



W
28
(9016)

Documento de Trabajo

9 0 1 6

**PUNTOS FIJOS EN HOMEOMORFISMOS DEL CIRCULO:
APLICACIONES GEOMETRICAS**



Manuel Morán Cabré

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asimismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO
Boletín de Pedido.
Nombre de la persona o institución:
.....
Calle: nº
Ciudad:Distrito Postal:.....País:
Solicita una suscripción permanente <input type="checkbox"/>
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación) <input type="checkbox"/>
Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación: _____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

PUNTOS FIJOS EN HOMEOMORFISMOS DEL CIRCULO:

APLICACIONES GEOMETRICAS

Datos personales.

Manuel Morán Cabré. Doctor en Matemáticas por la U.C.M.
Profesor del departamento de Análisis Económico de la Facultad de
Económicas de la U.C.M.

RESUMEN.

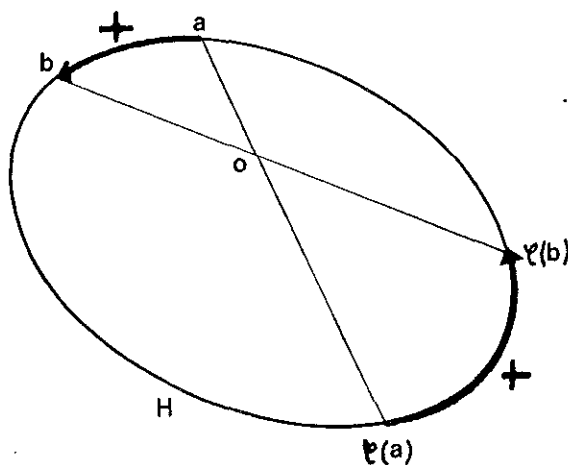
Se prueba un teorema sobre existencia de puntos fijos en ciertos homeomorfismos del círculo, encontrándose aplicaciones geométricas del mismo para probar propiedades de inscriptibilidad. Los resultados son válidos para curvas homeomorfas a círculos, y en el caso de que acoten regiones convexas (en el trabajo se llaman a tales curvas convexas), surgen de forma natural las aplicaciones geométricas. La idea de este trabajo tuvo su origen en 1971 cuando estudiaba la licenciatura en la U.C.M. (y entonces apodé el trabajo con el nombre de "teoría de huevos"), pero la presente redacción fue concluida en febrero de 1983.

INTRODUCCION

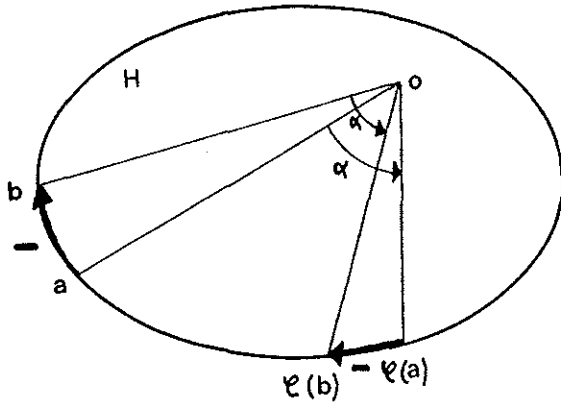
La teoria de huevos, llega a resultados facilmente comprensibles incluso para los que no están acostumbrados a la simbología matemática. En esta introducción se exponen algunos de estos resultados. Leida la introducción puede pasarse directamente a la parte de aplicaciones y ejemplos, que da lugar a interesantes diseños.

Un huevo es una curva plana, cerrada, continua y convexa. Por ejemplo, las circunferencias, las elipses, los polígonos convexos, etc. Algunos de los resultados obtenidos, pueden generalizarse para tipos mas amplios de curvas.

Ciertas transformaciones ponen en correspondencia biunívoca (biyectiva) los puntos de un huevo con los de otro, o consigo mismo, por ejemplo, las proyecciones con respecto a un punto del interior del huevo, las proyecciones con respecto a un punto del exterior o las proyecciones paralelas (ver figs)

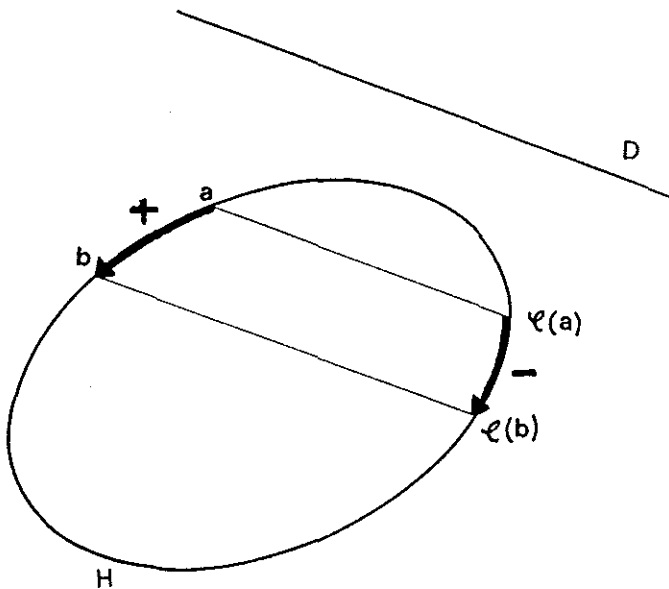
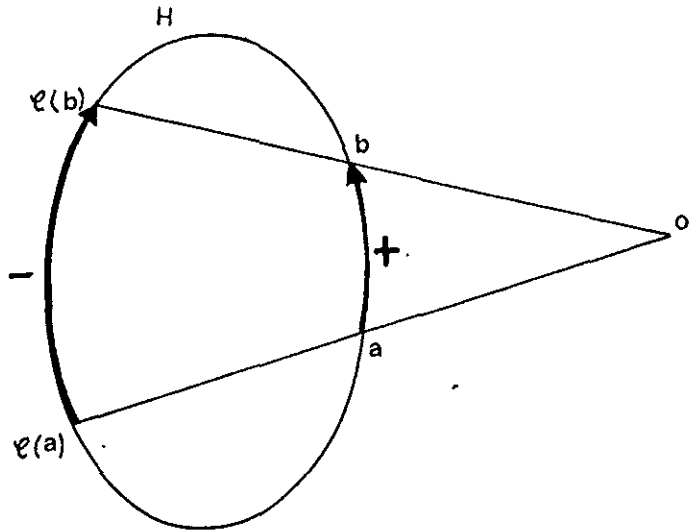


Proyección central
interna de centro O



Giro de centro O
y ángulo α

Proyección central
externa de centro O



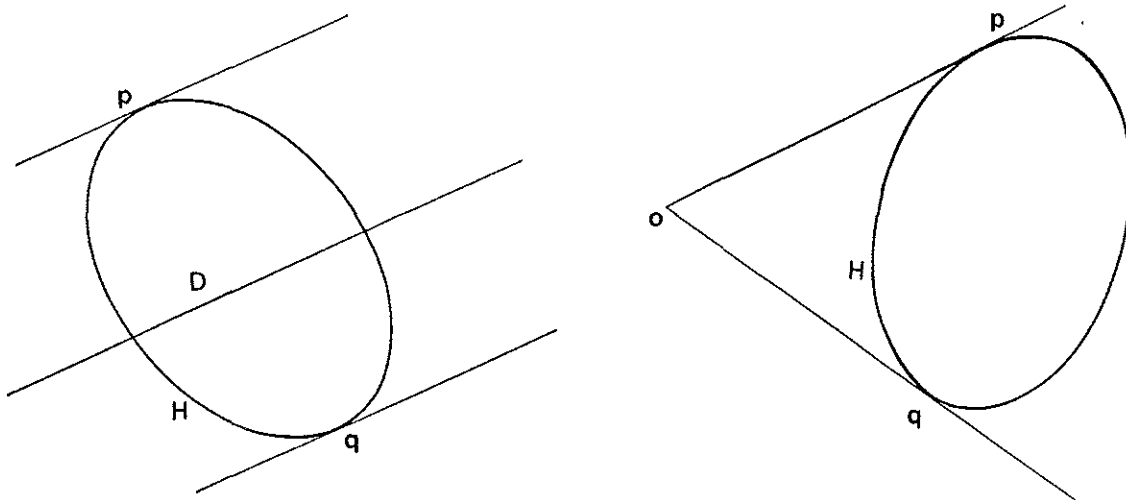
Proyección paralela de
dirección D

Las transformaciones biyectivas, si son continuas, se clasifican en dos tipos: Directas, que son aquellas que conservan el sentido de los arcos de huevo, e inversas, que cambian el sentido de los arcos de huevo. Como puede observarse en las anteriores figuras, las proyecciones centrales son aplicaciones directas, así como también los giros, mientras que las proyecciones exteriores son inversas, así como las proyecciones paralelas.

