UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Algunos resultados sobre numerable-compactificaciones y secuencial-compactificaciones

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Luis Pinilla Ferrando

Madrid, 2015

"ALGUNOS RESULTADOS SOBRE NUMERABLE-COMPACTIFICACIONES Y SECUENCIAL-COMPACTIFICACIONES"

Esta TESIS DOCTORAL fue presentada por DON JOSE LUIS PINILLA FERRANDO, en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS. Fué dirigida por el Agregado de dicha Facultad Dr. D. ENRIQUE OUTERELO DOMINGUEZ.

INTRODUCCION

Las distintas caracterizaciones de los cerrados y acotados de la recta real, dan lugar a diferentes tipos de compacidad. Entre estas destacan: Los espacios compactos, los espacios numerablemente compactos, los espacios secuencialmente compactos, los espacios de Bolzano-Weierstrass y los espacios de Weierstrass.

En esta memoria se pretende realizar un estudio detallado de los espacios topológicos numerablemente compactos y secuencialmente compactos. Así, el Capítulo III se dedica al estudio de los espacios numerablemente compactos y localmente numerablemente compactos y el Capítulo IV a los espacios secuencialmente compactos y localmente secuencialmente compactos.

Por otro lado, es bien conocido la importancia de sumergir un espacio topológico dentro de un espacio compacto, dando lugar al estudio de las compactificaciones de un espacio topológico, tema sobre el cual existe una extensa bibliografia.

En relación con las compactificaciones y el estudio de los M-espacios, K. Morita, en (28), considera el problema de sumergir un espacio topológico en un espacio numerablemente compacto. Esto dá lugar a las numerables compactificaciones .

El Capítulo V de esta memoria, se dedica a las numerables compactificaciones de un espacio topológico.

Por último, en relación con el problema de descripción de términos topológicos, utilizando exclusivamente la teoria de convergencia de sucesiones, R. BROWN en (9), sumerge un espacio topológico en un espacio secuencialmente compacto, obteniéndose lo que denominamos secuencial compactificación de Alexandroff de un espacio topológico. Este trabajo y el citado anteriormente de K. MORITA, nos ha llevado a considerar las secuenciales compactificaciones de un espacio topológico, a las que se dedica el Capítulo VI.

En el Capítulo I y primer párrafo del Capítulo II, se recoge el material auxiliar necesario en los capitulos siguientes.

En los párrafos 2,3,y 4 del Capítulo II, se establecen algunos resultados de los axiomas de separación que son independientes del resto de la memoria.

A efecto de facilitar la lectura de esta memoria, se ha incluido, sin demostraciones, los resultados mas conocidos de los conceptos que se tratan en cada capítulo. Ello da lugar, tal vez, a una excesiva extensión.

A continuación se pasa a detallar el contenido de cada capítulo, haciendo hincapie en los resultados que no hemos encontrado en la bibliografia existente sobre estos temas.

En el párrafo 1 del Capítulo I, se estudian algunas generalizaciones del I.A.N..Se enfoca la introducción de estos conceptos definiendo el rango de un espacio topológico (22). De algunos de estos axiomas se estudia su comportamiento frente a la construcción de topologías iniciales y finales. De entre estos cabe destacar los espacios subsecuenciales, de los cuales sólo hemos encontrado en la bibliografía, su definición(15). Estos espacios parecen tener una importancia análoga a la de los espacios de Frechet y secuenciales.

También se estudia la relación de los espacios subsecuenciales con las distintas generalizaciones conocidas del I.A.N.

El estudio de las numerables compactificaciones de Alexandroff y secuenciales compactificaciones de Alexandroff, nos ha llevado a definir los espacios iso-secuenciales compactos.

Los párrafos 2, 3 y 4 del Capítulo I se dedican a estudiar generalizaciones de los axiomas: II.A.N. , Lindelöf y separable respectivamente. Estas generalizaciones surgen al sustituir el cardinal $\aleph_0$ por un cardinal estrictamente mayor.

En todas estas generalizaciones, se estudian el comportamiento de cada uno de los espacios introducidos,en la construcción de topologías iniciales y finales.

En el párrafo 1 del Capítulo II, se consideran algunos axiomas de separación comprendidos entre el T_1 y el T_2 ya conocidos y se definen los NKC-espacios y SKC-espacios. Se establecen proposiciones que relacionan estos nuevos conceptos con los ya conocidos. Estos resultados se utilizan en los Capítulos III y IV.

En el párrafo 2, se establece el siguiente resultado, sobre extensores entornos absolutos:

" $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un extensor entorno absoluto, si y solamente si, para todo $i\in I$, (X_i,T_i) es un extensor entorno absoluto y $\mathrm{card}(I) \leq \aleph_0$. "

En el párrafo 3, se refina un resultado sobre la caracterización de los espacios normales por particiones continuas de la unidad y se prueba por estas técnicas el resultado conocido de que : "Todo espacio seudometrizable es normal".

En el último párrafo de este capítulo,se obtiene la siguiente caracterización de los espacios colectivamente normales:

" Un espacio topológico (X,T) es colectivamente normal, si y solamente si, para toda familia F_σ discreta, $\{M_i\}_{i\in I}$, existe una familia de abiertos de (X,T), $\{A_i\}_{i\in I}$, tal que $M_i \subset A_i$ para todo $i\in I$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i,j\in I$ con $i \neq j$."

En el párrafo 1 del Capítulo III, se refinan, utilizando los resultados del Capítulo I, algunas propiedades conocidas de los espacios numerablemente compactos.

El párrafo 2 del Capítulo III, se dedica a un estudio detallado de los espacios localmente numerablemente compactos. Entre otros se destacan los siguientes resultados:

1. Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces se tiene:

a) Si $M\subset X$ es localmente numerablemente compacto en (X,T), se verifica que M es intersección de un abierto y un cerrado en (X,T).

b) Si (X,T) es localmente numerablemente compacto y $M\subset X$ es intersección de un abierto y un cerrado en (X,T), se verifica que M es localmente numerablemente compacto.

2. Una aplicación f de un espacio topológico (X,T) en (X',T'), (supuesto (X',T') secuencial), es numerablemente propia, si y solamente si, f es una aplicación contínua de (X,T) en (X',T') y si $S=\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in \mathrm{Agl}_{T'} S\circ f$, (o $x'\in \mathrm{Lim}_{T'} S\circ f$) existe $x\in f^{-1}(x')\cap \mathrm{Agl}_T S$. Con un ejemplo, se pone de manifiesto que la condición de que (X',T') sea secuencial es esencial.

Por último, se definen las aplicaciones F-cuasi-numerablemente propias. Este tipo de aplicaciones son las que admiten extensiones continuas a las numerable compactificaciones de Alexandroff.

Además se estudian los tipos de espacios para los cuales las aplicaciones numerablemente propias, cuasi-numerablemente propias y F-cuasi-numerablemente propias coinciden.

Se termina el párrafo estudiando el comportamiento de los espacios localmente numerablemente compactos en la construcción de topologias iniciales y finales.

El Capítulo IV, se dedica a un estudio de los espacios secuencialmente compactos y localmente secuencialmente compactos, paralelo al realizado en el Capítulo III, para los espacios numerablemente compactos y localmente numerablemente compactos.

Es interesante observar que:

En un espacio numerablemente compacto y no secuencialmente compacto, toda sucesión que no tiene subsucesiones convergentes, tiene la propiedad de que toda subsucesión suya tiene infinitos puntos de aglomeración.

El párrafo 1 del Capítulo V, se dedica al estudio general de las numerables compactificaciones de un espacio topológico. Se establece un preorden entre ellas, análogo al de las compactificaciones y se establece la independencia con las compactificaciones.

Se destacan los siguientes resultados:

1. " Sea (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$ una numerable compactificación T_3 de (X,T) con (X',T') secuencial. Entonces $f(X)$ es abierto en (X',T'), si y solamente si, (X,T) es localmente numerablemente compacto ".

2. " Sea (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ dos numerables compactificaciones de (X,T) con (X',T') I.A.N. y (X'',T'') T_3 y secuencial. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $((X'',T''),f') \precsim ((X',T'),f)$

b) Para todo C_1,C_2 cerrados en (X,T) con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ tales que $\overline{f'(C_1)} \cap \overline{f'(C_2)} = \emptyset$ se verifica que $\overline{f(C_1)} \cap \overline{f(C_2)} = \emptyset$.

El párrafo 2 de este Capítulo V, se dedica a las numerables compactificaciones por un solo punto.

Se construye la numerable compactificación de Alexandroff de un espacio no numerablemente compacto y se prueba que es una F-numerable compactificación del espacio dado .

Se establece el siguiente resultado, análogo al Teorema de Alexandroff, para las compactificaciones por un solo punto:

" Sea (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto y T_1. Entonces se tiene:

a) (X,T) admite una F-numerable compactificación por un solo punto.

b) Dos F-numerables compactificaciones T_1 por un solo punto son topológicamente equivalentes. "

A continuación, se encuentran condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico admita F-numerables compactificaciones por un solo punto, que sean T_1, T_2, T_3 o T_{3a} . Resulta que para que un espacio topológico admita una F-numerable compactificación por un solo punto T_3 o T_{3a}, es condición necesaria que el espacio sea localmente numerablemente compacto, pero esta condición no es suficiente.

Además , se establece el siguiente resultado:

" Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos no numerablemente compactos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación. Se considera las numerables compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X',T'), $((X^*,T^*),j)$ y $((X'^*,T'^*),j')$ respectivamente y $f^*:X^*\longrightarrow X'^*$ definida por $f^*|_X = f$ y $f^*(\omega) = \omega'$. Entonces $f^*:(X^*,T^*)\longrightarrow (X'^*,T'^*)$ es contínua, si y solamente si, $f:(X,T)\longrightarrow (X',T')$ es F-cuasi-numerablemente propia."

Por último se demuestra que:

"Sean (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto y localmente numerablemente compacto, $((X^*,T^*),j)$ la numerable

ble compactificación de (X,T) con (X',T') T_3 y secuencial. Entonces, $((X^*,T^*),j) \leq ((X',T'),f)$ " .

En los párrafos 1 y 2 del Capítulo VI, se realiza un estudio de las secuenciales compactificaciones y secuenciales compactificaciones por un solo punto, paralelo al realizado en los párrafos 1 y 2 del Capítulo V, para las numerables compactificaciones y numerables compactificaciones por un solo punto. Se obtienen resultados análogos a los citados anteriormente.

En el último párrafo de este capítulo, se aborda el problema de caracterizar los espacios T_{3a} que admiten F-secuenciales compactificaciones T_{3a}. No se ha conseguido una resolución del problema, aunque se han obtenido algunos resultados parciales, por ejemplo:

1. "Todo espacio T_{3a} y II.A.N admite una F-secuencial compactificación T_{3a} ".

Esta condición no es necesaria, como se prueba con un ejemplo.

2. " Si (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_{3a}, existe (X',T') numerablemente compacto tal que $e(X) \subset X' \subset \beta(X)$ y para todo cerrado y secuencialmente compacto, C, en (X,T), se verifica que $e(C)$ es cerrado en (X',T').

Con esta condición necesaria se construye un ejemplo de un espacio T_{3a} que no admite una F-secuencial compactificación T_{3a}.

Esta condición, en general, no es suficiente.

3. Un espacio topológico T_{3a} , (X,T), admite una F-secuencial compactificación T_{3a} por un solo punto, si y solamente si, para todo C, cerrado y secuencialmente compacto en (X,T), existe C' cerrado y secuencialmente compacto y existe f aplicación continua de (X,T) en $([0,1], T_u|_{[0,1]})$ tal que $f(C) = \{0\}$;

$F'(X - C') = \{1\}$. (Esta condición implica que el espacio (X,T) es localmente secuencialmente compacto).

Por último, se pone un ejemplo de un espacio que admite una $\mathbb{F}$-secuencial compactificación T_{3a} tal que, entre el y su compactificación de Stone-Čech, no existe ningún espacio secuencialmente compacto.

Para terminar, deseo poner de manifiesto mi agradecimiento al Prof. E. Outerelo que sin su valiosa ayuda no hubiera sido posible la realización de esta memoria.

INDICE

pag.

CAPITULO V

NUMERABLES-COMPACTIFICACIONES DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

CAPITULO VI

SECUENCIALES-COMPACTIFICACIONES DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

CAPITULO I

AXIOMAS DE NUMERABILIDAD

§1. GENERALIZACIONES DEL I.A.N.

En este párrafo se consideran algunas generalizaciones del I.A.N. ,destacando los espacios subsecuenciales. Estos espacios, constituyen una clase importante en la que la numerable compactificación de Alexandroff y secuencial compactificación de Alexandroff coinciden

Segun(22), el I.A.N. se introduce considerando el rango de un espacio topológico.

Definición I.1.1

Sean X un conjunto no vacio y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Se considera $\mathcal{M}=\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B}$ es base del filtro $\mathcal{F}\}$. Se llama rango de $\mathcal{F}$ y se notará rang($\mathcal{F}$) a :

$$\text{rang}(\mathcal{F}) = \text{infimo}\left\{\text{card}(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{M}\right\}.$$

Observación I.1.2

Como un conjunto de números cardinales con la relación de ordenación de cardinales es un conjunto bien ordenado, si $\mathcal{F}$ es un filtro en X, existe una base $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{F}$ tal que rang($\mathcal{F}$) = card($\mathcal{B}_0$).

Proposición I.1.3

Sea X un conjunto no vacio y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Entonces se tiene:

$$\text{rang}(\mathcal{F}) = 1 \quad \text{o} \quad \aleph_0 \leq \text{rang}(\mathcal{F}) \leq 2^{\text{card}(X)}.$$

Definición I.1.4

Sea (X,T) un espacio topológico. Se llama rango de (X,T) y se notará por $\mathrm{rang}((X,T))$ al cardinal supremo $\{\mathrm{rang}(\mathcal{B}(x)) \mid x \in X\}$,donde $\mathcal{B}(x)$ es el filtro de entornos de x.

($\mathrm{rang}((X,T)) = \mathrm{supremo}\left\{ \mathrm{rang}(\mathcal{B}(x)) = \mathrm{infimo}\left[\mathrm{card}(\beta) \mid \beta \in \mathcal{M}_x\right.\right.$ con $\mathcal{M}_x = \{\beta \mid \beta$ es base del filtro, $\mathcal{B}(x)$, de entornos de $x\}\left.\right]$ $\left.\mid x \in X \right\}$.)

Definicion I.1.5

Sea (X,T) un espacio topológico. Se dice que (X,T) cumple el I.A.N. si $\mathrm{rang}((X,T)) \leq \aleph_0$ (Esto equivale a que cada punto de (X,T) tenga una base de entornos numerable).

A continuación se estudia el comportamiento de los espacios de rango menor o igual que c ($\aleph_0 \leq c$) en las construcciones de topologias iniciales y finales.

Proposición I.1.6

Sean X un conjunto, c un cardinal con $\aleph_0 \leq c$, (X',T') un espacio topológico de $\mathrm{rang}((X',T')) \leq c$ y $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces $\mathrm{rang}((X, f^{-1}(T')) \leq c$.

Demostración:

Sea $x \in X$ y $\mathcal{V}(f(x))$ una base del sistema de entornos de $f(x)$ en (X',T') . Como $\mathcal{V}(x) = \{f^{-1}(V^{f(x)}) \mid V^{f(x)} \in \mathcal{V}(f(x))\}$ es una base de entornos de x en $(X, f^{-1}(T'))$, resulta que $\mathrm{card}(\mathcal{V}(x)) \leq \mathrm{card}(\mathcal{V}(f(x))$. Asi pues $\mathrm{rang}((X, f^{-1}(T'))) \leq c$.

Corolario 1.1.7

Si (X', T') es un espacio topológico de $\mathrm{rang}((X',T')) \leq c$ y $X \subset X'$, se verifica que $(X, T'|_X)$ es tal que $\mathrm{rang}(X, T'|_X) \leq c$.

Proposición I.1.8

Sean (X,T) , (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua,abierta y suprayectiva. Entonces, si $\mathrm{rang}(X,T) \leq c$ se verifica que $\mathrm{rang}(X', T') \leq c$.

Demostración:

Sean $x' \in X'$ y $x \in X$ tal que $f(x) = x'$. Teniendo en cuenta que si $\mathcal{V}(x)$ es una base del sistema de entornos de x en (X,T), $\mathcal{V}(f(x)) = \{ f(V^x) \mid V^x \in \mathcal{V}(x)\}$ es una base del sistema de entornos de $x' = f(x)$ en (X,T),por ser f continua y abierta, resulta que $\mathrm{card}(\mathcal{V}(f(x))) \leq \mathrm{card}(\mathcal{V}(x))$. Así pues, $\mathrm{rang}((X,T)) \leq c$.

Las proposiciones I.1.6 y I.1.8 ponen de manifiesto que el rango de un espacio topológico es hereditario y es una - propiedad topológica.

Proposición I.1.9

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios .Entonces $\mathrm{rang}(\prod_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$ si y solamente si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{rang}(X_i,T_i) \leq c$
2. $\mathrm{card}(J=\{ i\in I \mid \mathrm{card}(T_i) \geq 3 \}) \leq c$ $(\aleph_0 \leq c)$.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{rang}(\prod_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$. Como para todo $j\in I$ $p_j:\prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ es continua, abierta y suprayectiva, por la proposición I.1.8 $\mathrm{rang}(X_j,T_j) \leq c$ para todo $j\in I$.

Por otro lado, existe $a=(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tal que para todo $j\in J$ exista $V^{a_j} \neq X_j$. Sea $\mathcal{V}(a)$ base de entornos de a en $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ tal que $\mathrm{card}(\mathcal{V}(a)) = \mathrm{rang}(\mathcal{B}(a)) \leq \mathrm{rang}(\prod_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$. Supongamos que $\mathcal{V}(a) = \{V_m^a \mid m\in M\}$ con $\mathrm{card}(M) \leq c$.

Para todo $m\in M$, $H_m=\left\{ i\in I \mid p_i(V_m^a) \neq X_i\right\}$ es finito. Por tanto, $H = \bigcup_{m\in M} H_m$ es tal que card H = card M. Como $J\subset H$, se tiene que $\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(H) \leq c$.

Reciprocamente:

Supongamos que $\mathrm{rang}(X_i,T_i)\leq c$ para todo $i\in I$ y que $\mathrm{card}(J)\leq c$. Entonces para todo $a=(a_i)_{i\in I}$ se verifica que existe $\mathcal{V}(a_i) =\left\{ V_m^{a_i} \mid m\in M_i\right\}$, con $\mathrm{card}(M_i)\leq c$, base de entornos de a_i, para todo $i\in I$, tal que $\mathrm{card}(\mathcal{V}(a_i)) = \mathrm{rang}(\mathcal{B}(a_i)) \leq \mathrm{rang}(X_i,T_i)\leq c$. (Para todo $i\in I-J$ $\mathcal{V}(a_i) = \left\{X_i\right\}$).

Se tiene que $\mathcal{V}(a) =\left\{ \prod_{i\in I} A_i \mid \text{existe } F\subset J, \text{finito, tal que } A_i=X_i \text{ para todo } i\in I-F \text{ y } A_i\in \mathcal{V}(a_i) \text{ para todo } i\in F\right\}$ es una base del sistema de entornos de a . Como $\mathrm{card}(\mathcal{V}(a))\leq c$ se tiene que $\mathrm{rang}(\prod_{i\in I}(X_i,T_i))\leq c$.

<u>Corolario I.1.10</u>

Sean $\left\{(X_i,T_i)\right\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios con $\mathrm{card}(I)\leq c$. Entonces $\mathrm{rang}(\prod_{i\in I}(X_i,T_i))\leq c$ si y solamente si $\mathrm{rang}(X_i,T_i)\leq c$ para todo $i\in I$.

<u>Corolario I.1.11</u>

Sean X un conjunto no vacio y $\mathcal{F} = \left\{(f_i,(X_i,T_i))\right\}_{i\in I}$ una familia no vacia, tal que para todo $i\in I$, f_i es una aplicación de X en X_i. Entonces, si $\mathrm{rang}(X_i,T_i)\leq c$ para todo - $i\in I$ y $\mathrm{card}(J)\leq c$,con $J=\left\{ i\in I \mid \mathrm{card}(T_i)\geq 3\right\}$, se verifica que $\mathrm{rang}(X,T_{\mathcal{F}})\leq c$.

La demostración es consecuencia de que , $T_{\mathcal{F}}$, topologia inicial para la familia $\mathcal{F}$ verifica que $T_{\mathcal{F}} = ((f_i)_{i\in I})^{-1}(T_p)$ siendo T_p la topologia producto de la familia $\left\{(X_i,T_i)\right\}_{i\in I}$.

Ejemplo I.1.12

El espacio topológico (R,T_u) cumple la condición de que $\mathrm{rang}(R,T_u)\leq\aleph_0$,sin embargo el cociente $(R/Z,T_u/Z)$ es tal que $\mathrm{tang}(R/Z,T_u/Z)\succ\aleph_0$. Esto pone de manifiesto que si $\mathrm{rang}(X,T)\leq c$, en general $\mathrm{rang}(X/R,T/R)$ no tiene por qué ser menor o igual que c.

Proposición I.1.13

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces $\mathrm{rang}(\sum_{i\in I}(X_i,T_i))\leq c$ si y solamente si $\mathrm{rang}(X_i,T_i)\leq c$ para todo $i\in I$.

Demostración:

Basta tener en cuenta que (X_j,T_j) es homeomorfo a $(X_j\times\{j\},\ \sum_{i\in I}T_i\big|_{X_j\times\{j\}})$ y que $X_j\times\{j\}\in\sum_{i\in I}T_i$ para todo $j\in I$.

Teniendo en cuenta la definición de espacio topológico de rango menor o igual que c (c es un cardinal mayor o igual que $\aleph_0$), se definen los espacios c-bisecuenciales, cc-bisecuenciales y c-numerablemente bisecuenciales, que generalizan los espacios bisecuenciales y numerablemente bisecuenciales introducidos por E.Michael en (24).

-" Un espacio topológico (X,T) es bisecuencial si de $x_0\in \mathrm{Agl}_T\mathcal{F}$ se deduce que existe $\{A_n\}_{n\in N}$ sucesión decreciente de subconjuntos de X tal que x_0 es punto de convergencia del filtro engendrado por $\{A_n\}_{n\in N}$ y $A_n\cap F\neq\emptyset$ para todo $n\in N$ y todo $F\in\mathcal{F}$ ".

-" Un espacio topológico (X,T) es numerablemente bisecuencial o fuertemente de Frechet si para toda sucesión decre -

ciente de subconjuntos de X, $\{A_n\}_{n\in N}$ y todo $x_0 \in \bar{A}_n$ para todo $n\in N$ se verifica que existe $x_n \in A_n$ para todo $n\in N$ tal que $x_0 \in \lim_T \{x_n\}_{n\in N}$ " .

Definición I.1.14

Sea c un cardinal mayor o igual que $\aleph_0$.

a). Un espacio topológico (X,T) es c-bisecuencial si de $x_0 \in \mathrm{Agl}_T \mathscr{F}$ se deduce que existe un filtro $\mathscr{F}'$, en X, de rango menor o igual que c, tal que $x_0 \in \mathrm{Lim}_T \mathscr{F}'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$, para todo $F' \in \mathscr{F}'$.

b). Un espacio topológico (X,T) es cc-bisecuencial si de $x_0 \in \mathrm{Agl}_T \mathscr{F}$, donde $\mathscr{F}$ es un filtro de rango menor o igual que c, se deduce que existe un filtro $\mathscr{F}'$ en X, de rango menor o igual que c tal que $x_0 \in \mathrm{Lim}_T \mathscr{F}'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$,para todo $F \in \mathscr{F}$ y todo $F' \in \mathscr{F}'$.

c). Un espacio topológico (X,T) es c-numerablemente bisecuencial, si de $x_0 \in \mathrm{Agl}_T \mathscr{F}$, donde $\mathscr{F}$ es un filtro de rango menor o igual que c, se deduce que existe un filtro $\mathscr{F}'$,en X, de rango menor o igual que $\aleph_0$ tal que $x_0 \in \mathrm{Lim}_T \mathscr{F}'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$,para todo $F \in \mathscr{F}$ y todo $F' \in \mathscr{F}'$.

Proposición I.1.15

Un espacio topológico es $\aleph_0$-bisecuencial si y solamente si de $x_0 \in \mathrm{Agl}_T \mathscr{F}$ se deduce que existe $\{A_n\}_{n\in N}$, sucesión decreciente de subconjuntos de X ,tal que x_0 es punto de convergencia del filtro engendrado por $\{A_n\}_{n\in N}$ y $A_n \cap F \neq \emptyset$ para todo $n\in N$ y todo $F \in \mathscr{F}$.(Por tanto los espacios $\aleph_0$-bisecuenciales son los espacios bisecuenciales de E. Michael).

Demostración:

Supongamos que (X,T) es $\aleph_0$-bisecuencial y sea $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}'$ en X de rango menor o igual que $\aleph_0$, tal que $x_0 \in Lim_T \mathcal{F}'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $F' \in \mathcal{F}'$.

Por I.1.2 existe $\{A_n\}_{n \in N}$, base de $\mathcal{F}'$, tal que $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in N$. Es evidente que $\{A_n\}_{n \in N}$ cumple las condiciones de la proposición.

El recíproco es evidente.

Proposición I.1.16

Un espacio topológico es $\aleph_0$-numerablemente bisecuencial, si y solamente si, para toda sucesión $\{A_n\}_{n \in N}$, decreciente de subconjuntos de X y todo $x_0 \in \bigcap_{n \in N} \bar{A}_n$ se verifica que existe $x_n \in A_n$ para todo $n \in N$ tal que $x_0 \in \lim\{x_n\}_{n \in N}$ (Por tanto los espacios $\aleph_0$-numerablemente bisecuenciales son los espacios numerablemente bisecuenciales de E. Michael (24)).

Demostración:

Supongamos que (X,T) es $\aleph_0$-numerablemente bisecuencial y sean $\{A_n\}_{n \in N}$ una sucesión decreciente de subconjuntos de X y $x_0 \in \bigcap_{n \in N} \bar{A}_n$.

Se considera el filtro $\mathcal{F}$ que tiene por base $\{A_n\}_{n \in N}$. Entonces $rang\, \mathcal{F} \leq \aleph_0$ y $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$. Asi, por hipótesis, existe un filtro $\mathcal{F}'$, en X, con $rang\, \mathcal{F}' \leq \aleph_0$ tal que $x_0 \in Lim_T \mathcal{F}'$ y $F \cap F' \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $F' \in \mathcal{F}'$.

Como $rang\, \mathcal{F}' \leq \aleph_0$ existe $\{F'_n\}_{n \in N}$ base de $\mathcal{F}'$ tal que $F'_{n+1} \subset F'_n$ para todo $n \in N$.

Para todo $n \in N$ existe $x_n \in F'_n \cap A_n$. Veamos que $x_0 \in \lim\{x_n\}_{n \in N}$. En efecto:

Para todo V^{x_0} existe $n_0 \in N$ tal que $F'_{n_0} \subset V^{x_0}$. Así para todo $n \geq n_0$ $x_n \in F'_n \subset F'_{n_0} \subset V^{x_0}$.

Recíprocamente:

Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X con $\mathrm{rang}\,\mathcal{F} \leq \aleph_0$ y $x_0 \in \mathrm{Agl}_T \mathcal{F}$. Como $\mathrm{rang}\,\mathcal{F} \leq \aleph_0$ existe $\{A_n\}_{n\in N}$ base de $\mathcal{F}$ tal que $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in N$ .Así, por hipótesis, para todo $n \in N$ existe $x_n \in A_n$ tal que $x_0 \in \lim\{x_n\}_{n\in N}$.

Sea $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_S$ el filtro asociado a la sucesión $S=\{x_n\}_{n\in N}$. Es evidente que $\mathcal{F}'$ tiene rango menor o igual que $\aleph_0$. Por I.12.100(a) (18) se tiene que $x_0 \in \mathrm{Lim}_T \mathcal{F}'$. Por otro lado, para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $F' \in \mathcal{F}'$ se tiene que existen $n_1, n_0 \in N$ tales que $F \supset A_{n_1}$ y $F' \supset \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}$ .Así, si $n_2 \geq n_0, n_1$ se verifica que $x_{n_2} \in F \cap F'$.

Proposición I.1.17

Sean (X,T) un espacio topológico y c un cardinal estrictamente mayor que $\aleph_0$. Entonces:

a) Si (X,T) cumple el I.A.N, se verifica que (X,T) es de rango menor o igual que c.

b) Si (X,T) es de rango menor o igual que c, se verifica que (X,T) es c-bisecuencial.

c) Si (X,T) es c-bisecuencial, se verifica que (X,T) es cc-bisecuencial.

d) Si (X,T) es c-numerablemente bisecuencial, se verifica que (X,T) es numerablemente bisecuencial.

e) Si (X,T) es I.A.N , se verifica que (X,T) es bisecuencial.

f) Si (X,T) es bisecuencial, se verifica que (X,T) es c-bisecuencial.

g) Si (X,T) es bisecuencial, se verifica que (X,T) es c-numerablemente bisecuencial.

h) Si (X,T) es c-numerablemente bisecuencial, se verifica que (X,T) es cc-bisecuencial.

<u>Demostración</u>:

a) es consecuencia de la definición de rango de un espacio topológico.

b) Basta considerar en la definición I.1.14(a) $\mathscr{F}'=\mathscr{B}(x_0)$ ($\mathscr{B}(x_0)$ es el filtro de entornos del punto x_0).

c) Es consecuencia de la definición I.1.14(b).

d) Es consecuencia de la proposición I.1.16.

e) Es caso particular de b).

f) Es consecuencia de que todo filtro de rango menor o igual que $\aleph_0$ es de rango menor o igual que c.

g) Es inmediato.

h) Es consecuencia de que todo filtro de rango menor o igual que $\aleph_0$ es de rango menor o igual que c.

Teniendo en cuenta que los espacios introducidos anteriormente, describen los puntos de aglomeración de filtros por convergencia de filtros, con la propiedad de que ambos filtros tienen supremo, se pueden introducir unos nuevos tipos de espacios, que generalizan los espacios topológicos subsecuenciales definidos por F.D. Tall en (15) .

<u>Definición I.1.18</u>

Sea c un cardinal mayor o igual que $\aleph_0$.

a) Un espacio topológico (X,T) es sub-c-bisecuencial, si de $x_0 \in Agl_T \mathscr{F}$, se deduce que existe $\mathscr{F}'$, filtro mas fino que $\mathscr{F}$, de rango menor o igual que c, que converge a x_0.

b) Un espacio topológico (X,T) es sub-cc-bisecuencial, si de $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$ con $\operatorname{rang} \mathcal{F} \leq c$ se deduce que existe $\mathcal{F}'$, filtro mas fino que $\mathcal{F}$, de rango menor o igual que c, que converge a x_0.

c) Un espacio topológico (X,T) es sub-bisecuencial, si de $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$ existe $\mathcal{F}'$, filtro mas fino que $\mathcal{F}$, de rango menor o igual que $\aleph_0$, que converge a x_0.

d) Un espacio topológico (X,T) es sub-c-numerablemente bisecuencial, si de $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$ con $\operatorname{rang} \mathcal{F} \leq c$, se deduce que existe $\mathcal{F}'$, filtro mas fino que $\mathcal{F}$, de rango menor o igual que $\aleph_0$, que converge a x_0.

e) Un espacio topológico (X,T) es sub-numerablemente bisecuencial, si de $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$, con $\operatorname{rang} \mathcal{F} \leq \aleph_0$, existe $\mathcal{F}'$ filtro mas fino que $\mathcal{F}$ de rango menor o igual que $\aleph_0$ que converge a x_0.

f) Un espacio topológico (X,T) es subsecuencial(F.D. Tall (15)), si de $x_0 \in Agl_T \{x_n\}_{n \in N}$, se deduce que existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in N}$ que converge a x_0.

<u>Proposición I.1.19</u>

Sea (X,T) un espacio topológico subnumerablemente bisecuencial. Entonces (X,T) es subsecuencial.

<u>Demostración:</u>

Supongamos que (X,T) es un espacio subnumerablemente bisecuencial y sea $x_0 \in Agl_T \{x_n\}_{n \in N}$. Se considera el filtro, $\mathcal{F}$, de rango menor o igual que $\aleph_0$ asociado a la sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$. Por I.12.100(b) de (18) se tiene que $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$. Así, por hipótesis, existe un filtro $\mathcal{F}'$ mas fino que $\mathcal{F}$ de rango menor o igual que $\aleph_0$ que converge a x_0.

Sea $\{A'_n\}_{n\in N}$ una base de $\mathcal{F}'$ tal que $A'_{n+1}\subset A'_n$ para todo $n\in N$. Para todo $p\in N$ se tiene que $\{x_p,x_{p+1},\dots\}\in\mathcal{F}'$, por tanto existe $n_p>p$ tal que $A'_{n_p}\subset\{x_p,x_{p+1},\dots\}$.

Sea $\{x_{n_p}\}_{p\in N}$ una sucesión cumpliendo que $x_{n_p}\in A'_{n_p}$. Es evidente que $\{x_{n_p}\}_{p\in N}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$.

Se verifica que $\{x_{n_p}\}_{p\in N}$ converge a x_o. En efecto:

Dado V^{x_o}, como $\mathcal{F}'$ converge a x_o, existe $n_o\in N$ tal que - $x_{n_p}\in A'_{n_p}\subset A'_{n_o}\subset V^{x_o}$ para todo $p\geq n_o$ ($p\geq n_o \Longrightarrow n_p>p\geq n_o$).

Veamos con un ejemplo que existen espacios subsecuenciales que no son subnumerablemente bisecuenciales.

Ejemplo I.1.20

Sea el espacio topológico (R,T_{CN}). Se verifica que:

1. (R,T_{CN}) es subsecuencial. En efecto:

Sea $x_o\in Agl_{T_{CN}}\{x_n\}_{n\in N}$. Entonces existe $M\subset N$ infinito tal que $x_m=x_o$ para todo $m\in M$ ya que en caso contrario, $R-\{x_n \mid x_n\neq x_o\}$ seria un entorno de x_o, V^{x_o}, verificando que $\{n\in N \mid x_n\in V^{x_o}\}$ es finito, lo cual contradice que x_o es punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in N}$.

De esta forma $\{x_m\}_{m\in M}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ que converge a x_o.

2. (R,T_{CN}) no es sub-numerablemente bisecuencial. En efecto:

Se considera el filtro $\mathcal{F}=\{F\subset R \mid (0,1)\subset F\}$. Se tiene que $0\in Agl_{T_{CN}}\mathcal{F}$. Sin embargo no existe ningun filtro mas fino que $\mathcal{F}$ de rango menor o igual que $\aleph_o$ que converja a 0.

Supongamos que existe $\mathcal{F}'$ de rango menor o igual que $\aleph_o$, que converge a 0 y es mas fino que $\mathcal{F}$. Sea $\{A'_n\}_{n\in N}$ una base de

$\mathcal{F}'$ tal que $A'_{n+1} \subset A'_n$ para todo $n \in N$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ donde $x_n \in A'_n$ para todo $n \in N$ converge a 0 y existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in (0,1)$, $((0,1) \in \mathcal{F}')$, lo cual es absurdo.

Proposición I.1.21

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces (X,T) es numerablemente bisecuencial si y solamente si (X,T) es sub-numerablemente bisecuencial(Por tanto, el ejemplo anterior muestra la existencia de espacios subsecuenciales que no son I.A.N., ni bisecuenciales, ni c-numerablemente bisecuenciales, ni numerablemente bisecuenciales).

Demostración:

Supongamos que (X,T) es numerablemente bisecuencial. Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X de rango menor o igual que $\aleph_0$ y $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$. Por hipótesis existe un filtro, $\mathcal{F}'$, de rango menor o igual que $\aleph_0$ que converge a x_0 y tal que $F \cap F' \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $F' \in \mathcal{F}'$.

Sean $\{A_n\}_{n\in N}$ y $\{A'_n\}_{n\in N}$ bases de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ respectivamente tales que $A_{n+1} \subset A_n$ y $A'_{n+1} \subset A'_n$ para todo $n \in N$. Se considera el filtro $\mathcal{F}''$ que tiene por base $\{A_n \cap A'_n\}_{n\in N}$. Es evidente que $\mathcal{F}''$ es más fino que $\mathcal{F}$, tiene rango menor o igual que $\aleph_0$ y converge a x_0, por ser más fino que $\mathcal{F}'$.

Reciprocamente: Sea $\{A_n\}_{n\in N}$ sucesión decreciente de subconjuntos de X y $x_0 \in \bigcap_{n\in N} \bar{A}_n$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro que tiene por base $\{A_n\}_{n\in N}$. Entonces $x_0 \in Agl_T \mathcal{F}$. Por hipótesis existe $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, con rang $\mathcal{F} \leq \aleph_0$ y $x_0 \in Lim_T \mathcal{F}'$. Se considera $\{A'_n\}_{n\in N}$ base de $\mathcal{F}'$ con $A'_{n+1} \subset A'_n$ para todo $n \in N$. Para cada $n \in N$, se considera $x_n \in A_n \cap A'_n$. Es evidente que $x_o \in \mathrm{Lim}_T \{x_n\}_{n \in N}$.

Proposición I.1.22

Sea (X,T) un espacio cc-bisecuencial. Entonces (X,T) es sub-cc-bisecuencial.

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X de rango menor o igual que c y $x_o \in \mathrm{Agl}_T \mathcal{F}$. Por hipótesis, existe un filtro, $\mathcal{F}'$, de rango menor o igual que c que converge a x_o y tal que $F \cap F' \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $F' \in \mathcal{F}'$.

Sean $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{A'_j\}_{j \in J}$ bases de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ respectivamente con $\mathrm{card}(I) \leq c$ y $\mathrm{card}(J) \leq c$. Se considera el filtro $\mathcal{F}''$ que tiene por base $\{A_i \cap A_j\}_{(i,j) \in I \times J}$. Es evidente que $\mathcal{F}''$ es mas fino que $\mathcal{F}$, tiene rango menor o igual que c y converge a x_o por ser mas fino que $\mathcal{F}'$.

Se podria realizar un estudio sistemático de las propiedades de cada uno de los espacios introducidos hasta aquí y su independencia. Sin embargo, solo se realizara dicho estudio para los espacios subsecuenciales, por su utilización en el capítulo correspondiente a las secuenciales compactificaciones de Alexandroff de un espacio topológico.

Veamos en primer lugar el comportamiento de los espacios subsecuenciales en la construcción de topologias iniciales y finales.

Proposición I.1.23

Sea X un conjunto, (X',T') un espacio topológico subsecuencial y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces $(X,f^{-1}(T'))$

es subsecuencial.

Demostración:

Sean $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en X y $x_o \in Agl_{f^{-1}(T')}\{x_n\}_{n\in N}$. Entonces $f(x_o) = x'_o \in Agl_{T'}\{f(x_n)\}_{n\in N}$. Como (X',T') es subsecuencial, existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ que converge a $f(x_o) = x'_o$. Por tanto $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ converge a x_o $(V^{x_o} \supset f^{-1}(V^{x'_o}))$

Así pues $(X, f^{-1}(T'))$ es subsecuencial.

Corolario I.1.24

Si (X',T') es un espacio topológico subsecuencial y $X\subset X'$ se verifica que $(X, T'|_X)$ es subsecuencial.

Proposición I.1.25

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación propia de (X,T) en (X',T'). Entonces si (X,T) es subsecuencial, (X',T') es subsecuencial.

Demostración:

Sean $\{x'_n\}_{n\in N}$ una sucesión en X' y $x'_o \in Agl_{T'}\{x'_n\}_{n\in N}$. Para cada $n\in N$ sea $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = x'_n$. Por III.4.42 de (18) se tiene que existe $x_o \in f^{-1}(x'_o) \cap Agl_T\{x_n\}_{n\in N}$. Por hipótesis, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ que converge a x_o. Como f es continua, $\{x'_{n_k}\}_{k\in N}$ converge a x'_o.

Así, (X',T') es subsecuencial.

Las proposiciones I.1.24 y I.1.25 ponen de manifiesto que el axioma subsecuencial es hereditario y es una propiedad topológica.

Para estudiar la subsecuencialidad de un producto topológico, se considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.1.26

Si cardinal de I es estrictamente mayor que $\aleph_0$ se verifica que $(\{0,1\},T_D)^I$ no es subsecuencial.

Demostración:

Sea $A = \left\{ \{x_n\}_{n\in N} \subset N \mid x_n < x_{n+1} \text{ para todo } n\in N \right\}$.

Como $\mathrm{card}(I) > \aleph_0$, existe $\varphi : A \longrightarrow I$ inyectiva. Para $n\in N$ sea $I_n = \left\{ i\in I \mid i = \varphi(\{x_n\}_{n\in N}),\ \{x_n\}_{n\in N}\in A \text{ y } n = x_k \text{ con } k \text{ impar} \right\}$.

Para todo $n\in N$ sea $f_n \in \{0,1\}^I$ definida por:

$$f_n(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i\notin I_n \\ 1, & \text{si } i\in I_n \end{cases}$$

Como $(\{0,1\},T_D)^I$ es compacto, existe $f_0 \in \mathrm{Agl}_{T_p}\{f_n\}_{n\in N}$. Sin embargo $\{f_n\}_{n\in N}$ no tiene subsucesiones convergentes.

En efecto:

Sea $\{f_{n_p}\}_{p\in N}$ una subsucesión de $\{f_n\}_{n\in N}$. Entonces, $\{n_p\}_{p\in N}$ es un elemento de A. Sea $i = \varphi(\{n_p\}_{p\in N})$. Se considera $p\in N$, entonces $i\in I_{n_{2p+1}}$ y por tanto $f_{n_{2p+1}}(i) = 1$. Analogamente $i\notin I_{n_{2p}}$ y por tanto $f_{n_{2p}}(i)=0$.

Así $\{p_i \circ f_{n_p}\}_{p\in N} = \{f_{n_p}(i)\}_{p\in N}$ no converge en $(\{0,1\},T_D)$ y por tanto $\{f_{n_p}\}_{p\in N}$ no converge en $(\{0,1\},T_D)^I$

Observese que $(\{0,1\},T_D)$ es subsecuencial.

Proposición I.1.27

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces, si $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es subse -

cuencial, se verifica que :

1. (X_i, T_i) es subsecuencial para todo $i \in I$.

2. $J = \left\{ i \in I \,\middle|\, (X_i, T_i) \text{ contiene un subconjunto discreto con más de dos puntos} \right\}$, es numerable.

Demostración:

1. Es consecuencia de que el axioma subsecuencial es propiedad topológica y hereditaria.

2. Supongamos que J no es numerable. Entonces $\prod_{i \in I} (X_i, T_i)$ contiene un subespacio homeomorfo a $(\{0,1\}, T_D)^J$ lo cual es absurdo. (Ejemplo I.1.26 y que el ser subsecuencial es hereditario).

Veamos con un ejemplo que en general el producto de dos espacios subsecuenciales no es subsecuencial.

Ejemplo I.1. 28

Se consideran los espacios topológicos (R, T_u) y $(R/Z, T_u/Z)$

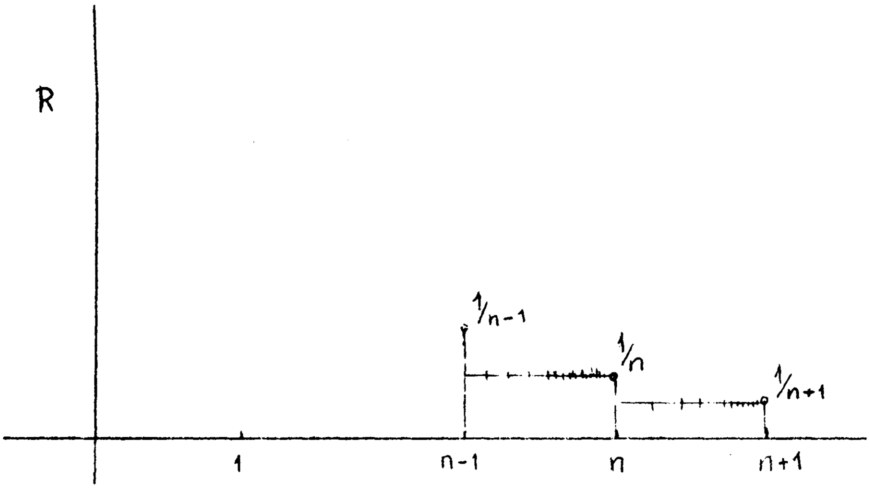
Como (R, T_u) cumple el I.A.N., se tiene que (R, T_u) es subsecuencial. Veamos que $(R/Z, T_u/Z)$ es subsecuencial.

Se tiene que $(R/Z, T_u/Z)$ es de Frechet y T_1. Así, por I.1.33, se tiene que $(R/Z, T_u/Z)$ es subsecuencial.

El espacio topológico $(R/Z, T_u/Z) \times (R, T_u)$ no es subsecuencial. En efecto:

Se considera la sucesirn ,S, en $R/Z \times R$ definida por:

Para todo $m \in N$, tal que existe $p \in N$ con $p \geq 1$, p primo y $m = p^n$, $S(m) = (n - \frac{1}{p}, \frac{1}{n})$. En caso contrario $S(m) = (\frac{1}{2}, m)$.



Se verifica que $([Z],0)$ es punto de aglomeración de S en $(R/Z,T_u/Z)\times(R,T_u)$. Sin embargo no existe ninguna subsucesión de S que converja a $([Z],0)$ ya que si $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}_{k\in N}$ fuese una subsucesión de S convergente a $([Z],0)$, esta no puede contener infinitos terminos de la forma $(x,\frac{1}{n})$, con n fijo, puesto que en caso contrario, estos elementos constituirian una subsucesión de la dada que no converge evidentemente a $([Z],0)$.

Entonces $\{x_{n_k} \mid k\in N\}$ constituye un cerrado en R que no contiene a Z. Así, $p_1(R-\{x_{n_k} \mid k\in N\})$ es un entorno, $V^{[Z]}$, de $[Z]$ en $(R/Z, T_u/Z)$. Como $V^{[Z]}\times V^0$, cualquiera que sea V^0, no contiene a ningun elemento de $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}_{k\in N}$, se llega a una contradición.

El siguiente ejemplo prueba que, en general, el cociente de un espacio subsecuencial no es subsecuencial.

<u>Ejemplo I.1.29</u>

El espacio topológico $(R^2,T_u^2)=(R,T_u)\times(R,T_u)$ es I.A.N y por tanto subsecuencial. Sea $r:(R,T_u)\longrightarrow(R/Z,T_u/Z)$ la proyección natural. Por V.2.34 de (18), se tiene que $p\times 1_R:(R,T_u)\times(R,T_u) \longrightarrow (R/Z,T_u/Z)\times(R,T_u)$ es una identificación. Sin embargo, $(R/Z,T_u/Z)\times(R,T_u)$ no es subsecuencial, según el ejemplo anterior.

Proposición I.1.30

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos Entonces $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es subsecuencial si y solamente si (X_i,T_i) es subsecuencial para todo $i\in I$.

Demostración:

Si $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es subsecuencial, se tiene que para todo $i\in I$, (X_i,T_i) es subsecuencial por ser este axioma propiedad topológica y hereditaria.

Reciprocamente:

Sean $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ y $x_o\in Agl_{\sum_{i\in I} T_i}\{x_n\}_{n\in N}$. Supongamos que $x_o\in X_{i_o}\times\{i_o\}$.

Como $X_{i_o}\times\{i_o\}$ es un abierto, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que $x_{n_k}\in X_{i_o}\times\{i_o\}$ para todo $k\in N$ y $x_o\in Agl_{\sum_{i\in I} T_i}\{x_{n_k}\}_{k\in N}$. Como $X_{i_o}\times\{i_o\}$ es subsecuencial, $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tiene una subsucesión convergente a x_o.

A continuación se estudian las relaciones de los axiomas introducidos anteriormente con los espacios de Frechet, secuenciales y c-espacios.

Definición I.1.31

A) Un espacio topológico (X,T) se dice de Frechet (2) si de $x \in \bar{M} \subset X$ se deduce que existe $\{x_n\}_{n \in N} \subset M$ tal que $x \in \mathrm{Lim}_T\{x_n\}_{n \in N}$.

B) Un espacio topológico (X,T) se dice secuencial (2) si: $G \in T$ si y solamente si para toda $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ con $\mathrm{Lim}_T\{x_n\}_{n \in N} \cap G \neq \emptyset$, se verifica que existe $n_o \in N$ tal que $x_n \in G$ para todo $n \geq n_o$.

C) Un espacio topológico (X,T) se dice un c-espacio(26) si $x \in \bar{M}$, con $M \subset X$ se verifica que existe $A \subset M$ numerable tal que $x \in \bar{A}$.

<u>Proposición I.1.32</u>

A) Todo espacio numerablemente bisecuencial es de Frechet.

B) Todo espacio de Frechet es secuencial.

C) Todo espacio secuencial es un c-espacio.

D) Sea (X,T) un espacio topológico T_1. Entonces (X,T) es un c-espacio si y solamente si de $x \in \bar{M}$ se deduce que existe $\{x_n\}_{n \in N} \subset M$ tal que $x \in \mathrm{Agl}_T\{x_n\}_{n \in N}$.

E) Todo c-espacio subsecuencial y T_1 es de Frechet.

F) (X,T) es un c-espacio si y solamente si $M \subset X$ y $\bar{A} \subset M$ para cada $A \subset M$ numerable, implica que M es cerrado.

<u>Demostración:</u>

A) Vease (31)

B) Vease (16)

C) Vease (25)

D) $(\Longrightarrow)$

Supongamos $x \in \bar{M}$. Entonces existe $A \subset M$ numerable tal que $x \in \bar{A}$. Se tienen los siguientes casos:

1. $x \in A$. En este caso, la sucesión $\{x_n = x\}_{n \in N}$ tiene a x por punto de aglomeración.

2. $x \notin A$. Como (X,T) es T_1, A es infinito y por tanto existe una aplicación biyectiva $S: N \longrightarrow A$. Es evidente que $x \in Agl_T S$.

$(\Longrightarrow)$

Si $x \in \bar{M}$, por hipótesis existe $\{x_n\}_{n \in N} \subset M$ tal que $x \in Agl_T \{x_n\}_{n \in N}$. Así $x \in \overline{\{x_n \mid n \in N\}}$.

E) Es consecuencia de D.

F) Vease (25) pag.123.

<u>Proposición I.1.33</u>

Todo espacio topológico de Frechet y T_1 es subsecuencial.

<u>Demostración:</u>

Sean $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ y $x_o \in Agl_T \{x_n\}_{n \in N}$. Entonces pueden presentarse dos casos:

a) Existe $M \subset N$ infinito tal que $x_n = x_o$ para todo $n \in N$. Entonces $\{x_m\}_{m \in M}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in N}$ que converge a x_o .

b) $\{n \in N \mid x_n = x_o\}$ es finito. Entonces no se pierde generalidad al suponer que $x_o \notin \{x_n \mid n \in N\}$.

Se tiene que $x_o \in \{x_n \mid n \in N\}^d \subset \overline{\{x_n \mid n \in N\}}$. Como (X,T) es de Frechet, existe $\{y_m\}_{m \in N} \subset \{x_n \mid n \in N\}$ tal que $x_o \in Lim \{y_m\}_{m \in N}$. Como (X,T) es T_1 , $x_o \in \{x_n \mid n \in N\}^d$ y $x_o \in Lim\{y_m\}_{m \in N}$, para cada $p \in N$, $V^{x_o} = X - \{x_1, \ldots, x_p\}$ es un entorno de x_o y por tanto existe $m_p > p$ y $n_q > q$ tales que $y_{m_p} = x_{n_q}$.

Entonces $\{y_{m_p}\}_{p\in N}$ es una subsución de $\{y_m\}_{m\in N}$ y de $\{x_n\}_{n\in N}$. Por ser $x_o \in \mathrm{Lim}\{y_m\}_{m\in N}$ se tiene que $x_o \in \mathrm{Lim}\{y_{m_p}\}_{p\in N}$.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que, en general el recíproco de la proposicion anterior no se verifica.

<u>Ejemplo I.1.34</u>

Sea el espacio topológico (R, T_{CN}). En el ejemplo I.1.20 se demostró que (R, T_{CN}) es subsecuencial.

Evidentemente, el espacio (R, T_{CN}) es T_1. Veamos sin embargo que (R, T_{CN}) no es un C-espacio (Por tanto no es ni secuencial ni de Frechet). En efecto:

$0 \in \overline{(0,1)}$ y para todo $M \subset (0,1)$ numerable $0 \notin \overline{M}$ ya que $R-M$ es un entorno de cero que no corta a M.

Este mismo ejemplo prueba que existen espacios subsecuenciales que no son numerablemente bisecuenciales (Vease la proposición I.1.21).

observese que por I.1.32(E) un espacio secuencial(o C-espacio) y T_1 que no es de Frechet, no es subsecuencial.

El siguiente ejemplo prueba que existen espacios secuenciales T_2 (y por tanto C-espacios T_2) que no son de Frechet y por tanto no son subsecuenciales .

<u>Ejemplo I.1.35</u> (Compactificación de Alexandroff del espacio Ψ de Isbell)

Sean $\mathcal{E}$ una familia infinita maximal de subconjuntos de N tal que la intersección de cada dos elementos es finita y $D=\{\omega_E\}_{E\in\mathcal{E}}$ un conjunto de elementos distintos. Se considera $\Psi = N\cup D$ y $T(\Psi)$ la topológia determinada al considerar como abiertos los puntos de N y como entornos de un punto ω_E cualquier conjunto conteniendo a ω_E y todos los puntos de E menos un número finito.

Se verifica que $(\Psi, T(\Psi))$ es T_2 y localmente compacto. En efecto:

Que es T_2 se comprueba facilmente y la compacidad local es consecuencia de que para todo $E\in\mathcal{E}$, $E\cup\{\omega_E\}$ es compacto.

En estas circunstancias, si $((\Psi^*;T(\Psi)^*), i)$ es la compactificacón de Alexandroff de $(\Psi, T(\Psi))$ se tiene que $(\Psi^*, T(\Psi)^*)$ es compacto y T_2.

El espacio $(\Psi^*, T(\Psi)^*)$ es secuencial, ya que cualquier sucesión de puntos distintos de D converge a ∞ (∞ es el punto que se ha añadido a Ψ) y cualquier sucesión de puntos en $E\in\mathcal{E}$ converge a ω_E .

