TRABAJO DE FIN DE GRADO, JULIO 2013

TOPOLOGÍA DIFERENCIAL: APROXIMACIÓN Y HOMOTOPÍA

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

JUAN ÁNGEL ROJO CARULLI

ABSTRACT. In this paper we deal with aproximation and homotopy of continuous and proper continuous mappings *whose target is a manifold with boundary.* That requires a careful examination of the construction of collars in manifolds with boundary, which will enable us to find diferentiable *pseudoretracts* onto the boundary. On the other hand, to use the aproximation and homotopy results known for boundaryless manifols, we will embed any given manifold with boundary into a boundaryless manifold of the same dimension *in the same ambient space.*

Índice

1. Introducción

Este trabajo se ha desarrollado a partir del estudio de la cohomología de de Rham. Dicha cohomología, o mejor, dicha manera de definir o calcular la cohomología mediante formas diferenciales, puede utilizarse para espacios que tengan el tipo de homotopía de una variedad diferenciable. Esto implica, en palabras de Milnor [5] hacer *topología desde el punto de vista diferencial.* Esquemáticamente se procede así: se eligen modelos diferenciables del tipo de homotopía y se estudia cómo las clases de homotopía de las aplicaciones continuas se pueden representar mediante aplicaciones diferenciables. Este procedimiento habitual

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57R19, 57R35, 58A12.

Parcialmente subvencionado por el Proyecto GAAR MTM2011-22435.

está limitado por la presencia de borde (véase cualquier libro sobre la materia, por ejemplo: [2], [3], [4], [5], [6]). En efecto, las variedades diferenciables con borde tienen ciertas dificultades de manipulación diferenciable, ilustradas por el hecho de que no son retracto *diferenciable* de entornos suyos. Por ello, se toman como modelos del tipo de homotopía las variedades diferenciables *sin borde,* una elección adecuada porque toda variedad diferenciable con borde tiene el tipo de homotopía de una variedad diferenciable sin borde. Sin embargo esto elude la cuestión natural siguiente: *¿se puede calcular la cohomología de una variedad diferenciable con borde utilizando formas diferenciales?*

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y en este trabajo demostramos los resultados de aproximación y homotopía necesarios para ello. Aunque no puedan tener la misma generalidad que para variedades diferenciables sin borde, permiten construir perfectamente la cohomología de de Rham, que es lo que interesa aquí. Como decíamos, estos resultados no se encuentran en la literatura habitual (o que nosotros conozcamos) y aunque seguramente pertenecen a lo que los especialistas suelen denominar *folklore,* pensamos que es interesante disponer de una presentación detallada como la nuestra.

2. Preliminares

Para definiciones y notaciones seguimos fielmente [6, Caps. I & III] (o [7, Ch.II]). En beneficio del lector, las resumimos a continuación en varios párrafos, incluyendo asímismo los resultados básicos que necesitaremos en las secciones siguientes.

Definición 2.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$, y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Se dice que f es *propia* si para todo compacto $K \subset Y$, la imagen inversa $f^{-1}(K) \subset X$ es compacto. Como estamos en espacios afines, esto es equivalente a decir que si (x_k) es una sucesión en X tal que $(f(x_k))$ converge en Y, entonces (x_k) posee una subsucesión que converge en X.

Observamos:

(1) Sea $Y \subset Z \subset \mathbb{R}^p$. Si $f : X \to Z$ es propia y $f(X) \subset Y$, entonces $f : X \to Y$ es propia. Por otra parte, si $f : X \to Y$ es propia e Y es cerrado en Z, entonces $f : X \to Z$ es propia.

(3) Una condición sencilla pero muy útil para que $f : X \to Y$ sea propia es que los sean sus restricciones $f|_{F_i} : F_i \to Y$ a los miembros de un recubrimiento cerrado finito $\{F_1, \dots, F_r\}$ de X.

Definición 2.2. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^p$ se llama *localmente cerrado* si es intersección de un abierto y un cerrado. Esto es equivalente a que X sea abierto en su adherencia $\overline{X}$ en $\mathbb{R}^p$.

Recordemos que los conjuntos localmente cerrados de un espacio afín son exactamente los conjuntos localmente compactos.

(2.A) Variedades diferenciables con borde. Empezamos con dos definiciones:

Definición 2.3. Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es *diferenciable* si para todo $x \in X$ existe un abierto U^x de $\mathbb{R}^p$ que contiene a x y una aplicación diferenciable ($\mathcal{C}^\infty$ en el sentido del análisis) $F_x : U^x \to \mathbb{R}^p$ tal que

$F_x|_{U^x\cap X} = f|_{U^x\cap X}$. Si además f es biyectiva y su inversa es también diferenciable, diremos que f es un *difeomorfismo* y que X e Y son *difeomorfos*.

Una herramienta básica para manipular y construir aplicaciones diferenciables es:

Proposición y Definición 2.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ y sea $X = \bigcup_i V_i$ un recubrimiento abierto de X. Existe una familia de aplicaciones θ_i que cumple:*

(1) *Cada $\theta_i : X \to [0,1]$ es diferenciable.*

(2) *Cada $x \in X$ posee un entorno V^x en X en el que todas las θ_i son idénticamente nulas salvo un número finito, de modo que la suma $\sum_i \theta_i$ está bien definida y es $\equiv 1$.*

(3) *$\overline{\{\theta_i > 0\}} \subset V_i$ para todo i.*

Una tal familia $\{\theta_i\}$ se llama *partición diferenciable de la unidad asociada a los V_i.*

Observamos que este resultado no se enuncia normalmente para un conjunto arbitrario $X \subset \mathbb{R}^p$ [6, I.3.2], pero en realidad basta tenerlo para abiertos de $\mathbb{R}^p$. En efecto, si $\{V_i\}$ es un recubrimiento abierto de X, existen abiertos $U_i \subset \mathbb{R}^p$ tales que $V_i = X \cap U_i$ y si se considera $U = \bigcup_i U_i$. Este conjunto $U \subset \mathbb{R}^p$ es abierto, y dada una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_i : U \to \mathbb{R}\}$ asociada a los U_i, las restricciones $\{\theta_i|_X\}$ forman claramente una partición asociada a los V_i (son diferenciables en X y localmente finitas por construcción, y su suma es idénticamente 1 pues lo era en U).

Corolario 2.5. *Sea X un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^p$, y sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Entonces f puede extenderse a una aplicación diferenciable F definida en un abierto U de $\mathbb{R}^p$ que contiene a X.*

Demostración. Por definición, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U^x de $\mathbb{R}^p$ y una aplicación F_x que extiende a $f|_{U^x\cap X}$. Considerando $U = \bigcup_x U^x$ y una partición diferenciable $\{\theta_x\}$ en U asociada a los U^x, definimos $F = \sum_x \theta_x F_x$ que claramente es diferenciable en U y extiende a f □

Nótese que en este corolario U depende de f. Si tenemos U fijado de antemano y queremos extender cualquier f de X a U debemos exigir (y basta con ello) que X sea cerrado en U para asegurar la existencia de la extensión (se añade el abierto $U \setminus X$ en la demostración anterior).

Pasemos ya al concepto de variedad.

Definición 2.6. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$. Diremos que M es una *variedad diferenciable* si para todo $x \in M$ existe un entorno abierto U^x de x en M que es difeomorfo a un abierto de algún semiespacio afín $\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^m \cap \{x_1 \geq 0\}$. Se dice que *$x$ está en el borde* de M si corresponde por el difeomorfismo a un punto del hiperplano $\{x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^m$, y se define el *borde de M* como $\partial M = \{x \in M : x \text{ está en el borde de M}\}$. Si $\partial M = \varnothing$ diremos que M es *variedad sin borde*, y en caso contrario, *variedad con borde*. La palabra *variedad* sin especificar más se referirá a ambos casos por igual.

Obsérvese que hay que comprobar que esta definición de ∂M no depende del difeomorfismo: véase [6, I.2]. Una vez visto esto, es fácil comprobar que ∂M es cerrado en M, y por tanto $\mathrm{Int}(M)$ es abierto en M. Por otra parte, toda variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^p$

es locamente homeomorfa a un $\mathbb{H}^m$, luego en particular, es locamente compacta, y por lo dicho antes, es un subconjunto localmente cerrado de $\mathbb{R}^p$.

Para las variedades con borde necesitamos un teorema especial de inversión local, que requiere *conservación del borde*. Lo enunciamos a continuación:

Teorema 2.7. *Sean N y M variedades. Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ es un difeomorfismo local en x si y sólo si la derivada $d_x f : T_x M \to T_{f(x)}N$ es un isomorfismo lineal y existe en entorno U de x en M de modo que $f(U \cap \partial M) \subset \partial N$ lo cual convenimos en que ocurre trivialmente si $U \cap \partial M = \varnothing$.*

Demostración. [6, I.2.4, I.4.5] □

También necesitaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.8. *Sean M y N variedades. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y $x \in M$. Supongamos que $d_x f : T_x M \to T_{f(x)}N$ es inyectiva. Entonces existe en entorno abierto U de x en M de modo que $f|U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Por ser una cuestión local en M basta probarlo para abiertos del espacio afín, caso en que el resultado es una consecuencia sencilla del teorema de inversión local en espacios afines [1, I.2.1]. □

(2.B) Entornos tubulares. Las demostraciones de los siguientes resultados clásicos se pueden consultar en [6, III.2] y [7, II.4.3].

Proposición y Definición 2.9. *Sea $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde ($\partial N = \varnothing$) de dimensión n.*

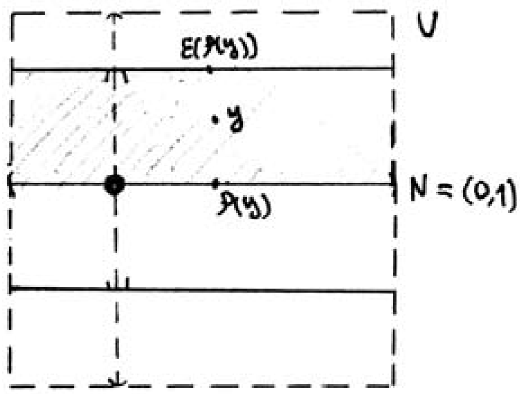
(1) *El conjunto*
$$\nu N = \{(x, u) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q : u \perp T_x N, x \in N\}$$
es una variedad sin borde de dimensión $n + (p - n) = p$ y la aplicación diferenciable
$$e : \nu N \to \mathbb{R}^q : (x, u) \mapsto x + u$$
induce un difeomorfismo de un entorno abierto Ω de $N \times \{0\}$ en νN sobre un entorno abierto U de N en $\mathbb{R}^p$.

La variedad νN se denomina *fibrado normal de N en $\mathbb{R}^q$.*

(2) *La fibración canónica $\nu : \nu N \to N : (x, u) \mapsto x$ induce entonces la retracción diferenciable $\rho = \nu \circ e^{-1} : U \to N$, que cumple, tal vez reduciendo U:*
- (a) *N es cerrado en U.*
- (b) *$y - \rho(y) \perp T_{\rho(y)}N$ para todo $y \in U$.*
- (c) *$\operatorname{dist}(y, N) = \|y - \rho(y)\|$ para todo $y \in U$.*

Se dice entonces que el par (U, ρ) es un *entorno tubular de N en $\mathbb{R}^q$.*

(3) *Además, existe una aplicación continua y estrictamente positiva $\varepsilon : N \to \mathbb{R}$ tal que el conjunto*
$$U_{\bar\varepsilon} = \big\{y \in U : \ \|y - \rho(y)\| \le \varepsilon(\rho(y))\big\}$$
es un entorno de N contenido en U y la restricción $\rho|_{U_{\bar\varepsilon}} : U_{\bar\varepsilon} \to N$ es propia.