El teorema de las aplicaciones inversas, establece que toda aplicación inversa de un huevo en sí mismo deja dos y solamente dos puntos del huevo fijos. Sin embargo, las directas pueden dejar ninguno, uno o cualquier número finito o infinito de puntos fijos.

Mencionamos aquí tres ejemplos de aplicación del teorema citado:

a) Las proyecciones paralelas y las exteriores deben conservar dos puntos fijos.

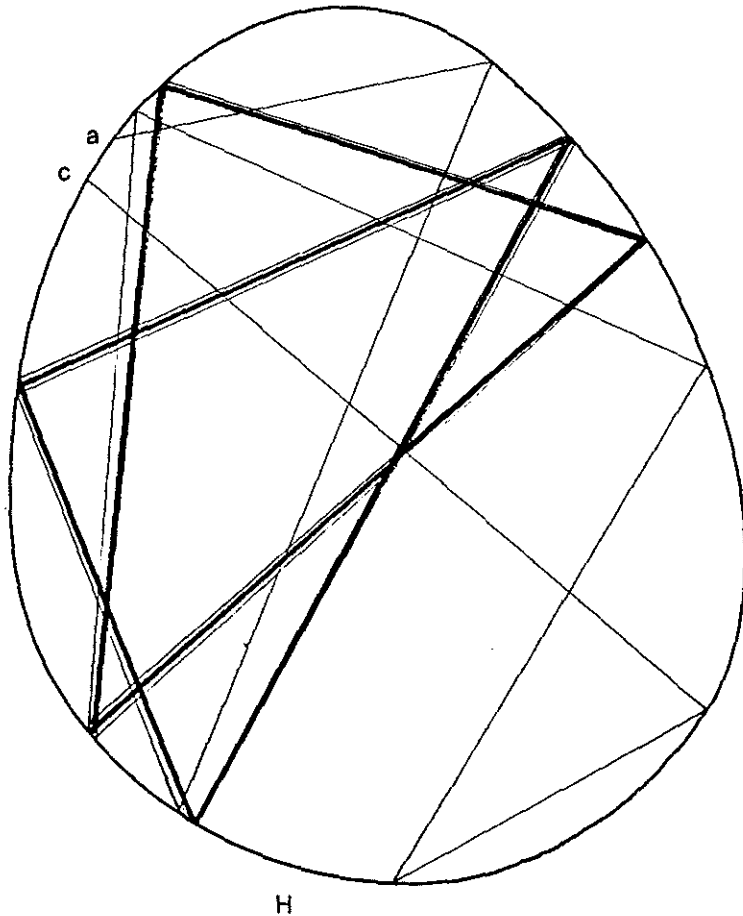


En estos diagramas, los puntos fijos corresponderían a p y q

b) Como la aplicación consecutiva de tres proyecciones externas es una transformación inversa, da lugar a dos puntos fijos. Por tanto, en todo huevo, dados tres puntos exteriores - arbitrarios, existen dos triángulos inscritos en el huevo y cuyos lados pasan por los puntos dados.

p_3^x

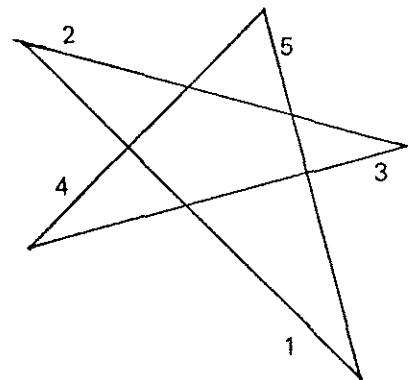
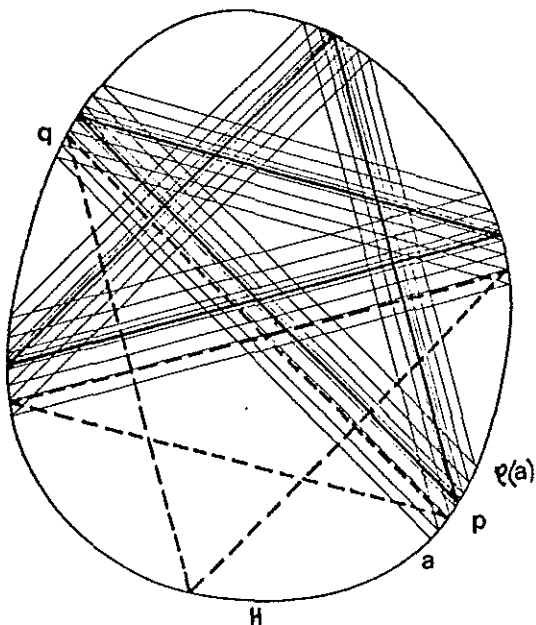
p_1^y



p_2^x

Siguiendo la trayectoria del punto 'a' por la composición de las tres proyecciones encontramos una solución. La otra, siguiendo la trayectoria de 'c' por la aplicación inversa.

c) Dado un huevo y una estrella de cinco puntas, existen dos estrellas de cinco puntas inscritas en el huevo y cuyos lados son paralelos a la dada. Se demuestra considerando las cinco proyecciones paralelas a los lados de la estrella dada.



Los puntos fijos son p y q. La estrella dada tiene sus lados numerados para indicar el orden de la composición de las proyecciones paralelas. Encontramos p por seguimiento de la trayectoria de "a" por la composición ℓ de las cinco proyecciones. En trazo grueso continuo y punteado estan señaladas las estrellas inscritas en H y de lados paralelos a la dada.

TEOREMAS DEL PUNTO FIJO

T-1 Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua con $f([a,b]) \subset [a,b]$. Entonces existe un punto en $[a,b]$ para el cual $f(x) = x$.

T-2 Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, y un número $k < 1$. Si para todo $x, y \in A$ se verifica $|f(x) - f(y)| < |x - y| \cdot k$, entonces hay un único $x \in A$ tal que $f(x) = x$.

Estos dos teoremas son clásicos y ambos admiten generalizaciones.

T-3 Si con las mismas hipótesis de T-1 f es estrictamente decreciente ($x < y \implies f(x) > f(y)$) entonces hay un único punto fijo.

Sean x, y con $f(x) = x, f(y) = y$.

Si $x < y, f(x) > f(y)$ por f decreciente, y por ser x, y fijos obtenemos el absurdo $x > y$. El caso $x > y$ es igualmente imposible y solo queda $x = y$

Además, $x = f(x)$ demuestra que $x \in f([a,b])$

T-4 $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua y estrictamente decreciente. Si $f([a,b]) \cap [a,b] \neq \emptyset$, entonces hay un único punto fijo en $[a,b]$, y este punto pertenece a $f([a,b])$.

Por ser f continua y decreciente estricta, la imagen de todo intervalo es un intervalo. Además, $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$. El intervalo $[a,b]$ y su imagen, tienen por hipótesis intersección no vacía. Pueden presentarse cuatro casos distintos de dos intervalos con intersección no vacía:

- a) $f([a,b]) \subset [a,b]$. Se aplica T-3, y queda demostrado.
- b) $[a,b] \subset f([a,b])$. Se aplica T-3 a la aplicación f^{-1} . Esta aplicación existe, por ser f estrictamente decreciente, y por lo mismo es estrictamente decreciente. Además:
- $f^{-1} : f([a,b]) = [f(b), f(a)] \longrightarrow [a,b] \subset f([a,b])$, por lo que se verifican todas las hipótesis del T-3. Si x es el punto fijo de f , entonces $f^{-1}(x) = x \Rightarrow x = f(x)$.
- c) $[a,b] \cap [f(b), f(a)] = [a, f(a)]$
- d) $[a,b] \cap [f(b), f(a)] = [f(b), b]$

Estos dos casos se demuestran por el mismo procedimiento: Tomemos el caso d)

Como $b \in [f(b), f(a)] = f([a,b])$, existe $f^{-1}(b)$

d-1 Si $f^{-1}(b) < f(b)$

$f : [f^{-1}(b), b] \longrightarrow [f(b), b] \subset [f^{-1}(b), b]$. Aplicando T-3, queda demostrado.

d-2 Si $f^{-1}(b) = f(b) \Rightarrow f^2(b) = b$ y

$f : [f(b), b] \longrightarrow [f(b), b]$. Aplicando T-3, queda demostrado

d-3 $f(b) < f^{-1}(b)$

$f^{-1} : [f(b), b] \longrightarrow [f^{-1}(b), b] \subset [f(b), b]$. Aplicando T-3 a f^{-1} en $[f(b), b]$, queda demostrado.

