

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Patronato «Alfonso el Sabio»

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN»
DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD
MATEMATICA ESPAÑOLA

I N D I C E

CUARTA SERIE

TOMO XVII

MADRID

1957

TEORIA ARITMETICO-GEOMETRICA DE LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS

por

PEDRO ABELLANAS

§ 1. Introducción.—Es bien conocido que las memorias de Kronecker y Dedekind-Weber han dado origen a una teoría intrínseca de las funciones algebraicas de una variable, en la cual todo concepto se define directamente en el cuerpo de las funciones algebraicas sin referencia alguna a ningún anillo de polinomios particular correspondiente a un punto general determinado del cuerpo. Para ello, se define el concepto fundamental de divisor primo, o valoración, y mediante él se define cualquier otro invariativamente. Pero no son propiamente los divisores, sino sus clases de restos respecto del subgrupo formado por los divisores principales quienes intervienen en la teoría; por ello, al intentar extenderla a variedades de dimensión superior a la unidad se tropieza inmediatamente con la dificultad de no poderse definir directamente, es decir, sin el auxilio de un modelo, la clase principal, formada por los divisores principales, ya que dado un elemento del cuerpo de funciones algebraicas de varias variables existen infinitas valoraciones de dimensión máxima en las que dicha función toma un valor distinto de cero. Por ello es necesario limitar el número de valoraciones máximas admisibles, lo que se hace tomando un modelo determinado de variedad y considerando únicamente los divisores de primera especie respecto del modelo. Ahora bien, al proceder así se presentan dos clases de dificultades. Por un lado, los conceptos ya no se definen de modo birracionalmente invariante, y, por otro, las singularidades del modelo dan lugar a importantes complicaciones técnicas. Esto último se ha evitado operando con un modelo sin singularidades, pero esto im-

plica resolver previamente el problema de su resolución, lo que todavía no se ha conseguido en variedades de dimensión superior a tres. Por ello, hemos desarrollado en el presente trabajo una teoría que evita el proceso previo de la resolución de singularidades. Aquí operamos únicamente con superficies, pero el método empleado admite, como se verá en otra ocasión, su empleo en cualquier otro caso.

Partimos de un modelo inicial arbitrario, P , de la superficie y construimos a partir de él un conjunto, S , de infinitos modelos, formado por todas las antiproyecciones de P (véase [2]* y los párrafos siguientes). Un divisor primo es toda valoración unidimensional del cuerpo de funciones racionales, Σ , sobre P , que sea de primera especie respecto de P . Dado un divisor P se prueba que existe un subconjunto de modelos S_P de S tal que el centro de P en cualquiera de ellos no posee singularidades respecto del modelo ni respecto de la curva. Un *ciclo primo*, centro de P en S , es el conjunto formado por todos los centros de P en los modelos de S_P . Si P y P' son dos divisores primos, existe un subconjunto, $S_{P, P'}$, de S_P y de $S_{P'}$ tal que los centros de P y P' en cualquier modelo de $S_{P, P'}$ están definidos en un anillo no homogéneo mediante ideales principales, y todo punto común a ambas curvas se puede definir mediante un ideal de este anillo. Si M y M' son divisores arbitrarios, se construye por inducción el subconjunto $S_{M, M'}$ que posee propiedades análogas a $S_{P, P'}$. A este fin está dedicado el § 3.

En el § 4 se estudia la intersección de dos ciclos y se demuestra (T. 3) que si los ciclos verifican cierta condición, determinan unívocamente un producto de potencias de anillos locales completados, llamados sitios de intersección de ambos ciclos.

En el § 5 se estudian los sistemas lineales de ciclos o de divisores y se define la deficiencia del sistema lineal cortado sobre un ciclo primo por un sistema lineal completo, obteniéndose como resultado fundamental el T. 5.

El concepto de ciclo o divisor correspondiente a una diferencial lineal o doble (§ 6) se define directamente y, también, mediante las funciones meromorfas, obteniéndose su equivalencia. Se de-

(*) Los números entre paréntesis rectangular se refieren a la bibliografía indicada al final.

muestra que el conjunto formado por los ciclos de todas las diferencias lineales pertenecen a la misma clase de equivalencia, y análoga propiedad vale para las diferencias dobles.

En el § 7 se toma como modelo inicial un modelo en el que los rangos de los sistemas lineales completos de las diferenciales lineales y de las diferenciales dobles adquieren su valor mínimo, y sobre él se demuestra el T. 9, que es fundamental también en la teoría.

El género aritmético se define en el § 8 mediante la función $j[\Delta]$ de Joung [6], y se prueba su invariancia birracional mediante el T. 10. El teorema de Riemann-Roch se demuestra entonces fácilmente en el § 9.

§ 2. Definiciones y notaciones.—Supondremos, hasta el § 6, que el cuerpo de coeficientes k es arbitrario; K será una ampliación algebraicamente cerrada de k , y K^* un dominio universal para k ; Σ un cuerpo de funciones algebraicas de dos variables sobre K , y Ω el cuerpo homogéneo (único salvo isomorfismos) correspondiente a Σ . Si (ξ_0, \dots, ξ_n) es un sistema de generadores de Ω sobre K , es decir, que $\Omega = K(\xi_0, \dots, \xi_n)$, un sistema de generadores de Σ sobre K será (ξ'_1, \dots, ξ'_n) , $\xi'_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}$, $i = 1, \dots, n$; pero, por comodidad de la notación, en lugar de ξ'_i escribiremos de nuevo ξ_i , con lo que pondremos $\Sigma = K(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Pondremos también $\mathfrak{o} = K[\xi_1, \dots, \xi_n]$, $P = K[\xi_0, \dots, \xi_n]$, y representaremos también por las mismas letras, \mathfrak{o} y P , a las variedades representadas por los puntos generales (ξ_1, \dots, ξ_n) y (ξ_0, \dots, ξ_n) , que son variedades algebraicas de los espacios afín y proyectivo, respectivamente; esto lo expresaremos diciendo que \mathfrak{o} es un *modelo afín* de Σ o de Ω (indistintamente), y que P es un *modelo proyectivo* de Σ o de Ω . Si \mathfrak{o} (o P) es íntegramente cerrado, diremos que el modelo es *normal*. Diremos que \mathfrak{o} es un *modelo afín* correspondiente al modelo proyectivo P y éste el *modelo proyectivo* correspondiente a aquél. En virtud de lo que acabamos de decir, \mathfrak{o} determina unívocamente a P , salvo isomorfismos que son proyectividades en una variable. Conviene observar que, aunque esto no es en modo alguno esencial, por \mathfrak{o} (por P) representamos a la variedad de punto general (ξ_1, \dots, ξ_n) (de punto general (ξ_0, \dots, ξ_n)) y no a cualquier otra que posea \mathfrak{o} (P) como anillo de polinomios sobre ella.

A las valoraciones unidimensionales de Σ les llamaremos, como es costumbre, *divisores primos* y las representaremos por \mathbf{P} negritas mayúsculas, así como a sus ideales de valoración correspondientes; al anillo de valoración correspondiente a \mathbf{P} lo representaremos por $V_{\mathbf{P}}$, y al valor de un elemento ω de Σ lo representaremos por $V_{\mathbf{P}}(\omega)$. Como es sabido [1], por ser Ω un cuerpo homogéneo y P un anillo homogéneo, Ω posee anillos de valoración homogéneos correspondientes a valoraciones bidimensionales; cuando estos anillos de valoración contienen a P , diremos que son *divisores primos homogéneos* de Ω y los representaremos por \mathbf{P}_H , o simplemente por \mathbf{P} cuando no haya lugar a confusiones. Según se vió de un modo general en [1], existe una correspondencia biunívoca entre los divisores primos de Σ y los divisores primos homogéneos de Ω : la relación entre $V_{\mathbf{P}}$ y $V_{\mathbf{P}_H}$ es la de ser el último isomorfo a una ampliación anular trascendente pura del primero. El centro de \mathbf{P}_H en P viene representado por el ideal homogéneo de P correspondiente al ideal que representa al centro de \mathbf{P} en \mathfrak{o} . La ventaja de emplear divisores primos homogéneos está en que el centro del divisor primo homogéneo \mathbf{P}_H en P es $P \cap \mathbf{P}_H$. Como es costumbre, diremos que la subvariedad irreducible \mathfrak{B} de P es de dimensión 1, siendo \mathfrak{B} un ideal homogéneo, cuando éste es de dimensión 2. Análogamente, cuando \mathfrak{B}_0 sea un ideal homogéneo de dimensión 1, diremos que representa a un punto de P . Un divisor primo \mathbf{P} diremos que es de *primera* o *segunda especie* respecto del modelo $\mathfrak{o}(P)$, según que su centro sea de dimensión 1 ó 0, respectivamente. A los elementos del grupo *multiplicativo* engendrado por todos los divisores primos de Σ (divisores primos homogéneos de Ω), se les llama *divisores de $\Sigma(\Omega)$* . Cuando ninguno de los exponentes de los divisores primos que figuran en un divisor dado es negativo, se dice que el divisor es *entero*. Esta clasificación del grupo de los divisores establece, según es bien conocido, una ordenación: el divisor \mathbf{A} se llama *múltiplo* del \mathbf{B} , y se dice que \mathbf{B} *divide* o es *divisor* de \mathbf{A} cuando $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ es entero. A los ideales homogéneos de P los representaremos por letras alemanas mayúsculas, y a los ideales de \mathfrak{o} por letras alemanas minúsculas; reservaremos las \mathfrak{B} para los ideales primos, y las Ω para los primarios.

Llamaremos *lugares primos* a las valoraciones cero-dimensionales de Σ , y *lugar primo homogéneo* a las valoraciones homogéneas unidimensionales de Ω y los representaremos por \mathfrak{p} y \mathfrak{p}_H ,

respectivamente. Con las mismas letras representaremos a sus ideales de valoración correspondientes, y a sus anillos de valoración por v_p y v_{p_H} , respectivamente. Al valor de un elemento ω , en la valoración correspondiente al lugar primo p lo representaremos por $v_p(\omega)$. A los elementos del grupo multiplicativo engendrado por todos los lugares primos de Σ (primos y homogéneos de Ω) les llamaremos *lugares* (lugares homogéneos de Ω) de Σ . Como para los divisores, se definen los lugares enteros y los múltiplos y divisores de un lugar.

Un lugar primo, p , diremos que *precede* o *está contenido* en un divisor primo P , y escribiremos $p < P$, cuando se verifique que $v_p \subset V_P$, es decir, [1], cuando v esté compuesto con V . Si $p < P$ el ideal p contiene al ideal P , es decir:

$$p < P \rightarrow p \supset P.$$

Si $p < P$ y si $\Sigma' = V_p/P$, el anillo de la valoración q de Σ' componente de la valoración v_p es $w_q = v_p/P$, y su ideal de no unidades $q = p/P$. Con la misma letra q , representaremos al *divisor primo*, o *lugar*, de Σ' determinado por la valoración w_q . A los elementos del grupo multiplicativo engendrado por todos los lugares primos contenidos en un divisor primo P les llamaremos *lugares de P* o *de Σ'* .

Dado un modelo $P(\mathfrak{o})$, llamaremos *sistema de superficies engendrado* por $P(\mathfrak{o})$, y lo representaremos por S , al conjunto de todas las superficies obtenidas a partir de $P(\mathfrak{o})$ mediante una antiproyección. En lo que sigue, supondremos que partimos de un modelo dado P y del sistema S correspondiente al mismo.

Dado un divisor primo P , de primera especie respecto de P , al conjunto de todos sus centros en modelos de S que cumplan las condiciones del L. 2 le llamaremos *ciclo primo imagen* de P sobre S , o sobre el subconjunto de S correspondiente, y lo representaremos por letras griegas mayúsculas: Γ, Δ, \dots . Si $A = P_1^{a_1} \dots P_r^{a_r}$ es un divisor arbitrario, llamaremos *ciclo imagen de A sobre S* a la expresión $A = \Gamma_1^{a_1} \dots \Gamma_r^{a_r}$, siendo Γ_i el ciclo imagen de P_i , $i = 1, \dots, r$. Al conjunto de los centros simples de un lugar primo p en todos los modelos de S le llamaremos *sitio primo* de p en S . Si $a = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ es un lugar arbitrario, a la expresión

sión $\alpha = \gamma_1^{\alpha_1} \dots \gamma_s^{\alpha_s}$, en donde γ_i es el sitio primo correspondiente a \mathfrak{p}_i ; le llamaremos *sitio* de \mathfrak{a} en S .

Un lugar \mathfrak{a} se dice que *está contenido* en un divisor \mathbf{A} cuando se verifica que si

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r} \text{ y } \mathbf{A} = \mathbf{P}_1^{\beta_1} \dots \mathbf{P}_t^{\beta_t}$$

sea $\mathfrak{p}_i < \mathbf{P}_j$, $\alpha_i \geq \beta_j$, $i = 1, \dots, r$, $1 \leq j \leq t$.

En este caso se escribirá $\mathfrak{a} < \mathbf{A}$. Análogamente, un sitio α *está contenido* en un ciclo \mathbf{A} cuando los sitios primos de α son puntos de los ciclos primos de \mathbf{A} y los exponentes de éstos son menores o iguales que los de aquéllos. De estas definiciones resulta que si

$\mathfrak{a} < \mathbf{A}$ y α es el sitio de \mathfrak{a} en S y \mathbf{A} el ciclo de \mathbf{A} en S , se verifica que

$$\alpha < \mathbf{A}.$$

§ 3. Ciclos y sitios.—Sea P un modelo proyectivo, \mathbf{A} un divisor y \mathbf{P} un divisor primo, de primera especie respecto de P .

DEFINICIÓN 1.—Llamaremos $S_{\mathbf{A}}$ al conjunto de todos los modelos, P^* , obtenidos por antiproyección a partir de P para los que los puntos del centro de \mathbf{A} en P situados en el hiperplano $H = 0$ se transforman en los puntos del centro de \mathbf{A} en P^* situados en el hiperplano $H = 0$, y recíprocamente.

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1^{\alpha_1} \dots \mathbf{P}_s^{\alpha_s}$ un divisor arbitrario y \mathbf{P} un divisor primo, de primera especie respecto de P .

LEMA 1.—Existen modelos afines, \mathfrak{a}^* , de $S_{\mathbf{A}}$, respecto del hiperplano del infinito $H = 0$, en los que el centro de \mathbf{P} viene representado por un ideal principal y no tiene ningún punto singular en el hiperplano del infinito.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$\mathfrak{B} = \mathbf{P}(\varphi_0(\xi), \varphi_1(\xi), \dots, \varphi_s(\xi))$$

el ideal homogéneo correspondiente al centro de \mathbf{P} sobre P , y sea $\mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{B}_s^{\alpha_s}$ el centro de \mathbf{A} en P . Distinguiremos dos casos: a) \mathfrak{B} es una curva singular de P . b) \mathfrak{B} es una curva simple de P .

a) Sea \mathfrak{S}^* el cierre íntegro de $\mathfrak{S} = P_{\mathfrak{P}}$ y sean $\mathfrak{P}_i^*, i = 1, \dots, t$, los *d. m. p.* de $\mathfrak{S}^* \mathfrak{P}$. Entonces, $V_{\mathfrak{P}_i} = \mathfrak{S}^*_{\mathfrak{P}_i}$, $i = 1, \dots, t$ son todos los anillos de valoración correspondientes a todas las valoraciones con centro \mathfrak{P} sobre P , y $\mathbf{P}_i = \mathfrak{S}^*_{\mathfrak{P}_i} \mathfrak{P}_i^* = \mathfrak{S}^*_{\mathfrak{P}_i} \omega_i$ son sus respectivos ideales de valoración. Por consiguiente, \mathbf{P} debe coincidir con uno de estos divisores; supongamos que sea $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$. No hay inconveniente en admitir que las ω_i pertenecen a \mathfrak{S}^* , que son elementos homogéneos de grado cero y que

$$\omega_i \equiv 0 (\mathfrak{P}_j^*), i \neq j, i, j = 1, \dots, t.$$

Sean

$$\frac{A_i}{B_i}; A_i, B_i \in P; B_i \equiv 0 (\mathfrak{P}),$$

unidades de $V_{\mathbf{P}}$ de grado cero, y representemos por $\frac{A_i^{(j)}}{B_i^{(j)}}$ los residuos de $\frac{A_i}{B_i} \bmod. \mathbf{P}_j$, $i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, t$. Es inmediato que se pueden elegir las $\frac{A_i}{B_i}$ de modo que los divisores $\left(\frac{A_i^{(j)}}{B_i^{(j)}}\right)$ no posean ningún polo en el hiperplano $H = 0$, que tomaremos, por comodidad, como hiperplano $x_0 = 0$. Pongamos:

$$P_1 = P[\omega_1^*, \dots, \omega_t^*], \omega_i^* = \omega_i \frac{A_i}{B_i} \xi_0, i = 1, \dots, t.$$

No ofrece dificultad comprobar que P_1 pertenece a S_A . De la construcción de P_1 se deduce que $P_1 \subset V_{\mathbf{P}}$ y, por tanto, $\mathfrak{P}_1 = \mathbf{P} \cap P_1$ es el centro de \mathbf{P} en P_1 . Si existiese otro divisor \mathbf{P}' con centro \mathfrak{P}_1 en P_1 , podríamos tomar $V_{\mathbf{P}'}$ de modo que $P_1 \subset V_{\mathbf{P}'}$, $P_1 \not\subset \mathbf{P}'$ y entonces $\mathfrak{P}_1 = \mathbf{P}' \cap P_1$ y \mathbf{P}' tendría también como centro \mathfrak{P} sobre P . Por consiguiente, \mathbf{P}' debería coincidir con uno de los divisores \mathbf{P}_i , $i = 1, \dots, t$. Si fuese, p. ej., $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_2 \neq \mathbf{P}$, como $\omega_2^* \in \mathbf{P}_2$, resultaría que $\omega_2^* \equiv 0 (\mathbf{P}_1)$, y como $\frac{A_2}{B_2}$ y ξ_0 son unidades de $V_{\mathbf{P}_1}$, sería $\omega_2 \equiv 0 (\mathbf{P}_1)$ y, por tanto, $\omega_2 \equiv 0 (\mathfrak{P}_1^*)$, contradicción. Por consiguiente, existe un divisor único cuyo centro sobre P_1 es \mathfrak{P}_1 . Además, como $V_{\mathbf{P}}(\omega_1^*) = V_{\mathbf{P}}(\omega_1)$, y ω_1 es un ele-

mento base de P_1 , es de valor mínimo en V_P , luego por el T. 6 [2], se deduce que \mathfrak{P}_1 es simple en P_1 .

b) Siendo \mathfrak{P} una curva simple de P , existe un elemento homogéneo, ω , de P [12] tal que

$$P \omega = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_r$$

es una descomposición normal de $P \omega$ en componentes primarias. Sean \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$ los ideales primos correspondientes a \mathfrak{Q}_i . Se comprueba sin dificultad que se puede elegir ω , de modo que: i) Dos de las curvas \mathfrak{P}'_i no tienen ningún punto común que pertenezca a \mathfrak{P} , y sea al mismo tiempo punto simple de la superficie P . ii) Todo punto común a \mathfrak{P} y a \mathfrak{P}'_i que sea simple para P lo es también respecto de \mathfrak{P} y de \mathfrak{P}'_i . iii) Dos curvas \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$, no tienen ningún punto común en el centro de \mathbf{A} , y todo punto común a este centro y a una curva \mathfrak{P}'_i es simple respecto de ambas. Entonces se puede determinar el hiperplano $H = 0$, de modo que: a) $H = 0$ corta a \mathfrak{P} en puntos simples, tanto respecto de \mathfrak{P} como respecto de P . b) $H = 0$ no contienen ningún punto común a \mathfrak{P} y a una de las \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$. c) Mediante un cambio de coordenadas en el espacio ambiente, caso de ser necesario, se puede suponer que $H = 0$ sea el hiperplano $x_0 = 0$. Entonces, se pueden hallar las formas B y C_i , $i = 1, \dots, s$, $s \geq r$ tales que: iv) $\text{grad.}(C_i) = \text{grad.}(B) + 1$, $i = 1, \dots, s$. v) $B \equiv 0(\mathfrak{P}'_i)$, $i = 1, \dots, r$ y B no se anula en ningún punto del infinito de \mathfrak{P} ni del centro de \mathbf{A} en P . vi) $P(B, C_1, \dots, C_s)$ es irrelevante. vii) Las curvas correspondientes a $\text{rad.} P B$ cortan al centro de \mathbf{A} en P en puntos simples, para esta curva, para $P B$ y para P . Análogamente, los puntos comunes a $P B$ y a \mathfrak{P} que sean simples para P , han de ser también simples para \mathfrak{P} y para $P B$. viii) Si

$$\mathfrak{U}_i = P(B, C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_s), i = 1, \dots, s$$

y si \mathfrak{P}_0 es un punto común a $P B$ y a \mathfrak{P} , que sea simple respecto de P , o bien, si \mathfrak{P}_0 es un punto común a $P B$ y al centro de \mathbf{A} , que sea simple respecto de P , existe uno y sólo un \mathfrak{U}_i tal que \mathfrak{P}_0 es su único d. m. p. ix) Si \mathfrak{P}_0 es un punto común a $P B$ y a \mathfrak{P} , o a $P B$ y al centro de \mathbf{A} , que sea singular para P , y si v es una valoración arbitraria, con centro en \mathfrak{P}_0 , compuesta con otra valoración de centro \mathfrak{P} ; o de centro \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$; o de centro

en una de las curvas que constituyen el centro de \mathbf{A} , respectivamente, existe uno, y sólo uno, de los ideales \mathfrak{A}_j , distinto de los ideales que figuran en viii), tal que $v(B) > 0$, $v(C_i) > 0$, $i=1, \dots, s$, $i \neq j$, $v(C_j) = 0$ y $\min. \{v(B), v(C_i), i \neq j\} =$ valor positivo mínimo de la valoración v .

Poniendo entonces

$$(1) \quad \frac{\xi_0^*}{\xi_0 B} = \frac{\xi_1^*}{\xi_1 B} = \dots = \frac{\xi_n^*}{\xi_n B} = \frac{\xi_{n+1}^*}{C_1} = \dots = \frac{\xi_{n+s}^*}{C_s} = \frac{\zeta}{H},$$

y

$$(2) \quad P_1 = k[\xi_0^*, \dots, \xi_n^*, \dots, \xi_{n+s}^*], \quad v^* = v \left[\frac{C_1}{\xi_0 B}, \dots, \frac{C_s}{\xi_0 B} \right],$$

resulta que, en virtud de v), los puntos del infinito de \mathfrak{P} , o del centro de \mathbf{A} en P , se transforman en puntos del infinito del centro, \mathfrak{P}_1 , de \mathbf{P} en P_1 , o del centro de \mathbf{A} en P_1 , respectivamente con anillos de cocientes invariables [1]. Luego todos ellos son puntos simples de P_1 . Se deduce también de v) que ni B ni las C_i se anulan sobre \mathfrak{P} ni sobre ninguna de las componentes del centro de \mathbf{A} en P ; por consiguiente, poniendo $\xi_i^* \equiv \xi_i^*(\mathfrak{P}_1)$, $i=0, \dots, n+s$ y $\xi_i B \equiv \xi_i' B'(\mathfrak{P})$, $i=0, \dots, n$; $C_i \equiv C_i'(\mathfrak{P})$, $i=1, \dots, s$, las ecuaciones

$$(3) \quad \frac{\xi_0^*}{\xi_0' B'} = \frac{\xi_1^*}{\xi_1' B'} = \dots = \frac{\xi_n^*}{\xi_n' B'} = \frac{\xi_{n+1}^*}{C_1'} = \dots = \frac{\xi_{n+s}^*}{C_s'} = \frac{\zeta}{H'}$$

son las de la correspondencia subordinada por (1) entre las curvas \mathfrak{P} y \mathfrak{P}_1 , y en virtud de v) y de [1] se deduce que los anillos de cocientes de \mathfrak{P}_0 y de su transformado en \mathfrak{P}_1 , mediante la correspondencia (3), son iguales entre sí, luego el punto de \mathfrak{P}_1 transformado de \mathfrak{P}_0 será también simple para \mathfrak{P}_1 . Análogamente se procede respecto de los centros de \mathbf{A} en P y P_1 . Ahora bien, existen puntos del infinito de \mathfrak{P}_1 que son transformados de puntos comunes a \mathfrak{P} y PB (análogamente, existen puntos del infinito del centro de \mathbf{A} en P_1 transformados de puntos comunes al centro de \mathbf{A} en P y a PB ; en este caso se procederá de modo totalmente análogo a como se hace a continuación). Sea \mathfrak{P}_0 uno de tales puntos y v una valoración con centro en \mathfrak{P}_0 compuesta con \mathbf{P} tal que $P_1 \subset R_v$ (en donde R_v es el anillo de valoración de v),

y $P_1 \not\subseteq \mathfrak{P}_v$ (siendo \mathfrak{P}_v el ideal de la valoración). Sea \mathfrak{P}_{10} el centro de v sobre P_1 . Entonces \mathfrak{P}_{10} es un punto de \mathfrak{P}_1 y se pueden presentar dos casos: 1) \mathfrak{P}_0 es un punto simple de P . 2) \mathfrak{P}_0 es un punto singular de P . Trataremos ambos casos simultáneamente. Sean \mathfrak{S}_0 y \mathfrak{S}_{10} los anillos de cocientes homogéneos $P_{\mathfrak{P}_0}$ y $P_{1\mathfrak{P}_{10}}$, respectivamente. Se verifica que $\mathfrak{S}_{10} \subseteq \mathfrak{S}_0$. Sean \mathfrak{M}_0 y \mathfrak{M}_{10} los ideales de no unidades de \mathfrak{S}_0 e \mathfrak{S}_{10} , respectivamente; \mathfrak{S} e \mathfrak{S}_1 los anillos de cocientes homogéneos $P_{\mathfrak{P}}$ y $P_{1\mathfrak{P}_1}$ y \mathfrak{M} y \mathfrak{M}_1 sus respectivos ideales de no unidades. De $\mathfrak{P}_{10} \supset \mathfrak{P}_1$ se deduce que $\mathfrak{S}_{10} \subset \mathfrak{S}_1$. Como \mathfrak{P} es una curva simple de P , se deduce que $\mathfrak{M} = \mathfrak{S} \omega(\xi)$; pero como $B \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{P})$, se deduce de (1) que $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1 \omega(\xi^*)$. Vamos a ver que $\mathfrak{S}_{10} \omega(\xi^*)$ es un ideal primo. Sea $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{S}_{10}$, entonces se verifica que $\mathfrak{S}_{10} \omega(\xi^*) = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{Q} \cap \dots$. Si existiese efectivamente la componente \mathfrak{Q} en la descomposición anterior, y si \mathfrak{M}'' fuese su ideal primo correspondiente, se podría definir una valoración v con centro en \mathfrak{M}'' , y una valoración v' compuesta con v , con su centro en \mathfrak{P}_{10} y con $\mathfrak{S}_{10} \subset R_{v'}$. El centro de v en P dividiría a $P \omega$, y como la correspondencia $P \rightarrow P_1$ no posee puntos fundamentales en P , coincidiría con uno de los \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$. Supongamos que fuese con \mathfrak{P}'_j . Entonces, en virtud de ix) existiría un ideal \mathfrak{A}_j tal que

$$v' \left(\frac{B}{C_j} \right) > 0, v' \left(\frac{C_i}{C_j} \right) > 0, i \neq j, i = 1, \dots, s.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\xi_i^*}{\xi_{n+j}^*} \text{ y } \frac{\xi_{n+l}^*}{\xi_{n+j}^*}, i = 0, \dots, n, l \neq j$$

estarían contenidos en \mathfrak{M}_{10} , luego si v'' es una valoración con centro en \mathfrak{P}_{10} compuesta con \mathbf{P} , sería

$$v'' \left(\frac{B}{C_j} \right) > 0, v'' \left(\frac{C_i}{C_j} \right) > 0,$$

es decir, que existirían dos valoraciones, v' y v'' , con centros en \mathfrak{P}_0 y compuestas con valoraciones de centros \mathfrak{P} y \mathfrak{P}'_i , respectivamente, para las que los elementos de \mathfrak{A}_j tendrían valores mayores que cero, en contradicción con ix). Por consiguiente,

$$\mathfrak{S}_{10} \omega(\xi^*) = \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{S}_{10}.$$

De ix) se deduce que existe una, y sólo una, valoración con centro \mathfrak{P}_{10} , compuesta con \mathbf{P} y esta valoración alcanza su valor positivo mínimo sobre \mathfrak{S}_{10} . Por tanto, por el T. 6 de [2], \mathfrak{P}_{10} es un punto simple de \mathfrak{P}_1 . De aquí, y de $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{S}_{10} = \mathfrak{S}_{10} \omega(\xi^*)$, se deduce, como en la demostración del T. 4 de [2], que \mathfrak{P}_{10} es un punto simple de P_1 .

