UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Álgebra y Fundamentos

TESIS DOCTORAL

Espacios simplécticos sobre un anillo de Hermite : el grupo simpléctico

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Ezequiel Abia Zuazo

DIRECTOR:

José Manuel Aroca

Madrid, 2015

Ezequiel Abia Zuazo

ESPACIOS SIMPLECTICOS SOBRE UN ANILLO DE HERMITE. EL GRUPO SIMPLECTICO

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1981

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-17700-1981

ESPACIOS SIMPLECTICOS SOBRE

UN ANILLO DE HERMITE

EL GRUPO SIMPLECTICO

E. de Abia

Memoria presentada para la obtención del Grado de Doctor.

A mi madre y a mi mujer.

Sean mis primeras palabras para expresar mi gratitud al Prof. Pedro Abellanas, por su apoyo moral y el haberme iniciado en estos trabajos.

Agradezco a E. Fernández Bermejo su ayuda y valiosas sugerencias y comentarios, así como a J. Ruiz Fernández de Pinedo por sus advertencias en las traducciones y a C. Villas por su rapidez en escribirla a máquina.

Quiero hacer extensivo este agradecimiento a mis compañeros del Departamento de Algebra y Fundamentos, que tanto me han animado durante la realización de este trabajo.

Sobre todo quiero agradecer muy efusivamente a mi director J.M. Aroca por su entusiasmo, desvelos y paciencia que ha tenido hasta llevar a feliz término esta memoria.

I N D I C E

INTRODUCCION

El objetivo de esta memoria es buscar clases de anillos para los cuales:

a) Exista un único grupo simpléctico de cada dimensión (par), es decir todo espacio simpléctico admite una descomposición en suma ortogonal de planos hiperbólicos.

b) El grupo simpléctico este generado por las transvecciones simplécticas.

Si prescindimos de los resultados sobradamente conocidos, en los casos en que el anillo base es un cuerpo. conmutativo o no, los primeros trabajos en esta dirección se deben a Klingenberg quien en sus trabajos [1] [2] [3] probó que si A es un anillo local, todo espacio simpléctico sobre A se descompone en suma ortogonal de planos hiperbólicos y que el grupo $S\,P_n(A)$ está generado por las transvecciones simplécticas. El reciente texto de Bernard R. Mc.Donald, Geometric Algebra over Local Rings , hace estos resultados de Klingenberg asequibles al estudiante medio.

Los resultados de Klingenberg fueron extendidos por Chang [1] [2] a anillos semilocales y por Riehm [1] a anillos de valoración discreta y por Chan-Nan Chang a dominios de ideales principales.

En 1976 E. Fernpandez Bermejo en su tesis de esta Universidad, obtuvo empleando técnicas de paso al límite proyectivo, una categoría de anillos, los β-anillos, que incluyen todos los casos conocidos y otros muchos que verificaban estas dos propiedades.

La herramienta clave de este tipo de trabajos, es el comportamiento respecto a la ortogonalidad asociada a una forma bilineal definida en un A-módulo libre, de los submódulos libres sumandos directos y su dimensión.

La publicación de los recientes trabajos de Quillen [1] Suslin [3] y Vaserstein [1] sobre la conjetura de la fila unimodular de Serre, abre el campo a los llamados por Lam [1] anillos de Hermite, anillos en los cuales cada fila unimodular es ampliable a una matriz cuadrada de determinante unidad en el anillo base, pues demuestran que los anillos de polinomios sobre un cuerpo o anillo local regular de dimensión menor o igual que dos son anillos de Hermite.

Nuestro trabajo entonces consiste en analizar el comportamiento de los espacios simplécticos sobre anillos de Hermite y comparar la estructura de anillo de Hermite con la de β-anillo.

Destacaremos, como resultados más importantes, los siguientes:

1) Caracterización completa de los β-anillos, probando que un anillo A es un β-anillo si y solo si los componentes grafo-conexos y topológicos conexos de Spec(A) coinciden.

2) Demostración de que todo espacio simpléctico sobre un anillo de Hermite se descompone en suma ortogonal de planos hiperbólicos.

3) Caracterización de las transvecciones simplécticas sobre anillos de Hermite.

4) Demostración de que las transvecciones simplécticas generan el grupo simpléctico sobre un anillo de Hermite de funciones diferenciables.

El capítulo primero está dedicado a establecer el concepto de anillo de Hermite y a las propiedades lineales más importantes de este tipo de anillos. En la sección primera de este capítulo se establecen las definiciones y propiedades de las filas unimodulares y las filas ampliables. Una fila $(a_1,\dots,a_n)\varepsilon A^n$ se dice unimodular si y solo si el ideal generado por sus componentes es el anillo completo, y se dice ampliable si y solo si existe una matriz n x n de determinante unidad en A, es decir un elemento de $GL_n(A)$ que lo tiene por primera fila.

Obviamente toda fila ampliable es unimodular y toda unimodular compuesta por uno o dos elementos, es siempre ampliable, pero el recíproco no es cierto en general.

Tras establecer diversas caracterizaciones de los conceptos antes indicados, se introducen en la segunda sección de este capítulo las definiciones de anillo de Hermite a nivel r, (anillo en el cual toda fila de $r+2$ elementos es ampliable) anillo r-Hermite (anillo de Hermite a nivel s para todo s mayor o igual que r) y anillo de Hermite (anillo 0-Hermite, o lo que es lo mismo, en el cual toda fila unimodular es ampliable).

Obsérvese que el hecho de que toda fila unimodular de r elementos sea ampliable no prueba que toda fila unimodular de menos de r elementos lo sea.

La conexión entre la condición de anillo de Hermite y propiedades lineales de los módulos libres está recogida en la proposición 2.4 que establece que:

<u>PROPOSICION 2.4</u>.- Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) A es r-Hermite.

ii) $\forall n\in N$ con $n\geq r+2$ y para todo $\underline{v}\in A^u$ con $O(\underline{v})=A$ existen $\underline{v}_2\ldots\ldots\underline{v}_n\in A^u$ tales que $\{\underline{v}_1\underline{v}_2\ldots\ldots\underline{v}_n\}$ es una base de A^u.

iii) $\forall n\in N$ con $n\geq r+2$ y para todos $\underline{v}_1\ldots\ldots v_s\in A^n$ con $s\leq n-r-1$ y $R_u(\underline{v}_1\ldots\underline{v}_s)=s$ existen $\underline{v}_{r+1}\ldots\underline{v}_n\in A^n$ tales que $\{\underline{v}_1\ldots\underline{v}\ v_{r+1}\ldots v_n\}$ es una base de A^n.

iv) $\forall n\in N$ con $n\geq r+2$ y para todo A-módulo L libre y sumando directo de A^n con dim $(L)\leq n-r-1$ existe un submódulo L' de A^n tal que $A^n=L+L'$ siendo L' libre.

v) $\forall n\in N$ con $n\geq r+2$ y para todo A-módulo L libre y sumando directo de A^n con dim $(L)\leq n-r-1$, $\omega(L)$ es un submódulo libre verificando que:

$$n=\dim(L)+\dim(\omega(L)).$$

proposición que se extiende obviamente a anillos de Hermite en la forma:

i) A es de Hermite.

ii) $\forall n\in N$ y $\underline{v}\in A^u$ con $O(\underline{v})=A$ existen $\underline{v}_2\ldots\ldots\underline{v}_n\in A^u$ tales que $\{\underline{v},\underline{v}_2,\ldots\ldots,\underline{v}_n\}$ es una base de A^n.

iii) $\forall n\in N$ y para todo $\{\underline{v}_1\ldots\ldots\underline{v}_s\}$ A^n con $s<n$ y $R_u(\underline{v}_1\ldots\ldots\underline{v}_s)=s$ existen $\underline{v}_{s+1}\ldots\ldots\underline{v}_n$ tales que $\{\underline{v}_1\ldots\ldots\underline{v}_s\ \underline{v}_{s+1}\ldots\ldots v_n\}$ es una base de A^n.

iv) $\forall n\in N$ y para todo L submódulo libre y sumando directo de A^n existe L' submódulo de A^n tal que $A^n=L\oplus L'$

con L' libre .

v) $\forall n \in N$ y para todo submódulo libre y sumando directo de A^n, $\omega(L)$ es submódulo libre y se verifica

$$\dim (L)+\dim (\omega(L))= n .$$

Obsérvese que el proceso recurrente de demostración no permite la sustitución en este enunciado de "anillo r-Hermite" por "anillo de Hermite a nivel r" con la consiguiente sustitución de las desigualdades por igualdades en los restantes puntos de la proposición.

Esta proposición permite caracterizar un tipo de sistemas de ecuaciones lineales, los <u>sistemas libres</u> definidos así: Un sistema $\Sigma\, a_{ij}x_j=b_i$ se dice libre si y solo si $R(a_{ij})=R_u(a_{ij})$ y $R(a_{ij},b_i)=R_u(a_{ij},b_i)$.

donde recordamos, el rango y rango unitario de una matriz M se definen por:

$R(M)$ es el máximo i tal que $J_i(M)\neq 0$.

$R_u(M)$ es el máximo i tal que $J_i(M)=A$.

Para estos sistemas y siempre sobre un anillo de Hermite es válido el teorema de Rouche-Frohenius en la forma siguiente:

<u>Teorema 2.7</u>.- Todo sistema libre homogéneo de m ecuaciones con n incognitas de rango s tiene por solución un submódulo libre y sumando directo de A^n de dimensión n-s .

<u>Teorema 2.8</u>.- Un sistema libre tiene solución si y solo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz del sistema.

El capítulo II está dedicado a estudiar la relación entre anillos de Hermite y β-anillos con vistas a caracterizar completamente estos últimos anillos y a comprobar que nuestros resultados posteriores amplian, efectivamente lo conseguido por el profesor E. Fernández Bermejo.

Recordemos que un β-anillo es un anillo que coincide con el límite proyectivo de sus localizados respecto a los ideales primos. El objeto de esta definición es extender a esta clase de anillos los resultados de Klingenberg para anillos locales. E. Fernández Bermejo en su tesis, ya aludida dió una condición suficiente para que un anillo sea β-anillo, el análisis de esta condición en un caso particular, nos suministra la vía para establecer una caracterización de este tipo de anillos y consecuentemente el hecho de que ni todo β-anillo es de Hermite, ni todo anillo de Hermite es β-anillo.

El caso particular aludido es el de las K-álgebras*, anillo en los cuales sus elementos tienen una clara interpretación como aplicaciones. Un anillo, conmutativo con elemento unidad se llama K-álgebra* si y solo si:

a) A es una K-álgebra.

b) Para todo m ideal maximal de A , el homomorfismo composición $K \longrightarrow A \longrightarrow A/m$ del homomorfismo estructural de A y el homomorfismo natural es un isomorfismo.

Los K-álgebras* se comportan respecto al operador Max(-) que asocia a cada anillo el conjunto de sus ideales maximales, en la misma forma que los anillos en general respecto del operador Spec (-) . La propiedad esencial de los K-álgebras* es que sus elementos se pueden considerar como aplicaciones de Max(A) en K , además la correspondencia que asocia a cada elemento la aplicación correspondiente es inyectiva si y solo si el radical de Jacobson del álgebra es cero. Para estas álgebras los anillos locales A_M admiten la consideración de anillos de gérmenes de aplicaciones de Max(A) en K en el punto m . En particular los anillos de funciones continuas de un espacio topológico compacto y completamente regular en un cuerpo valorado K (que esencialmente puede ser también R o C) son K-álgebras*, lo cual revela la importancia de este tipo de anillos.

Entonces dedo un anillo A podemos considerar otros dos

$$A_\beta = \varprojlim \{A_p\}_{p \in \operatorname{Spec} A} ,$$

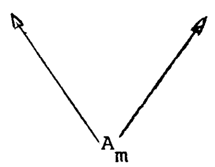
$$A_M = \varprojlim \{A_M\}_{M \in \operatorname{Max}(A)} = \prod_{M \in \operatorname{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}}$$

claramente

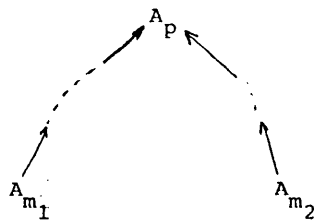
$$A \hookrightarrow A_\beta \hookrightarrow A_M$$

además A y A_M no son iguales en general (hay casos en que $A=A_M$, por ejemplo cuando A es local o producto finito de anillos locales) y en el caso de los K-álgebras* la cuestión es clara, ya que los elementos de A_M son familias de gérmenes de aplicaciones de Max (A) en K , mientras que los elementos de A son familias de gérmenes de una aplicación fija en los distintos puntos de Max (A).

¿Quién es A_β? pues si consideramos el diagrama $\{A_p\}_{p\in\mathrm{Spec}(A)}$ como grafo, los elementos minimales son precisamente los $\{A_m\}_{m\in\mathrm{Spec}\ (A)}$, si aparece un fragmento conexo de grafo con un mínimo.



los elementos de A_m figuran en los de A_β sin restricción ninguna, mientras que si en un fragmento conexo aparecen varios minimales



un par (a_{m_1}, a_{m_2}) compuesto por un elemento de A_{m_1} y otro de A_{m_2} figurará èl A_β si y solo si existe una cadena de ideales primos

$$m_1 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots\cdots\cdots \subsetneq p_r \subsetneq m_r$$

y en esa cadena a_{m_1} y a_{m_2} están interconectados.

Esta observación nos da los dos casos para A_β.

1) $A_\beta = A_m$ si y solo si todo ideal primo está contenido en

un único ideal maximal, es decir si y solo si la variedad de p en Spec (A) contiene un único punto cerrado para todo $p \in Spec(A)$.

2) $A=A_\beta$ si y solo si los componentes topológico conexas de Spec (A) coinciden con los componentes conexas como grafo de Spec (A).

Estos resultados caracterizan los β-anillos y los anillos más alejados posibles de los β-anillos, y observemos que la condición 1) la cumplen precisamente los anillos de funciones continuas, estos anillos pues, no son nunca β-anillos. La condición 2) , en cambio, nos indica que los dominios de integridad, en los que, por ser el (0) ideal primo, el grafo es conexo, y los anillos noetherianos (y en general todos aquellos en los cuales la familia de componentes irreducibles de un espectro es localmente finito) son β-anillos. La sección dos de este capítulo está dedicada a construir un ejemplo de anillo de cada una de estas clases que no pertenecen a la otra.

Para hacer esta construcción, comenzemos observando que una fila unimodular $(f_1 \ldots . f_n)$ de funciones continuas de un espacio X en R se puede interpretar como una función $\underline{f}$ de X en R^n de norma no nula en todos los puntos de X , la función $\underline{f}^* = \frac{f}{||f||}$ toma entonces sus valores en lá esfera S^n , es decir que salvo unidades. las filas unimodulares de funciones continuas se pueden considerar como función con valores sobre la esfera.

Del mismo modo la condición de ampliabilidad para una fila se traduce en la existencia en cada punto de X de

$n-1$ vectores, que variando constantemente con el punto considerado, completan f a una base de R^n , la aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt permite suponer que estos vectores son ortogonales a $\underline{f}$ en cada punto y la sustitución de $\underline{f}$ por $\underline{f}^*$ permite afirmar que $\underline{f}$ es ampliable si y solo si se puede seleccionar en cada punto de $\operatorname{Im} \underline{f}^* \subset S^n$ una referencia del espacio tangente que varie continuamente con el punto. Todos estos cálculos se pueden efectuar de forma idéntica con una variedad diferenciable y funciones diferenciables sobre ella y conducen en el capítulo IV a una caracterización de los anillos de funciones diferenciables reales sobre variedades compactas que son anillos de Hermite.

Volviendo a nuestro ejemplo, puesto que S^2 no es paralelizable, es decir que una fila $\underline{f}$ de tres elementos tal que $\operatorname{Im} \underline{f}^*=S^2$ no es ampliable, en particular la aplicación de inmersión de S^2 en R^3 no es ampliable.

Esta fila como función sobre S^2 es unimodular, luego el anillo de funciones continuas de S^2 en $R, C(S^2,R)$ no es de Hermite . Este anillo tampoco es β-anillo por lo que hemos dicho antes, pero el anillo $A={}^{Z}[X_1X_2X_3]\big/_{I}$,

siendo $I=X_1^2+X_2^2+X_3^2-1$, de funciones polinómicas con coeficientes en Z sobre S^2 es noetheriano, luego es β-anillo.

De $A \subset C(S^2,R)$ es obvio que A no es de Hermite luego tenemos un β-anillo que no es anillo de Hermite.

La construcción del ejemplo recíproco es simple, pues las funciones diferenciables de S^1 con valores en R forman un anillo de Hermite, ya que ninguna función diferenciable $S^2 \longrightarrow S^n$, $n>1$, puede ser sobre, luego su imagen está contenida en un abierto paralelizable (homeomorfo por proyección estereográfica con R^{n-1}) y por tanto, toda fila unimodular es ampliable, en estos anillos todo ideal primo está contenido en un único máximal y por tanto no son β-anillos, con lo cual tenemos el segundo ejemplo buscado.

El capítulo III está dedicado a establecer el teorema de estructura de espacios simplécticos sobre un anillo de Hermite y a la caracterización de las transvecciones -- simplécticas.

En la sección primera se establece la caracterización de los subespacios simplécticos de un espacio simpléctico, y se estudia la relación de ortogonalidad respecto de la métrica simpléctica.

Se define un espacio simpléctico sobre un anillo de Hermite A como un par (V,ϕ) compuesto por un A-módulo libre 2n-dimensional V y una forma bilineal hemisimétrica no degenerada de $V \times V$ en A .

Llamamos subespacio simpléctico de (V,ϕ) a un submódulo U de V tal que

i) U es libre.

ii) U es sumando directo de V .

iii) Im $d_{(\phi|_U)}$ es sumando directo de U^* .

y diremos que U es no isotrópico si y solo si $d_{(\phi|_U)}$ es inyectiva.

La caracterización de los subespacios de (V,ϕ) nos lo da la proposición 1.4. que dice: U es subespacio simpléctico no isotrópico de V si y solo si $(U,\phi|_U)$ es un espacio simpléctico.

A continuación estudiamos la ortogonalidad respecto a la forma ϕ. La base de este estudio, es el hecho de que si $d_\phi : V \longrightarrow V^*$ es el homomorfismo asociado a ϕ (en este caso los dos isomorfismos clásicos asociados a ϕ, por la izquierda y la derecha, se reducen a uno por ser ϕ hemisimétrica) y si D_ϕ es el isomorfismo de retículos asociado a d_ϕ ,entonces es $\omega_\phi = \omega . D_\phi$,es decir la ortogonalidad respecto a ϕ se reduce a la ortogonalidad de V a V^*, que como sabemos funciona para anillos de Hermite en la misma forma que para cuerpos.

Consecuencia de este hecho es que :

PROPOSICION 2.2.-

i) $\omega_\phi(U)$ es un submódulo libre sumando directo de V , al que llamaremos sumando ortogonal a U respecto de ϕ y $\dim V = \dim U + \dim \omega_\phi(U)$.

ii) $\omega_\phi^2(U) = U$

iii) $\mathrm{Ker}\, d_{(\phi|_U)} = U \cap \omega_\phi(U)$.

PROPOSICION 2.3.- Si U es un subespacio no isotrópico de V entonces $\omega_\phi(U)$ es un subespacio de V .

PROPOSICION 2.4.-

U no isotrópico $\Longleftrightarrow$ $\omega_\phi(U)$ no isotrópico $\Longleftrightarrow U \perp \omega_\phi(U) = V$

completando estos resultados con la siguiente

PROPOSICION 2.5.- Si U es subespacio no isotrópico de V, entonces para todo $\underline{a}\varepsilon U$ tal que $0(\underline{a})=A$ existe $\underline{b}\varepsilon U$ con $\phi(\underline{a},\underline{b})=1$.

Se llega al resultado principal de este capítulo, por un simple proceso de inducción, que es

TEOREMA 2.8.- Todo espacio simpléctico sobre un anillo de Hermite es suma ortogonal de planos hiperbólicos.

El capítulo concluye con el estudio de un tipo particular de elementos del grupo simpléctico: las transvecciones simplécticas, definiendo como a tal a toda correspondencia $\sigma:V\longrightarrow V$ tal que

$$\sigma(\underline{x})=\underline{x}+\lambda\phi(\underline{a},\underline{x})\underline{a}, \qquad \underline{x}\varepsilon V,$$

y para los cuales se verifica que, llamando hiperplano de V a todo submódulo libre y sumando directo de dimensión $2n-1$ es

TEOREMA.-

$\tau\varepsilon S P_n(A)$ es transvección simpléctica $\Longleftrightarrow$ existe L libre y sumando directo de dimensión uno con $\tau(\underline{x})-\underline{x}\varepsilon L$, $\underline{x}\varepsilon V$ $\Longleftrightarrow$ existe H hiperplano con $\tau/_H=1_H$.

La memoria termina con un capítulo IV destinado a un tipo particular de anillos de Hermite, los anillos de Hermite de funciones diferenciables. La primera sección del capítulo está dedicada a caracterizar este tipo de anillos en la forma ya indicada un poco más atrás y en la segunda se estudia el grupo simpléctico sobre este tipo de anillos.