DEFINICION DE HUEVO

Un huevo es una curva de Jordán plana y tal que cualquier recta tiene un máximo de dos puntos en común con ella.

Una curva de Jordán plana es la imagen de una aplicación f , --
 $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y biyectiva en (a,b) con --
 $f(a) = f(b)$. Si f es biyectiva en todo $[a,b]$, entonces la imagen de f se llama arco de Jordán (en un arco de Jordán -----
 $f(a) \neq f(b)$ y por tanto no puede "cerrarse")

El teorema de Jordán afirma que un huevo divide el plano en -
dos componentes conexas y abiertas, una no acotada, que llamamos exterior del huevo H ($E(H)$), y otra acotada, que llamamos interior de H ($I(H)$). La frontera común de ambas compo--
nentes es H , y H es un conjunto cerrado.

Vamos a suponer en lo que sigue que $I(H)$ es siempre no vacío, eliminando el único caso en que esto no se cumple: que el huevo se limite a un punto.

Se puede demostrar fácilmente que los huevos son curvas rectificables (no todas las curvas de Jordán lo son). En efecto, es facil ver que un huevo H es un conjunto acotado, y se puede incluir siempre en un determinado círculo. La longitud de la circunferencia de dicho círculo, es una cota superior pa--
ra las longitudes de cualquier polígono convexo incluido en el círculo, y los polígonos inscritos en el huevo son todos convexos por tener las rectas dos puntos de intersección con los huevos como máximo. Así se ve que los polígonos inscritos en H tienen sus perímetros acotados, y por tanto H es --
rectificable.

NORMALIZACION DE UN HUEVO

Consiste en obtener el huevo H como imagen de una cierta aplicación η cuyo conjunto inicial es $[0, 2\pi]$.

La idea consiste en fijar un punto O interior al huevo y elegir una semirrecta con origen en O , determinando con estos elementos un sistema de referencia polar. A cada ángulo α , $0 \leq \alpha < 2\pi$ corresponde una única semirrecta r_α con origen en O , y en esta hay un único vector unitario u_α . La semirrecta r_α corta en un solo punto a H , p_α . La aplicación η hace corresponder a $\alpha \longrightarrow \eta(\alpha) = p_\alpha$. Se trata de demostrar que esta correspondencia cumple los requisitos necesarios para la definición del huevo H como su imagen (Ver definición de huevo)

P-1: Toda semirrecta con origen en $O \in I(H)$, corta a H en un punto único. Esta proposición se ve bien, y su demostración se puede pasar.

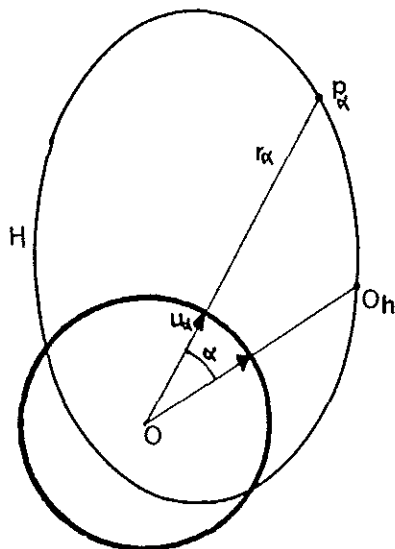
Como $E(H)$, $I(H)$, H forman una partición del plano se tiene para cualquier semirrecta r' con origen en O

$$r = (r' \cap E(H)) \cup (r' \cap I(H)) \cup (r' \cap H)$$

El primero de los términos es no vacío, pues de lo contrario la semirrecta sería un conjunto acotado.

El segundo, también es no vacío, porque contiene al menos a O . Además los dos términos son conjuntos conexos y disjuntos. Si el tercer término fuera vacío, r' sería un conjunto no conexo por ser unión de dos conexos disjuntos, lo que es absurdo. Por tanto $r \cap H \neq \emptyset$. Además contiene un solo punto, pues tomando la otra semirrecta con origen en O , la recta completa tendría en caso contrario más de dos puntos en común con H .

p-2 Dado $O \in I(H)$, toda recta que pasa por O corta a H en dos puntos, de tal forma que O pertenece al segmento cuyos extremos son dichos puntos. Esta propiedad es consecuencia directa de la anterior.



CONSTRUCCION DE η

Sea un huevo H y $O \in I(H)$. Por definición $H = f([a, b])$ con f continua en $[a, b]$ y biyectiva en (a, b) , y $f(a) = f(b)$.

Elegimos arbitrariamente un punto de H , O_H , que llamaremos origen de H , y siempre se puede suponer que $f(a) = f(b) = O_H$ (bastaría efectuar una traslación en el intervalo $[a, b]$)

Construimos una aplicación biyectiva $g: H \rightarrow U$, siendo U el círculo unidad:

Sea $p \in H$, $p = f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Entonces

$$g(p) = \frac{1}{|\vec{Op}|} \cdot \vec{Op} = \left(\frac{f_1(t)}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}}, \frac{f_2(t)}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}} \right)$$

Esta aplicación es continua por serlo $f_1(t)$ y $f_2(t)$ (f es continua) y además $|\vec{Op}| \neq 0$ por expresar la distancia de O a p y ser $O \notin H$ y H compacto.

g es inyectiva, pues dos puntos de H unidos con O , definen distintas semirrectas, que contienen distintos vectores unitarios. Además es sobreyectiva, puesto que la semirrecta que contiene a cualquier vector unitario, corta a H en un punto ($P-1$) Así queda probado que g es biyectiva y continua. Además existe su inversa $g^{-1} : U \longrightarrow H$, y es continua, por ser H compacto La aplicación

$e(x) = e^{ix}$ define una biyección bicontinua de $(0, 2\pi)$ en $U - \{1\}$ y es continua en $[0, 2\pi]$.

La aplicación de normalización de H queda construida como composición de g^{-1} y e

$$\eta = g^{-1} \circ e$$

$\eta : [0, 2\pi] \longrightarrow H$, es biyectiva en $(0, 2\pi)$ y continua en $[0, 2\pi]$

tiene p

$$\text{Además, } \eta(0) = \eta(2\pi) = O_H$$

De ahora en adelante, se supone que los huevos están normalizados. Cuando sea necesario se especificará quienes son O y O_H

Parametrización según la longitud.

Hay también otra forma útil de parametrizar los huevos, puesto que son curvas rectificables. Sea H , y L su longitud.

La aplicación de H en $[0, L]$ que a cada $\eta(\alpha)$ hace corresponder la longitud de $\eta[0, \alpha]$ la podemos llamar ℓ , y su inversa ℓ^{-1} hace corresponder con todos los requisitos el intervalo $[0, L]$ y el huevo H

ARCOS ORIENTADOS EN UN HUEVO

Si U es el círculo unidad, dados dos puntos cualquiera de U en un orden determinado p, q , podemos suponer que $e(0) = p$ ($e(x) = e^{ix}$).

Definimos arco de orientación positiva $\overrightarrow{p, q} = e([0, e^{-1}(q)])$
 Por convenio, al avanzar los valores de x de 0 a $e^{-1}(q)$, las imágenes $e(x)$ "recorren" U en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). Así la idea intuitiva de arco $\overrightarrow{p, q}$, es la de arco obtenido al recorrer U desde p a q en sentido positivo.

Se puede definir arco de orientación negativa $\overleftarrow{p, q} = e([e^{-1}(q), 2\pi])$, que coincide con la idea de arco obtenido al recorrer U de p a q en sentido

Se tiene:

$$\overrightarrow{p, q} \cup \overleftarrow{p, q} = U \quad \overrightarrow{p, q} \cap \overleftarrow{p, q} = \{p, q\}$$

$$\overleftarrow{p, q} = \overrightarrow{q, p}, \text{ y por tanto, } \overleftarrow{p, q} \cup \overrightarrow{q, p} = U \quad \overleftarrow{p, q} \cap \overrightarrow{q, p} = \{p, q\}$$

Además, todo arco tiene una representación positiva.