Sea \mathfrak{p}_1 el ideal no homogéneo, perteneciente a \mathfrak{o}_1 , correspondiente a \mathfrak{P}_1 , y ω' el polinomio no homogéneo de \mathfrak{o} correspondiente a ω . Entonces se verifica que $\mathfrak{o}_1 \omega' \subset \mathfrak{p}_1$ y

$$(4) \quad \mathfrak{o}_1 \omega' = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_1'' \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t''.$$

Sea \mathfrak{p}_i'' el ideal primo correspondiente a \mathfrak{q}_i'' , $i = 1, \dots, t$, y \mathfrak{p}_i' el ideal no homogéneo de \mathfrak{o} correspondiente a \mathfrak{P}_i' , $i = 1, \dots, r$. De (4) se deduce que $\mathfrak{o} \omega' \subset \mathfrak{p}_i'' \cap \mathfrak{o}$, $i = 1, \dots, t$; luego $\mathfrak{p}_i'' \cap \mathfrak{o}$ debe dividir a uno de los \mathfrak{p} o \mathfrak{p}_i' , $i = 1, \dots, r$. Como \mathfrak{p} es una curva simple de \mathfrak{o} , no existen dos curvas de \mathfrak{o}_1 que yazcan sobre ella; por consiguiente, $\mathfrak{p}_i'' \cap \mathfrak{o}$ debe dividir a una de las \mathfrak{p}_i' , $i = 1, \dots, r$. Ahora bien, como, por las hipótesis hechas, no existen subvariedades fundamentales sobre P , $\mathfrak{p}_i'' \cap \mathfrak{o}$ debe coincidir con una de las \mathfrak{p}_i' . Sea, por ejemplo, $\mathfrak{p}_i'' \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_j'$. Sean C_i' y B' los polinomios no homogéneos correspondientes a C_i y B , respectivamente. De $\frac{\xi_{n+l}^*}{\xi_0^*} = \frac{C_i'}{B'}$ y $B' \equiv 0(\mathfrak{p}_j')$ se deduce que

$$\frac{\xi_{n+l}^*}{\xi_0^*} B' \equiv 0(\mathfrak{p}_j'' \cap \mathfrak{o}), \quad l = 1, \dots, s,$$

es decir, $C_i' \equiv 0(\mathfrak{p}_j')$, $l = 1, \dots, s$, y como $B' \equiv 0(\mathfrak{p}_j')$, obtendríamos contradicción con vi). Por consiguiente,

$$\mathfrak{o}_1 \omega' = \mathfrak{p}_1.$$

Los puntos del infinito de \mathfrak{p}_1 son transformados de los puntos del infinito de \mathfrak{p} . Sea \mathfrak{P}'_0 un punto del infinito de \mathfrak{p}_1 ; siendo \mathfrak{P}'_0 un ideal homogéneo de P_1 . Si todos los ξ_0, \dots, ξ_n perteneciesen a \mathfrak{P}'_0 , y si \mathfrak{P}'_0 es el ideal homogéneo de P correspondiente a la valoración v con centro en \mathfrak{P}'_0 compuesta con \mathbf{P} , existiría un ω_j^* , p. ej. ω_j^* , $1 \leq j \leq s$, tal que $v(\omega_j^*) < v(\xi_i)$, $i = 0, \dots, n$. Ahora bien, siempre se puede suponer que $\alpha_{i+l} > \text{grad. h. } B_i$, con lo que

$$\omega_j^* = \frac{\xi_0^{\mu_j}}{\omega_j} A_j, \quad \mu_j > 0, \quad \text{y para que se verificase } v(\omega_j^*) < v(\xi_i) \text{ debe}$$

ria ser $v(\omega_j) > \mu_j v(\xi_0)$, lo que indica que ω_j se anularía en un punto del infinito de \mathfrak{p} , en contradicción con la hipótesis. Sea, por tanto, ξ_i una ξ que no se anula en \mathfrak{P}'_0 , y llamemos \bar{o} y \bar{o}_1 a los anillos no homogéneos correspondientes a los P y P_1 respecto del hiperplano $x_i = 0$. Sean $\bar{\mathfrak{p}}_0$, $\bar{\mathfrak{p}}'_0$, $\bar{\mathfrak{p}}$ y $\bar{\mathfrak{p}}_1$ los ideales no homogéneos, respecto de este hiperplano, correspondientes a \mathfrak{P}_0 , \mathfrak{P}'_0 , \mathfrak{P} y \mathfrak{P}_1 , respectivamente. Se verificará que $\bar{\mathfrak{p}}_0 = \bar{\mathfrak{p}}'_0 \cap \bar{o}$, de donde $\bar{o}_{\bar{\mathfrak{p}}_0} \subseteq \bar{o}_1 \bar{\mathfrak{p}}'_0$.

Sea f un elemento arbitrario de $\bar{o}_1 \bar{\mathfrak{p}}'_0$. Entonces será $f = \frac{A}{B}$, $B = \Pi \omega_i \equiv \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_0}$, luego $f \in \bar{o}_{\bar{\mathfrak{p}}_0}$, es decir, $\bar{o}_{\bar{\mathfrak{p}}_0} = \bar{o}_1 \bar{\mathfrak{p}}'_0$; lo que prueba que $\bar{\mathfrak{p}}'_0$ es punto simple de \bar{P}_1 . De aquí resulta inmediatamente que $\bar{o}_{\bar{\mathfrak{p}}_0} \bar{\mathfrak{p}} = \bar{o}_1 \bar{\mathfrak{p}}'_0 \bar{\mathfrak{p}}_1$, lo que prueba que $\bar{\mathfrak{p}}'_0$ es punto simple de $\bar{\mathfrak{p}}_1$ por serlo $\bar{\mathfrak{p}}_0$ de $\bar{\mathfrak{p}}$.

Q. E. D.

LEMA 2.—*Existe un modelo de S_A en el que el centro de P es una curva sin singularidades, en sí ni en el modelo, que está definida en un espacio afín por un ideal principal.*

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del lema anterior, podemos suponer que el modelo P cumple ya las condiciones de dicho lema. Sea \mathfrak{o} el anillo no homogéneo correspondiente a P respecto del hiperplano del infinito $H = 0$ del lema anterior que, como allí, supondremos ser el $x_0 = 0$. Sean \mathfrak{P} y \mathfrak{p} los ideales homogéneo y no homogéneo correspondientes al centro de P en P y \mathfrak{o} , respectivamente. Por el lema anterior, será $\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \varphi$ y toda singularidad de \mathfrak{P} , tanto respecto de P como respecto de \mathfrak{P} pertenece a \mathfrak{p} .

Sea $P' = P/\mathfrak{P}$, $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ y $\Sigma' = V_{\mathfrak{P}}/P$. Este cuerpo es isomorfo al de cocientes de \mathfrak{o}' ; por lo que los identificaremos. Sean $\xi_i \equiv \xi'_i(\mathfrak{P})$, $i = 0, \dots, n$ y $c_i, b, i = 1, \dots, t$, formas de P' tales que:

a) grad. h. $(c_i) = \text{grad. h. } (b) + 1$.

b) Si $\mathfrak{p}_{01}, \dots, \mathfrak{p}_{0v}$ son los ideales de \mathfrak{o}' correspondientes a los puntos singulares de \mathfrak{P} , y si v_{ij} , $j = 1, \dots, \alpha_i$ son todas las valoraciones de Σ' con centro en \mathfrak{p}_{0i} , $i = 1, \dots, v$, se verifica que para

toda valoración v_{ij} existe una fracción $\frac{c_i}{b \xi_0}$ tal que

$$v_{ij} \left(\frac{c_i}{b \xi_0} \right) > 0$$

siendo este valor igual al valor positivo mínimo de v_{ij} , y

$$v_{mn} \left(\frac{c_i}{b \xi_0} \right) = 0,$$

para $m \neq i$ o $n \neq j$.

c) Si $C_i \equiv c_i(\mathfrak{P})$, $B \equiv b(\mathfrak{P})$, son formas de P , se pueden elegir de modo que $\frac{C_i}{B}$ no posea ningún polo sobre \mathfrak{P} ni sobre las curvas centros de \mathbf{A} .

d) B no posee ningún cero en un punto del infinito de \mathfrak{P} ni del centro de \mathbf{A} en P .

e) $\text{rad.}(PB)$ y el centro de \mathbf{A} en P poseen únicamente intersecciones simples, que son a su vez puntos simplés de las curvas secantes y de la superficie P . Si \mathfrak{P}_0 es uno de estos puntos de intersección existe un ideal

$$\mathfrak{A}_i = P' (b, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_s),$$

y sólo uno de éstos, tal que $\text{rad.}(\mathfrak{A}_i)$ es el producto de las singularidades de \mathfrak{P} por \mathfrak{P}_0 .

Consideremos la correspondencia birracional $P \rightarrow P^*$ definida por

$$(1) \quad \frac{\xi_0^*}{\xi_0} = \frac{\xi_1^*}{\xi_1} = \dots = \frac{\xi_n^*}{\xi_n} = \frac{\xi_{n+1}^* B}{C_1} = \dots = \frac{\xi_{n+t}^* B}{C_t} = \frac{\zeta B}{H},$$

o bien, en forma paramétrica, [1],

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} H \xi_i^* = \zeta \xi_i B, \quad i = 0, \dots, n, \\ H \xi_{n+i}^* = \zeta C_i, \quad i = 1, \dots, t, \\ H = (\lambda_0 \xi_0 + \dots + \lambda_n \xi_n) B + \lambda_{n+1} C_1 + \dots + \lambda_{n+t} C_t, \\ \zeta = \lambda_0 \xi_0^* + \dots + \lambda_{n+t} \xi_{n+t}^* = \text{indeterminada sobre } P, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad P^* = k [\xi_0^*, \dots, \xi_n^*, \xi_{n+1}^*, \dots, \xi_{n+t}^*].$$

Vamos a probar las siguientes proposiciones:

i) $P^* \varphi(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*) = \mathfrak{P}^* \cap I^*$, siendo \mathfrak{P}^* el ideal de la transformada de \mathfrak{P} en $P \rightarrow P^*$.

ii) $\xi_0^* \equiv 0$ (radical I^*).

iii) Los puntos de \mathfrak{P}^* son simples en la superficie P^* y en la curva \mathfrak{B}^* .

iv) P^* pertenece a S_A

Demostración de i).—De (2) se deduce que

$$P^* \subset P^{**} = P[\zeta]_H.$$

Si $\mu = \text{gr. h.}(\varphi)$, se verifica que

$$\varphi(\xi^*) = \varphi(\xi) \frac{\zeta^\mu B^\mu}{H^\mu},$$

es decir, que

$$\varphi(\xi^*) \equiv 0 (P^{**} \varphi(\xi) \cap P^*).$$

Por hipótesis se verifica que

$$(4) \quad P_\varphi(\xi) = \mathfrak{B} \cap I, \quad \xi_0 \equiv 0 (\text{rad. } I)$$

y como $P_\varphi(\xi)$ es principal, todos los ideales primos correspondientes a I son mínimos, y como por la condición c) los únicos puntos fundamentales de la correspondencia (1) son los puntos singulares de \mathfrak{B} , siempre se puede elegir H de modo que no pertenezca ni a \mathfrak{B} ni a ningún ideal de rad. (I) [1]. En estas condiciones se verifica que

$$P^{**} \varphi(\xi) = P^{**} \mathfrak{B} \cap P^{**} I,$$

$$P^{**} \mathfrak{B} \text{ es primo y } P^{**} \mathfrak{B} \cap P^* = \mathfrak{B}^*, \quad P^{**} \varphi(\xi) \cap P = (P^{**} \mathfrak{B} \cap P) \\ \cap (P^{**} I \cap P) = \mathfrak{B} \cap I.$$

Por otro lado, de (2) se deduce que

$$P^{**} \varphi^* = P^{**} \frac{\zeta^\mu B^\mu}{H^\mu} \varphi(\xi) \subset P^{**} \varphi,$$

luego

$$P^* \varphi(\xi_i^*) \subseteq P^{**} \varphi(\xi_i^*) \cap P^* \subseteq P^{**} \varphi(\xi_i) \cap P^* = (P^{**} \mathfrak{B} \cap P^*) \\ \cap (P^{**} I \cap P^*) = \mathfrak{B}^* \cap (P^{**} I \cap P^*).$$

Sea $\omega(\xi^*)$ un elemento arbitrario de \mathfrak{B}^* , homogéneo y de grado ν . Entonces

$$\omega(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*) = \frac{\zeta^\nu}{H^\nu} \omega(\xi_i B; C_i);$$

de donde resulta que $\omega(\xi_i B; C_i) \equiv 0 (\mathfrak{P})$. De aquí, en virtud de (4), se obtiene que

$$\omega(\xi_i B; C_i) \xi_0^\sigma \equiv 0 (P_\varphi(\xi)),$$

es decir,

$$\omega(\xi_i B; C_i) \xi_0^\sigma = F(\xi) \varphi(\xi), \quad F(\xi) \in P.$$

De aquí resulta que

$$\omega(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*) = \zeta^\nu \frac{F(\xi) \varphi(\xi)}{H^\nu(\xi) \xi_0^\sigma},$$

siendo gr. h. $\left(\frac{F \cdot \varphi}{H^\nu \xi_0^\sigma} \right) = 0$, y, por consiguiente,

$$\omega(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*) = \zeta^\nu \frac{F(\xi^*) \varphi(\xi^*)}{H^\nu(\xi^*) \xi_0^{\sigma^*}}$$

y en virtud de (2),

$$(5) \quad \omega^*(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*) H^\nu(\xi^*) \xi_0^{\sigma^*} = \left(\sum_{i=0}^{n+t} \lambda_i \xi_i^* \right)^\nu F(\xi^*) \varphi(\xi^*) \equiv 0 (P^* \varphi(\xi^*))$$

y como $H(\xi^*)$, $\xi_0^* \equiv 0 (\mathfrak{P}^*)$, queda probada i).

La expresión (5) indica que si ξ_0^* no perteneciera al radical de I^* , como las λ_i se pueden elegir arbitrariamente, lo mismo se podría conseguir de $H(\xi^*)$, luego resultaría que ω^* pertenecería a dicho radical, en contradicción con la hipótesis de ser ω^* un elemento arbitrario de \mathfrak{P}^* . Con esto queda probado ii).

Demostración de iii). — Sea $\xi_i^* \equiv \xi_i (\mathfrak{P}^*)$, $i = 0, \dots, n+t$ y $\bar{P} = P^*/\mathfrak{P}^* = k[\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_{n+t}]$. Consideremos la representación τ entre \bar{P} y P'' obtenida mediante la sustitución $\xi_i \rightarrow \xi_i''$, $i = 0, \dots, n+t$, siendo $\lambda \xi_i'' = \xi_i' b$, $i = 0, \dots, n$; $\lambda \xi_{n+i}'' = c_i$, $i = 1, \dots, t$. Esta representación es, evidentemente, un homomorfismo entre \bar{P} y $P'' = k[\xi_0'', \dots, \xi_{n+t}'']$. Vamos a ver que es un isomorfismo. En efecto, sea $\omega(\bar{\xi})$ un elemento de \bar{P} tal que

$$\tau[\omega(\bar{\xi}_i; \bar{\xi}_{n+i})] = \omega(\xi_i''; \xi_{n+i}'') = 0,$$

es decir, que $\omega(\xi_i' b; c_i) = 0$. Esto implica que $\omega(\xi_i B; C_i) \equiv 0 (\mathfrak{P})$, es decir, $V_P(\omega(\xi_i B; C_i)) > 0$, de donde $\omega(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*) \equiv 0 (\mathfrak{P}^*)$, ya

$v'''(\xi''_{n+i}) = 0$. Como, por hipótesis, se verifica que $\xi_i'' \equiv 0 (\mathfrak{P}_0'')$, $i = 0, \dots, n$, será

$$0 < v''(\xi'_i) = v'''(\xi'_i) + v'''(\xi''_{n+i}) + v''' \left(\frac{b(\xi'_i)}{c_j(\xi'_i)} \right) = v'''(\xi'_i) + v''' \left(\frac{b(\xi'_i)}{c_j(\xi'_i)} \right), \quad i = 0, \dots, n,$$

de donde

$$v'(\xi'_i) = v''(\xi'_i) > v''' \left(\frac{c_j(\xi'_i)}{b(\xi'_i)} \right) = v' \left(\frac{c_j(\xi'_i)}{b(\xi'_i)} \right), \quad i = 0, \dots, n,$$

pero por la condición c), en todo lugar de \mathfrak{P} se verifica que $\frac{c_j(\xi'_i)}{b(\xi'_i)}$ posee valor mayor o igual que cero, luego

$$v'(\xi'_i) > 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

en contradicción con la elección de v''' que, según la construcción, es tal que $\min. \{ v'''(\xi'_i) \} = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Por ser $P''(\xi_0'', \dots, \xi_n'')$ irrelevante en P'' , si \mathfrak{P}_0'' es un punto cualquiera de P'' y \mathfrak{P}'_0 un punto homólogo de \mathfrak{P}_0'' en P' , siendo v''' la valoración de P''' cuyos centros en P' y P'' son \mathfrak{P}'_0 y \mathfrak{P}_0'' , respectivamente, siempre se puede elegir una ξ_i'' , p. ej. ξ_j'' , $0 \leq j \leq n$, tal que $\xi_j'' \equiv 0 (\mathfrak{P}_0'')$, es decir, que si llamamos \mathfrak{o}'' al anillo no homogéneo respecto del plano del infinito $x_j = 0$, se verifica que \mathfrak{P}_0'' pertenece al modelo afín \mathfrak{o}'' , o lo que es lo mismo, \mathfrak{P}_0'' posee un ideal no homogéneo en \mathfrak{o}'' distinto del ideal unidad. Sea \mathfrak{p}_0'' este ideal no homogéneo. Sea \mathfrak{o}' el anillo no homogéneo correspondiente a P' respecto del hiperplano del infinito $x_j = 0$; entonces, en virtud de (6), es

$$(8) \quad \mathfrak{o}'' = \mathfrak{o}' \left[\frac{c'_1}{b'}, \dots, \frac{c'_t}{b'} \right]$$

en donde representamos por b', c'_1, \dots, c'_t los polinomios no homogéneos correspondientes a b, c_1, \dots, c_t , respecto de ξ'_i . Entonces se verifica que el ideal no homogéneo de \mathfrak{o}' correspondiente a \mathfrak{P}'_0 será el ideal \mathfrak{p}'_0 definido por $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}_0'' \cap \mathfrak{o}'$. De aquí se deduce que $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}'_0} \subseteq \mathfrak{o}''_{\mathfrak{p}_0''}$ y esto implica que si \mathfrak{p}'_0 es un punto simple de \mathfrak{P} , como entonces $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}'_0}$ es el anillo de la única valoración con centro en él, será $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}'_0}$ el anillo de la valoración v' , luego

$\mathfrak{o}''_{\mathfrak{p}_0} \subseteq \mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}_0}$, es decir, que $\mathfrak{o}''_{\mathfrak{p}_0} = \mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}_0}$ y, por consiguiente, \mathfrak{p}_0'' es también un punto simple de \mathfrak{P}^* . Si \mathfrak{p}'_0 fuese un punto singular de \mathfrak{P} , sólo podría existir una valoración de Σ'' con centro en \mathfrak{p}_0'' , porque toda valoración con centro en \mathfrak{p}_0'' tiene por centro en \mathfrak{o}' el punto $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}_0'' \cap \mathfrak{o}'$, luego siendo \mathfrak{p}'_0 punto singular, dicha valoración sería una de las v_{ij} de la condición b), y en virtud de esta condición no pueden tener dos de ellas el mismo centro en \mathfrak{o}'' . Por existir una única valoración con centro en \mathfrak{p}_0'' , este punto es simple ([2], T. 6). Con esto queda probado que todos los puntos de \mathfrak{P}^* son simples en \mathfrak{P}^* .

De i) y de lo que acabamos de probar resulta inmediatamente, en virtud del T. 4 de [2], que todos los puntos de \mathfrak{P}^* , que están a distancia finita respecto del hiperplano $x_0 = 0$, son también simples para la superficie P^* . En virtud de la condición c), todos los puntos de \mathfrak{P} que se encuentran a distancia finita respecto de $x_0 = 0$ como plano del infinito, se transforman en puntos a distancia finita de \mathfrak{P}^* , y como todos los puntos singulares de \mathfrak{P} (ya considerados como puntos de \mathfrak{P} como considerados como puntos de P) se hallan a distancia finita respecto de $x_0 = 0$, resulta que los puntos del infinito de \mathfrak{P}^* son transformados de puntos del infinito de \mathfrak{P} y, por tanto, simples para \mathfrak{P} y para P . Sea \mathfrak{P}_0^* un punto cualquiera de \mathfrak{P}^* perteneciente al hiperplano $x_0 = 0$. Por ser $P''(\xi_0'', \dots, \xi_n'')$ irrelevante, existe un hiperplano $x_j = 0$, $0 \leq j \leq n$, que no contiene a \mathfrak{P}_0^* . Sea \mathfrak{o}_j^* el anillo no homogéneo de P^* correspondiente a $x_j = 0$ como plano del infinito, y \mathfrak{o}_j el anillo no homogéneo de P respecto del mismo plano del infinito. Entonces se verifica que

$$\mathfrak{o}_j^* = \mathfrak{o}_j \left[\frac{C_1}{B}, \dots, \frac{C_t}{B} \right],$$

significando aquí C_1, \dots, C_t, B los polinomios no homogéneos que se obtienen de las formas representadas por las mismas letras al dividirlos por potencias convenientes de ξ . Sea \mathfrak{p}_0^* el ideal no homogéneo de \mathfrak{o}_j^* correspondiente a \mathfrak{P}_0^* . Entonces, todo punto de P homólogo de \mathfrak{P}_0^* en la correspondencia $P^* \rightarrow P$ es el centro en \mathfrak{o}_j de una valoración con centro en \mathfrak{p}_0^* y, por consiguiente, existe un único punto homólogo de \mathfrak{p}_0^* : el punto $\mathfrak{p}_0^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_0$. De aquí se deduce que $\mathfrak{o}_j \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{o}_j^* \mathfrak{p}_0^*$. Pongamos $\mathfrak{S} = \mathfrak{o}_j \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{o}_j^* \mathfrak{p}_0^*$. Como \mathfrak{p}_0 pertenece al plano $x_0 = 0$, se verifica, por la hipótesis c), que

$B \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{p}_0)$ y \mathfrak{p}_0 no es fundamental en la correspondencia $P \rightarrow P^*$, luego, por el lema siguiente, es $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$, de donde resulta que \mathfrak{B}_0^* es simple en P^* .

Demostración de iv).—Esta proposición se deduce de la condición e) del mismo modo que la análoga b) del L. 1.

Q. E. D.

LEMA 3.—Si \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* son dos subvariedades homólogas en una antiproyección arbitraria, $P \rightarrow P^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H \xi_i^* = \zeta \xi_i B, \quad i = 0, \dots, n, \\ H \xi_{n+i}^* = \zeta C_i, \quad i = 1, \dots, t, \\ H = (\lambda_0 \xi_0 + \dots + \lambda_n \xi_n) B + \lambda_{n+1} C_1 + \dots + \lambda_{n+t} C_t \\ \zeta = \text{indeterminada sobre } P, \end{array} \right.$$

que son centros en P y P^* , respectivamente, de una valoración v , y si \mathfrak{B} no divide a B , se verifica que \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* poseen anillos de cocientes homogéneos iguales.

DEMOSTRACIÓN.—Por no anularse B en \mathfrak{B} , se pueden elegir las λ_i de modo que H no se anule tampoco en \mathfrak{B} . Sea ω un elemento arbitrario de $\mathfrak{B}^* = P^* \mathfrak{B}^*$:

$$\omega = \frac{f(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*)}{g(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*)}, \quad g \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{B}^*), \quad \text{grad. h. } (f) = \text{grad. h. } (g) = v.$$

Entonces será:

$$\omega = \frac{\zeta^v}{H^v} \frac{f(\xi_i B; C_i)}{g(\xi_i B; C_i)} = \frac{f(\xi_i B; C_i)}{g(\xi_i B; C_i)}.$$

Si se verificase que $g(\xi_i B; C_i) \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{B})$, sería $v(g) > v(l^\mu)$, siendo l una forma lineal de valor mínimo y $\text{grad. h. } (C_i) = \mu$. De donde se deduce que $v(g(\xi_i^*; \xi_{n+i}^*)) > v(l(\xi_i^*)^v)$, es decir, que $g \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{B}^*)$, contradicción.

Recíprocamente, si $\omega = \frac{f(\xi_i)}{g(\xi_i)}$ es un elemento arbitrario de $\mathfrak{B} = P \mathfrak{B}$, será $g(\xi) \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{B})$ y $\omega = \frac{f(\xi_i^*)}{g(\xi_i^*)}$. Si $g(\xi_i^*) \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{B}^*)$, se verificaría que $v(g(\xi_i^*)) > v(l(\xi_i^*))$, de donde, $v(g(\xi)) > v(l(\xi))$, es decir, que $g \equiv \mathbf{0}(\mathfrak{B})$, contradicción.

Q. E. D.

DEFINICIÓN 2.—Al modelo P^* establecido en el L. 2 le llamaremos *modelo canónico de S_A , respecto del divisor primo P* , y al conjunto formado por todos los modelos canónicos de S_A respecto del divisor primo P lo representaremos por $S_{A,P}$ y le llamaremos *sistema canónico de modelos de S_A respecto del divisor primo P* . Al conjunto formado por los centros de P en todos los modelos de $S_{A,P}$ le llamaremos *ciclo imagen de P en $S_{A,P}$, o simplemente en S_A* .

De los lemas anteriores resulta inmediatamente el siguiente:

TEOREMA 1.—Si P y P' son dos divisores primos y el centro de P' en P no es un punto singular del centro de P , existe un modelo de $S_{A,P;P}$ en el que P' posee un centro cuyo anillo de cocientes es igual al anillo de cocientes del centro de P' en P .

TEOREMA 2.—Si P_1 y P_2 son dos divisores primos de primera especie respecto de P y A un divisor arbitrario, existe un modelo de S_A canónico respecto de ambos divisores primos y los centros de éstos en él se cortan en puntos a distancia finita respecto del plano del infinito elegido para S_A .