La necesidad de esa reducción de U para que ρ sea propia se aprecia en el dibujo: sin la reducción, las fibras de los puntos son intervalos abiertos. Hacemos notar que para la construcción de un entorno tubular, la condición de que la variedad sea sin borde es esencial. Por ejemplo, si tomamos el disco cerrado $D^2 \subset \mathbb{R}^3$, la construcción del entorno tubular en el caso sin borde produce un cilindro sólido T que se retrae diferenciablemente sobre el disco, *pero T no es un entorno abierto del disco.* Esto abunda en la imposibilidad de obtener retractos diferenciables de abiertos de un espacio euclídeo sobre variedades con borde anteriormente señalada, cuya demostración está en [7, II.4.2]. Esta observación es de hecho el motivo principal por el cual es más delicado aproximar funciones cuando tratamos con variedades con borde y no podemos simplemente adaptar las demostraciones hechas para variedades sin borde.

Nos interesa añadir la siguiente precisión:

Corolario 2.10. *Sea $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde y sea (U, ρ) un entorno tubular suyo como en la proposición anterior. Entonces reduciendo U se puede conseguir que ρ sea un retracto de deformación.*

Demostración. Utilizamos el diagrama conmutativo de la demostración de 2.9, p.4, que se emplea en [6, III.2.1]:

$$\begin{array}{ccc} \nu N & \xrightarrow{e} & \mathbb{R}^q \\ \cup & & \cup \\ \Omega & \xrightarrow{\text{difeo}} & U \\ & {\scriptstyle \nu|}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \rho} & \\ & N & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x,u) & \mapsto & y = x+u \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & x & \end{array}$$

Para construir el retracto de deformación, debemos asegurarnos de que los segmentos que unen los puntos $y \in U$ y sus imágenes $\rho(y) \in N$ estén contenidos en U. La forma más fácil de conseguir esto es trabajar en Ω y trasladar por el difeomorfismo. Sea

$$\varepsilon : N \to \mathbb{R} : x \mapsto \tfrac{1}{2} d((x,0), \nu N \setminus \Omega),$$

que es continua y estrictamente positiva al ser Ω abierto en νN. De esta manera, se tiene que

$$A = \{(x,u) \in \nu N : \|u\| \leq \varepsilon(x)\} \subset \Omega,$$

ya que si $(x,u) \in A$, $d((x,0),(x,u)) = \|u\| < d((x,0),\nu N \setminus \Omega)$. Además A es entorno de $N \times \{0\}$ en νN.

Visto esto definimos $\rho_t^* : A \to A : (x,u) \mapsto (x,tu)$ que proporciona un retracto de deformación $\rho_0^* = \rho \circ e : A \to N \times \{0\}$. No hay más que trasladar por el difeomorfismo para obtener el retracto de deformación deseado $\rho_t = e^{-1} \circ \rho_t^* : e(A) \to e(A)$ con $\rho_0 = \rho : e(A) \to N$ nuestro retracto de partida. □

(2.C) Aproximación. A continuación resumimos los resultados de aproximación para variedades sin borde (véase [6, III.1.3, III.1.4] y [7, III.2.5]). Primero conviene definir qué entendemos por aproximar funciones. Para ello se necesita una topología en el conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ de las aplicaciones continuas entre dos conjuntos $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$.

Definición 2.11. Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^p$. En $\mathcal{C}(X,Y)$ definimos la *topología fuerte* como sigue. Una aplicación continua $f : X \to Y$ tien como una base de entornos los conjuntos

$$B_\varepsilon(f) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x)\},$$

donde $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ es una función continua positiva.

Nótese que esta topología es claramente más fina que la del supremo, y coincide con ella si X es compacto.

A continuación se probarán algunas propiedades de $\mathcal{C}(X,Y)$ con esta topología fuerte. Estas propiedades generales se aplicarán posteriormente en nuestro estudio de aproximación en las variedades con borde, pero además podremos usarlas en las demostraciones de los resultados de aproximación sin borde, lo que las acortará algo. En todo caso, incluirlas es más interesante porque muestra claramente por qué esas demostraciones no pueden adaptarse a variedades con borde.

La siguiente es una descripción alternativa importante de la topología fuerte:

Proposición 2.12. *Para cada abierto W de $X \times Y$ denotamos*

$$U_W = \{h \in \mathcal{C}(X,Y) : \text{grafo}(h) \subset W\}.$$

Entonces los U_W son una base de la topología fuerte.

Demostración. [6, 3.2] □

Esta propiedad implica que la topología fuerte sólo depende del tipo topológico de X e Y, pues en su definición sólo están involucrados los abiertos de $X \times Y$. En otras palabras, la topología fuerte es invariante por homeomorfismo.

La siguiente proposición afirma que *la composición por la izquierda es continua* para la topología fuerte.

Proposición 2.13. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q, Z \subset \mathbb{R}^k$, con X localmente cerrado. Sean $f, g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ dos aplicaciones continuas. Para cada $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ continua y positiva, existe $\delta : X \to \mathbb{R}$ continua y positiva tal que si $\|g - f\| < \delta$ entonces $\|h \circ g - h \circ f\| < \varepsilon$.*

Demostración. Si no impusiéramos que δ fuera una función continua, el resultado se seguiría trivialmente de la continuidad de h. Por tanto lo que haremos será construir δ y ello involucrará particiones diferenciables de la unidad. Por ser X localmente cerrado, es localmente compacto. Por tanto, para cada $x \in X$ consideramos un entorno compacto K_x de x en X. Sea

$$\varepsilon_x = \min\{\varepsilon(z) : z \in K_x\} > 0.$$

Por la continuidad de h en $f(x) \in Y$ existe $\delta_x > 0$ de modo que si $y \in Y$ verifica $\|y - f(x)\| < \delta_x$, entonces $\|h(y) - h(f(x))\| < \frac{1}{2}\varepsilon_x$. Definimos $W^x = \{y \in Y : \|y - f(x)\| < \frac{1}{2}\delta_x\}$, que es un entorno abierto de $f(x)$ en Y. Por la continuidad de f, $f^{-1}(W^x) \cap K_x$ es un entorno de x en X y podemos encontrar un entorno abierto $A^x \subset f^{-1}(W^x) \cap K_x$ de modo que si $z \in A^x$ se tenga $\|f(z) - f(x)\| < \frac{1}{2}\delta_x$.

Consideramos el recubrimiento abierto $\{A^x\}$ de X y una partición de la unidad $\{\theta_x\}$ subordinada a él. Definimos

$$\delta : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum \frac{1}{2}\delta_x\theta_x.$$

Afirmamos que si $\|g - f\| < \delta$ entonces $\|h \circ g - h \circ f\| < \varepsilon$. En efecto, dado $z \in X$, sean $\theta_{x_1}, \dots, \theta_{x_s}$ las funciones de la partición que no se anulan en z. Si $\delta_{x_{i_0}} = \max\{\delta_{x_i}\}$ entonces

$$\delta(z) = \sum_{i=1}^{s} \tfrac{1}{2}\delta_{x_i}\theta_{x_i}(z) \leq \tfrac{1}{2}\delta_{x_{i_0}}.$$

Visto esto, como $z \in A^{x_{i_0}}$ tenemos:

(i) $f(z) \in W^{x_{i_0}}$, por lo que $\|f(z) - f(x_{i_0})\| < \frac{1}{2}\delta_{x_{i_0}}$ y a su vez esto implica que $\|h(f(z)) - h(f(x_{i_0}))\| < \frac{1}{2}\varepsilon_{x_{i_0}}$.

(ii) $\|g(z) - f(x_{i_0})\| \leq \|g(z) - f(z)\| + \|f(z) - f(x_{i_0})\| < \delta(z) + \delta_{x_{i_0}} \leq \delta_{x_{i_0}}$.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\|h(g(z)) - h(f(z))\| &\leq \|h(g(z)) - h(f(x_{i_0})\| + \|h(f(x_{i_0})) - h(f(z))\| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon_{x_{i_0}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{x_{i_0}} = \varepsilon_{x_{i_0}} \leq \varepsilon(z),\end{aligned}$$

pues $z \in A^x_{i_0} \subset K_{x_{i_0}}$. □

A continuación vemos *una condición suficiente para que la composición por la derecha sea continua.*

Proposición 2.14. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q, Z \subset \mathbb{R}^k$, con Y localmente cerrado. Sea $h : X \to Y$ una aplicación propia, y sean $f, g : Y \to Z$ dos aplicaciones continuas. Para cada $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ continua y positiva, existe $\delta : X \to \mathbb{R}$ continua y positiva tal que si $\|g - f\| < \delta$ entonces $\|g \circ h - f \circ h\| < \varepsilon$.*

Demostración. Sea V_i un recubrimiento abierto de Y con $\overline{V}_i$ compacto, que existe por la compacidad local. Sea $\{\theta_i\}$ una partición de la unidad subordinada a los V_i. Como h es propia, $h^{-1}(\overline{V}_i)$ es compacto en X por lo que

$$\varepsilon_i = \min\{\varepsilon(z) : z \in h^{-1}(\overline{V}_i)\} > 0.$$

Definimos

$$\delta : Y \to \mathbb{R} : y \mapsto \sum_i \varepsilon_i \theta_i(y)$$

y vemos que $\delta(h(x)) \le \varepsilon(x)$. Dado $h(x)$ hay un número finito de funciones θ_{i_k} que no se anulan en $h(x)$, por lo que $h(x) \in V_{i_k}$; tomamos $\varepsilon_{i_0} = \max\{\varepsilon_{i_k}\}$. Entonces

$$\delta(h(x)) = \sum\nolimits_k \varepsilon_{i_k}\theta_{i_k}(h(x)) \le \varepsilon_{i_0} \le \varepsilon(x),$$

ya que $x \in h^{-1}(\overline{V}_{i_0})$. Finalmente, $\|g(h(x)) - f(h(x))\| < \delta(h(x)) \le \varepsilon(x)$. □

Terminamos este párrafo mostrando cuándo *las aplicaciones propias forman un abierto* para la topología fuerte:

Proposición 2.15. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$, con Y localmente cerrado. Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia, y sea $g : X \to Y$ una aplicación continua. Existe $\delta : X \to \mathbb{R}$ continua y positiva tal que si $\|g - f\| < \delta$ entonces g es propia.*

Demostración. Como Y es localmente cerrado, es abierto en su adherencia. Si Y no es cerrado en $\mathbb{R}^p$, tomamos

$$\delta(x) = \min\{\operatorname{dist}(f(x), \overline{Y} \setminus Y), 1\}$$

y si Y es cerrado tomamos $\delta(x) = 1$. Supongamos $\|g-f\| < \delta$, y veamos que g es propia por sucesiones: sea una sucesión (x_k) tal que $g(x_k) \to y \in Y$. Entonces para k suficientemente grande se tiene:

$$\|f(x_k)\| \le \|f(x_k) - g(x_k)\| + \|g(x_k)\| < 1 + 1 + \|y\|$$

por tanto $(f(x_k)) \subset \mathbb{R}^p$ es una sucesión acotada, por lo que tiene una subsucesión convergente (que llamamos igual) $f(x_k) \to y' \in \overline{Y}$. Hay dos casos:

(i) Si $y' \in Y$, por ser f propia, la sucesión (x_k) tiene una subsucesión convergente a cierto $x \in X$, por lo que g es propia.

(ii) Si $y' \in \overline{Y} \setminus Y$, entonces Y no es cerrado y por la elección de δ se tiene, para todo k,

$$\|f(x_k) - g(x_k)\| < \operatorname{dist}(f(x_k), \overline{Y} \setminus Y).$$

Pasando al límite, $\|y' - y\| \le \operatorname{dist}(y', \overline{Y} \setminus Y) = 0$, por lo cual $y' = y \in Y$, que es una contradicción. □

Las hipótesis para que se cumplan los resultados anteriores no son restrictivas para nosotros, pues se cumplen en el caso que nos interesa: $\mathcal{C}(X, N)$ con X localmente cerrado y N variedad (con o sin borde).

A continuación enunciamos el principal teorema de aproximación sin borde. Afirma que el conjunto de las aplicaciones diferenciables es *denso* en la topología fuerte si las aplicaciones toman valores en una variedad *sin borde*.

