BIBLIOTECA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
- U C M -

W
28
(9125)

DOCUMENTO DE TRABAJO
9125

CONTROL ESTOCASTICO. Una visión general

Emilio Cerda Tena

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE.
Campus de Somosaguas. 28023 - M A D R I D.

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asímismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Boletín de Pedido.

Nombre de la persona o institución: ....

....

Calle: .... nº ....

Ciudad: ....Distrito Postal:.........País: ....

Solicita una suscripción permantente .... [ ]
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación)

Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación: ______________________________

____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

CONTROL ESTOCASTICO. Una visión general

EMILIO CERDA TENA

Departamento de Análisis Económico

Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCION

1.1. Historia de la Teoría de Control

El desarrollo sistemático de la Teoría de Control se inició en Estados Unidos alrededor de 1930 en el campo de la ingeniería mecánica y eléctrica. Hasta 1940, aproximadamente, los sistemas de control construidos eran sistemas de regulación: la velocidad de un motor o de una turbina hidráulica debían ser mantenidos en un entorno de un valor constante. Los diseños trataban de evitar inestabilidad.

Durante la segunda guerra mundial aparecieron sistemas de control en los que la transición era más importante que la quietud: es la clase de los servomecanismos, sistemas de persecución. Por ejemplo: el sistema de control para un arma de fuego requerida para alcanzar un objetivo móvil, con la ayuda de un radar. Se descubrió que gran parte de la teoría necesaria para el diseño de tales sistemas ya había sido desarrollada en el campo de la ingeniería de la comunicación. Aparece la llamada Teoría Clásica de Control, basada fundamentalmente en el dominio frecuencia. Se comprobó que las ecuaciones diferenciales o en diferencias que describían la dinámica del sistema eran a menudo intratables, pero pasando al dominio frecuencia a través de la transformada de Laplace o z-transformada, se producían resultados algebraicos a partir de los cuales se podían inferir características del sistema. Sin embargo, esta teoría presentaba serias limitaciones pues restringía el estudio a sistemas lineales, con una sola variable de entrada y una de salida, e invariantes en el tiempo. Por otra parte, había que considerar, en determinados problemas, otros criterios que valorasen la evolución del sistema.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad introducidos por Kalman (1960), así como los métodos de optimización de Bellman (1957) y Pontryagin (1962) fueron el origen de lo que se conoce como Teoría Moderna de Control o Teoría del Control Optimo, basada en la descripción de un sistema según el enfoque del espacio de estados. Los nuevos avances y sus aplicaciones no caían sólo en el campo de la ingeniería, sino también en el de la economía, biología, medicina y ciencias sociales. En esos años tuvieron lugar las aplicaciones más importantes del control óptimo al programa espacial americano.

En Economía, aparecen en los años cincuenta y sesenta de este siglo algunas aportaciones que utilizan Teoría de Control, aunque se trata de contribuciones aisladas. En los años sesenta se utilizan ya sistemáticamente técnicas de Control Optimo en la investigación de la Teoría de Crecimiento. A partir de 1970 hay ya gran interés por la Teoría de Control en distintos campos de la Economía, tanto en trabajos teóricos como empíricos y desde entonces proliferan los trabajos sobre el tema, que ha sido el instrumento básico para describir el comportamiento de individuos y empresas cuando la actividad económica se desarrolla a través del tiempo.

En Economía de la Empresa se utilizan estas técnicas, con muy buenos resultados, para el estudio de problemas como, por ejemplo, control de inventarios, selección de inversiones, mantenimiento y reemplazamiento de máquinas, planificación de la producción, etc., todo ello desde la segunda mitad de los años setenta.

En Macroeconomía hubo, en los años setenta, gran interés por la utilización de la Teoría de Control (Kendrick (1976) analiza alrededor de noventa aplicaciones). En dicha década, la modelización econométrica y la Teoría de Control alcanzan un alto grado de madurez y, al mismo tiempo, había importantes apoyos de software que permitían tratar problemas con altos requerimientos computacionales. A finales de la década de los setenta se atenuó el entusiasmo inicial de la Macroeconomía por el Control Optimo, a partir de críticas, procedentes de la escuela de la Nueva Macroeconomía Clásica, a su utilización en el análisis de políticas alternativas en modelos econométricos. Paradójicamente, sin embargo, métodos de Teoría de Control, aunque utilizados en un contexto diferente, constituyen hoy día el principal instrumento matemático de la Nueva Macroeconomía Clásica. La utilización de estos métodos de análisis hace posible tener en cuenta la conocida crítica de Lucas a la práctica de la Econometría en algunos modelos. Por tanto, ya sea en el tratamiento "tradicional" o en el tratamiento "nuevo", los métodos de Teoría de Control son ampliamente utilizados en el análisis macroeconómico actual. En la literatura económica se habla cada vez con más insistencia de la Economía Dinámica, en la cual el instrumento matemático fundamental es la Teoría de Control.

1.2. Control estocástico

Con las teorías determinísticas de sistemas dinámicos y control óptimo, ¿no es suficiente para tratar los problemas que se presentan al ingeniero, economista o biólogo?. ¿Por qué hay que ir más allá y proponer modelos estocásticos, con los correspondientes conceptos de estimación y control basados en estos modelos?. Para responder a estas preguntas, examinemos previamente lo que proporcionan las teorías determinísticas.

Dado un sistema dinámico que se pretende estudiar, sea una economía nacional, un proceso químico o una nave espacial, lo primero que se intenta es construir un modelo matemático que represente adecuadamente los aspectos fundamentales del comportamiento de dicho sistema. A través de observaciones, leyes fundamentales y pruebas empíricas, se trata de establecer las relaciones entre ciertas variables de interés, entradas y salidas del sistema.

Con el modelo matemático y los instrumentos proporcionados por la teoría de sistemas dinámicos y la de control, se investiga la estructura del sistema y los modos de respuesta. Si se desea, se pueden diseñar compensadores que alteren las características del sistema y controles que proporciones entradas apropiadas para generar respuestas del sistema deseadas.

El comportamiento real del sistema se conoce a partir de observaciones, que dependen de ciertas variables de interés.

Hay tres razones básicas por las que los sistemas y teorías de control determinísticas puede ser que no proporcionen un tratamiento suficiente: 1ª) Ningún modelo matemático de un sistema dinámico es perfecto. Normalmente en el modelo matemático sólo se recogen los aspectos fundamentales del comportamiento del sistema, por lo que algunos efectos no aparecen en la formulación. Además, los efectos que aparecen en el modelo son necesariamente aproximados al expresarlos en términos matemáticos. 2ª) A menudo, los sistemas dinámicos son dirigidos no sólo por las variables de entrada al sistema, sino también por perturbaciones que no se pueden controlar ni modelizar en términos determinísticos. 3ª) En ocasiones, las observaciones no proporcionan conocimiento perfecto o completo sobre el estado del sistema.

1.3. Líneas generales de este trabajo

En este trabajo se pretende dar una visión general de la Teoría de Control Estocástico. Tenemos que señalar desde el principio que tal visión no puede ser exhaustiva, teniendo en cuenta la enorme cantidad de libros y artículos que existen sobre el tema. Trataremos de ir destacando algunos de los problemas y resultados fundamentales en este campo.

Comenzaremos, en el apartado segundo, estudiando el control estocástico en tiempo continuo, en donde se formula el problema y se llega a la generalización de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para este caso. En el apartado tercero se considera el caso de tiempo discreto, formulando el problema, revisando los casos de información completa e incompleta y estudiando el problema de estimación, como aspectos más importantes.

2. CONTROL ESTOCASTICO EN TIEMPO CONTINUO

En control determinístico en tiempo contínuo existen dos metodologías fundamentales: la del principio del máximo de Pontryagin y la del principio de optimalidad de Bellman, siendo la primera de ellas más utilizada que la segunda. De hecho, el principio del máximo aparece originalmente para resolver problemas de control en tiempo continuo, generalizándose posteriormente para la solución de problemas formulados en tiempo discreto, mientras que el principio de optimalidad se diseña inicialmente en tiempo discreto, generalizándose más tarde al caso continuo.

En control estocástico, tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo, la metodología fundamental es la de Bellman, aunque existen diferentes versiones estocásticas del principio del máximo.

En este apartado vamos a partir del problema determinístico y su solución en la metodología de la programación dinámica de Bellman, pasando a continuación a la formulación del problema estocástico correspondiente y la generalización a este caso del resultado obtenido en el problema determinístico.

2.1. El caso determinístico

Enunciado del problema

El problema es:

$$\text{MIN} \int_0^T g[y(t),x(t),t]\, dt + h[y(T)]$$

sujeto a: $dy/dt = f[y(t),x(t),t]$

$y(0) = y_0$, dado

$x(t) \in X$, para cada $t \in [0,T]$

en donde para cada t, $y(t)$ es el vector de estado (n-dimensional)

$x(t)$ es el vector de variables de control (m-dimensional).

Observaciones:

(1) Si el problema es de maximizar, en lugar de minimizar, se puede expresar de la forma enunciada anteriormente, sin más que cambiar el signo del funcional objetivo.

(2) En la literatura de Teoría de Control se utiliza normalmente la notación x(t) para el estado del sistema y u(t) para el control, en cambio en la literatura económica, sobre todo en la econométrica, se acostumbra a utilizar la notación que seguimos en este trabajo: y(t) para el vector de estado, x(t) para el vector de control.

Solución al problema:

Vamos a resolver el problema, utilizando la Programación Dinámica.

Definimos la función valor:

$$V(y,t) = \underset{x \in X}{\mathrm{MIN}} \int_t^T g[y(\tau),x(\tau),\tau]d\tau + h[y(T)]$$

con $y(t) = y$

siendo $dy/d\tau = f[y(\tau),x(\tau),\tau]$, en el intervalo $[t,T]$.

Entonces, la función valor verifica la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$0 = V_t(y,t) + \underset{x \in X}{\mathrm{MIN}} [g(y,x,t) + V_y(y,t)\ f(y,x,t)]$$

con la condición terminal $V(y,T) = h(y)$.

Aunque no vamos a demostrar formalmente dicha ecuación, vamos a seguir un razonamiento que nos ayude a ver cómo se llega a ella.