El resultado clave de esta sección es la proposición

2.1. que establece que

PROPOSICION 2.1.- Si $\underline{u}$ y $\underline{v} \varepsilon A^{2n}$ son dos filas unimodulares, se puede encontrar una cadena de transvecciones simplécticas con orden contenido en $0(\underline{v}-\underline{u})$ que transforma $\underline{u}$ en $\underline{v}$.

Esta transitividad en la acción de la cadena de transvecciones sobre las filas unimodulares, permite, tras una ligera modificación para garantizar la estabilidad de los planos hiperbólicos que dice: Si $(\underline{u},\underline{v}_1)$ $(\underline{u},\underline{v}_2)$ son pares hiperbólicos en (A^{2n},ϕ) cumpliendo las condiciones de la proposición anterior, entonces existe una cadena de transvecciones con orden contenido en $0(v_2-v_1)$ que dejan $\underline{u}$ invariante y transforman $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_1$, establecer el teorema de generación del grupo simpléctico por transvecciones simplécticas.

TEOREMA.- El grupo simpléctico $S\,P_n(A)$ está generado por las transvecciones simplécticas, si A es un anillo de Hermite de funciones diferenciables.

Teorema que se extiende sin dificultad al grupo simpléctico especial dada la generalidad de las proposiciones 2.1 y 2.2 .

C A P I T U L O I

A N I L L O S D E H E R M I T E

El objetivo de este capítulo es establecer las propiedades más importantes de los anillos de Hermite (terminología de Lam), así como desarrollar el Algebra Lineal sobre este tipo de anillos, resultados necesarios para el resto de la memoria.

Todos los anillos que usaremos, serán conmutativos y con elemento unidad. Los homomorfismos transformarán elemento unidad en elemento unidad. Las notaciones serán las usuales de cualquier texto de Algebra Lineal tomando como referencia los textos de Northcott [1] y Lam [1].

Φ-1 .- FILAS UNIMODULARES

En este párrafo definiremos elemento unimodular en un A-módulo M cualquiera y fila unimodular en un A-módulo libre, dando algunas caracterizaciones de dichos conceptos.

DEFINICION 1.1.- Sea M un A-módulo. Diremos que $m \in M$ es un elemento unimodular si y solo si existe un homomorfismo $f: M \longrightarrow A$ tal que $f(m)=1$.

PROPOSICION 1.2.- Las condiciones siguientes son equivalentes.

(i) $m \in M$ es un elemento unimodular.

(ii) m es una base de un submódulo libre sumando directo de M .

DEMOSTRACION

(i) $\Longrightarrow$ (ii) . En efecto : Si llamamos $L(m)$ al A-módulo generado por n , la aplicación $\psi : A \longrightarrow L(m)$ definida por $\psi(\lambda) = \lambda m$ es un homomorfismo de A-módulos . Además $\psi(\lambda) = \lambda . m = 0 \Longrightarrow f(\lambda . m) = 0 \Longrightarrow \lambda . f(m) = 0 \Longrightarrow \lambda . 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, con lo cual ψ es inyectiva . Por otra parte, si consideramos la composición $g = \psi . f$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & L(m) \arrow[ll, dashed, shift left, "i"] \\
& A \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

y llamamos $i : L(m) \longrightarrow M$ a la inmersión canónica, se tiene que $g \circ i = 1_{L(m)}$. Por tanto g es un proyector y $L(m)$ es sumando directo de M .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Trivial ya que si $M = L(m) + H$ basta definir $F = f + 0$ siendo 0 el homomorfismo cero de H en A y $f(m) = 1$.

NOTAS. 1.3

1.- Si $m \in M$ verifica que $Ann(m) \neq 0$, m no puede ser unimodular ya que existe $\lambda \in \mathrm{Ann}\ (m)$, $\lambda \neq 0$ y m unimodular existe $f \in M^*$ con $f(m)=1$. Por tanto $0=f(\lambda m)= \lambda f(m)=\lambda.1=\lambda$. En particular, un módulo de torsión no contiene elementos unimodulares.

Sin embargo, el hecho de ser $\mathrm{Ann}\ (m)=0$ no lleva consigo que m sea unimodular, pues en Z $\mathrm{Ann}(2)=0$ y 2 no es un elemento unimodular.

2.- La condición de elemento unimodular es contravariante respecto de los homomorfismos de módulos, es decir, si $m \in M$ es un elemento unimodular y $\psi : N \longrightarrow M$ es un homomorfismo de A-módulos, todo $n \in \psi^{-1}(m)$ es unimodular, pues m unimodular $\Longleftrightarrow$ existe $f: M \longrightarrow A$ con $f(m)=1$ y llamando $\delta = f \circ \psi : N \longrightarrow A$ se tiene que $\forall n \in \psi^{-1}(m)$

$$\delta(n) = f \circ \psi\ (n) = f(m) = 1$$

En particular la propiedad de elemento unimodular es estable por isomorfismos.

3.- La condición de elemento unimodular es estable por cambio de anillos ya que si B es una A-algebra de morfismo estructural ψ , M es un A-módulo y $m \in M$ es un elemento unimodular, se verifica que $n \otimes 1 \in M \otimes_A B$ es unimodular pues

$$M \otimes_A B \xrightarrow{f \otimes_A 1_B} A \otimes_A B \overset{\delta}{\simeq} B$$

$$[\delta(f \otimes_A 1_B)]\ (m \otimes 1) = \delta\ [f(m) \otimes 1] = \delta(1 \otimes 1) = 1 .$$

Para el cambio de anillos en sentido contrario (imagen recíproca) el resultado no es cierto pues respecto de la inmersión $i: Z \longrightarrow Q$ todo elemento de Z^d es unimodular en Q y obviamente los hay que no lo son en Z^d.

<u>DEFINICION 1.4</u>.- Sea A un anillo. Diremos que $\underline{a} = (a_1 \ldots a_d) \in A^d$ es <u>una fila unimodular</u> si y solo si $\underline{a}.A = A$.

<u>PROPOSICION 1.5</u>.- Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) $\underline{a}$ es una fila unimodular.

(ii) existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_d \in A$ tales que

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_d a_d = \xi, \text{ siendo } \xi \text{ unidad de } A.$$

(iii) $\underline{a}$ es un elemento unimodular.

<u>Demostración</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Trivial

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) En efecto. Por hipótesis existen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_d \in A$ tales que $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_d a_d = \xi \Longrightarrow$ $\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_d a_d = 1$; por tanto podemos definir $f: A^d \longrightarrow A$ como el homomorfismo que respecto de las bases canónicas de A^d y A tiene por matriz $(\mu_1 \ldots \mu_d)^t$. Obviamente se verifica que $f(\underline{a}) = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_d a_d = 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). En efecto: por hipótesis $\underline{a}$ elemento unimodular $\Longleftrightarrow$ $A^d = L(\underline{a}) + H$ siendo $L(\underline{a})$ libre y $\dim(L(\underline{a}))=1$. Por tanto $L(\underline{a}) \overset{f}{\simeq} A$. Sea $\psi=f+0=A^d \longrightarrow A$ donde 0 es el homomorfismo cero de H en A , ψ es un homomorfismo sobre ya que $\psi(\underline{a})=f(\underline{a})+0\ (\underline{0})=1+0= =1\varepsilon$ im ψ. Si consideramos en A^d la base canónica $\{\underline{u},\ldots.\underline{u}_d\}$ se tiene:

$$\psi(\underline{a}) = \psi\ (a,\ldots.a_d) = a_1\ \psi\ (\underline{u}_1)+\ldots.+a_d\psi(\underline{u}_d)=f(\underline{a})+0(\underline{0})=1$$

luego $\underline{a} = a_1\underline{u}_1+\ldots+a_d\ \underline{u}_d$ es una fila unimodular .

DEFINICION 1.6.- Diremos que $\underline{a}=(a_1\ldots.a_d)\varepsilon A^d$ es ampliable si y solo si existe $M\varepsilon GL_d(A)$ con una fila igual a $\underline{a}$.

NOTAS 1.7.-

1.- La condición de ampliabilidad es estable por cambios de base.

2.- Si B es una A-álgebra y $\underline{a}=(a_1\ldots.a_d)$ es ampliable en A^d , $\underline{a}=(a_1\ldots.a_d)$ es ampliable en B^d por cambio de anillos ya que los determinantes son estables por homomorfismos de anillos.

PROPOSICION 1.8.- Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) $\underline{a}= (a_1,a_2,\ldots.a_d)$ es ampliable

(ii) Existe $M\varepsilon G\ L_d(A)$ con $\underline{a}.M=(1,0,\ldots.\ 0)$ (equivalente a que existe $\varphi:A^d \longrightarrow A^d$ isomorfismo con $\varphi(\ell_1)=\underline{a}$ siendo $\{\ell_1\ldots.\ell_d\}$

base de A^d o lo que es lo mismo $\underline{a}$ es ampliable a una base de A^d) .

(iii) $\underline{a}$ es base de un submódulo libre y sumando directo de A^d cuyo complementario es libre y de dimensión $d-1$.

(iv) $\underline{a}$ es unimodular y existe $M \in GL_d(A)$ con $\underline{a}.M = (a'_1, \ldots a'_{d-1}, 0)$.

Demostración.-

(i)$\Longrightarrow$(ii) . En efecto : suponiendo que $\det (M)=1$ y que $\underline{a}$ es la primera fila de M , basta tomar $N=M^{-1}$. Las afirmaciones entre paréntesis son claramente equivalentes a (ii) siendo φ el isomorfismo que , respecto de la base canónica, tiene por matriz M . $\underline{a}$ junto con los restantes filas de M forman una base de A^d .

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Trivial por la observación final del apartado anterior ya que si $\underline{a}$ es ampliable a una base de A^d , el submódulo generado por $\underline{a}$ es libre sumando directo de A^d y su complementario generado por los restantes vectores de la base, es libre y de dimensión $d-1$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) . En efecto: por ser $\underline{a}$ base de un submódulo libre y sumando directo de A^d cuyo complementario M' es libre , $\underline{a}$ junto con una base de M' es una base de A^d y si M es la matriz del cambio de base de la canónica a ésta es $\underline{a}M^{-1}=(1,0,\ldots 0)$

(iv)$\Longrightarrow$(i) . En efecto : al ser $(a_1 \ldots a_d)$ unimodular y $\underline{a}.M=(a'_1,a'_2,\ldots,a'_{d-1},0)$, $(a'_1,a'_2,\ldots a'_{d-1})$ es unimodular en A^{d-1} (SWAN [ ]) y $(a'_1,a'_2,\ldots,a'_{d-1},0)$ es ampliable , ya que si $\lambda_1 a'_1+\lambda_2 a'_2+\ldots+\lambda_{d-1} a_{d-1}= 1$ basta tomar

$$M=\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a'_{d-1} & 0 \\ 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & (-1)^d \lambda_1 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & (-1)^d \lambda_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 & (-1)^d \lambda_{d-1} \end{pmatrix}$$

siendo det $(M)=1$, lo cual implica que $\underline{a}$ es apliable sin mas que tener en cuenta que la condición de ampliabilidad es estable por cambio de base.

Φ - 2 . ANILLOS DE HERMITE

El objetivo de este párrafo es introducir el concepto de anillo de Hermite (notación de Lam) como un anillo A tal que toda fila unimodular en A^d es ampliable. Estudiaremos alguna de sus propiedades, parte de las cuales pueden encontrarse en Bass [ ] , Lam [ ], Northcott [ ], Vaserstein [ ] .

Así mismo usaremos definiciones y resultados de Fernández Bermejo [ ] que para mayor comodidad en la lectura de este párrafo repetiremos aquí .

Sean $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \ldots\ldots \underline{v}_r \in A^n$. Llamaremos <u>rango unitario</u> $R_u(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots . \underline{v}_r)$ al maximo i tal que el ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz de coordenadas de $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \ldots . \underline{v}_r$ respecto de una base cualquiera de A^n es el anillo A . Llamaremos <u>rango real</u> $R^*(\underline{v}_1 \ldots . \underline{v}_r)$ al maximo i tal que el anulador del ideal engendrado por los menores de orden i de la matriz de coordenadas de $\underline{v}_1 \ldots\ldots \underline{v}_r$ respecto de una base cualquiera de A^n es cero .

<u>DEFINICION 2.1</u> .-

a) Diremos que A es un <u>anillo de Hermite a nivel r</u> si y solo si toda fila unimodular de longitud $r+2$ es ampliable .

b) Diremos que A es un <u>anillo r-Hermite</u> si y solo si es de Hermite a nivel s, para todo $s \geq r$ o equivalentemente si toda fila unimodular de longitud mayor o igual que $r+2$ es ampliable.

c) Diremos que A es un <u>anillo de Hermite</u> si y solo si es 0-Hermite o equivalentemente si toda fila unimodular es ampliable.

LEMA 2.2.- Si $\{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots, \underline{V}_r\} \subset A^n$ y $R_u(\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots \underline{V}_r) = r$ se verifica que para cualquier subconjunto $\{\underline{V}_{i_1}, \underline{V}_{i_2} \ldots \underline{V}_{i_s}\} \subset \{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots, \underline{V}_r\}$ es $R_u(\underline{V}_{i_1}, \ldots \underline{V}_{i_s}) = s$

<u>Demostración.-</u>

En efecto: $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_r) = r$ equivale a decir que una combinación lineal de los menores de orden r de la matriz de coordenadas de $\underline{V}_1\ \underline{V}_2 \ldots \underline{V}_r$ vale 1 . Por tanto desarrollando cada menor por los $r-s$ filas $\{(1,\ldots r)(i_1 \ldots i_s)\}$ tenemos una combinación lineal de los menores de orden s de la matriz de coordenadas de $\{\underline{V}_{i_1}, \underline{V}_{i_2} \ldots \underline{V}_{i_s}\}$ que vale 1.

LEMA 2.3.-

Sean $\{\underline{U}_1 \ldots \underline{U}_r\}$ y $\{\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s\}$ bases de los módulos L_1 y L_2 respectivamente y sea $f: L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorfismo sobre, si $\underline{\ell}_1\ \underline{\ell}_2 \ldots \underline{\ell}_s$ son vectores de L_1 tales que $\{f(\underline{\ell}_1), f(\underline{\ell}_2) \ldots f(\underline{\ell}_s)\}$ son una base de L_2, se verifica que $R_u(\underline{\ell}_1\ \underline{\ell}_2 \ldots \underline{\ell}_s) = s$.

Demostración.-

En efecto: sea $M \in \mathcal{M}_{sxr}$ la matriz de coordenadas de $\underline{\ell}_1\ \underline{\ell}_2 \ldots \underline{\ell}_s$ y sea $N \in \mathcal{M}_{rxs}$ la matriz del homomorfismo f con $r \geq s$. La matriz de coordenadas de $f(\underline{\ell}_1)$ $f(\underline{\ell}_2) \ldots\ldots f(\underline{\ell}_s)$ es por tanto $M.N$. Ahora bien, $R_u(M.N) \leq \min\{R_u(M).R_u(N)\}$ y al ser f sobre $R_u(M)=s$ y como $\{f(\underline{\ell}_1), f(\underline{\ell}_2), \ldots\ldots f(\underline{\ell}_s)\}$ es base de L_2, $R_u(M.N)=s$.

[ ]

Por tanto $R_u(M) \geq s$ y al ser $M \in \mathcal{M}_{sxr}$ con $s \leq r$ es $R_u(M)=s$.

PROPOSICION 2.4.-

Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) A es r-Hermite.

(ii) $\forall n \in N$ con $n \geq r+2$ y $\forall \underline{V} \in A^n$ con $0(\underline{V})=A$ existen $\underline{V}_2 \ldots \underline{V}_n \in A^n$ tales que $\{\underline{V}, \underline{V}_2 \ldots . \underline{V}_n\}$ es una base de A^n .

(iii) $\forall n \in N$ con $n \geq r+2$ y para todos $\underline{V}_1 \ldots . \underline{V}_s \in A^n$ con $s \leq n-r-1$ y $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s) = s$ existen $\underline{V}_{r+1} \ldots . \underline{V}_n \in A^n$ tales que $\{\underline{V}_1 \ldots . \underline{V}_r, \underline{V}_{r+1} \ldots \underline{V}_n\}$ es una base de A^n .

iv) $\forall n \in N$ con $n \geq r+2$ y para todo A-módulo L libre y sumando directo de A^n con

$\dim(L) \leq n-r-1$, existe un submódulo L' de A^n tal que $A^n = L+L'$ siendo L' libre.

(v) $\forall n \in N$ con $n \geq r+2$ y para todo A-módulo L libre y sumando directo de A^n con $\dim(L) \leq n-r-1$, $\omega(L)$ es un submódulo libre verificando que:

$$n = \dim(L) + \dim(\omega(L)).$$

Demostración.-

(i)$\Longrightarrow$(ii). En efecto: sea $\underline{V}=(a_1 a_2 \ldots a_n)$ con $n \geq r+2$. Al ser $0(\underline{V})=A$, $\underline{V}$ es unimodular y por tanto ampliable a una matriz $M \in GL_r(A)$ con $\det(M)=1$, luego $\underline{V}$ junto con las restantes filas de M forman una base de A^n.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). En efecto: haremos la demostración por indución sobre s. Para $s=1$ es cierto por hipótesis. Supongamos que es cierto para $s-1$ y veamos se verifica para s con $s \leq n-r-1$. Por el lema 2.2. $R_u(\underline{V}_s)=1$ y $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_{s-1})=s-1$; por tanto aplicando la hipótesis de inducción, existen $\underline{u}_s\ \underline{u}_{s+1} \ldots \underline{u}_n \in A^n$ tales que $\{\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_{s-1}\ \underline{u}_s, \underline{u}_{s+1}, \ldots \underline{u}_n\}$ es base de A^n. Sea $\underline{V}_s = \lambda_1 \underline{V}_1 + \ldots + \lambda_{s-1}\underline{V}_{s-1} + \lambda_s \underline{u}_s + \ldots + \lambda_n \underline{u}_n$ con $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s)=s$; es decir, $R_u(M)=s$ siendo M la matriz

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & & s & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & & 0 & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{s-1} & \lambda_s & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

y por tanto $(\lambda_s, \lambda_{s+1}, \ldots\ldots \lambda_n).A=A$. Luego

$$\underline{V}'_s = \underline{V}_s - (\lambda_1 \underline{V}_1 + \ldots + \lambda_{s-1}, \underline{V}_{s-1})$$

es unimodular en $L(\underline{u}_s \ldots \underline{u}_n)$ submódulo libre de dimensión $n-s+1$ de A^n . Entonces por hipótesis $\underline{V}'_s$ se puede ampliar a una base $\{\underline{V}'_s\ \underline{u}'_{s+1} \ldots \underline{u}'_n\}$ de $L(\underline{u}_s \ldots \underline{u}_n)$ ya que $n-s+1 \geq r+2$. Por tanto $\{\underline{V}_1\ \underline{V}_2 \ldots \underline{V}_{s-1} \underline{V}'_s\ \underline{u}'_{s+1} \ldots \underline{u}'_n\}$ es base de A^n . Tomando

$\underline{V}_s = \underline{V}'_s + \sum_1^{s-1} \lambda_i \underline{V}_i$ $\{\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_{s-1}\ \underline{V}_s\ \underline{u}'_{s+1} \ldots \underline{u}'_n\}$ es también base de A^n .

(iii)$\Longrightarrow$(iv). En efecto: sea $L=L(\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_s)$ un submódulo libre y sumando directo de A^n con $\{\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_s\}$ base de L . Entonces la sección $\Pi : A^u \longrightarrow L$ es un homomorfismo sobre y por ser $\{\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_s\}$ base de L, $\Pi(\underline{u}_1)=\underline{u}_1$, $\ldots\ldots \Pi(\underline{u}_s)=\underline{u}_s$ verifican según el Lema 2.3 que $R_u(\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_s)=s$; luego por hipótesis existen $\underline{u}_{s+1} \ldots \underline{u}_n$ tales que $\{\underline{u}_1 \ldots \underline{u}_s, u_{s+1}, \ldots \underline{u}_n\}$ son base de A^n .

Por tanto $L'=L(\underline{u}_{s+1}\ldots\underline{u}_n)$ es un submódulo libre complementario de L y $A=L\oplus L'$.

(iv)$\Longrightarrow$(v). En efecto: Sea L libre y sumando directo de A^n y sea $\{\underline{u}_1\ldots\underline{u}_s\}$ una base de L , por hipótesis existe L' libre tal que $A=L\oplus L'$, si $\{\underline{u}_{s+1}\ldots\underline{u}_n\}$ es una base de L' es $\{\underline{u}_1\ldots\underline{u}_s,u_{s+1}\ldots\underline{u}_n\}$ base de A^n y la base dual asociada es $\{\underline{u}_1^*\ldots\underline{u}_s^*\ \underline{u}_{s+1}^*\ldots\underline{u}_n^*\}$. Por tanto $\omega(L)=L(\underline{u}_{s+1}^*\ldots\underline{u}_n^*)$ es libre y se verifica que $\dim L+\dim\omega(L)=n$.