Sin embargo, $(\Psi^*, T(\Psi)^*)$ no es de Frechet ya que $\infty \in \bar{N}$ y ninguna sucesión en N converge a ∞. (17)

por ultimo $(\Psi^*, T(\Psi)^*)$ no es subsecuencial por I.1.32 (E).

(Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ la sucesión definida por $x_n=n$ para toda $n\in N$. Entonces $\infty \in Agl_{T(\Psi)^*}\{x_n\}_{n\in N}$ y por lo dicho anteriormente, no existe ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ que converja a ∞).

Definición I.1.36

A) Un espacio topológico (X,T) se dice accesible, si para todo $x\in A^d$, existe $C\in \mathcal{C}_T$ tal que $x\in C^d$ y $x\notin (C-A)^d$. (37)

B) Un espacio topológico (X,T) se dice fuertemente accesible, si para toda sucesión decreciente de subconjuntos de X, $\{A_n\}_{n\in N}$ y todo $x\in A_n^d$, para todo $n\in N$, se verifica que existe $C\in \mathcal{C}_T$ tal que $x\in C^d$ y $x\notin (C-A_n)^d$ para todo $n\in N$. (31)

Los siquientes ejemplos expresan la independencia entre los axiomas subsecuencial, accesible y fuertemente accesible.

Ejemplos I.1.37

A) (R,T_{CN}) es T_1 y subsecuencial. Veamos que no es accesible(Por tanto no es fuertemente accesible).En efecto:

$0\in (0,1)^d$ y para todo $C\in \mathcal{C}_{T_{CN}}$ con $C\neq R$ se tiene que $0\notin C^d$. Si $C=R$, $0\in C^d$ y $0\in (R-(0,1))^d$.

B) Sea $X=N\times N$. Se considera la aplicación $\mathcal{E}: X \longrightarrow P(P(X))$ definida por:

$$\mathcal{E}((m,n))=\{A\subset N\times N \mid (m,n)\in A\} \quad \forall (m,n)\neq (1,1) ,$$

$$\mathcal{E}((1,1))=\{A\subset N\times N \mid (1,1)\in A \ \text{ y } \exists F\subset N,\ F \text{ finito tal que } \forall m\in N-F\ \{n \mid (m,n)\notin A\} \text{ es finito}\} .$$

La aplicación $\mathcal{E}$ satisface las siguientes condiciones: I) $\forall x \in X$, $\mathcal{E}(x) \neq \emptyset$. II) $\forall x \in X$ y $\forall V \in \mathcal{E}(x)$ se tiene que $x \in V$. III) $\forall M \subset X$ tal que $\exists V \in \mathcal{E}(x)$ con $M \supset V$ se verifica que $M \in \mathcal{E}(x)$. IV) Si $V, W \in \mathcal{E}(x)$ se tiene que $V \cap W \in \mathcal{E}(x)$. V) $\forall V \in \mathcal{E}(x)$, $\exists W \in \mathcal{E}(x)$ tal que $\forall y \in W$ se tiene que $V \in \mathcal{E}(x)$. Por tanto existe una única topología T, en X, tal que para todo $x \in X$, $\mathcal{E}(x)$ es el sistema de entornos de x en (X,T).

Veamos que (X,T) no es subsecuencial.

Sea $S: N \longrightarrow X$ la sucesión definida por:

Para todo $m \in N$ tal que existe $p \in N$ con $p > 1$, p primo y $m = p^n$, $S(m) = x_m = (p,n)$. En caso contrario, $S(m) = x_m = (2,m)$.

Se verifica que :

a) $(1,1) \in Agl_T\ S$. En efecto:

Para todo $V^{(1,1)}$ existe $F = \{n_1, \dots, n_q\}$ tal que para todo $m \in N-F$, el conjunto $\{n \mid (m,n) \notin V^{(1,1)}\}$ es finito.

Para todo $n \in N$ sea $p \in N$, p primo con $p > \text{máx}\{n, n_1, \dots, n_q\}$. Como $p \in N-F$ existe $k \in N$ con $(p,k) \in V^{(1,1)}$. Luego $S(p^k) = x_{p^k} = (p,k) \in V^{(1,1)}$ y $p^k \geqslant p > n$.

b) Habremos probado que (X,T) no es subsecuencial, si probamos que no existe S' subsucesión de S tal que $(1,1) \in Lim_T S'$.

Sin perdida de generalidad se puede suponer que $(1,1) \notin im(S)$ (Pues si S es una sucesión en X y S' una subsucesión de S, existe S'' subsucesión de S' y por tanto de S, tal que $im(S'') \subset im(S)$).

Si existiese $q\in N$ tal que $im(S')\cap(\{q\} \times N)$ es infinito, se tiene que S' no está eventualmente en $V^{(1,1)} = (N\times N - \{q\}\times N)\cup(1,1)$.

En caso contrario, para todo $q\in N$, $im(S')\cap(\{q\}\times N)$ es finito y S' no está eventualmente en $V^{(1,1)} = N\times N - im(S')$.
Por tanto, $(1,1)\notin Lim_T S'$ para toda S' subsucesión de S.

Veamos que (X,T) es fuertemente accesible y T_2.

(X,T) es T_2. En efecto:

a) Sean $(m,n), (p,q)\in N\times N$ con $(m,n)\neq(p,q)$ y ambos distintos de $(1,1)$. Como $\{(m,n)\} = V^{(m,n)}$ y $\{(p,q)\} = V^{(p,q)}$ se tiene que $V^{(m,n)}\cap V^{(p,q)} = \emptyset$.

b) Sean $(1,1),(m,n)\in N\times N$. Entonces considerando $V^{(1,1)} = X-\{(m,n)\}$ y $V^{(m,n)} = \{(m,n)\}$ se tiene que $V^{(1,1)}\cap V^{(m,n)} = \emptyset$.

(X,T) es fuertemente accesible. En efecto:

Los únicos subconjuntos de X que tienen puntos de acumulación son los que tienen infinitos puntos en infinitas rectas verticales. Además, el único punto de acumulación de estos subconjuntos es el $(1,1)$.

Sea $\{A_n\}_{n\in N}$ una sucesión decreciente de subconjuntos de X y $(1,1)\in A_n^d$ para todo $n\in N$. Se considera el cerrado C, definido de la siguiente forma: $C=(\bigcup_{p\in N}[(\{n_p\}\times N)\cap A_{n_p}])\cup\{(1,1)\}$, donde $\{n_p\}_{p\in N}$ es una sucesión estrictamente creciente de numeros naturales tal que $(\{n_p\}\times N)\cap A_{n_p}$ es infinito. Entonces $(1,1)\in C^d$ y $(1,1)\notin(C-A_n)^d$, para todo $n\in N$, ya que para todo $n\in N$, $C - A_n$ solo tiene puntos en un número finito de rectas verticales.

Definición I.1.38

Un espacio topológico (X,T) se dice isosecuencial compacto, si todo subconjunto numerablemente compacto y cerrado es secuencialmente compacto.

Proposición I.1.39

Si (X,T) es subsecuencial se verifica que (X,T) es isosecuencial compacto.

Demostración:

Sea M un cerrado y numerablemente compacto en (X,T) y $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión contenida en M. Como M es numerablemente compacto, existe $x_0 \in M \cap Agl_T \{x_n\}_{n\in N}$. Así existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tal que $x_0 \in Lim \{x_{n_k}\}_{k\in N}$ y por tanto M es secuencialmente compacto.

Proposición I.1.40

Todo espacio I.A.N. o bisecuencial o c-numerablemente bisecuencial o numerablemente bisecuencial, es isosecuencial compacto.

Demostración:

Es consecuencia de I.1.17, I.1.19 y I.1.21 y de la proposición anterior.

Proposición I.1.41

Todo espacio de Frechet y T_1 es un espacio isosecuencial compacto.

Demostración:

Es consecuencia de I.1.33 y de la proposición I.1.39.

Definición I.1.42

A) Un espacio topológico (X,T) es fuertemente K'-espacio si para toda sucesión decreciente de subconjuntos de X, $\{A_n\}_{n\in N}$, y todo $x_0 \in \bar{A}_n$ para todo $n \in N$, se verifica que existe un conjunto compacto K tal que $x_0 \in \overline{(K \cap A_n)}$ para todo $n \in N$. (31)

B) Un espacio topológico (X,T) es un K'-espacio, si para todo subconjunto A de X y todo $x_0 \in \bar{A}$, se verifica que existe un conjunto compacto K tal que $x_0 \in \overline{(K \cap A)}$. (31)

C) Un espacio topológico (X,T) es un K-espacio, si para todo subconjunto A de X y todo $x_0 \in \bar{A}$, se verifica que existe un conjunto compacto K tal que $x_0 \in K \cap \overline{(K \cap A)}$. (10)

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto la independencia entre los espacios subsecuenciales y los espacios fuertemente K'-espacios, K'-espacios y K-espacios.

Ejemplos I.1.43

A) $\left([0,1] , T_u \Big|_{[0,1]} \right)^R$ es localmente compacto y T_2, (por tanto fuertemente K'-espacio, K'-espacio y K-espacio (31)) sin embargo no es subsecuencial ya que es numerablemente compacto y no secuencialmente compacto. (Si fuese subsecuencial, seria isosecuencial compacto y por tanto secuencialmente compacto).

B) (R, T_{CN}) es subsecuencial, pero no es un K-espacio (por tanto no es fuertemente K'-espacio, ni K'-espacio).

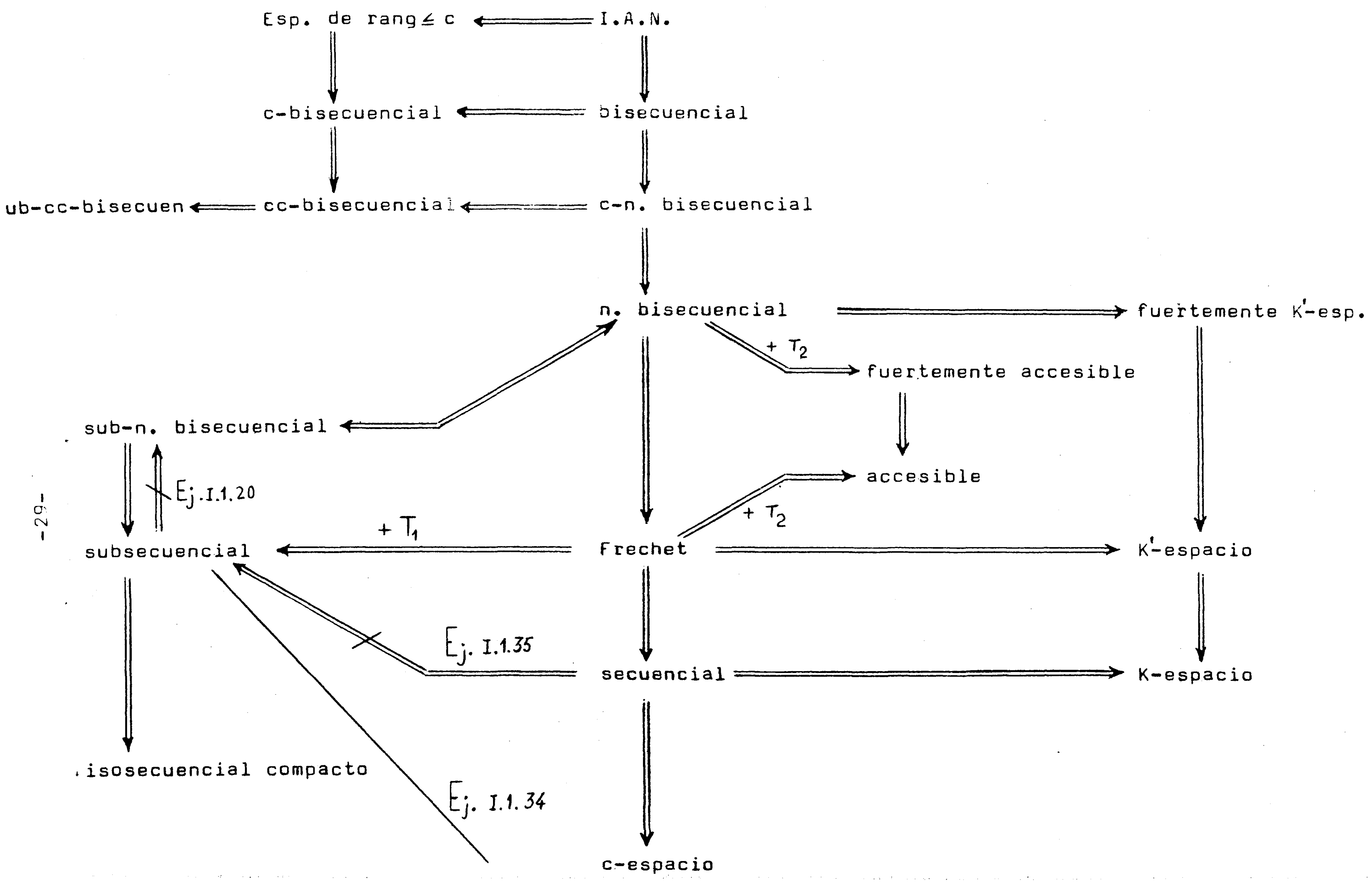
En efecto:

Veamos que los conjuntos compactos de (R, T_{CN}) son finitos.

Para $\{x_n\}_{n \in N} \subset R$ infinito, la familia $\left\{ R - \{x_n \mid n \in N - \{i\}\} \right\}_{i \in N}$ es un recubrimiento abierto del conjunto $\{x_n \mid n \in N\}$, pero evidentemente no existe un subrecubrimiento finito de $\{ R - \{ x_n \mid n \in N - \{i\} \} \}_{i \in N}$.

Esta propiedad de (R, T_{CN}) es suficiente para afirmar que (R, T_{CN}) no es K-espacio. Basta considerar el conjunto $A = (0,1) \subset R$ y $x_0 = 0 \in \bar{A}$; pues para A no existe subconjunto compacto , K, tal que $x_0 = 0 \in K \cap \overline{(K \cap A)}$,ya que para todo compacto K, $0 \notin K \cap \overline{(K \cap (0,1))} = K \cap (0,1)$.

El siguiente cuadro resume las relaciones establecidas entre los diferentes espacios considerados en este párrafo.


Esp. de rang ≤ c
I.A.N.
c-bisecuencial
bisecuencial
ub-cc-bisecuen
cc-bisecuencial
c-n. bisecuencial
n. bisecuencial
fuertemente K'-esp.
+ T2
fuertemente accesible
sub-n. bisecuencial
accesible
Ej. I.1.20
+ T2
+ T1
subsecuencial
Frechet
K'-espacio
Ej. I.1.35
secuencial
K-espacio
isosecuencial compacto
Ej. I.1.34
c-espacio

§2 GENERALIZACIONES DEL II.A.N.

El estudio del II.A.N., puede contemplarse desde un punto de vista mas general que consiste en sustituir el cardinal $\aleph_0$ por un cardinal arbitrario c.

Proposición I.2.1

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces existe $\mathcal{B}$ base de T tal que para todo $\mathcal{B}'$, base de T, se verifica que $card(\mathcal{B}) \leq card(\mathcal{B}')$.

Demostración:

Es consecuencia de que todo conjunto de cardinales está bien ordenado.

Definición I.2.2

Sea (X,T) un espacio topológico. Se llama grado o peso de (X,T) y se designará por gr(X,T) al cardinal:

$$\text{mínimo}\{ card(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \text{ es base de } T\} . \quad (22)$$

Proposición I.2.3

Un espacio topológico (X,T) cumple el II.A.N. si y solamente si $gr(X,T) \leq \aleph_0$.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las definiciones de grado de (X,T) y de II.A.N..

A continuación se estudia el comportamiento de los espacios de grado menor o igual que c ($\aleph_0 \leq c$) en la construcción de topologias iniciales y finales.

Proposición I.2.4

Sean X un conjunto, (X',T') un espacio topológico de $gr(X',T') \leq c$ y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces $gr(X,f^{-1}(T')) \leq c$.

Demostración:

Por la proposición I.2.1, para (X',T') existe una base $\mathcal{B}'_0$ de T' tal que para toda base $\mathcal{B}'$ de T' $car(\mathcal{B}'_0) \leq card(\mathcal{B}')$. Entonces por la definición de grado de (X',T') se tiene que $gr(X',T')=card(\mathcal{B}'_0) \leq c$. Como $f^{-1}(\mathcal{B}'_0)$ es una base de T y $card(f^{-1}(\mathcal{B}'_0))= card(\mathcal{B}'_0)$, se tiene que $gr(X,f^{-1}(T')) \leq c$.

Corolario I.2.5

Si (X',T') es un espacio topológico de $gr(X',T') \leq c$ y X es un subconjunto de X', se verifica que $gr(X,T'|_X) \leq c$.

Este corolario pone de manifiesto que el grado de un espacio topológico es hereditario.

Proposición I.2.6

Sean $(X,T),(X',T')$ espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua, abierta y suprayectiva. Entonces, si $gra(X,T) \leq c$ se verifica que $gr(X',T') \leq c$.

Demostración:

Por ser $gr(X,T) \leq c$ existe $\mathcal{B}_0$ base de T tal que $gr(X,T) = card(\mathcal{B}_0) \leq c$. Teniendo en cuenta que por ser $\mathcal{B}_0$ base de T, $f(\mathcal{B}_0) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}_0\}$ es base de T' ya que f es continua, abierta y suprayectiva y $card(f(\mathcal{B}_0)) \leq card(\mathcal{B}_0)$ resulta que $gr(X',T') \leq c$.

Proposición I.2.7

Sean (X,T) , (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación propia suprayectiva. Entonces si $gr(X,T) \leq c$ se tiene que $gr(X',T') \leq c$.

Demostración:

Por ser $gr(X,T) \leq c$ existe , $\mathcal{B}_o$, base de T tal que $card(\mathcal{B}_o) = gr(X,T) \leq c$.

Sea $\mathcal{B}_o = \{ B_i | \ i \in I \}$ con $card(I) = card(\mathcal{B}_o) \leq c$.

Veamos que $\mathcal{B}' = \{ X' - f(X - \bigcup_{i \in F} B_i) \mid F \subset I$, con F finito y no vacio$\}$, es una base de T' .

1º. $\mathcal{B}' \subset T'$ ya que f es, por ser propia, una aplicación cerrada.

2º. Sean $G' \in T$ y $x' \in G'$. Entonces $f^{-1}(x')$ es un subconjunto compacto contenido en el abierto $f^{-1}(G')$. Por tanto existe $F \subset I$ finito tal que $f^{-1}(x') \subset \bigcup_{i \in F} B_i \subset f^{-1}(G')$. Así $x' \in X' - f(X - \bigcup_{i \in F} B_i) \subset G'$. Por tanto $\mathcal{B}'$ es una base de T' .

Como $card(\mathcal{B}') \leq c$, se tiene que $gr(X',T') \leq c$.

Proposición I.2.8

Sean $\{ (X_i,T_i) \}_{i \in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces $gr(\prod_{i \in I} (X_i,T_i)) \leq c$ si y solamente si se satistacen las siguientes condiciones:

1. $gr(X_i,T_i) \leq c$, para todo $i \in I$.

2. $card(J) \leq c$, donde $J = \{ i \in I \mid card(T_i) \geq 3 \}$.

Demostración:

Supongamos que $gr(\prod_{i \in I} (X_i,T_i)) \leq c$. Como para todo $j \in I$ $p_j: \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ es continua, abierta y suprayectiva, por

I.2.6 , $gr(X_j,T_j) \leq c$ para todo $j \in I$.

Por otro lado existe una base $\mathcal{B}_o$ de la topología producto T_p, tal que $card(\mathcal{B}_o) = gr(\prod_{i \in I}(X_i,T_i)) \leq c$.

Sea $\mathcal{B}_o = \{ B^m \mid m \in M \}$ con $card(M) = card(\mathcal{B}_o) \leq c$.

Para todo $m \in M$, $H_m = \{ i \in I \mid p_i(B^m) \neq X_i \}$ es finito. Por tanto, $H = \bigcup_{m \in M} H_m$ es tal que $card(H) = card(M) \leq c$. Como $J \subset H$, se tiene que $card(J) \leq card(H) \leq c$.

Reciprocamente:

Supongamos que $gr(X_i,T_i) \leq c$ para todo $i \in I$ y que $card(J) \leq c$. Sea $\mathcal{B}_i = \{ B_i^m \mid m \in M_i \}$, con $card(M_i) \leq c$, una base de T_i tal que $card(\mathcal{B}_i) = gr(X_i,T_i) \leq c$.(Para todo $i \in I-J$, $\mathcal{B}_i = \{ X_i \}$).

Se tiene que $\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in I} A_i \mid$ existe $F \subset J$, con F finito, tal que $A_i = X_i$ para todo $i \in I-F$ y $A_i \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in F \}$, es una base de T_p . Como $card(\mathcal{B}) \leq c$, resulta que $gr(\prod_{i \in I}(X_i,T_i)) \leq c$.

<u>Corolario I.2.9</u>

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i \in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios con $card(I) \leq c$ .Entonces $gr(\prod_{i \in I}(X_i,T_i)) \leq c$ si y solamente si $gr(X_i,T_i) \leq c$, para todo $i \in I$.

<u>Corolario I.2.10</u>

Sean X un conjunto no vacio y $\mathcal{F} = \{ (f_i,(X_i,T_i)) \}_{i \in I}$ una familia no vacia tal que para todo $i \in I$, f_i es una aplicación de X en X_i. Entonces, si $gr(X_i,T_i) \leq c$ para todo $i \in I$, y $card(J) \leq c$, donde $J = \{ i \in I \mid card(T_i) \geq 3 \}$, se verifica que $gr(X,T_{\mathcal{F}}) \leq c$.

Demostración:

Es consecuencia de que, $T_{\mathcal{F}}$,topologia inicial para la familia $\mathcal{F}$,verifica que $T_{\mathcal{F}} = ((f_i)_{i\in I})^{-1}(T_p)$, siendo T_p la topología producto de la familia $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$.

Ejemplo I.2.11

El espacio topológico (R^2,T_u^2) es tal que $gr(R^2,T_u^2) \leq \aleph_0$, sin embargo, el espacio cociente $\left(R^2/_{R\times\{0\}} , T_u^2/_{R\times\{0\}}\right)$ es tal que su grado es mayor que $\aleph_0$. Esto pone de manifiesto que si un espacio topológico (X,T) es tal que $gr(X,T) \leq c$, el grado del espacio topológico cociente $(X/R,T/R)$ no tiene por que ser menor o igual que c.

Proposición I.2.12

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces $gr(\sum_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$ si y solamente si $card(I) \leq c$ y $gr(X_i,T_i) \leq c$ para todo $i\in I$.

Demostración:

Basta tener en cuenta que (X_j,T_j) es homeomorfo a $(X_j\times\{j\} , \sum_{i\in I}T_i \Big|_{X_j\times\{j\}})$ y que $X_j\times\{j\}\in \sum_{i\in I}T_i$ para todo $j\in I$.

Proposición I.2.13 (Generalización del T. de Lindelöf)

Sea (X,T) un espacio topológico con $gr(X,T) \leq c$, A un subconjunto de X y $\{V_i \mid i\in I\}\subset T$ tal que $A\subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Entonces, existe $J\subset I$ con $card(J) \leq c$, tal que $A\subset \bigcup_{i\in J} V_i$.

Demostración:

Como $gr(X,T) \leq c$, existe una base de T, $\mathcal{B}_o=\{B_m \mid m\in M\}$, con $card(M) = card(\mathcal{B}_o) = gr(X,T) \leq c$.

Sean $H = \{m\in M \mid \exists i\in I$ con $B_m \subset V_i\}$ y $f:H \longrightarrow I$ una aplicación tal que $B_m \subset V_{f(m)}$ para todo $m\in M$. Es evidente que $f(H) = J$ es tal que $card(f(H)) = card(J) \leq card(M) \leq c$.

Veamos que $A \subset \bigcup_{i\in J} V_i$.

Para todo $x\in A$, $x\in \bigcup_{i\in I} V_i$. Por hipótesis, existe $i_o\in I$ con $x\in V_{i_o}$. Como $\mathcal{B}_o$ es base de T, existe $m\in M$ con $x\in B_m \subset V_{i_o}$. Así, $x\in B_m \subset V_{f(m)} \subset \bigcup_{i\in J} V_i$.

<u>Proposición I.2.14</u>

Todo espacio topológico (X,T) de grado menor o igual que c tiene rango menor o igual que c.

<u>Demostración:</u>

Por I.2.1, existe una base $\mathcal{B}$ de T tal que $card(\mathcal{B}) = c$. Para todo $x\in X$, $\mathcal{V}(x) = \{B\in\mathcal{B} \mid x\in B\}$ es una base del sistema de entornos de x. Como $card(\mathcal{V}(x)) \leq c$, se tiene que $rang(X,T) \leq c$.

Se tienen las siguientes relaciones entre el grado y el rango de un espacio topológico:

$$\begin{array}{ccc} \text{II.A.N.} & \Longrightarrow & \text{I.A.N.} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Espacios de grado} \leq c & \Longrightarrow & \text{Espacios de rango} \leq c \end{array}$$

(c estrictamente mayor que $\aleph_0$)

§ 3. GENERALIZACIONES DE LOS ESPACIOS DE LINDELÖF.

El estudio de los espacios de Lindelöf y hereditariamente de Lindelöf puede contemplarse desde un punto de vista mas general, que consiste en sustituir el cardinal $\aleph_0$ por un cardinal arbitrario.

Definición I.3.1

Sean c un cardinal y (X,T) un espacio topológico. Se dice que (X,T) es c-Lindelöf si todo recubrimiento abierto de (X,T) tiene un subrecubrimiento de cardinal estrictamente menor que c.

Proposición I.3.2

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces se tiene:

a) (X,T) es compacto si y solamente si (X,T) es $\aleph_0$-Lindelöff.

b) (X,T) es de Lindelöf si y solamente si (X,T) es $2^{\aleph_0}$-Lindelöf.(Se admite la hipótesis del continuo).

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las definiciones de espacios c-Lindelöf, espacios compactos y espacios de Lindelöf.

Observación I.3.3

Todo espacio topológico de $gr(X,T) \leq \aleph_0$ es $2^{\aleph_0}$-Lindelöf.

Todo espacio topológico (X,T) de $gr(X,T) \leq c_1 < c$ es un espacio c-Lindelöf.

A continuación se estudia el comportamiento de los espacios c-Lindelöf en las construcciones de topologias iniciales y finales.

Proposición I.3.4

Todo subespacio cerrado de un espacio c-Lindelöf es c-Lindelöf.

Demostración:

Supongamos que (X,T) es c-Lindelöf y sea C un cerrado en (X,T). Entonces, si $\mathcal{V} = \{V_i \mid i\in I\}$ es un recubrimiento abierto de $(C,T|_C)$, existe $\{W_i \mid i\in I\}$ tal que $W_i\in T$ y $W_i\cap C = V_i$ para todo $i\in I$.

Como $\mathcal{U} = \{W_i \mid i\in I\}\cup\{X-C\}$ es un recubrimiento abierto de (X,T) y (X,T) es c-Lindelöf, existe un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(M) = \{W_{i_m} \mid m\in M\}\cup\{X-C\}$ con $\mathrm{card}(\mathcal{U}(M)) < c$. Así, $\mathcal{V}(M) = \{V_{i_m} = W_{i_m}\cap C \mid m\in M\}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{V}$ con $\mathrm{card}(\mathcal{V}(M)) \leq \mathrm{card}(M) < c$. Así pues, $(C, T|_C)$ es c-Lindelöf.

Observación I.3.5

Sea (X,T) un espacio topológico e Y un subconjunto de X. Entonces $(Y,T|_Y)$ es c-Lindelöf si y solamente si para todo $\mathcal{U} = \{U_i \mid i\in I\}\subset T$ tal que $Y\subset \bigcup_{i\in I} U_i$ se verifica que existe $J\subset I$ con $\mathrm{card}(J) < c$, tal que $Y\subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Ejemplo I.3.6

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la propiedad c-Lindelöf no es hereditaria.

Sea el espacio topológico (R,T) donde $T = \{A\subset R \mid 0\notin A\}\cup\{R\}$.

Es evidente que (R,T) es un espacio de Lindelöf. Sin embargo $(R-\{0\}, T|_{R-\{0\}})$ no es Lindelöf ya que $T|_{R-\{0\}}$ es la topología discreta y card$(R-\{0\}) > \aleph_0$. Luego no existe subrecubrimiento numerable del recubrimiento abierto, de $R-\{0\}$, $\{\{x\} \mid x \neq 0\}_{x\in R-\{0\}}$.

<u>Proposición I.3.7</u>

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces, si (X,T) es c-Lindelöf, se verifica que (X',T') es c-Lindelöf.

<u>Demostración</u>:

Sea $\mathcal{U}' = \{U'_i \mid i\in I\}$ un recubrimiento abierto de (X',T'). como f es continua, se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}') = \{f^{-1}(U'_i) \mid i\in I\}$ es un recubrimiento abierto de (X,T). Como (X,T) es c-Lindelöf, existe $J\subset I$ con card$(J)<c$ tal que $\{f^{-1}(U'_i) \mid i\in J\}$ es un subrecubrimiento de (X,T). Como f es suprayectiva, $\{U'_i \mid i\in J\}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}'$ con card$(J)<c$. Así (X',T') es c-Lindelöf.

(Por tanto la propiedad de ser c-Lindelöf es una propiedad topológica).

<u>Proposición I.3.8</u>

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación propia. Entonces, si (X',T') es c-Lindelöf, se verifica que (X,T) es c-Lindelöf.

<u>Demostración:</u>

Sea $\mathcal{U} = \{U_i \mid i\in I\}$ un recubrimiento abierto de (X,T). Como f es una aplicación propia, se tiene que $\mathcal{U}' = \{X' - f(X - \bigcup_{i\in F} U_i)$

$| F\subset I$ finito$\}$ es un recubrimiento abierto de (X',T') . En efecto:

Como f es aplicación propia, es cerrada y se tiene por tanto que $\mathcal{U}'\subset T$.

Para todo $x'\in X'$, $f^{-1}(x')$ es un subconjunto compacto en (X,T). Por tanto, existe $F\subset I$,finito, tal que $f^{-1}(x')\subset \bigcup_{i\in F} U_i$.

Es evidente que $x'\in X' - f(X- \bigcup_{i\in F} U_i)$. Así $\mathcal{U}'$ es un recubrimiento abierto de (X',T').

Como (X',T') es c-Lindelöf, existe
$\mathcal{V}'= \{ X' - f(X- \bigcup_{i\in F_m} U_i) \mid F_m\subset I$, finito y $m\in J\}$,con $\mathrm{card}(J)< c$, subrecubrimiento de $\mathcal{U}'$con $\mathrm{card}(\mathcal{V}') = \mathrm{card}(J)< c$.

Entonces $\mathcal{V} =\{ U_i \mid i\in F_m\subset I$,finito, $m\in J\}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ para (X,T) con $\mathrm{card}(\mathcal{V}) = \mathrm{card}(J)<c$. Por tanto (X,T) es c-Lindelöf .

<u>Definición I.3.9</u>

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación continua y cerrada de (X,T) en (X',T') .Se dice que f es c-propia, si para todo $x'\in X'$, $f^{-1}(x')$ es c-Lindelöf. (Observese que las aplicaciones $\aleph_0$-propias son las aplicaciones propias).

<u>ProposiciónI.3.10</u>

Sean (X,T), (X ,T) espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación c-propia. Entonces, si (X',T') es c-Lindelöf, se verifica que (X,T) es c-Lindelöf.

<u>Demostración</u>:

Sea $\mathcal{U} =\{U_i \mid i\in I \}$ un recubrimiento abierto de (X,T). Co mo f es c-propia, se tiene que

$\mathcal{U}' = \{ X' - f(X - \bigcup_{i \in J} U_i) \mid J \subset I$ con $card(J) < c\}$ es un recubri-

miento abierto de (X', T'). En efecto:

Como f es aplicacón c-propia, f es cerrada y por tanto $\mathcal{U}' \subset T'$. Para todo $x' \in X'$, por ser f c-propia, $f^{-1}(x')$ es c-Lindelöf, por tanto existe $J \subset I$ con $card(J) < c$ tal que $f^{-1}(x') \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Es evidente que $x' \in X' - f(X - \bigcup_{i \in J} U_i)$. Luego $\mathcal{U}'$ es un recubrimiento abierto de (X', T').

Como (X', T') es c-Lindelöf, existe un subrecubrimiento de $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}' = \{ X' - f(X - \bigcup_{i \in J_m} U_i) \mid J_m \subset I$, con $card(J_m) < c$ y $m \in M$ con $card(M) < c \}$.

Entonces $\mathcal{V} = \{ U_i \mid i \in J_m \subset I$, con $card(J_m) < c$ y $m \in M$ con $card(M) < c \}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ para (X, T) con $card(\mathcal{V}) < c$. Por tanto (X, T) es c-Lindelöf.

<u>Proposición I.3.11</u>

Sean $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia no vacia de espacios no vacios. Entonces, si $\prod_{i \in I} (X_i, T_i)$ es c-Lindelöf, se verifica que (X_i, T_i) es c-Lindelöf para todo $i \in I$.

<u>Demostración:</u>

Es consecuencia inmediata de que para todo $j \in I$ la aplicación $p_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ es continua, abierta y suprayectiva.

Por tanto, por la proposición I.3.7, por ser $\prod_{i \in I} (X_i, T_i)$ c-Lindelöf, se tiene que (X_j, T_j) es c-Lindelöf para todo $j \in I$.

Veamos con un ejemplo, que en general, el producto de espácios c-Lindelöf no es c-Lindelöf.

Ejemplo I.3.12

Sea $\mathcal{B}=\{[a,b)\subset R \mid a<b,\ a,b\in R\}$. Es evidente que $\mathcal{B}$ es base de una topologia, $T(\mathcal{B})$, en R.

Veamos que $(R,T(\mathcal{B}))$ es de Lindelöf. En efecto:

Sea $\mathcal{U}=\{V_i \mid i\in I\}$ un recubrimiento abierto de $(R,T(\mathcal{B}))$

A partir de $\mathcal{U}$ se construye un recubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de la siguiente forma:

Para todo $x\in R$, existen $i_x\in I$ y $\varepsilon_x\in R^+$ tal que $I_x=[x,x+\varepsilon_x)\subset V_{i_x}$. Por tanto $\mathcal{V}=\{I_x \mid x\in R\}$ es un recubrimiento abierto de $(R,T(\mathcal{B}))$.

Sea $M=\{y\in R \mid y\notin I_x-\{x\},\ \forall x\in R\}$. Para $y_1,y_2\in M$, con $y_1\neq y_2$, se tiene que $I_{y_1}\cap I_{y_2}=\emptyset$. Por tanto M es un conjunto numerable ya que la aplicación $\varphi:M\longrightarrow Q$ que hace corresponder a cada $y\in M$ un número racional I_y es inyectiva.

Sea $P=\{y\in R \mid \text{existe } x\in R \text{ con } y\in I_x-\{x\}\}$. Entonces $\{I_x-\{x\} \mid x\in R\}$ es un recubrimiento abierto de $(P,T_u|_P)$.

Como (R,T_u) cumple el II.A.N., existe $\{x_n\}_{n\in N}\subset R$ tal que $P\subset\bigcup_{n\in N}(I_{x_n}-\{x_n\})$. Así, $R=M\cup P=(\bigcup_{x\in M} I_x)\cup(\bigcup_{n\in N} I_{x_n})=$

$=(\bigcup_{x\in M} V_{i_x})\cup(\bigcup_{n\in N} V_{i_{x_n}})$ y por tanto $(R,T(\mathcal{B}))$ es de Lindelöf.

Sea $(R,T(\mathcal{B}))\times(R,T(\mathcal{B}))$. Este espacio topológico no es de Lindelöf. En efecto:

Si fuese de Lindelöf, el conjunto $\Delta^{*}=\{(x,-x) \mid x\in R\}$ que es cerrado, seria un espacio de Lindelöf, pero es un absurdo ya que Δ^{*} tiene la topológia discreta y card$(\Delta^{*})>\aleph_0$.

<u>Proposición I.3.13</u>

Sean (X,T) un espacio topológico compacto y (X',T') un espacio topológico c-Lindelöf. Entonces $(X,T)\times(X',T')$ es c-Lindelöf.

<u>Demostración:</u>

Teniendo en cuenta que por ser (X,T) compacto, la proyección $p_2:X\times X'\longrightarrow X'$ es propia, resulta por I.3.8 que $(X,T)\times(X',T')$ es c-Lindelöf.

<u>Proposición I.3.14</u>

Sean X' un conjunto, (X,T) un espacio topológico y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación suprayectiva. Entonces, si (X,T) es c-Lindelöf, se verifica que (X',T^f), (donde T^f es la topologia final en X' para la aplicación f), es c-Lindelöf.

<u>Demostración:</u>

Es consecuencia de que f es una aplicación continua y suprayectiva de (X,T) en (X',T^f) y tener en cuenta la proposición I.3.7.

<u>Proposición I.3.15</u>

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es c-Lindelöf si y solamente si card$(I)<c$ y (X_i,T_i) es c-Lindelöf para todo $i\in I$.

<u>Demostración:</u>

Si $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es c-Lindelöf, como para todo $j\in I$, $X_j\times\{j\}$

es un cerrado en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$, por la proposición I.3.4 , $(X_j\times\{j\}, \sum_{i\in I}T_i|_{X_j\times\{j\}})$ es c-Lindelöf .Puesto que (X_j,T_j) es homeomorfo a $(X_j\times\{j\}, \sum_{i\in I}T_i|_{X_j\times\{j\}})$ se tiene que (X_j,T_j) es c-Lindelöf, para todo $j\in I$.

Además, $\text{card}(I)<c$, ya que $\{X_j\times\{j\}\mid j\in I\}$ es una partición abierta de $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$, y si no fuese $\text{card}(I)<c$, el recubrimiento $\{X_j\times\{j\}\mid j\in I\}$,no admitiría un subrecubrimiento de cardinal menor que c, lo cual contradice la hipótesis de que $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es c-Lindelöf.

Reciprocamente:

Sea $\{U_j \mid j\in J\}$ un recubrimiento abierto de $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$.

Se tiene que para cada $j\in J$, $U_j=\sum_{i\in I}A_j^i$, donde $\{A_j^i\}_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de $X_i\times\{i\}$ homeomorfo a X_i .

Por ser (X_i,T_i) c-Lindelöf, para todo $i\in I$, existe $J^i\subset J$ tal que $\text{card}(J^i)<c$ y $\{A_j^i\}_{j\in J^i}$ es un subrecubrimiento de X_i. Entonces $\bigcup_{i\in I}\{U_j \mid j\in J^i\}$ es un subrecubrimiento de $\sum_{i\in I}X_i$ de cardinal menor que c. Así pues, $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es c-Lindelöf.

<u>Corolario I.3.16</u>

Sean X' un conjunto, $\mathcal{F}=\{((X_i,T_i),f_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia tal que $\text{card}(I)<c$ y para todo $i\in J$, f_i es una aplicación de X_i en X' . Entonces si (X_i,T_i) es c-Lindelöf para todo $i\in I$ y para todo $x'\in X'$ existe $i\in I$ y existe $x_i\in X_i$ tal que $f_i(x_i)=x'$,se verifica que $(X',T^{\mathcal{F}})$ es un espacio topológico c-Lindelöf.

Demostración:

Por I.3.15, $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es c-Lindelöf. Para la aplicación sobreyectiva $f=\langle f_i\rangle_{i\in I}: \sum_{i\in I} X_i \longrightarrow X'$ definida por $f(x_i,i)=f_i(x_i)$ para todo $(x_i,i)\in \sum_I X_i$, teniendo en cuenta la proposiciónI.3.14 resulta que $(X',(\sum_{i\in I} T_i)^f)$ es c-Lindelöf.

Teniendo en cuenta la observación V.4.33 de (18), resulta que $(\sum_{i\in I} T_i)^f = (\sum_{i\in I} T_i)^{\langle f_i\rangle_{i\in I}} = T^{\mathcal{F}}$. Por tanto $(X',T^{\mathcal{F}})$ es c-Lindelöf.($T^{\mathcal{F}}$ es la topología final en X' para la familia $\mathcal{F}$).

La proposición I.3.4 y el ejemplo I.3.6 motivan la siguiente definición:

Definición I.3.17

Un espacio topológico (X,T) se dice hereditariamente c-Lindelöf, si para todo subconjunto Y de X se verifica que $(Y,T|_Y)$ es c-Lindelöf.

Es evidente que todo espacio hereditariamente c-Lindelöf es c-Lindelöf. Sin embargo, el ejemplo I.3.6, muestra la existencia de espacios c-Lindelöf que no son hereditariamente c-Lindelöf.

ProposiciónI.3.18

Sea (X,T) un espacio topológico.Entonces (X,T) es hereditariamente c-Lindelöf, si y solamente si, para todo $G\in T$, $(G,T|_G)$ es c-Lindelöf.

Demostración:

Dela definición se sigue que si (X,T) es hereditariamente c-Lindelöf, se verifica que $(G,T|_G)$ es c-Lindelöf.

Reciprocamente:

Sea $Y \subset X$ y $\mathcal{U}=\{U_i \mid i\in I\} \subset T$, tal que $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, un recubrimiento abierto de Y.

Como ($\bigcup_{i\in I} U_i, T \big|_{\bigcup_{i\in I} U_i}$) es c-Lindelöf, existe $J \subset I$, con card(J)<c, tal que $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in J} U_i$. Se tiene que $\mathcal{V}=\{U_i \mid i\in J\}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$, para $(Y,T|_Y)$, con card(J)=card($\mathcal{V}$) <c. Por tanto, $(Y,T|_Y)$ es c-Lindelöf. Así (X,T) es hereditariamente c-Lindelöf.

A continuación se estudia el comportamiento de los espacios hereditariamente c-Lindelöf en la construcción de topologias iniciales y finales.

<u>Proposición I.3.19</u>

Sea X unn conjunto, (X',T') un espacio topológico hereditariamente c-Lindelöf y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación .Entonces $(X,f^{-1}(T'))$ es hereditariamente c-Lindelöf.

<u>Demostración</u>:

Sea $G\in f^{-1}(T')$. Entonces existe $G \in T$ tal que $G=f^{-1}(G')$. Sea $\mathcal{U}=\{U_i \mid i\in I\} \subset f^{-1}(T')$ un recubrimiento abierto de G. Por ser $U_i\in f^{-1}(T')$ existe $U'_i\in T'$ tal que $U_i= f^{-1}(U'_i)$.

Entonces $f(G) = f(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f(U_i) \subset \bigcup_{i\in I} U'_i$.

Como (X',T') es hereditariamente c-Lindelöf, existe $J \subset I$ con card(J)<c tal que $f(G) \subset \bigcup_{i\in J} U'_i$. Así $G \subset \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U'_i) = \bigcup_{i\in J} U_i$. Por tanto $(G,f^{-1}(T')|_G)$ es c-Lindelöf. Entonces por I.3.18, $(X,f^{-1}(T'))$ es hereditariamente c-Lindelöf.

<u>Corolario I.3.20</u>

Si $(X'T')$ es hereditariamente c-Lindelöf y $X\subset X'$ se verifica que $(X,T|_X)$ es hereditariamente c-Lindelöf.
(Así pues el axioma hereditariamente c-Lindelöf es hereditario).

Proposición I.3.21

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces si (X,T) es hereditariamente c-Lindelöf, se verifica que (X',T') es hereditariamente c-Lindelöf (por tanto la propiedad de ser hereditariamente c-Lindelöf es una propiedad topológica).

Demostración:

Basta probar que para todo $G'\in T'$, $(G', T'|_{G'})$ es c-Lindelöf.

Sea $\mathcal{U}'=\left\{U'_i \mid i\in I\right\}$ un recubrimiento abierto de G' tal que $G'\subset \bigcup_{i\in I} U'_i$. Como f es continua se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}') =$

$=\left\{f^{-1}(U'_i) \mid i\in I\right\}$ es un recubrimiento abierto de $f^{-1}(G') = G$ ya que $f^{-1}(G')= G\subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U'_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U'_i)$.

Como (X,T) es hereditariamente c-Lindelöf, $(G,T|_G)$ es c-Lindelöf. Así, existe $J\subset I$ con $\mathrm{card}(J)<c$ tal que $G\subset \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U'_i)$. Entonces $f(G) = f(f^{-1}(G')) = G'\subset f(\bigcup_{i\in J} f^{-1}(U'_i))$

$= \bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(U'_i)) = \bigcup_{i\in J} U'_i$.

Por tanto $\mathcal{V}'=\left\{U'_i \mid i\in J\right\}$ es un subrecubrimiento abierto de G' de $\mathrm{card}(\mathcal{V}')<c$. Luego $(G',T'|_{G'})$ es c-Lindelöf y por tanto (X',T') es hereditariamente c-Lindelöf.

Ejemplo I.3.22

El espacio topológico $(R,T(\mathcal{B}))$ del ejemplo I.3.12 es hereditariamente Linddelöf, Sin embargo, el espacio topológi co $(R,T(\mathcal{B}))\times(R,T(\mathcal{B}))$ no es hereditariamente de Lindelöf ya que ni siquiera es Lindelöf.

Este ejemplo pone de manifiesto,que en general, el producto de espacios topológicos hereditariamente c-Lindelöf,no es hereditaiamente c-Lindelöf.

Se tiene no obtante el siguiente recíproco:

Proposición I.3.23

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces, si $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es hereditariamente c-Lindelöf, se verifica que (X_i,T_i) es hereditariamente c-Lindelöf, para todo $i\in I$.

Demostración:

Es consecuencia de que para todo $j\in I$ la aplicación $p_j\colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ es continua, abierta y suprayectiva.

Por tanto, por I.3.21, por ser $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ hereditariamente c-Lindelöf, se tiene que (X_j,T_j) es hereditariamente c-Lindelöf para todo $j\in I$.

Proposición I.3.24

Sean X' un conjunto, (X,T) un espacio topológico y $f\colon X\longrightarrow X'$ una aplicación suprayectiva. Entonces, si (X,T) es hereditariamente c-Lindelöf, (X',T^f), (T^f es la topología final en X' para la aplicación f), es hereditariamente c-Lindelöf.

Demostración:

Es consecuencia de que f es una aplicacion continua y suprayectiva de (X,T) en (X',T^f) y tener en cuenta la I.3.21.

Proposición I.3.25

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topoló gicos no vacios. Entonces $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es hereditariamente c-Lindelöf si y solamente si card(I)$<$c y (X_i,T_i) es hereditariamente c-Lindelöf para todo $i\in I$.

<u>Demostración</u>:

Si $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es hereditariamente c-Lindelöf, como para todo $j\in I$, se tiene que $\left(X_j\times\{j\},\ \sum_{i\in I} T_i\Big|_{X_j\times\{j\}}\right)$ es hereditariamente c-Lindelöf.

Puesto que (X_j,T_j) es homeomorfo a $\left(X_j\times\{j\},\ \sum_{i\in I} T_i\Big|_{X_j\times\{j\}}\right)$ se tiene que (X_j,T_j) es hereditariamente c-Lindelöf para todo $j\in I$.

Además, por ser $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ hereditariamente c-Lindelöf, $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es c-Lindelöf y por I.3.15, card(I)$<$c .

Recíprocamente:

Sea G un abierto de $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ y $\{U_j \mid j\in J\}$ un recubrimiento abierto de G. Se tiene que para cada $j\in J$, $U_j=\sum_{i\in I} A_j^i$ donde $\{A_j^i\}_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de $G_i\times\{i\}$ homeomorfo a G_i ($G=\sum_{i\in I} G_i$). Por ser (X_i,T_i) hereditariamente c-Lindelöf, G_i es c-Lindelöf, por tanto existe, para cada $i\in I$, $J^i\subset J$, con card$(J^i)<$c tal que $\{A_j^i\}_{j\in J^i}$ es un subrecubrimiento abierto de G_i.

Entonces $\bigcup_{i\in I}\{U_j \mid j\in J^i\}$ es un subrecubrimiento de G de cardinal menor que c. Así, $\left(G,\ \sum_{i\in I} T_i\big|_G\right)$ es c-Lindelöf y por tanto $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es hereditariamente c-Lindelöf.

Corolario I.3.26

Sea X' un conjunto, $\mathcal{F}=\{((X_i,T_i),f_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia tal que card(I)$<$ c y para todo $i\in I$, f_i es una aplica - ción de X_i en X' .Entonces, si (X_i,T_i) es hereditariamente c-Lindelöf, para todo $i\in I$ y para todo $x'\in X'$ existe $i\in I$ y exis $x_i\in X_i$ tal que $f_i(x_i) = x'$,se verifica que $(X',T^{\mathcal{F}})$ es un espacio topológico hereditariamente c-Lindelöf.

Demostración:

Por I.3.25, $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es hereditariamente c-Lindelöf.

Para la aplicación suprayectiva $f=\langle f_i\rangle_{i\in I}: \sum_{i\in I} X_i \longrightarrow X'$ definida por $f(x_i,i) = f_i(x_i)$, para todo $(x_i,i)\in \sum_{i\in I} X_i$, por la I.3.24 se tiene que $(X',(\sum_{i\in I} X_i)^f)$ es hereditariamente c-Lindelöf.

Por V.4.33 de (18),resulta que $(\sum_{i\in I} T_i)^f = T^{\mathcal{F}}$ .Por tanto $(X',T^{\mathcal{F}})$ es hereditariamente c-Lindelöf.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que el axioma hereditariamente c-Lindelöf, no se conserva por imagenes inversas de aplicaciones propias(y por tanto tampoco por imagenes inversas de aplicaciones c-propias).

Ejemplo I.3.27

Sea (X,T) el espacio topológico definido de la siguiente forma: $X = M\cup\{\omega\}$ donde M es un conjunto de cardinal c y $T=\{A\subset X \mid \omega\notin A\}\cup\{X\}$. Se consideran (X',T') espacio topológico unitario y $f:X\longrightarrow X'$ la única aplicación posible.

Como (X,T) es compacto, f es una aplicación propia de (X,T) en (X',T').Evidentemente, (X',T') es hereditariamente c-Lindelöf, sin embargo (X,T) no es hereditariamente c-Linde löf ya que $T|_M$ es la topología discreta.

El siguiente ejemplo prueba que la proposición I.3.13 no es cierta, en general, para espacios topológicos hereditariamente c-Lindelöf.

<u>Ejemplo I.3.28</u>

Sea (X,T) el espacio topológico compacto del ejemplo anterior y (X',T') un espacio topológico unitario, por tanto hereditariamente c-Lindelöf. Evidentemente $(X,T)\times(X',T')$ no es hereditariamente c-Lindelöf.

El siguiente cuadro resume las relaciones entre los espacios de Lindelöf y los que cumplen el II.A.N..

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{compactos} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{II.A.N.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{l}\text{hereditariamente}\\ \text{Lindelöf}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Lindelöf} \arrow[d, Rightarrow] \\
\begin{array}{l}\text{Espacios de}\\ \text{grado} \leq c_1 < c\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{l}\text{hereditariamente}\\ \text{c-Lindelöf}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \text{c-Lindelöf}
\end{tikzcd}$$

(c estrictamente mayor que $2^{\aleph_0}$)

§ 4. GENERALIZACIONES DE ESPACIOS SEPARABLES

El estudio de la separabilidad puede contemplarse desde un punto de vista más general que consiste en sustituir el cardinal $\aleph_0$ por un cardinal arbitrario. Se procede de la siguiente forma:

Proposición I.4.1

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces existe D, subconjunto denso en (X,T), tal que para todo subconjunto, D', denso en (X,T) se verifica que $\mathrm{card}(D) \leq \mathrm{card}(D')$.

Demostración:

Es consecuencia de que todo conjunto de cardinales está bien ordenado.

Definición I.4.2

Sea (X,T) un espacio topológico. Se llama grado de separabilidad de (X,T) y se designará por $gs(X,T)$ al cardinal $\text{mínimo}\{\mathrm{card}(D) \mid D \text{ es denso en } (X,T)\}$. (22)

Proposición I.4.3

Un espacio topológico (X,T) es separable si y solamente si $gs(X,T) \leq \aleph_0$.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las definiciones de grado de separabilidad de un espacio topológico y espacio separable.

Proposición I.4.4

Sea (X,T) un espacio topológico de $gr(X,T) \leq c$. Entonces $gs(X,T) \leq c$.

Demostración:

Por ser $gr(X,T) \leq c$, existe una base de T, $\mathcal{B}_0 = \{B_i \mid i \in I\}$, tal que $gr(X,T) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_0) = \mathrm{card}(I) \leq c$.

Sea $D = \{x_i \in X \mid x_i \in B_i$ para todo $i \in I\}$. Evidentemente, D es denso en X ya que para todo $G \in T$, con $G \neq \emptyset$, se tiene que $D \cap G \neq \emptyset$.

Como $card(D) \leq card(I) \leq c$ se tiene que $gs(X,T) \leq c$.

Hay espacios topológicos de $gs(X,T) \leq c$ y sin embargo $gr(X,T) > c$. Basta considerar el espacio topológico de I.3.12. Pues $(R,T(\mathcal{B}))$ es separable y por tanto $gs(R,T(\mathcal{B})) \leq \aleph_0$ y sin embargo $gr(R,T(\mathcal{B})) > \aleph_0$.

A continuación vamos a estudiar el comportamiento del grado de separabilidad en las construcciones de topologias iniciales y finales.

Proposición I.4.5

Si (X,T) es un espacio topológico de $gs(X,T) \leq c$ y G es un abierto de (X,T), se verifica que $gs(G,T|_G) \leq c$.

Demostración:

Por ser $gs(X,T) \leq c$, existe $D = \{x_i \in X \mid i \in I\}$ subconjunto denso en (X,T) tal que $card(D) = card(I) = gs(X,T) \leq c$. Como $G \in T$ y D es denso en (X,T), $D \cap G$ es denso en $(G,T|_G)$. Como $card(D \cap G) \leq card(D) \leq c$ se tiene que $gs(G,T|_G) \leq c$.

Veamos con un ejemplo que un espacio topológico de grado de separabilidad menor o igual que c, contiene subespacios de grado de separabilidad mayor que c.

