REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

2.ª serie. - Tomo II

MADRID
1927

CRÓNICA

Conferencias del Prof. Dr. Terradas.—Sobre el tema de los "Problemas de contorno", e invitado por la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, dió el Prof. Terradas, de la Universidad de Barcelona, tres brillantes Conferencias durante los días 25, 26 y 27 del mes de mayo último. Como otros cursos de lecciones organizados por la misma Facultad y desarrollados por ilustres maestros extranjeros, su carácter fué esencialmente informativo; mas se distinguieron de las aludidas en algo más fundamental si cabe, a saber: por su marcada intención *política*, como el mismo orador calificaba su exposición.

En efecto, desde el tema general elegido hasta los desarrollos y esquemas de cálculos numéricos expuestos por el autor, todo ha tendido a patentizar vigorosamente la necesidad técnica de implantar en las Universidades españolas los cursos y trabajos de alta investigación, y decimos necesidad técnica en contraposición a la necesidad que podríamos llamar intelectual o desinteresada, derivada del íntimo afán de conquista de la verdad del ser humano y que históricamente es una consecuencia natural de la primera, más urgente y definida por la siguiente consideración:

En la aplicación usual de la Técnica, sólo unos pocos y someros conocimientos científicos se requieren, como lo demuestra el hecho de que un hombre con tal género de cultura en cierto modo recetaria, pueda efectuar y proyectar las obras corrientes de ingeniería, caso del que todos tenemos experiencia directa o indirecta. Mas el desarrollo industrial de una nación plantea (más frecuentemente cada vez) otras cuestiones de mayor envergadura, que en último término se reducen a puros problemas matemáticos, en la mayoría de los casos no resueltos, a veces por impotencia para plantearlos; y justamente esta actividad investigadora entra de lleno dentro de las funciones capitales de toda Universidad con estructura actual, que por ello tiene el *derecho* y el deber de cobijar y estimular, sobre todo entre los ingenieros jóvenes, toda energía apta y útil para dedicarse a tal género de investigación. Que no se diga que en nuestro país el número de personas sería escaso, pues el argumento encubre pusilanimidad y pereza; bastan media docena, unos pocos, pero con ímpetu propio, que con una dirección adecuada y en cierto modo paternal, pronto acarrearía la colaboración de otros que, atraídos por el *entusiasmo del que dirige* (que es lo esencial), irían insensiblemente aumentando en número, siempre sin perder de vista que esta labor universitaria lo es de minorías en cualquier nación. Como ejemplo de cuestiones que deberían ser objeto de estudio en tales seminarios universitarios, no pudo el Sr. Terradas escoger mejor, pues precisamente los problemas matemáticos llamados de contorno son el meollo de todos los problemas técnicos considerados desde el actual punto de vista, y a ellos están ligadas casi todas las teorías centrales de la matemática, sobre todo la teoría de funciones con todos sus matices y la de ecuaciones diferenciales. La verdad de esto queda manifiesta con la sola lectura del programa prometido por el Prof. Terradas como desarrollo de sus Conferencias.

CONFERENCIA 1.ª

1.° Objeto del curso.—Interés del tema.—Diversas condiciones en la resolución de ecuaciones.—Valores iniciales y en el contorno.

2.° Ecuaciones diferenciales ordinarias tipo Sturm-Liouville.—Funciones de Green.—Condiciones lineales en los límites y condiciones de simetría del núcleo resolvente.—Función de Green para el caso en que la homogénea tiene soluciones distintas de cero.

3.° Caso de dos variables —Potencial.—Primero, segundo y tercer problemas de contorno.

4.° Teoremas de uniformidad y de existencia.—Ejemplos de Lebesgue, Prym y Urysohn.

5.° Solución para el círculo y la esfera del primer problema de contorno y para la ecuación de Laplace.—Carácter analítico de la solución.—Extensión a un recinto cualquiera mediante el teorema de Riemann.—Caso del espacio.

6.° Soluciones compuestas. —Método alternado.

7.° Métodos de retoque: Poincaré, Lichtenstein, Tonelli, Perron.

8.° Método de la media aritmética.—Método de Lebesgue y Wiener.

9.° Métodos derivados del principio de mínimo: Hilbert, Courant.

10.° Métodos de Robin y Fredholm mediante potenciales de capa simple; ídem de capa doble. -Examen de las condiciones de resolución del problema externo e interno, los dos primeros problemas de contorno.

CONFERENCIA 2.ª

1.° Ecuaciones diferenciales de segundo orden.—Características.—Tipos elíptico, hiperbólico y parabólico.—Adjuntas y autoadjuntas.

2.° Tipo elíptico.—Ecuación de Poisson.—Método de la función de Green.—Uniformidad.—Ecuación de Poisson generalizada.—Métodos de aproximación.—Ecuaciones de membranas vibrantes.

3.° Tipo hiperbólico.—Primero y segundo problemas.—Método de Green.—Función de Riemann.—Caso de las cuerdas vibrantes y ecuación de los telegrafistas.

