



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

2023-2024

Trabajo Fin de Máster

Instantones de grupo estructural arbitrario

Autor: José Blasco González

Tutor: Marco Castrillón López

Agradecimientos

A mi familia y a mi tutor



Abstracto

En este trabajo de fin de máster, estudiamos un tipo especial de solución a las ecuaciones de Yang-Mills denominado instantón. Los modelos más clásicos de este tipo de solución son los monopolos, que viven en un fibrado principal con variedad base la esfera bidimensional y grupo estructural $U(1)$. Mas adelante, se generalizo este concepto a un fibrado con grupo estructural $SU(2)$ y la esfera tetradimensional como variedad base, naciendo el concepto de instantón.

La teoría de instantones ha sido generalizada exitosamente en varias direcciones. Por una parte, trabajando con variedades base de holonomía especial, se han considerado variedades base de dimensión diferente de 4 pero dotada de alguna estructura geométrica modelada por grupos excepcionales $(G_2, Spin(7), \dots)$, de forma que el instantón solución conviva con esta estructura. Veremos un enfoque moderno que nos permite construir este tipo de variedades e instantones con ecuaciones de evolución.

La otra dirección que nos interesará en este trabajo toma fibrados principales con cualquier grupo estructural sobre \mathbb{H}^n , y explora la construcción de instantones utilizando las ecuaciones de Nahm.

In this master thesis, we study a special type of solution to the Yang-Mills equations called instanton. The most classical models of this type of solution are monopoles, which live in a principal bundle with the bidimensional sphere as its base manifold and structural group $U(1)$. Later, this concept was generalized to a bundle with structural group $SU(2)$ and with the 4-sphere as its base manifold, thus creating the concept of instanton.

The theory of instantons has been successfully generalized in several directions. On the one hand, working with base varieties of special holonomy, researchers have considered base manifolds of dimension other than 4 but endowed with some geometric structure modeled by exceptional groups $(G_2, Spin(7), \dots)$, so that the instanton solution coexists with this structure. We will see a modern approach that allows us to construct such varieties and instantons with evolution equations.

The other direction that will interest us in this thesis takes principal bundles with any structural group over \mathbb{H}^n , and explores the construction of instantons using the Nahm equations.

Introducción

Para poder abordar la teoría de instantones, es fundamental definir el concepto de fibrado principal con grupo de Lie estructural G , y aspectos geométricos de esta estructura como lo son las conexiones y la curvatura asociada a una conexión. A parte de dar estas definiciones, daremos varios resultados sobre la teoría de fibrados que nos permitirán trabajar mejor con estos conceptos geométricos. Como último apartado sobre fibrados, hablaremos de las clases características, subconjuntos de las clases de cohomología del fibrado, que nos permiten medir cuanto se aleja un fibrado de ser trivial.

Desde su introducción en la década de los 50 del siglo pasado por Yang y Mills, las ecuaciones diferenciales sobre las conexiones de un fibrado principal (los potenciales en el lenguaje físico) han jugado un papel central en los modelos de la Física Teórica. Poco tiempo después se comprobó que las soluciones de estos modelos podían, además, proporcionar información relevante a nivel topológico y geométrico de las variedades involucradas. La búsqueda de soluciones a estas ecuaciones ha sido, desde entonces, un objetivo de relevancia en estos ámbitos científicos.

Las famosas ecuaciones de Yang-Mills, son unas ecuaciones diferenciales sobre la curvatura, que surgen como las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas al minimizar un funcional sobre esta. Este funcional de alguna forma nos permite encontrar conexiones de curvatura “mínima”, ya que como veremos, no existe una forma canónica de seleccionar una conexión.

Si tomamos como variedad base una variedad riemanniana de dimensión 4 y grupo estructural $G = \text{SU}(2)$, los instantones se definen como conexiones de manera que su curvatura coincide con su propio dual de Hodge (módulo un signo). Es fácil ver que este tipo de conexión es solución a la ecuación de Yang-Mills. Daremos también la construcción del famoso instantón BPST en el fibrado de Hopf sobre la esfera tetradimensional.

No será hasta el último capítulo cuando veamos una definición de instantón para un grupo estructural cualquiera G . Para ello generalizaremos el concepto de auto-dualidad de la curvatura, necesitando hacer uso de una G -estructura de holonomía especial en la variedad base. Para poder construir estos instantones vamos a ver como crear estas estructuras y los

propios instantones utilizando técnicas de ecuaciones de evolución. Por último describiremos un método para crear instantones con variedad base \mathbb{H}^n sin la necesidad de una G -estructura, haciendo uso de las llamadas ecuaciones de Nahm.

Para poder entender este material, es fundamental conocer las definiciones y resultados básicos de teoría de grupos y álgebras de Lie. También será necesario dominar conceptos básicos de geometría diferencial como pueden ser las formas diferenciales, las métricas y su holonomía, el dual de Hodge o la cohomología. Para entender cómodamente las demostraciones del último capítulo del trabajo, puede ser necesario conocer algunos rudimentos de teoría de representaciones de las álgebras de Lie y G -estructuras, aunque esto no es completamente necesario.

Índice de Contenidos

1	Preliminares	1
1.1.	Fibrados	1
1.1.1.	Morfismos y Pullback de un fibrado	3
1.1.2.	Reconstrucción de Fibrados	4
1.2.	Fibrados Principales	5
1.2.1.	Reducciones y G-estructuras	7
1.2.2.	Fibrado asociado y fibrado adjunto	8
1.3.	Conexiones y Curvatura en Fibrados Principales	9
1.3.1.	La forma local de la conexión	11
1.3.2.	Curvatura	13
1.4.	El espacio $\Omega^*(M, \text{ad } P)$	16
1.4.1.	La curvatura como una forma en $\Omega^2(M, \text{ad } P)$	16
1.4.2.	Aplicaciones de $\Omega_{\text{bas}}^k(P, \mathfrak{g}) \xrightarrow{1:1} \Omega^1(M, \text{ad } P)$	17
1.5.	Clases Características	19
1.5.1.	Construcción de Weil	19
1.5.2.	Clases de Chern	22
2	Ecuaciones de Yang-Mills e Instantones en SU(2)	25
2.1.	Funcional de Yang-Mills	26
2.2.	Ecuaciones de Yang-Mills	27
2.2.1.	Soluciones a YM en $U(1)$ -fibrados principales	28
2.3.	Instantones	29
2.3.1.	Instantones BPST en \mathbb{S}^4	31
3	G-Instantones	35
3.1.	SU(2)-instantones, $\dim M = 4$	37
3.1.1.	Métrica Plana en \mathbb{R}^4	38
3.2.	G_2 -instantones, $\dim M = 7$	39
3.2.1.	Métrica Plana en \mathbb{R}^7	41
3.3.	Spin(7)-instantones, $\dim M = 8$	45
3.3.1.	Métrica plana en \mathbb{R}^8	46
3.4.	Construcción de Instantones cuaterniónicos utilizando las ecuaciones de Nahm	47

Preliminares

1.1. Fibrados

La noción de fibrado nace de la idea de un espacio topológico que localmente es un espacio producto, aunque globalmente no lo sea. En ese caso hablamos de un espacio de alguna forma “retorcido”. En este trabajo, además pediremos cierta suavidad en nuestras definiciones, por lo que vamos a trabajar directamente con variedades diferenciables.

Definición 1.1.1. *Un **fibrado** es una tupla (E, π, M, F, G) , donde:*

1. E es una variedad diferenciable llamada el **espacio total**.
2. M es una variedad diferenciable llamada el **espacio base**.
3. F es una variedad diferenciable llamada la **fibra**.
4. $\pi : E \rightarrow M$ es una aplicación sobreyectiva llamada **proyección** tal que $\pi^{-1}(p) = F_p$ donde $F_p \cong F$ se llama la **fibra** en p .
5. G un grupo de Lie, llamado el **grupo estructural**, que actúa en F por la izquierda.
6. Hay un recubrimiento de abiertos $\{U_i\}$ de M equipados con difeomorfismos $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ de forma que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. A los ϕ_i los llamaremos **trivializaciones locales**.
7. Si denotamos $\phi_{i,p}(\cdot) = \phi_i(p, \cdot)$, entonces para dos abiertos $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ las llamadas **funciones de transición** $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Difeo}(F)$ deben ser elementos de G que actúan sobre la **fibra** tal que:

$$\phi_i(p, f) = \phi_j(p, t_{ji}(p)f)$$

1.1. Fibrados

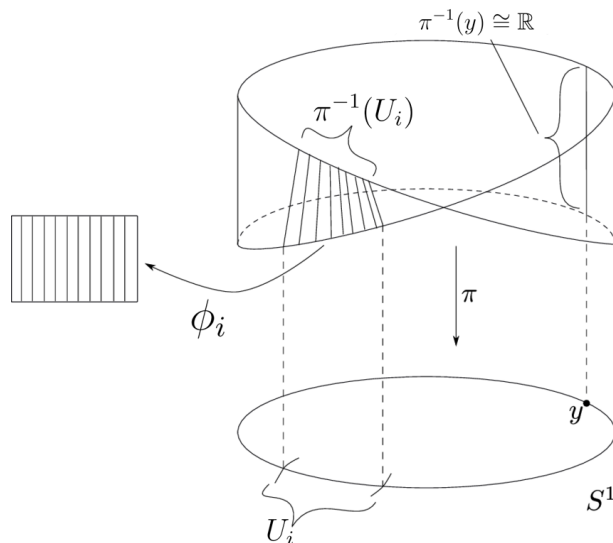
Las funciones de transición deben cumplir además las siguientes condiciones para poder pegar entre sí los abiertos:

$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= \text{id}(p) && (p \in U_i) \\ t_{ij}(p) &= t_{ji}^{-1}(p) && (p \in U_i \cap U_j) \\ t_{ik}(p) &= t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) && (p \in U_i \cap U_j \cap U_k) \end{aligned}$$

Por motivos de comodidad con la notación muchas veces denotaremos un fibrado como $E \xrightarrow{\pi} M$, o incluso solo haciendo referencia al espacio total E .

Ejemplo 1.1.2 (*Banda de Möbius*)

Podemos ver la banda de Möbius M , como un fibrado sobre \mathbb{S}^1 tal que $(M, \pi, \mathbb{S}^1, \mathbb{R}, (\mathbb{R}, +))$ como se ve en la siguiente figura:



Donde está claro que la trivialización ϕ_i nos envía $\pi^{-1}(U_i)$ a el espacio producto de dos intervalos.

Como vemos, está claro que un fibrado no tiene por que ser un producto de dos espacios, ya que si la banda de Möbius fuera producto de dos variedades de dimensión uno, entonces sería orientable.

El ejemplo anterior muestra la definición de fibrado de manera muy clara. Y muestra como la banda de Möbius es algo distinto a un producto de variedades. Si el espacio total de un fibrado puede ser escrito como $E = M \times F$, entonces diremos que es un **fibrado trivial**. A continuación uno de los ejemplos más clásicos de fibrado, en este caso trivial.

Ejemplo 1.1.3 (Fibrado tangente)

El fibrado tangente a una variedad M de dimensión n , usualmente denotado TM se define como:

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

Es fácil comprobar que este fibrado se compone de las siguientes partes:

- Su espacio total es TM
- Su espacio base es M
- Su fibra es $T_p M$
- Su proyección es $\pi(p, u) = p$
- Su grupo estructural es $GL(n, \mathbb{R})$
- Sus trivializaciones son la identidad.

A continuación vamos a definir el concepto de sección, que no es mas que una inclusión de nuestro espacio base (o parte de el para las secciones locales) en el espacio total.

Definición 1.1.4. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal. Una **sección** $s : M \rightarrow E$ es una aplicación diferenciable que cumple $\pi \circ s = \text{id}_M$. El conjunto de las secciones de M es denotado como $\Gamma(M, F)$. Si $U \stackrel{ab}{\subseteq} M$, entonces podemos hablar de **secciones locales** definidas solo en U . Donde denotaremos $\Gamma(U, F)$ al conjunto de todas las secciones locales de U .

Es importante remarcar que no todos los fibrados admiten secciones globales. Si el fibrado es **trivial**, entonces admite secciones globales dadas por la inclusión

$$s_f : M \times \{f\} \hookrightarrow E \quad f \in F$$

Mas adelante estudiaremos un tipo especial de fibrado, donde su grupo de estructura coincide con la fibra, y veremos como para este tipo de fibrados, el hecho de poseer o no una sección global caracteriza el ser un fibrado trivial.

1.1.1. Morfismos y Pullback de un fibrado

Definición 1.1.5. Un morfismo entre dos fibrados $(E, M, \pi, F), (E', M', \tau, F')$ consiste en dos aplicaciones (f, \tilde{f}) de forma que hacen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \tau \\
 M & \xrightarrow{f} & M'
 \end{array}$$

Obsérvese que \tilde{f} determina f , ya que para cada $x \in M$, tomando \tilde{f} restringida a las fibras

$$\hat{f} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \tau^{-1}(f(x))$$

Y ahora tomando dos trivializaciones $(U, \varphi_U), (U', \varphi_{U'})$, de forma que $f(U) \subset U'$ obtenemos que

$$\tilde{f}_{U,U'} = \varphi_{U'} \circ \tilde{f} \circ \varphi_U^{-1} : U \times F \rightarrow U' \times F$$

Vemos claramente que $\tilde{f}_{U,U'}$ es de la forma (f, \hat{f}) .

Como tenemos una composición de morfismos, $(f, \hat{f}) \circ (g, \tilde{g}) = (f \circ g, \hat{f} \circ \tilde{g})$ entonces tiene sentido definir la noción de isomorfismo:

Definición 1.1.6. Un **isomorfismo** entre dos fibrados $(E, M, \pi, F), (E', M', \tau, F')$ es un morfismo (f, \hat{f}) de forma que existe otro morfismo (g, \tilde{g}) entre $(E', M', \tau, F'), (E, M, \pi, F)$ de forma que:

$$\begin{aligned} f \circ g &= \text{id}_M & \hat{f} \circ \tilde{g} &= \text{id}_E \\ g \circ f &= \text{id}_{M'} & \tilde{g} \circ \hat{f} &= \text{id}_{E'} \end{aligned}$$

Definición 1.1.7. Sea (E, M, π, F) un fibrado, y $f : M' \rightarrow M$ una aplicación continua. Definimos el **pullback** de E a través de f como el fibrado (f^*E, M', τ, F) donde:

$$f^*E = \{(x', e) \in M' \times E \mid f(x') = \pi(e)\}$$

$$\begin{aligned} \tau : f^*E &\rightarrow M' \\ (x', e) &\mapsto x' \end{aligned}$$

Además, se cumple que existe un morfismo de fibrados entre (f^*E, M', τ, F) y (E, M, π, F) .

1.1.2. Reconstrucción de Fibrados

Veamos ahora como podemos reconstruir un fibrado dados $M, \{U_i\}, t_{ij}, F, G$. Para ello necesitamos encontrar el espacio total E , la proyección π y las trivializaciones ϕ_i . Primero construimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{E} := \bigcup_i U_i \times F$$

Y sean $(p, f) \in U_i \times F$ y $(q, f') \in U_j \times F$ construimos la relación de equivalencia en \mathcal{E} dada por:

$$(p, f) \sim (q, f') \Leftrightarrow p = q \text{ y } f' = t_{ij}(p)f$$

El espacio base se define entonces como

$$E = \mathcal{E} / \sim$$

Sea $[(p, f)] \in E$, la proyección se define como $\pi([(p, f)]) = p$, y las trivializaciones ϕ_i son las siguientes:

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \times F &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (p, f) &\mapsto [(p, f)] \end{aligned}$$

Definición 1.1.8. *Un **fibrado vectorial** es un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ cuya fibra es un espacio vectorial. Sea \mathbb{R}^k y M una variedad p -dimensional. A k se le denomina la dimensión de la fibra y se denota como $\dim E$ como en teoría de representaciones.*

*El grupo de estructura será un subgrupo de $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$. Si F es \mathbb{C}^k se suele denominar **fibrado vectorial complejo**, y cumple que $G \leq \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$.*

1.2. Fibrados Principales

Definición 1.2.1. *Un **fibrado principal** es un fibrado $P \xrightarrow{\pi} M$ con la fibra F idéntica al grupo estructural G . También nos referiremos a esta definición como **G -fibrado principal** sobre M .*

Además definimos una acción de G en F por la derecha (para no obstaculizar la acción de las funciones de transición, que actúan por la izquierda como antes). Sea $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ una trivialización local de forma que $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, donde $u \in \pi^{-1}(U_i)$ y $p = \pi(u)$. La acción de $a \in G$ en la fibra $\pi^{-1}(U_i)$ se define como $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$

$$ua = \phi_i(p, g_i a)$$

para cualquier $u \in \pi^{-1}(p)$. Como hemos dicho esta acción conmuta con las funciones de transición, por lo que es independiente de la trivialización escogida.

Por lo tanto, la acción por la derecha $P \times G \rightarrow P$ se define sin recurrir a la trivialización escogida, y se denota como $(u, a) \mapsto ua$. Véase que la proyección es invariante respecto de esta acción, $\pi(ua) = \pi(u)$. Además dado que la fibra es difeomorfa al propio grupo de Lie, la propia acción es transitiva y libre.

