

P. F. ABELLANAS

GEOMETRIA ALGEBRAICA II

LAS FORMULAS DE SCHUBERT PARA LA DETERMINACION DE LOS NUMEROS ELEMENTALES DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

(Publicado en la «Revista Matemática Hispano-Americana»,
4.º Serie-Tomo III-1943)

NUEVAS GRAFICAS, S. A.
MADRID - 1943

MEMORANDUM

TO : SAC, [illegible]

FROM : [illegible]

SUBJECT: [illegible]

[illegible]

GEOMETRIA ALGEBRAICA II

LAS FORMULAS DE SCHUBERT PARA LA DETERMINACION DE LOS NUMEROS ELEMENTALES DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

por

P. F. ABELLANAS

Damos en este trabajo una demostración rigurosa de las fórmulas de Schubert (1) para la determinación de los números elementales de las superficies de segundo orden, empleando para ello el método de representación racional de v. d. Waerden (2).

Las fórmulas de Schubert que nos ocupan, relacionan los números de «cuádricas completas» degeneradas de un sistema, con las condiciones elementales de definición de cuádricas.

Todo ello se basa, por tanto, en el concepto de *cuádrica completa*. Se entiende por tal al conjunto de una superficie de segundo orden y una superficie de segunda clase, que pueden considerarse como límite de una superficie de segundo orden sin puntos singulares y el conjunto de todos sus planos tangentes.

Como condiciones elementales de definición de cuádricas completas, tomaremos las siguientes :

π , condición para que la superficie F_2 contenga un punto dado (condición μ de Schubert).

π' , condición para que F_2 toque a un plano dado (φ de Schubert).

τ , condición para que F_2 sea tangente a una recta (ν de Schubert).

En el § 1 demostraremos que sólo existen los cuatro tipos siguientes de cuádricas completas dados por Schubert :

1.º Cuádricas completas ordinarias.

(1) Schubert : Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig, 1879, página 71, I), II), III).

(2) V. d. Waerden : ZAG. VI. Math. Ann. 110, pág. 134.

2.º Degeneración φ' (χ de Schubert). La cuádrlica completa consta de un cono de segundo orden como lugar de puntos y la radiación de planos en su vértice contada dos veces como lugar de planos.

3.º Degeneración ψ . Consta de dos planos puntuales distintos y de dos radiaciones de planos distintas, con vértices en dos puntos de la recta común a de los dos planos.

4.º Degeneración φ . Consta de un plano puntual contado doblemente y de los planos tangentes a una cónica del mismo.

1. **La variedad \mathfrak{N}_c de las cuádrlicas completas.**—La condición necesaria y suficiente para que la superficie de segundo orden

$$\sum_1^4 a_{ik} x_i x_k = 0 \quad [1]$$

y la superficie de segunda clase

$$\sum_1^4 \alpha_{ik} x_i x_k = 0 \quad [2]$$

representen una misma cuádrlica es, según se sabe, que las matrices (a_{ik}) y (α_{ik}) sean inversas una de otra. Las 2.10 coordenadas homogéneas a_{ik} y α_{ik} de la cuádrlica completa [1] [2], definen un punto del espacio proyectivo doble $S_{9,9}$. Este punto, por ser las matrices (a_{ik}) y (α_{ik}) inversas, depende racionalmente de las (a_{ik}) o de las (α_{ik}) . Si se consideran las α_{ik} arbitrarias, el punto (a_{ik}, α_{ik}) es, por tanto, el punto general de una variedad \mathfrak{N}_c de $S_{9,9}$, tal que a toda cuádrlica completa le corresponde un punto de \mathfrak{N}_c , y recíprocamente. Por esto a esta variedad la llamaremos *variedad de las cuádrlicas completas*.

Teorema.—La variedad \mathfrak{N}_c es una variedad sin singularidades y sus puntos definen únicamente los cuatro tipos de cuádrlicas completas descritos en la introducción.

