

1. Introducción a las EDPs

Para las EDOs se suelen plantear problemas de valores iniciales, casi siempre de solución única. Para resolverlos (cuando se puede) se suele hallar primero la solución general e imponer después uno o varios (dependiendo del orden) datos iniciales.

En este capítulo describiremos los problemas análogos para las EDPs y veremos los métodos que permiten hallar sus soluciones a través de integraciones. La variedad y complicación será mucho mayor que en las ordinarias. Por ejemplo, casi nunca se podrá hallar la solución general de una EDP.

Comenzamos en la sección 1.1 tratando las EDPs **lineales de primer orden en dos variables**, es decir, ecuaciones del tipo:

$$[1] \quad A(x, y) u_y + B(x, y) u_x = H(x, y) u + F(x, y),$$

con pocas aplicaciones físicas, pero que plantean de forma sencilla los problemas de las de segundo orden. Serán resolubles si es posible hallar las soluciones de una EDO de primer orden, llamadas curvas **características** de [1]. En la solución general de [1] aparece una función p arbitraria (como en el ejemplo $u_x = 0$, de solución $u(x, y) = p(y)$, para cualquier p). Para precisar esta p fijaremos el valor de la solución a lo largo de una curva G del plano xy (**problema de Cauchy**). Un caso particular será el **problema de valores iniciales**, si imponemos $u(x, 0) = f(x)$. La solución quedará determinada si G no es tangente a las características.

En 1.2 abordamos las EDPs **lineales de segundo orden en dos variables**:

$$[2] \quad L[u] \equiv Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Hu = F(x, y)$$

Aunque no es mucho más complicada la teoría para coeficientes variables, nos limitaremos a considerar que $A, \dots, H$ son constantes. Para intentar resolver [2], se escribirá, mediante **cambios de variables**, en la forma más sencilla posible (**forma canónica**) en las nuevas variables ξ, η , lo que llevará a su clasificación en ecuaciones **hiperbólicas, parabólicas y elípticas**.

En pocos casos, a partir de la forma canónica, se podrá hallar la solución general, que dependerá de dos funciones p y q arbitrarias, que se pueden fijar con datos de Cauchy o iniciales análogos a los de [1]. La única de las EDPs clásicas resoluble por este camino es la **ecuación de ondas** $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, para la que serán:

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad [\text{forma canónica}]$$

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct) \quad [\text{solución general}]$$

Partiendo de esta solución general se deducirá la **fórmula de D'Alembert** que expresa su solución en términos de la posición y velocidad iniciales:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Los datos iniciales puros solo se imponen a las ondas, pues no tienen sentido físico y plantean problemas matemáticos en las otras dos ecuaciones clásicas. Las condiciones iniciales y de contorno ligadas a un problema real son diferentes para cada uno. No hay teoría general de EDPs que abarque todas las posibilidades. En cada caso hay que comprobar que el problema está "**bien planteado**", es decir, que tiene **solución única que depende continuamente de los datos** (es fácil verlo para las EDOs). La sección 1.3 describe los diferentes problemas asociados a las EDPs clásicas, interpreta físicamente el significado de las diferentes condiciones adicionales y precisa su unicidad. Todos ellos tendrán solución única, excepto el llamado "problema de Neumann" para Laplace.

En la sección 1.4 nos dedicaremos a sacarle jugo a la citada fórmula de D'Alembert que da la solución del problema puro de valores iniciales para la cuerda infinita. Veremos que la solución $u(x, t)$ resulta ser la suma de dos ondas que se mueven en sentido opuesto a velocidad c . Daremos también una fórmula para las soluciones de la **ecuación no homogénea** [con fuerzas externas $F(x, t)$]. Comprobaremos cómo, **extendiendo de forma adecuada los datos iniciales** a todo $\mathbf{R}$, podemos abordar problemas con **condiciones de contorno**. Primero para la cuerda **semi-infinita** (a la que se pueden reducir las ondas en el espacio con simetría radial) y luego para la **acotada**. Al estar manejando funciones con expresiones distintas en diferentes intervalos, dar la solución explícitamente lleva, en general, a largas discusiones. Nos conformaremos muchas veces con hallar su expresión para valores de t o x fijos o con los dibujos de la solución.

En 1.5 definiremos la **transformada de Fourier** $\mathcal{F}$ de una función f :

$$\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

y veremos algunas de sus propiedades que permitirán resolver unas cuantas EDPs en **intervalos no acotados** (en ellos no se podrá utilizar la separación de variables del capítulo 4 por no aparecer problemas de Sturm-Liouville).

Las transformadas de Fourier de derivadas harán desaparecer las derivadas:

$$\mathcal{F}[f'] = -ik\mathcal{F}[f], \quad \mathcal{F}[f''] = -k^2\mathcal{F}[f].$$

Por eso, aplicando $\mathcal{F}$ a un problema de EDPs en dos variables obtendremos otro para una EDO. Resuelto este segundo problema, para hallar la solución habrá que encontrar una transformada inversa. En particular (además de otros problemas que sabíamos resolver por otros caminos), la $\mathcal{F}$ nos permitirá dar la solución del problema para la **ecuación del calor en varillas no acotadas** (no resoluble con las técnicas de 1.2):

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds$$

De ella se deducirá que, según nuestra ecuación matemática, el calor (a diferencia de las ondas) se transmite a velocidad infinita y que las discontinuidades desaparecen aquí instantáneamente. También se verán problemas en los que aparece la "**delta de Dirac**" $\delta(x-a)$, que será introducida informalmente.

1.1. EDPs lineales de primer orden

Sea [E] $A(x, y) u_y + B(x, y) u_x = H(x, y) u + F(x, y)$, $u = u(x, y)$.

Para resolverla usaremos la EDO de primer orden [e] $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ **ecuación característica**

Suponemos que A y B son de C^1 (con parciales continuas) y que no se anulan a la vez en una región del plano. Entonces [e] tendrá en ella unas curvas integrales:

$$\boxed{\xi(x, y) = K} \quad \text{curvas características de [E]}$$

(que se podrán hallar explícitamente si [e] es separable, lineal, exacta...).

Haciendo el cambio de variable $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = y \end{cases}$ (o bien $\eta = x$), [E] se convierte en:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \\ u_x = u_\xi \xi_x \end{cases} \rightarrow Au_\eta + [A\xi_y + B\xi_x]u_\xi = Hu + F$$

Y como sobre las soluciones $y(x)$ definidas por $\xi(x, y) = K$ se tiene:

$$\xi(x, y(x)) = K \rightarrow \xi_x + \xi_y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}[A\xi_y + B\xi_x] = 0,$$

[E] pasa a ser una ecuación en las variables (ξ, η) en la que no aparece u_ξ :

$$[E^*] \quad \boxed{A(\xi, \eta) u_\eta = H(\xi, \eta) u + F(\xi, \eta)}, \quad u = u(\xi, \eta).$$

Si en vez de $\eta = y$ hubiésemos escogido $\eta = x$ se llegaría a $[E_*] \quad \boxed{Bu_\eta = Hu + F}$.

(Como vemos, tras el cambio **queda el término con la variable elegida**).

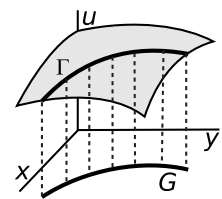
[E*] (o [E_*]) es una **EDO lineal de primer orden** en η si consideramos la ξ constante, resoluble con la fórmula de variación de las constantes, por ejemplo. En su solución hay una constante arbitraria para cada ξ , es decir, una función arbitraria de ξ :

$$[\bullet] \quad u(\xi, \eta) = p(\xi) e^{\int \frac{H}{A} d\eta} + e^{\int \frac{H}{A} d\eta} \int \frac{F}{A} e^{-\int \frac{H}{A} d\eta} d\eta, \quad \text{con } p \text{ función arbitraria de } C^1.$$

Deshaciendo el cambio queda resuelta [E] en función de x e y . En la solución, como se observa, **aparece una función arbitraria p de las características**.

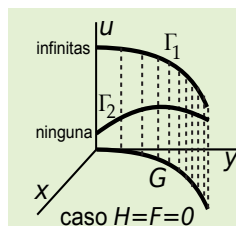
¿Cómo determinar una **única solución** de [E]?, es decir, ¿cómo fijar esa p ? Cada solución describe una superficie en el espacio. Definimos inspirándonos en el problema de valores iniciales para EDOs:

El **problema de Cauchy** para [E] consiste en hallar la solución $u(x, y)$ que tome unos valores dados sobre una curva G del plano xy , o de otra forma, que contenga una curva dada Γ del espacio.



En particular, cuando G es una recta x o $y = \text{cte}$ [por ejemplo, si se pide $u(x, 0) = f(x)$], se tiene lo que se llama un **problema de valores iniciales**.

Pero un problema de Cauchy puede **no tener solución** o que **no sea única**.



Analicemos lo que ocurre en un caso sencillo de la EDP [E]:

La solución general de $(\circ) \quad Au_y + Bu_x = 0$ pasa a ser $u(x, y) = p(\xi(x, y))$.

Cada solución toma valor constante sobre cada característica $\xi(x, y) = K$.

Si la curva G donde se dan los datos es una de ellas se debe exigir que Γ esté en un plano horizontal $z = C$. Entonces habrá infinitas soluciones [una para cada función $p \in C^1$ con $p(K) = C$]. Pero si Γ no tiene z constante, no hay ninguna solución que contenga a Γ .

Observemos de paso que $(\circ)$ se puede leer como que es 0 la derivada de $u(x, y)$ según el vector (B, A) , de pendiente B/A . Debe u ser constante en esa dirección y esto lo cumplen las soluciones de la ecuación característica (e), que aparece aquí de modo natural.

Ej. 1. $(2x-y)u_y + xu_x = -yu$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + 2$ es lineal $\rightarrow y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int 2x dx = \frac{C}{x} + x$.

Las características son hipérbolas: $x(y-x)=C$.

También exacta: $(y-2x)+x\frac{dy}{dx}=0$. $U_x=y-2x, U=yx-x^2+p(y), xy-x^2 \stackrel{\uparrow}{=} C$.
 $M_y \equiv 1 \equiv N_x$ $U_y=x, U=xy+q(x)$

O bien: $y=xz \rightarrow \int \frac{dz}{z-1} = -\int \frac{2dx}{x} + C, \ln(z-1)=C-2\ln x, z-1=\frac{y}{x}-1=\frac{C}{x^2}$.

$\begin{cases} \xi=xy-x^2 \\ \eta=x \end{cases}, u_\eta = -\frac{y}{x}u = -(1+\frac{\xi}{\eta^2})u, u=p(\xi)e^{\frac{\xi}{\eta}-\eta}, u(x,y)=p(xy-x^2)e^{y-2x}$ (solución general).
 lineal homogénea

[Peor: $\begin{cases} \xi=xy-x^2 \\ \eta=y \end{cases}, \eta^2-4\xi=(y-2x)^2 \rightarrow u_\eta = \frac{y}{y-2x}u = \frac{\eta}{\eta^2-4\xi}u \rightarrow u=p(\xi)e^{\sqrt{\eta^2-4\xi}}=p(xy-x^2)e^{y-2x}$].