Sean (y,t) fijos. Consideramos $t + \Delta t$, con $\Delta t > 0$, "pequeño". Suponemos que la función valor es conocida en $t + \Delta t$ y vamos un paso hacia atrás en el tiempo, como si fuera tiempo discreto:

$$\begin{aligned} V(y,t) &\approx \underset{x\epsilon X}{\mathrm{MIN}}\ [g(y,x,t)\Delta t + V(y+\Delta y,\ t+\Delta t)] = \\ &= \underset{x\epsilon X}{\mathrm{MIN}}\ [g(y,x,t)\Delta t + V(y+f(y,x,t)\Delta t,\ t+\Delta t)] \end{aligned}$$

Pero, utilizando la fórmula de Taylor:

$$V(y+f(y,x,t)\Delta t,\ t+\Delta t) \approx V(y,t) + V_t(y,t)\Delta t + V_y(y,t)\ f(y,x,t)\Delta t$$

por lo que:

$$\begin{aligned} V(y,t) = \underset{x\epsilon X}{\mathrm{MIN}}\ [&g(y,x,t)\Delta t + V(y,t) + V_t(y,t)\Delta t + \\ &+ V_y(y,t)\ f(y,x,t)\Delta t] \end{aligned}$$

En el segundo miembro, sacamos del corchete los sumandos que no dependan de x.

$$\begin{aligned} \cancel{V(y,t)} = \cancel{V(y,t)} + V_y(y,t)\Delta t + \underset{x\epsilon X}{\mathrm{MIN}}\ [&g(y,x,t)\Delta t + \\ &+ V_y(y,t)\ f(y,x,t)\Delta t] \end{aligned}$$

Dividiendo los dos miembros por Δt, queda finalmente:

$$0 = V_t(y,t) + \underset{x \in X}{MIN} [g(y,x,t) + V_y(y,t)\ f(y,x,t)]$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

De la definición de función valor se obtiene inmediatamente que:

$$\mathbf{V(y,T) = h[y].}$$

Ejemplo:

$$MIN\ 1/2 \int_0^T (y^TQy + x^TRx)dt$$

$$\text{con } dy/dt = Ay + Bx$$

siendo Q matriz simétrica dada definida o semidefinida positiva

R matriz simétrica dada definida positiva

A y B matrices dadas.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es:

$$0 = V_t(y,t) + \underset{x}{MIN} [1/2\ y^TQy + 1/2\ x^TRx + V_y(y,t)\ (Ay+Bx)]$$

con $V(y,t) = 0$.

Establecemos la suposición de que la solución a esa ecuación es de la forma $V(y,t) = 1/2\ y^TP(t)y$, en donde $P(t)$ es una matriz simétrica n-dimensional. Sustituyendo en la ecuación de

Hamilton-Jacobi-Bellman, obtenemos:

$$0 = 1/2\ y^T dP/dt\ y + \underset{x}{MIN}\ [1/2\ y^T Qy + 1/2\ x^T Rx + $$
$$+ 1/2\ y^T P(t)\ (Ay+Bx)] \qquad (*)$$

El mínimo con respecto a x se obtiene resolviendo:

$$x^T R + y^T P(t)B = 0 \quad \rightarrow \quad x = - R^{-1}B^T P(t)y$$

Sustituyendo en (*) y, teniendo en cuenta que:

$$y^T P(t)Ay = 1/2\ y^T\ (P(t)A + A^T P(t))y$$

,obtenemos:

$$0 = y^T\ [dP/dt + Q + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t)]y$$

es decir:

$$-dP/dt = P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q$$

$$\text{con } P(T) = 0$$

que es una ecuación de Riccati.

2.2. El caso estocástico

Vamos a partir del problema de control determinístico y construir el problema de control estocástico correspondiente, viendo las dificultades que van surgiendo y la forma en que se van superando. Llegaremos, entonces, a la formulación del problema de control estocástico en tiempo continuo. Deduciremos, finalmente, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondiente al problema.

Antes de comenzar con ese estudio vamos a ver algunas consideraciones sobre procesos estocásticos, que utilizaremos posteriormente.

Aspectos previos: **a) Análisis de procesos estocásticos.**

Para analizar sistemas dinámicos entre cuyas variables de entrada aparecen procesos estocásticos, es necesario desarrollar el análisis de dichos procesos. Se necesitan conceptos como continuidad, derivada e integral de un proceso estocástico. Existen diferentes topologías, dependiendo del concepto de convergencia del que se parte.

Hay tres tipos fundamentales de convergencia: en probabilidad, casi segura (o con probabilidad uno) y en media cuadrática.

* La sucesión $\{z_n(\omega)\}$ converge a $z(\omega)$ en probabilidad, si para cada $\varepsilon > 0$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} P_r(\omega: |z_n(\omega) - z(\omega)| \geq \varepsilon) = 0.$$

* La sucesión $\{z_n(\omega)\}$ converge a $z(\omega)$ casi seguro (o con probabilidad uno), si:

$$P_r(\omega: \lim_{n\to\infty} z_n(\omega) = z(\omega)) = 1.$$

* La sucesión $\{z_n(\omega)\}$ converge a $z(\omega)$ en media cuadrática, si se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} E[z_n - z]^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [z_n(\omega) - z(\omega)]^2 P(d\omega) = 0.$$

Un resultado conocido es que la convergencia casi seguro implica convergencia en probabilidad y, también, la convergencia en media cuadrática implica convergencia en probabilidad.

Tras elegir un concepto de convergencia, se pueden definir los conceptos de continuidad, derivabilidad e integrabilidad de procesos estocásticos. ¿Cuál es el concepto de convergencia más adecuado?. A la vista de los resultados comentados en el párrafo anterior, es claro que habría que descartar la convergencia en probabilidad, por ser el tipo más restrictivo. Desde el punto de vista conceptual, la convergencia casi segura sería más interesante, pero presenta dos dificultades: por una parte, para procesos en tiempo continuo hay determinados conjuntos importantes que no son medibles, por lo que no se les pueden asignar probabilidades, por otra parte, da lugar a un análisis complicado. La convergencia en media cuadrática no presenta esas dificultades, por lo que es el concepto usualmente utilizado.

Por tanto, se pueden definir, para $\{z(t),\ t \in T\}$ proceso estocástico, con $E\, z^2(t) < \infty,\ \forall\ t \in T$, los siguientes conceptos:

* Dicho proceso estocástico es continuo en media cuadrática en el instante t, si se verifica que:

$$\underset{h\to 0}{\text{l.m.c.}}\ z(t+h) = z(t) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} E[z(t+h) - z(t)]^2 = 0.$$

en donde l.m.c. es la notación que significa límite en media cuadrática.

Una condición necesaria y suficiente para que el proceso estocástico sea continuo en media cuadrática en $t \in T$, es que su función valor medio sea continua en t y su función covarianza sea continua en (t,t).

* Dicho proceso estocástico es diferenciable en media cuadrática en el instante $t \in T$, si existe el siguiente límite en media cuadrática:

$$\underset{h \to 0}{\text{l.m.c.}} \frac{z(t+h)-z(t)}{h} = z'(t) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} E\left\{\frac{z(t+h)-z(t)}{h} - z'(t)\right\}^2 = 0.$$

Si el proceso es diferenciable en media cuadrática en t, entonces es continuo en media cuadrática en t.

Una condición necesaria y suficiente para que el proceso estocástico sea diferenciable en media cuadrática en $t \in T$ es que la función valor medio sea diferenciable en t y la derivada segunda de su función covarianza exista en (t,t).

* Sean $a, b \in T$, con $a \leq b$.

Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$ una partición en $[a,b]$, con $\rho = \max\ \{t_{i+1} - t_i$, para $i = 0,1,\ldots,n-1\}$, $t'_i \in [t_i,t_{i+1})$. El proceso estocástico $\{z(t),\ t \in T\}$ es integrable Riemann en media cuadrática en $[a,b]$, si existe el siguiente límite, que define la integral:

$$\underset{p\to 0}{\text{l.m.c.}} \sum_{i=0}^{n-1} z(t'_i)\,[t_{i+1} - t_i] = \int_a^b z(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{p\to 0} E\{\sum_{i=0}^{n-1} z(t'_i)\,[t_{i+1} - t_i] - \int_a^b z(t)dt\}^2 = 0.$$

Una condición necesaria y suficiente para que $\{z(t),\ t \in T\}$ sea integrable Riemann en media cuadrática en $[a,b]$ es que la función valor medio sea integrable Riemann en $[a,b]$ y que la función covarianza sea integrable Riemann en $[a,b] \times [a,b]$.

Aspectos previos: b) El proceso de Wiener o movimiento Browniano

Se trata de un proceso estocástico muy importante, que nos va a aparecer en cuanto estudiemos sistemas dinámicos estocásticos, por lo que vamos a recordarlo a continuación.

En 1827 Robert Brown comprobó que partículas muy pequeñas, con diámetros del orden de 0.001 mm., sumergidas en un fluido, tienen un movimiento muy irregular. En 1905 Einstein demostró que el movimiento podía ser explicado, suponiendo que era causado por colisiones con moléculas del fluido. El mismo hizo un modelo matemático del fenómeno y presentó un análisis que le permitía determinar el número de Avogadro, analizando el movimiento Browniano. Un análisis matemático riguroso del proceso fue hecho por Wiener en 1923.

Axiomáticamente, el movimiento Browniano o proceso de Wiener $\{W(t),\ t \geq 0\}$, puede ser definido por las siguientes condiciones:

1. $W(0) = 0$
2. Para cada t, $W(t)$ es normal
3. Para cada t, $EW(t) = 0$
4. El proceso tiene incrementos independientes estacionarios, lo cual quiere decir que verifica las dos propiedades siguientes:

   4.a. Para $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ cualesquiera, se verifica que $W(t_k) - W(t_{k-1})$, $W(t_{k-1}) - W(t_{k-2})$, $\ldots$, $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_1)$ son mutuamente independientes (por cumplir esta propiedad, $W(t)$ es un proceso con incrementos independientes).

   4.b. Para $0 \leq t < s$, cualesquiera, se verifica que la distribución de probabilidad de $W(t) - W(s)$ depende exclusivamente de t-s (por lo cual, $W(t)$ es un proceso que tiene incrementos estacionarios).

Al tratarse de un proceso normal, el proceso de Wiener puede ser completamente caracterizado por sus funciones valor medio y covarianza. Se comprueba fácilmente que:

$m(t) = EW(t) = 0$, para cada t.

$\mathrm{Var}\ W(t) = ct$

$\mathrm{Cov}\ [W(s), W(t)] = c \min(s,t)$ (c se llama parámetro varianza).

Si $c = 1$, se dice que el proceso de Wiener es stándard. En lo que sigue supondremos que $c = 1$.