Ejemplo I.4.6

Sea $(R,T(\mathcal{B}))$ el espacio topológico del ejemplo I.3.12. El espacio topológico $(R,T(\mathcal{B}))x(R,T(\mathcal{B}))$ es tal que $gs((R,T(\mathcal{B}))x(R,T(\mathcal{B}))) \leq \aleph_0$, pues $D = QxQ$ es denso en $(R,T(\mathcal{B}))x(R,T(\mathcal{B}))$ y $card(QxQ) = \aleph_0$. Sin embargo $\Delta^* = \{(x,-x) \mid x \in R\}$ es tal que $gs(\Delta^*, T_p|_{\Delta^*}) > \aleph_0$, pues su topológia es la discreta y $card(\Delta^*) > \aleph_0$.

Este ejemplo pone de manifiesto que el grado de separabilidad <u>no</u> es una propiedad hereditaria.

<u>Proposición I.4.7</u>

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces, si $gs(X,T) \leq c$ se verifica que $gs(X',T') \leq c$. (Por tanto el grado de separabilidad es una propiedad topológica).

<u>Demostración</u>:

Por ser $gs(X,T) \leq c$, existe $D = \{x_i \in X \mid i \in I\}$ subconjunto denso en (X,T) tal que $card(D) = card(I) = gs(X,T) \leq c$.

Como f es continua, $f(\bar{D}) \subset \overline{f(D)}$ y como f es suprayectiva $f(\bar{D}) = f(X) = X' = \overline{f(D)}$. Así pues $f(D) = \{f(x_i) \mid i \in I\}$ es denso en X'. Como $card(f(D)) \leq card(D) \leq c$ se tiene que $gs(X,T) \leq c$.

<u>Proposición I.4.8</u>

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i \in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces si $gs(\prod_{i \in I}(X_i,T_i)) \leq c$ se verifique que :

1º $gs(X_i,T_i) \leq c$, para todo $i \in I$.

2º $J = \{i \in I \mid$ existen $G_i, A_i \in T_i - \{\emptyset\}$ con $G_i \cap A_i = \emptyset\}$ tiene de cardinal menor o igual que 2^c.

<u>Demostración</u>:

1º Es consecuencia de que $gs(\prod_{i \in I}(X_i,T_i)) \leq c$, de que para todo $j \in I$ $p_j: \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ es continua, abierta y suprayectiva y de la proposición I.4.7

2º Por ser $gs(\prod_{i \in I}(X_i,T_i)) \leq c$, existe $D = \{x_i \in X \mid i \in I\}$, subconjunto denso en $\prod_{i \in I}(X_i,T_i)$, tal que $gs(\prod_{i \in I}(X_i,T_i))$ $= card(D) = card(I) \leq c$.

Para cada $i \in J$, sea $D_i = D \cap p_i^{-1}(G_i)$. Se considera la apli-

cación $\psi : J \longrightarrow P(D)$ definida por $\psi(i) = D_i$ para todo $i \in J$.
Veamos que ψ es inyectiva. Enefecto:

Sean $i, j \in J$ con $i \neq j$ y $x \in D \cap p_i^{-1}(G_i) \cap p_j^{-1}(A_j)$. Se tiene que $x \in D_i$ y $x \notin D_j$ ya que $D \cap p_j^{-1}(G_j) \cap p_j^{-1}(A_j) = \emptyset$. Así, $D_i \neq D_j$.
Luego $card(J) \leq card(P(D)) = 2^c$.

Proposición I.4.9

Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia no vacia de espacios no vacios, tal que $card(I) \leq 2^c$ y $gs(X_i, T_i) \leq c$, para todo $i \in I$. Entonces $gs(\prod_{i \in I}(X_i, T_i)) \leq c$.

Demostración:

Sea A un conjunto de cardinal c. Para cada $\alpha \in A$ se considera (X_α, T_α), espacio topológico compuesto con dos puntos, siendo T_α la topología discreta.

Se verifica que $(Y, T_p) = \prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, T_\alpha)$ es compacto, T_2 y tiene una base $\mathcal{B}$ de cardinal c. Como $card(I) \leq 2^c$ y $card(Y) = 2^c$, existe $\varphi : I \longrightarrow Y$ aplicación inyectiva. Sea $x_0 = (x_i^0)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ un punto fijo de $\prod_{i \in I} X_i$. Para cada $i \in I$ existe D_i, subconjunto denso en (X_i, T_i), tal que $card(D_i) \leq c$.

Si ω_0 es el menor número ordinal con cardinal c, entonces para todo $i \in I$, D_i se puede bien ordenar,

$D_i = \{x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\omega, \ldots\}$ $\qquad \omega < \omega_0$.

Dada una familia finita de elementos de $\mathcal{B}$ disjuntos dos a dos a dos, $\{B_1, \ldots, B_n\}$, y una familia de ordinales $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, con $\omega_i < \omega_0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, se define

$x_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{B_1 \ldots B_n} \in \prod_{i \in I} X_i$ de la siguiente forma :

$$p_j\left(x^{B_1\cdots B_n}_{1\cdots\ n}\right) = \begin{cases} x_j^{\,i} & \text{, si } \varphi(j)\in B_i \\ x_j^{o} & \text{, en caso contrario.}\end{cases}$$

Se considera

$$D = \left\{ x^{B_1\cdots\ B_n}_{\omega_1\cdots\ \omega_n} \;\middle|\; B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B} \text{ con } B_j\cap B_i = \emptyset\ \forall i,j\in\{1,\ldots,n\} \right.$$

$$\left. \text{con } i\neq j\ ;\omega_1,\ldots,\omega_n \text{ ordinales menores que } \omega_o \right\}.$$

Se tiene que card(D) $\leq$ c. Además D es denso en $\prod_{i\ I}(X_i,T_i)$.

En efecto: Sea G un abierto no vacio de $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$. Entonces, existen $i_1,\ldots i_n \in I$ tales que $G \supset \prod_{i\in I} A_i$, donde $A_i\in T_i - \{\emptyset\}$ para todo $i\in I$ y $A_i = X_i$ para todo $i\in I - \{i_1,\ldots i_n\}$.

Como $\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,T_\alpha)$ es T_2, existe $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$ tales que $\varphi(i_1)\in B_1,\ \ldots\ ,\varphi(i_n)\in B_n$ y $B_i\cap B_j = \emptyset$ para todo $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ con $i\neq j$.

Para todo $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, existe ω_k con $x_{i_k}^{\omega_k}\in A_{i_k}$. Es evidente que $x^{B_1\cdots\cdot B_n}_{\omega_1\cdots\cdot\ \omega_n}\in G\cap D$. (Comparese con (20)).

<u>Proposición I.4.10</u>

Sean X' un conjunto,(X,T) un espacio topológico y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación suprayectiva. Entonces si gs(X,T) $\leq$ c, se verifica que gs$(X',T^f)\leq$ c (T^f es la topología final en X' para la aplicación f).

<u>Demostración:</u>

Es consecuencia de que f es una aplicación continua y suprayectiva de (X,T) en (X',T^f) y de I.4.7.

Proposición I.4.11

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Enton̲ $gs(\sum_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$ si y solamente si $gs(X_i,T_i) \leq c$ para todo $i\in I$ y $card(I) \leq c$.

Demostración:

Si $gs(\sum_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$, como para todo $j\in I$, $X_j\times\{j\}$ es un abierto en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$, por I.4.5 $gs(X_j\times\{j\}, \sum_{i\in I} T_i\big|_{X_j\times\{j\}}) \leq c$.

Puesto que (X_j,T_j) es homeomorfo a $(X_j\times\{j\}, \sum_{i\in I} T_i\big|_{X_j\times\{j\}})$ se tiene que $gs(X_j,T_j) \leq c$, para todo $j\in I$.

Además, $card(I) = c$ ya que todo conjunto denso en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ debe contener un elemento de $X_j\times\{j\}$ para todo $j\in I$.

Recíprocamente:

Por ser $gs(X_i,T_i) \leq c$ para todo $i\in I$, se tiene que existen, para todo $i\in I$, $D_i\subset X_i$ subconjuntos densos en (X_i,T_i) y tales que $gs(X_i,T_i) = card(D_i) \leq c$.

Como $\sum_{i\in I} D_i$ es denso en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$, ya que $\overline{\sum_{i\in I} D_i} = \sum_{i\in I} \bar{D}_i = \sum_{i\in I} X_i$, y $card(\sum_{i\in I} D_i) \leq c$, se tiene que $gs(\sum_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$.

Corolario I.4.12

Sean X' un conjunto y $\mathcal{F} = \{((X_i,T_i),f_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía tal que $card(I) \leq c$ y para todo $i\in I$,f_i es una aplicacion de X_i en X' . Entonces, si $gs(X_j,T_j) \leq c$ para todo $j\in I$ y para todo $x'\in X'$ existe $i\in I$ y existe $x_i\in X_i$ tales que $f_i(x_i)=x'$, se verifica que $gs(X',T^{\mathcal{F}}) \leq c$.

Demostración:

Por la proposición anterior, $gs(\sum_{i\in I}(X_i,T_i)) \leq c$. Para la aplicación sobreyectiva

$$f=\langle f_i\rangle_{i\in I}: \sum_{i\in I} X_i \longrightarrow X', \text{ definida por } f(x_i,i) = f_i(x_i)$$

para todo $(x_i,i) \in \sum_{i\in I} X_i$, se tiene que $gs(X',(\sum_{i\in I} T_i)^f) \leq c$.

Como $(\sum_{i\in I} T_i)^f = T^{\mathcal{F}}$ resulta que $gs(X',T^{\mathcal{F}}) \leq c$.

Proposición I.4.13

Sea (X,T) un espacio topológico seudometrizable. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $gr(X,T) < c$.

2. (X,T) es c-Lindelöf.

3. $gs(X,T) < c$.

Demostración:

$1. \Longrightarrow 2.$ Es la observación I.3.3.

$2. \Longrightarrow 3.$ Sea d una seudométrica en X tal que $T_d = T$. Para todo $n\in N$ $\mathcal{U}_n = \left\{ B^d_{1/n}(x) \mid x\in X \right\}$ es un recubrimiento abierto de (X,T). Por ser (X,T) c-Lindelöf, existe $D_n = \left\{ x^i_n \in X \mid i\in I \right\}$ de $card(D_n) < c$ y tal que $\bigcup_{i\in I} B^d_{\frac{1}{n}}(x^i_n) = X$.

Se tiene que $D = \bigcup_{n\in N} D_n$ es denso en X, es decir $\bar{D} = X$. En efecto :

Para todo $G \in T - \{\emptyset\}$, se tiene que existe $x\in G$ y $n\in N$ tales que $B^d_{\frac{1}{n}}(x) \subset G$. Como $X = \bigcup_{i\in I} B^d_{\frac{1}{n}}(x^i_n)$, existe $i_o \in I$ tal que $x \in B^d_{\frac{1}{n}}(x^{i_o}_n)$. Es evidente que $x^{i_o}_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset G$. Así $G \cap D \neq \emptyset$.

Como $card(D) < c$ se tiene que $gs(X,T) < c$.

$3. \Longrightarrow 1.$

Sea d una seudométrica en X tal que $T_d = T$ y $D = \left\{ x_i \mid i\in I \right\}$ un subconjunto denso en (X,T) tal que $card(D) = gs(X,T) < c$. Se considera $\mathcal{B} = \left\{ B^d_{\frac{1}{n}}(x_i) \mid n\in N,\ i\in I \right\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base de T.

Sea $G\in T$ y $x\in G$. Como G es abierto, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $B^d_{\frac{1}{n}}(x)\subset G$. Sea $x_{i_0}\in B^d_{\frac{1}{2n}}(x)\cap D$, se tiene que $x\in B^d_{\frac{1}{2n_0}}(x_{i_0})\subset B^d_{\frac{1}{n_0}}(x)\subset G$. Así $\mathcal{B}$ es una base de T. Como card($\mathcal{B}$)$<c$ se tiene que $gr(X,T)<c$.

El ejemplo I.4.6 que expresa que el grado de separabilidad no es una propiedad hereditaria, motiva la siguiente definición.

<u>Definición I.4.14</u>

Un espacio topológico (X,T) se dice hereditariamente de grado de separabilidad menor o igual que c, si para todo sub - conjunto ,Y, de X, $gs(Y,T|_Y)\leq c$.

<u>Obsrvación I.4.15</u>

1.Como todo espacio de $gr(X,T)<c$ es hereditario y teniendo en cuenta que $gr(X,T)<c$ implica que $gs(X,T)<c$, resulta que todo espacio topológico de $gr(X,T)<c$ es hereditariamente de grado de separabilidad menor que c.

2. Es evidente que todo espacio hereditariamente de grado de separabilidad menor o igual que c es de grado de separabilidad menor o igual que c. El reciproco no es cierto como indica el ejemplo I.4.6.

El siguiente cuadro resume las relaciones entre los espacios introducidos en este párrafo.

$$\begin{tikzcd}
\text{II.A.N.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{E. hereditariamente separable.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{E. separable} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{E. de grado} \leq c. \arrow[r, Rightarrow] & \text{E. hereditariamente de gs} \leq c. \arrow[r, Rightarrow] & \text{E. gs} \leq c.
\end{tikzcd}$$

CAPITULO II

AXIOMAS DE SEPARACION

§ 1. AXIOMAS DE SEPARACION ENTRE EL T_1 Y EL T_2

Entre los axiomas T_1 y T_2 se pueden definir varios axiomas de separación. Vease por ejemplo (30).

En este párrafo unicamente consideraremos los US-espacios, los KC-espacios y algunas generalizaciones de estos que se utilizaran en capítulos posteriores.

<u>Definición II.1.1</u>

a) Un espacio topológico (X,T) es un US-espacio, si toda sucesión convergente tiene límite único(12).

b) Un espacio topológico (X,T) es un KC-espacio, si todo subconjunto compacto es cerrado(19).

c) Un espacio topológico (X,T) es un NKC-espacio, si todo subconjunto numerablemente compacto es cerrado.

d) Un espacio topológico (X,T) es un SKC-espacio, si todo subconjunto secuencialmente compacto es cerrado.

<u>Observación II.1.2</u>

Entre estos espacios se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{tikzcd} & \text{NKC-espacio} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{SKC-espacio} & \\ T_2 \arrow[r, Rightarrow] & \text{KC-espacio} \arrow[r, Rightarrow] & \text{US-espacio} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \end{tikzcd}$$

Proposición II.1.3

Sea (X,T) un espacio topológico subsecuencial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es un NKC-espacio.

b) (X,T) es un SKC-espacio.

Demostración:

a)$\Longrightarrow$b)

Siempre es cierta.

b)$\Longrightarrow$a)

Sea M un subespacio numerablemente compacto de (X,T). Como el axioma subsecuencial es hereditario, se tiene que M es secuencialmente compacto en (X,T). Así por hipótesis M es cerrado.

Proposición II.1.4

Sea (X,T) un espacio topológico secuencial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es un NKC-espacio.

b) (X,T) es un SKC-espacio.

c) (X,T) es un KC-espacio.

d) (X,T) es un US-espacio.

Demostración:

La equivalencia entre a) y d) se ha establecido en (17).

La equivalencia entre b) y d) se ha establecido en (17). aunque el resultado se debe a C.E. Aull.

La equivalencia entre c) y d) es consecuencia de que todo compacto es numerablemente compacto y de las equivalencias anteriores.

Es conocido, (12), que en un espacio topológico que cumple el I.A.N. el axioma US-espacio equivale a T_2. La siguiente proposición generaliza este resultadd.

Proposición II.1.5 (28*)

Sea (X,T) un espacio bisecuencial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es US-espacio.
b) (X,T) es un KC-espacio.
c) (X,T) es T_2.

Demostración:

c)$\Longrightarrow$b) $\Longrightarrow$a) Estan explicitas en la observación II.1.2.

a)$\Longrightarrow$c) Es suficiente demostrar que todo filtro convergente tiene límite único.

Supongamos que existe $\mathcal{F}$, filtro en X, tal que $\mathcal{F}$ converge a dos puntos distintos x e y. Como $\mathcal{F}$ converge a x, y (X,T) es bisecuencial, existe $\mathcal{F}'$, filtro en X, de rango menor o igual que $\aleph_0$ que converge a x y tal que $F\cap F'\neq\emptyset$ para todo $F\in\mathcal{F}$ y todo $F'\in\mathcal{F}'$. De esta última condición, se deduce que existe un filtro en X, $\mathcal{F}''$, tal que $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}''$ y $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}''$. Por tanto $\mathcal{F}''$ converge a y e $y\in Agl_T\mathcal{F}'$.

Por ser (X,T) bisecuencial, existe $\mathcal{F}'''$, filtro en X, de rango menor o igual que $\aleph_0$ tal que tal que $\mathcal{F}'''$ converge a y y $F'''\cap F'\neq\emptyset$ para todo $F'''\in\mathcal{F}'''$ y todo $F'\in\mathcal{F}'$.

Se consideran $\{A'_n\}_{n\in N}$ y $\{A'''_n\}_{n\in N}$ bases de $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}'''$ respectivamente verificando que $A'_{n+1}\subset A'_n$ y $A'''_{n+1}\subset A'''_n$ para todo $n\in N$,

Para todo $n\in N$ existe $x_n\in A'_n\cap A'''_n$. Es evidente que $\{x_n\}_{n\in N}$ converge a x y a y, lo cual contradice que (X,T) es US-espacio.

Corolario II.1.5

Sea (X,T) un espacio topológico bisecuencial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es T_2.

b) (X,T) es un KC-espacio.

c) (X,T) es un NKC-espacio.

d) (X,T) es un SKC-espacio.

e) (X,T) es un US-espacio.

Demostración:

Es consecuencia de II.1.5, II.1.4 y de que todo espacio bisecuencial es secuencial.

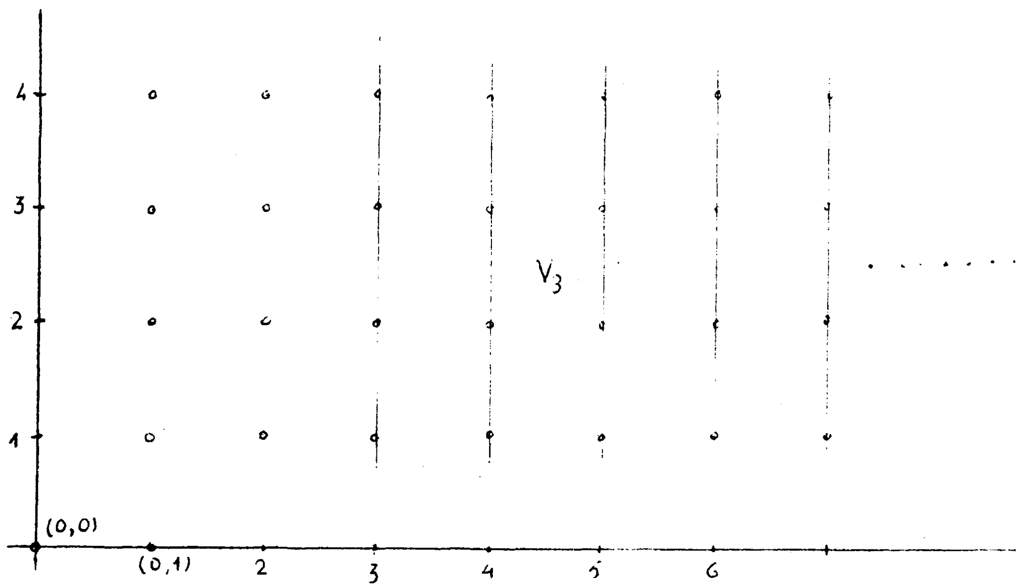
A continuación se dá un ejemplo de un US-espacio de Frechet que no es T_2(y por tanto no es bisecuencial ni I.A.N.).

Ejemplo II.1.6 (17)

Sea $X = N\times N \cup \{P,Q\}$ con $P=(0,0)$ y $Q = (0,1)$. Se considera la aplicación $\mathcal{V}: X \longrightarrow P(P(X))$ definida por:

$\mathcal{V}((m,n)) = \{ A \subset N\times N \mid (m,n) \in A \}$ para todo $(m,n) \neq (0,0)$ y $(m,n) \neq (0,1)$.

$\mathcal{V}((0,0)) = \{ \{(0,0)\} \cup V_k \mid k \in N \}$, donde $V_k = \bigcup_{i \geq k} \{ (i,j) \mid j \in N \}$.



$\mathcal{V}((0,1)) = \{ \{(0,1)\} \cup W_f \mid f$ es una aplicación de N en N$\}$,

donde $W_f = \bigcup_{i \in N} \{ (i,j) \mid j \geq f(i) \}$.

La aplicación $\mathcal{V}$ satisface las siguientes condiciones:

I). Para todo $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$.

II) Si $V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow x \in V$

III) Si $U, V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow \exists W \in \mathcal{V}(x)$ tal que $W \subset U \cap V$

IV) Para todo $V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x)$ tal que para todo $y \in W$, existe $U \in \mathcal{V}(y)$ con $U \subset V$.

Por tanto existe una única topológia T en X tal que para todo $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ es una base de entornos abiertos de x en (X,T).

Se tiene que:

a) (X,T) no es T_2, ya que para todo V^P y todo V^Q , $V^P \cap V^Q \neq \emptyset$.

b) (X,T) es compacto, ya que dado un recubrimiento abierto arbitrario A, el abierto que contenga a P recubre a todo X menos un número finito de rectas verticales, y el abierto que contiene a Q recubre todos los puntos de estas rectas verticales menos un número finito de puntos.

c) (X,T) es un US-espacio. En efecto:

Una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in N}$ con $(x_n, y_n) \neq P$, $\forall n \in N$ converge a P si y solamente si $\{x_n\}_{n \in N}$ verifica que para todo $K \in N$, existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n > K$

Una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in N}$ con $(x_n, y_n) \neq Q$, $\forall n \in N$ converge a Q si y solamente si $\{y_n\}_{n \in N}$ verifica que para todo $K \in N$, existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$, $y_n > K$ y existe $m_0 \in N$ tal que $x_n = x_{m_0}$ para todo $n \geq m_0$.

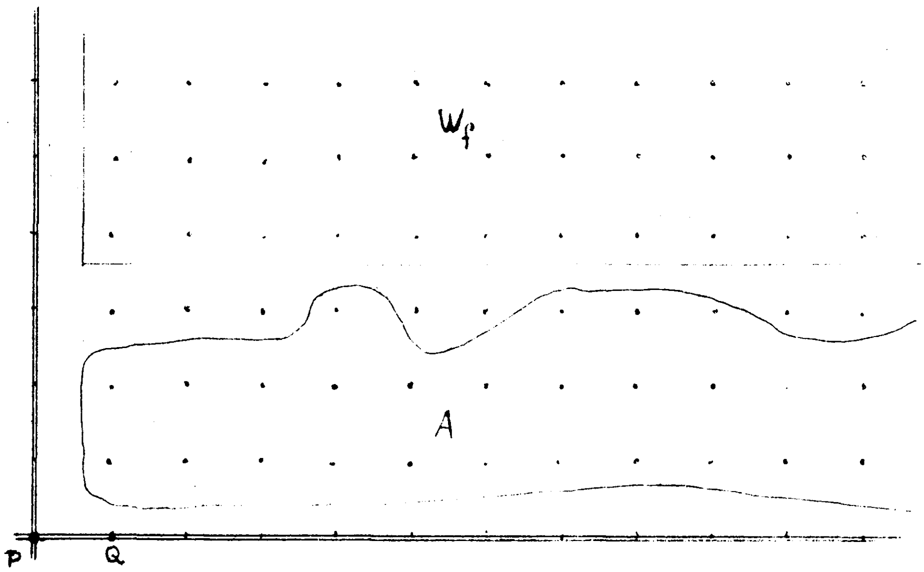
Por tanto (X,T) es un US-espacio.

d) (X,T) es de Frechet. En efecto:

Sea $A \subset X - \{Q\}$.

Si para todo $i \in N$, $A \cap (\{i\} \times N)$ es finito, $Q \notin \bar{A}$.

Basta tomar como $V^Q = \{(0,1)\} \cup W_f$ donde $f: N \longrightarrow N$ esta definida por $f(n) > \text{máximo}\{m \in N \mid (n,m) \in A\}$.



Si existe $i \in N$ tal que $A \cap (\{i\} \times N)$ es infinito, existe una sucesión en A que converge a Q. Basta tomar la sucesión $\{(i,y_n)\}_{n \in N}$ con $y_n \in A \cap (\{i\} \times N)$ e $\{y_n\}_{n \in N}$ estrictamente creciente.

Puesto que cada punto de $X - \{Q\}$ tiene una base numerable de entornos, X es un espacio de Frechet.

Se podria realizar un estudio sistematico de las propiedades de cada uno de los espacios introducidos en este párrafo y su independencia. Sin embargo,por su utilización posterior, vamos a estudiar el comportamiento de los US-espacios en la construcción de topologias iniciales y finales.

Proposición II.1.7

Sea X un conjunto, (X',T') un US-espacio topológico y $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces $(X, f^{-1}(T'))$ es un US-espacio si y solamente si f es inyectiva.

Demostración:

($\Longrightarrow$) Supongamos que f es inyectiva.

Si $(X, f^{-1}(T'))$ no fuese un US-espacio, existiria una sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ que convergeria a dos puntos distintos x e y. Enton la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ converge a $f(x)$ y a $f(y)$ distintos, lo cual contradice la hipótesis.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $(X, f^{-1}(T'))$ es un US-espacio.

Si f no fuese inyectiva, existirian $x,y\in X$ con $x \neq y$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ definida por:

$$x_n = \begin{cases} x \text{ , si } n = 2k \\ y \text{ , si } n = 2k+1 \end{cases}$$ converge a x y a y lo cual es absurdo.

Corolario II.1.8

Si (X',T') es un US-espacio topológico y $X\subset X'$ se verifica que $(X, T'|_X)$ es un US-espacio.

(Por tanto el axioma US-espacio es hereditario)

Proposición II.1.9

Sean (X,T) , (X',T') espacios topologicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación abierta y biyectiva de (X,T) en (X',T') .Entonces si (X,T) es un US-espacio, (X',T') es un US-espacio.

(Por tanto el axioma US-espacio es una propiedad topológica)

Demostracion:

Supongamos que existe una sucesión $\{x'_n\}_{n\in N}$, en X' , tal que converge a dos puntos distintos x' e y' . Como f es biyectiva, sea $\{x_n\}_{n\in N}$ la sucesión ,en X, tal que para todo $n\in N$ $x'_n = f(x_n)$ y $x,y\in X$ tales que $f(x) = x'$ y $f(y) = y'$. Entonces, por ser f abierta $\{x_n\}_{n\in N}$ convergeria a x e y lo cual es absurdo.

Proposición II.1.10

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacia de espacios topológicos no vacios. Entonces $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un US-espacio si y solamente si para todo $i\in I$ (X_i,T_i) es un US-espacio.

Demostración:

($\Longrightarrow$) Suponemos que $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un US-espacio .Entonces cada (X_i,T_i) es un US-espacio ya que el axioma US-espacio es propiedad topológica hereditaria.

($\Longleftarrow$) Suponemos que para todo $i\in I$ (X_i,T_i) es un US-espacio. Si $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ no fuese un US-espacio, existiria una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ en $\prod_{i\in I}X_i$, convergente a dos puntos distintos x e y. Como $x\neq y$ existe $i_0\in I$ tal que $p_{i_0}(x)\neq p_{i_0}(y)$. Entonces $\left\{p_{i_0}(x_n)\right\}_{n\in N}$ es una sucesión en (X_{i_0},T_{i_0}) que converge a dos puntos distintos, lo cual es una contradición.

Corolario II.1.11

Sea X un conjunto y $\mathscr{F}=\{(f_i,(X_i,T_i))\}_{i\in I}$ una familia tal que para cada $i\in I$, f_i es una aplicación de X en X_i y (X_i,T_i) es un US-espacio. Entonces $(X,T_{\mathscr{F}})$ es un US-espacio si y solamente si la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ distingue puntos.

Demostración:

Por III.2.74 de (18) se tiene que $T_{\mathscr{F}}=((f_i)_{i\in I})^{-1}(T_p)$ donde T_p es la topologia del producto topológico $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$.

Por II.1.10 $(\prod_{i\in I}X_i,T_p)$ es un US-espacio . Así por II.1.7 $(X,T_{\mathscr{F}})$ es un US-espacio si y solamente si $(f_i)_{i\in I}$ es inyectiva lo cual equivale a que la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ distinga puntos.

El siguiente ejemplo muestra que en general el cociente de un US-espacio, no es un US-espacio.

Ejemplo II.1.12

El espacio topológico (R,T_u) es un US-espacio. Sin embargo el espacio topológico cociente que resulta de identificar los números racionales a un punto y los irracionales a otro, no es evidentemente un US-espacio ya que este espacio cociente consta unicamente de dos puntos y la topología es la trivial.

<u>Proposición II.1.13</u>

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios. Entonces $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un US-espacio si y solamente si para todo $i\in I$, (X_i,T_i) es un US-espacio.

<u>Demostración</u>:

Si $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un US-espacio, para todo $i\in I$, (X_i,T_i) es un US-espacio por ser este axioma una propiedad topológica hereditaria.

Reciprocamente:

Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ convergente a dos puntos x e y. Supongamos que $x\in X_{i_0}\times\{i_0\}$ e $y\in X_{i_1}\times\{i_1\}$. Como $X_{i_0}\times\{i_0\}$ y $X_{i_1}\times\{i_1\}$ son abiertos en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ y $(X_{i_0}\times\{i_0\})\cap(X_{i_1}\times\{i_1\})\neq\emptyset$ si y solamente si $i_0\neq i_1$, de la hipótesis se deduce que $i_0=i_1$. Como (X_{i_0},T_{i_0}) es un US-espacio, $x=y$.

§ .2 UN RESULTADO SOBRE EXTENSORES ENTORNOS ABSOLUTOS

En este párrafo se establece una condición necesaria y suficiente para que la suma topológica de una familia de extensores entornos absolutos sea un extensor entorno absoluto.

Los extensores absolutos y extensores entornos absolutos surgen del importante teorema de extensión de TIETZE que se enuncia a continuación.

Teorema de Tietze II.2.1

Sea (X,T) un espacio topológico . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. (X,T) es normal.

2. Para todo cerrado no vacio, C, de (X,T) y toda aplicación continua, f, de $(C,T|_C)$ en $(J,T_u|_J)$, donde J es un intervalo no vacio en R, existe una aplicación continua, $\bar{f}$, de (X,T) en $(J,T_u|_J)$ tal que $\bar{f}|_C = f$.

Este teorema motiva la consideración de aquellos espacios, mas generales que los intervalos de R, que resuelven tambien el problema de extensión de funciones continuas, definidas en cerrados de espacios normales y con valores en dichos espacios .

Definición II.2.2 (13)

Un espacio topológico (X',T'), se llama extensor absoluto (y se notara E.A), si para todo espacio topológico normal (X,T), todo cerrado no vacio, C, de (X,T) y toda aplicación continua, f , de $(C, T|_C)$ en (X',T') existe una aplicación continua, $\bar{f}$, de (X,T) en (X',T') tal que $\bar{f}|_C = f$.

Definición II.2.3 (13)

Un espacio topológico (X',T') se llama extensor entorno absoluto (E.E.A.), si para todo espacio topológico normal (X,T)

todo cerrado no vacio, C, de (X,T) y toda aplicación continua, f, de $(C,T|_C)$ en (X',T') existe un abierto, G ,de (X,T) con $C\subset G$ y existe una aplicación continua , $\bar{f}$, de$(G,T|_G)$ en (X',T') tal que $\bar{f}|_C = f$.

Observación II.2.4

1. $(S^1, T_u^2|_{S^1})$ es un ejemplo de un espacio E.E.A. que no es E.A..

2. Todo espacio E.A. es E.E.A..

Proposición II.2.5

Sea (X,T) un espacio topologico E.E.A y G un abierto de (X,T). Entonces $(G,T|_G)$ es un espacio topológico E.E.A.

Proposición II.2.6

Si (X,T) es un espacio topológico E.E.A, todo espacio homeomorfo a (X,T) es tambien un espacio E.E.A..

Definición II.2.7

Sea (X,T) un espacio topológico y $\mathscr{D}=\{D_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que :

a) $\mathscr{D}$ es localmente finita en (X,T) si para todo $x\in X$, existe V^x y existe $F\subset I$ finito tales que $V^x\cap D_i = \emptyset$ para todo $i\in I-F$.

b) $\mathscr{D}$ es puntualmente finita en (X,T) si para todo $x\in X$ existe $F\subset I$,finito tal que $x\notin D_i$,para todo $i\in I-F$.

Definición II.2.8

Sean (X,T) un espacio topológico y $\mathscr{D}=\{D_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathscr{D}$ es discreta en (X,T), si para todo $x\in X$ existe V^x tal que V^x corta a lo más a un elemento de $\mathscr{D}$.

Observación II.2.9

1. Toda familia discreta es localmente finita.

2. Evidentemente $\mathcal{D} = \{ (\leftarrow,0),(0,\rightarrow) \}$ es una familia localmente finita, en (R,T_u), que no es discreta.

Proposición II.2.10

Sean (X,T) un espacio topológico y $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{D}$ es discreta.

b) $\mathcal{D}$ es localmente finita y $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i \neq j$.

Proposición II.2.11

Sean $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios, (X,T) un espaio topológico, C un cerrado de (X,T) y f una aplicación continua de $(C,T|_C)$ en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$. Se considera $J = \{ i\in I \mid f(C)\cap(X_i \times \{i\}) \neq \emptyset \}$. Entonces $\{C_i = f^{-1}(X_i \times \{i\}) \mid i\in J\}$ es una familia discreta de cerrados no vacios de (X,T). Además $C = \bigcup_{i\in J} C_i$.

Demostración:

Como cada C_i es cerrado en C, se tiene que C_i es cerrado en (X,T).

Para todo $x\notin C$, $V^x = X - C$ es un entorno de x que no corta a ningún C_i para todo $i\in J$. Para $x\in C$, existe $i_0\in J$ tal que $x\in C_{i_0}$.

Se tiene que $C_{i_0}\cup(X - C)$ es un entorno de x que solo corta a C_{i_0}.

Proposición II.2.12

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es normal.

b) Para toda familia numerable y discreta de cerrados de (X,T), $\{C_i \mid i\in I\}$, existe una familia de abiertos, $\{G_i \mid i\in I\}$, de (X,T) tal que $C_i \subset G_i$ para todo $i\in I$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i \neq j$.

Demostración:

a) $\Longrightarrow$ b)

Como I es numerable, $I = \{i_n \mid n\in \mathbb{N}\}$. Teniendo en cuenta que $\{C_i \mid i\in I\}$ es localmente finita, se tiene que $F_1 = \bigcup_{i\in I-\{i_1\}} C_i$ es un cerrado en (X,T) disjunto de C_{i_1}. Como (X,T) es normal, existe $G_{i_1} \in T$ tal que $C_{i_1} \subset G_{i_1}$ y $\bar{G}_{i_1} \cap F_1 = \emptyset$.

La familia de cerrados $\{\bar{G}_{i_1}\} \cup \{C_i \mid i\in I-\{i_1\}\}$ es discreta y numerable.

Se considera el cerrado $F_2 = \bar{G}_{i_1} \cup \bigcup_{i\in I-\{i_1,i_2\}} C_i$. Se tiene que F_2 es disjunto de C_{i_2}. Por tanto, como (X,T) es normal, existe $G_{i_2} \in T$ tal que $C_{i_2} \subset G_{i_2}$ y $\bar{G}_{i_2} \cap F_2 = \emptyset$.

Observese que $G_{i_1} \cap G_{i_2} = \emptyset$ y que la familia de cerrados $\{\bar{G}_{i_1}, \bar{G}_{i_2}\} \cup \{C_i \mid i\in I-\{i_1,i_2\}\}$ es discreta.

Supongamos que existen $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}$ abiertos tales que $C_{i_1} \subset G_{i_1}, \dots, C_{i_n} \subset G_{i_n}$ y $\{\bar{G}_{i_1}, \dots, \bar{G}_{i_n}\} \cup \{C_i \mid i\in I-\{i_1,\dots i_n\}\}$ es una familia discreta de cerrados.

Se considera el cerrado $F_{n+1} = (\bar{G}_{i_1} \cup \dots \cup \bar{G}_{i_n}) \cup (\bigcup_{i\in I-\{i_1,\dots,i_{n+1}\}} C_i$

Se tiene que F_{n+1} es disjunto de $C_{i_{n+1}}$. Por tanto, como (X,T) es normal, existe $G_{i_{n+1}} \in T$ tal que $C_{i_{n+1}} \subset G_{i_{n+1}}$ y $\bar{G}_{i_{n+1}} \cap F_{n+1} = \emptyset$.

Así, existe $\{G_i \mid i \in I\}$ familia de abiertos de (X,T) tal que $C_i \subset G_i$ para todo $i \in I$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$ para todo $i,j \in I$ con $i \neq j$.

b) $\Longrightarrow$ a)

Es consecuencia inmediata de que toda familia finita de cerrados es discreta.

El ejemplo que vamos a exponer a continuación, debido a BING, trata de poner de manifiesto que para la demostración, en la proposición anterior, que a) $\Longrightarrow$ b) es esencial que I sea numerable.

Ejemplo II.2.13 (6)

Sea X un conjunto no numerable. Se considera el conjunto $B(X) = \{0,1\}^{P(X)}$. Para cada elemento $x \in X$, se define $f_x \in B(X)$ por:

$$f_x(M) = \begin{cases} 1 \text{ , si } x \in M \\ 0 \text{ , si } x \notin M. \end{cases}$$

Es evidente que $f_x \neq f_y$ para todo $x,y \in X$ con $x \neq y$. Por tanto, si $B_0(X) = \{f_x \mid x \in X\} \subset B(X)$, $card(B_0(X)) = card(X)$.

Se considera $\mathcal{B} = \{\{f\} \mid f \in B(X) - B_0(X)\} \cup \{B(f_x, \mathcal{F}) \mid x \in X, \mathcal{F} \subset P(X), \mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}$ finito$\}$, donde $B(f_x, \mathcal{F}) = \{f \in B(X) \mid f(M) = f_x(M)$, para todo $M \in \mathcal{F}\}$. Como para todo $x,y,z \in X$ tales que $f_z \in B(f_x, \mathcal{F}_1) \cap B(f_y, \mathcal{F}_2)$ se verifica que $B(f_z, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = B(f_x, \mathcal{F}_1) \cap B(f_y, \mathcal{F}_2)$, es evidente que es base de una topología T_B^X, en $B(X)$.

El espacio topológico $(B(X),T_B^X)$ tiene las siguientes propiedades:

a) $B_o(X)$ es un cerrado en $(B(X),T_B^X)$.

b) $(B(X),T_B^X)$ es normal. En efecto: Sean C_1 y C_2 cerrados no vacios y disjuntos de $(B(X),T_B^X)$. Se consideran $F_1=C_1\cap B_o(X)$ y $F_2 = C_2\cap B_o(X)$. Si F_1 o F_2 son vacios, se tiene que C_1 y $B(X) - C_1$ son abiertos disjuntos conteniendo a C_1 y C_2, respectivamente, en el primer caso, y C_2, $B(X) - C_2$ son abiertos disjuntos conteniendo a C_2 y C_1 respectivamente, en el segundo caso.

Supongamos, por tanto, que F_1 y F_2 son no vacios. Se considera $M_1 =\{x\in X \mid f_x \in F_1\}$ y $M_2 =\{ x\in X \mid f_x\in F_2\}$. Como $F_1\cap F_2 = \emptyset$, se tiene que $M_1\cap M_2 = \emptyset$. Sean $V_1 =\{f\in B(X) \mid f(M_1)=1 \text{ y } f(M_2)=0\}$ y $V_2 =\{f\in B(X) \mid f(M_2) = 1 \text{ y } f(M_1) = 0\}$. Se tiene que $V_1\cap V_2 =\emptyset$ y V_1,V_2 son abiertos ya que $V_1 = B(f_x,\{M_1,M_2\})$ para todo $x\in M_1$ y $V_2 =B(f_x,\{M_1,M_2\})$ para todo $x\in M_2$. Entonces, $G_1 =(V_1 - C_2)\cup(C_1 -F_1)$ y $G_2 = (V_2- C_1)\cup(C_2 - F_2)$ son abiertos disjuntos de $(B(X),T_B^X)$ tales que $C_1\subset G_1$ y $C_2\subset G_2$. Así, $(B(X),T_B^X)$ es normal.

c) $(B(X),T_B^X)$ es T_1. Por tanto, $(B(X),T_B^X)$ es T_4.

d) $B_o(X) = \{\{f_x\} \mid x\in X\}$ es una familia discreta no numerable de cerrados de $(B(X),T_B^X)$. En efecto:

Sea $f \in B(X)$. Si $f\notin B_o(X)$, $V^f =\{f\}$ no corta a ningún elemento de $B_o(X)$. Supongamos que $f \in B_o(X)$. Entonces, existe $x\in X$ tal que $f_x = f$. Se considera $V^f= B(f_x, \{x\})$. Para todo $y\in X-\{x\}$, $f_y\notin V^f$. Así, $B_o(X)$ es discreta.

e) No existe, una familia de abiertos $\{G_x \mid x\in X\}$ verificando que $\{f_x\}\subset G_x$ para todo $x\in X$ y $G_x\cap G_y = \emptyset$ para todo $x,y\in X$ con $x\neq y$. En efecto:

Supongamos que existe tal familia. Por la construcción de T_B^X, para todo $x\in X$, existe $\mathcal{F}_x\subset P(X)$, finito y no vacio, tal que $f_x\in B(f_x, \mathcal{F}_x)\subset G_x$.

Como X es no numerable y para todo $x\in X$, $\mathcal{F}_x$, es finito y no vacio, existe un número natural $n\in\mathbb{N}$ y un subconjunto M de X, no numerable, tal que $\mathcal{F}_x$ tiene n elementos para todo $x\in M$.

Por otra parte, para todo $x,y\in M$ se tiene que $\mathcal{F}_x\cap\mathcal{F}_y\neq\emptyset$ ya que si fuese $\mathcal{F}_x\cap\mathcal{F}_y = \emptyset$ se tendria $B(f_x,\mathcal{F}_x)\cap B(f_y,\mathcal{F}_y)\neq\emptyset$.

Sea $x_0\in M$. Entonces existe $F_1\in\mathcal{F}_{x_0}$ y existe $M_1'\subset M$, no numerable, tal que $F_1\in\mathcal{F}_x$ para todo $x\in M_1'$. En efecto:

En caso contrario, para todo $F\in\mathcal{F}_{x_0}$ y todo $M^*\subset M$, no numerable, existe $x_F\in M^*$ tal que $F\notin\mathcal{F}_{x_F}$. Por tanto, para todo $F\in\mathcal{F}_{x_0}$, el conjunto $M_F = \{x\in M \mid F\in\mathcal{F}_x\}$ es numerable.

Además, como $\mathcal{F}_{x_0}\cap\mathcal{F}_x\neq\emptyset$ para todo $x\in M$, se tiene que

$$M = \bigsqcup_{F\in\mathcal{F}_{x_0}} M_F$$

, lo cual es absurdo puesto que M no es numerable.

Además, existe $t_1\in\{0,1\}$ y existe $M_1\subset M_1'$, no numerable, tal que $f_x(F_1) = t_1$ para todo $x\in M_1$.

Sea $x_1\in M_1$. Como $f_{x_1}(F_1) = f_x(F_1) = t_1$, para todo $x\in M_1$ y $\{B(f_x, \mathcal{F}_x) \mid x\in X\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos, existe $F_2\in\mathcal{F}_{x_1}-\{F_1\}$ y existe $M_2'\subset M_1$, no numerable, tal

que $F_2 \in \mathscr{F}_x$ para todo $x \in M_2$. En efecto: En caso contrario, para todo $F \in \mathscr{F}_{x_1} - \{F_1\}$ y para todo $M^* \subset M_1$, no numerable, existe $x_F \in M^*$ tal que $F \notin \mathscr{F}_{x_F}$. Así, para todo $F \in \mathscr{F}_{x_1} - \{F_1\}$,
$M_F = \{ x \in M_1 | F \in \mathscr{F}_x \}$ es numerable. Además $\bigsqcup_{F \in \mathscr{F}_{x_1} - \{F_1\}} M_F = M_1$, ya que si $x \in M_1$ $(\mathscr{F}_{x_1} - \{F_1\}) \cap (\mathscr{F}_x - \{F_1\}) \neq \emptyset$. Como M_1 no es numerable se tiene una contradicción.

Además, existe $t_2 \in \{0,1\}$ y existe $M_2 \subset M'_2$, no numerable, tal que $f_x(F_2) = t_2$ para todo $x \in M_2$.

Así, por inducción existen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ subconjuntos de X y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ subconjuntos no numerables de X con $M_n \subset M_{n-1} \subset \ldots \subset M_1$ y existen $t_1, \ldots, t_n \in \{0,1\}$ tales que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $F_j \in \mathscr{F}_x$ y $f_x(F_j) = t_j$ para todo $x \in M_j$.

Se considera $G = \{ f \in B(X) | f(F_1) = t_1, \ldots, f(F_n) = t_n \}$. Para todo $x \in M_n$, se tiene que $\mathscr{F}_x = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ y $B(f_x, \mathscr{F}_x) = G$. Lo cual es un absurdo.

Observación II.2.14

La construcción del ejemplo anterior, proporciona el siguiente resultado:

"Dado un cardinal c con $c > \aleph_0$, existe un espacio T_4, (X,T) de cardinal 2^{2^c} y existe una familia discreta , $\{ C_i | i \in I \}$, de subconjuntos cerrados no vacios de (X,T) con $card(I) = c$, tal que no existe una familia de abiertos de (X,T), $\{ G_i | i \in I \}$,cumpliendo que $G_i \cap G_j = \emptyset$ para todo $i,j \in I$ con $i \neq j$ y $C_i \subset G_i$ para todo $i \in I$."

Proposición II.2.15

Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un E.E.A.

b) Para todo $i\in I$, (X_i,T_i) es un E.E.A y $\mathrm{card}(I)\leq\aleph_0$.

<u>Demostración</u>:

a)$\Longrightarrow$b)

Para todo $i\in I$, $X_i\times\{i\}\in\sum_{i\in I}T_i$. Por tanto $(X_i\times\{i\},\sum_{i\in I}T_i|_{X_i\times\{i\}})$ es un E.E.A (II.2.5). Además, como la inyección $j_i:X_i\longrightarrow\sum_{i\in I}X_j$ definida por $x_i\longmapsto j_i(x_i)=(x_i,i)$ es inyectiva, abierta y cerrada de (X_i,T_i) en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ resulta que j_i es un homeomorfismo de (X_i,T_i) en $(X_i\times\{i\},\sum_{i\in I}T_i|_{X_i\times\{i\}})$. Así pues (X_i,T_i) es un espacio topológico E.E.A para todo $i\in I$ (II.2.6).

Supongamos que $\mathrm{card}(I)>\aleph_0$. Por la observación anterior, existe un espacio normal (X,T) y existe una familia discreta, $\{C_i|\,i\in I\}$, de subespacios cerrados no vacios de (X,T) , tal que no existe una familia de abiertos de (X,T) ,$\{G_i|\,i\in I\}$, cumpliendo que $G_i\cap G_j=\emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i\neq j$ y $C_i\subset G_i$ para todo $i\in I$.

Se considera el cerrado de (X,T), $C=\bigcup_{i\in I}C_i$, y una aplicación, $\longrightarrow\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$,tal que $g|_{C_i}$ es constante y $g(C_i)\in X_i\times\{i\},\forall i\in I$.Por(V.5.18) de (18) se tiene que g es una aplicación continua de $(C,T|_C)$ en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$. Como $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un E,E.A, existe un abierto G en (X,T) con $C\subset G$ y existe una aplicación continua, $\bar{g}$, de $(G,T|_G)$ en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ tal que $\bar{g}|_C=g$. Se considera la familia de abiertos de (X,T), $\{A_i=(\bar{g})^{-1}(X_i\times\{i\})|\,i\in I\}$. Se tiene que $C_i\subset A_i$

para todo $i\in I$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i \neq j$. Lo cual es una contradicción. Así, $\mathrm{card}(I) \leq \aleph_0$.

b)$\Longrightarrow$a)

Sean (X,T) un espacio normal, C un cerrado de (X,T) y g una aplicación continua de $(C,T|_C)$ en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$. Se considera $J=\{i\in I \mid g(C)\cap(X_i\times\{i\}) \neq \emptyset\}$. Entonces, por II.2.11 se tiene que $\{C_i = g^{-1}(X_i\times\{i\}) \mid i\in J\}$ es una familia discreta y numerable de cerrados de (X,T) . Además $C = \bigcup_{i\in J} C_i$. Por II.2.12, existe una familia de abiertos de (X,T), $\{G_i \mid i\in I\}$, tal que $C_i \subset G_i$ para todo $i\in J$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i \neq j$.

Como para todo $i\in I$, (X_i,T_i) es un E.E.A., existe $A_i \in T$ con $C_i \subset A_i \subset G_i$ y existe , $\bar{g}_i$, aplicación continua de $(A_i,T|_{A_i})$ en (X_i,T_i) tal que $\bar{g}_i|_{C_i} = g|_{C_i}$. Se considera el abierto $A = \bigcup_{i\in J} A_i$ y la aplicación $\bar{g}: A \longrightarrow \sum_{i\in I} X_i$ definida por $\bar{g}|_{A_i} = \bar{g}_i$ para todo $i\in J$. Se tiene que $\bar{g}$ es aplicación continua, que $C\subset A$ y que $\bar{g}|_C = g$. Así, $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es un E.E.A.

§.3 UN RESULTADO SOBRE PARTICIONES CONTINUAS DE LA UNIDAD

En este párrafo, se obtiene un resultado sobre particiones continuas de la unidad a partir del cual se obtiene una nueva caracterización de los espacios normales.

Definición II.3.1

Sean (X,T) un espacio topológico y $\mathcal{U}=\{U_i \mid i\in I\}$ un recubrimiento abierto de (X,T). Se llama contracción de $\mathcal{U}$ a todo recubrimiento abierto de (X,T), $\mathcal{V}=\{V_i \mid i\in I\}$, tal que $\overline{V}_i\subset U_i$ para todo $i\in I$.

Definición II.3.2

Sean (X,T) un espacio topológico y f una aplicación de X en R. Se llama:

a) Soporte abierto de f al conjunto $\{x\in X \mid f(x)\neq 0\}$ y se designa por $Sop_A(f)$.

b) Soporte de f al conjunto $\overline{Sop_A(f)}$ y se designa por $Sop(f)$.

Definición II.3.3

Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de números reales (la correspondencia que asigna a cada $i\in I$ el elemento x_i, es una aplicación). Se dice que $\{x_i\}_{i\in I}$ es sumable, si existe $s\in R$ tal que para todo V^s, existe $F_0\subset I$, finito, tal que para todo $F=\{i_1,..,i_n\}$ con $F\supset F_0$, se verifica que $x_{i_1}+\dots+x_{i_n}\in V^s$. A s se le llama suma de la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ y se escribirá $s=\sum_{i\in I} x_i$.

Proposición II.3.4

Sean (X,T) un espacio topológico y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones de X en R. Entonces se tiene:

a) Si $\{Sop(f_i) | i\in I\}$ es puntualmente finita, para todo $x\in X$, $\{f_i(x) | i\in I\}$ es sumable. (Todos los elementos de $\{f_i(x) | i\in I\}$ son nulos excepto un número finito de ellos).

b) Si $\{Sop(f_i) | i\in I\}$ es localmente finita y f_i es continua de (X,T) en (R,T_u) para todo $i\in I$, la aplicación $\sum_{i\in I} f_i$ de X en R, definida por $(\sum_{i\in I} f_i)(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)$ es continua.

Definición II.3.5(8)

Dado un espacio topológico, (X,T), se llama partición continua de la unidad en (X,T) a toda familia $\{f_i\}_{i\in I}$; donde f_i es una aplicación de X en R para todo $i\in I$; tal que:

1. f_i es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u), para todo $i\in I$.

2. $f_i(x) \geq 0$ para todo $x\in X$ y todo $i\in I$.

3. Para todo $x\in X$, $\{f_i(x)\}_{i\in I}$, es sumable (según II.3.3) y $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$.

Una partición continua de la unidad, $\{f_i\}_{i\in I}$, se dice localmente finita si $\{Sop(f_i)\}_{i\in I}$ es una familia localmente finita.

(Observese que una familia, $\{D_j\}_{j\in J}$, de subconjuntos de un espacio topológico, es localmente finita, si y solamente si, $\{\bar{D}_j\}_{j\in J}$ es localmente finita).

observación II.3.6

Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una partición continua de la unidad en (X,T), se verifica que $\{Sop_A(f_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de (X,T).

Definición II.3.7

Sean (X,T) un espacio topológico, $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones de X en R y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X.

Entonces:

a) Se dice que $\{f_i\}_{i\in I}$ está subordinada a $\{M_i\}_{i\in I}$ si $Sop(f_i)\subset M_i$ para todo $i\in I$.

b) Se dice que $\{f_i\}_{i\in I}$ está debilmente subordinada a $\{M_i\}_{i\in I}$ si $Sop_A(f_i)\subset M_i$ para todo $i\in I$.

Lema II.3.8(8)

Sean (X,T) un espacio topológico y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones de X en R tal que:

1. Para todo $x\in X$, $\{f_i(x)\}_{i\in I}$ es sumable y $\sum_{i\in I} f_i$ es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u).

2. Para todo $i\in I$, f_i es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u).

3. $f_i(x) \geq 0$ para todo $x\in X$ y todo $i\in I$.

Entonces se tiene:

a) Para todo $x\in X$ con $\sum_{i\in I} f_i(x) \neq 0$, existe, V^x, existe un subconjunto finito de I, F_0 y existe $\varepsilon>0$ tales que para todo $y\in V^x$ y para todo $i\in I-F_0$, $f_i(y)<\varepsilon$ y supremo$\{f_i(y)|\, i\in F_0\}$ = supremo$\{f_i(y)|\, i\in I\} \geq 2\varepsilon$ para todo $y\in V^x$.

b) La aplicación S=supremo$\{f_i\}_{i\in I}:X\longrightarrow R$ es continua ($S(x)$ = (supremo$\{f_i\}_{i\in I}$)(x) = supremo$\{f_i(x)|\, i\in I\}$).