DEMOSTRACIÓN.—A los distintos modelos de S_A que emplearemos en la demostración los representaremos por $P_i, i = 1, 2, \dots$. A los anillos no homogéneos respecto del hiperplano del infinito $x_c = 0$ los representaremos por $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$. A los centros de $P_j, j = 1, 2$, sobre P_i y α_i los representaremos por \mathfrak{B}_{ij} y \mathfrak{p}_{ij} , respectivamente, es decir: \mathfrak{p}_{ij} es el ideal no homogéneo correspondiente a \mathfrak{B}_{ij} . Al anillo de cocientes homogéneo de grado cero correspondiente a \mathfrak{B}_{ij} , que es isomorfo al correspondiente a \mathfrak{p}_{ij} y que, por tanto, identificaremos con él, lo representaremos por

$$\mathfrak{S}_{ij} = P_i / \mathfrak{B}_{ij} = \alpha_i / \mathfrak{p}_{ij}$$

y al ideal de no unidades de \mathfrak{S}_{ij} lo representaremos por \mathfrak{M}_{ij} . Al cuerpo de funciones racionales sobre \mathfrak{p}_{ij} lo representaremos por Σ'_{ij} , y a los anillos de polinomios sobre dicha curva, por P'_{ij} , al homogéneo, y por α'_{ij} al no homogéneo. Distinguiremos en la demostración varias partes:

a) Existe un modelo P_1 , respecto del cual P_1 y P_2 son de primera especie y sus centros son simples.

b) Existe un hiperplano H , que por comodidad elegiremos como el $x_0 = 0$, tal que \mathfrak{P}_{11} y \mathfrak{P}_{12} no poseen ningún punto común en él y que todos los puntos de estas curvas situados en él sean simples para las curvas y para la superficie P_1 .

c) Existe un modelo P_2 , de $S_{A, P_2; P_1}$, con relación al plano del infinito $x_0 = 0$, respecto del cual se verifica que $\mathfrak{S}_{21} = \mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{22} = \mathfrak{S}_{12}$ y tal que todos los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{22} son simples tanto para la curva como para la superficie y no pertenecen a \mathfrak{P}_{21} .

d) Existe un modelo P_3 , de $S_{A, P_3; P_1}$, en el que $\mathfrak{S}_{31} = \mathfrak{S}_{21}$, $\mathfrak{S}_{32} = \mathfrak{S}_{22}$, el ideal \mathfrak{p}_{32} es principal y las curvas \mathfrak{P}_{31} y \mathfrak{P}_{32} tienen simples sus puntos en el infinito, tanto en ellas como en P_3 , y distintos entre sí.

e) Existe un modelo P_4 de S_A , respecto del que los centros de P_1 y P_2 gozan de las propiedades del L. 2, no tienen ningún punto común en el infinito e $\mathfrak{S}_{41} = \mathfrak{S}_{31}$, $\mathfrak{S}_{42} = \mathfrak{S}_{32}$.

Demostración de a) y b).—a) es una consecuencia inmediata del L. 1, a) y b). En cuanto a b), se deduce fácilmente de a).

Demostración de c).—Sea:

$$(9) \frac{\xi_0^*}{\xi_0} = \frac{\xi_1^*}{\xi_1} = \dots = \frac{\xi_n^*}{\xi_n} = \frac{\xi_{n+1}^* B}{C_1} = \dots = \frac{\xi_{n+t}^* B}{C_t} = \frac{\zeta B}{H};$$

(ζ indeterminad sobre Ω), la correspondencia $P_1 \rightarrow P_2$. Esta correspondencia es el producto de una correspondencia del tipo b), L. 1, por una correspondencia (1) del L. 2. Por consiguiente, se pueden elegir C_i , $i = 1, \dots, t$ y B de modo que se verifiquen las condiciones impuestas en el L. 1, b) con las modificaciones siguientes: En lugar de v) se admite que $P(B, C_1, \dots, C_s)$ no es irrelevante, pero el radical de este ideal representa puntos contenidos en \mathfrak{P}_{12} , ninguno de los cuales pertenece a \mathfrak{P}_{11} ni a \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$. En lugar de vi) se admite ahora que existe uno y sólo un \mathfrak{A}_i tal que \mathfrak{P}_{0i} es el único d. m. p. de él distinto de los d. m. p. de rad. $P(B, C_1, \dots, C_s)$. Además debe verificarse:

i) B no se anula sobre \mathfrak{P}_{11} ni sobre \mathfrak{P}_{12} . ii) Las $\frac{C_i}{B}$ no poseen polos en \mathfrak{P}_{12} y B no se anula en los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{12} . En estas condiciones, por el L. 3 se verifica que $\mathfrak{S}_{21} = \mathfrak{S}_{11}$ e $\mathfrak{S}_{22} = \mathfrak{S}_{12}$. También se verifica que los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{12} se transforman en otros puntos con el mismo anillo de cocientes

y, por tanto, simples respecto de P_2 . De (9) se deduce que

$$v_2 = v_1 \left[\frac{C_1}{B \xi_0}, \dots, \frac{C_t}{B \xi_0} \right],$$

lo que indica que $\frac{C_i}{B \xi_0}$, $i = 0, \dots, t$ sólo pueden poseer polos en el infinito, luego todo punto del infinito de \mathfrak{P}_{12} se transformará en un punto del infinito de \mathfrak{P}_{22} , y recíprocamente.

Como B no se anula en los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{12} , en virtud de las hipótesis del L. 1, b) y L. 2, se deduce, en virtud del L. 3, y b), que \mathfrak{P}_{21} y \mathfrak{P}_{22} no poseen ningún punto común en el infinito. En virtud de las hipótesis del L. 1, b) y L. 2, todos los puntos de \mathfrak{p}_{21} son simples para P_2 y para \mathfrak{P}_{21} , y \mathfrak{p}_{21} es un ideal principal en v_2 . Si

$$\xi_i^* \equiv \xi_i'' (\mathfrak{P}_{22}), \quad i = 0, \dots, n + t,$$

se ve, como en el referido L. 2, que $P_2(\xi_0'', \dots, \xi_n'')$ es un ideal irrelevante y, por tanto, que los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{22} son también puntos simples para \mathfrak{P}_{22} .

Demostración de d).—En parte es esta demostración análoga a la del apartado b) del L. 1. Como \mathfrak{P}_{22} es una curva simple para P_2 , existe un elemento homogéneo, ω , de P_2 tal que

$$P_2 \omega = \mathfrak{P}_{22} \cap \mathfrak{D}'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{D}'_r$$

es una descomposición normal de $P_2 \omega$ en componentes primarias. Se puede elegir ω de modo que: i) Si \mathfrak{P}'_i es el ideal primo correspondiente a \mathfrak{D}'_i , $i = 1, \dots, r$, se verifique que dos de las \mathfrak{P}'_i no tengan común ningún punto simple de P_2 que pertenezca a \mathfrak{P}_{22} , y todo punto común a esta curva y una de las \mathfrak{P}'_i , que sea simple respecto de P_2 , lo sea también respecto de las curvas \mathfrak{P}_{22} y \mathfrak{P}'_i . ii) Dos de las \mathfrak{P}'_i no tienen un punto común que pertenezca a \mathfrak{P}_{12} , y todo punto común a \mathfrak{P}_{12} y a \mathfrak{P}'_i es también punto simple respecto de \mathfrak{P}'_i . En estas condiciones, no ofrece dificultad comprobar que se pueden elegir las formas B y C_i , $i = 1, \dots, s$, $s \geq r$, de modo que: iii) grado $(C_i) = \text{grado}(B) + 1$, $i = 1, \dots, s$. iv) $B \equiv 0 (\mathfrak{P}'_i)$, $i = 1, \dots, r$ y B no se anula en ningún punto del infinito de \mathfrak{P}_{12} , ni de \mathfrak{P}_{22} , ni del centro de A. v) $P_2(B, C_1, \dots, C_s)$ es un ideal irrelevante. vi) Las curvas representadas por rad. (P_2, B) cortan a \mathfrak{P}_{12} en puntos simples respecto de aquéllas, y los puntos

comunes a rad. $(P_2 B)$ y a \mathfrak{P}_{22} , que sean simples para P_2 , deben serlo también respecto de las curvas de rad. $(P_2 B)$. vii) Si

$$\mathfrak{A}_i = P_2(B, C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_s), i = 1, \dots, s;$$

y \mathfrak{P}_{0i} , $i = 1, 2$, es un punto común a rad. $(P_2 B)$ y \mathfrak{P}_{i2} , $i = 1, 2$, que sea simple respecto de P_2 , existe uno y sólo un \mathfrak{A}_i respecto del cual \mathfrak{P}_{0i} es su único d. m. p. viii) Si \mathfrak{P}_{02}^* es un punto común a \mathfrak{P}_{22} y a rad. $(P_2 B)$, que sea singular respecto de P_2 , y si v es una valoración con centro en \mathfrak{P}_{02}^* , compuesta con otra valoración con centro en \mathfrak{P}_{22} o en \mathfrak{P}'_i (pues se puede admitir que todo punto común a \mathfrak{P}_{22} y a rad. $(P_2 B)$, que sea singular respecto de P_2 , pertenece a una de las \mathfrak{P}'_i , $i = 1, \dots, r$), existe un ideal \mathfrak{A}_j , y sólo uno de ellos, tal que

$$v(B) > 0, v(C_i) > 0, i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, s, v(C_j) = 0$$

y

$\min \{v(B), v(C_i), i \neq j, i = 1, \dots, s\} = \text{valor positivo mínimo de } v.$

Sea entonces

$$(11) \quad \frac{\xi_0^*}{\xi_0 B} = \frac{\xi_1^*}{\xi_1 B} = \dots = \frac{\xi_n^*}{\xi_n B} = \frac{\xi_{n+1}^*}{C_1} = \dots = \frac{\xi_{n+s}^*}{C_s} = \frac{\xi}{H},$$

y

$$(12) \quad P_3 = k[\xi_0^*, \dots, \xi_n^*, \dots, \xi_{n+s}^*], \nu_3 = \nu_2 \left[\frac{C_1}{\xi_0 B}, \dots, \frac{C_s}{\xi_0 B} \right].$$

De iv) y del lema 3 se deduce que $\mathfrak{S}_{31} = \mathfrak{S}_{21}$, $\mathfrak{S}_{32} = \mathfrak{S}_{22}$ y que los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{21} y de \mathfrak{P}_{22} se transforman en puntos del infinito de \mathfrak{P}_{31} y \mathfrak{P}_{32} , respectivamente, con los mismos anillos de cocientes; por consiguiente, estos puntos son también puntos simples respecto de P_3 y se deduce inmediatamente, sin más que considerar las correspondencias subordinadas por (11) entre las curvas \mathfrak{P}_{21} , \mathfrak{P}_{22} y \mathfrak{P}_{31} , \mathfrak{P}_{32} , respectivamente, que aquellos puntos son también puntos simples respecto de \mathfrak{P}_{31} y \mathfrak{P}_{32} , respectivamente. Ahora bien, existen puntos del infinito de \mathfrak{P}_{3i} , $i = 1, 2$, que son transformados de puntos comunes a \mathfrak{P}_{2i} y a rad. $(P_2 B)$. Sea \mathfrak{P}_{30} uno de ellos, perteneciente a \mathfrak{P}_{3i} , y sea v una valoración con centro en \mathfrak{P}_{30} compuesta con P_i y tal que $P_3 \subset R_v$ (siendo R_v su anillo de valoración), y que no contie-

ne al ideal irrelevante de P_3 en su ideal de valoración. Sea \mathfrak{P}_{20} el centro de v en P_2 ; \mathfrak{P}_{20} será un punto de \mathfrak{P}_{21} . Representemos por \mathfrak{S}_{i_0} el anillo de cocientes homogéneo $P_i \mathfrak{P}_{i_0}$, $i = 2, 3$, y por \mathfrak{M}_{i_0} , $i = 2, 3$ su correspondiente ideal máximo. Entonces se verifica que $\mathfrak{S}_{30} \subseteq \mathfrak{S}_{20}$. Como \mathfrak{P}_{30} es un punto de \mathfrak{P}_{31} , se verifica que $\mathfrak{S}_{30} \subset \mathfrak{S}_{31}$. Supondremos en lo que sigue, para fijar el razonamiento, que $i = 2$, lo que desde luego no supone ninguna restricción. Entonces, de (10') se deduce que $\mathfrak{M}_{22} = \mathfrak{S}_{22} \omega(\xi)$ y como $B \equiv \equiv 0 (\mathfrak{P}_{22})$, resulta que $\mathfrak{M}_{32} = \mathfrak{S}_{32} \omega(\xi^*)$. Como en el lema 1, b), se ve que $\mathfrak{S}_{30} \omega(\xi^*)$ es un ideal primo, precisamente:

$$\mathfrak{S}_{30} \omega(\xi^*) = \mathfrak{M}_{32} \cap \mathfrak{S}_{30}.$$

Ahora bien, de viii) se deduce que existe una valoración única con centro en \mathfrak{P}_{30} , compuesta con P_2 , en la que el valor positivo mínimo es alcanzado por elementos de \mathfrak{S}_{30} . Por consiguiente, por el teorema 6 [2], \mathfrak{P}_{30} es un punto simple de \mathfrak{P}_{32} . De estos dos resultados se deduce que \mathfrak{P}_{30} es también un punto simple de P_3 . Por consiguiente, todos los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{31} y \mathfrak{P}_{32} son puntos simples para estas curvas y para la superficie.

Del mismo modo que en el lema 1, b), se ve que $\mathfrak{p}_{32} = \mathfrak{v}_3 \omega$, siendo \mathfrak{p}_{32} el ideal no homogéneo correspondiente a \mathfrak{P}_{32} .

Como $\mathfrak{p}_{12} = \mathfrak{v}_2 \theta$ es un ideal principal, resulta que $\mathfrak{v}_3 \theta = \mathfrak{p}_{31} \cap I$. Si fuera $\mathfrak{v}_3 \theta \neq \mathfrak{p}_{31}$, se seguiría que un d. m. p. de I dividiría a \mathfrak{p}_{12} , lo que implicaría la existencia de un punto fundamental respecto de la correspondencia (11) contenido en \mathfrak{P}_{12} , en contradicción con v). Por consiguiente, $\mathfrak{p}_{31} = \mathfrak{v}_3 \theta$ es un ideal principal. Por el lema 3, todo punto de \mathfrak{P}_{31} , que no es imagen de un punto común a \mathfrak{P}_{21} y a $P_2 B$, posee el mismo anillo de cocientes que su punto original y, por tanto, es un punto simple respecto de \mathfrak{P}_{31} y respecto de P_3 . Pero como acabamos de probar que los puntos de \mathfrak{P}_{31} que son transformados de puntos comunes a \mathfrak{P}_{21} y a $P_2 B$, son también puntos simples para \mathfrak{P}_{31} y para P_3 , resulta que todos los puntos de \mathfrak{P}_{31} son simples respecto de esta curva y respecto de la superficie.

Para probar que $P_3 \subset S_A$, es necesario imponer a las C_i condiciones que, respecto del centro de A en P_2 , son análogas a las condiciones vi), vii) y viii). La demostración resulta entonces igual a la que acabamos de dar para los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{32} .

Demostración de e).—Puesto que $\mathfrak{p}_{32} = \mathfrak{v}_3 \omega$, será

$$P_3 \omega = \mathfrak{P}_{32} \cap \mathfrak{D}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{D}_l$$

una descomposición normal de $P_3 \omega$ en componentes primarias. Sea

$$P'_3 = P_3 / \mathfrak{P}_{32}, \mathfrak{p}'_3 = \mathfrak{p}_3 / \mathfrak{p}_{32} \text{ y } \Sigma'_2 = V_{P_2} / P_2.$$

Si

$$\xi_i \equiv \xi'_i (\mathfrak{P}_{32}), i = 0, \dots, n + s = m,$$

se puede tomar

$$P'_3 = k [\xi'_0, \dots, \xi'_m].$$

Sean $c_i, b, i = 1, \dots, \nu$, formas de P'_3 tales que: i) grado $(c_i) = \text{grado}(b) + 1$. ii) Sean $\mathfrak{P}_{01}, \dots, \mathfrak{P}_{0\mu}$ los ideales correspondientes a todos los puntos singulares, tanto respecto de la curva como respecto de la superficie, que pertenecen a \mathfrak{P}_{32} ; $v_{ij}, j = 1, \dots, \alpha_i, i = 1, \dots, \mu$, todas las valoraciones con centro en \mathfrak{P}_{0i} compuestas con P_2 y v'_{ij} la valoración inducida por v_{ij} en Σ'_2 . Para cada v'_{ij} existe una $\frac{c_h}{b \xi_0}$ tal que

$$v'_{ij} \left(\frac{c_h}{b \xi_0} \right) > 0,$$

siendo este valor igual al positivo mínimo de v'_{ij} y

$$v'_{r,s} \left(\frac{c_h}{b \xi_0} \right) = 0,$$

para $r \neq i$, o $s \neq j$. Sean $C_i \equiv c_i (\mathfrak{P}_{32}), B \equiv b (\mathfrak{P}_{32})$ formas de P_3 tales que: iii) $\frac{C_i}{B}$ no posean ningún polo sobre \mathfrak{P}_{32} ni sobre las curvas que son centro de \mathbf{A} . iv) B no posee ningún cero en un punto del infinito de $\mathfrak{P}_{31}, \mathfrak{P}_{32}$ o del centro de \mathbf{A} en P_3 . v) Las C_i y B no tienen ningún cero común sobre \mathfrak{P}_{31} . vi) Si \mathfrak{P}_0 es un punto común a \mathfrak{P}_{31} y a $P_3 B$, existe un único ideal

$$\mathfrak{U}_i = P_3 (B, C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_\nu)$$

que posee a \mathfrak{P}_0 como d. m. p., y todo punto común a \mathfrak{P}_{31} y a $P_3 B$ es un punto simple de rad. $(P_3 B)$ o es un punto singular de \mathfrak{P}_{32} .

Del lema 3 y de la condición iv) se deduce que $\mathfrak{S}_{41} = \mathfrak{S}_{31}, \mathfrak{S}_{42} = \mathfrak{S}_{32}$ y los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{41} y \mathfrak{P}_{42} , que son trans-

formados de puntos del infinito de \mathfrak{P}_{31} o de \mathfrak{P}_{32} , respectivamente, son, por el mencionado lema 3, puntos simples respecto de P_4 y de \mathfrak{P}_{41} o \mathfrak{P}_{42} , respectivamente. Por la condición iii) todos los puntos del infinito de \mathfrak{P}_{42} son transformados de puntos del infinito de \mathfrak{P}_{32} , por lo que todos ellos son simples para P_4 y para \mathfrak{P}_{42} . En \mathfrak{P}_{41} existen puntos del infinito que son transformados de puntos comunes a \mathfrak{P}_{31} y a $P_3 B$, pero por vi) se deduce, como en el lema 1, b), que todos ellos son también simples respecto de P_4 y de \mathfrak{P}_{41} .

Como en el lema 2, se deduce de iv) que \mathfrak{p}_{42} es un ideal principal, y de iii) y ii) que todos sus puntos son simples respecto de \mathfrak{p}_{42} . De este resultado y del teorema 4 [2] se sigue que todo punto de \mathfrak{p}_{42} es también simple respecto de P_4 .

Todo punto de \mathfrak{P}_{41} que es transformado de un punto de \mathfrak{P}_{31} en el que no se anule B , posee los mismos anillos de cocientes sobre P_4 y sobre \mathfrak{P}_{41} que su punto original correspondiente, por lo que es simple en P_4 y en \mathfrak{P}_{41} . Ahora bien, los puntos de \mathfrak{P}_{31} en los que se anula B , se transforman en puntos del infinito de \mathfrak{P}_{41} , y ya hemos visto que todos ellos son simples respecto de esta curva y respecto de la superficie. En virtud de v) no existen puntos fundamentales en \mathfrak{P}_{31} , y como en el lema 1, b) resulta que \mathfrak{p}_{41} es principal.

Es inmediato ver que \mathfrak{P}_{41} y \mathfrak{P}_{42} no poseen puntos comunes en el infinito. Q. E. D.

DEFINICIÓN 3.—A los modelos que cumplen las condiciones del teorema 2 respecto de los divisores A, P_1 y P_2 les llamaremos *modelos canónicos de S_A respecto de P_1 y P_2* y al conjunto de todos ellos lo representaremos por $S_{A; P_1, P_2}$. En general, diremos que un modelo P^* de S_A es canónico respecto de los divisores

$$M_1 = P_{11}^{a_{11}} \dots P_{1r_1}^{a_{1r_1}}, \dots, M_s = P_{s1}^{a_{s1}} \dots P_{sr_s}^{a_{sr_s}},$$

cuando se verifiquen las siguientes condiciones: i) Todos los puntos de los centros de todos los divisores primos P_{ij} , $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, r_i$, son simples tanto en P^* como en el respectivo centro. ii) Si \mathfrak{o}^* es el anillo no homogéneo correspondiente al hiperplano H , se verifica que todos los puntos comunes a dos de los centros de los divisores P_{ij}, P_{kl} , $i \neq k$, pertenecen a \mathfrak{o}^* . iii) Los ideales correspondientes a los centros de todos los divisores P_{ij} en \mathfrak{o}^* son principales. Al conjunto de todos los modelos de S_A canónicos respecto de M_1, \dots, M_s le representaremos por $S_{A; M_1, \dots, M_s}$.

Del teorema 2 se deduce, por inducción, el siguiente

COROLARIO.—Existen modelos que pertenecen a $S_{\mathbf{A}; \mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_s}$.

DEFINICIÓN 4.—Si \mathfrak{P}_{ij} es el centro de \mathbf{P}_{ij} en P^* , diremos que

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{P}_{i1}^{a_{i1}} \dots \mathfrak{P}_{ir_i}^{a_{ir_i}}$$

es el centro de \mathbf{M}_i en P^* . Al conjunto formado por todos los centros de \mathbf{M}_i en todos los modelos de $S_{\mathbf{A}; \mathbf{C}}$, en donde \mathbf{C} es un conjunto de divisores al que pertenece \mathbf{M}_i , le llamaremos *ciclo centro de \mathbf{M}_i en $S_{\mathbf{A}; \mathbf{C}}$* .

§ 4. Índice de intersección de dos ciclos. Equivalencia lineal de ciclos.

Sean

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_1^{a_1} \dots \mathbf{P}_r^{a_r} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}' = \mathbf{P}_1^{a'_1} \dots \mathbf{P}_s^{a'_s}$$

dos divisores de Σ , y sean

$$\Gamma = \Gamma_1^{a_1} \dots \Gamma_r^{a_r} \quad \text{y} \quad \Gamma' = \Gamma_1^{a'_1} \dots \Gamma_s^{a'_s}$$

los ciclos correspondientes, es decir, los ciclos centros de \mathbf{M} y \mathbf{M}' en $S_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}$. Sea P_1 un modelo arbitrario de $S_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}$ y sean

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \dots \mathfrak{P}_r^{a_r} \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{P}_1^{a'_1} \dots \mathfrak{P}_s^{a'_s}$$

los centros de \mathbf{M} y \mathbf{M}' en P_1 , es decir, dos representantes de los Γ y Γ' . Por ser P_1 canónico respecto de \mathfrak{M} y \mathfrak{M}' , existe un anillo no homogéneo, \mathfrak{o}_1 , correspondiente a P_1 tal, que si representamos por

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \dots \mathfrak{p}_r^{a_r}, \quad \mathfrak{m}' = \mathfrak{p}_1^{a'_1} \dots \mathfrak{p}_s^{a'_s}$$

a los ideales no homogéneos de \mathfrak{o}_1 correspondientes a \mathfrak{M} y \mathfrak{M}' , respectivamente, se verifica que todos los ideales primos

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}_1 \varphi_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad \mathfrak{p}'_j = \mathfrak{o}_1 \varphi'_j, \quad j = 1, \dots, s,$$

son principales. Por ser P_1 canónico, se verifica que

$$\text{rad.} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}'_j) = \text{rad.} (\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}'_j).$$

Sea

$$\text{radical } (\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}'_j) = \mathfrak{p}_{i,j,1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_{i,j,t}$$

y pongamos

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{i,j,k} &= \mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}_{i,j,k}, & \mathfrak{m}_{i,j,k} &= \mathfrak{p}_{i,j,k} \mathfrak{S}_{i,j,k}, & \mathfrak{S}_{i,j,k}^* &= \mathfrak{S}_{i,j,k} / \mathfrak{S}_{i,j,k} \mathfrak{p}_i, \\ \mathfrak{S}_{i,j,k}' &= \mathfrak{S}_{i,j,k} / \mathfrak{S}_{i,j,k} \mathfrak{p}'_j, & \mathfrak{m}_{i,j,k}^* &= \mathfrak{m}_{i,j,k} / \mathfrak{S}_{i,j,k} \mathfrak{p}_i, \\ \mathfrak{m}_{i,j,k}' &= \mathfrak{m}_{i,j,k} / \mathfrak{S}_{i,j,k} \mathfrak{p}'_j, & & & & k = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Por ser las curvas \mathfrak{p}_i y \mathfrak{p}'_j simples, los anillos $\mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}_i$ y $\mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}'_j$ coinciden con los anillos de valoración $V_{\mathfrak{P}_i}$ y $V_{\mathfrak{P}'_j}$, respectivamente. Por ser los puntos $\mathfrak{p}_{i,j,k}$ simples para las dos curvas \mathfrak{p}_i y \mathfrak{p}'_j , se verifica que los anillos $\mathfrak{S}_{i,j,k}^*$ e $\mathfrak{S}_{i,j,k}'$ corresponden a las valoraciones sobre \mathfrak{p}_i y \mathfrak{p}'_j , respectivamente, con centro en $\mathfrak{p}_{i,j,k}$. Llamemos a estas valoraciones $\mathfrak{v}_{i,j,k}$ y $\mathfrak{v}'_{i,j,k}$, respectivamente; es decir, que

$$\mathfrak{S}_{i,j,k}^* = R_{\mathfrak{v}_{i,j,k}}, \quad \mathfrak{S}_{i,j,k}' = R_{\mathfrak{v}'_{i,j,k}}, \quad \mathfrak{m}_{i,j,k}^* = \mathfrak{p}_{\mathfrak{v}_{i,j,k}}, \quad \mathfrak{m}_{i,j,k}' = \mathfrak{p}_{\mathfrak{v}'_{i,j,k}}.$$

Como el punto $\mathfrak{p}_{i,j,k}$ es simple para la superficie P_1 y para las curvas \mathfrak{p}_i y \mathfrak{p}'_j , se puede elegir un parámetro de uniformización en el entorno de $\mathfrak{p}_{i,j,k}$, que llamaremos θ , tal que (θ, φ_i) y (θ, φ'_j) son bases del ideal $\mathfrak{m}_{i,j,k}$, es decir, que

$$(13) \quad \mathfrak{m}_{i,j,k} = \mathfrak{S}_{i,j,k}(\theta, \varphi_i) = \mathfrak{S}_{i,j,k}(\theta, \varphi'_j).$$

Si

$$\theta \equiv \bar{\theta}(\mathfrak{p}_i), \quad \theta \equiv \bar{\theta}'(\mathfrak{p}'_j),$$

será

$$\mathfrak{m}_{i,j,k}^* = \mathfrak{p}_{\mathfrak{v}_{i,j,k}} = \mathfrak{S}_{i,j,k}^* \bar{\theta}, \quad \mathfrak{m}_{i,j,k}' = \mathfrak{S}_{i,j,k}' \bar{\theta}'.$$

Sean $\tilde{\mathfrak{S}}_{i,j,k}$, $\tilde{\mathfrak{S}}_{i,j,k}^*$ e $\tilde{\mathfrak{S}}_{i,j,k}'$ los anillos completados de $\mathfrak{S}_{i,j,k}$, $\mathfrak{S}_{i,j,k}^*$ e $\mathfrak{S}_{i,j,k}'$, respectivamente, y sean $\tilde{\mathfrak{m}}_{i,j,k}$, $\tilde{\mathfrak{m}}_{i,j,k}^*$ y $\tilde{\mathfrak{m}}_{i,j,k}'$ sus respectivos ideales de no unidades. Entonces, se deduce de (13) que

$$(14) \quad \varphi'_j = a \theta^{\lambda} + b \varphi_i,$$

en donde a y b son unidades de $\tilde{\mathfrak{S}}_{i,j,k}$. Sean \bar{a} y \bar{b} elementos imágenes de a y b , respectivamente, en el homomorfismo

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{i,j,k} \rightarrow \mathfrak{S}_{i,j,k}^*.$$

Entonces, como $\bar{a} \equiv 0 \pmod{\bar{m}_{ij,k}^*}$, será

$$(15) \quad v_{ij,k}(\bar{\varphi}_j) = v_{ij,k}(\bar{a} \bar{\theta}^\lambda) = v_{ij,k}(\bar{\theta}^\lambda) = \lambda.$$

Ahora bien, de (14) se deduce que

$$\varphi_i = -\frac{a}{b} \theta^\lambda + \frac{1}{b} \varphi'_j, \quad \frac{a}{b} \equiv 0 \pmod{\bar{m}_{ij,k}},$$

por consiguiente,

$$\frac{\bar{a}'}{\bar{b}'} \equiv 0 \pmod{\bar{m}_{ij,k}^*},$$

de donde resulta que

$$(15') \quad v'_{ij,k}(\bar{\varphi}_i) = v'_{ij,k} \left(-\frac{\bar{a}'}{\bar{b}'} \bar{\theta}'^\lambda \right) = v'_{ij,k}(\bar{\theta}'^\lambda) = \lambda,$$

siendo

$$a \equiv \bar{a}' (\bar{\mathfrak{S}}_{ij,k} \mathfrak{p}'_j), \quad b \equiv \bar{b}' (\bar{\mathfrak{S}}_{ij,k} \mathfrak{p}'_j), \quad \theta \equiv \bar{\theta}' (\bar{\mathfrak{S}}_{ij,k} \mathfrak{p}'_j).$$

De (15) y (15') se deduce que

$$(16) \quad v_{ij,k}(\bar{\varphi}'_j) = v'_{ij,k}(\bar{\varphi}_i).$$

DEFINICIÓN 5.—Si \mathfrak{M} y \mathfrak{M}' tienen el significado anterior, llamaremos *intersección de \mathfrak{M} con \mathfrak{M}'* y la representaremos por $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$, al ideal

$$(17) \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \prod_{i,j,k=1}^{i,j,k=r,s,t} \mathfrak{p}_{ij,k}^{v_{ij,k}(\bar{\varphi}'_j) a_i a'_j}$$

siendo $\varphi'_i \equiv \bar{\varphi}'_i(\mathfrak{p}_i)$, t dependiente de i y j .