Otras relaciones:

$$\overrightarrow{p, q} \subset \overrightarrow{p, q} \Rightarrow e^{-1}(q) < e^{-1}(p) \text{ y } q' < q \quad \alpha' < \alpha \Rightarrow \overleftarrow{h(0), \alpha'} \subset \overleftarrow{h(0), \alpha} \quad (\alpha', \alpha \text{ entre } 0 \text{ y } 2\pi)$$

Para definir arco en un Huevo H :

si p, q son dos puntos de H dados en un orden determinado, llamamos arco de orientación positiva $\overrightarrow{p, q}$ a $g(\overrightarrow{g^{-1}(p), g^{-1}(q)})$ y arco de orientación negativa $\overleftarrow{p, q}$ a $g^{-1}(\overleftarrow{g(p), g(q)})$

Estas definiciones coinciden con la idea intuitiva de recorrer el huevo de p a q en sentido positivo o negativo, y mantienen todas las relaciones vistas para los arcos de U

Orden en un arco

Aunque no es posible definir un orden absoluto en un hueco H , es te orden si es posible dentro de un arco.

Sea $\overleftarrow{p, q} \subset H$, $\overleftarrow{p, q} = \eta[\beta, \alpha]$

Sean $a, b \in \overleftarrow{p, q}$ Decimos $a < b \iff \eta^{-1}(a) < \eta^{-1}(b)$

A veces es muy conveniente disponer de una definición de arco como intervalo en relación a el orden definido anteriormente

Esto nos conduce a la siguiente definición:

SUBARCO DE UN ARCO DADO

Sea $\overleftarrow{p, q}$ arco de H , y $a, b \in \overleftarrow{p, q}$. Si es $a < b$ definimos:

$\overleftarrow{a, b} = \{ x \in \overleftarrow{p, q} / a \leq x \leq b \}$, y entonces $\overleftarrow{a, b} = \eta [\eta^{-1}(a), \eta^{-1}(b)]$

Se puede utilizar la misma definición para $\overleftarrow{a, b}$ como subarco de $\overleftarrow{p, q}$ que como arco propio, debido a que ambas coinciden:

si $t(x) = x + \eta^{-1}(a)$

$t: [0, \eta^{-1}(b) - \eta^{-1}(a)] \longrightarrow [\eta^{-1}(a), \eta^{-1}(b)]$

si es $\eta^* = \eta \circ t$

entonces:

$$\eta^* [0, \eta^{*-1}(b)] = \eta [\eta^{-1}(a), \eta^{-1}(b)]$$

La aplicación η^* define $\overleftarrow{a, b}$ como arco, y esta definición coincide con la de $\overleftarrow{a, b}$ como subarco.

APLICACIONES DIRECTAS E INVERSAS

Sean H y H' dos huecos, y $e : H \longrightarrow H'$

$$e \text{ es directa} \iff \forall p, q \in H \quad \overleftarrow{e(p, q)} = \overleftarrow{e(p), e(q)}$$

$$e \text{ es inversa} \iff \forall p, q \in H \quad \overleftarrow{e(p, q)} = \overleftarrow{e(q), e(p)}$$

Estas definiciones formalizan la idea intuitiva dada en la introducción de que las aplicaciones directas conservan el sentido de los arcos, y las inversas lo cambian.

Si e es directa escribimos e^+ , y si es inversa escribimos e^-

Cuando e, ψ se pueden componer, es evidente que

$$e^+, \psi^+ \Rightarrow (e \circ \psi)^+ ; \quad e^+, \psi^- \Rightarrow (e \circ \psi)^- ; \quad e^-, \psi^+ \Rightarrow (e \circ \psi)^-$$

$$e^-, \psi^- \Rightarrow (e \circ \psi)^+$$

Si existe e^{-1} :

$$e^+ \Rightarrow (e^{-1})^+ \text{ y } e^- \Rightarrow (e^{-1})^-$$

T-5 Si $e : H \longrightarrow H'$ es una aplicación directa, entonces $a < b \Rightarrow e(a) < e(b)$ (Suponemos $a, b \in \overleftarrow{p, q}$, y entonces $e(a), e(b) \in \overleftarrow{e(p), e(q)}$)

Si e es inversa $a < b \Rightarrow e(a) > e(b)$

e^+ : Consideramos los subarcos $\overleftarrow{p, a}$ y $\overleftarrow{p, b}$

$$a < b \Rightarrow \overleftarrow{p, a} \subset \overleftarrow{p, b} \Rightarrow \overleftarrow{e(p, a)} \subset \overleftarrow{e(p, b)} \Rightarrow \overleftarrow{e(p), e(a)} \subset \overleftarrow{e(p), e(b)} \Rightarrow e(a) < e(b)$$

e^- : Consideramos los subarcos $\overleftarrow{p, a}$ y $\overleftarrow{p, b}$

$$a < b \Rightarrow \overleftarrow{p, a} \subset \overleftarrow{p, b} \Rightarrow \overleftarrow{e(p, a)} \subset \overleftarrow{e(p, b)} \Rightarrow \overleftarrow{e(a), e(b)} \subset \overleftarrow{e(b), e(p)} \Rightarrow (b), (p) [\eta^{-1}(e(a)), \eta^{-1}(e(p))] \subset$$

$$[\eta^{-1}(e(b)), \eta^{-1}(e(p))] \Rightarrow \eta^{-1}(e(b)) < \eta^{-1}(e(a)) \Rightarrow e(b) < e(a)$$

Donde η es la aplicación de normalización de H'

T-6 Si \mathcal{C} es una biyección continua e inversa $\mathcal{C}: H \longrightarrow H$
 y $\overleftarrow{p, q} \subset H$ con $\mathcal{C}(\overleftarrow{p, q}) \subset \overleftarrow{p, q}$
 Entonces hay un punto $x \in \overleftarrow{p, q} / \mathcal{C}(x) = x$, x es único y $x \in \mathcal{C}(\overleftarrow{p, q})$

Sea la aplicación $\omega = \eta^{-1} \circ \mathcal{C} \circ \eta$

a) ω es estrictamente decreciente:

$$x < y \Rightarrow \eta(x) < \eta(y) \Rightarrow \mathcal{C}(\eta(x)) > \mathcal{C}(\eta(y)) \Rightarrow \eta^{-1}(\mathcal{C}(\eta(x))) > \eta^{-1}(\mathcal{C}(\eta(y)))$$

Supuesto que x e y pertenezcan al dominio de definición de ω

b) $\omega(o) = \eta^{-1} \circ \mathcal{C}(\eta(o)) = \eta^{-1} \circ \mathcal{C}(p)$

$$\omega(\eta^{-1}(q)) = \eta^{-1} \circ \mathcal{C}(q)$$

como $p < q \Rightarrow \mathcal{C}(q) < \mathcal{C}(p)$ (por t-5), $\eta^{-1}(\mathcal{C}(q)) < \eta^{-1}(\mathcal{C}(p))$

Por tanto

$$\omega: [o, \eta^{-1}(q)] \longrightarrow [\eta^{-1}(\mathcal{C}(q)), \eta^{-1}(\mathcal{C}(p))]$$

Como $o < \eta^{-1}(\mathcal{C}(q))$ y $\mathcal{C}(p) < q \Rightarrow \eta^{-1}(\mathcal{C}(p)) < \eta^{-1}(q)$

resulta: $[\eta^{-1}(\mathcal{C}(q)), \eta^{-1}(\mathcal{C}(p))] \subset [o, \eta^{-1}(q)]$

Como ω es continua, se puede aplicar T-3 a ω en el intervalo $[o, \eta^{-1}(q)]$. Hay un único punto fijo $\xi / \omega(\xi) = \xi$.

$$\eta^{-1} \circ \mathcal{C} \circ \eta(\xi) = \xi \Rightarrow \mathcal{C} \circ \eta(\xi) = \eta(x) \Rightarrow \eta(\xi) \text{ es punto fijo de } \mathcal{C}$$

$$\text{Si } x' \text{ es } \mathcal{C}(x') = x' \Rightarrow \mathcal{C}(\eta \circ \eta^{-1}(x')) = \eta \circ \eta^{-1}(x') \Rightarrow \eta^{-1} \circ \mathcal{C} \circ \eta(\eta^{-1}(x')) = \eta^{-1}(x') \Rightarrow \omega(\eta^{-1}(x')) = \eta^{-1}(x') \Rightarrow \eta^{-1}(x') = \xi \Rightarrow x' = \eta(\xi).$$

Luego $\eta(\xi)$ es el único punto fijo y además $\eta(\xi) \in \mathcal{C}(\overleftarrow{p, q})$

Si eliminamos de las hipótesis el caracter inverso de \mathcal{C} , se mantiene la validez de la demostración de la tesis, salvo en lo -- referente a la unicidad de x

Tenemos pues la siguiente proposición:

Si \mathcal{C} es una biyección continua y directa

y $\overleftarrow{p, q} \subset H$ con $\mathcal{C}(\overleftarrow{p, q}) \subset \overleftarrow{p, q}$

Entonces hay un punto $x \in \overleftarrow{p, q}$ con $\mathcal{C}(x) = x$

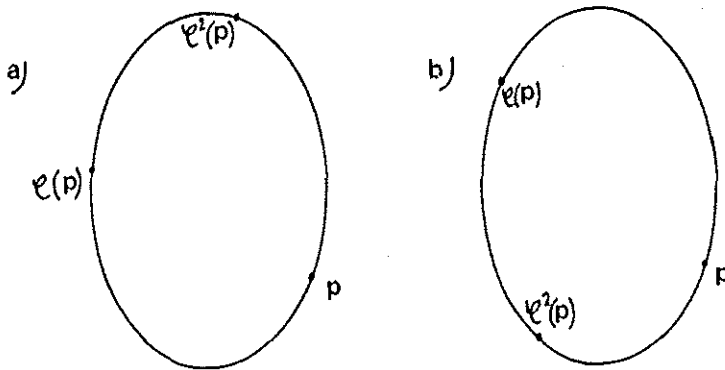
T-7 (Teorema de las aplicaciones inversas)

Sea \mathcal{C} una biyección inversa y continua de un hueco en si mismo entonces hay dos únicos puntos fijos en H.