Impongamos ahora diferentes datos de Cauchy a esta EDP y veamos lo que nos sucede:

i) $u(1,y)=e^y \rightarrow p(y-1)e^{y-2}=e^y, p(y-1)=e^2$. Es $p(v)=e^2 \forall v$ y así $u(x,y)=e^{y-2x+2}$.

Estos cálculos han determinado una única solución del problema de valores iniciales.

ii) $u(x,x-1)=1 \rightarrow p(-x)=e^{x+1} \rightarrow p(v)=e^{1-v}, u(x,y)=e^{x^2-xy+y-2x+1}$, también única.

Aquí parece claro, pero para precisar la p despejaríamos en general (si se puede) la x en función de v y la sustituiríamos: $-x=v \rightarrow x=-v$...

iii) $u(0,y)=e^y$ y iv) $u(0,y)=1$ darán problemas por estar dados sobre una característica.

[$x=0$ es clara curva integral, aunque no venga recogida por la primera solución general de arriba].

Para iii): $p(0)e^y=e^y \rightarrow p(0)=1$. $\forall p \in C^1$ que lo cumpla tenemos una solución. Hay infinitas.

Por ejemplo, tomando $p(v) \equiv 1$ es $u=e^{y-2x}$, con $p(v)=e^v$ es $u=e^{xy-x^2+y-2x}$, ...

Para iv): $p(0)e^y=1, p(0)=e^{-y}$ es imposible. No hay solución con ese dato.

Datos sobre características dan siempre 0 o ∞ soluciones

[pues se acaba en $p(\text{cte})=\text{algo}$, que puede ser constante o no].

Veamos la unicidad en general. Suponemos que se busca la solución que cumple el dato

[d] $u(g(s), h(s))=f(s)$, g, h y f derivables [curva $G=(g, h)$ y dato son suaves].

Sustituyendo [d] en [•] y despejando p : $p(\xi(g(s), h(s)))=R(s)$, con R conocida. Como sugerimos arriba, llamemos $v=\xi(g(s), h(s))$. Si se puede despejar s en función de v de forma única $s=s(v)$, la $p(v)=R(s(v))$ queda fijada y habrá una única solución de [E] satisfaciendo ese dato.

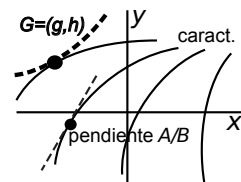
Sabemos que esta función inversa existe seguro en un entorno de cada s_0 para el que sea:

$$\left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=s_0} = \frac{d}{ds} [\xi(g(s), h(s))]_{s=s_0} = \nabla \xi(g(s_0), h(s_0)) \cdot (g'(s_0), h'(s_0)) \neq 0.$$

Como $\nabla \xi$ es perpendicular a las características y (g', h') es tangente a la curva G , deducimos:

Si G no es tangente en ningún punto a las características hay solución única del problema de Cauchy en un entorno de G .

La tangencia se puede ver sin resolver la EDO [e], a partir de su campo de direcciones: el vector (B, A) es tangente a sus soluciones y $(A, -B)$ es perpendicular. Resumiendo todo:



Teor.

Sea $G=(g, h)$ y llamemos $T(s) \equiv g'(s)A(g(s), h(s)) - h'(s)B(g(s), h(s))$.
 Si $T(s) \neq 0 \forall s$ existe solución única de [E] cumpliendo [d]. G es tangente a alguna característica en un punto $(g(s_0), h(s_0))$ si y solo si $T(s_0)=0$.

[$T(s) \equiv 0 \forall s \Rightarrow G$ es una característica, puesto que es tangente en cada punto].

Estudiemos de nuevo la unicidad del ejemplo 1, ahora que tenemos teoría general:

Para i) el dibujo ya mostraba que $x=1$ no era tangente a las características.

Exactamente lo mismo lo asegura $T(y)=0 \cdot (2-y) - 1 \cdot 1 \equiv -1 \neq 0 \forall y \Rightarrow$ unicidad.

Para ii) tampoco es tangente $y=x-1$ y además es $T(x)=1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x = 1 \neq 0$.

Para los otros: $T(y)=(-y) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \equiv 0$, lo que confirma que G es característica.

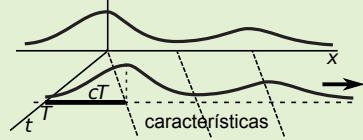
Veamos más ejemplos. En los dos primeros no hay problemas de unicidad, y además la ecuación $[E^*]$ o $[E_*]$ que aparece se limita a un simple integración.

Ej. 2. $\boxed{u_t + cu_x = 0}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \rightarrow x - ct = K$ (características) $\rightarrow u = p(x - ct)$ solución general.

$u(x, 0) = p(x) = f(x) \rightarrow u(x, t) = f(x - ct)$, solución única del problema de valores iniciales.

Para dibujar la gráfica de u en función de x para cada $t = T$ fijo basta trasladar la de $f(x)$ una distancia cT (hacia la derecha si $c > 0$). Se puede interpretar la solución como una onda que viaja a lo largo del tiempo.

[Situación similar se dará en la ecuación de ondas].



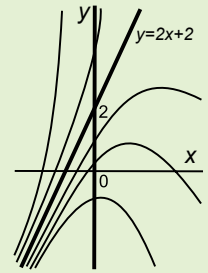
Ej. 3. $\boxed{(y-2x)u_y + u_x = y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{1}$, $y = Ce^x + 2x + 2 \rightarrow (y-2x-2)e^{-x} = C$

$\begin{cases} \xi = (y-2x-2)e^{-x} \\ \eta = x \text{ (parece mejor)} \end{cases} \rightarrow u_\eta = y = \xi e^\eta + 2\eta + 2 \rightarrow u = p(\xi) + \xi e^\eta + \eta^2 + 2\eta$
 $u = p[(y-2x-2)e^{-x}] + y + x^2 - 2$.

[Escogiendo $\eta = y$ no se podría despejar la x de $\xi = (\eta - 2x - 2)e^{-x}$].

$p(y-2) + y - 2 = y - 2$, $p(y-2) = 0 \rightarrow p(v) = 0 \forall v$, $u = y + x^2 - 2$.

Solución única porque $x=0$ nunca es tangente a las características, o, lo que es lo mismo, porque $T(y) = 0 \cdot y - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \forall y$.



En los siguientes sí tenemos que resolver lineales en η y además imponemos unos datos con solución única y otros sin ella:

Ej. 4. $\boxed{3yu_y + xu_x = 3u - 3}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} \xrightarrow{\text{lineal}} y = Cx^3$, $\frac{y}{x^3} = C$.

Haciendo $\begin{cases} \xi = yx^{-3} \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = x^{-3}u_\xi + u_\eta \\ u_x = -3yx^{-4}u_\xi \end{cases} \rightarrow 3yu_\eta = 3u - 3$, $u_\eta = \frac{u-1}{\eta}$.

Resolviendo la lineal (y separable): $u = p(\xi)\eta + 1 = p(\frac{y}{x^3})y + 1$.
 (más largo $-\eta \int \eta^{-2} d\eta = 1$)

O bien: $\begin{cases} \xi = yx^{-3} \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = \frac{3u-3}{x} = \frac{3u-3}{\eta}$, $u = q(\xi)\eta^3 + 1 = q(\frac{y}{x^3})x^3 + 1$.

[Las expresiones con p y q dan la misma solución, pues $q(\frac{y}{x^3})\frac{y}{x^3}$ es otra p arbitraria de $\frac{y}{x^3}$].

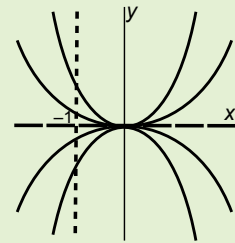
Imponemos un primer dato 'bueno':

$\boxed{u(-1, y) = y} \rightarrow -p(-y)y + 1 = y$, $p(v) = 1 + \frac{1}{v} \rightarrow u(x, y) = y + x^3 + 1$ [o $q(v) = 1 + v$].

Solución única pues $x = -1$ no es tangente a las características como se ve en el dibujo. O porque en el proceso de cálculo quedó $p(v)$ precisada de forma única $\forall v$. O porque $T = 0 \cdot 3y - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$.

Ahora un 'mal' dato: $\boxed{u(x, x^3) = x} \rightarrow p(1)x^3 + 1 = x$ [o $q(1)x^3 + 1 = x$].

Imposible. No existe ninguna solución de la EDP que cumpla ese dato de Cauchy.



Ej. 5. $\boxed{yu_y + xu_x = 2u}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow y = Cx$. $\begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \eta u_\eta = 2u \rightarrow u = p(\xi)\eta^2$.

Imponemos tres datos distintos a la solución general $u(x, y) = p(\frac{y}{x})y^2$:

$\boxed{u(x, 1) = x^3} \rightarrow p(\frac{1}{x}) = x^3$, $p(v) = \frac{1}{v^3}$, $u = \frac{x^3}{y^3}y^2 = \frac{x^3}{y}$. Solución única.

[Pero definida solo si $y > 0$, la solución de un problema de Cauchy, en principio, solo es local].

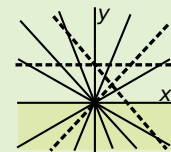
$\boxed{u(x, 1-x) = 2x-1} \rightarrow p(\frac{1-x}{x}) = \frac{2x-1}{(1-x)^2}$, $v = \frac{1}{x} - 1$, $x = \frac{1}{v+1}$, $p(v) = \frac{1}{v^2} - 1$, $u = x^2 - y^2$.

[De nuevo la solución es única por estar dados los datos sobre una recta no característica o porque $T(x) = 1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot x \equiv 1 \neq 0$. Y en este caso la solución es válida en todo $\mathbb{R}^2$].

$\boxed{u(x, x) = 0}$. Dato sobre característica que dará lugar a infinitas o ninguna solución.

[Nos confirma que es característica el hecho de que $T(x) = 1 \cdot x - 1 \cdot x \equiv 0$].

Imponiendo el dato: $p(1)x^2 = 0 \rightarrow p(1) = 0$. Infinitas soluciones. Hay una para cada $p \in C^1$ que se anule en 1. [Por ejemplo son soluciones: $u \equiv 0$, la $u = x^2 - y^2$ de antes...].

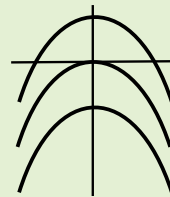


Las dificultades de la unicidad, en los problemas que se han visto hasta ahora, se han limitado a ver lo que sucedía al imponer datos sobre características. En los dos siguientes aparecen problemas de tangencia, que dan dificultades de análisis más sutiles y complicadas de precisar.

Ej. 6. $2xu_y - u_x = 4xy \quad \frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow y+x^2 = K$ características.