Teorema 2.16. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde, $f : X \to N$ una aplicación continua (propia). Para cada función positiva $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ existe una aplicación diferenciable (propia) $g : X \to N$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$.*

Demostración. Vamos a repasar la demostración de [6, II.5.2], simplificándola algo gracias a los resultados previos que hemos enunciado. Básicamente, lo que se hace es aproximar f por una interpolación lineal utilizando una partición diferenciable de la unidad. Para esto necesitamos que X sea localmente compacto, y lo es por hipótesis. Consideramos para cada $x \in X$ entornos $W_x, K_x \subset X$ de modo que:

(1) $W_x \subset K_x$ y K_x sea compacto.

(2) Se tenga que $\|f(z) - f(x)\| < \varepsilon_x$ para todo $z \in W_x$, donde $\varepsilon_x = \text{mín}\{\varepsilon(z) : z \in K_x\} > 0$.

Sea $\{\theta_x\}$ una partición diferenciable de la unidad asociada al recubrimiento $\{W_x\}$, y definamos

$$h = \sum\nolimits_x f(x)\theta_x : X \to \mathbb{R}^q.$$

Esta h es la interpolación lineal mencionada, aunque su imagen no tiene por qué estar contenida en N (pues N no es convexo en general). Veamos que aproxima a f.

Dado $z \in X$, sean $\{\theta_{x_i}\}$ las funciones que no se anulan en z, (por lo que $z \in W_{x_i}$) y sea $\varepsilon_{x_1} = \text{máx}\{\varepsilon_{x_i}\}$, por simplicidad de notación. Entonces

$$\begin{aligned} \|h(z) - f(z)\| &= \left\|\sum\nolimits_x f(x)\theta_x(z) - \sum\nolimits_x f(z)\theta_x(z)\right\| \leq \sum\nolimits_{x_i} \theta_{x_i}(z)\|f(x_i) - f(z)\| \\ &\leq \sum\nolimits_{x_i} \theta_{x_i}(z)\varepsilon_{x_i} \leq \varepsilon_{x_1} \leq \varepsilon(z), \end{aligned}$$

pues $z \in W_{x_1} \subset K_{x_1}$.

Ahora lo que hacemos es asegurarnos que la imagen de g esté contenida en un entorno tubular U de N. Para ello, como U es un abierto de $\mathbb{R}^q$, podemos tomar la función positiva $\varepsilon'(x) = \text{dist}(f(x), \mathbb{R}^q \setminus U)$ y repetir lo anterior con la función $\text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Nótese que aquí ha sido esencial que U sea abierto, y por tanto que N no tenga borde.

Una vez visto que $g(X) \subset U$, como $f, g : X \to U$, si consideramos el retracto diferenciable $\rho : U \to N$ del entorno tubular, las composiciones $\rho \circ f$ y $\rho \circ g$ están bien definidas. Ahora, sabemos que existe una función $\delta : X \to N$ positiva tal que si $\|f - g\| < \delta$, entonces $\|\rho \circ f - \rho \circ g\| < \varepsilon$ (la composición por la izquierda es continua). Como $\rho \circ f = f$, y $\rho \circ g : X \to N$ es diferenciable, basta aproximar f y g lo suficiente en el paso anterior tomando $\text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon', \delta\}$, de modo que $\rho \circ g$ sea la aproximación diferenciable de f buscada.

Si f es propia, g puede tomarse propia porque las aplicaciones propias son un abierto en la topología fuerte. □

(2.D) Homotopía. En esta sección recopilamos los resultados de homotopía para aplicaciones con valores en una variedad sin borde que necesitaremos. Una de las razones de introducir la topología fuerte es que si f y g toman valores en una variedad sin borde y están suficientemente próximas, entonces son homótopas. Más en concreto:

Teorema 2.17. *Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ localmente cerrado, $N \subset \mathbb{R}^q$ una variedad sin borde, y sea $f : X \to N$ una aplicación continua (respectivamente propia). Si $g : X \to N$ es continua y está suficientemente próxima a f entonces g es (propiamente) homótopa a f. La homotopía obtenida entre f y g es diferenciable si f y g lo son. Además:*

(1) *Si f y g están suficientemente próximas, dada una función continua positiva $\eta : X \to \mathbb{R}$, existe una homotopía (propia) $F_t : X \to N$ entre f y g de modo que $\|F_t - f\| < \eta$ para todo t.*

(2) *Si f y g están suficientemente próximas, fijado cualquier entorno abierto W de $f(X)$ en N, existe una homotopía (propia) $F_t : X \to N$ entre f y g de modo que $F([0,1] \times X) \subset W$.*

Demostración. Hay que revisar un poco la demostración de [7, II.5.3] para ver que se obtienen las condiciones adicionales. Como en esa demostración, sea $\rho : U \to N$ una retracción diferenciable de un entorno tubular de N. La idea es conseguir que la imagen de la homotopía en $\mathbb{R}^q$ dada por $H_t = tf + (1-t)g$ esté contenida en U. Esto podemos conseguirlo con g próxima a f de nuevo porque U es abierto en $\mathbb{R}^q$. Tomemos la función positiva $\varepsilon(x) = \operatorname{dist}(f(x), \mathbb{R}^q \setminus U)$. Sea $\delta : X \to \mathbb{R}$ una función positiva con $\delta \leq \varepsilon$. Si $\|f - g\| < \delta$, entonces

$$\|f(x) - H_t(x)\| = |1-t|\|f(x) - g(x)\| < \delta(x) \leq \varepsilon(x),$$

por lo que la imagen de H_t está contenida en U. Entonces definimos una homotopía en N dada por $F_t = \rho \circ H_t : X \to N$. Como $\rho \circ f = f$ y $\rho \circ g = g$, concluimos que F_t es una homotopía en N entre f y g como se quería. Además si f y g son diferenciables las H_t lo son, y como ρ es diferenciable, la homotopía F_t lo es.

(1) Para ver esto usaremos un truco: consideramos

$$f^* : [0,1] \times X \to N \subset U : (t,x) \mapsto f(x).$$

Para cualquier función continua positiva $\alpha : [0,1] \times X \to U$, consideramos la función positiva y continua

$$\alpha_0 : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha_0(x) = \min\{\alpha(t,x) : t \in [0,1]\}.$$

En esta situación, si tomamos g de modo que $\|f - g\| < \alpha_0$ ya hemos visto que $\|H_t(x) - f(x)\| < \alpha_0(x) \leq \alpha(x,t)$ para todo t.

Tenemos pues que $\|H(t,x) - f^*(t,x)\| < \alpha(t,x)$ para todo $(t,x) \in [0,1] \times X$ y por tanto, tomando α suficientemente pequeña, concluimos que H y f^* están arbitrariamente próximas en $\mathcal{C}([0,1] \times X, U)$. Por la continuidad de la composición por la izquierda, concluimos que $\rho \circ f^* = f^*$ y $F = \rho \circ H$ se pueden tomar también arbitrariamente próximas en $\mathcal{C}([0,1] \times X, N)$.

Por tanto si $\eta : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y positiva fijada de antemano, definiendo al modo anterior

$$\eta^* : [0,1] \times X \to N : (t,x) \mapsto \eta(x),$$

podemos conseguir que $\|\rho \circ H(x,t) - f^*(x,t)\| = \|F_t(x) - f(x)\| < \eta^*(x,t) = \eta(x)$ con lo que $\|F_t - f\| < \eta$ para todo t.

(2) Esto se puede hacer de dos maneras. La primera es adaptando la demostración de modo que la homotopía en $\mathbb{R}^q$, que hemos llamado H_t, tenga su imagen $H([0,1] \times X)$ contenida en $\rho^{-1}(W)$. Esto se puede hacer pues $\rho^{-1}(W)$ es un abierto en U por la continuidad de ρ y por tanto es entorno de $f(X)$ en $\mathbb{R}^p$. Si se toma la función positiva $\varepsilon(x) = \operatorname{dist}(f(x), \mathbb{R}^q \setminus \rho^{-1}(W))$ en la demostración anterior, ya está.

La segunda es usando (1): se toma la función positiva $\delta(x) = \operatorname{dist}(f(x), N \setminus W)$ de modo que existe $F_t : X \to N$ con $\|F_t - f\| < \delta$ para todo t, con lo que $F([0,1] \times X) \subset W$.

Para acabar, si f es propia, sea f^* como en (1). Se tiene que f^* es propia si f lo es, pues si $K \subset N$ es un compacto, $f^{*-1}(K) = [0,1] \times f^{-1}(K)$ es producto de compactos y por tanto compacto. En (1) vimos que f^* y $F = \rho \circ H$ pueden tomarse arbitrariamente próximas $\mathcal{C}([0,1] \times X, N)$ sin más que pedir que g esté próxima a f. Como las propias son un abierto en $\mathcal{C}([0,1] \times X, N)$, concluimos que la homotopía F se puede tomar propia.

Observamos que la función $\varepsilon(x) = \operatorname{dist}(f(x), \mathbb{R}^q \setminus U)$ definida al principio no es suficiente para garantizar que la homotopía sea propia si lo es f, con lo que es posible que haya que reducirla. □

Nótese que lo que acabamos de probar es que las clases de equivalencia por homotopía y por homotopía propia son conjuntos *abiertos* para la topología fuerte con valores en variedades *sin borde*.

A continuación mostramos el último resultado de aproximación sin borde que necesitaremos:

Teorema 2.18. *Sea $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado y sea $N \subset R^q$ una variedad sin borde. Supongamos que dos aplicaciones (propias) $f, g : X \to N$ son homótopas por la homotopía (propia) H. Entonces también son homótopas por una homotopía (propia) diferenciable H_t^*.*

Además, si W es un entorno abierto de $H([0,1] \times X)$ en N, se puede conseguir que $H^*([0,1] \times X) \subset W$.

Demostración. Como en el resultado anterior, hay que revisar la demostración de [7, II.5.4]. En esa demostración se empieza aproximando la homotopía continua (propia) H por una aplicación diferenciable (propia) $H' : X \times [0,1] \to N$, digamos $\|H - H'\| < \varepsilon$ para cierta función continua positiva $\varepsilon : [0,1] \times X \to \mathbb{R}$ (nótese que $X \times [0,1]$ es localmente cerrado por serlo X). En particular

$$\|f - H'_0\| < \varepsilon_0 \text{ y } \|g - H'_1\| < \varepsilon_1,$$

y tomando ε suficientemente pequeña, podemos asegurar por el teorema anterior que tanto f y H'_0, como g y H'_1 son homótopas por dos homotopías diferenciables (propias) F_t, G_t, respectivamente (obsérvese que si la homotopía H entre f y g es propia, f y g también lo son). Pegando al modo diferenciable F_t, H'_t y G_t se obtiene una homotopía diferenciable (propia) entre f y g (el pegado de homotopías propias es propia, y reescalar el parámetro t no varía la propiedad).

Recordado esto, veamos el además. Por ser W es un entorno abierto de $H([0,1] \times X)$ en N, también lo es de $f(X)$ y de $g(X)$, por lo que:

(i) Por estar H' arbitrariamente próxima a H, se puede conseguir que $H'([0,1] \times X) \subset W$ sin más que utlizar $\varepsilon(x,t) = \operatorname{dist}(H(x,t), N \setminus W))$.

(ii) Por el además del teorema anterior, si H'_0 y H'_1 están suficientemente próximas a f y g, entonces se tendrá que

$$F([0,1] \times X) \subset W \quad \text{y} \quad G([0,1] \times X) \subset W.$$

Finalmente, como H^* se obtiene pegando F, H' y G, y las tres tienen su imagen contenida en W, concluimos que H^* también la tendrá. $\square$

3. Construcción de collares sin flujos

Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable de dimensión m con borde ∂M e interior $\mathrm{Int}(M) = M \setminus \partial M$.

