
Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Sección departamental de Astronomía y Geodesia



**Análisis de misión preliminar de un satélite
CubeSat en órbita heliosíncrona para
observación de la Tierra**

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería Matemática

Miguel Angel Azanza Cuerva

Dirigido por: Gonzalo Barderas y Pilar Romero

Madrid, 2022

Análisis de misión preliminar de un satélite *CubeSat* en órbita heliosíncrona para observación de la Tierra

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería Matemática

Sección Departamental de Astronomía y Geodesia

Facultad de Ciencias Matemáticas



Miguel Angel Azanza Cuerva

Dirigido por: Gonzalo Barderas y Pilar Romero

Sección departamental de Astronomía y Geodesia

Facultad de Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

*A mi familia,
por el apoyo constante.*

*A mi profesora de bachillerato Inés Delgado Juárez,
por abrirme los ojos al camino de las matemáticas.*

Abstract

Throughout this paper, it will be described a preliminary mission analysis of a *CubeSat* nanosatellite to place it in a Sun-synchronous orbit, starting from its orbit collocation using the *Ariane 5* launcher from a *GTO* (*Geostationary Transfer Orbit*) stationary orbit or the facilities of the *ISS* (*International Space Station*). At the beginning, the theory of impulsive maneuvers will be stated to be used later on to place the satellite in the desired final orbit. Hereunder, the characteristics of the Sun-synchronous orbit are described, this orbit keeps, on each satellite trace, the same orientation with regard to the Sun. Therefore, the perturbed motion of a satellite around the Earth's gravitational field will be analyzed, and *Lagrange's* equations will be solved for the terrestrial equatorial protuberance for the purpose of obtaining the Sun-synchronism condition. Lastly, the results achieved through numeric simulations using a developed software tool are presented, these simulations are analyzed and classified regarding different scenarios depending on the impulse location, order of the maneuvers and used launching method.

Resumen

En este trabajo se describe un estudio sobre un análisis de misión preliminar de un nanosatélite *CubeSat* para colocarlo en una órbita heliosíncrona, se parte desde su puesta en órbita, bien utilizando el lanzador *Ariane 5* desde una órbita de aparcamiento *GTO* (*Geostationary Transfer Orbit*) o las facilidades de la *ISS* (*International Space Station*). Se introduce, inicialmente, la teoría de maniobras impulsivas que posteriormente se utilizará para colocar el satélite en la órbita final deseada. A continuación, se describen las características de la órbita heliosíncrona, que mantiene en cada traza del satélite la misma orientación con respecto al Sol. Se analiza entonces el movimiento perturbado de un satélite en el campo gravitatorio alrededor de la Tierra y se resuelven las ecuaciones de *Lagrange* para el abultamiento ecuatorial terrestre con el fin de obtener la condición de heliosincronismo. Por último, se presentan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas, haciendo uso de una herramienta de software desarrollada, dichas simulaciones se analizan y clasifican atendiendo a diferentes casuísticas dependiendo del lugar de impulso, orden de las maniobras y método de lanzamiento utilizado.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Satélites <i>CubeSat</i>	1
1.2. Características orbitales para puesta en órbita desde el lanzador <i>Ariane 5</i> o desde la <i>ISS</i>	2
1.3. Objetivos	5
1.4. Metodología	5
2. Ecuaciones de maniobras impulsivas	7
2.1. Maniobras para cambio de plano orbital	9
2.2. Maniobras de paso de órbita elíptica a circular	11
3. Teoría analítica del movimiento perturbado	14
3.1. Potencial gravitatorio terrestre	14
3.2. Ecuaciones de <i>Lagrange</i>	16
3.3. Integración de las ecuaciones de <i>Lagrange</i>	18
4. Características de la órbita heliosíncrona	24
4.1. Introducción al concepto de órbita heliosíncrona	24
4.2. Caracterización de la órbita heliosíncrona	26
5. Simulaciones numéricas	31
5.1. Inyección en órbita desde la <i>GTO</i>	31
5.2. Inyección en órbita utilizando la <i>ISS</i> y comparación	33
5.3. <i>Software</i> empleado	35
6. Discusión y Conclusiones	37
Apéndice A. <i>Script</i> para el cálculo de la inclinación de una órbita heliosíncrona	39
Apéndice B. <i>Script</i> para el cálculo de maniobras impulsivas	40
B.1. Código	40
B.2. Resultados	44
Índice de Figuras	50

Índice de Tablas	51
Referencias	52

Capítulo 1

Introducción

Los satélites en órbita heliosíncrona son de gran interés debido a su característica de que cada vez que pasan sobre su punto subsatélite, lo hacen a la misma hora de tiempo solar local. Entre otros satélites en órbita heliosíncrona, se pueden citar, por ejemplo, los utilizados en el control del nivel medio del mar como la misión *ERS2* en abril de 1995, (Francis et al., 1995), o la misión *CryoSat-2* en los últimos años (Parrinello et al., 2018). Más recientemente, la órbita heliosíncrona también se está utilizando en el proyecto *Copernicus* de la ESA para la monitorización global del medio ambiente, donde al menos uno de los satélites *Sentinel* tiene órbita heliosíncrona (Mecklenburg, 2017).

El objetivo general de este trabajo es el estudio dinámico de las características de un nanosatélite en órbita heliosíncrona y de su puesta en órbita.

1.1. Satélites *CubeSat*

El concepto de *CubeSat* surge en las universidades de CalPoly y Stanford en el año 1999 como una iniciativa por parte de los profesores Puig-Suari y Twiggs para acercar la tecnología espacial a sus estudiantes. Diseñaron un prototipo de satélite que fuera pequeño y por ende más barato y sencillo de producir y transportar (Helvajian y Janson, 2009).



Figura 1.1: Satélite *CubeSat* en órbita. Obtenido de Virginia CubeSat Constellation (2021)

El primer lanzamiento de un satélite con estas características se produjo en el año 2003 haciendo uso de un cohete ruso. No fue hasta una década después cuando este tipo de tecnología se consolidó en el sector comercial (Villela et al., 2019).

Al igual que su uso se iba extendiendo, también crecían sus aplicaciones. Estos dispositivos tuvieron un papel decisivo en la comunicación Tierra-Marte durante el amartizaje de la sonda *InSight* a través de la misión *MarCo* de NASA (JPL, 2018). Entre otras misiones podemos destacar *SIMBA* de la ESA cuyo objetivo es medir la irradiancia solar total o *GOMX-4B* también de la ESA para la validación de la tecnología *ISL* (*Inter Satellite Link*) (ESA, 2021).

En general, aprovechando su bajo coste y carga logística, los *CubeSats* son utilizados con fines académicos y de investigación científica, observación de la Tierra y el espacio, climatología o geología, así como para la demostración tecnológica de nueva instrumentación.

Por último, detallar algunas especificaciones técnicas sobre estos satélites. Una de sus principales características son sus medidas estandarizadas, se trata de un cubo con aristas de 10 *cm*, eso determina una unidad, dichas unidades pueden combinarse hasta formar bloques de hasta 6U, cada unidad pesa alrededor de 1,33 *kg* (Kintziger, 2013). En su interior están compuestos por un ordenador de vuelo, para la estabilidad y orientación, un transmisor, que les permite comunicarse con el usuario y están recubiertos de paneles solares que les suministran energía. Adicionalmente se equipan con la denominada carga útil, que varía dependiendo de los requerimientos de la misión.

En cuanto al lanzamiento de estos instrumentos, habitualmente se plantean dos vías: puesta en órbita desde la *ISS* (*International Space Station*) o haciendo uso de un lanzador al uso. La primera opción es particular de estos satélites ya que su reducido tamaño hace posible que sean enviados junto con otros suministros a la *ISS* y lanzados desde allí. La otra opción se trata de utilizar un lanzador durante la primera fase de lanzamiento para otras misiones, estos siempre cuentan con un margen que contempla la posibilidad de acoplar un *CubeSat*.

1.2. Características orbitales para puesta en órbita desde el lanzador *Ariane 5* o desde la *ISS*

Mencionado anteriormente, el *Ariane 5* es un lanzador que comenzó a desarrollarse en 1987 por la empresa *Arianespace* respaldada por la *ESA*. Este lanzador está impulsado por dos cohetes los cuales permiten colocar cargas muy pesadas en la órbita de aparcamiento *GTO* (*Geostationary Transfer Orbit*) (Lagier, 2020). Los lanzamientos se realizan desde el *CSG Guiana Space Center*, su localización cercana al ecuador, con una latitud de 5 grados Norte, permite aprovechar en los lanzamientos la energía extra que aporta la rotación de la Tierra (Arianespace, 2021).

Lo interesante de esta tecnología para nuestra misión no es la carga pesada que es capaz poner en órbita, sino el denominado *Ariane 5 ASAP*, (*Ariane Structure for Auxiliary Payloads*). Este sistema aprovecha el lanzamiento de grandes satélites comerciales para colocar el nanosatélite a modo de “piggyback payload”, es decir, como carga auxiliar aprovechando el lanzamiento del un satélite de mayor tamaño, así es posible abaratar costes (Leschly et al., 1999). *ASAP* esta compuesto por una estructura con forma de anillo de 200 *cm* de radio exterior en el cual se colocan todas las cargas auxiliares separadas simétricamente en anillos de 30 *cm* de diámetro (Mugnier, 2000).



Figura 1.2: Lanzador *Ariane 5*. Obtenido de ESA (2005)

Tras 25-30 minutos del lanzamiento, el satélite se colocará en la órbita *GTO* (Arianespace, 2021). Esta órbita está perfectamente definida y sus elementos orbitales son conocidos, de ella partiremos mediante maniobras para llegar a la órbita heliosíncrona. A continuación, hemos colocado en la Tabla 1.1 los valores nominales de la órbita *GTO*, esta órbita es muy excéntrica y casi ecuatorial, está diseñada de tal forma que su perigeo está en una órbita *LEO* (*Low Earth Orbit*) y su apogeo llega a la órbita geostacionaria *GEO* (*Geostationary Earth Orbit*), esta característica es muy valiosa ya que maniobrando podemos llegar a dos de las órbitas más usadas por los satélites.

Parámetros orbitales	Valor
Semieje (a)	24470 km
Excentricidad (e)	0.72950
Inclinación (i)	7°
Argumento del perigeo (ω)	178°
Ascensión recta del nodo (Ω)	180°

Tabla 1.1: Parámetros orbitales nominales para la órbita *GTO* (Palmerini et al., 2009)

Describiremos a continuación, las principales características de la *ISS* y su papel en el lanzamiento de *CubeSats*.

La *Estación Espacial Internacional* (Figura 1.3) es una nave espacial de gran tamaño que orbita la Tierra. Es utilizada para dar alojamiento a astronautas así como un laboratorio científico de excelentes características. Surgió como una iniciativa global en la cual participan 16 países, entre ellos, España. La primera pieza de la estación fue lanzada en Noviembre de 1992 aunque no fue hasta dos años después cuando la primera tripulación habitó la estación (Wild, 2020).

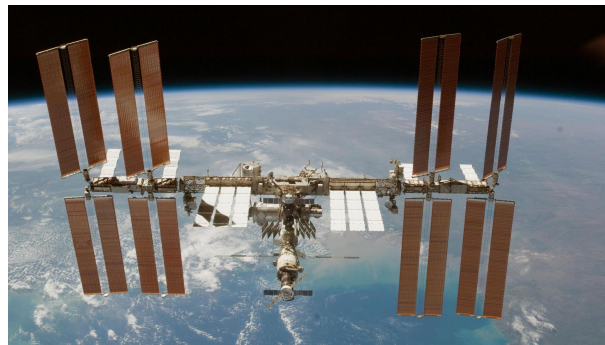


Figura 1.3: Estación Espacial Internacional. Obtenido de DLR (2020)

Los elementos orbitales nominales de la *Estación Espacial Internacional* son conocidos y se detallan en la siguiente Tabla 1.2,

Parámetros orbitales	Valor
Semieje (a)	6787.905 km
Excentricidad (e)	1.518e-4
Inclinación (i)	51,6°

Tabla 1.2: Parámetros orbitales nominales para la órbita de la ISS (Chan y Zhou, 2018)

Como mencionábamos anteriormente, para lanzar un *CubeSat* desde la *ISS* debemos de hacerlo llegar a la misma desde la Tierra junto con los demás suministros. Una vez allí se utiliza el denominado sistema de dispensadores, también llamado *Poly Picosatellite Orbital Deployer (PPOD, Figura 1.4)* desarrollado en *CalPoly* (Puig-Suari et al., 2001). Una vez allí, los astronautas colocan los satélites en estos dispositivos los cuales haciendo uso de los muelles que llevan incorporados eyectan el satélite al espacio.



Figura 1.4: Poly Picosatellite Orbital Deployer (PPOD). Obtenido de Robledo et al. (2015)

Después del lanzamiento, al satélite se le aplica un impulso de magnitud de unos $1,1 - 1,7 \text{ m/s}$ con una dirección de 45° , obteniendo los parámetros orbitales de inyección (Haque et al., 2013). Al completar el lanzamiento, se obtienen los elementos orbitales iniciales para nuestro *CubeSat*, los cuales utilizaremos posteriormente en el trabajo, representados en la Tabla 1.3.