Dada una sección local cualquiera $s(p)$ sobre U_i , podemos definir una trivialización canónica ϕ_i de la siguiente forma. Para cada $u \in \pi^{-1}(p), p \in U_i$, existe un único $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p)g_u$. Definimos entonces la trivialización ϕ_i como $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$. En esta trivialización, la sección $s_i(p)$ es:

$$s_i(p) = \phi_i(p, e)$$

El ejemplo fundamental de fibrado principal, es el fibrado de referencias o fibrado de marcos, que guarda en un solo objeto los puntos de una variedad, y todas las bases posibles de el espacio tangente a ese punto.

Ejemplo 1.2.2 (Fibrado de referencias)

Sea M una variedad diferenciable y sea $F(M)$

$$F(M) = \{v, v = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } T_p M \text{ para } p \in M\},$$

y la proyección $\pi : F(M) \rightarrow M, \pi(v) = p$. Tomando un entorno coordinado (x, U) de $p \in U \subset M$, entonces toda base $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_p M$ se escribirá como

$$v_j = a_{ij}(v) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(v)}$$

de manera $(a_{ij}(v))$ está en $GL(n, \mathbb{R})$. Por supuesto, cada matriz de $GL(n, \mathbb{R})$ determina una base de $T_p M$ para $p \in U$.

Ahora tomando la siguiente trivialización

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow (x, U) \times GL(n, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto (\pi(v), a_{ij}(v)) \end{aligned}$$

está claro que $F(M)$, es variedad diferenciable. Además los cambios de carta nos generan las funciones de transición g_{UV} de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \varphi_{UV} : (U \cap V) \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow (U \cap V) \times GL(n, \mathbb{R}) \\ (x, A) &\mapsto (x, g_{UV}(x) \cdot a_{ij}(v)) \end{aligned}$$

Con ello vemos que efectivamente $F(M) \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado principal con fibra $GL(n, \mathbb{R})$, idéntica al grupo estructural.

Si M fuese una variedad Riemanniana, esta construcción se podría hacer también tomando bases ortogonales con el producto dado por la métrica, con la que obtendríamos un fibrado principal con grupo estructural $O(n)$. Este concepto de reducir el grupo de Lie de un fibrado principal a otro mas pequeño, se generaliza fácilmente con el concepto de reducción.

1.2.1. Reducciones y G-estructuras

Definición 1.2.3. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal, y sea $H < G$. Una **reducción** (de G a H) suya consiste en un H -fibrado principal $Q \xrightarrow{\tau} M$ y un encaje $\psi : Q \hookrightarrow P$, de forma que si i es la inclusión de H en G , el par (ψ, i) , es un morfismo de fibrados principales.

Ahora nos interesa aplicar este concepto al fibrado de referencias de una variedad $F(M)$, para obtener una estructura geométrica en la variedad base asociada a un subgrupo $H < \text{GL}(n, \mathbb{R})$ que no cambie por las transformaciones dadas por H .

Definición 1.2.4. Sea H un subgrupo cerrado de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, llamamos **H -estructura** en una variedad M a cualquier reducción del fibrado de referencias $F(M)$ a un H -fibrado principal.

Así, para los subgrupos $H < \text{GL}(n, \mathbb{R})$ usuales, es fácil demostrar que se obtienen las siguientes correspondencias.

- Dar una $\text{GL}_0(n, \mathbb{R})$ -estructura corresponde a dar una orientación en M .
- Dar una $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -estructura corresponde a dar una forma de volumen en M .
- Dar una $\text{O}(n)$ -estructura corresponde a dar una métrica Riemanniana en M .
- Dar una $\text{U}(1)$ -estructura corresponde a dar una estructura Kähler en M .
- Dar una $\text{SU}(2)$ -estructura corresponde a dar una estructura hyper-Kähler en M .

Ejemplo 1.2.5 (SU(3)-estructuras)

Las $\text{SU}(3)$ -estructuras se consideran en una variedad M de dimensión 6. Si tenemos una estructura de este tipo, existen referencias locales $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^6)$ de covectores, del fibrado cotangente de forma que se pegan entre ellas con funciones de transición en $\text{SU}(3)$. Explícitamente, si introducimos una referencia (x^1, x^2, x^3) , con sus respectivos conjugados $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ en el fibrado cotangente complexificado como:

$$x^1 = \varepsilon^1 + i\varepsilon^2, \quad x^2 = \varepsilon^3 + i\varepsilon^4, \quad x^3 = \varepsilon^5 + i\varepsilon^6,$$

entonces una $\text{SU}(3)$ -estructura corresponde a las transformaciones de estas referencias $x^a \rightarrow U_{a,b}x^b$ con $U \in \text{SU}(3)$. Entonces está claro que las formas

$$\sigma = \frac{i}{2} \sum_a x^a \wedge \bar{x}^a, \quad \psi = x^1 \wedge x^2 \wedge x^3$$

son $SU(3)$ invariantes y por lo tanto bien definidas en todo M . Además ψ nos define $\hat{\psi}$ una forma tal que $\psi + i\hat{\psi}$ es una $(3,0)$ -forma. Finalmente, la métrica asociada a esta $SU(3)$ -estructura es:

$$g = \sum_a x^a \otimes \bar{x}^a$$

De forma alternativa, se puede demostrar que una $SU(3)$ -estructura en M viene caracterizada por (σ, ψ) donde σ es una 2-forma real definida positiva en todo M , y ψ es una 3-forma en M de forma que satisfacen:

$$\sigma \wedge \sigma \wedge \sigma = \frac{3i}{4} \psi \wedge \bar{\psi}, \quad \sigma \wedge \psi = 0.$$

1.2.2. Fibrado asociado y fibrado adjunto

El fibrado asociado es una estructura que nos permite cambiar la fibra de un fibrado principal, con otra fibra distinta de forma que se mantengan las funciones de transición como elementos del grupo estructural.

Definición 1.2.6. Sea un G -fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ con G actuando sobre una variedad F por la izquierda. Definimos una acción de $g \in G$ en $P \times F$ como:

$$(u, f) \mapsto (ug, g^{-1} \cdot f) \quad u \in P, f \in F$$

Entonces el **fibrado asociado** $P \times_G F$ es el cociente $P \times F / \sim$, donde $(u, f) \sim (ug, g^{-1}f)$ para todo $g \in G$.

Sea $F =$ espacio vectorial k -dimensional V . Sea ρ una representación k -dimensional de G . El **fibrado vectorial asociado** $P \times_\rho V$ se define identificando

$$(u, v) \sim (ug, \rho(g)^{-1}v) \quad u \in P, g \in G, v \in V$$

La estructura de la fibra del fibrado asociado $E = P \times_\rho V$ viene dada de la siguiente forma. La proyección $\tau : E \rightarrow M$ está definida por $\tau(u, v) = \pi(u)$, la cual está bien definida ya que $\pi(u) = \pi(ug)$ implica $\tau(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi(ug) = \tau(u, v)$.

Las funciones de transición de E vienen dadas por $\rho(t_{ij}(p))$ donde $t_{ij}(p)$ son las respectivas funciones de transición de P .

Definición 1.2.7. Definimos el **fibrado adjunto** $\text{ad } P$ de un G -fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ como el siguiente fibrado vectorial:

$$\text{ad } P = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$$

i.e. $\text{ad } P$ es el cociente $P \times \mathfrak{g} / \sim$, donde $(u, A) \sim (ug, g^{-1}Ag)$ para todo $g \in G$.

1.3. Conexiones y Curvatura en Fibrados Principales

En un fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$, existe una forma canónica de definir un subespacio de $T_y(P)$, de forma que todos sus vectores sean tangentes a la fibra que pasa por y . Para ello tomamos la derivada de la proyección

$$d_y \pi : T_y P \rightarrow T_p(y)B$$

y definimos este subespacio, que denominaremos subespacio vertical V_y como $V_y = \ker(d_y \pi)$. Por construcción, este subespacio es tangente a la fibra, ya que la derivada de la proyección se anula en todos los vectores que lo forman.

Sin embargo, no existe una forma canónica de definir un “subespacio horizontal” que sea complementario al vertical. Para poder realizar una elección, nace el concepto de conexión, que básicamente es una asignación de un subespacio horizontal a cada punto, de manera que se comporta bien con la acción de G sobre P .

Definición 1.3.1. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal, y para cada $u \in P$ sea V_u el subespacio vertical de $T_u(P)$. Una **conexión** Γ en el fibrado, es una asignación de un subespacio H_u de $T_u(P)$ a cada $u \in P$ de forma que se cumple:

1. $T_p(U) = V_u \oplus H_u$
2. $H_{ug} = (R_g)_* H_u$ (donde R_g denota la acción por la derecha de g)
3. H_u depende diferenciablemente de u

Llamamos a H_u el subespacio horizontal de $T_u(P)$.

Para un vector $x \in T_u(P)$, diremos que es **vertical** si $x \in V_u$ y diremos que es horizontal, si $x \in H_u$, y por 1), siempre podremos dividir un vector $x \in T_u(P)$ en su parte vertical y en su parte horizontal de forma que (denotando x^v como la parte vertical y x^h como la parte horizontal):

$$x = x^v + x^h \quad x^v \in V_u \quad x^h \in H_u$$

Sea X un campo vectorial diferenciable, entonces podemos separarlo en dos campos vectoriales diferenciables hX y vX , de forma que el primero está formado por vectores horizontales y el segundo por vectores verticales.

Ahora definamos utilizando una 1-forma el concepto de conexión, así nos será mas fácil trabajar con ella. Para ello refrescamos el concepto de campo fundamental.

Definición 1.3.2. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal, ω es la **forma de conexión** asociada a Γ , si es la única 1-forma en P con valores en \mathfrak{g} que se define de forma que para cada $x \in T_u(P)$, $\omega(x) = A$ de forma que $(A^*)_u = x^v$. Donde A^* es el campo vectorial fundamental inducido por la acción del subgrupo uniparamétrico:

$$(A^*)_u = \frac{d}{dt}(u \cdot \exp(tA))$$

Véase que $\omega(x) = 0$ sí y solo sí x es horizontal.

Lema 1.3.3.

Sea A^* el campo vectorial fundamental de $A \in \mathfrak{g}$. Para cada $a \in G$, $(R_a)_* A^*$ es el campo vectorial fundamental de $(\text{ad}_{a^{-1}})A \in \mathfrak{g}$.

Demostración :

$$\begin{aligned} ((R_g)_* A^*)_{y \cdot g} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(R_{\exp(tA)} y) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(R_{\exp(tA)}) R_{g^{-1}} R_g(y) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{g^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot g}(y \cdot g) = (\text{Ad}_{g^{-1}} A)_{y \cdot g}^* \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposición 1.3.4.

La forma de conexión ω de una conexión satisface las siguientes condiciones:

1. $\omega(A_y^*) = A$ para cada $A \in \mathfrak{g}$
2. $(R_a)^* \circ \omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \omega$.

Además, dada un 1-forma ω con valores en \mathfrak{g} que satisfaga las condiciones 1) y 2), existe una única conexión Γ tal que su forma de conexión es ω .

Demostración : La idea de la demostración es utilizar que podemos descomponer un vector X como parte horizontal y vertical, y este vector vertical escribirlo como su campo fundamental asociado.

Recíprocamente, dada una forma ω que satisfaga 1) Y 2), definimos

$$H_u = \ker_{T_u(P)}(\omega).$$

Es fácil comprobar que cumple la definición de conexión. ■

Gracias a esta proposición nos es posible referirnos a una conexión cualquiera dando una 1-forma que cumpla 1) y 2).

1.3.1. La forma local de la conexión

Ahora, dada esta conexión, nos sería muy útil poder proyectarla de alguna forma en M . Esto generalmente no es posible, pero si que podemos definirla en los abiertos U_i que recubren nuestra variedad.

Definición 1.3.5. Sea un $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con forma de conexión ω , y sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de M y σ_i secciones locales respectivas a cada U_i . Definimos las **formas locales de conexión** \mathcal{A}_i como:

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$$

Ahora veamos que de forma inversa, dadas \mathcal{A}_i y σ_i para un U_i podemos reconstruir una forma de conexión ω de forma que el pullback de ω por la sección nos devuelva \mathcal{A}_i .

Teorema 1.3.6. Sea \mathcal{A}_i una 1-forma con valores en \mathfrak{g} definida en U_i , y una sección local $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, entonces existe una forma de conexión ω en $\pi^{-1}(U_i)$ de forma que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$.

Demostración: Definimos una 1-forma en P con valores en \mathfrak{g} como:

$$\omega_i = g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} dg_i$$

donde d es la diferencial y $g_i \in G$ es la trivialización canónica definida como $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ con $u = \sigma_i(p)g_i$.

Veamos primero que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega_i$, sea $x \in T_p M$

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \omega_i(x) &= \omega_i(\sigma_{i*} x) = \pi^* \mathcal{A}_i(\sigma_{i*} x) + dg_i(\sigma_{i*} x) \\ &= \mathcal{A}_i(\pi_* \sigma_{i*} x) + dg_i(\sigma_{i*} x) \end{aligned}$$

Pero ahora bien, $\pi \circ \sigma_i = \text{id}_M$, por lo tanto $\pi_* \sigma_{i*} = \text{id}_{T_p M}$, y el sumando de la derecha se anula, puesto que $g_i = e$ en $\sigma_{i*} x$. Por lo tanto $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$.

Nos falta comprobar que en efecto ω_i es una forma de conexión, para ello veamos que satisface las dos condiciones de la proposición 1.3.4:

- Sea $x = A_u^* \in V_u P$ con su respectivo $A \in \mathfrak{g}$, es fácil ver que $\pi_* x = 0$ ya que x es un vector vertical. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\omega_i(A_u^*) &= g_i^{-1} dg_i(A_u^*) \\ &= g_i^{-1}(u) \left. \frac{d}{dt} g(u \exp(tA)) \right|_{t=0} \\ &= g_i^{-1}(u) g_i(u) \left. \frac{d}{dt} (\exp(tA)) \right|_{t=0} = A\end{aligned}$$

- Sea $x \in T_u P$ y $h \in G$. Tenemos:

$$R_h^* \omega_i(x) = \omega_i(R_{h^*} x) = g_{iuh}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h^*} x) g_{iuh} + g_{iuh}^{-1} dg_{iuh}(R_{h^*} x)$$

Como $g_{iuh} = g_{iu} h$ y $\pi_* R_{h^*} x = \pi_* x$ (ya que la acción no afecta a π), tenemos

$$R_h^* \omega_i(x) = h^{-1} g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* x) g_{iu} h + g_{iu}^{-1} dg_{iu}(x) h$$

donde ahora el sumando de la derecha

$$\begin{aligned}g_{iu}^{-1} dg_{iu}(x) h &= g_{iu}^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)h} \right|_{t=0} \\ &= h^{-1} g_{iu}^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)} \right|_{t=0} h = h^{-1} g_{iu}^{-1} dg_{iu}(x) h\end{aligned}$$

Donde $\gamma(t)$ es una curva de forma que $\gamma(0) = u$ y $\gamma'(0) = x$. Volviendo a la ecuación general tenemos:

$$R_h^* \omega_i(x) = h^{-1} g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* x) g_{iu} h + h^{-1} g_{iu}^{-1} dg_{iu}(x) h = h^{-1} \omega_i(x) h = \text{Ad}_{h^{-1}} w(x) \quad \blacksquare$$

Ahora veamos que condiciones de pegado necesitan cumplir las \mathcal{A}_i entre ellas, para poder crear una forma de conexión global. Para ello demostramos un lema técnico antes.

Lema 1.3.7.

Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal y σ_i (resp. σ_j) una sección local sobre U_i (resp. U_j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Para $x \in T_p M$ ($p \in U_i \cap U_j$), $\sigma_{i^*} x$ y $\sigma_{j^*} x$ se satisface

$$\sigma_{j^*} x = R_{t_{ij}^*}(\sigma_{i^*} x) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(x))^\#$$

Donde $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ es la función de transición.

Demostración: Como antes, tomemos una curva γ en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = x$.

Como $\sigma_i(p)$ y $\sigma_j(p)$ están relacionadas con la función de transición de forma que $\sigma_j(p) =$

$\sigma_i(p)t_{ij}(p)$, se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_{j*}x &= \left. \frac{d}{dt} \sigma_j(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \{ \sigma_i(\gamma(t)) t_{ij}(\gamma(t)) \} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \sigma_i(\gamma(t)) \cdot t_{ij}(p) + \sigma_i(p) \cdot \frac{d}{dt} t_{ij}(\gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}x) + \sigma_j(p)t_{ij}(p)^{-1} \left. \frac{d}{dt} t_{ij}(\gamma(t)) \right|_{t=0}\end{aligned}$$

Donde ahora el segundo término

$$t_{ij}(p)^{-1} \left. \frac{d}{dt} t_{ij}(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [t_{ij}(p)^{-1} t_{ij}(\gamma(t))] \right|_{t=0} \in T_e(G) \cong \mathfrak{g}$$

Véase que $t_{ij}(p)^{-1} t_{ij}(\gamma(t)) = e$ en $t = 0$, por tanto ese término representa el campo vectorial fundamental $\left(t_{ij}^{-1} dt_{ij}(x) \right)^*$ en $\sigma_j(p)$. ■

Aplicando ahora este Lema en la forma de conexión ω , y utilizando la propiedad (2) de la proposición 1.3.4, obtenemos la **condición de compatibilidad** que buscábamos:

$$\begin{aligned}\sigma_j^* \omega(x) &= R_{t_{ij}}^*(\omega(\sigma_{i*}x)) + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(x) \\ &= t_{ij}^{-1} (\omega(\sigma_{i*}x)) t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(x)\end{aligned}$$

Que utilizando la definición de las propias \mathcal{A}_i , se escribe como:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(x)$$

1.3.2. Curvatura

En esta sección estudiaremos el concepto de curvatura de una conexión asociada a un fibrado principal. Primero veamos la definición y un par de resultados, antes de dar intuición a este concepto.