El proceso de Wiener tiene algunas propiedades interesantes, como las siguientes: es continuo en media cuadrática en $[0,\infty)$, es integrable Riemann en media cuadrática en cualquier intervalo $[a,b]$ contenido en $[0,\infty)$, no es diferenciable en media cuadrática en ningún punto. Además, las funciones muestrales $\{W(\ ,\omega)\}$, que dependen del tiempo, son continuas con probabilidad uno, no son derivables con probabilidad uno en ningún punto y no son de variación acotada, con probabilidad uno.

<u>Aspectos previos</u>: **c) La integral estocástica de Ito.**

La integral $\int_a^b g(t)\, dW(t)$, en donde $g(t)$ es una función determinística de variable real y $\{W(t)\}$ es un proceso de movimiento Browniano fue introducida por Wiener y se llama integral de Wiener. Dicha integral fue generalizada posteriormente por Ito, para el caso en que la función $g(t) = g(t,\omega)$ es aleatoria, en el siguiente sentido:

Supongamos que la función aleatoria $g(t,\omega)$ definida en $[a,b]$ verifica las siguientes condiciones:

(a) $g(t,\omega)$ es no anticipativa respecto de $W(t)$, lo cual quiere decir que $g(t,\omega)$ es independiente de $\{W(t_k) - W(t_l) : a \le t \le t_l \le t_k \le b\}$, para todo $t[a,b]$

(b) $\int_a^b E[g(t,\omega)]^2\, dt < \infty$.

Consideramos una partición en [a,b]:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \text{ y sea } \rho = \max_i (t_{i+1} - t_i).$$

En estas condiciones, la integral estocástica de Ito se define como:

$$\int_a^b g(t,\omega)\, dW(t) = \underset{\rho\to 0}{\text{l.m.c.}} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i,\omega)\, [W(t_{i+1}) - W(t_i)].$$

Es de destacar el hecho de que en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ de la partición, se sustituye la función en el extremo inferior t_i del subintervalo. El valor de la integral depende del punto en que se sustituya la función (si se sustituye en el punto medio de cada subintervalo se obtiene la integral de Stratonovich que es distinta a la de Ito).

La integral estocástica de Ito cumple las siguientes propiedades:

$$E \int_a^b g(t,\omega)\, dW(t) = 0$$

$$E\left[\int_a^b f(t,\omega)\, dW(t) \int_a^b g(t,\omega)\, dW(t)\right] =$$

$$= \int_a^b E[f(t,\omega)\, g(t,\omega)]\, dt \qquad .$$

La integral de Ito no cumple las fórmulas habituales de integración.

Así, por ejemplo:

$$\int_a^b W(t)\, dW(t) = 1/2\, [W^2(b) - W^2(a)] - 1/2\, (b-a)$$

Sistemas dinámicos estocásticos en tiempo continuo

Antes de llegar a formular el problema de control estocástico en tiempo continuo, vamos a construir un modelo estocástico, añadiendo perturbaciones aleatorias a una ecuación diferencial ordinaria. No consideramos todavía el funcional objetivo, ni siquiera variables de control.

Partimos de un modelo determinístico, descrito por la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

En un primer intento para obtener un modelo estocástico, parece natural considerar la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) + v(y,t) \qquad (*)$$

en donde $\{v(y,t),\ t \in T\}$ es un proceso estocástico, de media cero (no hay ninguna pérdida de generalidad con esta suposición, ya que una media no nula siempre se puede tener en cuenta, cambiando adecuadamente la función f). Otras propiedades que parece lógico exigir al proceso estocástico son las siguientes:

a) Que para y_1, y_2, si $t \neq s$, sean $v(y_1,t)$ y $v(y_2,s)$ independientes ya que, si no fuera así, la distribución de probabilidad de dy/dt dependería no sólo del estado en que se encuentra el sistema, sino también de la forma en que se alcanza dicho estado y, en tal caso, no cumpliría la propiedad de Markov.

b) Ya que vamos a trabajar en media cuadrática, es natural exigir que el proceso tenga varianza finita.

c) Que sea continuo en media cuadrática.

Se demuestra que si el proceso estocástico $\{v(y,t),\ t \in T\}$ cumple las propiedades enunciadas, verifica que $E\ v^2(y,t) = 0$, es decir, es cero en media cuadrática, lo que supone que no tendrá ninguna influencia en las soluciones de la ecuación diferencial (*), por lo que este intento de construir un modelo estocástico vemos que no conduce a nada.

En vista de que de esta forma directa no se consigue un sistema estocástico adecuado, vamos a afrontar la construcción aproximando la ecuación diferencial de partida por una ecuación en diferencias finitas. Consideramos:

$$y(t+h) - y(t) = f(y,t)h + 0(h).$$

Dividiendo ambos miembros por h, y tomando límites cuando h tiende a cero, obtenemos la ecuación diferencial de partida.

Pasamos a una ecuación en diferencias estocástica, añadiendo una pertubación estocástica de la forma:

$$y(t+h) - y(t) = f(y,t)h + v(t+h) - v(t) + 0(h)$$

en donde $\{v(t),\ t \in T\}$ es un proceso estocástico, con incrementos independientes, de media cero y tal que la distribución condicional de $v(t+h) - v(t)$, dado $y(t)$ es normal, de media cero y desviación típica $\sigma(y,t)$, por lo que podemos poner:

$$v(t+h) - v(t) = \sigma(y,t)\ [W(t+h) - W(t)]$$

en donde $\{W(t),\ t \in T\}$ es un proceso de Wiener con parámetro varianza igual a la unidad.

Obtenemos, por tanto:

$$y(t+h) - y(t) = f(y,t)h + \sigma(y,t)\ [W(t+h) - W(t)] + O(h).$$

Ahora habría que dividir por h y tomar límites cuando h tiende a cero, pero no podemos hacer eso pues la derivada del proceso de Wiener no existe. Hacemos tender h a cero, simplemente y obtenemos la siguiente expresión formal:

$$dy = f(y,t)dt + \sigma(y,t)dW$$

que se llama ecuación diferencial estocástica. El significado de dicha expresión formal es el siguiente:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(\tau),\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \sigma(y(\tau),\tau)dW(\tau)$$

siendo la primera una integral de Riemann en media cuadrática y la segunda una integral estocástica de Ito.

Señalemos dos resultados fundamentales:

1. Hay un teorema que dice que si f y σ son Lipschitzianas en y, entonces la ecuación diferencial estocástica tiene una solución única, determinada por la condición inicial $y(t_0)$.

2. Regla de diferenciación de Ito:
   Consideramos la ecuación diferencial estocástica:
   $$dy = f(y,t)dt + \sigma(y,t)dW.$$
   Sea $\phi(y,t)$ continuamente diferenciable en t y dos veces continuamente diferenciable en y.

Entonces:

$$d\phi = [\phi_t + \phi^T{}_y f + 1/2\ t_r(\phi_{yy}\ \sigma\ \sigma^T)]dt + \phi^T{}_y\ \sigma\ dW.$$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el problema de control estocástico en tiempo continuo.

Enunciado del problema de control estocástico en tiempo continuo

El problema es:

$$\mathrm{MIN}\ E\{\int_0^T g[y(t),x(t),t]dt + h[y(T)]\}$$

sujeto a: $dy(t) = f[y(t),x(t),t]dt + \sigma[y(t),t]dW(t)$

$y(0) = y_0$, dado

$x(t) \in X$, para cada $t \in [0,T]$

en donde para cada t:

- $y(t)$ es el vector de estado (n-dimensional)
- $x(t)$ es el vector de variables de control (m-dimensional)
- $\{W(t)\}$ es un proceso de Wiener con parámetro varianza igual a la unidad.

Solución del problema:

Como en el caso determinístico, vamos a utilizar la Programación Dinámica.

Definimos la función valor:

$$V(y,t) = \underset{x \in X}{\mathrm{MIN}}\ E\{\int_t^T g[y(\tau),x(\tau),\tau]d\tau + h[y(T)]\}$$

con $y(t) = y$

siendo $dy(\tau) = f[y(\tau),x(\tau),\tau]d\tau + \sigma[y(\tau),\tau]dW(\tau)$, en el intervalo $[t,T]$.

Entonces, la función valor verifica la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, que para el caso estocástico, es la siguiente:

$$0 = V_t(y,t) + 1/2\ t_r\ V_{yy}\ \sigma\ \sigma^T + \underset{x\epsilon X}{MIN}\ [g(y,x,t) + V_y(y,t)\ f(y,x,t)]$$

con la condición terminal $V(y,T) = h(y)$.

Vamos a seguir un razonamiento paralelo al seguido en el caso determinístico, que nos ayude a ver cómo se llega a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Sean (y,t) fijos. Consideramos $t+\Delta t$, $\Delta t > 0$, "pequeño". Suponemos que la función valor es conocida en $t+\Delta t$ y vamos un paso hacia atrás en el tiempo, como si fuera tiempo discreto:

$$V(y,t) \approx \underset{x\epsilon X}{MIN}\ \{E[g(y,x,t)\Delta t + V(y+\Delta y,t+\Delta t)]\}$$

pero, aplicando la regla de diferenciación de Ito, se obtiene:

$$V(y,+\Delta y,t+\Delta t) - V(y,t) = V_t(y,t)\Delta t + V_y(y,t)\ f(y,x,t)\Delta t + \\ + 1/2\ t_r(V_{yy}\sigma\sigma^T)\Delta t + V_y(y,t)\sigma\Delta W$$

por lo que:

$$V(y,t) = \underset{x\epsilon X}{MIN}\ \{E[g(y,x,t)\Delta t + V(y,t) + V_t(y,t)\Delta t + \\ + V_y(y,t)\ f(y,x,t)\Delta t + 1/2\ t_r(V_{yy}\sigma\sigma^T)\Delta t + V_y(y,t)\sigma\Delta W]\}$$

de donde:

$$\cancel{V(y,t)} = \cancel{V(y,t)} + V_t(y,t)\Delta t + 1/2\ t_r(V_{yy}\sigma\sigma^T)\Delta t + $$
$$+ \underset{x\epsilon X}{MIN} \{g(y,x,t)\Delta t + V_y(y,t)\ f(y,x,t)\Delta t\}$$

ya que $E[V_y(y,t)\sigma\Delta W] = E[V_y(y,t)\ \sigma[W(t+\Delta t)-W(t)]] = 0$, por ser $E[W(t+\Delta t)-W(t)] = 0$

Dividiendo por Δt, se obtiene finalmente:

$$0 = V_t(y,t) + 1/2\ t_r(V_{yy}\sigma\sigma^T) + \underset{x\epsilon X}{MIN}[g(y,x,t) + V_y(y,t)\ f(y,x,t)]$$

De la definición de función valor se obtiene inmediatamente que:

$$V(y,T) = h(y).$$

NOTA:

Entre los libros que aparecen al final del trabajo, se pueden consultar los siguientes para el caso de tiempo continuo: Astrom, Davis, Fleming y Rishel, Jazwinski, Maybeck, Schuss. Especializados en Economía se recomiendan Chow (1981) y Malliaris-Brock.

