

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS COMPACTOS MOVIBLES

José M. Rodríguez Sanjurjo

Dpto. de Geometría y Topología  
Universidad Complutense de Madrid

ABSTRACT. Some properties of movable compacta are given in connection with quasi-domination and likeness. The main result is the following: Let  $X, Y$  be two compacta. If  $Y$  is movable and  $X$ -like then  $Y$  is quasi-dominated by  $X$ .

El objeto de esta nota es establecer una relación entre dos conceptos que han sido ideados para estudiar las propiedades de tipo global de los espacios metrizable compactos. El primero de ellos, introducido por S. Mardesić y J. Segal en [5], es recogido en la definición siguiente:

DEFINICION 1. Se dice que el espacio métrico  $Y$  es semejante a  $X$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una función continua suprayectiva  $f: Y \rightarrow X$  tal que diámetro  $f^{-1}(x) < \varepsilon$  para todo  $x$  perteneciente a  $X$ .

El segundo concepto pertenece al cuerpo de ideas relativas a la teoría de la forma creada por K. Borsuk [1]. Se trata de la casi-dominación de compactos. Para introducir este concepto necesitamos una definición preliminar.

DEFINICION 2. (Borsuk). Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos compactos que yacen en espacios métricos retracts absolutos (AR)  $M$  y  $N$  respectivamente. Una sucesión de funciones continuas  $f_k: M \rightarrow N$ ,

$k=1,2,\dots$  se denomina sucesión fundamental de X en Y relativamente a M,N si para todo V, entorno de Y en N, existe U, entorno de X en M tal que  $f_k|_U$  es homotópica ( $\approx$ ) a  $f_{k+1}|_U$  en V para casi todo k. La sucesión fundamental anterior se denotará por  $\underline{f}=\{f_k, X, Y\}_{M,N}$ .

Dadas dos sucesiones fundamentales

$$\underline{f}=\{f_k, X, Y\}_{M,N}, \quad \underline{g}=\{g_k, X, Y\}_{M,N}$$

y un entorno V de Y en N es posible definir el concepto de V-homotopía entre  $\underline{f}$  y  $\underline{g}$  (ver [3]) y a partir de él el concepto de casi-dominación, debido a Borsuk [3].

DEFINICION 3. Se dice que Y es casi-dominado por X (relativamente a M,N) si para todo entorno V de Y en N existen sucesiones fundamentales  $\underline{f}=\{f_k, X, Y\}_{M,N}$ ,  $\underline{f}'=\{f'_k, Y, X\}_{N,M}$  tales que la composición  $\underline{f}\underline{f}'$  es V-homotópica a la sucesión fundamental identidad  $i_{Y,N}$ .

Es sabido que si la forma  $F(Y)$  es menor o igual que  $F(X)$  entonces Y es casi-dominado por X. El papel de los espacios M y N en la definición 3 es inessential, verificándose análoga relación de casi-dominación entre copias homeomórficas de X e Y que yacan en otros espacios AR. Por esta razón se suele adoptar con frecuencia el cubo de Hilbert,  $Q$ , como espacio ambiente.

Una importante propiedad que se conserva por la casi-dominación es la movilidad (ver [2]) que definimos a continuación.

DEFINICION 4. Sea X una parte compacta de Q. Diremos que X es movible si para todo entorno  $\hat{U}$  de X en Q existe  $U_0$  entorno de X tal que para todo entorno U de X existe una homotopía  $\phi_U: U_0 \times I \rightarrow \hat{U}$  tal que  $\phi_U(x, 0) = x$  y  $\phi_U(x, 1) \in U$  para todo x perteneciente a  $U_0$ . Al entorno  $U_0$  se le llama asociado a  $\hat{U}$ .

En el siguiente teorema encontramos una sencilla formulación de la casi-dominación para compactos movibles.

TEOREMA 1. Sean X e Y partes compactas y movibles de Q. Una condición necesaria y suficiente para que Y sea casi-dominado por X es que para todo entorno V de Y en Q exista una función

continua  $f: X \rightarrow V$  tal que para alguna extensión continua  
 $\hat{f}: \hat{U} \rightarrow V$  exista una función  $g: Y \rightarrow U_0$  (donde  $U_0$  es asociado  
a  $\hat{U}$  ) de modo que  $\hat{f} \cdot g$  sea homotópica en  $V$  a la inclusión  $i_{Y,V}$ .

Una pequeña modificación del teorema 1 es de utilidad en la prueba del siguiente resultado.

**TEOREMA 2.** Sea  $Y$  un espacio métrico compacto y movable. Si  $Y$  es semejante a  $X$  entonces  $Y$  es casi-dominado por  $X$ .

Borsuk ha encontrado un contraejemplo [2] de espacios móviles  $X$  e  $Y$  tales que  $Y$  es semejante a  $X$  pero  $F(Y)$  no es menor que  $F(X)$ .

Del teorema 2 se desprende fácilmente el siguiente

**COROLARIO 1.** Si  $Y$  es FANR y semejante a  $X$  entonces  $F(Y) \leq F(X)$ .

#### REFERENCIAS.

- [1]. K. BORSUK. Concerning homotopy properties of compacta, Fund. Math. 62. (1968) pp. 223-254.
- [2]. \_\_\_\_\_. Theory of Shape. Polish Scientific Publishers, Varsovia (1975).
- [3]. \_\_\_\_\_. Some quantitative properties of shapes, Fund. Math. 93 (1976) pp. 197-212.
- [4]. J. DYDAK y J. SEGAL. Shape Theory. Springer Lecture Notes Vol 688. Berlin, (1978)
- [5]. S. MARDESIC y J. SEGAL.  $\epsilon$ -mappings onto polyhedra. Trans. Amer. Math. Soc. 109. (1963), pp. 146-164.