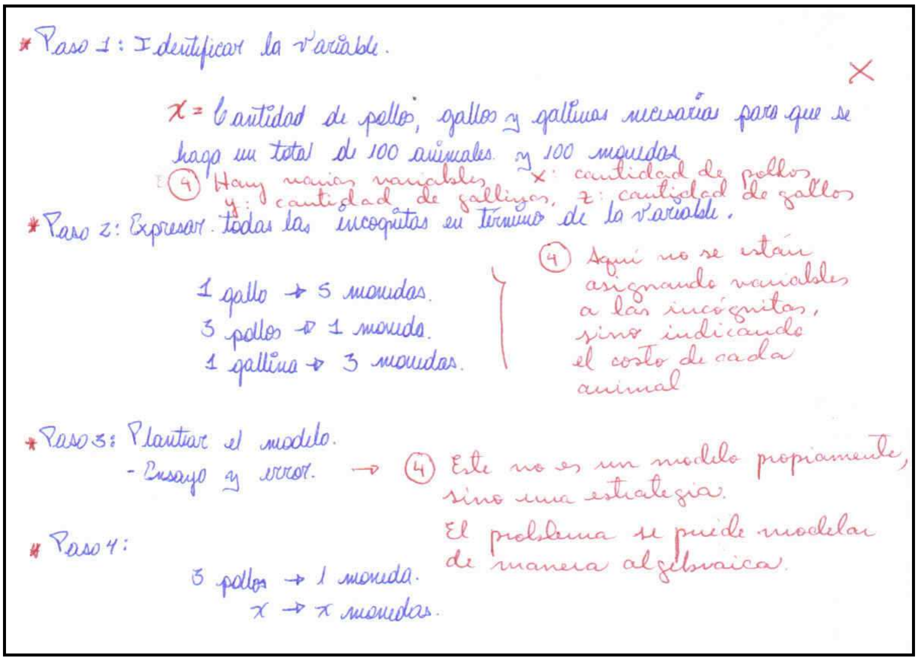
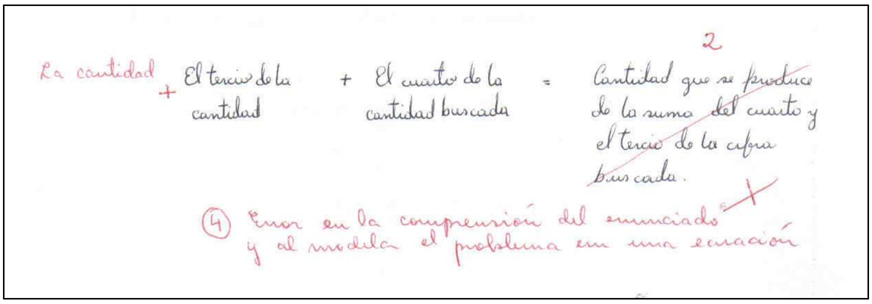


Figura 4.11. Informe 4. Respuesta a la pregunta núm. 5. Intenta resolverlo
con los pasos de modelización del libro de texto, esquema que no se ajusta al problema.



2

La cantidad + El tercio de la cantidad + El cuarto de la cantidad buscada = ~~Cantidad que se produce de la suma del cuarto y el tercio de la cifra buscada.~~

(4) Error en la comprensión del enunciado y al modelar el problema en una ecuación

Figura 4.13. Informe 14. Respuesta a la pregunta núm. 2.
Dificultad que podría deberse a falta de comprensión (del enunciado)
del problema unida a la falta del hábito de reflexión sobre la práctica.