Demostración:

Tomamos un punto cualquiera p con $p \neq \mathcal{C}(p)$ y consideramos los arcos $\overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}$ y $\overleftarrow{(p), p}$ cuya unión es H

a) $\mathcal{C}^2(p) \in \overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}$ (ver figura)



Aplicamos el anterior teorema a \mathcal{C} en el arco $\overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}$

$\mathcal{C}(\overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}) = (\mathcal{C}^2(p), \mathcal{C}(p)) \subset \overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}$. Hay un único punto fijo x_1 en $\overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}$

Por otra parte tenemos $(\mathcal{C}^{-1})^{-1}$

$p \in \overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}^2(p)}$ (pues $\mathcal{C}^2(p) \in \overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)} \Rightarrow p \in \overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}^2(p)}$).

$\mathcal{C}^{-1}(\overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}^2(p)}) = \overleftarrow{\mathcal{C}(p), p} \subset \overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}^2(p)}$. Aplicando el T-6 a \mathcal{C}^{-1} tenemos un único punto fijo en $\overleftarrow{\mathcal{C}(p), p}$, x_2 , y no puede haber más puntos fijos por $\overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)} \cup \overleftarrow{\mathcal{C}(p), p} = H$

b) $\mathcal{C}^2(p) \in \overleftarrow{\mathcal{C}(p), p}$ (Ver figura superior)

$\mathcal{C}(\overleftarrow{\mathcal{C}(p), p}) = \overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}^2(p)} \subset \overleftarrow{\mathcal{C}(p), p}$

Aplicando el T-6 existe un único punto fijo x_1 en $\overleftarrow{\mathcal{C}(p), p}$

Aplicando el T-6 a \mathcal{C}^{-1} en el arco $\overleftarrow{\mathcal{C}^2(p), \mathcal{C}(p)}$ tenemos, como $p \in \overleftarrow{\mathcal{C}^2(p), \mathcal{C}(p)}$

$\mathcal{C}^{-1}(\overleftarrow{\mathcal{C}^2(p), \mathcal{C}(p)}) = \overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)} \subset \overleftarrow{\mathcal{C}^2(p), \mathcal{C}(p)}$. Hay un único punto fijo $x_2 \in \overleftarrow{p, \mathcal{C}(p)}$

Para terminar la demostración hay que suponer el siguiente caso, interesante por revelar el "funcionamiento" de las aplicaciones inversas.:

Supongamos que el primero de los puntos elegidos es fijo, $p = \mathcal{C}(p)$ si elegimos otro punto q que no sea fijo, la demostración ya está hecha. Pero si $q = \mathcal{C}(q)$ tenemos:

por ser inversa, $\overleftarrow{\mathcal{C}}_{p,q} = \overleftarrow{\mathcal{C}}(q), \mathcal{C}(p) = \overleftarrow{q,p}$

Si x_2 es un punto fijo de $\overleftarrow{p,q}$ $\mathcal{C}(x_2) = x_2$ se tiene $\mathcal{C}(x_2) \in \overleftarrow{q,p} \Rightarrow x_2 \in \overleftarrow{q,p} \Rightarrow x_2 \in \overleftarrow{q,p} \cap \overleftarrow{p,q} = \{p, q\}$. No puede haber en $\overleftarrow{p,q}$ mas puntos fijos que p y q , y por igual razonamiento se ve que en $\overleftarrow{q,p}$ pasa igual. Así, las aplicaciones inversas dejan dos puntos fijos, que dividen al hueco en dos partes, en dos arcos, que se corresponden mutuamente por la aplicación.

Proposición: Toda aplicación biyectiva y continua $\mathcal{C}: H \longrightarrow H'$ es directa o inversa

Sean η y η' las aplicaciones de normalización de H y H'

La aplicación $\theta = \eta' \circ \mathcal{C} \circ \eta: [0, 2\pi) \longrightarrow [0, 2\pi)$ es una biyección continua, y por lo tanto es creciente o decreciente.

Si θ es creciente, sea $\overleftarrow{p,q}$. Suponemos $0_H = p$ y $0_{H'} = \mathcal{C}(p)$

$$\theta [0, \eta^{-1}(q)] = [\theta(0), \theta(\eta^{-1}(q))] = [0, \eta^{-1}(q)]$$

$$\text{Como } \mathcal{C} = \eta' \circ \theta \circ \eta^{-1}$$

$$\overleftarrow{\mathcal{C}}_{p,q} = \eta' \circ \theta [0, \eta^{-1}(q)] = \eta' [0, \eta^{-1}(q)] = \overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}(q)}$$

Si es decreciente, suponemos $0_{H'} = \mathcal{C}(q)$

$$\theta [0, \eta^{-1}(q)] = [\theta(\eta^{-1}(q)), \theta(0)] = [0, \eta^{-1}(p)]$$

$$\overleftarrow{\mathcal{C}}_{p,q} = \eta' \circ \theta [0, \eta^{-1}(p)] = \eta' [0, \eta^{-1}(p)] = \overleftarrow{\mathcal{C}(q), \mathcal{C}(p)}$$

Proposición: Una aplicación biyectiva directa o inversa es continua.

La aplicación $\eta' \circ \mathcal{C} \circ \eta = \theta$ es biyectiva de $[0, 2\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$, Si \mathcal{C}^+ entonces θ creciente, y si \mathcal{C}^- entonces θ decreciente. En ambos casos θ continua, y también $\mathcal{C} = \eta' \circ \theta \circ \eta$ es continua.

GIROS Y PROYECCIONES

Destacamos las siguientes correspondencias biyectivas de un huevo H en si mismo : Giros de centro O y ángulo α , $G_{O,\alpha}$; Proyecciones centrales internas de centro O , I_O ; proyecciones centrales externas de centro O , E_O y proyecciones paralelas de dirección D (ver figs de la introducción)

GIROS

Si H está normalizado utilizando O como origen de referencia -- polar $G_{O,\alpha}$ se define así :

Si $p \in H$ determina una semirrecta r que forma ángulo β con el origen del sistema de referencia polar, hacemos corresponder a r la semirrecta r' que forma ángulo con el origen $\beta+\alpha$, y al punto p le asignamos el punto p' de corte de r' con H

Si llamamos t_α a la aplicación $x \xrightarrow{t_\alpha} x+\alpha$, entonces

$$G_{O,\alpha} = \eta \circ (t_\alpha) \circ \eta^{-1}$$

Esta definición es posible gracias a que $\eta = f \circ e$ está definida en el intervalo $[\alpha, 2\pi+\alpha]$ porque la aplicación $e(x) = e^{ix}$ está definida y es continua en dicho intervalo, y su imagen es U

Así queda probada la continuidad de $G_{O,\alpha}$, por ser composición de aplicaciones continuas, y es evidentemente biyectiva.

PROYECCIONES CENTRALES INTERNAS.