Demostración. Si especializan los parámetros a_{ik} y α_{ik} dentro de un cuerpo algebraico K y llamamos b_{ik} y β_{ik} los valores correspondientes, entonces las condiciones para que (b_{ik}) y (β_{ik}) sean inversas una de otra, son:

$$\sum b_{ik} \beta_{ki} = \varepsilon \delta_{ii} \quad (\varepsilon = 0 \text{ o } \neq 0) \quad [3]$$

Las ecuaciones de la variedad \mathcal{N} , son, por tanto,

$$\sum a_{ik} a_{ki} = \varepsilon \delta_{ii} \quad [4]$$

Para demostrar el teorema bastará probar: 1.º Que las relaciones [3] son satisfechas únicamente por cuádricas completas de los cuatro tipos establecidos en la introducción. 2.º Que dada una cuádrica completa (K, K') en las proximidades de la misma se puede establecer una representación paramétrica biunívoca y racional, tal que para valores particulares de los parámetros se obtiene la cuádrica particular (K, K') y para valores generales la cuádrica general [1] [2].

La matriz (b_{ik}) se puede poner mediante una transformación de coordenadas en una de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [5]$$

En virtud de las relaciones [3] a estas matrices les corresponden las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix} \quad [6]$$

estas últimas pueden escribirse también en forma diagonal. Escribiendo sólo la diagonal principal, se obtiene:

$$(1111), (0001), (0011), (0111) \quad [6]$$

Obtenemos, por tanto, los siguientes tipos de cuádricas completas:

$$\left. \begin{array}{l} 1.^\circ (1111), (1111), \text{ Cuádrica completa ordinaria} \\ 2.^\circ (1110), (0001), \text{ Degeneración } \varphi \\ 3.^\circ (1100), (0011), \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \varphi \\ 4.^\circ (1000), (0111), \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \varphi \end{array} \right\} \quad [7]$$

Con esto queda demostrada la primera parte.

Para demostrar la segunda, esto es, que \mathfrak{N}_9 es una variedad sin puntos singulares, observemos que la cuádrica puntual general [1] puede escribirse en la forma :

$$f(x) \equiv (x_1 + p_{12} x_2 + p_{13} x_3 + p_{14} x_4)^2 + q_2 (x_2 + p_{23} x_3 + p_{24} x_4)^2 + q_3 (x_3 + p_{34} x_4)^2 + q_4 x_4^2 = 0$$

siendo las p_{ij} y q_h parámetros arbitrarios. Escribiendo esta ecuación en forma matricial obtenemos :

$$f(x) \equiv (x) \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & p_{12}^2 + q_2 & p_{12} p_{13} + q_2 p_{23} & p_{12} p_{14} + q_2 p_{24} \\ p_{13} & p_{12} p_{13} + q_2 p_{23} & p_{13}^2 + q_2 p_{23}^2 + q_3 & p_{13} p_{14} + q_2 p_{23} p_{34} + q_3 p_{34} \\ p_{14} & p_{12} p_{14} + q_2 p_{24} & p_{13} p_{14} + q_2 p_{23} p_{34} + q_3 p_{34} & p_{14}^2 + q_2 p_{24}^2 + q_3 p_{34}^2 + q_4 \end{pmatrix} (x)' = 0$$

o bien :

$$f(x) \equiv (x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & q_2 & 0 & 0 \\ p_{13} & q_2 p_{23} & q_2 q_3 & 0 \\ p_{14} & q_2 p_{24} & q_2 q_3 p_{34} & q_2 q_3 q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (x)' = 0$$