Demostración:

a) Sea $x\in X$ tal que $\sum_{i\in I} f_i(x) = r\in R^+$. Entonces existe $i_0\in I$ tal que $f_{i_0}(x)>0$. Sea $\varepsilon=\dfrac{f_{i_0}(x)}{3}$. Por la continuidad de f_{i_0} en x, existe V_1^x, tal que $f_{i_0}(y) \geq 2\varepsilon$ para todo $y\in V_1^x$.

Teniendo en cuenta que $\sum_{i\in I} f_i(x) = r$, existe $F_0\subset I$, finito, tal que para todo $F \subset I$, finito , con $F_0 \subset F$ se verifica que $\sum_{i \in F} f_i(x) > r - \frac{\varepsilon}{2}$. Por la continuidad de las aplicaciones f_i, para todo $i \in I$, existe V_2^x tal que para todo $y \in V_2^x$, $\sum_{i \in F_0} f_i(y) > r - \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\sum_{i \in I} f_i$ es continua en x, existe V_3^x tal que $\sum_{i \in I} f_i(y) < r + \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, para todo $i \in I - F_0$ y todo $y \in V_2^x \cap V_3^x$, se tiene que $f_i(y) < \varepsilon$.

Sea $V^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x$. Como para todo $i \in I - F_0$ y todo $y \in V^x$, $f_i(y) < \varepsilon$ y $f_{i_0}(y) \geq 2\varepsilon$, se tiene que supremo $\{ f_i(y) \mid i \in F_0 \}$ = supremo$\{ f_i(y) \mid i \in I \} \geq 2\varepsilon$ para todo $y \in V^x$.

b) Si $x \in X$ es tal que $\sum_{i \in I} f_i(x) \neq 0$, la continuidad de S es consecuencia inmediata de a).

Supongamos que en $x \in X$, $\sum_{i \in I} f_i(x) = 0$. Entonces, para todo $\delta \in R^+$, por la continuidad de $\sum_{i \in I} f_i$, existe V^x tal que $\sum_{i \in I} f_i(y) \in [0, \delta)$ para todo $y \in V^x$. Como $0 \leq S(y) \leq \sum_{i \in I} f_i(y)$ para todo $y \in X$, se tiene que $S(y) \in [0, \delta)$ para todo $y \in V^x$, lo cual prueba la continuidad de S en x.

A continuación se expone un ejemplo en el cual las aplicaciones $\sum_{i \in I} f_i$ y supremo$\{ f_i \mid i \in I \}$ no son continuas.

<u>Ejemplo II.3.9</u>

Sean el espacio topológico ($[0,1]$, $T_u \big|_{[0,1]}$) y la familia $\{f_n\}_{n \in N}$, de aplicaciones de $[0,1]$ en R definidas por $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Se tiene que:

1. Para todo $x\in[0,1]$, $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ es sumable y

$$\sum_{n\in N} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x^2} & , \text{ si } x\in(0,1) \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

(Por tanto, $\sum_{n\in N} f_n$ no es continua).

2. Para todo $n\in N$, f_n es una aplicación continua de $([0,1], T_u|[0,1])$ en (R,T_u).

3. $f_n(x) \geq 0$, para todo $x\in[0,1]$ y todo $n\in N$.

4. La aplicación $S=\text{supremo}\{f_n\}_{n\in N}: [0,1] \longrightarrow R$ no es continua . En efecto:

Se tiene que $\text{lím}\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} = 0$, $S(0) = 0$, $S(\frac{1}{n}) \geq f_n(\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{n})^n$ y $\text{Lím}\left\{(1-\frac{1}{n})^n\right\}_{n\in N} = e^{-1} > 0$, por tanto, S no es continua en 0.

Proposición II.3.10

Sean (X,T) un espacio topológico y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones de X en R tal que:

1. Para todo $i\in I$, f_i es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u).

2. $f_i(x) \geq 0$ para todo $x\in X$ y todo $i\in I$.

3. Para todo $x\in X$, $\{f_i(x)\}_{i\in I}$ es sumable con suma mayor que cero y $\sum_{i\in I} f_i$ es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u).

Entonces, existe una partición continua de la unidad en (X,T), $\{g_i\}_{i\in I}$, la cual es localmente finita y está subordinada a $\{Sop_A(f_i) \mid i\in I\}$.

Demostración:

Sea $S=\text{supremo}\{f_i\}_{i\in I}$. Para todo $i\in I$, se considera la aplicación h_i=máximo $\left\{ c_o, f_i - \frac{1}{2}S \right\}$ donde c_o es la aplicación constante de valor 0. Se verifica que :

I. Para todo $i \in I$, h_i es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u), por el Lema II.3.8.

II. $h_i(x) \geq 0$ para todo $i \in I$ y todo $x \in X$.

III. $\left\{ Sop(h_i) \right\}_{i \in I}$ es una familia localmente finita.En efecto:

Por el Lema II.3.8(a), para todo $x \in X$ existe, V^x, entorno abierto de x, existe un subconjunto finito de I, F_o y existe $\varepsilon > 0$ tales que para todo $y \in V^x$ y para todo $i \in I - F_o$, $f_i(y) < \varepsilon$ y supremo$\left\{ f_i(y) \mid i \in F_o \right\}$ = supremo$\left\{ f_i(y) \mid i \in I \right\} \geq 2\varepsilon$ para todo $y \in V^x$. Así, $h_i(y) = o$ para todo $y \in V^x$ y todo $i \in I - F_o$. Por tanto $Sop(h_i) \cap V^x = \emptyset$ para todo $i \in I - F_o$, lo que prueba que $\left\{ Sop(h_i) \right\}_{i \in I}$ es localmente finita.

IV. Para todo $i \in I$, $Sop(h_i) \subset Sop_A(f_i)$. En efecto:

Como $\sum_{i \in I} f_i(y) > 0$, para todo $y \in X$, se tiene que $S(y) > 0$ para todo $y \in X$. Por tanto, por la continuidad de S y f_i, para todo $z \notin Sop_A(f_i)$ existe V^z tal que para todo $y \in V^z$, $f_i(y) - \frac{1}{2} S(y) < 0$ ($f_i(z) - \frac{1}{2}S(z) = -\frac{1}{2}S(z) < 0$) . Así, para todo $y \in V^z$, $h_i(y) = 0$, lo cual prueba que $Sop(h_i) \subset Sop_A(f_i)$.

V. Por II.3.4(b), la aplicación $h = \sum_{i \in I} h_i$ es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u). Además, para todo $x \in X$ (con la notacion utilizada en II.3.8), existe $i_o \in F_o$ tal que $S(x) = f_{i_o}(x) > 0$. Así, $h_{i_o}(x) = \frac{1}{2} f_{i_o}(x) > 0$, lo cual implica que $h(x) > 0$ para todo $x \in X$.

Para completar la demostración de la proposición, basta tomar $g_i = \frac{h_i}{h}$ para todo $i \in I$. ($Sop(g_i) = Sop(h_i)$ para todo $i \in I$).

<u>Proposición II.3.11</u>(8)

Sea (X,T) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es normal.

b) Para todo recubrimiento abierto y localmente finito, $\mathcal{U}=\{U_i \mid i \in I\}$, de (X,T) existe una partición continua de la unidad, $\{f_i\}_{i \in I}$, subordinada a $\mathcal{U}$.

<u>Proposición II.3.12</u>

Sea (X,T) un espacio topológico .Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es normal.

b) Para todo recubrimiento abierto y localmente finito de (X,T), $\mathcal{U}=\{U_i \mid i \in I\}$, existe, $\{f_i\}_{i \in I}$, familia de aplicaciones de X en R tales que:

1. f_i es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u) para todo $i \in I$.

2. $f_i(x) \geq 0$, para todo $x \in X$ y todo $i \in I$.

3. Para todo $x \in X$, $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ es sumable con suma mayor que 0 y $\sum_{i \in I} f_i$ es una aplicación continua de (X,T) en (R,T_u).

4. $Sop_A f_i \subset U_i$ para todo $i \in I$.

<u>Demostración:</u>

a) $\Longrightarrow$ b)

Es consecuencia de II.3.11.

b) $\Longrightarrow$ a)

Por la proposición II.3.10, existe una partición continua de la unidad en (X,T), $\{g_i\}_{i \in I}$, la cual es localmente finita y está subordinada a $\{Sop_A(f_i) | i\in I\}$. Así, $\{g_i\}_{i\in I}$ es una partición continua de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ y por la proposición II.3.11, (X,T) es normal.

<u>Observación II.3.13</u>

Esta caracterización de espacios normales, permite dar una nueva demostración del resultado:

"Todo espacio seudometrizable es normal".

<u>Demostración</u>:

Sea $\mathcal{U}=\{U_i | i\in I\}$ un recubrimiento abierto localmente finito de (X,T_d) donde d es la seudométrica en X. Entonces, la familia de aplicaciones $\{D(\cdot, X-U_i)\}_{i\in I}$ de X en R, definida por

$D(\cdot,X-U_i)(x) = D(x,X-U_i) = \text{ínfimo}\{d(x,z) | z\in X-U_i\}$ para cada $i\in I$, (si $U_i = X$, se toma $D(x,\emptyset) = 0$ para todo $x\in X$), cumple:

1. Para todo $i\in I$, $D(\cdot,X-U_i)$ es una aplicación continua de (X,T_d) en (R,T_u).

2. $D(\cdot,X-U_i)(x) = D(x,X-U_i) \geq 0$ para todo $i\in I$ y todo $x\in X$.

3. $Sop_A(D(\cdot,X-U_i)) = U_i$ para todo $i\in I$.

4. Como $\mathcal{U}$ es localmente finita, $\{Sop(D(\cdot,X-U_i))\}_{i\in I}$ es localmente finita. Por tanto, por II.3.4(b), $\sum_{i\in I} D(\cdot,X-U_i)$ es una aplicación continua de (X,T_d) en (R,T_u).

Además $\sum_{i\in I} D(\cdot,X-U_i)(x) > 0$ para todo $x\in X$.

Luego , por la proposición II.3.12, (X,T_d) es normal.

§4. SOBRE UNA CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS COLECTIVAMENTE NORMALES

Definición II.4.1

Un espacio topológico (X,T), se dice colectivamente normal si para toda familia discreta de cerrados de (X,T) ,$\{F_i\}_{i\in I}$, existe una familia de abiertos,$\{G_i\}_{i\in I}$, tal que $F_i\subset G_i$ para todo $i\in I$ y $G_i\cap G_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i\neq j$.

Proposición II.4.2 (1)

Sea (X,T) un espacio topológico . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es colectivamente normal.

b) Para toda familia discreta de cerrados de (X,T),$\{F_i\}_{i\in I}$ existe una familia discreta de abiertos ,$\{G_i\}_{i\in I}$, tales que $F_i\subset G_i$,para todo $i\in I$.

c) Para toda familia discreta de cerrados de (X,T),$\{F_i\}_{i\in I}$ existe una familia de abiertos,$\{A_i\}_{i\in I}$, tal que $\{\bar{A}_i\}_{i\in I}$ es discreta y $F_i\subset A_i$, para todo $i\in I$.

Ejemplo II.4.3

Sea el espacio topológico (X,T) donde $X =\{r\in R|\ r \geq 0\}$ y $T = \{\emptyset , X\}\cup\{[x,\rightarrow),(x,\rightarrow)|\ x\in X\}$. Este espacio es colectivamente normal y T_0 pero no es T_1.

Esto sugiere la siguiente definición:

Definición II.4.4

Un espacio topológico, se dice que es T_4^* si es colectivamente normal y T_1.

Observación II.4.5

El axioma T_4^* implica el axioma T_4, pero en general, el axioma T_4 no implica el axioma T_4^*, como pone de manifiesto el ejemplo de BING (II.2.13).

Proposición II.4.6

Sean (X,T) un espacio topológico y C un cerrado de (X,T). Entonces:

a) Si (X,T) es colectivamente normal, $(C,T|_C)$ es colectivamente normal.

b) Si (X,T) es T_4^*, $(C,T|_C)$ es T_4^*.

Definición II.4.7

Sea (X,T) un espacio topológico y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia F_σ-discreta en (X,T) si :

1. Para todo $i\in I$, M_i es F_σ .

2. Para todo $i\in I$, $M_i \cap (\overline{\bigcup_{j\neq i} M_j}) = \emptyset$.

3. Para todo $i\in I$ existe $\{F_i^n\}_{n\in N}$, familia de cerrados de (X,T) con $F_i^n \subset F_i^{n+1}$, para todo $n\in N$ y $M_i = \bigcup_{n\in N} F_i^n$, tal que para todo $n\in N$, $\{F_i^n\}_{i\in I}$ es una familia discreta en (X,T).

Observación II.4.8

1. Toda familia discreta de cerrados de (X,T) es F_σ-discreta y existen familias F_σ-discretas que no son familias discretas de cerrrados.

Basta considerar un conjunto F_σ no cerrado .

2. Existen familias F_σ-discretas tales que la familia de las adherencias de sus elementos no es discreta.

Basta considerar en (R,T_u) los intervalos $\{[0,1),(1,2]\}$.

Proposición II.4.9

Sea (X,T) un espacio topológico .Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es colectivamente normal.

b) Para toda familia F_G -discreta ,$\{M_i\}_{i\in I}$, existe una familia de abiertos de (X,T),$\{A_i\}_{i\in I}$, tal que $M_i\subset A_i$ para todo $i\in I$ y $A_i\cap A_j = \emptyset$, para todo $i,j\in I$ con $i\neq j$.

Demostración:

b)$\Longrightarrow$a)

Es consecuencia de la observación II.4.8.

a)$\Longrightarrow$b)

Para todo $i\in I$, se tiene que $M_i\subset X - \overline{\bigcup_{i\neq j} M_j}$. Así, para todo $n\in N$ y todo $i\in I$ existe $G_i^n\in T$ tal que $F_i^n\subset G_i^n\subset \overline{G_i^n}\subset X - \overline{\bigcup_{j\neq i} M_j}$ ((X,T) es normal).

Como para todo $n\in N$, $\{F_i^n\}_{i\in I}$ es una familia discreta de cerrados de (X,T) y (X,T) es colectivamente normal,por II.4.2(ι), existe $\{H_i^n\}_{i\in I}$ familia de abiertos de (X,T) tal que $\{\overline{H_i^n}\}_{i\in I}$ es una familia discreta en (X,T) y $F_i^n \subset H_i^n$ para todo $i\in I$.

Para todo $i\in I$ y todo $n\in N$, se considera el abierto de (X,T) $V_i^n = G_i^n\cap H_i^n$. Se tiene que $V_i^n = G_i^n\cap H_i^n\supset F_i^n$ y $\overline{V_i^n}\cap M_j = \emptyset$ para todo $j\in I -\{i\}$.

Sea $U_i^n = V_i^n - \bigcup_{p=1}^{n} (\bigcup_{j\in I-\{i\}} \overline{V_j^p})$ para todo $i\in I$ y todo $n\in N$.

Se verifica que:

1. Para cada $i\in I$ y cada $n\in N$, U_i^n es abierto, ya que $\{\overline{V_j^p} \mid j\in I-\{i\}\}$ es una familia discreta de cerrados de (X,T) para todo $p\in\{1,2,....,n\}$.

2. Para todo $i \in I$, el abierto $A_i = \bigcup_{n \in N} U_i^n$ contiene a M_i, ya que $\bigcup_{n \in N} V_i^n \supset \bigcup_{n \in N} F_i^n = M_i$ y $\overline{V_j^p} \cap M_i = \emptyset$ para todo $j \in I - \{i\}$ y todo $p \in N$.

3. Para todo $i,j \in I$ con $i \neq j$, se verifica que $A_i \cap A_j = \emptyset$, ya que $U_i^n \cap U_j^m = \emptyset$ para todo $n,m \in N$.

El siguiente corolario generaliza la proposición II.4.6.

Corolario II.4.10

Sean (X,T) un espacio topológico y M un subconjunto F_σ de (X,T) .Entonces:

a) Si (X,T) es colectivamente normal, $(M,T|_M)$ es colectivamente normal.

b) Si (X,T) es T_4^* , $(M,T|_M)$ es T_4^* .

Demostración:

a) Sean $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia discreta de cerrados de $(M,T|_M)$. Entonces $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia F_σ -discreta en (X,T). En efecto:

1.Como M es F_σ , $M = \bigcup_{n \in N} F_n$ con $F_n \subset F_{n+1}$ y F_n cerrado para todo $n \in N$. Así, $C_i = \bigcup_{n \in N} (C_i \cap F_n)$ para todo $i \in I$. Por tanto, C_i es F_σ para todo $i \in I$ ($C_i \cap F_n$ es cerrado en F_n y por tanto en (X,T)).

2. Para todo $i \in I$ $C_i \cap (\overline{\bigcup_{j \neq i} C_j}) = C_i \cap M \cap (\overline{\bigcup_{j \neq i} C_j}) =$

$= C_i \cap (\widetilde{\bigcup_{j \neq i} C_j}) = C_i \cap (\bigcup_{j \neq i} C_j) = \emptyset$.

3. Para todo $i \in I$, $\{F_i^n = C_i \cap F_n\}_{n \in N}$ es una familia de cerrados de (X,T) con $F_i^n \subset F_i^{n+1}$ para todo $n \in N$ y $C_i = \bigcup_{n \in N} F_i^n$.

Además, $\{F_i^n\}_{i\in I}$ es discreta en (X,T) para todo $n\in N$. $(\bigcup_{i\in I} F_i^n \subset F_n \subset M)$.

Así, por II.4.9, existe una familia de abiertos de (X,T), $\{A_i\}_{i\in I}$, tal que $C_i \subset A_i$ para todo $i\in I$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i\neq j$. Por tanto, para demostrar que $(M, T|_M)$ es colectivamente normal, es suficiente considerar la familia de abiertos de $(M,T|_M)$, $\{A_i \cap M\}_{i\in I}$.

b) Es consecuencia de a) y de que el axioma T_1 es hereditario.

<u>Observación II.4.11</u>

A) La demostración de la proposición II.4.9 prueba que:

" Un espacio topológico (X,T) es normal si y solamente si para toda familia F_σ -discreta de (X,T), $\{M_i\}_{i\in I}$,con $card(I) \leq \aleph_0$, se verifica que existe una familia de abiertos de (X,T) , $\{G_i\}_{i\in I}$, tal que $M_i \subset G_i$ para todo $i\in I$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$ para todo $i,j\in I$ con $i \neq j$. "

B) La demostración del corolario II.4.10 prueba que:

a) Si (X,T) es normal y M es un subconjunto F_σ de (X,T). se verifica que $(M,T|_M)$ es normal.

b) Si (X,T) es T_4 y M es un subconjunto F_σ de (X,T) ,se verifica que $(M,T|_M)$ es T_4 .

CAPITILO III

ESPACIOS NUMERABLEMENTE COMPACTOS Y LOCALMENTE NUMERABLEMENTE COMPACTOS

§ I. ESPACIOS NUMERABLEMENTE COMPACTOS

En este párrafo se exponen los resultados más conocidos de los espacios numerablemente compactos y se generalizan algunos de ellos.

Definición III.1.1

Un espacio topológico, (X,T), se dice que es numerablemente compacto si toda sucesión en X tiene un punto de aglomeración en (X,T).

Proposición III.1.2

Sea (X,T) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es numerablemente compacto.

b) Para toda familia numerable de cerrados de (X,T), $\mathscr{C}=\{C_n \mid n\in N\}$ con $\bigcap_{n\in N} C_n = \emptyset$, existe $F\subset N$, finito, tal que $\bigcap_{n\in F} C_n = \emptyset$.

c) Para toda familia numerable de cerrados de (X,T) $\mathscr{C}=\{C_n \mid n\in N\}$ tal que para todo $F\subset N$, finito, $\bigcap_{n\in F} C_n \neq \emptyset$, se verifica que $\bigcap_{n\in N} C_n \neq \emptyset$.

d) Para toda familia numerable de cerrados no vacios de (X,T), $\mathscr{C}=\{C_n \mid n\in N\}$, tal que $C_{n+1}\subset C_n$ para todo $n\in N$ se verifica que $\bigcap_{n\in N} C_n \neq \emptyset$.

e) Para toda familia numerable de abiertos de (X,T), $\mathscr{U}=\{U_n \mid n\in N\}$, tal que para todo $F \subset N$, finito, $\bigcup_{n\in F} U_n \neq X$, se verifica que

$\bigcup_{n\in N} U_n \neq X$.

f) Para toda familia numerable de abiertos de (X,T), $\mathcal{U}=\{U_n \mid n\in N\}$, tal que $\bigcup_{n\in N} U_n = X$, se tiene que existe $F\subset N$, finito, con $\bigcup_{n\in F} U_n = X$.

g) Para todo filtro, $\mathcal{F}$, en X de rango menor o igual que $\aleph_0$, se verifica que $Agl_T\mathcal{F} \neq \emptyset$.

h) Para todo filtro, $\mathcal{F}$, en X de rango menor o igual que $\aleph_0$, existe un filtro, $\mathcal{F}'$, más fino que $\mathcal{F}$ tal que $Lim_T\mathcal{F}' \neq \emptyset$.

i) Toda sucesión en X tiene una sured convergente en (X,T).

Observación III.1.3

a) Si (X,T) es compacto, (X,T) es numerablemente compacto.

b) Si (X,T) es numerablemente compacto y de Lindelöf, (X,T) es compacto.

Proposición III.1.4

Sea (X,T) un espacio topológico y M un subconjunto de X. Entonces, M es numerablemente compacto si y solamente si para toda familia numerable de abiertos de (X,T), $\mathcal{U}=\{U_n \mid n\in N\}$, tal que $M\subset \bigcup_{n\in N} U_n$, se verifica que existe $F\subset N$, finito, con $M\subset \bigcup_{n\in F} U_n$.

Proposición III.1.5

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto y C un subconjunto cerrado. Entonces, C es numerablemente compacto.

bservación III.1.6

Existen ejemplos de subconjuntos numerablemente compactos e un espacio topológico T_2, que no son cerrados.

Pro osición III.1.7

Sea (X,T) un espacio topológico T_2 cumpliendo el I.A.N. Entonces, todo subconjunto numerablemente compacto de (X,T) es cerrado en (X,T).

Proposición III.1.8

Sea (X,T) un espacio topológico T_2 cumpliendo el I.A.N. y $\{K_i \mid i \in I\}$ una familia de subconjuntos numerablemente compactos de (X,T). Entonces, $\bigcap_{i\in I} K_i$ es numerablemente compacto.

Proposición III.1.9

Sea (X,T) un espacio topológico y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia finita de subconjuntos numerablemente compactos de (X,T). Entonces, $\bigcup_{i\in I} M_i$ es numerablemente compacto.

(En general la unión de una familia numerable de subconjuntos numerablemente compactos, no es numerablemente compacto).

Pro osición III.1.10

Sea (X,T) un espacio topológico y M un subconjunto numerablemente compacto. Entonces:

a) Si (X,T) es T_2 y cumple el I.A.N., se verifica que $\bar{M}$ es numerablemente compacto.

b) Si (X,T) es regular y cumple el I.A.N., se verifica que 1 es numerablemente compacto.

roposición III.1.11

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, f una aplicación conti e (X,T) en (X',T') y M un subconjunto numerablemente compacto e (X,T). Entonces $f(M)$ es numerablemente compacto en (X',T').

(Por tanto el axioma numerablemente compacto es una propiedad topológica).

Proposición III.1.12

Sean (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, (X',T') un espacio T_2 cumpliendo el I. A. N. y f una aplicación continua de (X,T) en (X',T'). Entonces, f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T').

Corolario III.1.13

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, (X',T') un espacio T_2 cumpliendo el I.A.N. y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación biyectiva. Entonces, f es un homeomorfismo de (X,T) en (X',T') si y solamente si f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

Proposición III.1.14

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y f una aplicación propia de (X,T) en (X',T'). Entonces, para todo subconjunto numerablemente compacto, K', de (X',T') se verifica que $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto en (X,T).

Proposición III.1.15

a) Si $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ es una familia no vacia de espacios topológicos no vacios tal que $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es numerablemente compacto, se verifica que (X_i,T_i) es numerablemente compacto para todo $i\in I$.

b) Si (X,T) y (X',T') son numerablemente compactos y (X,T) cumple el I.A.N., se verifica que $(X,T)\times(X',T')$ es numerablemente compacto.

c) Si (X,T) es compacto y (X',T') es numerablemente compacto, se verifica que $(X,T)\times(X',T')$ es numerablemente compacto.

d) Si $\{(X_n,T_n)\}_{n\in N}$ es una familia de espacios numerablemente compactos que cumplen el I.A.N., se verifica que $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ es numerablemente compacto.

Proposición III.1.16

Sea (X,T) un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Entonces, si existe un subconjunto, M, numerablemente compacto en (X,T) tal que $R[M]=X$ $(R[M]=\{x\in X \mid \exists y\in M$ con $(x,y)\in R\})$, se verifica que $(X/R,T/R)$ es numerablemente compacto. (Por tanto, el cociente de un espacio numerablemente compacto, es numerablemente compacto).

Proposición III.1.17

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es numerablemente compacto.

b) I es un conjunto finito y (X_i,T_i) es numerablemente compacto para todo $i\in I$.

Corolario III.1.18

Sea X' un conjunto, $\mathcal{F}=\{((X_i,T_i),f_i) \mid i\in I\}$ una familia no vacia tal que I es finito y f_i es una aplicación de X_i en X' para todo $i\in I$. Entonces, si (X_i,T_i) es numerablemente compacto para todo $i\in I$ y para todo $x'\in X'$ existe $x_i\in X_i$ tal que $f_i(x_i)=x'$ se verifica que $(X',T^{\mathcal{F}})$ es un espacio topológico numerablemente compacto.

Proposición III.1.19

Sea (X,T) un espacio topológico T_1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es numerablemente compacto.

b) Si $M\subset X$ es cerrado y $T|_M$ es la topología discreta, se verifica que M es finito.

c) Todo subconjunto cerrado y numerable de (X,T), es compacto en (X,T).

Proposición III.1.20

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, T_2 y cumpliendo el I.A.N. Entonces, (X,T) es regular. (Existen espacios numerablemente compactos y T_2 que no son regulares. Vease Ejem. VIII.1.112 de (23). Más adelante, en V.2.16, utilizando las técnicas de las numerable compactificaciones, se construira otro ejemplo).

A continuación se generalizan algunas proposiciones anteriores

La proposición III.1.7, se puede expresar de la siguiente forma:

"Todo espacio topológico T_2 cumpliendo el I.A.N. es un NKC-espacio".

Teniendo en cuenta los resultados establecidos en el párrafo 1 del Capítulo II se tiene:

Proposición III.1.21 (17)

Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces (X,T) es un NKC-espacio.

El siguiente ejemplo prueba la existencia de US-espacios que son NKC-espacios y que no son secuenciales.

Ejemplo III.1.22 (17)

Sea el espacio topológico $(X,T) = (Q, T_u|_Q) \times (Q/Z, T_u|_{Q/Z})$. Se tiene:

a) (X,T) es T_2 y por tanto (X,T) es US-espacio.

b) (X,T) es C-espacio, por ser numerable.

c) Todo subconjunto numerablemente compacto de (X,T) es compacto (por ser numerable) y por tanto es cerrado.

d) (X,T) no es secuencial.

Proposición III.1.23 (comparese con III.1.8)

Sean (X,T) un US-espacio secuencial y $\{K_i \mid i\in I\}$ una familia de subconjuntos numerablemente compactos de (X,T). Entonces $\bigcap_{i\in I} K_i$ es numerablemente compacto.

Demostración:

Por la proposición anterior, K_i es un cerrado en (X,T) para todo $i\in I$. Por tanto $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ es un cerrado en (X,T) y así K es cerrado en el espacio numerablemente compacto $(K_{i_o}, T|_{K_{i_o}})$, donde $i_o\in I$. Entonces K es numerablemente compacto en $(K_{i_o}, T|_{K_{i_o}})$ y por tanto en (X,T).

Proposición III.1.24 (Comparese con III.1.10)

Sea (X,T) un espacio topológico y M un subconjunto numerablemente compacto. Entonces:

a) Si (X,T) es US-espacio secuencial, se verifica que $\bar{M}$ es numerablemente compacto.

b) Si (X,T) es regular y de Frechet, se verifica que $\bar{M}$ es numerablemente compacto.

Demostracion:

a) Es consecuencia de que M es cerrado.

b) Sea $\{x_n\}_{n\in N} \subset \bar{M} - M$. Para cada $n\in N$, existe $\{y_k^n\}_{k\in N} \subset M$ tal que $x_n \in \mathrm{Lim}_T\{y_k^n\}_{k\in N}$. Como M es numerablente compacto. existe $z_n \in \mathrm{Agl}_T\{y_k^n\}_{k\in N}$ con $z_n \in M$. Se verifica que todo entorno de V^{z_n} contiene a x_n. En efecto:

Si $V^{z_n} \not\ni x_n$, como (X,T) es regular, existe W^{z_n} tal que $z_n \in W^{z_n} \subset \overline{W^{z_n}} \subset V^{z_n}$. Por tanto $X - \overline{W^{z_n}}$ es un entorno abierto de x_n. Como $\{y_k^n\}_{k\in N}$ converge a x_n, existe $k_o \in N$ tal que $y_k^n \in X - \overline{W^{z_n}}$

para todo $k \in N$ con $k_o \leq k$, lo cual contradice que z_n es un punto de aglomeración de $\{y_k^n\}_{k \in N}$.

Se considera la sucesión $\{z_n\}_{n \in N} \subset M$. Como M es numerablemente compacto, existe $z \in M \cap Agl_T \{z_n\}_{n \in N}$. Sea V^z un entorno abierto de z en (X,T) y $p \in N$. Entonces existe $n_p \geq p$ tal que $z_{n_p} \in V^z$. Así, por lo anterior , $x_{n_p} \in V^z$ y por tanto $z \in Agl_{T|_{\bar{M}}} \{x_n\}_{n \in N}$.

Proposición III.1.25(Comparese con III.1.12)

Sean (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, (X',T') un US-espacio secuencial y f una aplicación continua de (X,T) en (X',T') .Entonces f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Sea C un subconjunto cerrado en (X,T). Entonces C es numerablemente compacto y por tanto $f(C)$ es numerablemente compacto. Así, por III.1.21 $f(C)$ es cerrado .

Corolario III.1.26 (Comparese con III.1.13)

Sean (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, (X',T') un US-espacio secuencial y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo de (X,T) en (X',T') si y solamente si f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Es consecuencia de que, en las hipótesis del corolario, si f es continua, entonces f es cerrada.

Proposición III.1.27 (Comparese con III.1.15)

a) Si (X,T) y (X',T') son espacios topológicos numerablemente compactos y (X,T) es subsecuencial, se verifica que $(X,T)\times(X',T')$ es numerablemente compacto.

b) Si $\{(X_n,T_n)\}_{n \in N}$ es una familia de espacios subsecuenciales numerablemente compactos, se verifica que $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ es numerablemente compactos.

Demostración:

a) Sea $\{(x_n,x'_n)\}_{n\in N}$ una sucesión en $X\times X'$. Por hipótesis existe $x_0\in Agl_T\{x_n\}_{n\in N}$. Como (X,T) es subsecuencial, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tal que $x_0\in Lim_T\{x_{n_k}\}_{k\in N}$. Puesto que (X',T') es numerablemente compacto, existe $x'_0\in Agl_{T'}\{x'_{n_k}\}_{k\in N}$. Es evidente que $(x_0,x'_0)\in Agl_{T_p}\{(x_n,x_n)\}_{n\in N}$.

b) Es consecuencia de que todo espacio subsecuencial numerablemente compacto, es secuencialmente compacto, y de que el producto numerable de espacios secuencialmente compactos es un espacio secuencialmente compacto. (IV.1.15(c)).

Proposición III.1.28 (Comparese con III.1.20)

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto tal que para todo $x\in X$ existe una sucesión de entornos cerrados de x, $\{V_n^x\}_{n\in N}$, verificando que $\{x\}=\bigcap_{n\in N}V_n^x$. (Un espacio topológico (X,T) que cumple esta última condición se dice que es un espacio E_1(3). C.E.Aull en (4) construye un ejemplo de un espacio T_2, en el cual todos los puntos son G_δ y no cumplen el axioma E_1). Entonces (X,T) cumple el I.A.N. y por tanto es regular (III.1.20)

Demostración:

Sean $x\in X$ y V^x un entorno abierto de x en (X,T).

Se tiene que $\{x\}=\bigcap_{n\in N}V_n^x$. Se puede suponer que $V_n^x\supset V_{n+1}^x$.

Por tanto $\mathcal{U}=\{V^x\}\cup\{X-V_n^x \mid n\in N\}$ es un recubrimiento abierto y numerable de (X,T) . Así, $X= V^x \cup (X-V^x_{n_1}) \cup \ldots \cup (X - V^x_{n_p})$.

De esta forma $V^x_{n_0}=V^x_{n_1}\cap \ldots \cap V^x_{n_p} \subset V^x$, siendo $n_0=\max\{n_1,\ldots,n_p\}$, lo cual prueba que (X,T) cumple el I.A.N.

Observación III.1.29

a) El axioma E_1 implica el axioma T_2 (y por tanto el axioma US).

b) Todo espacio topológico T_2 y I.A.N. es un espacio topológico E_1.

Ejemplo III.1.30

Sea el espacio topológico $(X,T) = (R/Z,T_u/Z)$. Se tiene que:

a) (X,T) no cumple el I.A.N.

b) (X,T) es E_1. En efecto:

$$Z = \bigcap_{m\in N} V_m, \text{ donde } V_m = \bigcup_{n\in N} \left[n- \frac{1}{m+1} , n + \frac{1}{m+1}\right] .$$

Por tanto $[Z] = \bigcap_{m\in N} p(V_m)$ (p es la proyección natural de R sobre R/Z). En los puntos distintos de $[Z]$ el resultado es trivial ya que (X,T) es T_2 y en cada uno de estos puntos existe una base numerable de entornos.

§ 2. ESPACIOS LOCALMENTE NUMERABLEMENTE COMPACTOS

En este párrafo se estudian los espacios localmente numerablemente compactos y algunas generalizaciones de las aplicaciones propias.

Definición III.2.1

Sea (X,T) un espacio topológico. Se dice que (X,T) es un espacio **localmente** numerablemente compacto, si para todo $x \in X$, **existe** $\mathcal{V}(x)$, **base** de entornos de x en (X,T), tal que para todo $V^x \in \mathcal{V}(x)$, $(V^x, T|_{V^x})$ es numerablemente compacto.

Veamos con un ejemplo que no existe, en general, ninguna relación entre los axiomas localmente numerablemente compacto y numerablemente compacto.

Ejemplo III.2.2

a) Sea X un conjunto infinito y T la topologia discreta en X. Entonces (X,T) es localmente numerablemente compacto y no es numerablemente compacto.

b) Sea $X = Q \cup \{\sqrt{2}\}$ y $T = T_u|_Q \cup \{X\}$. Entonces se tiene que el espacio topológico (X,T) es numerablemente compacto, ya que es compacto, pero no es localmente numerablemente compacto.

c) Todo espacio localmente compacto es localmente numerablemente compacto.

d) Existen espacios localmente numerablemente compactos que no son localmente compactos; por ejemplo $([a,\Omega), T|_{[a,\Omega)})^{\mathbb{N}}$ (Vease III.2.13)

Proposición III.2.3

Sea (X,T) un espacio topológico regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es localmente numerablemente compacto.

b) Para todo $x\in X$, existe $V^x \in \mathcal{B}(x)$, numerablemente compacto en (X,T)($\mathcal{B}(x)$ sistema de entornos de x en (X,T)) .

c) Para todo $x\in X$, existe $U^x\in T$ tal que $\overline{U^x}$ es numerablemente compacto.

Demostración:

a)$\Longrightarrow$b)

Es evidente.

b)$\Longrightarrow$c)

Sea $x\in X$. Por hipótesis, existe V^x numerablemente compacto en (X,T). Como (X,T) es regular, existe $U^x\in T$ tal que $\overline{U^x}\subset V^x$. Así, por III.1.5 , $\overline{U^x}$ es numerablemente compacto.

c)$\Longrightarrow$a)

Sea $x\in X$ y V^x un entorno de x. Por hipótesis existe $U^x\in T$ tal que $\overline{U^x}$ es numerablemente compacto.Como (X,T) es regular, existe W^x, con $\overline{W^x}\subset V^x\cap U^x\subset \overline{U^x}$. Como $\overline{W^x}$ es un cerrado contenido en $\overline{U^x}$ numerablemente compacto, $\overline{W^x}$ es numerablemente compacto. Por tanto, (X,T) es localmente numerablemente compacto.

Corolario III.2.4

Todo espacio numerablemente compacto y regular, es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.5

Sea (X,T) un espacio topológico E_1 tal que para todo $x\in X$ existe $V^x\in T$ verificando que $\overline{V^x}$ es numerablemente compacto. Entonces (X,T) es localmente numerablemente compacto.

Demostración:

Como (X,T) es E_1 y este axioma es hereditario, se tiene por III.1.28 que $(\overline{V^x},T|_{\overline{V^x}})$ es regular. Por tanto (X,T) es regular. Así, por III.2.3, (X,T) es localmente numerablemente compacto.

Corolario III.2.6

Sea (X,T) un espacio topológico E_1 y numerablemente compacto. Entonces (X,T) es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.7

Sea (X,T) un espacio secuencial y E_1 (En particular un espacio T_2 y I.A.N. III.1.29) .Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es localmente numerablemente compacto.

b) Para todo $x\in X$ existe V^x numerablemente compacto.

c) Para todo $x\in X$ existe $U^x\in T$ tal que $\overline{U^x}$ es numerablemente compacto.

Demostración:

a)$\Longrightarrow$b)

Es trivial.

b)$\Longrightarrow$c)

Para todo $x\in X$ existe V^xnumerablemente compacto. Por III.1.29(a), (X,T) es un US-espacio. Así por III.1.21 V^x es cerrado. Por tanto, si $U^x\in T$ es tal que $U^x\subset V^x$, se verifica que $\overline{U^x}\subset\overline{V^x}=V^x$ y por tanto $\overline{U^x}$ es numerablemente compacto.

c)$\Longrightarrow$a)

Es consecuencia de III.2.5.

(Observese que el espacio topológico de III.1.30 es E_1 y secuencial y no cumple el I.A.N.)

Definición III.2.8.

Sea (X,T) un espacio topológico y $M\subset X$. Se dice que M es un subconjunto localmente numerablemente compacto de (X,T) si $(M,T|_M)$ es un espacio localmente numerablemente compacto.

Veamos con un ejemplo que el axioma localmente numerablemente compacto no es una propiedad hereditaria.

Ejemplo III.2.9

(R,T_u) es localmente numerablemente compacto y $(Q,T_u|_Q)$ no es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.10

Sea (X,T) un espacio topológico localmente numerablemente compacto. Entonces se tiene:

a) Todo $G\in T$ es localmente numerablemente compacto en (X,T).

b) Todo cerrado, C, es localmente numerablemente compacto en (X,T).

Demostración:

a) Sea $x\in G$ y V^x un entorno de x en $(G,T|_G)$. Entonces V^x es un entorno de x en (X,T). Como por hipótesis (X,T) es localmente numerablemente compacto, existe W^x entorno numerablemente compacto de x, tal que $W^x\subset V^x$. Por tanto $(G,T|_G)$ es localmente numerablemente compacto.

b) Sea $x\in C$ y V^x un entorno de x en $(C,T|_C)$. Entonces existe W^x, entorno de x en (X,T) tal que $V^x = C\cap W^x$. Como por hipótesis (X,T) es localmente numerablemente compacto, existe U^x entorno numerablemente compacto de x, tal que $U^x\subset W^x$. Por otra parte, por III.1.5 $U^x\cap C$ es un entorno numerablemente compacto de x en $(C,T|_C)$, contenido en V^x. Por tanto C es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.11

Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces la intersección finita de subconjuntos localmente numerablemente compactos en (X,T), es localmente numerablemente compacto en (X,T).

Demostración:

Es suficiente hacer la demostración en el caso de dos subconjuntos localmente numerablemente compactos.

Sean M_1 y M_2 localmente numerablemente compactos en (X,T), $x\in M_1\cap M_2$ y V^x un entorno de x en $(M_1\cap M_2,\ T|_{M_1\cap M_2})$. Entonces existe V_1^x, entorno de x en $(M_1,T|_{M_1})$ y existe V_2^x , entorno de x en $(M_2,T|_{M_2})$ tales que $V^x = V_1^x\cap M_1\cap M_2$ y $V^x = V_2^x\cap M_1\cap M_2$.

Por hipótesis, por ser $(M_i,T|_{M_i})$ localmente numerablemente compacto para i=1,2 , existen W_1^x , entorno numerablemente compacto de x en $(M_1,T|_{M_1})$ y W_2^x, entorno numerablemente compacto de x en $(M_2,T|_{M_2})$ tales que $W_1^x\subset V_1^x$ y $W_2^x\subset V_2^x$. Como (X,T) es US-espacio secuencial, se tiene que $W_1^x\cap W_2^x$ es numerablemente compacto(III.1.23) . Además,

$$W_1^x\cap W_2^x = (W_1^x\cap M_1\cap M_2)\cap(W_2^x\cap M_1\cap M_2)$$

implica que $W_1^x\cap W_2^x$ es un entorno de x, en $(M_1\cap M_2,\ T|_{M_1\cap M_2})$ contenido en V^x. Por tanto, $(M_1\cap M_2,\ T|_{M_1\cap M_2})$ es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.12

Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces se tiene:

a) Si $M\subset X$ es localmente numerablemente compacto en (X,T), se verifica que M es interseccion de un abierto y un cerrado de (X,T).

b) Si (X,T) es localmente numerablemente compacto y $M\subset X$ es interseccion de un abierto y un cerrado de (X,T), se verifica que M es localmente numerablemente compacto.

Demoetración:

A) Sea $C = \overline{M}$ y $G = M \cup (X - \overline{M})$. Como $M = G \cap C$, es suficiente demostrar que G es abierto en (X,T) .

Sea $x \in G$. Si $x \in X - \overline{M}$, x es un punto interior de G.

Si $x \in M$, como M es localmente numerablemente compacto, por hipótesis, existe U^x, entorno de x en (X,T) tal que $U^x \cap M = V^x$ es numerablemente compacto. Como (X,T) es un US-espacio secuencial, por III.1.21 se tiene que V^x es cerrado en (X,T).

Sea $A \in T$ tal que $x \in A \subset U^x$. Veamos que $A \subset G$.

Si $z \in A$ y $z \notin M$, se tiene que $z \notin V^x$. Así $V^z = A \cap (X - V^x)$ es un entorno abierto de z en (X,T). Se verifica que

$$V^z \cap M = A \cap (X - V^x) \cap M \subset U^x \cap (X - V^x) \cap M = V^x \cap (X - V^x) = \emptyset .$$

Luego $z \notin \overline{M}$ y por tanto $z \in X - \overline{M}$. Así, todos los puntos de G son interiores a G.

b)Es consecuencia de las proposiciones III.2.10 y III.2.11.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto, que la condición secuencial impuesta al espacio (X,T), en el apartado (a) de la proposición anterior, es esencial.

Ejemplo III.2.13

Sea $(C, \leq)$ un conjunto bien ordenado,no numerable y con ultimo elemento b. Sea a el primer elemento de C (El cual existe por ser $(C, \leq)$ un conjunto bien ordenado).

Se considera $M = \{ x \in C \mid [a,x) \text{ no es numerable} \}$. El conjunto M no es vacio ya que $b \in M$. Sea Ω el primer elemento de M. Se considera el espacio topológico $([a,\Omega],T)$, donde T es la topologia del orden, es decir, la topologia que tiene por base, $\mathcal{B} = \{ [a,x) \mid x \in [a,\Omega] \} \cup \{ (x,y) \mid x < y, \ x,y \in [a,\Omega] \} \cup$
$\cup \{ (x,\Omega] \mid x \in [a,\Omega] \}$.

Veamos que $([a,\Omega],T)$ es compacto y T_2.

1.Sean $x,y\in[a,\Omega]$ con $x\neq y$. Supongamos que $x<y$. En el caso de que exista $t\in(x,y)$, se tiene que $V^x=[a,t)$ y $V^y=(t,\Omega]$ son entornos disjuntos de x e y respectivamente. En el caso de que $(x,y)=\emptyset$, se tiene que $V^x=[a,y)$ y $V^y=(x,\Omega]$ son entornos disjuntos de x e y respectivamente. Así, $([a,\Omega],T)$ es T_2.

2. Sea $\mathcal{U}=\{U_i\mid i\in I\}$ un recubrimiento abierto de $([a,\Omega],T)$.

Se considera el conjunto $A=\{x\in[a,\Omega]\mid$ existe $F_x\subset I$, finito, con $[a,x]\subset\bigcup_{i\in F_x} U_i\}$. Es evidente que $a\in A$ y A es un intervalo. Como $([a,\Omega],\leq)$ es un conjunto bien ordenado y A esta acotado superiormente, se tiene que existe c= supremo(A). Es evidente que $a<c$.

Supongamos que $c<\Omega$. Como $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de $[a,\Omega]$, existe $i_0\in I$ tal que $c\in U_{i_0}$. Por tanto, existen $x,y\in(a,\Omega)$ con $x<y$, $c\in(x,y)\subset U_{i_0}$. Asi,

$[a,y]\subset(\bigcup_{i\in F_x} U_i)\cup U_{i_0}\cup U_{i_1}$, (donde $y\in U_{i_1}$), lo cual contradice que c es el supremo de A $(c<y,\ y\in A)$. Luego, $c=\Omega$.

Por un razonamiento análogo al anterior, se prueba que $\Omega\in A$.

Así pues, $([a,\Omega],T)$ es T_4.

El espacio $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ no es de Lindelöf. En efecto:

Se considera el recubrimiento abierto $\mathcal{U}=\{[a,y)\ y\in(a,\Omega)\}$ ($\mathcal{U}$ es un recubrimiento de $[a,\Omega)$, ya que para todo $y\in(a,\Omega)$, xiste $y'\in(a,\Omega)$ con $y<y'$ e $(y,y')=\emptyset$). Si el espacio

fuese de Lindelöf, existiria un recubrimiento numerable $\mathcal{V}=\{[a,y_n) \mid n\in N\}$ de $\mathcal{U}$. Así, $[a,\Omega) = \bigcup_{n\in N}[a,y_n)$ y como para todo $n\in N$ $[a,y_n)$ es numerable, se tendrá que $[a,\Omega)$ es numerable, lo cual contradice la definición de Ω.

$([a,\Omega],T)$ es T_5, teniendo en cuenta el siguiente resultado:

"Sea (X,T) un espacio topológico, donde X es un conjunto totalmente ordenado y T la topologia del orden. Entonces (X,T) es completamente normal".

Como $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ no es de Lindelöf, se tiene que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ no es compacto.

Veamos que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es numerablemente compacto.

Sean $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesion de $[a,\Omega)$ y $M=\{x\in[a,\Omega) \mid$ existe $P\subset N$, infinito, con $x_n\in [a,x]$ para todo $n\in P\}$. Se tiene que M no es vacio. En efecto: Como $[a,x_n]$ es numerable para todo $n\in N$ y $[a,\Omega)$ no es numerable, existe $x\in[a,\Omega)$ tal que $x_n \leq x$, para todo $n\in N$, Así, $x\in M$.

Sea x_0 el primer elemento de M. Se verifica que x_0 es punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in N}$ en $([a,\Omega),T_{[a,\Omega)})$. Así este espacio es numerablemente compacto.

Como el primer elemento de M es x_0, existe $P\subset N$ infinito tal que $x_n\in[a,x_0]$ para todo $n\in P$. Por tanto, existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ cuya imagen está contenida en $[a,x_0]$. Por otra parte, para todo $x\in[a,x_0)$ se tiene que $\{n\in N \mid x_m\in[a,x]$ es finito. Así la subsucesión anterior converge a x_0. (De heho hemos probado que $([a,\Omega)T|_{[a,\Omega)})$ es secuencialmente ompacto).

Se considera el espacio topológico $(X,T) = ([a,\Omega],T)^N$.

Entonces $(X',T') = ([a,\Omega), T|_{[a,\Omega)})^{\mathbb{N}}$ es un subespacio de (X,T) numerablemente compacto (Vease la demostración de III.1.27(b)).

Sin embargo, X' no es intersección de un abierto y un cerrado de (X,T) ya que en caso contrario esto implicaria que X' seria abierto en (X,T) lo cual es falso.

Observese que (X,T) es un US-espacio por ser T_2, luego (X,T) no es secuencial.

Veamos con un ejemplo que, en general, la imagen por una aplicación continua de un espacio localmente numerablemente compacto, no es localmente numerablemente compacto.

Ejemplo III.2.14

Sean Q el conjunto de los números racionales, T la topogia discreta en Q y $T' = T_u|_Q$. Entonces:

(Q,T) es localmente numerablemente compacto, 1_Q, la aplicación identidad en Q es una aplicación continua de (Q,T) en (Q,T') y (Q,T') no es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.15

Sea (X,T) un espacio topológico localmente numerablemente compacto, (X',T') un espacio topológico y f una aplicación continua, abierta y suprayectiva de (X,T) en (X',T'). Entonces (X',T') es localmente numerablemente compacto.(La numerable compacidad local es una propiedad topológica).

Demostración:

Sea $x' \in X'$ y $V^{x'}$ un entorno de x' en (X',T'). Como f es suprayectiva y continua, existen $x \in X$ y V^x tales que $f(x) = x'$ y $f(V^x) \subset V^{x'}$. Como por hipótesis (X,T) es localmente numerable mente compacto, existe W^x numerablemente compacto con $W^x \subset V^x$. Como f es continua y abierta, por III.1.11 $f(W^x)$ es un entorno numerablemente compacto de x' contenido en $V^{x'}$. Así pues (X',T') es localmente numerablemente compacto.

Definición III.2.16(25)

Sean (X,T) ,(X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se dice que f es numerablemente propia si:

1. f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T').

3. Para todo $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto en (X,T).

Proposición III.2.17

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces se tiene:

I) Si f es una aplicación propia de (X,T) en (X',T'), f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

II) Si f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T'), f en general, no es una aplicación propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

I) Es consecuencia de a) y b) de III.4.42 de (18), y de que todo subconjunto compacto es numerablemente compacto.

II) Veamos un ejemplo.

Se consideran el espacio topológico numerablemente compacto $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ introducido en III.2.13, el espacio topológico (X',T') donde $X'=\{y\}$(X' consta de un solo elemento) y $f: [a,\Omega) \longrightarrow X'$ definida por $f(x) = y$, para todo $x \in [a,\Omega)$.

Es evidente que f es numerablemente propia, sin embargo f no es propia ya que $f^{-1}(y)$, con $y \in X'$,es $[a,\Omega)$ el cual no es compacto.

Proposición III.2.18

Sean (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, (X',T') un US-espacio secuencial y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua de (X,T) en (X',T'). Entonces f es numerablemente propia.

Demostración:

1. f es continua por hipótesis.

2. f es una aplicación cerrada por III.1.25.

3. Para todo $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ es un subconjunto cerrado de (X,T) y por III.1.5 , $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto (US-espacio, implica T_1).

Así pues queda probado que f es numerablemente propia.

Proposición III.2.19

Sean (X,T) un espacio topológico, (X',T') un espacio topológico numerablemente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación numerablemente propia de (X,T) sobre (X',T'). Entonces (X,T) es numerablemente compacto.

Demostración:

Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in N}$ un recubrimiento abierto de (X,T) . Se considera la familia $\mathcal{U}' = \left\{ X' - f(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i) \mid n \in N \right\}$. Veamos que $\mathcal{U}'$ es un recubrimiento abierto de (X',T'). En efecto:

a) Para todo $n \in N$, $X' - f(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i) \in T'$ por ser U_i abierto y f una aplicación cerrada.

b) $\bigcup_{n \in N} (X' - f(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i)) = X'$. En efecto:

Veamos que para todo $x'\in X'$ resulta que

$$x'\in \bigcup_{n\in N} \left(X' - f(X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i) \right)$$

Para todo $x'\in X'$, existe $x\in X$, cumpliendo que $x\in f^{-1}(x')$. Como $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto, existe $n_0\in N$ tal que $f^{-1}(x')\subset \bigcup_{i=1}^{n_0} U_i$. Por tanto, $x'\in X' - f(X - \bigcup_{i=1}^{n_0} U_i)$.

Por ser $\mathcal{U}'$ un recubrimiento abierto de (X',T') y (X',T') numerablemente compacto, existen $n_1,\ldots,n_p\in N$ tales que $X' = (X'-f(X - \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i))\cup \ldots \cup(X' -f(X - \bigcup_{i=1}^{n_p} U_i))$. Así pues

$$X = (X - f^{-1}f(X - \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i))\cup \ldots\ldots \cup(X - f^{-1}f(X - \bigcup_{i=1}^{n_p} U_i))\subset$$

$\subset (\bigcup_{i=1}^{n_1} U_i)\cup \ldots\ldots \cup(\bigcup_{i=1}^{n_p} U_i)$. Esto pone de manifiesto que (X,T) es numerablemente compacto.

Proposición III.2.20

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T') y $M'\subset X'$. Entonces $f|_{f^{-1}(M')}:f^{-1}(M')\longrightarrow M'$ es una aplicación numerablemente propia de $(f^{-1}(M'),T|_{f^{-1}(M')})$ en $(M',T|_{M'})$.

Demostración:

1. $f|_{f^{-1}(M')}$ es continua por ser $f:X\longrightarrow X'$ continua de (X,T) en (X',T').

2. $f|_{f^{-1}(M')}$ es cerrada por ser $f:X\longrightarrow X'$ cerrada de (X,T) en (X',T').

3. Como para todo $x' \in M'$, $(f|_{f^{-1}(M')})^{-1}(x') = f^{-1}(x')$ y $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto por ser f numerablemente propia, se tiene que $f|_{f^{-1}(M')}$ es numerablemente propia de $(f^{-1}(M'), T|_{f^{-1}(M')})$ en $(M', T|_{M'})$.

Proposición III.2.21

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T') y K' un subconjunto numerablemente compacto de (X',T'). Entonces $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto en (X,T).