De (17) se deduce que

$$(18) \quad \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M} = \prod_{i,j,k=1}^{i,j,k=r,s,t} \mathfrak{p}_{ij,k}^{v'_{ij,k}(\bar{\varphi}_i) a_i a'_j}, \quad \text{siendo } \varphi_i \equiv \bar{\varphi}_i(\bar{\mathfrak{p}}_i).$$

De (16), (17) y (18) resulta el siguiente:

LEMA 4.— $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}$.

TEOREMA 3.—Si $\mathbf{M} = \mathbf{P}_1^{a_1} \dots \mathbf{P}_r^{a_r}$ y $\mathbf{M}' = \mathbf{P}_1^{a'_1} \dots \mathbf{P}_s^{a'_s}$ son dos divisores tales que los centros de todos los divisores primos \mathbf{P}_i y

P'_j , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$, en el modelo inicial P sean todos simples; P_1 y P_2 dos modelos de $S_{MM'}$;

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{P}_{i_1}^{a_1} \dots \mathfrak{P}_{i_r}^{a_r}, \quad \mathfrak{M}'_i = \mathfrak{P}'_{i_1}^{a'_1} \dots \mathfrak{P}'_{i_s}^{a'_s}$$

los centros de M y M' en P_i , $i = 1, 2$, y si

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}'_1 = \prod_{\substack{j, k, l = r, s, t \\ j, k, l = 1}} p_{1; j k; l}^{v_{1; j k; l}} (\bar{\varphi}'_{1k})^{a_j a_k}, \quad \varphi_{1k} \equiv \bar{\varphi}'_{1k} (p_{1j}),$$

t dependiente de $1, j, k$;

$$\mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}'_2 = \prod_{\substack{j, k, l = r, s, t \\ j, k, l = 1}} p_{2; j k; l}^{v_{2; j k; l}} (\bar{\varphi}'_{2k})^{a_j a_k}, \quad \varphi'_{2k} \equiv \bar{\varphi}'_{2k} (p_{2j}),$$

l' dependiente de $2, j, k$,

se verifica que:

i) Los ideales $p_{2; j k; l}$ son transformados de los $p_{1; j k; l}$ en la correspondencia $P_1 \rightarrow P_2$, verificándose que si en esta correspondencia $p_{1; j k; l}$ se transforma en $p_{2; j' k'; l'}$, es $j' = j$, $k' = k$ y se pueden numerar los últimos subíndices de forma que $l' = 1$.

ii) $v_{1; j k; l} = v_{2; j k; l}$, $j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, s$; $l = 1, \dots, t$, t depende de j y k .

iii) $v_{1; j k; l} (\bar{\varphi}'_{1k}) = v_{2; j k; l} (\bar{\varphi}'_{2k})$, $j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, s$; $l = 1, \dots, t$, t dependiente de j y k .

DEMOSTRACIÓN.—Bastará que efectuemos la demostración para un divisor primo arbitrario P_i de M y otro divisor primo arbitrario P'_j , de M' . Por consiguiente, podremos poner, con objeto de simplificar la notación, $P_i = P$ y $P'_j = P'$. Como P_1 y P_2 pertenecen a $S_{MM'}$, existen modelos afines, v_1 y v_2 , tales que si p_i y p'_i son los centros de P y P' , respectivamente, en v_i , $i = 1, 2$, se verifique que

$$(19) \quad p_i = v_i \varphi_i, \quad p'_i = v_i \varphi'_i, \quad i = 1, 2.$$

Como todos los puntos de las curvas p_i y p'_i son simples, tanto para ellas como para la superficie correspondiente se podrán emplear como parámetros de uniformización en los entornos de todos ellos los polinomios φ_i y φ'_i , $i = 1, 2$. Además, como $v_i p_i$ y $v_i p'_i$ son anillos de valoración y $p_1 \rightarrow p_2$, $p'_1 \rightarrow p'_2$ en la corres-

pondencia $P_1 \rightarrow P_2$, resulta que $\mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}_2 \mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{o}_2 \mathfrak{p}'_2$ y como siempre se puede suponer que φ_i y φ'_i , $i = 1, 2$ pertenecen al anillo \mathfrak{o} , correspondiente al modelo de partida (por ser los centros de \mathbf{P} y \mathbf{P}' en \mathfrak{o} simples), resulta que puede tomarse

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi, \varphi'_1 = \varphi'_2 = \varphi',$$

es decir, que (19) se escribiría en la forma:

$$(19') \quad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}_i \varphi, \mathfrak{p}'_i = \mathfrak{o}_i \varphi', i = 1, 2; \varphi, \varphi' \in \mathfrak{o}$$

Sea

$$\text{radical}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1) = \mathfrak{p}_{11} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_{1t'}$$

y

$$\text{radical}(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}'_2) = \mathfrak{p}_{21} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_{2t'}$$

y pongamos

$$\mathfrak{S}_{ij} = \mathfrak{o}_i \mathfrak{p}_{ij}; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, t, \quad \text{o bien, } j = 1, \dots, t'.$$

Sea

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{p}_{ij} \mathfrak{S}_{ij} = \mathfrak{S}_{ij}(\varphi, \theta_{ij}) = \mathfrak{S}_{ij}(\varphi', \theta_{ij}); \quad \theta_{ij} \in \mathfrak{o}_i, \quad i = 1, 2.$$

Sea v_{1j} la valoración con centro \mathfrak{p}_{1j} compuesta con \mathbf{P} , y sea \mathfrak{p}'_{2x} el centro de v_{1j} en \mathfrak{o}_2 ; \mathfrak{p}'_{2x} será un punto de \mathfrak{p}_2 . Sea

$$\bar{\mathfrak{S}}_{2x} = \mathfrak{o}_2 \mathfrak{p}'_{2x} \quad \text{y} \quad \bar{\mathfrak{M}}_{2x} = \mathfrak{p}'_{2x} \bar{\mathfrak{S}}_{2x} = \bar{\mathfrak{S}}_{2x}(\varphi, \theta), \quad \theta \in \mathfrak{o}_2.$$

Pongamos

$$(20) \quad \mathfrak{S}_{ij}^* = \mathfrak{S}_{ij} \mathfrak{S}_{ij} \varphi, \quad \mathfrak{M}_{ij}^* = \mathfrak{M}_{ij} / \mathfrak{S}_{ij} \varphi,$$

$$(21) \quad \mathfrak{S}_{ij}' = \mathfrak{S}_{ij} / \mathfrak{S}_{ij} \varphi', \quad \mathfrak{M}_{ij}' = \mathfrak{M}_{ij} / \mathfrak{S}_{ij} \varphi'$$

y

$$(22) \quad \bar{\mathfrak{S}}_{ij}^* = \bar{\mathfrak{S}}_{2x} / \bar{\mathfrak{S}}_{2x} \varphi, \quad \bar{\mathfrak{M}}_{ij}^* = \bar{\mathfrak{M}}_{2x} / \bar{\mathfrak{S}}_{2x} \varphi.$$

Ahora bien, como todos los puntos de \mathfrak{p}_1 y \mathfrak{p}_2 son simples en la curva, todos los anillos \mathfrak{S}_{ij}^* e $\bar{\mathfrak{S}}_{2x}^*$ son anillos de valoración, y como consecuencia se verifica que los puntos homólogos en la correspondencia subordinada por la correspondencia $\mathfrak{o}_1 \rightarrow \mathfrak{o}_2$ entre

las curvas p_1 y p_2 poseen el mismo anillo de cocientes, es decir, que $\mathfrak{S}_{1'}^* = \mathfrak{S}_{2x}^*$ y $\mathfrak{M}_{1'}^* = \mathfrak{M}_{2x}^*$. Sea

$$\theta_{1j} \equiv \bar{\theta}_{1j}(\mathfrak{S}_{1j}\varphi) \text{ y } \theta \equiv \bar{\theta}(\mathfrak{S}_{2x}\varphi),$$

entonces

$$\mathfrak{M}_{1'}^* = \mathfrak{S}_{1j}^* \bar{\theta}_{1j}, \quad \mathfrak{M}_{2x}^* = \mathfrak{S}_{2x}^* \bar{\theta}$$

y se pueden identificar $\bar{\theta}_{1j}$ y $\bar{\theta} : \bar{\theta}_{1j} = \bar{\theta}$, de donde resulta que

$$\theta = \theta_{1j} + \frac{A}{B}\varphi, \quad \frac{A}{B} \in \mathfrak{S}_{1j}, \quad \frac{A}{B} \in \mathfrak{S}_{2x},$$

luego θ_{1j} es parámetro de uniformización de \mathfrak{S}_{2x} , es decir, que $\mathfrak{M}_{2x}^* = \mathfrak{S}_{2x}^*(\varphi, \theta_{1j})$. Como los puntos p_{1j} y p'_{2x} son simples en sus respectivas superficies, los anillos locales completados correspondientes serán series de potencias en (φ, θ_{1j}) ([10], Th. 15), luego serán iguales. Llamando $\tilde{\mathfrak{S}}_{1j}$ y $\tilde{\mathfrak{S}}_{2x}$ a los anillos completados de \mathfrak{S}_{1j} y de \mathfrak{S}_{2x} , respectivamente, resulta, por tanto, que $\tilde{\mathfrak{S}}_{1j} = \tilde{\mathfrak{S}}_{2x}$. Toda valoración de Σ posee una única ampliación a los anillos completados de los anillos locales de los puntos de cualquiera de sus modelos, luego la valoración v_{1j} poseerá una ampliación única a $\tilde{\mathfrak{S}}_{1j}$, que llamaremos \tilde{v}_{1j} . Cualquier otra valoración v de Σ con centro en p_{1j} es tal que $\mathfrak{S}_{1j} \subset R_v$, y si \tilde{v} es la valoración ampliada a $\tilde{\mathfrak{S}}_{1j}$ será $\tilde{\mathfrak{S}}_{1j} \subset R_{\tilde{v}}$, luego $\tilde{\mathfrak{S}}_{2x} \subset R_{\tilde{v}}$ y, por tanto, $\mathfrak{S}_{2x} \subset R_v$, es decir, que el punto p_{1j} tiene como único transformado en la correspondencia $P_1 \rightarrow P_2$ el punto p'_{2x} . Ahora bien, entre las posibles valoraciones con centro en p_{1j} se encuentra la compuesta con P' , luego p'_{2x} pertenece también a p'_2 , es decir, p'_{2x} es uno de los puntos p_{21}, \dots, p_{2t} . Como el razonamiento es reversible, resulta que $t = t'$. Se pueden, por consiguiente, numerar los subíndices de modo que $p'_{2x} = p_{2j}$. Es decir, que en la transformación $P_1 \rightarrow P_2$ se verifica que $p_{1j} \rightarrow p_{2j}$, $j = 1, \dots, t$. Se verifica además que $\mathfrak{S}_{1j} = \mathfrak{S}_{2j}$, $j = 1, \dots, t$. En efecto, si $\frac{A}{B} \in \mathfrak{S}_{1j}$, será

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}, \quad A', B' \in \mathfrak{o}_2.$$

Sea

$$\mathfrak{S}_{2j} B' = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_\alpha,$$

entonces, si $\tilde{\mathfrak{S}}_{2j}$ es el anillo completado de \mathfrak{S}_{2j} , será

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{2j} B' = \tilde{\mathfrak{q}}_1 \cap \dots \cap \tilde{\mathfrak{q}}_\alpha, \quad \tilde{\mathfrak{q}}_i \cap \tilde{\mathfrak{S}}_{2j} = \tilde{\mathfrak{q}}_i$$

([3], Prop. 5); ahora bien, como $\tilde{\mathfrak{S}}_{2j} = \tilde{\mathfrak{S}}_{1j}$ y $\frac{A}{B} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{1j}$, será $\frac{A'}{B'} \in \tilde{\mathfrak{S}}_{2j}$, es decir, $A' \in \tilde{\mathfrak{q}}_i$, $i = 1, \dots, \alpha$, luego $A' \in \mathfrak{q}_i$, $i = 1, \dots, \alpha$, es decir, que $A' \in \mathfrak{S}_{2j} B'$, luego $\frac{A'}{B'} \in \mathfrak{S}_{2j}$. Como el razonamiento es reversible, resulta que $\mathfrak{S}_{1j} = \mathfrak{S}_{2j}$.

Si $\varphi' \equiv \bar{\varphi}'(\mathfrak{p}_1)$, $\varphi' \equiv \bar{\varphi}'(\mathfrak{S}_{1j} \varphi)$ y si v_{1j} es la valoración con centro \mathfrak{p}_{1j} inducida en \mathfrak{p}_1 por la valoración compuesta con \mathbf{P} , se verifica que $v_{1j}(\bar{\varphi}') = v_{1j}(\bar{\varphi})$. De aquí y de $\mathfrak{S}_{1j} = \mathfrak{S}_{2j}$, se deduce que

$$v_{1j}(\bar{\varphi}') = v_{1j}(\bar{\varphi}) = v_{2j}(\bar{\varphi}''),$$

siendo $v_{2j} = v_{1j}$ y $\varphi' \equiv \bar{\varphi}''(\mathfrak{p}_2)$. Q. E. D.

DEFINICIÓN 6.—Un divisor diremos que es *simple respecto del modelo inicial P*, o bien, brevemente, que es *simple*, cuando el centro del divisor en P es un producto de curvas simples respecto de P. Si \mathbf{M} y \mathbf{M}' son dos divisores simples y \mathbf{P}^* un modelo de $\mathbf{S}_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}$, \mathfrak{M} y \mathfrak{M}' los centros de \mathbf{M} y \mathbf{M}' , respectivamente, en \mathbf{P}^* , diremos que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ es un *representante del sitio* centro de la intersección de \mathbf{M} y \mathbf{M}' . Al conjunto formado por todos los representantes del sitio intersección de \mathbf{M} y \mathbf{M}' le llamaremos *sitio centro de la intersección de M con M'* y lo representaremos por $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$. Al conjunto de todos los centros de \mathbf{M} en los modelos de $\mathbf{S}_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}$ le llamaremos *ciclo centro de M en S_{MM'}* y lo representaremos por Γ . Análogamente, si Γ' es el ciclo centro de \mathbf{M}' en $\mathbf{S}_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}$, diremos que $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$ es el *sitio intersección de Γ con Γ'* , y lo representaremos también por $\Gamma \cap \Gamma'$.

En el caso en que \mathbf{M} y \mathbf{M}' sean los divisores del teorema anterior, pondremos

$$(23) \quad \Gamma \cap \Gamma' = \prod_{j,k,l=1}^{j,k,l=r,s,t} \sqrt[v_{j,k,l}(\bar{\varphi}_k)]{a_j a_k}$$

En virtud del teorema anterior, el número

$$(24) \quad i(\Gamma \cap \Gamma') = \sum_{j,k,l=1}^{j,k,l=r,s,t} v_{j,k,l}(\bar{\varphi}_k) \alpha_j \alpha_k$$

no depende del modelo de $S_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}$ que se emplee para calcularlo, y se llama *índice de la intersección de Γ con Γ'* o, también, *índice de la intersección de \mathbf{M} con \mathbf{M}'* , escribiéndose

$$i(\Gamma \cap \Gamma') = i(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}').$$

Del lema 4, del teorema 3 y de esta definición, resulta inmediatamente el

COROLARIO 1.—Si \mathbf{M} y \mathbf{M}' son dos divisores simples, se verifica que

$$i(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}') = i(\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}).$$

COROLARIO 2.—Si \mathbf{M} , \mathbf{M}' y \mathbf{M}'' son divisores simples, se verifica que

$$i(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'') = i(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}') + i(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'').$$

Sean $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_\nu$ todas las curvas singulares de P , y sean \mathbf{P}_{ij} , $j = 1, \dots, \mu_i$; $i = 1, \dots, \nu$, todos los divisores primos con centro en \mathfrak{P}_i . Si $\mathfrak{S}_i = P_{\mathfrak{P}_i}$ es el anillo de cocientes homogéneo de grado cero correspondiente a \mathfrak{P}_i , y si \mathfrak{S}_i^* es su cierre íntegro, y si \mathfrak{m}_i es el ideal máximo de \mathfrak{S}_i y \mathfrak{m}^*_{ij} son todos los d. m. p. de $\mathfrak{S}_i^* \mathfrak{m}_i$, se verifica que

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathfrak{m}^*_{ij} \mathfrak{S}_i^* \mathfrak{m}^*_{ij}, \quad i = 1, \dots, \nu; \quad j = 1, \dots, \mu_i.$$

Entonces, se pueden hallar elementos homogéneos θ_{ij} de grado de homogeneidad igual a la unidad, pertenecientes a \mathfrak{S}_i^* , tales que: i) $\mathbf{P}_{ij} = v_{\mathbf{P}_{ij}} \theta_{ij} = \mathfrak{S}_i^* \mathfrak{m}^*_{ij} \theta_{ij}$. ii) $\theta_{ij} \notin P_{im}$, si $l \neq i$ o $m \neq j$. iii) si $P_1 = P[\theta_{11}, \dots, \theta_{1\mu_1}]$, la correspondencia $P \rightarrow P_1$ no posee puntos fundamentales en P . De esta última condición se deduce que si \mathfrak{P}^* es una curva arbitraria de P_1 , $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \cap P$ es también una curva de P y se verifica que $P_{1\mathfrak{P}^*} \supseteq P_{\mathfrak{P}}$, luego toda valoración con centro \mathfrak{P}^* en P_1 tiene como centro en P a \mathfrak{P} . De aquí resulta que si \mathfrak{P} es simple para P , \mathfrak{P}^* lo es también para P_1 . Si \mathfrak{P} es una de las curvas singulares de P , por ejemplo $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$, y si existieran dos valoraciones $\mathbf{P}_{1\alpha}$ y $\mathbf{P}_{1\beta}$ con centro en \mathfrak{P}^* , resultaría que

$\theta_{1\alpha}, \theta_{1\beta} \in \mathfrak{P}^*$ y, por tanto, $\theta_{1\beta} \in \mathbf{P}_{1\alpha}$, en contradicción con ii). Por consiguiente, existe una única valoración con centro en \mathfrak{P}^* y ésta toma un valor positivo mínimo en el anillo no homogéneo correspondiente a \mathbf{P}_1 , luego por el teorema 4 [2], resulta que \mathfrak{P}^* es una curva simple. \mathbf{P}_1 posee todas sus curvas simples. Conveniremos en lo que sigue en tomar \mathbf{P}_1 como modelo de partida cuando en algún divisor intervenga un divisor primo cuyo centro en \mathbf{P} sea una curva múltiple. De este modo podremos aplicar el teorema 3 sin ninguna restricción.

Al conjunto formado por todos los centros de un divisor \mathbf{M} en todos los modelos de $\mathbf{S}_{\mathbf{M}}$ le llamaremos *ciclo centro de \mathbf{M}* .

Sea σ un elemento arbitrario de Σ y \mathfrak{o} un modelo afín de \mathbf{P} , tal que $\sigma = \frac{f}{g}$; $f, g \in \mathfrak{o}$ y grado $(f) = \text{grado}(g)$. Sea $\text{rad.}(\mathfrak{o}f) = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$ y $\text{rad.}(\mathfrak{o}g) = \mathfrak{p}'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}'_s$. Si \mathbf{P}_{ij} y \mathbf{P}'_{lk} , $i=1, \dots, r$; $j=1, \dots, \alpha_i$; $l=1, \dots, s$; $k=1, \dots, \beta_l$ son todos los divisores cuyos centros son \mathfrak{p}_i y \mathfrak{p}'_l , respectivamente, y si $\mu_{ij} = v_{\mathbf{P}_{ij}}(\sigma)$, $\nu_{lk} = v_{\mathbf{P}'_{lk}}(\sigma)$, pondremos

$$(\sigma) = \prod_{i,j,k,l=1}^{i,j,k,l=r,\alpha_i,s,\beta_k} \mathbf{P}_{ij}^{\mu_{ij}} \mathbf{P}'_{lk}^{\nu_{lk}}$$

y diremos que (σ) es el divisor correspondiente a σ . Si en lugar de elegir $\sigma = \frac{f}{g}$ hubiéramos elegido $\sigma = \frac{f'}{g'}$, $f', g' \in \mathfrak{o}$, sería

$$\text{rad.}(fg') = \text{rad.}(f'g)$$

y como

$$\text{rad.}(fg') = \text{rad.}(f) \cap \text{rad.}(g')$$

y

$$\text{rad.}(f'g) = \text{rad.}(f') \cap \text{rad.}(g),$$

resulta que el divisor definido a partir de $\sigma = \frac{f}{g}$ coincide con el

obtenido a partir de $\sigma = \frac{f'}{g'}$. Los divisores de la forma (σ) , $\sigma \in \Sigma$,

se llaman *principales*. Su conjunto es un subgrupo del grupo formado por todos los divisores, llamado *clase principal*. Dos divisores \mathbf{M} y \mathbf{N} se llaman *linealmente equivalentes* cuando pertenecen a la misma clase adjunta respecto de la clase principal, es

decir, cuando $\mathbf{M} \mathbf{N}^{-1}$ pertenece a la clase principal. A la clase adjunta definida por un divisor \mathbf{M} la representaremos por $[\mathbf{M}]$. La equivalencia lineal entre \mathbf{M} y \mathbf{N} la expresaremos por $\mathbf{M} \sim \mathbf{N}$; esta equivalencia equivale a la igualdad $[\mathbf{M}] = [\mathbf{N}]$. Si Γ y Δ son los ciclos centros de \mathbf{M} y \mathbf{N} y si $\mathbf{M} \sim \mathbf{N}$, diremos que Γ es equivalente a Δ y escribiremos $\Gamma \sim \Delta$. La clase de ciclos linealmente equivalentes a Γ la representaremos por $[\Gamma]$ y diremos que esta clase es el centro de $[\mathbf{M}]$. Como en lo que sigue trataremos únicamente de equivalencia lineal, prescindiremos de este último calificativo.

LEMA 5.—Si σ es un elemento arbitrario de Σ y \mathbf{M} un divisor, sin ninguna componente común con (σ) , se verifica que

$$i(\mathbf{M} \cap (\sigma)) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del corolario 2 del teorema anterior, basta efectuar la demostración en el caso particular en el que $\mathbf{M} = \mathbf{P}$ sea un divisor primo. Sea σ un modelo afín de \mathbf{P} tal que $\sigma = \frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi, \psi \in \sigma$ y $\text{grad}(\varphi) = \text{grad}(\psi)$. Si $\text{rad}(\sigma \varphi) = p_1 \cap \dots \cap p_r$ y $\text{rad}(\sigma \psi) = p'_1 \cap \dots \cap p'_s$, en donde, en virtud del convenio que acabamos de hacer, las curvas p_i y las p'_j son simples en σ , se podrá determinar el hiperplano del infinito de modo que todos los puntos de p_i y p'_j , $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$, situados en él sean simples para las curvas respectivas y para la superficie. Aplicando repetidamente el lema 1, b), se puede construir una antiproyección $\sigma \rightarrow \sigma^*$, $\sigma \subset \sigma^*$, tal que si $\mathbf{P}_i = p_i \circ p_i$, $\mathbf{P}'_j = p'_j \circ p'_j$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$, son los divisores con centros en p_i y p'_j , respectivamente, y si

$$p_i^* = \mathbf{P}_i \cap \sigma^*, \quad p_j'^* = \mathbf{P}'_j \cap \sigma^*,$$

se verifica que

$$p_i^* = \sigma^* \varphi_i; \quad p_j'^* = \sigma^* \psi'_j; \quad i = 1, \dots, r; \quad j = 1, \dots, s,$$

que todos los puntos del infinito de p_i^* y de $p_j'^*$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$, sean simples y que la antiproyección $\sigma \rightarrow \sigma^*$ no posea ningún punto fundamental en \mathbf{P} . Se verifica que

$$\text{rad}(\sigma^* \varphi) = \sigma^* \varphi_1 \cap \dots \cap \sigma^* \varphi_r,$$

pues si p^* es un d. m. p. de $\mathfrak{o}^* \varphi$, $p^* \cap \mathfrak{o}$ dividirá a uno de los p_i , por ejemplo $p_1 \subset p^* \cap \mathfrak{o}$. Por no existir puntos fundamentales en la correspondencia $\mathfrak{o} \rightarrow \mathfrak{o}^*$, se deduce que $p_1 = p^* \cap \mathfrak{o}$; y, por tanto, p^* es el centro de P_1 , es decir, $p^* = \mathfrak{o}^* \varphi_1$. La recíproca es trivial. Análogamente,

$$\text{rad}(\mathfrak{o}^* \psi) = \mathfrak{o}^* \psi'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{o}^* \psi'_s.$$

Por consiguiente,

$$\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_r^{\alpha_r}, \quad \psi = \psi_1^{\beta_1} \dots \psi_s^{\beta_s},$$

salvo un factor constante para cada expresión. Aplicando reiteradamente el lema 2, se obtiene que existe una antiproyección $\mathfrak{o}^* \rightarrow \mathfrak{o}^{**}$, $\mathfrak{o}^* \subset \mathfrak{o}^{**}$, tal que \mathfrak{o}^{**} es canónico respecto de P_i, P_j' y P y que $P_i \cap \mathfrak{o}^{**} = \mathfrak{o}^{**} \varphi_i$, $P_j' \cap \mathfrak{o}^{**} = \mathfrak{o}^{**} \psi_j$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$. Sea $p^{**} = P \cap \mathfrak{o}^{**}$. Todos los puntos comunes a p^{**} y $\mathfrak{o}^{**} \varphi_i$ o a $\mathfrak{o}^{**} \psi_j$ pertenecen a \mathfrak{o}^{**} , y si

$$\varphi_i \equiv \bar{\varphi}_i(p^{**}), \quad \psi_j \equiv \bar{\psi}_j(p^{**}), \quad i = 1, \dots, r; \quad j = 1, \dots, s,$$

se deduce que

$$(24) \quad i(P_i \cap P) = \{\bar{\varphi}_i\}, \quad i(P_j' \cap P) = \{\bar{\psi}_j\},$$

en donde $\{\bar{\varphi}_i\} =$ grado del divisor que resulta de prescindir en $(\bar{\varphi}_i)$ de todos los lugares del infinito; y análogo significado tiene $\{\bar{\psi}_j\}$.