Son giros de ángulo π

$$I_O = G_{O,\pi}$$

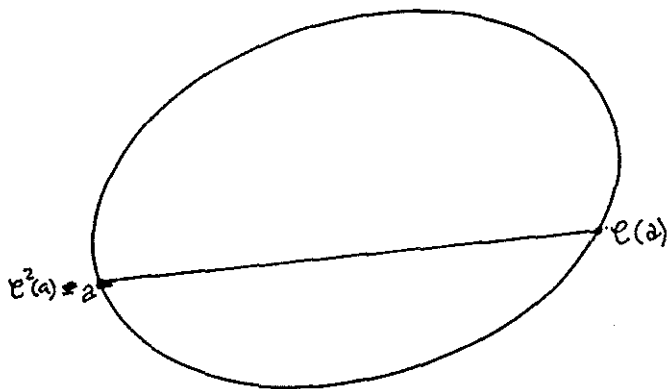
PROYECCIONES CENTRALES EXTERNAS Y PROYECCIONES PARALELAS

Dado $O \in E(H)$, cada $p \in H$ determina con O una recta que puede cortar a H en p y en otro punto p' , en cuyo caso $E(p) = p'$, o que corta a H sólo en p , en cuyo caso $E(p) = p$. La aplicación así definida es biyectiva.

Si O es un "punto del infinito", determina rectas paralelas a-- una dirección fija, y tenemos la proyección paralela $D(p)$ definida como un caso especial de proyección central externa.

Los giros son aplicaciones biyectivas y continuas, que salvo el caso de que sean de ángulo nulo o múltiplo de 2π , en que conservan todos los puntos fijos, no conservan ningún punto fijo. Esto significa que no pueden ser aplicaciones inversas, pues en ningún caso conservan sólo dos puntos fijos, y por tanto deben ser aplicaciones directas.

Si admitimos que las proyecciones centrales externas y paralelas son aplicaciones continuas, se ve fácilmente que son inversas. Tomando un punto cualquiera a de un huevo H y encontrando $\mathcal{C}(a)$ donde \mathcal{C} es una proyección paralela por ejemplo, la recta que une a y $\mathcal{C}(a)$ divide a H en dos arcos. Tomemos el arco $\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}$. Es evidente que $\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}$ se proyecta en si mismo, esto es $\mathcal{C}(\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}) = \overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}$. Pero $\mathcal{C}^2(a) = a \Rightarrow \mathcal{C}(\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}) = \overleftarrow{\mathcal{C}(a), \mathcal{C}^2(a)} = \overleftarrow{\mathcal{C}(a), a}$ lo que significa que \mathcal{C} no puede ser directa, y debe ser inversa.



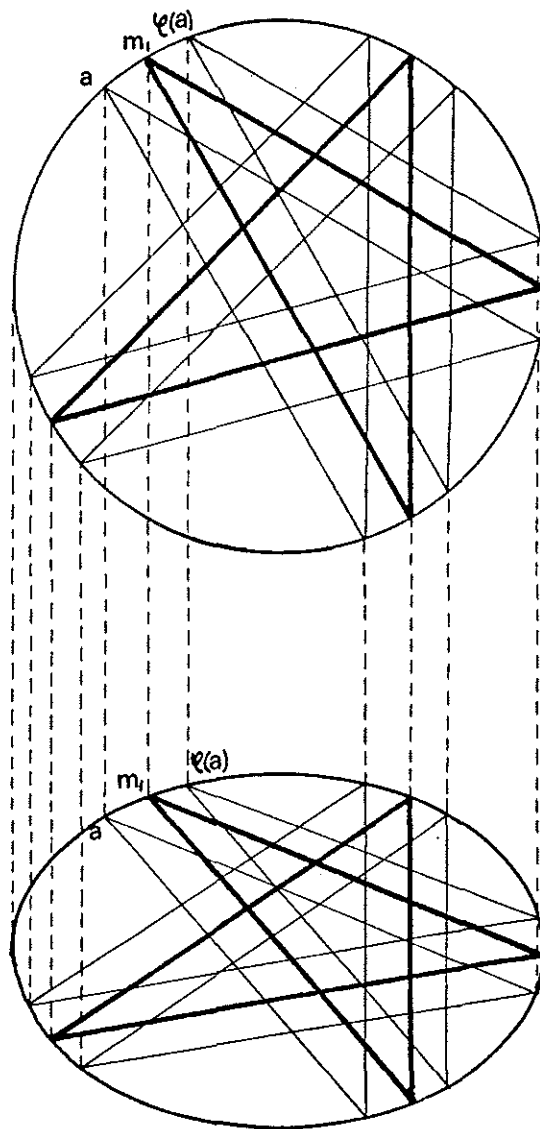
EJEMPLOS

1º Composición de un número impar de proyecciones paralelas en circunferencias y elipses.

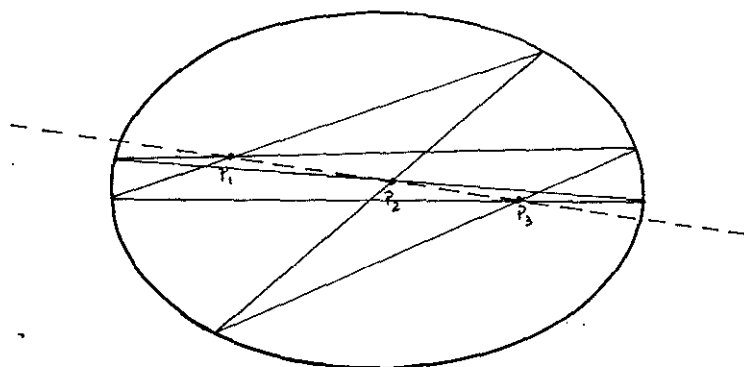
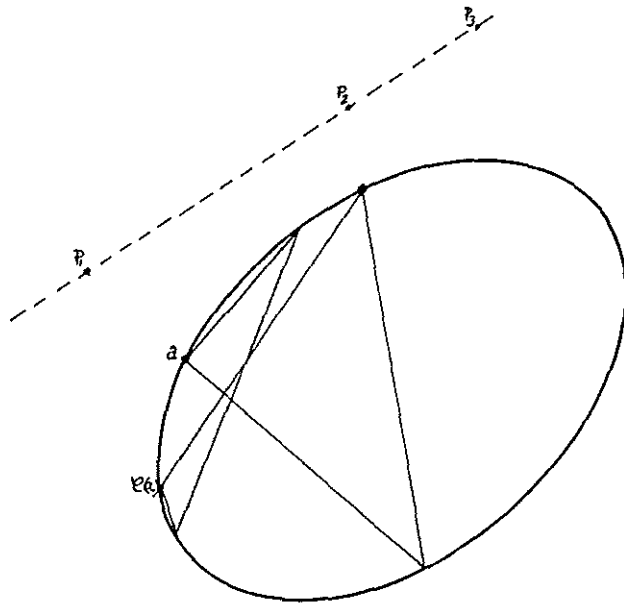
Tomemos por ejemplo cinco proyecciones paralelas en una circunferencia. Como se hizo notar en el ejemplo c) de la Introducción existen dos puntos fijos que corresponden a dos polígonos de -- cinco lados inscritos en la circunferencia. En el caso de la introducción se trataba de dos polígonos estrellados.

En el caso de una circunferencia, la composición de las cinco proyecciones transforma un punto cualquiera a en $\mathcal{C}(a)$. Como es inversa tenemos $\mathcal{C}(\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}) = \overleftarrow{\mathcal{C}^2(a), a}$. Pero como los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son de igual longitud y \mathcal{C} es composición de proyecciones paralelas, $\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}$ y $\overleftarrow{\mathcal{C}^2(a), a}$ deben tener la misma longitud y por tanto $a = \mathcal{C}^2(a)$. Es decir, la composición de un número impar de proyecciones paralelas en una circunferencia es una transformación involutiva. Esta propiedad también la tienen las elipses, pues pueden ser consideradas como proyecciones de circunferencias C , y las proyecciones paralelas en la elipse se transformarían en proyecciones paralelas en C (ver fig).

Además en el caso de las circunferencias podemos encontrar los puntos fijos: Sean m_1 y m_2 los puntos medios de los arcos ---- $\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}$ y $\overleftarrow{\mathcal{C}(a), a}$. Estos son los puntos fijos puesto que por -- una parte \mathcal{C} inversa $\mathcal{C}(\overleftarrow{a, m_1}) = \overleftarrow{\mathcal{C}(a), m_1}$ y como m_1 es el punto medio del arco $\overleftarrow{a, \mathcal{C}(a)}$ se tiene $\text{long}(\overleftarrow{a, m_1}) = \text{long}(\overleftarrow{m_1, \mathcal{C}(a)})$ y por conservar \mathcal{C} las longitudes de los arcos $\text{long}(a, m_1) = \text{long}(\mathcal{C}(m_1), \mathcal{C}(a))$ lo que prueba que $\mathcal{C}(m_1) = m_1$. Por el mismo razonamiento se prueba que m_2 es también punto fijo.