(v)$\Longrightarrow$(i) . En efecto: Sea $\underline{a}=(\underline{a}_1\ldots\underline{a}_n)$ una fila unimodular con $n\geq r+2$ entonces $L(\underline{a})$ es un submódulo libre y sumando directo de A^n . Por hipótesis $\omega(L)$ es libre y de dimensión $n-1$, es decir, existe $\{\underline{u}_1^*\ldots\underline{u}_{n-1}^*\}$ base de $\omega(L)$ con $R_u(\underline{u}_1^*\ldots\underline{u}_{n-1}^*)=n-1$. Si M es la matriz de coordenadas de esta base .

$$M=\begin{pmatrix} a_1 & ,\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1\,1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n-1n} \end{pmatrix}$$

como $R_n(M)=n-1$ existe una combinación lineal de los menores de orden $n-1$ que vale 1 , es decir existen $\lambda_1\ldots\lambda_n$ con $\lambda_1M_1+\ldots+\lambda_nM_n=1$. Entonces llamando N a la matriz

$$N=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & (-1)^n\lambda_n \\ a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \ldots\ldots & a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$$

es $\det(N)=1$; por tanto A es una matriz inversible y se verifica que $(a_1 \ldots a_n)\; N^t = (\sum_1^n (-1)^i \lambda_i a_i, 0, \ldots\ldots 0)$ y por tanto $(a_1 \ldots a_n)$ es ampliable.

NOTAS. 2.5.-

a) En la demostración de (iii)$\Longrightarrow$(iv) de la proposición anterior hemos probado un resultado de carácter general que es el siguiente : Dados $\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s \in L$, $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s) = s \Longleftrightarrow L(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s)$ es submódulo libre s-dimensional y sumando directo de L (obsérvese que el enunciado de (iii) exige que el complementario de L sea también libre para que A sea r-Hermite). En efecto: si L' es submódulo libre y sumando directo de L y $\Pi: L \longrightarrow L'$ es una sección de la inclusión $\{\Pi(\underline{V}_1), \ldots\ldots \Pi(\underline{V}_s)\} = \{\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s\}$ es una base de L' , luego por el Lema 3.2. $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s) = s$.

Reciprocamente: si $R_u(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s) = s = R(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s)$ es $\underline{V}_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \underline{V}_s$ unimodular ya que sus componentes son los menores de orden s de la matriz de coordenadas de $\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s$. Por tanto $\{\underline{V}_1 \ldots\ldots \underline{V}_r\}$ son linealmente independientes, pues de $\sum_1^s \lambda_i \underline{V}_i = 0$ con algún $\lambda_i \neq 0$ (supongamos $\lambda_1 \neq 0$) es

$$\lambda_1 \underline{V}_1 = \sum_2^s (-\lambda_i) \underline{V}_i \Longrightarrow \lambda_1 (\underline{V}_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \underline{V}_s) = (\lambda_1 V_1) \wedge \underline{V}_2 \ldots \wedge \underline{V}_s = \underline{0}$$

en contradición con la hipótesis de $\underline{V}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{V}_s$ unimodular. Por tanto $L(\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_s) = L'$ es un submódulo libre de L [ ].

b) Como ejemplo del proceso a seguir para probar que un anillo es r-Hermite, demostraremos el siguiente resultado debido a Bass y Vaserstein.

Si A es un anillo noetheriano de dimensión de Krull $r<\infty$ entonces A es r-Hermite.

Demostración.- Basta probar que si $(a_1.....a_n)$ es una fila unimodular con $n\leq r+2$ existe una matriz $M\varepsilon GL_n(A)$ con $(a_1....a_n)M=(1,0,........0)$.

1) Observese que si a_1 es una unidad, la matriz M dada por

$$M=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & -a_1^{-1}a_2 & \cdots & a_1^{-1}a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz buscada.

2) Obviamente si existe un i con a_i unidad , siempre podemos volver al caso primero mediante la transformación elemental dada por la matriz N

$$N = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ya que $(a_1......a_i......a_n) . N= (a_ia_2.....\overset{i}{a_1}........a_n)$

3) Por tanto la demostración se reduce a probar que existe $M \varepsilon GL_n(A)$ con $(a_1 \ldots\ldots a_n).M=(a'_1 \ldots\ldots a'_n)$ con a'_i unidad en A para algún i.

Sea pues A un anillo noetheriano, el número de componentes irreducibles de Spec (A) es finito, sean $p_1 \ldots p_s$ los puntos genéricos de estos componentes, es decir los ideales primos minimales de A, o lo que es lo mismo los ideales primos asociados a la descomposición primaria del ideal nulo.

Si $(a_1 \ldots\ldots a_n)$ es una fila unimodular es $1=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n$. Entonces existen $b_2,\ldots\ldots,b_n \varepsilon A$ tales que $a_1+b_2a_2+\ldots\ldots+b_na_n \not\in \bigcup_1^s p_i$ pues si esto no fuera cierto, existiría un i con $a_1+b_2a_2+\ldots+b_na_n \varepsilon p_i \quad \forall (b_2 \ldots b_n)$. Tomando $(b_2 \ldots b_n)=(0,\ldots\ldots,0)$ se tendría que $a_1 \varepsilon p_i$, y para $(b_2 \ldots b_n)=(0,\ldots,\overset{j}{1},\ldots\ldots 0)$ tendríamos que $a_1-a_j \varepsilon p_i$ de donde $a_j \varepsilon p_i \quad \forall j=2\ldots\ldots n$. Por tanto obtendríamos que $\lambda_1 a_1+\ldots\ldots+\lambda_n a_n \varepsilon p_i$ o sea $1 \varepsilon p_i$ (contradicción).

Para la demostración procederemos por inducción sobre r.

1) $r=0$. Los ideales minimales y maximales de A son los mismos y por tanto en número finito. Sean estos

$p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$, existen $b_2 \ldots b_n \varepsilon A$ con

$a_1' = a_1 + b_2 a_2 + \ldots + a_n b_n \not\in \bigcup_1^s p_i$, siendo los p_i ideales maximales a_1' es una unidad y tenemos

$$(a_1 \ldots a_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ b_2 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b_n & 0 & \ldots\ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} = (a_1' \quad a_2 \ldots a_n)$$

con a_1' unidad y estamos en el primer caso.

2) $r>0$. Formamos el cociente $\bar{A} = A/a_1'A$. Como a_1' no pertenece a ningún ideal primo minimal la dimensión de Krull de $\bar{A}$ es $r-1$, por la hipótesis de inducción, por ser la fila $(\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n)$ con $\bar{a}_i = a_i + a_1'A$ unimodular existe $\bar{M} \varepsilon GL_{n-1}(A)$ con $(\bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n)\bar{M} = (\bar{1}, \bar{0}, \ldots, \bar{0})$. Si $M = a_{ij} + a_1'A$ es

$$(a_1' a_2 \ldots a_n) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0 \\ \hline 0 & \\ & a_{ij} \\ b & \end{array}\right) = (a_1' a_2' \ldots a_n')$$

con $a_i' \equiv 0_{\mathrm{mod}\,(a_1' A)}$ y $a_2' \equiv 1_{\mathrm{mod}\,(a_1' A)}$, es decir

$$a'_i = \mu_i\, a'_1 \quad y \quad a'_2 = 1+\mu_2 a'_1 \qquad i=2,\ldots..n$$

de donde

$$(a'_1 \ldots\ldots a'_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\mu_2 & \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix} = (a'_1\ 1, \ldots. a'_n)$$

y estamos en el segundo caso.

Surge , ahora, la cuestión siguiente: si A es un anillo noetheriano de dimensión de Krull $r<\infty$ ¿puede ser A r'-Hermite con $r'< r$? La respuesta es afirmativa, pues el anillo $A = K[x_1 \ldots. x_n]$, con K cuerpo , es noetheriano de dimensión de Krull n y según un resultado de Quilen y Guslin A es 0-Hermite.

Mas adelante, en la comparación de anillos de Hermite y β-anillos veremos un ejemplo que prueba que en determinados casos el que A sea noetheriano de dimensión de Krull $r<\infty$ cumple que A es r-Hermite pero no r'-Hermite con $r'<r$.

c). Obsérvese que 0-Hermite es equivalente a 1-Hermite ya que cada fila unimodular de longitud ≤ 2 es ampliable.

También es inmediato de la proposición 2.4. que las condiciones siguientes son equivalentes:

i). A es Hermite

ii). $\forall\, n\in N$ y $\forall\, \underline{v}\in A^n$ con $0(\underline{v})=A \Longrightarrow \underline{v}_2 \ldots \underline{v}_n$ tales que $\{\underline{v}_1 \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ es una base de A^n

iii) $\forall\, n\in N$ y $\forall\, \{\underline{v}_1 \ldots\ldots, \underline{v}_s\} \subset A^n$ con $s<n$ y

$R_u(\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_s)=s \Longrightarrow \underline{v}_{s+1} \ldots \underline{v}_n$ tales que

$\{\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_s \; \underline{v}_{s+1} \ldots \underline{v}_n\}$ es una base de A^n.

(iv) $\forall n \in N$ y $\forall L$ submódulo libre y sumando directo de A^n existe L' submódulo de A^n tal que $A^n = L \oplus L'$ con L' libre.

(v) $\forall n \in N$ y $\forall L$ submódulo libre y sumando directo de A^n, $\omega(L)$ es submódulo libre y se verifica que $\dim(L)+\dim(\omega(L)) = n$.

La condición (v) tiene una clara aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales, que permite establecer un teorema de Roadré-Frobenius para anillos de Hermite,

Para establecer este teorema precisaremos un tipo particular de sistemas.

<u>Definición 2.6.</u>-

Un sistema $\Sigma a_{ij}\lambda_j = s$; se dice libre $\Longleftrightarrow$ $R(a_{ij}) = R_n(a_{ij})$ y $R(a_{ij}, b_i) = R_u(a_{ij}, b_i)$.

Al primer rango la llamaremos rango de la matriz de coeficientes y al segundo rango le llamaremos rango de la matriz del sistema.

De la condición (v) se desprende que si s es un sistema libre homogéneo, A es de Hermite y

$R(a_{ij}) = R_u(a_{ij}) = s$, el módulo de soluciones que es precisamente $\omega(L)$ es libre y sumando directo y tiene de dimensión $n-s$.

Recíprocamente: si para todo sistema se verifica este resultado, por la condición (v), A es un anillo de Hermite.

En resumen podemos enunciar que:

A es un anillo de Hermite si y solo si se verifica el siguiente teorema.

TEOREMA 2.7.-

Todo sistema libre homogéneo de m ecuaciones con n incognitas de rango s tiene por solución un submódulo libre y sumando directo de A^n de dimensión n-2.

Podemos ahora, enunciar el teorema de Roudré-Fröbenius relativo a sistemas libres sobre anillos de Hermite.

TEOREMA 2.8.

Un sistema libre sobre un anillo A de Hermite tiene solución si y solo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz del sistema.

Este resultado nos dice que los módulos libres y sumandos directos de A^n , con A de Hermite, se comportan en forma idéntica a los subespacios de un espacio vectorial.

C A P I T U L O II

A N I L L O S D E H E R M I T E Y β-A N I L L O S

φ-1 .- β-ANILLOS

El onjetivo de esta sección es estudiar algunas propiedades de los β-anillos, introducidos por Fernández Bermejo [ ]. Este estudio lo haremos desde un punto de vista topológico, utilizando especialmente anillos de funciones continuas sobre espacios topológicos con valores en un cuerpo (real, complejo o valorado no arquimediano).

NOTA. 1.1.-

Sea A un anillo conmutativo y con elemento unidad. Llamaremos $\mathcal{D}(A)$ al diagrama $\{A_p, \varphi_{p,q}\}$ siendo :

i) $\forall\, p \in \mathrm{Spec}(A)$, A_p el localizado de A respecto del ideal primo p .

ii) $\forall\, p, q \in \mathrm{Spec}\,(A)$, $p \subset q$, $\varphi_{p,q}$ el homomorfismo natural $\varphi_{p,q}: A_q \longrightarrow A_p$

$\mathcal{D}(A)$ es un sistema proyectivo filtrante (en el sentido de Bourbaki y podemos construir su límite proyectivo.

$$A_\beta = \varprojlim \mathcal{D}(A) = \{ (a_p) \in \prod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} a_p \mid a_p = \varphi_{p,q}(a_q), \forall p,q \in \mathrm{Spec}\,(A), p \subset q \}$$

La familia de homomorfismos

$$i_p : A \longrightarrow A_p$$

$i_p(a)= \frac{a}{1} \in A_p$, definen un homomorfismo natural

$$i: A \longrightarrow A_\beta$$

<u>i es inyectivo</u>. En efecto: $i(a)=0 \Longleftrightarrow \frac{a}{1} = 0$ en A_p $\forall p\in \mathrm{Spec}(A) \Longrightarrow [aA]_p = 0, \forall p\in \mathrm{Spec}(A) \Longrightarrow a.A=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a=0$ [ ].

<u>Definición 1.2.</u>- Diremos que A es un β-anillo si y solo si el homomorfismo i es isomorfismo.

<u>NOTA. 1.3</u>.- Analicemos, desde un punto de vista intuitivo, en qué condiciones un anillo es β-anillo. Para ello considerando

$$\mathrm{Max}(A)=\{p\in \mathrm{Spec}(A) \mid p \text{ es maximal}\}$$

construimos la familia $\{A_m\}_{m\in \mathrm{Max}(A)}$

El limite proyectivo del diagrama sin morfismos $\{A_m\}$ es precisamente su producto $A_M=\prod_{m\in \mathrm{Max}(A)} A_m$

El homomorfismo

$$j: A \longrightarrow A_M$$

inducido por la familia

$$i_m: A \longrightarrow A_m$$

es inyectivo [ ] .

Por otra parte $\{A_m\}_{m\varepsilon Max\ (A)}$ es un subdiagrama completo de $\mathcal{D}(A)$ y por definición de límite existe un homomorfismo

$$\lim_{\longleftarrow} \mathcal{D}(A) = A_\beta \longrightarrow \pi\ A_m$$

que no es sino la inclusión del límite en el producto, es decir está definido por:

$$(a_p)_{p\varepsilon Spec(A)} \longrightarrow (a_m)_{m\varepsilon Max\ (A)}$$

que es inyectivo . En efecto: si el elemento $(a_p)_{p\varepsilon Spec(A)}$ se aplica en el cero de πA_m es $a_m=0\ \forall m\varepsilon Max\ (A)$.

Como $\forall\ p\varepsilon Spec\ (A)$ existe $m\varepsilon Max\ (A)$ com $p\subset m$ es $a_p=\varphi_{p,m}(a_m)=0$ luego $a_p = 0$.

En resumen existe un diagrama conmutativo de homomorfismos inyectivos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & A_\beta \arrow[dl] \\ & A_m & \end{tikzcd}$$

PROPOSICION 1.3.1.- $A_\beta = A_M$ si y solo si todo ideal primo está contenido en un único ideal maximal.

Demostración.- Para demostrar la parte "si" de la proposición nos basaremos en el siguiente lema general de Teoría de Categorías.

LEMA 1.3.2.- Sea C una categoría completa, sea $\mathcal{D}$ un dia grama sobre un esquema de diagrama $\Sigma = (I,M,d)$. Sea $(\Sigma_j)_{j\varepsilon J}$ una partición de Σ en esquemas de diagramas $\Sigma_j = (I_j, M_j, d_j)$ con $I = \bigcup M_j$, $d_j = d_{|M_j}$ (obviamente exigimos que $d_j(m_j)$ $I_j \times I_j)$ y sea $\mathcal{D}_i$ el diagrama inducido por $\mathcal{D}$ sobre el esquema Σ_i , en estas condiciones

$$\varprojlim \mathcal{D} = \pi \varprojlim \mathcal{D}_j$$

Demostración.-

1) $\forall i \varepsilon I$ existe un único j con $i \varepsilon I_j$, luego existe (por definición de límite) un morfismo

$$\rho'_i : \varprojlim \mathcal{D}_j \longrightarrow D_i$$

entonces vía la proyección existe un morfismo

$$\begin{tikzcd} \bar{\rho}_i : \pi \varprojlim \mathcal{D}_j \arrow[rr] \arrow[dr, "\text{proy } j"'] & & D_i \\ & \varprojlim \mathcal{D}_j \arrow[ur, "\rho'_i"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall j$ y $\forall i \varepsilon I_j$.

Si $\alpha \varepsilon M$, existe (también por definición de límite) un único j con $\alpha \varepsilon M_j$ y $d(\alpha) = d_j(\alpha) = (iK) \varepsilon I_j \times I_j$ de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[d, "D_\alpha"] \\ \varprojlim \mathcal{D}_j \arrow[ur, "\rho'_i"] \arrow[dr, "\rho'_k"'] & \\ & D_k \end{tikzcd}$$

es conmutativo . Luego existen

$$\bar{\rho}_i = \pi \varprojlim \mathcal{D}_j \longrightarrow D_i$$

$\forall i\varepsilon I$ tales que $\forall \alpha\varepsilon M$ en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D_i \arrow[dd, "D_\alpha"] \\ \pi \varprojlim D_j \arrow[urr, "\bar{\rho}_i"] \arrow[r] \arrow[drr, "\bar{\rho}_k"'] & \varprojlim D_j \arrow[ur, "\rho'_i"] \arrow[dr, "\rho'_k"'] & \\ & & D_k \end{tikzcd}$$

el triángulo exterior es conmutativo.

2) Si A es un objeto de C y existen morfismos

$$\delta_i : A \longrightarrow D_i$$

tales que si $\forall \alpha\varepsilon M$, $d(\alpha) = (ik)$ es $D_\alpha \delta_i = \delta_k$, entonces $\forall j\varepsilon J$ se verifica la misma propiedad relativa a $\mathcal{D}_j$, luego existen morfismos

$$\bar{\delta}_j : A \longrightarrow \varprojlim \mathcal{D}_j$$

verificando que $\rho'_i \bar{\delta}_j = \delta_i$ $\forall i\varepsilon I_j$. Los morfismos $\bar{\delta}_j$ inducen un único morfismo

$$\bar{\delta} : A \longrightarrow \pi \varprojlim \mathcal{D}_j$$

tal que $\text{proy}_j \cdot \bar{\delta} = \bar{\delta}_j \quad \forall j \in J$ entonces

$$\bar{\rho}_i \, \bar{\delta} = \bar{\rho}_i \, \text{proy}_j \cdot \bar{\delta} = \rho_i' \cdot \delta_j = \delta_i$$

y $\bar{\delta}$ es único con esta propiedad ; luego por definición de límite

$$\pi \varprojlim \mathcal{D}_j = \varprojlim \mathcal{D}$$

Demostración. de la proposición.-

En las condiciones de la proposición, podemos construir una descomposición de $\mathcal{D}(A)$ en diagramas disjuntos $\mathcal{D}_m(A)$ con

$$\mathcal{D}_m(A) = \{A_p , \varphi_{p.q}\} \ p,q \subset m \quad , \forall m \in \text{Max}\ (A)$$

trivialmente se cumplen las condiciones del lema y por tanto se verifica la proposición, pues $\varprojlim \mathcal{D}_m(A) = A_M$ ya que A_M es extremal en $\mathcal{D}_m(A)$.

La parte "solo si" de la proposición resulta de lo siguiente: supongamos que un ideal primo p está contenido al menos en dos ideales maximales distintos m_1 y m_2 , entonces un par de lementos $\frac{a_1}{b_1} \in A_{m_1}$, $\frac{a_2}{b_2} \in A_{m_2}$ figurarán en un elemento de A_β solo si en A_β $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, es decir solo existe $t \not\in p$ con $t(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$, mientras que dicho par de elementos figurarán sin restricción ninguna en los elementos de A_M .

Si elegimos $a_1 \varepsilon m_1$, $a_1 \not\varepsilon m_2$, $a_2 \not\varepsilon m_1$, $a_2 \varepsilon m_2$ es $a_1 - a_2 \not\varepsilon m_1$ y por tanto $a_1 - a_2 \not\varepsilon p$, entonces por ser p primo no puede existir $t \not\varepsilon p$ con $t(a_1 - a_2) = 0$ luego $\frac{a_1}{1} \neq \frac{a_2}{1}$ en A_p y el par de elementos $\frac{a_1}{1}$, $\frac{a_2}{1}$ no pueden figurar en ningún elemento de A_β , mientras que si aparecen en elementos de A_M luego $A_\beta \neq A_M$.

NOTA 1.4.- Estudiaremos en esta nota algunos anillos que cumplen las propiedades de la proposición 3.3.1 y que nos serán de utilidad posteriormente.

1.4.1.- Sea k un cuerpo . Llamaremos k-álgebra* a toda k-álgebra A tal que $\forall m \varepsilon Max(A)$ la composición de homomorfismos

$$k \xrightarrow{i} A \xrightarrow{n} A/m$$

con i homomorfismos estructural y n homomorfismo natural, sea un isomorfismo.

Por ejemplo el anillo de funciones continuas sobre un espacio topológico X compacto y completamente regular con valores en R es una R-álgebra* .

1.4.2.- Si A es una k-álgebra* existe un homomorfismo de anillos

$$\delta : A \longrightarrow \text{Aplic}(Max(A), k) = k^{Max(A)} = A_k$$

$$a \longrightarrow \underline{a}$$

dada por $\underline{a}\ (m)=a+m \quad \forall m\varepsilon Max\ (A)$.

