

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT04

El destino final del Universo

The final fate of the Universe

Supervisora: María del Prado Martín Moruno

Noah Alberca García

Grado en Ciencias Físicas

Curso académico 2023-24

Convocatoria ordinaria de junio

Calificación: 9,7

El destino final del Universo: Introducción a los sistemas dinámicos en Cosmología

Resumen:

Vivimos en un Universo con geometría plana, en expansión acelerada y dominado dinámicamente por una energía oscura que no comprendemos. Los datos observacionales nos ayudan a entender cómo es el Universo actualmente y cómo era en el pasado. Sin embargo, y como es lógico, estos no aportan ningún tipo de información sobre el futuro. Al no ser capaces de ver el Universo tardío, lo único que pueden hacer los físicos a día de hoy es especular sobre él. Las teorías que surgen sobre el destino del Universo tienen base científica, y aunque no se puedan apoyar en evidencias observacionales, sí siguen los cálculos y las hipótesis de la Relatividad General y la Cosmología moderna.

La energía oscura es la responsable de la expansión acelerada del Universo. A diferencia de lo que ocurre con la gravedad de la materia, el efecto de la energía oscura es repulsivo. Las observaciones apuntaban a que el parámetro de la ecuación de estado de dicha energía era prácticamente $\omega \simeq -1$. Para que la teoría de campos cuánticos fuera estable, $\omega \not\leq -1$. No obstante, los datos observacionales proporcionaban errores demasiado grandes como para despreciar ese caso prohibido, y no fue hasta finales del siglo XX cuando se propuso un tipo de energía oscura que revolucionaría por completo la física fundamental moderna. Se le apodó con el nombre de energía fantasma, la cual efectivamente se regía por una $\omega < -1$, dando lugar a un Universo con una expansión super-acelerada. Fue la responsable de abrir la puerta a una serie de finales del Universo desconocidos hasta el momento.

Abstract:

We live in a Universe with flat geometry, in accelerated expansion and dynamically dominated by a dark energy that we do not understand. Observational data helps us to figure out how the Universe is today and how it was in the past. However, as it is logical, observations cannot provide any information about the future. As we are not able to see the late Universe, all physicists can do today is speculate about it. Theories that arise about the fate of the Universe have a scientific basis, and although they cannot be supported by observational evidence, they follow the calculus and hypothesis of General Relativity and modern Cosmology.

Dark energy is responsible for the accelerated expansion of the Universe. Unlike the force of gravity due to matter, the effect of dark energy is repulsive. The observations pointed out that the parameter of the equation of state of said energy was practically $\omega \simeq -1$. For quantum field theory to be stable, $\omega \not\leq -1$. However, the observational data provided too large errors to disregard that forbidden case, and it was not until the late twentieth century that a type of dark energy was proposed that would completely revolutionize modern fundamental physics. It was called phantom energy, which was effectively governed by $\omega < -1$, resulting in a Universe with a super-accelerated expansion. It was responsible for opening the door to a series of unknown Universe endings.

Índice

1. Introducción	4
2. El modelo ΛCDM	4
2.1. Principio cosmológico	4
2.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	5
2.3. Expansión acelerada	5
2.4. Contenido del Universo	6
2.5. Parámetro de la ecuación de estado	6
3. Energía oscura	7
3.1. La constante cosmológica	7
3.2. Modelos de materia modificada	7
3.2.1. Quintaesencia	8
3.2.2. Fantasmas	8
3.2.3. Gas de Chaplygin	8
4. Finales del Universo	9
4.1. Muerte térmica	9
4.2. Big Rip	10
4.3. Big Freeze	10
5. Sistemas dinámicos	11
5.1. Sistemas dinámicos en Cosmología	11
5.2. Aplicación a modelos específicos	13
5.2.1. Modelo estándar	13
5.2.2. Modelo de quintaesencia	14
5.2.3. Modelo de energía fantasma	18
6. Conclusiones	20

1. Introducción

El modelo cosmológico que a día de hoy mejor explica las propiedades observadas del Universo a gran escala es el modelo Λ CDM. Establece que la expansión acelerada del Universo es consecuencia de la constante cosmológica, un tipo de energía oscura sin dinámica. A pesar de que este modelo es el aceptado mayormente por la comunidad científica, se han propuesto otros cuya fuente de energía oscura es distinta, o que incluso se atreven a modificar la propia teoría de la gravedad como se cita en los capítulos 7, 8 y 9 de la referencia [1]. El destino final del Universo depende de la expansión de este, y por ende está ligado a la energía oscura. Los modelos con una energía oscura que se diluye con el tiempo o que permanece constante como en el modelo estándar llevan al Universo a la muerte térmica. En cambio, si tenemos modelos que predicen una expansión todavía más acelerada que en los casos anteriores, el Universo puede presentar singularidades futuras como se explica en la referencia [2]. Esto ocurre con un Universo gobernado por energía fantasma, que hace que la teoría de campos cuánticos sea inestable [3] y por ello haya problemas de divergencias en el futuro. En algunos casos, estos Universos se comportan asintóticamente como el descrito en el modelo Λ CDM, y dan lugar a eventos abruptos como los comentados en la referencia [4].

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la [Sección 2](#) hacemos un repaso del modelo estándar. Hablaremos de la hipótesis fundamental en la que se sustenta, así como de la métrica que rige el espacio-tiempo en el que vivimos y su dinámica. En la [Sección 3](#) presentamos distintos tipos de energía oscura. Entre ellos están la constante cosmológica, que es el tipo de energía oscura propuesto en el modelo Λ CDM; la quintaesencia [5], que es el modelo más simple de energía oscura dinámica; la energía fantasma [6], que tiene propiedades exóticas; y el gas de Chaplygin [7], que según sus parámetros puede tener naturaleza fantasma o no. Cada tipo de energía oscura puede conducir al Universo a un final distinto, definidos en la [Sección 4](#). Se presenta la muerte térmica [8, 9, 10, 11] y dos tipos de singularidades futuras: el Big Rip [12] y el Big Freeze [13, 14]. Por último, en la [Sección 5](#), estudiamos dos de los finales presentados en la sección anterior a través de sistemas dinámicos [15], utilizando tanto el modelo estándar como otros modelos de energía oscura a través de campos escalares y un potencial exponencial.

2. El modelo Λ CDM

El modelo cosmológico estándar se basa en los principios de la teoría del Big Bang, que dicta que el Universo comenzó en una singularidad con ese mismo nombre hace aproximadamente 13,8 Ga y que desde entonces se ha estado expandiendo y enfriando. Se caracteriza por una serie de variables como los parámetros de densidad Ω ; la constante de Hubble H_0 y la constante cosmológica Λ , que define la energía oscura; utilizadas para describir el ritmo de expansión del Universo, su curvatura y la densidad de materia y energía.

2.1. Principio cosmológico

La mayor parte de los modelos de la Cosmología moderna parten del principio cosmológico [16]. Es una ampliación del principio copernicano, que aceptaba que la Tierra no ocupaba ninguna posición privilegiada en el Universo. Según este principio, a escalas suficientemente grandes (unos 1000 Mpc), el Universo es homogéneo e isótropo (se ve igual en todos los puntos y direcciones).

Diferentes misiones han podido confirmar estas hipótesis. Las observaciones que más luz han arrojado han sido las del fondo cósmico de microondas (CMB). La radiación de este encajaba perfectamente con la de un cuerpo negro a $T = 2,72548 \pm 0,00057$ K según la referencia [17]. Las fluctuaciones de temperatura son del orden de 10^{-5} [18]. Al hablar de perturbaciones tan pequeñas, se concluye que a grandes escalas el Universo es extremadamente homogéneo e isótropo.