3. CONTROL ESTOCASTICO EN TIEMPO DISCRETO

El control estocástico en tiempo discreto resulta más sencillo y, además, es más fácilmente comprensible, ayudándose de la intuición, que el correspondeinte al tiempo continuo.

En este apartado vamos a partir del enunciado del problema, para pasar a continuación a la solución que se obtiene, utilizando la Programación Dinámica de Bellman. Posteriormente estudiaremos el problema en el caso de información incompleta y el problema de estimación, obteniendo el filtro de Kalman.

3.1. El problema de control, con información completa

Enunciado del problema, en el caso de información completa

Consideramos el siguiente sistema dinámico, formulado en tiempo discreto:

$$y_t = f_t(y_{t-1}, x_t, u_t), \text{ para } t = 1,2,\dots,T$$

en donde:

- y_t es el vector de estado, perteneciente al espacio S_t, para $t = 0,1,\dots,T$.
- x_t es el vector de variables de control, perteneciente al espacio C_t, para $t = 1,2,\dots,T$.
- u_t es el vector de perturbaciones aleatorias, perteneciente al espacio D_t, para $t = 1,2,\dots,T$.

La secuencia en la que van a ir tomando valores las diferentes variables a través del tiempo, es la que aparece en el esquema siguiente:

$x_1\ u_1 \qquad x_2\ u_2 \qquad\qquad x_T\ u_T$

$\downarrow\ \downarrow \qquad \downarrow\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow\ \downarrow$

$* \text{———} * \text{———} * \text{———} * \text{———} *$

$y_0 \qquad y_1 \qquad y_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{T-1} \qquad y_T$

Período 1   Período 2   Período T

El control x_t está restringido a tomar valores pertenecientes a un conjunto no vacío $X_t(y_{t-1}) \subset C_t$, que depende del estado del sistema en ese instante y_{t-1}. Es decir, $x_t \in X_t(y_{t-1})$ para todo $y_{t-1} \in S_{t-1}$ y para todo t.

La perturbación aleatoria u_t viene caracterizada por una distribución de probabilidad $P_t(\cdot\,|y_{t-1},x_t)$, que puede depender explícitamente de y_{t-1},x_t pero no de las perturbaciones ocurridas en los períodos anteriores $u_{t-1},u_{t-2},\ldots,u_1$.

Consideramos la clase de leyes de control, también llamadas políticas, que consisten en una secuencia de funciones $\pi = \{\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_T\}$, en donde cada función χ_t transforma el estado y_{t-1} en el control $x_t = \chi_t(y_{t-1})$, de manera que:
$\chi_t(y_{t-1}) \in X_t(y_{t-1})$, para todo $y_{t-1} \in S_{t-1}$. Las leyes de control que cumplan esta condición se llamarán admisibles.

El problema es el siguiente:

Dado un estado inicial y_0, se trata de encontrar una ley de control admisible $\pi = \{\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_T\}$, que minimice el funcional de coste:

$$V_\pi(y_0) = \underset{\substack{u_t \\ t=1,\dots,T}}{E} \left(\sum_{t=1}^{T} g_t[y_{t-1}, \chi_t(y_{t-1}), u_t] + h[y_T]\right)$$

sujeto a la ecuación del sistema:

$$y_t = f_t(y_{t-1}, \chi_t(y_{t-1}), u_t), \text{ para } t = 1,2,\dots,T$$

con y_0, dado

en donde suponemos que las funciones f_t, g_t y h están dadas.

Se trata de encontrar una ley de control óptimo π^*, para la cual:

$$V_{\pi^*}(y_0) = \min_{\pi \in \Pi} V_\pi(y_0)$$

en donde Π es el conjunto de leyes de control admisibles.

Entonces:

$$V^*(y_0) = \min_{\pi \in \Pi} V_\pi(y_0)$$

es la función que asigna a cada estado inicial y_0, el coste óptimo $V^*(y_0)$ y se llama función de coste óptimo o función valor óptimo.

<u>Ejemplo</u>: Un problema de control de inventario

Para los períodos 1,2,...,T se consideran las siguientes variables:

y_{t-1}: stock disponible al principio del período t.

x_t: stock pedido, e inmediatamente suministrado, al principio del período t.

u_t: demanda durante el período t, variable aleatoria con distribución de probabilidad dada.

Consideramos, además:

h: coste de tener en stock una unidad no vendida al final del período t.

c: coste por unidad de stock pedida.

p: coste por unidad de demanda no atendida, por no tener stock disponible.

B: capacidad del almacén.

Se supone que $u_1, u_2, \ldots, u_T$ son variables aleatorias independientes y que el exceso de demanda no se pierde, sino que es atendido en cuanto hay stock adicional disponible, es decir, que puede haber stock negativo.

El problema consiste en encontrar la política de stocks que hay que pedir en cada período para minimizar el coste total para los T períodos.

La formulación del problema es:

$$\text{MIN } E\{\sum_{t=1}^{T} [cu_t + p \text{ MAX}(0, u_t - y_{t-1} - x_t) + h \text{ MAX}(0, y_{t-1} + x_t - u_t)]\}$$

$$\text{sujeto a: } y_t = y_{t-1} + x_t - u_t$$

$$y_0, \text{ dado}$$

$$0 \le x_t \le B - y_{t-1}, \text{ para todo } t = 1, 2, \ldots, T.$$

Solución al problema planteado, utilizando la Programación Dinámica:

La siguiente proposición da la solución al problema planteado.

Proposición:

Sea $V^*(y_0)$ la función de coste óptimo. Entonces, $V^*(y_0) = V_1(y_0)$, en donde la función V_1 viene dada por el último paso del siguiente algoritmo, que comienza en el período final T y va hasta el período inicial, hacia atrás en el tiempo.

$$V_{T+1}(y_T) = h(y_T)$$

$$V_t(y_{t-1}) = \underset{x_t \in X_t(y_{t-1})}{\mathrm{MIN}} \ \underset{u_t}{E}\{g_t[y_{t-1},x_t,u_t] + V_{t+1}[f_t(y_{t-1},x_t,u_t)]\}$$

para $t = 1,2,\ldots,T$.

Demostración:

$$V^*(y_0) = \underset{\chi_1,\ldots,\chi_T}{\mathrm{MIN}} \ \underset{\substack{u_t \\ t=1,\ldots,T}}{E} \{\sum_{t=1}^{T} g_t[y_{t-1},\chi_t(y_{t-1}),u_t] + h(y_T)\} =$$

$= (\text{por depender } u_t \text{ exclusivamente de } y_{t-1}, x_t, \text{ para cada } t)$

$$= \underset{\chi_1,\ldots,\chi_T}{\mathrm{MIN}} \ \underset{u_1}{E}\{g_1[y_0,\chi_1(y_0),u_1] + \underset{u_2}{E}\{g_2[y_1,\chi_2(y_1),u_2] + \ldots +$$

$$+ \underset{u_T}{E}\{g_T[y_{T-1},\chi_T(y_{T-1}),u_T] + h(y_T)\} \ldots\}\} =$$

$= (\text{por ser el sistema causal})$

$$= \underset{\chi_1}{\mathrm{MIN}} [\ \underset{u_1}{E}\ \{g_1[y_0,\chi_1(y_0),u_1] + \underset{\chi_2}{\mathrm{MIN}} [\ \underset{u_2}{E}\{g_2[y_1,\chi_2(y_1),u_2] +$$

$$+ \ldots + \underset{\chi_T}{\mathrm{MIN}} [\underset{u_T}{E}\{g_T[y_{T-1},x_T(y_{T-1}),u_T] + h(y_T)\}]\ldots\}]\}].$$

En esta ecuación, la minimización afecta a todas las funciones χ_t, tales que $\chi_t(y_{t-1}) \in C_t(y_{t-1})$. Además, la minimización está sujeta a la restricción de la ecuación del sistema:

$$y_t = f_t\ [y_{t-1}, \chi_t(y_{t-1}), u_t],\ \text{para } t = 1,2,\ldots,T.$$

Utilicemos ahora que para cualquier función se verifica que:

$$\underset{\chi\epsilon M}{\text{MIN}}\ F[y,\chi(y)] = \underset{x\epsilon X(y)}{\text{MIN}}\ F(y,x)$$

en donde M es el conjunto de todas las funciones $\chi(y)$, tales que $x(y) \in X(y)$, $\forall$ y.

Definimos:

$$V_{T+1}(y_T) = h(y_T)$$

$$V_T(y_{T-1}) = \underset{x_T\epsilon X_T(y_{T-1})u_T}{\text{MIN}}\ E\{g_T(y_{T-1},x_T,u_T) + V_{T+1}[f_T(y_{T-1},x_T,u_T)]\}$$

en general, para $t = 1,2,\ldots,T$

$$V_t(y_{t-1}) = \underset{x_t\epsilon X_t(y_{t-1})u_t}{\text{MIN}}\ E\{g_t[y_{t-1},x_t,u_t] + V_{t+1}[f_t(y_{t-1},x_t,u_t)]\}$$

se tiene que $V^*(y_0) = V_1(y_0)$, a la vista de la última de la cadena de igualdades de $V^*(y_0)$ con que hemos iniciado la demostración.

Observaciones:

1. La ecuación:

$$V_t(y_{t-1}) = \underset{x_t\epsilon X_t(y_{t-1})u_t}{\text{MIN}}\ E\{g_t[y_{t-1},x_t,u_t] + V_{t+1}[f_t(y_{t-1},x_t,u_t)]\}$$

para $t = 1,2,\ldots,T$, con $V_{T+1}(y_T) = h(y_T)$

se llama ecuación de Bellman.

2. Para que la proposición anterior sea válida es necesario que el sistema dinámico que se quiere controlar sea causal, condición que se cumple en el problema formulado en este apartado.

Un sistema dinámico se dice que es causal si, dados $k < l$, se verifica que el estado del sistema en el tiempo t depende exclusivamente del estado del sistema en el tiempo k y de las entradas en el sistema que se producen entre k y l (ya sean determinísticas o aleatorias).