Definición 3.1. Se llama *collar* de ∂M en M a un entorno abierto U de ∂M en M equipado con un difeomorfismo $h : U \to \partial M \times [0,1)$ tal que $h(x) = (x,0)$ para $x \in \partial M$.

El objetivo de esta sección es construir collares. Primero demostramos un lema que nos será útil repetidamente:

Lema 3.2. *Sea V un entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times \mathbb{R}$. Entonces existe una función diferenciable positiva $\eta : \partial M \to \mathbb{R}^+$ tal que*
(i) *V contiene el conjunto*

$$W = \{(x,s) \in \partial M \times \mathbb{R} : -\eta(x) < s < \eta(x)\},$$

que es otro entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$.
(ii) *La aplicación*

$$\varphi : W \to \partial M \times (-1,1) : (x,s) \mapsto (x, s/\eta(x))$$

es un difeomorfismo. Se cumple:

$$\varphi\big(W \cap \{-\eta(x) < s \leq 0\}\big) = \partial M \times (-1,0], \quad \varphi\big(W \cap \{0 \leq s < \eta(x)\}\big) = \partial M \times [0,1)$$

y φ es la identidad en $\partial M \times \{0\}$.

Demostración. Para encontrar η se considera la aplicación continua

$$\lambda : \partial M \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{dist}((x,0), \partial M \times \mathbb{R} \setminus V).$$

Como V es un entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$, λ es una función positiva, y como ∂M es una variedad sin borde, podemos hacer uso de la aproximación diferenciable, 2.16, p.8, y existe una función diferenciable $\eta : \partial M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\big|\tfrac{1}{2}\lambda(x) - \eta(x)\big| < \tfrac{1}{2}\lambda(x) \quad \text{para } x \in \partial M.$$

En particular, $0 < \eta < \lambda$, de manera que el conjunto W del enunciado, que claramente contiene a $\partial M \times \{0\}$. Además es abierto por ser η continua, y está contenido en V: si $(x,s) \in W$ entonces

$$\mathrm{dist}((x,0),(x,s)) = s < \eta(x) < \lambda(x) = \mathrm{dist}((x,0), \partial M \times [0,\infty) \setminus V),$$

con lo que $(x,s) \in V$. Esto prueba (i), y (ii) es fácil: φ es biyectiva evidentemente, diferenciable por serlo la función *positiva* η, y su inversa $(x,s) \mapsto (x, \eta(x)s)$ es por lo mismo diferenciable. También es obvio que φ restringida a $\partial M \times \{0\}$ es la identidad. $\square$

Pasemos ya al resultado principal de la sección.

Teorema 3.3. *Todo entorno abierto U de ∂M en M contiene un collar.*

Demostración. Procederemos a hacer reducciones sucesivas de U hasta obtener el collar deseado. Para empezar, como $\partial M \subset \mathbb{R}^p$ es una variedad sin borde, tiene un entorno tubular en $\mathbb{R}^p$. La intersección con M de ese entorno es un entorno tubular de ∂M en M. Así pues, reduciendo U, tendremos definida una aplicación diferenciable $\rho : U \to \partial M$ que es la identidad en ∂M.

Paso 1. Obtenemos una *ecuación* de ∂M, esto es, una función diferenciable $e : U \to \mathbb{R}$ tal que: (i) $\partial M = \{e = 0\}$ y (ii) para cada $x \in \partial M$ la derivada $d_x e : T_x M \to \mathbb{R}$ es suprayectiva.

En efecto, fijemos un punto $a \in \partial M$. Existen un entorno U^a de a en M y un difeomorfismo $\varphi^a : U^a \to A^a \subset \mathbb{H}^m$, con $\varphi^a(U^a \cap \partial M) = \{x \in A^a : x_1 = 0\}$. Denotemos π_1 la proyección $x \mapsto x_1$, de modo que $e^a = \pi_1 \circ \varphi^a : U^a \to \mathbb{R}$ cumple:
(a) $e^a \geq 0$ en U^a,
(b) $U^a \cap \operatorname{Int}(M) = \{e^a > 0\}$,
(c) $U^a \cap \partial M = \{e^a = 0\}$.

Ahora consideramos el recubrimiento abierto de U formado por los U^a, $a \in \partial M$, más el abierto $U \setminus \partial M$. Sea $\{\theta_a, \theta\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a ese recubrimiento; observamos que θ es idénticamente nula en el borde ∂M. Afirmamos que la ecuación buscada es $e = \theta + \sum \theta_a e^a$.

Que se cumplen las tres propiedades anteriores es claro, pues como los sumandos $\theta, \theta_a e^a$ son todos ≥ 0, $e^a = 0$ si y sólo si todos ellos son nulos, lo que ocurre exactamente en el borde. Para ver que la derivada en un punto $p \in \partial M$ es no nula, consideramos un vector tangente *entrante* $u \in T_p M$, es decir, un vector tangente que en coordenadas locales tiene la primera positiva. En un entorno de p la función e es una suma finita $\sum \theta_a e^a$, y podemos escribir

$$\begin{aligned} d_p e(u) &= \sum \theta_a(p) d_p e^a(u) + \sum d_p \theta(u) e^a(p) = \sum \theta_a(p) d_p e^a(u) \\ &= \sum \theta_a(p) \pi_1(d_p \varphi^a(u)) = \pi_1\big(\sum \theta_a(p) d_p \varphi^a(u)\big). \end{aligned}$$

Ahora bien, el vector $u = \sum \theta_a(p) d_p \varphi^a(u)$ es una combinación positiva ($\sum \theta_a(p) = 1$, $\theta_a(p) \geq 0$) de vectores con primeras coordenadas positivas, luego su primera coordenada es positiva, en particular no nula:

$$d_p e(u) = \pi_1(u) \neq 0.$$

Paso 2. Una vez obtenida la ecuación e consideramos la aplicación diferenciable

$$h : U \to \partial M \times [0, \infty) : x \mapsto (\rho(x), e(x)).$$

Como $\rho|\partial M = \mathrm{Id}$ y $\partial M = \{e = 0\}$, resulta que $h|\partial M = (\mathrm{Id}, 0)$ y $h(\partial M) = \partial M \times \{0\}$ (o sea, h conserva el borde). Además, la aplicación h *es un difeomorfismo local en cada* $x \in \partial M$.

Para verlo, como h conserva el borde, se puede aplicar el teorema de inversión local. Así basta comprobar que la derivada $d_x h$ es un isomorfismo lineal, y como $\dim(U) = \dim(\partial M \times [0, \infty))(= m)$, eso se reduce a que $d_x h$ sea suprayectiva. Tenemos $d_x h = (d_x \rho, d_x e)$, y sabemos que $\rho|_{\partial M} = \mathrm{Id}$ y $e|_{\partial M} = 0$, luego

$$d_x h(T_x \partial M) = d_x \rho(T_x \partial M) \times d_x e(T_x \partial M) = T_x \partial M \times \{0\}.$$

Por otra parte, $d_x e : T_x M \to \mathbb{R}$ es sobre (condición (ii) de e como ecuación del borde), luego existe un vector $v \in T_x M$ tal que $d_x e(v) = 1$, y así

$$d_x h(v) = (d_x \rho(v), 1) \notin \partial M \times \{0\}.$$

En suma, la imagen de $d_x h$ contiene propiamente a $T_x \partial M \times \{0\}$ y por tanto coincide con

$$T_x \partial M \times \mathbb{R} = T_{(x,0)}\big(\partial M \times [0, \infty)\big),$$

es decir, $d_x h$ es suprayectiva.

Paso 3. Visto lo anterior, cada punto $x \in \partial M$ tiene un entorno abierto $U^x \subset U$ cuya imagen $V^x = h(U^x)$ es un entorno abierto de $h(x) = (x, 0)$ en $\partial M \times [0, \infty)$ y ademas $h|_{U^x} : U^x \to V^x$ es difeomorfismo. La unión $V = \bigcup V^x$ es un entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times [0, \infty)$, y reemplazando U por $\bigcup U^x$ podemos suponer que la aplicación $h|_U : U \to V$ es un difeomorfismo local suprayectivo. Veamos a continuación como reducir U y V para conseguir que $h|_U : U \to V$ sea inyectiva, y por ello *difeomorfismo*.

Recurriremos a la distancia euclídea en $\mathbb{R}^p$ (donde están sumergidas M y su borde); denotamos $B(x, \delta)$ la bola de centro x y radio δ. Dado $x \in \partial M$ sea

$$\tau(x) = \text{ínf}\{\delta > 0 : \text{existen } y_1 \neq y_2 \in B(x, \delta) \cap U \text{ y } s \geq 0 \text{ tales que } h(y_1) = h(y_2) = (x, s)\}.$$

Esto es, $\tau(x)$ es el ínfimo de los radios δ tales que algún $s \geq 0$, (x, s) tiene más de una preimagen en $B(x, \delta) \cap U$. Como h es localmente inyectiva resulta que $\tau(x) > 0$. Con este τ definimos

$$E = \{y \in U : \|y - \rho(y)\| < \tau(\rho(y))\}.$$

Se tiene que $h|_E$ es inyectiva. En efecto, supongamos que existen $y_1 \neq y_2 \in E$ con $h(y_1) = h(y_2)$. Entonces podemos tomar $x = \rho(y_1) = \rho(y_2)$, $s = e(y_1) = e(y_2)$ y un $\delta > 0$ tal que

$$\text{máx}\{\|y_1 - x\|, \|y_2 - x\|\} < \delta < \tau(x),$$

de manera que (x, s) posee dos preimágenes en $B(x, \delta) \cap U$ y $\tau(x)$ no sería el ínfimo que es. Sólo queda ver que E es entorno de ∂M, lo cual no es obvio pues no sabemos si τ es continua.

Dado $a \in \partial M$, como h es localmente inyectiva, existe $\varepsilon > 0$ tal que h es inyectiva en $B(a, \varepsilon) \cap U$. El conjunto

$$U^a = \{y \in U : \|y - a\| < \tfrac{\varepsilon}{3}, \|y - \rho(y)\| < \tfrac{\varepsilon}{3}\},$$

es un entorno de a en U por la continuidad de ρ. Veamos que $U^a \subset E$.

Dado $y_0 \in U^a$, tenemos $\|y_0 - \rho(y_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, luego que $y_0 \in E$ se seguirá si $\frac{\varepsilon}{3} \leq \tau(\rho(y_0))$. Sea $h(y_0) = (\rho(y_0), e(y_0)) = (x_0, s_0)$. Por reducción al absurdo, si $\tau(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ por la definición de $\tau(x_0)$ como ínfimo, existen dos puntos distintos $y_1, y_2 \in B(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \cap U$ tales que $h(y_1) = h(y_2) = (x_0, s)$ para cierto $s \geq 0$. Pero entonces

$$\begin{aligned}\|y_i - a\| &\leq \|y_i - x_0\| + \|x_0 - y_0\| + \|y_0 - a\| \\ &= \|y_i - x_0\| + \|y_0 - \rho(y_0)\| + \|y_0 - a\| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

el primer $\frac{\varepsilon}{3}$ porque $y_i \in B(x_0, \frac{\varepsilon}{3})$, el segundo y el tercero porque $y_0 \in U^a$. Esto contradice que h sea inyectiva en $B(a, \varepsilon) \cap U$.

Así hemos probado que $U^a \subset E$. Por tanto E contiene la unión $\bigcup_a U^a$, que es un entorno abierto de ∂M en U. Reemplazando U por esa unión y V por $h(U)$ conseguimos como pretendíamos que la restricción $h|_U : U \to V$ sea un difeomorfismo, por lo que V es un entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times \mathbb{R}$.