La cuádrica dual asociada con ésta será :

$$\varphi(u) \equiv (u) \begin{pmatrix} 1 & -p_{12} & p_{12} p_{23} - p_{13} & p_{12} p_{24} + p_{13} p_{34} - p_{14} - p_{12} p_{23} p_{34} \\ 0 & 1 & -p_{23} & p_{23} p_{34} - p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & -p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & \frac{1}{q_2} & 0 & 0 \\ q_2 & \frac{1}{q_2} & 0 & 0 \\ \frac{p_{12} p_{23} - p_{13}}{q_2} & -p_{23} & \frac{1}{q_2 q_3} & 0 \\ \frac{p_{12} p_{24} + p_{13} p_{34} - p_{14} - p_{12} p_{23} p_{34}}{q_2 q_3 q_4} & \frac{p_{23} p_{34} - p_{24}}{q_2 q_3 q_4} & -\frac{p_{34}}{q_2 q_3 q_4} & \frac{1}{q_2 q_3 q_4} \end{array} \right\| (u)' =$$

$$= (u) \begin{pmatrix} 1 & p'_{12} & p'_{13} & p'_{14} \\ 0 & 1 & p'_{23} & p'_{24} \\ 0 & 0 & 1 & p'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p'_{21}}{q_2} & \frac{1}{q_2} & 0 & 0 \\ \frac{p'_{31}}{q_2 q_3} & \frac{p'_{32}}{q_2 q_3} & \frac{1}{q_2 q_3} & 0 \\ \frac{p'_{41}}{q_2 q_3 q_4} & \frac{p'_{42}}{q_2 q_3 q_4} & \frac{p'_{43}}{q_2 q_3 q_4} & \frac{1}{q_2 q_3 q_4} \end{vmatrix} (u) =$$

$$= q_2 q_3 q_4 u_1^2 + q_3 q_4 (p'_{12} u_1 + u_2)^2 + q_4 (p'_{13} u_1 + p'_{23} u_2 + u_3)^2 + (p'_{14} u_1 + p'_{24} u_2 + p'_{34} u_3 + u_4)^2 = 0$$

Por tanto, el par $f(x)=0, \varphi(u)=0$, constituyen una cuádrica completa, que para valores generales de las p_{ij}, q_h, p'_{ij} coincide con la cuádrica completa general [1] [2]. Veamos que para valores particulares de estos parámetros coincide con las cuatro cuádricas completas particulares [7].

En efecto, especialicemos $p_{ij}=p'_{ij}=0, i, j=1, \dots, 4$.

1.º $q_h=1, h=2, 3, 4$. Entonces

$$f(x) \rightarrow (x) (1111)(x), \quad \varphi(u) \rightarrow (u) (1111)(u)$$

y obtenemos la primera cuádrica completa [7]

2.º $q_2=q_3=1, q_4=0$. Entonces:

$$f(x) \rightarrow (x) (1110)(x), \quad \text{y} \quad \varphi(u) \rightarrow (u) (0001)(u)$$

que es la cuádrica completa degenerada φ' .

3.º $q_2=q_4=1, q_3=0$. Entonces:

$$f(x) \rightarrow (x) (1100)(x) \quad \text{y} \quad \varphi(u) \rightarrow (u) (0011)(u)$$

que es la cuádrica completa degenerada ψ .

4.º $q_3=q_4=1, q_2=0$:

$$f(x) \rightarrow (x) (1000)(x) \quad \text{y} \quad \varphi(u) \rightarrow (u) (0111)(u)$$

que nos da la degeneración φ .

Y con esto queda el teorema completamente demostrado.

2. Las fórmulas de Schubert.—Del teorema fundamental del párrafo anterior se deduce que la variedad \mathfrak{NC}_3 de las cuádricas completas puede representarse unívoca y birracionalmente so-

bre los puntos del espacio proyectivo S_3 de las cuádricas puntuales y sobre el espacio proyectivo S'_3 de las cuádricas de planos, puesto que a toda cuádrica completa le corresponde una cuádrica puntual y una cuádrica de planos y a éstos un punto de S_3 y de S'_3 , respectivamente. El citado teorema nos permite determinar inmediatamente las variedades singulares de la representación.