Esta aplicación es inyectiva si y solo si el radical de Jacobson de A es cero. En efecto :

$$a\varepsilon Ker\ \delta \Longleftrightarrow a+m=0\ \forall m\varepsilon Max\ (A) \Longleftrightarrow a\varepsilon \bigcap_{m\varepsilon Max\ (A)} m=J(A)\ .$$

1.4.3.- Obsérvese que si A y B son k-álgebras* todo homomorfismo de k-álgebras

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

induce una aplicación

$$^{a}\varphi : Max\ (B) \longrightarrow Max\ (A)$$

dada por $\ ^{a}\varphi(m)= \varphi^{-1}(m) \quad \forall m\varepsilon Max(B)$, puesto que si m es maximal en B $\varphi^{-1}(m)$ es maximal en A . En efecto: consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, "i'"] & & \\
& A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "n"] & B \arrow[d, "n'"] \\
& A/\varphi^{-1}(m) \arrow[r, "\bar{\varphi}"] & B/m
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\varphi}$ es el homomorfismo inducido por φ y por tanto es inyectivo.

Como B es una k-álgebra* $n' \circ i'$ es isomorfismo; por otra parte $\bar{\varphi}(n.i)=n'.i'$. Luego si probamos que $\bar{\varphi}$ es sobre entonces $\bar{\varphi}$ es isomorfismo y $n \cdot i=\bar{\varphi}^{-1}(n'.i')$ es isomorfismo luego $\varphi^{-1}(m)$ es maximal en A . Si $b\varepsilon B$ existe $\alpha\varepsilon k$ con $n'.i'(\alpha)=b+m$. Ahora bien $n.i(\alpha)\varepsilon A/_{\varphi^{-1}(m)}$ y $\bar{\varphi}(n.i)(\alpha)=n'.i'(\alpha)= b+m$ luego $\bar{\varphi}$ es sobre.

1.4.4. .- Aparentemente la observación 3.4.3. está en contradicción con el hecho de que Max (A_k) contiene un punto más que Max(A) . (De hecho, en el ejempko citado al principio, de ser A anillo de funciones continuas de X en R, Max (A_R), con la topología de Zariski, es la compactificación de Stone de X).Veamos que punto es. Para ello observemos que los ideales maximales de A_k son de uno de los tipos siguientes:

1) $\forall m\varepsilon$Max (A) , $M_m=\{f\varepsilon\ A_k/f(m)=0\}$ está en Max (A)

2) $M=\{f\varepsilon A_k/f(m)=0$ sólo para un nº finito de puntos $\}$ está en Max (A) .

La diferencia entre estos dos tipos de ideales, está en que $A_k/M_m \simeq k$ en el isomorfismo que hace corresponder a f , $f(m)\varepsilon k$, mientras que $A_k/M \not\simeq k$ y en general es un cuerpo extensión de k de grado de trascendencia infinita. Por esta razón A_k no es una k-álgebra* y al homomorfismo

$$A \longrightarrow A_k$$

que es un epimorfismo de k-álgebras no le corresponde una inmersión

$$\mathrm{Max}\ A_k \longrightarrow \mathrm{Max}\ A$$

(que además en general no existe).

1.4.5.- Si A es una k-álgebra* con $J(A)=0$ los elementos de A_m $\forall m\in\mathrm{Max}\,(A)$ admiten una interpretación como gérmenes de aplicaciones que es la siguiente:

a) La topología de Zariski de Spec (A) induce en Max (A) una topología con base de abiertos

$$D^*(h)=\{m\in\mathrm{Max}(A)/h\notin m\}$$

a la cual llamaremos por extensión topología de Zariski de Max (A) .

Construimos los gérmenes de aplicaciones de Max(A) en k en un punto $m\in\mathrm{Max}(A)$ en la forma habitual, es decir como elementos del cociente $A_k/\sim_m$ donde $\sim_m$ es la relación dada por:

$\forall\, f,g\in A_k$ $\quad f\sim_m g \Longleftrightarrow$ existe U entorno abierto de m en Max (A) tal que $f/_U = g/_U \Longleftrightarrow$ existe $h\in A$, $h\notin m$ y $f|_{D^*(h)} = g|_{D^*(h)}$.

Como es usual designaremos $[f]_m = f_{\sim_m} \in A_k/\sim_m$ y llamaremos $A_{k,m} = A_k/\sim_m$. Obviamente $A_{k,m}$ es un anillo y existe un epimorfismo canónico

$$A_k \longrightarrow A_{k,m}$$

que asocia a cada aplicación un germen en m .

b) $A_{k,m}$ contiene a A_m , es decir los elementos de A_m admiten una interpretación como gérmenes de aplicaciones de Max(A) en k . En efecto: Sea

$$\delta : A \longrightarrow A_k$$

la aplicación definida en 3.4.2. , si $a \notin m$ $[\delta(a)]_m$ es una unidad en $A_{k,m}$, ya que $a \notin m$ implica que $m \in D(a)$ y la aplicación

$$\underline{a}' : \mathrm{Max}\ (A) \longrightarrow k$$

dado por
$$\begin{cases} \underline{a}'(x) = \dfrac{1}{\delta(a)(x)} & \forall x \in D(a) \\ a'(x) = 0 & \forall x \notin D(a) \end{cases}$$

verifica que $\delta(a)|_{D(a)} = [\underline{a}'|_{D(a)}]^{-1}$ luego

$$[\delta(a)]_m \cdot [\underline{a}']_m = 1$$

Definimos ahora la aplicación

$$j : A_m \longrightarrow A_{k,m}$$

por $j\ (\frac{a}{b}) = [\delta(a)]_m \cdot [\delta(b)]_m^{-1}$. Como $\frac{a}{b} \in A_m$

implica $b \notin m$, la definición de esta aplicación tiene sentido, y además j es homomorfismo de anillos pues resulta de componer

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\bar{\delta}"'] & A_k \arrow[r, "i_m"] & A_{k,m}
\end{tikzcd}
$$

con

$$i_m : A_k \longrightarrow A/_{\sim_m} = A_{k,m}$$

la aplicación natural, entonces $\bar{\delta}(a) = [\delta(a)]_m$,

$\bar{\delta}$ es homomorfismo de anillos y $\forall a \notin m$ $\bar{\delta}(a)$ es una unidad, luego como $\bar{\delta}$ induce j , j es homomorfismo de anillos.

<u>j es inyectivo</u>. En efecto : $\frac{a}{b} \in \operatorname{Ker} j \Longrightarrow [\delta(a)]_m = 0$

$\Longrightarrow$ existe $h \notin m$ con $\delta(a)_{|D^*(h)} = 0 \Longrightarrow$ existe $h \notin m$ con $a+x=0$ $\forall x \in \operatorname{Max}(A)$ y $h \notin x \Longrightarrow$ existe $h \notin m$, $a \in \bar{x}$ $\forall \bar{x} \in \operatorname{Max}(A_h) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a=0$ en $A_h \Longrightarrow$ existe $n \in N$ con $a.h^n=0 \Longrightarrow \frac{a}{b} = 0$ en A_m ya que existe $h^n \notin m$ con $ah^n = 0$.

c) Por supuesto esta aplicación j no es en general sobre, como lo prueba el hecho de que si A es el anillo de funciones continuas de X compacto y completamente regular en R , y $m \in X \simeq \operatorname{Max}(A)$, A_m es precisamente el anillo de gérmenes de funciones continuas de X en R en m , que obviamente está, en general, estrictamente contenido en el anillo de gérmenes de aplicaciones . Más en general, no toda aplicación es localmente finita.

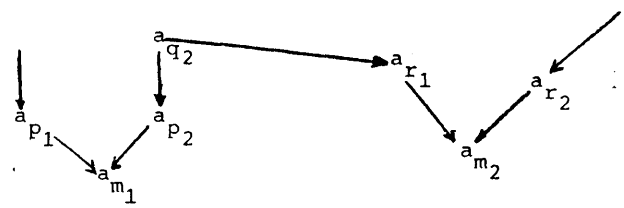
1.4.6.- Dada esta interpretación para los elementos de A_m , resulta que los elementos de $A_M = \prod_{m \in Max(A)} A_m$ admiten la interpretación de familias de gérmenes de aplicaciones compuestas por un gérmen de aplicación en cada punto de Max (A) .

Si consideramos la aplicación

$$A \longrightarrow A_M$$

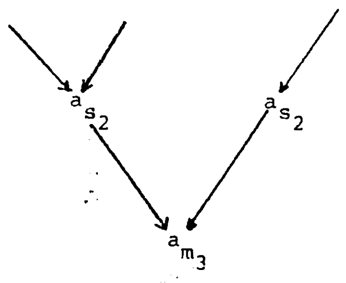
la imagen de esta aplicación está compuesta por todas las familias de A_M , que provienen de un elemento de A , tomando el gérmen de este elemento en cada punto, es decir son las familias "compatibles" de gérmenes de A_M . Por tanto A y A_M van a ser, en general, distintos (salvo en los casos triviales).

Por otra parte y desde este punto de vista A_β se puede interpretar de la manera siguiente: los elementos de A_β son familias (a_p) $p \in Spec(A)$, con una condición de compatibilidad que se puede reflejar por medio de un grafo, en el que los elementos de los localizados A_m son extremales y pueden figurar parte como la del esquema



1

en el que los elementos $a_{m_1} \in A_{m_1}$, $a_{m_2} \in A_{m_2}$ están interconec tados, o parte del tipo



(2)

en el cual un elemento $a_{m_3} \varepsilon A_{m_3}$ aparece como extremo único de una componente conexa del grafo.

Si dos elementos a_{m_1} y a_{m_2} se pueden conectar de la forma indicada en la figura (1), es decir si existe una cadena de ideales primos, relacionados por "estar contenidos" o "contener" entre ellos, que une m_1 con m_2, entonces a_{m_1} y a_{m_2} no pueden ser arbitrarios en $(a_p) \varepsilon A_\beta$.

pero si no existe ninguna cadena que una a_{m_3} con ningún otro a_m, entonces a_{m_3} se puede elegir arbitrariamente (figura 2).

Esta observación nos prueba que $A_\beta = A_M$ si y solo si cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal, como antes hemos demostrado.

Mientras que en el otro caso extremo, en que todos los ideales maximales están interconectados por cadenas de ideales primos, A_β es lo más diferente posible de A_M y cabe la posibilidad, como de hecho sucede, que $A=A_\beta$ según veremos en las proposiciones siguientes.

Observemos en primer lugar que la condición

$\forall$ m , $m_2 \varepsilon Max\ (A), \exists$ una cadena de ideales primos ligados entre si por las relaciones "estar contenido" o "contener" equivale, puesto que todo ideal primo está contenido en alguna maximal, a que para todo par de ideales primos existirá una cadena, de las características antes indicadas , que una ambos ideales.

Esta observación nos sugiere la construcción siguiente:

Dado un anillo A la relación binaria "$\subset$" en Spec (A) se puede ampliar a una relación de igualdad (siguiendo la conocida técnica de Ljapin [ ]) que sería la siguiente:

$p \sim q \Longleftrightarrow$ existen $p_1 \ldots . p_r \varepsilon$ Spec (A) con

i) $p=p_1$, $q=p_r$

ii) $\forall i \quad 1 \leq i \leq r \qquad p_i \substack{\subseteq \\ \supseteq} p_{i+1}$

Esta relación es precisamente la que hemos descrito más arriba y a las clases de Spec (A) módulo dicha relación las llamaremos componentes grafo-conexas de Spec (A).

La denominación elegida es razonable puesto que Spec (A) se puede dotar de estructura de grafo utilizando los "esta contenido en" como flechas . De esta forma las componentes grafo conexas de Spec (A) son precisamente sus componentes conexas como grafo.

Obviamente de $p \subset q$ implica $q \varepsilon \{\overline{p}\}$ en la topología de Zariski, resulta que cada componente grafo-conexa de Spec (A) está contenida en una única componente topológico -conexa de Spec (A) para la topología de Zariski, sin que, en general, ambas componentes coincidan. Precisamente los β-anillos son aquellos anillos tales que en su espectro las componentes grafo-conexas y topologico-conexas coinciden.

Teorema 2.6.- Sea A un anillo conmutativo y con elemento unidad , A es β-anillo si y solo si las componentes grafo-conexas y las componentes topológico -conexas de Spec (A) coinciden.

Demostración.- a) Probemos en primer lugar la parte "solo si" de la proposición. Si A es un β-anillo es $A=A_\beta$, es decir $A=\varprojlim_{p\in \mathrm{Spec}(A)} A_p$. Sea ahora $\mathrm{Spec}(A)=\bigcup_{i\in I} Y_i$ la descomposición de Spec (A) en sus componentes grafo-conexas.

La familia de subdiagramas completos

$$\mathcal{D}_i=\{A_p, \varphi_{p,q} \mid p,q\in Y_i \ , \ p\subset q\}$$

es una partición del diagrama

$$\mathcal{D}=\{A_p, \varphi_{p,q} \mid p\in \mathrm{Spec}(A), \ p\subset q\}$$

que cumple la condición del lema 3.3.2. luego

$$A=A_\beta=\prod_{i\in I} \varprojlim \mathcal{D}_i=\prod_{i\in I} A_i$$

con $A_i = \varprojlim \mathcal{D}_i$. Como la categoría de anillos es dual de la de esquemas afines es

$$\mathrm{Spec}\ (A)=\bigcup \mathrm{Spec}\ (A_i)$$

es decir : $\{Spec(A_i)\}_{i\varepsilon I}$ es una descomposición de A en unión de subespacios simultaneamente abiertos y cerrados. Por otra parte, como de la construcción $Y_i \subset Spec\ A_i$ para todo $i\varepsilon I$, forzosamente al ser $Spec\ A = \cup\ Spec\ A_i$, $Spec\ A = \bigcup Y_i$ dos descomposiciones en unión disjunta de subconjuntos de Spec (A) , esta condición lleva consigo que $Y_i = Spec\ A_i$ para todo $i\varepsilon I$ y como toda componente grafo-conexa de Spec (A) está contenida en una única componente topológica-conexa, $Spec\ A_i$ es conexo para todo $i\varepsilon I$ y los $\{Y_i\}_{i\varepsilon I}$ son exactamente las componentes conexas de Spec (A) .

b) Para probar la parte " si" procederemos por etapas de la forma siguiente:

<u>b-1</u>.- Sea A un anillo tal que Spec (A) es conexo. Si Spec (A) es grafo-conexo, A es β-anillo.

<u>Demostración</u>.- Basta probar que el homomorfismo i de la nota 3.1. es sobre y esto resulta de lo siguiente: sea $\{a_p\}_{p\varepsilon Spec\ (A)} \varepsilon A_\beta$ entonces $a_p = \frac{\alpha_p}{\beta_p}$, $\beta_p \not\in p$ para todo $p\varepsilon Spec\ (A)$.

En estas condiciones los $\{D(\beta_p)\}_{p\varepsilon Spec\ (A)}$ forman un recubrimiento abierto de Spec (A) y para todo $p\varepsilon Spec\ (A)$ $\frac{\alpha_p}{\beta_p} \varepsilon A_{\beta_p}$ es una familia de secciones sobre los abiertos de este recubrimiento. Además, si $r \varepsilon D(\beta_p) \cap D(\beta_q)$ existen cadenas finitas de ideales que conectan p y q con r . A consecuencia de ello

$\frac{\alpha_p}{\beta_p} = \frac{\alpha_r}{\beta_r}$, $\frac{\alpha_q}{\beta_q} = \frac{\alpha_r}{\beta_r}$ en A_r , luego $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$ y $\frac{\alpha_q}{\beta_q}$ coinciden

como secciones en $D(\beta_p) \cap D(\beta_q)$ y existe una sección

global $\underline{a}$ que induce $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$ para todo p , es decir,

$\{a_p\}_{p \in \mathrm{Spec}\, A}$ está en la imagen de i .

<u>b-2.</u>- Sea A un anillo tal que para cada componente conexa de Spec (A) se verifica la condición de la proposición anterior. Entonces A es β-anillo.

<u>Demostración</u>.- Sea Spec (A) $= \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ la descomposición de Spec (A) en sus componentes conexas. Como cada X_α es abierto y cerrado simultaneamente, si $p \subset X_\alpha$, $q \subset X_\beta$, $\alpha \neq \beta$ ni p está contenido en q , ni q lo puede estar en p , es decir, las componentes X_α son disjuntas respecto a la relación de contenido y por tanto en virtud del lema 3.3.2.

$$A_\beta = \varprojlim A_p = \prod_{\alpha \in I} \varprojlim A_p$$

luego si $(\underline{a}) \in A_p$, $(\underline{a}) = (\underline{a}_\alpha)$, $\alpha \in I$, $(\underline{a}_\alpha) \in \varprojlim_{p \subset X_\alpha} A_p$.

Ahora bien, en virtud de la proposición anterior, cada $(\underline{a}_\alpha)$ es una función sobre X_α (función en el sentido de que es de hecho un elemento de la asignación $\tilde{A}(X_\alpha)$ del haz $\tilde{A}$ asociado a A al elemento X_α). Como los X_α son disjuntos dos a dos, las funciones $(\underline{a}_\alpha)$ se pueden "pegar" dando lugar a un único elemento $a \in \tilde{A}(X) = A$; luego $A = A_\beta$.

Proposición 2.7.- Sea A un anillo tal que el conjunto de sus componentes irreducibles es localmente finito . Entonces A es un β-anillo.

Demostración.- Veamos que toda componente conexa de Spec (A) es también grafo conexa. Para ello sean p y q pertenecientes a la misma componente conexa X_α de X . Como X_α es conexa y el conjunto de sus componentes irreducibles es también localmente finito, por Grothendieck [ ] Chap.0.2.1.10 , para cada par de conjuntos irreducibles distintos X', X" de X_α existe una cadena $\{X_i\}_{0\leq i\leq n}$ de componentes irreducibles de X_α tales que :

i) $X_0=X'$, $X_n=X''$

ii) $X_{i-1}\cap X_i \neq \emptyset$ para todo i, $1\leq i\leq n$

Por otra parte cada $\{X_i\}_{0\leq i\leq n}$ es también una componente irreducible de X , luego es una parte cerrada irreducible de X y por Grothendieck [ ] Chap. 1.1.15 , cada X_i posee un punto genérico x_i para todo i , $0\leq i\leq n$.

Supongamos entonces que X' y X" son los componentes irreducibles de p y q respectivamente. Si X'=X" el punto genérico x' de X' conecta p con q y si X'≠X" el resultado anterior indica que existe $\{x_i\}_{0\leq i\leq n}\subset$ Spec (A) tal que

i) $p\in \{\bar{x}_0\}$, $q\in \{\bar{x}_n\}$

ii) $\overline{\{x_{i-1}\}}\cap \{\bar{x}_i\} \neq \emptyset$ para todo i $1\leq i\leq n$.

es decir, $x_0 \subset p$, $x_n \subset q$ y para todo i , $1 \leq i \leq n$, existe un ideal y_i con $x_i \subset y_i \supset x_{i-1}$.

NOTA 2.8.- Como consecuencia de estas proposiciones observemos que:

1) Los dominios de integridad son β-anillos, pues si A es un dominio de integridad, el (0) es primo y todo par de ideales maximales de A se pueden conectar vía el 0 .

Este hecho coincide con el resultado conocido de que si A es dominio de integridad y Q es su cuerpo de cocientes, todo anillo de cocientes A_p, $p \in \mathrm{Spec}\,(A)$ se puede sumergir en Q y $A = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}\,(A)} A_p$. Como $Q = A_{(0)}$ en este caso

$$\bigcap_{p \in \mathrm{Spec}\,(A)} A_p = \varprojlim_{p \in \mathrm{Spec}\,(A)} A_p$$

luego A es β-anillo .

2) Del mismo modo, puesto que todo anillo noetheriano cumple la condición de la proposición 3.6, todo anillo noetheriano es β-anillo.

ϕ-2.- ANILLOS DE HERMITE Y β-ANILLOS

Los trabajos recientes de Quillen [ ] Vasers-tein [ ] y Suslin [ ] prueban que los anillos de polinomios sobre anillos locales,regulares de dimensión menor o igual que 2 , en un número finito de indeterminadas, son anillos de Hermite y como estos anillos son noetherianos son también β-anillos .

Nuestro objetivo en ésta sección es comparar detalladamente los conceptos de β-anillos y anillos de Hermite, para demostrar que ninguna de estas clases de anillos está contenida en la otra, es decir, existen β-anillos que no son anillos de Hermite y reciprocamente .

Simultaneamente analizaremos las condiciones bajo las cuales, los anillos de funciones continuas o diferenciables son anillos de Hermite, condición que está intimamente relacionada con la orientabilidad o más precisamente con la paralelizabilidad.

Para encontrar ejemplos de β-anillos que no sean anillos de Hermite, el camino más lógico es construir un anillo cociente, pues la condición de β-anillos es estable - por paso al cociente, mientras que la de ser anillo de Hermite no lo es. La condición del ejemplo recíproco es más complicada y nos llevará a profundizar algunas propiedades de los anillos de funciones diferenciables.

<u>Nota 2.1</u>.- En esta nota analizaremos los conceptos de fila unimodular y fila ampliable, así como las condiciones de ani

llo de Hermite, para los anillos de funciones continuas.

En lo que sigue X es un espacio topológico y k un cuerpo, que será indistintamente R o C con sus topologías habituales, o un cuerpo valorado no arquimediano, con la topología asociada a la valoración. Designaremos por $C(X,k)$, o si no hay confusión en ello con $C(X)$, el anillo de funciones continuas de X en k.

2.1.1.- Existe un isomorfismo natural de $C(X)$-módulos entre $C(X)^r$ y el $C(X)$-módulo de aplicaciones de X en K^r, que asocia a toda aplicación de X en K^r la familia de sus componentes, con la topología producto.