De $\varphi = \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_r^{\alpha_r}$ y $P_i = \mathfrak{o}_{\mathfrak{o}^* \varphi_i}^{\alpha_i}$ se deduce que

$$(25) \quad (\varphi) = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$$

y de (24) y (25) se obtiene

$$i((\varphi) \cap P) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \{\bar{\varphi}_i\},$$

pero si $\varphi \equiv \bar{\varphi}(p^{**})$, se verifica que

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1^{\alpha_1} \dots \bar{\varphi}_r^{\alpha_r} \quad \text{y} \quad \{\bar{\varphi}\} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \{\bar{\varphi}_i\},$$

es decir,

$$i((\varphi) \cap P) = \{\bar{\varphi}\}.$$

Análogamente,

$$i((\psi) \cap \mathbf{P}) = \{\bar{\psi}\}$$

y, por tanto,

$$i((\sigma) \cap \mathbf{P}) = \{\bar{\varphi}\} - \{\bar{\psi}\},$$

pero como $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ son polinomios del mismo grado, resulta que

$$\{\bar{\varphi}\} = \{\bar{\psi}\}.$$

Q. E. D.

COROLARIO.—*Ningún divisor entero puede pertenecer a la clase principal.*

TEOREMA 4.—*Si $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}'$ y $\mathbf{N} \sim \mathbf{N}'$ se verifica que*

$$i(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}) = i(\mathbf{M}' \cap \mathbf{N}').$$

DEMOSTRACIÓN.—*De $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}'$ y $\mathbf{N} \sim \mathbf{N}'$ se deduce que*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}'(\sigma), \mathbf{N} = \mathbf{N}'(\tau), \sigma, \tau \in \Sigma,$$

luego, en virtud del corolario 2 del teorema 3 y del lema 5, será:

$$\begin{aligned} i(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}) &= i(\mathbf{M}'(\sigma) \cap \mathbf{N}'(\tau)) = i(\mathbf{M}' \cap \mathbf{N}') + i(\mathbf{M}' \cap (\tau)) \\ &\quad + i((\sigma) \cap \mathbf{N}') + i((\sigma) \cap (\tau)) = i(\mathbf{M}' \cap \mathbf{N}'). \end{aligned}$$

Q. E. D.

En virtud de este teorema se puede definir el *índice de intersección de dos clases de divisores* por

$$i([\mathbf{M}] \hat{\cap} [\mathbf{N}]) = i(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}),$$

siendo \mathbf{M} un divisor arbitrario de $[\mathbf{M}]$ y \mathbf{N} un divisor arbitrario de $[\mathbf{N}]$.

De todo lo que antecede resulta que tanto el sitio intersección de dos divisores como el índice de intersección de ambos, dependen del modelo de partida \mathbf{P} . Por ello, con más precisión, se debería hablar de sitio intersección de dos ciclos. En lo que sigue nos referiremos indistintamente a divisores o a ciclos.

Dado un ciclo Γ ; se llama *orden de Γ* , y también *orden de la clase $[\Gamma]$* , al número

$$\text{ord. } [\Gamma] = i([\Gamma], [\Gamma]).$$

5. Sistemas lineales de ciclos. Sistemas lineales completos. Funciones holomorfas y meromorfas sobre una superficie. Deficiencia de un sistema completo.—Un ciclo Γ se llama *entero* cuando es centro en S_M de un divisor entero M . Siguiendo la definición de Zariski [11], llamaremos *sistema lineal de ciclos enteros* a todo conjunto de ciclos, L , tal que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de L y los elementos de un K^* -módulo \mathcal{Q} de Σ , siendo K^* un dominio universal de definición de este cuerpo, en la cual cada ciclo entero de L es el centro en $S_{(\sigma)M}$ de un divisor entero de la forma $(\sigma)M$, en donde $\sigma \in \mathcal{Q}$, y recíprocamente.

Al rango y la dimensión de \mathcal{Q} se les llama *rango* y *dimensión* del sistema lineal de ciclos L . El conjunto de todos los ciclos enteros contenidos en la clase $[\Gamma]$, correspondiente al ciclo Γ , forma un sistema lineal no contenido en ningún otro sistema lineal más amplio, por lo que se le llama *sistema lineal completo*, y lo representaremos por $|\Gamma|$.

DEFINICIÓN 7.—Llamaremos *sitio primo* a todo anillo de cocientes completado correspondiente a un punto simple de un modelo de S . Un sitio primo, γ , diremos que *pertenece* a un ciclo Γ cuando es el anillo de cocientes completado de un punto de un representante de Γ . En virtud de la demostración del teorema 3 se verifica que el conjunto de todos los sitios pertenecientes a un ciclo Γ coincide con el conjunto de los anillos locales completados de uno cualquiera de sus modelos. Diremos también que *el ciclo Γ es el conjunto de todos los sitios pertenecientes a él*. En general, llamaremos *sitio* a cualquier elemento del grupo multiplicativo engendrado por los sitios primos. Un sitio se dirá *entero* cuando los exponentes de todos los sitios primos que figuran en él son no negativos. El sitio γ se dirá *múltiplo* del sitio γ' cuando $\gamma\gamma'^{-1}$ es entero, y γ' se dirá *divisor* de γ .

DEFINICIÓN 8.—Llamaremos *función prima* a toda representación Φ del conjunto formado por todos los sitios primos de S sobre el anillo \mathcal{A} de las series de potencias en dos indeterminadas con coeficientes en K , tal que se cumplan las siguientes condiciones: i) Existe un ciclo primo, Γ , tal que Φ representa a todo sitio primo que no pertenece a Γ sobre el $\mathbb{1}$ de K . ii) Si γ es un sitio primo de Γ , \mathfrak{o}^* un modelo afín de S y \mathfrak{p} el representante de Γ en \mathfrak{o}^* , siendo γ el anillo local completado de un punto de \mathfrak{p} , el ideal $\gamma\mathfrak{p}$ es un ideal principal: $\gamma\mathfrak{p} = \varphi_\gamma(\xi, \eta)$, siendo (ξ, η) un

par de parámetros de uniformización de γ , y φ_γ una serie de potencias de ξ, η con coeficientes de K . Si $\mathcal{A} = K \{ \{u, v\} \}$, la función Φ representa γ sobre $\varphi_\gamma(u, v)$. iii) En todo sitio primo se han fijado los parámetros de uniformización correspondientes (ξ, η) . La función prima Φ diremos que es la *función correspondiente al ciclo primo* Γ . La serie $\varphi_\gamma(u, v)$ diremos que es el elemento de Φ en el sitio γ . Si el sitio no pertenece a Γ , diremos que el elemento de Φ en él es la unidad. Se llamará *producto* de dos funciones primas a la representación que resulta de asignar a cada sitio de C el elemento producto de los elementos de las dos funciones primas en él. Al grupo engendrado por el conjunto de las funciones primas le llamaremos *grupo de las funciones meromorfas sobre S* correspondientes a ciclos o divisores. Cuando todos los exponentes de una función de este grupo son no negativos, diremos que la función es *holomorfa*. El conjunto de las funciones holomorfas correspondientes a ciclos es, por tanto, un semigrupo, generador del grupo de las funciones meromorfas e isomorfo al semigrupo de los ciclos enteros de S . El grupo de las funciones meromorfas es isomorfo al grupo de los ciclos de S . La función meromorfa correspondiente a un ciclo en este isomorfismo diremos que es la *función meromorfa del ciclo*.

Si f es un elemento arbitrario de Σ , f define en cada sitio un cociente de dos series de potencias en los parámetros de uniformización correspondientes al mismo, mediante el siguiente proceso. Sea γ un sitio arbitrario, \mathfrak{S} el anillo local cuyo anillo completado es γ , f admite una expresión de la forma $f = \frac{g}{h}$; $g, h \in \mathfrak{S}$ y g, h poseen, por tanto, expresión mediante series de potencia en γ , que representaremos por g^* y h^* , respectivamente. Diremos que $\frac{g^*}{h^*}$ es *elemento local de f en el sitio γ* . Si $f = \frac{g'}{h'}$ fuese otra expresión de f en \mathfrak{S} ; $g', h' \in \mathfrak{S}$, y g'^*, h'^* son series correspondientes; por ser $g h' - h g' = 0$ sería $g^* h'^* - h^* g'^* = 0$, es decir, $\frac{g^*}{h^*} = \frac{g'^*}{h'^*}$. Al conjunto de todos los elementos locales de f , correspondientes a todos los sitios de S , le llamaremos *función meromorfa correspondiente a f* . Se puede definir la adición y el producto de dos funciones meromorfas como la función meromorfa obtenida sumando o multiplicando los elementos locales correspondientes a cada sitio. Resulta así que el conjunto de to-

das las funciones meromorfas correspondientes a elementos de Σ forman un cuerpo isomorfo a Σ . Entre las funciones meromorfas correspondientes a elementos de Σ y las correspondientes a ciclos o divisores definiremos el producto del mismo modo que acabamos de indicar para las funciones meromorfas correspondientes a elementos de Σ . Al grupo engendrado por todas las funciones meromorfas correspondientes a ciclos y correspondientes a elementos de S , respecto de este producto, le llamaremos *grupo de las funciones meromorfas*, y a sus elementos, *funciones meromorfas* simplemente.

A toda función meromorfa Φ_f , correspondiente a una función f de Σ , le corresponde una función meromorfa $\Phi_{(f)}$, correspondiente a un divisor, tal que $\Phi_f \Phi_{(f)}^{-1}$ es una función holomorfa unidad, es decir, tal que a todo sitio primo γ le hace corresponder un elemento unidad de γ . La función $\Phi_{(f)}$ es la función holomorfa correspondiente al divisor (f) .

De la definición anterior resulta que los elementos de una función prima Φ en los distintos sitios de la misma son de la forma

$$a u + b v + c u^2 + d u v + \dots,$$

en donde a y b no se anulan nunca al mismo tiempo. Por consiguiente, en todo sitio primo perteneciente a una función prima se puede tomar el elemento de ésta en él como parámetro de uniformización. Dadas dos funciones primas Φ_1 y Φ_2 , tomaremos como parámetro de uniformización ξ , en todos los sitios de Φ_1 , su elemento local correspondiente, y como segundo parámetro uno arbitrario η tal que en todo sitio, γ , común a Φ_1 y a Φ_2 se verifique que el elemento local de Φ_2 sea de la forma

$$a u + b v + \dots, \begin{cases} \eta \rightarrow v \\ \xi \rightarrow u \end{cases} a \neq 0.$$

Haciendo en este elemento $u = 0$, resultará $m v^{m_r} + \dots$. Al sitio

$$\prod_{\gamma \in I} \gamma^{m_\gamma}$$

en donde I es el conjunto de todos los lugares comunes a Φ_1 , y a Φ_2 , le llamaremos *sitio intersección de Φ_1 y Φ_2* y lo representaremos por

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = \prod_{\gamma \in I} \gamma^{m_\gamma}$$

De la definición resulta inmediatamente que $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_2 \cap \Phi_1$.

Si

$$\Phi = \prod_{i=1}^r \Phi_i^{\alpha_i} \quad \text{y} \quad \psi = \prod_{j=1}^s \psi_j^{\beta_j}$$

son dos funciones meromorfas, en donde Φ_i y ψ_j son funciones primas, se define la intersección de Φ y ψ mediante

$$(26) \quad \Phi \cap \psi = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i,j=r,s}}^{\alpha_i, \beta_j} (\Phi_i \cap \psi_j)^{\alpha_i \beta_j}.$$

De esta definición se deduce que el sitio intersección de dos funciones meromorfas, correspondientes a dos ciclos o divisores, coincide con el sitio intersección de éstos.

Sea Φ una función prima, y Γ, \mathbf{P} sus respectivos ciclo y divisor correspondientes. Si \mathfrak{B} es un modelo de Γ , representaremos por Σ_Φ el cuerpo de funciones racionales sobre \mathfrak{B} ; es decir, Σ_Φ es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable. Si Φ^* es una función meromorfa arbitraria, correspondiente al ciclo Γ^* (o al divisor \mathbf{M}^* , correspondiente a Γ^*), que no contenga a Φ como factor, se puede asignar al sitio

$$\Phi \cap \Phi^* = \Gamma \cap \Gamma^* = \mathbf{P} \cap \mathbf{M}^*,$$

un divisor de Σ_Φ , del siguiente modo: Sea

$$\Phi \cap \Phi^* = \prod_{\gamma \in I} \gamma^{h_\gamma},$$

siendo I el conjunto de todos los sitios primos de Γ . A cada γ de I le corresponde un lugar \mathfrak{p}_γ de Σ_Φ , cuyo centro es γ . El divisor

$$(\Phi \cap \Phi^*)_\Phi = (\Gamma \cap \Gamma^*)_\Gamma = (\mathbf{P} \cap \mathbf{M}^*)_\mathbf{P} = \prod_{\gamma \in I} \mathfrak{p}_\gamma^{h_\gamma}$$

de Σ_Φ se llama divisor intersección de Φ con Φ^* (o de Γ con Γ^* , o de \mathbf{P} con \mathbf{M}^* , respectivamente).

De (26) se deduce que si Φ^* es una función holomorfa, $\Phi \cap \Phi^*$ es un divisor entero. A cada función f de Σ le corresponde una función meromorfa $\Phi_{(f)}$, correspondiente al divisor (f) . Sea \mathfrak{p} un

modelo de Γ en \mathfrak{o}_1 y $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}$. Si Φ no es factor de $\Phi_{(f)}$ y si $f \equiv \bar{f}(\mathfrak{M})$, se deduce que $\bar{f} \neq 0$, $f \neq \infty$, $\bar{f} \in \Sigma_\Phi$ y

$$(\Phi \cap \Phi_{(f)})_\Phi = (\bar{f})$$

siendo (\bar{f}) el divisor de Σ_Φ correspondiente a \bar{f} . Por consiguiente, la intersección de todos los ciclos de un sistema lineal L con un ciclo primo Γ pertenece a un sistema lineal de divisores de Σ_Φ , siendo Φ la función prima correspondiente a Γ .

Como aplicación de todo esto, consideremos un sistema lineal completo $|\Gamma^*|$. El conjunto formado por todos los ciclos del sistema que contienen al ciclo Γ como factor, forman el sistema lineal $|\Gamma^* \Gamma^{-1}|$. Todo ciclo de $|\Gamma^*|$ que no pertenezca a $|\Gamma^* \Gamma^{-1}|$ cortará a Γ en un divisor entero de Σ_Φ , y todos ellos pertenecen al mismo sistema lineal de divisores de Σ_Φ . Ahora bien, el sistema lineal formado por todos estos ciclos puede no ser completo, es decir, puede suceder que

$$\text{rango } |\Gamma \cap \Gamma^*| > \text{rango } |\Gamma^*| - \text{rango } |\Gamma^* \Gamma^{-1}|.$$

Al número

$$(27) \quad \text{def}_\Gamma |\Gamma^*| = \text{rango } |\Gamma \cap \Gamma^*| - \text{rango } |\Gamma^*| + \text{rango } |\Gamma^* \Gamma^{-1}|$$

se le llama *deficiencia del sistema lineal completo $|\Gamma^*|$ respecto del ciclo primo Γ* .

LEMA 6.—Si A, B, C, D son elementos del anillo \mathfrak{o} , la ecuación

$$(27) \quad AX + BY + CZ + XY = D$$

tiene siempre solución perteneciente a \mathfrak{o} .

DEMOSTRACIÓN.—Como el anillo \mathfrak{o} es bidimensional, siempre se podrán hallar tres elementos, T_1, T_2, T_3 , pertenecientes a él tales que el ideal

$$\mathfrak{o}(T_1 - T_3, T_2 - T_3, C) = \mathfrak{o}$$

sea el ideal unidad. Por consiguiente, existirán tres elementos, L_1, L_2 y L_3 , de \mathfrak{o} tales que

$$(T_1 - T_3)L_1 + (T_2 - T_3)L_2 + CL_3 = 1.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $1 - B - T_3$ y poniendo

$$\begin{aligned} M_1 &= L_1 (1 - B - T_3), & M_2 &= L_2 (1 - B - T_3), \\ N &= L_3 (1 - B - T_3), \end{aligned}$$

resulta

$$(T_1 - T_3) M_1 + (T_2 - T_3) M_2 + B + T_3 + C N = 1,$$

y haciendo

$$T = (T_1 - T_3) M_1 + (T_2 - T_3) M_2 + T_3,$$

se obtiene

$$B + T + C N = 1,$$

de donde, multiplicando por $D - A T$,

$$A T + B(D - A T) + C N(D - A T) + T(D - A T) = D;$$

lo que indica que

$$X = T, \quad Y = D - A T, \quad Z = N(D - A T)$$

es una solución de (27), perteneciente a \mathfrak{D} .

Q. E. D.

TEOREMA 5.—Si $|\Gamma^*|$ es un sistema lineal completo e irreducible (*), y Γ un ciclo primo que no figura como componente de ningún ciclo de $|\Gamma^*|$, lo que equivale a que rango $|\Gamma^* \Gamma^{-1}| = 0$, ni contiene a ningún punto base de $|\Gamma^*|$, se verifica que

$$\text{def}_\Gamma |\Gamma^*| = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Por ser $|\Gamma^*|$ irreducible, existe un ciclo entero irreducible en $|\Gamma^*|$, que supondremos ser el propio Γ^* ; es decir, que el representante de Γ^* sobre cualquier modelo de S_{Γ^*} es una curva irreducible. La admisibilidad de la hipótesis de que Γ no contenga a ningún punto base de $|\Gamma^*|$ es consecuencia de

(*) Un sistema lineal se llama irreducible cuando existen ciclos pertenecientes a él, que tienen representantes que son curvas irreducibles.

no ser Γ componente de ningún ciclo de $|\Gamma^*|$. Por consiguiente, se puede elegir un modelo P_1 de S_{Γ^*} tal que los representantes \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* , de Γ y Γ^* , sobre él tengan todos sus puntos comunes pertenecientes al modelo afín \mathfrak{o}_1 , que se obtiene de P_1 prescindiendo de un plano del infinito, que supondremos ser el $x_0 = 0$. Llamando \mathfrak{p} y \mathfrak{p}^* a los ideales no homogéneos correspondientes a \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* , respectivamente, se verifica, por tanto, que todos los puntos comunes a \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* vienen representados por el ideal $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*)$. Además, se verifica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_1 f$ y $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{o}_1 \varphi$ son ideales principales y que todos los puntos de \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* son simples en estas curvas y en la superficie P_1 . Sea Σ' el cuerpo de cocientes de $\mathfrak{o}'_1 = \mathfrak{o}_1/\mathfrak{p}$, y δ el divisor de Σ' intersección de los divisores primos correspondientes a los ciclos Γ y Γ' , que representaremos brevemente escribiendo $\delta = (\Gamma \cap \Gamma^*)$. Si $\varphi \equiv \bar{\varphi}(\mathfrak{p})$, resulta, por tanto, que representando por $(\bar{\varphi})$ al divisor de Σ' correspondiente a $\bar{\varphi}$, será

$$(28) \quad \delta = \text{ent.}(\bar{\varphi}),$$

siendo $\text{ent.}(\bar{\varphi})$ la parte entera del divisor $(\bar{\varphi})$.

Si representamos por F y Φ a las formas correspondientes a f y φ , respectivamente, se verifica que el divisor (Φ) , correspondiente al polinomio homogéneo Φ , es entero, y que los factores de (Φ) que tienen su centro a distancia finita, es decir, en \mathfrak{o}_1 , coinciden con los factores enteros del divisor (φ) , es decir,

$$(29) \quad \text{ent.}(\varphi) = \text{dist. finit.}(\Phi).$$

Análogamente,

$$(30) \quad \text{ent.}(f) = \text{dist. finit.}(F).$$

De (28), (29) y (30) se deduce, recordando que \mathfrak{B} y \mathfrak{B}^* tienen todos sus puntos comunes en \mathfrak{o}_1 , que

$$(31) \quad \delta = \text{ent.}(\varphi) \cap \text{ent.}(f) = \text{dist. finit.}(\Phi) \cap \text{dist. finit.}(F).$$

Sea γ cualquier otro ciclo entero de $|\delta|$, es decir, que

$$\gamma = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right) \delta, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{o}'_1.$$

No supone ninguna restricción admitir que $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)$ tiene todos sus

lugares con centros a distancia finita, es decir, pertenecientes a σ'_1 . Admitiremos, además, que las formas A y B, correspondientes a los polinomios a y b que se obtienen al sustituir en \bar{a} y \bar{b} las $\bar{\xi}$ por las ξ , son tales que (A) y (B) no poseen ningún divisor primo en el infinito. Por consiguiente, \bar{a} y \bar{b} son polinomios del mismo grado respecto de las (ξ) . No supone tampoco restricción esencial admitir que γ y δ no tienen ningún lugar común. Vamos a demostrar que existe un ciclo entero de $|\Gamma^*|$ que corta a Γ en el ciclo γ .

Sean \bar{A} , \bar{B} y $\bar{\Phi}$ los polinomios homogéneos de $P'_1 = P_1/\mathfrak{P}$ correspondientes a \bar{a} , \bar{b} y $\bar{\varphi}$, respectivamente. Vamos a probar que $\frac{\bar{A}}{\bar{B}} \bar{\Phi} = \Psi$ es un elemento homogéneo de P'_1 . En efecto, sea

$$\sigma'_1 \bar{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_h$$

y sea \mathfrak{p}_i el ideal primo correspondiente a \mathfrak{q}_i , $i = 1, \dots, h$. Por ser simples todos los puntos de \mathfrak{P} , se verifica que

$$\mathfrak{p}_{v_i} = \sigma'_1 \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i = \sigma'_1 \mathfrak{p}_i (\bar{\gamma}_i)$$

son los ideales de valoración correspondientes a los lugares con centros en \mathfrak{p}_i , $i = 1, \dots, h$. Sea

$$\bar{b} = \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}'_i} \bar{\eta}_i^{\alpha_i}; \bar{c}_i, \bar{c}'_i \notin \mathfrak{p}_i; v_i(\bar{b}) = \alpha_i$$

y

$$\bar{a} \bar{\varphi} = \frac{\bar{d}_i}{\bar{d}'_i} \bar{\eta}_i^{\beta_i}; \bar{d}_i, \bar{d}'_i \notin \mathfrak{p}_i; v_i(\bar{a} \bar{\varphi}) = \beta_i; i = 1, \dots, h.$$

Por ser γ entero, será $\beta_i \geq \alpha_i$, $i = 1, \dots, h$, y, por consiguiente,

$$\bar{a} \bar{\varphi} = \frac{\bar{d}_i \bar{c}'_i}{\bar{d}'_i \bar{c}_i} \bar{\eta}_i^{\beta_i - \alpha_i} \bar{b},$$

de donde

$$\bar{a} \bar{\varphi} (\bar{d}'_i \bar{c}_i) \equiv 0 (\sigma'_1 \bar{b})$$

y, a fortiori,

$$\bar{a} \bar{\varphi} (\bar{d}'_i \bar{c}_i) \equiv 0 (\mathfrak{q}_i), i = 1, \dots, h.$$

Como $d'_i \bar{c}_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}$, será $\bar{a} \bar{\varphi} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}_i}$, $i = 1, \dots, h$, es decir, $\bar{a} \bar{\varphi} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}'_1 \bar{b}}$ y $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \bar{\varphi} = \bar{\psi} \in \mathfrak{o}'_1$. Como \bar{a} y \bar{b} son polinomios del mismo grado y Φ no posee ningún cero en el infinito, $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ son también polinomios del mismo grado; por consiguiente, si $\bar{\Psi}$ es el polinomio homogéneo correspondiente a $\bar{\psi}$, se verifica que

$$(31) \quad \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \bar{\Phi} = \bar{\Psi} \in P'_1.$$

Como $\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ y $(\bar{\Phi})$ no poseen ningún lugar en el infinito, lo mismo le sucede a $(\bar{\Psi})$; por consiguiente,

$$(32) \quad \gamma = (\bar{\Psi}) = \text{ent.}(\bar{\Psi}).$$

Sea

$$\xi_i \equiv \xi_i(\mathfrak{P}), \quad i = 1, \dots, n, \quad P_1 = k[\xi_1, \dots, \xi_n].$$

Llamemos a , b , φ y ψ a los polinomios de \mathfrak{o}_1 que se obtienen al sustituir en \bar{a} , \bar{b} , $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$, respectivamente, las $\bar{\xi}_i$ por las ξ_i . Siempre se puede elegir Γ tal que δ tenga los exponentes de todos sus lugares primos iguales a la unidad. Ahora bien, por ser simples todos los puntos de \mathfrak{p} , todos los anillos locales de \mathfrak{o}'_1 son íntegramente cerrados. Luego, si σ' es un elemento de Σ' , que depende íntegramente de \mathfrak{o}'_1 , dependerá íntegramente de todos sus anillos locales y, por tanto, pertenecerá a todos ellos, luego, como consecuencia, pertenecerá a \mathfrak{o}'_1 . Es decir, que \mathfrak{o}'_1 es íntegramente cerrado, y como este anillo es unidimensional, se verifica en él la teoría clásica de ideales; por consiguiente, todo ideal de \mathfrak{o}'_1 es producto de potencias de ideales primos. Por tanto,

$$\mathfrak{o}'_1 \bar{\varphi} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_s,$$

siendo todos los ideales primos \mathfrak{p}_i los correspondientes a los centros de los lugares primos de δ , y como todos éstos son distintos entre sí, por tener sus exponentes iguales a la unidad, lo mismo acontece a $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$. Como (ψ) y δ no tienen ningún lugar común, será $\bar{\psi} \equiv n_i \bar{c}_i \pmod{\mathfrak{p}_i}$, $i = 1, \dots, s$; $n_i \in K$. Por otra parte, de

$$\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = \mathfrak{o}'_1, \quad i \neq j,$$

se deduce la existencia de elementos $e_i, e'_i, i = 1, \dots, s$, todos ellos del mismo grado, tales que

$$\bar{e}_i + \bar{e}'_i = 1, \quad \bar{e}_i \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \bar{e}'_i \equiv 0 \pmod{p_j}, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, s.$$

Sea

$$n'_i = \prod_{j \neq i} n_j, \quad n''_i = \sum_{j \neq i} n_j, \quad i = 1, \dots, s \quad \text{y} \quad n = \prod_{i=1}^s n_i.$$

Pongamos

$$(33) \quad \bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^s n_i \bar{e}_i + \sum_{i=1}^s (n'_i - n''_i) \bar{e}'_i}{n}.$$

Entonces se verifica que, tomando restos mód. p_j y observando que

$$\frac{n''_j + n'_j - n_j}{n} \equiv \frac{1}{n_j},$$

es

$$\bar{e} \equiv \frac{1}{n_j} \pmod{p_j},$$

luego poniendo

$$(34) \quad \bar{\psi}^* = \bar{\psi} \bar{e},$$

será

$$(35) \quad \bar{\psi}^* \equiv 1 \pmod{p'_1 \bar{\varphi}}.$$

Sea ψ^* el polinomio de \mathfrak{o}_1 que resulta al sustituir en $\bar{\psi}^*$ las $\bar{\xi}$ por las ξ . De (34) se deduce que

$$\psi^* \equiv 1 \pmod{p + p^*},$$

es decir, que

$$(36) \quad \psi^* - 1 = g f + h \varphi, \quad g, h \in \mathfrak{o}_1.$$

Ahora bien, poniendo $\bar{\varphi}^* = \bar{\varphi} \bar{e}$, resulta que $\frac{a}{b} \bar{\varphi}^* = \bar{\psi}^*$, de donde, llamando e y φ^* a los polinomios que resultan al sustituir en \bar{e} y $\bar{\varphi}^*$ las $\bar{\xi}$ por las ξ , se obtiene que

$$(37) \quad a \varphi^* - b \psi^* \equiv 0 \pmod{p}.$$

En virtud del lema 6, existe una solución en \mathfrak{o}_1 de la ecuación

$$(38) \quad \psi^* X + b Y - \varphi^* Z + X Y = a \varphi^* - b \psi^*.$$

Una solución de (38) es

$$(39) \quad \begin{cases} X = [(T_1 - T_3) L_1 + (T_2 - T_3) L_2] (1 - \psi^* - T_3) + T_3 \\ Y = a \varphi^* - b \psi^* - \psi^* X \\ Z = -\varphi^* (1 - \psi^* - T_3) Y. \end{cases}$$

Se pueden hallar, de infinitos modos, $T_1 - T_3$, $T_2 - T_3$, L_1 y L_2 , de modo que todos ellos sean elementos de \mathfrak{o}_1 y que

$$(T_1 - T_3) L_1 + (T_2 - T_3) L_2 - \varphi h = 1,$$

siendo h el polinomio definido por (36). Llevando este valor a (39), resulta

$$\begin{aligned} X &= (1 + h \varphi) (1 - \psi^* - T_3) + T_3 \\ &= (1 + h \varphi) (1 - \psi^*) - T_3 h \varphi, \end{aligned}$$

y en virtud de (36),

$$X = (1 - \psi^*) (\psi^* + g f) - T_3 (\psi^* - 1 - g f).$$

de donde

$$(40) \quad X \equiv (1 - \psi^*) (\psi^* + T_3) (p).$$

Por consiguiente, eligiendo T_3 de modo que $T_3 \equiv -\psi^* (p)$, se deduce de (40) que

$$X \equiv 0 (p),$$

y teniendo presentes (37) y (38), resulta que

$$Y \equiv 0 (p), \quad Z \equiv 0 (p).$$

Ahora bien, de (38) se deduce que

$$(a + Z) \varphi^* = (\psi^* + Y) (b + X),$$

es decir,

$$(41) \quad \frac{a + Z}{b + X} \varphi^* = \psi^* + Y.$$

Pero como $\psi^* = \psi e$ y $\varphi^* = \varphi e$, se deduce, poniendo

$$y = a \varphi + b \psi - \psi X,$$

que

$$Y = y e;$$

por consiguiente, se puede escribir (41) en la forma:

$$(42) \quad \frac{a + Z}{b + X} \varphi = \psi + y.$$

Sea $\alpha = \text{grado}(A)$, $\beta = \text{grado}(B)$, $\alpha = \text{grado}(X)$, $\nu = \text{grado}(\varphi) = \text{grado}(\psi)$, $\mu = \text{grado}(Y)$, $\pi = \text{grado}(Z) - (\mu - \nu)$, y sean A , B , X^* , y^* , Z^* los polinomios homogéneos correspondientes a a , b , X , y , Z , respectivamente. Teniendo en cuenta que $\nu < \mu$, $\alpha < \text{grado}(Z)$, $\beta < \text{grado}(Z)$, $\alpha < \mu$, y multiplicando ambos miembros por ξ_0^μ , resulta

$$(43) \quad \frac{A \xi_0^{\pi + \mu - \nu - \alpha} + Z^*}{B \xi_0^{\pi - \beta} + X^* \xi_0^{\pi - \alpha}} \Phi = \Psi \xi_0^{\mu - \nu} + y^*,$$

puesto que

$$\left(\frac{A \xi_0^{\pi + \mu - \nu - \alpha} + Z^*}{B \xi_0^{\pi - \beta} + X^* \xi_0^{\pi - \alpha}} \Phi \right) \sim (\Phi)$$

y por (31), $(\Phi) \sim (\Psi)$.