Parámetros orbitales	Valor
Semieje (a)	6770.746 km
Excentricidad (e)	0.001740
Inclinación (i)	$51,723^\circ$
Argumento del perigeo (ω)	$115,815^\circ$
Ascensión recta del nodo (Ω)	$71,931^\circ$

Tabla 1.3: Parámetros orbitales nominales para la órbita alcanzada desde la ISS (Coronel Mariño et al., 2016)

1.3. Objetivos

El propósito principal de este trabajo, como adelantábamos anteriormente, es colocar un satélite tipo *CubeSat* en una órbita heliosíncrona. Si bien, esto se trata del fin último del trabajo, para llegar a conseguirlo se plantean objetivos intermedios que se señalan a continuación.

En primer lugar, se necesita conocer las herramientas matemáticas que se utilizarán a lo largo del trabajo. Con este propósito, es necesario familiarizarse con este tipo de nanosatélites al igual que con los métodos de lanzamiento que pueden utilizarse. Es necesario también conocer la teoría de maniobras impulsivas. También, como objetivo, se plantea conocer la teoría de las perturbaciones asociadas a un satélite que orbita la Tierra de donde obtener, a partir de una teoría analítica, ecuaciones diferenciales que expresen la variación de los elementos orbitales con el tiempo. Estas teorías son fundamentales para describir y caracterizar las condiciones de una órbita heliosíncrona. Por último, se plantea un objetivo computacional de tipo numérico, desarrollando un programa que calcule simulaciones de dichas maniobras para alcanzar la órbita de diseño.

1.4. Metodología

A continuación, se describe la metodología utilizada para conseguir los objetivos planteados en la sección anterior. Dichos objetivos hacen necesario el conocimiento de la dinámica orbital, así como, la geometría de la órbita para plantear las ecuaciones que definen las maniobras impulsivas. También, es necesario la integración de las ecuaciones diferenciales que nos permitan modelizar el movimiento perturbado de un satélite y conocer las soluciones de las ecuaciones que gobiernan dicho movimiento.

La estructura del trabajo es la siguiente. En el Capítulo 1 se presentan las características principales de los satélites *CubeSat* y algunas de sus aplicaciones; en este capítulo, también se presentan las características orbitales para un lanzamiento utilizando el lanzador *Ariane 5* o desde la *ISS* y se señala su relación actual con la puesta en órbita de este tipo de satélites. Posteriormente, se desarrolla la teoría de maniobras impulsivas tanto de cambio de plano orbital como de cambio de forma en el Capítulo 2. A lo largo del Capítulo 3 se plantean los conceptos de movimiento perturbado de un satélite terrestre y de potencial gravitatorio terrestre. También, se llega a las conocidas ecuaciones de *Lagrange* aplicando el método de variación de las constantes, de este modo, se obtienen los efectos de las perturbaciones sobre los elementos orbitales. En este mismo capítulo, además, se estudia la teoría de *Kaula* que permite expresar el potencial gravitatorio como una función de los parámetros orbitales, una vez hecho esto, se analizan los principales efectos perturbadores de este potencial, que son los atribuidos al término J_2 , tomando esa consideración se obtendrán unas ecuaciones simplificadas que serán fundamentales posteriormente en el trabajo. Durante el Capítulo 4, se introducirá el concepto de heliosincronismo y se obtendrá una caracterización de la órbita con estos atributos, además se desarrolla una herramienta de software para poder computar de manera sencilla los parámetros orbitales que intervienen en la condición de heliosincronismo. Para finalizar, en el Capítulo 5, se presentan las simulaciones numéricas realizadas a partir de una herramienta de software, que se detalla, también, en este capítulo. Esta permite el cálculo de las maniobras para los diferentes escenarios que se plantean y estudian en esta misma sección.

Capítulo 2

Ecuaciones de maniobras impulsivas

Durante este capítulo se presenta la teoría de maniobras impulsivas que será utilizada posteriormente para colocar nuestro satélite en la órbita deseada. En primer lugar consideraremos un satélite que orbita la Tierra, dicha órbita viene delimitada tanto en el plano como en el espacio por los siguientes elementos orbitales clásicos:

a es el semieje mayor de la elipse,

e es la excentricidad de la elipse,

i es la inclinación de la órbita, se mide con respecto al ecuador sobre la esfera celeste,

ω es el argumento del perigeo, es el ángulo medido sobre el plano orbital desde la línea de nodos hasta el perigeo,

Ω es la ascensión recta del nodo ascendente, ángulo que forma, sobre el ecuador, desde el punto *Aries* (γ) hasta el nodo ascendente.

Además, podemos conocer la posición del satélite dentro de esta órbita para un instante de tiempo t a partir de

$r(t)$ es el radio vector geocéntrico del satélite,

$\nu(t)$ es la anomalía verdadera, definida como el ángulo que forma r con la dirección del perigeo sobre el plano de la elipse.

Una vez tenemos determinada la órbita y la posición del satélite dentro de la misma, nuestro objetivo es que, a partir de un impulso dado en una cierta dirección, estos parámetros se modifiquen a nuestra voluntad y, por tanto, el satélite tenga una nueva órbita. De este modo, estas maniobras reciben el nombre de maniobras impulsivas, ya que el satélite experimenta un impulso instantáneo que no altera su posición pero sí cambia su trayectoria.

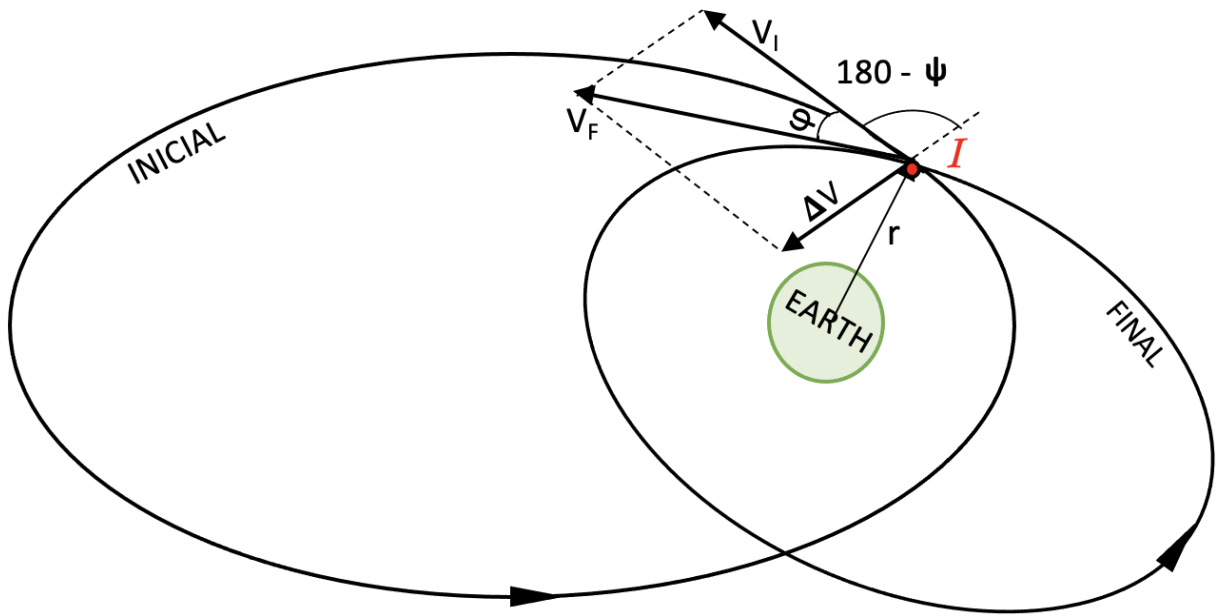


Figura 2.1: Descripción de una maniobra impulsiva. Elaboración propia.

Como puede verse en la Figura 2.1, el impulso para pasar de una órbita a la otra se realiza en la intersección de ambas cónicas, entonces, basándonos en esto, se tiene una condición indispensable para poder realizar este tipo de maniobras, las órbitas deben tener un punto en común, además como la Tierra se encuentra en uno de los focos de la elipse, deben ser homofocales. También podemos distinguir en la imagen los elementos que caracterizan este tipo de maniobras, la velocidad inicial v_i y final v_f del satélite, la magnitud del impulso ΔV , φ es el ángulo que forman las dos velocidades y por último ψ la dirección del impulso, se trata del ángulo que forma el impulso con la velocidad inicial.

Nuestro interés ahora, es conocer tanto la magnitud de dicho impulso como la dirección en la que debemos darlo. Partimos definiendo la velocidad inicial v_i y final v_f del satélite como

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right); \quad (2.1)$$

con $\mu = GE$, fórmula que obtenemos a partir de la integral de las fuerzas vivas suponiendo una órbita elíptica (Sevilla, 1989).

Después de haber obtenido las velocidades, podemos encontrar una ecuación para la magnitud del impulso aplicando el *Teorema del coseno* al triángulo de la Figura 2.1, así

$$\Delta V^2 = v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \varphi. \quad (2.2)$$

Ahora, haciendo uso del *Teorema del seno* en ese mismo triángulo, escribimos una expresión para dirección del impulso ψ como sigue

$$\sin \psi = \frac{v_f \sin \varphi}{\Delta V}. \quad (2.3)$$

El único elemento que nos queda por calcular para determinar el impulso es φ , este depende del tipo de maniobra que se vaya a realizar, no tiene una expresión algebraica como tal, se determinará geométricamente. A lo largo de este capítulo describiremos dos tipos de maniobras impulsivas: cambio de plano orbital y paso de elipse a circunferencia.

2.1. Maniobras para cambio de plano orbital

Lo que buscamos en estas maniobras es cambiar el plano en el que orbita el satélite dejando invariante la forma de la elipse, es decir, los elementos que determinan la forma de la cónica no cambian. Este no es el caso de los elementos que describen la orientación del plano, como podemos ver en la Figura 2.2 vamos a cambiar la posición de los nodos y la inclinación.

Para este tipo de maniobra, partimos de una inclinación y ascensión recta del nodo iniciales y se quiere obtener un órbita que tenga dichos elementos pero variados una cierta cantidad conocida. Como hemos comentado anteriormente, la excentricidad y el semieje se consideran invariantes al cambio de plano, entonces, teniendo en cuenta la ecuación (2.1), las velocidades inicial y final coinciden.

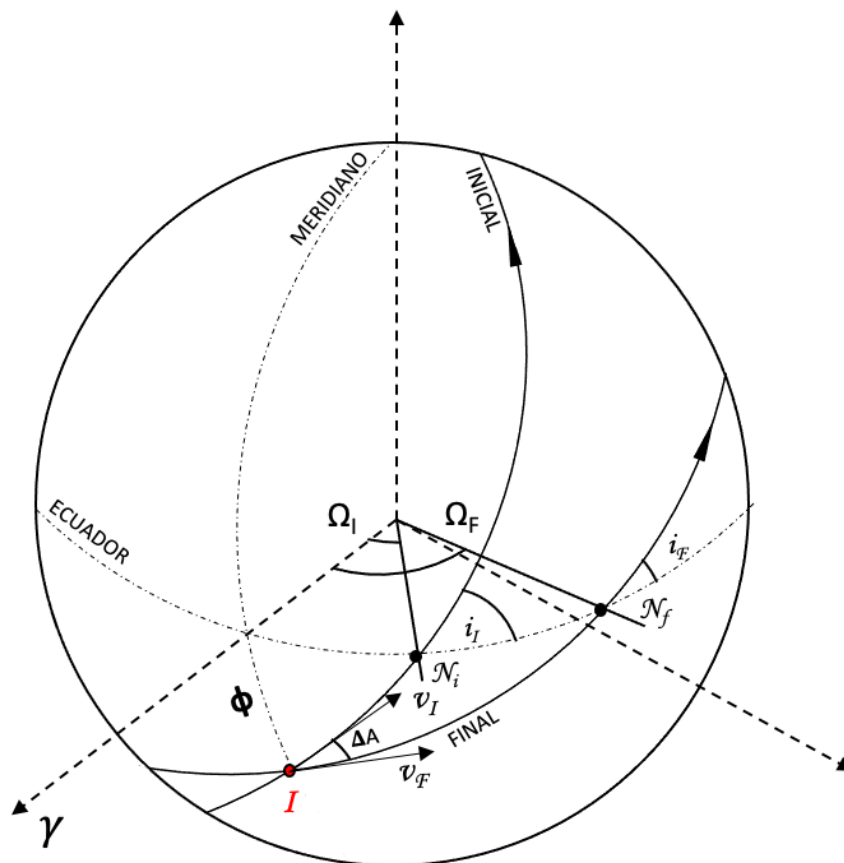


Figura 2.2: Maniobra de cambio de plano. Elaboración propia.

Como podemos ver en la Figura 2.2, el ángulo que forman las velocidades se corresponde con la variación de acimut medido desde el norte, llamamos acimut al ángulo que forma una dirección con el meridiano, esta variación se produce como resultado de cambiar la inclinación y la ascensión recta del nodo. Así, con este tipo de maniobras se pretende realizar los cambios

$$\begin{aligned}i_i &\longrightarrow i_f = i_i + \Delta i, \\ \Omega_i &\longrightarrow \Omega_f = \Omega_i + \Delta \Omega, \\ A_i &\longrightarrow A_f = A_i + \Delta A = A_i + \varphi,\end{aligned}$$

donde i y Ω se refieren a inclinación y nodo respectivamente.