Consideremos en primer lugar la representación F de \mathcal{N}_3 sobre C_3 . En esta representación a toda cuádrica puntual ordinaria o con un único punto singular de S_3 , le corresponde en F^{-1} una única cuádrica completa. En el primer caso la formada por la cuádrica dada y sus planos tangentes y en el segundo la formada por el cono de segundo orden como lugar de puntos y la radiación de planos en su vértice contado dos veces. Sin embargo, a una cuádrica puntual degenerada en dos planos distintos, le corresponden tantas cuádricas completas como pares de puntos se pueden elegir en la recta común a los dos planos; su número es, por tanto, ∞^2 . Como el número de cuádricas puntuales degeneradas en dos planos es ∞^6 , resulta que la variedad singular o fundamental sobre \mathcal{N}_3 de la representación es una variedad ψ_8 de dimensión igual a 8 y la imagen de esta variedad sobre S_3 es la variedad ψ_6 de los pares de planos de S_3 . Para la cuádrica puntual degenerada en un plano doble, obtenemos en F^{-1} tantas cuádricas completas como cónicas existen en dicho plano, esto es, ∞^5 cuádricas completas, como en S_3 existen ∞^3 planos resulta que la variedad fundamental Φ_8 correspondiente a esta degeneración en \mathcal{N}_3 es de dimensión 8 y su reputación sobre S_3 es de dimensión 3. En la reputación F obtenemos, por tanto, como únicas variedades fundamentales en \mathcal{N}_3 , las variedades ψ_8 y Φ_8 .

Consideremos en segundo lugar la representación F' de \mathcal{N}_3 sobre S'_3 . En esta representación a una superficie de segunda clase ordinaria de S'_3 le corresponde una única cuádrica completa en \mathcal{N}_3 , y a la cuádrica de segunda clase de S'_3 constituida por todos los planos tangentes a una cónica le corresponde igualmente una única cuádrica completa en \mathcal{N}_3 , formada por ella y el plano de la cónica considerado como plano puntual doble. A la cuádrica de segunda clase formada por una radiación de planos de primer orden considerada como doble, le corresponden tantas cuádricas completas, como conos de segundo orden existen en la radiación anterior, esto es, ∞^5 cuádricas completas. Al conjunto de todas estas cuádricas de segunda clase de S_3 degeneradas

en una radiación doble de planos, le corresponde en F^{-1} una variedad fundamental de dimensión 8 que llamaremos Φ'_8 . Consideremos, finalmente, la cuádrlica de segunda clase de S_3 constituida por dos radiaciones de planos de vértices distintos, a esta cuádrlica le corresponden tantas cuádrlicas completas en \mathcal{N}_9 , cuantos pares de planos pasen por la recta definida por los vértices de las dos radiaciones, esto es, ∞^2 cuádrlicas completas. Como el número de aquéllas es ∞^6 obtenemos, correspondiendo a esta degeneración sobre \mathcal{N}_9 una subvariedad fundamental de dimensión 8 que representaremos por ψ'_8 .

Podemos, por tanto, enunciar el siguiente

TEOREMA.—*Existen dos representaciones birracionales F y F' de la variedad \mathcal{N}_9 sobre los espacios proyectivos S_3 y S'_3 , respectivamente, y en estas representaciones las únicas variedades fundamentales sobre \mathcal{N}_9 son Φ_8 y ψ_8 en la primera y Φ'_8 y ψ'_8 en la segunda.*