Ahora bien, como (A) y (B) no poseen ningún divisor primo en el infinito, resulta que la componente Δ de (Φ) en el infinito lo será también de (Ψ) .

Por otro lado, de

$$y^* = A \Phi \xi_0^{\mu - \alpha - \nu} - B \Psi \xi_0^{\mu - \beta - \nu} - \Psi X^*,$$

se deduce que Δ divide también a (y^*) ; luego Δ divide a

$$(\Psi \xi_0^{\mu - \nu} + y^*)$$

es decir:

$$(\Psi \xi_0^{\mu - \nu} + y^*) \Delta^{-1} = \mathbf{D}$$

es un divisor entero. Pero, por (30), $\Phi \Delta^{-1} = \text{dist. finita } (\Phi)$ es e^1 divisor con centro en Γ^* , y por otro lado es

$$\left(\frac{A \xi_0^{\pi+\mu-\nu-a} + Z^*}{B \xi_0^{\pi-\beta} + X^* \xi_0^{\pi-z}} \right) (\Phi) \Delta^{-1} = \mathbf{D},$$

es decir,

$$\mathbf{D} \sim (\Phi) \Delta^{-1} = \text{dist. finita } (\Phi),$$

y como \mathbf{D} es un divisor entero con centro en Γ^* , resulta que centro $(\mathbf{D}) \in |\Gamma^*|$. De la definición de \mathbf{D} resulta que el divisor intersección de \mathbf{D} con Γ es igual al divisor

$$\text{dist. finita } (\overline{\Psi \xi_0^{\mu-\rho} + y^*}),$$

siendo $\overline{\Psi \xi_0^{\mu-\rho} + y^*}$ el resto mód \mathbf{P} de $\Psi \xi_0^{\mu-\rho} + y^*$. Pero si e^* e Y^* son los polinomios homogéneos correspondientes a e e Y , respectivamente, será $Y^* = y^* e^*$, y como $Y \equiv 0 (\mathfrak{p})$ será

$$Y^* \equiv 0 (\mathfrak{P}),$$

es decir, $y^* e^* \equiv 0 (\mathfrak{P})$, y como $e^* \equiv 1 (\mathfrak{P})$, será $y^* \equiv 0 (\mathfrak{P})$, es decir, que $\bar{y}^* = 0$, luego

$$\text{dist. finita } (\overline{\Psi \xi_0^{\mu-\rho} + y^*}) = \text{dist. finita } (\bar{y}) = \gamma,$$

lo que prueba que γ es la intersección de centro (\mathbf{D}) con Γ .

Q. E. D.

6. Diferenciales en Σ . Clase de las diferenciales lineales de primera especie y clase canónica.—Sean (ξ_1, ξ_2) un par de elementos de Σ que forman una *base separante trascendente* de Σ , es decir, tales que Σ es una ampliación algebraica separable de $k(\xi_1, \xi_2)$. Se dice que la base separante trascendente (ξ_1, ξ_2) es una *base de uniformización respecto de Γ* , cuando $(\xi_1 - \alpha_1, \xi_2 - \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ son parámetros de uniformización para un sitio contenido en Γ . K , supondremos en lo que sigue que, es de característica cero. Es bien conocido que si (ξ_1, ξ_2) es una base trascendente de Σ , (ξ_1, ξ_2) es una base de uniformización para todo ciclo de Σ , salvo un número finito de ellos.

Sea (ξ_1, ξ_2) una base trascendente de Σ , y ζ un elemento arbitrario de este cuerpo; se verificará una relación:

$$(44) \quad f(\zeta, \xi_1, \xi_2) = 0,$$

en donde f es un polinomio respecto de ζ irreducible, cuyos coeficientes pertenecen a $k[\xi_1, \xi_2]$. Pondremos, por definición,

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} d\xi_2,$$

en donde

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi_1}}{\frac{\partial f}{\partial \zeta}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial f}{\partial \zeta}},$$

se calculan según las reglas del cálculo diferencial ordinario, y $d\xi_1, d\xi_2$ son símbolos independientes. Si ζ_1, \dots, ζ_r son elementos arbitrarios de Σ , así como A_1, \dots, A_r , a la expresión

$$(45) \quad \omega = A_1 d\zeta_1 + \dots + A_r d\zeta_r$$

$$(46) \quad d\zeta_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_2} d\xi_2$$

se le llama *diferencial lineal o de primer orden* de Σ . De (45) y (46) se deduce que toda diferencial lineal se puede poner en la forma siguiente:

$$(47) \quad \omega = A d\xi_1 + B d\xi_2, \quad A, B \in \Sigma.$$

Si en cada sitio primo γ de S se han fijado dos parámetros de uniformización $(\eta_1^\gamma, \eta_2^\gamma)$, diremos que se ha fijado una base en el conjunto \mathfrak{S} formado por todos los sitios primos de S . Representaremos a esta base simplemente por (η_1, η_2) . En lo que sigue supondremos siempre que se ha fijado una base de \mathfrak{S} . En estas condiciones, dado un elemento arbitrario ζ de Σ , en cada sitio primo γ de \mathfrak{S} existirá una serie o cociente de dos series, según las potencias de $(\eta_1^\gamma, \eta_2^\gamma)$, correspondiente a ζ ; diremos que esta serie o cociente de series es la componente local de ζ

correspondiente al sitio γ , y la representaremos por ζ_γ . Según es bien conocido, la diferenciación definida en Σ se puede extender a todos los sitios de \mathfrak{S} y se verifica que si se toma como base para la diferenciación la formada por $(\eta_1^\gamma, \eta_2^\gamma)$, es

$$(48) \quad d(\zeta_\gamma) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta_1^\gamma} \right)_\gamma d\eta_1^\gamma + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta_2^\gamma} \right)_\gamma d\eta_2^\gamma,$$

y también

$$(49) \quad d(\zeta_\gamma) = \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_1^\gamma} d\eta_1^\gamma + \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_2^\gamma} d\eta_2^\gamma.$$

Al conjunto de todas las componentes locales de un elemento ζ de Σ , en todos los sitios de \mathfrak{S} , es decir, a la función meromorfa correspondiente a ζ , lo representaremos por ζ^* , y a ζ_γ le llamaremos *elemento de ζ^* en el sitio γ* . Al conjunto formado por las diferenciales de todos los elementos ζ_γ de ζ^* lo representaremos por $d\zeta^*$.

DEFINICIÓN 9.—Sean

$$\frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_1^\gamma} = \frac{a_{1\gamma}^{\alpha_1} \dots a_{r\gamma}^{\alpha_r}}{b_{1\gamma}^{\beta_1} \dots b_{s\gamma}^{\beta_s}}, \quad \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_2^\gamma} = \frac{a'_{1\gamma}{}^{\alpha'_1} \dots a'_{r\gamma}{}^{\alpha'_r}}{b'_{1\gamma}{}^{\beta'_1} \dots b'_{s'\gamma}{}^{\beta'_{s'}}}$$

las expresiones irreducibles de

$$\frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_1^\gamma} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta_1^\gamma} \right)_\gamma$$

y de

$$\frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_2^\gamma} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta_2^\gamma} \right)_\gamma,$$

respectivamente, en donde las a_{ij} , b_{ij} , a'_{ij} , b'_{ij} son series de potencias irreducibles en η_1^γ , η_2^γ . Sea

$$a_{1\gamma}^{\beta_1} \dots a_{s'\gamma}^{\beta_{s'}} = \text{m. c. d.} \left(a_{1\gamma}^{\alpha_1} \dots a_{r\gamma}^{\alpha_r}, a'_{1\gamma}{}^{\alpha'_1} \dots a'_{r\gamma}{}^{\alpha'_r} \right)$$

y

$$b_{1\gamma}^{\beta_1} \dots b_{s'\gamma}^{\beta_{s'}} = \text{m. c. m.} \left(b_{1\gamma}^{\beta_1} \dots b_{s\gamma}^{\beta_s}, b'_{1\gamma}{}^{\beta'_1} \dots b'_{s'\gamma}{}^{\beta'_{s'}} \right).$$

Definiremos

$$d(\zeta_\gamma) = \frac{a_{i_1\gamma}^{\mu_1} \cdots a_{i_t\gamma}^{\mu_t}}{b_{j_1\gamma}^{\nu_1} \cdots b_{j_{s'}\gamma}^{\nu_{s'}}$$

en donde ninguna de las $a_{i\gamma}^{\mu}$ ni de las $b_{j\gamma}^{\nu}$ es una unidad. Si el m. c. m. y el m. c. d. fuesen unidades, pondríamos

$$d(\zeta_\gamma) = 1.$$

El conjunto formado por todas las $d(\zeta_\gamma)$, correspondientes a todos los sitios γ de \mathfrak{S} , será representado por

$$d(\zeta^*).$$

LEMA 7.— $d(\zeta^*)$ es una función meromorfa correspondiente a un divisor (a un ciclo) que representaremos por $(d\zeta)$ (o por $[d\zeta]$, respectivamente).

DEMOSTRACIÓN.—Sea γ un sitio en el que $d(\zeta_\gamma) \neq 1$, siendo, por ejemplo,

$$d(\zeta_\gamma) = \frac{a_{i_1\gamma}^{\mu_1} \cdots a_{i_t\gamma}^{\mu_t}}{b_{j_1\gamma}^{\nu_1} \cdots b_{j_{s'}\gamma}^{\nu_{s'}}$$

en donde las a_i y las b_j , $i = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, t'$ son series de potencias irreducibles pertenecientes a γ . Sea \mathfrak{o}_1 un modelo de S en el que el punto simple \mathfrak{p}_0 posee como anillo local completado a γ . Sea $\mathfrak{S} = \mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{S} \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{S} \cap \gamma a_{i\gamma}$ (lo análogo es válido para $\gamma b_{j\gamma}$) y $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}_1$. Como \mathfrak{p}_0 es un punto simple de \mathfrak{o}_1 , \mathfrak{p} será una curva simple de esta superficie y existe un divisor primo, y sólo uno, \mathbf{P} , cuyo centro en \mathfrak{o}_1 es \mathfrak{p} . Sea Γ el ciclo centro de \mathbf{P} en S . Entonces γ pertenece a Γ y este ciclo no depende del modelo \mathfrak{o}_1 empleado en su construcción. Se verifica que

$$\mu_i = \min \left\{ v_{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta_{i_1}^{\mu_1}} \right), v_{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta_{i_2}^{\mu_2}} \right) \right\}$$

y si γ' es otro sitio contenido en Γ y Φ es la función prima correspondiente a este ciclo, la componente local de Φ^{μ_i} en γ' es una de las potencias que figuran en la expresión irreducible de $d(\zeta_{\gamma'})$. Por consiguiente, Φ^{μ_i} es una componente de $d(\zeta^*)$. Sea (θ_1, θ_2)

una base trascendente, y sea \mathcal{M} el conjunto de todos los ciclos primos de P para los que (θ_1, θ_2) es una base de uniformización, y sea \mathcal{N} el conjunto, finito, formado por los restantes ciclos. De lo anterior resulta que, si γ_1 es un sitio para el que $D(z_{\gamma_1})$ no es la unidad, se verifica que γ_1 está contenido en un ciclo Γ_1 perteneciente a $\left[\frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} \right]$ y a $\left[\frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}} \right]$. Si Γ_1 pertenece a \mathcal{M} existen dos números $\alpha, \beta \in K$, tales que $(\theta_1 - \alpha, \theta_2 - \beta)$ son parámetros de uniformización en γ_1 y, por tanto, se verifica que

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} = a \frac{\partial z}{\partial (\theta_1 - \alpha)} + b \frac{\partial z}{\partial (\theta_2 - \beta)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}} = c \frac{\partial z}{\partial (\theta_1 - \alpha)} + d \frac{\partial z}{\partial (\theta_2 - \beta)}, \end{cases}$$

y

$$(49') \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial (\theta_1 - \alpha)} = a' \frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} + b' \frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}}, \\ \frac{\partial z}{\partial (\theta_2 - \beta)} = c' \frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} + d' \frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}}, \end{cases}$$

en donde $a, b, c, d, a', b', c', d'$ son unidades de γ_1 . De (49) se deduce que

$$\begin{aligned} & \min \left\{ v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} \right), v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}} \right) \right\} \\ & \geq \min \left\{ v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial (\theta_1 - \alpha)} \right), v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial (\theta_2 - \beta)} \right) \right\} \end{aligned}$$

y de (49') se deduce que

$$\begin{aligned} & \min \left\{ v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial (\theta_1 - \alpha)} \right), v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial (\theta_2 - \beta)} \right) \right\} \\ & \geq \min \left\{ v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} \right), v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} & \min \left\{ v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma_1^{\gamma_1}} \right), v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma_2^{\gamma_2}} \right) \right\} \\ & = \min \left\{ v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial (\theta_1 - \alpha)} \right), v_{P_1} \left(\frac{\partial z}{\partial (\theta_2 - \beta)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

siendo P_1 el divisor primo cuyo centro es Γ_1 . Ahora bien, como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial (\theta_1 - \alpha)} = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_1}$$

y

$$\frac{\partial \zeta}{\partial (\theta_2 - \beta)} = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_2},$$

se deduce que Γ_1 pertenece a $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \theta_1} \right]$ y a $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \theta_2} \right]$. Como la recíproca es también cierta, resulta que $d(\zeta^*)$ contiene a la función meromorfa producto de las funciones meromorfas primas comunes a las funciones meromorfas correspondientes a los ciclos

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \theta_1} \right] \cap \mathcal{M} \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \theta_2} \right] \cap \mathcal{M},$$

elevadas al menor de los exponentes con que figuran en cada una de las dos funciones meromorfas. Si (ζ_1, ζ_2) es una base trascendente, que sea base de uniformización para todos los ciclos de \mathcal{N} , el mismo razonamiento prueba que para todos los ciclos primos de \mathcal{N} , $d(\zeta^*)$ es un producto de funciones primas comunes a las funciones meromorfas correspondientes a los ciclos

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_1} \right] \cap \mathcal{N} \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_2} \right] \cap \mathcal{N},$$

elevadas al exponente mínimo con que figuren en ambas.

Q. E. D.

Al ciclo correspondiente a la función meromorfa $d\zeta^*$ lo representaremos por $[d\zeta^*]$ o por $[d\zeta]$, indistintamente, y a su divisor correspondiente por $(d\zeta^*)$ o $(d\zeta)$, y diremos que es el ciclo o divisor correspondiente a la $d\zeta$.

DEFINICIÓN 10.—Se llama *divisor correspondiente a una diferencial lineal*:

$$\omega = A_1 d\zeta_1 + \dots + A_r d\zeta_r,$$

y se representa por (ω) , al divisor

$$(\omega) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}_i^{\alpha_i},$$

en donde I es el conjunto de todos los divisores primos sobre \mathbf{P} ,

$$\alpha_i = \min \left\{ v_{\mathbf{P}_i} \left(A_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_{11}} + A_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial \eta_{11}} + \dots + A_r \frac{\partial \zeta_r}{\partial \eta_{11}} \right), \right. \\ \left. v_{\mathbf{P}_i} \left(A_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_{12}} + A_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial \eta_{12}} + \dots + A_r \frac{\partial \zeta_r}{\partial \eta_{12}} \right) \right\},$$

y (η_{11}, η_{12}) es una base de uniformización respecto del ciclo Γ_i , centro de \mathbf{P}_i .

Al ciclo centro de (ω) lo representaremos por $[\omega]$ y diremos que es el ciclo correspondiente a la diferencial ω .

Si (ω) es un divisor entero, se dice que ω es una diferencial de primera especie.

En el caso particular en que $\omega = d\zeta$, la demostración del lema 7 prueba la equivalencia de las dos definiciones dadas de $(d\zeta)$.

LEMA 8.—*El divisor (ω) , correspondiente a la diferencial lineal ω , es independiente de la base de uniformización empleada para su cálculo.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean (η_{11}, η_{12}) y (η'_{11}, η'_{12}) dos bases de uniformización respecto del ciclo primo Γ y sea \mathbf{P} el divisor con centro en Γ . Entonces será

$$\omega = A d\eta_{11} + B d\eta_{12} = A' d\eta'_{11} + B' d\eta'_{12}.$$

Por hipótesis, existen sitios γ pertenecientes a Γ para los que $(\eta_{11} - a_1, \eta_{12} - a_2)$ y $(\eta'_{11} - a'_1, \eta'_{12} - a'_2)$ son parámetros de uniformización independientes, en donde $a_1, a_2, a'_1, a'_2 \in K$. Sea \mathfrak{m} el ideal máximo de γ ; entonces

$$J = \frac{\partial(\eta_{11} - a_1, \eta_{12} - a_2)}{\partial(\eta'_{11} - a'_1, \eta'_{12} - a'_2)} = \frac{\partial(\eta_{11}, \eta_{12})}{\partial(\eta'_{11}, \eta'_{12})} \equiv \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}.$$

Sea

$$\alpha = \min \{ v_{\mathbf{P}}(A), v_{\mathbf{P}}(B) \} \quad \text{y} \quad \beta = \min \{ v_{\mathbf{P}}(A'), v_{\mathbf{P}}(B') \}.$$

De

$$A' = A \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1'} + B \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1'} \quad \text{y} \quad B' = A \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_2'} + B \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_2'}$$

se deduce que

$$A \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1'} + B \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1'} \equiv 0 \ (\mathbf{P}^\beta), \quad A \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_2'} + B \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_2'} \equiv 0 \ (\mathbf{P}^\beta),$$

de donde resulta que

$$A J \equiv 0 \ (\mathbf{P}^\beta) \quad \text{y} \quad B J \equiv 0 \ (\mathbf{P}^\beta)$$

y como $J \equiv 0 \ (\mathbf{P})$, por ser $J \equiv 0 \ (\mathfrak{m})$, y \mathbf{P}^β es ideal primario de \mathbf{P} , se deduce que $A \equiv 0 \ (\mathbf{P}^\beta)$ y $B \equiv 0 \ (\mathbf{P}^\beta)$, luego $\alpha \leq \beta$. Análogamente se ve que $\beta \leq \alpha$.

Q. E. D.

TEOREMA 6.—Si ω y ω' son dos diferenciales lineales se puede hallar una base trascendente (η_1, η_2) tal que

$$(\omega) = (H) (d \eta_1 + d \eta_2), \quad (\omega') = (M) (d \eta_1 + d \eta_2),$$

en donde H y M pertenecen a Σ .

DEMOSTRACIÓN.—Demostraremos previamente las dos proposiciones siguientes:

i) Se puede hallar una base trascendente (η_1, η_2) tal que si

$$(50) \quad \omega = H d \eta_1 + L d \eta_2, \quad \omega' = M d \eta_1 + N d \eta_2$$

se verifique para todo divisor primo \mathbf{P} de ω y de ω' que

$$V_{\mathbf{P}}(H) = V_{\mathbf{P}}(L) \quad \text{y} \quad V_{\mathbf{P}}(M) = V_{\mathbf{P}}(N).$$

ii) Si $(\omega) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}'$ y $(\omega') = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}'$, en donde \mathbf{D} y \mathbf{E} son divisores respecto de los cuales es (η_1, η_2) una base de uniformización, y \mathbf{D}' y \mathbf{E}' son divisores respecto de los cuales no es (η_1, η_2) base de uniformización. Si (η_1'', η_2'') es una base de uniformiza-

ción respecto de un divisor primo arbitrario \mathbf{P} , de \mathbf{D}' (análogamente se procede respecto de ω'), se verifica que

$$\begin{aligned} & \min \left\{ V_{\mathbf{P}} \left(H \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \eta_1''} + L \frac{\partial \eta_{22}}{\partial \eta_1''} \right), V_{\mathbf{P}} \left(H \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \eta_2''} + L \frac{\partial \eta_{22}}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \\ &= V_{\mathbf{P}}(H) \min \left\{ V_{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right), V_{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Demostración de i).—Efectuando en (50) la sustitución

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= a \eta'_{11} + b \eta'_{12}, \\ \eta_{22} &= c \eta'_{11} + d \eta'_{12}, \quad a, b, c, d \in K, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

se verifica que (η'_{11}, η'_{12}) es una base trascendente, y se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega &= \left(H \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \eta_1'} + L \frac{\partial \eta_{22}}{\partial \eta_1'} \right) d \eta_1' + \left(H \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \eta_2'} + L \frac{\partial \eta_{22}}{\partial \eta_2'} \right) d \eta_2' \\ &= (aH + cL) d \eta'_{11} + (bH + dL) d \eta'_{12}. \end{aligned}$$

Si \mathbf{p} es un divisor primo respecto del cual sea $V_{\mathbf{P}}(H) \neq V_{\mathbf{P}}(L)$, siempre que a, b, c y d sean todos distintos de cero, será

$$V_{\mathbf{P}}(aH + cL) = V_{\mathbf{P}}(bH + dL) = \min. \{ V_{\mathbf{P}}(H), V_{\mathbf{P}}(L) \}.$$

Como K posee infinitos elementos y el número de divisores primos de (ω) y (ω') es finito, siempre se podrán elegir a, b, c, d de modo que se verifique i).

Demostración de ii).—Supongamos que (η_{11}, η_{22}) es una base trascendente que cumple las condiciones de i) y que \mathbf{p} y (η_1'', η_2'') tienen el significado del enunciado de ii). El exponente de \mathbf{p} en (ω) será:

$$(51) \quad \min \left\{ V_{\mathbf{P}} \left(H \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \eta_1''} + L \frac{\partial \eta_{22}}{\partial \eta_1''} \right), V_{\mathbf{P}} \left(H \frac{\partial \eta_{11}}{\partial \eta_2''} + L \frac{\partial \eta_{22}}{\partial \eta_2''} \right) \right\}.$$

Pongamos

$$\begin{cases} \eta_{11} = a_i \eta_1^{(i)} + b_i \eta_2^{(i)}, & a_i \neq 0, b_i \neq 0, c_i \neq 0, d_i \neq 0, \\ \eta_{22} = c_i \eta_1^{(i)} + d_i \eta_2^{(i)}, & a_i, b_i, c_i, d_i \in K, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix} \neq 0$$

y

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces (51) se escribirá en la forma:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ V_p \left(H \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1''} + L \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1''}, V_p \left(H \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_2''} + L \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ V_p \left[H \left(a_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} + b_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right) + L \left(c_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} + d_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right) \right], \right. \\ & \quad \left. V_p \left[H \left(a_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} + b_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) + L \left(c_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} + d_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por ser $\Delta \neq 0$ para una, por lo menos, de las i , $i = 1, 2, 3, 4$, se verificará que:

$$\begin{aligned} & V_p \left[H \left(a_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} + b_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right) + L \left(c_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} + d_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right) \right] \\ &= V_p(H) \left[\min \left\{ V_p \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right) \right\} \right], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & V_p \left[H \left(a_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} + b_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) + L \left(c_i \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} + d_i \frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) \right] \\ &= V_p(H) \left[\min \left\{ V_p \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (52) \quad & \min \left\{ V_p \left(H \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1''} + L \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1''}, V_p \left(H \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_2''} + L \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \\ &= V_p(H) \left[\min \left\{ V_p \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la proposición ii).

Por ser $\Delta \neq 0$, y con un razonamiento análogo, se deduce que

se pueden determinar a_i, b_i, c_i, d_i de modo que, además de verificarse (52), se verifique:

$$(53) \quad V_p(H) \left[\min \left\{ V_p \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1''} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_2''} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \right. \\ \left. = V_p(H) \left[\min \left\{ V_p \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_1''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right), V_p \left(\frac{\partial \eta_2^{(i)}}{\partial \eta_2''} \right) \right\} \right], \right.$$

De (52) y (53) se deduce que todo divisor primo de \mathbf{D}' figura con el mismo exponente en \mathbf{D}' que en $H(d\eta_1 + d\eta_2)$, y como esto también es cierto para los divisores primos de \mathbf{D} y la recíproca también es cierta en ambos casos, resulta que

$$(54) \quad (\omega) = (H)(d\eta_1 + d\eta_2).$$

Un razonamiento totalmente análogo con ω' conduce a

$$(54') \quad (\omega') = (M)(d\eta_1 + d\eta_2)$$

Q. E. D.

COROLARIO.—El conjunto formado por todos los divisores correspondientes a las diferenciales lineales es una clase de divisores equivalentes entre sí.