En lo sucesivo designaremos con el mismo símbolo $\underline{f}$ a un elemento de $C(X)^r$, es decir a una fila de $C(X)$ compuesta por r elementos, y a la aplicación de X en K^r correspondiente a ella, indicando con $f_i(x)$ a la componente i-ésima de $\underline{f}$.

4.1.2.- Una fila $\underline{f} \in C(X)^r$ es unimodular si y solo si $||\underline{f}(x)|| \neq 0 \ \forall x \in X$, donde $|| \quad ||$ tiene el sentido usual, según se trate de R, C o un cuerpo K valorado no arquimediano.

Entonces si f es unimodular, $\forall x \in X$ existe i con $f_i(x) \neq 0$, puesto que existen funciones $f_i(x)$ con $\Sigma f_i(x)\, g_i(x) = 1$, luego $||f(x)|| \neq 0$ y recíprocamente si $||f(x)|| \neq 0 \ \forall x \in X$ se puede construir de forma inmediata funciones

$$g_i : X \longrightarrow K$$

con $\Sigma f_i(x)g_i(x) = 1 \quad \forall x\varepsilon X$.

2.1.3.- Si $k=R$, $\underline{f}\varepsilon C(X,R)^r$ es ampliable si y solo si existen funciones $\underline{g}_1 \ldots \underline{g}_{r-1} \varepsilon C(X,R)^r$ tales que $\forall x\varepsilon X$ $\frac{1}{||\underline{f}(x)||}\underline{f}(x)$, $\underline{g}_1(x) \ldots \underline{g}_{r-1}(x)$ forman una referencia ortonormal de R^r . En efecto: basta tomar las funciones de 4.1.3. y aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, que conmuta con la construcción efectuada.

En este caso, podemos añadir que $\underline{f}\varepsilon C(X,R)^r$ es unimodular si y solo si $\Sigma f_i^2(x) \neq 0 \quad \forall x\varepsilon X$ pues $\Sigma f_i^2(x) = ||\underline{f}(x)||^2$.

2.2.- Analicemos, ahora, el caso particular en que X sea una esfera.

2.2.1.- Sea $X= S^{n-1} \subset R^n$. La aplicación de inclusión

$$i_n : S^{n-1} \hookrightarrow R^n$$

$$(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \rightsquigarrow (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

es empliable si y solo si existe una base del espacio tangente $T_{S^{n-1},x}$ que varie continuamente con $x\varepsilon S^{n-1}$, es decir, si y solo si S^n es paralelizable. En efecto: la condición 4.1.4. aplicada a este caso, dice que i_n es ampliable si y solo si existen funciones continuas $\underline{g}_1 \ldots \underline{g}_{r-1} : S^{n-1} \longrightarrow R^n$ tales que $\frac{1}{||i_n(x)||} i_n(x)$, $\underline{g}(x) \ldots \underline{g}_{r-1}(x)$ forman una referencia de R^n $\forall x \in S^{n-1}$, es decir si y solo si

$\underline{g}_1(x) \ldots\ldots \underline{g}_{r-1}(x)$ son una base de $T_{S^{n-1},x}$ que varíe

continuamente con x .

<u>2.2.2.</u> Como S^2 no es paralelizable la función

$$i_3 : S^2 \longrightarrow R^3$$

no es ampliable.

Consideremos entonces el anillo $A = Z[X_1X_2X_3]/_I$

con $I = (X_1^2+X_2^2+X_3^2-1) \cdot Z[X_1,X_2,X_3]$. A es un anillo noetheriano, por tanto es un β-anillo, sin embargo no es un anillo de Hermite, pues obviamente la fila $(\bar{X}_1,\bar{X}_2,\bar{X}_3)$ con $\bar{f}(x)=f(x)+I$ es unimodular, ya que $\bar{X}_1^2+\bar{X}_2^2+\bar{X}_3^2=1$, sin embargo no es ampliable, pues si lo fuese encontrariamos funciones polinómicas con coeficientes en Z sobre la esfera $\underline{g}_1(x),\underline{g}_2(x)$ tales que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{pmatrix}$$ es inversible en A .

Por otra parte A se puede sumergir como anillo en $C(S^2,R)$ y de esta forma la función $(\bar{X}_1,\bar{X}_2\ \bar{X}_3)$ se transforma en i_3, y la inversibilidad de M en A implica que M es también inversible en $C(S^2,R)$ en contradicción con el hecho de que i_3 no es ampliable, luego $A = Z[X_1X_2X_3]/_I$ es β-anillo, pero no es anillo de Hermite.

<u>Proposición 2.3</u>. Sea X un espacio topológico no discreto, compacto y completamente regular. $C(X,R)$ no es un β-anillo.

<u>Demostración</u>.- Sea $A=C(X,R)$. Sabemos que $Max(A)$ con la topología de Zariski coincide con X. Sea p un ideal primo de A y veamos que p está contenido en un único ideal maximal. En efecto: sea

$V(p)=\{m\varepsilon Max(A) \mid p\varepsilon m\}=\{x\varepsilon X \mid f(x)=0 \ \forall f\varepsilon p\}$

si existen x e $y \ \varepsilon V(p)$, $x\neq y$, como, por ser X completamente regular, se pueden construir funciones f_x y f_y, y entornos abiertos y disjuntos U_x y U_y de x e y respectivamente tales que $f_x|_{X-U_x} \equiv 0$, $f_y|_{X-U_y} \equiv 0$, $f(x)\neq 0$, $f_y(x)\neq 0$, entonces $f_x.f_y=0$ luego $f_x.f_y\varepsilon p$ y $f_x\not\varepsilon p, f_y\not\varepsilon p$ y p no sería primo, por tanto $V(p)$ es 0 vacio 0 consta de un solo punto.

Si $V(p)=\emptyset$, entonces para todo $x\varepsilon X$, $x\not\varepsilon V(p)$, implica que existe $f_x\varepsilon p$, $f_x(x)\neq 0$, luego existe U_x entorno de x en X con $f_{x|U_x}(y)\neq 0$ para todo $y\varepsilon U_x$. Como X es compacto y la familia $\{U_x\}$ de entornos forman un recubrimiento abierto de X, existen $x_1 \ldots x_n$ tales que la subfamilia $\{U_{x_i}\}$ forman un recubrimiento abierto de X. Construimos $\sum_1^n f_i^2(x)=f(x)$, $f(x)\neq 0 \ \forall x\varepsilon X$ luego $f(x)$ es unidad y $f(x)\varepsilon p$. Como consecuencia $p=A$.

Por tanto $V(p)\neq 0$ y $V(p)$ consta de un solo punto, es decir existe un único ideal maximal que contiene a p .

Por tanto en virtud de la proposición 3.3.1. $A_\beta = A_M$. Ahora bien $A\neq A_M$ puesto que al no ser la topología de X la discreta no toda familia de gérmenes de aplicaciones de X en R $\{f_x\}_{x\in X}$ es compatible y da lugar a una aplicación continua f de X en R ; luego $A\neq A_M$ y por tanto $A\neq A_\beta$ y A no es β-anillo.

Consecuencia 2.4.- Si X es una variedad diferenciable de clase infinito, compacta y $A=\mathrm{Dif}\ C^\infty(X,R)$, A no es β-anillo.

Demostración.- El razonamiento es idéntico al de la proposición, pues todas las conclusiones efectuadas allí, se pueden aplicar para funciones diferenciables.

NOTA 2.5.- Consideremos $S_1\subset R^2$ y sea $A=\mathrm{Dif}\ C^\infty(S^1,R)$. A es anillo de Hermite.

En efecto: Sea

$$\underline{f}: S^1 \longrightarrow R^n$$

una fila unimodular, entonces $||\underline{f}(x)||\neq 0$ $\forall\, x\in S^1$, luego podemos construir $\underline{f}^*(x)=\dfrac{1}{||\underline{f}(x)||}\underline{f}(x)$, $\underline{f}^*(x)$ toma sus valores en S^{n-1} y su imagen es una curva diferenciable cerrada en S^{n-1} . Si $n=2$ entonces la función $g(x)=(-f_2^*(x),f_1^*(x))$ cumple las condiciones buscadas y si n es mayor que 2 entonces existe algún punto $x\in S^{n-1}$, $x\notin \mathrm{Im}\ \underline{f}^*$ y un casquete esférico C_x centrado en x que no corta a $\mathrm{Im}\ \underline{f}^*$. Por pro yección estereográfica , $S^{n-1}-C_x$ es difeomorfo a un abierto de R^{n-1} que es paralelizable, luego existe una referencia ortonormal en $T_{S^{n-1},y}$ $y \varepsilon S^{n-1} - C_x$ que varía diferenciablemente con y . Sea $\underline{g}_1(x)\ldots\ldots\ldots\underline{g}_{n-1}(x)$ esta referencia, entonces las funciones $\underline{g}_1(x)\ldots\ldots\underline{g}_{n-1}(x)$ son precisamente las funciones buscadas.

Por tanto y vista la consecuencia 4.4. hemos encontrado un anillo de Hermite que no es β-anillo.

C A P I T U L O III

E S T R U C T U R A D E U N E S P A C I O S I M P L E C T I C O S O B R E U N A N I- L L O D E H E R M I T E

ϕ-1.- SUBESPACIOS DE UN ESPACIO SIMPLECTICO

NOTACIONES 1.1.- En este capítulo A representará un anillo conmutativo y con elemento unidad al que (según los casos) añadiremos la hipótesis adicional de ser de Hermite. V un A-módulo libre de dimensión 2 n . ϕ una forma bilineal hemisimétrica no degenerada sobre V , con valores en A .

Las notaciones serán las de E. Fernández Bermejo [ ] que esquematizamos a continuación.

1.1.1.- Si V^* es el dual de V , ϕ_I y ϕ_D son los isomorfismos de V en V^* definidos por:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_D(y)(x)=\phi(y,x)\\ \phi_I(y)(x)=\phi(x,y)\end{array}\right\} \forall\, x,y\in V$$

Obviamente $\phi_D = -\phi_I$ por ser ϕ hemisimétrica y por esta razón llamaremos $d_{\phi}=\phi_D=-\phi_I$

1.1.2.- Si $B=\{\underline{u}_1.....\underline{u}_{2n}\}$ es una base de V a la matriz de ϕ respecto a esta base la llamaremos $M_{\phi,B}$, omitiendo la mención de la base cuando no haya confusión en ello. Obviamente si B^* es la base dual de B, la matriz $M_{\phi,B}$ es también la matriz de d_{ϕ} respecto a B y B^*.

1.1.3.- Llamaremos espacio simpléctico n-dimensional sobre A, a todo por (V,ϕ) que cumpla las condiciones de 1.1, y homomorfismos de espacios simplecticos a las isometrías.

1.1.4.- Si p es un ideal de A, $\eta_p:A\longrightarrow A/_p$ el epimorfismo natural, $V_p=(A/p)^n=\{(x_1+p_1\ ...x_n+p\,|\,x_i\in A\}$ se puede dotar de manera natural de estructura de A/P-módulo. V_p es por tanto un A/P-módulo de tipo finito y la forma bilineal ϕ induce una forma bilineal $\phi_p:V_p\times V_p\longrightarrow A/p$ definida así: si notamos por N_p al homomorfismo de $A^n\longrightarrow V_p$ inducido por η_p y si notamos por

$\bar{\underline{x}}=N_p(\bar{x})$, $\bar{\underline{y}}=N_p(\underline{y})$

$$\phi_p(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}})=\phi(\underline{x},\underline{y})+p$$

En esta situación (V_p,ϕ_p) es un espacio simpléstico sobre A/p.

1.1.5.- Sea (V,ϕ) un espacio simpléctico, U un submódulo de V. ϕ induce una forma bilineal sobre U

$$\phi|_U : U \times U \longrightarrow A$$

a la que se puede asociar un homomorfismo

$$d_{\phi|_U} : U \longrightarrow U^*$$

definido por $d_{(\phi|_U)}(\underline{u})(\underline{u}')=\phi(\underline{u}',\underline{u})$

Además el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "d_{(\phi|_U)}"] \arrow[d, hook] & U^* \\ V \arrow[r, "d_\phi"] & V^* \arrow[u] \end{tikzcd}$$

con i la inclusión e i^* el homomorfismo traspuesto de i es un diagrama conmutativo.

<u>1.1.6</u>.- Si U es un submódulo libre de V entonces

$$\phi|_U : U \times U \longrightarrow A$$

es una forma bilineal hemisimétrica (no necesariamente no degenerada) y $d_{(\phi|_U)}$ es precisamente el homomorfismo de $U \longrightarrow U^*$ asociado a $\phi|_U$ según la construcción de d_ϕ .

<u>1.1.7</u>.- Sea (V,ϕ) un espacio simpléctico, U un submódulo de V . Diremos que U es un <u>subespacio</u> de (V,ϕ) si y solo si:

i) U es libre

ii) U es sumando directo de V

iii) $\mathrm{Im}\, d_{(\phi|_U)}$ es sumando directo de U^* .

<u>1.1.8</u>.- En las condiciones de 1.1.7. diremos que U es un <u>subespacio no isotropico</u> si $d_{(\phi|_U)}$ es inyectivo.

<u>NOTA 1.2</u>.- En lo que sigue utilizaremos frecuentemente sumas directas internas y externas simultaneamente. Para evitar confusiones precisaremos que las sumas directas internas dependen de la inmersión que se tome, de un módulo u otro, (es decir manejaremos estas sumas, en el sentido de sumas de subobjetos en la teoría general de categorías). Para manejarnos con comididad conviene hacer las dos precisiones siguientes:

1) Sean U y V A-módulos, $f:U \longrightarrow V$ un homomorfismo. Diremos que U es sumando directo de V respecto de f, si y solo si existe un A-módulo U' con $V \simeq U \oplus U'$ y el homomorfismo asociado a esta suma directa $q_1:U \longrightarrow V$ es precisamente f, o lo que es lo mismo la proyección $\pi_1:V \longrightarrow U$ es el inverso de f por la derecha.

2) Si U es un submódulo de V e $i: U \longrightarrow V$ es la inclusión, entonces decir que U es sumando directo de V respecto de i equivale a decir que $V=U+U'$, con U' submódulo de V y $+$ es suma directa interna. En este caso diremos simplemente que U es sumando directo de V. La razón de esta precisión se encuentra en el ejemplo siguiente:

Sea $A= {}^{Z}/(2) \oplus {}^{Z}/(4)$ como Z-módulo, entonces ${}^{Z}/_{(2)}$ es submódulo directo de A respecto del homomorfismo de inclusión

$$
\begin{aligned}
{}^{Z}/_{(2)} &\longrightarrow {}^{Z}/_{(2)} \oplus {}^{Z}/_{(4)} \\
a+(2) &\rightsquigarrow (a+(2),0+(4))
\end{aligned}
$$

pero no lo es respecto del homomorfismo, también inyectivo

$$Z/(2) \longrightarrow Z/(2) \oplus Z/(4)$$

$$a+(2) \longmapsto (0+(2), 2a+(4))$$

NOTA 1.3.- Añadiendo condiciones suplementarias a A se pueden mejorar los resultados del caso general en la forma siguiente:

1.3.1.- Si A es de Hermite y si U es un submódulo libre sumando directo de V, toda base $\{\underline{u}_1 \ldots\ldots u_t\}$ de U se puede ampliar a una base B de V. Si tomamos la matriz $M_{\phi.B}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots\cdots a_{1t} \cdots\cdots\cdots a_{12n} \\ a_{21} \cdots\cdots\cdots a_{2t} \cdots\cdots\cdots a_{22n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{t1} \cdots\cdots\cdots a_{tt} \cdots\cdots\cdots a_{t2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n1} \cdots\cdots\cdots a_{2nt} \cdots\cdots\cdots a_{2n2n} \end{pmatrix}$$

la matriz de $d_{(\phi|_U)}$ respecto a $\{\underline{u}_1 \ldots\ldots\ldots \underline{u}_t\}$ y su base dual es

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots\cdots a_{1t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{t1} \cdots\cdots\cdots a_{tt} \end{pmatrix}$$

1.3.2.- Aunque parece, dada la similitud de los anillos de Hermite con los cuerpos, que sería posible prescindir de la condición de ser U libre, como sucede en el caso de ser A anillo local, en cuyo caso por ser U sumando directo de V libre, es proyectivo y por tanto libre, sin embargo en nuestro caso, aunque U e $\mathrm{Im}\, d_{(\phi|_U)}$ sean sumandos directos de V y V^* respectivamente, U no tiene porqué ser libre como prueba el ejemplo siguiente:

Sea el anillo $Z_{/(6)}$ que es de Hermite, por ser noetheriano y 0-dimensional. Consideremos el $Z/_{(6)}$-módulo libre $(Z/_{(6)})^2$ y sobre él la forma hemisimétrica ϕ de matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto a la base canónica.

Consideremos el homomorfismo:

$$(Z/_{(2)})^2 \hookrightarrow (Z/_{(6)})^2$$

$$(a+(2),b+(2)) \rightsquigarrow (3a+(6),3b+(6))$$

$(Z/_{(2)})^2$ es sumando directo (su complementario es $(Z/_{(3)})^2$ e $\mathrm{Im}\, d_{(\phi|_U)}$ es sumando directo de $(Z/_{(2)})^2$ (de hecho coincide con él, pues tiene cuatro elementos distintos) sin embargo $(Z/_{(2)})^2$ tiene cuatro elementos y $4\neq 6^n\ \forall\, n\in N$ luego $(Z/_{(2)})^2$ no es un $Z/_{(6)}$-módulo libre.

<u>PROPOSICION.1.4.</u>- Sea A un anillo de Hermite, U un submódulo de V . U es subespacio simpléctico no isótrópico de V si y solo si $(U,\phi|_U)$ es un espacio simpléctico.

<u>Demostración</u>.- Por ser U subespacio simpléctico de V es U libre y sumando directo de V . Por 1.1.8. $d_{(\phi|_U)}$ es

inyectiva, luego Im $d_{(\phi|_U)}$ es submódulo libre y sumando directo de U^*. Como A es de Hermite, por 1.3.1. es $\dim U = \dim \operatorname{Im} d_{(\phi|_U)}$. Como por otra parte $\dim U = \dim U^*$ es $\operatorname{Im} d_{(\phi|_U)} = U^*$ y por tanto $d_{(\phi|_U)}$ es isomorfismo, luego $(U,\phi|_U)$ es un espacio simpléctico.

Recíprocamente. Si $(U,\phi|_U)$ es un espacio simpléctico, U es un A-módulo libre de tipo finito y

$$d_{(\phi|_U)}: U \longrightarrow U^*$$

es un isomorfismo, en consecuencia

i) U es libre

ii) $\operatorname{Im} d_{(\phi|_U)} = U^*$ es sumando directo de U^*

Veamos que U es sumando directo de V. Para ello definimos la aplicación

$$\tau_\phi : V \longrightarrow U^*$$

por

$$\tau_\phi(\underline{v}) = d_\phi(\underline{v})|_U \qquad \text{para todo } \underline{v} \in V$$

τ_ϕ es sobre ya que $\tau_{\phi|_U} = d_{(\phi|_U)}$ y $U^* = \operatorname{Im} d_{(\phi|_U)} =$

$= \operatorname{Im} \tau_{\phi|_U} \subset \operatorname{Im} \tau_\phi$.

Como U^* es libre y τ_ϕ es sobre U^* es sumando directo de U. Tenemos

$$V \xrightarrow{\tau_\phi} U^* \xrightarrow{d^{-1}_{(\phi|_U)}} U$$

para comprobar que U es sumando directo de V respecto de la inclusión, hemos de probar que la composición $d^{-1}_{(\phi|_U)}$ con la retracción de τ_ϕ es precisamente la inclusión , es decir $d^{-1}_{(\phi|_U)} \cdot \tau_{\phi|_U} = 1_U$ lo cual es cierto pues

$\tau_{\phi|_U} = d_{(\phi|_U)}$.

ϕ-2 .- TEOREMA DE ESTRUCTURA DE UN E.S.

En esta sección A será un anillo de Hermite. Este hecho es importante con vistas a un teorema de estructura para los espacios simpléctico sobre A, pues por la proposición (I.2.4) si U es un submódulo libre sumando directo de V, $\omega(U)$ es un submódulo libre sumando directo de V^* y $\dim U + \dim \omega(U) = \dim V$.

Por esta razón nos interesa analizar la relación de ortogonalidad respecto a ϕ y reducirla a una ortogonalidad de V y V^* cuyo comportamiento está perfectamente determinado.

Nota 2.1.- La forma bilineal ϕ induce en el retículo $L(V)$ de submódulos de V una relación de ortogonalidad a la que designaremos por ω_ϕ cuyas propiedades pueden verse en Abellanas [ ] .

2.2.1.- La relación entre ω_ϕ y ω es la siguiente. El isomorfismo $d_\phi : V \longrightarrow V^*$ induce un isomorfismo de retículos (que preserva la dimensión)

$$D_\phi : L(V) \longrightarrow L(V^*)$$

de forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} L(V) \arrow[r, "D_\phi"] \arrow[dr, "\omega_\phi"'] & L(V^*) \arrow[d, "\omega"] \\ & L(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto: $L\varepsilon L(V)$ es $\omega_\phi(L) =$

$=\{\underline{v}\varepsilon V|\ d_\phi(\underline{v})(\underline{u})= 0\ ,\ \forall \underline{u}\varepsilon L\ \}=\{\underline{v}\varepsilon V|\ d_\phi(\underline{u})(v)=0\ ,\forall \underline{u}\varepsilon L\}=$

$= \{\underline{v}\varepsilon V|\underline{u}^*(\underline{v})=0\ ,\quad \underline{u}^*\varepsilon D_\phi(L\ \} = \omega\ D_\phi(L)$, luego $\omega_\phi=\omega D_\phi$.