Ahora, necesitamos conocer tres elementos: el punto del impulso y la dirección y magnitud de este. Comenzaremos obteniendo el ángulo entre las velocidades, fijándonos en la Figura 2.2, podemos ver que ambos nodos junto con el punto del impulso definen un triángulo esférico que de ahora en adelante denotaremos como $N_f N_i I$. Aplicando la *Primera fórmula de Bessel* a dicho triángulo obtenemos que

$$\cos \Delta A = \cos \varphi = \cos i_i \cos i_f + \sin i_i \sin i_f \cos \Delta \Omega, \quad (2.4)$$

de donde somos capaces de despejar φ .

Una vez obtenido φ , haciendo uso de la ecuación (2.2) junto con la expresión (2.3), es posible determinar la magnitud y dirección del impulso.

Por último, nos queda por determinar el punto donde se aplicará el impulso. Podemos encontrar una expresión para el módulo del radio vector dada por Montenbruck y Gill (2000)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu_I}; \quad (2.5)$$

donde ν_I es la anomalía verdadera en el instante del impulso la cual todavía no conocemos. Para calcularla resolvemos el triángulo $N_f N_i I$, así

$$\frac{\sin(\omega + \nu_I)}{\sin(180 - i_f)} = \frac{\sin \Delta \Omega}{\sin \varphi}, \quad (2.6)$$

donde $\Delta \Omega = N_f - N_i$ y ω es el argumento del perigeo.

De esta manera, ya tenemos determinada la posición del punto en el plano de la órbita, para representar su posición en el espacio necesitamos la latitud del punto, ϕ .

Para obtener esta expresión, es necesario volver a la Figura 2.2, en ella llamaremos Q al punto de corte del meridiano con el ecuador, ahora vemos que el nodo final, Q y el punto del impulso forman otro triángulo esférico que denotaremos $N_f Q I$ de donde se obtiene

$$\sin \phi = \sin(\widehat{N_f I}) \sin i_f, \quad (2.7)$$

por otro lado, de resolver $N_f N_i I$,

$$\frac{\sin(\widehat{N_f I})}{\sin i_i} = \frac{\sin \Delta \Omega}{\sin \Delta A}, \quad (2.8)$$

despejando $\sin(\widehat{N_f I})$ tenemos

$$\sin(\widehat{N_f I}) = \frac{\sin \Delta \Omega \sin i_i}{\sin \Delta A}. \quad (2.9)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.7) se tiene que

$$\sin \phi = \frac{\sin \Delta \Omega \sin i_i \sin i_f}{\sin \Delta A}. \quad (2.10)$$

Otra consideración que cabe destacar es que, cuando se tienen dos órbitas que comparten la misma ascensión recta del nodo ascendente, es decir, tienen el mismo nodo y solo alteramos la inclinación, el punto de impulso coincide con ese nodo común, por lo que $\phi = 0$ y la diferencia de acimut coincide con la diferencia de inclinación lo que simplifica en gran manera los cálculos. Otro caso aún más simplificado, es cuando una de las órbitas es ecuatorial, es decir, $i = 0$, directamente, ϕ es igual a la inclinación de la otra órbita.

2.2. Maniobras de paso de órbita elíptica a circular

En esta sección procederemos de forma análoga a la anterior, para realizar una maniobra impulsiva de paso de elipse a circunferencia. Pero en este caso, se modifican los parámetros que alteran la forma de la órbita en el plano, dejando invariantes el resto de parámetros que determinan la posición de dicho plano en el espacio.

Nuestra intención ahora, es convertir la órbita elíptica en una circular de radio r_c conocido, esta órbita está caracterizada por que su excentricidad es nula. Así:

$$\begin{aligned} a_i &\longrightarrow a_f = a_i + \Delta a, \\ e_i &\longrightarrow e_f = 0. \end{aligned}$$

Comenzaremos determinando la posición del punto del impulso en el plano. Está claro que el radio vector r coincide con el radio de la circunferencia, ya que es donde esta corta a la elipse, para que ambas se corten se debe verificar que

$$a(1 - e) < r_c < a(1 + e). \quad (2.11)$$

Si esta relación no se cumple, al coincidir el foco de la elipse con el centro de la circunferencia, una órbita se encontrará dentro de la otra y no se cortarán.

Para obtener la anomalía verdadera para el instante del impulso, es tan sencillo como despejarla de la ecuación (2.5) ya que todo el resto de elementos son conocidos.

Ahora, necesitamos la magnitud del impulso, se trata de una computación directa haciendo uso de las expresiones (2.1) y (2.2), teniendo en cuenta que para el caso de la circunferencia $a = r_c$, de esta manera

$$v_f^2 = \frac{\mu}{r_c}, \quad (2.12)$$

esta fórmula expresa la velocidad en la órbita circular.

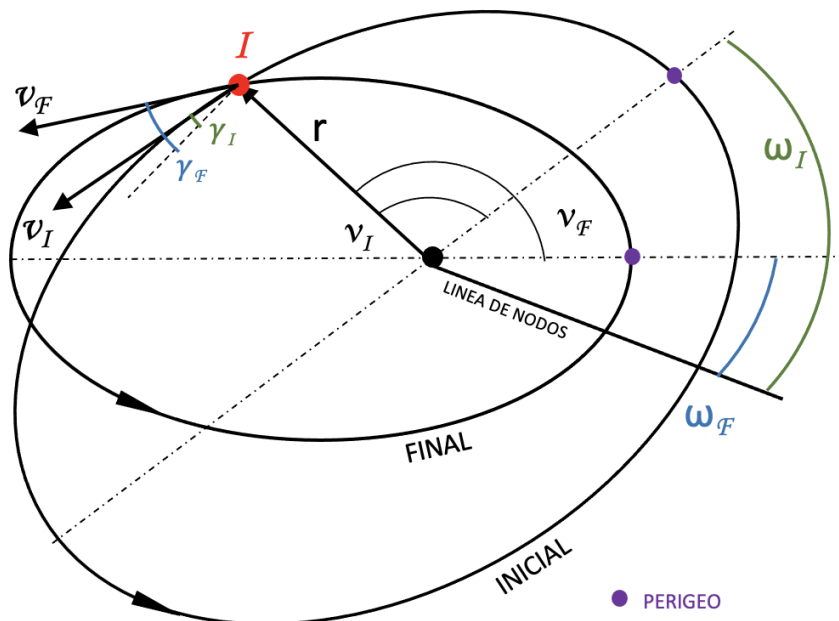


Figura 2.3: Maniobra de cambio de forma. Elaboración propia.

La parte más complicada de este tipo de cambio es el cálculo de la dirección del impulso. Antes hemos de definir el concepto de ángulo de vuelo γ , este elemento hace referencia al ángulo que forma el vector velocidad del satélite con la perpendicular al radio vector. De esta manera, el ángulo que forman ambas velocidades se corresponde con la diferencia de ángulos de vuelo como puede verse en la Figura 2.3.

A continuación, se describe un método para calcular el ángulo de vuelo dados la excentricidad y la anomalía verdadera.

Descomponemos la velocidad en sus componentes radial y transversal

$$\begin{aligned}v_R &= v \sin \gamma = \dot{r}, \\v_T &= v \cos \gamma = r\dot{\nu};\end{aligned}\tag{2.13}$$

dividiendo una entre otra obtenemos

$$\tan \gamma = \frac{\dot{r}}{r\dot{\nu}}.\tag{2.14}$$

Por otro lado diferenciamos la expresión (2.5) de manera que

$$\dot{r} = \frac{\dot{\nu} r e \sin \nu}{1 + e \cos \nu},\tag{2.15}$$

sustituyendo la expresión de la variación del mismo (2.15) en la ecuación (2.14) llegamos a

$$\tan \gamma = \frac{\frac{\dot{\nu} r e \sin \nu}{1 + e \cos \nu}}{r\dot{\nu}},\tag{2.16}$$

y simplificando

$$\tan \gamma = \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu}.\tag{2.17}$$

Procediendo de esta forma, calculamos ambos ángulos de vuelo de modo que obtenemos $\varphi = \Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$, aplicando la relación (2.3) obtenemos la dirección del impulso.

Tras haber finalizado estos desarrollos de la teoría de maniobras impulsivas, hemos conseguido las herramientas necesarias para poder determinar los elementos que caracterizan estos dos tipos de maniobras que se aplicarán a nuestro satélite para colocarlo en la órbita que deseamos, la cual estudiaremos posteriormente. Estas fórmulas son muy útiles para implementar las maniobras utilizando un software específico, esta tarea la realizaremos posteriormente junto con un análisis de los resultados.

Capítulo 3

Teoría analítica del movimiento perturbado de un satélite. Ecuaciones de Lagrange

A lo largo de este capítulo, introduciremos una aproximación de carácter analítico al problema del movimiento perturbado de un satélite orbitando la Tierra. Si el movimiento de dicho satélite fuera ideal, este describiría una órbita kepleriana, es el caso del problema de los dos cuerpos cuando consideramos una Tierra perfectamente esférica. En el momento en el que empezamos a considerar, sobre el satélite, la influencia de otros cuerpos celestes e introducimos un concepto de Tierra “real” además de otras perturbaciones, llegamos al caso del movimiento perturbado.

Las fuerzas perturbadoras que afectan al satélite en su movimiento alrededor de la Tierra, pueden dividirse en dos grandes grupos: las provenientes de las alteraciones del campo de la gravedad terrestre y las que no provienen de dicho campo. Las primeras son principalmente la no esfericidad de la Tierra y la atracción de marea, efecto directo e indirecto. Dentro del segundo grupo, cabe destacar: presión de radiación solar, efecto Albedo, rozamiento atmosférico, efectos relativistas y viento solar, entre otros.

3.1. Potencial gravitatorio terrestre

Dentro de este trabajo, vamos a centrar nuestros intereses en el estudio del efecto de las perturbaciones que provienen del campo gravitatorio. Consideraremos un satélite artificial que orbita la Tierra describiendo una elipse a lo largo de su movimiento, como hemos comentado anteriormente, una de las perturbaciones principales que experimenta este cuerpo está intrínsecamente relacionada con el campo de gravedad de la Tierra. Tomamos en nuestro desarrollo la Tierra como un cuerpo extenso con su campo correspondiente (caso Tierra “real”), cuyo potencial puede expresarse como

$$V = \int_T \frac{\rho dV}{r} \quad (3.1)$$

donde, T hace referencia a que la integración es a lo largo de todo el cuerpo, ρ representa la densidad de la Tierra, cuyo valor es no constante, dV es el diferencial de volumen y por último, r que es la distancia entre el satélite y el centro de masas de la Tierra.

El potencial escrito de esta forma es poco manejable para nuestro caso de estudio, por este motivo, utilizaremos la expresión de este potencial como un desarrollo en los llamados armónicos esféricos, dicha expresión es ampliamente conocida en el ámbito de la *Geodesia*. De este modo;

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \left[J_n P_n(t) + \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(t) \right] \right\} \quad (3.2)$$

obtenida de Heiskanen et al. (1967), donde, $t = \sin \psi$, ψ y λ son respectivamente la latitud y longitud en el elipsoide de referencia, a_e es el semieje mayor del elipsoide, r la distancia geocéntrica del satélite, los J_n , J_{nm} y K_{nm} los coeficientes zonales y teserales del desarrollo en armónicos esféricos, cuya notación modificaremos.

Modificaremos la notación de estos últimos para el desarrollo de este trabajo de la siguiente manera. Los K_{nm} pasarán a convertirse en $-S_{nm}$ y los J_{nm} a partir de ahora serán $-C_{nm}$, de este modo, los J_n serán denominados ahora $-C_{n0}$. Este cambio de notación es importante para adaptar la expresión del potencial para escribirla de la misma forma que en Kaula (1966).

Por último, los $P_n(t)$ y los $P_{nm}(t)$ hacen referencia a los polinomios de *Legendre* y a las funciones asociadas de *Legendre* respectivamente, estos dos elementos vienen definidos por las siguientes expresiones

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (3.3)$$

con

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (3.4)$$

De esta manera, ya conocemos una expresión que nos permite modelar el potencial gravitatorio terrestre a partir de la posición del satélite con mayor o menor número de armónicos. Ahora, utilizaremos la expresión (3.2) para identificar sus elementos con relación a su efecto sobre el satélite. Introduciendo dentro del paréntesis el factor $\frac{GM}{r}$ y haciendo el cambio de notación propuesto anteriormente se obtiene

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left[C_{n0} P_n(t) + \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(t) \right]. \quad (3.5)$$

En esta expresión, podemos identificar claramente dos sumandos que denotaremos como

$$V = U + R, \quad (3.6)$$

donde,

$$\begin{aligned} U &= \frac{GM}{r}, \\ R &= \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left[C_{n0} P_n(t) + \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fijándonos en el término U , podemos ver que este representa el potencial para una Tierra considerada completamente esférica cuyo gradiente nos devuelve la fuerza central que produce un movimiento kepleriano clásico, es decir, está reflejando el problema de los dos cuerpos. Por otro lado, el sumando R recoge todo el resto de perturbaciones resultantes de considerar la Tierra como un cuerpo extenso en lugar de una masa puntual, de esta manera, la aceleración responsable del movimiento perturbado por el campo gravitatorio terrestre viene dada por el gradiente de R .