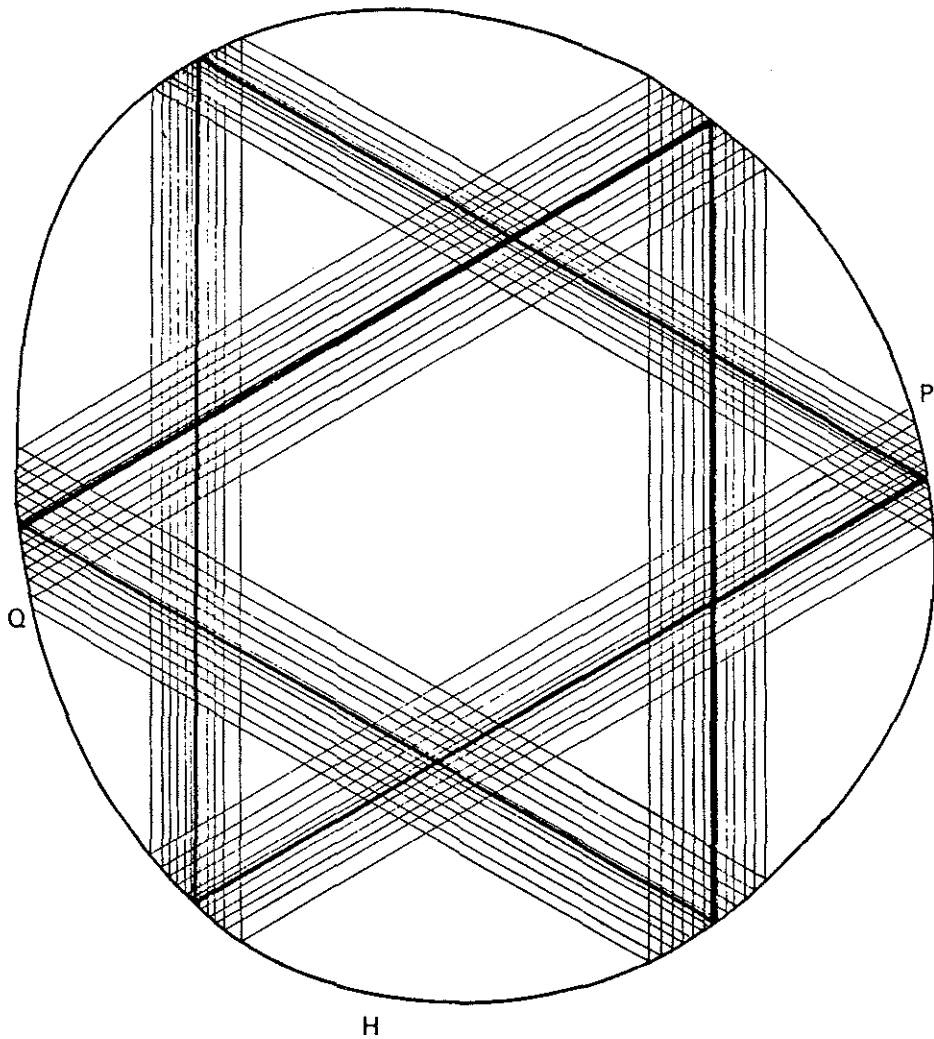


2º El teorema de Pascal asegura que la composición de tres proyecciones centrales internas o externas con respecto a una elipse es una aplicación involutiva si los centros de las proyecciones están en línea recta. Y por el contrario, si \mathcal{C} es la composición de tres proyecciones internas o externas de centros no alineados, \mathcal{C}^2 no puede tener ningún punto fijo, pues entraría en contradicción con el teorema de Pascal



3º La estrella de David.

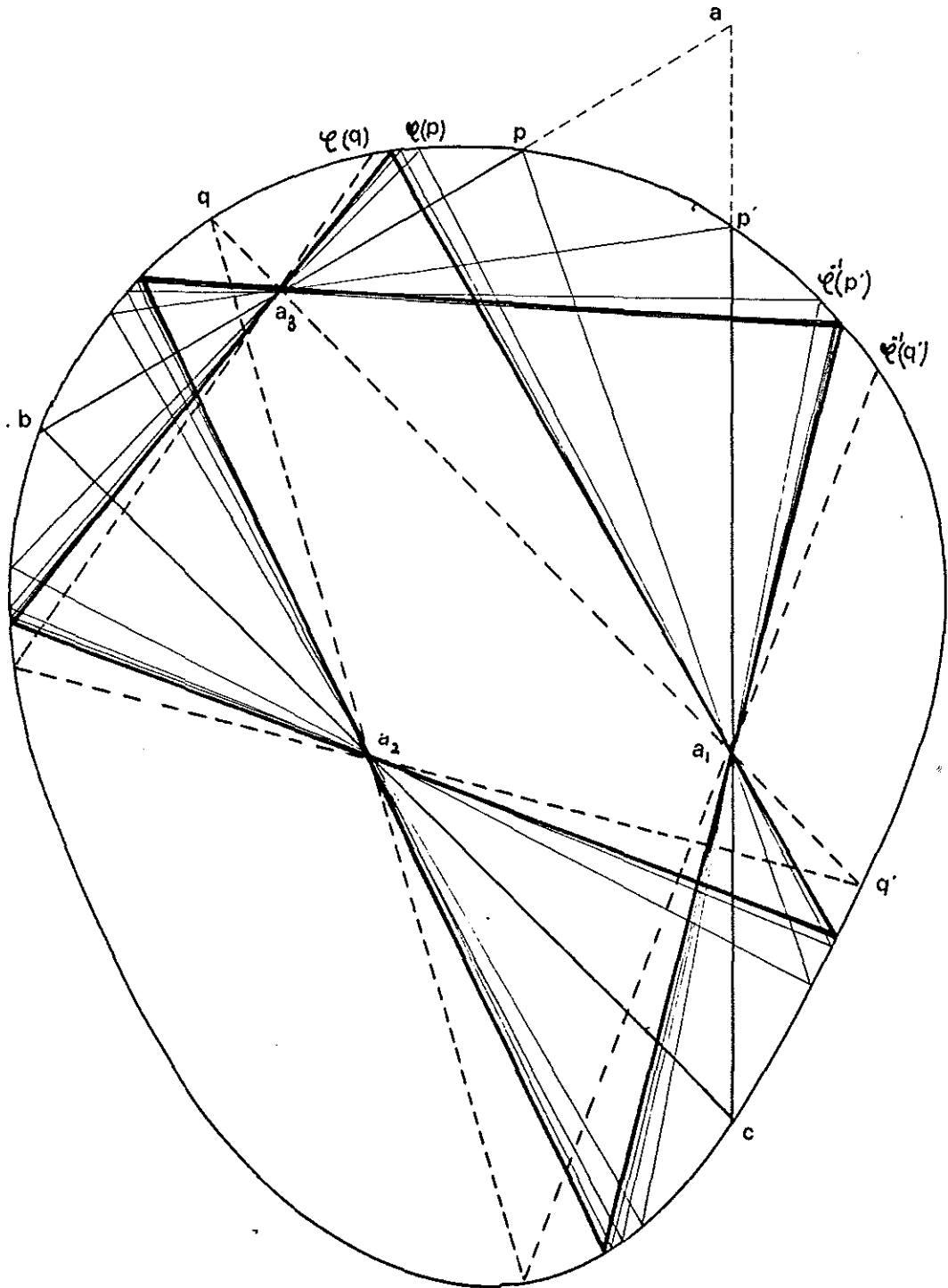
La aplicación del teorema de las biyecciones inversas a la composición de tres proyecciones paralelas produce este diseño, en el que se manifiesta la existencia de dos únicos puntos fijos que corresponden a dos triángulos equiláteros inscritos en el huevo H. Se han hallado en nuestro ejemplo las soluciones siguiendo las trayectorias de los puntos p y q por las aplicaciones e y e^{-1}



4º En el caso de que exista un triángulo que tenga sus tres ver tices en el exterior de un huevo H, o dos en la frontera y uno en el exterior, y si a_1, a_2 y a_3 son tres puntos que están cada uno en uno de los lados del citado triángulo- en nuestra figura el triángulo es $\widehat{a,b,c}$, si \mathcal{C} es la composición de las proyecciones p_1, p_2, p_3 con centros en a_1, a_2 y a_3 entonces \mathcal{C} tiene al menos dos puntos fijos. Es decir, existen al menos dos triángulos cuyos lados pasan por a_1, a_2 y a_3 y están inscritos en el huevo H.