A la clase de los divisores (ciclos) correspondientes a las diferenciales lineales le llamaremos *clase lineal* de Σ , y al sistema lineal de sus divisores enteros, *sistema lineal* de Σ .

Si (ξ_1, ξ_2) es una base trascendente de Σ y A un elemento arbitrario de este cuerpo, a la expresión $\omega = A d\xi_1 d\xi_2$ se le llama *diferencial doble* respecto de la base (ξ_1, ξ_2) . Se dice que las diferenciales $A d\xi_1 d\xi_2$ y $B d\xi'_1 d\xi'_2$, respecto de las bases (ξ_1, ξ_2) y (ξ'_1, ξ'_2) , son iguales cuando

$$B = A \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\xi'_1, \xi'_2)}.$$

Dada una diferencial doble, $\omega = A d\xi_1 d\xi_2$, se llama *ciclo correspondiente a ella*, y se representa por $[\omega]$ al ciclo tal que si Γ es uno de sus factores primos y \mathbf{p} su divisor correspondiente; el exponente de Γ en $[\omega]$ es igual a $V_p(A)$, siendo (ξ_1, ξ_2) una base de uniformización en Γ . Al divisor cuyo centro en S es $[\omega]$ se le llama divisor correspondiente a ω y se representa por (ω) .

TEOREMA 7. — *El conjunto formado por los ciclos correspondientes a todas las diferenciales dobles es una clase de ciclos equivalentes entre sí.*

DEMOSTRACIÓN.—Vamos a demostrar, en primer lugar, que si $\omega = A d\xi_1 d\xi_2$, siendo (ξ_1, ξ_2) una base trascendente, se verifica que

$$(55) \quad (\omega) = (A) (d\xi_1 d\xi_2).$$

En efecto, si \mathfrak{p} es un divisor primo y Γ su ciclo correspondiente, pueden ocurrir dos casos: a) (ξ_1, ξ_2) es una base de uniformización de Γ . En este caso el exponente de \mathfrak{p} en (ω) es igual a $V_{\mathfrak{p}}(A)$ y el exponente de \mathfrak{p} en $(d\xi_1 d\xi_2)$ es cero. b) (ξ_1, ξ_2) no es base de uniformización en Γ . En este caso, si (ξ'_1, ξ'_2) es una base de uniformización en Γ , el exponente de \mathfrak{p} en (ω) será

$$V_{\mathfrak{p}} \left(A \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\xi'_1, \xi'_2)} \right)$$

y su exponente en $(d\xi_1 d\xi_2)$ será

$$V_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\xi'_1, \xi'_2)} \right),$$

con lo que queda probada (55).

Si ω y ω' son dos diferenciales dobles y (ξ_1, ξ_2) una base trascendente, será

$$\omega = A d\xi_1 d\xi_2, \quad \omega' = B d\xi_1 d\xi_2$$

y en virtud de (55):

$$(\omega) = (A) (d\xi_1 d\xi_2), \quad (\omega') = (B) (d\xi_1 d\xi_2).$$

Q. E. D.

A la clase de ciclos (divisores) correspondientes a todas las diferenciales dobles se le llama *clase canónica*, y al sistema de sus divisores enteros *sistema lineal canónico*. A la clase canónica la representaremos por \mathfrak{K} , a la clase diferencial lineal por \mathfrak{S} y a sus sistemas lineales correspondientes por $|\mathfrak{K}|$ y $|\mathfrak{S}|$, respectivamente.

7. Irregularidad y género geométrico de Σ . Género de una clase. Género lineal.—A cada modelo inicial P le corresponde un sistema diferencial lineal, que representaremos por $|\mathfrak{S}_P|$, y un sistema lineal canónico $|\mathfrak{K}_P|$. Los rangos de estos sistemas lineales son ≥ 0 , y, por tanto, existen modelos de Σ para los que dichos rangos son mínimos. El rango mínimo de $|\mathfrak{S}_P|$, cuando P recorre todos los modelos de Σ , se llama *irregularidad de Σ* . El valor mínimo de rango $|\mathfrak{K}_P|$, cuando P recorre todos los modelos de Σ , se llama *género geométrico de Σ* . La irregularidad será representada por q y el género geométrico por p_g .

Sean P_1 y P_2 modelos de Σ en los que rango $|\mathfrak{S}_P|$ y rango $|\mathfrak{K}_P|$ toman valores mínimos, respectivamente. Por consiguiente, se verifica que

$$\text{rango } |\mathfrak{S}_{P_1}| = q, \quad \text{rango } |\mathfrak{K}_{P_2}| = p_g.$$

LEMA 9.—Existen modelos P^* para los que se verifica que

$$(55) \quad \text{rango } |\mathfrak{S}_{P^*}| = q, \quad \text{y} \quad \text{rango } |\mathfrak{K}_{P^*}| = p_g.$$

Dos modelos que cumplan las condiciones (55) poseen el mismo sistema diferencial lineal y el mismo sistema canónico.

DEMOSTRACIÓN.—Sean \mathfrak{o}_1 y \mathfrak{o}_2 dos modelos afines de P_1 y P_2 , respectivamente. Se pueden determinar los elementos $\zeta_1, \dots, \zeta_\alpha$ de Σ de modo que si

$$\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}_1 \mathfrak{o}_2 [\zeta_1, \dots, \zeta_\alpha],$$

se verifique que las antiproyecciones $\mathfrak{o}_1 \rightarrow \mathfrak{o}^*$ y $\mathfrak{o}_2 \rightarrow \mathfrak{o}^*$ no posean puntos fundamentales en \mathfrak{o}_1 ni en \mathfrak{o}_2 . Entonces, todo ciclo de $|\mathfrak{S}_{\mathfrak{o}^*}|$ o de $|\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}^*}|$ será también ciclo de $|\mathfrak{S}_{\mathfrak{o}_1}|$ o de $|\mathfrak{K}_{\mathfrak{o}_2}|$, respectivamente.

Sean P_1^* y P_2^* dos modelos de Σ para los que son válidas las condiciones (55). Sean S_1 y S_2 los sistemas de modelos construidos a partir de P_1^* y P_2^* , respectivamente, como modelos iniciales; Γ_1 y Γ_2 los ciclos centros de un divisor primo arbitrario \mathbf{P} sobre S_1 y S_2 , respectivamente, y \mathfrak{o}_1 y \mathfrak{o}_2 dos modelos arbitrarios de $S_1 \mathbf{P}$ y $S_2 \mathbf{P}$, respectivamente. Si $\mathfrak{p}_1 = \mathbf{P} \cap \mathfrak{o}_1$ y $\mathfrak{p}_2 = \mathbf{P} \cap \mathfrak{o}_2$, será $\tau_{\mathbf{P}} = \mathfrak{o}_1 \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}_2 \mathfrak{p}_2$ y $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}_1 f_1$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{o}_2 f_2$, $f_1 \in \mathfrak{o}_1$, $f_2 \in \mathfrak{o}_2$.

Sea γ_1 un sitio primo perteneciente a Γ_1 ; es decir, γ_1 es el anillo completado del anillo local \mathfrak{S}_1 correspondiente a un punto \mathfrak{p}_{01} de \mathfrak{p}_1 . Sea \mathfrak{M}_1 el ideal de no unidades de \mathfrak{S}_1 ; $\mathfrak{o}'_i = \mathfrak{o}_i/\mathfrak{p}_i$, $i = 1, 2$; $\mathfrak{p}'_{01} = \mathfrak{p}_{01}/\mathfrak{p}_1$ y \mathfrak{p}'_{02} el punto homólogo de \mathfrak{p}'_{01} en la correspondencia $\mathfrak{o}'_1 \rightarrow \mathfrak{o}'_2$. Como \mathfrak{p}'_{0i} son puntos simples de \mathfrak{o}'_i , $i = 1, 2$, se verifica que

$$\mathfrak{o}'_1 \mathfrak{p}'_{01} = \mathfrak{o}'_2 \mathfrak{p}'_{02} = \mathfrak{S}'.$$

Sea \mathfrak{p}_{02} el ideal primo de \mathfrak{o}_2 correspondiente al punto \mathfrak{p}'_{02} de \mathfrak{p}_2 y pongamos

$$\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{o}_2 \mathfrak{p}_{02}, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{p}_{02}.$$

Se verifica que $\mathfrak{S}_2 \subset V_{\mathbf{P}}$. Como \mathfrak{p}_{02} es un punto simple de \mathfrak{p}_2 , será $\mathbf{P} \cap \mathfrak{S}_{02} = \mathfrak{S}_{02} f_2$, siendo f_2 un parámetro de uniformización de \mathfrak{S}_{02} . Como \mathfrak{S}' es un anillo local regular, si \mathfrak{M}' es su ideal de no unidades, será $\mathfrak{M}' = \mathfrak{S}' \varphi'$. Luego si

$$\varphi_2 \equiv \varphi'(\mathfrak{p}_2), \quad \varphi_1 \equiv \varphi'(\mathfrak{p}_1)$$

será

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{S}_1(f_1, \varphi_1) \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{S}_2(f_2, \varphi_2).$$

De $\mathfrak{S}_1 \subset V_{\mathbf{P}}$, $\mathfrak{S}_2 \subset V_{\mathbf{P}}$ se deduce que

$$f_2 = \frac{A}{B} f_1, \quad \varphi_2 = \frac{C}{D} \varphi_1; \quad A, B, C, D \in \mathfrak{o}_1; \quad B, D \equiv \neq 0(\mathfrak{p}_1).$$

Por tanto, (f_1, φ_1) es una base de uniformización para Γ_1 , y (f_2, φ_2) lo es para Γ_2 .

Sea ω una diferencial lineal arbitraria y sean α y β los exponentes de \mathbf{P} en (ω) , calculados sobre P_1^* y P_2^* , respectivamente. Sea

$$\omega = M d f_1 + N d \varphi_1, \quad \omega = P d f_2 + Q d \varphi_2.$$

Entonces será

$$\alpha = \min. \{ v_{\mathbf{P}}(M), v_{\mathbf{P}}(N) \}, \quad \beta = \min. \{ v_{\mathbf{P}}(P), v_{\mathbf{P}}(Q) \}.$$

De $f_2 = \frac{A}{B} f_1$ y $\varphi_2 = \frac{C}{D} \varphi_1$; se deduce que:

$$(56) \quad \begin{cases} M = P \frac{\partial \left(\frac{A}{B} \right)}{\partial f_1} f_1 + P \frac{A}{B} + Q \frac{\partial \left(\frac{C}{D} \right)}{\partial f_1} \varphi_1 \\ N = P \frac{\partial \left(\frac{A}{B} \right)}{\partial \varphi_1} f_1 + Q \frac{\partial \left(\frac{C}{D} \right)}{\partial \varphi_1} \varphi_1 + \frac{C}{D} Q. \end{cases}$$

Ahora bien, de $P = v_P f_1 = v_P f_2$ se deduce que $\frac{A}{B}$ es una unidad de v_P . Como $\varphi' \neq 0$, se deduce que $\varphi_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_2}$ y, por tanto, $\varphi_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, y como $\mathfrak{o}_2 \subset v_P$ será $v_P(\varphi_2) = 0$ y, por tanto,

$$v_P \left(\frac{C}{D} \varphi_1 \right) = 0;$$

pero como $\frac{C}{D}$ y φ_1 pertenecen a v_P , será $v_P \left(\frac{C}{D} \right) = 0$.

Por consiguiente,

$$\frac{\partial \left(\frac{A}{B} \right)}{\partial f_1}, \quad \frac{\partial \left(\frac{A}{B} \right)}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial \left(\frac{C}{D} \right)}{\partial f_1}, \quad \frac{\partial \left(\frac{C}{D} \right)}{\partial \varphi_1}$$

pertenecen también a v_P . Todo esto conduce a que

$$v_P(M) \geq \min. \{ v_P(P), v_P(Q) \}$$

y

$$v_P(N) \geq \min. \{ v_P(P), v_P(Q) \}.$$

Como el razonamiento es simétrico respecto de las dos expresiones $M df_1 + N d\varphi_1$ y $P df_2 + Q d\varphi_2$, resulta que $\alpha = \beta$.

Sea ahora $\omega = M d\xi_1 d\xi_2$ una diferencial doble de primera especie, y sean α y β los exponentes del divisor primo \mathfrak{P} en (ω) , calculados sobre P_1^* y P_2^* , respectivamente. Entonces, será:

$$\alpha = v_P(M) + v_P \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(f_1, \varphi_1)} = v_P(M) + v_P \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(f_2, \varphi_2)} + v_P \frac{\partial(f_2, \varphi_2)}{\partial(f_1, \varphi_1)},$$

y como

$$v_{\mathbf{P}} \frac{\partial (f_2, \varphi_2)}{\partial (f_1, \varphi_1)} = v_{\mathbf{P}} \left[\frac{A}{B} + \frac{\partial}{\partial f_1} \left(\frac{A}{B} \right) f_1 \right] \\ + v_{\mathbf{P}} \left[\frac{C}{D} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\frac{C}{D} \right) \varphi_1 \right] = 0,$$

resulta también en este caso que $\alpha = \beta$.

Q. E. D.

Los modelos que verifican la hipótesis del anterior lema 9 se llamarán *normalizados*. En lo que sigue se supondrá siempre que el modelo inicial es normalizado.

Las diferenciales cuyos ciclos pertenecen a $|\mathfrak{S}|$ o a $|\mathfrak{K}|$ se llaman de primera especie.

DEFINICIÓN 11.—Llamaremos ciclo (divisor) correspondiente a la diferencial lineal ω relativo a Γ , siendo Γ un ciclo irreducible, al ciclo $[\omega]_{\Gamma}$ (divisor $(\omega)_{\Gamma}$) obtenido del siguiente modo: Sea Γ' (\mathbf{P}') un ciclo irreducible arbitrario (divisor primo arbitrario), y (ξ, ζ) una base de uniformización de Γ' tal que ζ se anule sobre Γ (sobre \mathbf{P}); y sea $\omega = A d\xi + B d\zeta$, $A, B \in \Sigma$; entonces, el exponente de Γ' en $[\omega]_{\Gamma}$ (de \mathbf{P}' en $(\omega)_{\Gamma}$) es igual a $v_{\Gamma'}(A) = v_{\mathbf{P}'}(A)$.

Sea Γ un ciclo irreducible, \mathbf{P} su divisor primo correspondiente, $\Sigma' = k(\xi'_1, \dots, \xi'_n) = v_{\mathbf{P}}/\mathbf{P}$, η un elemento arbitrario de Σ , $\eta \equiv \eta'(\mathbf{P})$ y η' trascendente sobre k . Sea $(d\eta')$ el divisor de Σ' correspondiente a $d\eta'$.

LEMA 11.— $(d\eta') = (d\eta)_{\Gamma} \cap \Gamma$

DEMOSTRACIÓN.—Definamos una base (ξ, ζ) en el conjunto formado por todos los sitios primos de \mathfrak{S} con la condición de que en todo sitio γ contenido en Γ se verifique que ζ^{γ} se anula sobre Γ . Entonces, según hemos visto anteriormente, $(d\eta) = (d\eta^*)$. En el sitio γ de Γ , será:

$$(61) \quad \eta_{\gamma}^* = \frac{a_{1\gamma}^{\alpha_1} \dots a_{r\gamma}^{\alpha_r}}{b_{1\gamma}^{\beta_1} \dots b_{s\gamma}^{\beta_s}}$$

en donde $a_{i\gamma}$ y $b_{j\gamma}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$, son series de potencias en ξ^{γ} , ζ^{γ} . Como γ es un lugar de Γ , si $\xi^{\gamma} \equiv \xi'(\mathbf{P})$, a todo elemento de Σ' le corresponde una serie de potencias en ξ' con un número finito de potencias negativas. Sea \mathfrak{p} un modelo de Γ en

$\mathfrak{o} \in S_{\mathfrak{p}}$ y \mathfrak{p}_0 un punto de \mathfrak{p} , de anillo de cocientes $\mathfrak{S} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_0}$, cuyo anillo completado \mathfrak{S}^* es igual a γ . Sea \mathfrak{M} el ideal de no unidades de \mathfrak{S} y $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(\xi^\gamma, \zeta^\gamma)$. Entonces, (61) significa que si representamos por A_ν y B_ν la suma de los términos de $a_{1\gamma}^{\alpha_1} \dots a_{r\gamma}^{\alpha_r}$ y $b_{1\gamma}^{\beta_1} \dots b_{s\gamma}^{\beta_s}$ de exponentes iguales o menores que ν , se verifica que

$$(62) \quad \eta \cdot B_\nu - A_\nu \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}^{\nu+1}}, \quad \nu = 1, \dots$$

Sea $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}'_0}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{p}'_0 \mathfrak{S}'$. Entonces, como $\mathfrak{S}' \approx \mathfrak{S}/\mathfrak{p} \mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}' \approx \mathfrak{M}/\mathfrak{p} \mathfrak{S}$ y $\mathfrak{p} \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \zeta^\gamma$, resulta que $\mathfrak{M}' \nu \approx \mathfrak{M}^\nu/\mathfrak{p} \mathfrak{S}$. Luego, tomando en (62) clases de restos mód. $\mathfrak{p} \mathfrak{S}$, resulta que $\eta' B'_\nu - A'_\nu \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}'^{\nu+1}}$, $\nu = 1 \dots$, en donde A'_ν y B'_ν son los polinomios que resultan de hacer, en A_ν y B_ν , $\zeta = 0$ y sustituir ξ^γ por ξ' .

Esta última congruencia establece que

$$(63) \quad \eta' = \frac{a'_{1\gamma}{}^{\alpha_1} \dots a'_{r\gamma}{}^{\alpha_r}}{b'_{1\gamma}{}^{\beta_1} \dots b'_{s\gamma}{}^{\beta_s}},$$

en donde $a'_{i\gamma}$ y $b'_{j\gamma}$ son el resultado de hacer en $a_{i\gamma}$ y $b_{j\gamma}$, respectivamente, $\zeta^\gamma = 0$ y de sustituir ξ^γ por ξ' , $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$. Poniendo

$$a_{1\gamma}^{\alpha_1} \dots a_{r\gamma}^{\alpha_r} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma F, \quad F \in \gamma$$

$$b_{1\gamma}^{\beta_1} \dots b_{s\gamma}^{\beta_s} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma G, \quad G \in \gamma$$

se verifica que

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} d \eta_{\gamma}^* &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma G \right)^{-2} \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma G \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i \xi^{\gamma \varepsilon_i - 1} + \zeta^\gamma \frac{\partial F}{\partial \xi^\gamma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma F \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i b_i \xi^{\gamma \varepsilon_i - 1} + \zeta^\gamma \frac{\partial G}{\partial \xi^\gamma} \right) \right] d \xi^\gamma \\ &\quad + \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma G \right) \left(F + \zeta^\gamma \frac{\partial F}{\partial \xi^\gamma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi^{\gamma \varepsilon_i} + \zeta^\gamma F \right) \left(G + \zeta^\gamma \frac{\partial G}{\partial \xi^\gamma} \right) \right] d \zeta^\gamma \right\}, \end{aligned} \right.$$

de donde, en virtud de (63), es

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} d\eta' &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi'^{e_i} \right)^{-2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi'^{e_i} \sum_{i=1}^{\infty} e_i a_i \xi'^{e_i-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi'^{e_i} \sum_{i=1}^{\infty} e_i' b_i \xi'^{e_i-1} \right] d\xi'. \end{aligned} \right.$$

De (64) se deduce que el exponente de γ en $(d\eta)_{\Gamma} \cap \Gamma$ es igual al exponente mínimo de ξ^{γ} en

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi'^{e_i} \right)^{-2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i \xi'^{e_i} \sum_{i=1}^{\infty} e_i a_i \xi'^{e_i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi'^{e_i} \sum_{i=1}^{\infty} e_i' b_i \xi'^{e_i-1} \right]$$

y llamando γ' al anillo completado de \mathfrak{S}' , el exponente de γ' en $(d\eta')$ es igual al exponente mínimo de ξ' en (65), luego ambos exponentes son iguales y, por tanto, queda demostrado el lema.

Se llama *género de un ciclo irreducible* Γ al género de cualquiera de sus modelos.

TEOREMA 9.—Sea Γ un ciclo irreducible de género g , y \mathfrak{K} la clase canónica; se verifica que

$$i(\Gamma \cap \Gamma \mathfrak{K}) = 2g - 2.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sean \mathbf{P} y Φ^* el divisor y la función holomorfa, respectivamente, correspondientes a Γ , y η un elemento de $v_{\mathbf{P}}$ tal que, si $\eta \equiv \eta'(\mathbf{P})$, η' sea trascendente sobre k . Sea $\mathfrak{o} \in S_{\mathbf{P}}$ y \mathfrak{p} el centro de \mathbf{P} sobre \mathfrak{o} . Sea ξ un elemento arbitrario tal que $\xi \equiv 0(\mathbf{P})$, $\xi \equiv 0(\mathbf{P}^2)$. Por consiguiente, ξ es un parámetro de uniformización para casi todos los puntos de \mathfrak{p} . Sea ζ otro elemento de \mathbf{P} tal que $\zeta \equiv 0(\mathbf{P}^2)$ y tal que en todo punto de \mathfrak{p} en el que ξ no sea coordenada de uniformización, lo sea ζ y recíprocamente. Además, supondremos elegidos ξ y ζ de modo que exista un elemento ξ_1 de Σ tal que (ξ_1, ξ) y (ξ_1, ζ) sean coordenadas de uniformización para todo ciclo primo de $[d\eta]_{\Gamma}$ y de $[d\eta]$ que tenga un punto común con Γ y que (ξ_1, ξ) sean coordenadas de uniformización para todo ciclo de $[d\eta d\zeta]$. Consideremos los ciclos:

$$(66) \quad [d\eta]_{\Gamma} [d\xi] \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right],$$

en el que $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ se calcula mediante la ecuación irreducible

$$\varphi(\zeta, \xi, \xi_1) = 0,$$

y

$$(67) \quad [d\eta d\zeta].$$

De

$$(67') \quad \left\{ \begin{array}{l} d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi \\ d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} d\xi, \end{array} \right.$$

se deduce que

$$(68) \quad d\eta = \frac{1}{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \frac{\partial(\eta, \zeta)}{\partial(\xi_1, \xi)} d\xi_1 + \frac{\frac{\partial \eta}{\partial \xi}}{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} d\zeta.$$

Sea Γ' un ciclo primo de $[d\eta]_{\Gamma}$. Puesto que ξ y ζ son coordenadas de uniformización en Γ' , se verifica que

$$v_{\Gamma'}(d\xi) = v_{\Gamma'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) = 0,$$

y Γ' posee el mismo exponente en (66) que en $[d\eta]_{\Gamma}$. Por tanto, el exponente de Γ' en (66) es igual, teniendo en cuenta (68), a

$$v_{\Gamma'}\left(\frac{\partial(\eta, \zeta)}{\partial(\xi_1, \xi)}\right) - v_{\Gamma'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right);$$

y como

$$v_{\Gamma'}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) = 0,$$

es igual a su exponente en (67).

Sea Γ'' un ciclo primo de $[d\xi]$. Como ξ es una coordenada de uniformización para todo ciclo de (67), se deduce que el exponen-

te de Γ'' en (67) es igual a cero. Por la misma razón, es cero el exponente de Γ'' en $[d\eta]_{\Gamma}$. El exponente de Γ'' en $[d\xi]$ es igual a

$$\min. \left\{ v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right) + v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi_1} \right) \right\};$$

si fuese

$$v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right) > v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi_1} \right)$$

podríamos elegir $\xi'_1 = \xi_1 + a\zeta$, de modo que

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial \xi'_1} d\xi'_1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right)_{\xi'_1, \zeta} d\zeta$$

(en donde $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right)_{\xi'_1, \zeta}$ quiere indicar que la derivada parcial se calcula en la ecuación irreducible $g(\xi, \xi'_1, \zeta) = 0$, mientras que $\frac{\partial \xi}{\partial \zeta}$, sin más referencia, representa la derivada calculada en $\varphi(\zeta, \xi, \xi_1) = 0$). Entonces se verifica que

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right)_{\xi'_1, \zeta} = -a \frac{\partial \xi}{\partial \xi'_1} + \frac{\partial \xi}{\partial \zeta}$$

y se puede elegir a de modo que

$$v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right)_{\xi'_1, \zeta} = v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi'_1} \right).$$

Por consiguiente, podemos suponer que ξ_1 se ha elegido con esta condición. Entonces, el exponente de Γ'' en $[d\xi]$ es igual a $v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right)$, en donde $\frac{\partial \xi}{\partial \zeta}$ se calcula en $\varphi(\xi, \zeta, \xi_1) = 0$, y por tanto, se verifica que

$$v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right) = -v_{\Gamma''} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right),$$

es decir, que el exponente de Γ'' en (66) es también cero.

Sea ahora Γ''' un ciclo primo de $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]$ que tiene un sitio común con Γ . Si (ζ, ξ) fuesen coordenadas de uniformización para Γ''' , el exponente de este ciclo en $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]$ sería cero. Por consi-

guiente, se pueden presentar dos casos: a) ζ no es coordenada de uniformización en Γ''' . b) ξ no es coordenada de uniformización en Γ''' . En el primer caso, como Γ''' tiene un sitio común con Γ , sería ξ coordenada de uniformización de Γ''' y en b) lo sería ζ . En el caso a), por ser ξ coordenada de uniformización de Γ''' no pertenece este ciclo a $[d\xi]$. Como ζ no es coordenada de uniformización de Γ''' , se deduce que Γ''' no pertenece a $[d\eta]_{\Gamma}$ ni a $[d\eta]$. Se puede elegir ξ_1 de modo que en (67) se verifique

$$v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} \right) \geq v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right), \quad v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \right) \geq v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)$$

y como

$$v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \min. \left\{ v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \right), v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right\} = 0,$$

resulta que

$$v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \right) = v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Por consiguiente,

$$v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial (\eta, \zeta)}{\partial (\xi_1, \xi)} \right) = v_{\Gamma'''} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right).$$

En el caso b), Γ''' sería ciclo de $[d\xi]$, y ya hemos tratado este caso.