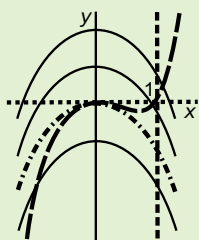
$$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy; \quad u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi) + \eta^2 = p(y+x^2) + y^2.$$

$$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow u = q(\xi) + \eta^4 - 2\xi\eta^2 = q(y+x^2) - 2yx^2 - x^4.$$



Imponemos diferentes datos de Cauchy a la ecuación y analizamos la unicidad:

$$u(1, y) = 0 \rightarrow \begin{cases} p(y+1) + y^2 = 0, & p(v) = -(v-1)^2 \\ q(y+1) - 2y - 1 = 0, & q(v) = 2v - 1 \end{cases} \rightarrow u = 2y - 2yx^2 - x^4 + 2x^2 - 1.$$



[p o q fijadas $\forall v$; $x=1$ no es tangente a las características].

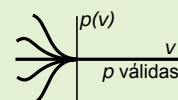
$$u(x, -x^2) = 0 \rightarrow p(0) + x^4 = 0. \text{ Imposible, no hay solución.}$$

$$u(x, -x^2) = x^4 \rightarrow p(0) = 0. \text{ Cada } p \in C^1 \text{ con } p(0) = 0 \text{ da una solución diferente, con lo que existen infinitas.}$$

$$u(x, 0) = 0 \rightarrow p(x^2) = 0. \text{ Solo queda fijada } p(v) = 0 \text{ para } v \geq 0, \text{ pero no hay ninguna condición sobre } p \text{ si } v < 0.$$

Podemos elegir cualquier $p \in C^1$ que valga 0 para $v \geq 0$, con lo que existen infinitas soluciones en un entorno de $(0, 0)$:

$$u(x, y) = y^2 \text{ si } y \geq -x^2, \text{ pero está indeterminada si } y < -x^2.$$



[En $(0, 0)$ es $y=0$ tangente a las características. Lo confirma $T = 1 \cdot 2x - 0 \cdot (-1) = 2x$].

$$u(x, x^3 - x^2) = x^4 - 2x^5 \rightarrow p(x^3) = -x^6, \quad p(v) = -v^2 \quad \forall v \rightarrow u = -2x^2y - x^4 \quad \forall (x, y).$$

Hay **solución única pese a ser la curva de datos tangente a una característica** en el punto $(0, 0)$ [es $T = 1 \cdot 2x - (3x^2 - 2x) \cdot (-1) = -3x^2$]. A veces hay tangencia y existe solución única. La no tangencia es suficiente pero no necesaria.

Ej. 7. $(y+1)u_y + xu_x = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} \rightarrow y = Cx - 1 \rightarrow u = p\left(\frac{y+1}{x}\right).$

Dará solución única este dato inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow u = f\left(\frac{x}{y+1}\right) \quad [y=0 \text{ no es tangente a las características}].$$

$$u(0, y) = 1 \quad x=0 \text{ característica } (T \equiv 0, \text{ cumple } \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y+1}).$$

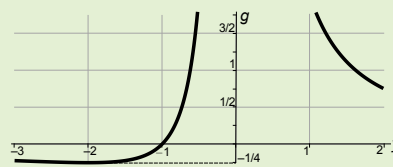
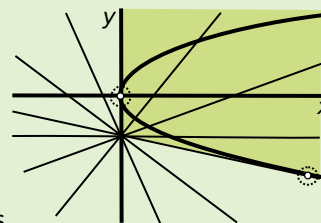
Sabemos que debe tener infinitas soluciones. Para precisarlas

reescribimos $u = q\left(\frac{x}{y+1}\right)$, $q(0) = 1$. [$u=1$, $u=\cos \frac{x}{y+1}$, ... son soluciones con ese dato].

$$u(y^2, y) = 0, \quad T = 2y(y+1) - y^2 = y(y+2) = 0, \quad y=0, -2 \Rightarrow \text{cerca de } (0, 0) \text{ y } (4, -2) \text{ quizás no única.}$$

$$u(y^2, y) = p\left(\frac{y+1}{y^2}\right) = 0 \text{ solo precisa } p(v) \equiv 0 \text{ para } v \geq -\frac{1}{4}, \text{ pues la gráfica de } g(y) = \frac{y+1}{y^2} \text{ es la de la derecha.}$$

Por tanto, solo podemos asegurar que es $u \equiv 0$ para $\frac{4y+x+4}{x} \geq 0$ (en la zona coloreada).



1.2. EDPs lineales de segundo orden. Clasificación

Consideremos $[E] \quad L[u] \equiv \boxed{A u_{yy} + B u_{xy} + C u_{xx} + D u_y + E u_x + H u = F(x, y)}$.

Nos limitamos en estos apuntes al caso de que $A, B, \dots, H$ sean constantes (A, B y C no nulas a la vez). Como en las EDPs de primer orden, quizás un **cambio de variable** bien elegido elimine términos de $[E]$ y aparezca una ecuación que sepamos resolver. Hagamos un cambio genérico y analicemos la expresión de $[E]$ en las nuevas variables:

$\begin{cases} \xi = px + qy \\ \eta = rx + sy \end{cases}$, con p, q, r, s constantes y jacobiano $J = ps - qr \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} u_y &= qu_{\xi} + su_{\eta} & u_{yy} &= q^2 u_{\xi\xi} + 2qsu_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta} \\ u_x &= pu_{\xi} + ru_{\eta} & u_{xy} &= pq u_{\xi\xi} + (ps + qr)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta} \\ & & u_{xx} &= p^2 u_{\xi\xi} + 2pru_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [q^2 A + pqB + p^2 C]u_{\xi\xi} + [2qsA + (ps + qr)B + 2prC]u_{\xi\eta} + [s^2 A + rsB + r^2 C]u_{\eta\eta} + \dots \\ = A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + \dots = F(\xi, \eta) \end{aligned}$$

[los puntos representan los términos en u_{ξ} , u_{η} y u].

Intentemos hacer $A^* = C^* = 0$. Para ello debe ser: $\begin{aligned} q^2 A + pqB + p^2 C &= 0 \\ s^2 A + rsB + r^2 C &= 0 \end{aligned}$.

Si $B^2 - 4AC > 0$ y $A \neq 0$ podemos elegir $p = r = 1$ y $q, s = \frac{1}{2A}[-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}]$.

[Si $A = 0$ y $C \neq 0$ tomamos $q = 1, p = 0$ y $s = 1, r = -\frac{B}{C}$; $A = C = 0$ es caso trivial].

Si $B^2 - 4AC = 0$, q y s coinciden y sería $J = 0$. Y si es < 0 , q y s serían complejas.

Además, es fácil comprobar que $(B^*)^2 - 4A^*C^* = [B^2 - 4AC]J^2$ y, por tanto, el signo de $B^2 - 4AC$ no varía con los cambios de coordenadas. Todo lo anterior nos lleva a definir:

$\begin{aligned} &> 0 \\ \text{Si } B^2 - 4AC &= 0 \\ &< 0 \end{aligned}$	se dice, respectivamente, que la EDP $[E]$ es	hiperbólica parabólica elíptica
---	---	--

Encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir $[E]$ (**forma canónica**) en cada caso. Si es **hiperbólica**, arriba hemos visto que se convierte con el cambio

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \\ \eta = x - \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \end{cases} \quad \text{en } B^* u_{\xi\eta} + \dots = F. \text{ Como } (B^*)^2 > 0, \text{ podemos escribir la}$$

forma canónica de las hiperbólicas: $u_{\xi\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)$.

A las dos familias de rectas $\xi = K, \eta = K$ se les llama **rectas características** de $[E]$.

Si $[E]$ es **parabólica**, solo tenemos $\xi = x - \frac{B}{2A} y$ [**una** familia de rectas características].

Con esta ξ conseguimos que $A^* = 0$, y como $(B^*)^2 - 4A^*C^* = 0$ también es $B^* = 0$. Para η podemos tomar cualquier r y s tales que $J \neq 0$. Se suele tomar $\eta = y$. Así haciendo

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A} y \\ \eta = y \end{cases} \quad \text{y dividiendo por } C^* \text{ se obtiene la}$$

forma canónica de las parabólicas: $u_{\eta\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)$.

Si es **elíptica**, las ξ, η son rectas complejas conjugadas: $\frac{2Ax - By}{2A} \pm i \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} y$ (no hay, pues, características reales). Y no es difícil comprobar que el cambio:

$$\begin{cases} \xi = \frac{2Ax - By}{\sqrt{4AC - B^2}} \\ \eta = y \end{cases} \quad \text{lleva } [E] \text{ a la}$$

forma canónica de las elípticas: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = F^*(\xi, \eta)$.

[Para A, B, C no constantes, si es $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) > 0, = 0$ o < 0 en cada $(x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$, se dice, respectivamente, que $[E]$ es **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica** en Ω . Las características en este caso general son curvas integrales de EDOs de primer orden (quizás no resolubles)].

Ej. 1. $u_{yy} - 4u_{xy} + 5u_{xx} + u = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0$, elíptica.

Copiando el último cambio de la página anterior:

$$\begin{cases} \xi = x+2y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = 2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{cases}$$

Llevándolo a la ecuación se llega a la forma canónica de la EDP: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u = 0$.

Ej. 2. $4u_{yy} - 4u_{xy} + u_{xx} = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ parabólica en todo $\mathbf{R}^2$.

El cambio en este caso sería $\xi = x + \frac{y}{2}$, o quizás mejor (son las mismas características):

$$\begin{cases} \xi = 2x+y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = 4u_{\xi\xi} \end{cases} \rightarrow 4u_{\eta\eta} = 0, \quad u_{\eta\eta} = 0.$$

Esta forma canónica que se resuelve fácilmente: $u_\eta = p(\xi) \rightarrow u = \eta p(\xi) + q(\xi)$.

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es:

$$u(x, y) = y p(2x+y) + q(2x+y), \text{ con } p \text{ y } q \text{ funciones } C^2 \text{ arbitrarias.}$$

Como en este caso, a veces es posible hallar elementalmente la **solución general** de [E] tras ponerla en forma canónica (en la mayoría, como en el ejemplo 1, será imposible). Identifiquemos las **formas canónicas resolubles**:

Si solo hay derivadas respecto a una variable: $u_{\eta\eta} + D^*u_\eta + H^*u = F^*$.

Esta lineal de orden 2 con coeficientes constantes, ordinaria si la vemos como función de η , se integra viendo la ξ como un parámetro (análogo a las de primer orden). Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si solo aparecen $u_{\xi\eta}$ y una de las derivadas primeras: $\begin{cases} u_{\xi\eta} + E^*u_\xi = F^* \\ u_{\xi\eta} + D^*u_\eta = F^* \end{cases}$.