Por el lema anterior existe un difeomorfismo, $\psi : V \to \partial M \times [0,1)$, y ψ deja fijo $\partial M \times \{0\}$, por lo que U y el difeomorfismo $\psi \circ h : U \to \partial M \times [0,1)$ es el collar buscado. □

4. Inmersión en una variedad sin borde del mismo espacio ambiente

En esta sección demostramos que una variedad con borde $M \subset \mathbb{R}^p$ se puede sumergir, prolongándola ligeramente, en otra variedad sin borde N *dentro del mismo espacio afín* $\mathbb{R}^p$. El aspecto delicado aquí es que no queremos modificar el par $M \subset \mathbb{R}^p$, restricción que hace la construcción dificultosa. Si no nos preocupara reemplazar M por otro modelo diferenciable suyo, se podría utilizar un collar $h : U \equiv \partial M \times [0,1)$ como sigue. Se elige una función diferenciable creciente

$$\alpha : [0,1) \to [\tfrac{1}{2}, 1) : s \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } s = 0, \\ s & \text{para } \frac{3}{4} \leq s < 1, \end{cases}$$

y se define el difeomorfismo

$$\partial M \times [0,1) \to \partial M \times [\tfrac{1}{2}, 1) : (x,s) \to (x, \alpha(s)).$$

Vemos este difeomorfismo como una manera de sumergir U en $U \setminus \partial M$, y por la elección de α, se puede extender fuera de U por la identidad en $M \setminus U$. Esta extensión sumerge M dentro de $N = M \setminus \partial M$, que es una variedad sin borde. Pero en N no está sumergida M, sino una copia diferenciable suya resultado de contraer M en la zona cercana al borde. Aquí se probará que se puede construir otra variedad N que sí contenga a M de modo que M sea retracto de deformación continuo de N.

Teorema 4.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable de dimensión m con borde ∂M. Existe una variedad sin borde $N \subset \mathbb{R}^p$ que contiene a M y M es retracto de deformación continuo de N vía una homotopía $\rho_t : N \to N$; denotaremos $\rho = \rho_0 : N \to M$ la retracción correspondiente. Además, M tiene un entorno cerrado T en N tal que $\rho_t|_T$ es propia.*

Demostración. Sea $U \subset M$ un collar de ∂M, es decir, un entorno abierto suyo en M equipado con un difeomorfismo $h : U \to \partial M \times [0,1)$; denotamos $V = \partial M \times [0,1)$ y $g = h^{-1} : V \to U \subset M \subset \mathbb{R}^p$.

Paso 1. Consideramos una extensión diferenciable $G : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^p$ de g a un abierto $\widetilde{V} \subset \partial M \times (-1,1)$ que contenga a V. Como ∂M es localmente compacto, es abierto en su adherencia en $\mathbb{R}^p$, y $C = G^{-1}\big(\overline{\partial M} \setminus \partial M\big) \subset \widetilde{V}$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$. Reemplazando $\widetilde{V}$ por $\widetilde{V} \setminus C$ podemos suponer que

$$G(\widetilde{V}) \cap \big(\overline{\partial M} \setminus \partial M\big) = \varnothing. \qquad (1)$$

Visto esto, dado $(x,0) \in \widetilde{V}$, por ser G extensión de g se verifica

$$d_{(x,0)}G = d_{(x,0)}g : T_{(x,0)}V \to T_{G(x,0)}\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p,$$

por lo que es inyectiva, y entonces existe $V^x \subset \widetilde{V}$ entorno abierto de $(x,0)$ en $\partial M \times R$ tal que $G|_{V^x} : V^x \to G(V^x)$ es difeomorfismo, por lo que $G(V^x)$ es una subvariedad diferenciable de R^n, por serlo V^x : hemos añadido un pequeño parche a M cerca de cada x, y ahora debemos asegurarnos de que este parche no vuelva a tocar a M pues queremos que la extensión sea una variedad.

Paso 2. Tenemos $G(V^x \cap \{s \geq 0\}) = g(V^x \cap \{s \geq 0\})$ y como g es homeomorfismo, el último conjunto es abierto en U luego en M, y existe un abierto A^x de $\mathbb{R}^p$ tal que $A^x \cap M = G(V^x \cap \{s \geq 0\})$. Cambiando V^x por $G^{-1}(A^x) \cap V^x$, entonces se tiene que

$$G(V^x) \cap M \subset A^x \cap M = G(V^x \cap \{s \geq 0\}) \subset G(V^x) \cap M,$$

y por tanto $G(V^x) \cap M = G(V^x \cap \{s \geq 0\})$, y $G(V^x) \setminus M = G(V^x \cap \{s < 0\})$ por lo que si cambiamos $\widetilde{V}$ por $\bigcup_x V^x$, tenemos otro entorno $\widetilde{V}$ de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times \mathbb{R}$ tal que

$$(2) \qquad G(\widetilde{V}) \cap M = G(\widetilde{V} \cap \{s \geq 0\}) \quad \text{y} \quad G(\widetilde{V}) \setminus M = G(\widetilde{V} \cap \{s < 0\}).$$

Con este nuevo dominio $\widetilde{V}$, la aplicación G lleva difeomórficamente entornos de puntos de $\widetilde{V}$ a sus imágenes, y el parche que añade G a M no vuelve a cortar a M.

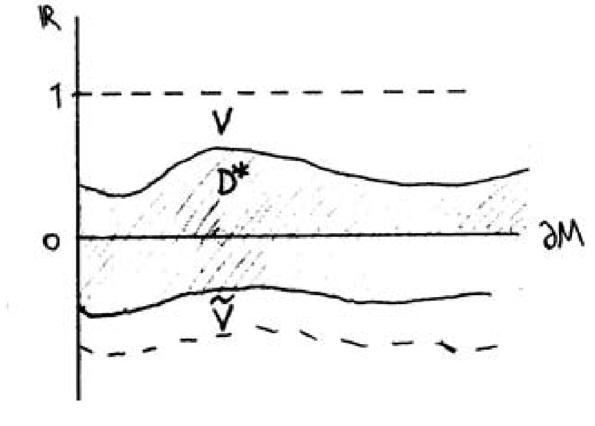
El objetivo de las siguientes manipulaciones será conseguir que $M \cup G(\widetilde{V})$ sea una variedad.

Paso 3. Primero veamos la inyectividad de G en un dominio menor. Consideramos

$$E_0 = \left\{ (x,s) \in \widetilde{V} : \|G(x,s) - x\| \Big(\|x\| + \frac{1}{d\big(x, \overline{\partial M} \setminus \partial M\big)} \Big) < 1 \right\}$$

que es entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times \mathbb{R}$, y sea D un abierto en $\partial M \times \mathbb{R}$ tal que

$$\partial M \times \{0\} \subset D \subset D^* \subset E_0.$$



Aquí y en lo sucesivo, denotaremos con el asterisco * las adherencias en $\partial M \times \mathbb{R}$. Esta elección de D nos convendrá más adelante para argumentos de convergencia de sucesiones en D. Sea también

$$E = \{(x,s) \in D : \text{existe } (y,t) \in D \text{ tal que } (y,t) \neq (x,s) \ \& \ G(y,t) = G(x,s)\},$$

que es el conjunto del que deseamos librarnos.

Observamos que si $G(y,t) = G(x,s)$ y $s \geq 0$ entonces $G(y,t) \in M$, por lo que $t \geq 0$ y se tendría $g(y,t) = g(x,s)$; como g es inyectiva, $(x,s) = (y,t)$. Por tanto $E \subset D \cap \{s \leq 0\}$. De hecho, vamos a ver que $(\partial M \times \{0\}) \cap E^* = \varnothing$.

Por reducción al absurdo, sea una sucesión (x_k, s_k) de E tal que $(x_k, s_k) \to (x_0, 0)$. Por la definición de E existe una sucesión (y_k, t_k) de D con $(y_k, t_k) \neq (x_k, s_k)$, tal que $G(y_k, t_k) = G(x_k, s_k) \to G(x_0, 0) = x_0$.

A la vista de la definición de E_0, tenemos dos casos, según la sucesión z_k esté o no acotada, siendo

$$z_k = \|y_k\| + \frac{1}{d\big(y_k, \overline{\partial M} \setminus M\big)}.$$

(i) Si z_k está acotada, debe ocurrir que: (a) $\|y_k\|$ esté acotada y (b) $d(y_k, \overline{\partial M} \setminus M) \geq c > 0$.

En consecuencia, tanto (y_k) como $(t_k) \subset (-1, 1)$ están acotadas, y tomamos una subsucesión convergente (que llamamos igual) $(y_k, t_k) \to (y, t) \in \overline{D}$. Afirmamos que ese límite está en $D^* \subset \widetilde{V}$. En efecto, $y \in \partial M$ por (b), y en consecuencia $(y, t) \in \partial M \times \mathbb{R}$ es adherente a D, o sea $(y, t) \in D^*$. Visto esto, $G(y, t) = G(x_0, 0) = x_0 \in M$ y por (2), $t \geq 0$, con lo que $g(y, t) = G(y, t) = x_0 = g(x_0, 0)$, y como g es inyectiva $(y, t) = (x_0, 0)$. Pero G es inyectiva en un entorno de $(x_0, 0)$, en el que $(y_k, t_k), (x_k, s_k)$ están para k grande. Contradicción.

(ii) Si z_k no está acotada, por cómo se define E_0, debe ocurrir que una subsucesión de (y_k, t_k) verifique $\|G(y_k, t_k) - y_k\| \to 0$, y por tanto $y_k \to x_0$. Extrayendo otra subsucesión $t_k \to t$, tenemos que $G(y_k, t_k) \to G(y, t) = G(x_0, 0) = x_0 \in M$ por lo que igual que antes $(y, t) = (x_0, 0)$ y de nuevo esto contradice que G sea inyectiva en un entorno de $(x_0, 0)$.

Por tanto $W = D \setminus E^*$ es un entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times \mathbb{R}$, en el que G induce por restricción una aplicación inyectiva $G|_W : W \to G(W)$ que lleva entornos de puntos difeomórficamente a sus imágenes. Pero esto no nos garantiza que G sea homeomorfismo sobre la imagen, con lo que no sabemos todavía que $G(W)$ sea variedad.

Paso 4. Ahora vamos a ver que restringiendo un poco más W conseguimos que G sea propia. Sea W_0 un entorno abierto de $\partial M \times \{0\}$ en $\partial M \times \mathbb{R}$ tal que $W_0 \subset W_0^* \subset W$. Veamos que $G|_{W_0} : W_0 \to G(W_0)$ es propia, y en consecuencia un difeomorfismo.

Sea una sucesión $(y_k, t_k) \in W_0$ tal que $G(y_k, t_k) \to G(y_0, t_0)$ para cierto $(y_0, t_0) \in W_0$. Hay que ver que (y_k, t_k) tiene una subsucesión convergente a un punto de W_0. Como $(y_k, t_k) \in E_0$, distinguimos casos:

(i) Si z_k, definido arriba, está acotada, del mismo modo que razonamos antes existe una subsucesión que llamamos igual tal que $(y_k, t_k) \to (y, t) \in W_0^* \subset W$, por lo que $G(y_k, t_k)$ converge tanto a $G(y_0, t_0)$ como a $G(y, t)$. Así $G(y_0, t_0) = G(y, t)$ y como G es inyectiva en W, tenemos que $(y, t) = (y_0, t_0)$ y por tanto (y_k, t_k) converge a $(y_0, t_0) \in W_0$.

(ii) Si z_k no está acotada, sea una subsucesión tal que $\|G(y_k, t_k) - y_k\| \to 0$. Por tanto $y_k \to G(y_0, t_0) = z_0 \in G(W_0)$. Claramente $z_0 \in \overline{\partial M}$ y por (1) $z_0 \in \partial M$. Como los t_k están acotados, volvemos a extraer una subsucesión tal que

$$(y_k, t_k) \to (z_0, s_0) \in \overline{W}_0 \cap (\partial M \times \mathbb{R}) = W_0^* \subset W,$$

por lo que $G(y_k, t_k) \to G(z_0, s_0)$, por tanto $G(z_0, s_0) = G(y_0, t_0)$ y por la inyectividad de G en W, concluimos $(z_0, s_0) = (y_0, t_0) \in W_0$.