En efecto $\mathcal{C} = p_3 \circ p_2 \circ p_1$ y $\mathcal{C}(\overleftarrow{p,q}) = \overleftarrow{\mathcal{C}(p), \mathcal{C}(q)}$, que con $\mathcal{C}(\overleftarrow{p,q}) \subset \overleftarrow{p,q}$ (ver fig) significa que al menos existe un punto fijo en $\overleftarrow{p,q}$

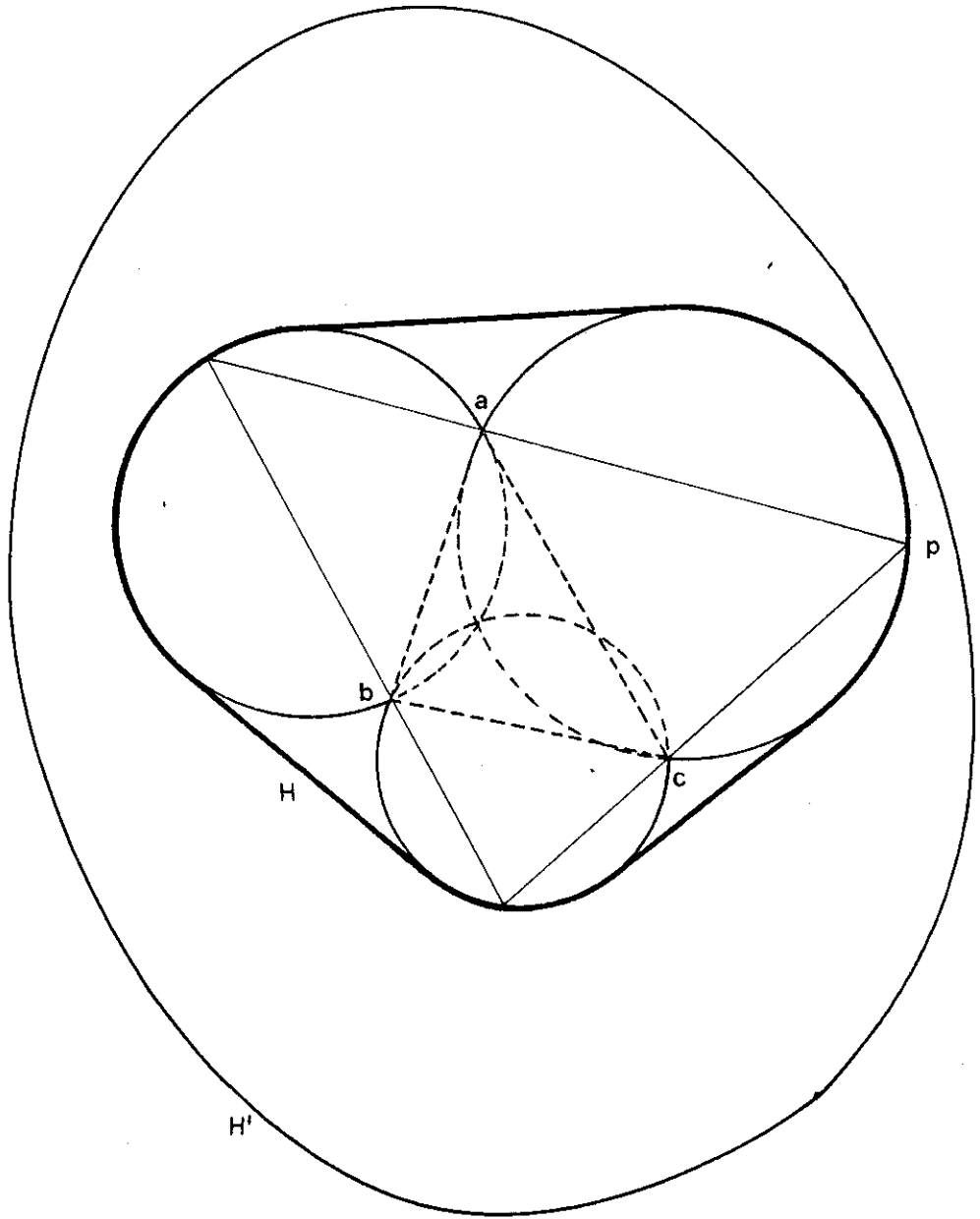
Si consideramos $\mathcal{C}^{-1} = p_1 \circ p_2 \circ p_3$ y el arco $\overrightarrow{p', q'}$ encontramos al menos otra solución.



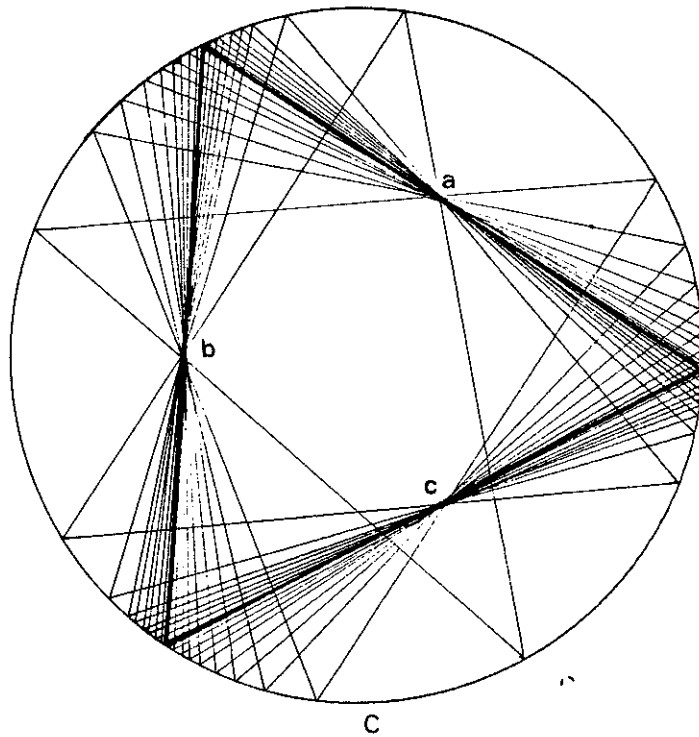
5º En el siguiente diseño se construye un huevo H que tiene infinitos puntos fijos con respecto a la composición de tres proyecciones internas, y un huevo H' que no tiene ningún punto fijo

Dados tres puntos a, b, c se construyen arcos capaces sobre los lados del triángulo que determinan, de forma que la suma de los tres ángulos que abarcan los arcos capaces sea de 180° . Se unen los arcos dos a dos mediante rectas tangentes y queda construido un huevo H en donde cualquiera de los puntos pertenecientes a los arcos circulares son vértices de triángulos inscritos a los tres arcos capaces y que pasan por a, b y c. Los puntos fijos son infinitos con respecto a la composición de las tres proyecciones a, b y c

Si se construye cualquier huevo H' que incluye al huevo H en su interior y ambos no tienen puntos en común, H' no puede tener puntos fijos respecto a la misma aplicación, porque los ángulos inscritos y que abarcan los lados de a, b, c suman menos de 180° .



6º Si en el anterior ejemplo $\widehat{a,b,c}$ es equilátero y los tres arcos capaces són de 60° , el baricentro de $\widehat{a,b,c}$ es el centro de una circunferencia tangente a los tres arcos capaces que llamamos C . En C hay un solo punto fijo en relación a la composición de las proyecciones con centros a,b y c que será uno de los puntos de tangencia de C con los arcos capaces. La trayectoria de cualquier punto de C con respecto a \mathcal{C} o a \mathcal{C}' converge al punto fijo.



7º En este ejemplo se analiza la composición de cuatro proyecciones centrales internas. Si las tomamos en un orden tal que sus centros formen un cuadrilátero convexo, el estudio es parecido al caso de composición de tres proyecciones centrales internas que nos ha ocupado en los anteriores ejemplos: Si existe un polígono de cuatro lados que pasan por los centros de proyección y que tiene sus vértices exteriores al huevo, existen al menos dos soluciones (puntos fijos, cuadriláteros inscritos en el huevo y cuyos lados pasan por los centros de proyección). Pero puede haber casos en donde no exista ningún punto fijo. En el diseño, se analiza el caso en que los centros de proyección se toman en un orden tal que forman un cuadrilátero no convexo. En este caso se demuestra que debe existir al menos un punto fijo. Basta observar que $\mathcal{C}(\overleftarrow{q,p}) = \mathcal{C}(\overleftarrow{q}), \mathcal{C}(\overleftarrow{p}) \subset \overleftarrow{q,p}$ y por tanto debe existir un punto fijo. El resultado se generaliza al caso de $2n$ proyecciones centrales internas cuyos vértices forman un polígono convexo, si se componen eligiendo los centros consecutivos en vértices opuestos.