2.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrica de FLRW se basa en el principio cosmológico. Es por ello que se toman las propiedades físicas del propio espacio en ciertas coordenadas como no dependientes de la posición ni la dirección. Atendiendo a esto, la descripción geométrica más sencilla que podemos tener es aquella que venga dada por las coordenadas de los observadores comóviles (que ven el Universo como homogéneo e isótropo):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^n) \cdot dx^\mu \cdot dx^\nu = g_{00} \cdot dt^2 + 2 \cdot g_{0i} \cdot dt \cdot dx^i + g_{ij} \cdot dx^i \cdot dx^j. \quad (1)$$

El tener un Universo isótropo implica que no hay una dirección privilegiada. Eso hace que $g_{0i} = 0$. Por otro lado, es interesante utilizar el tiempo propio para los observadores comóviles de tal manera que $g_{00} = -1$:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} \cdot dx^i \cdot dx^j. \quad (2)$$

Si el espacio es maximalmente simétrico por ser homogéneo, también será esféricamente simétrico. Para la zona espacial, eligiendo coordenadas esféricas:

$$g_{ij} \cdot dx^i \cdot dx^j = a^2(t) \cdot [\lambda^2(r) \cdot dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \cdot d\varphi^2)], \quad (3)$$

con $a(t)$ el factor de escala. Al calcular la 3-curvatura de la métrica y sabiendo que al tener un espacio homogéneo debe ser constante (además de evitar singularidades para $r = 0$), tenemos que:

$${}^3R = \frac{2}{a^2(t) \cdot r^2} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left[r \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(r)} \right) \right] \implies \lambda^2(r) = \frac{1}{1 - k \cdot r^2}, \quad (4)$$

donde k denota el valor de la constante. Así pues, nos queda la métrica de FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - k \cdot r^2} \cdot [dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \cdot d\varphi^2)]. \quad (5)$$

La curvatura del espacio se da a través de k . El capítulo 5 de la referencia [19] se extiende en estos cálculos, y muestra que k representa un Universo abierto si su valor es positivo, cerrado si es negativo y plano si es nulo. Las observaciones del CMB de la referencia [20], por su parte, demuestran que el Universo es prácticamente plano con un parámetro de densidad de curvatura $\Omega_k = 0,0005^{+0,0038}_{-0,0040}$.

2.3. Expansión acelerada

En la carrera por medir objetos cada vez más lejanos, los científicos de finales del siglo XX se toparon con una realidad que no les gustó: el Universo estaba en expansión acelerada. A pesar de los intentos de imponer un Universo que se expandiese deceleradamente como el modelo cosmológico correcto, nada podía llevarle la contraria a las supernovas de tipo Ia que hacían de candelas estándar [21].

Es interesante ver lo que implica matemáticamente un Universo de estas características. Para ello partimos de las ecuaciones de Einstein, que describen cómo la materia y la energía interactúan con la curvatura del espacio-tiempo. Estas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$G_{\mu\nu} = 8 \cdot \pi \cdot G \cdot T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot g_{\mu\nu}. \quad (6)$$

La expresión general para las componentes no nulas del tensor de Ricci en la métrica de FLRW plana y su parámetro de curvatura son:

$$R_{00} = -3 \cdot \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = g_{ij} \cdot \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \cdot \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad R = R^\mu_\mu = 6 \cdot \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (7)$$

donde el punto se refiere a la derivada con respecto al tiempo t . En cuanto al tensor energía-momento de un fluido perfecto, este se describe como:

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (8)$$

con ρ la densidad de energía y p la presión. Sustituyendo todo en (6), obtenemos las ecuaciones de Friedmann. Estas describen la evolución de los parámetros de densidad y curvatura del Universo:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3}, \quad 2 \cdot \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 2 \cdot \dot{H} + 3 \cdot H^2 = -8 \cdot \pi \cdot G \cdot p, \quad (9)$$

donde hemos introducido el parámetro de Hubble H . Restando las ecuaciones de (9) nos queda:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G}{3} \cdot (\rho + 3 \cdot p). \quad (10)$$

En un Universo en expansión acelerada $\ddot{a} > 0$. Por lo tanto, la ecuación anterior toma valores positivos, y por ello se debe violar la condición de energía fuerte, que impone $\rho + 3 \cdot p \geq 0$. El lector interesado en las condiciones de energía puede consultar la referencia [22].

2.4. Contenido del Universo

Actualmente los parámetros de densidad de radiación, materia y energía oscura son $\Omega_r \simeq 10^{-4}$, $\Omega_m = 0,3103 \pm 0,0057$ y $\Omega_\Lambda = 0,6897 \pm 0,0057$ según los datos de la referencia [20]. Para poder entender el decaimiento de la radiación y la materia, resulta extremadamente útil obtener la ecuación de continuidad. Esta viene de la conservación del tensor energía-momento:

$$T_{;\nu}^{0\nu} = 0, \quad T^{i\nu}_{;\nu} = 0. \quad (11)$$

La segunda ecuación es trivial, de tal manera que no se puede sacar ningún tipo de información. No obstante, la primera nos lleva directamente a la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3 \cdot H \cdot (\rho + p) = 0. \quad (12)$$

La ecuación de continuidad se puede seguir desarrollando utilizando la ecuación de estado de un fluido bariotrópico perfecto (suponemos que el Universo está dominado por un fluido de estas características) $p = \omega \cdot \rho$ con ω constante. Sustituyéndola en (12), la relación de ρ con el factor de escala es:

$$\rho \propto a^{-3 \cdot (1+\omega)}. \quad (13)$$

Los parámetros ω de la ecuación de estado para la radiación y materia son $\omega_r = 1/3$ y $\omega_m = 0$. Mientras que la constante cosmológica Λ se puede entender como un fluido con $\omega_\Lambda = -1$ y, por tanto, ρ_Λ permanece constante, la radiación y la materia decaen como $\rho_r \propto a^{-4}$ y $\rho_m \propto a^{-3}$.

2.5. Parámetro de la ecuación de estado

El hecho de tener un Universo en expansión acelerada restringe los valores para ω . Como se debe cumplir que $\rho + 3 \cdot p < 0$, hay una cota superior con $\omega < -1/3$. Aunque en el apartado anterior se ha supuesto que ω es una constante, nada impide que haya otras ecuaciones de estado para la energía oscura. Si el fluido fuera dinámico, la ecuación de estado se puede expresar en función del

factor de escala como $p(a) = \omega(a) \cdot \rho(a)$. Tomando una expansión a primer orden entorno al presente ($a_0 = 1$), el parámetro de la ecuación de estado depende de dos constantes ω_0 y ω_a :

$$\omega(a) = \omega_0 + (1 - a) \cdot \omega_a. \quad (14)$$

El modelo Λ CDM es aquel donde $\omega_0 = -1$ y $\omega_a = 0$. No obstante, los datos observacionales de la referencia [20] nos dicen que fijando $\omega_a = 0$, tenemos una $\omega_0 = -1,03_{-0,11}^{+0,10}$, por lo que por el momento no podemos asegurar que $\omega = -1$. Es más, debemos notar que se permite la posibilidad de que $\omega_0 < -1$. Esto supondría la violación de otra condición de energía: la de energía nula, que impone que $\rho + p \geq 0$. El hecho de violarla tiene consecuencias que van más allá de efectos semiclásicos o despreciables [3].

3. Energía oscura

El Universo se está expandiendo de forma acelerada. La responsable de ello es la famosa energía oscura. Hay diferentes candidatos para poder explicar la naturaleza exótica de dicha energía: desde la constante cosmológica, introducida por Einstein en 1917, hasta modelos que modifican el tipo de materia e incluso la propia teoría de la gravedad (en el capítulo 9 de la referencia [1] se habla de ellos, pero en este trabajo no se desarrollarán).

3.1. La constante cosmológica

Cuando Einstein resolvió por primera vez las ecuaciones de campo de la Relatividad General, vio que el Universo se expandía. Esto iba totalmente en contra de la idea preconcebida que tenía de que el Universo era estático. Por aquel entonces, la falta de evidencia observacional sobre la expansión del Universo y los prejuicios filosóficos acerca del Universo como entidad inmutable hicieron que Einstein alterase sus ecuaciones para incluir la constante cosmológica, obteniendo como solución un Universo cerrado que no evolucionaba con el tiempo. Esta modificación alteró las ecuaciones de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = 8 \cdot \pi \cdot G \cdot T_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Poco después las observaciones de Hubble evidenciaron que el Universo se expandía, con lo que la constante cosmológica ya no era necesaria. Sin embargo, con el paso del tiempo, se demostró que Einstein tal vez no estaba equivocado del todo ya que el Universo está expandiéndose de forma acelerada. El hallazgo situó a la constante cosmológica como el mejor candidato de energía oscura. Se interpretó como un fluido perfecto que satisfacía la ecuación de estado $p = -\rho$. Sin embargo, que su valor fuera tan pequeño (según la referencia [20] es de $\Lambda = (2,846 \pm 0,076) \cdot 10^{-122} m_{Pl}^2$) hizo sospechar sobre esta posibilidad. Aún así, a día de hoy describe los datos satisfactoriamente y, de hecho, el modelo Λ CDM se basa en ella para explicar la dinámica de expansión acelerada del Universo.

3.2. Modelos de materia modificada

En los capítulos 7 y 8 de la referencia [1] se hace un amplio repaso de estos modelos. En ellos la energía oscura no viene dada de la mano de una constante cosmológica Λ . El tensor energía-momento de (15) (donde $\Lambda = 0$) contiene una fuente de materia exótica cuya presión es negativa. Se estudian fluidos perfectos cuya ecuación de estado viene dada de la forma más sencilla como $p = \omega \cdot \rho$ donde $\omega < -1/3$ es una constante, aunque hay modelos más avanzados donde se asume una $p = f(\rho)$ más general.