Haciendo en la primera $u_\xi = v$ se obtiene la EDP lineal de primer orden $v_\eta + E^*v = F^*$, resoluble viendo ξ como parámetro. La v contendrá una función arbitraria de ξ . Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Todo es análogo si solo aparece u_η . Y más sencillo aún si no está ninguna de las dos. La ecuación es hiperbólica.

[En las EDOs de segundo orden aparecen dos constantes arbitrarias; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como ocurría en las EDPs de primer orden). Se ve que ninguna ecuación elíptica, ni la del calor $u_t - u_{xx}$ son resolubles por este camino].

[Otras pocas ecuaciones más pueden llevarse a estas formas resolubles con cambios de variable adicionales del tipo $u = e^{py} e^{qx} w$ que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden o el término con la u].

Ej. 3. $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_y + 3u_x = 9 \rightarrow B^2 - 4AC = 9$, hiperbólica.

$$\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \xi = x-y \\ \eta = x-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = -u_\xi - 4u_\eta \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{cases}$$

Entonces: $u_{\xi\eta} + u_\eta = -1$, del segundo de los tipos citados. Para resolverla:

$$u_\eta = v \rightarrow v_\xi = -v - 1 \rightarrow v = p^*(\eta) e^{-\xi} - 1 \rightarrow u(\xi, \eta) = p(\eta) e^{-\xi} + q(\xi) - \eta.$$

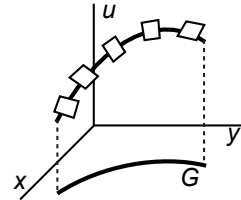
La solución general es: $u(x, y) = p(x-4y) e^{y-x} + q(x-y) + 4y-x$, p, q arbitrarias.

[La ecuación similar $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_x = 9 \rightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_\eta - \frac{1}{3}u_\xi = -1$, no es resoluble].

¿Qué datos adicionales proporcionan problemas bien planteados para una EDP de segundo orden en dos variables lineal [E] $L[u] = F$? En primer lugar, ¿cómo aislar una única solución? Para una EDO de segundo orden se fijaba el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial para tenerla. En una EDP de primer orden dábamos los valores de u en toda una curva G (no tangente a las características). Hemos visto que en los pocos casos en que [E] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución. Todo ello lleva a plantear el **problema de Cauchy** para [E]:

Hallar la solución que tome unos valores dados de u y de la derivada u_n a lo largo de una curva dada G del plano xy .

[Geoméricamente: hallar la superficie solución que contenga una curva dada y tenga a lo largo de ella una familia de planos tangentes también dados. La derivada normal u_n será habitualmente u_x o u_y].



En particular, al tomar como G el eje x se tiene el **problema de valores iniciales** que consiste en hallar la solución de [E] que cumple $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(x)$.

Como ocurría en las de primer orden se puede probar que:

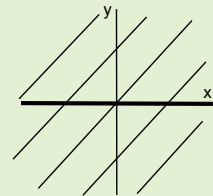
Si los datos son suaves y G no es tangente a las características en ningún punto, el problema de Cauchy tiene solución única en las proximidades de G .

Ej. 4. Sea

$$[P] \begin{cases} u_{yy} + 2u_{xy} + u_{xx} - u_y - u_x = 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$B^2 - 4AC \equiv 0 \quad x - \frac{B}{2A}y = x - y = K$$

parabólica, características.



Como $y=0$ no es tangente a ellas, el problema [P] tiene solución única.

La ecuación resulta ser resoluble y podemos comprobarlo:

$$\begin{cases} \xi = x - y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow u_{\eta\eta} - u_{\eta} = 0 \rightarrow u = p(\xi) + q(\xi)e^{\eta} = p(x-y) + q(x-y)e^y.$$

Imponiendo los dos datos iniciales $[u_y = -p' + (q-q')e^y]$:

$$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) + q(x) = x \\ u_y(x, 0) = -p'(x) - q'(x) + q(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = 1 \\ p'(x) + q'(x) = q(x) \end{cases}$$

$[p'$ y q' representan la misma derivada ordinaria en ambas ecuaciones]

$$\rightarrow q(x) = 1 \quad \forall x \rightarrow p(x) = x - 1 \quad \forall x \rightarrow \boxed{u = x - y - 1 + e^y},$$

solución determinada de forma única por los cálculos anteriores.

[Imponiendo datos de Cauchy sobre una característica, por ejemplo $u(x, x) = f(x)$, $u_y(x, x) = g(x)$, nunca tendríamos solución única o tendríamos infinitas, pues solo aparecerían $p(0)$ y $q(0)$].

¿Será el problema de Cauchy adecuado a todas las EDPs de segundo orden? No, no lo es. En los problemas reales aparecen condiciones mucho más variadas: en unos casos condiciones iniciales y de contorno a la vez, en otros solo de contorno...

Por otra parte, unos datos de Cauchy pueden dar lugar a problemas mal planteados para las EDPs no hiperbólicas. Además de la unicidad, debe haber **dependencia continua**: variando poco los datos, deben variar poco las soluciones. Se pueden dar ejemplos de problemas de Cauchy para Laplace (de solución única, pues sin características reales no puede haber tangencia con la curva de datos), para los que no se tiene la citada dependencia continua.

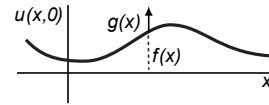
En la próxima sección describiremos los principales problemas asociados a las tres **EDPs clásicas** en dos variables [solo el primero para ondas será de Cauchy]. Para cada uno de ellos habría que probar que 'está bien planteado'. Demostraremos solo parte de las afirmaciones. Para más variables las cosas son análogas y poco más complicadas.

1.3. Los problemas clásicos. Unicidad

Ondas. Tiene solución única dependiente continuamente de los datos el

problema puro de valores iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



para la **cuerda infinita** (de sentido real cuando t es pequeño y estamos lejos de los extremos). Hallemos su solución (es la única ecuación clásica resoluble por este camino) para $F \equiv 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad B^2 - 4AC = 4c^2, \text{ hipérbolica.}$$

A partir de las expresiones halladas en la página 19: $\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c^2[u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] \end{cases}$

$$\rightarrow -4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{forma canónica} \rightarrow u_{\xi} = p^*(\xi) \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta).$$

Luego la **solución general de la ecuación de ondas homogénea** es:

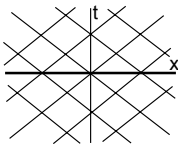
$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct), \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2.$$

Imponemos los datos para aislar la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{1}{c}g(x) \end{cases} \rightarrow 2p'(x) = f'(x) + \frac{1}{c}g(x) \\ \rightarrow p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k \rightarrow q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k \rightarrow$$

fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad [\text{Para que } u \text{ sea } C^2, \text{ debe } f \in C^2 \text{ y } g \in C^1].$$



La unicidad del problema de Cauchy (P_1) la asegura el hecho de que imponemos los datos sobre la recta $t=0$ no característica.

Probemos, si $F \equiv 0$, la dependencia continua. Las soluciones $u(x, t)$ y $u^*(x, t)$ para datos iniciales próximos son cercanas en intervalos de tiempo finitos:

Si $|f(x) - f^*(x)| < \delta$ y $|g(x) - g^*(x)| < \delta \forall x$, para $t \in [0, T]$ se tiene:

$$|u - u^*| \leq \frac{1}{2}|f(x + ct) - f^*(x + ct)| + \frac{1}{2}|f(x - ct) - f^*(x - ct)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s) - g^*(s)| ds \\ < \delta + \frac{\delta}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds = \delta(1 + T) < \epsilon \quad \forall x \text{ y } \forall t \in [0, T], \text{ si } \delta < \frac{\epsilon}{1+T}.$$

Otro problema bien planteado es el de la **cuerda acotada** cuyos extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas (que estén fijos es un caso particular). Hay entonces dos **condiciones de contorno** adicionales:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Demostremos su **unicidad** (veremos que la solución existe, como en otros casos, hallándola explícitamente [en la sección 1.4 mediante extensiones o en 4.2 por separación de variables]; no probamos la dependencia continua). Sean u_1 y u_2 soluciones de (P_2) y sea $u = u_1 - u_2$.

Entonces u cumple: (P_0) $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$

Probemos que $u \equiv 0$. Integremos la identidad $u_t[u_{tt} - c^2 u_{xx}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] - c^2 \frac{\partial}{\partial x} [u_t u_x]$ para x entre 0 y L y t entre 0 y T cualquiera, suponiendo u solución de (P_0):

$$\frac{1}{2} \int_0^L [u_t^2 + c^2 u_x^2]_{(x,0)}^{(x,T)} dx - c^2 \int_0^T [u_t u_x]_{(0,t)}^{(L,t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^L [u_t(x, T)^2 + c^2 u_x(x, T)^2] dx = 0 \\ \text{pues } u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_t(x, 0) = u_x(x, 0) = u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0.$$

El último corchete es ≥ 0 y es función continua de x . Para que la integral se anule debe ser $u_t(x, T) = u_x(x, T) = 0$ si $0 \leq x \leq L$ y para cualquier T . Por tanto $u(x, t)$ es constante y como $u(x, 0) = 0$ debe ser $u = u_1 - u_2 \equiv 0$. Hay unicidad.

Calor. Para la **varilla infinita** se prueba que está bien planteado:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas, para fijar las posteriores.

[No podemos dar arbitrariamente la $u_t(x, 0)$ pues debe ser $u_t(x, 0) = kf''(x) + F(x, 0)$ si u es solución ($t=0$ es característica y (P_3) no es buen problema de valores iniciales)].

Para la **varilla acotada** hay condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos, con diferentes significados físicos cada uno. Si los extremos toman a lo largo del tiempo las **temperaturas dadas** $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$(P_4) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Si lo que fijamos es el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$(P_5) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = h_0(t), & u_x(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

[En particular, si $h_0(t) = h_L(t) = 0$, los extremos están **aislados**].

Un tercer tipo de condiciones de contorno combina u y u_x :

$$u(0, t) - au_x(0, t) = h_0(t) \text{ o } u(L, t) + bu_x(L, t) = h_L(t), \text{ con } a, b > 0$$

Expresan la **radiación libre** de calor hacia un medio a temperatura dada (si el extremo $x=L$ está más (menos) caliente que h_L entonces se irradia (chupa) calor puesto que $u_x = (h_L - u)/b < 0$ (> 0) y el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; lo mismo sucede con el otro extremo).

(P_4) o (P_5) (o cualquiera de los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones descritos) son todos problemas bien planteados.

Probemos que todos tienen solución única. Sean u_1 y u_2 soluciones. Entonces $u = u_1 - u_2$ satisface el problema con $F = f = h_0 = h_L = 0$. Nuestro objetivo es deducir que $u \equiv 0$.

Multiplicando la ecuación por u e integrando respecto a x entre 0 y L se tiene:

$$\int_0^L uu_t dx - k \int_0^L uu_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx - k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} + k \int_0^L u_x^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^L [u(x, t)]^2 dx \leq 0$$

[si $u=0$ o $u_x=0$ en los extremos la última implicación es clara, ya que $k > 0$; es también fácil verlo si $u - au_x = 0$, $a > 0$ o si $u + bu_x = 0$, $b > 0$; no se puede dar ese paso ni probar la unicidad para $a < 0$ o $b < 0$ (físicamente inadmisibles)].