4.° Tipo parabólico. —Función fundamental.— Existencia de la función de Levy-Holmgren.—Observaciones de Volterra.

5.° Funciones armónicas.—Caso del círculo.—Resolución por ecuaciones integrales, según los métodos de los geómetras italianos.—Método de la función de Green para la ecuación homogénea.

6.° Funciones que satisfacen a ecuaciones del tipo $\Delta u = e^u$.—Teorema de existencia.

CONFERENCIA 3.ª

1.° Cálculo de valores propios de ecuaciones diferenciales del tipo elíptico mediante la función de Green y núcleos reiterados.

2.° Métodos de Liebmann y Wolf para el cálculo de soluciones fundamentales aproximadas.—Demostración de la convergencia para el caso $\Delta u + K^2 u = 0$ y $\Delta^2 u + K^2 u = 0$.

3.° Metodos fundados en el cálculo de variaciones: Ritz, Galerkin, Byeceno, Hadamard-Levy.—Evaluación del error.

4.° Cálculo de valores propios para sucesiones de funciones que satisfagan a condiciones isoperimétricas determinadas.—Caso de $\Delta u + K^2 u = 0$.—Distribución asintótica de las λ.

***

Claro que el conferenciante no desarrolló el anterior programa totalmente, que por sí solo contiene materia para ser tratada durante dos o tres cursos intensos y para ocupar a algunos colaboradores a la vez, pero sí expuso a grandes rasgos las ideas esenciales de los problemas enunciados, haciendo oportunamente todas las posibles alusiones a las cuestiones de física matemática y técnica (teoría de la relatividad, actual mecánica ondulatoria enderezada hacia la teoría de los quanta, placas, teoría de aeroplanos, hidrodinámica, etc.), con el excelente fin de aguijonear la curiosidad e interés del auditorio hacia campos de investigación tan vastos y prometedores.

Así, empezó definiendo con toda claridad las tres clases fundamentales de problemas de contorno, a saber: *1.ª clase.* Sea T un dominio o recinto contorneado en un plano o superficie Riemann y sobre su frontera S supóngase dada una sucesión continua cualquiera de valores; el primer problema de contorno se plantea así: ¿Existe una función potencial, continua en $T + S$ y regular en T, que tome sobre S aquellos valores prefijados? Sólo puede existir, desde luego, una solución, pues si hubiera dos u_1 y u_2, $u_1 - u_2$ se anularía sobre el contorno S, y como no puede tener un extremo en T, sería $u_1 - u_2$ idénticamente nula y, por tanto, $u_1 = u_2$. *2.ª clase.* Sea T un dominio (no necesariamente acotado) con frontera S de curvatura continua $\left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}\right.$ existen y son continuas$\left.\right)$ y $f(s)$ una función continua definida sobre S y que satisface a la condición $\int_S f(s)\,ds = 0$. Entonces el determinar una función potencial continua $u(x, y)$ en T y sobre S, regular (uniforme) en T, que tenga derivada normal continua sobre S y tal que $\frac{\partial u(s)}{\partial n} = f(s)$, es en lo que consiste precisamente el segundo problema de contorno. *3.ª clase.* Finalmente, en las mismas primeras condiciones del caso anterior, sean $f(s)$ y $g(s)$ dos funciones con derivadas continuas, sobre S. El tercer problema de contorno consiste en la determinación, si existe, de una función potencial regular en T, que tenga derivada $\frac{\partial}{\partial n} u(x, y)$ acotada y que sobre S satisfaga a la relación $\frac{\partial u(s)}{\partial n} + f(s)\, u(s) = g(s)$, salvo en los puntos de discontinuidad de f y g. De una manera sugestiva hizo ver el Sr. Terradas cómo estos problemas no los planteaba el capricho, sino ejemplos sencillos y casos particulares presentados en diversas ramas de la Física y de la Técnica, como el problema de la catenaria, la integración de ecuaciones diferenciales, la ecuación de Laplace, los problemas de conductibilidad térmica, la física atómica reciente (por ejemplo, condición para que una órbita sea cerrada, capital también en la mecánica celeste después de Poincaré), los problemas prácticos de hidrodinámica y aerodinámica, la resistencia de materiales, etc., lo cual apoya una vez más el deseo del autor de ver tema de estudios universitarios, cuestiones tan esenciales y *sintéticas* a la vez, cuyo estudio detallado hace progresar tan importantes ramas de la práctica, cada vez más exigente.