Si consideramos las representaciones birracionales inversas F^{-1} y F'^{-1} entre las variedades S_3 , \mathcal{N}_9 y S'_3 , \mathcal{N}_9 respectivamente, que en virtud del teorema del párrafo anterior son sin singularidades, podemos aplicar a esta representación los resultados del párrafo 7 de ²⁾. Para ello consideremos una curva C y una subvariedad \mathcal{U} de dimensión 8 contenidas ambas en la variedad \mathcal{N}_9 y sean \bar{C} y $\bar{\mathcal{U}}$ sus imágenes en S_3 mediante la transformación F y \bar{C}' , $\bar{\mathcal{U}}'$ sus imágenes en S'_3 mediante la transformación F' . Si representamos con la notación usual por $[C, \mathcal{U}]$ el número de puntos de intersección de la curva C con la variedad \mathcal{U} , tendremos, en virtud de la fórmula 29 de ²⁾:

$$[C, \mathcal{U}] = [\bar{C}, \bar{\mathcal{U}}] - a_1 [C, \Phi_8] - a_2 [C, \Phi_8] \quad [1]$$

y análogamente para la representación F'^{-1} :

$$[C, \mathcal{U}] = [\bar{C}', \bar{\mathcal{U}}'] - b_1 [C, \psi_8] - b_2 [C, \psi_8] \quad [2]$$

Como \bar{C} y $\bar{\mathcal{U}}$ pertenecen al espacio proyectivo S_3 , si llamamos \bar{c} y \bar{a} a sus órdenes, en virtud del teorema de *Bézout* es

$[\bar{C} \cdot \bar{U}] = \bar{c} \cdot \bar{a}$. Análogamente, llamando \bar{c}' y \bar{a}' a las órdenes de \bar{C}' y \bar{U}' en S'_9 , resulta: $[\bar{C}' \cdot \bar{U}'] = \bar{c}' \cdot \bar{a}'$, y por tanto:

$$[C U] = \bar{c} \cdot \bar{a} - a_1 [C \cdot \phi_8] - a_2 [C \cdot \Phi_8] \quad [1']$$

$$[C U] = \bar{c}' \cdot \bar{a}' - b_1 [C \psi'_8] - b_2 [C \cdot \Phi'_8] \quad [2']$$

Si indicamos por P el conjunto de todas las cuádricas que pasan por un punto, su imagen en $S_{9,9}$ será un hiperplano y por tanto

$$\bar{c} = [C P]$$

análogamente, si representamos por P' el conjunto de todas cuádricas tangentes a un plano, este conjunto es lineal en $S_{9,9}$, luego:

$$\bar{c}' = [C P']$$

y sustituyendo:

$$[C U] = \bar{a} [C P] - a_1 [C \cdot \phi_8] - a_2 [C \cdot \Phi_8] \quad [1'']$$

$$[C U] = \bar{a}' [C P'] - b_1 [C \psi'_8] - b_2 [C \cdot \Phi'_8] \quad [2'']$$

Las constantes \bar{a} , a_1 , a_2 , \bar{a}' , b_1 , b_2 dependen únicamente de la variedad U y se podrán por tanto determinar en el momento en que se especialice esta variedad.

Tomemos en $[1'']$ como especialización de U la variedad P' de cuádricas completas lineales en las β_{ij} . En S_9 corresponde como imagen de P' la variedad \bar{P}' de todas las cuádricas tangentes a un plano arbitrario, a es el orden de esta última variedad. Una recta de S_9 representa un haz de cuádricas, luego a es igual al número de cuádricas de un haz tangentes a un plano dado. El haz cortado por este plano de un haz de cónicas que en general posee tres cónicas degeneradas. Luego $a=3$. Para esta especialización obtenemos, por tanto:

$$[C P'] = 3 [C P] - a_1 [C \phi_8] - a_2 [C \Phi_8] \quad [1''']$$

Para calcular a_1 y a_2 podemos, por tanto, ya que sólo dependen de P' , especializar C de un modo arbitrario.