La última integral es una función $U(t)$ no creciente ($U' \leq 0$), que cumple $U(0) = 0$ (pues $u(x, 0) = 0$) y es $U(t) \geq 0$ (integrando positivo). De las tres afirmaciones se deduce que $U(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$. Unicidad.

Una forma alternativa de probar la unicidad de algunos problemas (que además permite atacar la dependencia continua) es utilizar un **principio del máximo** que se ajuste a ese problema. Por ejemplo, es cierto este principio que no demostramos:

$$\text{Si } u \text{ es continua en } [0, T] \times [0, L] \text{ y satisface } u_t - ku_{xx} = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, L), \text{ los valores máximo y mínimo de } u \text{ se alcanzan o bien en } t=0, \text{ o bien en } x=0, \text{ o bien en } x=L.$$

[Si la temperatura inicial en la varilla y la de sus extremos no superan un valor M , no se puede dar en su interior una temperatura mayor que M (sin fuentes externas). La prueba a partir de esto de la unicidad y la dependencia continua de (P_4) sería similar a la que veremos para Laplace y no la hacemos. Si quisiéramos demostrar la unicidad para los otros problemas de la ecuación del calor, necesitaríamos otros principios del máximo diferentes].

Laplace. Los problemas son de contorno. Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet:

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Problema de Neumann:

$$(P_N) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u_n = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$



Donde D es un abierto conexo acotado de $\mathbf{R}^2$, ∂D es su frontera y u_n es la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior $\mathbf{n}$.

Si vemos la ecuación describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) imponemos las temperaturas en el borde y en (P_N) fijamos el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F , f y ∂D son regulares, el (P_D) es un problema bien planteado. Lo resolveremos en recintos sencillos en el capítulo 4. Probemos ahora su unicidad por dos caminos.

Mediante la **fórmula de Green** (generaliza la integración por partes a $\mathbf{R}^2$):

$$\text{Sea } u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}). \text{ Entonces } \iint_D u \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial D} u u_n \, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy$$

$$[\text{Identidad } u \Delta u = \operatorname{div}[u \nabla u] - \|\nabla u\|^2 \text{ y teorema de la divergencia } \iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds].$$

Si u_1 y u_2 son soluciones de (P_D) , $u = u_1 - u_2$ verifica el problema con $F = f = 0$.

La fórmula de Green dice entonces que:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy = 0 \Rightarrow \nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = \text{cte} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ (pues } u = 0 \text{ en } \partial D \text{)}.$$

Probamos de otra forma la unicidad de (P_D) , y también la dependencia continua, con el siguiente **principio del máximo** para Laplace (intuitivamente claro: la temperatura de una placa no supera la máxima de su borde) que no demostramos:

Si u satisface $\Delta u = 0$ en un dominio acotado D y es continua en $\bar{D}$ entonces u alcanza su máximo y su mínimo en la ∂D .

Como $u = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 soluciones, verifica $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D \\ u = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$, se tiene:

$$0 = \min_{\partial D} u \leq \min_D u \leq \max_D u \leq \max_{\partial D} u = 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

Sea u^* solución de (P_D) con $u = f^*$ en ∂D y sea $|f - f^*| < \epsilon$ en ∂D . Entonces:

$$v = u - u^* \rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } D \\ v = f - f^* \text{ en } \partial D \end{cases} \Rightarrow -\epsilon < \min_{\partial D} v \leq v \leq \max_{\partial D} v < \epsilon \Rightarrow |u - u^*| < \epsilon \text{ en } D.$$

Si la diferencia entre datos es pequeña, lo es la diferencia entre soluciones.

Para el (P_N) la situación se complica. En primer lugar, **para que (P_N) pueda tener solución es necesario que F y f satisfagan la relación:**

$$\iint_D F \, dx dy = \oint_{\partial D} f \, ds$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo].

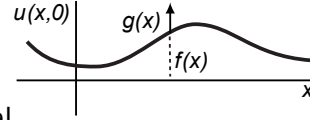
Además, si (P_N) tiene solución, esta contiene una constante arbitraria [lo que podíamos esperar, ya que ecuación y condición de contorno solo contienen derivadas]. También se ve que si queremos repetir la prueba de la unicidad con la fórmula de Green, se pueden dar todos los pasos excepto la última implicación. Se dice que el **problema de Neumann (P_N) tiene unicidad salvo constante**.

[Además se imponen a Laplace condiciones de contorno del tipo $u + a u_n = f$, $a > 0$, y también tienen interés los problemas en que en parte de ∂D hay condiciones tipo Dirichlet, en otra tipo Neumann... (todos son problemas bien planteados). También se tratarán en 4.4 problemas en D no acotados. Para tener unicidad, además de los datos en ∂D , habrá que exigir un 'adecuado comportamiento' en el infinito].

1.4. Ecuación de la cuerda vibrante

En secciones anteriores vimos que para el **problema puro de valores iniciales**:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



las características eran $x \pm ct = K$, la solución general

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct), \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2,$$

y la solución única de (P_1) , satisfaciendo ya los datos iniciales:

$$[1] \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad \text{fórmula de D'Alembert}$$

[Para que u sea C^2 , debía ser $f \in C^2$ y $g \in C^1$ (entonces es **solución clásica o regular**). Si u es continua pero no C^2 se llama 'solución débil', concepto típico en EDPs. En cada caso habría que precisar que se admite como solución débil y comprobar que el problema sigue bien planteado (si más funciones valen como soluciones, ¿seguirá la unicidad?).]

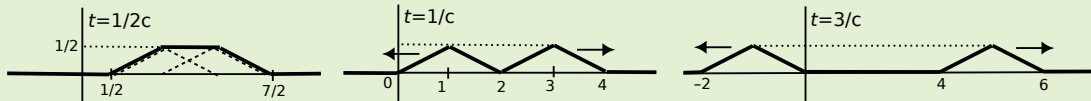
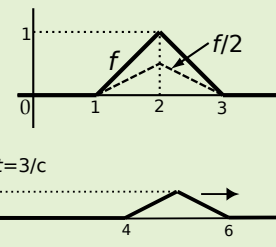
La solución de (P_1) es la suma de dos ondas que viajan a velocidad c , una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. A la vista de [1]:

$$\text{Llamando } G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds : \quad \begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} f(x) - G(x) \text{ va hacia la derecha} \\ p(x) &= \frac{1}{2} f(x) + G(x) \text{ va hacia la izquierda} \end{aligned}$$

Para obtener un dibujo de la solución $u(x, t)$ en diferentes instantes t , una vez identificadas estas ondas viajeras, bastará trasladar sus gráficas y sumarlas (gráficamente). Esto es especialmente sencillo cuando solo hay f (si no hay velocidades iniciales).

Ej. 1. Supongamos $f=0$ salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 2 y que soltamos la cuerda sin impulso ($g=0$).

Dibujemos la solución para distintos t . Bastará trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos [aquí ambas son $\frac{1}{2}f(x)$]:



Ha costado muy poco hacer los dibujos y predecir la evolución de esta solución débil [bastante más costaría dar la expresión analítica de la solución para todo x y todo t]. Los picos de la f inicial siguen indefinidamente y viajan también a velocidad c .

Las cosas se complican cuando viaja la G :

Ej. 2.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases} \end{cases}$$

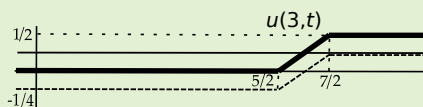
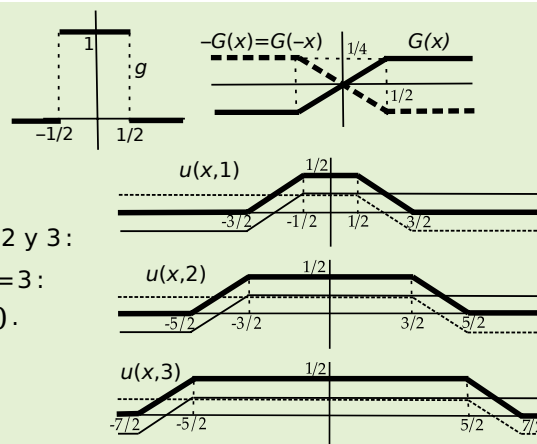
Viajan a izquierda y derecha:

$$u = \overleftarrow{G(x+t)} + \overrightarrow{G(x-t)}, \text{ con } G(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g.$$

Moviendo G dibujamos la cuerda para $t = 1, 2$ y 3:

Es sencillo dibujar también la evolución de $x=3$:

$$u(3, t) = G(3+t) - G(3-t) = G(t+3) + G(t-3).$$



Supongamos ahora que hay **fuerzas externas**. El problema y su solución serán ahora:

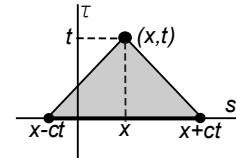
$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$[2] \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s, \tau) ds d\tau$$

Se puede comprobar que la integral doble proporciona la $F(x, t)$ al llevarla a la EDP utilizando esta extensión del teorema fundamental del cálculo (regla de Leibniz de derivación de integrales):

$$\text{Si } H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(s, x) ds \text{ es } H'(x) = f(b(x), x) b'(x) - f(a(x), x) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(s, x) ds \quad (a, b, f \in C^1).$$

Observemos que $u(x, t)$ solo depende de los valores de f en $x-ct$ y $x+ct$ [puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x, t)] y de los de g en el intervalo $[x-ct, x+ct]$. A este intervalo se le llama **dominio de dependencia** del punto (x, t) . Se comprueba también que el recinto descrito por la integral doble es el triángulo del plano $s\tau$ limitado por el eje $\tau=0$ y las características citadas. Así pues, para hallar la solución u en un punto (x, t) se necesita exclusivamente: i) los valores de F en dicho triángulo, ii) los de g en toda su base, iii) los de f en los dos puntos $x-ct$ y $x+ct$.



Ej. 3. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 3 \end{cases}$ Utilizando directamente [2]:

$$u = \frac{1}{2} [(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t}^{x+t} 2 ds d\tau = x + 3t + 2 \int_0^t [t-\tau] d\tau = x + 3t + t^2.$$

A veces es fácil hallar una solución v de la ecuación no homogénea y evitar el cálculo de la integral doble, pues $w = u - v$ conduce a un problema con $F=0$, resoluble con [1] (cuando haya condiciones de contorno, deberán seguir siendo homogéneas). Si F depende solo de x o de t se puede buscar una $v(x)$ o una $v(t)$. En este caso:

$$\begin{aligned} -v_{xx} = 2 &\rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v(x) = -x^2, w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x + x^2, & w_t(x, 0) = 3 \end{cases} \\ \rightarrow w = \frac{1}{2} [(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \int_{x-t}^{x+t} 3 ds &= x + x^2 + t^2 + 3t, \quad u = x + 3t + t^2. \\ v_{tt} = 2 &\rightarrow v(t) = t^2 + 3t \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x, & w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2. \end{aligned}$$

Empecemos a resolver problemas con **condiciones de contorno**. En primer lugar, el problema homogéneo para la **cuerda semi-infinita** y fija en un extremo:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), & u(0, t) = 0 \end{cases}$$

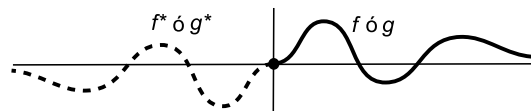
[para que no esté rota, debe ser $f(0)=0$].