Como más sencillo y frecuente estudió con algún detalle las ecuaciones diferenciales del tipo Sturm-Liouville $\frac{d}{dx}(p y') + q y = f(x)$, siendo p y q funciones de x, a las que Bôcher dedicó tan profundos estudios en parte sistematizados en la conocida obra de la Colección Borel, *Leçons sur les Méthodes de Sturm dans la théorie des équations differentielles linéaires et leurs développements modernes*, París, Gauthier, 1917. Especial atención dedicó también al célebre problema de Dirichlet, en el que además de recordar los modos clásicos de resolverlo, mediante la teoría del potencial y los métodos de las funciones analíticas (teorema de Riemann y método alternado de Schwarz, perfeccionados por las investigaciones de Koebe—Verzerrungssatz—, Carathéodory y Bieberbach), se detuvo en los nuevos trabajos, clasificados en métodos de retoque, de la media aritmética, derivados del principio de mínimo y de Robin-Fredholm, utilizando potenciales de capa simple y capa doble. Singular importancia tienen entre éstos los de la media aritmética debidos a Lebesgue, Wiener y Zaremba; la idea directriz de estos métodos consiste en la observación de cierto paralelismo entre la cuestión de Análisis funcional que el problema de Dirichlet presenta y una cuestión clásica de teoría de funciones; en efecto, para definir la función exponencial, se empieza por hacerlo para valores racionales de la variable, y a seguida se extiende la definición por continuidad al campo de todos los valores reales; parejamente en el problema de Dirichlet puede hacerse una *prolongación funcional* análoga, como ideó Lebesgue. El camino a seguir en nuestro caso, será el resolver el problema de Dirichlet para un dominio poliédrico formado por la yuxtaposición de cubos de una cierta red, el cual tiene la ventaja de poderse tratar como caso límite de un problema lineal con un número finito de incógnitas; esto queda manifiesto sustituyendo la ecuación de Laplace por la en diferencias finitas

$$6\, U(x, y, z) = U(x + h, y, z) + U(x, y + h, z) + U(x, y, z + h) + U(x - h, y, z) + U(x, y - h, z) + U(x, y, z - h),$$

donde h es la arista de la red (idea que sugiere interesantes aplicaciones, ya que puede generalizarse a otras ecuaciones en derivadas parciales, y sobre todo oportunas, si se tiene a la vista el problema de Bouligand de construir la teoría aritmética de las funciones armónicas, esto es, independiente de la métrica elegida). Este problema de Dirichlet posee solución única en el sentido clásico, es decir, continua en su dominio y sobre la frontera y tomando sobre ésta valores prefijados. Se dice clásica en contraposición al sentido restrictivo de la palabra existencia de una solución, debido a Lebesgue; en efecto, éste dió un sencillo ejemplo en el cual no siempre existe solución clásica, a pesar de ser un dominio sin complicación alguna, pues no hay más que repartir sobre un segmento OA, de longitud 1, masas positivas de materia de modo que la densidad en cada punto M esté medida por el mismo número que la longitud OM. En este ejemplo, la función $V(P)$, potencial del segmento dado, no puede constituir para el dominio formado por una superficie de nivel, por ejemplo $V = n > 1$, y una esfera de centro O, solución del problema de Dirichlet, mas es natural considerarla como solución de un problema de Dirichlet restringido por algunas condiciones, entre las cuales la más fundamental deriva de la consideración siguiente, que es el núcleo de los métodos de Lebesgue-Wiener-Bouligand: es evidentemente posible determinar una sucesión D_n de dominios que tiendan al considerado D, para cada uno de los cuales su frontera F_n asegura la solución clásica, y tomando sobre las F_n los valores sobre ella de $V(P)$, la solución sería esta misma; $V(P)$ es, pues, límite de una sucesión de funciones todas soluciones. Luego en el sentido del Análisis funcional, también ella lo es; hé aquí la clave, la prolongación funcional. Una excelente Memoria de conjunto sobre este tema, es la de Bouligand, *Sur le problème de Dirichlet*, "Ann. de la Soc. Polonaise de Mathématique", t. IV, 1925, Cracovia.

No podemos seguir con detalle mayor, por la limitación de espacio de esta sección; pero creemos que con lo dicho queda manifiesto el interés de los problemas tratados por el Profesor Terradas y además justificado el valor de los nuevos métodos, sobre todo para el cálculo numérico de soluciones (patente en la misma idea del método de Lebesgue expuesto), cuestión que ocupó casi totalmente la tercera y última Conferencia del ilustre Profesor.

Esperamos que durante este curso pueda el Dr. Terradas desarrollar, con la amplitud debida, todos los temas que tan sugestivamente ha puesto ante nuestra mente, ya que en el Laboratorio Matemático se propone dirigir un seminario sobre problemas de plasticidad, viscosidad y puntos de ramificación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales no lineales.

T. R. BACHILLER.

Nombramientos y distinciones.—El premio Ackerman-Teubner, correspondiente a 1926, ha sido concedido al Prof. Wilhelm Blaschke, de la Universidad de Hamburgo, por su conocida obra *Kreis und Kugel*, Leipzig, Veit, 1916.

—La Sociedad italiana de las Ciencias, ha otorgado el premio de 1926 al Profesor Comessati, de la Universidad de Padua, por sus trabajos sobre Geometría algebraica.

—El Dr. Eugène Bloch, maître de conferences en la Universidad de París, ha sido designado Profesor de Física teórica en la misma Universidad.

—El Prof. O. Chisini, ha sido nombrado Catedrático de Geometría analítica en la Universidad de Milán.