Otro candidato para usurpar el puesto de energía oscura viene de la mano de campos escalares (en lugar de un fluido) como se estudia en [1, 15, 23, 24, 25]. Estos se entenderán realmente como una posible explicación fundamental subyacente al modelo de fluido.

3.2.1. Quintaesencia

Por abuso del lenguaje, la quintaesencia [5] se conoce como energía oscura que viola la condición de energía fuerte pero no la de energía nula. Esto se traduce en un parámetro de la ecuación de estado comprendido entre $-1 < \omega < -1/3$, dejando fuera el valor de $\omega = -1$ por no tratarse de la constante cosmológica. A diferencia de lo que ocurría con ella, la densidad de energía de la quintaesencia no permanece constante: decae con el tiempo como la radiación y la materia, pero más lentamente que estas.

Al igual que hacen en el capítulo 7 de la referencia [23], podemos hacer uso de los campos escalares para describir la quintaesencia. Estos vienen dados por ϕ canónicos con un potencial $V(\phi)$. El lagrangiano \mathcal{L} interactúa con todas las componentes del Universo solo gravitacionalmente. La acción y, por consiguiente, el lagrangiano de los modelos de quintaesencia vienen dados por las expresiones:

$$S = \int d^4x \cdot \sqrt{-g} \cdot \left(\frac{1}{16 \cdot \pi \cdot G} \cdot R + \mathcal{L}_\phi \right) + S_M, \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \cdot g^{\mu\nu} \cdot \partial_\mu \cdot \phi \cdot \partial_\nu \cdot \phi - V(\phi), \quad (16)$$

donde usamos el subíndice M para referirnos al resto del contenido del Universo.

3.2.2. Fantasmas

Estos modelos son más complejos, pero tienen propiedades muy interesantes. El primero en proponer este tipo de modelos fue Starobinsky en una conferencia que dio a finales del siglo XX, aunque fue Caldwell quien se llevó toda la gloria por su artículo [6] de 1998. La energía fantasma viola la condición de energía nula, por lo que $\omega < -1$. Ya no tenemos un fluido cuya densidad de energía decae con el tiempo, sino que crece. Además, la expansión del Universo es más acelerada que en los casos anteriores.

Como veíamos en los modelos de quintaesencia, la energía fantasma también puede venir dada a través de un campo escalar (capítulo 8 de la referencia [1]). Sin embargo, estos presentan marcadas distinciones con su compañero canónico: hablamos de campos escalares no canónicos, y en la [Sección 5.2.3](#) estudieramos el caso donde el término cinético es negativo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \cdot g^{\mu\nu} \cdot \partial_\mu \cdot \phi \cdot \partial_\nu \cdot \phi - V(\phi). \quad (17)$$

Aquí lo que preocupa es la estabilidad inherente a este tipo de campos [3]. Para evitar las inestabilidades, necesitamos considerar teorías donde la interacción entre los campos fantasma y los campos normales sea lo más débil posible.

3.2.3. Gas de Chaplygin

Los dos casos anteriores pueden ser descritos mediante distintas ecuaciones de estado si ω no es constante. Como ejemplo de interés consideraremos ahora un fluido con la ecuación del gas de Chaplygin. Este modelo se basa en el uso de una ecuación peculiar para fluidos perfectos [26], dada de forma general por:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}. \quad (18)$$

Por la conservación del tensor energía-momento, la densidad de energía es:

$$\rho = \left(A + \frac{B}{a^{3 \cdot (1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (19)$$

donde A y B son constantes y α un parámetro. Si en (18) $\alpha = 1$, tenemos el gas de Chaplygin generalizado (GCG) [7]. Para tener un GCG fantasma (PGCG), se debe violar la condición de energía nula (suponiendo siempre que la densidad de energía ρ es positiva). Esto da lugar a una serie de posibilidades entre los valores de A , B y α como se estudian en la referencia [27].

4. Finales del Universo

Cuando se estudia el final del Universo, tanto la radiación como la materia son despreciables frente a la energía oscura porque sus densidades de energía decaen más rápidamente. En la sección anterior se presentaban varios candidatos de energía oscura, y el final del Universo dependerá de cuál de ellos gobierne el Universo.

Para entender el Universo en tiempos tardíos, es importante saber cómo evoluciona la distancia física frente al tamaño de la esfera de Hubble. La esfera de Hubble es la región del Universo que somos capaces de observar, y más allá de la cual no recibimos nada de información porque las velocidades de recesión de los objetos superan a la de la luz. Es una medida aproximada de la zona que en un momento dado puede emitir señales que nos acabarán llegando. Mientras que la distancia física es proporcional al factor de escala ($d \propto a$), el radio de la esfera de Hubble R_H es inversamente proporcional al parámetro de Hubble:

$$H^2 \propto \rho \propto a^{-3 \cdot (1+\omega)} \implies H \propto a^{-\frac{3 \cdot (1+\omega)}{2}} \implies H^{-1} \propto a^{\frac{3 \cdot (1+\omega)}{2}} \quad (20)$$

4.1. Muerte térmica

Antes del hallazgo de la expansión acelerada actual del Universo, la muerte térmica se entendía como un estado donde todo en el Universo acababa diluyéndose y dando lugar al vacío. La evolución de esta idea hasta el nuevo concepto de muerte térmica se desarrolla de forma extensa en la referencia [8]. El nuevo concepto implementado a finales del siglo XX habla de la muerte térmica como el futuro del Universo donde se alcanza el estado de máxima entropía. En este estado ya no hay energía disponible para continuar con los procesos que se llevan a cabo en el Universo. No es un final abrupto, sino una tendencia en la que el Universo ha agotado sus reservas de energía interna y alcanza el equilibrio termodinámico [9].

En los modelos con quintaesencia, la densidad de energía disminuye con el paso del tiempo como ocurre con la radiación y la materia, aunque de forma más lenta. Un Universo dominado por quintaesencia tenderá a un Universo vacío. Es un Universo en expansión acelerada, donde la distancia física evoluciona como $d \propto a$ mientras que el radio de Hubble crece como $H^{-1} \propto a^n$ con $0 < n < 1$, pues $-1 < \omega < -1/3$. Dicho Universo acaba en una muerte térmica porque, al no haber nada contenido en él, tampoco hay actividad [10].

Si la energía oscura viene dada por la constante cosmológica, el Universo acaba dando lugar a un Universo de De Sitter. Este fue formulado poco después de la teoría de la relatividad y asume un Universo plano vacío solo con constante cosmológica. La evolución del factor de escala es exponencial, mientras que el parámetro de Hubble y su derivada se mantienen constantes:

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot t}, \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad \dot{H} = 0. \quad (21)$$

Ahora el horizonte de Hubble permanece constante mientras que la distancia física entre objetos crece exponencialmente.

El espacio-tiempo de De Sitter es un espacio maximalmente simétrico. Es homogéneo e isótropo no solo espacialmente sino también temporalmente. Nada cambiará cualitativamente, simplemente con la expansión acelerada del Universo cada vez habrá menos galaxias dentro de la esfera de Hubble (cuyo radio permanece constante, mientras que la distancia física entre objetos aumenta) y por ende la entropía alcanzará un límite asintótico constante como se ve en la referencia [11].

4.2. Big Rip

A diferencia de la muerte térmica, este final del Universo solo ocurre cuando tenemos energía fantasma de por medio. Aquí el destino del Universo no es una tendencia suave, sino una singularidad (como se explica en el capítulo 9 de la referencia [19]) del escalar de curvatura R , que diverge. En una singularidad Big Rip (singularidad de tipo I según la referencia [2]) tanto el factor de escala como el parámetro de Hubble y su derivada tienden a infinito en un tiempo finito:

$$t \rightarrow t_s, \quad a \rightarrow \infty, \quad H \rightarrow \infty, \quad \dot{H} \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Consideramos por simplicidad un modelo de energía fantasma con ecuación de estado $p = \omega \cdot \rho$, donde ω es una constante. La primera ecuación de Friedmann para un Universo donde solo hay energía fantasma con ω constante es:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{PE} \cdot a^{-3 \cdot (1+\omega)}, \quad \Omega_{PE} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot H_0^2} \cdot \rho_{PE}^0. \quad (23)$$

Estudiando la evolución del factor de escala, vemos que este diverge en un tiempo finito que dista del tiempo actual t_0 una cantidad:

$$t_{rip} - t_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{H_0^{-1}}{|1 + \omega|} \cdot \sqrt{\frac{1}{\Omega_{PE}}}. \quad (24)$$

En este modelo la distancia física entre objetos crece más rápido que el radio de la esfera de Hubble, pues $H^{-1} \propto a^n$ con $n < 0$ (ya que en energía fantasma $\omega < -1$). Aquí hay una diferencia importante con respecto a los modelos de quintaesencia y constante cosmológica, y es que el tener un $R_H \rightarrow 0$ implica que todas las regiones del Universo dejan de tener contacto causal. Todo a nuestro alrededor comienza a desaparecer en el horizonte de nuestro Universo observable, puesto que $H^{-1} \rightarrow 0$. Finalmente, el hecho de no tener una distancia finita separando dos puntos del espacio hace que se desgarre dicho espacio. Al principio, las galaxias desaparecerían mas allá del horizonte de la esfera de Hubble, dejando un Universo prácticamente oscuro. A pesar de ello, las estructuras ligadas gravitacionalmente como el Grupo Local seguirían intactas. Conforme avanza el tiempo, la gravedad dejaría de ganarle la batalla a la expansión y comenzarían a romperse dichas estructuras, como se estudia en la referencia [28]. El Sistema Solar se desligaría gravitacionalmente, las propias moléculas comenzarían a romperse y a disociarse: todo sería hidrógeno. Finalmente, la velocidad de expansión alcanzaría la velocidad de la luz, y ninguna partícula podría interactuar con otra, ni siquiera la propia luz [6].