2.1.2.- SI U es un sumando directo de V , $\omega_\phi(U)$ se puede calcular de la forma siguiente: sea $\tau_\phi:V\longrightarrow V^*$ el homomorfismo $\tau_\phi(\underline{v})= d_\phi(\underline{v})|_U$ definido en la proposición 1.4. En dicha proposición vimos que τ_ϕ es sobre; además se verifica que:

i) τ_ϕ es una sección

ii) $\ker\ \tau_\phi = \omega_\phi\ (U)$

En efecto: i) Sea $\pi: V\longrightarrow U$ la sección de la inclusión $i: U \longrightarrow V$ y $\pi^*:U^*\longrightarrow V^*$ el homomorfismo transpuesto . Como $d_\phi:V\longrightarrow V^*$ es isomorfismo podemos construir $d_\phi^{-1}:V^*\longrightarrow V$ y la composición $d_\phi^{-1}\cdot \pi^*:U^*\longrightarrow V$. Veamos que este homomorfismo es una retracción de $\tau_\phi:V\longrightarrow V^*$. En efecto: $\tau_\phi d_\phi^{-1}\ \pi^*(f) = \tau_\phi d_\phi^{-1}(f\pi)=d_\phi d_\phi^{-1}(f\pi)i= f\pi i=f$ ya que por definición $\tau_\phi(\underline{v})=d_\phi(\underline{v})|_U = d_\phi(\underline{v})i\ \ ,\forall \underline{v}\varepsilon V$.

ii) $\forall\ \underline{v}\varepsilon\ker\ \tau_\phi \Longrightarrow \tau_\phi(\underline{v})= d_\phi(v)|_U=0 \Longrightarrow \phi(\underline{u},\underline{v}) = 0$

$\forall\ \underline{u}\varepsilon U \Longrightarrow \underline{v}\varepsilon\omega_\phi(\underline{U}) \Longrightarrow \ker\ \tau_\phi\subset\omega_\phi(\underline{u})$.

$\forall \underline{v}\varepsilon\ \omega_\phi(\underline{u}) \Longrightarrow \phi\ (\underline{u},\underline{v})= 0\ \ \forall \underline{u}\varepsilon U \Longrightarrow d_\phi(\underline{v})|_U=0 \Longrightarrow$

$\underline{v}\varepsilon\ker\ \tau_\phi \Longrightarrow \omega_\phi(U)\subset\ker\ \tau_\phi$. Luego $\ker\ \tau_\phi=\omega_\phi\ (U)$.

PROPOSICION 2.2.- Sea V un espacio simpléctico. U un submódulo libre sumando directo de V . Se verifica que:

i) $\omega_\phi(U)$ es un submódulo libre sumando directo de V , al que llamaremos sumando ortogonal a U respecto de ϕ y $\dim V= \dim U+\dim \omega_\phi(U)$.

ii) $\omega_\phi^2(U)= U$.

iii) $\ker d_{(\phi|_U)} = U \cap \omega_\phi(U)$.

Demostración.- Teniendo en cuanta 2.1.1, decir que $U \xrightarrow{i} V$ es libre y sumando directo, por ser d_ϕ isomorfismo, implica que $D_\phi(U)$ es módulo libre y sumando directo de V, respecto de la inclusión, de $D_\phi(U)$ en V^* .

Por otra parte, como A es anillo de Hermite, para todo U libre sumando directo, $\omega(U)$ es libre y sumando directo de V^* respecto de la inclusión.

Por ser A anillo de Hermite y teniendo en cuenta la observación anterior es:

$$\dim_{\omega_\phi}(U)= \dim \omega(D_\phi(U)) =$$

$$= \dim V - \dim D_\phi(U)= \dim V- \dim U \quad .$$

ii) Por análogo razonamiento al anterior $\omega_\phi^2(U)$ es libre y sumando directo de V ya que $\omega_\phi(U)$ lo és, por tanto para todo U es

$$\dim \omega_\phi^2(U)+\dim \omega_\phi(U)=\dim V \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \dim \omega_\phi^2(U)= \dim (U) \quad .$$

Sabemos que $U \subset \omega_\phi^2(U)$, veamos que coinciden.

Sea $\{\underline{u}_1 \dots\dots \underline{u}_t\}$ base de U . Por ser A anillo de Hermi te se puede prolongar a una base

$\{\underline{u}_1 \dots \underline{u}_t, \underline{u}_{t+1}, \dots \underline{u}_n\}$ de V , si $U \neq \omega_\phi^2(U)$ existe $\underline{v} \varepsilon \omega_\phi^2(U)$,

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \dots\dots + \lambda_t \underline{u}_t + \lambda_{t+1} \underline{u}_{t+1} + \dots\dots + \lambda_n u_n$ y existe i con

$t+1 \leq i \leq n$ tal que $\lambda_i \neq 0$. Luego $R(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_t, \underline{v}) = t+1$.

Sea $\{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_t\}$ una base de ω_ϕ^2 (U) . Por ser A anillo de Hermite se puede ampliar a una base $\{\underline{v}_1 \dots\dots \underline{v}_t, \_{t+1} \dots v_n\}$ de V. Como para todo i $1 \leq i \leq t$ $\underline{u}_i \varepsilon\ \omega_\phi^2(U)$ y $\underline{v} \varepsilon\ \omega_\phi^2(U)$ es

$\underline{u}_i = a_{i1} \underline{v}_1 + \dots\dots + a_{it} v_t$ y $\underline{v} = b_1 \underline{v}_1 + \dots\dots + b_t \underline{v}_t$.

Veamos que $R(\underline{u}_1 \dots\dots \underline{u}_t, \underline{v}) = t+1$ lleva a una contradicción . En efecto: la matriz de coordenadas de $(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_t, \underline{v})$ respecto de $\{\underline{v}_1 \dots\dots \underline{v}_n\}$ es

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \dots\dots\dots\dots a_{1t} & 0 \dots\dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{t1} \dots\dots\dots\dots a_{tt} & 0 \dots\dots\dots\dots 0 \\ b_1 \dots\dots\dots\dots b_t & 0 \dots\dots\dots\dots 0 \end{pmatrix}$$

luego $R(M) < t+1$ y por tanto $U = \omega_\phi^2$ (U) .

iii) $\forall\ \underline{x} \varepsilon U \cap \omega_\phi(U) \Longrightarrow \begin{cases} \underline{x} \varepsilon U \\ y \\ \underline{x} \varepsilon \omega_\phi^2(U) \end{cases} \Longrightarrow d_\phi(\underline{u})(\underline{x}) =$

$= \phi(\underline{u}, \underline{x}) = 0\ \forall\ \underline{u} \varepsilon U \Longrightarrow \underline{x} \varepsilon \ker d_{(\phi|_U)}$.

$\forall\, \underline{x}\varepsilon\ker d_{(\phi|_U)} \Longrightarrow d_{(\phi|_U)}(\underline{x}) = 0\varepsilon U^* \Longrightarrow d_{(\phi|_U)}(\underline{x})(U) = 0$

$\forall \underline{u}\varepsilon U \Longrightarrow \phi(\underline{x},\underline{u}) = 0\, \forall \underline{u}\varepsilon U\ ,\ \underline{x}\varepsilon U \Longrightarrow \phi(\underline{u},\underline{x}) = 0$

$\forall\, \underline{u}\varepsilon U\ ,\ \underline{x}\varepsilon U \Longrightarrow d_\phi(\underline{u})(\underline{x}) = 0\ ,\forall\, \underline{u}\varepsilon U,\ \underline{x}\varepsilon U \Longrightarrow \underline{x}\varepsilon\omega_\phi(U) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \underline{x}\varepsilon U \cap \omega_\phi(U)$.

PROPOSICION 2.3.- Sea U un subespacio no isotrópico de V entonces $\omega_\phi(U)$ es un subespacio de V .

Demostración.- En este caso $V=U+\omega_\phi(U)$ y la suma es directa, entonces eligiendo una base de V .$\{\underline{u}_1 \ldots\ldots \underline{u}_t\ \underline{u}_{t+1} \ldots \underline{u}_n\}$ con $\underline{u}_i\varepsilon U$ $1\leq i\leq t$ y $\underline{u}_j\varepsilon\ \omega_\phi(U)$ $t+1\leq j\leq n$,la matriz de ϕ asociada a esta base es

$$M_\phi = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right)$$

con det M_1. det M_2= det $M_\phi = \xi$, con ξ unidad , entonces det M_1 y det M_2 son unidades, luego $(\omega_\phi(U),\ \phi|_{\omega_\phi(U)})$ es un espacio simpléctico y por tanto $\omega_\phi(U)$ es un subespacio.

PROPOSICION 2.4.- Sea U un subespacio de V entonces las condiciones siguientes son equivalentes

i) U es no isotrópico

ii) $\omega_\phi(U)$ es no isotrópico

iii) $V=U \perp \omega_\phi(U)$

Demostración.- i)$\Longrightarrow$ii) trivial por la proposición anterior.

ii)$\Longrightarrow$iii) con $\omega_\phi(U)$ es subespacio no isotrópico entonces

$\ker d_{\phi|\omega_\phi(U)} = 0$ pero

$$\ker d_{\phi|\omega_\phi(U)} = \omega_\phi(U) \cap \omega_\phi^2(U)$$

y como $\omega_\phi^2(U)=U$ es $V=U+\omega_\phi(U)$

y la suma es directa y por definición de ortogonalidad respecto de ϕ es

$$V=U \perp \omega_\phi(U)$$

iii)$\Longrightarrow$ i) Si $V= U \perp \omega_\phi(U) \Longrightarrow U \cap \omega_\phi(U)=\{\underline{0}\}$

$\Longrightarrow \ker d_{(\phi|_U)}=\{\underline{0}\} \Longrightarrow d_{(\phi|_U)}$ es inyectiva $\Longrightarrow$

U es no isotrópico.

PROPOSICION 2.5.- Sea U un subespacio no isotrópico de V, entonces $\forall\ \underline{a}\in U$ tal que $0(\underline{a})=A$ existe $\underline{b}\in U$ con $\phi(\underline{a},\underline{b})=1$.

Demostración.- Sea M_ϕ la matríz correspondiente a $\phi|_U$ respecto de una base de U y queremos ver que existe $\underline{b}\in U$ con $a\, M_\phi b^t= 1$. Como $0(\underline{a})=A$ es $\underline{a}=(a_1\ldots.a_n)$ unimodular $\Longrightarrow$ existe $C\in GL_n(A)$ tal que $a.C= (1,0,\ldots.0)$.

Considerando la matriz $C^{-1}M_\phi$ es $\det(C^{-1}M_\phi)=1$, luego sus filas son unimodulares y $(1,0,\ldots.0).C^{-1}.M_\phi=(a_{11}\cdots\cdots a_{1n})$, primera fila de $C^{-1}.M_\phi$ es unimodular. Como existe S tal que $(a_{11},\ldots.,a_{1n}).S=(1,0,\ldots\ldots,0)$ es

$$(a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{1n}) \cdot S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \ .$$

Sustituyendo

$$a \cdot C \cdot C^{-1} \cdot M_{\phi} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

luego tomando como $\underline{b} = (1,0 \ldots 0) \cdot S^t$ es

$$a \, M_{\phi} b^t = 1$$

<u>DEFINICION 2.6.</u>- Un par de vectores ordenados $(\underline{a}.\underline{b})$ tal que $\phi(\underline{a},\underline{b})=1$ se llama <u>par hiperbólico</u>.

<u>DEFINICION 2.7.</u>- Al submódulo engendrado por un par hiperbólico se llama <u>plano hiperbólico</u>.

Evidentemente un plano hiperbólico es un subespacio no isotrópico de dimensión dos .

<u>TEOREMA 2.8.</u>- Todo espacio simpléctico es suma ortogonal de planos hiperbólicos.

<u>Demostración.</u>- La demostración es consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores.

Sea (V,ϕ) espacio simpléctico, por la proposición 2.5. existe un par hiperbólico $(\underline{U}_1,\underline{U}_2)\varepsilon V$. Sea $U=(\underline{U}_1\ \underline{U}_2)$ el plano hipèrbólico, U es un subespacio no isotrópico, luego $V=U \perp \omega_{\phi}(U)$ y $(\omega_{\phi}(U), \phi|_{\omega_{\phi}(U)})$ es espacio simpléctico de dimensión dos unidades menos, entonces por recurrencia se sigue el teorema.

<u>COROLARIO 2.9</u>.- Dos espacios simplécticos de la misma dimensión son isométricos, ya que siempre existe la aplicación lineal que transforma base canónica en base canónica y ésta es isomorfismo.

ϕ-3 .- TRANSVECCIONES SIMPLECTICAS

En esta sección estudiaremos las ventajas que, a la hora de considerar transvecciones simplécticas, se derivan del hecho de ser A anillo de Hermite. Las notaciones de esta sección son las siguientes:

NOTA 3.1.-

3.1.1.- El Teorema 2.8. de la sección anterior permite considerar en lo sucesivo un único espacio simpléctico de cada dimensión. Dado entonces un anillo A llamamos $E\,S_n(A)$ al espacio simpléctico de dimensión 2n (A^{2n},ϕ) con ϕ forma bilineal definida, respecto a base canónica de A^{2n} , por la matriz

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} & & & \\ & \begin{array}{|cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$E\,S_n$ (-) es obviamente un funtor de la categoría de anillos de Hermite y homomorfsimos en la categoría general de espacios simplécticos.

La composición de este funtor con el que asocia a cada espacio simpléctico un grupo de isometrías de lugar a un funtor $S\,P_n(-)$ covariante de la categoría de anillos en la de grupos.

3.1.2.- Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad, J un ideal de A. Consideremos el homomorfismo natural:

$$h: A \longrightarrow A/J$$

El funtor $S\,P_n(-)$ transforma h en un homomorfismo de grupos

$$h_J: S\,P_n(A) \longrightarrow S\,P_n\,(A/J)$$

Recordemos brevemente quien es h_J. En primer lugar h induce un homomorfismo de espacios simplécticos

$$(h.\bar{h}_J):(A^n.\phi) \longrightarrow ((A/_J)^n,\phi_J)$$

donde ϕ y ϕ_J son las formas biliniales hemisimétricas cuyas matrices, respecto de las bases canónicas de A^n y $(A/J)^n$ es la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \hline & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\bar{h}_J$ como homomorfismo de grupos abelianos es h^{2n} y (respecto de las bases canónicas de A^n y $(A/J)^n$) $\bar{h}_J$ tiene por matriz la matriz identidad. Entonces h_J está definido así:

$\forall\,\sigma\in S\,P_n(A) = I\,(A^n,\phi)$, $h_J(\sigma)$ es el homomorfismo que respecto de las bases canónicas tiene por matriz la matriz

$$M_{h_J(\sigma)} = M_{\bar{h}_J} \cdot h\,(M_\sigma) \cdot M_{\bar{h}_J}^{-1} = h\,(M_\sigma)$$

donde $h(M_\sigma)$ es la matriz de clases de elementos de M_σ módulo J .

3.1.3.- $\forall\, \sigma \varepsilon\ S\ P_n(A)$ se verifica que

$$h_J(\sigma) . \bar{h}_J = \bar{h}_J \cdot \sigma$$

y $h_J(\sigma)$ es unica en estas condiciones.

3.1.4.- Sea (V,ϕ) un espacio simpléctico sobre A, $U \varepsilon A$, llamaremos orden de U $(0(U))$ al ideal generado por U .

Sea $\underline{x} \varepsilon V$, llamaremos orden de $\underline{x}$ $(\underline{0}(\underline{x}))$ al mínimo ideal J de A tal que $\bar{h}_J(\underline{x}) = \underline{0}$.

Si $\sigma \varepsilon S\ P_n\ (A)$, llamaremos orden de $\sigma (0(\sigma))$ al mínimo ideal J de A tal que $h_J(\sigma)$ pertenece al centro de $S\ P_n(A/J)$.

Sea G un subconjunto de $S\ P_n(A)$. Llamaremos orden de G $(0(G))$ al mínimo ideal J de A tal que $h_J(G)$ está contenido en el centro de $S\ P_n(A/J)$.

3.1.5.- Sea $B = \{\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_n\}$ una base de V , $\underline{x} = x_1\ \underline{v}_1 + \ldots + x_n \underline{v}_n$ un elemento cualquiera de V .

Se verifica que

i) $0(\underline{x}) = J_1(\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n) = (\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n)\ A$

ii) Si G es un subgrupo de $S\ P_n(A)$

$$0(G) = \sum_{\sigma \varepsilon G} 0\ (\sigma)$$

Definición 3.2.- Sea (V,ϕ) un espacio simpléctico sobre A . Llamaremos transversión simpléctica , o simplemente transversión, a toda correspondencia

$$\sigma : V \longrightarrow V$$

tal que:

$$\sigma(\underline{x}) = \underline{x} + \lambda . \phi\ (\underline{a}, \underline{x})\ \underline{a} \quad , \forall\ \underline{x} \in V \ .$$

$\underline{a}$ recibe el nombre de dirección de σ

Proposición 3.3.- Toda transvección de (V,ϕ) es un elemento de $I(V,\phi) = S\,P_n(A)$.

Demostración.- Sea σ una transvección de dirección $\underline{a}$, $\sigma(\underline{x}) = \underline{x} + \lambda\phi(\underline{a},\underline{x})\ \underline{a}$ con $0(\underline{a})=A$. Veamos en primer lugar que $\sigma \in A\ U\ t_A(V)$. En efecto: si $\lambda=0$ trivial . Supongamos entonces que $\lambda \neq 0$. Trivialmente σ es homomorfismo de A-módulos . Sea $B=\{\underline{v}_1 \ldots\ldots \underline{v}_n\}$ una base de V . Identificando $\underline{x}$ con sus coordenadas respecto de la base B se tiene que:

$$(\underline{x})\ M_\sigma = (\underline{x}) - \lambda(\underline{x}\, M_\phi\, (\underline{a})^t\ \underline{a}$$

luego si llamamos N a la matriz $M_\phi . (\underline{a})^t . (\underline{a})$ e I a la matriz identidad, ambas de dimensión $2n \times 2n$, se verifica que para todo $\underline{x} \in V$ $(\underline{x}) M_\sigma = (\underline{x})(I - \lambda\ N)$. Por tanto $M_\sigma = I - \lambda N$ y usando la notación de Gantmacher $[\ \ ]$

$$\det\ (M_\sigma) = 1 - \left[\lambda \Sigma n_{ii} - \lambda^2 \sum_{i>j} N \begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix} + \ldots\ldots + |N|\lambda^n\right]$$

siendo $N = (n_{ij})$.

Pero para todo i $J_i(N) \subset J_i(M_\phi) J_i(a^t \cdot a)$ y $J_r[(\underline{a}^t).(\underline{a})]=0$.

Para todo $r>1 \Longrightarrow J_r\ (N)=0$.

Para todo $r>1 \Longrightarrow N \begin{bmatrix} i_1 \ldots\ldots i_r \\ i_1 \ldots\ldots i_r \end{bmatrix} = 0$ para todo

$i_1 > i_2 > \ldots . > i_r$, para todo $r>1$.

Además si $M_\phi = (m_{ij})$ se tiene: $N_{ii} = \sum_j M_{ij} a_j a_i$

$\Longrightarrow \sum n_{ii} = \sum_i \sum_j m_{ij}\ a_j a_i = \sum_{i<j} a_i a_j (m_{ij} + m_{ji}) = 0$

por ser M_ϕ hemisimétrica. Luego det $(M_\sigma)=1$ y σ es un automorfismo de V .

Nos queda, pues por probar que σ es compatible con la forma bilineal ϕ. En efecto

$$\phi(\sigma(\underline{v}),\sigma(\underline{w})) = \phi(\underline{v} + \lambda\ \phi(\underline{a},\underline{v})\underline{a},\underline{w}) + \lambda\phi(\underline{a},\underline{w})\underline{a} = \phi(\underline{v},\underline{w})$$

<u>DEFINICION 3.4</u>.- Diremos que un submódulo libre $H \subset V$ de dimensión $n-1$ es un hiperplano si y solo si existe $\rho \varepsilon V^*$ tal que:

$$\underline{h} \varepsilon H \Longleftrightarrow \rho(\underline{h})=0$$

<u>PROPOSICION 3.5</u>.- Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) τ es transvección simpléctica

2) $\tau\ \varepsilon\ S\ P_n(A)$ y existe L libre y sumando directo de dimension 1 con $\tau(\underline{x}) - \underline{x}\ \varepsilon\ L$ para todo $\underline{x} \varepsilon U$.