Algunos sistemas dinámicos económicos en que aparecen expectativas racionales de las variables de estado no cumplen la condición de causalidad por lo que no es aplicable el método anterior.

3. Si en la formulación del sistema dinámico que se quiere controlar aparecen en la función f_t los valores pasados y_{t-2}, $y_{t-3},\ldots,y_{t-p}$, o, $x_{t-1},\ldots,x_{t-r}$, se pueden definir nuevas variables y expresar el problema en la forma general utilizada en este apartado, en función de las nuevas variables. Asimismo, si las perturbaciones aleatorias no son independientes, se pueden hacer unos cambios de variable, de manera que finalmente aparezcan como entradas aleatorias al sistema variables independientes (véanse Bertsekas (1987) y Chow (1975)).

Aplicaciones:

1. Un problema de revisión o sustitución de máquinas.

Se tiene una máquina que puede estar o no apta para funcionar. Si funciona durante una semana, proporciona un beneficio bruto de 100 un. monet.; si se rompe durante la semana, el beneficio bruto es de 0 un. mon.. Si está en funcionamiento al comienzo de la semana y efectuamos una revisión preventiva, la probabilidad de que falle durante la semana es de 0.45. Si no efectuamos dicha revisión, la probabilidad de fallo es de 0.6. La revisión preventiva cuesta 20 un. mon. . Cuando la máquina está rota al comienzo de la semana, puede ser reparada urgentemente, al coste de 58 un. mon; en cuyo caso fallará durante la semana con probabilidad 0.4, o puede ser reemplazada por una nueva máquina, al coste de 110 un.mon., que tiene garantía de funcionamiento durante la primera semana. Encontrar la política óptima de reparación, reemplazamiento y revisión preventiva que maximice el beneficio total sobre las cuatro semanas, suponiendo que se estrena máquina, al comienzo de la primera semana.

Vamos a resolver el problema siguiendo la metodología expuesta en la proposición anterior, auque no nos vamos a preocupar de formular formalmente el problema.

Para $t = 0,1,2,3,4$, sea y_t el estado de la máquina al final de la semana t, que coincide con el comienzo de la semana t+1. Definimos:

- $y_t = A$, si al final de la semana t la máquina está apta para funcionar.

- y_t = N, si al final de la semana t, la máquina no está apta.

Para t = 1,2,3,4, sea x_t la acción a tomar al comienzo de la semana t.

Si y_t = A, entonces $x_t \in$ (R,NR), en donde:

$$\begin{cases} \text{R significa revisar} \\ \text{NR significa no revisar.} \end{cases}$$

Si y_t = N, entonces $x_t \in$ (RU,MN), en donde:

$$\begin{cases} \text{RU significa reparación urgente} \\ \text{MN significa máquina nueva.} \end{cases}$$

Para t = 1,2,3,4, sea u_t la perturbación aleatoria que afecta al sistema.

El esquema es el siguiente:

1ª semana 2ª semana 3ª semana 4ª semana

$$\begin{array}{ccccccccc} * & \text{———} & * & \text{———} & * & \text{———} & * & \text{———} & * \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 \\ & \uparrow\ \uparrow & & \uparrow\ \uparrow & & \uparrow\ \uparrow & & \uparrow\ \uparrow & \\ & x_1\ u_1 & & x_2\ u_2 & & x_3\ u_3 & & x_4\ u_4 & \end{array}$$

Según el enunciado del problema, tenemos que:

$P_r(y_t=A \mid y_{t-1}=A,\ x_t=R) = 0.55$ $\quad P_r(y_t=N \mid y_{t-1}=A, x_t=R) = 0.45$

$P_r(y_t=A \mid y_{t-1}=A,\ x_t=NR) = 0.4$ $\quad P_r(y_t=N \mid y_{t-1}=A,\ x_t=NR) = 0.6$

$P_r(y_t=A \mid y_{t-1}=N,\ x_t=RU) = 0.6$ $\quad P_r(y_t=N \mid y_{t-1}=N,\ x_t=RU) = 0.4$

$P_r(y_t=A \mid y_{t-1}=N,\ x_t=MN) = 1$ $\quad P_r(y_t=N \mid y_{t-1}=N,\ x_t=MN) = 0.$

Como se estrena máquina al comienzo de la primera semana y tiene garantía de funcionamiento de una semana, será:

$y_0 = A$, $y_1 = A$.

Resolvemos el problema por Programación Dinámica:

4ª semana:

** Si $y_3 = A$

* Si $x_4 = R$, entonces el beneficio esperado en la última semana será:

$-20 + 100 \times 0.55 + 0 \times 0.45 = 35$

* Si $x_4 = NR$, el beneficio esperado en la última semana será:

$100 \times 0.4 + 0 \times 0.6 = 40$

El máximo entre 35 y 40 es 40.

** Si $y_3 = N$

* Si $x_4 = RU$, el beneficio esperado en la última semana será: $-58 + 100 \times 0.6 = 2$

* Si $x_4 = MN$, obtenemos como beneficio esperado en la última semana: $-110 + 100 = -10$

El máximo entre 2 y -10 es 2.

Por tanto: Si al llegar la cuarta semana la máquina está en condiciones de funcionamiento, la decisión será no revisar y el beneficio esperado en esa cuarta semana es de 40 un. monet. Si la máquina está rota, la decisión será reparar urgentemente y el beneficio esperado es de 2 unid. monetarias.

3ª semana:

** Si $y_2 = A$

* Tomando $x_3 = R$, el beneficio esperado para las semanas 3ª y 4ª, conjuntamente, es:

$-20 + 0.55\ (100 + 40) + 0.45\ (0 + 2) = 57.9$

* Tomando $x_3 = NR$, obtenemos:

$0.4\ (100 + 40) + 0.6\ (0 + 2) = 57.2$

** Si $y_2 = N$

* Tomando $x_3 = RU$, obtenemos:

$-58 + 0.6\ (100 + 40) + 0.4\ (0 + 2) = 26.8$

* Tomando $x_3 = MN$, obtenemos:

$-110 + 100 + 40 = 30$

Por tanto: Si al llegar la tercera semana, la máquina está en condiciones de funcionamiento, la decisión será revisar y el beneficio esperado en las semanas 3ª y 4ª conjuntamente será de 57.9 unidades monetarias. Si la máquina está rota, la decisión será la de poner una máquina nueva y el beneficio esperado, 30 unidades monetarias.

2ª semana:

** Sabemos que $y_1 = A$

* Tomando $x_2 = R$, el beneficio esperado para las semanas 2ª, 3ª y 4ª conjuntamente será:

$-20 + 0.55\ (100 + 57.9) + 0.45\ (0 + 30) = 80.345$

* Tomando $x_2 = NR$, obtenemos:

$0.4\ (100 + 57.9) + 0.6\ (0 + 30) = 81.16$

1ª semana:

** Sabemos que y_0 = A y que y_1 = A, ya que tiene garantizado el funcionamiento, por lo que lógicamente no hay que revisar. Es decir, x_1 = NR. El beneficio que se obtiene en la primera semana es de 100 unid. monet. Por lo que al aplicar la política óptima, el beneficio esperado será de 181.16 unid. monetarias.

Por tanto, el control óptimo es el siguiente:

1ª semana:	No revisar.
2ª semana:	No revisar.
3ª semana:	* Si la máquina funciona, revisar * Si la máquina no funciona, máquina nueva
4ª semana:	* Si la máquina funciona, no revisar * Si la máquina no funciona, reparación.

El beneficio óptimo esperado será de 181.16 unidades monetarias.

2. Sistema lineal con función objetivo cuadrática.
El principio de equivalencia cierta.

Consideremos el siguiente problema:

$$\text{MIN } E_0[\sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)' K_t(y_t-a_t)]$$

sujeto a: $y_t = A_t\, y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$, para $t = 1,2,\ldots,T$

y_0, dado

siendo $Eu_t = 0$, para cada t, y siendo $u_1, u_2, \ldots, u_T$ independientes siendo las matrices K_t (simétrica, definida positiva o semidefinida positiva), A_t, C_t conocidas, así como los vectores a_t, b_t, para cada t.

Si en este problema, hacemos $u_t = 0$, para cada $t= 1,2,\ldots,T$ y quitamos la esperanza matemática de la función objetivo, tenemos la versión determinística del problema (o el problema determinístico asociado).

Utilizando el resultado que hemos obtenido en la proposición anterior, se demuestra fácilmente que para el problema lineal-cuadrático estocástico formulado se obtiene el siguiente control óptimo:

$$x^*_t = G_t\, y_{t-1} + g_t, \qquad \text{siendo} \quad G_t = -(C'_t\, H_t\, C_t)^{-1}\, C'_t\, H_t\, A_t$$

$$g_t = -(C'_t\, H_t\, C_t)^{-1}\, C'_t\, (H_t b_t - h_t)$$

en donde:

$$H_{t-1} = K_{t-1} + (A_t + C_t\, G_t)'\, H_t\, (A_t + C_t G_t), \text{ con } H_T = K_T$$

$$h_{t-1} = K_{t-1}\, a_{t-1} + (A_t + C_t G_t)'\, (h_t - H_t b_t), \text{ con } h_T = K_T a_T$$

El control óptimo del problema estocástico que estamos analizando coincide exactamente con el problema determinístico asociado. Esta propiedad recibe el nombre de principio de equivalencia cierta. Cuando se cumple esta propiedad, se pueden sustituir las variables aleatorias que aparecen en la formulación del problema por sus esperanzas matemáticas, obteniendo de esta forma un problema de control determinístico, cuya solución coincide con la del problema estocástico original. Desgraciadamente, esta propiedad se cumple sólo en ciertas clases particulares de problemas. Si, por ejemplo en el problema estocástico formulado suponemos que A_t, C_t, b_t son aleatorios (con distribución de probabilidad dada) ya no se cumple el principio de equivalencia cierta.

Los problemas lineal-cuadráticos son muy importantes en Teoría de Control ya que para ellos se obtiene siempre una solución analítica, cosa que no ocurre en otros muchos problemas para los que hay que ir a métodos numéricos para calcular la solución.

Controles en bucle cerrado y en bucle abierto:

Se llama control en bucle cerrado a aquel que se expresa en función del estado del sistema:

$$x^*_t = \chi^*_t(y_{t-1}), \text{ para } t = 1,2,\ldots,T$$

Se llama control en bucle abierto a aquel que se expresa por los valores numéricos que toma en cada período:

$x^*_t = r_t$, para $t = 1,2,\ldots,T$, con r_t vector numérico dado.