Dentro de esta expresión, merece la pena destacar que entre los coeficientes hay algunos que tienen mayor importancia que otros debido a su valor, este es el caso del coeficiente C_{20} , o también conocido como J_2 , el valor de este es del orden de 100 veces mayor que el resto, por lo que es el causante de gran parte de la perturbación (Pavlis et al., 2012). Dicho coeficiente viene a representar el abultamiento ecuatorial terrestre, estas consideraciones son de gran importancia ya que las utilizaremos más adelante en el desarrollo del trabajo.

3.2. Ecuaciones de Lagrange

Llegados a este punto, donde ya hemos conseguido una expresión que nos da la perturbación que sufre un satélite al considerar una Tierra “real”, intuitivamente, el siguiente paso a dar es encontrar expresiones que nos permitan conocer como esa perturbación afecta a la órbita de nuestro *CubeSat*.

En esta sección, se obtienen ecuaciones que expresan el cambio con el tiempo de los diferentes elementos orbitales conociendo la función perturbadora.

Sean las ecuaciones del movimiento perturbado de un satélite en términos de la función perturbadora R . Estas ecuaciones describen el movimiento relativo de un cuerpo de masa conocida, el satélite, respecto de otro cuerpo, en este caso la Tierra (Sevilla, 1989). De este modo,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z},\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde $\mu = G(m_S + E)$, con G la constante de gravitación universal, m_S y E la masa del satélite y de la Tierra respectivamente y r es el módulo del radio vector geocéntrico de la Tierra al satélite.

En el caso de que la fuerza perturbadora sea conservativa, es decir, provenga de un potencial ($\mathbf{F} = \text{grad } R$), como es el caso de la fuerza proveniente del campo gravitatorio, las denominadas ecuaciones de *Lagrange* nos permiten conocer la variación con el tiempo de los elementos orbitales clásicos en función de una determinada función perturbadora (Sidi, 1997). Para la obtención de estas ecuaciones, aplicaremos el método de variación de las constantes a la resolución analítica de las ecuaciones del movimiento perturbado de un satélite (3.8), de esta forma se obtienen (Sevilla, 1989)

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Ahora, contamos con una herramienta para poder evaluar la perturbación producida por la función perturbadora R . A la vista de las expresiones anteriores, debemos diferenciar R con respecto de los elementos orbitales, conociendo esto, tiene sentido pasar a la siguiente sección donde trataremos de resolver este problema.

3.3. Integración de las ecuaciones de *Lagrange*

Según las ecuaciones de *Lagrange* (3.9), como hemos comentado anteriormente, necesitamos la función perturbadora expresada en función de los elementos orbitales clásicos. Para nuestro caso, nos centraremos en la parte perturbadora del potencial gravitatorio terrestre (3.7), haremos uso de la teoría desarrollada por *Kaula* que obtiene la expresión de dicho potencial como una función de los elementos orbitales.

Después de ciertos desarrollos utilizando una serie de herramientas matemáticas, la función perturbadora puede escribirse como la suma (*Kaula*, 1966):

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n V_{nm}, \quad (3.10)$$

donde cada V_{nm}

$$V_{nm} = \frac{\mu a_e^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta). \quad (3.11)$$

con

$$S_{nmpq} = \begin{cases} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{cases}_{n-m \text{ par}}^{n-m \text{ par}} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \theta)] \\ + \begin{cases} S_{nm} \\ C_{nm} \end{cases}_{n-m \text{ impar}}^{n-m \text{ par}} \sin[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \theta)], \quad (3.12)$$

y

$$F_{nmp}(i) = \sum_l \frac{(2n-2l)!}{l!(n-l)!(n-m-2l)!2^{2n-2l}} \sin^{n-m-2l}(i) \\ \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s(i) \sum_c \binom{n-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}, \quad (3.13)$$

donde, k es la parte entera de $\frac{n-m}{2}$, l es sumado desde 0 hasta el menor entre p o q , siendo $q = 2p - n$, y c se suma sobre todos los valores haciendo los coeficientes del binomio distintos de cero, y

$$G_{npq}(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{n-(1/2)}} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{n-1}{2d+n-2p'} \binom{2d+n-2p'}{d} \left(\frac{e}{2}\right)^{2d+n-2p'} \quad (3.14)$$

siendo,

$$\begin{aligned} p' &= p, \text{ para } p \leq n/2, \\ p' &= n - p, \text{ para } p \geq n/2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como adelantábamos al comienzo del capítulo, el término dominante en el potencial gravitatorio terrestre es el C_{20} ($-J_2$), cien veces mayor que el resto de coeficientes del potencial perturbador (Pavlis et al., 2012), entonces, nuestro objetivo ahora es obtener una expresión del potencial restringido, a dicho coeficiente, con el fin de evaluar el efecto del C_{20} sobre los elementos orbitales del satélite.

Partimos de la expresión del potencial gravitatorio (3.11), donde tomamos $n = 2$ y $m = 0$,

$$V_{20} = \frac{\mu a_e^2}{a^3} \sum_{p=0}^2 F_{20p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{2pq}(e) S_{20pq}(\omega, M, \Omega, \theta), \quad (3.16)$$

donde, haciendo uso de (3.13) y (3.14) respectivamente,

$$F_{201}(i) = \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

y

$$G_{210}(e) = (1 - e^2)^2. \quad (3.18)$$

Evaluamos ahora, $S_{20pq}(\omega, M, \Omega, \theta)$ usando (3.12), como $n - m = 2$ que es un número par, el coseno irá multiplicado por C_{20} y el seno por S_{20} , entonces,

$$S_{20pq}(\omega, M, \Omega, \theta) = C_{20} \cos[(2 - 2p)\omega + (2 - 2p + q)M] + S_{20} \sin[(2 - 2p)\omega + (2 - 2p + q)M].$$

Como hemos comentado anteriormente, el coeficiente C_{20} es muy grande comparado con el resto de coeficientes, por lo que consideraremos despreciable el segundo sumando en la fórmula anterior, de este modo tomaremos,

$$S_{20pq}(\omega, M, \Omega, \theta) \simeq C_{20} \cos[(2 - 2p)\omega + (2 - 2p + q)M]. \quad (3.19)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.16), tenemos que

$$V_{20} = \frac{\mu C_{20} a_e^2}{a^3} \sum_{p=0}^2 F_{20p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{2pq}(e) \cos[(2 - 2p)\omega + (2 - 2p + q)M]. \quad (3.20)$$

Como podemos observar, ya tenemos determinado el V_{20} , si nos fijamos en la fórmula, vemos que hay una suma infinita en q por lo que contamos con infinitos términos en esta expresión, como nuestro objetivo es evaluar el efecto de este potencial sobre el satélite, a continuación, haremos una serie de consideraciones en relación a los efectos de cada uno de los términos de la ecuación anterior que nos permitirá simplificar esta relación.

Ahora, asumimos que los coeficientes de V_{20} son todos de la misma magnitud, es lógico esperar que los términos que no contienen M tengan un mayor efecto después de la integración ya que la anomalía media dará una vuelta completa en un intervalo relativamente corto de tiempo el que el satélite completará un revolución en la órbita, esto es el periodo del satélite (Kaula, 1966).

En la expresión (3.20) vemos que los coeficientes que anulan al término que acompaña a la M satisfacen

$$2 - 2p + q = 0 \Rightarrow q = 2p - 2$$

además, tomamos $q \in \{-2, 2\} \subset \mathbb{Z}$ y $p \in \{0, 4\} \subset \mathbb{Z}$, dando valores

p	q
0	-2
2	2
1	0

Tabla 3.1: Valores de p y q

Teniendo en cuenta los valores de p' según las expresiones (3.15), para los dos primeros pares $p' = 0$, esto entra en discordancia con los límites del sumatorio en d de la ecuación (3.14), ya que no es posible sumar desde cero hasta menos uno. Por ende, estos dos primeros pares quedan descartados y no queda otra opción que tomar el último par para derivar una expresión para las perturbaciones lineales del potencial. Sustituyendo $p = 1$ y $q = 0$ en la ecuación (3.20) obtenemos

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20} a_e^2}{a^3} F_{201}(i) G_{210}(e). \quad (3.21)$$

Utilizando entonces F_{201} y G_{210} , mediante (3.17) y (3.18), respectivamente, y sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange (3.9), obtenemos (Kaula, 1966).

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{de}{dt} &= 0, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^2 a^2} [1 - 5 \cos^2 i], \\ \frac{di}{dt} &= 0, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^{\frac{3}{2}} a^2} [3 \cos^2 i - 1]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En lo que sigue, vamos a detallar la deducción de la expresión para la variación del nodo.

Proposición 3.3.1. *La expresión de la variación de la ascensión recta del nodo ascendente Ω , provocada por la perturbación del primer coeficiente del desarrollo en armónicos esféricos del potencial gravitatorio terrestre J_2 , viene dada por*

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i. \quad (3.23)$$

Demostración:

Para la demostración de esta fórmula partiremos tomando como función perturbadora la expresión del potencial gravitatorio (3.16) teniendo en cuenta exclusivamente el efecto del coeficiente C_{20} . Haremos uso de las expresiones para $F_{201}(i)$ y $G_{210}(e)$ dadas en (3.17) y (3.18) respectivamente. Seguidamente, sustituiremos las dos relaciones anteriores en (3.21) para obtener

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20} a_e^2}{a^3} \left(\frac{3 \sin^2 i}{4} - \frac{1}{2} \right) (1-e^2)^{-3/2}, \quad (3.24)$$

operamos la resta del paréntesis

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20} a_e^2}{a^3} \left(\frac{3 \sin^2 i - 2}{4} \right) (1-e^2)^{-3/2} = \frac{\mu C_{20} a_e^2 (3 \sin^2 i - 2)}{4 a^3 (1-e^2)^{3/2}}. \quad (3.25)$$

Ahora, usaremos las ecuaciones de *Lagrange* (3.9), tomando como función perturbadora R la parte que no corresponde con el problema de los dos cuerpos en el potencial gravitatorio terrestre (3.7). En este caso, habiéndonos restringido al coeficiente C_{20} , así $R = V_{2010}$ de forma que:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial V_{2010}}{\partial i}. \quad (3.26)$$

Necesitamos conocer, ahora, la parcial con respecto a la inclinación $\frac{\partial V_{2010}}{\partial i}$. Diferenciando con respecto de i en (3.25)

$$\frac{\partial V_{2010}}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\mu C_{20} a_e^2}{4 a^3 (1-e^2)^{3/2}} (3 \sin^2 i - 2) \right) = \frac{\mu C_{20} a_e^2}{4 a^3 (1-e^2)^{3/2}} (6 \sin i \cos i), \quad (3.27)$$

simplificando, queda

$$\frac{\partial V_{2010}}{\partial i} = \frac{3 \mu C_{20} a_e^2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \sin i \cos i. \quad (3.28)$$

Sustituyendo en la expresión obtenido en (3.26),

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{3 \mu C_{20} a_e^2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \sin i \cos i, \quad (3.29)$$

simplificando los senos

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3 \mu C_{20} a_e^2}{2 n a^5 (1 - e^2)^2} \cos i, \quad (3.30)$$

teniendo en cuenta que el movimiento medio viene dado por $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3 \mu C_{20} a_e^2}{2 \mu^{1/2} a^{-3/2} a^5 (1 - e^2)^2} \cos i, \quad (3.31)$$

ahora, operamos las μ y los semiejes a , de este modo

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3 \mu^{1/2} C_{20} a_e^2}{2 a^{7/2} (1 - e^2)^2} \cos i, \quad (3.32)$$

nosotros queremos escribirlo en función del movimiento medio, para esto, descomponemos el factor del semieje como $a^{7/2} = a^2 a^{3/2}$, así

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3 \mu^{1/2} C_{20} a_e^2}{2 a^2 a^{3/2} (1 - e^2)^2} \cos i, \quad (3.33)$$

pasamos el segundo factor al numerador cambiando el índice de signo, entonces

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3 \mu^{1/2} a^{-3/2} C_{20} a_e^2}{2 a^2 (1 - e^2)^2} \cos i = \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1 - e^2)^2 a^2} \cos i, \quad (3.34)$$

así, hemos conseguido la expresión que presentábamos anteriormente en el capítulo. ■

Con esta forma de proceder, es posible calcular las expresiones de la variación del resto de parámetros orbitales que aparecen en las ecuaciones (3.22).

De esta manera, concluimos este capítulo habiendo llegado a unas ecuaciones que expresan la variación de los elementos orbitales de un satélite, esta variación es la producida por el abultamiento ecuatorial reflejado a través del coeficiente C_{20} , así, conociendo el valor de los parámetros orbitales para un instante de tiempo, se puede conocer la magnitud de la perturbación para cualquiera de estos elementos. Como podemos ver en las ecuaciones (3.22), el efecto estudiado es inexistente para el semieje, excentricidad e inclinación, mientras que el argumento del perigeo, la ascensión recta del nodo y la anomalía media sí experimentan esta perturbación.

Capítulo 4

Características de la órbita heliosíncrona

En este capítulo, nos centraremos en introducir y caracterizar la órbita objetivo de nuestra misión, la órbita heliosíncrona. Esta caracterización se llevará a cabo haciendo uso de la teoría de perturbaciones generales que se obtuvo en el capítulo anterior.

4.1. Introducción al concepto de órbita heliosíncrona

En primer lugar, definiremos la órbita heliosíncrona, con esto nos referimos a una órbita que permite mantener casi la misma iluminación solar cada vez que el satélite pasa por su punto subsatélite. Es por esto, que es la órbita adecuada para satélites de observación a la Tierra, cuando es necesario que dos fotografías consecutivas posean características similares, lo que se alinea con nuestro objetivo. De no ser así, la comparación entre diferentes imágenes sería de difícil interpretación por disponer de diferente iluminación solar.