3) 3) $\tau \varepsilon S\ P_n(A)$ y existe H hiperplano con $\tau|_H = 1_H$

<u>Demostración</u>.-2) $\Longrightarrow$ 3) Sea $L = L(\underline{a})$, $\underline{a}$ unimodular $\Longrightarrow \omega_\phi(L)=H$

es un hiperplano. Para todo $\underline{x}\varepsilon V$, $\tau(\underline{x})-\underline{x}\varepsilon L \Longrightarrow$ para todo $\underline{y}\varepsilon H$ es

$$\phi(\tau(\underline{x})-\underline{x},\underline{y})=0=\phi(\tau(\underline{x}),\underline{y})-\phi(\underline{x},\underline{y}) \Longrightarrow \phi(\tau(\underline{x}),\underline{y})=\phi(\underline{x},\underline{y})$$

Como τ y $\tau^{-1}\varepsilon\ S\ P_n(A)$, ello implica que

$$\phi(\tau^{-1}(\underline{x}),\tau^{-1}(\underline{y}))=\phi(\tau(\underline{x}),\underline{y})=\phi(\underline{x},\underline{y}) \Longrightarrow$$

$$\phi(\underline{x},\tau^{-1}(\underline{y}))= \phi(\underline{x},\underline{y}) \quad \text{para todo } \underline{x}\varepsilon V$$

$$\Longrightarrow \phi(\underline{x},\tau^{-1}(\underline{y})-\underline{y})=0 \quad \text{para todo } \underline{x}\varepsilon V \Longrightarrow$$

$$\tau^{-1}(\underline{y})-\underline{y}\varepsilon\ker d_{\phi} \Longrightarrow \tau^{-1}(\underline{y})-\underline{y}=0 \Longrightarrow$$

$$\tau^{-1}(\underline{y})=\underline{y} \Longrightarrow y = \tau(\underline{y}) \quad \text{para todo } \underline{y}\varepsilon H$$

3) $\Longrightarrow$1) . Sea $\tau\varepsilon\ S\ P_n(A)$, $\tau|_H = 1_H$ con H hiperplano.

Sea $L=\omega_{\phi}(H)=L(\underline{a})$. Puesto que $\underline{a}$ es generador de una linea $\underline{a}$ es unimodular, luego existe $\underline{b}\varepsilon L(a)$ con $\phi(\underline{a},\underline{b})=1$, es decir, $L(\underline{a},\underline{b})$ es un plano hiperbólico.

Sea $V=L(\underline{a},\underline{b})\perp P$, como para todo $\underline{x}\varepsilon V$ es : $\tau(\underline{X})-\underline{X}\varepsilon L(\underline{a})$, en particular para $\underline{b}$ es

$\tau(\underline{b})-\underline{b}\varepsilon L(\underline{a})\Longrightarrow$existe $\lambda\varepsilon A$ con $\tau(\underline{b})-\underline{b}=\lambda\underline{a} \Longrightarrow \tau(\underline{b})=\underline{b}+\lambda\underline{a}$.

Ahora tenemos que ver que para todo $\underline{x}\varepsilon V$ es

$$\tau(\underline{x})=\underline{x}+\lambda\phi(\underline{a},\underline{x})\ \underline{a}$$

Si $\underline{x}\varepsilon V$, $\underline{X}= r\ \underline{a}+ S\ \underline{b}+ \underline{p}$, $r,s\varepsilon A$, $p\varepsilon P$, entonces

$$\tau(\underline{x})=r\ \tau(\underline{a})+s\ \tau(\underline{b})+\tau(\underline{p}) = r\ \underline{a}+s\ \tau(\underline{b})+\underline{p} =$$

(puesto que $\underline{a}$ y $\underline{p}$ pertenecen a H)

$= r\ \underline{a}+s(\underline{b}+\lambda\underline{a})+\underline{p}=r\ \underline{a}+s\underline{b}+s\lambda\underline{a}+\underline{p}\ =$

$= r\ \underline{a}+s\ \underline{b}+\underline{p}+\lambda\phi(\underline{a},r\underline{a}+s\underline{b}+\underline{p})\underline{a}\ =$

(ya que $\phi(\underline{a},\underline{a})=0=\phi(\underline{a},\underline{p})$ y $\phi(\underline{a},\underline{b})=1$)

$= \underline{x}+\lambda\phi(\underline{a},\underline{x})\underline{a}$.

1)$\Longrightarrow$2) . Sea $\tau\varepsilon S\,P_n\,(A)$, para todo $\underline{x}\varepsilon V$, $\tau(\underline{x})=\underline{x}+\lambda\phi(\underline{a},\underline{x})\underline{a}$ con $\underline{a}$ unimodular.

Consideramos $L = L(\underline{a})$ que evidentemente es libre y sumando directo de V y se tiene que para todo $\underline{x}\varepsilon V$

$$\tau(\underline{x})-\underline{x}=\lambda\ \phi(\underline{a},\underline{x})\underline{a}\varepsilon L(\underline{a}).$$

<u>NOTA 3.6.</u>- Sea la transvección simpléctica $\tau=\tau_{\underline{a},\lambda}$ $L(\underline{a})$ se llama la linea de τ y $\omega_{\phi}(L(\underline{a}))=H$ se llama hiperplano de τ .

Si λ es unidad en A la transvección simpléctica $\tau_{\underline{a},\lambda}$ se llama unimodular.

C A P I T U L O IV

E L G R U P O S I M P L E C T I C O S O B R E A N I L L O S D E H E R M I T E D E F U N C I O N E S D I F E R E N C I A B L E S

El problema a resolver en este capítulo, es encontrar una clase de anillos de Hermite, para lo cual el grupo simpléctico de cada dimensión esté generado por las transvecciones simplécticas.

En la tesis de Fernández Bermejo se prueba que esto sucede para β-anillos, dado que existe una clase muy amplia (que contiene al menos a todos los anillos de polinomios con coeficientes en un cuerpo o anillo local regular de dimensión menor o igual que dos) de anillos de Hermite que son simultaneamente β-anillos, podemos afirmar que existen anillos de Hermite con esta propiedad. El problema está en demostrar que esta propiedad se verifica para todos los anillos de Hermite, resultado que no creemos cierto.

En este capítulo trabajaremos con anillos de Hermite cuyos elementos se pueden considerar como funciones.

La existencia de funciones continuas "patológicas" como las curvas de Peano, hace necesarios que esta consideración de los elementos del anillo como funciones deba ser, de funciones diferenciables (de comportamiento regular en la dimensión). Para este tipo de anillos probaremos que el grupo simpléctico, en cualquier dimensión, está generado por las transvecciones simplécticas.

ϕ-1 .- ANILLOS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES REALES QUE SON ANILLOS DE HERMITE

En esta sección extenderemos los resultados del capítulo segundo, para estuadiar la clase más amplia de anillos de funciones sobre variedades diferenciables que son anillos de Hermite.

Siempre que hablemos de variedad diferenciable, se entenderá una variedad diferenciable real y compacta, con lo cual, si X es variedad diferenciable y $F(X)$ su anillo de funciones con valores reales, Max $(F(X))$ con la topología de Zariski coincide con X y el haz F de funciones diferenciables sobre X coincide con el haz F imagen recíproca por la inclusión

$$\text{Max } (F(X)) \longrightarrow \text{Spec } (F(X))$$

del haz $F(X)$ sobre Spec $(F(X))$.

DEFINICION 1.1. Sea X una variedad diferenciable n-dimensional, sea U un abierto de X . Llamaremos paralelización de U a una familia de campos vectoriales $\vec{V}_1 \ldots\ldots \vec{V}_n$ linealmente independientes en los puntos de U .

Diremos que X es una variedad paralelizable si existe una paralelización de X como abierto.

NOTA 1.2.- Es un resultado conocido de geometría diferencial que las esferas S^n son paralelizables solamente para n=1,3,7, así como que X es paralelizable si y solo si su fibrado tangente es trivial.

Analizemos , ahora, el comportamiento de las filas unimodulares y la ampliabilidad tratados ya en el capítulo segundo. Para ello sea X una variedad diferenciable compacta y sea A el anillo de funciones diferenciables sobre X con valores en R .

<u>1.2.1.</u>- Una fila $\underline{f}\varepsilon A^r$ es unimodular si y solo si $\Sigma f_i^2(x)\neq 0$ para todo $x\varepsilon X$, es decir si y solo si la aplicación $f^*(x)=\dfrac{\underline{f}(x)}{\sqrt{\Sigma f_i^2(x)}}$ de X en R^r está definida como $||f^*(x)||=1$ para todo $x\varepsilon X$. f^* toma sus valores en la esfera S^{r-1} , luego las filas unimodulares se pueden interpretar como aplicaciones (vía reducción a uno de una norma) de X en S^{r-1}.

<u>1.2.2.</u>- Una fila $\underline{f}\varepsilon A^r$ es ampliable si y solo si existen $\underline{g}_1 \ldots\ldots\ldots \underline{g}_{r-1}\varepsilon A^r$ con

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots\ldots & f_r(x) \\ g_{11}(x) & \ldots\ldots & g_{1r}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{r-11}(x) & \ldots & g_{r-1r}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo $x\varepsilon X$, o equivalentemente, si y solo si exixten funciones $\underline{g}_i^*:X \longrightarrow R^r$ tales que para todo $x\varepsilon X$ $\{\underline{g}_i^*(x)\}_{1\leq i\leq r-1}$ forman un sistema de vectores en R^r ortonormales y generan siempre un hiperplano ortogonal a $\underline{f}(x)$.

Considerando ahora S^{r-1} sumergido en R^r e identificando para todo $\underline{\alpha}\ \varepsilon\ S^{r-1}$ el espacio tangente $T_{S^{r-1},\alpha}$ con el hiperplano $\omega(\underline{\alpha})$, la observación anterior nos dice las condiciones para que una fila $\underline{f}$ unimodular sea ampliable que son las siguientes:

PROPOSICION 1.2.3.- La fila $\underline{f} \in A^r$ unimodular es ampliable si y solo si existe un abierto paralelizable de S^{r-1} que contenga a Im f*.

NOTA 1.3.- Ahora bien, en S^n con n=1,3,7, S^n es paralelizable, luego toda fila unimodular de 2,4 u 8 elementos es ampliable siempre. Por tanto todo anillo de funciones diferenciables es de Hermite a niveles 2,4 y 8 .

El problema se presenta cuando $n \neq 1,3,7$. En este caso puesto que por proyección esterográfica $S^n-\{p\}$ es isomorfo a R^{n-1}, basta con que f* no sea sobre para que , si $p \notin$ Im f* , Im f* $\subset S^n-\{p\}$ isomorfo a R^{n-1} y por tanto Im f* está contenido en un abierto paralelizable y f* sea ampliable.

En conclusión hemos obtenido que:

PROPOSICION 1.3.1.- a) Todo anillo de funciones diferenciables de X en R es de Hermite a nivel 2,4 y 8 .

b) Un anillo de funciones diferenciables de X en R es de Hermite si y solo si no existe ninguna aplicación diferenciable suprayectiva $X \longrightarrow S$ con $n \neq 1,3,7$.

NOTA 1.4.- Un refinamiento evidente de b) es el siguiente:

Si X es una variedad diferenciable r-dimensional, el anillo de funciones diferenciables de X en R es de (r-1)-Hermite. En efecto : si X es de dimensión r una aplicación $f^*:X \longrightarrow S^n$ solo puede ser suprayectiva para n menor o igual que r , puesto que $\mathrm{Im}\, f^*$ se puede estratificar como uniónde variedades diferenciables de dimensión menor o igual que r .

Esta es la razón por la cual hemos debido considerar anillos de funciones diferenciables y no anillos de funciones continuas,. pues si f es continua la dimensión de $\mathrm{Im}\, f^*$ no queda limitada en general, como prueban los curvos de Peano, por la dimensión de X .

Observemos también que aquí se amplia un resultado conocido para geometría algebraica, ya que Bass [ ] probó que todo anillo de funciones polinómicas sobre una variedad algebraica no singular y de dimensión r es $(r-1)$-Hermite.

En cualquier caso existen suficientes anillos en la clase de los anillos de funciones diferenciables que son de Hermite ya que los anillos de funciones sobre curvas diferenciables son de Hermite en virtud de 1.3.1. El problema de encontrar una clase más amplia de anillos con esta propiedad, no ha sido resuelto, al menos en nuestro conocimiento, y continuaremos trabajando sobre él.

Otro tipo de anillos interesantes, son los anillos de funciones complejas sobre variedades complejas, en los que suponemos que las cosas marcharán de forma perfecta, dado que la complexificación del fibrado tangente a una n-esfera es siempre trivial. Este es, no obstante, un campo al que dedicaremos también un próximo trabajo, puesto que en este caso, la matriz simplectica presenta también características especiales que la hace más interesante .

ϕ-2 .-TRANSVECCIONES SIMPLECTICAS

El objetivo de esta sección es probar que el grupo simpléctico n-dimensional de un anillo de Hermite de funciones diferenciables se puede generar por las transvecciones simplécticas.

El resultado auxiliar clave de esta sección es el siguiente.

PROPOSICION 2.1.- Sea A un anillo de Hermite de funciones diferenciables, sea $(A^{2n},\phi)=ES_n(A)$ el espacio simpléctico de dimensión n sobre A, si $\underline{u}$ y $\underline{v}\varepsilon A^{2n}$ son dos filas unimodulares de A^{2n}, se puede encontrar una cadena de transvecciones simplécticas con orden contenido en $0(\underline{v}-\underline{u})$ que transforma $\underline{u}$ en $\underline{v}$.

Demostración.- Haremos la demostración en tres etapas.

1) Supongamos que $0(\underline{x}-\underline{u})=A$ y que

$$\underline{u}.\underline{x}=\phi(\underline{u},\underline{x})=u . M_{\phi}. v^t$$

es una unidad en A.

En este caso la transvección

$$\tau(\underline{x})=\underline{x}+\xi\phi(\underline{v}-\underline{u},\underline{x})(\underline{v}-\underline{u})$$

con $\xi=\phi(\underline{v},\underline{u})^{-1}$ verifica que

$$\tau(\underline{u})=\underline{u}+\phi(\underline{v},\underline{u})^{-1} . \phi(\underline{v}-\underline{u},\underline{u})(\underline{v}-\underline{u})=$$

$$=\underline{u}+\phi(\underline{v},\underline{u})^{-1}\phi(\underline{v},\underline{u})(\underline{v}-\underline{u})=\underline{u}+\underline{v}-\underline{u}=\underline{v} .$$

2) Supongamos que $0(\underline{v}-\underline{u})=A$ y que $\underline{u}.\underline{v}$ es una no unidad en A .

En este caso existe una fila unimodular $\underline{w}$ que verifica que

$$0(\underline{v}-\underline{w}) = 0(\underline{v}-\underline{w}) = A$$

y que $\underline{u}.\underline{w}$ y $\underline{v}.\underline{w}$ son unidades en A . Entonces existen transvecciones τ_1 y τ_2 que transforman $\underline{u}$ en $\underline{w}$ y $\underline{v}$ en $\underline{w}$ respectivamente y la composición $\tau_2^{-1} . \tau_1$ es la cadena de transvecciones simplécticas buscada.

En efecto: la existencia de una tal $\underline{w}$ se prueba del modo siguiente: se trata esencialmente de demostrar que el sistema $\begin{cases} \underline{u}.\underline{w}=\xi_1 \\ \underline{v}.\underline{w}=\xi_2 \end{cases}$ con ξ_1 y ξ_2 unidades en A tiene solución. Como trabajamos en un anillo de Hermite siempre que

$$R_u \begin{pmatrix} u_1 \cdots\cdots u_{2n} \\ \\ v_1 \cdots\cdots v_{2n} \end{pmatrix} = 2$$

el sistema tiene solución, cualesquiera que sean ξ_1 y ξ_2 .

El problema se presenta cuando

$$R_u \begin{pmatrix} u_1 \cdots\cdots u_{2n} \\ \\ v_1 \cdots\cdots v_{2n} \end{pmatrix} = 1$$

esta circunstancia se puede presentar por dos causas distintas:

a) porque $\underline{v}=\lambda\underline{v}$, en este caso y puesto que $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son unimodulares, λ es una unidad y $\underline{u}$ se puede transformar en $\underline{v}$

por una transvección simpléctivo.

b) Porque

$$R\begin{pmatrix} u_1 \cdots\cdots u_{2n} \\ v_1 \cdots\cdots v_{2n} \end{pmatrix} = 2 \qquad y \qquad R\begin{pmatrix} u_1 \cdots\cdots u_{2n} \\ v_1 \cdots\cdots v_{2n} \end{pmatrix} = 1$$

En este caso si consideramos para cada punto $x \varepsilon X$ la matriz numérica

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \cdots\cdots u_{2n}(x) \\ v_1(x) \cdots\cdots v_{2n}(x) \end{pmatrix}$$

en cada punto el rango de esta matriz al menos es uno, y además la matriz no puede tener ninguna fila nula. Si llamamos $M_{ij}(x)$ $1 \leq i < j \leq 2n$ a los menores de orden dos de la matriz y $\Delta = \Sigma M_{ij}^2(x)$, en los puntos de $D(\Delta) = x - v(\Delta)$ el rango de esta matriz será dos y en los puntos de $v(\Delta)$ será uno.

El hecho de que ninguna de las dos filas de la matriz sea nunca nula, nos permite construir funciones $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$ no nulas sobre x y tales que

$$R\begin{pmatrix} u_1(x) \cdots\cdots u_{2n}(x) & \xi_1(x) \\ v_1(x) \cdots\cdots v_{2n}(x) & \xi_2(x) \end{pmatrix} = 1$$

para todo $x \varepsilon v(\Delta)$ (basta elegir $\xi_1(x) = 2\Sigma v_i^2(x)$ $\xi_2(x) = 2\Sigma v_i(x) v_i(x)$ sobre $v(\Delta)$ y prolongar por partición de la unidad) con ello la columna $(\xi_1\ \xi_2)$ es combinación lineal de las restantes columnas , con lo cual no se altera el rango, y en los puntos de $v(\Delta)$ en los cuales $\Delta=0$ y por tanto $\underset{\lambda\neq 0}{\underline{u}=\lambda\underline{v}}$ es

$\Sigma u_i v_i = \Sigma \lambda \underline{v}_i^2 \neq 0$ al ser $\Sigma v_i^2 \neq 0$

Entonces se pueden elegir unidades ξ_1 y ξ_2 de forma que el sistema se pueda resolver localmente. Obviamente las soluciones locales son siempre compatibles y el sistema admite solución global demás al añadir el coeficiente dos hemos garantizado que sobre los únicos puntos en los que podían presentarse fallos, no es $\underline{u}(X)=\underline{w}(X)$ o $\underline{v}(X)=\underline{w}(X)$ con lo que $\underline{w}-\underline{u}$ y $\underline{w}-\underline{v}$ son unidades.

3) Supongamos que $0(\underline{v}-\underline{u})=J\neq A$. Podemos construir en este caso, una base canónica, en el sentido de ser $\underline{e}_i \perp \underline{e}_j$ excepto si $i=2r-1$, $j=2r$, $\{\underline{e}_1 \ldots\ldots \underline{e}_n\}$ de A^{2n} con $\underline{u}=\underline{e}_1$. Puesto que $\underline{u}$ es unimodular , entonces $\underline{v}-\underline{u}=\underline{v}-\underline{e}_1 = \sum_1^{2n} \lambda_i \underline{e}_i$ con $\lambda_i \in J$, de donde $\underline{v}=\underline{e}_1+\sum_1^{2n} \lambda_i \underline{e}_i$.

Si llamamos $\underline{a}_0=\underline{e}$, $\underline{a}_1=\underline{e}_1+\lambda_1\underline{e}_1, \ldots\ldots\ldots \underline{a}_i=\underline{e}_1+\sum_1^i \lambda_i \underline{e}_i$ se tiene $\underline{a}_0=\underline{e}_1=\underline{u}$, $\underline{a}_{2n}=e_1+\sum_1^{2n} \lambda_i \underline{e}_i = \underline{v}$.

Veamos que es posible pasar de $\underline{a}_{i-1}$ a $\underline{a}_i$ mediante un producto de transvecciones de orden contenido en J . En efecto: $\underline{e}_2+\underline{e}_i$ es unimodular para todo $i>0$, puesto que sería la función de componentes $(0,1,0\ldots\overset{i}{1}\ldots.0)$ $i\neq 2$
0 $(0,2,0\ldots\ldots 0)$ $i=2$ que son unimodulares por ser el 2 una función constante (Estas componentes son respecto a la

base e_i , y recordemos que el ser o no, una fila unimodu lar, no depende de la base elegida).

Por otra parte $(\underline{e}_2+\underline{e}_i)\underline{a}_{i-1}=(\underline{e}_2+\underline{e}_i)\left[\underline{e}_1+\sum_{j=1}^{i}\lambda_j\underline{e}_j\right]=-1-\lambda_1$.

Ahora bien, podemos suponer sin pérdida de generali dad que $|\lambda_1(x)|<1$, pues en cualquier caso, sin dejar de ser $\underline{u}$ y $\underline{v}$ unimodulares, siempre se pueden dividir por $2||\underline{u}||$ o $2||\underline{v}||$, luego siempre se puede suponer $(\underline{e}_2+\underline{e}_i)\underline{a}_{i-1}$ unidad.

Podemos construir pues la transvección

$$\tau_j^1(\underline{x})=\underline{x}+\lambda_j\phi(\underline{e}_2+\underline{e}_j,\underline{a}_{j-1})^{-1}\cdot\phi(\underline{e}_2+\underline{e}_j,\underline{x})(\underline{e}_2+\underline{e}_j)$$

y del mismo modo se comprueba que es viable la transvección

$$\tau_j^2(\underline{x})=\underline{x}-\lambda_j\phi\ (\underline{e}_2,\underline{a}_j+\lambda_j\underline{e}_2)^{-1}\ \phi(\underline{e}_2,\underline{x})\ \underline{e}_2$$

y se verifica que

$$0(\tau_j^1)\subset J\quad,\ 0(\tau_j^2)\subset J$$

y que

$$\tau_j^2\ \tau_j^1\ (\underline{a}_{j-1})=\underline{a}_j$$

por tanto el producto de estos productos de transvecciones cumple las donciciones reaueridas.