La fórmula [1] exige funciones definidas $\forall x$ y ni f ni g están definidas si $x < 0$. ¿Cómo extender estas funciones a todo $\mathbf{R}$? Si llamamos f^* y g^* a sus extensiones y se debe cumplir la condición de contorno:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0,$$

es claro que f^* y g^* han de ser **impares respecto a 0**, es decir,

$$f^*(-x) = -f^*(x); \quad g^*(-x) = -g^*(x).$$



Así pues, la solución de (P_3) es la del siguiente problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x) \\ u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad [3]$$

pues u cumple la ecuación, las condiciones iniciales para $x \geq 0$, y la de contorno. Pero las dificultades prácticas del uso de esta solución es que f^* y g^* tendrán, en general, diversas expresiones en distintos intervalos.

Ej. 4.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2 \pi x, & x \in [2, 3] \\ 0, & x \in [0, 2] \cup [3, \infty) \end{cases}, & u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$$

La solución es $u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$,
con f^* extensión impar respecto del origen.
[f^* es función C^1 . Sería $-\sin^2 \pi x$ en $[-3, -2]$,
pero no lo necesitamos para lo que se pide].

a) $u\left(\frac{7}{6}, 4\right) = \frac{1}{2}\left[f^*\left(\frac{31}{6}\right) + f^*\left(-\frac{17}{6}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{31}{6}\right) - f\left(\frac{17}{6}\right)\right] = -\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{17\pi}{6}\right) = -\frac{1}{8}.$$

 f^* impar $\uparrow$

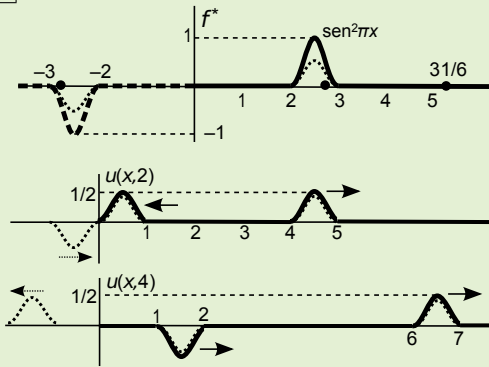
b) Para hacer los dibujos basta llevar rígidamente
la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ hacia la izquierda y derecha 2
unidades en un caso y 4 en el otro y sumarlos.

En $t=2$, la onda que se mueve hacia la izquierda está llegando al origen; en $t=4$ se ha
reflejado e invertido y ahora viaja hacia la derecha.

[Esta reflexión e inversión siempre se dará en los extremos con la condición $u=0$, lo que
permite predecir fácilmente la evolución de estas perturbaciones localizadas en la f . Si
la f fuese no nula, por ejemplo, en todo $[0, \infty)$ o si la perturbación fuese en la g , las
cosas, gráficamente, se pueden complicar mucho].

a) Hallar $u\left(\frac{7}{6}, 4\right)$.

b) Dibujar $u(x, 2)$ y $u(x, 4)$.



[dibujo 3d en la portada de los apuntes]

Ej. 5.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \begin{cases} (x-2)(x-4), & x \in [2, 4] \\ 0, & \text{resto de } [0, \infty) \end{cases} \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

Para aplicar D'Alembert extendemos g a
una g^* impar definida en todo $\mathbf{R}$:

Entonces $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(s) ds$ será la
solución del problema para todo x, t .

a) $u(3, 6) = \frac{1}{2} \int_{-3}^9 g^*_{\text{impar}} = \frac{1}{2} \int_3^4 (s^2 - 6s + 8) ds = \left[\frac{1}{6}s^3 - \frac{3}{2}s^2 \right]_3^4 + 4 = -\frac{13}{3} + 4 = -\frac{1}{3}.$

b) Para $t \geq 7$ es $3-t \geq -4$ y $3+t \geq 10$.

Por tanto, $u(3, t) = \frac{1}{2} \int_{3-t}^{3+t} g^* = 0$, pues las áreas se cancelan.

Para $1 \leq t \leq 5$ es $-2 \leq 3-t \leq 2$ y $3+t \geq 4$, y así g^* solo es no nula en $[2, 4]$:

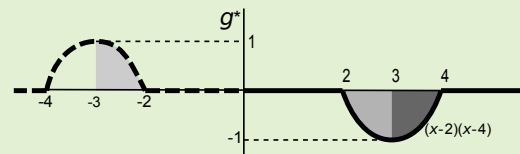
$$u(3, t) = \frac{1}{2} \int_2^4 (s^2 - 6s + 8) ds = -\frac{2}{3} \quad [\text{el doble de la de arriba}].$$

Gracias a la imparidad no se ha necesitado, para hacer los cálculos anteriores, conocer
la expresión de g^* para $x \leq 0$, pero esta es fácil de escribir:

Para $x \in [-4, -2]$ será $g^*(x) = -(x+2)(x+4)$ y claramente es 0 en el resto.
(cambiando x por $-x$ y el signo)

Con esta expresión se obtendrían (trabajando más) los mismos resultados, por ejemplo:

a) $u(3, 6) = \frac{1}{2} \int_{-3}^9 g^* = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-3} (s^2 + 6s + 8) ds + \frac{1}{2} \int_2^4 (s^2 - 6s + 8) ds = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$



Veamos cómo se debe extender si la condición de contorno $u(0, t) = 0$ de (P_3) se sustituye por la
 $u_x(0, t) = 0$ (describe el hecho de dejar al extremo de la cuerda subir y bajar libremente).

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2}[f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c}[g^*(-ct) - g^*(ct)] = 0, \quad f^* \text{ impar y } g^* \text{ par} \Rightarrow$$

se deben extender f y g **de forma par** respecto a 0. Observemos, por ejemplo, que en este
caso las ondas siguen reflejándose en los extremos con $u_x = 0$, pero que no se da la inversión
(pues las ondas que se encuentran en el extremo tienen el mismo signo).

[Anticipándonos a lo que veremos: también se extendería par respecto a x una $F(x, t) \neq 0$,
y en la cuerda finita se extendería par también respecto a $x=L$ si fuese ahí $u_x = 0$].

Siguiendo con la cuerda semi-infinita, veamos cómo se resuelve el problema más general con fuerzas externas y extremo móvil:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t) \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{debe ahora ser} \\ f(0) = h_0(0) \end{array} \right].$$

Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea**, encontrando una v que la cumpla y haciendo el cambio $w = u - v$, ya que entonces será $w(0, t) = 0$, aunque probablemente se complicarán la ecuación y el resto de condiciones.

La v más clara (no siempre la mejor) es: $v(t) = h_0(t)$.

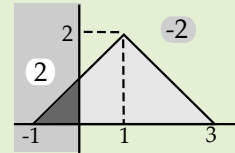
Una vez que tenemos la condición de contorno homogénea, la solución del problema en w la da [2] si sustituimos sus f , g y F por f^* , g^* y F^* , siendo esta última la **extensión impar de F mirándola como función de x** :

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F^*(s, \tau) ds d\tau.$$

Ej. 6. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t^2 \end{cases}$ Hallemos primero la solución para un x y t fijos: $u(1, 2)$.

Para anular la condición de contorno podemos usar la v citada:

$$w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} [(2) \text{área} \triangle + (-2) \text{área} \triangle] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1.$$

[Por ser constantes las F a integrar, nos hemos ahorrado el cálculo de integrales dobles. Pero como esto no se podrá hacer en general, vamos a perder un poco el tiempo en hallar $w(1, 2)$ sin este atajo. El valor que estamos calculando es:

$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau-1}^{3-\tau} F^*(s, \tau) ds d\tau$$

Sobre el triángulo pequeño la integral viene dada por:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau-1}^0 2 ds d\tau = \int_0^1 (1-\tau) d\tau = \frac{1}{2}.$$

Para el otro cuadrilátero hay que dividir en dos el recinto de integración:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{3-\tau} (-2) ds d\tau + \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{\tau-1}^{3-\tau} (-2) ds d\tau = \int_0^1 (\tau-3) d\tau + \int_1^2 (2\tau-4) d\tau = -\frac{7}{2}.$$

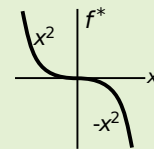
Sumando ambos resultados obtenemos $w(1, 2) = -3$ como antes].

También podríamos conseguir un problema sin F , haciendo el cambio con una v mejor.

Tanteando un poco se ve que $v = x^2 + t^2$ cumple la condición y también la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -x^2, & w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = f^*(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(3) + f^*(-1)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1.$$



Con este segundo cambio no es difícil dar la $u(x, t)$ para todo $x, t \geq 0$ (con el primero nos costaría muchísimo más). Está claro que hay que considerar **dos posibilidades**, pues, aunque $x+t$ es siempre positivo, $x-t$ puede ser también negativo, y la f^* tiene expresiones distintas para valores positivos y negativos:

$$w = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 = -2tx, & x \leq t \\ -\frac{1}{2}(x+t)^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2 = -x^2 - t^2, & x \geq t \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \begin{cases} (x-t)^2, & x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}$$

[Como las ondas viajan a velocidad $c=1$, los puntos a distancia $\geq t$ debían estar parados en el instante t].

Estudiemos la **cuerda acotada** y fija en los extremos [la volveremos a ver en 4.2]:

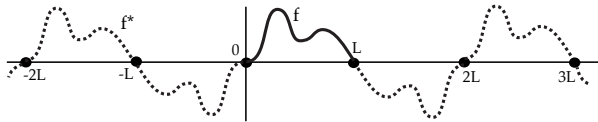


$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

[debe ser $f(0)=f(L)=0$].

Para hallar su solución única con la fórmula de D'Alembert **extendemos f y g a $[-L, L]$ de forma impar respecto a 0 y luego de forma $2L$ -periódica a todo $\mathbf{R}$** , es decir, llamando f^* y g^* a estas extensiones:

$$f^*(-x) = -f^*(x), f^*(x+2L) = f^*(x); \quad g^*(-x) = -g^*(x), g^*(x+2L) = g^*(x).$$



(entonces f^* y g^* también serán impares respecto a L).