Especialización C_1 de C .— C_1 es el haz de cuádricas completas tangentes a un cono de segundo orden dado a lo largo de una

cónica B del mismo. Entonces $[C_1P']$ es el número de cuádricas completas de este haz de tangentes a un plano dado y por tanto $[C_1P'] = 1$. $[PC_1]$ es el número de cuádricas completas del haz que pasan por un punto dado; luego $[PC_1] = 1$. $[C_1\psi_8]$ es el número de cuádricas de C_1 con degeneración ψ que evidentemente es cero. $[C\Phi_8]$ es el número de cuádricas del haz con degeneración φ ; existe, evidentemente, sólo una, la del plano de B. $[1''']$ nos da, por tanto:

$$1 = 3 - a_2, \quad \text{luego} \quad a_2 = 2.$$

Especialización C_2 de C.— C_2 es el haz de cuádricas completas tangentes a dos planos π_1 y π_2 en dos puntos $r_1 \cdot r'_1$ de π_1 y $r_2 \cdot r'_2$ de π_2 y que contienen a r_1, r'_1, r_2 y r'_2 . Siendo $r_1 \cdot r'_1 \in \pi_1 \cdot \pi_2$ y $r_2 \cdot r'_2 \in \pi_1 \cdot \pi_2$. Entonces

$$\begin{aligned} [C_2P'] &= \text{número de cuádricas completas de } C_2 \text{ tangentes a un plano dado} = 1 \\ [C_2P] &= \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad C_2 \text{ que pasan por un punto dado} = 1 \\ [C_2\psi_8] &= \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad C_2 \text{ con degeneración } \psi = 2 \end{aligned}$$

Estas últimas son las cuádricas formadas por π_1, π_2 con las radiaciones de vértices $r_1 \cdot r'_2$ y $r'_1 \cdot r_2$ y la cuádrica $r_1, r'_2; r'_1, r_2$ con las radiaciones de vértices $r_1 \cdot r'_1$ y $r_2 \cdot r'_2$ y por último $[C_1\Phi_8] = 0$. Luego $[1''']$ nos da:

$$1 = 3 - 2a_1, \quad \text{luego} \quad a_1 = 1$$

por tanto $[1''']$ se puede escribir:

$$[CP'] = 3[CP] - [C\psi_8] - 2[C\Phi_8] \quad [1'']$$

Tomemos ahora en $[2']$ como variedad \mathbb{U} la variedad P de las cuádricas completas lineal en las b_{ij} . La imagen de P en S' , será el conjunto de todas las cuádricas de planos que pasen por un punto. Luego como antes $\bar{a}' = 3$. $[2']$ se escribe, por tanto, en este caso:

$$[CP] = 3[CP'] - b_1[C\psi_8] - b_2[C\Phi_8] \quad [2'']$$

Como b_1 y b_2 dependen únicamente de la variedad P, podemos hacer especializaciones de C para calcularlos.

Hagamos en primer lugar la especialización $C \rightarrow C_1$; entonces, como antes, resulta inmediatamente:

$$[C_1 P] = 1, \quad [C_1 P'] = 1, \quad [C_1 \psi_3] = 0, \quad [C_1 \Phi_3] = 1$$

y por tanto, sustituyendo en [2''']

$$1 = 3 - b_2, \quad \text{esto es,} \quad b_2 = 2.$$

Efectuando ahora la especialización $C \rightarrow C_2$, obtenemos:

$$[C_2 P] = 1, \quad [C_2 P'] = 1, \quad [C_2 \psi_3] = 2, \quad [C_2 \Phi_3] = 0$$

y sustituyendo en [2''']

$$1 = 3 - 2b_1, \quad \text{luego} \quad b_1 = 1$$

y por tanto

$$[CP^*] = 3[CP'] - [C\psi_3] - 2[C\Phi_3] \quad [2^{IV}]$$

Volvamos de nuevo a la fórmula [1''] y tomemos como especialización de \mathbb{U} , la variedad R de las cuádricas completas tangentes a una recta dada. La imagen de R sobre S_9 será la variedad \bar{R} de las cuádricas de puntos tangentes a una recta. Luego el orden de \bar{R} será igual al número de cuádricas de puntos de un haz tangentes a una recta, esto es, $a = 2$. Para esta especialización obtenemos, por tanto,