4.3. Big Freeze

A diferencia del Big Rip, en el Big Freeze (singularidad de tipo III según la referencia [2]) la distancia física entre objetos es finita:

$$t \rightarrow t_s, \quad a \rightarrow a_s, \quad H \rightarrow \infty, \quad \dot{H} \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Un candidato para llevar al Universo a un Big Freeze es el PGCG. Como se veía en la [Sección 3.2.3](#), esto afectaba a A , B y α de (18) y (19). Los únicos valores que pueden tomar para tener una singularidad Big Freeze en el futuro son los del caso II y caso IV según la referencia [27]. A grosso modo, podemos decir que la singularidad Big Freeze se produce para un gas de Chaplygin fantasma cuya ecuación de estado satisface la expresión (18) con $A > 0$ y $\alpha < -1$, y cuya densidad de energía dada en (19) tiene además un $B < 0$. La densidad de energía se dispara al infinito para un valor máximo del factor de escala dado por:

$$a_{max} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3 \cdot (1+\alpha)}}. \quad (26)$$

Cerca de esta singularidad, la evolución del factor de escala [13] se puede expresar como:

$$a \simeq a_{max} \cdot \left(1 - \left[\frac{1 + 2 \cdot \alpha}{2 \cdot (1 + \alpha)} \right]^{\frac{2 \cdot (1+\alpha)}{1+2 \cdot \alpha}} \cdot A^{\frac{1}{1+2 \cdot \alpha}} \cdot |3 \cdot (1 + \alpha)|^{\frac{1}{1+2 \cdot \alpha}} \cdot [t_{max} - t]^{\frac{2 \cdot (1+\alpha)}{1+2 \cdot \alpha}} \right), \quad (27)$$

donde $t_{max} - t$ mide el tiempo que pasa desde que el Universo tiene un factor de escala a próximo al máximo hasta que este realmente alcanza dicho máximo, es decir, hasta que ocurre el Big Freeze.

Al tratarse de un Universo dominado por energía fantasma, el horizonte de Hubble se contrae hasta $H^{-1} \rightarrow 0$. La zona que puede seguir teniendo contacto causal es cada vez menor y, al igual que en el Big Rip, todo acaba escapando de nuestro horizonte observable. La diferencia aquí es que la distancia física entre dos puntos del Universo es finita (en el Big Rip, era infinita). Aunque aquí sigue habiendo desgarro de estructuras, el hecho de que la distancia física sea finita hará que no todo acabe como en el Big Rip. Acabamos con un Universo cuya evolución está congelada, nada puede moverse por estar saturado de energía fantasma ($\rho \propto H \rightarrow \infty$). Es una singularidad más suave que la anterior y, de hecho, se habla del Big Freeze también en las referencias [13, 14] como otra posibilidad del Universo para no acabar en un Big Rip.

5. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico [15] es un sistema con un espacio y una serie de reglas matemáticas que describen la evolución de los puntos que conforman dicho espacio. Tener una regla matemática que describa lo que ocurre en un sistema complejo parece prácticamente imposible. No obstante, es viable si tomamos dichas reglas como entrada y elegimos un conjunto de variables para caracterizarlo. Elegir bien esas variables es imprescindible para obtener un sistema dimensionalmente finito y continuo al reparametrizarlo.

5.1. Sistemas dinámicos en Cosmología

En Cosmología, los sistemas dinámicos son especialmente útiles a la hora de estudiar la evolución del Universo. Uno puede caer en la tentación de utilizar las densidades de energía como variables para caracterizarlo, sin embargo estas no suelen ser buenas candidatas para ocupar dicho puesto. Para estudiar los distintos modelos que presentamos, recurriremos a las referencias [1, 15] principalmente.

Sean las variables \vec{x} que pertenecen a nuestro espacio X . De forma general, un sistema dinámico se escribe como:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (28)$$

El punto se refiere a la derivada de nuestra variable con respecto a algún parámetro temporal. Además, $\vec{f}: X \rightarrow X$ es una función que se ve como un campo vectorial $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$. Esto implica que hay n ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de n variables. Para que dicho comportamiento esté bien definido, necesitamos que la función \vec{f} no presente singularidades, que generalmente sea una función suave en prácticamente todos sus puntos. En ocasiones la función no cumple esto, y en esos casos habrá que compactificar el espacio de fases.

Una vez hemos definido bien nuestras variables y tenemos nuestro sistema de ecuaciones, calculamos los puntos fijos \vec{x}_0 . Estos son aquellos que hacen que $\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$. Nos informan sobre dónde el sistema está en reposo. El objetivo será saber si ese reposo es permanente o, por el contrario, es inestable frente a pequeñas perturbaciones. La forma más sencilla de estudiar la estabilidad de los puntos fijos es mediante la teoría de estabilidad lineal. Se basa en la idea de linearizar el sistema cerca del punto fijo a estudiar. Con esta premisa, uno puede expandir $\vec{f}(\vec{x})$ como una serie de Taylor alrededor del punto fijo \vec{x}_0 :

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \cdot y_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) \cdot y_j \cdot y_k + \dots, \quad (29)$$

donde $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$. Al trabajar en estabilidad lineal, no se consideran derivadas de orden 2 o superior de $\vec{f}(\vec{x})$. Serán por tanto de suma importancia las derivadas a primer orden, y por ende la matriz jacobiana. A través de sus autovalores uno puede evaluar la estabilidad de los puntos críticos. Se distinguen tres tipos:

- Punto inestable (repulsor): Si todos los autovalores son reales y positivos, el punto fijo repele las trayectorias en el espacio de fases.
- Punto estable (atractor): Si todos los autovalores son reales y negativos, el punto fijo atrae todas las trayectorias de alrededor.
- Punto de silla: Si al menos dos de los autovalores son reales y con signos opuestos, el punto fijo atrae las trayectorias en algunas direcciones pero las repele en otras.

Como se ha comentado anteriormente, es posible que para sistemas complejos la función \vec{f} presente alguna singularidad en su dominio. Esto acarrea problemas porque puede haber atractores en el infinito que no estemos teniendo en cuenta. Es necesario compactificar el espacio y traer todos los puntos fijos a un entorno donde podamos estudiarlos. Hay varios métodos para lograrlo, aunque en este trabajo se utilizará el método de Poincaré. Para poder entender este método, definimos la esfera de Poincaré $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ cuyas variables se relacionan con las del plano xy a través de los siguientes cambios de variable:

$$X = x \cdot Z, \quad Y = y \cdot Z, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}. \quad (30)$$

Nuestro sistema dinámico vendrá dado de la siguiente manera:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (31)$$

Tanto P como Q son funciones polinómicas en x e y . Los puntos críticos en el infinito se encuentran en el ecuador de la esfera de Poincaré $X^2 + Y^2 = 1$ y cuyos ángulos polares θ_j y $\theta_j + \pi$ satisfacen:

$$G_{m+1}(\theta) = \cos\theta \cdot Q_m(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta \cdot P_m(\cos\theta, \sin\theta) = 0, \quad (32)$$

donde m es el grado máximo polinómico. Para sacar los ángulos θ es necesario que $G_{m+1}(\theta)$ no sea idénticamente cero. Si lo es, estudiamos $G_{m+1}(\theta)$ considerando el grado anterior a m . En cuanto a

la estabilidad de los puntos, esta se estudia con la dirección del flujo en el ecuador de la esfera: el flujo es horario (antihorario) en los puntos correspondientes a ángulos polares θ donde $G_{m+1}(\theta) < 0$ ($G_{m+1}(\theta) > 0$).