En las dos aplicaciones anteriores, hemos obtenido el control óptimo como una función del estado del sistema en el momento de aplicar ese control, es decir como un control en bucle cerrado. En problemas de control estocástico, como norma general, no conoceremos el estado del sistema y_{t-1}, hasta que llegue el momento t-1, debido al efecto de las perturbaciones aleatorias que influyen en el sistema, y que no serán conocidas exactamente hasta que llegue el momento en que se produzcan. Por ello, en general, al resolver el problema de control estocástico obtendremos el control óptimo como un control en bucle cerrado y no se podrá concretar el valor numérico que tomará dicho control hasta que llegue dicho período, con el conocimiento de la variable y_{t-1}. (Hay una clase de problemas de control estocástico llamados semilineales que constituyen una excepción a ese criterio general).

En los problemas de control óptimo determinístico, aunque en primera instancia se obtenga el control óptimo en bucle cerrado, se puede llevar ese resultado a la ecuación de evolución del sistema, partir de la condición inicial dada y obtener el control en bucle abierto. (En algunos problemas de control determinístico jerarquizado eso no será posible).

Por tanto, como norma general, el control óptimo de un problema determinístico se puede expresar en bucle abierto. En cambio, en el caso estocástico sólo se puede expresar en bucle cerrado y no en bucle abierto. Esa es una diferencia importante entre los casos determinístico y estocástico.

3.2. El caso de información incompleta:

Existen problemas abordados por la Teoría de Control en los que el estado del sistema no es observable y en cambio se pueden observar otras variables que dependen del estado del sistema y que nos dan información sobre el mismo. Estamos ante problemas de control con información incompleta, ampliamente estudiados en la literatura.

La formulación del problema de control estocástico, en tiempo discreto, con información incompleta es la siguiente:

Tenemos un sistema dinámico, cuya evolución en el tiempo viene dada por:

$$y_t = f_t(y_{y-1}, x_t, u_t), \text{ para } t = 1,2,..,T$$

en donde el controlador, en lugar de tener conocimiento del estado del sistema tiene acceso a observaciones z_t que verifican las siguientes expresiones:

$$z_0 = l_0(y_0, v_0) \;;\; z_t = l_t(y_t, v_t), \text{ para } t=1,2,..,T.$$

La observación z_t pertenece al espacio de observación Z_t; v_t es un vector de perturbaciones aleatorias (perturbación de observación), perteneciente a un espacio dado V_t y caracterizado por una distribución de probabilidad $P_{v0}(\cdot|y_0)$, $P_{vt}(\cdot|y_t)$, para $t = 1,2,\ldots,T$ que es independiente de v_0, $v_1,\ldots,v_{t-1}$, u_1, $u_2,\ldots,u_T$. El estado inicial y_0 es también aleatorio y viene caracterizado por una distribución de probabilidad P_{y0}. Como en el caso de información completa u_t viene caracterizado por una distribución de probabilidad $P_{ut}(\cdot|y_{t-1},x_t)$ independiente de $u_{t-1},u_{t-2},...,u_1$. El control x_t está restringido a tomar valores pertenecientes a un conjunto no vacío X_t del espacio de control C_t (se supone que X_t, en este caso, no depende de y_{t-1}).

LLamamos vector de información a la información disponible por el controlador en el período t:

$$I_t = (z_0,z_1,...,z_t,x_1,x_2,...,x_t).$$

Se verifica que I_t: (I_{t-1},z_t,x_t)

Consideramos la clase de leyes de control o políticas que consisten en una secuencia de funciones $\pi = \{\chi_1,\chi_2,...,\chi_T\}$, en donde cada función χ_t transforma el vector de información I_{t-1} en el control $x_t = \chi_t(I_{t-1})$, de manera que $\chi_t(I_{t-1}) \in X_t \subset C_t$, para cada $t = 1,2,...,T$. Las leyes de control que cumplan esta condición se llamarán admisibles.

En este contexto, el problema consiste en:

Encontrar una ley de control admisible $\pi = \{\chi_1,\chi_2,...,\chi_T\}$, que minimice el funcional de coste

$$V_\pi = \underset{\substack{y_0,u_t,v_t \\ t=0,1,...,T}}{E} \{\sum_{t=1}^{T} g_t[y_{t-1},\chi_t(I_{t-1}),u_t] + h[y_T]\}$$

sujeto a la ecuación del sistema

$$y_t = f_t(y_{t-1},\chi_t(I_{t-1}),u_t), \text{ para } t = 1,2,...,T$$

con y_0 vector aleatorio con distribución de probabilidad dada, y la ecuación de observación:

$$z_0 = l_0(y_0,v_0)$$
$$z_t = l_t(y_t,v_t), \text{ para } t = 1,2,...,T$$

en donde suponemos que las funciones f_t,g_t,h,l_0 y l_t están dadas.

Solución al problema planteado, utilizando la Programación Dinámica:

La siguiente proposición da la solución al problema planteado.

Proposición:

Sea $V^*(I_0)$ la función de coste óptimo.

Entonces, $V^*(I_0) = V_1(y_0)$, en donde la función V_1 viene dada por el último paso del siguiente algoritmo, que comienza en el período final T y va hasta el período inicial, hacia atrás en el tiempo.

$$V_{T+1}(I_T) = \underset{y_T}{E}[h(y_T) \mid I_T]$$

$$V_t(I_{t-1}) = \underset{x_t \epsilon X_t}{MIN} \left[\underset{y_{t-1}, u_t, v_t}{E} \left(g_t(y_{t-1}, x_t, u_t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + V_{t+1}[I_{t-1}, l_t(f_t(y_{t-1}, x_t, u_t), v_t), x_t] \mid I_{t-1}, u_t\right)\right]$$

Estimación de sistemas dinámicos en tiempo discreto

El problema de estimación aparece en los sistemas dinámicos con información incompleta, se trate o no de problemas de control. En un instante del tiempo, dado el vector de información I_t, se trata de estimar el valor del vector de estado del sistema. Vamos a ver algunos conceptos generales de estimación mínimo-cuadrática para pasar posteriormente a estudiar un importante método recursivo de estimación de sistemas lineales conocido como el filtro de Kalman.

El problema de estimación.

Aspectos previos: estimación mínimo-cuadrática.

Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ vectores aleatorios con distribución de probabilidad conjunta dada. Se llama estimador mínimo-cuadrático de x, dado y, al estimador $\hat{x}^*(\cdot)$ que resuelve el siguiente problema:

$$\text{MIN} \ \underset{x,y}{E}\{\|x-x(y)\|^2\} = \underset{x,y}{E}\{[x-x(y)]'\,[x-x(y)]\}$$

Dado $\hat{x}^*(\cdot)$ estimador mínimo cuadrático de x, dado y, entonces para cada $y \in \mathbb{R}^m$, tenemos:

$$\underset{x}{E}\{\|x-\hat{x}^*(y)\|^2|y\} = \underset{z\in\mathbb{R}^m}{\text{MIN}} \ \underset{x}{E}\{\|x-z\|^2|y\}$$

Proposición 1: $\hat{x}^*(y) = \underset{x}{E}(x|y), \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^m.$

En general, la función $\underset{x}{E}(x\,|\cdot)$ puede ser una función no lineal de y, quizás complicada.

Se define el estimador lineal mínimo-cuadrático de x, dado y, al estimador $\hat{x}(y) = \hat{A}y + \hat{b}$, en donde $\hat{A}$, $\hat{b}$ minimizan:

$$\underset{x,y}{E}\{\|x-Ay-b\|^2\} = \underset{x,y}{E}\{(x-Ay-b)'\,(x-Ay-b)\}$$

sobre las matrices A, nxm y vectores $b \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2:

Si x,y son vectores aleatorios conjuntamente Gaussianos, entonces:

$$\hat{x}^*(y) = \hat{x}(y).$$

Proposición 3:

Sean x,y vectores aleatorios, con distribución de probabilidad conjunta dada, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, tales que:

$E(x) = \bar{x}$ $\qquad$ $E(y) = \bar{y}$

$E((x-\bar{x})\ (x-\bar{x})') = \Sigma_{xx}$ $\qquad$ $E((y-\bar{y})(y-\bar{y})') = \Sigma_{yy}$

(suponemos que existe Σ^{-1}_{yy}).

$E((x-\bar{x})\ (y-\bar{y})') = \Sigma_{xy}$ $\qquad$ $E((y-\bar{y})\ (x-\bar{x})') = \Sigma_{yx} = \Sigma'_{xy}$

Entonces: $\hat{x}(y) = \bar{x} + \Sigma_{xy}\ \Sigma^{-1}_{yy}\ (y-\bar{y})$

Además, la matriz de covarianza del error es:

$$\underset{x,y}{E}([x-\hat{x}(y)]\ [x-\hat{x}(y)]') = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\ \Sigma^{-1}_{yy}\ \Sigma_{yx}$$

Corolario 1: $\qquad \underset{y}{E}(\hat{x}(y)) = \bar{x} = \underset{x}{E}(x)$

Corolario 2: $\qquad$ El error de estimación $[x-\hat{x}(y)]$ está incorrelado con y, y con $\hat{x}(y)$.

Es decir:

$$\underset{x,y}{E}(y[x-\hat{x}(y)]') = 0; \qquad \underset{x,y}{E}(\hat{x}(y)[x-\hat{x}(y)]') = 0$$

Corolario 3:

Consideremos que, además de x e y, tenemos un vector aleatorio adicional z, tomando valores en $\mathbb{R}^p$, incorrelado con y.