<u>PROPOSICION 2.2.</u>- Sean $(\underline{u},\underline{v}_1)(\underline{u},\underline{v}_2)$ pares hiperbólicos en (A^{2n},ϕ) con las condiciones de la proposición anterior, entondes existe una cadena de transvecciones con orden contenido

en $0(\underline{v}_2-\underline{v}_1)$ que dejan $\underline{u}$ invariante y transforman $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_1$.

Demostración.- Esta proposición es muy parecida a la anterior. También dividiremos su demostración en tres pasos.

1) Sea $0(\underline{v}_2-\underline{v}_1)=A$ y $\underline{v}_1.\underline{v}_2$ unidad en A . Entonces la transvección buscada es la (1) de la proposición 2-1, puesto que al ser $(\underline{u},\underline{v}_1)$ y $(\underline{u},\underline{v}_2)$ pares hiperbólicos en $\underline{u}_1\ \underline{v}_1$, $\underline{u}_2\ \underline{v}_2$, luego

$$\tau(\underline{u})=\underline{u}+((\underline{v}_2-\underline{v}_1,v)(\underline{v}_2.\underline{v}_1)^{-1}(\underline{v}_2-\underline{v}_1)=\underline{u}\ .$$

2) Sea $0(\underline{v}_2-\underline{v}_1)=A$. y $\underline{v}_2.\ \underline{v}_1$ no unidad en A .

Podemos suponer siempre que $||\underline{v}_2.\underline{v}_1||<1$, puesto que dejando $\underline{u}$ invariante, podemos dividir $\underline{v}$, por una unidad conveniente $(2||\underline{v}_2.\underline{v}_1||$ serviría para el proceso).

De esta forma $(1-\underline{v}_2.\underline{v}_1)$ es una unidad.

Por otra parte al ser $(\underline{u}_1\underline{v}_1)$ y $(\underline{u}_1\underline{v}_2)$ pares hiperbólicos, lo es $(\underline{u},\underline{v}_2-v_1)$ luego por ser tanto $\underline{u}$ como $\underline{v}_2-\underline{v}_1$ unimodulares forman parte de una base canónica. Por tanto $\underline{v}_2-\underline{v}_1-\underline{u}$ es una fila unimodular, ya que respecto a esta base tiene por coordenadas (-1,1,0.....0); entonces considerando las transvecciones

$$\tau\ (\underline{x}\ =\ \underline{x}+(\underline{v}\ \underline{x})\underline{v}$$

$$\tau'(\underline{x})\ =\ \underline{x}-\ (1-\underline{v}_2\underline{v}_1)\left[(\underline{v}_2-\underline{v}_1-\underline{u})\ \underline{x}\right](\underline{v}_2-\underline{v}_1-\underline{u})$$

el producto $\tau'.\ \tau$ es la cadena buscada.

3) Sea $0(\underline{v}_2-\underline{v}_1)=J\neq A$. Construimos una base canónica con

$\underline{e}_1=-\underline{v}_1$, $\underline{e}_2=\underline{u}$, entonces $\underline{v}_1-\underline{v}_2 = \sum_1^{2n} \lambda_i \underline{e}_i$, $\lambda_2=0$, con $\lambda_i \varepsilon J$, luego $-\underline{v}_2=\underline{e}_1+\sum_1^{2n} \lambda_i e_i$, $\lambda_2=0$. Haciendo como en (3) de 2-1 y construyendo los $\underline{a}_i$ como allí, las transvecciones τ_j^1 y τ_j^2 verifican las condiciones buscadas.

TEOREMA 2.3.- El grupo simpléctico $SP_n(A)$ está generado por las transvecciones simplécticas, si A es un anillo de Hermite de funciones diferenciables.

Demostración.- Trivial de 2.1 y 2.2 por un proceso de inducción.

NOTA 2.4.- Analicemos ahora el comportamiento del grupo simpléctico especial, también generado por las transvecciones de orden contenido en un ideal dado.

Recordemos la definición del grupo simpléctico especial.

NOTA 2.4.1.- Llamaremos subgrupo general de congruencias módulo J de $S\,P_n(A)$, y lo denotaremos por $G\,S\,P_n(A,J)$ al subgrupo h_j^{-1} (centro $S\,P_n(A/J)$.

2.4.2.- Llamaremos subgrupo especial de congruencias módulo J , y lo denotaremos por $E\,S\,P_n(A,J)$ al subgrupo Ker h_j

2.4.3.- Trivialmente se verifica:

(a) $G\,S\,P_n(A,A)=E\,S\,P_n(A,A)=S\,P_n(A)$

(b) $G\,S\,P_n(A,0)=$centro $S\,P_n(A)$

(c) $E\,S\,P_n(A,0)= 1_{S\,P_n(A)}$

PROPOSICION 2.5.-Se verifica que:

centro $S\,P_n(A)=\{\xi.1_{SP_n(A)}\mid \xi^2=1.,\xi\varepsilon A\}$

Demostración.-Evidentemente si $\sigma\varepsilon S\,P_n(A)$ es un elemento cuya matriz, respecto de una base $B=\{\underline{v}_1.\ldots\ldots\underline{v}_n\}$ de V, es de la forma

$$M_\sigma=\begin{pmatrix}\xi & & \\ & \ddots & \\ & & \xi\end{pmatrix}$$

con $\xi^2=1$, para todo $\gamma\varepsilon S\,P_n(A)$, $\gamma\sigma=\sigma\gamma$ y σ pertenece al centro $S\,P_n(A)$.

Veamos pues que todo elemento del centro de $S\,P_n(A)$ es de esa forma.

Sea $\gamma\varepsilon$ centro $S\,P_n(A)$ y sea τ una transvección de V definida por

$$\tau(\underline{x})=\underline{x}+\phi(\underline{a},\underline{x})\,\underline{a}$$

con $0(a)=A$.

En particular:

$\gamma\tau=\tau\gamma \iff \gamma\tau\gamma^{-1}=\tau \iff \forall\,\underline{x}\varepsilon V$, $\tau(\underline{x})=$

$=\gamma\tau\gamma^{-1}(\underline{x})=\gamma\left[\gamma^{-1}(\underline{x})+\phi(\underline{a},\gamma^{-1}(\underline{x}))\underline{a}\right]=$

$=\underline{x}+\phi(\underline{a},\gamma^{-1}(\underline{x}))\gamma(\underline{a}) \iff \forall\,\underline{x}\varepsilon V$,

$\phi(\underline{a},\underline{x})\underline{a}=\phi(\gamma(\underline{a}),\underline{x})\gamma(\underline{a})$. (1)

Analicemos la igualdad (1).Identificando cada elemento de V

con sus coordenadas respecto de la base B, $0(\underline{a})=A$ implica existen $\lambda_1.......\lambda_n \in A$ con $\lambda_1 a_1+.....+\lambda_n a_n=1$ y podemos considerar el sistema

$$M_\gamma M_\phi (\underline{x})^t=(\lambda_1.....\lambda_n)^t$$

que posee solución ya que det (M_γ) y det(M_ϕ) son unidades. Por tanto podemos encontrar un vector $\underline{x}$ tal que:

$$1=(\underline{a})M_\gamma M_\phi(\underline{x})^t=\phi(\gamma(\underline{a}),\underline{x})$$

Entonces $\phi(\underline{a},\underline{x})\cdot\underline{a}=\gamma(\underline{a})$ y llamando $\xi_0=\phi(\underline{a},\underline{x})$, se tiene $\gamma(\underline{a})=\xi_0\,\underline{a}$, sustituyendo este resultado en (1) resulta que:

$$\forall\, \underline{x}\in V \ ,\ \phi(\underline{a},\underline{x})\underline{a}=\phi(\gamma(\underline{a}),\underline{x})\xi_0\,\underline{a}$$

luego

$$\left[\phi(\underline{a},\underline{x})-\xi_0\phi(\gamma(\underline{a}),\underline{x})\right]\underline{a}=0$$

teniendo en cuenta que $0(\underline{a})=A$,

$$\forall\, \underline{x}\in V \ ,\ \phi(\underline{a}.\underline{x})-\xi_0\phi(\gamma(\underline{a}),\underline{x})=0$$

matricialmente

$$(\underline{a})M_\phi(\underline{x})^t-(\underline{a})M_\gamma M_\phi\ \xi_0(\underline{x})^t=0$$

$$(\underline{a})\ (M_\phi-\xi_0 M_\gamma M_\phi)\ =0$$

y por tanto, como $0(\underline{a})=A$

$$\det\ (M_\phi-\xi_0 M_\gamma\ M_\phi)=0$$

de donde

$$\det(M_\phi)\cdot\det(I-\xi_0 M_\gamma)=0$$

y al ser $\det(M_\phi)$ unidad es

$$\det(I-\xi_0 M_\gamma)=0$$

desarrollando

$$1-\left[\xi_0 \Sigma\ M_\gamma\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}-\xi_0^2 \sum_{i<j} M_\gamma\begin{bmatrix} i & j \\ i & j \end{bmatrix}+\ldots\ldots+\xi_0^n \det(M_\gamma)\right]=0$$

llamando

$$\mu=\left[\Sigma\ M_\gamma\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}+\ldots\ldots\ldots+\xi_0^{n-1}\det(M_\gamma)\right]$$

es

$$1-\xi_0\mu=0$$

luego ξ_0 es una unidad en A, que en principio depende de $\underline{a}$.

Sea $B=\{\underline{v}_i,\ldots,\underline{v}_n\}$ una base de V. Entonces $0(\underline{v}_i)=A$ para todo i.

Consideremos las transvecciones

$$\tau_i(\underline{x})=\underline{x}+\phi(\underline{v}_i,\underline{x})\underline{v}_i \quad \ldots\quad 1\leq i\leq n\ .$$

Por un razonamiento análogo al antetior existen unas unidades $\{\xi_i\}_{1\leq i\leq n}$ tales que

$$\gamma(\underline{v}_i)=\xi_i\underline{v}_i \quad \text{para todo } i\ ,\ 1\leq i\leq n$$

Además para todo i,j . $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, $i\neq j$ se verifica que $0(\underline{v}_i+\underline{v}_j)=A$. Luego considerando las transvecciones τ_{ij}.

$$\tau_{ij}(\underline{x})=\underline{x}+\phi(\underline{v}_i+\underline{v}_j,\underline{x})(\underline{v}_i+\underline{v}_j)$$

por el mismo razonamiento, existen unidades $\{\xi_{ij}\}_{i\neq j}$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, siendo:

$$\gamma(\underline{v}_i+v_j)=\xi_{ij}(\underline{v}_i+\underline{v}_j)$$

Como γ es homomorfismo

$$\gamma(\underline{v}_i+\underline{v}_j)=\gamma(\underline{v}_i)+\gamma(\underline{v}_j)=\xi_i(\underline{v}_i)+\xi_j(\underline{v}_j)=$$

$$=\xi_{ij}(\underline{v}_i+\underline{v}_j)=\xi_{ij}(\underline{v}_i)+\xi_{ij}(\underline{v}_j) \quad .$$

luego

$$(\xi_i-\xi_{ij})\underline{v}_i+(\xi_j-\xi_{ij})\underline{v}_j=0 \Longrightarrow \xi_i=\xi_j=\xi_{ij} \quad .$$

Por tanto para todo i , $1\leq i\leq n$, $\xi_i=\xi \Longrightarrow \gamma(\underline{v}_i)=\xi\underline{v}_i$

y al ser γ homomorfismo

$$\gamma(\underline{x})=\xi\ \underline{x} \quad \text{para todo } \underline{x}\in V \quad \text{con el mismo } \xi.$$

Además por ser γ automorfismo se tiene

$$\phi(\underline{x},\underline{y})=\phi(\gamma(\underline{x}),\gamma(\underline{y}))=\phi(\xi\underline{x},\xi\underline{y})=\xi^2\phi(\underline{x},\underline{y}).$$

y como existen $\underline{x}$, $\underline{y}\in V$ con $\phi(\underline{x},\underline{y})=1$ se deduce que $\xi^2=1$.

Luego la matriz de γ respecto de la base B es de la forma

$$\begin{pmatrix} \xi & & \\ & \ddots & \\ & & \xi \end{pmatrix}$$

con ξ unidad en A y $\xi^2 = 1$.

<u>CONSECUENCIA 2.6</u>.- Si llamamos $I.D(A)$ al grupo multiplicativo de los elementos idempotentes de A , se verifica que:

$$G\ S\ P_n(A,J) \Big/ E\ S\ P_n(A,J) = I.d(A/J)$$

<u>Demostración</u>.- Es inmediato de aplicar el primer teorema de isomorfía al homomorfismo de grupos:

$$h_J : h^{-1}\left[\text{centro } \ S\ P_n(A/J)\right] \longrightarrow \text{centro } \ S\ P_n(A/J)$$

<u>CONSECUENCIA 2.7</u>.- X es una variedad diferenciable conexa si y solo si centro $S\ P_n(A) = \{1,-1\}$.

<u>Demostración</u>.- En efecto: como X tiene componentes conexas si y solo si existen 2^n raices de 1 en $F(X)$ (si $X = \bigcup_1^n X_i$ son los componentes conexos de X , $f \in F(X)$ verifica que $f^2 = 1 \Longleftrightarrow f_{|X_i} = \pm 1$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, luego las raices de 1 son las funciones definidas por $f_{|X_i} = \pm 1$ que son en total 2^n) . Entonces X es conexo si y solo si las únicas raices de 1 en $F(X)$ son 1 y -1 .

TEOREMA 2.8.- $ESP_n(A,J)$ está generado por las transvecciones simplécticas de orden contenido en J .

Demostración.- Veamos que $\sigma \varepsilon ESP_n(A,J)$ puede escribirse como un producto de transvecciones de orden contenido en J .

Sea $\{\underline{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ una base canónica de V , sea $\sigma(\underline{e}_i)=\underline{e}'_i$. Entonces $\sigma(\underline{e}'_i - \underline{e}_i)$ está contenido en J . De acuerdo con la proposición 2.1, $\underline{e}_1$ se transforma en $\underline{e}'_1$ por transvecciones de orden contenido en J . Estas transvecciones transforman $\{\underline{e}_i\}$ para todo i mayor que uno en $\{\underline{e}''_i\}$ y tenemos $\sigma(\underline{e}''_i-\underline{e}'_i)\subset J$.

La proposición 2.2. dice que $\underline{e}''_2$ puede transformarse en $\underline{e}'_2$ por transvecciones de orden contenido en J , tales que $\underline{e}'_1$ permanece invariante. Por tanto $\{\underline{e}_1,\underline{e}_2\}$ puede transformarse en $\{\underline{e}'_1,\underline{e}'_2\}$ por transvecciones de orden contenido en J , de esta forma el ortogonal de $L(\underline{e}_1.\underline{e}_2)$ irá al ortogonal de $L(\underline{e}'_1.\underline{e}'_2)$, tal que para la imagen $\underline{e}'_i{}''$ de $\underline{e}_i$ para todo i mayor que dos $\sigma(\underline{e}'_i{}''-e'_i)\subset J$. Así podemos concluir la demostración por indución sobre la dimensión de V .

B I B L I O G R A F I A

[1] ABELLANAS,P. "Geometría básica".Romo.1969.

[1] ALLEN,H.P. "Hermitian forms over crossed product division algebras". Trans. Amer. Math. Soc.

[1] ARTIN, E. "Geometric algebra". New York (1955).

[1] BASS, H. "Algebraic K-theory".Benjamín. New York. (1968).

[2] BASS, H. "K-theory and stable algebra". I.H.E.S. nª 22. (1964).

[3] BASS, H. "Proyective modules over free groups are free".J. of algebra. (1964).

[4] BASS,H. "Liberation des módules proyectifs sur certains anneaux de polynomes". Sém. Bouebaki.(1973/74).

[5] BASS,H. CONNELL,E.H. "locally polynomial algebras and symetric alhebras". Acad. Press. (1976).

[6] BASS, H. "Quadratic modules over polynomial rings".Acad. Press. (1977).

[1] BOURBAKI,N. "Algebre. Cap.1. Theorie des ensembles". Hermann Paris.(1962).

[2] BOURBAKI,N. "Algebre.Cap.2.Algebre lineaire". Hermann. Paris. (1962).

[3] BOURBAKI,N. "Algebre, Cap.3 ,Algebre Multineaire". Hermann. Paris (1958).

[4] BOURBAKI,N. "Algebre. Cap.7. Modules sur les anneaux principaux".Hermann. Paris. (1952).

[5] BOURBAKI,N. "Algebre. Cap.9.Formes Sequilineaires et formes quadratiques".Hermann.Paris. (1959).

[6] BOURBAKI,N. "Algebre Commutative. Cap.2. Localisation".Hermann. Paris. (1961).

[1] BRICKELL-CLARK. "Differentiable Manifold". Van Nostrand. (1970).

[1] CHANG,C . "The structure of the symplectic group over semilocal domains".J. of Alg. 37 (1975).

[2] CHANG,C. "Orthogonal groups over semilocal domains".J. of Alg. 37 (1975).

[1] COHN,P.M. "On the structure of the GL_2 of a ring". I.H.E.S. nº 30.(1966).

[1] DICKSON,L.E. "Linear groups". Leipzig.B.G. Teubner (1901).

[2] DICKSON,L.E. "Linear groups in infinite field". Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1902).

[1] DIEUDONE,J. "La Geometrie des groupes classiques". Springer-Verlag. New York.(1971).

[1] EISENBUD,D. "Solution du probleme de Serre par Quillen-Suslin".Springer.Lect.Not. in Math. 586.(1977).

[1] ENDO,E. "Proyective modules over polynomial rings". J. Math. Soc. Japan.15.(1963).

[1] FERNANDEZ BERMEJO,E. "Espacios simplécticos sobre un anillo conmutativo y con elemento unidad". Mong. y Memo. XII. Inst. Jorge Juan. C.S.I.C.

[1] GANTMACHER,F.R. "Theorie des matrices".Tomo I Dunod. Paris. (1966).

[1] GERSTEIN,L. "Simmetric bilinear forms over polinomial rings".Mimeographed notes Univ. of Notre Dame. (1973).

[1] GILLMAN,L. "Rings of continuous functions".Van Nostram. (1960).

[1] GROTHENDIEK,A. "Elements de geometrie algebrique". Volumen 1. Die Grunddlegren der Math. 166. Springer Verlag. (1971).

[2] GROTHENDIEK,A. "Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann". Amer. J. Math. 79.(1957).

[1] KLINGERBERG,W. "Simplectic groups over local rings". Amer. J. nª 2 (1963).

[2] KLINGENBERG,W. "Lineare gruppen uber lokalen vingen ".Amer. J. 83. (1961).

[3] KLINGENBERG,W. "Ortogonal gruppen uber lokalen ringen". Amer. J. 83, (1961).

[1] LAM,T.Y. "Serre's Conjecture".Springer Verlag. Lec. Not. in Math. 635 (1978).

[1] LISSNER,D."Matrices over polynomial rings".Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961).

[1] MATSUMURA,H. "Conmutative algebra",Benjamin. New York. (1970).

[1] MITCHELL, B. "Theory of categories". Acad. Pres. New York. (1965).

[1] NORTHCOTT,D.G."Finite free resolutions". Camb. Univ. Press. (1978).

[1] O'MEARA,O.T. "Introduction to the theory of cuadratic forms".Springer-Verlag.Berlin. (1973).

[1] QUILLEN, D. "Projective modules over polynomial rings". Invent. Math. 36 (1976).

[1] RIEHM,C. "The structure of the symplectic group over a valuation ring". Amer. J. Math. 88 (1966).

[1] SERRE,J.P. "Modules proyectives et espaces fibres a fibre vectorielles".Sem. Dubreil. nª 23. (1957-58).

[2] SERRE,J.P. "Sur les modules projectifs".Sem. Dubreil. nª 2 (1960-61).

[1] SUSLIN,A.A. "On projective modules over polynomial rings".Mat. Sbornik. 135.(1974).

[2] SUSLIN,A.A. "Projective modules over polynomial ring are free".Soviet Math. Dokl.17 (1976).

[3] SUSLIN,A.A. "On the structure of the special linear group over polynomial rings". Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser.Mat. 41 (1977).

[1] SWAN,R.G. "Algebraic K-theory".Lectures notes in Math. Springer-Verlag, New York, (1968).

[2] SWAN,R.G. "Indiced representarive and proyective modules".Ann. of Math. 71 (1960).

[3] SWAN,R.G. "Serre's Problem".Conference on Conmutative Algebra. (1975).

[4] SWAN,R. "Topological examples of projective modules". Trans. Amer. Math. Soc. 230. (1977).

[1] V.d.WAERDEN,B.L. "Gruppen von linearen transformationen." .Springer-Verlag. Berlin. (1935).

[1] VASERSTEIN,L.N."On the stabilization of the general linear group over a ring".Mat. Sbornik. 79. (1969).

[2] VASERSTEIN,L.N."The stable range of rings and the dimensionality of topological spaces". Funct. Anal. and it Aplic. 5.(1971).