5.2. Aplicación a modelos específicos

En esta sección estudiaremos con sistemas dinámicos la evolución del Universos para diferentes tipos de energía oscura. En particular se evalúan Universos que siguen el propio modelo Λ CDM, un modelo de quintaesencia y un modelo de energía fantasma. Estos dos últimos vendrán dados a través de campos escalares.

5.2.1. Modelo estándar

En el modelo estándar la energía oscura viene dada por la constante cosmológica Λ , cuya densidad de energía asociada es constante y satisface $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Al igual que hacen en la sección 3.3 de la referencia [15], empezamos con la primera ecuación de Friedmann. Esta la podemos escribir de forma explícita con sus distintas componentes de densidad de energía de la siguiente manera:

$$H^2 = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_r}{3} + \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_m}{3} + \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_\Lambda}{3}. \quad (33)$$

Elegiremos como elementos de nuestro sistema las siguientes variables, que coinciden justo con los parámetros de densidad de radiación, materia y constante cosmológica:

$$x = \Omega_m = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_m}{3 \cdot H^2}, \quad y = \Omega_r = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_r}{3 \cdot H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_\Lambda}{3 \cdot H^2}. \quad (34)$$

Con ellas la ecuación de Friedmann presentada anteriormente se convierte en una ligadura:

$$1 = x + y + \Omega_\Lambda. \quad (35)$$

Como x e y dependen de las densidades de energía de radiación y materia y estas toman siempre valores positivos, restringimos nuestro espacio de fases al plano xy donde $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Además, por la ecuación anterior, vemos que $x + y = 1 - \Omega_\Lambda$ de tal manera que si tomamos $\Omega_\Lambda \geq 0$, entonces $x + y \leq 1$. Es por ello que la dinámica se restringe al interior de un triángulo cuyos vértices son el origen de coordenadas $(0, 0)$, el punto $(1, 0)$ y el punto $(0, 1)$.

Si diferenciamos las variables escogidas con respecto al tiempo conforme η , donde $d\eta = H \cdot dt$:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} = x' \cdot H \implies x' = \frac{1}{H} \cdot \dot{x} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot H^3} \cdot \dot{\rho}_m - \frac{16 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_m}{3 \cdot H^4} \cdot \dot{H}, \\ y' &= \frac{1}{H} \cdot \dot{y} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot H^3} \cdot \dot{\rho}_r - \frac{16 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_r}{3 \cdot H^4} \cdot \dot{H}. \end{aligned} \quad (36)$$

Sabiendo que la ecuación de continuidad es $\dot{\rho} + 3 \cdot H \cdot (\rho + p) = 0$, que $p_r = 1/3 \cdot \rho_r$ y que $p_m = 0$, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\dot{\rho}_r = -4 \cdot H \cdot \rho_r, \quad \dot{\rho}_m = -3 \cdot H \cdot \rho_m. \quad (37)$$

La segunda ecuación de Friedmann también se puede escribir de forma explícita con sus distintas presiones p_i . Si además introducimos las ecuaciones de estado de cada fluido, tenemos que:

$$2 \cdot \dot{H} + 3 \cdot H^2 = -8 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\frac{\rho_r}{3}\right) - 8 \cdot \pi \cdot G \cdot (-\rho_\Lambda) \implies \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2} \cdot (-y + 3 \cdot \Omega_\Lambda - 3). \quad (38)$$

Sustituyendo los resultados de (37) y (38) en el sistema (36), y sabiendo que $\Omega_\Lambda = 1 - x - y$, nos queda que:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot (3 \cdot x + 4 \cdot y - 3), \\ y' &= y \cdot (3 \cdot x + 4 \cdot y - 4). \end{aligned} \quad (39)$$

Es interesante, además, conocer el régimen donde nuestro sistema total acelera. Para ello necesitamos conocer el parámetro de la ecuación de estado efectivo, definido como:

$$\omega_{eff} = \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}} = \frac{1}{3} \cdot x - \Omega_\Lambda = -1 + x + \frac{4}{3} \cdot y. \quad (40)$$

Ya sabemos que la frontera entre un Universo en expansión acelerada y otro en expansión decelerada ocurre cuando $\omega_{eff} = -1/3$. Tenemos por tanto que esa frontera se representa como $3 \cdot x + 4 \cdot y = 2$. Todo lo que esté por debajo de esa recta tiene una dinámica en aceleración.

En la [Tabla 1](#) están dispuestos los puntos críticos del sistema y su dinámica. En la [Figura 1](#) tenemos el gráfico del espacio de fases. El punto R corresponde a un Universo donde solo hay radiación, el punto M a uno donde solo hay materia y el punto O es el Universo de De Sitter, donde solo hay constante cosmológica. R es un repulsor y O un atractor, lo que significa que al final el Universo descrito por este modelo acaba desembocando en un Universo de De Sitter independientemente de sus condiciones iniciales, y por tanto, el final que le espera será la muerte térmica. Nótese también la importancia de que la época dominada por radiación sea un repulsor, que dejan atrás todas las trayectorias, y la época dominada por materia un punto de silla, por el que hay que pasar antes de llegar a la época de expansión acelerada.

	x	y	ω_{eff}	Autovalores	Estabilidad
R	0	1	$1/3$	$\{1, 4\}$	Inestable
M	1	0	0	$\{-1, 3\}$	Punto de silla
O	0	0	-1	$\{-4, -3\}$	Estable

Tabla 1: Puntos críticos del sistema (39) y su estabilidad

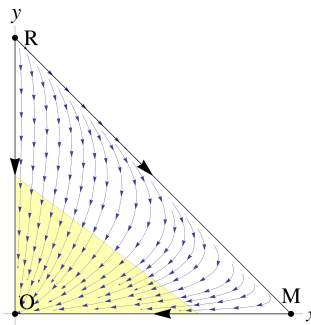


Figura 1: Espacio de fases del sistema (39) representado en [15]. La zona amarilla se refiere a la región donde la dinámica del Universo se corresponde con una expansión acelerada.

5.2.2. Modelo de quintaesencia

Por abuso del lenguaje, la quintaesencia se relaciona con un fluido cuyo parámetro de la ecuación de estado está comprendido entre $-1 < \omega_Q \leq -1/3$. De nuevo, podemos realizar un análisis similar

al anterior a base de asumir una ω_Q constante, como hacíamos con la constante cosmológica (donde $\omega_\Lambda = -1$). No obstante, la quintaesencia de forma más ortodoxa se interpreta como un campo escalar canónico ϕ con un potencial $V(\phi)$ como se puede leer en el capítulo 7 de la referencia [1].

Ya veíamos en la sección de energía oscura cómo se construía la acción y, por ende, el lagrangiano de un campo escalar canónico. El tensor energía-momento que se deriva de ahí es:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \cdot \phi \cdot \partial_\nu \cdot \phi - g_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot g^{\alpha\beta} \cdot \partial_\alpha \cdot \phi \cdot \partial_\beta \cdot \phi + V(\phi) \right). \quad (41)$$

A través de él podemos obtener la densidad de energía ρ_ϕ y la presión p_ϕ de tal manera que:

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{3} \cdot T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (42)$$

Las ecuaciones de Friedmann para un Universo plano pasan a ser:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_M \right), \\ 2 \cdot H' + 3 \cdot H^2 &= -8 \cdot \pi \cdot G \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}^2 - V(\phi) + p_M \right), \end{aligned} \quad (43)$$

donde p_M y ρ_M son la presión y la densidad de energía de un fluido M cualquiera respectivamente, relacionados mediante la ecuación de estado $p_M = \omega_M \cdot \rho_M$. Además, la variación de la acción con respecto al campo escalar ϕ nos da:

$$\ddot{\phi} + 3 \cdot H \cdot \dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \quad (44)$$

Por otro lado, el parámetro de la ecuación de estado de un campo escalar ϕ queda como:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 + 2 \cdot V(\phi)}{\dot{\phi}^2 - 2 \cdot V(\phi)}. \quad (45)$$

Vemos que este toma valores en el rango $[-1, 1]$. Asimismo, la energía oscura viola la condición de energía fuerte y por tanto $\omega_\phi < -1/3$. Esto fija la condición de que $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Sin embargo, para evitar que $\omega_\phi = -1$ (y por tanto evitar volver a tener una constante cosmológica como energía oscura) el potencial tiene que ser lo suficientemente superficial como para que el campo ϕ evolucione de manera lenta a lo largo de él: $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, pero no $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$.