Definición 1.3.8. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal y una conexión Γ , con su respectiva forma de conexión asociada ω . Definimos la **derivada covariante** d^ω de una i -forma $\alpha \in \Omega^i(P, V)$ con V un espacio vectorial, como:

$$d^\omega \alpha(u_1, u_2, \dots, u_i) = d\alpha(u_1^h, u_2^h, \dots, u_i^h)$$

Definimos la **curvatura** Ω como la 2-forma $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$:

$$\Omega = d^\omega \omega$$

Más adelante tomaremos la convención física de denotar F_ω como la curvatura asociada a una conexión ω , pero por ahora preferimos seguir con la convención matemática para simplificar la notación.

Recordemos que para una p -forma $\xi = \xi^\alpha \otimes T_\alpha$ y una q -forma $\theta = \theta^\beta \otimes T_\beta$, siendo $\{T_\gamma\}$ una base de \mathfrak{g} , se define el **conmutador** $[\xi, \theta]$ (también denotado en otros textos como $[\xi \wedge \theta]$) como:

$$[\xi, \theta] = [T_\alpha, T_\beta] \otimes \xi^\alpha \wedge \theta^\beta$$

Si además el álgebra de Lie es matricial, podemos definir el **producto cuña** como:

$$\xi \wedge \theta = T_\alpha \cdot T_\beta \otimes \xi^\alpha \wedge \theta^\beta$$

donde \cdot es el producto de matrices, de donde obtenemos la igualdad:

$$[\xi, \theta] = \xi \wedge \theta - (-1)^{pq} \theta \wedge \xi$$

Teorema 1.3.9 (Ecuación de estructura de Cartan). *Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal y una conexión Γ , con su respectiva forma de conexión asociada ω y sea Ω la curvatura, entonces se da la siguiente igualdad:*

$$\Omega(u, v) = d\omega(u, v) + [\omega(u), \omega(v)] \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in T_x(P)$$

Que también suele escribirse como:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

Demostración: Usaremos la identidad (que a veces se toma como definición) de una forma actuando en campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}$:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (\dagger)$$

Como en la demostración de 1.3.4, nos dividimos a tres casos:

- X e Y son horizontales. En este caso $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, el corchete se anula, y en la ecuación nos queda la propia definición de la curvatura.
- X e Y son verticales. Entonces por definición $\Omega(X, Y) = 0$. Ahora, asumimos que ambos son campos vectoriales fundamentales $X = A^*$, $Y = B^*$ con $A, B \in \mathfrak{g}$. Entonces por definición de ω . $\omega(X) = A$, $\omega(Y) = B$, ahora bien entonces $Y(\omega(X)) = Y(A) = 0 = X(B) = X(\omega(Y))$. Por lo tanto nuestra ecuación queda de la forma:

$$\omega([X, Y]) = [\omega(X), \omega(Y)]$$

Lo cual es cierto ya que:

$$\omega([X, Y]) = \omega([A^*, B^*]) = \omega([A, B]^*) = [A, B] = [\omega(X), \omega(Y)]$$

- X es horizontal e Y vertical. Asumimos que Y es un campo vectorial fundamental $Y = B^*$, con $B \in \mathfrak{g}$, por lo que $\omega(X) = 0$ y $\omega(Y) = B$, y por la ecuación se anula a ambos lados, ya que:

$$\begin{aligned} Y(\omega(X)) &= 0 & X(\omega(Y)) &= X(B) = 0 \\ [\omega(X), \omega(Y)] &= [0, \omega(Y)] = 0 & \omega([X, Y]) &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\omega([X, Y]) = 0$ se da por las propiedades de la derivada de Lie:

$$[Y, X] = L_Y X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-tA)})_* X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Z_t = Z$$

Donde Z_t y Z son horizontales, ya que como la conexión es equivariante bajo la acción de G , la diferencial de R_g lleva vectores horizontales a vectores horizontales. Por lo tanto $\omega([X, Y]) = \omega(Z) = 0$

Si el \mathfrak{g} es matricial, se tiene:

$$[\omega, \omega] = 2\omega \wedge \omega$$

Y además se tiene que:

$$\begin{aligned} [\omega, \omega](X, Y) &= [T_\alpha, T_\beta] \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \\ &= [T_\alpha, T_\beta] [\omega^\alpha \omega^\beta - \omega^\beta \omega^\alpha] \\ &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] \\ &= 2[\omega(X), \omega(Y)] \end{aligned}$$

Por lo que $\Omega(X, Y) = (d\omega + \omega \wedge \omega)(X, Y)$ ■

Además tomando vectores horizontales en el teorema anterior obtenemos fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 1.3.10.

Si X e Y son campos vectoriales horizontales sobre P :

$$-\omega([X, Y]) = \Omega(X, Y)$$

Gracias a la ecuación de estructura y al anterior corolario, podemos dar una idea de lo que representa la curvatura, y es que la curvatura mide **como de vertical es el corchete de las proyecciones horizontales**.

Ahora veremos que la curvatura tiene derivada covariante nula, que es lo mismo que decir que la derivada covariante se comporta con ω como lo haría la derivada exterior ($dd\omega = 0$).

Teorema 1.3.11 (Identidad de Bianchi).

$$d^\omega d^\omega \omega = d^\omega \Omega = 0$$

Demostración : Por la definición de d^ω , basta ver que $d\Omega(x, y, z) = 0$ cuando x, y, z son vectores horizontales. Aplicando la derivada exterior a ambos lados de la ecuación de estructura:

$$0 = dd\omega = -d[\omega, \omega] + d\Omega$$

Pasando el termino del corchete al otro lado de la igualdad

$$\begin{aligned} d\Omega &= d[\omega, \omega] \\ &= ([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]) \\ &= 2[d\omega, \omega] \\ d\Omega(x, y, z) &= 2[d\omega, \omega](x, y, z) \end{aligned}$$

Usando la siguiente propiedad de los corchetes

$$[d\omega, \omega](x, y, z) = [d\omega(x, y), \omega(z)] + [d\omega(z, x), \omega(y)] + [d\omega(y, z), \omega(x)]$$

Y que como x, y, z son vectores horizontales entonces $\omega(x) = \omega(y) = \omega(z) = 0$

$$d\Omega = 0$$

■

1.4. El espacio $\Omega^*(M, \text{ad } P)$

1.4.1. La curvatura como una forma en $\Omega^2(M, \text{ad } P)$

En general, no es posible ver la conexión ω de un G -fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ en su espacio base, ya que depende de la parte vertical. Pero como la curvatura Ω es una forma horizontal, podemos **descender la curvatura** hasta M , como una 2-forma $F \in \Omega(M, \text{ad } P)$ de la siguiente forma

$$F_x = [y, \Omega_y(X_y^h, Y_y^h)] \quad \text{para } y \in p^{-1}(x), X, Y \in \mathfrak{g}.$$

La forma F está bien definida, ya que si escogemos cualquier otro $y' \in p^{-1}(x)$, entonces $y' = yg$ para algún $g \in G$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} [yg, \Omega_{yg}(X_{yg}^h, Y_{yg}^h)] &= [yg, \Omega_{yg}((R_g)_* X_y^h, (R_g)_* Y_y^h)] \\ &= [yg, (R_g^* \Omega)_y(X_y^h, Y_y^h)] \\ &= [yg, \text{Ad}_{g^{-1}}(\Omega_y(X_y^h, Y_y^h))] \\ &= [y, \Omega_y(X_y^h, Y_y^h)] \end{aligned}$$

El recíproco también se cumple, si escogemos un elemento $\tilde{\gamma} \in \Omega^2(M, \text{ad } P)$, podemos asociarle un elemento en $\gamma \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ Ad-equivariante y que se anula en vectores verticales. Tomando un abierto U_i de forma que $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times G$, tenemos que $\text{ad } P|_{U_i} \simeq U_i \times \mathfrak{g}$. La forma $\tilde{\gamma}|_{U_i}$ puede ser vista como tomando valores en \mathfrak{g} y con ello definimos:

$$\gamma_{(x,e)}^i(X, Y) = \tilde{\gamma}_x(\pi_*(X), \pi_*(Y))$$

donde como $(x, g) = (x, e).g$ tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_{(x,g)}^i(X, Y) &= \text{Ad}_{g^{-1}} \gamma_{(x,e)}^i((R_{g^{-1}})_*(X), (R_{g^{-1}})_*(Y)) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}} \tilde{\gamma}_{(x,e)}(\pi_*(X), \pi_*(Y)) \end{aligned}$$

Estas formas locales γ^i definen una global $\tilde{\gamma}$. Debemos ver si en las intersecciones $U_i \cap U_j$, con funciones de transición ϕ_{ij} , se cumple que:

$$\phi_{ij}^*(\tilde{\gamma}_j) = \tilde{\gamma}_i$$

lo que es el caso, ya que

$$\phi_{ij}^*(\tilde{\gamma}_i) = R_{g_{ij}}^* \tilde{\gamma}_i = \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}} \tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_j$$

donde la ultima igualdad se da puesto que en el punto (x, e) :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_j(X, Y) &= \gamma_j(\pi_*(X), \pi_*(Y)) \\ &= \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}} \gamma_i(\pi_*(X), \pi_*(Y)) \\ &= \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}} \tilde{\gamma}_i(X, Y) \end{aligned}$$

Una k-forma α en P con valores en \mathfrak{g} Ad-equivariante y horizontal es llamada una forma básica de tipo ad ($\alpha \in \Omega_{bas}^k(P, \mathfrak{g})$). Hemos demostrado que existe una biyección entre:

$$\Omega_{bas}^k(P, \mathfrak{g}) \longleftrightarrow \Omega^k(M, \text{ad } P)$$

Y es por eso por lo que podemos ver la curvatura como una forma en el fibrado adjunto, ya que la curvatura es una forma básica de tipo ad, mientras que la conexión no lo es, ya que se ve afectada por la parte vertical.

Por último, si el fibrado es trivial, entonces el fibrado adjunto también lo es. Lo que implica que $\Omega \in \Omega^2(M, P \times \mathfrak{g})$ y a su vez la forma es invariante por la izquierda. Existe una correspondencia canónica entre este tipo de formas y las 2-formas en M con valores en el propio álgebra de Lie \mathfrak{g} , por lo que podemos ver a Ω como una 2-forma en $\Omega^2(M, \mathfrak{g})$

1.4.2. Aplicaciones de $\Omega_{bas}^k(P, \mathfrak{g}) \xrightarrow{1:1} \Omega^1(M, \text{ad } P)$

Esta correspondencia induce una **derivada covariante** para formas en $\Omega^*(M, \text{ad } P)$

$$d^\omega : \Omega^k(M, \text{ad } P) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, \text{ad } P)$$

esta derivada covariante nos será útil mas adelante. Veamos una propiedad que nos permite calcularla cómodamente.

Proposición 1.4.1 (Expresión alternativa de la derivada covariante).

Sea ω una conexión y $\varphi \in \Omega_{\text{bas}}^k(P, \mathfrak{g})$. Entonces si $X, Y \in T_u P$

$$d^\omega \varphi(X, Y) = d\varphi(X, Y) + [\varphi(X), \omega(Y)] + [\omega(X), \varphi(Y)]$$

Que puede ser escrita alternativamente como:

$$d^\omega \varphi = d\varphi + [\omega, \varphi]$$

Demostración:

En este trabajo solo se va a ver la demostración para 1-formas. La demostración para k -formas es similar, pero extensa, y utiliza una propiedad para la derivada de k -formas que generaliza (†)

De forma similar a dos de las demostraciones anteriores, es suficiente probarlo para tres casos. El único no trivial, es para cuando X es vertical e Y es horizontal. Sea $X = A^*$ el campo fundamental en u , donde $A \in \mathfrak{g}$. Extendemos Y a un campo horizontal en P , denotado también como Y , de forma que es invariante por $R_a, a \in G$.

Por lo tanto $[A^*, Y] = 0$. Como A^* es vertical, $d^\omega \varphi(A^*, Y) = 0$. Veamos que el lado derecho se anula también. Por la propiedad de las derivadas usada antes (†), se tiene:

$$d\varphi(A^*, Y) = (A^*(\varphi(Y)) - Y(\varphi(A^*)) - \varphi([A^*, Y])) = A^*(\varphi(Y)),$$

ya que A^* es vertical. Por lo tanto falta ver que

$$A^*(\varphi(Y)) = -[\varphi(A^*), \omega(Y)] - [\omega(A^*), \varphi(Y)] = -[A, \varphi(Y)]$$

Si a_t es el subgrupo uniparamétrico de G generado por A , entonces:

$$\begin{aligned} A_u^*(\varphi(Y)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi_{u a_t}(Y) - \varphi_u(Y)] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(R_{a_t}^* \varphi)_u(Y) - \varphi_u(Y)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\text{ad}(a_t^{-1})(\varphi_u(Y)) - \varphi_u(Y)] = -[A, \varphi_u(Y)], \end{aligned}$$

porque Y es invariante por R_{a_t} . ■

Es importante denotar que esta proposición se utiliza para formas en $\Omega^1(M, \text{ad } P)$, simplemente habrá que verlas como formas en $\Omega_{\text{bas}}^1(P, \mathfrak{g})$ para aplicar la proposición.

Dado que vamos a querer minimizar un cierto funcional relacionado con la conexión y la curvatura, veamos que el espacio de todas la conexiones es un espacio afín lo cual nos será de mucha utilidad más tarde.

Proposición 1.4.2.

El espacio de todas las conexiones de un fibrado principal \mathcal{A} es un **espacio afín** modelado por $\Omega^1(M, \text{ad } P)$.

Demostración: Para ello veamos que si tenemos dos conexiones $\omega, \theta \in \mathcal{A}$ entonces

$$\omega - \theta \in \Omega_{\text{bas}}^1(P, \mathfrak{g})$$

Y también hemos de ver que

$$\omega + \nu \in \mathcal{A} \quad \forall \nu \in \Omega_{\text{bas}}^1(P, \mathfrak{g})$$

La primera afirmación se da ya que ω y θ son Ad-invariantes, por lo tanto su resta ha de serlo también. Además si X es un vector vertical $X = A^*$, entonces:

$$(\omega - \theta)(X) = \omega(A^*) - \theta(A^*) = A - A = 0$$

Por lo tanto es una forma horizontal. Por último se tiene que $\omega + \nu$ satisface las dos propiedades que caracterizan ser una conexión, ya que ω y ν son Ad-equivariantes y:

$$(\omega + \nu)(A^*) = \omega(A^*) + \nu(A^*) = \omega(A^*) = A$$

■

1.5. Clases Características

Las clases características son una herramienta que podemos utilizar para ver cuanto se aleja un fibrado de ser trivial. Estas son subconjuntos de las clases de cohomología del fibrado.

1.5.1. Construcción de Weil

En primer lugar vamos a ver el teorema de Weil, que de alguna forma generaliza el famoso teorema de Gauss-Bonnet.

Para ello nuestro objetivo será poder integrar la curvatura para obtener una constante. Si queremos intentar generalizar este teorema utilizando fibrados principales con M como variedad base, entonces necesitaremos encontrar una forma relacionada con la curvatura que poder integrar, ya que Ω es una 2-forma, que no es integrable sobre M .

Además, el verdadero problema reside en que Ω vista en M da valores en $\text{ad } P$. Ambos problemas pueden ser solucionados en el caso de dimensión par, si encontramos cierta clase de funciones invariantes por Ad.

Definición 1.5.1. Sea G un grupo de Lie con álgebra \mathfrak{g} . Definimos $I^k(G)$ como el conjunto de todas las aplicaciones multilineales y simétricas de la forma

$$f : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

que cumplan $f(\text{Ad}_H(t_1), \dots, \text{Ad}_H(t_k)) = f(t_1, \dots, t_k)$ para todo $H \in \mathfrak{g}$ y $t_1, \dots, t_k \in \mathfrak{g}$. Es fácil comprobar que, $I^k(G)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Nos interesa dotar a el conjunto de todas estas aplicaciones de una estructura de álgebra, para poder definir un homomorfismo de álgebras de $I(G)$ a $H^*(M; \mathbb{R})$

Definición 1.5.2. Ahora definimos

$$I(G) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} I^k(G).$$

Para $f \in I^k(G)$ y $g \in I^l(G)$, definimos $fg \in I^{k+l}(G)$ por

$$fg(t_1, \dots, t_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}) g(t_{\sigma(k+1)}, \dots, t_{\sigma(k+l)})$$

donde la suma se toma en todas las permutaciones σ de los $(1, \dots, k+l)$. Extendiendo a $I(G)$ de la forma natural, hacemos que $I(G)$ sea un álgebra conmutativa sobre \mathbb{R} .

Tomamos una conexión en nuestro fibrado principal, tomamos ω su forma de conexión, y Ω su curvatura. Sea $X_1, \dots, X_{2k} \in T_u(P)$, para cada $f \in I^k(G)$, definimos $f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$ la $2k$ -forma en P definida por

$$f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)(X_1, \dots, X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} f(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)}))$$

donde ε_{σ} el signo de la permutación σ .

El siguiente teorema tratará de construir el homomorfismo de álgebras comentado anteriormente.