La Figura 4.1 representa la proyección ecuatorial de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que se ha supuesto circular, en tres épocas diferentes del año; así como la posición del satélite, S , y su órbita alrededor de la Tierra. Como ilustra la Figura, puede verse que, si la ascensión recta del nodo ascendente (longitud de arco $\gamma\Omega$) es constante, el valor del ángulo δ , que forman la línea de los nodos y la dirección del radio vector que une los centros de masa del Sol y de la Tierra, varía según la época del año. La variación de el ángulo δ implica que la iluminación que recibe el satélite en su órbita es diferente según la época del año. En particular, puede apreciarse como, cuando el satélite pasa por la línea de los nodos, estaría en unos casos iluminados y en otro no.

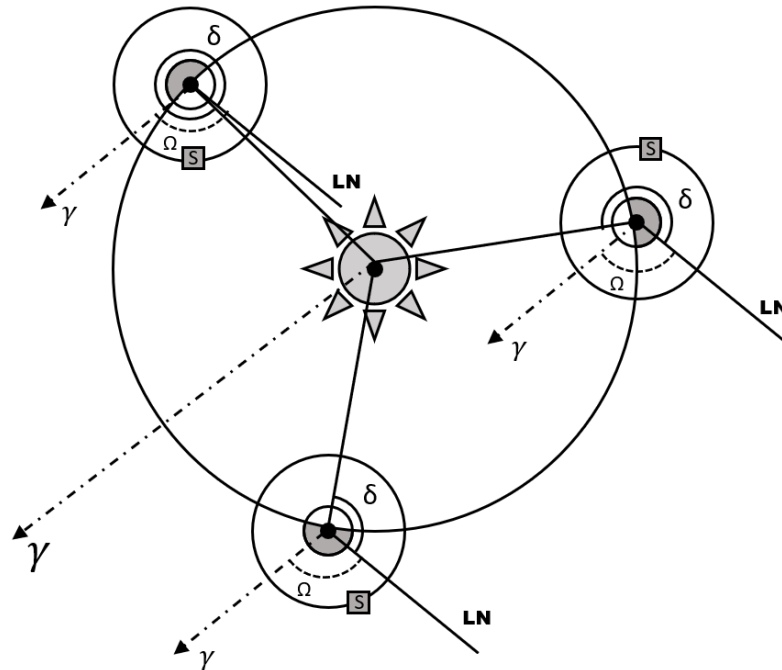


Figura 4.1: Representación de diferentes órbitas a lo largo de un año con línea de los nodos fija. Elaboración propia.

Para pasar a conseguir la condición de heliosincronismo, podemos pensar que la variación del ángulo δ a lo largo de un año se compense con una variación de la ascensión recta del nodo. El objetivo, sin utilizar maniobras, es que la variación de la ascensión recta del nodo ascendente sea debida al efecto perturbador del campo gravitatorio terrestre y obtener, entonces, que el ángulo δ sea constante al sobrevolar el mismo punto de la superficie de la Tierra, como puede verse en la Figura 4.2.

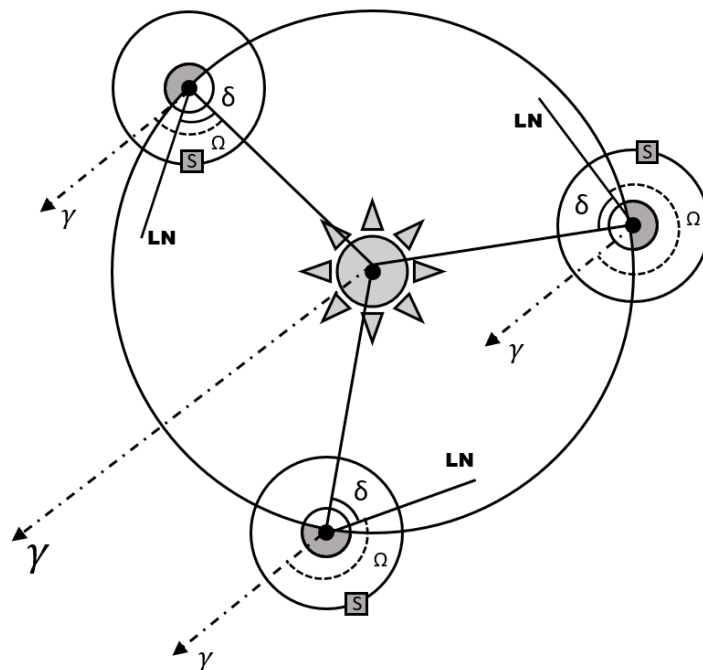


Figura 4.2: Representación de diferentes órbitas a lo largo de un año con δ fijo. Elaboración propia.

De esta forma, se tendría que la posición del nodo ascendente permanece fijada, es decir, el ángulo horario del Sol (H_{\odot}) es constante cuando el satélite sobrevuela el mismo punto subsatélite como se muestra en la Figura 4.3, así, las condiciones de iluminación son semejantes cada vez que esto ocurre.

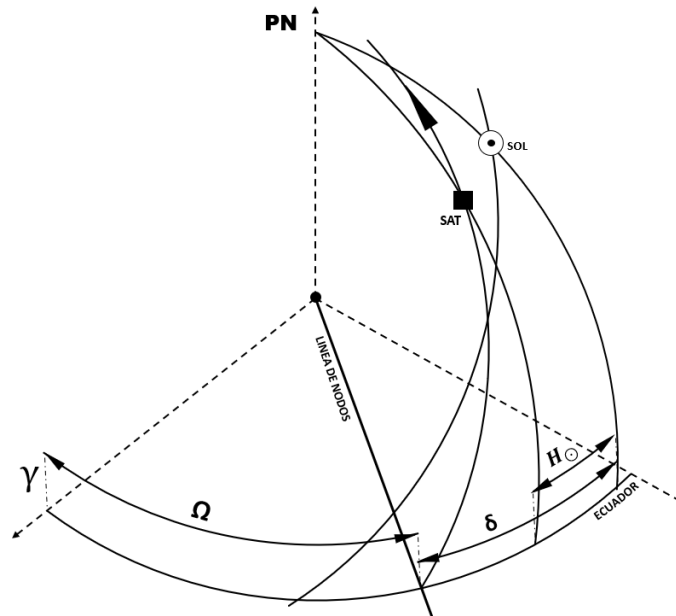


Figura 4.3: Representación de la órbita aparente del Sol y de los parámetros involucrados en la condición de heliosincronismo. Elaboración propia.

La condición matemática de heliosincronicidad se deduce, a continuación, a partir de la teoría del movimiento perturbado del satélite, presentada en el Capítulo 3. Para esta deducción partiremos de la integración de primer orden de las ecuaciones de Lagrange, de este modo, nos quedaremos únicamente con el efecto de primer coeficiente del desarrollo en armónicos esféricos del potencial gravitatorio el, C_{20} (J_2), de mayor efecto, este recoge el hecho de considerar la Tierra como un elipsoide de revolución. De esta manera, utilizaremos la ecuación para la variación del nodo dada en (3.22).

4.2. Caracterización de la órbita heliosíncrona

Vamos a considerar entonces δ constante, asumiendo que la variación de la ascensión recta del nodo ascendente producida por el coeficiente J_2 corresponde al movimiento retrógrado del nodo y buscando que coincida con el movimiento medio de la órbita aparente del Sol alrededor de la Tierra. En un año solar se tiene:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1 \text{ revolución completa (en radianes)}}{\text{Segundos en 1 año}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \times 365,2425} \text{ rad/s.} \quad (4.1)$$

Considerando ahora la ecuación dada en (3.22):

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i, \quad (4.2)$$

e igualando (4.1) y (4.2) obtenemos

$$\frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i = m, \quad (4.3)$$

donde hemos llamado

$$m = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \times 365,2425} \text{ rad/s}. \quad (4.4)$$

Si en (4.8) escribimos el movimiento medio como $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$, se tiene

$$\frac{3\mu^{1/2} a^{-3/2} C_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i = m, \quad (4.5)$$

de donde se obtiene

$$\frac{a^{-3/2} a_e^2}{(1-e^2)^2 a^2} \cos i = \frac{2m}{3\mu^{1/2} C_{20}}, \quad (4.6)$$

y simplificando se llega a

$$\frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \frac{a_e^{7/2}}{a^{7/2}} = \frac{2m}{3\mu^{1/2} C_{20}}, \quad (4.7)$$

finalmente, se obtiene

$$\frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{7/2} = -k \text{ rad/s}, \quad (4.8)$$

donde

$$k = -\frac{2m a_e^{3/2}}{3\mu^{1/2} C_{20}} \simeq 0,0989 \text{ rad/s}, \quad (4.9)$$

considerando $a_e = 6370 \text{ km}$.

La relación (4.8) define la condición de heliosincronismo de la órbita donde, se debe fijar los valores de semieje, inclinación y excentricidad. De ahora en adelante en este capítulo, haremos la suposición de que $e = 0$ con fin de particularizar nuestros desarrollos para una órbita heliosíncrona circular que queremos alcanzar al final de nuestra misión. A continuación, las características de este tipo de órbitas se presentan en las dos proposiciones siguientes.

Proposición 4.2.1. *Una órbita heliosíncrona es siempre retrógrada. Es decir, su inclinación debe tener valores entre 90 y 180 grados.*

Demostración:

Consideramos un satélite que orbita la Tierra en una órbita heliosíncrona, la relación (4.8) define la característica de heliosincronismo

$$\frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a} \right)^{\frac{7}{2}} = -0,0989 \text{ rad/s.} \quad (4.10)$$

Como podemos apreciar, tenemos la expresión de la derecha igualada a un número negativo, el factor que contiene a la excentricidad está al cuadrado por lo que siempre va a ser positivo y el semieje por definición es mayor que cero, por lo que para que sea posible esta igualdad tiene que darse

$$\cos i < 0, \quad (4.11)$$

además por definición del coseno $-1 < \cos i$, de este modo

$$-1 < \cos i < 0 \Rightarrow 90 < i < 180. \quad (4.12)$$

■

Proposición 4.2.2. *Una órbita circular no puede poseer la condición de heliosincronismo para valores de semieje mayores de 12337,47 km.*

Demostración:

Partimos de las ecuaciones (4.8) y (4.9), de estas despejaremos el coseno de la inclinación

$$\cos i = -k (1 - e^2)^2 \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2}, \quad (4.13)$$

particularizando para el caso circular, $e = 0$

$$\cos i = -k \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2}. \quad (4.14)$$

Ahora, consideramos la condición derivada en la proposición anterior (4.12), así

$$-1 < \cos i < 0 \Rightarrow -1 < -k \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2} < 0. \quad (4.15)$$

Dividimos por la constante $-k$

$$\frac{1}{k} > \left(\frac{a}{a_e} \right)^{7/2} > 0, \quad (4.16)$$

despejando el semieje a

$$\frac{a_e}{k^{2/7}} > a > 0, \quad (4.17)$$

tomando $a_e = 6370 \text{ km}$ y k como en (4.9)

$$12337,47 \simeq \frac{a_e}{k^{2/7}} > a > 0, \quad (4.18)$$

de este modo, queda demostrada la proposición. ■

Con el fin de ilustrar estas dos últimas proposiciones, hemos desarrollado un programa de *MatLab* para el cálculo de la inclinación para diferentes alturas de la órbita. Este programa hace uso de la ecuación (4.14) que permite obtener la inclinación en función de un semieje y una excentricidad dada, en este caso nula. La función implementada para este cálculo puede verse en el Apéndice A. Dichos resultados se muestran en la Figura 4.4.

Como puede apreciarse, en el eje de abscisas se representa la altura de la órbita del satélite en *km* (al ser ésta circular, coincide con la altura del satélite) calculada como el semieje menos el radio de la Tierra. En el eje de ordenadas se representan los valores de la inclinación que se obtienen para cada altura. Como puede verse, los valores de las inclinaciones se encuentran contenidos en el intervalo $(90^\circ, 180^\circ)$ lo que corresponde con la Proposición 4.2.1, es decir, inclinaciones propias de una órbita retrógrada. Puede apreciarse, también, que para órbitas bajas, con alturas hasta 1000 km corresponden a órbitas casi polares, adecuadas para la observación de la Tierra en su casi totalidad.

Asimismo, puede verse que si la altura del satélite es superior a los 4000 km , los valores de la inclinación crecen rápidamente hasta los 180° en los 6000 km , aproximadamente. No se obtienen valores de inclinación para alturas superiores ya que, de acuerdo con la Proposición 4.2.2, cuando llegamos a dicha altura el coseno es más pequeño que -1 , cosa que no puede darse considerando números reales. En sentido físico, esto indica que la acción del coeficiente del potencial gravitatorio J_2 es insuficiente para retrogradar el nodo lo necesario para que la variación de este sea igual al movimiento medio de la órbita aparente del Sol alrededor de la Tierra y, por consiguiente, se pierde la condición de heliosincronismo.