De este modo, $G|_{W_0} : W_0 \to G(W_0)$ es biyectiva y cerrada, y por tanto homeomorfismo. Ahora, volviendo al recubrimiento abierto $\{V^x\}$ de $\partial M \times \{0\}$, vimos que cada restricción $G|_{W_0 \cap V^x} : W_0 \cap V^x \to G(W_0 \cap V^x)$ es difeomorfismo. Como $G|_{W_0}$ es abierta y V^x es abierto de $\partial M\times\mathbb{R}$, entonces $G(W_0\cap V^x)$ es abierto en $G(W_0)$. En conclusión, $G|_{W_0}:W_0\to G(W_0)$ es un difeomorfismo local biyectivo, y por tanto un difeomorfismo.

En esta situación, W_0 es abierto en la variedad sin borde $\partial M\times\mathbb{R}$, por lo que W_0 es variedad sin borde, y entonces también lo es $G(W_0)\subset\mathbb{R}^p$. Ahora tomaríamos $N=M\cup G(W_0)$, es decir, añadiríamos a M la variedad $G(W_0)$ que cubre el borde ∂M. Sin embargo podrían aparecer problemas si $G(W_0)$ tuviera puntos límite en M. Para excluir esta posibilidad es preciso un refinamiento adicional.

Paso 5. Afirmamos que existe un entorno abierto Ω de ∂M en $\mathbb{R}^p$ tal que

$$\partial M\subset\Omega\cap M\subset\overline{\Omega}\cap M\subset G(W_0\cap\{s\geq 0\})\subset G(W_0).$$

En efecto, como M es localmente compacto, es abierto en su adherencia en $\mathbb{R}^p$, o equivalentemente es cerrado en un entorno abierto suyo A en $\mathbb{R}^p$. Como ∂M es cerrado en M y por construcción $G(W_0\cap\{s\geq 0\})$ es un entorno de ∂M en M, se tiene que ∂M y $M\setminus G(W_0\cap\{s\geq 0\})$ son cerrados disjuntos de M, luego de A, y tienen entornos abiertos disjuntos Ω y Ω' en A, luego en $\mathbb{R}^p$. Resulta que

$$\partial M\subset\Omega\cap M\subset(\mathbb{R}^p\setminus\Omega')\cap M\subset G(W_0),$$

y como $\mathbb{R}^p\setminus\Omega'$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$, tenemos $\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\setminus\Omega'$. Esto prueba nuestra afirmación.

Ahora reemplazamos W_0 por $W_1=W_0\cap G^{-1}(\Omega)$, que sigue siendo un entorno abierto de $\partial M\times\{0\}$ en $\partial M\times\mathbb{R}$. La restricción $G|_{W_1}:W_1\to G(W_1)=\Omega\cap G(W_0)$ es difeomorfismo sobre la imagen, y además se cumple:

$$G(W_1\cap\{s\geq 0\})=\Omega\cap M,\quad \overline{G(W_1)}\cap M\subset G(W_0\cap\{s\geq 0\}). \tag{3}$$

Lo primero por ser Ω disjunto de Ω' y la definición de W_1. Lo segundo pues $\overline{G(W_1)}\cap M\subset\overline{\Omega}\cap M$.

Tras esta reducción, la unión $N_1=M\cup G(W_1)$ es efectivamente una variedad diferenciable sin borde. Para ello observamos primero que

$$\Omega\cap N_1=(\Omega\cap M)\cup(\Omega\cap G(W_1))=G(W_1)$$

por la primera de las propiedades de (3) y porque $G(W_1)\subset\Omega$. Por tanto, el abierto $\Omega\cap N_1$ de N_1 es una variedad diferenciable sin borde. Ahora, como $N_1\setminus\Omega\subset\operatorname{Int}(M)\subset N_1$ e $\operatorname{Int}(M)$ es también una variedad diferenciable sin borde, sólo tenemos que ver que $\operatorname{Int}(M)$ es abierto en N_1.

Supongamos lo contrario. Entonces existen un punto $x\in\operatorname{Int}(M)$ y una sucesión (x_k) de $N_1\setminus\operatorname{Int}(M)$ con $\lim_k x_k=x$. Como $N_1\setminus\operatorname{Int}(M)\subset G(W_1)$, resulta que $x\in\overline{G(W_1)}\cap M\subset G(W_0)$ por la segunda condición en (3). Así tenemos $x_k=G(y_k,t_k)\to x=G(y,t)$ para ciertos $(y_k,t_k)\in W_1\subset W_0$, $(y,t)\in W_0$. Pero G es un homeomorfismo en W_0, luego $(y_k,t_k)\to(y,t)$. Al ser x un punto de $\operatorname{Int}(M)$, es $t>0$, con lo que $t_k>0$ para k grande. Esto significa que también $x_k\in\operatorname{Int}(M)$, contradicción.

Por tanto $N_1=\operatorname{Int}(M)\cup G(W_1)$ es unión de variedades sin borde, y ambas son abiertos en N_1, con lo que N_1 es una variedad sin borde.

Paso 6. A continuación, aún reducimos N_1 para poder definir un retracto de deformación continuo sobre M. Por Lema 3.2(i) existe una función diferenciable positiva $\eta:\partial M\to\mathbb{R}^+$

tal que W_1 contiene el abierto

$$V = \{(x,s) \in \partial M \times \mathbb{R} : -\eta(x) < s < \eta(x)\}.$$

La propiedad útil de este nuevo entorno es que contiene todos los segmentos de $I(x,s) = \{(x,ts) : 0 \leq t \leq 1\}, (x,s) \in V$. La imagen $G(V)$ es abierta en $G(W_1)$, y por tanto en N_1. Además, sabemos que $\mathrm{Int}(M)$ es abierto en N_1, luego $N = M \cup G(V) = \mathrm{Int}(M) \cup G(V)$ es abierto en N_1, luego una variedad diferenciable sin borde (¡y por fin N será nuestra variedad!) y tanto $\mathrm{Int}(M)$ como $G(V)$ son abiertos de N por serlo en N_1. Para definir el retracto de deformación $\rho_t : N \to N$ sobre M observamos que

(i) $N \setminus M = G(V \cap \{t > 0\})$ es abierto en $G(V)$ (pues $G|_V : V \to G(V)$ es difeomorfismo), y $G(V)$ es a su vez abierto en N, por lo que M es cerrado en N, y

(ii) $R = N \setminus \mathrm{Int}(M)$ es cerrado en N.

Por tanto, N es unión de los dos cerrados M y R cuya intersección es $M \cap R = \partial M$. Así cualquier retracto de deformación $\rho_t : R \to R$ sobre ∂M se puede extender por la identidad a todo N. Veamos pues cómo definir $\rho_t : R \to R$.

Consideramos la familia de aplicaciones continuas

$$\alpha_t : V \cap \{s \leq 0\} \to V \cap \{s \leq 0\} : (x,s) \mapsto (x,ts),$$

que están bien definidas por contener V, como se ha dicho antes, todos los segmentos $I(x,s)$. Claramente, α_t es un retracto de deformación de $V \cap \{s \leq 0\}$ sobre $V \cap \{s = 0\}$, y trasladamos a R este retracto poniendo $\rho_t = G \circ \alpha_t \circ G^{-1}$. En suma el retracto de deformación de N sobre ∂M es

$$\rho_t(x) = \begin{cases} G \circ \alpha_t \circ G^{-1}(x) & \text{si } x \in R = G(V \cap \{s \leq 0\}), \\ x & \text{si } x \in M. \end{cases}$$

Paso 7. Por último,

$$\alpha_t : V \cap \{-\tfrac{1}{2}\eta(x) \leq s \leq 0\} \to V \cap \{s \leq 0\} : (x,s) \mapsto (x,ts),$$

es propia.

En efecto, lo comprobamos por sucesiones. Supongamos

$$\lim_k (x_k, ts_k) = (x_0, u_0) \in V \cap \{s \leq 0\}$$

para ciertas sucesiones (x_k), (s_k) con $-\frac{1}{2}\eta(x_k) \leq s_k \leq 0$. Resulta que $x_k \to x_0$, luego $\eta(x_k) \to \eta(x_0)$, y para k grande, $\eta(x_k)$ está acotado, digamos por $L > 0$. Se sigue que $-L \leq -\frac{1}{2}\eta(x_k) \leq s_k \leq 0$, luego s_k tienen una subsucesión (s_{k_ℓ}) convergente, digamos a s_0. Además, tomando límites en la desigualdad anterior obtenemos $-\frac{1}{2}\eta(x_0) \leq s_0 \leq 0$, con lo que

$$(x_{k_\ell}, s_{k_\ell}) \to (x_0, s_0) \in V \cap \{-\tfrac{1}{2}\eta(x) \leq s \leq 0\}.$$

Esto significa que la restricción de ρ_t al conjunto $R' = G\big(V \cap \{-\frac{1}{2}\eta(x) \leq s \leq 0\}\big)$, cerrado en R, luego en N, es propia. En M, también cerrado en N, la retracción es la identidad, luego propia también. En suma, ρ_t es propia en $M \cup R'$, que es un entorno cerrado de M en N.

□

Observación 4.2. Con exactamente el mismo argumento se puede probar no sólo que cada ρ_t es propia, si no que lo es toda la homotopía $(t,x) \mapsto \rho_t(x)$, pues simplemente hay que extraer una subsucesión convergente del parámetro extra t de $[0,1]$. Véase luego 5.4, p. 22.

5. El problema de retracción diferenciable

La primera consecuencia del resultado principal de la sección anterior (4.1, p.15) es la siguiente:

Proposición 5.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad con borde. Todo entorno de M en $\mathbb{R}^p$ contiene otro U en el que está definida una retracción* continua $\eta : U \to M$ *sobre M, cuya restricción a un entorno cerrado T de M en U es propia.*

Demostración. Sea Ω un entorno abierto de M en $\mathbb{R}^p$. Por 4.1, M está contenida en una variedad sin borde N, que podemos suponer dentro de Ω, y tenemos una retracción continua $\rho : N \to M$. Además, M tiene un entorno cerrado T en N tal que $\rho|_T : T \to M$ es propia. Por otra parte, consideramos un entorno tubular U de N con su retracción $\pi : U \to N$, que asímismo es propia en un entorno cerrado S de N en U (2.9, p.4). De nuevo, se puede suponer $U \subset \Omega$. Claramente, la composición $\eta = \rho \circ \pi : U \to M$ es una retracción continua de U sobre M.

Para ver que η es propia en un entorno cerrado de M en U procedemos como sigue. La intersección $F = \pi^{-1}(T) \cap S$ es un entorno cerrado de M en U. En efecto, $\pi^{-1}(T)$ es entorno cerrado de M en U por ser π continua, y S es entorno cerrado de M en U por serlo de $N \supset M$. Aclarado esto, resulta que $\eta|_F = \rho \circ \pi|_F : F \to M$ es propia: se puede escribir como composición de las dos aplicaciones

(i) $\pi|_F : F \to T$, que es propia por ser F cerrado en S, y ser $\pi|_S$ propia, y

(ii) $\rho|_T : T \to M$, que también es propia por construcción. □

De hecho, la retracción $\eta : U \to M$ anterior procede de un retracto de deformación, pues es composición de ρ y π que cumplen esa condición.

Observamos que la retracciones η, ρ no pueden ser diferenciables. En efecto, se sabe que si un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ es *localmente* retracto diferenciable de $\mathbb{R}^p$, entonces el subconjunto es una variedad diferenciable sin borde [7, II.4.2]. Por tanto, no podemos esperar más que continuidad en las proposiciones anteriores. Para tener diferenciabilidad hay que relajar la condición de retractibilidad. Eso hacemos ahora.