Teorema 1.5.3. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal. Para una cierta conexión del fibrado principal, sea Ω su forma de curvatura. Para cada $f \in I^k(G)$ la $2k$ -forma $f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$ cumple que:

1. Puede ser proyectada en M , i.e es el pullback de una $2k$ -forma en M .

2. Es cerrada.

3. La clase de cohomología de la proyección en M no depende de la conexión.

Demostración :

1. Vamos a construir una forma en M tal que su pullback es $f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$. Para $f \in I^k(G)$ definimos

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad \text{ad } P \times \dots \times \text{ad } P &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([y, A_1], \dots, [y, A_k]) &\mapsto f(A_1, \dots, A_k) \end{aligned}$$

que está bien definido ya que:

$$([yg, \text{Ad}_{g^{-1}} A_1], \dots, [yg, \text{Ad}_{g^{-1}} A_k]) \longrightarrow f(\text{Ad}_{g^{-1}} A_1, \dots, \text{Ad}_{g^{-1}} A_k) = f(A_1, \dots, A_k)$$

Gracias a esta \tilde{f} , podemos definir una 2-forma $\tilde{f}(\tilde{\Omega}, \dots, \tilde{\Omega})$ en M como:

$$\tilde{f}(\tilde{\Omega}, \dots, \tilde{\Omega})(Y_1, \dots, Y_{2k}) = \frac{1}{2k!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon_\sigma \tilde{f}(\tilde{\Omega}(Y_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(2)}), \dots, \tilde{\Omega}(Y_{\sigma(2k-1)}, Y_{\sigma(2k)}))$$

con $Y_i \in T_x M$ y $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(M, \text{ad } P)$ la curvatura en M .

Finalmente, calculando su pullback por p , utilizando que $Y_i = p_* X_i$:

$$\begin{aligned} p^*(\tilde{f}(\tilde{\Omega}, \dots, \tilde{\Omega}))(X_1, \dots, X_{2k}) &= \frac{1}{2k!} \tilde{f}(\tilde{\Omega}, \dots, \tilde{\Omega})(p_* X_1, \dots, p_* X_{2k}) \\ &= \frac{1}{2k!} \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma f(\Omega(Y_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(Y_{\sigma(2k-1)}, Y_{\sigma(2k)})) \\ &= f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) \end{aligned}$$

2. Por definición, $f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$ es una forma horizontal ya que está definida con Ω . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} df(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) &= d^\omega f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) \\ &= f(d^\omega \Omega \wedge \dots \wedge \Omega) + f(\Omega \wedge d^\omega \Omega \wedge \dots) + \dots + f(\Omega \wedge \dots \wedge d^\omega \Omega) = 0 \end{aligned}$$

por la identidad de Bianchi.

3. Si tomamos ω_0, ω_1 dos conexiones de P , estarán relacionadas con una forma $A \in \Omega^1(M, \text{ad } P)$, tal que $\omega_1 = \omega_0 + A$. Consideramos ahora la familia uniparamétrica de conexiones $\omega_t = \omega_0 + tA$. Sus curvaturas son:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= d\omega_t + [\omega_t, \omega_t] \\ &= d\omega_0 + t dA + [\omega_0 + tA, \omega_0 + tA] \\ &= \Omega_0 + t(dA + [A, \omega_t]) + t^2 [A, A] \\ &= \Omega_0 + t(d^\omega A) + t^2 [A, A] \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la ecuación de estructura para Ω_0 y 1.4.1. En particular:

$$\frac{d}{dt}\Omega_t = dA + [A, \omega_t] = d_t^\omega A$$

Queremos ver que la clase de cohomología no depende de la conexión, por lo tanto vamos a ver que $f(\Omega_1 \wedge \dots \wedge \Omega_1) - f(\Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_0) = dH$. Vamos a definir

$$H = k \int_0^1 f \left(A \wedge \Omega_t \wedge \overset{(k-1)}{\dots} \wedge \Omega_t \right) dt$$

Y en efecto comprobamos que su derivada exterior coincide con lo que buscamos.

$$\begin{aligned} dH &= k \int_0^1 df(A \wedge \dots \wedge \Omega_t) dt \\ &= k \int_0^1 d_t^\omega f(A \wedge \dots \wedge \Omega_t) dt \\ &= k \int_0^1 f(d_t^\omega A \wedge \dots) dt + \int_0^1 f(A \wedge d_t^\omega \Omega_t \wedge \dots) dt + \dots \int_0^1 f(A \wedge \dots \wedge d_t^\omega \Omega_t) dt \\ &= k \int_0^1 f \left(\frac{d\Omega_t}{dt} \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t) dt \\ &= f(\Omega_1 \wedge \dots \wedge \Omega_1) - f(\Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.5.2. Clases de Chern

Las clases de Chern no son más que un tipo de clase característica fácil de construir, que nos serán útiles mas adelante.

Definición 1.5.4. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial con fibra \mathbb{C}^k . El grupo estructural G es un subgrupo de $GL(k, \mathbb{C})$, y dada una conexión ω y su curvatura Ω vista tomando valores en \mathfrak{g} . Definimos la clase total de Chern como

$$c(\Omega) = \det \left(I + \frac{i\Omega}{2\pi} \right).$$

Como F es una 2-forma, $c(\Omega)$ es una suma directa de formas de grado par,

$$c(\Omega) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \dots$$

donde cada $c_j(\Omega) \in \Omega^{2j}(M)$ es llamada la j -ésima clase de Chern.

En una variedad M con $\dim M = p$, las clases $c_j(\Omega)$ con $2j > p$ se anulan trivialmente. Además, independientemente de la dimensión, el último término es

$$c_k(\Omega) = \det(i\Omega/2\pi).$$

Calculemos ahora las clases de Chern de una conexión A asociada a un $SU(2)$ -fibrado principal, respecto a la base de $\mathfrak{su}(2)$ dada por las matrices de Pauli.

Definición 1.5.5. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal y una representación

$$\rho : G \rightarrow U(n).$$

Se definen las clases de Chern de $P \xrightarrow{\pi} M$ como las clases de Chern del fibrado asociado $P \times_{\rho} \mathbb{C}^n$ con conexión ω , donde $U(n)$ actúa sobre \mathbb{C}^n de la forma natural.

Es importante destacar que gracias al teorema de Chern-Weil ambas definiciones no dependen de la conexión elegida.

Ejemplo 1.5.6 (Clases de Chern de un $SU(2)$ -fibrado vectorial)

Sea F un fibrado vectorial complejo con fibra \mathbb{C}^2 sobre M , con grupo estructural $SU(2)$ y $\dim M = 4$. Sea A la conexión y F la curvatura asociada a esa conexión, que podemos escribir como:

$$F = F^{\alpha} \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{2} \right) \quad F^{\alpha} = \frac{1}{2} F^{\alpha}_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

donde σ_{α} son las matrices de Pauli, base de $\mathfrak{su}(2)$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la clase total de Chern es:

$$\begin{aligned} c(F) &= \det \left(I - \frac{i}{2\pi} F^{\alpha} \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{2} \right) \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 - \frac{F_1}{4\pi} & \frac{-F_3 + iF_2}{4\pi} \\ \frac{-F_3 - iF_2}{4\pi} & 1 + \frac{F_1}{4\pi} \end{pmatrix} \\ &= 1 + \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 (F^3 \wedge F^3 + F^1 \wedge F^1 + F^2 \wedge F^2) \end{aligned}$$

Así pues tenemos:

$$c_0(F) = 1 \quad c_1(F) = 0 \quad c_2(F) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 (F^{\alpha} \wedge F^{\alpha}) = \det \left(\frac{iF}{2\pi} \right)$$

Ecuaciones de Yang-Mills e Instantones en SU(2)

Las ecuaciones de Yang-Mills, son un conjunto de ecuaciones diferenciales sobre el espacio de todas las conexiones en un fibrado principal. Aunque nacieron motivadas por la física, son de un gran interés geométrico. En un fibrado principal, no existe una forma canónica de elegir una conexión, es más, el espacio de conexiones donde elegir es infinito dimensional. Estas ecuaciones dan una forma de elegir unas conexiones de forma más natural, eligiendo las conexiones que cumplan la ecuación.

Para elegir una conexión de forma natural, podría intentarse elegir una conexión A , de forma que las formas locales A_i sean constantes. La forma más correcta de formalizar esta condición sería pedir que la curvatura asociada a la conexión, que a partir denotaremos como F_A , sea nula.

Sin embargo si una conexión en un fibrado principal tiene curvatura nula, entonces tomando esta curvatura para calcular las clases de Chern obtenemos que todas deben ser triviales. Por lo tanto, la existencia de estas conexiones, tienen que ver con la topología del fibrado y en general no pueden encontrarse estas conexiones “planas” para un fibrado principal cualquiera.

Por lo tanto lo mejor que podemos pedir es minimizar la norma de la curvatura, que definiremos después, obteniendo así una curvatura lo más plana posible. El funcional a minimizar en $P \xrightarrow{\pi} M$, siendo \mathcal{A} es el espacio de todas las conexiones posibles del fibrado, es la norma L^2 de la curvatura:

$$YM(A) = \|F_A\|^2 \quad A \in \mathcal{A}$$

Las **ecuaciones de Yang-Mills**, son simplemente, las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional anterior, y son escritas frecuentemente de la siguiente forma:

$$\star d^A \star F_A = 0 \quad A \in \mathcal{A}$$

Para poder entender estas ecuaciones, necesitamos definir tanto un producto escalar en $\Omega^*(M, \text{ad } P)$, como definir el dual de Hodge \star de este tipo de formas.

2.1. Funcional de Yang-Mills

Sea G un grupo semisimple y matricial. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal sobre una variedad riemanniana M compacta. Para el conjunto de formas $\Omega^*(M, \text{ad } P)$, estudiemos la estructura de álgebra de Lie graduada que nos da el conmutador.

Recordemos que el conmutador de formas se define como:

$$\begin{aligned} [\ , \] : \Omega^p(M, \text{ad } P) \times \Omega^q(M, \text{ad } P) &\rightarrow \Omega^{p+q}(M, \text{ad } P) \\ [\omega, \theta] &\mapsto \omega \wedge \theta - (-1)^{pq} \theta \wedge \omega \end{aligned}$$

Y además si $\omega^p \in \Omega^p(M, \text{ad } P)$ y $\omega^q \in \Omega^q(M, \text{ad } P)$. Esta operación satisface:

$$[\omega^p, \omega^q] = (-1)^{1+pq} [\omega^q, \omega^p]$$

y su correspondiente identidad de Jacobi con signo:

$$(-1)^{pr} [\omega^p, [\omega^q, \omega^r]] + (-1)^{qr} [\omega^r, [\omega^p, \omega^q]] + (-1)^{pq} [\omega^q, [\omega^r, \omega^p]] = 0$$

Como la métrica de Killing $\langle, \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, es invariante por la acción adjunta, se tiene que \langle, \rangle en \mathfrak{g} induce una métrica Riemanniana en las fibras de $\text{ad}(P)$, que se dualiza naturalmente para definir una correspondencia:

$$\hat{\wedge} : \Omega^p(M, \text{ad}(P)) \otimes \Omega^q(M, \text{ad}(P)) \rightarrow \Omega^{p+q}(M)$$

que simplemente escribimos como $\omega^p \hat{\wedge} \omega^q$. La invariancia de \langle, \rangle en \mathfrak{g} implica que

$$\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle$$

y por lo tanto, para u, v, w en $\Omega^*(M, \text{ad}(P))$, se tiene:

$$[u, v] \hat{\wedge} w = u \hat{\wedge} [v, w] \quad (\spadesuit)$$

Supongamos que fijamos una métrica g y una orientación en M , definimos la estrella de Hodge \star , en $\Omega^*(M, \text{ad } P)$ como el único operador que cumple que:

$$\theta \hat{\wedge} \star \theta = \langle \theta, \theta \rangle_g \text{vol}_g \quad \text{para } \theta \in \Omega^q(M, \text{ad } P),$$

donde \langle, \rangle_g denota la estructura Riemanniana natural en $\Omega^q(M)$, y vol_g es la forma de volumen que preserva la orientación M . Con todos estos ingredientes, podemos definir un producto escalar en $\Omega^q(M, \text{ad } P)$ como:

$$(\phi, \psi) = \int_M \phi \hat{\wedge} \star \psi \, d \text{vol}_g$$

Definimos ahora el funcional de Yang-Mills $YM : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$YM(A) = (F_A, F_A)$$

2.2. Ecuaciones de Yang-Mills

Como hemos comentado, las ecuaciones de Yang-Mills surgen de encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional de Yang-Mills. Para poder derivar las ecuaciones, utilizaremos el hecho de que el espacio de conexiones es un espacio afín y un pequeño lema previo.

Lema 2.2.1.

Sea $P \rightarrow M$ un fibrado principal dotado de una conexión A y sean $\alpha \in \Omega^r(M, \text{ad } P)$ y $\beta \in \Omega^l(M, \text{ad } P)$. Entonces se cumple que:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d^A \alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d^A \beta$$

Demostración :

$$\begin{aligned} d^A \alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d^A \beta &= d\alpha \wedge \beta + [A, \alpha] \wedge \beta + (-1)^r (\alpha \wedge d\beta + \alpha \wedge [A, \beta]) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta + [A, \alpha] \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge [A, \beta] \\ &= d(\alpha \wedge \beta) + [A, \alpha] \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge [A, \beta] \end{aligned}$$

Y como $[A, \alpha] = (-1)^{1+r} [\alpha, A]$, los dos últimos sumandos se anulan entre ellos por ♠. ■

Teorema 2.2.2. Las ecuaciones que caracterizan los puntos críticos del funcional YM son las ecuaciones de Yang-Mills.

Demostración : Un punto crítico es un punto donde $d(YM)$ se anula. Dado que \mathcal{A} es un espacio afín sobre $\Omega^1(M, \text{ad } P)$, se tiene que

$$A \text{ es un punto crítico} \iff \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} YM(A + ta) = 0, \forall a \in \Omega^1(M, \text{ad } P)$$

Ya que la diferencial se anulará si sus derivadas direccionales lo hacen. Como vimos anteriormente en la demostración del teorema de construcción de Weil, la curvatura es:

$$F_{A+t\omega} = F_A + td^A \omega + \frac{t^2}{2} [\omega, \omega]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} YM(A + t\omega) &= \int_M F_{A+ta} \wedge \star F_{A+ta} \\ &= \int_M F_A + \frac{t^2}{2} [a, a] + td_{AA} \wedge \star \left(F_A + \frac{t^2}{2} [a, a] + td_{AA} \right) \end{aligned}$$

Como estamos tomando el diferencial de primer orden, tomamos solo el término lineal en t :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} YM(A + t\omega) = \int_M F_A \wedge \star d_{A\eta} + d_{A\eta} \wedge \star F_A = 2(F_A, d_{A\eta})$$

Usando 2.2.1 a modo de integración por partes:

$$2 \int_M d^A \omega \wedge \star F_A = -2 \int_M \omega \wedge (d^A \star F_A) + 2 \int_M d(\omega \wedge \star F_A) = -2 \int_M \omega \wedge (d^A \star F_A)$$

donde el primer sumando se anula por el teorema de Stokes en una variedad compacta.

Ahora, la siguiente expresión debe anularse para toda ω :

$$(\omega, \star d^A \star F_A) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^1(M, \text{ad } P)$$

Por lo que, como la métrica es no degenerada:

$$\star d^A \star F_A = 0 \quad \blacksquare$$

Al operador $\star d^A \star$ lo denotaremos como δ^A , y lo llamaremos la codiferencial. Con esta nueva notación las ecuaciones de Yang-Mills son:

$$\delta^A F_A = 0$$

2.2.1. Soluciones a YM en $U(1)$ -fibrados principales

Para poder utilizar todos los resultados anteriores pero para $U(1)$ necesitamos adaptar un poco las definiciones. El problema es que el grupo no es semisimple, y su métrica de Killing es degenerada. Este inconveniente se resuelve tomando para las definiciones el producto habitual en su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$.

Por definición de la estrella de Hodge, se tiene que si para una conexión A , se cumple que $\star d^A \star F_A = 0$, entonces se cumplirá que $d^A \star F_A = 0$. Por lo tanto, gracias a esto y a la identidad de Bianchi $d^A F_A = 0$, las ecuaciones de Yang-Mills son básicamente una generalización no lineal de el concepto de forma armónica. Veamos en el siguiente teorema como esto es una caracterización.

Teorema 2.2.3. *Sea un G -fibrado principal dotado de una conexión A*

$$A \text{ satisface YM} \Leftrightarrow F_A \text{ es armónica}$$

donde nos referimos a armónica con $\Delta^A F_A = 0$, donde el laplaciano se define como

$$\Delta^A = \delta^A d^A + d^A \delta^A$$

Demostración :

- \Rightarrow] A satisface la ecuación de YM $\delta^A F_A = 0$. Se verifica además la identidad de Bianchi $d^A F_A = 0$. Por lo tanto $\Delta^A F_A = 0$.

- \Leftarrow] Como todas las formas de curvatura satisfacen Bianchi $d^A F_A = 0$. Se tiene entonces, que para una forma armónica:

$$0 = \int_M \Delta^A F_A \wedge \star F_A = \int_M d^A \delta^A F_A \wedge \star F_A = \int_M \delta^A F_A \wedge \star \delta^A F_A + \int_M \cancel{d(\delta^A F_A \wedge \star F_A)} \\ = (\delta^A F_A, \delta^A F_A)$$

donde el segundo sumando se anula por el teorema de Stokes en una variedad compacta.