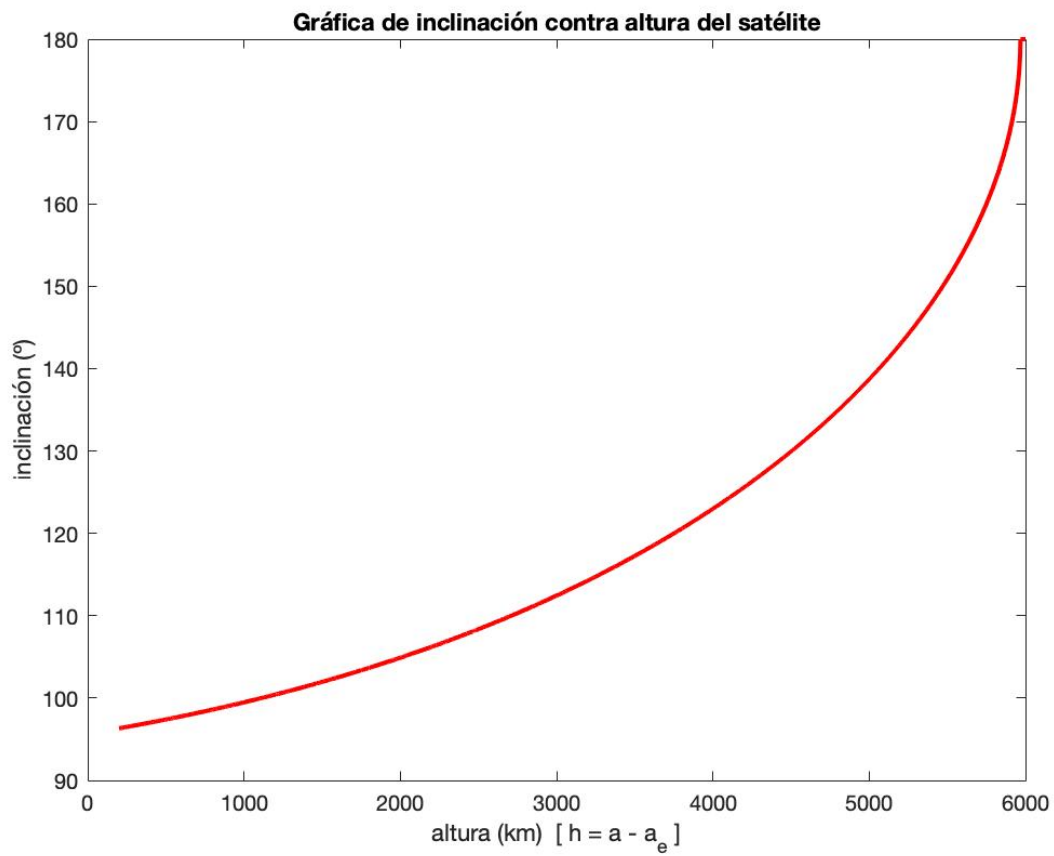


Figura 4.4: Gráfica de la inclinación en función de la altura para una órbita circular heliosíncrona. Elaboración propia.

Capítulo 5

Simulaciones numéricas

Una vez llegados a este punto, tenemos todas las herramientas que necesitamos, tanto para conocer la órbita de diseño, como para ser capaces de colocar en dicha órbita nuestro satélite. De este modo, en este capítulo describiremos dos escenarios de lanzamiento del *CubeSat*, en el primero lo haremos desde la órbita *GTO* donde estudiaremos las maniobras en varios puntos, mientras que en el segundo escenario haremos las maniobras desde la órbita alcanzada tras lanzar el satélite utilizando la *Estación Espacial Internacional*.

Para realizar estas simulaciones haremos uso de un “script” desarrollado en *MatLab* que describiremos al final del capítulo y que podemos encontrar en el Apéndice B.

5.1. Inyección en órbita desde la *GTO*

Como hemos mencionado anteriormente en este trabajo, podemos utilizar el lanzador *Ariane 5* para poner en órbita nanosatélites como el nuestro, tras el lanzamiento, el satélite se encuentra en una órbita de aparcamiento provisional denominada *GTO* cuyos elementos orbitales se definieron según Palmerini et al. (2009) en la Tabla 1.1.

Ahora, presentaremos las magnitudes de los impulsos y las direcciones de los mismos calculados según la teoría de maniobras impulsivas, presentada en el Capítulo 2. Para los diferentes casos se han elegido puntos de impulso repartidos por toda la órbita teniendo en cuenta la restricción para el semieje de la órbita heliosíncrona circular que conseguimos en el Capítulo 4. Para cada uno de estos puntos de impulso definiremos la órbita objetivo como una órbita circular heliosíncrona de radio igual al radio en el punto de impulso, ya que para realizar este tipo de maniobras las órbitas deben intersectarse.

Radio (r_I)	Anomalía (ν_I)	Impulso 1 (ΔV_1)	Dirección 1 (ψ_1)	Impulso 2 (ΔV_2)	Dirección 2 (ψ_2)
6619.191	0	2.4452	1.9795e-6	10.9260	45.2526
7200	36.0276	3.1906	37.4153	10.6804	44.1334
8200	57.1162	3.8301	47.0089	10.4314	41.5755
10200	80.3462	4.2599	52.3481	10.4807	33.0408
12000	94.8483	4.2929	54.6267	11.2036	11.4709

Tabla 5.1: Magnitudes de las maniobras desde la órbita GTO

Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 5.1, donde se recogen los datos, en orden de aparición, de: radio en el punto del impulso, dado en km , anomalía verdadera en el punto del impulso, expresada en grados, la magnitud del primer impulso, dada en km/s , la dirección del primer impulso en grados, la magnitud del segundo impulso, dada en km/s y la dirección del segundo impulso en grados.

Cuando se explicaron las maniobras, vimos el cambio de plano orbital y el cambio de elipse a circunferencia, combinando ambas maniobras podemos llegar a una órbita circular en otro plano diferente al plano de origen. El orden en el que se apliquen dichas maniobras es irrelevante para el resultado final, pero, en un análisis de misión, se busca optimizar el uso de los recursos que se disponen, por lo que, partiendo de la idea de minimizar el gasto de combustible, llegamos a la conclusión de que cuanto menor sean las magnitudes de los impulsos más eficaz será para nuestra misión. En la maniobra de cambio de forma no influye el plano en el que se encuentre por lo que lo decisivo será cuando hacer el cambio de plano, es por eso, que debemos calcular la velocidad en el punto de impulso tanto en la órbita circular como en la elíptica. Una vez hecho esto, nos interesa cambiar de plano cuando menor sea la velocidad, ya que el impulso necesario para hacerlo será menor, así, si la velocidad es menor en la circular, primero, haremos el cambio de forma y de lo contrario haremos primero el cambio de plano. Esto que acabamos de explicar está introducido dentro del programa, tras ejecutarlo sabemos que para todos estos casos la solución más óptima ha sido primero pasar a circular y luego hacer el cambio de plano por lo que los subíndices 1 corresponde con el cambio de forma y el 2 al cambio de plano.

Podemos apreciar en la tabla, que el primer valor del radio corresponde al perigeo de la órbita GTO calculado como $a_p = a(1 - e)$ y el resto de valores se han elegido consistentemente para abarcar prácticamente toda la órbita. Según aumentamos el radio, el impulso que debe recibir el satélite para pasar a circular va aumentando al igual que lo hace la dirección con la que hay que aplicar el mismo, lo mismo sucede con el impulso de la segunda maniobra, pero no se da con la dirección de esta segunda que va disminuyendo según aumenta el radio.

Anteriormente, hemos comentado que la órbita final sería la heliosíncrona circular de semieje igual al radio en el punto de impulso, lo que no conocemos es la inclinación de dichas órbitas. En la Tabla 5.2 se presentan las inclinaciones frente al radio vector del punto del impulso de la Tabla 5.1. Puede comprobarse como todas las inclinaciones corresponden a órbitas retrógradas y van aumentando a medida que lo hace el radio, estos hechos ya los adelantábamos en el Capítulo 4.

Radio (r_I)	Inclinación (i)
6619.191	96.4948
7200	98.7333
8200	103.8489
10200	120.9184
12000	164.0581

Tabla 5.2: Inclinaciones para las distintas órbitas de diseño

Llegados a este punto, ya hemos completado nuestra misión y el satélite se encontraría en la órbita circular heliosíncrona (Tabla 5.3) que hemos definido para cada caso.

Semieje (a)	Excentricidad (e)	Inclinación (i)
6619.191	0	96.4948
7200	0	98.7333
8200	0	103.8486
10200	0	120.9184
12000	0	164.0581

Tabla 5.3: Semieje, excentricidad e inclinación de las órbitas de diseño

5.2. Inyección en órbita utilizando la *ISS* y comparación

En esta sección, analizaremos la otra opción de lanzamiento que presentábamos en el Capítulo 1, también, compararemos el lanzamiento desde la *ISS* y el lanzamiento utilizando el *Ariane 5* para una misma órbita heliosíncrona y estudiaremos cual es más barata en términos de consumo de combustible.

Primero, se debe determinar la órbita objetivo, para que sea posible realizar la comparación que comentamos en el párrafo anterior, necesitamos ser capaces de poder alcanzar la misma órbita desde la órbita de aparcamiento *GTO* (Tabla 1.1), donde el *Ariane 5* dejaría el satélite tras el lanzamiento, y desde la órbita que adquiere el satélite tras eyectarlo desde la estación espacial, Tabla 1.3. Utilizando nuestro programa, hemos simulado las maniobras para la llegada a la nueva órbita, circular heliosíncrona con semieje igual al radio vector del punto de impulso.

De la misma manera que en la sección anterior, se han calculado las maniobras necesarias desde ambas órbitas, los resultados se muestran en las siguientes dos tablas.

Radio (r_I)	Anomalía (ν_I)	Impulso 1 (ΔV_1)	Dirección 1 (ψ_1)	Impulso 2 (ΔV_2)	Dirección 2 (ψ_2)
6758.965	0	0.0067	3.8018	5.9106	67.3664
6770	86.4690	0.0133	88.1333	5.9108	67.3463
6782.51	180	5.9059	67.3234	0.0067	7.7350

Tabla 5.4: Magnitudes de las maniobras para la órbita alcanzada desde la ISS

Radio (r_I)	Anomalía (ν_I)	Impulso 1 (ΔV_1)	Dirección 1 (ψ_1)	Impulso 2 (ΔV_2)	Dirección 2 (ψ_2)
6758.965	18.0192	2.6705	22.3202	10.8594	45.0049
6770	18.7075	2.6867	23.0452	10.8544	44.9848
6782.51	19.4562	2.7048	23.8202	10.8487	44.9619

Tabla 5.5: Magnitudes de las maniobras desde la órbita GTO

Los resultados obtenidos se presentan en las Tablas 5.4 y 5.5, donde se recogen los datos, en orden de aparición, de: radio en el punto del impulso, dado en km , anomalía verdadera en el punto del impulso, expresada en grados, la magnitud del primer impulso, dada en km/s , la dirección del primer impulso en grados, la magnitud del segundo impulso, dada en km/s y la dirección del segundo impulso en grados.

También, hemos calculado la inclinación, presentada en la Tabla 5.6 en grados, para la órbita final, las cuales necesitábamos para hacer el cambio de plano,

Radio (r_I)	Inclinación (i)
6758.965	96.9902
6770	97.0304
6782.51	97.0762

Tabla 5.6: Inclinación para la órbita de diseño

Al igual que en la sección anterior, la opción de cambiar de forma y luego cambiar de plano es la opción óptima para la mayoría de estos casos, pero para el último caso de la Tabla 5.4 podemos apreciar que ha habido un cambio de tendencia debido a que en este caso la mejor opción era primero cambiar el plano y posteriormente, circularizar la órbita. Para los diferentes radios hemos escogido valores que representaran en mayor medida la órbita, son el perigeo, el apogeo y un punto intermedio.

Una vez calculados los valores que caracterizan estas maniobras, podemos comparar ambas formas de llegar hasta la órbita de diseño, es sencillo hacer un análisis observando la Tabla 5.4 y la Tabla 5.5. Los impulsos necesarios para alcanzar la órbita final habiendo realizado el lanzamiento con el *Ariane 5* son varias veces mayores que los que harían falta utilizando la *Estación Espacial Internacional*.

Por lo anterior, solamente basándonos en el gasto de combustible de las maniobras, elegiremos mandarlo a la *ISS* y que sea lanzado desde allí, ya que, aun teniendo en cuenta el impulso que se le da antes de nuestras maniobras para alcanzar su órbita (Cappelletti et al., 2020), sigue siendo la opción más óptima. Lo que no debemos olvidar es que, con este tipo de maniobras, el lanzamiento utilizando la *ISS* no nos permite alcanzar una órbita heliosíncrona de cualquier semieje, a partir de las maniobras impulsivas planteadas en este trabajo, solamente aquellas que corten a la órbita alcanzada tras el lanzamiento, en este caso, el *Ariane 5* y la *GTO* nos dan más posibilidades.

5.3. *Software* empleado

El objetivo principal de este “script” es facilitar, desde un punto de vista computacional, los cálculos necesarios para calcular, tanto las órbitas de destino, como las magnitudes y direcciones necesarias para caracterizar las maniobras de llegada a dichas órbitas. Para desarrollar este programa, hemos utilizado el lenguaje de computación *MatLab*, cuyo uso está ampliamente extendido en el mundo de la *Geodesia*.