Demostración:

Por III.2.20, $f|_{f^{-1}(K')}$ es una aplicación numerablemente propia de $(f^{-1}(K'), T|_{f^{-1}(K')})$ en $(K', T|_{K'})$ y por III.2.19, como $(K', T|_{K'})$ es numerablemente compacto y $f|_{f^{-1}(K')}: f^{-1}(K') \longrightarrow K'$ es numerablemente propia y sobreyectiva, resulta que $(f^{-1}(K'), T|_{f^{-1}(K')})$ es numerablemente compacto.

Proposición III.2.22

Sean (X,T), (X',T'), (X'',T'') espacios topológicos, $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T') y $g:X \longrightarrow X''$ una aplicación numerablemente propia de (X',T') en (X'',T''). Entonces $g \circ f: X \longrightarrow X''$ es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X'',T'').

Demostración:

1. $g \circ f$ es una aplicación continua de (X,T) en (X'',T'') por ser composición de aplicaciones continuas.

2. $g \circ f$ es una aplicación cerrada de (X,T) en (X'',T'') por ser composición de aplicaciones cerradas.

3. Para todo $x''\in X''$, por ser g numerablemente propia, de (X',T') en (X'',T'') se tiene que $g^{-1}(x'')$ es numerablemente compacto en (X',T') y por III.2.21, $f^{-1}(g^{-1}(x''))=(g\circ f)^{-1}(x'')$ es numerablemente compacto en (X,T). Así $g\circ f$ es numerablemente propia de (X,T) en (X'',T'').

Proposición III.2.23

Sean (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, (X',T') un espacio topológico T_1 y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación continua y cerrada de (X,T) en (X',T'). Entonces f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Basta demostrar que para todo $x'\in X'$, $f^{-1}(x')$ es un subconjunto numerablemente compacto de (X,T).

Como para todo $x'\in X'$, $\{x'\}$ es un cerrado en (X',T'), se tiene que $f^{-1}(x')$ es un cerrado en (X,T). Teniendo en cuenta III.1.5, resulta que $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto. Por tanto f es numerablemente propia.

Proposición III.2.24

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación y (X',T') espacio secuencial. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T') y si $S=\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in Agl_{T'}f\circ S$ existe $x\in f^{-1}(x')\cap Agl_T S$.

c) f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T') y si $S=\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in Lim_{T'}f\circ S$, existe $x\in f^{-1}(x')\cap Agl_T S$. (La condición de que (X',T') es secuencial solo se utiliza en las implicaciones c) a a) o de b) a a)).

Demostración:

a) $\Longrightarrow$ b)

Sea $S=\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en X y $x'\in Agl_{T'} f\circ S$ o sea $x'\in Agl_{T'}\{f(x_n)\}_{n\in N}$. Como f es una aplicación continua y cerrada de (X,T) en (X',T'), $f(\bar{B}_n) = \overline{f(B_n)}$ para toda sección, B_n, de la sucesión $S = \{x_n\}_{n\in N}$

Teniendo en cuenta que $x'\in Agl_{T'}\{f(x_n)\}_{n\in N}$ se tiene que $x'\in \overline{f(B_n)}$ para toda sección B_n de $\{x_n\}_{n\in N}$. Luego $C = \left\{ f^{-1}(x')\cap\bar{B}_n \mid B_n \text{ es una sección de } S = \{x_n\}_{n\in N}\right\}$ es una familia numerable de cerrados no vacios en $(f^{-1}(x'),T|_{f^{-1}(x')})$ verificando que para todo $\{B_{n_1},\dots,B_{n_p}\}$, subconjunto finito del conjunto numerable de las secciones, $\{B_1, \dots,B_n,\dots\}$, $\bigcap_{j=1}^{p} (f^{-1}(x')\cap\bar{B}_{n_j}) \neq \emptyset$. En efecto:

$$\bigcap_{j=1}^{p}(f^{-1}(x')\cap\bar{B}_{n_j}) = f^{-1}(x')\cap(\bigcap_{j=1}^{p}\bar{B}_{n_j})\supset f^{-1}(x')\cap \overline{\bigcap_{j=1}^{p}B_{n_j}} \neq \emptyset$$

ya que $\bigcap_{j=1}^{p}B_{n_j}$ es una sección de $S =\{x_n\}_{n\in N}$ y por tanto

$$x'\in\overline{f(\bigcap_{j=1}^{p}B_{n_j})} = f(\overline{\bigcap_{j=1}^{p}B_{n_j}}).$$

Así por III.1.2(c), puesto que $(f^{-1}(x'),T|_{f^{-1}(x')})$ es numerablemente compacto, se tiene que $\bigcap_{n\in N}(f^{-1}(x')\cap \bar{B}_n) \neq \emptyset$ y por tanto existe $x\in f^{-1}(x')\cap(\bigcap_{n\in N}\bar{B}_n) =f^{-1}(x')\cap Agl_T\ S$.

b) $\Longrightarrow$ c): Es trivial.

c) $\Longrightarrow$ a)

1. f es, por hipótesis, una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Veamos que para todo $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto. Sea $S = \{x_n\}_{n\in N} \subset f^{-1}(x')$. Esto implica que $\{f(x_n)\}_{n\in N} \longrightarrow x'$. Entonces por las condiciones de b), existe $x \in f^{-1}(x') \cap Agl_T S$,lo que implica que $Agl_T S \neq \emptyset$. Así $f^{-1}(x')$ es numerablemente compacto.

3. Veamos que f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T') ,siendo (X',T') un espacio secuencial.

Sea C un cerrado en (X,T) . Veamos que $f(C)$ es tambien un cerrado en (X',T'). Sea $\{x'_n\}_{n\in N} \subset f(C)$ tal que $x' \in Lim\{x_n\}_{n\in N}$.

Para cada $n\in N$ sea $x_n \in C$ tal que $f(x_n) = x'_n$. Se tiene que, $S = \{x_n\}_{n\in N} \subset C$. Como $x' \in Lim\{f(x_n)\}_{n\in N}$ se tiene que $x' \in Agl_{T'} f\circ S$; así por la hipótesis b), existe $x \in f^{-1}(x') \cap Agl_T S$ y como C es cerrado, $Agl_T S \subset C$. Así pues $x' = f(x) \in f(C)$. Luego como (X',T') es secuencial, $f(C)$ es cerrado y por consiguiente f es numerablemente propia.

Veamos con un ejemplo que la condición de que (X',T') sea un espacio topológico secuencial es esencial en la proposición anterior (apartado: c) $\Longrightarrow$ a)).

<u>Ejemplo III.2.25</u>

Sea $([a,\Omega),T)$ el espacio topológico del ejemplo III.2.13 el cual es numerablemente compacto, (R,T_{CN}) el espacio topológico tal que T_{CN} es la topología sobre R de los complementos numerables, que no es un espacio secuencial y $(X,T_p) = ([a,\Omega),T)\times(R,T_{CN})$.

Se considera la aplicación $p_2 : [a,\Omega)\times R \longrightarrow R$, definida por $p_2[(x,y)] = y$ para todo $(x,y) \in [a,\Omega)\times R$, que evidentemente es continua de $([a,\Omega),T)\times(R,T_{CN})$ en (R,T_{CN}).

Sean $S = \{(a_n, x_n)\}_{n\in N}$ una sucesión en $[a,\Omega)\times R$ y $x \in \mathrm{Lim}_{T_{CN}} p_2 \circ S = \mathrm{Lim}_{T_{CN}} \{x_n\}_{n\in N}$. Entonces se tiene que $p_2^{-1}(x) = [a,\Omega)\times\{x\}$.

Como $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en $[a,\Omega)$ y $([a,\Omega),T)$ es numerablemente compacto, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in N}$ de $\{a_n\}_{n\in N}$ tal que converge a q en $([a,\Omega),T)$.

Puesto que $(q,x) \in \mathrm{Lim}_{T_p} \{(a_{n_k}, x_{n_k})\}_{k\in N}$, resulta que $(q,x) \in p_2^{-1}(x) \cap \mathrm{Agl}_T S$.

Por todo lo anterior, observamos que se satisfacen las condiciones del apartado (c) de la proposición III.2.24. Sin embargo, vamos a probar que p_2 no es numerablemente propia. (Con ello habra quedado puesto de manifiesto que la condición de que (X',T') sea secuencial es esencial).

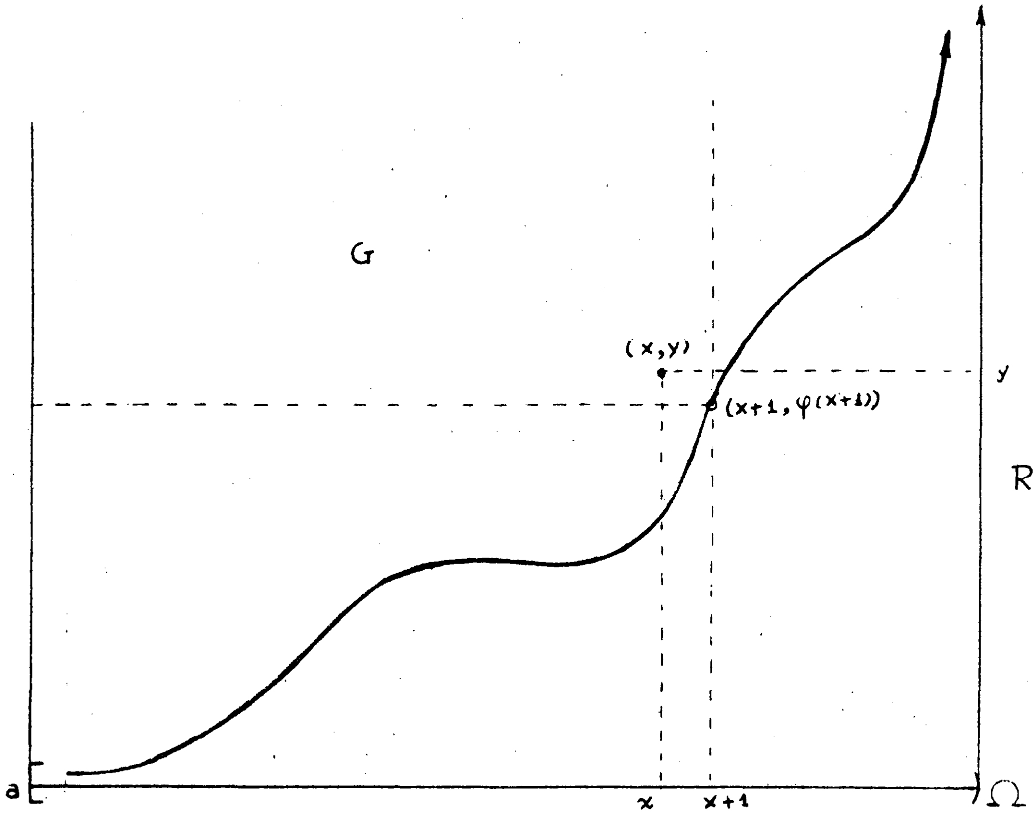
Basta probar que p_2 no es una aplicación cerrada de $([a,\Omega),T)\times(R,T_{CN})$ en (R,T_{CN}).

Sea $\varphi : [a,\Omega) \longrightarrow R$ una aplicación biyectiva y $M = \{(x,\varphi(x)) \mid x\in(a,\Omega)\} \subset [a,\Omega)\times R$. Veamos que M es un subconjunto cerrado de $([a,\Omega),T) \times (R,T_{CN})$ y que $p_2(M)$ es un abierto (no cerrado) en (R,T_{CN}) .

Vamos a demostrar que M es cerrado probando que el complementario es abierto.

Sea $(x,y) \notin M$ lo que implica $y \neq \varphi(x)$. Se considera el elemento $x+1$, siguiente al x, en $[a,\Omega)$. Vamos a distinguir dos casos:

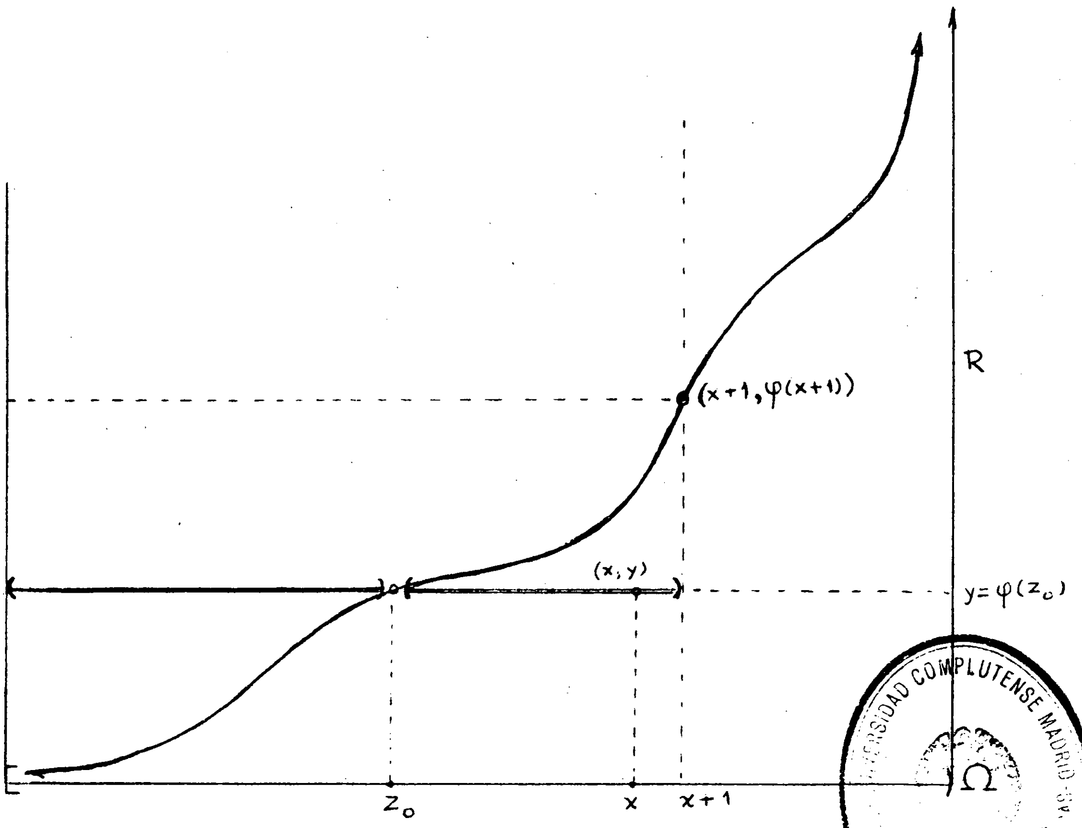
I) Que no exista $z_0 \in (a,x+1)$ tal que $\varphi(z_0) = y$.



Se considera el conjunto $G=(a,x+1) \times (R-p_2\{(z,\varphi(z)) \mid z\in(a,x+1)\})$. Veamos que G es un abierto de $([a,\Omega),T)\times(R,T_{CN})$ tal que $(x,y)\in G$ y $G\cap M = \emptyset$. En efecto:

$(a,x+1)$ es un abierto en $([a,\Omega),T)$. Como $x+1<\Omega$ y Ω es el primer elemento tal que $[a,\Omega)$ es no numerable, se tiene que $(a,x+1)$ es numerable, por tanto $p_2\{(z,\varphi(z)) \mid z\in(a,x+1)\}$ es numerable y por consiguiente $R - p_2\{(z,\varphi(z)) \mid z\in(a,x+1)\}$ es un abierto de (R,T_{CN}). Así pues G es un abierto en $([a,\Omega),T) \times (R,T_{CN})$. Evidentemente $(x,y)\in G$ y $G\cap M = \emptyset$.

II) Que exista $z_0\in(a,x+1)$ tal que $\varphi(z_0) = y$.



Sea $A = p_2\{(z,\varphi(z)) \mid z\in(a,x+1)$ y $z\neq z_0\}$. Entonces, por razones análogas a las del caso I), $(a,x+1) \times (R - A) = V^{(x,y)}$ es un entorno abierto del punto (x,y) que contiene al punto $(z_0,\varphi(z_0)) \in M$.

Como $[a,\Omega) \times R - \{(z_0,\varphi(z_0))\}$ es tambien un entorno de (x,y) que no contiene al punto $(z_0,\varphi(z_0))$ y abierto, resulta que $G_1 = V^{(x,y)} \cap (X - \{(z_0,\varphi(z_0))\})$ es un entorno abierto de (x,y) tal que $G_1 \cap M = \emptyset$.

Por tanto M es un subconjunto cerrado de $([a,\Omega),T)\times(R,T_{CN})$.

Que $p_2(M)$ es un abierto no cerrado de (R,T_{CN}) es consecuencia de que $\varphi((a,\Omega))\subset R$ estrictamente y de que si $p\in R$ es tal que $\varphi(a) = p$, $p_2(M) = R - p$, que es evidentemente un abierto en T_{CN}.

Definición III.2.26 (27 y 33)

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación .Se dice que f es una aplicación cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T') si:

1. f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Para todo $K' \subset X'$ subconjunto numerablemente compacto de (X',T') $f^{-1}(K')$ es un subconjunto numerablemente compacto de (X,T).

Proposición III.2.27

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T') .Entonces f es una aplicación cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

1. Como f es numerablemente propia, f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Como f es numerablemente propia, por III.2.21, para todo K' suconjunto numerablemente compacto de (X',T') se tiene que $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto en (X,T). Así pues, f es cuasi-numerablemente propia.

Proposición III.2.28

Sean (X,T) un espacio topológico, (X',T') un espacio topológico localmente numerablemente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación .Entonces:

a) Si (X,T) es regular y f es una aplicación cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T'), se tiene que (X,T) es un espacio localmente numerablemente compacto.

b) Si (X',T') es un NKC-espacio (En particular un US-espacio secuencial), f es una aplicación numerablemente propia de

(X,T) en (X',T') si y solamente si f es una aplicación cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

a) Para todo $x\in X$, como (X',T') es localmente numerablemente compacto, existe $V^{f(x)}$ entorno numerablemente compacto de $f(x)$ en (X',T'). Así, por ser f cuasi-numerablemente propia, $f^{-1}(V^{f(x)})$ es un entorno numerablemente compacto de x en (X,T) y por tanto, (X,T) es localmente numerablemente compacto, por III.2.3.

b) Si f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T'), por la proposición anterior, f es cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

Reciprocamente: Sea f cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T'). Como (X',T') es localmente numerablemente compacto, para todo $x'\in X'$ existe $V^{x'}$ entorno numerablemente compacto de x' en (X',T'). Como f es cuasi-numerablemente propia, $f^{-1}(V^{x'})$ es numerablemente compacto. Puesto que

$$f\big|_{f^{-1}(V^{x'})}:f^{-1}(V^{x'})\longrightarrow V^{x'}$$ es una aplicación continua

del espacio numerablemente compacto $(f^{-1}(V^{x'}),\ T\big|_{f^{-1}(V^{x'})})$ en $(V^{x'},T'\big|_{V^{x'}})$ se tiene que $f\big|_{f^{-1}(V^{x'})}$ es cerrada de $(f^{-1}(V^{x'}),T\big|_{f^{-1}(V^{x'})})$ en $(V^{x'},T'\big|_{V^{x'}})$. por la definición de NKC-espacio (o III.1.21)

Así, por V.5.22 de (18), f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T') ya que f es cerrada.

Definición III.2,27

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación. Se dice que f es una aplicación F-cuasi-numerable mente propia de (X,T) en (X',T') si :

1. f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Para todo $K'\subset X'$ subconjunto cerrado y numerablemente compacto de (X',T') , $f^{-1}(K')$ es un subconjunto numerablemente compacto de (X,T).

Proposición III.2.30

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación . Entonces se tiene:

Si f es cuasi-numerablemente propia, f es F-cuasi-numerablemente propia.

Proposición III.2.31

Sean (X,T) un espacio topológico, (X',T') un NKC-espacio y f una aplicación de X en X'. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es una aplicación cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación F-cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Es consecuencia de la proposición anterior y de la definición de NKC-espacio.

Corolario III.2.32

Sean (X,T) un espacio topológico , (X',T') un US-espacio secuencial y f una aplicación de X en X'. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es una aplicación cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación F-cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Es consecuencia de la proposición anterior y de III.1.21.

Corolario III.2.33

Sean (X,T) un espacio topológico, (X',T') un NKC-espacio (en particular un US-espacio secuencial), localmente numerablemente compacto y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

A) f es numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

B) f es cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X',T').

c) f es F-cuasi-numerablemente propia de (X,T) en (X', T').

Demostración:

Es consecuencia de III.2.28 y III.2.31.

Proposición III.2.34

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, (X,T) numerablemente compacto y $f:(X,T)\longrightarrow(X',T')$ aplicación continua. Entonces f es F-cuasi-numerablemente propia.

Demostración:

Es consecuencia de que todo subconjunto cerrado en un espacio topológico numerablemente compacto es numerablemente compacto (III.1.5).

Definición III.2.35

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y f una aplicación continua de (X,T) en (X',T'). Se dice que:

a) f es una aplicación cuasi-propia si para cada K' compacto en (X',T'), se verifica que $f^{-1}(K')$ es compacto en (X,T).

b) f es una aplicación F-cuasi-propia si para cada K' compacto y cerrado en (X',T'), se verifica que $f^{-1}(K')$ es compacto en (X,T) .

Observación III.2.36

a) Toda aplicación propia es cuasi-propia.(III.4.58 de(**18**)).

b) Toda aplicación cuasi-propia es F-cuasi-propia.

Proposición III.2.37

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X',T') subsecuencial y f una aplicación cuasi-propia de (X,T) en (X',T'). Entonces f es cuasi-numerablemente propia.

Demostración:

Sean $K'\subset X'$ con K' numerablemente compacto en (X',T') y $\{x_n\}_{n\in N}\subset f^{-1}(K')$. Entonces $\{f(x_n)\}_{n\in N}\subset K'$ y por tanto existe $x_0'\in K'\cap Agl_{T'}\{f(x_n)\}_{n\in N}$. Como (X',T') es subsecuencial, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ converge a x_0' en (X',T'). Entonces $\{x_0'\}\cup\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ es un compacto en (X',T'). Así, por hipótesis $f^{-1}(\{x_0'\}\cup\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}) = M$, es un compacto en (X,T) y por tanto existe $x_0\in M\cap Agl_T\{x_{n_k}\}_{k\in N}$.

Como $M\subset f^{-1}(K')$ se tiene que $x_0\in f^{-1}(K')$ y es punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in N}$. Esto prueba que $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto.

Proposición III.2.38

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X',T') subsecuencial y regular y f una aplicación F-cuasi propia de (X,T) en (X',T'). Entonces f es F-cuasi-numerablemente propia.

Demostración:

Sean $K'\subset X'$ con K' numerablemente compacto y cerrado en (X',T') y $\{x_n\}_{n\in N}\subset f^{-1}(K')$. Entonces $\{f(x_n)\}_{n\in N}\subset K'$ y por tanto existe $x'_0 \in K' \cap \mathrm{Agl}_{T'}\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Como (X',T') es subsecuencial, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x'_0 en (X',T'). Entonces $A = \{x'_0\} \cup \{f(x_{n_k}) \mid k\in\mathbb{N}\}$ es un compacto en el espacio regular (X',T'). Así, $\bar{A}$ es un compacto en (X',T') y $\bar{A} \subset K'$.

Por hipótesis, $f^{-1}(\bar{A}) = H$ es un compacto en (X,T) y por tanto existe $x_0 \in H \cap \mathrm{Agl}_T\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Como $H \subset f^{-1}(K')$ se tiene que $x_0 \in f^{-1}(K')$ y es punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto prueba que $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto.

Observación III.2.39

Se tiene la siguiente relación para una aplicación f de (X,T) en (X',T').

$$\begin{tikzcd}
\text{Aplicación propia} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Aplic. numerabl. propia} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{Aplic. cuasi-propia} \arrow[r, Rightarrow, "\begin{array}{l}+\ \text{Esp. final}\\ \text{subsecuencial}\end{array}"] \arrow[d] & \text{Aplic. cuasi-numer. propia} \arrow[d] \\
\text{Aplic. F-cuasi-propia} \arrow[r, Rightarrow, "\begin{array}{l}+\ \text{Espac. final}\\ \text{subsecuencial}\\ \text{y regular}\end{array}"] & \text{Aplic. F-cuasi-numer. propia}
\end{tikzcd}$$

Los ejemplos siguientes establecen la independencia entre estos tipos de aplicaciones.

Vamos a establecer:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{propia} & \overset{\text{Ej. 2}}{\not\Longleftarrow} & \text{cuasi-propia} & \overset{\text{Ej. 3}}{\not\Longleftarrow} & \text{F-cuasi-propia} \\
\not\Uparrow \text{ Ej. 1} & & \not\Uparrow \text{ Ej. 1} & & \not\Uparrow \text{ Ej. 1} \\
\text{numerablemente propia} & \overset{\text{Ej.2}}{\not\Longleftarrow} & \text{cuasi-numerablemente propia} & \overset{\text{Ej.3}}{\not\Longleftarrow} & \text{F-cuasi-numerablemente propia}
\end{array}$$

Ejemplos III.2.40

1. numerablemente propia $\not\Longrightarrow$ F-cuasi-propia

Sean $([a,\Omega), T|_{[a,\Omega)})$, espacio numerablemente compacto del ejemploIII.2.13, (X',T') donde $X' = \{y\}$ y $f: [a,\Omega) \longrightarrow X' = \{y\}$ la aplicación definida por $f(x) = y$ para todo $x \in [a,\Omega)$.

Es evidente que f es numerablemente propia, (por tanto cuasi-numerablmente propia y F-cuasi-numerablemente propia), pero f no es F-cuasi-propia (y por tanto no es cuasi-propia ni propia).

2. Con este ejemplo vamos a probar que:

$$\begin{cases} \text{cuasi-propia} \not\Longrightarrow \text{propia} \\ \text{cuasi-numerablemente propia} \not\Longrightarrow \text{numerablemente propia} \end{cases}$$

(Vease III.4.27 de (**18**))

Sea el espacio topológico ($X = \{a,b\}, T_D$) siendo T_D la topológia discreta sobre X.

Formemos el conjunto X^R, siendo R el conjunto de los números reales y consideremos la siguiente familia de subconjuntos de X^R:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{r\in R} A_r \,\middle|\, A_r \subset X;\ A_r = X,\ \forall r \in R-J;\ J \subset R\ ,\ J \text{ numerable} \right\}.$$

$\mathcal{B}$ es base de una topologia sobre X^R, $T(\mathcal{B})$ que no es la discreta, ya que R no es numerable.

a) $(X^R, T(\mathcal{B}))$ es T_2. Es evidente.

b) En $(X^R, T(\mathcal{B}))$ se verifica que $M \subset X^R$ es compacto si y solamente si M es finito (Vease III.4.27 de (18)).

Se considera ahora el espacio topológico (X^R, T_D), donde T_D es la topologia discreta sobre X^R y la aplicación identidad $1_{X^R}: X^R \longrightarrow X^R$.

Entonces se tiene:

I) 1_{X^R} es continua de (X^R, T_D) en $(X^R, T(\mathcal{B}))$.

II) $\forall K \subset X^R$ compacto en $(X^R, T(\mathcal{B}))$ se sigue que $1^{-1}_{X^R}(K)=K$ es compacto en (X^R, T_D).

Así pues 1_{X^R} es cuasi-propia.

III) 1_{X^R} no es cerrada, por consiguiente, 1_{X^R} no es numerablemente propia y por tanto no es propia.

IV) Para todo $M \subset X^R$, infinito y numerable se sigue que M es cerrado y no compacto en $(X^R, T(\mathcal{B}))$. Por tanto los únicos subconjuntos numerablemente compactos son los finitos. (Vease III.4.27 de (18)). Así 1_{X^R} es cuasi-numerablemente propia.

3) Con este ejemplo se trata de poner de manifiesto que F-cuasi-numerablemente propia $\not\Longrightarrow$ cuasi-numerablemente propia.

Sea (R,T) donde R es el conjunto de los números reales y $T = \{(x, \rightarrow) \mid x \in R\}$. El único subconjunto numerablemente compacto y cerrado en (R,T) es $\emptyset$. Así, la aplicación identidad $1_R: (R, T_u) \longrightarrow (R,T)$ es F-cuasi-numerablemente propia. Sin embargo no es cuasi-numerablemente propia ya que $[0,\rightarrow)$ es compacto en (R,T) (y por tanto numerablemente compacto) y $1_R^{-1}([0,\rightarrow)) = [0,\rightarrow)$ no es numerablemente compacto en (R,T_u).

Este mismo ejemplo prueba que F-cuasi-propia no implica cuasi-propia.

Proposición III.2.41

a) Si $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ es una familia no vacia de espacios topológicos no vacios tal que $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es localmente numerable compacto, se verifica que :

1º (X_i,T_i) es localmente numerablemente compacto para todo $i\in I$.

2º Existe $F\subset I$, finito, tal que (X_i,T_i) es numerablemente compacto para todo $i\in I-F$.

b) Si $\{(X_n,T_n)\}_{n\in N}$ es una familia numerable de espacios subsecuenciales no vacios, localmente numerablemente compactos y tal que existe $M\subset N$, finito, cumpliendo que (X_p,T_p) es numerablemente compacto para todo $p\in N - M$, se verifica que $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ es localmente numerablemente compacto.

Demostración:

a):

1º. Es consecuencia de III.2.15.

2º. Sea $x\in\prod_{i\in I}X_i$. Por ser $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ localmente numerablemente compacto, existe V^x entorno numerablemente compacto de x en $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$. Así, existe $F\subset I$, finito, tal que $p_i(V^x) = X_i$ para todo $i\in I - F$. Por tanto, por III.1.11, (X_i,T_i) es numerablemente compacto para todo $i\in I-F$.

b) Sean $x = (x_n)_{n\in N}\in\prod_{n\in N}X_n$ y V^x un entorno de x en

$\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$. Se tiene que $V^x \supset \prod_{n\in N} V^{x_n}$ tal que existe $H\subset N$, finito, con $V^{x_j}=X_j$ para todo $j\in N-H$. Para $n\in N-(H\cup M)$, sea $W^{x_n}=X_n$ y para todo $i\in H\cup M$, sea W^{x_i} un entorno numerablemente compacto de x_i en (X_i,T_i) contenido en V^{x_i}. Por I.1.24 y III.1.27(b), $W^x=\prod_{n\in N} W^n$ es un entorno numerablemente compacto de x en $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ contenido en V^x. Así pues $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ es localmente numerablemente compacto.

Corolario III.2.42

Sea $\{(X_n,T_n)\}_{n\in N}$ una familia numerable de espacios subsecuenciales y tal que existe $F\subset I$, finito, verificando que para todo $i\in I-F$, (X_i,T_i) es numerablemente compacto. Entonces se tiene:

$\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ es localmente numerablemente compacto si y solamente si (X_n,T_n) es localmente numerablemente compacto para todo $n\in N$.

Ejemplo III.2.43

Sea R el conjunto de los números reales, T_u la topología usual en R y Z el conjunto de los números enteros. (R,T_u) es localmente numerablemente compacto. Se considera el espacio topológico cociente $(R/Z,T_u/Z)$ resultante de identificar en R el conjunto Z a un solo punto. Es evidente que $(R/Z,T_u/Z)$ no es localmente numerablemente compacto.

El ejemplo anterior pone de manifiesto que en general, el cociente de un espacio topológico localmente numerablemente compacto, no es localmente numerablemente compacto.

Proposición III.2.44

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es localmente numerablemente compacto.

b) (X_i,T_i) es localmente numerablemente compacto para todo $i\in I$.

Demostración:

Es consecuencia de que para todo $j\in I$, $X_j\times\{j\}$ es abierto en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$.

Proposición III.2.45

Sea (X,T) un espacio topológico localmente numerablemente compacto. Entonces, si (X,T) es un NKC-espacio (En particular, si (X,T) es un US-espacio secuencial), se verifica que (X,T) es regular (En particular, T_3).

Demostración:

Sean $x\in X$ y V^x un entorno de x. Por hipótesis, existe W^x, entorno numerablemente compacto de x en (X,T) con $W^x\subset V^x$. Como (X,T) es un NKC-espacio, W^x es cerrado. Así (X,T) es regular.

(US-espacio secuencial implica NKC-espacio T_1).

CAPITULO IV

ESPACIOS SECUENCIALMENTE COMPACTOS Y LOCALMENTE SECUENCIALMENTE COMPACTOS.

§ 1. ESPACIOS SECUENCIALMENTE COMPACTOS

En este párrafo, se exponen los resultados más conocidos de los espacios secuencialmente compactos y se generalizan algunos de ellos.

Definición IV.1.1

Un espacio topológico (X,T), se dice que es secuencialmente compacto, si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en (X,T).

Proposición IV.1.2

Sea (X,T) un espacio topológico . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es secuencialmente compacto.

b) Para todo filtro en X, $\mathcal{F}$, de rango menor o igual que $\aleph_0$, existe un filtro en X, $\mathcal{F}'$,tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, el rango de $\mathcal{F}'$ es menor o igual que $\aleph_0$ y $\mathrm{Lim}_T \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

Observación IV.1.3

a) Si (X,T) es secuencialmente compacto, (X,T) es numerablemente compacto.

b) Si (X,T) es numerablemente compacto y cumple el I.A.N. , (X,T) es secuencialmente compacto.

c) Si (X,T) es compacto y cumple el I.A.N., (X,T) es secuencialmente compacto.

d) Existen ejemplos que ponen de manifiesto la independencia de los axiomas secuencialmente compacto y compacto. (Vease, (23)).

Definición IV.1.4

Sean (X,T) un espacio topológico y M un subconjunto de X. Se dice que M es secuencialmente compacto en (X,T) si $(M,T|_M)$ es un espacio secuencialmente compacto.

Proposición IV.1.5

Sean (X,T) un espacio topológico, M un subconjunto de X y P un subconjunto de M. Entonces P es secuencialmente compacto en $(M, T|_M)$ si y solamente si P es secuencialmente compacto en (X,T).

Proposición IV.1.6

Sea (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto y C un subconjunto cerrado. Entonces, C es secuencialmente compacto en (X,T).

Observación IV.1.7

Existen ejemplos de subconjuntos secuencialmente compactos de un espacio T_2, que no son cerrados (Vease, (**23**)).

Proposición IV.1.8

Sea (X,T) un espacio topológico T_2 cumpliendo el I.A.N.. Entonces, todo subconjunto secuencialmente compacto de (X,T) es cerrado en (X,T).

Proposición IV.1.9

Sea (X,T) un espacio topológico y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia finita de subconjuntos secuencialmente compactos de (X,T). Entonces, $\bigcup_{i\in I} M_i$ es secuencialmente compacto.

Observación IV.1.10

La adherencia de un subconjunto secuencialemente compacto no es secuencialmente compacto, (Vease, (**23**)), en general.

Proposición IV.1.11

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, f una aplicación continuade (X,T) en (X',T') y M un subconjunto secuencialmente compacto de (X,T). Entonces ,f(M) es secuencialmente compacto en (X',T') (Así pues el axioma secuencialmente compacto es una propiedad topológica).

Proposición IV.1.12

Sea (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto, (X',T') un espacio T_2 cumpliendo el I.A.N y f una aplicación continua de (X,T) en (X',T'). Entonces, f es cerrada de (X,T) en (X',T').

Corolario IV.1.13

Sea (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto, (X',T') un espacio T_2 cumpliendo el I.A.N. y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación biyectiva. Entonces, f es un homeomorfismo de (X,T) en (X',T') si y solamente si f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

Proposición IV.1.14

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X,T) I.A.N. y f una aplicación propia de (X,T) en (X',T'). Entonces, para todo subconjunto secuencialmente compacto, K', de (X',T') se verifica que $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto en (X,T).

Proposición IV.1.15

a) Si $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ es una familia no vacia de espacios topológicos no vacios tal que $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es secuencialmente compacto, se verifica que (X_i,T_i) es secuencialmente compacto para todo $i\in I$.

b) El reciproco de (a) no es cierto en general.

c) Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios tal que $card(I) \leq \aleph_0$. Entonces: $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es secuencialmente compacto si y solamente si (X_i,T_i) es secuencialmente compacto para todo $i\in I$.

d) Si (X,T) es secuencialmente compacto y (X',T') es numerablemente compacto, se verifica que $(X,T)\times(X',T')$ es numerablemente compacto.

Proposición IV.1.16

Sea (X,T) un espacio topológico y R una relación de equivalecia en X. Entonces, si existe un subconjunto, M, secuencialmente compacto en (X,T) tal que $R[M]= X$, se verifica que $(X/R,T/R)$ es secuencialmente compacto (Por tanto, el cociente de un espacio secuencialmente compacto es secuencialmente compacto).

Proposición IV.1.17

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es secuencialmente compacto.

b) I es un conjunto finito y (X_i,T_i) es secuencialmente compacto, para todo $i\in I$.

Las siguientes proposiciones generalizan algunos resultados anteriores:

Proposición IV.1.18 (Comparese con IV.1.3(b))

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto y subsecuencial. Entonces, (X,T) es secuencialmente compacto.

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en X. Como (X,T) es numerablemente compacto, existe $x_0\in Agl_T\{x_n\}_{n\in N}$. Así existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tal que $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ converge a x_0 en (X,T).

Proposición IV.1.19 (16)

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto, T_2 y secuencial. Entonces (X,T) es secuencialmente compacto.

La proposición IV.1.8, se puede expresar de la siguiente forma:

" Todo espacio topológico T_2 cumpliendo el I.A.N., es un SKC-espacio".

Teniendo en cuenta los resultados establecidos en el párrafo 1 del Capítulo II , se tiene:

Proposición IV.1.20 (Comparese con IV.1.8)

Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces (X,T) es un SKC-espacio.

Proposición IV.1.21

Sea (X,T) un US-espacio secuencial y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos secuencialmente compactos de (X,T). Entonces $\bigcap_{i\in I} M_i$ es secuencialmente compacto.

Demostración:

Basta tener en cuenta, por IV.1.20, que la intersección es un cerrado en $(M_{i_o}, T|_{M_{i_o}})$, $i_o\in I$. Así $\bigcap_{i\in I} M_i$ es secuencialmente compacto.

Proposición IV.1.22

Sea (X,T) un espacio topológico y M un subconjunto secuencialmente compacto. Entonces:

a) Si (X,T) es un US-espacio secuencial, se verifica que $\overline{M}$ es secuencialmente compacto.

b) Si (X,T) es regular y de Frechet, se verifica que $\overline{M}$ es secuencialmente compacto.

Demostración:

a) Es consecuencia de IV.1.20.

b) Sea $\{x_n\}_{n\in N}\subset \overline{M} - M$. Para cada $n\in N$ existe $\{y_k^n\}_{k\in N}\subset M$ tal que $x_n \in \mathrm{Lim}\{y_k^n\}_{k\in N}$. Como M es secuencialmente compacto, existe $z_n \in \mathrm{Agl}_T \{y_k^n\}_{k\in N}$ con $z_n \in M$.

Se verifica que todo entorno V^{z_n} contiene a x_n. En efecto: Si $V^{z_n} \not\ni x_n$, como (X,T) es regular, existe W^{z_n} tal que $z_n \in W^{z_n} \subset \overline{W^{z_n}} \subset V^{z_n}$. Por tanto $X - \overline{W^{z_n}}$ es un entorno abierto de x_n. Como $\{y_k^n\}_{k\in N}$ converge a x_n, existe $k_0 \in N$ tal que $y_k^n \in X - \overline{W^{z_n}}$ para todo $k\in N$ con $k \geq k_0$, lo cual contradice que z_n es punto de aglomeración de $\{y_k^n\}_{k\in N}$.

Se considera la sucesión $\{z_n\}_{n\in N} \subset M$. Como M es secuencialmente compacto, existe $\{z_{n_p}\}_{p\in N}$, subsucesión de $\{z_n\}_{n\in N}$ que converge a un punto $z\in M$.

Sea V^z un entorno abierto de z en (X,T). Se tiene que existe $p_0 \in N$ tal que para todo $p \geq p_0$, $z_{n_p} \in V^z$. Así por lo anterior, $x_{n_p} \in V^z$ para todo $p \geq p_0$. Por tanto, $\{x_{n_p}\}_{p\in N}$ converge a z.

Proposición IV.1.23 (Comparese con IV.1.12)

Sea (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto, (X',T') un SKC-espacio(En particular,un US-espacio secuencial) y f una aplicación continua de (X,T) en (X',T').Entonces f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Sea C un conjunto cerrado en (X,T). Se tiene que C es secuencialmente compacto y por tanto, f(C) es secuencialmente compacto. Así, por la definición de SKC-espacio (o por IV.1.20), f(C) es cerrado.

Corolario IV.1.24(Comparese con IV.1.13)

Sea (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto,

(X',T') un SKC- espacio (En particular, un US- espacio secuencial) y $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación biyectiva.

Entonces f es un homeomorfismo de (X,T) en (X',T') si y solamente si f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Es consecuencia de que , en las hipótesis del corolario, si f es continua, es cerrada.

Proposición IV.1.25(Comparese con IV.1.14)

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X,T) subsecuencial y f una aplicación propia de (X,T) en (X',T'). Entonces, para todo subconjunto secuencialmente compacto K' de (X',T') se tiene que $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto en (X,T).

Demostración:

Por III.1.14, $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto en (X,T).

Así $(f^{-1}(K'),T|_{f^{-1}(K')})$ es subsecuencial (I.1.24) y numerablemente compacto . Por tanto, por IV.1.18, $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto.

Proposición IV.1.26(Comparese con IV.1.15(c))

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos secuencialmente compactos tal que $card(I) \leq 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Entonces $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es numerablemente compacto.(29)

Proposición IV.1.27

Sea (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto y verificando el axioma E_1. Entonces (X,T) cumple el I.A.N. y por tanto es regular.

Demostración:

Es consecuencia de III.1.28.

Proposición IV.1.28

Sean (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto y $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión con un número finito de puntos de aglomeración en (X,T). Entonces $\{x_n\}_{n\in N}$ tiene una subsucesión convergente en (X,T) .(Por tanto, un espacio numerablemente compacto y no secuencialmente compacto, contiene una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que toda subsucesión suya tiene infinitos puntos de aglomeración).

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión con un número finito de puntos de aglomeración $y_1,\dots y_p$. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in N}$ no contiene subsucesiones convergentes. Entonces:

Como $\{x_n\}_{n\in N}$ no converge a y_1, existe un entorno V^{y_1} y una subsucesión $\{x_{n_{k_1}}\}_{k_1\in N}$ tal que $x_{n_{k_1}}\notin V^{y_1}$, para todo $k_1\in N$.

Como (X,T) es numerablemente compacto, $\{x_{n_{k_1}}\}_{k_1\in N}$ tiene un punto de aglomeración que necesariamente debe ser alguno de los $y_2,\dots y_p$. Supongamos que este punto de aglomeración es y_2. Por el mismo razonamiento anterior, existen V^{y_2} y $\{x_{n_{k_{1_{k_2}}}}\}_{k_2\in N}$ tales que $x_{n_{k_{1_{k_2}}}}\notin V^{y_2}$, para todo $k_2\in N$. Como (X,T) es numerablemente compacto, $\{x_{n_{k_{1_{k_2}}}}\}_{k_2\in N}$ tiene un punto de aglomeración que necesariamente debe ser alguno de los $y_3,\dots,y_p$.

Razonando por inducción, se obtienen un abierto A de (X,T) tal que $y_1,\dots,y_p\in A$ y una subsucesión $\{x_{n_{k_{1\dots k_p}}}\}_{k_p\in N}$ de

$\{x_n\}_{n\in N}$ tales que $x_{n_{k_{1\cdots k_p}}} \notin A$ para todo $k_p \in N$. Esto es una contradicción ya que esta última subsucesión debe tener un punto de aglomeración, que deberia ser alguno de los $y_1,\dots y_p$.

§.2 ESPACIOS LOCALMENTE SECUENCIALMENTE COMPACTOS

En este párrafo, se estudian los espacios localmente secuencialmente compactos y las aplicaciones secuencialmente propias.

Definición IV.2.1

Sea (X,T) un espacio topológico. Se dice que (X,T) es un espacio localmente secuencialmente compacto, si para todo $x\in X$, existe $\mathcal{V}(x)$, base de entornos de x en (X,T), tal que para todo $V^x \in \mathcal{V}(x)$, $(V^x, T|_{V^x})$ es secuencialmente compacto.

Veamos con un ejemplo, que en general, no existe ninguna relación entre los axiomas localmente secuencialmente compacto y secuencialmente compacto.

Ejemplo IV.2.2

a) Sea X un conjunto infinito y T la topologia discreta en X. Entonces (X,T) es localmente secuencialmente compacto y no es secuencialmente compacto.

b) Sea $X = Q\cup\{\sqrt{2}\}$ y $T = T_u|_Q \cup \{X\}$. Se tiene que (X,T)

es secuencialmente compacto y no es localmente secuencialmente compacto.

c) Todo espacio localmente secuencialmente compacto es localmente numerablemente compacto.

d) Existen espacios localmente numerablemente compactos que no son localmente secuencialmente compactos. (Por ejemplo $([0,1], T_u|_{[0,1]})^R$).

<u>Proposición IV.2.3</u>

Sea (X,T) un espacio regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

b) Para todo $x \in X$, existe $V^x \in \mathcal{B}(x)$, secuencialmente compacto en (X,T). ($\mathcal{B}(x)$ sistema de entornos de x en (X,T)).

c) Para todo $x \in X$, existe $U^x \in T$ tal que $\overline{U^x}$ es secuencialmente compacto.

<u>Demostración:</u>

a)$\Longrightarrow$b):

Es evidente.

b)$\Longrightarrow$c):

Sea $x \in X$. Por hipótesis, existe V^x secuencialmente compacto en (X,T). Como (X,T) es regular, existe $U^x \in T$ tal que $\overline{U^x} \subset V^x$. Como V^x es secuencialmente compacto y $\overline{U^x}$ es un cerrado, por IV.1.6, $\overline{U^x}$ es secuencialmente compacto.

c)$\Longrightarrow$a):

Sea $x \in X$ y V^x un entorno de x. Por hipótesis, existe $U^x \in T$ tal que $\overline{U^x}$ es secuencialmente compacto. Como (X,T) es regular, existe $\overline{W^x} \subset V^x \cap U^x \subset \overline{U^x}$. Así $\overline{W^x}$ es un entorno de x en (X,T)

contenido en V^x. Como además $\overline{W^x}$ es un cerrado contenido en $\overline{U^x}$ secuencialmente compacto, $\overline{W^x}$ es secuencialmente compacto. Por tanto (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

Corolario IV.2.4

Todo espacio secuencialmente compacto y regular, es localmente secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.5

Sea (X,T) un espacio topológico E_1 tal que para todo $x\in X$, existe $V^x\in T$ verificando que $\overline{V^x}$ es secuencialmente compacto. Entonces (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

Demostración:

Como (X,T) es E_1 y este axioma es hereditario, se tiene que $(\overline{V^x},T|_{\overline{V^x}})$ es regular (IV.1.27). Por tanto (X,T) es regular. Así, por IV.2.3, (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

Corolario IV.2.6

Sea (X,T) un espacio topológico E_1 y secuencialmente compacto. Entonces (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.7

Sean (X,T) un espacio secuencial y E_1 (En particular T_2 y I.A.N.,(III.1.29)).Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

b) Para todo $x\in X$, existe V^x secuencialmente compacto.

c) Para todo $x\in X$, existe $U^x\in T$ tal que $\overline{U^x}$ es secuencialmente compacto.

Demostración:

a)$\Longrightarrow$b):

Es trivial.

b)$\Longrightarrow$c):

Para todo $x \in X$, existe V^x secuencialmente compacto. Por III.1.29(a), (X,T) es un US-espacio . Así por IV.1.20, V^x es cerrado. Por tanto, si $U^x \in T$ es tal que $U^x \subset V^x$, se verifica que $\overline{U^x} \subset \overline{V^x} = V^x$ y por tanto $\overline{U^x}$ es secuencialmente compacto.

c) $\Longrightarrow$ a):

Es consecuencia de IV.2.5.

Definición IV.2.8

Sea (X,T) un espacio topológico y $M \subset X$. Se dice que M es un subconjunto localmente secuencialmente compacto de (X,T) si $(M,T|_M)$ es un espacio localmente secuencialmente compacto.

Veamos con un ejemplo que el axioma localmente secuencialmente compacto no es una propiedad hereditaria.

Ejemplo IV.2.9

(R,T_u) es localmente compacto. Como es I.A.N., se verifica que es localmente secuencialmente compacto. Sin embargo, $(Q,T_u|_Q)$ no es localmente secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.10

Sea (X,T) un espacio topológico localmente secuencialmente compacto. Entonces se tiene:

a) Todo $G \in T$ es localmente secuencialmente compacto en (X,T).

b) Todo cerrado, C, es localmente secuencialmente compacto en (X,T).

Demostración:

a) Sea $x \in G$ y V^x un entorno de x en $(G,T|_G)$. Entonces V^x es un entorno de x en (X,T). Como por hipótesis (X,T) es localmente secuencialmente compacto, existe W^x entorno secuencialmente compacto de x, tal que $W^x \subset V^x$. Por tanto $(G,T|_G)$ es localmente secuencialmente compacto en (X,T).

b) Sea $x\in C$ y V^x, un entorno de x en $(C,T|_C)$. Entonces existe W^x, entorno de x en (X,T) tal que $V^x = C\cap W^x$. Como por hipótesis (X,T) es localmente secuencialmente compacto, existe U^x entorno secuencialmente compacto de x, tal que $U^x\subset W^x$. Por otra parte, por IV.1.6, $U^x\cap C$ es un entorno secuencialmente compacto de x en $(C,T|_C)$ contenido en V^x. Por tanto C es localmente secuencialmente compacto.

<u>Proposición IV.2.11</u>

Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces la intersección finita de subconjuntos localmente secuencialmente compactos en (X,T), es localmente secuencialmente compacto en (X,T).

<u>Demostración</u>:

Es suficiente hacer la demostración en el caso de dos subconjuntos localmente secuencialmente compactos.

Sean M_1 y M_2 subconjuntos localmente secuencialmente compactos en (X,T), $x\in M_1\cap M_2$ y V^x entorno de x en $(M_1\cap M_2,T|_{M_1\cap M_2})$.

Entonces, existe V_1^x entorno de x en $(M_1,T|_{M_1})$ y existe V_2^x, entorno de x en $(M_2,T|_{M_2})$ tales que $V^x = V_1^x\cap(M_1\cap M_2)$ y $V^x = V_2^x\cap(M_1\cap M_2)$.

Por hipótesis, por ser $(M_i,T|_{M_i})$ localmente secuencialmente compacto, para $i = 1,2$, existen W_1^x, entorno secuencialmente compacto de x en $(M_1,T|_{M_1})$ y W_2^x, entorno secuencialmente compacto de x en $(M_2,T|_{M_2})$ tales que $W_1^x\subset V_1^x$ y $W_2^x\subset V_2^x$.

Como (X,T) es US-espacio secuencial, por IV.1.21, $W_1^x\cap W_2^x$ es secuencialmente compacto. Además $W_1^x\cap W_2^x = (W_1^x\cap M_1\cap M_2)\cap$ $\cap(W_2^x\cap M_1\cap M_2)$, implica que $W_1^x\cap W_2^x$ es un entorno de x en

$(M_1 \cap M_2, T|_{M_1 \cap M_2})$ contenido en V^x. Por tanto $(M_1 \cap M_2, T|_{M_1 \cap M_2})$ es localmente secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.12

Sea (X,T) un US-espacio secuencial. Entonces se tiene:

a) Si $M \subset X$ es localmente secuencialmente compacto en (X,T), se verifica que M es intersección de un abierto y un cerrado de (X,T).

b) Si (X,T) es localmente secuencialmente compacto y $M \subset X$ es intersección de un abierto y un cerrado de (X,T), se verifica que M es localmente secuencialmente compacto.

Demostración:

Análoga a la realizada en III.2.12, sustituyendo las referencias III.1.21 por IV.1.20 y la III.2.10 y III.2.11 por las IV.2.10 y IV.2.11 respectivamente.

El ejemplo III.2.13, prueba que la condición "secuencial" impuesta al espacio (X,T) en el apartado (a) de la proposicion anterior, es esencial.

Veamos con un ejemplo que, en general, la imagen por una aplicación continua de un espacio localmente secuencialmente compacto no es localmente secuencialmente compacto.

Ejemplo IV.2.13

Sea Q el conjunto de los números racionales, T la topológia discreta en Q y $T' = T_u|_Q$. Entonces:

(Q,T) es localmente secuencialmente compacto, 1_Q la aplicación identidad en Q, es una aplicación continua de (Q,T) en (Q,T') y (Q,T') no es localmente secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.14

Sea (X,T) un espacio topológico localmente secuencialmente compacto, (X',T') un espacio topológico y f una aplicación continua ,abierta y suprayectiva de (X,T) en (X',T'). Entonces (X',T') es localmente secuencialmente compacto.(La secuencial compacidad local, es una propiedad topológica).

Demostración:

Sea $x'\in X$ y $V^{x'}$ un entorno de x' en (X',T') . Como f es suprayectiva y continua, existen $x\in X$ y V^x tales que $f(x) = x'$ y $f(V^x)\subset V^{x'}$. Como por hipótesis (X,T) es localmente secuencialmente compacto, existe W^x secuencialmente compacto con $W^x\subset V^x$. Como f es continua y abierta, por IV.1.11, $f(W^x)$ es un entorno secuencialmente compacto de x' contenido en $V^{x'}$. Asi, (X',T') es localmente secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.15

Sea (X,T) un espacio topológico T_3 y tal que para todo cerrado, C, y secuencialmente compacto, existen $G\in T$ y C' cerrado y secuencialmente compacto cumpliendo que $C\subset G\subset C'$ .Entonces (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

Demostración:

Sea $x\in X$. Como $\{x\}$ es cerrado y secuencialmente compacto, existen $G\in T$ y C' cerrado y secuencialmente compacto cumpliendo que $\{x\}\subset G\subset C'$. Por ser (X,T) T_3, es regular y por tanto existe una base de entornos cerrados contenidos en G que es secuencialmente compacta;(es decir, cada elemento es secuencialmente compacto), ya que estan contenidos en el espacio $(C',T|_{C'})$ secuencialmente compacto. Por tanto (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto, que existe un espacio topológico T_{3a}, localmente secuencialmente compacto, para el cual existe un cerrado secuencialmente compacto, C, tal que no existen $G\in T$ y C' cerrado secuencialmente compacto de modo que se verifique que $C\subset G\subset C'$.