Por lo tanto $\delta^A F_A = 0$. ■

Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un $U(1)$ -fibrado principal, y su respectiva álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$. Entonces la acción por la adjunta es trivial y por lo tanto el fibrado adjunto es $\text{ad } P = M \times \mathbb{R}$. Dada una conexión A , la clase de cohomología de la curvatura $[F_A]$ es la primera clase de Chern $c_1 \in H^2(M, \mathbb{R})$.

Por lo tanto, como por el teorema de Hodge esta clase tiene una representante armónica. Una solución de la ecuación de Yang-Mills para este tipo de fibrados, es esta representante armónica de la primera clase de Chern.

2.3. Instantones

En general, para variedades de dimensión n y p -formas, aplicar dos veces la \star de Hodge

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{\star} \Omega^{n-p}(M) \xrightarrow{\star} \Omega^p(M)$$

cumple que:

$$\star\star = (-1)^{p(n-p)} Id_{\Omega^p(M)}$$

Por lo tanto, para las 2-formas de una variedad 4-dimensional, tenemos que la estrella es una involución $\star^2 = Id_{\Omega^2(M)}$, y además $\Omega^2(M)$ se descompone en los dos autoespacios asociados al $+1$, y al -1 :

$$\Omega^2(M) = \Omega_+^2(M) \oplus \Omega_-^2(M)$$

además, como podemos separar una 2-forma $\theta \in \Omega^2(M, \text{ad } P)$ como

$$\theta = \hat{\theta} \otimes \beta \quad \hat{\theta} \in \Omega^2(M), \beta \in \Gamma(M, \text{ad } P)$$

Tenemos que:

$$\Omega^2(M, \text{ad } P) = \Omega_+^2(M, \text{ad } P) \oplus \Omega_-^2(M, \text{ad } P)$$

Sea ahora M una 4-variedad riemanianna, Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G -fibrado principal, y sea F_A la curvatura de una conexión A . Entonces la curvatura se descompone como:

$$F_A^+ = \frac{1}{2} (F_A + \star F_A) \in \Omega_+^2(M, \text{ad } P) \quad F_A^- = \frac{1}{2} (F_A - \star F_A) \in \Omega_-^2(M, \text{ad } P)$$

Además, ambas curvaturas son ortogonales respecto al producto (\cdot, \cdot) , ya que como $\star F_A^- = -F_A^-$ se tiene que

$$(F_A^+, F_A^-) = \int_M F_A^+ \wedge \star F_A^- = - \int_M F_A^+ \wedge F_A^-$$

Por otra parte:

$$(F_A^+, F_A^-) = (F_A^-, F_A^+) = \int_M F_A^- \wedge \star F_A^+ = \int_M F_A^- \wedge F_A^+ = \int_M F_A^+ \wedge F_A^-$$

usando que $\star F_A^+ = F_A^+$. Por lo tanto

$$- \int_M F_A^+ \wedge F_A^- = \int_M F_A^+ \wedge F_A^- = 0$$

Finalmente podemos escribir el funcional de Yang-Mills como:

$$YM(A) = (F_A, F_A) = (F_A^+, F_A^+) + (F_A^-, F_A^-)$$

El teorema de Weil aplicado a la forma de Killing de \mathfrak{g} que denotamos por $h(\cdot, \cdot)$ y que es una forma bilineal simétrica e invariante por la acción de la adjunta, nos dice que haciendo el producto fibra a fibra (que está bien definido ya que es *Ad*-invariante) tenemos:

$$h(F_A, F_A) = F_A^+ \wedge F_A^+ + F_A^- \wedge F_A^-$$

es una clase característica, por lo tanto, integrando sobre M obtenemos que:

$$\int_M F_A^+ \wedge F_A^+ + \int_M F_A^- \wedge F_A^- = \int_M F_A^+ \wedge \star F_A^+ - \int_M F_A^- \wedge \star F_A^- = K$$

donde K es una constante topológica que solo depende del fibrado (y no de A). Sea

$$YM_A^+ = (F_A^+, F_A^+) \quad YM_A^- = (F_A^-, F_A^-)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} YM(A) &= Y_A^+ + Y_A^- \\ K &= Y_A^+ - Y_A^- \end{aligned}$$

Entonces, si $K \geq 0$. El funcional puede ser escrito como $YM(A) = K + 2Y_A^- \geq K$, usando que $Y_A^- \geq 0$. Así pues K es el mínimo del funcional YM cuando

$$F_A^- = 0$$

estas soluciones se denominan **instantones**.

De forma alternativa si $K \leq 0$, entonces $YM(A) = -K + 2Y_A^+ \geq -K$, así pues $-K$ es un mínimo que se da si

$$F_A^+ = 0$$

estas soluciones se denominan **anti-instantones**.

2.3.1. Instantones BPST en S^4

En esta sección describiremos los instantones BPST, llamados así en honor a sus descubridores Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin que son soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills para un $SU(2)$ -fibrado principal sobre S^4 con la métrica usual.

Sea P un $SU(2)$ -fibrado principal. Como el grupo de comología $H^2(S^4)$ es nulo, entonces la primera clase de Chern $c_1(P)$ también lo es. Si suponemos $c_2(P) = [1]$ entonces nos encontramos con que este fibrado es la conocida fibración de Hopf $S^7 \rightarrow S^4$. Veamos como se define esta fibración.

Sean \mathbb{H} los cuaterniones, dados por:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^4$$

equipados con el producto escalar $\langle q_1, q_2 \rangle = \text{Re}(\bar{q}_1 q_2)$.

Con norma

$$\|q\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Es bien conocido que podemos escribir S^3 como los cuaterniones unidad:

$$SU(2) \cong S^3 = \{p \in \mathbb{H} \mid \|p\| = 1\} \subset \mathbb{H}$$

Y que la parte imaginaria de \mathbb{H} es isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$ vía el isomorfismo dado por las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned} i &\mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \sigma_1 \\ j &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \\ k &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3 \end{aligned}$$

Sea ahora \mathbb{H}^2 , (donde vamos a meter S^7) dotado del producto escalar:

$$\langle (p_1, p_2), (q_1, q_2) \rangle = \text{Re}(\bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2)$$

equivalente al producto euclídeo en \mathbb{R}^8 . Por lo tanto $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ puede ser definida como los puntos del espacio anterior con norma 1:

$$S^7 = \{p \in \mathbb{H}^2 \mid \|p\| = 1\}$$

Si consideramos ahora \mathbb{H}^2 un \mathbb{H} -espacio vectorial por la derecha $SU(2)$ actúa en $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ de la siguiente forma:

$$(p_1, p_2) \cdot q = (p_1 \cdot q, p_2 \cdot q) \quad (p_1, p_2) \in S^7 \subset \mathbb{H}^2 \quad q \in SU(2) \subset \mathbb{H}$$

Sea ahora con el grupo de Lie

$$Sp(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{H}^2) \mid \left\langle A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

de matrices con coeficientes cuaterniónicos que preservan el producto escalar. Este grupo actúa transitivamente en \mathbb{S}^7 , y la acción es compatible con la de \mathbb{S}^3 .

Sea ahora la siguiente 1-forma en \mathbb{S}^7 definida punto a punto,

$$\Theta_q = \text{Im} \{ \bar{q}_1 dq_1 + \bar{q}_2 dq_2 \}$$

donde (q_1, q_2) son las coordenadas del punto visto en \mathbb{H}^2 .

Vemos que esta forma da valores en $\mathfrak{su}(2)$ por lo tanto está en $\Omega^1(\mathbb{S}^7, \mathfrak{su}(2))$. Veamos que cumple las condiciones para ser una forma de conexión. La forma es $SU(2)$ -equivariante, ya que:

$$\begin{aligned} \Theta_{(q_1, q_2) \cdot q} &= \text{Im} \{ (\overline{q_1 q}) d(q_1 q) + (\overline{q_2 q}) d(q_2 q) \} \\ &= \text{Im} \{ \bar{q}_1 \bar{q} (dq_1) q + \bar{q}_2 \bar{q} (dq_2) q \} \\ &= q^{-1} \text{Im} \{ \bar{q}_1 dq_1 + \bar{q}_2 dq_2 \} q \end{aligned}$$

Hemos demostrado que Θ es una conexión para el $SU(2)$ -fibrado principal $\mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^4$.

La curvatura F_Θ en el punto $(0, 1) \in \mathbb{S}^7 \subset \mathbb{H}^2$ es $F_\Theta|_{(0,1)} = \text{Im}(d\bar{q}_1 \wedge dq_1)$. Veamos que $F_\Theta|_{(0,1)}$ solo tiene parte negativa en el punto. Sea $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ un cuaternión, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Im}(d\bar{x} \wedge dx) &= 2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) i \\ &\quad + 2(dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) j \\ &\quad + 2(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3) k \end{aligned}$$

Y su dual de Hodge para la métrica usual es:

$$\begin{aligned} \star \text{Im}(d\bar{x} \wedge dx) &= -2(dx_3 \wedge dx_4 + dx_1 \wedge dx_2) i \\ &\quad - 2(-dx_2 \wedge dx_4 + dx_1 \wedge dx_3) j \\ &\quad - 2(dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_4) k \end{aligned}$$

por tanto $\text{Im}(d\bar{x} \wedge dx) = -\star \text{Im}(d\bar{x} \wedge dx)$ y $F_\Theta|_{(0,1)} = F_\Theta^-|_{(0,1)}$.

La curvatura en cualquier punto cumple que es $Sp(2)$ -invariante, ya que lo hereda de que la propia conexión lo es. Esto se ve gracias a que hemos definido Θ con un producto escalar por lo tanto:

$$\Theta|_{A(q_1, q_2)} = \Theta|_{(q_1, q_2)}$$

Finalmente, $F_\Theta^+ = 0$ en toda \mathbb{S}^7 , por lo tanto Θ es un anti-instantón, y cumple las ecuaciones de Yang-Mills:

$$\star d^\Theta \star F_\Theta = \star d^\Theta \star F_\Theta^- = d^\Theta F_\Theta^- = d^\Theta F_\Theta = 0$$

Calculemos ahora una **expresión local** de Θ . Para ello utilizamos la "descompactificación" de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{S}^4$, y la sección (local) de P dada por las coordenadas estereográficas:

$$x \in \mathbb{R}^4 \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} \right)$$

La conexión Θ viene entonces dada por el pullback

$$\mathcal{A} = \sigma^* \Theta = \text{Im} \left(\frac{\bar{x} dx}{1 + \|x\|^2} \right)$$

Veamos como se ve uno de los coeficientes (no nulos) de la conexión para hacernos a la idea de su geometría:

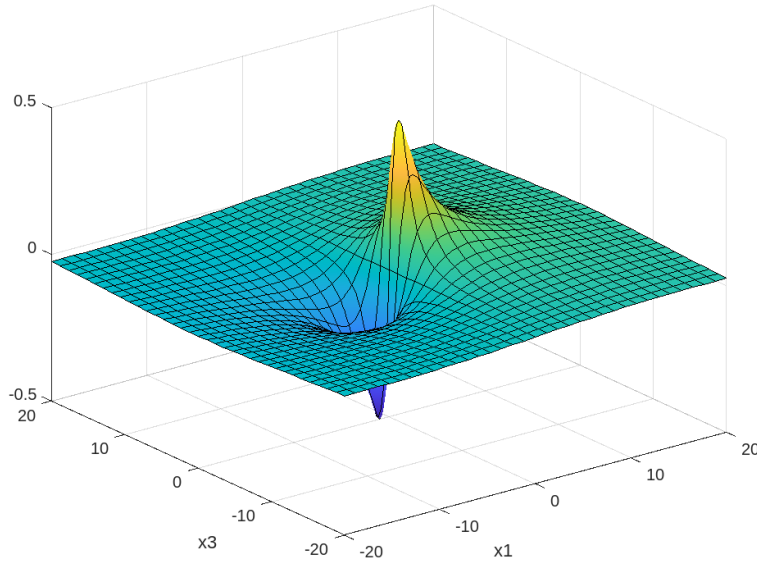


Figura 2.1: Coeficiente $dx_2 \otimes \sigma_1$ tomando $x_2, x_4 = 0$

Además, localmente su curvatura, utilizando la ecuación de estructura de Cartan es:

$$\mathcal{F}_\Theta = \sigma^* F_\Theta = d\mathcal{A} + [\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \frac{d\bar{x} \wedge dx}{(1 + \|x\|^2)^2}$$

Por lo que sus coeficientes, en los casos donde no son nulos, tienen la siguiente expresión:

$$\frac{2}{(1 + \|x\|^2)^2} dx_\alpha \wedge dx_\beta \otimes \sigma_\gamma$$

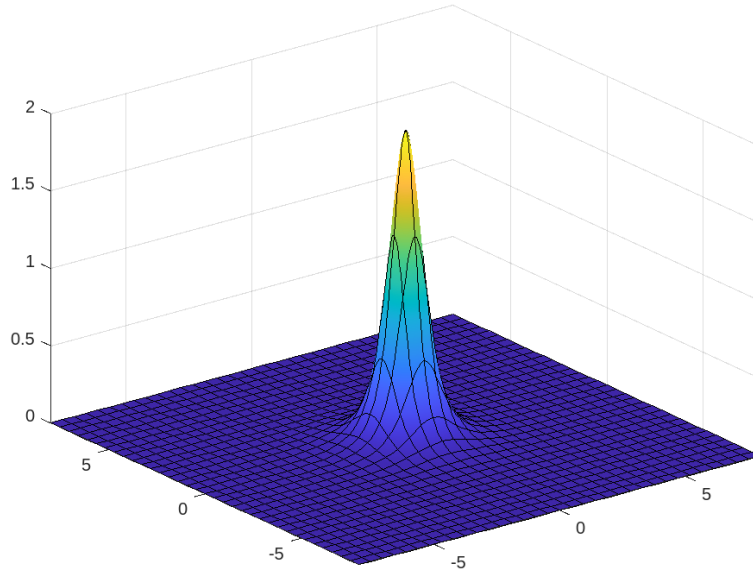


Figura 2.2: Coeficiente $dx_1 \wedge dx_2 \otimes \sigma_1$ tomando $x_3, x_4 = 0$

Los demás coeficientes no nulos tienen el mismo aspecto en ambas formas si tomamos las secciones de \mathbb{R}^4 necesarias. Como vemos la conexión tiene dos picos prominentes cerca del origen y tiende a 0 en el infinito. A su vez la curvatura tiene forma de distribución normal, tendiendo también a 0 en el infinito.

Finalmente calculamos el funcional de Yang-Mills $\int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}$. Primero calculamos:

$$(d\bar{x} \wedge dx)^2 = -12dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}} \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F} &= \int_{\mathbb{H}} \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} = \int_{\mathbb{H}} \frac{2 \cdot (-24)}{(1 + \|x\|^2)^4} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= -48 \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^4} 2\pi r^3 dr \quad (\text{pasando a polares}) \\ &= \left. \frac{-8\pi^2 (1 + 3r^2)}{(1 + r^2)^3} \right|_0^\infty \\ &= -8\pi^2 \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado que la métrica de Killing en $\mathfrak{su}(2)$ satisface $\|i\| = \|j\| = \|k\| = \sqrt{2}$.

Por último, como solo hemos eliminado un punto de nuestra variedad base en nuestra sección, la integral ha de ser la misma, por lo tanto:

$$(F_\Theta, F_\Theta) = -8\pi^2 \quad c_2(P) = -\frac{1}{8\pi^2} (F_\Theta, F_\Theta) = 1$$

G-Instantones

Para poder generalizar los instantones a grupos estructurales distintos de $SU(2)$, nos será útil dotar a la variedad base de una G -estructura. Cuando una variedad viene dotada de una G -estructura con $G \subset SO(n)$, dado que podemos identificar las 2-formas en M en un punto, con $\mathfrak{so}(n)$ vía:

$$\begin{aligned}\Lambda^2(T_p^*M) &\cong \mathfrak{so}(n) \\ a_{ij}dx^i \wedge dx^j &= (a_{ij})\end{aligned}$$

podemos descomponer las 2-formas en:

$$\Lambda^2(T_p^*M) \cong \mathfrak{so}(n) \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$$

Por lo que se nos induce una división en las fibras de $\Lambda^2(T^*M)$. Esto nos da una forma fácil de describir cuando una conexión se adapta a la geometría de G .

Definición 3.0.1. *Una conexión ω en un fibrado principal es un G -instantón, si su curvatura $\Omega \in \Omega^2(M, \text{ad } P)$, que puede verse como*

$$\Omega = \hat{\Omega} \otimes \beta \quad \hat{\Omega} \in \Omega^2(M) \quad \beta \in \Gamma(M, \text{ad } P),$$

cumple que su parte de 2-forma $\hat{\Omega}$ toma valores en el subfibrado que tiene como fibra \mathfrak{g} .

La situación más natural que nos podemos encontrar es cuando tenemos una G -estructura en M y su métrica tiene como holonomía el propio $G \subset SO(n)$, lo que se denomina tener holonomía especial. El teorema de Berger, nos caracteriza este tipo de G -estructuras. Primero centraremos nuestro esfuerzo en encontrar G -instantones para los grupos $SU(2)$, G_2 y $Spin(7)$, casos esenciales de la lista de Berger, tomando $M = \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^7$ y \mathbb{R}^8 respectivamente. Así pues también veremos como se definen este tipo de métricas en estas variedades.

La construcción de estas variedades, es bastante difícil en general. Principalmente, porque para hacerlo debemos resolver un sistema no lineal de EDP's. Sin embargo, existe una simplificación del problema cuando un abierto denso de M , puede ser escrito como $I \times N$, donde I es un intervalo.