Primero, se plantean los cálculos para ambas secciones, la primera recibe el nombre de *ESCENARIO 1* y la segunda *ESCENARIO 2*. Para el primer escenario, comenzamos estableciendo los parámetros iniciales de la órbita *GTO* y luego establecemos los diferentes radios donde maniobraremos al igual que calculamos la inclinación de la órbita a la que queremos llegar. Luego, llamamos a la función “*maniobras*”, que devuelve las magnitudes de las maniobras para unos parámetros orbitales dados. Ahora, para el segundo escenario, escribimos los parámetros orbitales iniciales para la órbita que se alcanza desde la *ISS*, al igual que antes, se plantean diferentes casos para los radios, calculamos la inclinación y acabamos sacando los valores de las maniobras.

A continuación, se describen las funciones utilizadas en el programa. En primer lugar, nos encontramos con la función “*maniobras*”, esta función recibe como parámetros de entrada el radio del punto del impulso, excentricidad inicial y semiejes, e inclinaciones tanto finales como iniciales, y devuelve las magnitudes de los impulsos y las direcciones en las que se deben aplicar los mismos, así como un mensaje indicando que maniobra se ha realizado primero. Para hacer esta discriminación, antes calcula las velocidades en el punto del impulso para la órbita circular y para la elíptica, de este modo, si va más despacio en la circunferencia, primero haremos el cambio a circular y considerando un nuevo radio para el punto del impulso, cambiamos de plano, si por lo contrario la velocidad es inferior en la elipse se procederá de manera inversa.

Debajo en el “script”, podemos ver la función “*cambioDeElipseACircunferencia*”, a la que le entran excentricidad y semieje iniciales, y el radio de la circunferencia, esta devuelve la magnitud y dirección de la maniobra de cambio de forma haciendo uso del procedimiento descrito en el Capítulo 2. Utilizando esto mismo, la función “*cambioDePlano*”, calcula los valores de la maniobra de cambio de plano orbital. De entrada necesita el radio en el punto del impulso, el semieje y ambas inclinaciones.

Por último, se encuentra la función “*inclinacion*” que calcula la inclinación de una órbita heliosíncrona para una altura y excentricidad dadas, esta función ya fue vista en el Capítulo 4.

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

En la presente memoria se ha estudiado, desde una perspectiva matemática, un análisis de misión con el fin de colocar un satélite, tipo *CubeSat* de observación a la Tierra, en una órbita heliosíncrona. Se distinguen en este trabajo tres grandes bloques; en primer lugar, se ha detallado la formulación matemática de las maniobras impulsivas que permiten corregir y cambiar la órbita del satélite; en un segundo bloque, se desarrolla la teoría analítica para modelar la órbita perturbada de un satélite y deducir detalladamente la condición de heliosincronicidad y un tercer bloque donde presentan y discuten las simulaciones numéricas del consumo de combustible, en términos de ΔV , necesario para colocar un satélite en órbita heliosíncrona considerando diferentes opciones de lanzamiento.

Para definir matemáticamente la condición de heliosincronismo, se ha utilizado el desarrollo en armónicos esféricos del potencial gravitatorio para el caso de considerar la Tierra como un cuerpo extenso. A continuación, tras presentar la solución de las ecuaciones del movimiento perturbado, a partir del método de variación de las constantes, se utilizan las conocidas ecuaciones de *Lagrange* que expresan la variación de los diferentes elementos orbitales clásicos en términos de una función perturbadora. Después, se integran dichas ecuaciones considerando como función perturbadora el potencial gravitatorio terrestre, desarrollado a partir de la teoría de *Kaula* y restringido al coeficiente de mayor efecto, J_2 . Así, se deducen las expresiones para las variaciones de los parámetros orbitales clásicos producidas al considerar la Tierra como un elipsoide de revolución. Dichas perturbaciones lineales afectan únicamente al argumento del perigeo, ascensión recta del nodo ascendente y a la anomalía media.

Una vez modelado el efecto perturbador del armónico J_2 , se utilizan estas ecuaciones para caracterizar la órbita heliosíncrona. Dicha condición se obtiene imponiendo que el movimiento retrógrado del nodo sea igual a la velocidad del movimiento medio anual de la Tierra alrededor del Sol. Esta condición define la característica de heliosincronismo. Además, se destacan ciertas características y condiciones que se dan para este tipo de órbitas, como que deben de ser retrógradas y que no es posible conseguir una órbita heliosíncrona circular de radio mayor a 12337,47 km.

En la última parte de este trabajo, se presentan las simulaciones numéricas de las maniobras de cambio de inclinación y cambio de forma para pasar desde la órbita alcanzada tras el lanzamiento a la órbita final nominal, es decir, circular heliosíncrona. Se analizan dos posibles órbitas intermedias obtenidas tras lanzamientos, mediante el lanzador *Ariane 5* o usando la *ISS*.

En el primer caso, utilizando el *Ariane 5*, se han planteado diferentes puntos para realizar la maniobra impulsiva dentro de la órbita *GTO* del *Ariane 5*, desde radios de 6619 *km* hasta 12000 *km*. Los resultados muestran que en este caso, el orden de maniobras más óptimo es hacer primero el paso de órbita elíptica a circular y después el cambio de plano corrigiendo la inclinación, siendo necesarios impulsos de unos 2,5 – 4,3 *km/s* para la primera maniobra, y de unos 10,9 – 11,2 *km/s* para la segunda. Hay que señalar que según aumenta el radio del punto del impulso es mas costoso, en términos de combustible, alcanzar la órbita final.

Por otro lado, se han analizado y comparado, en un segundo conjunto de simulaciones, los casos de puesta en órbita heliosíncrona desde la *ISS* y la *GTO* del *Ariane 5*. Se han considerado tres órbitas finales a las que se puede llegar tanto desde la misma órbita *GTO* que se consigue con el *Ariane 5* como desde la órbita alcanzada tras el lanzamiento de la *ISS*. Las simulaciones numéricas muestran que resulta también óptimo cambiar primero la forma de la órbita y después la inclinación del plano orbital para el radio en el perigeo de 6758,97 *km* y para 6770 *km*, tanto para lanzamiento *GTO* o *ISS*. Para un radio de 6782,51 *km* en el apogeo, el orden óptimo de las maniobras se invierte para el caso de la *ISS*, es decir, primero se debe cambiar el plano y posteriormente circularizar la órbita.

Finalmente, los resultados muestran que resulta óptimo, en términos de consumo de combustible, alcanzar las órbitas de diseño heliosíncronas desde la *ISS*, ya que las magnitudes de las maniobras desde la *GTO* son prácticamente el doble que desde la *ISS*. En particular, para el caso del perigeo (6758,97 *km*) el total de las maniobras, ΔV , es para la *ISS* 5,92 *km/s* y para la *GTO* 13,53 *km/s*.

Apéndice A

Script para el cálculo de la inclinación de una órbita heliosíncrona

```
1 j = 1;
2 for h = 200:5960
3     i(j) = inclinacion(h, 0); % circular
4     j = j + 1
5 end
6
7 plot(200:5960,i)
8
9 xlabel('altura (km) [ h = a - a_e ]')
10 ylabel('inclinacion')
11 title('Grafica de inclinacion contra altura del satelite')
12
13
14
15 % Despejamos i en funcion del semieje y la excentricidad
16 function i = inclinacion(h, e)
17     k = -0.0989;
18     a_e = 6370;
19     i = acosd(k*(1-e^2)^(2) * ((h+a_e)/a_e)^(7/2))
20 end
```

Apéndice B

Script para el cálculo de maniobras impulsivas

B.1. Código

```
1 diary('results.txt');
2
3 % Datos de la orbita GTO
4 a_ini = 24470;
5 e_ini = 0.7295;
6 i_ini = 7;
7
8 %%% ESCENARIO 1 %%%
9
10 disp("%% ESCENARIO 1 %%%")
11
12 %%% CASO 1 %%%
13
14 disp("%% CASO 1 %%%")
15
16 % Datos de la orbita final
17 a_fin_1 = a_ini*(1-e_ini) % apogeo
18 e_fin_1 = 0;
19 i_fin_1 = inclinacion(a_fin_1 - 6370, e_fin_1)
20
21 [psi1_1, psi2_1, deltaV1_1, deltaV2_1] = maniobra(a_fin_1, e_ini, a_ini, a_fin_1,
22         i_ini, i_fin_1)
23
24 %%% CASO 2 %%%
25
26 disp("%% CASO 2 %%%")
27
28 % Datos de la orbita final
29 a_fin_2 = 7200;
30 e_fin_2 = 0;
31 i_fin_2 = inclinacion(a_fin_2 - 6370, e_fin_2)
32
33 [psi1_2, psi2_2, deltaV1_2, deltaV2_2] = maniobra(a_fin_2, e_ini, a_ini, a_fin_2,
34         i_ini, i_fin_2)
35
36 %%% CASO 3 %%%
37
38 disp("%% CASO 3 %%%")
```

```

37
38 % Datos de la orbita final
39 a_fin_3 = 8200;
40 e_fin_3 = 0;
41 i_fin_3 = inclinacion(a_fin_3 - 6370, e_fin_3)
42
43 [psi1_3, psi2_3, deltaV1_3, deltaV2_3] = maniobra(a_fin_3, e_ini, a_ini, a_fin_3,
         i_ini, i_fin_3)
44
45 %%% CASO 4 %%%
46
47 disp("%% CASO 4 %%")
48
49 % Datos de la orbita final
50 a_fin_4 = 10200;
51 e_fin_4 = 0;
52 i_fin_4 = inclinacion(a_fin_4 - 6370, e_fin_4)
53
54 [psi1_4, psi2_4, deltaV1_4, deltaV2_4] = maniobra(a_fin_4, e_ini, a_ini, a_fin_4,
         i_ini, i_fin_4)
55
56 %%% CASO 5 %%%
57
58 disp("%% CASO 5 %%")
59
60 % Datos de la orbita final
61 a_fin_5 = 12200;
62 e_fin_5 = 0;
63 i_fin_5 = inclinacion(a_fin_5 - 6370, e_fin_5)
64
65 [psi1_5, psi2_5, deltaV1_5, deltaV2_5] = maniobra(a_fin_5, e_ini, a_ini, a_fin_5,
         i_ini, i_fin_5)
66
67 %%% ESCENARIO 2 %%%
68
69 disp("%% ESCENARIO 2 %%")
70
71 % Datos de la orbita que obtiene el CubeSat desde la ISS
72 a_ISS = 6770.746;
73 e_ISS = 0.001740;
74 i_ISS = 51.723;
75
76 % Datos de la orbita final
77 a_fin = r;
78 e_fin = 0;
79 i_fin = inclinacion(a_fin - 6370, e_fin)
80
81 [psi1_ISS, psi2_ISS, deltaV1_ISS, deltaV2_ISS] = maniobra(a_fin, e_ISS, a_ISS, a_fin
         , i_ISS, i_fin)
82
83 [psi1, psi2, deltaV1, deltaV2] = maniobra(a_fin, e_ini, a_ini, a_fin, i_ini, i_fin)
84
85 %%% CASO 6 %%%
86
87 disp("%% CASO 6 %%")
88
89 % Datos de la orbita final
90 a_fin_6 = a_ISS*(1-e_ISS);
91 e_fin_6 = 0;
92 i_fin_6 = inclinacion(a_fin_6 - 6370, e_fin_6)
93
94 [psi1_6_ISS, psi2_6_ISS, deltaV1_6_ISS, deltaV2_6_ISS] = maniobra(a_fin_6, e_ISS,

```

```

    a_ISS , a_fin_6 , i_ISS , i_fin_6 )
95
96 [psi1_6_GTO , psi2_6_GTO , deltaV1_6_GTO , deltaV2_6_GTO] = maniobra(a_fin_6 , e_ini ,
    a_ini , a_fin_6 , i_ini , i_fin_6)
97
98 %%% CASO 7 %%%
99
100 disp("%% CASO 7 %%")
101
102 % Datos de la orbita final
103 a_fin_7 = 6770;
104 e_fin_7 = 0;
105 i_fin_7 = inclinacion(a_fin_7 - 6370 , e_fin_7)
106
107 [psi1_7_ISS , psi2_7_ISS , deltaV1_7_ISS , deltaV2_7_ISS] = maniobra(a_fin_7 , e_ISS ,
    a_ISS , a_fin_7 , i_ISS , i_fin_7)
108
109 [psi1_7_GTO , psi2_7_GTO , deltaV1_7_GTO , deltaV2_7_GTO] = maniobra(a_fin_7 , e_ini ,
    a_ini , a_fin_7 , i_ini , i_fin_7)
110
111 %%% CASO 8 %%%
112
113 disp("%% CASO 8 %%")
114
115 % Datos de la orbita final
116 a_fin_8 = 6782.5;
117 e_fin_8 = 0;
118 i_fin_8 = inclinacion(a_fin_8 - 6370 , e_fin_8)
119
120 [psi1_8_ISS , psi2_8_ISS , deltaV1_8_ISS , deltaV2_8_ISS] = maniobra(a_fin_8 , e_ISS ,
    a_ISS , a_fin_8 , i_ISS , i_fin_8)
121
122 [psi1_8_GTO , psi2_8_GTO , deltaV1_8_GTO , deltaV2_8_GTO] = maniobra(a_fin_8 , e_ini ,
    a_ini , a_fin_8 , i_ini , i_fin_8)
123
124 diary('off');
125
126 function [psi1 , psi2 , deltaV1 , deltaV2] = maniobra(r , e_ini , a_ini , a_fin , i_ini ,
    i_fin)
127     mu = 3.986005*10^5;
128     v_c = (mu*(1/a_fin))^(1/2);
129     v_e = (mu*((2/a_fin)-(1/a_ini)))^(1/2);
130
131     if v_c < v_e
132         [psi1 , deltaV1] = cambioDeElipseACircunferencia(a_ini , a_fin , e_ini);
133         a_ini = r;
134         [psi2 , deltaV2] = cambioDePlano(r , a_ini , i_ini , i_fin);
135         disp("Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de
            plano")
136     else
137         [psi1 , deltaV1] = cambioDePlano(r , a_ini , i_ini , i_fin);
138         [psi2 , deltaV2] = cambioDeElipseACircunferencia(a_ini , a_fin , e_ini);
139         disp("Primero se cambia de plano y posteriormente cambiamos de forma a
            circular")
140     end
141
142
143 end
144
145 function [psi , deltaV] = cambioDeElipseACircunferencia(a_ini , a_fin , e_ini)
146     mu = 3.986005*10^5;
147     % Anomalia verdadera en el instante del impulso.