Entonces:

$$\hat{x}(y,z) = \hat{x}(y) + \hat{x}(z) - \bar{x}$$

y la matriz de covarianza del error es:

$$\underset{x,y,z}{E}\{[x-\hat{x}(y,z)]\ [x-\hat{x}(y,z)]'\} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\ \Sigma^{-1}_{yy}\ \Sigma_{yx} - \Sigma_{xz}\ \Sigma^{-1}_{zz}\ \Sigma_{zx}$$

Corolario 4:

Sea z como en el corolario anterior, pero supongamos que y, z no son incorrelados. Es decir:

$$\Sigma_{yz} = \Sigma'_{zy} = \underset{y,z}{E}\{(y-\bar{y})\ (z-\bar{z})'\} \neq 0$$

Entonces: $\hat{x}(y,z) = \hat{x}(y) + \hat{x}[z-\hat{z}(y)] - \bar{x}$

Además:

$$\underset{x,y,z}{E}\{[x-\hat{x}(y,z)]\ [x-\hat{x}(y,z)]'\} = \underset{x,y}{E}\{[x-\hat{x}(y)]\ [x-\hat{x}(y)]'\} -$$

$$- \underset{x,y,z}{E}\{(x-\bar{x})\ [z-\hat{z}(y)]'\} \left[\underset{y,z}{E}\{[z-\hat{z}(y)]\ [z-\hat{z}(y)]'\}\right]^{-1}$$

$$\underset{x,y,z}{E}\{[z-\hat{z}(y)]\ (x-\bar{x})'\}$$

Corolario 5:

Sea z = Cx + h + w, siendo C matriz de constantes

h vector de constantes

w, vector aleatorio, de media 0, incorrelado con y,

$$\Rightarrow \quad \hat{z}(y) = C\hat{x}(y) + h.$$

Enunciado del problema de estimación:

Consideramos el sistema con la ecuación de estado y ecuación de observación siguientes:

$$y_t = A_t\, y_{t-1} + b_t + \eta_t, \qquad \text{para } t = 1,2,\ldots,T$$
$$z_t = M_t\, y_t + v_t, \qquad \text{para } t = 0,1,2,\ldots,T$$

en donde, para cada t, y_t es el vector de estado (n-dimensional)

z_t es el vector de observación (r-dimensional)

Suponemos que y_0, $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_T$, $v_0,v_1,\ldots,v_T$ son vectores aleatorios mutuamente incorrelados, tales que:

$E\eta_t = 0$; $E\eta_t\, \eta_t' = R_t$

$Ev_t = 0$; $Ev_t\, v_t' = V_t$ (que, suponemos, es definida positiva para cada t)

$Ey_0 = m$; $E(y_0-m)\,(y_0-m)' = S$.

Se trata de encontrar el estimador lineal mínimo-cuadrático de y_t, dados los valores de $z_0,z_1,\ldots,z_t$.

Consideraremos el vector $I_t = (z'_0,z'_1,\ldots,z'_t)'$

Notación: $\hat{y}_t(I_t) = \hat{y}_{t/t}$. En general: $\hat{y}(I_r) = \hat{y}_{t/r}$.

Solución del problema. El FILTRO DE KALMAN.

Supongamos que ya hemos calculado $\hat{y}_{t/t-1}$, junto con

$\Sigma_{t/t-1} = E(y_t-\hat{y}_{t/t-1})\,(y_t-\hat{y}_{t/t-1})'$

En el período t, recibimos además la medida adicional:

$z_t = M_t\ y_t + v_t.$

Entonces, por el corolario 4:

$$\hat{y}_{t/t} = \hat{y}_t(I_{t-1}, z_t) = \hat{y}_{t/t-1} + \hat{y}_t[z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})] - E(y_t).$$

Por el corolario 5: $\hat{z}_t(I_{t-1}) = M_t\ \hat{y}_{t/t-1}$

Sea $\tilde{z}_t(I_{t-1}) = z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})$

Por la proposición 3:

$$\hat{y}_t[\tilde{z}_t(I_{t-1})] = E(y_t) + \Sigma_{y\tilde{z}}\ \Sigma^{-1}_{\tilde{z}\tilde{z}}\ [\tilde{z}_t(I_{t-1}) - E[\tilde{z}_t(I_{t-1})]]$$

$$E[\tilde{z}_t(I_{t-1})] = E[z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})] = E[M_t(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) + v_t] =$$
$$= M_t\ E(y_t) - M_t\ E(\hat{y}_{t/t-1}) + E(v_t) =$$
$$= M_t\ E(y_t) - M\ E(y_t) + 0 = 0$$

$$\Sigma_{y\tilde{z}} = E\ \{[y_t - E(y_t)]\ [z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})]'\} =$$
$$= E\{[y_t - E(y_t)]\ [M_t(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) + v_t]'\} =$$
$$= E\ \{y_t[y_t - \hat{y}_{t/t-1}]'\ M'_t\} =$$
$$= E\ \{[y_t - \hat{y}_{t/t-1} + \hat{y}_{t/t-1}]\ [y_t - \hat{y}_{t/t-1}]'\ M'_t\} =$$
$$= E\ \{(y_t - \hat{y}_{t/t-1}]\ [y_t - \hat{y}_{t/t-1}]'\ M'_t\} + E\{\hat{y}_{t/t-1}\ (y_t - \hat{y}_{t/t-1})'\ M'_t\} =$$
$$= \Sigma_{t/t-1}\ M'_t$$

$$\Sigma_{\tilde{z}\tilde{z}} = E\ \{[z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})]\ [z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})]'\} =$$
$$= E\ \{[M_t\ (y_t - \hat{y}_{t/t-1}) + v_t]\ [M_t\ (y_t - \hat{y}_{t/t-1}) + v_t]'\} =$$
$$= M_t\ \Sigma_{t/t-1}\ M'_t + V_t$$
$$\Rightarrow\quad \hat{y}_t[z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})] =$$
$$= E(y_t) + \Sigma_{t/t-1}\ M'_t\ [M_t\ \Sigma_{t/t-1}\ M'_t + V_t]^{-1}(z_t - M_t\hat{y}_{t/t-1})$$

Por tanto:

$$\hat{y}_{t/t} = \hat{y}_{t/t-1} + D_t\ (z_t - M_t\hat{y}_{t/t-1})$$

o lo que es lo mismo: $\hat{y}_{t/t} = (I-D_tM_t)\hat{y}_{t/t-1} + D_tz_t$

en donde $D_t = \Sigma_{t/t-1}\ M'_t[M_t\ \Sigma_{t/t-1}\ M'_t + V_t]^{-1}$

Ahora, por el corolario 5:

$$\hat{y}_{t/t-1} = A_t\ \hat{y}_{t-1/t-1} + b_t$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_{t/t} = (I-D_tM_t)\ [A_t\ \hat{y}_{t-1/t-1} + b_t] + D_tz_t.$$

Obtengamos ahora la forma recursiva de las matrices de covarianza de los errores de observación:

$$y_t-\hat{y}_{t/t-1} = A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1}) + \eta_t$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma_{t/t-1} = E\{[y_t-\hat{y}_{t/t-1}]\ [y_t-\hat{y}_{t/t-1}]'\} =$$

$$= E\{[A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1}) + \eta_t]\ [A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1} + \eta_t]'\} =$$

$$= A_t\ \Sigma_{t-1/t-1}\ A'_t + R_t$$

$$\Sigma_{t/t} = E\{[y_t-\hat{y}_{t/t}]\ [y_t-\hat{y}_{t/t}]'\},$$

pero $y_t-\hat{y}_{t/t} = y_t-\hat{y}_{t/t-1} - D_t(z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1}) =$

$$= y_t-\hat{y}_{t/t-1} - D_t[M_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})] - D_tv_t$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma_{t/t} = E\{[y_t-\hat{y}_{t/t-1}-D_tM_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1}) - D_tv_t]$$

$$[y_t-\hat{y}_{t/t-1}-D_tM_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})-D_tv_t]'\} =$$

$$= \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1}\ M'_tD'_t - D_tM_t\Sigma_{t/t-1} + D_tM_t\Sigma_{t/t-1}M'_tD'_t +$$

$$+ D_tV_tD'_t =$$

$$= \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1}\ M'_t(M_t\ \Sigma_{t/t-1}\ M'_t+V_t)^{-1}\ M_t\ \Sigma_{t/t-1}.$$

Por tanto, queda:

En las condiciones del problema que consideramos:

$$\hat{y}_{t/t} = \hat{y}_t(I_t) = (I-D_tM_t)\ (A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+b_t) + D_tz_t$$

$$\text{con } \hat{y}_{0/-1} = m \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_{0/0} = (I-D_0M_0)m + D_0z_0$$

$$\text{siendo : } D_t = \Sigma_{t/t-1}\ M'_t(M_t\ \Sigma_{t/t-1}M'_t + V_t)^{-1}$$

$$\Sigma_{t/t-1} = A_t\ \Sigma_{t-1/t-1}\ A'_t + R_t$$

$$\Sigma_{t/t} = \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1}\ M'_t(M_t\Sigma_{t/t-1}M'_t + V_t)^{-1}\ M_t\ \Sigma_{t/t-1}$$

$$\text{con } \Sigma_{0/-1} = S$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma_{0/0} = S - SM'_1\ (M_1SM'_1 + V_1)^{-1}\ M_1S$$

que constituye **EL FILTRO DE KALMAN.**

Por tanto, el filtro de Kalman permite obtener el estimador lineal mínimo cuadrático del vector de estado no observable de un sistema dinámico, dado un conjunto de observaciones que dependen de dicho vector, en un horizonte temporal dado. El procedimiento es muy interesante y eficiente desde el punto de vista computacional ya que en cada período se utiliza sólo la observación obtenida en dicho período y el estimador que se obtuvo en el anterior para calcular el estimador actualizado del vector de estado. Para su utilización se requiere que sean conocidos la dinámica del sistema y de la observación, que se conozcan los parámetros del sistema así como las medias y los momentos segundos de los estadísticos del ruido.

En el caso Gaussiano, el estimador lineal mínimo cuadrático coincide con el estimador cuadrático, por lo que $\hat{y}_{t/t} = E[y_t|I_t]$.

Ejemplos de aplicaciones económicas del filtro de Kalman:

(1) Predicción de relaciones de demanda interindustriales (Vishwakarma, de Boer, Palm)

Sean:

s_t un vector nx1, de outputs para n industrias en período t.

A_t, matriz nxn de coeficientes input-output. (el elemento ij de esa matriz es la cantidad de output de industria i, requerido para producir una unidad de output en la industria j).

f_t, vector nx1 de demandas finales para los productos de las n industrias.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} s_{1t} &= a_{11,t}\, s_{1,t} + a_{12,t}\, s_{2,t} + \ldots + a_{1n,t}\, s_{n,t} + f_{1,t} \\ s_{2t} &= a_{21,t}\, s_{1,t} + a_{22,t}\, s_{2,t} + \ldots + a_{2n,t}\, s_{n,t} + f_{2,t} \\ &\vdots \\ s_{nt} &= a_{n1,t}\, s_{1,t} + a_{n2,t}\, s_{2,t} + \ldots + a_{nn,t}\, s_{n,t} + f_{n,t} \end{aligned}$$

En forma matricial: $s_t = A_t s_t + f_t$, cuya solución es:

$$s_t = (I-A_t)^{-1} f_t = B_t f_t$$

en donde $B_t = (I-A_t)^{-1}$.