Como para (P_3) , la solución de (P_5) se obtiene aplicando [3] al siguiente problema (por la imparidad de los datos se cumplen también las condiciones de contorno):

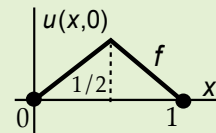
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$$

Para que la u dada por [3] sea C^2 (regular) deben $f \in C^2[0, L]$ y $g \in C^1[0, L]$ y además: $f(0)=f(L)=f''(0)=f''(L)=g(0)=g(L)=0$ [f' y g' existen en 0 y L por la imparidad].

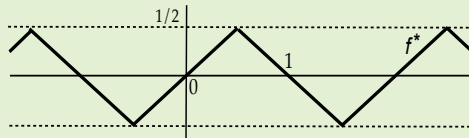
Ej. 7.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



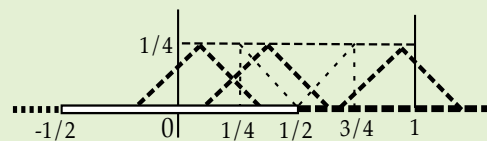
Es complicado hallar explícitamente $u(x, t) \forall x, t$ pues f^* tiene muchas expresiones:



$$f^*(x) = \begin{cases} \dots \\ -1-x, & -3/2 \leq x \leq -1/2 \\ x, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ x-2, & 3/2 \leq x \leq 5/2 \\ \dots \end{cases}$$

Hallar $u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$ exigiría discutir en qué intervalos se mueven $x+t$ y $x-t$, lo que sería muy largo (para hacer estas discusiones conviene dibujar los dominios de dependencia). Algo más fácil es hallar la solución para un t o x fijos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} u(x, \frac{1}{4}) &= \frac{1}{2}[f^*(x + \frac{1}{4}) + f^*(x - \frac{1}{4})] \\ &= \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{x}{2} = 1-x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



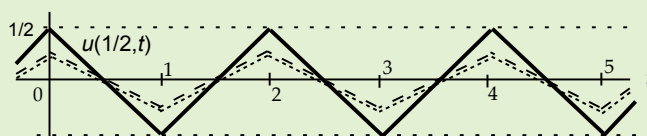
Sí es muy fácil hallar u para un (x, t) dado. No se necesita siquiera la expresión de f^* .

$$\text{Por ejemplo: } u(\frac{1}{4}, 3) = \frac{1}{2}[f^*(\frac{13}{4}) + f^*(-\frac{11}{4})] = \frac{1}{2}[f^*(-\frac{3}{4}) + f^*(-\frac{3}{4})] = -f^*(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{4}.$$

f^* es 2-periódica f^* es impar

Tampoco se precisa la expresión de f^* para hacer dibujos: basta trasladar ondas y sumar.

$$\text{Dibujemos: } u(\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2}+t) + f^*(\frac{1}{2}-t)] = \frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2}+t) - f^*(t-\frac{1}{2})]$$



La gráfica tiene periodo 2. Esto es general: por las propiedades de f^* y g^* la u dada por [3] es $\frac{2L}{c}$ -periódica. [Lo que será evidente en la serie solución de 4.2].

Si queremos resolver el problema más general:

$$(P_6) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases} \quad \text{(hay fuerzas externas y movemos los extremos)}$$

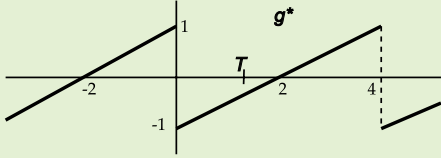
primero, como en (P_4) y otros problemas que veremos, hay que hacer las condiciones de contorno homogéneas, hallando una v que las cumpla y haciendo $w = u - v$. Tanteando con funciones $v = a(t)x + b(t)$ se ve fácilmente que una posible v es:

$$v(x, t) = \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) + \frac{x}{L} h_L(t) \quad [\text{a veces será mejor buscar otra}].$$

La solución del problema en w la da de nuevo [2], poniendo en vez de f , g y F , las extensiones impares y $2L$ -periódicas f^* , g^* y F^* (vista F como función de x).

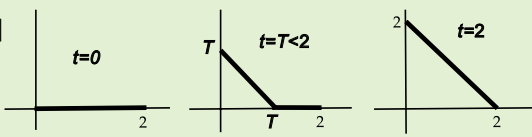
Ej. 8. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t, & u(2, t) = 0 \end{cases}$

Estudiamos la evolución de la cuerda para $t \in [0, 2]$.
Primero usamos la v de arriba $v = t(1 - \frac{x}{2}) \xrightarrow{u=w+v}$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in [0, 2] \\ w(x, 0) = 0, & w_t(x, 0) = \frac{x}{2} - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$$


La solución del último problema es $w(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(s) ds$.

Sea $T \in [0, 2]$ fijo. Como $[x-T, x+T]$ no contiene valores negativos a partir de $x = T$:

$$w(x, T) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x-T}^0 (\frac{s}{2} + 1) ds + \frac{1}{2} \int_0^{x+T} (\frac{s}{2} - 1) ds = x(\frac{T}{2} - 1), & x \in [0, T] \\ \frac{1}{2} \int_{x-T}^{x+T} (\frac{s}{2} - 1) ds = T(\frac{x}{2} - 1), & x \in [T, 2] \end{cases}$$


$\rightarrow u(x, T) = \begin{cases} T-x, & x \in [0, T] \\ 0, & x \in [T, 2] \end{cases}$

La perturbación viaja a velocidad 1. La cuerda debía estar en reposo para $x \geq T$.

Acabemos la sección viendo que las **ondas** $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ **en el espacio con simetría radial** se reducen a cuerdas semi-infinitas. Pasando el laplaciano a esféricas (en 4.4 está su expresión) y quitando los términos con derivadas respecto a θ y ϕ se llega a:

$$(P_r) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{2}{r} u_r] = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = g(r) \end{cases}$$

Haciendo el cambio $v = ur$, la ecuación pasa a ser la de la cuerda: $v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0$.

Y como u debe ser acotada, aparece la condición de contorno: $v(0, t) = 0 \cdot u(0, t) = 0$.

Así pues, el problema en v es del tipo (P_3) que vimos antes:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = rf(r) \equiv F(r), & v_t(r, 0) = rg(r) \equiv G(r), & v(0, t) = 0 \end{cases}$$

Si F^* y G^* son las extensiones impares de $F(r)$ y $G(r)$ la solución de (P_r) será:

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} [F^*(r+ct) + F^*(r-ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} G^*(s) ds,$$

que podemos escribir en la forma $u(r, t) = \frac{1}{r} p(r+ct) + \frac{1}{r} q(r-ct)$ e interpretar como la suma de dos ondas esféricas, cuyos radios decrecen o aumentan a velocidad c .

La magnitud de la perturbación propagada es inversamente proporcional al radio.

1.5. Transformadas de Fourier

Sea $f(x)$ definida en $\mathbf{R}$ y absolutamente integrable $\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty \right]$.

La **transformada de Fourier** de f es la función: $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$.

Si f es además C^1 se puede recuperar a partir de $\hat{f}$ usando la fórmula de inversión:

Teor. 1 $f \in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

[Algunos libros no ponen la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de $\hat{f}$ y ponen $\frac{1}{2\pi}$ en la fórmula de inversión; también se puede ver en la primera fórmula e^{-ikx} y en la segunda e^{ikx}].

[Como otros resultados (algunos se probarán en problemas) no la demostramos].

Se llama a f **transformada inversa** de Fourier de $\hat{f}$. Vamos a denotar también $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ y $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$. Es evidente que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son lineales.

Veamos otras propiedades. La $\mathcal{F}$ hace desaparecer derivadas:

Teor. 2 $f, f', f'' \in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'] &= -ik \mathcal{F}[f] \\ \mathcal{F}[f''] &= -k^2 \mathcal{F}[f] \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = -ik \mathcal{F}[f(x)],$$

pues $f \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ si $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ converge. $\mathcal{F}[f''(x)] = -ik \mathcal{F}[f'(x)] = -k^2 \mathcal{F}[f(x)]$.

Estas transformadas nos aparecerán resolviendo EDPs (probamos las 2 primeras):

Teor. 3 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k) e^{ika}] = f(x-a)$. Si $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $\mathcal{F}[h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$.

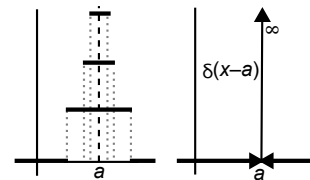
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}, \quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}, \quad a > 0.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} e^{iak}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ik(x-a)} dk = f(x-a). \quad \mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}.$$

Teor. 4 La **convolución** de f y g es la función: $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$. Se tiene $f * g = g * f$, y $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$, si las transformadas existen.

Halleemos la transformada de la 'función' **delta de Dirac**, cuya definición sería exige la llamada 'teoría de las distribuciones', pero que es fácil de manejar formalmente. La $\delta(x-a)$ se puede 'definir' intuitivamente como el 'límite' cuando $n \rightarrow \infty$ de

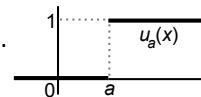
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Esta $\delta(x-a)$ tiene las siguientes propiedades (que nos bastarán a nosotros para trabajar con ella):

$$\delta(x-a) = 0 \text{ si } x \neq a; \quad \int_b^c f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in [b, c] \\ 0 & \text{si } a \notin [b, c] \end{cases}, \quad f \text{ continua}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1.$$

$$\delta(x-a) = \frac{d}{dx} u_a(x), \text{ donde } u_a \text{ es la función paso } u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}.$$

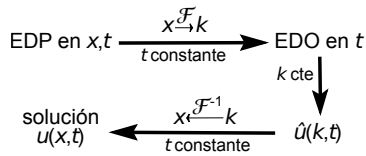


La transformada de la delta es muy fácil de hallar:

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika}.$$

[Obsérvese que formalmente esta función de k (que no tiende a 0 en $\pm\infty$) no tiene transformada inversa, pero con la $\mathcal{F}$ se suele ser riguroso justificando los resultados al final].

Aplicando a una EDP en dos variables la $\mathcal{F}$ en una de ellas aparece una EDO (en la otra variable) para la $\hat{u}$. Resolviendo la EDO se halla $\hat{u}$. Identificando la u de la que proviene o con el teorema 1 se puede a veces dar explícitamente la solución, pero en muchos casos hay que dejar u en términos de integrales no calculables.



En cada uno de los pasos anteriores, se debe tener claro cuáles son las variables y cuáles las constantes. En lo que sigue, haremos lo esquematizado a la izquierda, ya que nuestras ecuaciones serán en (x, t) y siempre haremos la transformada en la x .

Ej. 1.

$$\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Aplicamos la $\mathcal{F}$ en la variable x (se supone que u , g y f son 'buenas', de modo que se pueden usar los teoremas).