Para estudiar la dinámica de los modelos con quintaesencia, usaremos las siguientes variables adimensionales:

$$x = \frac{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G}}{\sqrt{6} \cdot H} \cdot \dot{\phi}, \quad y = \frac{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G}}{\sqrt{3} \cdot H} \cdot \sqrt{V}, \quad \Omega_M = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot H^2} \cdot \rho_M, \quad (46)$$

donde asumimos una sola componente de materia, por simplicidad, y $V(\phi) > 0$. Podemos por tanto escribir la primera ecuación de Friedmann como:

$$1 = x^2 + y^2 + \Omega_M. \quad (47)$$

Como el parámetro de densidad del campo escalar es $\Omega_\phi = x^2 + y^2$, la ecuación anterior se puede escribir como $\Omega_\phi + \Omega_M = 1$. Tanto Ω_ϕ como Ω_M están definidas positivas, de tal manera que $\Omega_\phi + \Omega_M \geq 0 \implies 0 \leq \Omega_\phi + \Omega_M \leq 1$. Esto, en término de las variables x e y se interpreta como:

$$0 \leq x^2 + y^2 = 1 - \Omega_M < 1. \quad (48)$$

La dinámica se restringe al interior de un círculo de radio unidad. Si además se impone que $y \geq 0$, la restricción avanza hasta solo tomar la mitad superior de ese círculo. Justo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$ corresponde a una densidad $\Omega_\phi = 1$, un Universo dominado por el campo escalar.

Al derivar las variables escogidas con respecto al tiempo conforme η , donde $d\eta = H \cdot dt$:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{H} \cdot \dot{x} = \frac{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G}}{\sqrt{6} \cdot H^2} \cdot \ddot{\phi} - \frac{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G}}{\sqrt{6} \cdot H^3} \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{H}, \\ y' &= \frac{1}{H} \cdot \dot{y} = \frac{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G}}{\sqrt{3} \cdot H^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{V}} \cdot V_{,\phi} \cdot \dot{\phi} - \frac{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G}}{\sqrt{3} \cdot H^3} \cdot \sqrt{V} \cdot \dot{H}. \end{aligned} \quad (49)$$

Obteniendo el valor \dot{H}/H^2 de de la segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot (1 + \omega_M) \cdot (1 - x^2 - y^2). \quad (50)$$

Por otro lado, para simplificar aún más la expresión, definimos la variable λ (que caracteriza la pendiente del campo potencial) como:

$$\lambda = -\frac{V_{,\phi}}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G} \cdot V}. \quad (51)$$

Con todo esto, nos queda que la dinámica viene expresada a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \lambda \cdot y^2 - 3 \cdot x - x \cdot \left(-3 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot (1 + \omega_M) \cdot (1 - x^2 - y^2) \right), \\ y' &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \lambda \cdot x \cdot y - y \cdot \left(-3 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot (1 + \omega_M) \cdot (1 - x^2 - y^2) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

λ es otra variable dinámica que se rige por la siguiente ecuación:

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{d\eta} = -\sqrt{6} \cdot (\Gamma - 1) \cdot \lambda^2 \cdot x, \quad \Gamma = \frac{V \cdot V_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2}. \quad (53)$$

Es interesante conocer el régimen donde nuestro sistema total acelera o no. El parámetro ω_ϕ descrito en (45) se puede reescribir en términos de las variables del sistema como:

$$\omega_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \quad (54)$$

Así, el parámetro de la ecuación de estado efectivo es:

$$\omega_{eff} = \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}} = \omega_M \cdot \Omega_M + \omega_\phi \cdot \Omega_\phi = x^2 - y^2 + \omega_M \cdot (1 - x^2 - y^2). \quad (55)$$

Sabiendo que para que el Universo se expanda de forma acelerada $\omega_{eff} < -1/3$, podemos definir una frontera descrita por la expresión $(1 - \omega_M) \cdot x^2 - (1 + \omega_M) \cdot y^2 = -1/3 - \omega_M$.

Llegados a este punto, cabe preguntarse qué potencial es el indicado. La elección del potencial nos fija tanto λ como Γ . Estas variables pueden ser constantes o no. Si elegimos un ejemplo sencillo donde λ sea constante, al resolver (51) tenemos que el potencial es de tipo exponencial [24]:

$$V(\phi) = V_0 \cdot e^{-\sqrt{8 \cdot \pi \cdot G} \cdot \lambda \cdot \phi}. \quad (56)$$

En este caso tenemos $\Gamma = 1$. El sistema dinámico presentado en (52) es invariante bajo la transformación $y \rightarrow -y$. Esto implica que para valores negativos de y , la dinámica del sistema será exactamente igual que para valores positivos. Además, este sistema también es invariante bajo la transformación simultánea de $\lambda \rightarrow -\lambda$ y $x \rightarrow -x$. Esta simetría nos permite estudiar el sistema para valores positivos de λ , pues los valores negativos nos darán los mismos resultados dinámicos.

En la [Tabla 2](#) están dispuestos los puntos críticos del sistema y su dinámica:

- El punto O corresponde a un Universo donde solo está presente el fluido M (que, por simplicidad, supondremos que es materia y que por tanto $\omega_M = 0$).
- Los puntos A_{\pm} son Universos dominados por el término cinético de ϕ donde $\Omega_{\phi} = 1$. Aquí no hay aceleración pues $\omega_{eff} = 1$. Recordamos que $\Omega_{\phi} = x^2 + y^2$ donde x^2 se relacionaba con el término cinético e y^2 con el potencial, y en estos casos $y = 0$.
- El punto B se relaciona con un Universo que evoluciona tanto por la influencia del fluido M (suponemos materia) como la del campo ϕ . Aquí $\omega_M = \omega_{\phi}$, y puede considerarse que se expande como si fuera un Universo completamente dominado por el fluido M (materia). La diferencia entre B y O es que en O no hay ningún tipo de campo escalar ϕ , y $\Omega_{\phi} = 0$. Pero en B , a pesar de haber campo escalar (y, de hecho, tener una $\Omega_{\phi} = 3 \cdot (1 + \omega_M)/\lambda^2$), este influye de igual forma en el Universo que la materia y sus ecuaciones de estado coinciden. Nótese que si $\lambda \rightarrow \infty$, el punto B coincide con O .
- El punto C es un Universo donde solo hay campo escalar ϕ . Al igual que los puntos A_{\pm} , en el punto C tenemos que $\Omega_{\phi} = 1$. La diferencia aquí es que tanto el término cinético como el potencial tienen influencia, al contrario que lo que ocurría en A_{\pm} donde solo actuaba la parte cinética. Nótese que si $\lambda \rightarrow 0$, el punto C correspondería exactamente a un Universo de De Sitter.

El problema es que B y C no siempre van a existir, están restringidos a ciertos valores de λ . En el caso del punto B , este solo existe si $\lambda^2 \geq 3 \cdot (1 + \omega_M)$. Para C , su existencia se acota para valores que cumplen que $\lambda^2 < 6$. Si tomamos $\omega_M = 0$, tenemos tres rangos para estudiar el sistema en función de λ como podemos ver en la [Figura 2](#), donde se muestran los diagramas de fase para un caso de cada tipo:

- El primer rango corresponde a $\lambda < \sqrt{3}$ (por ejemplo, $\lambda = 1$). En este rango el punto B no existe. Tenemos los puntos A_{\pm} como inestables y O como un punto de silla. El punto C es un atractor que está en la región acelerada. Para tiempos tardíos representa un buen modelo de transición entre materia y energía oscura, acabando en muerte térmica. No obstante, para tiempos tempranos el Universo está dominado por un fluido rígido con $\omega = 1$, por lo que no parece muy favorable fenológicamente hablando.
- El segundo rango se encuentra en $\sqrt{3} \leq \lambda < \sqrt{6}$ (por ejemplo, $\lambda = 2$). En este rango, tanto los puntos B como C existen. O y A_{\pm} son un punto de silla y puntos inestables respectivamente. B siempre es un punto estable y C aquí es un punto de silla. Ninguno de los puntos están en la región acelerada, aunque ello no impide que para muchas trayectorias el Universo experimente un periodo corto de expansión acelerada. Para tiempos tempranos tenemos el mismo problema que en el rango anterior. El futuro cósmico, por otra parte, es aquel donde hay influencia tanto de materia como de campo ϕ y sin aceleración. Con el paso del tiempo, el decaimiento de estas componentes lleva a un Universo vacío.