Lo interesante de esto es que podemos identificar las G -estructuras en este espacio producto con una familia (asociadas a I) de estructuras en N . La condición de que M tenga este tipo de holonomía se convierte entonces en una ecuación de evolución para las estructuras de N . Además, restringiendo nuestro K -fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ a la variedad base $I \times N$, que podemos siempre asumir que es el pullback de un fibrado $Q \xrightarrow{\tau} N$. Por lo que como veremos en el siguiente lema, podemos ver una conexión sobre $P \xrightarrow{\pi} I \times N$ como una familia de conexiones sobre $Q \xrightarrow{\tau} N$.

Lema 3.0.2.

Sea ω una conexión sobre un K -fibrado principal sobre $I \times N$. Entonces, podemos identificar ω con una familia uniparamétrica $t \rightarrow A(t)$ con $t \in I$, de conexiones en el K -fibrado principal sobre N . En particular, si $F_A = F_A(t)$ es la curvatura de $A(t)$ entonces la 2-forma de curvatura Ω de ω puede ser vista como

$$\Omega = dt \wedge A' + F_A$$

Demostración: Un K -fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} I \times N$ define un fibrado principal $Q \rightarrow N$ componiendo la proyección del fibrado con $\tau : I \times N \rightarrow N$; por lo tanto el fibrado dado por el pull-back τ^*Q es isomorfo a P .

Gracias a esto, cualquier conexión en P puede ser escrita como $\alpha dt + A(t)$, donde $A(t)$ es una familia uniparamétrica de conexiones en Q . El sumando de la izquierda αdt , puede anularse, si aplicamos la transformación dependiente de t correspondiente

$$\omega \mapsto k^{-1}\omega k + k^{-1}dk$$

con k siendo solución de la EDO

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \alpha k$$

Esta transformación nos devuelve una conexión, ya que respeta las normas de pegado que vimos sobre las conexiones locales.

Por lo tanto podemos asumir $\omega = A(t)$, y se cumple entonces la ecuación sobre la curvatura de la hipótesis. ■

Por tanto cuando podemos simplificar M de esta forma, el problema se convierte en estudiar una EDO, lo cual tampoco es especialmente fácil, pero es una herramienta más para abordar este tipo de problemas, que nos puede dar a su vez información de la existencia y unicidad de este tipo de conexiones.

A continuación vamos a volver a construir los instantones de $SU(2)$ pero utilizando esta técnica.

3.1. SU(2)-instantones, $\dim M = 4$

En una variedad M de dimensión 4 es bien sabido que una métrica con holonomía en SU(2), resulta de una estructura hipercompleja. Esta puede ser vista como un triplete $J = (J_1, J_2, J_3)$ de formas **cerradas** que satisfacen:

$$J_i \wedge J_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 J_k^2 \quad \text{donde } \delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker}$$

Este triplete define una única métrica g de forma que J esta compuesto por formas auto-duales y la forma de volumen g es igual a $\frac{1}{2} J_i^2$ para cualquier i . La métrica g tiene holonomía contenida en SU(2). Si tomamos \mathbb{R}^4 como representación de SO(4), tenemos que

$$\Lambda^2 \mathbb{R}^4 \cong \mathfrak{so}(4) = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-,$$

donde, como antes descomponemos $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ en el subespacio ± 1 asociado a la estrella de Hodge. Según hemos elegido antes las convenciones, corresponde a elegir $\mathfrak{su}(2) = \Lambda_-$. Por lo tanto ω es un SU(2)-instantón si su curvatura Ω es anti-auto-dual:

$$\Omega = - \star \Omega$$

Ahora, queremos construir este tipo de estructura en nuestro fibrado principal con variedad base $I \times N$. Para ello asumimos que N es orientable, lo cual siempre podemos hacer, ya que recordemos que $I \times N$ es un abierto denso de nuestra variedad. Tomamos entonces una base de covectores $\theta(t) = (\theta^1(t), \theta^2(t), \theta^3(t))$ parametrizados por $t \in I$, de forma que $\theta^1(t) \wedge \theta^2(t) \wedge \theta^3(t) > 0$, con esta familia de covectores construimos entonces nuestro triplete de dos formas en $I \times N$ de la siguiente manera:

$$J_1 = dt \wedge \theta^1 + \theta^2 \wedge \theta^3 \quad J_2 = dt \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^1 \quad J_3 = dt \wedge \theta^3 + \theta^1 \wedge \theta^2$$

Que cumplen las relaciones indicadas anteriormente. El hecho de que estas formas sean cerradas y que sean auto-duales respecto a la métrica $dt^2 + g(t)$ nos proporciona las ecuaciones:

$$d \star_t \theta(t) = 0 \quad (\star_t \theta)' = d\theta \quad (3.1)$$

donde \star_t es la estrella de Hodge asociada a la métrica y a la orientación proporcionada por $\theta^1(t) \wedge \theta^2(t) \wedge \theta^3(t)$ en cada t .

Ahora sea $M = I \times N$ y $Q \rightarrow N$ el fibrado tal que su pullback es $P \rightarrow M$, utilizando el Lema visto en la introducción de este capítulo podemos caracterizar la condición de ser un SU(2)-instantón aquella conexión ω tal que su familia de conexiones asociada $A(t)$ en $Q \rightarrow N$ cumple que:

$$A'(t) = - \star_t F_A(t)$$

Como esta EDO está en forma de Cauchy, podemos deducir que si tenemos algún valor inicial real y analítico, entonces la solución es única.

Ahora vemos la construcción de la métrica plana con holonomía SU(2) en \mathbb{R}^4 con este procedimiento, y sus SU(2)-instantones asociados.

3.1.1. Métrica Plana en \mathbb{R}^4

Tomando $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ la referencia de covectores invariantes por la izquierda estándar en $S^3 = \text{SU}(2)$ que cumplen

$$d\eta^1 = 2\eta^2 \wedge \eta^3 \quad d\eta^2 = 2\eta^3 \wedge \eta^1 \quad d\eta^3 = 2\eta^1 \wedge \eta^2$$

y además, $\eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 > 0$.

Es fácil comprobar, que la solución a las ecuaciones 3.1 viene dada por $\theta(t) = t\eta$. Donde ahora la métrica de SU(2) viene dada por el triplete J con

$$J_1 = tdt \wedge \eta^1 + t^2\eta^2 \wedge \eta^3 \quad J_2 = tdt \wedge \eta^2 + t^2\eta^3 \wedge \eta^1 \quad J_3 = tdt \wedge \eta^3 + t^2\eta^1 \wedge \eta^2$$

Si tomamos $P = \text{SU}(2) \times \mathbb{R}^4$, usando que $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ es un abierto denso de \mathbb{R}^4 vamos a descomponerlo utilizando coordenadas polares como $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^3$, tomando $I = \mathbb{R}^+$ y $N = \mathbb{S}^3$, podemos ver las conexiones $A(t)$ en $Q = \text{SU}(2) \times S^3$ como una familia de 1-formas en Q .

El caso mas simple es cuando tenemos $A(t) = a(t)\theta(t) = a(t)t\eta$, por lo que, fijando t , su curvatura es:

$$\begin{aligned} F_A(t) &= dA(t) + A(t) \wedge A(t) \\ &= ta(t)d\eta + \frac{1}{2}t^2a^2(t)\eta \wedge \eta \\ &= ta(t)d\eta + t^2a^2(t)d\eta \\ &= ta(t)(1 + ta(t))d\eta \end{aligned}$$

y por la formulación en EDO para los instantones se tiene:

$$\begin{aligned} A'(t) &= -\star_t F_A \\ (at)' &= -\frac{2a(t)(1 + ta(t))}{t} \end{aligned}$$

que es una ecuación de Bernouilli y tiene como soluciones

$$a(t) = -\frac{k}{t(t^2 + k)}$$

para $k \in \mathbb{R}$. Para encontrar soluciones no triviales y definidas en todo \mathbb{R}^4 tomamos $k > 0$.

Ahora calculando la curvatura de estos SU(2)-instantones obtenemos:

$$\Omega = \left(\frac{2k}{(t^2 + k)^2} \right) (dt \wedge e^1 - e^2 \wedge e^3, dt \wedge e^2 - e^3 \wedge e^1, dt \wedge e^3 - e^1 \wedge e^2)$$

por lo que extiende bien al 0, ya que definimos:

$$\Omega(0, 0, 0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \Omega = \frac{2}{k}$$

Tomar $k = 1$ nos devuelve el instantón BPST creado anteriormente. Visualmente un k mayor nos aplana cada vez más nuestro instantón.

Como vimos anteriormente, somos capaces de dotar de este tipo de estructura a S^4 , por lo tanto todos estos instantones se compactifican adecuadamente si en vez de trabajar con \mathbb{R}^4 lo hacemos con \mathbb{S}^4

Como nota final sobre esta sección nos gustaría aclarar que existen otro tipo de métricas interesantes que tienen holonomía $SU(2)$. Estas son, la métrica de Eguchi-Hanson, la métrica Taub-NUT y la métrica Atiyah-Hitchin. Para ver como se crean estas métricas utilizando este procedimiento con covectores ver [6].

3.2. G_2 -instantones, $\dim M = 7$

En esta sección, generalizaremos la técnica utilizada anteriormente a fibrados con variedad base de dimensión 7 que tengan una G_2 -estructura. En este caso, una G_2 -estructura viene dada por una 3-forma ϕ , de manera que su estabilizador en $GL(7, \mathbb{R})$ es isomorfo (en cada punto) a G_2 . Dada una forma de este tipo ϕ , nos caracteriza una métrica con orientación, y por lo tanto una estrella de Hodge. Se puede demostrar que esta métrica contiene su holonomía en \mathfrak{g}_2 , si y solo sí:

$$d\phi = 0 \quad d \star \phi = 0 \tag{3.2}$$

Para una demostración de este hecho ver ([3], Prop 10.1.3). Además gracias a esta estructura podemos reescribir la caracterización de instantón. Sea W la representación 7-dimensional de G_2 , entonces:

$$\Lambda^2 W \cong W \oplus \mathfrak{g}_2$$

Existen dos isomorfismos naturales $\Lambda^2 W \cong \Lambda^5 W$, dados por la estrella de Hodge y por tomar el producto exterior por la izquierda con nuestra forma de estructura ϕ . Que coinciden modulo multiplicar por 2 en el primer subespacio y modulo un signo en el segundo, por lo tanto la condición para que la curvatura sea un G_2 -instantón es:

$$\phi \wedge \Omega = - \star \Omega$$

Es fácil comprobar que si se cumple, entonces la ecuación de Yang-Mills también lo hace, ya que:

$$d^\omega \star \Omega = -d^\omega(\phi \wedge \Omega) = -d^\omega \phi \wedge \Omega - \phi \wedge d^\omega \Omega = 0$$

donde el primer sumando se anula por la condición sobre la holonomía y el segundo por la identidad de Bianchi.

Como en el caso anterior, queremos construir este tipo de estructura en nuestro fibrado principal con variedad base $I \times N$ con $\dim N = 6$. Para ello tomamos una familia uniparamétrica de $SU(3)$ -estructuras en N dadas por $(\sigma(t), \psi(t))$, donde para cada $t \in I$,

$(\sigma(t), \psi(t)) \in \Omega^2(N) \times \Omega^3(N)$. Gracias a esta familia de $SU(3)$ -estructuras podemos construir una G_2 -estructura en $I \times N$ construyendo la siguiente 3-forma:

$$\phi = \sigma \wedge dt + \psi$$

Es fácil calcular su estrella de Hodge que resulta en:

$$\star\phi = \hat{\psi} \wedge dt + \frac{1}{2}\sigma \wedge \sigma$$

Por lo tanto podemos escribir la condición sobre la holonomía como:

$$\begin{cases} d\psi = 0 = d(\sigma \wedge \sigma) \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = d\sigma \\ \frac{\partial(\sigma \wedge \sigma)}{\partial t} = -2d\hat{\psi} \end{cases}$$

Proposición 3.2.1.

La ecuación que caracteriza una conexión ω a ser un G_2 -instantón en nuestro fibrado con variedad base $M = I \times N$, y que es pullback del fibrado $Q \rightarrow N$, es:

$$\begin{cases} -\star_t A' = F_A \wedge \psi \\ \sigma \wedge F_A + \star_t F_A = \psi \wedge A' \end{cases}$$

además existe una formulación equivalente:

$$\begin{cases} A' = \star_t(F_A \wedge \psi) \\ (F_A \wedge \sigma \wedge \sigma)(t_0) = 0 \end{cases}$$

para un t_0 cualquiera en I .

Demostración: Usando el Lema 3.0.2, y la condición para ser un G_2 -instantón comentada anteriormente tenemos que en el lado izquierdo obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi \wedge \Omega &= (\sigma \wedge dt + \psi) \wedge (dt \wedge A' + F_A) \\ &= dt \wedge (\sigma \wedge F_A - \psi \wedge A') + F_A \wedge \psi \end{aligned}$$

Y en el lado derecho:

$$-\star \Omega = -\star(dt \wedge A') - \star(F_A)$$

Por lo tanto, separando ahora los componentes de ambas igualdades para las formas según sus diferenciales, tenemos que:

$$-\star_t A' = F_A \wedge \psi \quad y \quad -\star_t(F_A) = \sigma \wedge F_A - \psi \wedge A'$$

Obtenemos así las ecuaciones deseadas. Para ver la demostración de la formulación alternativa, ver ([6], Prop 3.7) ■

A diferencia de el caso 4-dimensional (y como veremos más adelante del caso 8-dimensional) existe una restricción inicial que relaciona la curvatura en N con la $SU(3)$ -estructura.

3.2.1. Métrica Plana en \mathbb{R}^7

En el fibrado principal trivial $P = \mathbb{R}^7 \times G_2$ podemos descomponer \mathbb{R}^7 utilizando coordenadas polares, de forma que $\mathbb{R}^7 \setminus \{0\} \cong \mathbb{S}^6 \times \mathbb{R}^+$. Por lo tanto para construir una G_2 estructura que nos de una métrica plana, vamos a tomar primero la $SU(3)$ -estructura estándar en \mathbb{S}^6 (σ, ψ) , que que satisface:

$$d\sigma = 3\psi \quad d\hat{\psi} = -2\sigma \wedge \sigma$$

gracias a estas ecuaciones tomando las familias $(t^2\sigma, t^3\psi)$, podemos construir la 3-forma ϕ que nos da una G_2 estructura en $\mathbb{S}^6 \times \mathbb{R}^+$. Explícitamente ϕ y su dual de Hodge son:

$$\phi = t^2\sigma \wedge dt + t^3\psi \quad \star\phi = t^3\hat{\psi} \wedge dt + \frac{t^4}{2}\sigma \wedge \sigma$$

Para construir una solución explicita de un G_2 -instantón, primero detallaremos la $SU(3)$ -estructura en \mathbb{S}^6 que además cumple 3.2. Equipando \mathbb{S}^6 con la métrica canónica g y una estructura casi compleja J inducida por la multiplicación octoniónica tomando la esfera de radio 1 y con parte real nula. Para $x \in S^6$, J viene dada por

$$J : T_x M \rightarrow T_x M \\ z \mapsto x \cdot z,$$

donde $x \cdot Z$ denota la multiplicación octoniónica ya descrita. Las formas σ y ψ vienen dadas por

$$\sigma(X, Y) = g(X, JY) \\ \psi(X, Y, Z) = g(Y, (\nabla_X J) Z) \text{ para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S^6).$$

además gracias a esto podemos escribir la métrica en función del radio como:

$$g_t = \frac{1}{2}(\sigma(t)(X, JY) - \sigma(t)(Y, JX)) \\ = \frac{t^2}{2}(\sigma(X, JY) - \sigma(Y, JX)) \\ = t^2 g$$

Dada la simetría del problema fijamos $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \in S^6$ y denotamos por (x_1, \dots, x_6) la base canónica de $T_{x_0}S^6$. Con esta notación, nuestro par de formas en el punto son:

$$\psi = dx^{123} - dx^{145} + dx^{246} - dx^{356} \\ \sigma = dx^{16} + dx^{25} + dx^{34}$$

Ahora siguiendo ([1], Capítulo 5), podemos escribir un elemento del álgebra \mathfrak{g}_2 como:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & -a_6 + b_6 \\ -a_3 & 0 & a_1 & a_6 & -a_7 + b_7 & a_4 - b_4 & a_5 + b_5 \\ a_2 & -a_1 & 0 & -b_7 & b_6 & b_5 & b_4 \\ -a_5 & -a_6 & b_7 & 0 & -a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 & -a_3 + b_3 \\ a_4 & a_7 - b_7 & -b_6 & a_1 - b_1 & 0 & b_3 & -b_2 \\ a_7 & -a_4 + b_4 & -b_5 & a_2 - b_2 & -b_3 & 0 & b_1 \\ a_6 - b_6 & -a_5 - b_5 & -b_4 & a_3 - b_3 & b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. G_2 -instantones, $\dim M = 7$

Donde $(A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_7) = (e_1, \dots, e_{14})$ son base de \mathfrak{g}_2 . Esta notación es simplemente que la matriz A_j es la matriz con $a_j = 1$ y con todas las demás variables igual a 0.