Utilizando la linealidad, el teorema 2 y el hecho de que $\mathcal{F}[u_t] = \hat{u}_t$:

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ikx} dx = \hat{u}_t \rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t - ik\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases}$$

Esta lineal de primer orden en t tendrá solución con una constante distinta para cada k :

$$\hat{u}(k, t) = p(k) e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik}, \text{ con } p \text{ arbitraria} \xrightarrow{\text{d.i.}} \hat{u} = \hat{f}(k) e^{ikt} + \hat{g}(k) \left[\frac{e^{ikt} - 1}{ik} \right].$$

Por tanto, a la vista de las dos primeras transformadas del teorema 3, y el 4:

$$u(x, t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi} g(x) * h(x) \text{ siendo } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Como $\int_0^t g(x-u) du = -\int_x^{x-t} g(s) ds$, concluimos que $u(x, t) = f(x-t) + \int_{x-t}^x g(s) ds$.

Obsérvese que la expresión anterior nos da la solución del problema si $f \in C^1$ y g continua, aunque no sean absolutamente integrables, que era necesario para aplicar la transformada. Esta situación es típica utilizando la $\mathcal{F}$.

[La solución la podemos calcular también con las técnicas de la sección 1.1:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} = 1 &\rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u = p(x-t) + \int_0^x g(s) ds \rightarrow \\ p(x) + \int_0^x g(s) ds &= f(x) \rightarrow u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s) ds + \int_0^x g(s) ds \text{ como antes}]. \end{aligned}$$

Ej. 2.

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Aplicando } \mathcal{F}: \begin{cases} \hat{u}_{tt} - ik\hat{u}_t + 2k^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k), \hat{u}_t(k, 0) = 0 \end{cases}$$

Las EDOs lineales de orden 2 con coeficientes constantes de coeficientes complejos se resuelven igual que las de coeficientes reales. A través del polinomio característico:

$$\mu^2 - ik\mu + 2k^2 = 0 \rightarrow \mu = 2ik, -ik \rightarrow \hat{u}(k, t) = p(k) e^{2ikt} + q(k) e^{-ikt}$$

$$\text{Imponiendo los datos iniciales: } \begin{aligned} p(k) &= \frac{1}{3} \hat{f}(k) \\ q(k) &= \frac{2}{3} \hat{f}(k) \end{aligned} \rightarrow \hat{u}(k, t) = \frac{2}{3} \hat{f}(k) e^{-ikt} + \frac{1}{3} \hat{f}(k) e^{2ikt}.$$

$$\text{Y como } \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k) e^{ika}] = f(x-a), \text{ concluimos que } u(x, t) = \frac{2}{3} f(x+t) + \frac{1}{3} f(x-2t).$$

[Solución válida $\forall f \in C^2$, tenga o no transformada].

De nuevo el ejemplo es resoluble también por otros caminos. Los descritos en 1.2:

$$B^2 - 4AC = 9 \text{ hiperbólica de coeficientes constantes} \rightarrow \begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xt} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \end{cases} \rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

$$\rightarrow u(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta), u(x, t) = p(x+t) + q(x-2t), \text{ solución general.}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) + q(x) = f(x) & q(x) = \frac{1}{3} f(x) - \frac{C}{3} \\ u_t(x, 0) = p'(x) - 2q'(x) = 0, p(x) = 2q(x) + C^1 & p(x) = \frac{2}{3} f(x) + \frac{C}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{2}{3} f(x+t) + \frac{1}{3} f(x-2t).$$

[Hay similitudes entre las formas de trabajar con la $\mathcal{F}$ y las características. En ambos casos se 'matan' derivadas, se resuelven EDOs en una variable mirando la otra como constante y aparecen entonces funciones arbitrarias].

Más interés que los ejemplos anteriores, ya que no conocemos ningún otro método para resolverlo, tiene el problema para el **calor en una varilla infinita**:

$$(P) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Supongamos que u y f son suficientemente regulares y que tienden a 0 en $\pm\infty$ lo suficientemente rápido como para poder utilizar los teoremas anteriores. Aplicando la $\mathcal{F}$ en la variable x a la ecuación y al dato inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \quad \text{cuya solución es } \hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}.$$

La solución será la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores (la del segundo la tenemos en el teorema 3):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) f(s) ds \quad [1]$$

$G(x, s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-s)^2/4t}$ es la llamada **solución fundamental** de la ecuación del calor

[es la temperatura del punto x en el tiempo t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$].

Una vez deducida [1], en vez de justificar los pasos que llevaron a ella, se prueba que proporciona realmente la solución de (P) con hipótesis más amplias de las que permiten aplicar la $\mathcal{F}$. En concreto, para cualquier f acotada y continua a trozos, [1] nos da la solución única acotada de (P) que es continua para $t \geq 0$ a excepción de los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

De [1] se deduce también que, según este modelo matemático, el calor (a diferencia de las ondas) se transmite a **velocidad infinita**: si $f > 0$ en un entorno de un x_0 y es nula en el resto, es claro que $u(x, t) > 0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_0|$.

También se comprueba que $u(x, t)$ es C^∞ para $t > 0$ aunque f sea discontinua (aunque sea $f(x) = \delta(x-s)$!). En las ondas se conservaban los picos iniciales.

Ej. 3. Apliquemos [1] para resolver un par de problemas particulares.

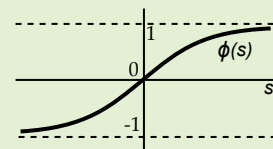
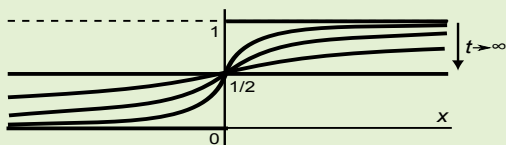
Sea primero $f(x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds.$

Haciendo $v = \frac{s-x}{2\sqrt{t}}$ en la integral será: $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv$, que podemos escribir:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{2} \left[1 + \phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right], \text{ donde } \phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-v^2} dv$$

es la 'función error' que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades y hemos usado la conocida integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$



Como se observa, la solución, suave si $t > 0$, tiende hacia $\frac{1}{2}$ para todo x cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea ahora $f(x) = e^{-x^2}$. Completamos cuadrados y hacemos un cambio de variable:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} e^{-(x-s)^2/4t} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bullet)^2} ds \quad \text{con } \bullet = \frac{s\sqrt{4t+1} - x}{\sqrt{4t+1}}$$

$$\text{Haciendo } z = \bullet \text{ se obtiene: } u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Pero se llega a la solución mucho más rápidamente aplicando directamente la $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -k^2 \hat{u} \\ \hat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \end{cases} \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2(1+4t)}{4}} \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Ej. 4. $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$ Hallamos la solución para una $f(x)$ general y de ella deducimos la solución para $f(x) \equiv 1$.

[Como $\mathcal{F}(1)$ no existe, no se puede resolver directamente el problema con $u(x, 0) = 1$].

$$\begin{cases} \hat{u}_t + (k^2 + 2t)\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow u(\hat{k}, t) = p(k) e^{-k^2 t - t^2} \xrightarrow{d.i.} u(\hat{k}, t) = \hat{f}(k) e^{-t^2} e^{-k^2 t} \rightarrow$$

$$u(x, t) = e^{-t^2} f(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2 t}) = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds.$$

En particular, si $f(x) \equiv 1$, $u = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{-t^2}$.

(s-x)/(2\sqrt{t})=u

[Parece que sería adecuado hacer un cambio de la forma $u = w e^{-t^2} \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) \end{cases}$;

[1] nos da nuestra fórmula y $w \equiv 1$ es solución clara para $f(x) \equiv 1$ (la varilla sigue a 1°)].

En los ejemplos anteriores podíamos dar la transformada inversa (lo que no es habitual). Hacemos uno, primero con la **delta** de Dirac δ , para él solo sabremos hallar la solución para $x=0$:

Ej. 5. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k, 0) = 0 \end{cases}$, $\hat{u}(k, t) = \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2 \sqrt{2\pi}}$ [que no es identificable con la transformada de ninguna función conocida].

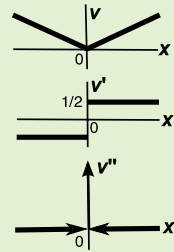
Acudimos al teorema 1: $u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} e^{-ikx} dk$, difícil en general, pero no si $x=0$.

$$u(0, t) = [\text{partes}] = -\frac{1 - e^{-k^2 t}}{2\pi k} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} dk = \frac{\sqrt{t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Podríamos evitar la δ utilizando esta $v = \frac{1}{2}|x|$ que satisface $v'' = \delta(x)$:

Haciendo $w = u + \frac{|x|}{2} \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = |x|/2 \end{cases} \rightarrow w(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |s| e^{-(x-s)^2/4t} ds.$

$$w(0, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |s| e^{-s^2/4t} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} s e^{-s^2/4t} ds = -\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-s^2/4t} \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$



Resolvamos para acabar un problema (algo largo) para la cuerda infinita con una $F = \delta$ (empujamos hacia arriba en el punto central de la cuerda):

Ej. 6. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. Aplicando la $\mathcal{F}$: $\begin{cases} \hat{u}_{tt} + k^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_t(k, 0) = 0 \end{cases}$.

La solución general ($\lambda = \pm ki$ y u_p a simple vista) es:

$$\hat{u}(k, t) = p(k) \cos kt + q(k) \sin kt + \frac{1}{\sqrt{2\pi} k^2} \xrightarrow{d.i.} \hat{u}(k, t) = \frac{1 - \cos kt}{\sqrt{2\pi} k^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \frac{k}{2} t}{k} \right]^2.$$

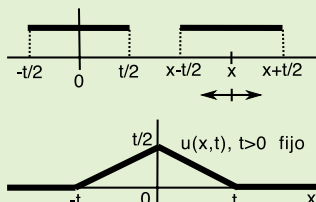
En la h del teorema 3, cuando $a = -b$ se tiene como caso particular:

$$\text{Si } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-b, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad \mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{-ikb}}{ik} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin bk}{k}.$$

La u será, por tanto, la convolución de una h de este tipo consigo misma. En concreto:

$$u = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-s) h(s) ds, \text{ donde } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-t/2, t/2] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}.$$

Discutiendo en qué intervalos el integrando es 1 o 0 según los valores de x se concluye:



Si $x \leq -t$ o si $x \geq t$ es $u = 0$

$$\text{Si } x \in [-t, 0], \quad u = \frac{1}{2} \left[x + \frac{t}{2} - \left(-\frac{t}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} [x + t]$$

$$\text{Si } x \in [0, t], \quad u = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{2} - \left(x - \frac{t}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} [t - x]$$

$$\text{Es decir, } u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \geq t \\ \frac{1}{2} [t - |x|], & \text{si } |x| \leq t \end{cases}.$$

Para hacerlo sin transformadas, mejor utilizamos la $v = \frac{1}{2}|x|$ del ejemplo anterior:

Con $w = u + v$ se obtiene: $\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = |x|/2, w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{4} [|x+t| + |x-t|] - \frac{1}{2} |x|.$

Discutiendo los valores absolutos se llega a la solución de arriba.