```

```

148     nu_I = acosd((a_ini*(1 - e_ini^2) - a_fin)/(e_ini * a_fin))
149     % Angulo de vuelo
150     gamma_I = atan2d(e_ini * sind(nu_I), 1 + e_ini * cosd(nu_I));
151     % Angulo entre velocidades
152     phi = gamma_I;
153     % Velocidad en la elipse
154     v_e = (mu*((2/a_fin)-(1/a_ini)))^(1/2);
155     % Velocidad en la circunferencia
156     v_c = (mu*(1/a_fin))^(1/2);
157     % Magnitud del impulso
158     deltaV = (v_e^2 + v_c^2 - 2*v_e*v_c*cosd(phi))^(1/2);
159     % Direccion del impulso
160     psi = asind((v_c*sind(phi))/deltaV);
161 end
162
163 function [psi, deltaV] = cambioDePlano(r, a_ini, i_ini, i_fin)
164     mu = 3.986005*10^5;
165     % Angulo entre las velocidades
166     phi = i_fin - i_ini;
167     % Velocidad en la elipse
168     v = (mu*((2/r)-(1/a_ini)))^(1/2);
169     % Magnitud del impulso
170     deltaV = (2*v^2 - 2*cosd(phi)*v^2)^(1/2);
171     % Direccion del impulso
172     psi = asind((v*sind(phi))/deltaV);
173 end
174
175 function i = inclinacion(h, e)
176     k = -0.0989;
177     a_e = 6370;
178     i = acosd(k*(1-e^2)^(2) * ((h+a_e)/a_e)^(7/2));
179 end

```

B.2. Resultados

```
1  %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% ESCENARIO 1  %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%
2  %% %% %% CASO 1  %% %% %%
3
4  a_fin_1 =
5
6      6.6191e+03
7
8
9  i_fin_1 =
10
11     96.4948
12
13
14  nu_I =
15
16     1.4788e-06
17
18  Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
19
20  psi1_1 =
21
22     1.9795e-06
23
24
25  psi2_1 =
26
27     45.2526
28
29
30  deltaV1_1 =
31
32     2.4452
33
34
35  deltaV2_1 =
36
37     10.9260
38
39  %% %% %% CASO 2  %% %% %%
40
41  i_fin_2 =
42
43     98.7333
44
45
46  nu_I =
47
48     36.0276
49
50  Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
51
52  psi1_2 =
53
54     37.4153
55
56
57  psi2_2 =
58
59     44.1334
```

```
60
61
62 deltaV1_2 =
63     3.1906
64
65
66
67 deltaV2_2 =
68     10.6804
69
70
71 %%% CASO 3 %%%
72
73 i_fin_3 =
74     103.8489
75
76
77
78 nu_I =
79     57.1162
80
81
82 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
83
84 psi1_3 =
85     47.0089
86
87
88
89 psi2_3 =
90     41.5755
91
92
93
94 deltaV1_3 =
95     3.8301
96
97
98
99 deltaV2_3 =
100
101     10.4314
102
103 %%% CASO 4 %%%
104
105 i_fin_4 =
106     120.9184
107
108
109
110 nu_I =
111     80.3462
112
113
114 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
115
116 psi1_4 =
117     52.3481
118
119
120
121 psi2_4 =
```

```
122
123     33.0408
124
125
126 deltaV1_4 =
127
128     4.2599
129
130
131 deltaV2_4 =
132
133     10.4807
134
135 %% %% CASO 5 %% %%
136
137 i_fin_5 =
138
139     164.0581
140
141
142 nu_I =
143
144     94.8483
145
146 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
147
148 psi1_5 =
149
150     54.6267
151
152
153 psi2_5 =
154
155     11.4709
156
157
158 deltaV1_5 =
159
160     4.2929
161
162
163 deltaV2_5 =
164
165     11.2036
166
167 %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% ESCENARIO 2 %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%
168 %% %% CASO 6 %% %%
169
170 i_fin_6 =
171
172     96.9902
173
174
175 nu_I =
176
177     1.9034e-05
178
179 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
180
181 psi1_6_ISS =
182
183     3.8018e-05
```

```
184
185
186 psi2_6_ISS =
187
188     67.3664
189
190
191 deltaV1_6_ISS =
192
193     0.0067
194
195
196 deltaV2_6_ISS =
197
198     5.9106
199
200
201 nu_I =
202
203     18.0192
204
205 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
206
207 psi1_6_GTO =
208
209     22.3202
210
211
212 psi2_6_GTO =
213
214     45.0049
215
216
217 deltaV1_6_GTO =
218
219     2.6705
220
221
222 deltaV2_6_GTO =
223
224     10.8594
225
226 %%% CASO 7 %%%
227
228 i_fin_7 =
229
230     97.0304
231
232
233 nu_I =
234
235     86.4690
236
237 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
238
239 psi1_7_ISS =
240
241     88.1333
242
243
244 psi2_7_ISS =
245
```

```
246     67.3463
247
248
249 deltaV1_7_ISS =
250
251     0.0133
252
253
254 deltaV2_7_ISS =
255
256     5.9108
257
258
259 nu_I =
260
261     18.7075
262
263 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
264
265 psi1_7_GTO =
266
267     23.0452
268
269
270 psi2_7_GTO =
271
272     44.9848
273
274
275 deltaV1_7_GTO =
276
277     2.6867
278
279
280 deltaV2_7_GTO =
281
282     10.8544
283
284 %%% CASO 8 %%%
285
286 i_fin_8 =
287
288     97.0762
289
290
291 nu_I =
292
293     176.1199
294
295 Primero se cambia de plano y posteriormente cambiamos de forma a circular
296
297 psi1_8_ISS =
298
299     67.3234
300
301
302 psi2_8_ISS =
303
304     7.7350
305
306
307 deltaV1_8_ISS =
```

```
308
309     5.9059
310
311
312 deltaV2_8_ISS =
313
314     0.0067
315
316
317 nu_I =
318
319     19.4562
320
321 Primero se cambia de forma a circular y posteriormente cambiamos de plano
322
323 psi1_8_GTO =
324
325     23.8202
326
327
328 psi2_8_GTO =
329
330     44.9619
331
332
333 deltaV1_8_GTO =
334
335     2.7048
336
337
338 deltaV2_8_GTO =
339
340     10.8487
```

Índice de figuras

1.1. Satélite <i>CubeSat</i> en órbita.	1
1.2. Lanzador <i>Ariane 5</i>	3
1.3. <i>Estación Espacial Internacional</i>	4
1.4. <i>Poly Picosatellite Orbital Deployer (PPOD)</i>	4
2.1. Descripción de una maniobra impulsiva	8
2.2. Maniobra de cambio de plano	9
2.3. Maniobra de cambio de forma	12
4.1. Representación de diferentes órbitas a lo largo de un año con línea de los nodos fija . . .	25
4.2. Representación de diferentes órbitas a lo largo de un año con δ fijo.	25
4.3. Representación de la órbita aparente del Sol y de los parámetros involucrados en la condición de heliosincronismo	26
4.4. Gráfica de la inclinación en función de la altura para una órbita circular heliosíncrona . .	30

Índice de tablas

1.1. Parámetros orbitales nominales para la órbita <i>GTO</i>	3
1.2. Parámetros orbitales nominales para la órbita de la <i>ISS</i>	4
1.3. Parámetros orbitales nominales para la órbita alcanzada desde la <i>ISS</i>	5
3.1. Valores de p y q	20
5.1. Magnitudes de las maniobras desde la órbita <i>GTO</i>	32
5.2. Inclinaciones para las distintas órbitas de diseño	33
5.3. Semieje, excentricidad e inclinación de las órbitas de diseño	33
5.4. Magnitudes de las maniobras para la órbita alcanzada desde la <i>ISS</i>	34
5.5. Magnitudes de las maniobras desde la órbita <i>GTO</i>	34
5.6. Inclinación para la órbita de diseño	34

Referencias

- Arianespace, 2021. Technical overview. Ariane 5. https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2020/06/Arianespace_Brochure_Ariane5_Sept2019.pdf. Consultada el 28/11/2021.
- Cappelletti, C., Battistini, S., Malphrus, B., 2020. CubeSat Handbook: From Mission Design to Operations.
- Chan, K., Zhou, W., 2018. Statistical Pairwise Collision Probability of the International Space Station with Debris.
- Coronel Mariño, G., Burger, E., Loureiro, G., Bogossian, O., 2016. Mission analysis for a remote sensing CubeSat mission over the Amazon rainforest.
- DLR, 2020. The International Space Station ISS - Research in space benefiting humanity <https://www.dlr.de/content/en/articles/missions-projects/iss/iss-international-space-station.html>. Consultada el 02/02/2022.
- ESA, 2005. https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Spain/El_Ariane_5_mejorado_demuestra_su_capacidad_para_transportar_grandes_cargas. Consultada el 09/12/2021.
- ESA, 2021. Technology cubesats https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Engineering_Technology/Technology_CubeSats. Consultada el 04/11/2021.
- Francis, C.R., Graf, G., Edwards, P.G., McCraig, M., McCarthy, C., Lefebvre, A., Pieper, B., Pouvreau, P.Y., Wall, R., Weschler, F., 1995. The ERS-2 spacecraft and its payload. ESA Bulletin 83, 13–31.
- Haque, S.E., Keidar, M., Lee, T., 2013. Low-thrust orbital maneuver analysis for cubesat spacecraft with a micro-cathode arc thruster subsystem.
- Heiskanen, W., Heiskanen, W., Moritz, H., 1967. Physical Geodesy. Series of books in geology, W. H. Freeman.
- Helvajian, H., Janson, S.W., 2009. Small satellites: Past, present, and future.
- JPL, 2018. Mars InSight. Launch Press Kit (Mars Cube One) https://www.jpl.nasa.gov/news/press_kits/insight/launch/download/mars_insight_launch_presskit.pdf. Consultada el 04/11/2021.
- Kaula, W.M., 1966. Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy.

- Kintziger, C., 2013. Feasibility of a UV imager onboard a Cubesat platform. Master thesis .
- Lagier, R., 2020. Ariane 5. User's manual. Issue 5. Revision 3. Arianespace.
- Leschly, K., Sprague, G., Rademacher, J., 1999. Carrier spacecraft using Ariane-5 GTO piggyback launch. *Acta Astronautica* 45, 527–531. Third IAA International Conference on Low-Cost Planetary Missions.
- Mecklenburg, S., 2017. Sentinel-3 User Handbook. European Space Agency (ESA).
- Montenbruck, O., Gill, E., 2000. Satellite orbits: Models, methods and applications. Springer-Verlag.
- Mugnier, D., 2000. Ariane 5 ASAP. User's manual. Issue 1. Revision 0. Arianespace.
- Palmerini, G., Sabatini, M., Perrotta, G., 2009. En route to the Moon using GNSS signals. *Acta Astronautica* 64, 467–483.
- Parrinello, T., Shepherd, A., Bouffard, J., Badessi, S., Casal, T., Davidson, M., Fornari, M., Maestroni, E., Scagliola, M., 2018. Cryosat: ESA's ice mission. Eight years in space. *Advances in Space Research* 62.
- Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C., Factor, J.K., 2012. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 117. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2011JB008916>.
- Puig-Suari, J., Turner, C.S., Ahlgren, W., 2001. Development of the standard cubesat deployer and a cubesat class picosatellite. 2001 IEEE Aerospace Conference Proceedings (Cat. No.01TH8542) .
- Robledo, P., Herrera Arroyave, J., Gutierrez, S., Perez, J., Bermúdez-Reyes, B., 2015. Proceso de diseño de una estructura nanosatélital cubesat.
- Sevilla, M.J., 1989. Mecánica celeste clásica. Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC).
- Sidi, M.J., 1997. Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach. Cambridge Aerospace Series, Cambridge University Press.
- Villela, T., Costa, C.A., Brandão, A., Bueno, F.T., Leonardí, R.J., 2019. Towards the thousandth cubesat: A statistical overview. *International Journal of Aerospace Engineering* .
- Virginia CubeSat Constellation, 2021. Virginia cubesat constellation <https://vsgc.odu.edu/virginiacubesatconstellation/>. Consultada el 09/12/2021.
- Wild, F., 2020. What Is the International Space Station? <https://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8/features/nasa-knows/what-is-the-iss-58.html>. Consultada el 02/02/2022.