- El tercer rango existe para $\lambda \geq \sqrt{6}$ (por ejemplo, $\lambda = 3$). Aquí no existe el punto C , y el único punto inestable es el A_+ . Tanto O como A_- son puntos de silla, y el atractor B es el mismo.

	x	y	ω_{eff}	Autovalores	Estabilidad
O	0	0	0	$\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$	Punto de silla
A_+	1	0	1	$\{3, 3 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \lambda\}$	Inestable si $\lambda \leq \sqrt{6}$ Punto de silla si $\lambda > \sqrt{6}$
A_-	-1	0	1	$\{3, 3 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \lambda\}$	Inestable si $\lambda \geq -\sqrt{6}$ Punto de silla si $\lambda < -\sqrt{6}$
B	$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda}$	$\sqrt{\frac{3}{2 \cdot \lambda^2}}$	0	$\{\frac{3}{4 \cdot \lambda} \cdot [-\lambda \pm \Delta]\}$	Estable
C	$\frac{\lambda}{6}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$	$\{\frac{\lambda^2}{2} - 3, \lambda^2 - 3\}$	Estable si $\lambda^2 < 3$ Punto de silla si $3 \leq \lambda^2 < 6$

Tabla 2: Puntos críticos del sistema (52) y su estabilidad para el caso donde $\omega_M = 0$. Se ha utilizado $\Delta = \sqrt{-7 \cdot \lambda^2 - 24}$ como abreviación.

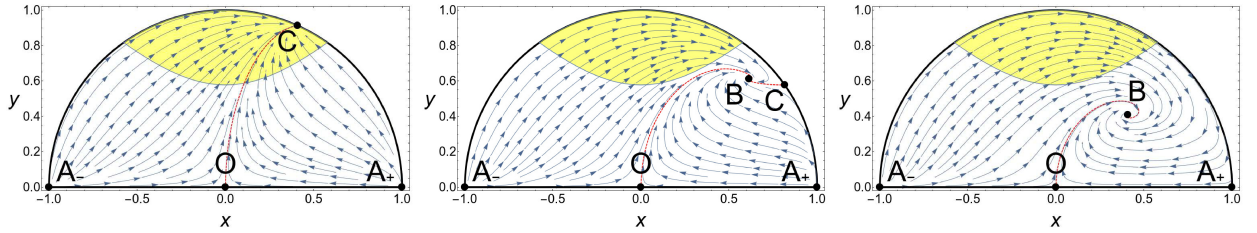


Figura 2: Espacio de fases del sistema (52) representado en [15] para $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$ respectivamente y $\omega_M = 0$. La zona amarilla se refiere a la región de expansión acelerada.

5.2.3. Modelo de energía fantasma

La energía fantasma se puede entender como un fluido que, además de violar la condición de energía fuerte, viola la condición de energía nula. Esto lo que hace es que su densidad de energía crezca con el paso del tiempo. Otra manera de entender la energía fantasma, al igual que con la quintaesencia, es con campos escalares. En este caso nos encontramos ante un campo escalar no canónico. Su lagrangiano es idéntico al canónico salvo por el signo negativo de su parte cinética. Sabiendo que la única diferencia entre (16) y (17) es dicho signo, las ecuaciones de Friedmann que estudiábamos en la sección de la quintaesencia (43) solo cambian por ese signo. La densidad de energía del campo, su presión y su parámetro de la ecuación de estado ahora son:

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = -\frac{1}{2} \cdot \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad \omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 + 2 \cdot V(\phi)}{\dot{\phi}^2 - 2 \cdot V(\phi)}. \quad (57)$$

Siguen siendo útiles las variables de (46). La primera ecuación de Friedmann en este modelo reparametrizada queda algo distinta a (47) por ese signo menos en la parte cinética:

$$1 = -x^2 + y^2 + \Omega_M. \quad (58)$$

De nuevo, tanto $\Omega_\phi = -x^2 + y^2$ como Ω_M están definidas positivas, de tal manera que, suponiendo $y \geq 0$, el sistema se restringe a la mitad superior de la hipérbola cuya ligadura viene dada por $0 \leq -x^2 + y^2 = 1 - \Omega_M < 1$.

El sistema dinámico es muy similar a (52) cambiando algunos signos. Este sistema también es invariante bajo transformaciones $y \rightarrow -y$ y la transformación simultánea $\lambda \rightarrow -\lambda$ y $x \rightarrow -x$:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \lambda \cdot y^2 - 3 \cdot x - x \cdot \left(3 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot (1 + \omega_M) \cdot (1 + x^2 - y^2) \right), \\ y' &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \lambda \cdot y \cdot x - y \cdot \left(3 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot (1 + \omega_M) \cdot (1 + x^2 - y^2) \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Es interesante definir el régimen de expansión acelerada a través de:

$$\omega_{eff} = \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}} = \omega_M \cdot \Omega_M + \omega_\phi \cdot \Omega_\phi = -x^2 - y^2 + \omega_M \cdot (1 + x^2 - y^2). \quad (60)$$

Hay que diferenciar una expansión acelerada dada por energía fantasma de una aceleración más clásica (donde no se viola la condición de energía nula). Sabiendo que el límite entre la región fantasma y la región de aceleración clásica está en $\omega_{eff} = -1$, podemos definir una frontera descrita por la expresión $(\omega_M - 1) \cdot x^2 - (1 + \omega_M) \cdot y^2 = -1 - \omega_M$. La frontera que divide la zona de aceleración con la de deceleración es $(\omega_M - 1) \cdot x^2 - (1 + \omega_M) \cdot y^2 = -1/3 - \omega_M$.

El objetivo de estudiar un sistema dinámico para este caso es comprobar que efectivamente obtenemos como atractor uno de tipo Big Rip. Según las referencias [24, 25], el potencial (56) nos puede dar una singularidad de este tipo. Por lo tanto, volvemos a asumir que λ es una constante.

En la [Tabla 3](#) están dispuestos los dos únicos puntos críticos del sistema y su dinámica:

- El punto O corresponde con un Universo donde solo está presente el fluido M (que, de nuevo, supondremos materia con $\omega_M = 0$).
- El punto C es un Universo dominado por energía fantasma, donde $\omega_{eff} < -1$ y además $\Omega_\phi = 1$. El punto está en el régimen fantasma y se comporta como un atractor de tipo Big Rip como se demuestra en la referencia [25]. Nótese que si $\lambda = 0$, tendríamos un Universo de De Sitter puesto que, a pesar de que $\Omega_\phi = 1$, en este caso $\omega_{eff} = -1$. El punto pasaría a estar en $(0, 1)$, en la zona de expansión acelerada pero no en el régimen fantasma.

El problema es que el sistema dado por (59) no es compacto. Necesitamos estudiar el sistema en el infinito para ver si hay algún atractor más que no estemos teniendo en cuenta. Para ello utilizamos el método de Poincaré. Necesitamos calcular G_3 ya que $G_4 = 0$ idénticamente y no se puede sacar información. Así:

$$G_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \lambda \cdot \cos(2 \cdot \theta) \cdot \sen(\theta) = 0. \quad (61)$$

Las soluciones son los ángulos $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = 3 \cdot \pi/4$ y $\theta_4 = \pi$ (correspondientes a los puntos A_\pm y B_\pm , los posibles atractores del sistema). La función G_3 es negativa en los intervalos $[\theta_1, \theta_2]$ y $[\theta_3, \theta_4]$, por lo que el flujo tiene sentido horario.

En la [Figura 3](#) podemos ver el espacio de fases original y el corregido con el método de Poincaré. Nótese que en cada diagrama se usan un tipo distinto de coordenadas, (x, y) para el original y (X, Y) para el de Poincaré:

- En la gráfica de la izquierda se puede observar la transición de un Universo dominado por materia a uno dominado por energía fantasma. El punto C siempre será un atractor Big Rip futuro mientras que el punto O será un punto de silla describiendo un Universo dominado por materia. La zona verde representa la región fantasma ($\omega_{eff} < -1$), donde el Universo

está dominado por esta energía. La zona amarilla es la región con una aceleración estándar ($-1 \leq \omega_{eff} < -1/3$) y la blanca del centro, la de deceleración. Como el espacio de fases para el campo escalar fantasma no es compacto, las trayectorias se extienden hasta el infinito. Esto deja claro que los atractores pasados del espacio de fases deben estar representados por puntos en el infinito.

- En la gráfica de la derecha se ha compactificado el espacio de fases. Los puntos situados en el círculo unidad provienen del infinito, entre los cuales se encuentran A_{\pm} y B_{\pm} (posibles atractores pasados). El flujo tiene sentido horario y las trayectorias acaban en C . La línea constante $Y = 1/\sqrt{2}$ del círculo por encima de la cual no hay nada dibujado corresponde a la zona superior de la parábola del sistema no compacto, la zona prohibida.