En lo que sigue, denotaremos por $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la aplicación

$$\beta(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \geq 0, \\ 0 & \text{si } s \leq 0, \end{cases}$$

Lema 5.2. *Existe una aplicación diferenciable* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

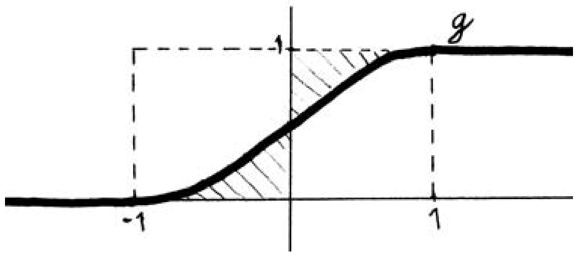
$$\begin{cases} \alpha(s) = 0 & \textit{si } s \leq -1, \\ 0 \leq \alpha(s) \leq \frac{1}{2}(s+1) & \textit{si } -1 \leq s \leq 0, \\ s \leq \alpha(s) \leq \frac{1}{2}(s+1) & \textit{si } 0 \leq s \leq 1, \\ \alpha(s) = s & \textit{si } s \geq 1. \end{cases}$$

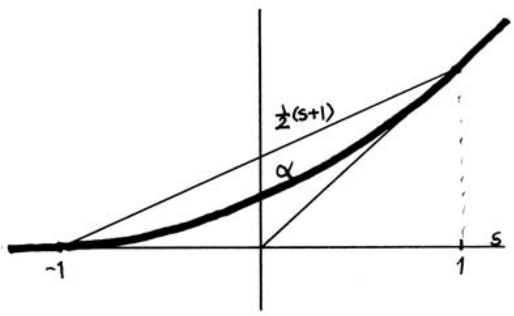
Demostración. La función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-\frac{2}{t}} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

es diferenciable, y la utilizamos para definir una segunda función diferenciable

$$g(t) = \frac{f(1+t)}{f(1+t) + f(1-t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1, \\ \frac{\exp\left(\frac{-2}{1+t}\right)}{\exp\left(\frac{-2}{1-t}\right) + \exp\left(\frac{-2}{1-t}\right)} & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$





Además, g cumple la identidad $g(t) + g(-t) = 1$. Consideramos la función diferenciable

$$\alpha(s) = \int_{-\infty}^{s} g(t)dt.$$

Es claro que $\alpha \geq 0$ y que $\alpha(s) = 0$ si $s \leq -1$, y

$$\alpha(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)dt = 1$$

por la "simetría" de g.

En consecuencia, para $s > 1$,

$$\alpha(s) = \int_{-\infty}^{1} g(t)dt + \int_{1}^{s} g(t)dt = 1 + \int_{1}^{s} dt = s.$$

Supongamos ahora $-1 \leq s \leq 1$. Sea

$$h(s) = \tfrac{1}{2}(s+1) - \alpha(s) = \int_{-1}^{s} (\tfrac{1}{2} - g(t))dt.$$

Por el teorema fundamental del cálculo $h'(s) = \frac{1}{2} - g(s)$, luego $h'(s) \geq 0$ en $(-1, 0)$ y ≤ 0 en $(0, 1)$. De esta manera, $h(s) \geq h(-1) = 0$ si $-1 \leq s \leq 0$, y $h(s) \geq h(1) = 1 - \alpha(1) = 0$ si $0 \leq s \leq 1$.

Las desigualdades que restan son análogas. □

Observación 5.3. Sea $\rho : N = M \cup G(V) \to N$ el retracto de deformación obtenido en la sección anterior. Vimos que $U = G(V)$ es un entorno abierto de ∂M en N. Por ello partir de ahora trabajaremos en las "coordenadas"que proporciona un difeomorfismo $G : V = \partial M \times (-1, 1) \to U$ que respeta ∂M (según 3.2(ii), p. 12), y se harán los consiguientes abusos de notación. Trabajar en V es todo lo que necesitaremos para resultados de aproximación en M, y es mucho más sencilla la estructura fibrada de V. Además podemos suponer que, salvo difeomorfismo, $V = \partial M \times (-1, 1)$ según 3.2(ii).

Proposición 5.4. *Sea $\rho : N \to M$ el retracto de deformación de N sobre M. Existe una homotopía $\rho_t^* : N \to M$ que verifica:*

(1) *Todas las ρ_t^* aproximan a ρ tanto como se quiera en la topología fuerte.*
(2) *$\rho_0^* = \rho$ y ρ_1^* es diferenciable.*
(3) *Las ρ_t^* coinciden con ρ en toda N menos en un entorno de ∂M que se puede elegir arbitrariamente pequeño. Las llamaremos* pseudoretracciones.
(4) *Existe un entorno cerrado T de M en N tal que la restricción de ρ^* a $[0, 1] \times T$ es propia.*
(5) *La restricción de ρ^* a $[0, 1] \times M$ es diferenciable.*

Demostración. Recordemos que ρ viene dado en coordenadas por

$$\rho(x, s) = \begin{cases} (x, s) & \text{si } s \geq 0, \\ (x, 0) & \text{si } s \leq 0, \end{cases}$$

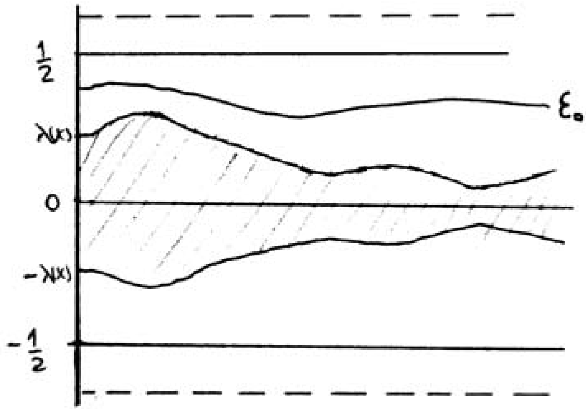
con lo que en cada fibra con $x \in \partial M$ fijo viene dado por la aplicación β, que es lo que hace que ρ no sea diferenciable, pues β no lo es en el cero. Lo que haremos será aproximar en cada fibra β por una aplicación diferenciable que sea igual que β menos en un intervalo muy pequeño en torno a $s = 0$.

También recordamos que $N = M \cup G(V)$, siendo G un difeomorfismo de $V = \partial M \times (-1, 1)$ sobre el entorno abierto $G(V)$ de ∂M en N que conserva ∂M. Vamos a construir ρ_t^* en $G(V)$, de manera que se pueda extender por la identidad a $N \backslash G(V)$. Así, bastará controlar la aproximación en $G(V)$, y, como la topología fuerte es invariante por homeomorfismos 2.12, p.6, podemos proceder directamente en V.

Fijemos un radio de aproximación, es decir, una aplicación continua positiva $\varepsilon : N \to \mathbb{R}^+$. Sólo nos preocuparemos de $\varepsilon|_{G(V)}$, como ya hemos comentado. Consideramos $\varepsilon_0 : \partial M \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\varepsilon_0(x) = \text{mín}\left\{\varepsilon(x, s) : -\tfrac{1}{2} \leq s \leq \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Como ε_0 es continua y positiva (por ser mínimo de funciones continuas positivas) y está definida en ∂M, variedad sin borde, sabemos que existe una apliciación diferenciable $\lambda : \partial M \to \mathbb{R}^+$ tal que $0 < \lambda < \text{mín}\{\varepsilon_0, \frac{1}{2}\}$.



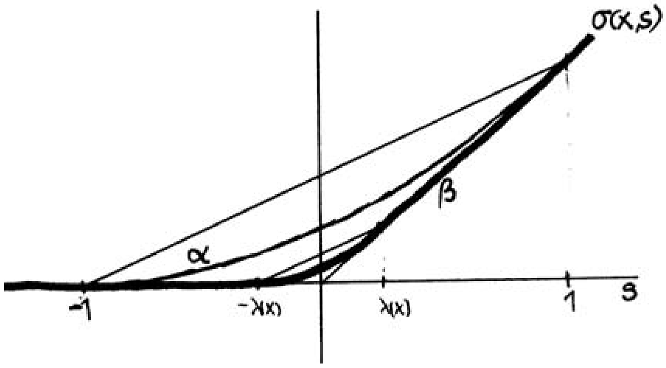
Ahora consideramos la función $\alpha : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ de 5.2, p. 20. Si definimos la función diferenciable

$$\sigma : \partial M \times \mathbb{R} \to [0, \infty) : (x, s) \mapsto \lambda(x)\alpha(\tfrac{s}{\lambda(x)}),$$

se tiene que

$$\begin{cases} \sigma(x,s) = 0 & \text{si } s \leq -\lambda(x), \\ 0 \leq \sigma(x,s) \leq \frac{1}{2}(s + \lambda(x)) & \text{si } -\lambda(x) \leq s \leq 0, \\ s \leq \sigma(x,s) \leq \frac{1}{2}(s + \lambda(x)) & \text{si } 0 \leq s \leq \lambda(x), \\ \sigma(x,s) = s & \text{si } s \geq \lambda(x), \end{cases}$$

por lo que σ es, como queríamos, una perturbación pequeña de β en cada fibra, que sólo modifica el intervalo $(-\lambda(x), \lambda(x))$.



Ahora sean, para $t \in [0, 1]$ las funciones

$$\rho_t^* : V \to V \cap \{s \geq 0\} = G^{-1}(M) : (x, s) \mapsto \rho_t^*(x, s) = (x, (1-t)\beta(s) + t\sigma(x, s)).$$

Se tiene:

(i) Las ρ_t^* están bien definidas, puesto que $(1-t)\beta(s) + t\sigma(x,s)$ es una combinación convexa de funciones con valores entre 0 y 1. Además es claro que se extienden por la identidad como nos interesa.

(ii) $\rho_0^* = \rho$ y ρ_1^* son homótopas, y ρ_1^* es diferenciable.

(iii) Como $\beta(s) = s$ para $s \geq 0$, tenemos

$$\rho^*| : [0,1] \times G(V \cap \{s \geq 0\}) \to G(V \cap \{s \geq 0\}) : (t,x,s) \mapsto (x,(1-t)s + t\sigma(x,s)),$$

luego estas restricciones son diferenciables. Como $G(V \cap \{s \geq 0\})$ es un entorno de ∂M en M y ρ^* se extiende por la identidad fuera de $G(V)$, concluimos (5) del enunciado.

Veamos cómo aproxima ρ^*_t a ρ. Tenemos

$$\rho^*_t(x,s) - \rho(x,s) = \begin{cases} (x,0)-(x,0) = (0,0) & \text{si } s \leq -\lambda(x), \\ ((x,t\sigma(x,s)) - (x,0) = (0,t\sigma(x,s)) & \text{si } -\lambda(x) \leq s \leq 0, \\ (x,(1-t)s + t\sigma(x,s)) - (x,s) = (0,t(\sigma(x,s)-s)) & \text{si } 0 \leq s \leq \lambda(x), \\ (x,s)-(x,s) = (0,0) & \text{si } s \geq \lambda(x), \end{cases}$$

lo que, según cómo es σ, implica que

$$\|\rho^*_t(x,s) - \rho(x,s)\| = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -\lambda(x), \\ t|\sigma(x,s)| \leq t\lambda(x) & \text{si } -\lambda(x) \leq s \leq 0, \\ t|\sigma(x,s) - s| \leq \frac{1}{2}t(\lambda(x) - s) \leq t\lambda(x) & \text{si } 0 \leq s \leq \lambda(x), \\ 0 & \text{si } s \geq \lambda(x). \end{cases}$$

Por tanto $\|\rho^*_t(x,s) - \rho(x,s)\| \leq \lambda(x) < \varepsilon_0(x) \leq \varepsilon(x,s)$ si $-\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}$, por la definición de ε_0. Pero como se ha elegido $\lambda < \frac{1}{2}$, si $|s| > \frac{1}{2}$ ya hemos visto que $\rho(x,s) = \rho^*_t(x,s)$, con lo que $\|\rho^*_t(x,s) - \rho(x,s)\| = 0 < \varepsilon(x,s)$. Ya hemos aproximado ρ por las ρ^*_t en las coordenadas dadas por el difeomorfismo G, y por lo que acabamos de señalar, $\rho^*_t = \rho$ fuera de $G(V)$ (ρ es la identidad fuera de $G(V)$).