Ejemplo IV.2.16

Se considera el espacio topológico $([a,\Omega],T)$ de III.2.13. Veamos que es secuencialmente compacto.

Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en $[a,\Omega]$. Si existe $P\subset N$, P infinito tal que $x_n=\Omega$ para todo $n\in P$, es evidente que $\{x_n\}_{n\in N}$ contiene una subsucesión que converge a Ω. Supongamos por tanto que $\{x_n\}_{n\in N}\subset[a,\Omega)$. Sea $M=\{x\in[a,\Omega)|\ \exists P\subset N$ infinito con $x_n\in[a,x]$ para todo $n\in P\}$. Se tiene que $M\neq\emptyset$. En efecto:

Como $[a,x_n]$ es numerable para todo $n\in N$ y $[a,\Omega)$ no es numerable, existe $x\in[a,\Omega)$ tal que $x_n\leq x$ para todo $n\in N$. Así $x\in M$. Sea x_0 el primer elemento de M. Entonces existe $P_0\subset N$, infinito, tal que $x_n\in[a,x_0]$ para todo $n\in P_0$. Por tanto, existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ cuya imagen está contenida en $[a,x_0]$. Por otra parte, para todo $x\in[a,x_0)$ se tiene que $\{n\in N|\ x_n\in[a,x]\}$ es finito, así la subsucesión anterior converge a x_0.

Por tanto $([a,\Omega],T)$ es secuencialmente compacto.

Esta demostración prueba que el abierto $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es secuencialmente compacto.

Se considera $A=\{x\in[a,\Omega]|\ [a,x]$ es numerable$\}$. Como $a\in A$, existe ω primer elemento de A. Como $[a,\omega]$ es un cerrado de $([a,\Omega],T)$, se tiene que $([a,\omega],T|_{[a,\omega]})$ es secuencialmente compacto.

Sin embargo $([a,\omega),T|_{[a,\omega)})$ no es secuencialmente compacto. En efecto:

Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ definida por $x_1=a$, x_2 igual al primer elemento del conjunto no vacio $\{x\in[a,\Omega)|\ x>x_1\}$,

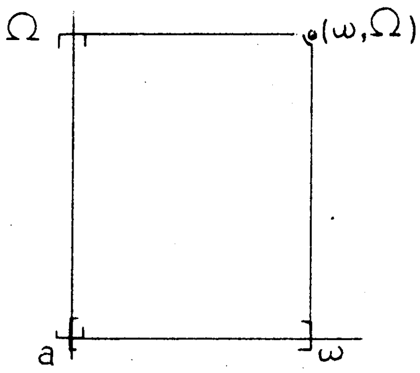
$,\ldots,$ x_n igual al primer elemento del conjunto no vacio $\{ x\in[a,\omega) \mid x > x_{n-1} \}$. Evidentemente esta sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ no tiene ninguna subsucesión convergente en $[a,\omega)$, por la construcción de ω .

Como $([a,\Omega],T)$ y $([a,\omega],T|_{[a,\omega]})$ son espacios secuencialmente compactos, el espacio producto

$$(X,T_p) = ([a,\omega],T|_{[a,\omega]}) \times ([a,\Omega],T)$$

es secuencialmente compacto. Además, este espacio es T_4 por ser compacto y T_2.

Se considera el espacio topológico T_{3a} "Placa de Tychonoff" (X',T'), donde $X' = [a,\omega] \times [a,\Omega] - \{(\omega,\Omega)\}$ y $T' = T_p|_{X'}$



Se tiene que (X',T') no es secuencialmente compacto, ya que si $\{x_n\}_{n\in N}$ es la sucesión construida anteriormente en $[a,\omega)$ la sucesión $\{(x_n,\Omega)\}_{n\in N}$ no tiene ninguna subsucesión convergente en (X',T').

El espacio topológico (X',T') es localmente secuencialmente compacto, ya que como (X,T_p) es T_3, cada punto de (X',T') tiene una base de entornos cerrados en (X,T_p) , y por tanto, secuencialmente compactos.

Supongamos que para todo cerrado y secuencialmente compacto en (X',T') , C, existen $G\in T$ y C' cerrado y secuencialmente compacto de (X',T') de modo que $C \subset G \subset C'$.

Se considera el subconjunto cerrado y secuencialmente compacto $C = \{\omega\} \times [a,\Omega)$ en (X',T'). Entonces existen $G_1 \in T'$ y C_1' cerrado secuencialmente compacto en $(X\ ,T\ )$ cumpliendo la condición de que $C \subset G_1 \subset C_1'$.

Se verifica que existe $x_1 \in [a,\omega)$ tal que $(x_1,\Omega) \in C_1'$. En efecto:

Si $C_1' \cap ([a,\omega) \times \{\Omega\}) = \emptyset$, se tiene que $X' - C_1' = G_1'$ es un abierto que contiene a $[a,\omega) \times \{\Omega\}$ y $G_1 \cap G_1' = \emptyset$. Como G_1' es abierto, para cada (x,Ω) con $x \in [a,\omega)$, existen entornos abiertos V^x, V_x^{Ω} tales que $V^x \times V_x^{\Omega} \subset G_1'$. Entonces

$V_x^{\Omega} \supset \{ y \mid \Omega \geq y > \gamma_x \text{ con } \gamma_x \in [a,\Omega) \}$.

Por la construcción de Ω se tiene que $\{y \mid \Omega > y > \gamma_x\} \neq \emptyset$. Sea $y_x \in \{y \mid \Omega > y > \gamma_x\}$. Como $[a,\omega)$ es numerable, el conjunto $\{y_x \mid x \in [a,\omega)\}$ es numerable. Como $[a,\Omega)$ es no numerable, existe $y_0 \in [a,\Omega)$ tal que $y_0 > y_x$ para todo $x \in [a,\omega)$. Se tiene que $(\omega, y_0) \in C \subset G_1$. Por tanto, existen V^{ω} , V^{y_0} entornos abiertos tales que $V^{\omega} \times V^{y_0} \subset G_1$.

Por la construcción de ω, existe $x_0 \in [a,\omega) \cap V^{\omega}$. Se verifica que $(x_0,y_0) \in G_1$ y $(x_0,y_0) \in G_1'$ $\Big(y_0 > y_{x_0}$ implica que $(x_0,y_0) \in \{(x_0,y) \mid \Omega \geq y > \gamma_{x_0} \text{ con } \gamma_{x_0} \in [a,\Omega)\} \subset V^{x_0} \times V_{x_0}^{\Omega} \subset G_1'\Big)$. Esto contradice que $G_1 \cap G_1' = \emptyset$. Así, existe $x_1 \in [a,\omega)$ tal que $(x_1,\Omega) \in C_1'$.

Sea x_1' el primer elemento de $[a,\omega)$ tal que $x_1' > x_1$. Se considera el conjunto cerrado y secuencialmente compacto

$C_2' = C_1' - [a,x_1') \times [a,\Omega]$. Se tiene que $C_2' \supset G_1 \cap ([x_1',\omega] \times [a,\Omega]) \supset$

$\supset C_1$.

Por un razonamiento análogo al anterior, existe $x_2 \in [a,\omega)$ tal que $(x_2,\Omega) \in C'_2 \subset C'_1$ y $x_2 > x_1$.

Así por inducción se llega a que C'_1 contiene a una sucesión $\{(x_n,\Omega)\}_{n\in N}$ tal que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in N$, lo cual contradice que C'_1 es secuencialmente compacto y cerrado.

Así pues, este espacio topológico (X',T'), localmente secuencialmente compacto y T_3 es tal que en él existe un cerrado C secuencialmente compacto para el cual no existe un cerrado y secuencialmente compacto C' y un abierto $G \in T$ cumpliendo que $C \subset G \subset C'$.

Este mismo ejemplo prueba que existen espacios T_{3a} (X',T') localmente numerablemente compactos, para los cuales existe un cerrado numerablemente compacto, C, tal que no existen $G \in T$ y C' cerrado numerablemente compacto de modo que se verifique $C \subset G \subset C'$.

Definición IV.2.17

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se dice que f es secuencialmente propia si:

1. f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').
2. f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T').
3. Para todo $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ es secuencialmente compacto en (X,T).

ObservaciónIV.2.18

Toda aplicación secuencialmente propia es numerablemente propia.

Veamos con un ejemplo, que existen aplicaciones numerablemente propias que no son secuencialmente propias

Ejemplo IV.2.19

La aplicación $f: ([0,1], T_u|_{[0,1]})^R \longrightarrow (X,T)$ donde X es un conjunto con un único elemento, es numerablemente propia y no es secuencialmente propia (Vease IV.2.21)

Proposición IV.2.20

Proposición IV.2.20

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación . Entonces se tiene:

I) Si f es una aplicación numerablemente propia de (X,T) en (X',T') y (X,T) es subsecuencial, f es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'). (En particular, toda aplicación propia de un espacio topológico subsecuencial en un espacio topológico arbitrario, es secuencialmente propia).

II) Si f es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'), f en general, no es una aplicación propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

I) Es consecuencia de a) y b) de III.4.42 de (18) y de que todo subconjunto numerablemente compacto y subsecuencial es secuencialmente compacto (IV.1.18).

II) El espacio topológico $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ de III.2.13 es secuencialmente compacto.

Se consideran los espacios topológicos $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$, (X',T'), donde $X'=\{y\}$ y $f:[a,\Omega)\longrightarrow X'$ definida por $f(x)=y$ para todo $x\in[a,\Omega)$.

Es evidente que f es secuencialmente propia y sin embargo, f no es una aplicación propia de $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ en (X',T') ya que $f^{-1}(y)$ es $[a,\Omega)$, el cual no es compacto.

Veamos con un ejemplo que la condición subsecuencial que debe cumplir el espacio (X,T) en la proposición anterior, apartado I, es esencial.

Ejemplo IV.2.21

Se considera el espacio topológico $\left([0,1], T_u\big|_{[0,1]}\right)^{[0,1]}$ el cual es compacto y T_2. Veamos que no es secuencialmente compacto. En efecto:

Se representaran los números del intervalo $[0,1]$ por su expresión decimal evitando, con objeto de tener la unicidad, las representaciones en las cuales se repite la cifra "a" a partir de un determinado lugar.

Se considera la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{[0,1]}$, donde para todo $n\in\mathbb{N}$

$$f_n\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x_r}{10^r}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x_{n+r-1}}{10^r} = \frac{x_n}{10} + \frac{x_{n+1}}{10^2} + \dots .$$

La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión convergente en $\left([0,1], T_u\big|_{[0,1]}\right)^{[0,1]}$. En efecto:

Supongamos que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a f. Por III.2.56 de (18), se tiene que $\{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ para todo $x\in[0,1]$.

Sea $x_o = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{x_r}{10^r}$, definido por:

$$x_r = \begin{cases} 1, & \text{si } r = n_k \text{ con } k \text{ impar.} \\ 3, & \text{si } r = n_k \text{ con } k \text{ par.} \\ 0, & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$$

Para todo $k\in\mathbb{N}$, impar, $f_{n_k}(x_o) = \frac{1}{10} + \dots \leq \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right] = \frac{2}{15}$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, par, $f_{n_k}(x_o) = \frac{3}{10} + \ldots. \geq \frac{3}{10}$.

Así, $\{f_{n_k}(x_o)\}_{k\in\mathbb{N}}$ no converge en $([0,1], T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}$ lo cual es un absurdo.

Se considera la aplicación $f:([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]} \longrightarrow (X',T')$ donde $X' = \{y\}$ y f está definida por $f(x) = y$ para todo $x\in[0,1]^{[0,1]}$. (Otra forma de demostrar que $([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}$ no es secuencialmente compacto, consiste en observar que $(\{0,1\},T_D)^{[0,1]}$ es un subespacio cerrado del dado, que no es secuencialmente compacto (I.1.26)).

Es evidente que f es una aplicación propia de $([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}$ en (X',T') pero f no es una aplicación secuencialmente propia de $([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}$ en (X',T') ya que $f^{-1}(y) = [0,1]^{[0,1]}$ no es un subconjunto secuencialmente compacto.

Como $([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}$ es numerablemente compacto y no es secuencialmente compacto, no puede ser subsecuencial.

Esto pone de manifiesto que es esencial que (X,T) sea subsecuencial en IV.2.20(I).

<u>Proposición IV.2.22</u>

Sea (X,T) una espacio topológico secuencialmente compacto, (X',T') un SKC-espacio(En particular,un US-espacio topológico secuencial) y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación continua de (X,T) en (X',T'). Entonces f es secuencialmente propia.

Denostración:

1. f es continua por hipótesis.

2. f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T') por IV.1.23.

3. Para todo $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ es un subconjunto cerrado de (X,T) y por IV.1.6, $f^{-1}(x')$ es secuencialmente compacto.

Asi f es secuencialmente propia.

Proposición IV.2.23

Sea (X,T) un espacio topológico subsecuencial, (X',T') un espacio topológico secuencialmente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación secuencialmente propia y suprayectiva de (X,T) en (X',T') . Entonces (X,T) es secuencialmente compacto.

Demostración:

Como (X',T') es secuencialmente compacto, (X',T') es numerablemente compacto. Por ser f una aplicación secuencialmente propia, f es numerablemente propia. Así por III.2.19, (X,T) es numerablemente compacto y como (X,T) es subsecuencial, resulta que (X,T) es secuencialmente compacto.

Observación IV.2.24

Sin la hipótesis de subsecuencial, en la proposición anterior, para (X,T), se deduce de IV.1.28, que toda sucesión en (X,T) con un número finito de puntos de aglomeración, tiene una subsucesión convergente.

Proposición IV.2.25

Sea (X,T) un espacio topológico, (X',T') un espacio topológico secuencialmente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') tal que para todo $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ es finito (por tanto, f es propia). Entonces (X,T) es secuencialmente compacto.

Demostración:

Sea $S = \{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en X y $S' = f\circ S = \{f(x_n)\}_{n\in N}$ la sucesión en X' imagen por f de S. Como (X',T') es secuencialmente compacto, existe $S'' = \{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ subsucesión de S' que converge en (X',T'). Sean $S_1 = \{x_{n_k}\}_{k\in N}$ y $f^{-1}(x'_o) = \{x_1,..,x_p\}$ donde $x'_o \in \mathrm{Lim}_{T'} S''$.

Supongamos que S_1 no tiene ninguna subsucesión convergente. Para $x_1 \in f^{-1}(x'_o)$, S_1 no converge a x_1. Por tanto, existe V^{x_1}, abierto y existe $S_1^{x_1}$ subsucesión de S_1 tal que $S_1^{x_1}(n) \notin V^{x_1}$, para todo $n\in N$.

Como $S_1^{x_1}$ no converge a x_2, existe V^{x_2}, abierto y existe $S_1^{x_2}$ subsucesión de $S_1^{x_1}$ tal que $S_1^{x_2}(n) \notin V^{x_2}$ para todo $n\in N$.

Así, por inducción, existen $V^{x_1},\dots,V^{x_p}$ abiertos y una subsucesión S_2, de S_1 tal que $S_2(n) \notin V^{x_1}\cup\dots\cup V^{x_p}$ para todo $n\in N$. Como $f^{-1}(x'_o) \subset V^{x_1}\cup\dots\cup V^{x_p}$, se tiene que $X' - f(X - (V^{x_1}\cup\dots\cup V^{x_p}))$ es un entorno abierto $V^{x'_o}$ de x'_o tal que $f(S_2(n)) \notin V^{x'_o}$, para todo $n\in N$, lo cual es absurdo ya que $f\circ S_2$ es una subsucesión de la sucesión S'' que converge a x'_o.

Proposición IV.2.26

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') y $M'\subset X'$. Entonces $f|_{f^{-1}(M')} : f^{-1}(M') \longrightarrow M'$ es una aplicación secuencialmente propia de $(f^{-1}(M'), T|_{f^{-1}(M')})$ en $(M', T|_{M'})$.

Demostración:

1. $f|_{f^{-1}(M')}$ es continua por ser $f:X\longrightarrow X'$ continua de (X,T) en (X',T').

2. $f|_{f^{-1}(M')}$ es cerrada por ser $f:X\longrightarrow X'$ cerrada de (X,T) en (X',T').

3. Como para todo $x'\in M'$, $(f|_{f^{-1}(M')})^{-1}(x') = f^{-1}(x')$ y $f^{-1}(x')$ es secuencialmente compacto, por ser f secuencialmente propia, se tiene que $f|_{f^{-1}(M')}$ es secuencialmente propia de $(f^{-1}(M'),T|_{f^{-1}(M')})$ en $(M',T|_{M'})$.

Proposición IV.2.27

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, (X,T) subsecuencial, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación secuencialmente propia de (X,T) (X',T') y K' un subconjunto secuencialmente compacto de (X',T'). Entonces $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto en (X,T).

Demostración:

Por la proposición anterior, $f|_{f^{-1}(K')}$ es secuencialmente propia de $(f^{-1}(K'),T|_{f^{-1}(K)})$ en $(K',T'|_{K'})$. Como $(K',T'|_{K})$ es secuencialmente compacto, $(f^{-1}(K'),T|_{f^{-1}(K')})$ es subsecuencial (I.1.24) y $f|_{f^{-1}(K')}$ es secuencialmente propia y suprayectiva, por IV.2.23 se tiene que $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto.

Proposición IV.2.28

Sean (X,T), (X',T'), (X'',T'') espacios topológicos con (X,T) subsecuencial, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') y $g:X'\longrightarrow X''$ una aplicación se -

cuencialmente propia de (X',T') en (X'',T''). Entonces $g\circ f:X\longrightarrow X''$ es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X'',T'').

Demostración:

1. $g\circ f$ es una aplicación continua de (X,T) en (X'',T'') ya que es la composición de aplicaciones continuas.

2. $g\circ f$ es una aplicación cerrada de (X,T) en (X'',T'') por ser composición de aplicaciones cerradas.

3. Para todo $x''\in X''$, por ser g secuencialmente propia de (X',T') en (X'',T''), $g^{-1}(x'')$ es secuencialmente compacto de (X',T') y por IV.2.27, por ser (X,T) subsecuencial, $f^{-1}(g^{-1}(x''))$ $= (g\circ f)^{-1}(x'')$ es secuencialmente compacto de (X,T). Así $g\circ f$ es secuencialmente propia.

Proposición IV.2.29

Sean (X,T) un espacio topológico secuencialmente compacto, (X',T') un espacio topológico T_1 y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación continua y cerrada de (X,T) en (X',T'). Entonces f es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Basta demostrar que para todo $x'\in X'$, $f^{-1}(x')$ es subconjunto secuencialmente compacto de (X,T).

Como para todo $x'\in X'$, $\{x'\}$ es un cerrado de (X',T'), se tiene que $f^{-1}(x')$ es un cerrado en (X,T). Así, por IV.1.6, $f^{-1}(x')$ es secuencialmente compacto. Por tanto f es secuencialmente propia.

Proposición IV.2.30

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación. Se consideran las siguientes afirmaciones:

a) f es secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T') y si $S=\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in Lim_{T'} f\circ S$, existen $\{x_{n_k}\}_{k\in N}=S_1$ y $x\in f^{-1}(x')$ tales que $x\in Lim_T S_1$.

c) f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T') y si $S=\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in Agl_{T'} f\circ S$, existen $\{x_{n_k}\}_{k\in N}=S_1$ y $x\in f^{-1}(x')$ tales que $x\in Lim_T S_1$. Entonces se tiene:

I) c)$\Longrightarrow$b)

II) Si (X,T) es subsecuencial, a)$\Longrightarrow$c)$\Longrightarrow$b).

III) Si (X',T') es secuencial, c)$\Longrightarrow$b) $\Longrightarrow$ a).

<u>Demostración</u>:

I) Es consecuencia de que todo punto de convergencia de una sucesión, es de aglomeración.

II) Como $f:X\longrightarrow X'$ es secuencialmente propia, es numerablemente propia y así, por III.2.24 , existe $x\in f^{-1}(x')\cap Agl_T S$.

Como (X,T) es subsecuencial, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N} = S_1$ tal que $x\in Lim_T S_1$.

III) Supongamos que (X',T') es secuencial.

1. f por hipótesis es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Para todo $x'\in X'$, $f^{-1}(x')$ es secuencialmente compacto. En efecto:

Sea $S = \{x_n\}_{n\in N}\subset f^{-1}(x')$. Entonces $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ converge a x' y por tanto existen $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ y $x\in f^{-1}(x')$ tales que $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ converge a x lo cual prueba que $f^{-1}(x')$ es secuencialmente compacto.

3. f es una aplicación cerrada de (X,T) en (X',T'). En efecto:

Sea C un cerrado en (X,T). Veamos que $f(C)$ es un cerrado en (X',T').

Sea $\{x'_n\}_{n\in N}\subset f(C)$ tal que $x'\in Lim\{x'_n\}_{n\in N}$. Para cada $n\in N$, sea $x_n\in C$ tal que $f(x_n) = x'_n$. Se tiene que $S =\{x_n\}_{n\in N}\subset C$.

Como $x' \in \overline{\mathrm{Lim}\{f(x_n)\}_{n\in N}}$, se tiene, por hipótesis, que existen $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ y $x\in f^{-1}(x')$ tales que $x\in \mathrm{Lim}\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ y como C es cerrado, $x\in C$. Así $x' = f(x)\in f(C)$. Luego por ser (X',T') secuencial $f(C)$ es cerrado.

Corolario IV.2.31

Sean (X,T) un espacio subsecuencial, (X',T') un espacio secuencial y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T') y si $S = \{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in \mathrm{Lim}_{T'} f\circ S$, existen $\{x_{n_k}\}_{k\in N}= S_1$ y $x\in f^{-1}(x')$ tales que $x\in\mathrm{Lim}_T\ S_1$

c) f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T') y si $S=\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en X y $x'\in \mathrm{Agl}_{T'} f\circ S$, existen $\{x_{n_k}\}_{k\in N}=S_1$ y $x\in f^{-1}(x')$ tales que $x\in\mathrm{Lim}_T S_1$.

Definición IV.2.32

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación. Se dice que f es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') si:

1. f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Para todo $K'\subset X'$ subconjunto secuencialmente compacto de (X',T'), $f^{-1}(K')$ es un subconjunto secuencialmente compacto en (X,T).

Proposición IV.2.33

Sea $f:(X,T)\longrightarrow (X\ ,T\ )$ una aplicación continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es cuasi-secuencialmente propia.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$, en X tal que $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ converge a x'_0, se verifica que $f^{-1}(\ \{f(x_n)\mid n\in N\}\cup\{x'_0\}\ )$ es secuencialmente compacto.

<u>Demostración:</u>

a) $\Longrightarrow$ b)

Como $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ converge a x'_o , se verifica que $K' = \{f(x_n) \mid n\in N\} \cup \{x'_o\}$ es secuencialmente compacto. En efecto:

Sea $S' = \{x'_n\}_{n\in N}$ una sucesión contenida en K' . Entonces:

1. Existe $M \subset N$, infinito, tal que $S'(m) = x'_o$ para todo $m\in M$. Entonces $S'|_M$ es una subsucesión de S' tal que $S'|_M \longrightarrow x'_o$.

2. Existe $M \subset N$, infinito, tal que $S'(m) \in \{f(x_n) \mid n\in N\}$ para todo $m\in M$. Si $\{S'(m) \mid m\in M\}$ es finito, se sigue que existe $P\subset M$ infinito tal que $S'|_P$ es constante. Asi $S'|_P$ es una subsucesión de S' convergente. Si $\{S'(m) \mid m\in M\}$ es infinito, se sigue que $S'|_M$ es una subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ y por tanto converge a x'_o .

Así, por la hipótesis $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto.

b) $\Longrightarrow$ a)

Sea K' secuencialmente compacto y $\{x_n\}_{n\in N} \subset f^{-1}(K')$. Entonces $\{f(x_n)\}_{n\in N} \subset K'$ lo cual implica que existe $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ convergente a $x'_o \in K'$, por tanto $\{x_{n_k}\}_{k\in N} \subset f^{-1}(\{f(x_n)\}_{n\in N} \cup \{x'_o\})$

Puesto que por hipótesis $f^{-1}(\{f(x_n)\}_{n\in N} \cup \{x'_o\})$ es secuencialmente compacto (y contenido en $f^{-1}(K')$), resulta que $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tiene una subsucesión convergente en $f^{-1}(K')$, que es subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$. Así pues $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto. Luego f es cuasi-secuencialmente propia.

<u>Proposición IV.2.34</u>

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X,T) subsecuencial y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'). Entonces f es una aplicación cuasi-secuencial mente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Como f es secuencialmente propia, f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

Como f es secuencialmente propia, por IV,2.27, se verifica que $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto en (X,T), para todo K' secuencialmente compacto en (X',T'). Por tanto f es cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

Proposición IV.2.35

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X',T') US-espacio secuencial y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'). Entonces f es una aplicacion secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

Es suficiente demostrar que f es una aplicación cerrada.

Sea A un cerrado de (X,T) y $\{x'_n\}_{n\in N} \subset f(A)$, tal que $\{x'_n\}_{n\in N}$ converge a x'_o. Como $f^{-1}(\{x'_n \mid n\in N\} \cup \{x'_o\})$ es secuencialmente compacto (IV.2.33), si $\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en A tal que $f(x_n) = x'_n$, se verifica que existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ contenida en A que converge a un punto x_o de A.

Así, por la continuidad de f, $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ converge a $f(x_o)$ y tambien a x'_o. Luego como (X',T') es un US-espacio, $x'_o = f(x_o) \in f(A)$.

Proposición IV.2.36

Sea (X,T) un espacio topológico, (X',T') un espacio topológico localmente secuencialmente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces:

a) Si (X,T) es regular y f es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'), se tiene que (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

b) Si (X',T') es un SKC-espacio(En particular un US-espacio secuencial) y (X,T) es subsecuencial se verifica que f es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'), si y solamente si, f es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

Demostración:

a) Para todo $x \in X$, como (X',T') es localmente secuencialmente compacto, existe $V^{f(x)}$ entorno secuencialmente compacto de $f(x)$ en (X',T'). Así $f^{-1}(V^{f(x)})$, por ser f cuasi-secuencialmente propia, es un entorno secuencialmente compacto de x en (X,T) y por tanto (X,T) es localmente secuencialmente compacto (IV.2.3).

b) Si f es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'), por IV.2.34, f es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

Recíprocamente:

Sea f cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T'). Como (X',T') es localmente secuencialmete compacto, para todo $x' \in X'$, existe $V^{x'}$ entorno secuencialmente compacto de x' en (X', T'). Por tanto $f|_{f^{-1}(V^{x'})} : f^{-1}(V^{x'}) \longrightarrow V^{x'}$ es una aplicación continua del espacio secuencialmente compacto, $(f^{-1}(V^{x'}), T|_{f^{-1}(V^{x'})})$, en $(V^{x'}, T'|_{V^{x'}})$. Entonces f es una aplicación cerrada de $(f^{-1}(V^{x'}), T|_{f^{-1}(V^{x'})})$ en $(V^{x'}, T'|_{V^{x'}})$, por la definición de SKC-espacio (o IV.1.20).

Así, por V.5.22 de (18) f es una aplicación secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') ya que f es cerrada.

Definición IV.2.37

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se dice que f es una aplicación F-cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') si:

1. f es una aplicación continua de (X,T) en (X',T').

2. Para todo $K' \subset X'$ subconjunto cerrado y secuencialmente compacto de (X',T'), $f^{-1}(K')$ es un subconjunto secuencialmente compacto de (X,T).

Proposición IV.2.38

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Entonces se tiene:

Si f es cuasi-secuencilmente propia, f es F-cuasi-secuencialmente propia.

Proposición IV.2.39

Sean (X,T) un espacio topológico, (X',T') un SKC-espacio y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación F-cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T')

Demostración :

Es consecuencia de la proposición anterior y de la definición de SKC-espacio.

Corolario IV.2.40

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos con (X',T') US-espacio secuencial y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es una aplicación F-cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

Demoatración:

Es consecuencia de la proposición anterior y de IV.1.20.

Corolario IV.2.41

Sean (X,T) un espacio topológico subsecuencial, (X',T') un SKC-espacio(En particular un US-espacio secuencial), localmente secuencialmente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

b) f es cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T').

c) f es F-cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en(X',T').

Demostración:

Es consecuencia de IV.2.39, IV.2.40 y de IV.2.36.

Proposición IV.2.42

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos, (X,T) secuencialmente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación continua de (X,T) en (X',T'). Entonces f es F-cuasi secuencialmente propia.

Demostración:

Es consecuencia de que todo subconjunto cerrado en un espacio secuencialmente compacto es secuencialmente compacto (IV.1 6.).

Observación IV.2.43

Se tienen las siguientes relaciones para una aplicación f de (X,T) en (X',T') :

$$\begin{tikzcd}
\text{secuencialmente propia} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "+(X,T)\text{ subsecuencial}"] & & \text{numerablemente propia} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{cuasi-secuencialmente propia} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{cuasi-numerablemente propia} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{F-cuasi-secuencialmente propia} & & \text{F-cuasi-numerablemente propia}
\end{tikzcd}$$

Los siguientes ejemplos establecen la independencia entre estos tipos de aplicaciones:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{Secuen. propia} & \text{Cuasi-secuen. propia} \arrow[l, Rightarrow, "\text{Ej.C}"', "/" marking] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "\text{Ej.D}", "/" marking] & \text{F-cuasi-secuen. propia} \arrow[l, Rightarrow, "\text{Ej.B}"', "/" marking] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "\text{Ej.D}", "/" marking] \\
\text{Numerab. propia} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Ej.A}"', "/" marking] & \text{Cuasi-numerab. propia} \arrow[l, Rightarrow, "\text{III.2.40(2)}"', "/" marking] \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\text{Ej.A}", "/" marking] & \text{F-cuasi-numerab. propia} \arrow[l, Rightarrow, "\text{III.2.40(3)}"', "/" marking] \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\text{Ej.A}", "/" marking]
\end{tikzcd}$$

<u>Ejemplos IV.2.44</u>

A) Sean $(X,T) = ([0,1] , T_u|_{[0,1]})^R$ espacio topológico numerablemente compacto y que no es secuencialmente compacto (IV.2.21), (X',T') donde $X' = \{y\}$ conjunto formado por un solo punto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación.

Evidentemente f es numerablemente propia y por tanto cuasi-numerablemente propia y F-cuasi-numerablemente propia. Sin embargo, f no es secuencialmente propia, ni cuasi-secuencialmente propia ,ni F-cuasi-secuencialmente propia.

B) Sea (R,T) ,donde R es el conjunto de los números reales y $T = \{(x,\rightarrow) \mid x\in R\}$. En este espacio topológico el único subconjunto secuencialmente compacto y cerrado es el $\emptyset$.

Por consiguiente la aplicación identidad $1_R:(R,T_u)\longrightarrow(R,T)$ donde T_u es la topología usual sobre el cuerpo de los números reales R, es F-cuasi-secuencialmente propia. Sin embargo, no es cuasi-secuencialmente propia, ya que $[0,\rightarrow)$ es secuencialmente compacto en (R,T) y $1_R^{-1}([0,\rightarrow)) = [0,\rightarrow)$ no es secuencialmente compacto en (R,T_u).

C) En el espacio topológico (R,T_{CN}), los subconjuntos secuencialmente compactos, son los finitos, Así, la aplicación identidad $1_R:(R,T_D)\longrightarrow(R,T_{CN})$, donde T_D es la topología discreta sobre el conjunto de los números reales, es cuasi-secuencialmente propia. Sin embargo, no es secuencialmente propia ya que 1_R no es una aplicación cerrada de (R,T_D) en (R,T_{CN}).

D) Sean los espacios topológicos $(X,T) =(N,T_D)$ y $(X',T')=$ $= ([0,1],T_u|_{[0,1]})^R$. Como (X',T') es compacto y no secuencialmente compacto(IV.2.21), existe $S:X=N\longrightarrow X'$ sucesión tal que ninguna subsucesión de S es convergente.

Evidentemente, la aplicación S es continua de (X,T) en (X',T'). Por otra parte, sea K' secuencialmente compacto en (X',T'). Se tiene que $S^{-1}(K')$ es finito en (X,T) ya que en caso contrario S tendria una subsucesión convergente en $(K',T'|_{K'})$ y por tanto en (X',T'). Así $S^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto en (X,T).

Por tanto, S es una aplicación cuasi-secuencialmente propia de (X,T) en (X',T') .Sin embargo S no es cuasi-numerablemente propia ya que $S^{-1}(X') = X = \mathbb{N}$ no es numerablemente compacto.

Observese que S es F-cuasi-secuencialmente propia, pero que no es F-cuasi-numerablemente propia.

Proposición IV.2.45

a) Si $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ es una familia no vacia de espacios topológicos no vacios tal que $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es localmente secuencialmente compacto, se verifica que:

1. (X_i,T_i) es localmente secuencialmente compacto para todo $i\in I$.

2. Existe $F\subset I$, finito, tal que (X_i,T_i) es secuencialmente compacto para todo $i\in I-F$.

b) Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios, localmente secuencialmente compactos. Supongamos que existe $M\subset I$, finito, tal que (X_i,T_i) es secuencialmente compacto para todo $i\in I-M$ y $\operatorname{card}(I)\leq\aleph_0$. Entonces $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ es localmente secuencialmente compacto.

c)Si (X,T) es localmente secuencialmente compacto y (X',T') es localmente numerablemente compacto, se verifica que $(X,T)\times(X',T')$ es localmente numerablemente compacto.

Demostración:

a) 1. Es consecuencia de IV.2.14.

2. Sea $x\in\prod_{i\in I}X_i$. Por ser $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ localmente secuencialmente compacto , existe V^x entorno secuencialmente compacto de x en $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$. Así, existe $F\subset I$, finito, tal que $p_i(V^x)=X_i$, para todo $i\in I-F$. Por tanto, por IV.1.11, (X_i,T_i) es secuencialmente compacto para todo $i\in I-F$.

b) Sean $x=(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i$ y V^x un entorno de x en $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$. Se tiene que $V^x\supset\prod_{i\in I}V^{x_i}$ tal que existe

$H\subset I$, finito, con $V^{x_j} = X_j$, para todo $j\in I-H$. Para cada $i\in I-(H\cup M)$, sea $W^{x_i}= X_i$ y para todo $i\in H\cup M$ sea W^{x_i} un entorno secuencialmente compacto de x_i en (X_i,T_i) contenido en V^{x_i}. Por IV.1.15(c), $W^x= \prod_{i\in I} W^{x_i}$ es un entorno secuencialmente compacto de x en $\prod_{i\in I}(X_i,T_i)$ contenido en V^x . Así, $\prod_{i\in I}(X_i,T_i))$

es localmente secuencialmente compacto .

c) Sean $(x,x')\in X \times X'$ y $W^{(x,x')}= W^x \times W^{x'}$. Como (X,T) es localmente secuencialmente compacto, existe V^x entorno de x contenido en W^x tal que $(V^x,T|_{V^x})$ es secuencialmente compacto. Como (X',T') es localmente numerablemente compacto, existe $V^{x'}$, entorno de x' contenido en $W^{x'}$ tal que $(V^{x'},T'|_{V^{x'}})$ es numerablemente compacto. Puesto que $V^x \times V^{x'}$ es un entorno de (x,x') en $(X,T) \times (X',T')$ contenido en $W^{(x,x)}$ y $(V^x,T|_{V^x})\times(V^{x'},T'|_{V^{x'}})$, por IV.1.15(d), es numerablemente compacto, resulta que $(X,T) \times (X',T')$ es localmente numerablemente compacto.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que el espacio cociente de un espacio localmente secuencialmente compacto no es un espacio localmente secuencialmente compacto, en general.

<u>Ejemplo IV.2.46</u>

El espacio topológico (R,T_u) es localmente secuencialmente compacto. Sin embargo, $(R/Z,T_u/Z)$ no es localmente secuencialmente compacto. En efecto:

Dado $V^{[Z]}$, entorno de $[Z]$ en $(R/Z, T_u/Z)$, se verifica que $p^{-1}(V^{[Z]}) \supset \bigcup_{z\in Z}(z - \varepsilon_z, z + \varepsilon_z)$, donde $0<\varepsilon_z<1$. $(p:R\longrightarrow R/Z)$

Se considera la sucesión $\left\{x_n = n + \frac{\varepsilon_n}{2}\right\}_{n\in N}$. Entonces, $\left\{y_n = p(x_n)\right\}_{n\in N}$ es una sucesión en $V^{[Z]}$ que no tiene ninguna subsucesión convergente($p(\bigcup_{z\in Z}(z-\varepsilon_z, z+\varepsilon_z)) - \{x_n \mid n\in N\}$) es un entorno de Z que no contiene a ningun elemento de $\{y_n\}_{n\in N}$.

Proposición IV.2.47

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es localmente secuencialmente compacto.

b) (X_i,T_i) es localmente secuencialmente compacto para todo $i\in I$.

Demostración:

Es consecuencia de que para todo $j\in I$, $X_j \times \{j\}$ es abierto en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$.

Proposición IV.2.48

Sea (X,T) un espacio localmente secuencialmente compacto. Entonces, si (X,T) es un SKC-espacio (En particular, si (X,T) es un US-espacio secuencial), se verifica que (X,T) es regular. (En particualr, T_3).

Demostración:

Sean $x\in X$ y V^x un entorno de x. Por hipótesis, existe W^x, entorno secuencialmente compacto de x en (X,T) con $W^x\subset V^x$. Como (X,T) es un SKC-espacio, W^x es cerrado. Así, (X,T) es regular.

(US-espacio secuencial implica SKC-espacio T_1).

CAPITULO V

NUMERABLE COMPACTIFICACION DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

ϕI. GENERALIDADES

En este párrafo se definen la numerable compactificación de un espacio topológico y la relación de preorden entre ellas.

Además se establecen propiedades de caracter general de estos conceptos.

Definición V.1.1

Sea (X,T) un espacio topológico. Se dice que $((X',T'),f)$ es una numerable compactificación de (X,T) si:

1. (X',T') es numerablemente compacto.
2. $\overline{f(X)} = X'$.
3. f es un homeomorfismo de (X,T) en $(f(X), T'|_{f(X)})$.

Si además $((X',T'),f)$ satisface la siguiente 4ª condición, se dice que $((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación de (X,T):

4. Para todo cerrado numerablemente compacto, C, en (X,T) se verifica que $f(C)$ es cerrado en (X',T').

Observación V.1.2

A) Toda F-numerable compactificación $((X',T'),f)$ de un espacio T_{3a}, (X,T), tal que (X',T') es T_{3a} es una numerable compactificación de (X,T) en el sentido de K. Morita (28).

B) Toda compactificación $((X',T'),f)$ de un espacio topológico (X,T), es una numerable compactificación de (X,T).

C) Toda F-numerable compactificación $((X', T'),f)$ de un espacio topológico (X,T) es una numerable compactificación de (X,T) (por la definición).

D) $((X',T'),f)$ es una numerable compactificación de (X,T) tal que (X',T') es un NKC-espacio,(En particular un US-espacio secuencial),(II.1.1.(c)),$((X',T'),f)$es una F-numerable compactificación de (X,T).

E) Si (X,T) es isocompacto y T_{3a}(En particular paracompacto o metrizable)(VI.2.13,VI.2.18) toda compactificación T_1 de (X,T) es una F-numerable compactificación T_{3a} de (X,T). Así, todo espacio isocompacto y T_{3a} admite una F-numerable compactificación T_{3a}.

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto, relaciones entre las compactificaciones, las numerable compactificaciones y las F-numerable compactificaciones de un espacio topológico (X,T), en cuanto a su dependencia.

Ejemplos V.1.3

A) Con este ejemplo se prueba que existen numerable compactificaciones de un espacio topológico (X,T) que no son compactificaciones de (X,T).

Sea $([a,\Omega],T)$ el espacio topológico considerado en III. 2.13. Se demostró, que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es numerablemente compacto y no compacto.

Se considera el espacio topológico $(Y=[a,\Omega)-\{\omega\},T|_Y)$ $=(Y,T|_Y)$. Veamos que $(Y,T|_Y)$ no es numerablemente compacto. En efecto:

La sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ definida por $x_1=a$; x_2 igual al primer elemento del conjunto no vacio $\{x\in[a,\omega)|x>x_1\}$;....; x_n igual al primer elemento del conjunto no vacio $\{x\in[a,\omega)|x>x_{n-1}\}$; .... , no tiene punto de aglomeración en $(Y,T|_Y)$. El posible punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in N}$ debe ser un punto $y\in[a,\omega)$. Pero esto lleva a un absurdo, pues si $y\in[a,\omega)$, existe $n_1\in N$ tal que $y=x_{n_1}$. Entonces para $V^y=[a,x_{n_1+1})$ y para $n_0=n_1+2$ no existe $n\in N$ con $n_1+2=n_0\leq n$ y tal que $x_n\in[a,x_{n_1+1})$

pues $x_{n_0} = x_{n_1+2} = x_{n_1+1}+1 \notin [a, x_{n_1+1})$, donde $x_{n_1+1}+1$ es el siguiente de x_{n_1}, y $x_{n_0} \leq x_n$.

Así pues, la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ no tiene punto de aglomeración en $(Y,T|_Y)$ y por tanto $(Y,T|_Y)$ no es numerablemente compacto.

En estas condiciones, $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}),j)$, donde j es la inclusión $j\colon [a,\Omega)-\{\omega\} \longrightarrow [a,\Omega)$ es una numerable compactificación de $(Y,T|_Y)$ ya que:

1. $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es numerablemente compacto.

2. La inclusión $j\colon [a,\Omega)-\{\omega\} \longrightarrow [a,\Omega)$ es un homeomorfismo de $(Y,T|_Y)$ en $(j(Y)=Y,T|_{j(Y)=Y})$.

3. $\overline{j(Y)} = \overline{[a.\Omega)-\{\omega\}} = [a,\Omega)$.

Pero $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}),j)$ no es una compactificación de $(Y,T|_Y)$ ya que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ no es compacto.

B) Este ejemplo pone de manifiesto que existen F-numerable compactificaciones de un espacio topológico (X,T) que no son compactificaciones de (X,T).

Sea $(X,T) = ([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ que es un espacio topológico numerablemente compacto. Es evidente que $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}),$ $1_{[a,\Omega)})$ es una F-numerable compactificación de (X,T) la cual no es una compactificación de (X,T) ya que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ no es compacto.

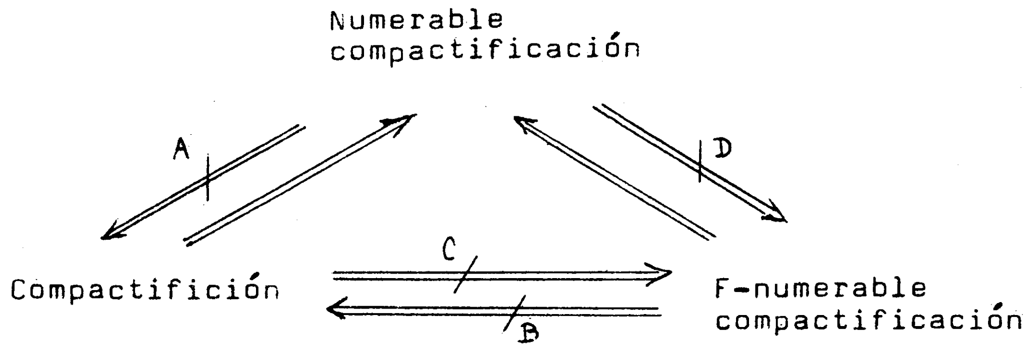
C) El siguiente ejemplo muestra la independencia entre las compactificaciones para un espacio topológico (X,T) y las F-numerables compactificaciones de (X,T).

Sea $(X,T) = ([a,\Omega), T|_{[a,\Omega)})$ el espacio topológico del ejemplo III.2.13 el cual no es compacto. Se considera la compactificación de Alexandroff $(([a,\Omega], T^{*}), j)$. Es evidente que esta compactificación no es una F-numerablecompactificación de (X,T), ya que $[a,\Omega)$ es cerrado en (X,T), pero $j([a,\Omega)) = [a,\Omega)$ no es cerrado en $((X^{*} = [a,\Omega], T^{*}), j)$.
($j: [a,\Omega) \longrightarrow [a,\Omega]$ es la inclusión).

D) El siguiente ejemplo muestra la independencia entre las numerable compactificaciones de un espacio topológico (X,T) y las F-numerable compactificaciones para (X,T).

El ejemplo IV.2.16 muestra que el espacio $((X,T_p),j)$, que es la compactificación de Alexandroff de (X',T'), es una numerable compactificación de (X',T'). Sin embargo $((X,T_p),j)$ no es una F-numerable compactificación de (X',T') ya que $\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es cerrado y numerablemente compacto en (X',T') y $j(\{\omega\}\times[a,\Omega))$ no es cerrado en (X,T_p).

El siguiente cuadro resume las relaciones existentes entre las compactificaciones, las numerable compactificaciones y las F-numerable compactificaciones .



Proposición V.1.4

Sea (X,T) un espacio topológico. Se consideran $\mathcal{C}_N = \{((X',T'),f) \mid ((X',T'),f)$ es una numerable compactificación de $(X,T)\}$ (resp. $\mathcal{C}_{F-N} = \{((X',T'),f) \mid ((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación de $(X,T)\}$), y la relacion binaria, $\preccurlyeq$, en $\mathcal{C}_N$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-N}$) definida por

$((X',T'),f) \preccurlyeq ((X'',T''),f')$ si y solamente si existe una aplicación continua y suprayectiva, g, de (X'',T'') en (X',T') tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' & & X'' \arrow[ll, "g"'] \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces $\preccurlyeq$ es un preorden en $\mathcal{C}_N$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-N}$).

Demostración:

Es evidente que $\preccurlyeq$ cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

Proposición V.1.5

Sea (X,T) un espacio topológico y $(\mathcal{C}_N, \preccurlyeq)$ el conjunto preordenado definido en la proposición anterior (resp. $(\mathcal{C}_{F-N}, \preccurlyeq)$). Se considera en $\mathcal{C}_N$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-N}$) la relación binaria, $\mathcal{R}$, definida por $((X',T'),f)\, \mathcal{R}\, ((X'',T''),f')$ si y solamente si existe un homeomorfismo, h, de (X'',T'') en (X',T') tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "h"] & & X'' \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces se tiene:

a) $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(Dos numerable compactificaciones (resp. F-numerable compacticaciones) $\mathcal{R}$-relacionadas, se dicen topologicamente equivalentes.)

b) $\preccurlyeq$ es compatible con $\mathcal{R}$. Por tanto, $\preccurlyeq$ induce una relación de preorden en $\mathcal{C}_{N/\mathcal{R}}$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-N/\mathcal{R}}$) que denotaremos por $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$.

Demostración:

a) Es consecuencia de que la identidad, la inversa de un homeomorfismo y la composición de homeomorfismos son homeomorfismos.

b) Es consecuencia de la propiedad transitiva de $\preccurlyeq$ en $\mathcal{C}_N$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-N}$) y de que $\mathcal{R} \subset \preccurlyeq$.

Sin embargo, veamos con un ejemplo que, en general, $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ no es un orden en $\mathcal{C}_{N/\mathcal{R}}$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-N/\mathcal{R}}$).

Ejemplo V.1.6

Se considera el espacio topológico (X,T), donde $X = (2,\rightarrow) = \{x \in R \mid x > 2\}$ y $T = \{(a,\rightarrow) \mid a \in (2,\rightarrow)\}$.

Sean $X' = X \cup S^1$, $T' = \{X \cup G \mid G \in T_u^2|_{S^1}\} \cup T$, $X'' = X \cup [-1,1]$ y $T'' = \{X \cup A \mid A \in T_u|_{[-1,1]}\} \cup T$.

Es evidente que $((X',T'),j)$ y $((X'',T''),j')$, donde j y j' son las inclusiones de X en X' y de X en X'' respectivamente, son F-numerable compactificaciones de (X,T).

Se tiene que $g: X' \longrightarrow X''$, definida por:

$$g(x') = \begin{cases} x' & \text{, si } x' \in X \\ \\ x'_1 & \text{, si } x' = (x'_1, x'_2) \in S^1 \end{cases},$$

es una aplicación continua y suprayectiva de (X',T') en (X'',T'') tal que $g \circ j = j'$.

Analogamente, $h:X''\longrightarrow X'$, definida por

$$h(x'')=\begin{cases} x'' & , \text{ si } x''\in X \\ (\cos\pi x'', \operatorname{sen}\pi x'') & , \text{ si } x''\in[-1,1] ,\end{cases}$$

es una aplicación continua y suprayectiva de (X'',T'') en (X',T') tal que $j = h\circ j'$.

Así, $((X',T')j) \preccurlyeq ((X'',T''),j')$ y $((X'',T''),j') \preccurlyeq ((X',T'),j)$ y sin embargo, $((X',T'),j) \not\mathcal{R} ((X'',T''),j')$ ya que (X',T') y (X'',T'') no son homeomorfos.

Sin embargo se tiene el siguiente resultado:

<u>Proposición V.1.7</u>

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f),((X'',T''),f')$ dos numerable compactificaciones (resp. F-numerable compactificaciones) de (X,T) tales que:

a) $((X',T'),f) \preccurlyeq ((X'',T''),f')$ y $((X'',T''),f') \preccurlyeq ((X',T'),f)$,

b) (X',T') ó (X'',T'') es un espacio topológico T_2. Entonces $((X',T'),f) \mathcal{R} ((X'',T''), f')$.

<u>Demostración</u>:

Por la condición a) se tiene que existe una aplicación continua y suprayectiva ,h, de (X'',T'') en (X',T') tal que $h\circ f'=f$ y existe una aplicación continua y suprayectiva, g, de (X',T') en (X'',T'') tal que $g\circ f = f'$.

Se tiene evidentemente que

$$g\circ h\Big|_{f'(X)} = 1_{f'(X)} \quad \text{y} \quad h\circ g\Big|_{f(X)} = 1_{f(X)}$$

$(\forall x''\in f'(X),\ x''=f'(x)\quad g\circ h(x'') = g\circ h(f'(x)=g\circ f(x)=f'(x) = x'')$

Puesto que $f'(X)$ y $f(X)$ son subconjuntos densos en (X'',T'')

y en (X',T') respectivamente se tiene que $g\circ h = 1_{X''}$ o $h\circ g = 1_X$ y puesto que h y g son suprayectivas, se verifica que h y g son homeomorfismos inversos uno del otro.

Definición V.1.8

Una numerable compactificación $((X',T'),f)$ de un espacio topológico (X,T) (resp. F-numerable compactificación) cuyo espacio topológico (X',T') es T_2, se dice que es una numerable compactificación de Hausdorff (resp. F-numerable compactificación de Hausdorff).

Proposición V.1.9

Sea (X,T) un espacio topológico, $\mathscr{C}^H_N = \{((X',T'),f) \mid ((X',T'),f)$ es una numerable compactificación de Hausdorff de $(X,T)\}$ (resp. $\mathscr{C}^H_{F-N} = \{((X',T'),f) \mid ((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación de Hausdorff de $(X,T)\}$) y $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia sobre $\mathscr{C}^H_N$ (respectivamente sobre $\mathscr{C}^H_{F-N}$) definida en V.1.5. Entonces $\leq_{\mathscr{R}}$ es una relación de orden en $\mathscr{C}^H_N/\mathscr{R}$ (resp. sobre $\mathscr{C}^H_{F-N}/\mathscr{R}$).

Demostración:

Es consecuencia de V.1.7

Proposición V.1.10

Sea (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$ una numerable compactificación T_3 de (X,T) con (X',T') secuencial. (por V.1.2(D), $((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación de (X,T)). ntonces, $f(X)$ es abierto en (X',T') si y solamente si (X,T) es localmente numerablemente compacto. (La condición de secuencial solo se utiliza para demostrar que si (X,T) es localmente compacto, entonces $f(X)$ es abierto en (X',T')).

Demostración:

Supongamos que $f(X)$ es abierto en (X',T'). Como (X',T') es numerablemente compacto y T_3, (X',T') es localemente numerablemente compacto y así por III.2.10, $(f(X),T'|_{f(X)})$ es localmente numerablemente compacto y por tanto (X,T) es localmente numerablemente compacto.

Reciprocamente: Supongamos que (X,T) es localmente numerablemente compacto. Entonces $f(X)$ es localmente numerablemente compacto. Como (X',T') es T_3 y secuencial, por III.2.12, existen $G'\in T'$ y C' cerrado en (X',T') tales que $f(X) = G'\cap C'$. Como $\overline{f(X)} = X'$ se tiene que $C' = X'$ y por tanto $f(X) = G'\in T'$.

Ejemplo V.1.10* Sean (X,T) y (X',T') los espacios topológicos considerados en III.2.13. Se tiene que $((X,T),j)$ es una numerable compactificación de (X',T'). El espacio (X',T') es localmente numerablemente compacto y sin embargo X' no es abierto en (X,T). Así, la condición de ser secuencial el espacio (X',T'), de la proposición V.1.10, es esencial.

Proposición V.1.11

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ numerable compactificaciones de (X,T), con (X',T') I.A.N. y (X'',T'') T_3 y secuencial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $((X'',T''),f') \precsim ((X',T'),f)$

b) Para todo C_1,C_2 cerrados en (X,T) con $C_1\cap C_2 = \emptyset$ tales que $\overline{f'(C_1)}\cap\overline{f'(C_2)} = \emptyset$ se verifica que $\overline{f(C_1)}\cap\overline{f(C_2)} = \emptyset$.

Demostración:

a) $\Longrightarrow$ b)

Por ser $((X'',T''),f') \precsim ((X',T'),f)$ existe una aplicación continua y suprayectiva, h, de (X',T') en (X'',T'') tal que $h\circ f = f'$.

Así, de $h(\overline{f(C_1)}\cap\overline{f(C_2)})\subset\overline{h\circ f(C_1)}\cap\overline{h\circ f(C_2)} = \overline{f'(C_1)}\cap\overline{f'(C_2)}$ $= \emptyset$ se concluye que $\overline{f(C_1)}\cap\overline{f(C_2)} = \emptyset$.

b) $\Longrightarrow$ a)

Se considera la aplicación continua $g = f'\circ f^{-1}$ de

$(f(X),T'|_{f(X)})$ en (X'',T'') .