Aunque un modelo con energía fantasma sea viable a la hora de explicar el Universo tardío (el Universo acaba en una singularidad Big Rip), no tiene la misma suerte con el Universo temprano. La fenomenología del campo escalar fantasma en el Universo temprano presenta singularidades que claramente indican que este modelo no es viable durante ese periodo. La densidad de energía del campo escalar diverge a $-\infty$ y la de materia a $+\infty$. Este comportamiento implica que el campo escalar siempre presentará energías negativas en el Universo temprano, y estas divergencias se relacionan con los problemas de estabilidad de los campos con energías negativas [3].

	x	y	ω_{eff}	Autovalores	Estabilidad
O	0	0	0	$\{0, -\frac{3}{2}\}$	Punto de silla
C	$-\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{6}}$	$-1 - \frac{\lambda^2}{3}$	$\{-3 - \frac{\lambda^2}{2}, -3 - \lambda^2\}$	Estable

Tabla 3: Puntos críticos del sistema (59) y su estabilidad para el caso donde $\omega_M = 0$.

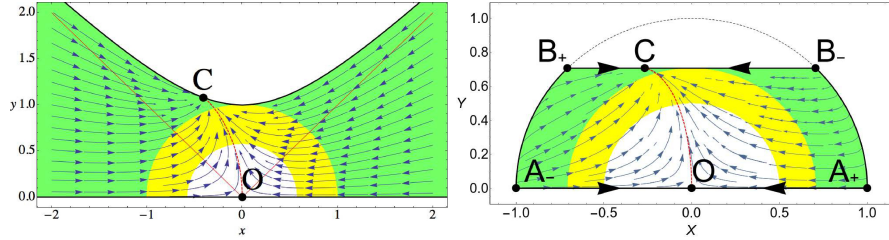


Figura 3: Espacio de fases del sistema (59) representado en [15] para $\lambda = 1$ con $\omega_M = 0$. La zona verde es la región fantasma y la amarilla la de aceleración más clásica (no super-acelerada).

6. Conclusiones

El destino final del Universo dependerá del tipo de modelo cosmológico que lo describa. A través de los sistemas dinámicos en Cosmología hemos podido estudiar la evolución del Universo en algunos de estos modelos.

Un modelo cuya energía oscura viene dada por una constante cosmológica (como ocurre en el modelo Λ CDM) acaba dando lugar a un Universo de De Sitter, un Universo vacío solo con Λ , y desembocando en muerte térmica. Se alcanza el estado de máxima entropía, no se puede sustraer energía de ningún mecanismo y el Universo está en perfecto equilibrio termodinámico.

Por otro lado, en un modelo de quintaesencia también alcanzamos la muerte térmica, aunque en estos casos su definición se corresponde con la muerte térmica clásica donde tenemos un Universo

vacío sin actividad. Se ha estudiado este modelo específicamente para campos escalares canónicos con el potencial más sencillo: uno de tipo exponencial, donde λ y Γ permanecen constantes. Aunque no consigan explicar de forma satisfactoria la dinámica del Universo temprano, pueden acertar a la hora de hablar del Universo tardío. Los únicos valores de λ que llevan al Universo a una dinámica de expansión acelerada futura son aquellos para los que $\lambda < \sqrt{3}$. De hecho, si $\lambda \rightarrow 0$ volvemos a tener un Universo de De Sitter como en el caso del modelo Λ CDM.

En cuanto al modelo de energía fantasma, este al ser estudiado mediante campo escalares (ahora no canónicos) también requiere de la elección de un potencial. Al querer encontrar un atractor tipo Big Rip, se ha demostrado que el potencial exponencial utilizado para los modelos de quintaesencia también vale. A diferencia del caso anterior, el espacio de fases de este modelo se ha de compactificar para poder estudiar también los posibles atractores pasados. El Universo acaba en un Big Rip, entrado en la región fantasma donde la expansión del Universo es super-acelerada y se produce el desgarro del espacio-tiempo. Tanto el factor de escala como el parámetro de Hubble y su derivada divergen al infinito en un tiempo finito. Como pasa con los modelos de quintaesencia, los modelos de energía fantasma no logran explicar bien el Universo temprano, y por tanto se asumen como un fenómeno emergente en el futuro.

Aunque no se ha dedicado ninguna sección a estudiar el modelo de PGCG con sistemas dinámicos, se ha demostrado que este da lugar a una singularidad en un tiempo finito donde el factor de escala es finito, y donde el parámetro de Hubble y su derivada divergen al infinito: el Universo acaba en un Big Freeze, que al igual que el Big Rip ocurre por tener energía oscura que viola la condición de energía nula y por tanto su densidad de energía crece con el paso del tiempo, pero a diferencia de él en el Big Freeze no hay un desgarro del espacio-tiempo, simplemente llegará el momento donde nada en el Universo se pueda mover debido a la saturación de densidad de energía fantasma, produciendo una congelación para toda la eternidad.

Referencias

- [1] Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2010) Dark Energy: Theory and Observations, Cambridge University Press, 1. edition.
- [2] Bouhmadi-López, M., Kiefer, C., and Martín-Moruno, P. (October, 2019) Phantom singularities and their quantum fate: general relativity and beyond—a CANTATA COST action topic. *General Relativity and Gravitation*, **51**(10).
- [3] Rubakov, V. A. (February, 2014) The null energy condition and its violation. *Physics-Uspekhi*, **57**(2), 128–142.
- [4] Fernández-Jambrina, L. and Lazkoz, R. (March, 2022) New futures for cosmological models. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **380**(2222).
- [5] Tsujikawa, S. (October, 2013) Quintessence: a review. *Classical and Quantum Gravity*, **30**(21), 214003.
- [6] Caldwell, R. (October, 2002) A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Physics Letters B*, **545**(1–2), 23–29.
- [7] Sen, A. A. and Scherrer, R. J. (September, 2005) Generalizing the generalized Chaplygin gas. *Physical Review D*, **72**(6).
- [8] Barrow, J. D. (1986) The Anthropic Cosmological Principle, Oxford University Press, New York 1. edition.

- [9] Barrow, J. D. and Tipler, F. J. (November, 1978) Eternity is unstable. *Nature*, **276**(5687), 453–459.
- [10] Adams, F. C. and Laughlin, G. (April, 1997) A dying universe: the long-term fate and evolution of astrophysical objects. *Reviews of Modern Physics*, **69**(2), 337–372.
- [11] Frautschi, S. (August, 1982) Entropy in an Expanding Universe. *Science*, **217**(4560), 593–599.
- [12] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., and Weinberg, N. N. (August, 2003) Phantom Energy and Cosmic Doomsday. *Physical Review Letters*, **91**(7).
- [13] Bouhmadi-López, M., González-Díaz, P. F., and Martín-Moruno, P. (January, 2008) Worse than a big rip?. *Physics Letters B*, **659**(1–2), 1–5.
- [14] Bouhmadi-López, M. and Madrid, J. A. J. (May, 2005) Escaping the big rip?. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2005**(05), 005–005.
- [15] Bahamonde et al. (November, 2018) Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity. *Physics Reports*, **775–777**, 1–122.
- [16] Aluri, K. et al. (April, 2023) Is the observable Universe consistent with the cosmological principle?. *Classical and Quantum Gravity*, **40**(9), 094001.
- [17] Fixsen, D. J. (November, 2009) The temperature of the Cosmic Microwave Background. *The Astrophysical Journal*, **707**(2), 916–920.
- [18] Smoot, G. F. (1999) COBE observations and results. In *Conference on 3K cosmology* ASCE.
- [19] Wald, R. M. (1984) *General Relativity*, Chicago Univ. Pr., Chicago, USA 1. edition.
- [20] Aghanim, N. et al. (September, 2020) Planck 2018 results: VI Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, **641**, A6.
- [21] Mohayaee, R., Rameez, M., and Sarkar, S. (June, 2021) Do supernovae indicate an accelerating universe?. *The European Physical Journal Special Topics*, **230**(9), 2067–2076.
- [22] Kontou, E.-A. and Sanders, K. (September, 2020) Energy conditions in general relativity and quantum field theory. *Classical and Quantum Gravity*, **37**(19), 193001.
- [23] Liddle, A. R. and Lyth, D. H. (2000) *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 1. edition.
- [24] Copeland, E. J., Liddle, A. R., and Wands, D. (April, 1998) Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Physical Review D*, **57**(8), 4686–4690.
- [25] Hao, J. and Li, X. (August, 2004) Phantom cosmic dynamics: Tracking attractor and cosmic doomsday. *Physical Review D*, **70**(4).
- [26] Bento, M. C., Bertolami, O., and Sen, A. A. (August, 2002) Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physical Review D*, **66**(4).
- [27] Bouhmadi-Lopez, M., González-Díaz, P., and Martín-Moruno, P. (11, 2008) On the Generalized Chaplygin Gas: Worse than a Big Rip or Quieter than a Sudden Singularity?. *International Journal of Modern Physics D*, **17**, 2269–2290.
- [28] Nesseris, S. and Perivolaropoulos, L. (December, 2004) Fate of bound systems in phantom and quintessence cosmologies. *Physical Review D*, **70**(12).