Donde el corchete viene dado por el conmutador usual:

$\cdot \setminus \cdot$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1		$-A_2 + B_3$	$A_2 + B_2$	$A_5 - B_5$	$-A_4 - B_4$	$-A_7 + B_7$	$A_6 + B_6$
A_2			$-A_1 - B_1$	$-A_6 - B_6$	$-A_7 - B_7$	$-B_4$	$A_5 - B_5$
A_3				$-A_7$	$-2A_6$	$2A_5$	A_4
A_4					$-B_1$	B_2	$-2A_3 - 2B_3$
A_5						$-A_3$	B_2
A_6							B_1
A_7							

$\cdot \setminus \cdot$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	0	B_3	$-B_2$	B_5	$-B_4$	B_7	$-2A_6 - 2B_6$
A_2	$-B_3$	0	B_1	A_6	$A_7 + B_7$	$A_4 + B_4$	$A_5 - B_5$
A_3	B_2	$-B_1$	0	$A_7 + B_7$	$-A_6$	$-A_5$	$-A_4 - B_4$
A_4	A_5	$-A_6 + B_6$	$-A_7$	0	$-A_1 - B_1$	$-A_2 - B_2$	$A_3 + B_3$
A_5	$-A_4$	$-A_7$	$-A_6 + B_6$	$-A_1 - B_1$	0	$-A_3$	$-A_2 - B_2$
A_6	$-A_7$	A_4	A_5	$-A_2$	A_3	0	A_1
A_7	A_6	A_5	$-A_4$	$-A_3 - B_3$	$-A_2 - B_2$	$A_1 + B_1$	0

$\cdot \setminus \cdot$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
B_1		$-2B_3$	$2B_2$	B_5	$-B_4$	$-A_7 - B_7$	$A_6 + B_6$
B_2			$-2B_1$	$-A_6 - B_6$	$-B_7$	$A_4 + B_4$	B_5
B_3				$-B_7$	$A_6 + B_6$	$A_5 - B_5$	B_4
B_4					$2A_1 + 2B_1$	$-A_2 - B_2$	$-B_3$
B_5						$A_3 + B_3$	$-B_2$
B_6							A_1
B_7							

Tenemos entonces $\mathfrak{g}_2 < \mathfrak{so}(7) \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^7)^*$, así pues denotamos con $(\beta_1, \dots, \beta_{14})$ los elementos de $\Lambda^2(\mathbb{R}^7)^*$ correspondientes a la base e_1, \dots, e_{14} :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -dx^{23} + dx^{45} & \beta_8 &= dx^{45} + dx^{67} \\
 \beta_2 &= -dx^{13} - dx^{46} & \beta_9 &= dx^{46} - dx^{57} \\
 \beta_3 &= -dx^{12} - dx^{47} & \beta_{10} &= dx^{47} + dx^{56} \\
 \beta_4 &= -dx^{15} + dx^{26} & \beta_{11} &= -dx^{26} + dx^{37} \\
 \beta_5 &= -dx^{14} + dx^{27} & \beta_{12} &= dx^{27} + dx^{36} \\
 \beta_6 &= -dx^{17} - dx^{24} & \beta_{13} &= dx^{17} - dx^{35} \\
 \beta_7 &= dx^{16} + dx^{25} & \beta_{14} &= -dx^{25} + dx^{34}
 \end{aligned}$$

Para $1 \leq j \leq \dim G = 14$ definimos

$$\alpha_j := \partial t \lrcorner \beta_j|_{S^6} \in \Omega^1(S^6),$$

donde $\partial t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^7 \setminus \{0\})$ es el campo radial canónico. En el punto $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ son:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0 & \alpha_8 = -dx^6 \\ \alpha_2 = 0 & \alpha_9 = dx^5 \\ \alpha_3 = dx^4 & \alpha_{10} = -dx^4 \\ \alpha_4 = 0 & \alpha_{11} = -dx^3 \\ \alpha_5 = -dx^2 & \alpha_{12} = -dx^2 \\ \alpha_6 = dx^1 & \alpha_{13} = -dx^1 \\ \alpha_7 = 0 & \alpha_{14} = 0 \end{array}$$

Además las formas $\beta_j|_{\mathbb{S}^6}$ en el punto son:

$$\begin{array}{ll} \beta_1|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{23} + dx^{45} & \beta_8|_{\mathbb{S}^6} = dx^{45} \\ \beta_2|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{13} - dx^{46} & \beta_9|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{46} \\ \beta_3|_{\mathbb{S}^6} = dx^{12} & \beta_{10}|_{\mathbb{S}^6} = dx^{56} \\ \beta_4|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{15} + dx^{26} & \beta_{11}|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{26} \\ \beta_5|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{14} & \beta_{12}|_{\mathbb{S}^6} = +dx^{36} \\ \beta_6|_{\mathbb{S}^6} = dx^{24} & \beta_{13}|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{35} \\ \beta_7|_{\mathbb{S}^6} = dx^{16} + dx^{25} & \beta_{14}|_{\mathbb{S}^6} = -dx^{25} + dx^{34} \end{array}$$

Ahora buscamos conexiones de la forma:

$$A(t) = ta(t) \sum_{j=1}^{14} \alpha_j \otimes e_j \in \Omega^1(S^6, \mathfrak{g}_2).$$

Usando las propiedades de \lrcorner es fácil ver que

$$d\alpha_j = d(\partial_t \lrcorner \beta) = \mathcal{L}_{\partial_t} \beta - \partial_t \lrcorner d\beta = 2\beta_j|_{\mathbb{S}^6}.$$

Por lo tanto la curvatura $F_A \in \Omega^2(S^6, \mathfrak{g}_2)$ es

$$\begin{aligned} F_A &= dA + \frac{1}{2}[A, A] \\ &= 2ta(t) \sum_{i=1}^{14} \beta_i|_{\mathbb{S}^6} \otimes e_i + \frac{1}{2}t^2 a(t)^2 \sum_{1 \leq j < k \leq 14} (\alpha_j \wedge \alpha_k) [e_j, e_k] \end{aligned}$$

y la derivada en t de la familia de conexiones es

$$A'(t) = (a(t) + ta'(t)) \sum_{j=1}^{14} \alpha_j \otimes e_j.$$

Para utilizar la caracterización del G_2 -instantón necesitamos calcular $\star_t(F_A \wedge \psi)$, vamos a hacerlo para el coeficiente de e_3 (denotamos como $\alpha^{i \wedge j} = \alpha_i \wedge \alpha_j$):

$$F_A = 2ta(t) (dx^{12}) + \frac{1}{2}t^2 a^2(t) (\alpha^{5 \wedge 6} + 2\alpha^{7 \wedge 4} + \alpha^{14 \wedge 4} + \alpha^{5 \wedge 13} + \alpha^{12 \wedge 6} + \alpha^{7 \wedge 11} + \alpha^{13 \wedge 12})$$

$$F_A = 2ta(t) (dx^{12}) + t^2a^2(t) (dx^{12})$$

después calculamos

$$F_A \wedge t^3\psi = (2t^4a(t) + t^5a^2(t)) dx^{12356},$$

y calculando A' y su dual dado por la métrica g_t :

$$\begin{aligned} A' &= (a(t) + ta'(t))dx^4 \\ \star_t A' &= \frac{t^6}{t^2}(a(t) + ta'(t))dx^{12356} \end{aligned}$$

Por lo que dividiendo a ambos lados por t^4 e igualando coeficientes según la condición de instantón obtenemos la EDO:

$$a(t) + ta'(t) = 2a(t) + t^2a^2(t).$$

Antes de ver la solución de la EDO debemos comprobar que se da la condición inicial

$$F_A \wedge \sigma \wedge \sigma(t = 1) = 0$$

calculando obtenemos:

$$F_A \wedge \sigma \wedge \sigma = ((2ta(t) + t^2a^2(t))dx^{12}) \wedge (2dx^{1256} + 2dx^{1346} - 2dx^{2345}) = 0$$

Así pues, resolviendo la EDO obtendremos un instantón. La EDO es de Bernoulli con solución:

$$a(t) = -\frac{2t}{t^2 + k}$$

donde $k \in \mathbb{R}$. Por lo tanto vemos que volvemos a obtener el instantón clásico pero ahora con grupo estructural G_2 . Calculando los demás coeficientes asociados a los e_i , uno puede confirmar que esta misma EDO nace de cada uno de ellos (excepto los que se anulan). Como antes, tomamos $k > 0$ para obtener soluciones definidas en $(0, \infty)$. Su curvatura tiene la siguiente expresión:

$$\Omega = (ta(t))' \sum_{j=1}^{14} dt \wedge \alpha_j \otimes e_j + 2ta(t) \sum_{i=1}^{14} \beta_i|_{\mathbb{S}^6} \otimes e_i + \frac{1}{2}(ta(t))^2 \sum_{1 \leq j < k \leq 14} (\alpha_j \wedge \alpha_k) [e_j, e_k].$$

Por último como:

$$ta(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{y} \quad (ta(t))' \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

podemos extender la conexión como la curvatura a todo \mathbb{R}^7 .

Es importante observar que esta construcción también nos devuelve un instantón trivial tomando $k = 0$, no es para nada extraño, ya que la estructura de nuestro fibrado es completamente plana, lo que permite este tipo de instantones.

3.3. Spin(7)-instantones, $\dim M = 8$

Por último, vamos a utilizar esta técnica con variedad base de dimensión 8 que tengan una Spin(7)-estructura. Análogamente al caso anterior, una Spin(7)-estructura viene dada por una 4-forma Φ , de manera que su estabilizador en $GL(8, \mathbb{R})$ es isomorfo (en cada punto) a Spin(7). De nuevo Φ , nos caracteriza una métrica con orientación y una estrella de Hodge. Además es posible demostrar que la métrica contiene su holonomía en el propio Spin(7) si y solo sí:

$$d\Phi = 0 \quad (3.3)$$

Para una demostración de este hecho ver ([4], Prop. 3.2). Además gracias a esta estructura podemos reescribir la caracterización de instantón. Sea W la representación 8-dimensional de Spin(7), entonces:

$$\Lambda^2 W \cong W \oplus \mathfrak{spin}(7)$$

Como en el caso anterior, existen dos isomorfismos naturales $\Lambda^2 W \cong \Lambda^6 W$, dados por la estrella de Hodge y por tomar el producto exterior por la izquierda con nuestra forma de estructura Φ . Que coinciden ahora modulo multiplicar por 3 (en vez de 2 como en el caso de G_2) en el primer subespacio y modulo un signo en el segundo, por lo tanto la condición para que la curvatura sea un Spin(7)-instantón es:

$$\Phi \wedge \Omega = - \star \Omega$$

Utilizando ahora las G_2 -estructuras, vamos a construir una Spin(7)-estructura en nuestro fibrado principal con variedad base $I \times N$ con $\dim N = 7$. Tomamos una familia uniparamétrica de G_2 -estructuras en N dadas por $\phi(t)$ con $t \in I$. Construimos entonces la forma Φ de la siguiente manera:

$$\Phi = \phi \wedge dt + \star \phi$$

De nuevo podemos reescribir la condición para la holonomía como:

$$d\phi + \frac{\partial(\star\phi)}{\partial t} = 0$$

Proposición 3.3.1.

La ecuación que caracteriza una conexión ω a ser un Spin(7)-instantón en nuestro fibrado con variedad base $M = I \times N$, y que es pullback del fibrado $Q \rightarrow N$, es:

$$A' = \star_t(F_A \wedge \star_t \phi)$$

Demostración: La demostración es simplemente reescribir $\Phi \wedge \Omega = - \star \Omega$ como una familia dependiente de t , de manera idéntica a como hicimos para los G_2 -instantones. Donde obtenemos de manera similar que estas dos ecuaciones caracterizan el concepto de Spin(7)-instantón:

$$A' = \star_t(F_A \wedge \star_t \phi) \quad y \quad \star_t \phi \wedge A' = \star_t F_A + \phi \wedge F_A.$$

En este caso, es posible demostrar que la primera implica la segunda, el resultado utilizado para ello es el siguiente. Si denotamos con V a la representación 7-dimensional de G_2 entonces se puede demostrar que las dos siguientes aplicaciones coinciden:

$$\beta \mapsto \star\varphi \wedge \star(\beta \wedge \star\varphi) \quad y \quad \beta \mapsto \star\beta + \varphi \wedge \beta.$$

Tomando $\beta = F_A$, la segunda igualdad siempre se cumple si se da la primera. ■

3.3.1. Métrica plana en \mathbb{R}^8

Para poder construir esta métrica vamos a utilizar la existencia ([5], Def. 2.4) de una G_2 -estructura φ en \mathbb{S}^7 que además cumple¹ que $d\varphi = -4\star\varphi$. Tomando esta estructura como base, uno puede construir la familia $\phi(t) = t^3\varphi$, que cumple la condición de la holonomía. Su Spin(7)-estructura asociada es entonces:

$$\Phi = t^3\varphi \wedge dt + t^4\star\varphi$$

Si escribimos $\phi(t) = \phi_{ijk}(t)dx^{ijk}$, la métrica en cada $\{t\} \times \mathbb{S}^7$, g_t viene dada por:

$$\begin{aligned} g_{ij}(t) &= \frac{1}{144}\phi_{ikm}(t)\phi_{jln}(t)\epsilon^{klmn} \\ &= t^6 \frac{1}{144}\varphi_{ikm}\varphi_{jln}\epsilon^{klmn} \\ &= t^6 g_{ij} \end{aligned}$$

donde ϵ^{klmn} es el símbolo de Levi-Civita. De una manera idéntica a la construcción de G_2 -instantones en \mathbb{R}^7 , tomamos una familia de conexiones del tipo:

$$A(t) = \text{ta}(t) \sum_{j=1}^{21} \alpha_j \otimes e_j$$

Construimos una base ortogonal (e_1, \dots, e_{21}) de $\mathfrak{spin}(7) < \mathfrak{so}(8)$ como:

$$A \oplus \frac{B}{\sqrt{3}} \oplus \frac{C}{\sqrt{6}}$$

con las matrices A, B, C definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & a_3 & -a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_1 & 0 & -a_7 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ a_2 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & -a_1 & a_4 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_5 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & -a_6 \\ -a_6 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & -a_5 \\ -a_7 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & a_6 & a_5 & 0 \end{pmatrix}$$

¹Las G_2 -estructuras que cumplen que $d\varphi = \lambda\star\varphi$ suelen ser denominadas como nearly parallel structures.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & -b_5 & -b_6 & b_7 \\ b_1 & 0 & b_7 & -2b_6 & -2b_5 & -2b_4 & b_3 & 0 \\ -b_2 & -b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 2b_6 & 0 & 0 & -2b_7 & b_2 & b_1 & -b_4 \\ -b_4 & 2b_5 & 0 & 2b_7 & 0 & -2b_1 & -2b_2 & -2b_3 \\ b_5 & 2b_4 & 0 & -b_2 & 2b_1 & 0 & 0 & b_6 \\ b_6 & -b_3 & 0 & -b_1 & 2b_2 & 0 & 0 & -b_5 \\ -b_7 & 0 & 0 & b_4 & 2b_3 & -b_6 & b_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & -c_2 & c_3 & -c_4 & -c_5 & c_6 & c_7 \\ -c_1 & 0 & -c_7 & -c_6 & c_5 & -c_4 & c_3 & 3c_2 \\ c_2 & c_7 & 0 & -3c_5 & -3c_6 & -3c_3 & -3c_4 & -3c_1 \\ -c_3 & c_6 & 3c_5 & 0 & c_7 & c_2 & -c_1 & c_4 \\ c_4 & -c_5 & 3c_6 & -c_7 & 0 & -c_1 & -c_2 & c_3 \\ c_5 & c_4 & 3c_3 & -c_2 & c_1 & 0 & -3c_7 & -c_6 \\ -c_6 & -c_3 & 3c_4 & c_1 & c_2 & 3c_7 & 0 & -c_5 \\ -c_7 & -3c_2 & 3c_1 & -c_4 & -c_3 & c_6 & c_5 & 0 \end{pmatrix}$$

con $(A_1, \dots, A_7, \frac{B_1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{B_7}{\sqrt{3}}, \frac{C_1}{\sqrt{6}}, \dots, \frac{C_7}{\sqrt{6}}) = (e_1, \dots, e_{21}) \in \mathbb{R}^{21}$ y el corchete dado por el conmutador usual.

Tenemos entonces $\mathfrak{spin}(7) < \mathfrak{so}(8) \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^8)^*$, así pues denotamos con $(\beta_1, \dots, \beta_{21})$ los elementos de $\Lambda^2(\mathbb{R}^8)^*$ correspondientes a la base e_1, \dots, e_{21} . Para $1 \leq j \leq \dim G = 21$ definimos:

$$\alpha_j := \partial t \lrcorner \beta_j|_{S^7} \in \Omega^1(S^7).$$

Que cumplen que:

$$d\alpha_j = 2\beta_j.$$

Con estas definiciones, no es difícil comprobar que (quizás salvo alguna constante) $a(t)$ cumple la misma EDO que la función utilizada anteriormente en \mathbb{R}^7 , por tanto este instantón es básicamente el mismo que el G_2 -instantón construido en la sección anterior.

3.4. Construcción de Instantones cuaterniónicos utilizando las ecuaciones de Nahm

En esta última sección, veremos como construir instantones para un G -fibrado principal **trivial** con variedad base $M = \mathbb{H}^n$, donde G no es necesariamente un grupo de estructura de M . Este fibrado principal hará uso de la estructura cuaterniónica canónica (J^1, J^2, J^3) en \mathbb{H}^n dada por (i, j, k) .