Sea $x_o \in X' - f(X)$. Como (X',T') es de Frechet, existe $\{x_n\}_{n\in N} \subset f(X)$ tal que $x_o \in \mathrm{Lim}_{T'}\{x_n\}_{n\in N}$. Como (X'',T'') es numerablemente compacto, existe $x_o'' \in X''$, punto de aglomeración, de $\{g(x_n)\}_{n\in N}$ en (X'',T''). Se verifica que x_o'' es el único punto de aglomeración de $\{g(x_n)\}_{n\in N}$. En efecto:

Supongamos que y_o'' es punto de aglomeración de $\{g(x_n)\}_{n\in N}$ en (X'',T''), distinto de x_o''. Como (X'',T'') es T_3, existen $V^{x_o''}$, $V^{y_o''}$ tales que $\overline{V^{x_o''}} \cap \overline{V^{y_o''}} = \emptyset$. Así,por hipótesis, tomando $C_1 = \overline{f'^{-1}(\overline{V^{x_o''}})}$ y $C_2 = \overline{f'^{-1}(\overline{V^{y_o''}})}$, se tiene que

$\overline{g^{-1}(\overline{V^{x_o''}})} \cap \overline{g^{-1}(\overline{V^{y_o''}})} = \emptyset$ y por tanto $X' = (X' - \overline{g^{-1}(\overline{V^{x_o''}})}) \cup (X' - \overline{g^{-1}(\overline{V^{y_o''}})})$. Supongamos que $x_o \in X' - \overline{g^{-1}(\overline{V^{y_o''}})}$. Entonces, existe $n_o \in N$ tal que $x_n \in X' - \overline{g^{-1}(\overline{V^{y_o''}})}$, para todo $n \geq n_o$.

Como $V^{y_o''} \cap \{g(x_n) \mid n \geq n_o\} = \emptyset$, se verifica que y_o'' no es punto de aglomeración de $\{g(x_n)\}_{n\in N}$.

De forma análoga se prueba que si $x_o \in X' - \overline{g^{-1}(\overline{V^{x_o''}})}$, entonces x_o'' no es punto de aglomeración de $\{g(x_n)\}_{n\in N}$. Así, $\{g(x_n)\}_{n\in N}$ tiene un único punto de aglomeración y como (X'',T'') es numerablemente compacto, por VIII.1.5(II)(d) de (23), se verifica que $\{g(x_n)\}_{n\in N}$ converge en (X'',T'').

Veamos que si $\{y_n\}_{n\in N}$ es otra sucesión en $f(X)$ tal que $x_o \in \mathrm{Lim}_{T'}\{y_n\}_{n\in N}$, se verifica que $\{g(y_n)\}_{n\in N}$ converge al mismo punto al que converge $\{g(x_n)\}_{n\in N}$. En efecto:

Se considera $\{z_n\}_{n\in N}$ definida por $z_{2n} = x_n$ y $z_{2n-1}=y_n$, para todo $n\in N$. Se tiene que $\{z_n\}_{n\in N} \subset f(X)$ y $x_o \in Lim_{T'}\{z_n\}_{n\in N}$

Así, $Lim_{T''}\{g(z_n)\}_{n\in N} = z''_o \in X''$. Por tanto $x''_o = Lim_{T''}\{g(z_{2n})\}_{n\in N} = z''_o =$
$= Lim_{T''}\{g(z_{2n-1})\}_{n\in N} = y''_o$.

Se considera la aplicación $\bar{g}: X' \longrightarrow X''$ definida por:

$\bar{g}(x') = Lim_T\{g(x'_n)\}_{n\in N}$, donde $\{x'_n\}_{n\in N} \subset f(X)$ y $Lim_{T'}\{x'_n\}_{n\in N} = x'$.

Por VII.6.23(b) de(23), se verifica que $\bar{g}$ es una aplicación continua de (X',T') en (X'',T'') tal que $\bar{g}|_{f(X)} = g$.

Además, como $\bar{g}(X')$ es numerablemente compacto en (X'',T''), por III.1.21, se tiene que $\bar{g}(X')$ es cerrado en (X'',T''). Teniendo en cuenta que $\bar{g}(X') \supset f'(X)$ se concluye que $\bar{g}(X') = X''$. Así, $((X',T'),f) \geq ((X'',T''), f')$.

<u>Corolario V.1.12</u>

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ numerable compactificaciones T_3 de (X,T), tales que (X',T') y (X'',T'') cumplen el I.A.N.. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $((X',T'),f)$ y $((X'',T''),f')$ son topológicamente equivalentes.

b) Para todo C_1,C_2 subconjuntos cerrados en (X,T) y disjuntos, se verifica que $\overline{f'(C_1)} \cap \overline{f'(C_2)} = \emptyset$ si y solamente si $\overline{f(C_1)} \cap \overline{f(C_2)} = \emptyset$.

<u>Demostración</u>:

Es consecuencia del resultado anterior y de V.1.7.

§ 2. NUMERABLES COMPACTIFICACIONES POR UN SOLO PUNTO

En este párrafo, se introduce la F-numerable compactificación de Alexandroff y se realiza un estudio paralelo a las compactificaciones de Alexandroff usuales.

Definición V.2.1

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$ una F-numerable compactificación de (X,T). Se dice que $((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación de (X,T) por n-puntos, si $X'-f(X)$ consta de n elementos.

Proposición V.2.2

Sean (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto. Se considera $X^* = X\cup\{\infty\}$,donde $\infty\notin X$ y $T^* = T\cup\{G^*\subset X^* \mid X^*-G^*$ es un cerrado y numerablemente compacto en $(X,T)\}$. Entonces $((X^*,T^*),j)$ dende j es la inclusión de X en X^* es una F-numerable compactificación por un solo punto de (X,T).

Demostración:

1. T^* es una topologia en X^* .

a) $\emptyset\in T\subset T^*$; $X^*\in T^*$ ya que $X^*-X^*=\emptyset$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T).

b) Si $G_1,G_2\in T$, $G_1\cap G_2\in T\subset T^*$.

Si $G_1\in T$ y $G_2 = G_2^*$, $G_1\cap G_2 = G_1\cap(X-(X^*-G_2))\in T\subset T^*$.

Si $G_1 = G_1^*$ y $G_2 = G_2^*$, $X^*-(G_1^*\cap G_2^*) = (X^*-G_1^*)\cup(X^*-G_2^*)$ que es cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Por tanto $G_1^*\cap G_2^*\in T^+$.

c) Sea $\{G_i^*\}_{i\in I}\subset T^*$. Si $\{G_i^*\}_{i\in I}\subset T$, $\bigcup_{i\in I} G_i^*\in T\subset T^*$.

Supongamos que existe $i_0\in I$ tal que $G_{i_0}^*\notin T$. Entonces

$X^* - \bigcup_{i\in I} G_i^* = \bigcap_{i\in I} (X^* - G_i^*) \subset X^* - G_{i_0}^*$. Así $X^* - \bigcup_{i\in I} G_i^*$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Por tanto $\bigcup_{i\in I} G_i^* \in T^*$.

2º. $T^*|_X = T$, ya que si $X^* - G^*$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T), $G^* \cap X = X - (X - G^*) \in T$. Por tanto, j es un homeomorfismo de (X,T) en $(X,T^*|_X)$.

3º $\bar{X} = X^*$, ya que $\{\infty\} \notin T^*$ ($X^* - \{\infty\} = X$ no es numerablemente compacto).

4º. (X^*,T^*) es numerablemente compacto. En efecto:

Sea $\{A_n\}_{n\in N}$ un recubrimiento numerable de abiertos de (X^*,T^*). Entonces existe $n_0 \in N$ tal que $\infty \in A_{n_0}$. Por tanto, $X^* - A_{n_0}$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Por 2º. se tiene que $\{A_n \cap (X^* - A_{n_0})\}_{n\in N-\{n_0\}}$ es un recubrimiento abierto de $X^* - A_{n_0}$. Así, existe $F \subset N - \{n_0\}$, finito, tal que $X^* - A_{n_0} = \bigcup_{n\in F} [A_n \cap (X^* - A_{n_0})]$. Por tanto $X^* = A_{n_0} \cup (\bigcup_{n\in F} A_n)$.

5º. Sea C un cerrado numerablemente compacto de (X,T). Se tiene que $j(C) = C$ es cerrado en (X^*,T^*), ya que $X^* - C \in T^*$.

Así queda probado que $((X^*,T^*),j)$ es una F-numerable compactificación de (X,T).

<u>Definición.V.2.3</u>

A la F-numerable compactificación $((X^*,T^*),j)$ de (X,T), construida en V.2.2, se le llama de Alexandroff.

<u>Proposición V.2.4</u>

Sean (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto y $((X^*,T^*),j)$ la F-numerable compactificación de Alexandroff.

Entonces se tiene:

(X^*,T^*) es $T_1 \Longleftrightarrow (X,T)$ es T_1 .

Demostración:

($\Longrightarrow$)

Es consecuencia de que T_1 es hereditario.

($\Longleftarrow$) En efecto:

Basta considerar, por ser $X \in T$, el caso en que se tengan puntos distintos siendo uno de ellos ∞ .

Para todo $x \in X$, como $\{x\}$ es cerrado y numerablemente compacto, $X^* - \{x\}$ es entorno abierto de ∞ que no contiene a x . Ademas X es un entorno de x que no contiene a ∞ .

Proposición V.2.5 (Teorema de Alexandroff para las F-numerables compactificaciones)

Sea (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto y T_1. Entonces:

a) (X,T) admite una F-numerable compactificación T_1 por un solo punto.

b) Dos F-numerable compactificaciones por un solo punto T_1 de (X,T) son topológicamente equivalentes.

Demostración:

a) Basta considerar la F-numerable compactificación de Alexandroff de (X,T).

b) Sean $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ dos F-numerable compactificaciones por un solo punto y T_1 de (X,T). Sean $\{\infty\} = X' - f(X)$ y $\{\infty'\} = X'' - f'(X)$. Se considera la aplicación $h: X' \longrightarrow X''$ definida por

$$h(x') = \begin{cases} f' \circ f^{-1}(x') & ,\text{si } x' \neq \infty . \\ \\ \infty' & ,\text{si } x' = \infty . \end{cases}$$

Se tiene que $h \circ f = f'$ y h es biyectiva. Veamos que h es un homeomorfismo.

Sea $G' \in T'$. Si $\infty' \notin G'$, $h(G') = f' \circ f^{-1}(G')$ que es un abierto en $(f'(X), T''|_{f'(X)})$ y como $f'(X)$ es abierto en (X'', T''), se tiene que $h(G') \in T''$.

Si $\infty' \in G'$, $X' - G'$ es cerrado y numerablemente compacto en $(f(X), T'|_{f(X)})$. Por tanto $h(X' - G') = f' \circ f^{-1}(X' - G')$ es cerrado y numerablemente compacto en $(f'(X), T''|_{f'(X)})$. Por consiguiente $h(X' - G') = X'' - h(G')$ es cerrado y numerablemente compacto en (X'', T''). Así $h(G') \in T''$. Luego h es una aplicación abierta.

De forma análoga se prueba que h^{-1} es una aplicación abierta y por tanto que h es un homeomorfismo.

<u>Proposición V.2.6</u>

Sea (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto. Entonces se tiene:

a) La F-numerable compactificación de Alexandroff de (X,T), $((X^*, T^*), j)$ es $T_2 \Longleftrightarrow$ I) (X,T) es T_2. II) Para todo $x \in X$ existe V^x cerrado y numerablemente compacto en (X,T).

b) (X,T) admite una F-numerable compactificación T_2 por un solo punto $\Longleftrightarrow$ I) (X,T) es T_2. II) Para todo $x \in X$ existe V^x cerrado y numerablemente compacto en (X,T).

<u>Demostración</u>:

a) $(\Longleftarrow)$.

Como $X \in T^*$ y (X,T) es T_2 es suficiente considerar dos puntos distintos con uno de ellos igual a ∞.

Sea $x \in X$. Por hipótesis, existe V^x cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Entonces $X - V^x = V^\infty$ y $V^\infty \cap V^x = \emptyset$.

b) $(\Longrightarrow)$.

Sea $((X', T'), f)$ una F-numerable compactificación T_2 por un solo punto de (X,T). Como el axioma T_2 es una propiedad topológica hereditaria, se tiene que (X,T) es T_2.

Sea $x \in X$. Como (X',T') es T_2, existen $V^{f(x)}$ y $V^{\infty'}$ ($\{\infty'\} = X' - f(X)$) abiertos en (X',T') y tales que $V^{f(x)} \cap V^{\infty'} = \emptyset$. Entonces $X' - V^{\infty'} \supset V^{f(x)} \ni f(x)$, $X' - V^{\infty'}$ es cerrado en (X',T') y por tanto es numerablemente compacto en (X',T').

Como $X' - V^{\infty'} \subset f(X)$, $V^x = f^{-1}(X' - V^{\infty'})$ es un entorno cerrado y numerablemente compacto de x en (X,T).

Las otras implicaciones de a) y b), son consecuencia de los anteriores.

Proposición V.2.7

Sea (X,T) un espacio topológico .Entonces se tiene:

a) $((X^*,T^*),j)$ es $T_3 \Longleftrightarrow$ 1º (X,T) es T_3 . 2º Para todo cerrado C y numerablemente compacto, existen $G \in T$ y C' cerrado y numerablemente compacto en (X,T) tales que $C \subset G \subset C'$. (Por tanto, (X,T) es localmente numerablemente compacto).

b) (X,T) admite una F-numerable compactificación T_3, por un solo punto, $((X',T'),f) \Longleftrightarrow$ 1º (X,T) es T_3. 2º Para todo cerrado y numerablemente compacto C, existen $G \in T$ y C' cerrado y numerablemente compacto tales que $C \subset G \subset C'$. (Por tanto, (X,T) es localmente numerablemente compacto).

Demostración:

a) ($\Longleftarrow$)

Sea V^{∞} un entorno abierto de ∞ , $X^* - V^{\infty} = C$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T) por la definición de T^* .

Por hipótesis, existen $G \in T$ y C' cerrado y numerablemente compacto tales que $C \subset G \subset C'$. Por tanto:

$$V_1^{\infty} = X^* - C' \subset X^* - G \subset V^{\infty} \quad (\overline{V_1^{\infty}} \subset X^* - G).$$

Sea $x \in X$ y V^x abierto en (X^*,T^*) . Como X es abierto en (X^*,T^*) .podemos suponer que V^x es abierto en (X,T). Como (X,T) es localmente numerablemente compacto y regular, existe W^x cerrado y numerablemente compacto tal que $W^x \subset V^x$. Así W^x es un entorno cerrado de x en (X^*,T^*). Luego (X^*,T^*) es T_3.

b) $(\Longrightarrow)$

Sea $((X',T'),f)$ una F-numerable compactificación T_3 por un solo punto de (X,T). Como el axioma T_3 es una propiedad topológica hereditaria, se tiene que (X,T) es T_3. Así pues se verifica 1º.

Sea C un cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Como $((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación por un solo punto, f(C) es cerrado y numerablemente compacto en (X',T'); por tanto $\overline{X'- f(C)} = V^\infty$ es entorno abierto de ∞.

Por ser (X',T') T_3 , existe V_1^∞ tal que $V^\infty \supset \overline{V_1^\infty} \supset V_1^\infty$.

Así $f(C) = X' - V^\infty \subset X' - \overline{V_1^\infty} \subset X' - V_1^\infty$, siendo $X' - \overline{V_1^\infty} \subset f(X)$ abierto en (X',T') y por tanto en $(f(X),T'|_{f(X)})$ y $X' - V_1^\infty$ cerrado y numerablemente compacto en (X',T').

Entonces tomando $G' = f^{-1}(X' - \overline{V_1^\infty})$ abierto en (X,T) y $C' = f^{-1}(X' - V_1^\infty)$ cerrado y numerablemente compacto en (X,T) se tiene que $C \subset G' \subset C'$. Luego se verifica 2º(b).

Las otras implicaciones de a) y b), son consecuencia de las anteriores.

<u>Proposición V.2.8</u>

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces se tiene:

a) $((X^*,T^*),j)$ es $T_{3a} \Longleftrightarrow$ 1º (X,T) es T_{3a}. 2º Para todo $A\subset X$ cerrado y numerablemente compacto en (X,T) existe $f:(X,T)\longrightarrow([0,1], T_u|_{[0,1]})$ continua y existe $B\subset X$ cerrado y numerablemente compacto en (X,T) tales que $f(A)=\{0\}$ y $f(X-B)=\{1\}$. (Esta condición implica 2º) de V.2.7(a) y por tanto (X,T) es localmente numerablemente compacto).

b) (28) (X,T) admite una F-numerable compactificación T_{3a} por un solo punto $((X',T'),f) \Longleftrightarrow$ i) (X,T) es T_{3a}.

ii) Para todo $A\subset X$ cerrado y numerablemente compacto en (X,T), existe $h:(X,T)\longrightarrow([0,1], T_u|_{[0,1]})$ aplicación continua y existe $B\subset X$ cerrado y numerablemente compacto en (X,T) tales que $h(A)=\{0\}$ y $h(X-B)=\{1\}$. (Esta condición implica 2º) de V.2.7(b) y por tanto (X,T) es localmente numerablemente compacto).

Demostración:

a) $(\Longleftarrow)$

Sea C^* un cerrado en (X^*,T^*) y $x\notin C^*$. Entonces $X^*-C^*\in T^*$. Por tanto $X^*-C^*=G\in T$ o $X^*-C^*=G^*$.

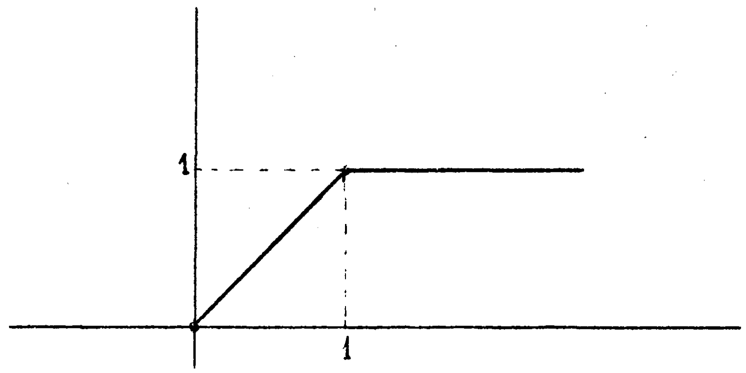
Supongamos que $X^*-C^*=G$

Entonces $x\in G\subset X$ y $C^*\cap X=C^*-\{\infty\}$ es cerrado en (X,T). Por tanto, como (X,T) es T_{3a} existe $g:(X,T)\longrightarrow([0,1],T_u|_{[0,1]})$ aplicación continua tal que $g(x)=0$ y $g(C^*\cap X)=\{1\}$.

Por 2º, para $A=\{x\}$, numerablemente compacto y cerrado, existen B cerrado y numerablemente compacto en (X,T) y $h:(X,T)\longrightarrow([0,1],T_u|_{[0,1]})$ aplicación continua tales que $h(x)=0$ y $h(X-B)=\{1\}$.

Se tiene que $g+h$ es una aplicación continua de (X,T) en $([0,2], T_u|_{[0,2]})$ tal que $(g+h)(x) = 0$ y $(g+h)(y) \geq 1$, para todo $y \in (X - B) \cup (C^* \cap X) = Y$.

Se considera la aplicación $k: [0,\to) \longrightarrow [0,1]$ cuya gráfica es



Entonces la aplicación continua $k\circ(g+h)$ cumple que $[k\circ(g+h)](x) = 0$ y $[k\circ(g+h)](Y) = \{1\}$.

Se considera la aplicación $\alpha: X^* \longrightarrow [0,1]$ definida por $\alpha|_X = k\circ(g+h)$ y $\alpha(\infty) = 1$. Se tiene evidentemente que α es una aplicación continua de (X^*,T^*) en $([0,1], T_u|_{[0,1]})$ tal que $\alpha(x) = 0$ y $\alpha(C^*) = \{1\}$.

<u>Supongamos que $X^* - C^* = G^*$</u>.

Entonces C^* es cerrado y numerablemente compacto en (X,T).

Existen $f: (X,T) \longrightarrow ([0,1], T_u|_{[0,1]})$ aplicación continua y $B \subset X$ cerrado y numerablemente compacto tales que $f(C^*) = \{0\}$ y $f(X - B) = \{1\}$.

Sea $\bar{f}: X^* \longrightarrow [0,1]$ la aplicación definida por $\bar{f}|_X = f$ y $\bar{f}(\infty) = 1$.

Se tiene que $\bar{f}$ es aplicación continua de (X^*,T^*) en $([0,1], T_u|_{[0.1]})$ Si $x=\infty \notin C^*$, $\bar{f}(\infty) = 1$ y $\bar{f}(C^*) = \{0\}$.

Si $x \notin C^*$ y $x \neq \infty$ vamos a distinguir dos casos :

A_1) Que $x \notin B$. Entonces resulta que $\bar{f}(C^*) = \{0\}$ y $\bar{f}(x) = 1$ ya que $x \notin B$.

A_2) Que $x \in B$. Entonces se considera $g: X \longrightarrow [0,1]$, aplicación continua de (X,T) en $([0,1], T_u|_{[0,1]})$, tal que $g(C^*) = \{0\}$ y $g(x) = 1$. Por tanto $f+g$ es una aplicación continua de (X,T) en $([0,2], T_u|_{[0,2]})$ tal que $(g+f)(C^*) = \{0\}$ y $(g+f)(y) \geq 1$ para todo $y \in (X - B) \bigcup \{x\}$. Entonces $k \circ (g+f)$ cumple que $[k \circ (g+f)](C^*) = \{0\}$ y $[k \circ (g+f)]((X - B) \bigcup \{x\}) = \{1\}$.

Se considera $\alpha : X^* \longrightarrow [0,1]$ definida por :

$\alpha|_X = k \circ (g+f)$ y $\alpha(\infty) = 1$

aplicación continua de $(X^*; T^*)$ en $([0,1], T_u|_{[0,1]})$.

Evidentemente se tiene que $\alpha(C^*) = \{0\}$ y $\alpha(x) = 1$.

Así (X^*, T^*) es completamente regular. Como (X,T) es T_1, se tiene que (X^*, T^*) es T_1 y por tanto (X^*, T^*) es T_{3a}.

b) $(\Longrightarrow)$

i) Por ser T_{3a} hereditario y propiedad topológica, se verifica que (X,T) es T_{3a}.

ii) Sea $A \subset X$ un cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Entonces $f(A)$ es cerrado y numerablemente compacto en (X', T'). Como (X', T') es T_{3a} existe $g: X' \longrightarrow [0,1]$ aplicación continua de (X', T') en $([0,1], T_u|_{[0,1]})$ tal que $g(f(A)) = \{0\}$ y $g(V^\infty) = \{1\}$ con V^∞ entorno abierto.

Se consideran $h = g|_{f(X)} \circ f$ y $B = f^{-1}(X' - V^\infty)$. Entonces se tiene que $h(A) = \{0\}$ y $h(X - B) = \{1\}$.

Las otras implicaciones a) y b) son consecuencia de las anteriores.

Proposición V.2.9

Sea (X,T) un espacio topológico T_4 no numerablemente compacto y tal que para todo $C\subset X$ cerrado y numerablemente compacto, existe $G\in T$ y existe C' cerrado y numerablemente compacto con $C\subset G\subset C'$. Entonces, $((X^*,T^*),j)$ es T_4.

Demostración:

Por la proposición V.2.4, (X^*,T^*) es T_1 si y solamente si (X,T) es T_1, por tanto, es suficiente demostrar que (X^*,T^*) es normal.

Sean C_1, C_2 dos cerrados, no vacios de (X^*,T^*) y tales que $C_1\cap C_2 = \emptyset$.

Se pueden presentar dos casos:

1º) Si $C_1,C_2\subset X$, como $T^*|_X = T$, se tiene que C_1, C_2 son cerrados y no vacios de (X,T). Puesto que (X,T) es normal, existen $G_1,G_2\in T\subset T^*$ tales que $C_1\subset G_1$, $C_2\subset G_2$ y $G_1\cap G_2 = \emptyset$. Luego se verifica, en este caso, la condición para que (X^*,T^*) sea normal.

2º) Supongamos que $\infty\in C_2$. Se tiene que $C_2\cap X = C_2 - \{\infty\}$ es un cerrado en (X,T).

Como C_1 es cerrado en (X^*,T^*), es numerablemente compacto. Pero $C_1\subset X$, luego C_1 es cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Por tanto, por la hipótesis, existe $G\subset X - (C_2\cap X)$, $G\in T$ y existe C' cerrado y numerablemente compacto en (X,T) tal que $C_1\subset G\subset C'$. Puesto que (X,T) es normal, existe $A\in T$ tal que $C_1\subset A\subset \tilde{A}\subset G\subset C'$, siendo $\tilde{A}$ cerrado en la topologia $T^*|_X$, luego $\tilde{A}$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T).

Así se tiene que :

$C_1 \subset A \in T \subset T^*$ y $C_2 \subset X^* - \tilde{A} \in T^*$ y tales que $A \cap (X^* - \tilde{A}) = \emptyset$.

Luego se verifica tambien para este caso **la condición** para que (X^*, T^*) sea normal.

Corolario V.2.10

Sea (X,T) un espacio topológico T_4 no numerablemente compacto y tal que para todo $C \subset X$ cerrado y numerablemente compacto, existe $G \in T$ y existe C' cerrado y numerablemente compacto con $C \subset G \subset C'$. Entonces se tiene que toda F-numerable compactificación por un solo punto y T_1 es T_4.

Demostración:

Por la proposición anterior, $((X^*, T^*), j)$ es T_4.

Sea $((X', T'), f)$ una F-numerable compactificacion por un solo punto T_1. Como $((X^*, T^*), j)$ es T_1, resulta que ambas compactificaciones son topologicamente equivalentes (V.2.5).

Asi pues, $((X', T'), f)$ es T_4 .

Observación V.2.11

La proposición V.2.9 implica el corolario 5.2 de (28), ya que para Morita, todos los espacios que considera son T_{3a} y por tanto la condición impuesta en V.2.9, para todo cerrado y numerablemente compacto es ya válida.

Proposición V.2.12

Sean (X,T), $(X' T')$ espacios topológicos no numerablemente compactos y $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se considera las numerables compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X', T'), $((X^*, T^*), j)$ y $((X'^*, T'^*), j')$ respectivamente y

$f^*: X^* \longrightarrow X'^*$ definida por : $\begin{cases} f^*|_X = f \\ f^*(\omega) = \omega' \end{cases}$.

Entonces $f^*:(X^*,T^*) \longrightarrow (X'^*,T'^*)$ es continua si y solamente si $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es F-cuasi-numerablemente propia.

Demostración:

I) $f^*: (X^*,T^*) \longrightarrow (X'^*,T'^*)$ es continua.

a) $f^*|_X = f$, $T^*|_X = T$ y $T'^*|_X = T'$ implican que $f:(X,T) \rightarrow (X',T')$ continua.

b) Para todo K' cerrado y numerablemente compacto en (X',T') se sigue que $V^{\omega'} = X'^* - K' \in T'^*$. Así, $(f^*)^{-1}(V^{\omega'}) =$ $= X^* - f^{-1}(K') = V^{\omega} \in T^*$.

Por tanto $f^{-1}(K')$ es numerablemente compacto. Luego $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es F-cuasi numerablemente propia.

II) $f:(X,T) \longrightarrow (X', T')$ es F-cuasi-numerablemente propia.

Para todo $x \in X$, f^* es continua en x, ya que $X \in T^*$. Veamos que f^* es continua en ω .

Para todo $V^{\omega'} \in T'^*$ se deduce que $V^{\omega'} = X'^* - K'$, con K' cerrado y numerablemente compacto en (X',T'). Así, $(f^*)^{-1}(V^{\omega'}) =$ $X^* - f^{-1}(K') \in T^*$. Por tanto, f^* es continua en ω . Luego $f^*:(X^*,T^*) \longrightarrow (X'^*,T'^*)$ es continua .

Corolario V.2.13

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos no numerablemente compactos, (X',T') un NKC-espacio y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se consideran las numerable compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X',T') , $((X^*,T^*),j)$ y $((X'^*,T'^*),j')$ respectivamente y $f^*: X^* \longrightarrow X'^*$ definida por : $f^*|_X = f$, $f^*(\omega) = \omega'$.

Entonces $f^*:(X^*,T^*) \longrightarrow (X'^*,T'^*)$ es continua si y solamente si $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es cuasi-numerablemente propia.

Demostración:

Es consecuencia de la proposición anterior y de III.2.31.

Corolario V.2.14

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos no numerablemente compactos, (X',T') un NKC-espacio localmente numerablemente compacto y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación . Se consideran las numerable compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X',T'), $((X^*,T^*),j)$ y $((X'^*,T'^*),j')$ respectivamente y $f^*:X^* \longrightarrow X'^*$ definida por: $f^*|_X = f$, $f^*(\omega) = \omega'$ .Entonces $f^*:(X^*,T^*) \longrightarrow (X'^*,T'^*)$ es continua, si y solamente si, $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es numerablemente propia.

Demostración:

Es consecuencia de la proposición V.2.12 y de III.2.33.

Proposición V.2.15

Sean (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto y localmente numerablemente compacto, $((X^*,T^*),j)$ la numerable compactificación de Alexandroff de (X,T) y $((X',T'),f)$ una numerable compactificación de (X,T) con (X',T') T_3 y secuencial (Por V.1.2(D), $((X',T'),f)$ es una F-numerable compactificación de (X,T)). Entonces, $((X^*,T^*),j) \leq ((X',T'),f)$.

Demostración:

Se considera la aplicación suprayectiva $h:X' \longrightarrow X^*$,definida por $h(x') = \begin{cases} f^{-1}(x') & \text{si } x' \in f(X) \\ \infty & \text{si } x' \notin f(X) \end{cases}$ .Es suficiente demostrar que h es continua. Sea $A \in T^*$. Si $A = G \in T$, se tiene que $h^{-1}(G) = f(G)$ es abierto en $(f(X),T'|_{f(X)})$ y por V.1.10, $h^{-1}(G)$ es abierto en (X',T'). Si $A = G^* \in T^*$, se tiene que $X^* - G^*$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T). Así, $f(X^*-G^*) = h^{-1}(X^*-G^*)$ $X' - h^{-1}(G^*)$ es cerrado en (X',T') y por tanto $h^{-1}(G^*) \in T'$.

Ejemplo V.2.16

Se considera el espacio topológico (X',T') "Placa de Tychonoff", del ejemplo IV.2.16. Se tiene que (X',T') es T_{3a} no numerablemente compacto y localmente numerablemente compacto. Además, (X',T') no cumple la condición 2ª de V.2.7(a). Así, por V.2.6(a) y V.2.7(a), se tiene que si $((X'^*,T'^*),j)$ es la numerable compactificación de Alexandroff de (X',T'), (X'^*,T'^*) es T_2 y no es T_3 (Se tiene así un ejemplo de un espacio numerablemente compacto y T_2 que no es T_3(vease III.1.20)).Esto prueba que (X'^*,T'^*) es numerablemente compacto y no compacto. Por otro lado,

$(([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p),i)$ es la compactificación de Alexandroff de (X',T'). Por lo anterior, los espacios (X'^*,T'^*) y $([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p)$ no son homeomorfos. Se tienen así dos numerables compactificaciones T_2 y por un solo punto de (X',T') que no son topologicamente equivalentes (comparese con V.2.5(b)). Por último, $((X'^*,T'^*),j) \not\leq (([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p),i)$ ya que $X'^*-\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es abierto en (X'^*,T'^*) y sin embargo $[a,\omega]\times[a,\Omega]-\{\omega\}\times[a,\Omega)$ no es abierto en $([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p)$.

Veamos por último otra descripción de la topología de la numerable compactificación de Alexandroff de un espacio dado.

Proposición V.2.17

Sea (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto. Se consideran $((X^*,T^*),j)$ la numerable compactificación de Alexandroff de (X,T) y $\Sigma(X)$ el conjunto de sucesiones de X que no tienen punto de aglomeración en (X,T). Entonces, $T^* = T \cup \{U \subset X^* \mid \infty \in U,\ U-\{\infty\} \in T$ y todo elemento de $\Sigma(X)$ está frecuentemente en $U\}$. Además, todo elemento de $\Sigma(X)$ tiene a ∞ como único punto de aglomeración en (X^*,T^*).

Demostración:

Sea $G^*\in T^*$($G^*\notin T$). Entonces, $X^*- G^*$ es cerrado y numerablemente compacto en (X,T) y $\infty \in G^*$. Por otra parte, $G^* -\{\infty\}= X - (X^*-G^*) \in T$. Veamos por último que todo elemento de $\Sigma(X)$ está frecuentemente en G^*. En efecto:

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in N}\in \Sigma(X)$ y que $\{x_n\}_{n\in N}$ no está frecuentemente en G^*. Entonces, existe $n_0\in N$ tal que $x_n\in X^*-G^*$ para todo $n \geq n_0$. Como X^*-G^* es numerablemente compacto y cerrado, existe $x_0\in (X^*-G^*)\cap Agl_T\{x_n\}_{n\geq n_0} =(X^*-G^*)\cap Agl_T\{x_n\}_{n\in N}$, lo cual contradice la definición de $\Sigma(X)$.

Reciprocamente:

Sea $U\subset X^*$ con $\infty\in U$, $U -\{\infty\}\in T$ y todo elemento de $\Sigma(X)$ está frecuentemente en U. Se tiene que $X^* - U = X -(X-\{\infty\})$ es cerrado en (X,T). Por otro lado si , $\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión en $X^* - U$, se tiene que $\{x_n\}_{n\in N}\notin \Sigma(X)$. Por tanto, $\{x_n\}_{n\in N}$ tiene un punto de aglomeración en (X,T) y como $X^*- U$ es cerrado, se concluye que $X^* -U$ es numerablemente compacto en (X,T). Así, $U\in T^*$.

Por la descripción anterior de la topologia T^* , es evidente que $\infty\in Agl_{T^*}\{x_n\}_{n\in N}$ para todo $\{x_n\}_{n\in N}\in\Sigma(X)$. Además por la construcción de $\Sigma(X)$, $x\notin Agl_{T^*}\{x_n\}_{n\in N}$ para todo $x\in X$ y todo $\{x_n\}_{n\in N}\in \Sigma(X)$, ya que $T^*|_X = T$.

CAPITULO VI

SECUENCIALES COMPACTIFICACIONES DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

§ 1. GENERALIDADES

En este párrafo, se definen las secuenciales compactificaciones de un espacio topológico y la relación de preorden entre ellas.

Además, se establecen propiedades de caracter general de estos conceptos.

Definición VI.1.1

Sea (X,T) un espacio topológico. Se dice que $((X',T'),f)$ es una secuencial compactificación de (X,T) si:

1º. (X',T') es secuencialmente compacto.

2º. $\overline{f(X)} = X'$.

3º. f es un homeomorfismo de (X,T) en $(f(X),T'|_{f(X)})$.

Si además $((X',T'),f)$ satisface la condición 4ª siguiente, se dice que $((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación de (X,T) :

4º. Para todo cerrado secuencialmente compacto, C, en (X,T), se verifica que $f(C)$ es cerrado en (X',T').

Observación VI.1.2

A) Si $((X',T'),f)$ es una secuencial compactificación de (X,T) tal que (X',T') es un SKC-espacio,(En particular un US-espacio secuencial),(II.1.1(d)), $((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación de (X,T).

B) Por la definición de F-secuencial compactificación se tiene que toda F-secuencial compactificación es una secuencial compactificación de un espacio topológico (X,T).

Sin embargo, el ejemplo IV.2.16 muestra que el espacio $((X,T_p),j)$ que es la compactificación de Alexandroff de (X',T') es una secuencial compactificación de (X',T') que no es una F-secuencial compactificación de (X',T') ya que $\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X',T') pero $j(\{\omega\}\times[a,\Omega))$ no es cerrado en (X,T_p).

Este ejemplo señala la independencia entre las secuenciales compactificaciones y las F-secuenciales compactificaciones para un espacio topológico (X,T).

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto la independencia entre las secuenciales compactificaciones, F-secuenciales compactificaciones y las compactificaciones sobre un espacio topológico (X,T).

<u>Ejemplo VI.1.3</u>

A_1) Este ejemplo muestra que existen espacios (X,T) que tienen compactificaciones que no son secuenciales compactificaciones.

Puesto que $([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}$ es compacto y no es secuencialmente compacto, $(([0,1],T_u|_{[0,1]})^{[0,1]}, 1_X)$ es una compactificación que no es una secuencial compactificación.

B_1) El ejemplo anterior señala la independencia entre las compactificaciones y las F-secuenciales compactificaciones.

C_1) El espacio del ejemplo A de V.1.3, $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$, es secuencialmente compacto y no compacto. Para $\omega\in[a,\Omega)$, se considera el espacio topológico $(Y=[a,\Omega)-\{\omega\},T|_Y)$ el cual no es secuencialmente compacto ya que no es numerablemente compacto. En estas condiciones $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}),j)$ donde j es la inclusión de $[a,\Omega)-\{\omega\}$ en $[a,\Omega)$, es una secuencial compactificación de $(Y,T|_Y)$ que no es una compactificación de $(Y,T|_Y)$. Este ejemplo, por tanto, pone de manifiesto la independencia entre las secuenciales compactificaciones de un espacio (X,T) y las compactificaciones de dicho espacio.

D_1) El siguiente ejemplo prueba que existe una F-secuencial compactificación para un espacio topológico (X,T) que no es una compactificación de (X,T).

Puesto que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es secuencialmente compacto, $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}),1_{[a,\Omega)})$ es una F-secuencial compactificación de $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ que no es una compactificación, ya que $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ no es compacto.

Observación VI.1.4

A) Toda secuencial compactificación es una numerable compactificaci

B) Toda F-secuencial compactificación de un espacio topológico isosecuencial compacto es una F-numerable compactificación del mismo (Todo cerrado y secuencialmente compacto de un espacio isosecuencial compacto, es secuencialmente compacto).

Los siguientes ejemplos relacionan las numerables compactificaciones y las secuenciales compactificaciones para un espacio topológico (X,T).

Ejemplos VI.1.5

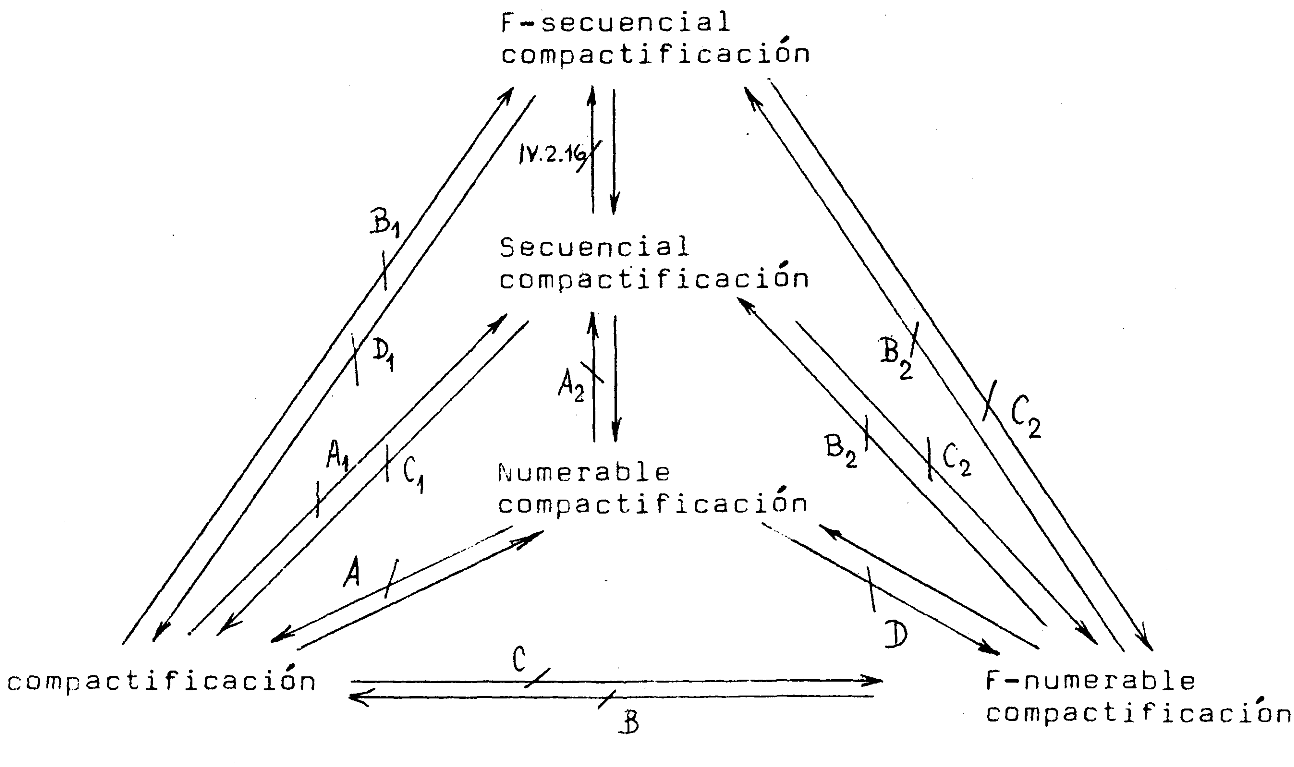
A_2) Sea $(X,T) = ((0,1),T_u|_{(0,1)})^R$. Entonces

$(([0,1],T_u|_{[0,1]})^R,j)$ es una numerable compactificación que no es una secuencial compactificación ya que $([0,1],T_u|_{[0,1]})^R$ no es un espacio topológico secuencialmente compacto.

B_2) Sea $(X,T)=([0,1],T_u|_{[0,1]})^R$. Entonces $((X,T),1_X)$ es una F-numerable compactificación de (X,T) que no es una secuencial compactificación y por consiguiente no es una F-secuencial compactificación.

C_2) Sea $(X,T)=([0,1],T_u|_{[0,1]})^R$. Se tiene que $([0,1],T_u|_{[0,1]})^R$ no es secuencialmente compacto.

Se considera la F-secuencial compactificación de Alexandroff $((X^*,T^*),j)$ de (X,T) (Vease el § 2 de este capítulo) .Se verifica por consiguiente que $((X^*,T^*),j)$ es una F-secuencial compactificación de (X,T) que no es una F-numerable compactificación, ya que X es cerrado y numerablemente compacto en (X,T) y sin embargo $j(X)$ no es cerrado en (X^*,T^*) .



<u>Proposición VI.1.6</u>

Sea (X,T) un espacio topológico. Se consideran $\mathscr{C}_S=\{((X',T'),f)\mid((X',T'),f)$ es una secuencial compactificación de $(X,T)\}$, (resp. $\mathscr{C}_{F-S}=\{(X',T'),f)\mid((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación de $(X,T)\})$ y la relación binaria, $\preccurlyeq$, en $\mathscr{C}_S$ (resp. en $\mathscr{C}_{F-S}$) definida por

$((X',T'),f)\preccurlyeq((X'',T''),f')$ si y solamente si existe una aplicación continua y suprayectiva, g, de (X'',T'') en (X',T') tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' & & X'' \arrow[ll, "g"'] \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces $\preccurlyeq$ es un preorden en $\mathscr{C}_S$ (resp. en $\mathscr{C}_{F-S}$).

<u>Demostración</u>:

Es evidente que la relación $\preccurlyeq$ cumple las propiedades reflexiva y transitiva.

<u>Proposición VI.1.7</u>

Sea (X,T) un espacio topológico y $(\mathscr{C}_S,\preccurlyeq)$ el conjunto preordenado definido en la proposición anterior (resp. $(\mathscr{C}_{F-S},\preccurlyeq)$)

Se considera en $\mathscr{C}_S$ (resp. en $\mathscr{C}_{F-S}$) la relación binaria, $\mathscr{R}$, definida por

$((X',T'),f)\,\mathscr{R}\,((X'',T''),f')$ si y solamente si existe un homeomorfismo, h, de (X'',T'') en (X',T') tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' & & X'' \arrow[ll, "h"'] \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Entonces se tiene:

a) $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathscr{C}_S$ (resp. sobre $\mathscr{C}_{F-S}$)

(Dos secuenciales compactificaciones (resp. F-secuenciales compactificaciones) $\mathcal{R}$-relacionadas, se dicen topológicamente equivalentes)

b) $\preccurlyeq$ es compatible con $\mathcal{R}$. Por tanto $\preccurlyeq$ induce una relación de preorden en $\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}}$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-S/\mathcal{R}}$) que notaremos $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$.

Demostración:

a) Es consecuencia de que la identidad, la inversa de un homeomorfismo y la composición de homeomorfismos son homeomorfismos.

b) Es consecuencia de la propiedad transitiva de $\preccurlyeq$ en $\mathcal{C}_S$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-S}$) y de que $\mathcal{R} \subset \preccurlyeq$.

Sin embargo veamos con un ejemplo que, en general, la relación $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ no es un orden en $\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}}$ (resp. en $\mathcal{C}_{F-S/\mathcal{R}}$).

Ejemplo VI.1.8

Basta considerar el ejemplo dado en V.1.6, pues para el espacio topológico (X,T) con $X = (2,\rightarrow)$ y $T = \{ (a,\rightarrow) \mid a \in (2,\rightarrow) \}$, $((X',T'),j)$ y $((X'',T''),j')$ son F-secuenciales compactificaciones de (X,T) ya que (X',T') y (X'',T'') son espacios topológicos secuencialemente compactos por ser numerablemente compactos y satisfacer el I.A.N. y todo cerrado secuencialmente compacto, C, en (X,T), verifica que $j(C)$ y $j'(C)$ son cerrados en (X',T') y (X'',T'') respectivamente.

Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Proposición VI.1. 9

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ dos secuenciales compactificaciones (resp. F-secuenciales compactificaciones) de (X,T) tales que :

a) $((X',T'),f) \preccurlyeq ((X'',T''),f')$ y $((X'',T''),f') \preccurlyeq ((X',T'),f)$.

b) (X',T') o (X'',T'') es un espacio topológico T_2. Entonces $((X',T'),f)\ \mathcal{R}\ ((X'',T''),f')$.

Demostración:

Es análoga a la realizada en V.1.7.

Definición VI.1.10

Una secuencial compactificación $((X',T'),f)$ de un espacio topológico (X,T) (resp. F-secuencial compactificación) cuyo espacio topológico (X',T') es T_2 se dice que es una secuencial compactificación de Hausdorff (resp. F-secuencial compactificación de Hausdorff)

Proposición VI.1.11

Sea (X,T) un espacio topológico,

$\mathcal{C}_S^H = \{((X',T'),f) \mid ((X',T'),f)$ es una secuencial compactificación de Hausdorff de $(X,T)\}$ (resp. $\mathcal{C}_{F-S}^H = \{((X',T'),f) \mid$ $((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación de Hausdorff de $(X,T)\}$) y $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}_S^H$ (resp. sobre $\mathcal{C}_{F-S}^H$) definida en VI,1.7. Entonces $\preccurlyeq_{\mathcal{R}}$ es una relación de orden en $\mathcal{C}_S^H/\mathcal{R}$ (resp. sobre $\mathcal{C}_{F-S}^H/\mathcal{R}$).

Demostración:

Es consecuencia de VI.1.9.

Proposición VI.1.12

Sea (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$ una secuencial compactificación T_3 de (X,T) con (X',T') secuencial.(Por VI.1.(A), $((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación de (X,T)).Entonces $f(X)$ es abierto en (X',T') si y solamente si (X,T) es localmente secuencialmente compacto. (La condición secuencial solose utiliza para demostrar, que si (X,T) es localmente secuencialmente compacto, entonces $f(X)$ es un abierto en (X',T').)

Demostración:

Supongamos que $f(X)$ es abierta en (X',T'). Como (X',T') es secuencialmente compacto y T_3, (X',T') es localmente secuencialmente compacto, y así por IV.2.10, $(f(X),T'|_{f(X)})$ es localmente secuencialmente compacto y por tanto (X,T) es localmente secuencialmente compacto.

Reciprocamente: Supongamos que (X,T) es localmente secuencialmente compacto. Entonces $f(X)$ es localmente secuencialmente compacto. Como (X',T') es T_3 y secuencial, por IV.2.12, existe $G'\in T'$ y C' cerrado en (X',T') tales que $f(X) = G'\cap C'$. Como $\overline{f(X)} = X'$, se tiene que $C' = X'$ y por tanto $f(X) = G'\in T'$.

Ejemplo VI.1.12*

Sean (X,T), (X',T') los espacios topológicos considerados en III.2.13. Se tiene que $((X,T),j)$ es una secuencial compactificación de (X',T'). El espacio (X',T') es localmente secuencialmente compacto y sin embargo X' no es abierto en (X,T). Así. la condición de ser secuencial el espacio (X',T') en la proposición VI.1.12 es esencial.

Proposición VI.1.13

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ secuenciales compactificaciones de (X,T) con (X',T') I.A.N. y (X'',T'') T_3 y secuencial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $((X'',T''),f') \leqslant ((X',T'),f)$.

b) Para todo C_1,C_2 cerrados en (X,T) con $C_1\cap C_2 = \emptyset$ tales que $\overline{f'(C_1)}\cap\overline{f'(C_2)} = \emptyset$ se verifica que $\overline{f(C_1)}\cap\overline{f(C_2)} = \emptyset$.

Demostración:

Es consecuencia de V.1.11 teniendo en cuenta que toda secuencial compactificación es una numerable compactificación.

Corolario VI.1.14

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$ $((X'',T''),f')$ secuenciales compactificaciones de (X,T) tales que (X',T') y (X'',T'') cumplen el I.A.N.. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $((X',T'),f)$ y $((X'',T''),f')$ son topologicamente equivalentes.

b) Para todo C_1 y $C_2 \subset X$, cerrados en (X,T) y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ se verifica que $\overline{f'(C_1)} \cap \overline{f'(C_2)} = \emptyset$ si y solamente si $\overline{f(C_1)} \cap \overline{f(C_2)} = \emptyset$.

Demostraciónn:

Es consecuencia del resultado anterior y de V.1.9.

§ 2. SECUENCIALES COMPACTIFICACIONES POR UN SOLO PUNTO

En este párrafo, se introduce la F-secuencial compactificación de Alexandroff y se realiza un estudio paralelo al de las numerables compactificaciones por un solo punto.

Proposición VI.2.1.

Sean (X,T) un espacio topológico no secuencialmente compacto. Se considera $X^\wedge = X \cup \{\omega\}$ y $T^\wedge = T \cup \{G^\wedge \subset X^\wedge \mid X^\wedge - G^\wedge$ es cerrado y secuencialmente compacto en $(X,T)\}$. Entonces $((X^\wedge,T^\wedge),j)$, donde j es la inclusión de X en $X^\wedge$, es una F-secuencial compactificación de (X,T).

Demostración:

1º. $T^\wedge$ es una topología en $X^\wedge$.

a) $\emptyset \in T \subset T^\wedge$; $X^\wedge \in T^\wedge$ ya que $X^\wedge - X^\wedge = \emptyset$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T).

b) Si $G_1, G_2 \in T$, $G_1 \cap G_2 \in T \subset T^\wedge$.

Si $G_1 \in T$ y $G_2 = G_2^\wedge$, $G_1 \cap G_2 = G_1 \cap (X - (X^\wedge - G_2)) \in T \subset T^\wedge$.

Si $G_1 = G_1^\wedge$ y $G_2 = G_2^\wedge$, $X^\wedge - (G_1^\wedge \cap G_2^\wedge) = (X^\wedge - G_1^\wedge) \cup (X^\wedge - G_2^\wedge)$ que es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Por tanto $G_1^\wedge \cap G_2^\wedge \in T^\wedge$.

c) Sea $\{G_i^\wedge\}_{i\in I} \subset T^\wedge$. Si $\{G^\wedge_i\}_{i\in I} \subset T$, $\bigcup_{i\in I} G_i^\wedge \in T \subset T^\wedge$.

Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que $G_{i_0}^\wedge \notin T$. Entonces

$X^\wedge - \bigcup_{i\in I} G_i^\wedge = \bigcap_{i\in I} (X^\wedge - G_i^\wedge) \subset X^\wedge - G_{i_0}^\wedge$. Así $X^\wedge - \bigcup_{i\in I} G_i^\wedge$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Por tanto $\bigcup_{i\in I} G_i^\wedge \in T^\wedge$.

2º. $T^\wedge|_X = T$ ya que para todo $G^\wedge \in T^\wedge$, $G^\wedge \cap X = X - (X^\wedge - G^\wedge) \in T$.

3º. $(X^\wedge, T^\wedge)$ es secuencialmente compacto. En efecto:

Sea $\{x_n\}_{n\in N}$ una sucesión en $X^\wedge$. Si $\{x_n\}_{n\in N}$ no converge a ω, existe V^ω abierto en $(X^\wedge, T^\wedge)$ tal que $X^\wedge - V^\omega$ contiene a una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$. Como $X^\wedge - V^\omega$ es secuencialmente compacto y cerrado en (X,T), existe una subsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in N}$ de $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ que converge a un punto $x \in X^\wedge - V^\omega$. Así $\{x_n\}_{n\in N}$ tiene una subsucesión convergente en $(X^\wedge, T^\wedge)$.

4º. $\overline{X} = X^\wedge$ ya que $\omega \notin T^\wedge$. ((X,T) no es secuencialmente compacto).

5º. Sea C un cerrado secuencialmente compacto de (X,T). Se tiene que $j(C) = C$ es cerrado en $(X^\wedge, T^\wedge)$ ya que $X^\wedge - C \in T^\wedge$.

Así queda probado que $((X^\wedge, T^\wedge), j)$ es una F-secuencial compactificación de (X,T).

Definición VI.2.2

A la F-secuencial compactificación, $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ de (X,T), construida enn VI.2.1 se le llama de Alexandroff.

Proposición VI.2.3

Sea (X,T) un espacio topológico no secuencialmente compacto y $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ la F-secuencial compactificación de Alexandroff Entonces se tiene:

$$(X^{\wedge},T^{\wedge}) \text{ es } T_1 \iff (X,T) \text{ es } T_1$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$. Es consecuencia de que el axioma T_1 es hereditario.

$(\Longleftarrow)$. En efecto:

Basta considerar por ser $X \in T$, el caso en que se tengan puntos distintos siendo uno de ellos ω .