$$[CR] = 2[CP] - a_1[C\psi_3] - a_2[C\Phi_3] \quad [1^*]$$

y para la fórmula [2''] obtenemos análogamente mediante esta especialización:

$$[CR] = 2[CP'] - b_1[C\psi_3] - b_2[C\Phi_3] \quad [2^*]$$

Para calcular las constantes a_1 y a_2 en este caso, hagamos en primer lugar la especialización $C \rightarrow C_2$; entonces, el número de cuádricas puntuales de C_2 tangentes a una recta es igual a 2 y el número de cuádricas de planos tangentes a una recta es también 2, luego $[C_2, R] = 2$. El número de cuádricas de puntos de C_2 que pasan por un punto es 1 y el número de cuádricas de planos de C_2 que pasan por un punto es 3, luego

$[C, M]=1$. Como antes es $[C_2 \psi]=2$ y $[C_2 \Phi]=0$, luego sustituyendo en [1*]

$$2=2-2a_1, \quad \text{esto es} \quad a_1=0.$$

Haciendo ahora la especialización $C \rightarrow C_1$. El número de cuádricas completas de C_1 que son tangentes a una recta r será igual al número de cónicas completas sección de C_1 , por el plano definido por r y el vértice de Γ que son tangentes a r , este número es igual a uno, luego: $[C_1 R]=1$. Como anteriormente $[M \cdot C_1]=1$, $[C_1 \psi]=0$ y $[C_1 \cdot \Phi]=1$, luego sustituyendo en [1*]

$$1=2-a_2, \quad e. e., \quad a_2=1.$$

Obtenemos, por consiguiente, en este caso:

$$[CR] = 2[CP] - [C \Phi_3] \quad [1^{**}]$$

Efectuando las mismas especializaciones de C en [2*] y de un modo completamente análogo, obtenemos:

$$[CR] = 2[CP'] - [C \Phi'_3] \quad [2^{**}]$$

Las fórmulas [1^{iv}], [2^{iv}], [1^{**}] y [2^{**}] constituyen las fórmulas buscadas. Empleando una notación simbólica análoga a la de Schubert, podemos escribirlas así:

$$\pi' = 3\pi - \phi - 2\varphi \quad (\phi \equiv \phi') \quad [3]$$

$$\pi = 3\pi' - \phi' - 2\varphi' \quad [4]$$

$$r = 2\pi - \varphi \quad [5]$$

$$r = 2\pi' - \varphi' \quad [6]$$

Estas cuatro fórmulas no son independientes. Una de ellas es combinación lineal de las otras tres. En efecto, de [5] y [6] se deduce:

$$2\pi - \varphi = 2\pi' - \varphi', \quad e. e. \quad \varphi = 2\pi - 2\pi' + \varphi'$$

y sustituyendo en [3]

$$\pi' = 3\pi - \phi - 4\pi + 4\pi' - 2\varphi' = -\pi - \phi - 2\varphi' + 4\pi'$$

o bien,

$$\pi = 3\pi' - \phi - 2\varphi'$$

que es la fórmula [4].

Despejando en ellas φ , φ' y ψ , obtenemos:

$$\begin{cases} \varphi = 2\pi - r \\ \varphi' = 2\pi' - r \\ \phi = 2r - \pi - \pi' \end{cases} \quad [7]$$

y despejando π , π' , r :

$$\begin{cases} \pi = \frac{1}{4}(3\varphi + \varphi' + 2\phi) \\ \pi' = \frac{1}{4}(\varphi + 3\varphi' + 2\phi) \\ r = \frac{1}{4}(2\varphi + 2\varphi' + 4\phi) \end{cases} \quad [8]$$

Nota.—Hemos creído conveniente alterar ligeramente la notación empleada por Schubert, con objeto de hacer resaltar la dualidad en las fórmulas.

Zaragoza, junio 1943.