Ahora, sea $\{g_i\}$ una base de \mathfrak{g} , $U \subset \mathbb{H}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ vamos a buscar conexiones del tipo:

$$\omega = \sum_{j=1}^3 T_j(f) J^j(df) \quad (3.4)$$

donde

$$T_j(s) = \sum_{k=1}^{\dim \mathfrak{g}} T_k^j(s) g_k$$

y las $T_k^j(s)$ son funciones reales con dominio en un intervalo $I \supset \text{rg}(f)$.

Proposición 3.4.1.

Sea un G -fibrado principal $\mathbb{H}^n \times G \rightarrow \mathbb{H}$, y una conexión ω de la forma (3.4), con la tupla $T = (T_1, T_2, T_3)$ tal que $T_i : I \rightarrow \mathfrak{g}$. Si T satisface las ecuaciones de Nahm:

$$T'_i(s) = [T_j(s), T_k(s)]$$

para permutaciones cíclicas de $(ijk) = (123)$. Entonces:

- La curvatura asociada a ω es auto-dual si y solo si f cumple:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\gamma\gamma}^2} \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\gamma}} = 0 \quad \text{para } 1 \leq \alpha < \gamma \leq 4.$$

- La curvatura asociada a $-\omega$ es anti-auto-dual si y solo si f es armónica.

Demostración: Calculamos la curvatura de ω con la ecuación de estructura de Cartan, y obtenemos:

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \left(T'_i(f) df \wedge J^i(df) + T_i(f) d(J^i(df)) + [T_j(f), T_k(f)] J^j(df) \wedge J^k(df) \right)$$

donde (ijk) denota una permutación cíclica de (123). Si $df = \sum_{j=1}^4 f_j dx_j$, con $f_j = \partial f / \partial x_j$, entonces las formas $J^j(df)$ son:

$$J^1(df) = -f_2 dx_1 + f_1 dx_2 - f_4 dx_3 + f_3 dx_4$$

$$J^2(df) = -f_3 dx_1 + f_4 dx_2 + f_1 dx_3 - f_2 dx_4$$

$$J^3(df) = -f_4 dx_1 - f_3 dx_2 + f_2 dx_3 + f_1 dx_4$$

En particular, con unos cálculos sencillos pero extensos, es posible comprobar que:

$$\star(df \wedge J^i(df)) = J^j(df) \wedge J^k(df)$$

Por lo tanto, si T satisface las ecuaciones de Nahm:

$$\begin{aligned} \star\Omega &= \sum_{i=1}^3 \star \left(T'_i(f) df \wedge J^i(df) + T_i(f) d(J^i(df)) + [T_j(f), T_k(f)] J^j(df) \wedge J^k(df) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(T'_i(f) \star(df \wedge J^i(df)) + T_i(f) \star d(J^i(df)) + T'_i(f) \star(J^j(df) \wedge J^k(df)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(T'_i(f) J^j(df) \wedge J^k(df) + T_i(f) \star d(J^i(df)) + T'_i(f) df \wedge J^i(df) \right). \end{aligned}$$

Entonces como los sumandos izquierdo y derecho de la ecuación son idénticos a los de la curvatura, obtenemos que:

$$\Omega = \star \Omega \Leftrightarrow \sum_i T_i(f) d(J^i(df)) = \star \sum_i T_i(f) d(J^i(df))$$

por lo tanto la curvatura es auto-dual. Es más, si las T_i no son constantes, entonces son funcionalmente independientes, igualando coeficientes obtenemos que:

$$\Omega = \star \Omega \Leftrightarrow d(J^i(df)) = \star d(J^i(df)), \quad i = 1, 2, 3$$

Para $-\Omega$ utilizamos el mismo razonamiento para obtener que:

$$-\Omega = -\star -\Omega \Leftrightarrow d(J^i(df)) = -\star d(J^i(df)), \quad i = 1, 2, 3$$

Utilizando índices, ambas condiciones pueden ser equivalentemente escritas como lo están en la hipótesis. ■

Para construir estos instantones, es necesaria una $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla las propiedades necesarias. Una familia de funciones, que cumple el caso necesario para la solución autodual, es:

$$f(z) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = Az \cdot z + \sum_j B_j x_j + C,$$

y para el caso anti-autodual

$$f(z) = \frac{A}{z \cdot z} + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 - (A_1 + A_2 + A_3) x_4^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} B_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^4 B_j x_j + C$$

donde $A, A_i, B_i, B_{ij}, C \in \mathbb{R}$.

El otro papel fundamental de este tipo de soluciones viene dado por las ecuaciones de Nahm. Por lo tanto, es interesante conocer las siguientes dos propiedades sobre ellas:

- Como la función:

$$\begin{aligned} M_{n \times n}(\mathbb{C})^3 &\rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})^3 \\ (A, B, C) &\mapsto ([A, B], [B, C], [C, A]) \end{aligned}$$

es analítica, entonces las soluciones a las ecuaciones de Nahm son analíticas y únicas dada una condición inicial en un abierto.

- Una solución para $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ es a su vez una solución para \mathfrak{g} . Es más, si una solución para el álgebra matricial \mathfrak{g} está definida en un intervalo (a, b) de forma que para un $t_0 \in (a, b)$ se tiene que $T_i(t_0) \in \mathfrak{h}$, entonces, dado que \mathfrak{h} es cerrado por el conmutador, se cumple que $T_i(t) \in \mathfrak{h}$ para todo $t \in (a, b)$.

Esta última propiedad nos inspira a buscar soluciones más fáciles en subálgebras de \mathfrak{g} . La más clásica de este tipo de soluciones viene dada por $\mathfrak{su}(2)$.

Corolario 3.4.2.

Sea G un grupo de Lie de forma que su álgebra \mathfrak{g} contiene una $\mathfrak{su}(2)$ -subálgebra con generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, que cumplen las relaciones $[e_i, e_j] = -2e_k$ para permutaciones cíclicas de $(123) = (ijk)$, y sea $T_i : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{g}$:

$$T_i(s) = \frac{e_i}{2s} \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Entonces (T_1, T_2, T_3) cumple las ecuaciones de Nahm.

Si es posible tomar una $\mathfrak{su}(2)$ -subálgebra de G , aplicar el corolario anterior, nos devolverá el instantón clásico, pero sumergido en un fibrado con grupo estructural G . Este instantón no nos es de mucho interés, ya que simplemente hereda la estructura $SU(2)$.

Más interés geométrico despiertan las soluciones que se han ido descubriendo recientemente, para encontrarlas se utilizan las simetrías intrínsecas a cada álgebra de Lie, para reducir las ecuaciones de Nahm a algo más manejable.

Una lectura muy recomendable sobre este tema es [2], donde se utiliza este tipo de técnicas para estudiar soluciones simétricas (respecto a un grupo de Lie más pequeño que G) y dar propiedades sobre este tipo de solución. Exponemos ahora una solución encontrada en este artículo, que nos permite crear instantones en $SU(3) \times \mathbb{H}$ con cierta simetría entre T_1 y T_2 .

Ejemplo 3.4.3 (Soluciones a las ecuaciones de Nahm en $SU(3)$)

Los elementos de $\mathfrak{su}(3)$ se pueden escribir como:

$$\begin{pmatrix} ai & z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_1 & bi & z_3 \\ -\bar{z}_2 & -\bar{z}_3 & -(a+b)i \end{pmatrix} \quad \text{con } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Así pues una solución a las ecuaciones de Nahm viene dada por:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\operatorname{csch}(t-c)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\operatorname{csch}(t-c)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\operatorname{csch}(t-c)}{2i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\operatorname{csch}(t-c)}{2i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\operatorname{coth}(t-c)-k}{2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\operatorname{coth}(t-c)+k}{2i} \end{pmatrix}$$

donde $c, k \in \mathbb{R}$

Generalización a \mathbb{H}^n

Para poder generalizar la construcción de este tipo de instantones a fibrados de naturaleza $\mathbb{H}^n \times G$, utilizaremos conexiones de estructura idéntica a (3.4). Tomamos en este caso, una función $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y la estructura cuaterniónica canónica en \mathbb{H}^n , dada por (J^1, J^2, J^3) . Estas tres estructuras nos alteran la forma $df = f_i dx^i$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J^1(df) &= \sum_{j=0}^{n-1} -f_{4j+2} dx^{4j+1} + f_{4j+1} dx^{4j+2} - f_{4j+4} dx^{4j+3} + f_{4j+3} dx^{4j+4} \\ J^2(df) &= \sum_{j=0}^{n-1} -f_{4j+3} dx^{4j+1} + f_{4j+4} dx^{4j+2} + f_{4j+1} dx^{4j+3} - f_{4j+2} dx^{4j+4} \\ J^3(df) &= \sum_{j=0}^{n-1} -f_{4j+4} dx^{4j+1} - f_{4j+3} dx^{4j+2} + f_{4j+2} dx^{4j+3} + f_{4j+1} dx^{4j+4} \end{aligned}$$

Para poder definir el concepto de solución autodual (o anti-autodual), necesitamos definir una $(4n-4)$ -forma en $R^{4n} \cong \mathbb{H}^n$ por la que, al igual que hicimos en el caso de G_2 y $\text{Spin}(7)$, la curvatura producto cuña con ella resulte en el dual de la curvatura. Para ello vamos a definir la conocida como **forma fundamental**, una 4-forma que al multiplicarla consigo misma $n-1$ veces nos dará la forma que buscamos. La forma fundamental es la siguiente:

$$\Sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_1 + \sigma_2 \wedge \sigma_2 + \sigma_3 \wedge \sigma_3$$

donde las σ_i son 2-formas definidas como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} dx^{4j+1} \wedge dx^{4j+2} + dx^{4j+3} \wedge dx^{4j+4} & \sigma_2 &= \sum_{j=0}^{n-1} dx^{4j+1} \wedge dx^{4j+3} - dx^{4j+2} \wedge dx^{4j+4} \\ \sigma_3 &= \sum_{j=0}^{n-1} dx^{4j+1} \wedge dx^{4j+4} + dx^{4j+2} \wedge dx^{4j+3} \end{aligned}$$

Definición 3.4.4. *Denominamos **instantón cuaterniónico autodual** (resp. anti-autodual) a aquella conexión del fibrado $\mathbb{H}^n \times G \rightarrow \mathbb{H}^n$ cuya curvatura Ω cumple lo siguiente:*

$$\Omega \wedge \Sigma^{n-1} = c_+ \star \Omega$$

$$\text{(resp. } \Omega \wedge \Sigma^{n-1} = c_- \star \Omega \text{)}$$

donde las constantes dadas por la \star de Hodge son

$$c^+ = \frac{(2n+1)!}{6n2^{n-1}} \quad c^- = -\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$

Es fácil comprobar que este tipo de instantones cumplen la ecuación de Yang-Mills, ya que:

$$d^\omega \star \Omega = d^\omega(\Sigma^{n-1} \wedge \Omega) = -d\Sigma^{n-1} \wedge \Omega \mp \Sigma^{n-1} \wedge d^\omega \Omega = 0$$

Donde el primer sumando se anula debido a que Σ es cerrada, y el segundo por la identidad de Bianchi. Además esta igualdad corresponde a que, la parte de 2-forma de la curvatura esté en $\mathfrak{sp}(n)$, por lo que estas soluciones son $\text{Sp}(n)$ -instantones, ya que tenemos que:

$$\mathfrak{sp}(n) < \mathfrak{so}(4n) \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^{4n}).$$

Proposición 3.4.5.

Sea un G -fibrado principal $\mathbb{H}^n \times G \rightarrow \mathbb{H}$, y una conexión ω de la forma (3.4), con la tupla $T = (T_1, T_2, T_3)$ tal que $T_i : I \rightarrow \mathfrak{g}$. Si T satisface las ecuaciones de Nahm. Entonces:

La curvatura asociada a $-\omega$ es anti-autodual si y solo si f cumple la siguiente EDP:

$$d(J^i(df)) \wedge \Sigma^{n-1} = c^- \star d(J^i(df)). \tag{3.5}$$

La demostración se omite por ser idéntica a la hecha para el caso $n = 1$, la única dificultad es computacional ya que debemos comprobar que se da la igualdad

$$c^+ \star (df \wedge J^i(df)) = -J^j(df) \wedge J^k(df) \wedge \Sigma^{n-1}.$$

Al intentar generalizar este procedimiento pero para el caso autodual, nos damos cuenta de que no es posible, ya que no se tiene una igualdad de este tipo. Así pues, este procedimiento no nos permite crear instantones autoduales en \mathbb{H}^n .

Ejemplo 3.4.6

Finalmente damos una familia de funciones $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que cumplen 3.5, tomando $z = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{H}^2$

$$\begin{aligned} f(z) = & f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_5, x_6, x_7, x_8) \\ & + C_1 x_1 x_5 + C_2 x_2 x_6 + C_3 x_3 x_7 - (C_1 + C_2 + C_3) x_4 x_8 \\ & + D_1 x_1 x_7 + D_2 x_2 x_8 + D_3 x_3 x_5 - (D_1 + D_2 + D_3) x_4 x_6 \\ & + E_1 x_1 x_6 + E_2 x_2 x_5 + E_3 x_3 x_8 - (E_1 + E_2 + E_3) x_4 x_7 \\ & + F_1 x_1 x_8 + F_2 x_2 x_7 + F_3 x_3 x_6 - (F_1 + F_2 + F_3) x_4 x_5 \end{aligned}$$

Donde $C_i, D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}$ y f_1, f_2 son funciones de la misma forma que las construidas anteriormente para el caso anti-autodual en \mathbb{H} .

Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo hemos explorado el concepto de instantón y su generalización a dimensiones mayores que 4. Para ello hemos necesitado utilizar el concepto de fibrado principal, conexión y curvatura asociada a una conexión; así como varios resultados sobre estos conceptos que nos han sido de gran utilidad. También hemos definido la ecuación de Yang-Mills, una ecuación diferencial sobre el conjunto de todas las posibles conexiones de un fibrado, y de como procede de buscar una conexión cuya curvatura minimiza un cierto funcional.

Hemos explorado el caso de instantón clásico tomando un $SU(2)$ -fibrado principal, donde la variedad base M tiene dimensión 4. En este tipo de variedades, la estrella de Hodge para las 2-formas divide $\Omega^2(M)$ en suma directa de dos autoespacios, definiendo los instantones como aquellas conexiones cuya curvatura, mas bien su parte de 2-forma, está completamente en uno de estos subespacios.

A su vez hemos generalizado este concepto a dimensión mayor, utilizando el concepto de G -estructura; una estructura geométrica en la variedad base, que dadas ciertas condiciones sobre su holonomía, nos permite dividir el fibrado de 2-formas en dos subfibrados, definiendo el concepto de G -instantón como aquella conexión cuya curvatura vive completamente en el subfibrado asociado a la G -estructura. Para poder construir estos instantones, hemos explorado un método bastante reciente que consiste en crear este tipo de estructuras vía ecuaciones de evolución, y hemos detallado a su vez la construcción explícita de G -instantones para los grupos G_2 y $Spin(7)$ en el fibrado principal trivial con variedad base \mathbb{R}^7 y \mathbb{R}^8 respectivamente. Además este método nos aporta información sobre la existencia y unicidad de estas soluciones, ya que estas se obtienen a partir de EDOs.

Como último punto hemos visto como crear $Sp(n)$ -instantones en G -fibrados principales triviales con variedad base \mathbb{H}^n , construyéndolos con ayuda de las ecuaciones de Nahm. Lo importante de esa subsección es que aquí el grupo estructural puede ser arbitrario, hallando así la generalización que buscábamos. Por último, hemos dado varios ejemplos de soluciones a las ecuaciones de Nahm, con los cuales se pueden construir este tipo de instantones.

En cuanto a trabajos futuros, existen varias direcciones interesantes para ampliar y profundizar en el tema. Uno de los caminos posibles es el de ampliar las construcciones dadas por ecuaciones de evolución a los grupos de Lie con holonomía especial restantes. Sería a su vez interesante investigar más acerca de las ecuaciones de Nahm y poder encontrar soluciones para los grupos de Lie que no admiten una construcción de G -instantones vía G -estructura. Por último, podríamos intentar generalizar la construcción que hace uso de las ecuaciones de Nahm a los octoniones.

Bibliografía

- [1] Ruben Arenas. Constructing a matrix representation of the lie group G_2 . 2005.
- [2] Benoit Charbonneau, Anuk Dayaprema, C. J. Lang, Ákos Nagy, and Haoyang Yu. Construction of nahm data and bps monopoles with continuous symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 63(1), January 2022.
- [3] Dominic Joyce. *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford Mathematical Monographs. 2000.
- [4] Dominic Joyce. Compact riemannian manifolds with exceptional holonomy. *Surveys in Differential Geometry*, 6, 01 2001.
- [5] Jason D. Lotay. Associative submanifolds of the 7-sphere. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 105(6):1183–1214, June 2012.
- [6] Jason D. Lotay and Thomas Bruun Madsen. Instantons and special geometry. In Simon G. Chiossi, Anna Fino, Emilio Musso, Fabio Podestà, and Luigi Vezzoni, editors, *Special Metrics and Group Actions in Geometry*, chapter 10, pages 241–267. Springer, 2017.
- [7] Jason D. Lotay and Thomas Bruun Madsen. Instantons on flat space: Explicit constructions, 2022.
- [8] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics. CRC Press, 2003.
- [9] K.Nomizu S. Kobayashi. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Classics Library, 1996.
- [10] M.F. Atiyah y R. Bott. The yang-mills equations over riemann surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, page 523–615, 1983.