Para todo $x \in X$, como $\{x\}$ es secuencialmente compacto y cerrado, $X^{\wedge} - \{x\}$ es entorno abierto de ω que no contiene a x. Además X es un entorno de x que no contiene a ω.

Proposición VI.2.4 (Teorema de Alexandroff para las F-secuenciales compactificaciones)

Sea (X,T) un espacio topológico no secuencialmente compacto y T_1. Entonces se tiene:

a) (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_1 por un solo punto .

b) Dos F-secuenciales compactificaciones por un solo punto y T_1 de (X,T) son topológicamente equivalentes.

Demostración:

a) Basta considerar la F-secuencial compactificación de Alexandroff de (X,T).

b) Sean $((X',T'),f)$, $((X'',T''),f')$ dos F-secuenciales compactificaciones por un solo punto y T_1 de (X,T). Sean $\{\omega\} = X' - f(X)$ y $\{\omega'\} = X'' - f'(X)$. Se considera la aplicación

$h: X' \longrightarrow X''$ definida por

$$h(x') = \begin{cases} f' f^{-1}(x') & \text{si } x' \neq \omega \ . \\ \\ \omega' & \text{si } x' = \omega \ . \end{cases}$$

Se tiene que $h \circ f = f'$ y h es biyectiva. Veamos que h es un homeomorfismo.

Sea $G' \in T'$. Si $\omega' \notin G'$, $h(G') = f' \circ f^{-1}(G')$ que es abierto en $(f'(X), T''|_{f'(X)})$ y como $f'(X)$ es abierto en (X'', T'') , se tiene que $h(G') \in T''$.

Si $\omega' \in G'$, $X' - G'$ es cerrado y secuencialmente compacto en $(f(X), T|_{f(X)})$. Por tanto $h(X' - G') = f' \circ f^{-1}(X' - G')$ es cerrado y secuencialmente compacto en $(f'(X), T''|_{f'(X)})$. Por consiguiente $h(X' - G') = X'' - h(G')$ es un cerrado y secuencialmente compacto en (X'', T'') .Así $h(G') \in T''$. Luego h es una aplicación abierta.

De forma análoga se prueba que h^{-1} es una aplicación abierta y por tanto que h es un homeomorfismo.

Proposición VI.2.5

Sea (X,T) un espacio topológico no secuencialmente compacto .Entonces se tiene:

a) La F-secuencial compactificación de Alexandroff de (X,T) $((X^\wedge, T^\wedge), j)$ es $T_2 \Longleftrightarrow$ I) (X,T) es T_2 y II) Para todo $x \in X$ existe V^x cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) .

b) (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_2 por un solo punto $\Longleftrightarrow$ i) (X,T) es T_2 y ii) Para todo $x \in X$ existe V^x cerrado y secuencialmente compacto en (X,T).

Demostración:

a) ($\Longleftarrow$) Como $X \in T^\wedge$ y (X,T) es T_2 es suficiente considerar dos puntos distintos con uno de ellos igual a ω .

Sea $x \in X$. Por hipótesis, existe V^x cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Entonces $X - V^x = V^{\omega}$ y $V^{\omega} \cap V^x = \emptyset$

b) $(\Longrightarrow)$ Sea $((X',T'),f)$ una F-secuencial compactificación T_2 por un solo punto de (X,T). Como el axioma T_2 es una propiedad topológica hereditaria, se tiene que (X,T) es T_2.

Sea $x \in X$ .Como (X',T') es T_2, existen $V^{f(x)}$ y $V^{\omega'}$ $(\{\omega'\}= X'- f(X))$ abiertos en (X',T') y tales que $V^{f(x)} \cap V^{\omega'} = \emptyset$. Entonces, $X' - V^{\omega'} \supset V^{f(x)} \ni x$, $X' - V^{\omega'}$ es cerrado en (X',T') y por tanto es secuencialmente compacto en (X',T').

Como $X' - V^{\omega'} \subset f(X)$, $V^x = f^{-1}(X' - V^{\omega'})$ es un entorno cerrado y secuencialmente compacto de x en (X,T).

Las otras implicaciones de a) y b) son consecuencia de las anteriores.

Proposición VI.2.6

Sea (X,T) un espacio topológico .Entonces se tiene:

a) $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ es $T_3 \Longleftrightarrow$ 1º) (X,T) es T_3 y 2º) Para todo cerrado y secuencialmente compacto existen $G \in T$ y C' cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) tales que $C \subset G \subset C'$.
(Por IV.2.15, (X,T) es localmente secuencialmente compacto).

b) (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_3 por un solo punto $((X',T'),f) \Longleftrightarrow (X,T)$ es T_3 y para todo C cerrado y secuencialmente compacto, existen $G \in T$ y C' cerrado y secuencialmente compacto tales que $C \subset G \subset C'$ (Por IV.2.15, (X,T) es localmente secuencialmente compacto).

Demostración:

a) $(\Longleftarrow)$ Sea V^{ω} un entorno abierto de ω , $X^{\wedge} - V^{\omega} = C$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) por la definición de $T^{\wedge}$.

Por hipótesis, existen $G\in T$ y C' cerrado y secuencialmente compacto tales que $C\subset G\subset C'$. Por tanto:

$$V_1^{\omega} = X^{\wedge} - C' \subset X^{\wedge} - G \subset V^{\omega} \quad (\overline{V_1^{\omega}} \subset X^{\wedge} - G).$$

Sea $x\in X$ y V^x abierto en $(X^{\wedge},T^{\wedge})$. Como X es abierto en $(X^{\wedge},T^{\wedge})$, podemos suponer que V^x es abierto en (X,T). Como (X,T) es localmente secuencialmente compacto y regular, existe W^x cerrado y secuencialmente compacto tal que $W^x\subset V^x$. Así W^x es un entorno cerrado de x en $(X^{\wedge},T^{\wedge})$. Luego $(X^{\wedge},T^{\wedge})$ es T_3.

b) ($\Longrightarrow$) Sea $((X',T'),f)$ una F-secuencial compactificación T_3 por un solo punto de (X,T). Como el axioma T_3 es una propiedad topológica hereditaria, se tiene que (X,T) es T_3.

Sea C un cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Como $((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación, $f(C)$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X',T'); por tanto $X'-f(C) = V^{\omega}$ es un entorno abierto de ω.

Por ser (X',T') T_3, existe V_1^{ω} tal que $V^{\omega}\supset \overline{V_1^{\omega}} \supset V_1^{\omega}$.

Así $f(C) = X' - V^{\omega} \subset X' - \overline{V_1^{\omega}} \subset X' - V_1^{\omega}$, siendo $X' - \overline{V_1^{\omega}} \subset f(X)$ abierto en (X',T') y por tanto abierto en $(f(X),T'|_{f(X)})$ y $X' - V_1^{\omega} \subset f(X)$ cerrado y secuencialmente compacto en (X',T').

Entonces tomando $G = f^{-1}(X' - \overline{V_1^{\omega}})$ abierto en (X,T) y $C' = f^{-1}(X' - V_1^{\omega})$ cerrado y secuencialmente compacto en (X,T), se tiene que $C\subset G \subset C'$.

Las otras implicaciones de a) y b), son consecuencia de las anteriores.

<u>Proposición VI.2.7</u>

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces se tiene:

a) $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ es $T_{3a} \Longleftrightarrow$ 1º (X,T) es T_{3a}. 2º Para todo $A \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto en (X,T), existe $f: (X,T) \longrightarrow ([0,1], T_u|_{[0,1]})$ continua y existe $B \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) tales que $f(A) = \{0\}$ y $f(X - B) = \{1\}$ (Por tanto, (X,T) es localmente secuencialmente compacto).

b) (X,T) admite una F-secuencial compactificación $((X',T'),f)$ por un solo punto, T_{3a}, $\Longleftrightarrow$ i) (X,T) es T_{3a} y ii) Para todo $A \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto en (X,T), existe $h: (X,T) \longrightarrow ([0,1], T_u|_{[0,1]})$ aplicación continua y existe $B \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) tales que $h(A) = \{0\}$ y $h(X - B) = \{1\}$.(Por tanto, (X,T) es localmente secuencialmente compacto).

Demostración:

Análoga a la de V.2.8, sustituyendo numerablemente compacto por secuencialmente compacto.

Proposición VI.2.8

Sea (X,T) un espacio topológico T_4 no secuencialmente compacto y tal que para todo $C \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto, existe $G \in T$ y existe C' cerrado y secuencialmente compacto con $C \subset G \subset C'$. Entonces $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ es T_4

Demostración:

Por la proposición VI.2.3, $(X^\wedge,T^\wedge)$ es T_1, por serlo (X,T). Por lo tanto, es suficiente demostrar que $(X^\wedge,T^\wedge)$ es normal.

Sean C_1, C_2 dos cerrados no vacios de $(X^\wedge,T^\wedge)$ y tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Se van a considerar dos casos:

1. Que $C_1, C_2 \subset X$. Como $T^\wedge|_X = T$, se tiene que C_1 y C_2 son cerrados y no vacios de (X,T). Puesto que (X,T) es normal,

existen $G_1, G_2 \in T \subset T^\wedge$ tales que $C_1 \subset G_1$, $C_2 \subset G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Luego para este caso se verifica la condición para que $(X^\wedge, T^\wedge)$ sea normal.

2. Supongamos que $\omega \in C_2$. Se tiene que $C_2 \cap X = C_2 - \{\omega\}$ es un cerrado en (X,T).

Como C_1 es cerrado en $(X^\wedge, T^\wedge)$, es secuencialmente compacto; pero como $C_1 \subset X$, C_1 es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Por tanto, por la hipótesis, existe $G \in T$ con $G \subset X-(C_2 \cap X)$ y existe C' cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) tales que $C_1 \subset G \subset C'$. Puesto que (X,T) es normal, existe $A \in T$ tal que $C_1 \subset A \subset \tilde{A} \subset G \subset C'$, siendo $\tilde{A}$ cerrado en la topología $T^\wedge|_X$, luego $\tilde{A}$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T).

Así se tiene que :

$C_1 \subset A \in T \subset T^\wedge$ y $C_2 \subset X^\wedge - \tilde{A} \in T^\wedge$ y tales que $A \cap (X^\wedge - \tilde{A}) = \emptyset$.

Luego para este otro caso , tambien se verifica la condición para que $(X^\wedge, T^\wedge)$ sea normal.

Por tanto queda probado que $(X^\wedge, T^\wedge)$ es normal.

Corolario VI.2.9

Sea (X,T) un espacio topológico T_4 no secuencialmente compacto y tal que para todo $C \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto, existe $G \in T$ y existe C' cerrado y secuencialmente compacto con $C \subset G \subset C'$. Entonces se tiene que toda F-secuencial compactificación por un solo punto y T_1 es T_4.

Demostración:

Por la proposiciónn anterior, $((X^\wedge, T^\wedge), j)$ es T_4 .

Sea $((X', T'), f)$ una F-secuencial compactificación por un solo punto T_1. Como $((X^\wedge, T^\wedge), j)$ es T_1. resulta de la proposición

VI.2.4 que $((X',T'),f)$ y $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ son topológicamente equivalentes.

Así pues, $((X',T'),f)$ es T_4.

La siguiente proposición prueba que la secuencial compactificación de un espacio topológico (X,T), no secuencialmente compacto, introducida en VI.2.2 , coincide con la definida por R. BROWN en (9).

Proposición VI.2.10

Sea (X,T) un espacio topológico no secuencialmente compacto .Se consideran $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ la secuencial compactificación de Alexandroff de (X,T) y $S(X)$ el conjunto de sucesiones en X que no tienen subsucesiones convergentes en (X,T). Entonces, $T^\wedge = T \bigcup \{U \subset X^\wedge \mid \omega \in U,\ U - \{\omega\} \in T$ y todo elemento de $S(X)$ está eventualmente en $U\}$. Además, todo elemento de $S(X)$ converge a ω y no converge a ningún otro punto de $X^\wedge$.

Demostración:

Sea $G^\wedge \in T^\wedge$ $(G^\wedge \notin T)$. Entonces $X^\wedge - G^\wedge$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T) y $\omega \in G^\wedge$. Por otra parte, $G^\wedge - \{\omega\} = X - (X^\wedge - G^\wedge) \in T$. Veamos por ultimo que todo elemento de $S(X)$ está eventualmente en $G^\wedge$. En efecto:

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in N} \in S(X)$ y que $\{x_n\}_{n\in N}$ no está eventualmente en $G^\wedge$. Entonces, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$, subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$, tal que $\{x_{n_k}\}_{k\in N} \subset X^\wedge - G^\wedge$. Como $X^\wedge - G^\wedge$ es secuencialmente compacto, $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tiene una subsucesión convergente en (X,T) lo cual contradice la definición de $S(X)$.

Reciprocamente:

Sea $U \subset X^\wedge$ con $\omega \in U$; $U - \{\omega\} \in T$ y todo elemento de $S(X)$ está eventualmente en U. Se tiene que $X^\wedge - U = X - (U - \{\omega\})$

es cerrado en (X,T). Por otro lado, si $\{x_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de $X^\wedge - U$ se tiene que $\{x_n\}_{n\in N} \notin S(X)$. Por tanto $\{x_n\}_{n\in N}$ contiene una subsucesión convergente en (X,T) y como $X^\wedge - U$ es cerrado, se concluye que $X^\wedge - U$ es secuencialmente compacto en (X,T). Así $U \in T^\wedge$.

La última parte de la proposición se comprueba facilmente.

Se tienen las siguientes propiedades de la secuencial compactificación de Alexandroff $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ de un espacio topológico no secuencialmente compacto (X,T).

<u>Proposición VI.2.11</u> (9)

a) Si (X,T) es secuencial, $(X^\wedge,T^\wedge)$ es secuencial.

b) Si (X,T) es US-espacio secuencial, $(X^\wedge,T^\wedge)$ es un US-espacio secuencial.

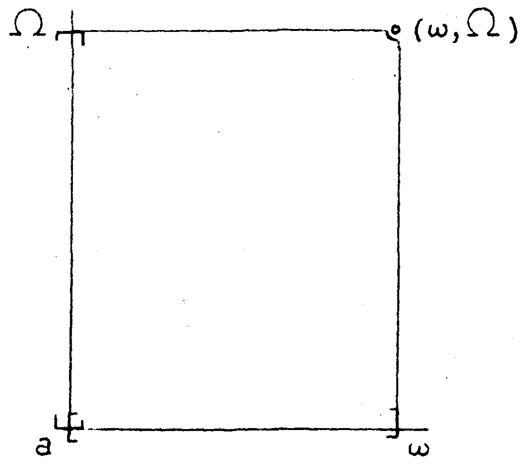
Los siguientes ejemplos establecen la relación entre la compactificación de Alexandroff, la numerable compactificación de Alexandroff y la secuencial compactificación de Alexandroff para un espacio topológico (X,T).

<u>Ejemplo VI.2.12</u>

A) Este ejemplo pone de manifiesto que ,en general, para un espacio topológico (X,T) la compactificación de Alexandroff de (X,T) no es la numerable compactificación de Alexandroff, ni la secuencial compactificación de Alexandroff.

Sea $(X,T_p) = ([a,\omega] , T|_{[a,\omega]}) \times ([a,\Omega],T)$ el espacio topológico del ejemplo IV.2.16.

Se considera el espacio topológico "Placa de Tychonoff" (X',T') donde $X' = [a,\omega] \times [a,\Omega] - \{(\omega,\Omega)\}$ y $T' = T_p|_{X'}$.



Este espacio topológico (X',T') no es numerablemente compacto, ni compacto, ni secuencialmente compacto. Sin embargo, es localmente secuencialmente compacto y T_2.

Para este espacio (X',T'), $((X,T_p),j)$ es la compactificación de Alexandroff por un solo punto, donde $j:X'\longrightarrow X$ es la inclusión. Puesto que (X,T_p) es compacto, (X,T_p) es numerablemente compacto y por tanto, $((X,T_p),j)$ es una numerable compactificación de (X',T').

Para este espacio (X',T'), $((X,T_p),j)$ no es la numerable compactificación de Alexandroff, ya que no es F-numerable compactificación de (X',T') ,pues $\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es cerrado y numerablemente compacto en (X',T') y sin embargo no es cerrado en (X,T_p) . Así pues $((X,T_p),j) \neq ((X^*,T^*),j)$.

Puesto que (X,T_p) es secuencialmente compacto, $((X,T_p),j)$ es una secuencial comp actificación de (X,T). Sin embargo, $((X,T_p),j)$ no es la secuencial compactificación de Alexandroff para (X',T') ya que $\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X',T') y sin embargo no es cerrado en (X,T_p) . Así $((X,T_p),j) \neq ((X^\wedge,T^\wedge),j)$.

La numerable compactificaión de Alexandroff $((X^*,T^*),j)$ de (X',T') no es,por lo anterior, la compactificación de Alexandroff, luego este ejemplo sirve tambien para indicar que, en general, la numerable compactificación de Alexandroff de un espacio topológico no es la compactificación de Alexandroff de dicho espacio.

La secuencial compactificación de Alexandroff $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ de (X',T') no es,por lo anterior,la compactificación de Alexandroff de (X',T'); por tanto, este ejemplo sirve tambien para señalar que para un espacio topológico, en general, la secuencial compactificación de Alexandroff para un espacio topológico no es la compactificación de Alexandroff para dicho espacio.

B) Sea $(X,T) = \left((0,1), T_u\big|_{(0,1)} \right)^R$.

Se tiene que (X,T) no es numerablemente compacto ya que la sucesión $\{p^n\}_{n\in N}$ $\begin{cases} p_r^n = 0 & \text{para todo } r \neq 0 \\ p_0^n = \frac{1}{n} \end{cases}$, no tiene puntos de aglomeración en (X,T). Por tanto (X,T) no es ni compacto ni secuencialmente compacto.

La numerable compactificación de Alexandroff $((X^*,T^*),i^*)$ de (X,T) y la secuencial compactificación de Alexandroff $((X^{\wedge},T^{\wedge}),i^{\wedge})$ de (X,T) (La cual es una numerable compactificación de (X,T)) no son topológicamente equivalentes.En efecto:

Si lo fueran, existiria un homeomorfismo h de (X^*,T^*) en $(X^{\wedge},T^{\wedge})$ que haria conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X^{*} \arrow[rr, "h"] & & X^{\wedge} \\ & X \arrow[ul, "i^{*}"] \arrow[ur, "i^{\wedge}"'] & \end{tikzcd}$$

lo cual no es posible ya que $V^{\omega^{*}} = X^{*} - \prod_{r\in R} A_r$ con $A_r=\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

para todo $r\in R$ es un entorno abierto de ω^{*} y sin embargo $h(V^{\omega^{*}}) = X^{\wedge} - \prod_{r\in R} A_r$ no es un entorno abierto de $\omega^{\wedge}$ por no ser $\prod_{r\in R} A_r$ secuencialmente compacto.

Esto pone de manifiesto que en general las compactificaciones de Alexandroff, numerable y secuencial son distintas.

A continuación se establece en que condiciones las compactificaciones, las numerables compactificaciones y las secuenciales compactificaciones ,todas ellas de Alexandroff, de un espacio topplógico (X,T) coinciden.

<u>Definición VI.2.13</u>

Un espacio topológico (X,T) se dice isocompacto(5) si todo subconjunto numerablemente compacto y cerrado es compacto.

<u>Proposición VI.2.14</u>

Sea (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto (Por tanto (X,T) no es compacto).Entonces la compactificación de Alexandroff de (X,T) es topológicamente equivalente a la numerable compactificación de Alexandroff de (X,T) si y solamente si (X,T) es isocompacto.

<u>Demostración</u>:

Basta tener en cuenta la construcción de ambas compactificaciones y que los espacios isocompactos son aquellos en los que los subconjuntos cerrados y compactos coinciden con los cerrados y numerablemente compactos.

Corolario VI.2.15

Sea (X,T) un espacio topológico semiestratificable-(Para cada abierto U de (X,T), existe una sucesión de subconjuntos cerrados $\{U_n\}_{n\in N}$ de (X,T) tal que $U = \bigcup_{n\in N} U_n$. Además , si V es un subconjunto abierto de otro subconjunto abierto W, se verifica que $V_n \subset W_n$ para cada $n\in N$ (11))-. Entonces la compactificación de Alexandroff de (X,T) coincide con la numerable compactificación de Alexandroff de (X,T).

Demostración:

Es consecuencia de que todo espacio semiestratificable es isocompacto (5).

Observación VI.2.16

La clase de los espacios semiestratificables contiene entre otras a la clase de los espacios estratificables, a la de los espacios desarrollables, a la de los espacios de Moore y a la de los espacios seudometrizables.

Corolario VI.2.17

Sea ((X,T) un espacio meta-Lindelöf (7)(Todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto puntualmente numerable) . Entonces la compactificación de Alexandroff de (X,T) coincide con la numerable compactificación de Alexandroff de (X,T).

Demostración :

Es consecuenoia de que todo espacio meta-Lindelöff es isocompacto. (5).

Observación VI.2.18

La clase de los espacios meta-Lindelöff contiene, entre otras, a la clase de los espacios de Lindelöff, a la de los espacios que admiten base puntualmente numerable, a la de los espacios σ-paracompactos y a la de los espacios paracompactos.

Proposición VI.2.19

Sea (X,T) un espacio topológico no numerablemente compacto (Por tanto no secuencialmente compacto). Entonces la numerable compactificación de Alexandroff de (X,T) es topológicamente equivalente a la secuencial compactificación de Alexandroff si y solamente si (X,T) es isosecuencial-compacto (I.1.38).

Demostración:

Basta tener en cuenta la construcción de ambas compactificaciones y que los espacios isosecuencial-compactos son aquellos en los que los subconjuntos cerrados y numerablemente compactos coinciden con los secuencialmente compactos y cerrados.

Proposición VI.2.20

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos no secuencialmente compactos y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se consideran las secuenciales compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X',T'), $((X^\wedge,T^\wedge),i)$ y $((X'^\wedge,T'^\wedge),i')$ respectivamente y $f^\wedge:X^\wedge \longrightarrow X'^\wedge$ definida por: $\begin{cases} f^\wedge|_X = f \\ f^\wedge(\omega) = \omega'. \end{cases}$ Entonces $f^\wedge:(X^\wedge,T^\wedge) \longrightarrow (X'^\wedge,T'^\wedge)$ es continua si y solamente si $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es F-cuasi-secuencialmente propia (IV.2.37).

Demostración:

I) $f^\wedge:(X^\wedge,T^\wedge) \longrightarrow (X'^\wedge,T'^\wedge)$ es continua.

a) $f^{\wedge}|_X = f$, $T^{\wedge}|_X = T$ y $T'^{\wedge}|_{X'} = T'$ implican que $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es continua.

b) Para todo K' cerrado y secuencialmente compacto en (X',T'), se sigue que $V^{\omega'} = X'^{\wedge} - K' \in T'^{\wedge}$. Así, $(f^{\wedge})^{-1}(V^{\omega'}) = X^{\wedge} - f^{-1}(K') = V^{\omega} \in T^{\wedge}$. Por tanto $f^{-1}(K')$ es secuencialmente compacto. Luego la aplicación $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es F-cuasi-secuencialmente propia.

II) $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es F-cuasi-secuencialmente propia.

Para todo $x \in X$, $f^{\wedge}$ es continua en x, ya que $X \in T^{\wedge}$. Veamos que $f^{\wedge}$ tambien es continua en ω.

Para todo $V^{\omega'} \in T'^{\wedge}$ se sigue que $V^{\omega'} = X'^{\wedge} - K'$, con K' cerrado y secuencialmente compacto en (X',T'). Así, $(f^{\wedge})^{-1}(V^{\omega'}) = X^{\wedge} - f^{-1}(K') \in T^{\wedge}$. Por tanto, $f^{\wedge}$ es continua en ω. Luego la aplicación $f^{\wedge}:(X^{\wedge},T^{\wedge}) \longrightarrow (X'^{\wedge},T'^{\wedge})$ es continua.

Corolario VI.2.21

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos no secuencialmente compactos con (X',T') SKC-espacio y $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación. Se consideran las secuenciales compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X',T'), $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$, $((X'^{\wedge},T'^{\wedge}),j')$ respactivamente y $f^{\wedge}:X^{\wedge} \longrightarrow X'^{\wedge}$ definida por: $f^{\wedge}|_X = f$ y $f^{\wedge}(\omega) = \omega'$. Entonces $f^{\wedge}:(X^{\wedge},T^{\wedge}) \longrightarrow (X'^{\wedge},T'^{\wedge})$ es continua si y solamente si $f:(X,T) \longrightarrow (X',T')$ es cuasi-secuencialmente propia.

Demostración:

Es consecuencia de la proposición anterior y de IV.2.39.

Corolario VI.2.22

Sean (X,T), (X',T') espacios topológicos no secuencialmente compactos, (X,T) subsecuencial, (X',T') un SKC-espacio localmente secuencialmente compacto y $f:X \rightarrow X'$ una aplicación. Se consideran las secu ciales compactificaciones de Alexandroff de (X,T) y (X',T'); $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ y $((X'^\wedge,T'^\wedge),j')$ respectivamente y $f^\wedge : X^\wedge \longrightarrow X'^\wedge$ definida por $f^\wedge|_X = f$ y $f^\wedge(\omega) = \omega'$. Entonces $f^\wedge : (X^\wedge,T^\wedge) \longrightarrow (X'^\wedge,T'^\wedge)$ es continua si y solamente si $f : (X,T) \longrightarrow (X',T')$ es secuencialmente propia.

Demostración:

Es consecuencia de VI.2.21 y de IV.2.41.

Proposición VI.2.23

Sean (X,T) un espacio topológico no secuencialmente compacto y localmente secuencialmente compacto, $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ la secuencial compactificación de Alexandroff de (X,T) y $((X',T'),f)$ una secuencial compactificación de (X,T) con (X',T') T_3 y secuencial (Por VI.1.2.A, $((X',T'),f)$ es una F-secuencial compactificación de (X,T)). Entonces, $((X^\wedge,T^\wedge),j) \leq ((X',T'),f)$.

Demostración:

Se considera la aplicación suprayectiva, $h : X' \longrightarrow X^\wedge$, definida por

$$h(x') = \begin{cases} f^{-1}(x') & \text{si } x' \in f(X) \\ \omega & \text{si } x' \notin f(X). \end{cases}$$

Es suficiente demostrar que h es continua. Sea $A \in T^\wedge$. Si $A = G \in T$, se tiene que $h^{-1}(G) = f(G)$ es abierto en $(f(X), T'|_{f(X)})$ y por VI.1.12, $h^{-1}(G)$ es abierto en (X',T'). Si $A = G^\wedge \in T^\wedge$, se tiene $X^\wedge - G^\wedge$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Así, $f(X^\wedge - G^\wedge) = h^{-1}(X^\wedge - G^\wedge) = X' - h^{-1}(G^\wedge)$ es cerrado en (X',T') y por tanto $h^{-1}(G^\wedge) \in T'$.

Ejemplo VI.2.24

Se considera el espacio topológico (X',T'), "Placa de Tychomoff", del ejemplo IV.2.16. Se tiene que (X',T') es T_{3a}, no secuencialmente compacto y localmente secuencialmente compacto.

Además, (X',T') no cumple la condición 2ª de VI.2.6(a). Así, por VI.2.5(a) y VI.2.6(a), se tiene que si $((X'^{\wedge},T'^{\wedge}),j)$ es la secuencial compactificación de Alexandroff de (X',T'), $(X'^{\wedge},T'^{\wedge})$ es T_2 y no es T_3 (Se tiene así un ejemplo de un espacio secuencialmente compacto y T_2 que no es T_3 (Vease IV.1.27). Esto prueba que $(X'^{\wedge},T'^{\wedge})$ es secuencialmente compacto y no compacto.

Por otro lado, $(([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p),i)$,que es la compactificación de Alexandroff de (X',T'), es una secuencial compactificación de (X',T'). Por lo anterior, los espacios $(X'^{\wedge},T'^{\wedge})$ y $([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p)$ no son homeomorfos. Se tienen así dos secuenciales compactificaciones T_2 y por un solo punto de (X',T') que no son topologicamente equivalentes(comparese con VI.2.4(b)).

Se verifica que $((X'^{\wedge},T'^{\wedge}),j)\not\leq(([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p),i)$, ya que $X'^{\wedge}-\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es abierto en $(X'^{\wedge},T'^{\wedge})$ y sin embargo $[a,\omega]\times[a,\Omega]-\{\omega\}\times[a,\Omega)$ no es abierto en $([a,\omega)\times[a,\Omega],T_p)$.

Por último, (X',T') es isosecuencial compacto. En efecto: Sean C' cerrado y numerablemente compacto en (X',T') y $\{(x_n,y_n)\}_{n\in N}$ una sucesión en C'.Como $([a,\Omega],T)$ es secuencialmente compacto, existe $\{y_{n_k}\}_{k\in N}$ subsucesión de $\{y_n\}_{n\in N}$ que converge a un punto y_0 en $([a,\Omega],T)$. Analogamente, como $([a,\omega],T|_{[a,\omega]})$ es secuencialmente compacto, $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in N}$ convergente a un punto x_0 en $([a,\omega],T|_{[a,\omega]})$. Así, la subsucesión $\{(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}})\}_{j\in N}$ de $\{(x_n,y_n)\}_{n\in N}$ converge a (x_0,y_0) en el espacio topológico T_2 $([a,\omega]\times[a,\Omega],T_p)$. Así, (x_0,y_0) es el único punto de aglomeración de $\{(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}})\}_{j\in N}$ y como C' es numerablemente compacto, $(x_0,y_0)\in C'$ .Esto prueba que C' es secuencialmente compacto.

Así, por VI.2.19, la secuencial compactificación de Alexandroff de (X',T'),$((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ es topológicamente equivalente a la numerable compactificación de Alexandroff de (X',T'), $((X^*,T^*),i)$ (De hecho, si se toma $\omega=\infty$,ambas compactificacio-

§ 3. F-SECUENCIALES COMPACTIFICACIONES T_{3a}

En este párrafo se aborda el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topologico (X,T) admita una F-secuencial compactificación T_{3a} .

Proposición VI.3.1

Sea (X,T) un espacio topológico T_{3a} y II.A.N..Entonces, (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_{3a} .(La condición impuesta a (X,T) equivale a metrizable y II.A.N.).

Demostración:

Como (X,T) es T_{3a} y cumple el II.A.N., existe una aplicación $f:(X,T) \longrightarrow ([0,1],T_u|_{[0,1]})^N$ tal que

$f: (X,T) \longrightarrow (f(X),T_p|_{f(X)})$ es un homeomorfismo.

Puesto que $([0,1],T_u|_{[0,1]})^N$ es secuencialmente compacto y T_{3a} , se sigue que $(\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}})$ es secuencialmente compacto y T_{3a}. Por tanto, $((\overline{f(X)}, T_p|_{\overline{f(X)}}),f)$ es una secuencial compactificación T_{3a} de (X,T).

Para todo $C \subset X$ cerrado y secuencialmente compacto en (X,T), como $f(C)$ es secuencialmente compacto y II.A.N., se verifica que $f(C)$ es compacto en $(\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}})$ y por tanto $f(C)$ es cerrado en el espacio topológico T_2 $(\overline{f(X)}, T_p|_{\overline{f(X)}})$.

Por consiguiente $((\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}}),f)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T) .

Proposición VI.3.1*

Sea (X,T) un espacio topológico T_{3a} ,no secuencialmente compacto , localmente secuencialmente compacto y II.A.N.. Se consideran la secuencial compactificación de Alexandroff de (X,T) $((X^\wedge,T^\wedge),j)$, y la F-secuencial compactificación T_{3a}, $((\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}}),f)$, construida en la proposición anterior. Entonces, $((X^\wedge,T^\wedge),j) \lesssim ((\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}}),f)$.

Demostración:

Es consecuencia de VI.2.3., ya que al cumplir $(\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}})$ el II.A.N., se verifica que $(\overline{f(X)},T_p|_{\overline{f(X)}})$ es secuencial.

Para demostrar que existen espacios T_{3a} que no admiten F-secuenciales compactificaciones T_{3a} se establece el siguiente resultado:

Proposición VI.3.2

Sean (X,T) un espacio topológico y $((X',T'),f)$ una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T). Se considera la compactificación de Stone-Čech de (X,T), $((\beta(X),\beta(T)),e)$. Entonces existe $X''\subset\beta(X)$ tal que:

1º. $(X'', \beta(T)|_{X''})$ es numerablemente compacto y $X''\supset e(X)$.

2º. Para todo $Y\subset X$ cerrado y secuencialmente compacto se verifica que $e(Y)$ es cerrado en $(X'', \beta(T)|_{X''})$.

Demostración:

1º. Como f es aplicación continua de (X,T) en (X',T') se tiene que existe $\beta(f)$ aplicación continua de $(\beta(X), \beta(T))$ en $(\beta(X'), \beta(T'))$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \beta(X) & \xrightarrow{\beta(f)} & \beta(X') \\ {\scriptstyle e}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e'} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

es conmutativo.

Como $(\beta(X), \beta(T))$ es compacto y $(\beta(X'), \beta(T'))$ es T_2, la aplicación $\beta(f)$ es propia.

Así, teniendo en cuenta que $e'(X')$ es numerablemente compacto (por ser secuencialmente compacto), por III.1.14 ,se tiene que $X'' = \beta(f)^{-1}(e'(X'))$ es numerablemente compacto.

Además $X'' \supset e(X)$ (por la conmutatividad del diagrama anterior).

2º. Sea Y cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Por hipótesis $f(Y)$ es cerrado en (X',T'). Así $e'(f(Y))$ es cerrado en $(e'(X'), \beta(T')|_{e'(X')})$ y por tanto $(\beta(f))^{-1}(e'(f(Y))) = e(Y)$ es cerrado en $(X'', \beta(T)|_{X''})$.

(Se tiene que $\beta(f)\left[\beta(X) - e(X)\right] = \beta(X') - e'(X')$. Por tanto si $z \in \beta(f)^{-1}(e(f(Y))\ )$, $\beta(f)(z) \in e'(f(Y))$ y por consiguiente $z \in e(Y)$. Esto prueba que $(\beta(f))^{-1}(e\ (f(Y))) = e(Y)$).

<u>Ejemplo VI.3.3</u>

Sea (X',T') donde $X' = [a,\omega] \times [a,\Omega] - \{(\omega,\Omega)\}$ y $T' = T_p|_{X'}$ el espacio topológico considerado en el ejemplo VI.2.12(A). Se tiene que (X',T') es localmente compacto, no es numerablemente compacto y por tanto no es secuencialmente compacto, es T_{3a} y de Weierstrass.

Como (X',T') es de Weierstrass y $(([a,\omega], T|_{[a,\omega]}) \times ([a,\Omega], T), i)$

es la compactificación de Alexandroff de (X',T'), se tiene que $((\beta(X'), \beta(T')),e)$ coincide con $(([a,\omega],T|_{[a,\omega]})\times([a,\Omega],T),i))$ (IX.4.90 de (23)).

Si (X',T') admitiese una F-secuencial compactificación T_{3a}, por la proposición anterior, existiria X" verificando 1º y 2º de dicha proposición. Como (X',T') no es numerablemente compacto, se deduce de 1º que $X'' = [a,\omega] \times [a,\Omega]$. Por otro lado, $\{\omega\}\times[a,\Omega)$ es cerrado y secuencialmente compacto en (X',T') y sin embargo $i(\{\omega\}\times[a,\Omega))$ no es cerrado en $(\beta(X'), \beta(T'))$ lo cual contradice 2º de la proposición anterior.

El siguiente ejemplo prueba que la condición II.A.N.,impuesto al espacio (X,T), en la proposición VI.3.1, no es en general condición necesaria para que un espacio topológico T_{3a}, admita una F-secuencial compactificación T_{3a}.

Ejemplo VI.3.4

Sea (X,T) el espacio topológico $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ del ejemplo III.2.13. Se tiene que (X,T) es secuencialmente compacto, T_{3a} y no cumple el II.A.N. (no es de Lindelöf). Se tiene - sin embargo que $((X,T),1_X)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T).

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones 1º y 2º de la proposición VI.3.2, no son, en general, suficientes para la existencia de una F-secuencial compactificación T_{3a} de un espacio topológico T_{3a}.

Ejemplo VI.3.5

Sea $(X,T) = ([0,1],T_u|_{[0,1]})^R$. Como (X,T) es compacto y T_2, se tiene que ($\beta(X)$, $\beta(T)$) se identifica con (X,T). Por tanto, se cumplen las condiciones 1º y 2º de VI.3.2. Sin embargo (X,T) no admite una F-secuencial compactificación T_{3a}. En efecto:

Supongamos que existe una F-secuencial compactificación T_{3a} $((X',T'),f)$ de (X,T) . Entonces, f(X) es un compacto en el espacio topológico T_2 (X',T'). Por tanto $f(X)= \overline{f(X)} = X'$, lo cual es absurdo ya que (X,T) no es secuencialmente compacto.

A continuación se estudia el comportamiento de los espacios topológicos T_{3a} que admiten F-secuenciales compactificaciones T_{3a}, en la construcción de topologias iniciales y finales.

El siguiente ejemplo prueba que el admitir F-secuenciales compactificaciones T_{3a} no es una propiedad hereditaria.

Ejemplo VI.3.6

Sean $(X,T) = ([a,\omega],T|_{[a,\omega]}) \times ([a,\Omega],T)$ y (X',T') los espacios topológicos considerados en el ejemplo VI.3.3. Como (X,T) es secuencialmente compacto y T_{3a}, se tiene que $((X,T),1_X)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T). Sin embargo, en el ejemplo VI.3.3, se demostró que el subespacio (X',T') de (X,T) no admite F-secuenciales compactificaciones T_{3a}.

Proposición VI.3.7

Sea (X,T) un espacio topológico que admite una F-secuencial compactificación T_{3a}, $((X',T'),f)$. Entonces para todo, C, cerrado en (X,T) se verifica que $((\overline{f(C)},T'|_{\overline{f(C)}}),f|_C)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de $(C,T|_C)$.

Demostración :

Como $f:(X,T)\longrightarrow(f(X),T'|_{f(X)})$ es un homeomorfismo, se tiene que $f|_C:(C,T|_C)\longrightarrow(f(C),T'|_{f(C)})$ es un homeomorfismo. Por ser (X',T') secuencialmente compacto y T_{3a}, se deduce que $(\overline{f(C)},T'|_{\overline{f(C)}})$ es secuencialmente compacto y T_{3a}. Además, $f(C)$ es denso en $(\overline{f(C)},T'|_{\overline{f(C)}})$.

Por ultimo, si H es cerrado y secuencialmente compacto en $(C,T|_C)$, se tiene que H es cerrado y secuencialmente compacto en (X,T). Así por hipótesis, $(f|_C)(H) = f(H)$ es cerrado en (X',T') y por tanto en $(\overline{f(C)},T'|_{\overline{f(C)}})$.

Proposición VI.3.8

Sea $\{(X_n,T_n)\}_{n\in N}$ una familia numerable de espacios topológicos T_{3a} y secuenciales. Supongamos que para todo $n\in N$, $((X'_n,T'_n),f_n)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X_n,T_n). Entonces $(\prod_{n\in N}(X_n,T_n),\prod_{n\in N}f_n)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$.

Demostración:

Para todo $n\in N$, se tiene que f_n es un homeomorfismo de (X_n,T_n) en $(f_n(X_n),T'_n|_{f_n(X_n)})$. Por tanto $\prod_{n\in N}f_n$ es un homeomorfismo de $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$ en $\prod_{n\in N}(f_n(X_n),T'_n|_{f_n(X_n)})$ =

$(\prod_{n\in N}f_n(X_n),T_P|_{\prod_{n\in N}f_n(X_n)})$. Además $\overline{\prod_{n\in N}f_n(X_n)}=\prod_{n\in N}\overline{f_n(X_n)}=\prod_{n\in N}X'_n$.

Por IV.1.15(c), se tiene que $\prod_{n\in N}(X'_n,T'_n)$ es secuencialmente compacto, Además, $\prod_{n\in N}(X'_n,T'_n)$ es T_{3a} .

Por último, sea C cerrado y secuencialmente compacto en $\prod_{n\in N}(X_n,T_n)$. Como para cada $n\in N$ (X_n,T_n) es secuencial y US-espacio, por IV.1.22(a) y IV.1.11 se tiene que $\overline{p_n(C)}$ es secuencialmente compacto en (X_n,T_n). Entonces, $f_n(\overline{p_n(C)})$ es cerrado en (X'_n,T'_n) y por tanto $\prod_{n\in N} f_n(\overline{p_n(C)})$ es cerrado en $\prod_{n\in N}(X'_n,T'_n)$.

Como $(\prod_{n\in N} f_n)(C)$ es un cerrado de $\prod_{n\in N} f_n(\overline{p_n(C)})$, se concluye que $(\prod_{n\in N} f_n)(C)$ es cerrado en $\prod_{n\in N}(X'_n,T'_n)$.

En general el cociente de un espacio T_{3a} que admite una F-secuencial compactificación T_{3a}, no admite una F-secuencial compactificación T_{3a} ya que el axioma T_{3a} no se conserva por identificaciones.

Proposición VI.3.9

Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia finita de espacios topológicos T_{3a}. Supongamos que para todo $i\in I$ $((X'_i,T'_i),f_i)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X_i,T_i). Entonces $(\sum_{i\in I}(X'_i,T'_i), \sum_{i\in I} f_i)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$.

Demostración:

Para todo $i\in I$, f_i es un homeomorfismo de (X_i,T_i) en $(f_i(X_i),T'_i\,|_{f_i(X_i)})$. Por tanto $\sum_{i\in I} f_i$ es un homeomorfismo de

$\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ en $\left(\sum_{i\in I} f_i(X_i), \left(\sum_{i\in I} T_i\right)\Big|_{\sum_{i\in I} f_i(X_i)}\right)$. Además,

$\overline{\sum_{i\in I} f_i(X_i)} = \sum_{i\in I} \overline{f_i(X_i)} = \sum_{i\in I} X'_i$.

Por IV.1.17, se tiene que $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ es secuencialmente compacto. Además es T_{3a}.

Por último sea C un subconjunto cerrado y secuencialmente compacto en $\sum_{i\in I}(X_i,T_i)$ .Se tiene que $C = \sum_{i\in I} C_i$, donde C_i es cerrado y secuencialmente compacto en (X_i,T_i) para todo $i\in I$. Entonces $(\sum_{i\in I} f_i)(C) = \sum_{i\in I} f_i(C_i)$ es cerrado en $\sum_{i\in I}(X'_i,T'_i)$.

En (28) , K.Morita establece que un espacio topológico T_{3a} (X,T) admite una F-numerable compactificación T_{3a} si y solamente si existe $((X',T'),f)$ F-numerable compactificación T_{3a} de (X,T) tal que $\beta(X) \supset X' \supset e(X)$, donde $((\beta(X), \beta(T)),e)$ es la compactificación de Stone-Čech de (X,T).

El siguiente ejemplo prueba que para las F-secuenciales compactificaciones T_{3a} de un espacio topológico T_{3a} no se tiene una caracterización análoga a la de K. Morita.

Ejemplo VI.3.10

Se considera el espacio topológico (N,T_D) de los números naturales con la topología discreta.

Se considera $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ la secuencial compactificación de Alexandroff de (N,T_D). Por VI.2.7, se tiene que $((X^{\wedge},T^{\wedge}),j)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (N,T_D).

Veamos sin embargo, que no existe una F-secuencial compactificación T_{3a}, $((X',T'),f)$, de (N,T_D) tal que $\beta(N) \supset X' \supset e(N)$.

En efecto:

Supongamos que existe una tal F-secuencial compactificación T_{3a}. Como $e(N)$ no es secuencialmente compacto, se tiene que $X' - e(N) \neq \emptyset$. La sucesión $\{e(n)\}_{n\in N}$ en X tendrá una subsucesión convergente, $\{e(n_k)\}_{k\in N}$. Como $(\beta(N), \beta(T_D))$ es T_2, si x'_o es el punto de convergencia de $\{e(n_k)\}_{k\in N}$ en (X',T') (y por tanto en $(\beta(N), \beta(T_D))$ se tiene que $\{e(n_k)\}_{k\in N} \cup \{x'_o\}$ es cerrado en $(\beta(N), \beta(T_D))$, lo cual es absurdo, ya que todo subconjunto cerrado e infinito de $(\beta(N), \beta(T_D))$ tiene de cardinal $2^{\aleph}$. (Vease Pag. 71 de (34)).

Ejemplo VI.3.11

En (20*) A.KATO, construye (admitiendo la hipótesis del continuo) un espacio topológico (Y_o,T_o) cumpliendo las siguientes propiedades:

1º) (Y_o,T_o) es T_4.

2º) (Y_o,T_o) es un M-espacio (Vease (27)).

3º) (Y_o,T_o) es separable.

4º) (Y_o,T_o) es localmente compacto.

5º) (Y_o,T_o) cumple el I.A.N.

6º) (Y_o,T_o) no admite una F-numerable compactificación T_{3a}.

De 5º) se deduce que (Y_o,T_o) es isosecuencial compacto (I.1.39). Así, por 6º) y VI.1.4(B), se deduce que (Y_o,T_o) no admite una F-secuencial compactificación T_{3a}. (Comparese con V.1.2(E)).

Por otro lado, de 4º) y 5º) se deduce que (Y_o,T_o) es localmente secuencialmente compacto. Por tanto, $((\hat{Y}_o,\hat{T}_o),j)$ es una F-secuencial compactificación T_2 de (Y_o,T_o).

Proposición VI.3.12

Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto y T_{3a}. Entonces, (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_{3a} si y solamente si (X,T) es secuencialmente compacto.

Demostración:

Si (X,T) es secuencialmente compacto, $((X,T),1_X)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T).

Recíprocamente: Sea $((X',T'),f)$ una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T). Supongamos que (X,T) no es secuencialmente compacto. Entonces, por IV.1.28, se tiene que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ en (X,T) tal que toda subsucesión suya tiene infinitos puntos de aglomeración en (X,T) (Por tanto, ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n\in N}$ es convergente). Por otro lado como (X',T') es secuencialmente compacto, $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ tiene una subsucesión, $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ que converge a un punto $x'_0 \in X' - f(X)$. Como (X',T') es T_2, x'_0 es el único punto de aglomeración de $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ en (X',T'). Así, $\{f(x_{n_k})\}_{k\in N}$ no tiene puntos de aglomeración en $(f(X),T'|_{f(X)})$ y por tanto $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ no tiene puntos de aglomeración en (X,T), lo cual es absurdo. Asi, (X,T) es secuencialmente compacto.

Observación VI.3.13

A) La demostración anterior, prueba el siguiente resultado: "Sea (X,T) un espacio topológico numerablemente compacto y T_2. Entonces, (X,T) admite una secuencial compactificación T_2 si y solamente si (X,T) es secuencialmente compacto".

B) En la demostración anterior se ha obtenido, además, la siguiente condición necesaria para que un espacio topológico T_{3a} admita una F-secuencial compactificación T_{3a}.

"Sea (X,T) un espacio topológico T_{3a} y $((X',T'),f)$ una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T). Entonces, (X,T) no contiene una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que ninguna subsucesión suya es convergente y todas tienen un punto de aglomeración."

Esta condición necesaria no es suficiente, como lo prueba el ejemplo VI.3.11 ((Y_o,T_o) cumple el I.A.N.).

Corolario VI.3.14

Sea (X,T) un espacio compacto y T_2 (Por tanto, (X,T) es T_{3a}). Entonces, (X,T) admite una F-secuencial compactificación T_{3a} si y solamente si (X,T) es secuencialmente compacto.

Demostración:

Es consecuencia de que todo espacio compacto y T_2 es numerablemente compacto y T_{3a}.

Ejemplo VI.3.15

A) El espacio topológico $(\{0,1\},T_u|_{\{0,1\}})^R$ es compacto y T_2 (y por tanto es paracompacto) y no es secuencialmente compacto. Así $(\{0,1\},T_u|_{\{0,1\}})^R$ no admite una F-secuencial compactificación T_{3a}.

B) Sea (X,T) un espacio discreto. Se tiene que (X,T) cumple las condiciones 1º) y 2º) de VI.2.7. Así, $((X^\wedge,T^\wedge),j)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de (X,T).

Por tanto existen espacios metrizables que no cumplen el II.A.N., que admiten F-secuenciales compactificaciones T_{3a} (Compárese con VI.3.1). Basta considerar un espacio discreto (X,T) con card$(X)>\aleph_0$.

C) Se considera el espacio topológicoo $(X,T)=([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}) \times (N,T_u|_N)$. Se tiene que (X,T) es T_{3a}, no es secuencialmente compacto y no es metrizable $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es secuencialmente compacto y no es compacto).

Por el apartado anterior $((N^\wedge,(T_u|_N)^\wedge),j)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a} de $(N,T_u|_N)$ y como $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$ es secuencialmente compacto y T_{3a}, $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}),1_{[a,\Omega)})$ es una F-secuencial compactificación de $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})$. Así, por VI.3.9, se tiene que $(([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)}))+(N^\wedge,(T_u|_N)^\wedge),1_{[a,\Omega)}+j)$ es una F-secuencial compactificación T_{3a}.

b) $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})^R$ es T_{3a}, numerablemente compacto y no es secuencialmente compacto. Así $([a,\Omega),T|_{[a,\Omega)})^R$ no admite una F-secuencial compactificación T_{3a}.

En este ejemplo cada espacio coordenado admite una F-secuencial compactificación T_{3a} (Vease VI.2.8).

Queda planteado el siguiente problema:

"Caracterizar los espacios topológicos T_{3a} que admiten F-secuenciales compactificaciones T_{3a} ".

BIBLIOGRAFIA

(1) Alo, Richard A. -Shapiro, H. L.
" Normal Topological spaces"
Cambridge University Press nº 65. 1974

(2) Arhangel´Skil, A. V.
"Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces"
Soviet Math. Dokl, 4 (1963) pp1726-9

(3) Arens, R
"Note on convergence in topology"
Math. Mag. 23 1950 . p 229-234

(4) Aull, C. E.
"A certain classy topological space"
Prace Matematyczne 11. 1967 p. 49-53

(5) Bacon, P.
" The compactnes of countably compact spaces"
Pacific Journal of mathematics V.33 nº 3 1970

(6) Bing, R. H.
"Metrization of topological spaces"
Canad J. Math, V.3 1951 p. 175-186

(7) Borges, C.J.R.
" On stratifiable spaces"
Pacific Journal of mathematics V. 17 nº I 1966 p. 1-16

(8)Bourbaki, N.
Topologie generale (Capitulos 5 al 10)
Hermann Ed. Paris 1974.

(9) Brown, R.
"On sequentially proper maps and a sequential compactification
J. London Math. Soc 7 1973 p.515-522

(10) Cohen, D. E.
"Spaces with weak topology "
Quart J. Math, Oxford Ser (2) 5 (1954) p. 77-80

(11) Creede, G.
"Topology conference"
Arizona State University 1967 (318-323)

(12) Cullen, H. F.
"Unique secuential limits "
Boll. Un. Mathe. Ital 20 1965

(13) Dugundji, James
"Topology"
Allyn and Bacon, Inc Boston 1967

(14) Engelking, H.
" Outline of general topologie"
North Holland 1968

(15) Franklin, D. Tall
P-points in N-N normal non metrizable Moore spaces and other problems of Hausdorff"
Lectures Notes in Mathematics nº 378 p.501

(16) Franklin, S.P.
" Spaces in which sequences suffice I "
Fundamenta Mathematicae V. 57 1965 p.107 -115

(17) Franklin,S.P.
" Spaces in which sequences suffice II "
Fundamenta Mathematicae V. 61 1967 p.51 -56

(18).Garcia m. Margalef J. Outerelo E. PinillaJ.L.
" Topologia " V. 1
Ed. Alhambra 1975

(19) Halfar, E.
"A note on Hausdorff separation "
Amer. Math. Monthly. V.68 1961

(20) Hewitt,Edwin
" A remark on density characters"
Bull.of. Am. Mat. Soc. V.52,1946,pag. 641-643

(20*) Kato,A: "Solution of Morita´s Problems concerning countably-compactifications". Genr. Top. and its appli. V. 7, 1977, pag. 77-87.

(21) Kelley,J.L.
" General topology"
Princeton N.I. Van Nostrand 1955

(22) Kowallsky, H.J.
"Topological spaces"
Acad. Press. 1965

(23) Margalef,J. Outerelo,E. Pinilla, J.L.
"Topologia " Vol. II
Ed. Alhambra (En imprenta)

(24) Michael,E.
"Bi sequential spaces and bi-K-spaces"
Pillsburgh International Topology Conference 1970.

(25) Michael, E.A.
"A quintuple quotient quest."
General Topology and its applications V. 2 nº 2 p.91-138

(26) Moore ,R.C. and Mrowka, G.S.
"Topologies oetermined by countable objects"
Notices of Amer. Math. Soc 11 (1964) p. 554

(27) Morita, K.
"Products of normal spaces with metric spaces"
Math. Annalen V.154 1964 p.365-382

(28) Morita, K.
"Countably compactifiable spaces"
S.C. Rep Tokyo Kyoiku Daigaku A. 12 1973 p.7-15.

(28*) Ono, Tokuro: "A note on bi-sequential spaces", J. Math. Tokushima Univ. V 10 (1976) pag. 13-15.

(29) Scarborough,C.T. and Stone, A.H.
"Products of Nearly compact spaces"
T.A.M.S. V. 124 1966.

(30) Singal, Asha Rani
" Remarks on separation axioms"
General topology and its relations to modern Analysis and algebra. Proceding of the Kanpur Topological Confe- rence 1968 V. III Academic Press Prague 1971

(31) Siwiec, Franc.
"Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings"
General topology and its applications. V 1 nº2 1971,p.143-154

(32) Steen,L.A. and Seebach,J.A.
"Counterexamples in topology"
Holt, Rinehart and Winston, Inc 1970

(33) Tanaka, Y
"On products of quasi-perfs maps "
Proced. Japan Acad nº46. 1970 p.1070-1073

(34) Walker, Russel. C.
"The Stone-Cech compactifications"
Springer-Verlag .Berlin-Heidelberg 1974

(35) Willansky, A.
"Topology for Analysis"
Ginn. 1970

(36) Willard,S.
"General topology"
Addison-Wesley 1970

(37) Whyburn, Gordon.T.
Accessibility Spaces
Proc. A. M. S. nº24 1970 p.181-185