Además, se tiene que el conjunto en el que difieren ρ y las ρ^*_t está contenido en el conjunto $\{(x,s) \in V : -\lambda(x) < s < \lambda(x)\}$ y como λ se puede elegir arbitrariamnete pequeño, este entorno de ∂M en N también es arbitrariamente pequeño.

Veamos para finalizar que hay un entorno cerrado T de M en N de modo que la restricción ρ^* a $[0,1] \times T$ es propia. La elección más sencilla es

$$T = M \cup G\big(\partial M \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\big).$$

Consideramos los cerrados de T siguientes

$$T'' = M \setminus G\big(\partial M \times (-1, \tfrac{1}{2})\big), \quad T' = T \cap G\big(\partial M \times (-1, \tfrac{1}{2}]\big) = G\big(\partial M \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\big).$$

Claramente $T = T' \cup T''$ y

$$[0,1] \times T = \big([0,1] \times T'\big) \cup \big([0,1] \times T''\big).$$

Ahora la restricción de ρ^* a $[0,1] \times T''$ es la proyección $(t,x) \to x$, que es propia por ser $[0,1]$ compacto. Por tanto basta ver que ρ^* es propia en el cerrado $[0,1] \times T'$, y via G podemos trabajar en $[0,1] \times \big(\partial M \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\big) \subset [0,1] \times V$.

Sean $(t_k, x_k, s_k) \in [0,1] \times V$ con $-\frac{1}{2} \leq s_k \leq \frac{1}{2}$, tal que $\rho^*_t(x_k, s_k) = (x_k, \star)$ converge (la segunda componente no interesa aquí), digamos $x_k \to x_0 \in \partial M$. Como los t_k, s_k están en intervalos cerrados podemos suponer que convergen a un $t_0 \in [0,1]$ y un $s_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, respectivamente. Así, (t_k, x_k, s_k) converge a $(t_0, x_0, s_0) \in [0,1] \times \big(\partial M \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\big)$. Esto prueba lo que se quería. □

6. Aproximación y homotopía en presencia de borde

En esta sección vemos cómo, usando los resultados anteriores, podemos deducir resultados de aproximación y homotopía para aplicaciones que toman valores en una variedad *con borde* M. Las notaciones siguen como hasta ahora, en particular $\rho : N \to M$ es la retracción obtenida en 4.1, p.15.

Empezamos con el análogo para variedades con borde de 2.17, p.9, que se verifica exactamente igual.

Teorema 6.1. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, M una variedad con borde y $f : X \to M$ una aplicación continua (propia). Si una aplicación continua $g : X \to M$ está suficientemente próxima a f, es homótopa (propiamente homótopa) a f.*

Demostración. A la vista de 5.1, p.20, se puede copiar la demostración para variedades sin borde de 2.17. Ahora sí tenemos una retracción $\eta : U \to M \subset U$ continua de un abierto de $\mathbb{R}^p$ sobre M, y esto es todo lo que necesitamos para aplicar dicha demostración a M. La única diferencia es que ahora la retracción η no es diferenciable, con lo que no podemos asegurar que la homotopía entre f y g sea diferenciable si f y g lo son.

También se puede hacer sin uso de 5.1, adaptando lo que vimos en 2.17 de la siguiente manera: considerando $f : X \to M \subset N$, sabemos que si $g : X \to M \subset N$ está suficientemente próxima, f y g son homótopas en N por una homotopía $F_t : X \to N$. Si componemos con la retracción $\rho : N \to M$, tenemos que $\rho \circ F_t : X \to M$ es una homotopía en M entre f y g.

Además sabemos por la demostración de 2.17(1) que la homotopía $F : [0,1] \times X \to N$ entre f y g se puede tomar arbitrariamente próxima en $\mathcal{C}([0,1] \times X, N)$ a la aplicación $f^* : [0,1] \times X \to M \subset N : (x,t) \mapsto f(x)$. Por la continuidad de la composición por la izquierda con ρ, la homotopía en M dada por $\rho \circ F$ se puede tomar arbitrariamente próxima a f^* en $\mathcal{C}([0,1] \times X, M)$. Visto esto, si $f : X \to M$ es propia, lo es $f^* : [0,1] \times X \to M$, con lo que $\rho \circ F$ será propia si la aproximación es suficiente, por ser las propias un abierto en $\mathcal{C}([0,1] \times X, M)$.

Una tercera manera de probar que si f es propia lo es la homotopía es la siguiente. Sea T un entorno cerrado de M en N tal que $\rho|_T$ sea propia, cuya existencia se vio en 4.1, p.15. Por 2.17(2), podemos suponer $F([0,1] \times X) \subset T$, y que $F : [0,1] \times X \to N$ es propia si f lo es. Como $\rho|_T$ es propia, entonces $\rho|_T \circ F$ es propia □

La versión para variedades con borde del teorema de aproximación 2.16, p.8, se puede probar para aplicaciones propias en el caso con borde.

Teorema 6.2. *Sean $X \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, M una variedad con borde y $f : X \to M$ una aplicación continua propia. Existe una aplicación diferenciable propia $h : X \to M$ arbitrariamente próxima a f.*

Demostración. Consideramos la retracción continua $\rho : N \to M \subset N$. Sea $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ una función positiva y continua. Como M es cerrado en N, $f : X \to N$ es propia y por el teorema de aproximación sin borde 2.16 existe una aplicación diferenciable $g : X \to N$ arbitrariamente próxima a f en $\mathcal{C}(X, N)$, y con aproximación suficiente, g será propia, por formar las aplicaciones propias un abierto de $\mathcal{C}(X,N)$. Ahora, por la continuidad de la composición por la izquierda (2.13, p.6), conseguimos que $\rho\circ g$ esté arbitrariamente próxima a $\rho\circ f = f$ en $\mathcal{C}(X,M)$, por lo que podemos suponer que $\|\rho\circ g - f\| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Por otro lado, sea $\rho_1^*: N\to M$ el pseudoretracto diferenciable obtenido en 5.4, p.22. Como ρ_1^* se puede tomar arbitrariamente próximo a ρ, por la continuidad de la composición por la derecha con *propias* (2.14, p.7), tenemos que $\|\rho_1^*\circ g - \rho\circ g\| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

En suma, concluimos que $\|\rho_1^*\circ g - f\| < \varepsilon$, y como $g: X\to N$ y $\rho_1^*: N\to M$ son diferenciables, también lo es $h = \rho_1^*\circ g$. Además, como $f: X\to M$ es propia y $h = \rho_1^*\circ g: X\to M$ está tan próxima como queramos, esta última también será propia. □

Con estos dos resultados concluimos que si $f: X\to M$ es continua y propia, existe una aplicación diferenciable propia $h: X\to M$ homótopa a f. Si f es continua, no sabemos que se pueda aproximar por aplicaciones diferenciables, luego no podemos usar 6.1, p.25, para obtener una tal h. Aún así, podemos obtener h mediante un argumento diferente.

Teorema 6.3. *Sea $X\subset\mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, M una variedad con borde y $f: X\to M$ una aplicación continua. Existe una aplicación diferenciable $h: X\to M$ homótopa a f.*

Demostración. Sea $\rho: N\to M$ nuestra retracción continua habitual. Como siempre, podemos considerar f como aplicación con valores en N, es decir $f: X\to N$. Por el teorema de aproximación sin borde, existe una aplicación diferenciable $g: X\to N$ arbitrariamente próxima a f. Por la continuidad de la composición por la izquierda, podemos conseguir que $\rho\circ g: X\to M$ y $f: X\to M$ estén arbitrariamente próximas, y por 6.1, $\rho\circ g$ se puede conseguir homótopa a f (en M).

Por otro lado, vimos en 5.4, p.22, que el pseudoretracto diferenciable $\rho_1^*: N\to M$ es homótopo a ρ por la homotopía $\rho_t^*: N\to M$. Por tanto $\rho_t^*\circ g: X\to M$ es una homotopía en M entre $\rho_1^*\circ g$ y $\rho\circ g$. Como esta última aplicación es homótopa a f, lo es $\rho_1^*\circ g$, que es diferenciable. La aplicación $h = \rho_1^*\circ g$ resuelve el problema. □

Por último, probamos el análogo de 2.18, p.11.

Teorema 6.4. *Sean $X\subset\mathbb{R}^p$ un conjunto localmente cerrado, M una variedad con borde y $f, g: X\to M$ dos aplicaciones diferenciables. Supongamos que f y g son homótopas (propiamente homótopas) por una homotopía $H: [0,1]\times X\to M$. Entonces son homótopas por una homotopía diferenciable (propia) $H^*: [0,1]\times X\to M$.*

Demostración. Sea $\rho: N\to M$ la retracción de 4.1, p.15, de una variedad sin borde N sobre M. Sean $\rho_t^*: N\to M$ las pseudoretracciones de 5.4, p.22, con $\rho_0^* = \rho$ y ρ_1^* diferenciable. Recordemos que la restricción de ρ^* a $[0,1]\times M\to M$ es diferenciable. También, que existe un entorno cerrado T de M en N de modo que la restricción de ρ^* a $[0,1]\times T\to M$ es propia.

Supongamos primero que f y g son homótopas en M por una homotopía propia $H: [0,1]\times X\to M$ (en particular, f y $g: X\to M$ son propias). Como M es cerrado en

N, $H : [0,1] \times X \to N$ es también propia, y aplicando a $f, g : X \to N$ el teorema de aproximación sin borde, sabemos que existe $H' : [0,1] \times X \to N$ homotopía propia diferenciable con $H'_0 = f, H'_1 = g$.

Por 2.18, p.11, sabemos que podemos tomar H' de modo que $H'([0,1] \times X) \subset T$. De este modo, la composición $H'^* = \rho_1^*|_T \circ H' : [0,1] \times X \to M$ tiene sentido y por ser composición de aplicaciones propias diferenciables, es una homotopía propia diferenciable en M entre las aplicaciones $f^* = \rho_1^* \circ H'_0 = \rho_1^* \circ f : X \to M$ y $g^* = \rho_1^* \circ H'_1 = \rho_1^* \circ g : X \to M$.

Por otro lado, como la restricción de ρ^* a $[0,1] \times T \to M$ es propia y M es cerrado en T, también es propia la restricción de ρ^* a $[0,1] \times M \to M$, restricción que además es diferenciable. De esta manera, la composición $F_t^*(x) = \rho_t^*(f(x))$ es una homotopía propia diferenciable entre $\rho_1^* \circ f = f^*$ y $\rho_0^* \circ f = f$. De igual modo, $G_t^*(x) = \rho_t^*(g(x))$ es una homotopía propia diferenciable entre $\rho_1^* \circ g = g^*$ y $\rho_0^* \circ g = g$.

En conclusión, tenemos homotopías propias diferenciables entre f y $f^* : X \to M$, entre f^* y g^*, y entre g^* y g. Como en el caso sin borde, un pedado al modo diferenciable concluye la demostración.

Si ahora la homotopía $H : [0,1] \times X \to M$ no es propia, la demostración es igual, sin necesidad de considerar el entorno T de M. $\square$

Referencias

[1] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz: *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables.* 4
Sanz y Torres, Madrid 2006.

[2] V. Guillemin, A. Pollack: *Differential topology.* 2
Prentice Hall, Englewood Cliffs 1974.

[3] M.W. Hirsh: *Differential topology.* 2
Springer-Verlag, New York 1976.

[4] I. Madsen, J. Tornehave: *From Calculus to Cohomology.* 2
Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[5] J. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint.* 1, 2
Princeton University Press, Princeton 1997.

[6] E. Outerelo, J.M. Ruiz: *Topología diferencial.* 2, 3, 4, 5, 6, 9
Addison-Wesley, Madrid 1988.

[7] E. Outerelo, J.M. Ruiz: *Mapping degree theory.* 2, 4, 5, 6, 10, 11, 20
AMS, Providence 2009.