El problema es: estimar los coeficientes B_t, suponiendo que la relación anterior contiene un vector η_t de errores aleatorios. Es decir: $s_t = B_t f_t + \eta_t$.

En esta expresión se supone que la producción s_t y la demanda final f_t son directamente observables. Hay que estimar los elementos de la matriz B_t, suponiendo que son invariantes en el tiempo.

Se supone que los vectores $\{\eta_t\}$ son serialmente incorrelados, tienen media 0 y matriz de covarianza Q.

Vamos a expresar el problema en forma adecuada para aplicar el filtro de Kalman.

Sea $b_{i,t}$: la fila i-ésima de la matriz B_t.

$$\text{Sea } b_t = \begin{bmatrix} b'_{1,t} \\ b'_{2,t} \\ \cdots \\ b'_{n,t} \end{bmatrix}$$

Podemos poner: $b_t = b_{t-1}$

$$s_t = \begin{bmatrix} f'_t & 0 & .. & 0 \\ 0 & f'_t & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & f'_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_{1,t} \\ b'_{2,t} \\ \cdots \\ b'n,t \end{bmatrix} + \eta_t =$$

$$= M_t b_t + \eta_t$$

Utilizando alguna estimación de $Q = E\eta_t\eta'_t$; $\bar{b}_0^{1} = E(b_0)$ y $\Sigma_0 = \text{cov}(b_0)$ podemos aplicar el filtro de Kalman en el sistema anterior para estimar b_t.

(2) Actualización de estimaciones de parámetros en un modelo econométrico. (Athans)

Consideremos el siguiente modelo en forma reducida:

$$y(t) = A_1y(t-1) + A_2y(t-2) + \ldots + A_ry(t-r) + B_1v(t) +$$
$$+ B_2v(t-1) + \ldots + B_sv(t-s+1) + b_0 + u(t)$$

en donde: y, es un n-vector de variables endógenas (output)

v, es un m-vector de variables exógenas (input)

b_0, es un n-vector, constante.

u, es un n-vector de errores estocásticos, en donde cada componente tiene media cero y varianza finita.

A_j, matriz constante (nxn), para $j = 1,2,\ldots,r$.

B_k, matriz constante (nxm), para $k = 1,2,\ldots,s$.

Suponemos que las estimaciones de los parámetros A_j, B_k y b_0 son conocidas por un método econométrico pero que se espera que esos valores varíen cuando hay nuevos datos disponibles sobre las variables, con la estructura del sistema permaneciendo como está.

Sean $y_i(t)$, $u_i(t)$ la i-ésima componente de los vectores y(t), u(t), respectivamente.

Sean a^i_j, b^i_k la fila i-ésima de las matrices A_j, B_k, respectivamente y sea b^i_0, el i-ésimo componente de b_0.

Entonces, la ecuación de partida se puede escribir:

$$y_i(t) = a^i_1y(t-1) + a^i_2y(t-2) + \ldots + a^i_ry(t-r) +$$
$$+ b^i_1v(t) + b^i_2v(t-1) + \ldots + b^i_sv(t-s+1) + b^i_0 + u_i(t),$$

para $i = 1,2,\ldots,n$.

O, de manera equivalente:

$y_i(t) = Cx_i(t) + u_i(t)$, para $i = 1,2,\dots,n$

en donde:

$C = (y'(t-1), y'(t-2), \dots, y'(t-r), v'(t), \dots, v'(t-s+1), 1)$

(es un vector fila)

$x_i(t) = (a^i_1, \dots, a^i_r, b^i_1, \dots, b^i_s, b^i_0)'$

(es un vector columna, $i = 1,\dots n$)

Podemos poner: $x(t) = (x_1(t)', \dots, x_n(t)')'$

$\Rightarrow \quad x(t) = x(t-1), \ \forall\ t$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

y aplicamos el filtro de Kalman.

El poblema de control lineal-cuadrático, en el caso de información incompleta.

Consideremos la versión en información incompleta del problema de control lineal-cuadrático estudiado anteriormente. Se trata de:

$$\text{MIN } E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' \ K_t (y_t - a_t),$$

sujeto a: $y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$, para $t = 1,2,\dots,T$

$z_t = M_t y_t + v_t$, para $t = 0,1,2,\dots,T$

Suponemos que $y_0, u_1, u_2, \dots, u_T, v_0, v_1, \dots, v_T$ son independientes, con $Eu_t = 0$; $Ev_t = 0$, $\forall$ t.

El control óptimo que se obtiene es:

$$x^*(t) = G_t\ E[y_{t-1} | I_{t-1}] + g_t$$

en donde G_t, g_t coinciden con las expresiones obtenidas en el caso de información completa.

En el caso en que todas las variables aleatorias son normales, $E[y_{t-1} | I_{t-1}]$ se puede calcular a partir del filtro de Kalman.

En estos problemas lineal-cuadráticos se verifica el teorema de separación: hay separación entre estimación y control. El problema se puede resolver calculando la regla de control, como si fuera un problema con información completa, obteniendo G_t, g_t y calculando por otra parte $E[y_{t-1} | I_{t-1}]$, que es un problema de estimación, que no depende de la función objetivo.

4. EXTENSIONES:

Hay otros muchos aspectos de la Teoría de Control que no aparecen en estas páginas, como ya hemos señalado al comienzo del trabajo. Algunos de los problemas que no hemos tratado y que se consideran en las Referencias Bibliográficas que siguen son: métodos numéricos de cálculo del control óptimo, problemas con horizonte temporal infinito, control adaptativo, control de sistemas no causales y en particular de sistemas económicos con expectativas racionales, control estocástico en juegos dinámicos o aplicaciones a diferentes áreas, entre otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aoki, M. (1976). Optimal control and system theory in dynamic economic analysis. North Holland.

Aoki, M. (1987). State space modeling of time series. Springer Verlag.

Aoki, M.(1989). Optimization of stochastic systems. Topics in discrete-time dynamics. 2nd edition. Academic Press.

Arkinand Evstigneev (1987). Stochastic Models of control and economic dynamics. Academic Press.

Arrow, K. y Kurz, M. (1970). Public investiment, the rate of return and optimal fiscal policy. Johns Hopkins.

Astrom, K. (1970). Introduction to stochastic control theory. Academic Press.

Bensoussan, A. (1988). Perturbation methods in optimal control. J.Wiley.

Bertsekas, D. (1976). Dynamic programming and stochastic control. Academic Press.

Bertsekas, D. (1987). Dynamic programming: deterministic and stochastic models.
Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall.

Bishop, A. (1975). Introduction to discrete linear controls. Theory and application. Academic Press.

Bryson and Ho (1975). Applied optimal control. Optimization, estimation and control. J. Wiley.

Cerdá, E. (1988). "Generalization of the Kalman filter for a class of rational expectations models". Documento de trabajo 8820 de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense.

Cerdá, E. (1990). "Control óptimo de sistemas lineales con expectativas racionales". Investigaciones económicas (segunda época), vol XIV, nº1, 1990, pp. 63-83.

Cerdá, E. (1991). "Control of linear systems with rational expectations. The case of incomplete information". Aceptado en Trabajos de Investigación Operativa.

Chen (1985). Recursive estimation and control for stochastic systems. J. Wiley.

Chow, G. (1975). Analysis and control of dinamic economic systems. John-Wiley.

Chow, G.(1981). Econometric analysis by control methods. John-Wiley.

Davis, M.H.A. (1977). Linear estimation and stochastic control. Chapman and Hall.

Davis, M.H.A. and Vinter, R.B. (1985). Stochastic modelling and control. Chapman and Hall.

Elbert, T. (1984). Estimation and control of systems. Van Nostrand Reinhold Company.

Fleming and Rishel (1975). Deterministic and stochastic optimal control. Springer Verlag.

Gihman and Skorohod (1979). Controlled stochastic processes. Springer Verlag.

Goodwin and Sin (1984). Adaptive filtering, prediction and control. Prentice Hall.

Gopal, M. (1984). Modern control system theory. Wiley Eastern Ltd.

Holly, S. and Hughes Hallett (1989). Optimal control, expectations and uncertainty. Cambridge University Press.

Hughes Hallett and Rees (1983). Quantitative economic policies and interactive planning. A reconstruction of the theory of economic policy. Cambridge University Press.

Jazwinski, A. (1970). Stochastic processes and filtering theory. Academic Press.

Kendrick, D. (1976). "Applications of control theory to macroeconomics". In Frontiers of Quantitative Economics. Intrilligator (ed.). North Holland.

Kendrick, D. (1981). Stochastic control for economic models. Mc Graw Hill.

Kendrick, D. (1988). Feedback: a new approach to macroeconomic policy. Kluwer Publishing Co.

Luenberg, D. (1979). Introduction to dinamic systems. Theory, models and applications. J. Wiley.

Malliaris and Brock (1982). Stochastic methods in Economis and Finance. North Holland.

Maybeck, P. (1979). Stochastic models, estimation and control. Volumes 1,2,3. Academis Press.

Murata, Y. (1982). Optimal control methods for linear discrete time economic systems. Springer Verlag.

Petit, María Luisa (1990). Control theory and dynamic games in economic policy analysis.
Cambridge University Press.

Pitchford and Turnovsky (ed) (1977). Applications of control theory to economic analysis. North Holland.

Presman and Sonin (1990). Sequential control with incomplete information. Academic Press.

Sargent, T. Lecture notes on linear optimal control, filtering and rational expectations.

BIBLIOTECA U.C.M.
530740703X

Sargent, T. (1987). Dynamic macroeconomic theory. Harvard University Press.

Sastry and Bodson (1989). Adaptive control. Stability, convergence and robustness. Prentice-Hall.

Schuss, Z. (1980). Theory and applications of stochastic differential equations. John-Wiley.

Sethi and Thompson (1981). Optimal control theory. Applications to management science. Martins Nijhoff Publishing.

Stengel, R.F. (1986). Stochastic optimal control. Theory and applications. J. Wiley.

Stokey, N. and Lucas, R. (1989). Recursive methods in economic dynamics. Harvard University Press.

Strejc, V. (1981). State space theory of discrete linear control. J. Wiley.

Terceiro, J. (1990). Estimation of dinamic econometric models with errors in variables. Springer-Verlag.

Whittle, P. (1983). Optimization over time. Dynamic programming and stochastic control. Vol I y II. John Wiley.

Whittle, P. (1990). Risk-sensitive optimal control. J. Wiley.