Resulta, por consiguiente, que todo ciclo primo de (66) posee el mismo exponente en (66) que en (67). Recíprocamente, sea Γ_1 un ciclo primo de (67). Si ζ no fuese coordenada de uniformización de Γ_1 , como ξ sí que lo es, resultaría que Γ_1 pertenecería a $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]$ y, por lo que antecede, su exponente en (67) sería igual a su exponente en (66). Si ζ es una coordenada de uniformización de Γ_1 , el exponente de Γ_1 en $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]$ es igual a cero, su exponente en $[d\xi]$ es también nulo y su exponente en $[d\eta]_{\Gamma}$ es igual a

$$v_{\Gamma_1} \left[\frac{1}{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \frac{\partial (\eta, \zeta)}{\partial (\xi_1, \xi)} \right] = v_{\Gamma_1} \left[\frac{\partial (\eta, \zeta)}{\partial (\xi_1, \xi)} \right].$$

Por consiguiente, hemos demostrado que

$$(69) \quad [d\eta]_{\Gamma} [d\xi] \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right] = [d\eta d\zeta].$$

Del lema 11 y de (69) se deduce que

$$(d\eta') = [d\eta]_{\Gamma} \cap \Gamma = \left(\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]^{-1} \cap \Gamma \right) ([d\xi]^{-1} \cap \Gamma) ([d\eta d\zeta] \cap \Gamma).$$

Como $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \in \Sigma$, resulta que

$$i \left(\left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right]^{-1} \cap \Gamma \right) = 0.$$

Por consiguiente, resulta

$$\text{grado}(d\eta') = i(\mathfrak{K} \cap \Gamma) - i([d\xi] \cap \Gamma),$$

siendo \mathfrak{K} la clase canónica. Sea ξ^* la función meromorfa correspondiente al elemento ξ de Σ . Como $\xi \equiv 0(\mathbf{P})$ y $\xi \equiv 0(\mathbf{P}^2)$, será

$$\xi^* = \Phi^* \psi^*, \quad \psi^* \equiv 0(\Phi^*)$$

y

$$[d\xi] = [d\xi^*] = [\Phi^* d\psi^* + \psi^* d\Phi^*]$$

luego

$$i([d\xi] \cap \Gamma) = i([\Psi^* d\Phi^*] \cap \Gamma) = i([\Psi^*] \cap \Gamma) + i([d\Phi^*] \cap \Gamma).$$

Ahora bien, de $\xi^* = \Phi^* \psi^*$ y $\xi \in \Sigma$ resulta que $[\Phi^*] \sim [\psi^*]^{-1}$, y como $[\Phi^*] = \Gamma$, se obtiene que $[\psi^*] \sim \Gamma^{-1}$, luego

$$i([\Psi^*] \cap \Gamma) = i(\Gamma^{-1} \cap \Gamma) = -i(\Gamma \cap \Gamma).$$

Por consiguiente, obtenemos

$$2g - 2 = \text{grado}(d\eta') = i(\Gamma \mathfrak{K} \cap \Gamma) - i([d\Phi^*] \cap \Gamma).$$

Pero, como Φ^* es parámetro de uniformización en todo sitio perteneciente a Γ , resulta que

$$i([d\Phi^*] \cap \Gamma) = 0.$$

Q. E. D.

Si $\Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_\alpha$, siendo $\Gamma_i \not\equiv \Gamma_j$ cuando $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, \alpha$, se llama *género*, g , de Γ al número

$$g = \sum_{i=1}^{\alpha} (g_i - 1) + 1,$$

en donde g_i es el género de Γ_i , $i = 1, \dots, \alpha$.

COROLARIO.—Si $\Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_\alpha$, $\Gamma_i \not\equiv \Gamma_j$, $i, j = 1, \dots, \alpha$, y g es el género de Γ , se verifica que

$$i(\mathfrak{K} \Gamma \cap \Gamma) = 2g - 2 + 2 \sum_{j < l} i(\Gamma_j \cap \Gamma_l).$$

El número $g_\Gamma = \frac{1}{2} i(\Gamma \mathfrak{K} \cap \Gamma) + 1$ se llama *género de la clase* $[\Gamma]$. Por consiguiente, el género de la clase $[\Gamma]$ es igual al género de Γ cuando Γ es irreducible o cuando sus componentes no poseen un sitio común. El género de la clase canónica se llama *género lineal de* Σ , g_1 . El grado de la clase canónica se representa por g_2 . Entonces resulta:

$$g_1 = g_2 + 1.$$

§ 8. **El género aritmético.**—Si $[\Delta]$ es una clase de ciclos arbitraria, se llama clase complementaria de $[\Delta]$, y la representaremos por $[\Delta']$, a la clase tal que $\Delta \Delta' \in \mathfrak{K}$. Pondremos

$$(71) \quad j[\Delta] = j[\Delta'] = r \cdot |\Delta| + r \cdot |\Delta'| + \frac{1}{2} i(\Delta \cap \Delta'),$$

en donde $r|\Delta|$ y $r|\Delta'|$ representan los rangos de los sistemas lineales completos $|\Delta|$ y $|\Delta'|$, respectivamente.

En el caso particular de la clase canónica se verifica que $|\mathfrak{K}'| = 1$, de donde

$$r|\mathfrak{K}'| = 1, \quad i(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}') = 0,$$

luego:

$$(72) \quad j[\mathfrak{K}] = r|\mathfrak{K}| + 1 = p_g + 1.$$

Sea Γ un ciclo irreducible arbitrario de género g , y Δ un ciclo totalmente arbitrario. En virtud de (26), § 5, es

$$r|\Delta \Gamma| = r|\Delta| + r|\Delta \Gamma \cap \Gamma| - \text{def}_\Gamma |\Delta \Gamma|$$

y

$$r | (\Delta \Gamma)' | = r | \Delta' \Gamma^{-1} | = r | \Delta' | - r | \Delta' \cap \Gamma | + \text{def}_\Gamma | \Delta' |,$$

de donde

$$\begin{aligned} j [\Delta \Gamma] &= r | \Delta \Gamma | + r | (\Delta \Gamma)' | + \frac{1}{2} i (\Delta \Gamma \cap \Delta' \Gamma^{-1}) = r | \Delta | \\ &+ r | \Delta \Gamma \cap \Gamma | - \text{def}_\Gamma | \Delta \Gamma | + r | \Delta' | - r | \Delta' \cap \Gamma | + \text{def}_\Gamma | \Delta' | \\ &+ \frac{1}{2} i (\Delta \Gamma \cap \Delta' \Gamma^{-1}) = j [\Delta] + r | \Delta \Gamma \cap \Gamma | - r | \Delta' \cap \Gamma | \\ &- \text{def}_\Gamma | \Delta \Gamma | + \text{def}_\Gamma | \Delta' | + \frac{1}{2} i (\Gamma \cap \Delta' \Gamma^{-1}) - \frac{1}{2} i (\Delta \cap \Gamma) \\ &= j [\Delta] + r | \Delta \Gamma \cap \Gamma | - r | \Delta' \cap \Gamma | - \text{def}_\Gamma | \Delta \Gamma | + \text{def}_\Gamma | \Delta' | \\ &+ g - 1 - i (\Delta \Gamma \cap \Gamma), \end{aligned}$$

ya que, en virtud del teorema 9, es

$$\frac{1}{2} i (\Gamma \cap \Gamma \mathfrak{K}) = g - 1.$$

En virtud de este teorema, $[\Gamma \cap \Gamma \mathfrak{K}]$ es la clase canónica de divisores de Γ y como

$$[\Delta \Gamma \cap \Gamma] [\Delta' \cap \Gamma] = [\Gamma \mathfrak{K} \cap \Gamma],$$

resulta que $[\Delta' \cap \Gamma]$ es la clase complementaria de $[\Delta \Gamma \cap \Gamma]$. Ahora bien, por el teorema de Riemann-Roch para las curvas, se verifica que

$$r | \Delta \Gamma \cap \Gamma | = i (\Delta \Gamma \cap \Gamma) - g + 1 + r | \Delta' \cap \Gamma |,$$

y llevando este valor a la expresión anterior, se obtiene:

$$(73) \quad j [\Delta \Gamma] = j [\Delta] - \text{def}_\Gamma | \Delta \Gamma | + \text{def}_\Gamma | \Delta' |.$$

En virtud del teorema 5, siempre se puede elegir Γ de modo que $\text{def}_\Gamma | \Delta' | = 0$, con lo que (73) se reduce a

$$(74) \quad j [\Delta \Gamma] = j [\Delta] - \text{def}_\Gamma | \Delta \Gamma |.$$

En el caso particular en que $[\Delta] = \mathfrak{K}$, al número $j [\mathfrak{K} \Gamma] - 1$ se le llama *género aritmético* de Σ y se le representa por p_a :

$$(75) \quad p_a = j [\mathfrak{K} \Gamma] - 1,$$

en donde Γ es cualquier ciclo irreducible. Para probar la inva-

riancia birracional de p_a y justificar esta definición, observaremos que de (75), (74) y (72) resulta que

$$p_a = p_g - \text{def}_\Gamma | \mathfrak{K} \Gamma |$$

y la demostración se reduce al teorema 8 en virtud del siguiente

TEOREMA 10.— $\text{def}_\Gamma | \mathfrak{K} \Gamma | = g$.

DEMOSTRACIÓN.—Se verifican las proposiciones siguientes:

i) Si ω es una diferencial lineal de Σ de primera especie, existe un ciclo irreducible Γ tal que si \mathbf{P} es su divisor primo correspondiente y $\Sigma' = v_{\mathbf{P}}/\mathbf{P}$, existe una diferencial de primera especie ω' de Σ' tal que $[\omega] \cap \Gamma = (\omega')$.

ii) Todo ciclo de $[\Gamma \mathfrak{K}] \cap \Gamma$ es un ciclo canónico de Σ' .

iii) Dada una diferencial ω'' de primera especie de Σ' , existe un ciclo $[G] \Theta$ perteneciente a $\Gamma \mathfrak{K}$, y una diferencial lineal $F \omega$ de Σ , tal que

$$[G] \Theta \cap \Gamma = [F \omega] \cap \Gamma = [\omega''].$$

iv) Todo ciclo entero de $[\Gamma \mathfrak{K}]$ corta a Γ en un ciclo canónico y entero de Σ' .

v) Un divisor correspondiente a una diferencial de Σ' de primera especie no puede ser simultáneamente intersección de Γ con un ciclo de Σ correspondiente a una diferencial lineal de primera especie y con un ciclo entero de $[\Gamma \mathfrak{K}]$.

vi) Si (ω'') es un divisor correspondiente a una diferencial dada ω'' de Σ' de primera especie, existe un ciclo entero de $\Gamma \mathfrak{K}$, o un ciclo de una diferencial lineal de primera especie, cuya intersección con Γ es (ω'') .

Demostración de i).—Sea

$$(\omega) = \prod_{i=1}^v \mathbf{P}_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, v;$$

\mathbf{P} un modelo de $S_{(\omega)}$; \mathfrak{o} un modelo canónico afin de \mathbf{P} , y \mathfrak{p}_i el centro de \mathbf{P}_i en \mathfrak{o} . Sea (η_1, η_2) una base para el conjunto de todos los sitios, y $\omega = A^* d \eta_1 + B^* d \eta_2$, en donde A^* y B^* son funciones holomorfas, ya que ω hemos supuesto que era de primera especie. Sea \mathbb{C} la curva cuyas componentes son las curvas \mathfrak{p}_i , $i = 1, \dots, v$. Se puede elegir un polinomio homogéneo $F(x)$, de grado suficientemente grande d , tal que si g es el grado de \mathbb{C} , la intersección de $\mathbf{P}F$ con \mathbb{C} contenga a puntos preasignados de esta última curva y que en cada uno de estos puntos $F(x)$ perte-

nezca a un ideal mínimo primo de su anillo local correspondiente. Entonces, elegimos d g puntos de C que sean intersección de C con una curva $P F(x)$, donde $F(x)$ es de grado d . En el anillo local de cada uno de estos puntos elegimos un ideal mínimo primo distinto del ideal ampliado a ellos del ideal \mathfrak{p}_i de la curva que contiene al punto considerado. Se puede además suponer [2] que $P F(x)$ es un ideal primo; al ciclo y divisor correspondientes a $P F$ los representaremos por Γ y \mathbf{P} , respectivamente. Sea $\Sigma' = \nu_{\mathbf{P}}/\mathbf{P}$ y γ un sitio común a Γ y $[\omega]$; al divisor primo de Σ' , cuyo centro es γ , lo representaremos por \mathfrak{p}' . En virtud del teorema 6, se pueden elegir parámetros de uniformización (η_1, η_2) en γ tales que si

$$\omega = A d \eta_1 + B d \eta_2,$$

sea $V_{\mathfrak{p}_i}(A) = V_{\mathfrak{p}_i}(B)$ en todo sitio común a Γ y $[\omega]$. Entonces será:

$$\begin{aligned} A_{\gamma}^* &= [a_1(\eta_1, \eta_2) + a_2(\eta_1, \eta_2) + \dots]^{\nu} (u_a + \dots) \\ B_{\gamma}^* &= [a_1(\eta_1, \eta_2) + a_2(\eta_1, \eta_2) + \dots]^{\nu} (u_b + \dots), \end{aligned}$$

en donde $a_i(\eta_1, \eta_2)$ es una forma de grado i en η_1, η_2 con coeficientes en K^* , $a_1(\eta_1, \eta_2) \neq 0$ y $u_a, u_b \in K^*$, $u_a, u_b \neq 0$, $\nu = \nu_{\mathbf{P}}(A) = \nu_{\mathbf{P}}(B)$. El exponente de \mathfrak{p}' en $(\omega) \cap \mathbf{P}$ será igual a

$$(76) \quad \nu \cdot \nu_{\mathfrak{p}'}(a_1(\eta'_1, \eta'_2) + a_2(\eta'_1, \eta'_2) + \dots),$$

siendo

$$\eta_1 \equiv \eta'_1(\mathbf{P}), \quad \eta_2 \equiv \eta'_2(\mathbf{P}).$$

Sea

$$\omega' = A' d \eta'_1 + B' d \eta'_2, \quad A \equiv A'(\mathbf{P}), \quad B \equiv B'(\mathbf{P}).$$

Si ρ' es un parámetro de uniformización para \mathfrak{p} , será

$$\eta'_i = \rho'(t'_i + \dots), \quad t'_i \in K^*,$$

no anulándose una al menos de las t'_1, t'_2 . Además, por las condiciones impuestas a $F(x)$, se verifica que $u_a \eta_1 + u_b \eta_2 \equiv \equiv 0(\mathbf{P})$, lo que implica que $u_a t'_1 + u_b t'_2 \neq 0$ y, por tanto, el exponente de \mathfrak{p}' en (ω') es igual a (76), con lo que queda probada i).

ii) Es una consecuencia inmediata de la demostración del teorema 9.

Demostración de iii).—Sea ω'' una diferencial de primera especie de Σ' . Si ω y ω' son las diferenciales de i), existirá un ele-

mento $g' \in \Sigma'$ tal que $(g' \omega') = (\omega'')$ y si $g \equiv g'(\mathbf{P})$ será $(g \omega) \cap \Gamma = (\omega'')$. Sea Θ un ciclo arbitrario de $[\Gamma \mathfrak{K}]$ y $\theta = \Theta \cap \Gamma$; como, en virtud de ii), θ es un divisor canónico de Σ' , existirá un elemento g de Σ' tal que $(g) \theta = \omega''$. Si $G \equiv g(\mathbf{P})$, $G \in \Sigma$, será

$$[G] \Theta \cap \Gamma = \omega''.$$

iv) Es consecuencia de la proposición más general que establece que la intersección de un ciclo primo con un ciclo entero es un ciclo entero, la cual se deduce inmediatamente de la definición de intersección de dos ciclos.

Demostración de v).—Sea (ω'') un divisor canónico de Σ' de primera especie y sean $[\omega]$ y Θ dos ciclos enteros de Σ , cuyas intersecciones con Γ sean (ω'') , siendo ω una diferencial lineal de primera especie y Θ perteneciente a $[\Gamma \mathfrak{K}]$. De la demostración del teorema 9 y del corolario al teorema 6, se deduce que $\Theta \sim [\omega]_{\Gamma}$ de donde resulta que

$$\text{grado}([\omega]_{\Gamma} \cap \Gamma) = \text{grado}([\omega] \cap \Gamma) = \text{grado}(\omega'').$$

Ahora bien, como el exponente de todo ciclo irreducible en $[\omega]_{\Gamma}$ no es menor que su exponente en $[\omega]$, resultaría que $[\omega]_{\Gamma} = [\omega]$ (ya que Γ es un ciclo correspondiente a un ideal principal). Pero si (ξ, η) es una base trascendente arbitraria, sería

$$[\omega] \sim [d\xi], [\omega]_{\Gamma} \sim \Gamma [d\xi d\eta],$$

de donde

$$[d\xi] \sim \Gamma [d\xi d\eta].$$

Pero, como existen infinitos ciclos que no son equivalentes entre sí y que verifican, sin embargo, las condiciones impuestas a Γ , si Γ_1 fuese uno de ellos, es decir, $\Gamma \sim \Gamma_1$, el mismo razonamiento conduciría a que

$$[d\xi] \sim \Gamma_1 [d\xi d\eta],$$

que, en unión de la equivalencia anterior, proporcionaría la contradicción $\Gamma \sim \Gamma_1$.

Sea \mathcal{Q} el sistema lineal formado por el conjunto de todos los elementos f de Σ tales que $[f] \Delta$ es el ciclo de una diferencial lineal de primera especie, siendo Δ el ciclo de una diferencial lineal. Sea \mathcal{Q}_1 el conjunto de todos los elementos g de Σ tales que $[g] \Delta_1$

es un ciclo entero perteneciente a $\Gamma \mathfrak{K}$, siendo \mathfrak{K} un ciclo canónico de Σ , y Δ_1 un ciclo tal que

$$\Delta_1 \cap \Gamma = \Delta \cap \Gamma.$$

Si f_1, \dots, f_r es una base de \mathfrak{L} , y g_1, \dots, g_s un base de \mathfrak{L}_1 , de lo que antecede se deduce que siempre se puede elegir Γ , de modo que si \mathbf{P} es el divisor primo con centro en Γ y

$$f_i \equiv f'_i(\mathbf{P}), \quad i \equiv 1, \dots, r; \quad g_i \equiv g'_i(\mathbf{P}), \quad i = 1, \dots, s,$$

sean las f'_i , $i = 1, \dots, r$ linealmente independientes, y lo mismo suceda a las g'_i , $i = 1, \dots, s$. También las $(f'_1, \dots, f'_r, g'_1, \dots, g'_s)$ son linealmente independientes, ya que, en caso contrario, si fuese, por ejemplo,

$$\lambda_1 f'_1 + \dots + \lambda_r f'_r + \mu_1 g'_1 + \dots + \mu_s g'_s = 0$$

y si δ fuese el divisor intersección de Γ con Δ y Δ_1 , sería

$$(\lambda_1 f'_1 + \dots + \lambda_r f'_r) \delta = (-\mu_1 g'_1 - \dots - \mu_s g'_s) \delta$$

y el primer divisor sería intersección con Γ de un divisor de $|\Delta|$, mientras que el segundo sería intersección de un divisor de $|\Delta_1|$, en contradicción con v). Como $r = \text{rango } |\mathfrak{C}|$ y $s = \text{rango } |\Gamma \mathfrak{K}|$, resulta que llamando \mathfrak{k} a la clase canónica de Γ , será

$$\text{rango } |\mathfrak{k}| \geq \text{rango } |\mathfrak{C}| + \text{rango } |\Gamma \mathfrak{K}|.$$

Ahora bien, por vi) es

$$\text{rango } |\mathfrak{k}| \leq \text{rango } |\mathfrak{C}| + \text{rango } |\Gamma \mathfrak{K}|,$$

de donde resulta que

$$\text{rango } |\mathfrak{k}| = \text{rango } |\mathfrak{C}| + \text{rango } |\Gamma \mathfrak{K}|$$

y

$$\text{def}_\Gamma |\Gamma \mathfrak{K}| = \text{rango } |\mathfrak{k}| - \text{rango } |\Gamma \mathfrak{K}| = \text{rango } |\mathfrak{C}| = q.$$

§ 9. El teorema de Riemann-Roch.

LEMA 12 (de Jung).—Sea Γ un ciclo irreducible de género g , y $[T]$ una clase de ciclos tal que

$$v = i(T \cap \Gamma) > i(\Gamma \cap \Gamma \mathfrak{K}),$$

lo que equivale a decir, en virtud del teorema de Riemann-Roch para las curvas, que

$$v > 2(g-1).$$

Entonces se verifica que

$$j[T] \leq j[T\Gamma^{-1}].$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} j[T] - j[T\Gamma^{-1}] &= r|T| + r|T^*| + \frac{1}{2}i(T \cap T^*) \\ &\quad - r|T\Gamma^{-1}| - r|T^*\Gamma| - \frac{1}{2}i(T\Gamma^{-1} \cap T^*\Gamma) \\ &= r|T| - r|T\Gamma^{-1}| + r|T^*| - r|T^*\Gamma| \\ &\quad - \frac{1}{2}i(T \cap \Gamma) + \frac{1}{2}i(\Gamma \cap T^*\Gamma), \end{aligned}$$

en donde T^* es la clase complementaria de T . Como Γ es un ciclo entero, se verifica que $r|T^*\Gamma| \geq r|T^*|$, luego

$$\begin{aligned} j[T] - j[T\Gamma^{-1}] &\leq r|T| - r|T\Gamma^{-1}| - i(T \cap \Gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2}i(\Gamma \cap \Gamma \mathfrak{K}) = r|T| - r|T\Gamma^{-1}| - v + g - 1. \end{aligned}$$

Todo se reduce, por tanto, a probar que

$$(77) \quad r|T| - r|T\Gamma^{-1}| \leq v - g + 1.$$

Distinguiremos dos casos: a) $r|T| \leq g$, b) $r|T| > g$.

a) Teniendo en cuenta la hipótesis del lema, resulta que

$$r|T| - r|T\Gamma^{-1}| \leq r|T| \leq g \leq v - g + 1,$$

con lo que queda probado (77) en el presente caso.

b) Sea \mathbf{P} el divisor primo con centro en Γ , y $\Sigma' = V_{\mathbf{P}}/\mathbf{P}$ el cuerpo de funciones sobre Γ . De la teoría de funciones algebraicas de una variable (véase p. ej. [4]), se sabe que existen en Σ' divisores \mathbf{a}_0 no especiales de orden g , es decir, tales que $r|\mathbf{a}'_0| = 0$, siendo \mathbf{a}'_0 un divisor complementario de \mathbf{a}_0 . Por consiguiente, en

virtud del teorema de Riemann-Roch para las curvas, será $r | \mathbf{a}_0 | = 1$. Es también conocido de la teoría de funciones algebraicas de una variable [5] que para un ciclo irreducible Γ (en el lenguaje de Gorenstein, una curva sin singularidades) la condición para que un divisor entero de Σ' contenga a un divisor \mathbf{a}_0 , es de dimensión igual al grado de este divisor entero; por consiguiente, representando aquella dimensión por $\delta(\mathbf{a}_0)$, será $\delta(\mathbf{a}_0) = g$. Ahora bien, teniendo en cuenta la hipótesis de este caso, será

$$r | T \cap \Gamma | \geq r | T | > g;$$

luego existirá por lo menos un ciclo entero de $|T|$ cuya intersección con Γ contendrá a \mathbf{a}_0 . Sea T_0 uno de estos ciclos. Se puede elegir T_0 de modo que corte efectivamente a Γ , es decir, tal que no sea múltiplo de Γ . Porque si todo divisor de $|T|$ que contiene a \mathbf{a}_0 contuviese a Γ , se verificaría que la dimensión del subsistema lineal de $|T|$ formado por todos aquellos ciclos que contienen a Γ como una componente, que es de dimensión igual a $r | T | - r | T \Gamma^{-1} |$, sería inferior a la dimensión del sistema lineal formado por todos los ciclos de $|T|$ que contienen a \mathbf{a}_0 y esta dimensión hemos visto que es $\delta(\mathbf{a}_0) = g$, lo cual iría contra la hipótesis del caso b). Sea $T_0 \cap \Gamma = \tau_0$. Será $\tau_0 = \mathbf{a}_0 \mathbf{g}_0$, en donde, por serlo τ_0 y \mathbf{a}_0 , \mathbf{g}_0 será entero y

$$\text{gr.}(\mathbf{g}_0) = \text{gr.}(\tau_0) - \text{gr.}(\mathbf{a}_0) = \nu - g.$$

Sea T' un ciclo de $|T|$ que corta a Γ en un múltiplo de \mathbf{g}_0 . Sean T'^* , T_0^* y Γ^* las funciones holomorfas correspondientes a T' , T_0 y Γ , respectivamente. Vamos a probar que

$$(78) \quad T'^* = \lambda T_0^* + \Gamma^* G^*,$$

en donde G^* es otra función holomorfa.

En efecto, sea $\tau' = T' \cap \Gamma$; será $\tau' = \mathbf{a} \mathbf{g}_0$, siendo \mathbf{a} entero. Ahora bien, como $T' \sim T_0$, será $\tau' \sim \tau_0$, es decir, $\mathbf{a} \mathbf{g}_0 \sim \mathbf{a}_0 \mathbf{g}_0$, o bien $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}_0$. Pero como tanto \mathbf{a} como \mathbf{a}_0 son enteros y $r | \mathbf{a}_0 | = 1$, será $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, lo que prueba que T'^* posee la forma (78). Esto implica que todo ciclo de $|T|$ que corte a Γ en un múltiplo propio, $\mathbf{g}_0 \mathbf{p}$, de \mathbf{g}_0 es divisible por Γ , luego

$$r | T | - r | T \Gamma^{-1} | \leq \nu - g + 1.$$

LEMA 13.—Si T es un ciclo arbitrario y E un ciclo entero cualquiera, se puede elegir el ciclo irreducible Γ , de modo que

$$j [T \Gamma] \leq j [T \Gamma E^{-1}].$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea Γ un ciclo irreducible que no figure como componente de ningún ciclo de $|T|$, $|T \Gamma_1^{-1}|$, ..., $|T E^{-1}|$, en donde Γ_1, \dots son todos los ciclos irreducibles que figuran en E y, además, tal que para todo ciclo primo Γ_i de E se verifique:

$$i(\Gamma, \Gamma_i) > (\Gamma_i, \Gamma_i \mathfrak{K}) - i(T, \Gamma_i),$$

con lo que poniendo $\Omega_1 = T \Gamma$, será

$$i(\Omega_1, \Gamma_i) > i(\Gamma_i, \Gamma_i \mathfrak{K}),$$

y en virtud del lema anterior,

$$j[\Omega_1] \leq j[\Omega_1 \Gamma_1^{-1}],$$

o bien

$$j[T \Gamma] \leq j[T \Gamma \Gamma_1^{-1}].$$

Procediendo ahora por inducción respecto de los ciclos irreducibles de E , queda demostrado el lema.

LEMA 14.—Si $\Delta \sim \Delta_1$, se verifica que $j[\Delta] = j[\Delta_1]$.

DEMOSTRACIÓN.—Por hipótesis, existe un elemento f de Σ tal que $\Delta_1 = [f] \Delta$, de donde llamando Δ' y Δ'_1 a ciclos complementarios de Δ y Δ_1 , respectivamente, resulta que $\Delta'_1 \sim \Delta'$, luego

$$\begin{aligned} j[\Delta_1] &= r|[f]\Delta| + r|\Delta'_1| + \frac{1}{2}i(\Delta_1 \cap \Delta'_1) = r|\Delta| \\ &\quad + r|\Delta'| + \frac{1}{2}i(\Delta \cap \Delta') = j[\Delta]. \end{aligned}$$

Q. E. D.

LEMA 15.—Si T es un ciclo arbitrario y K un ciclo canónico, se puede hallar un ciclo irreducible Γ tal que

$$j[T \Gamma] \geq j[K \Gamma^3].$$

luego

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} j[\mathbb{K} \Gamma^\alpha] = j[\mathbb{K}] - \text{def}_\Gamma | \mathbb{K} \Gamma | \\ - \text{def}_\Gamma | \mathbb{K} \Gamma^2 | - \dots - \text{def}_\Gamma | \mathbb{K} \Gamma^\alpha |, \end{array} \right.$$

y como $j[\mathbb{K} \Gamma^\alpha]$ es, por definición, no negativo, para cualquier α , (80) dice que debe existir un valor de α tal que para todo $\beta > \alpha$ sea

$$(81) \quad j[\mathbb{K} \Gamma^\alpha] = j[\mathbb{K} \Gamma^\beta].$$

Por consiguiente, si $\Delta = [G]$ es un ciclo irreducible y G es una forma de P de grado igual a $\alpha \cdot \text{grad}(F)$, será $\frac{G}{F^\alpha}$ un elemento de Σ , luego

$$\Gamma^\alpha \sim [F^\alpha] \left[\frac{G}{F^\alpha} \right] = [G] = \Delta.$$

Y en virtud del lema 14,

$$j[\mathbb{K} \Delta] = j[\mathbb{K} \Gamma^\alpha]$$

y por consiguiente

$$j[\mathbb{K} \Delta^\mu] = j[\mathbb{K} \Gamma^{\alpha\mu}]$$

y en virtud de (81),

$$j[\mathbb{K} \Delta^\mu] = j[\mathbb{K} \Delta],$$

para cualquier μ . Basta, por tanto, tomar como ciclo en el lema anterior, Δ en lugar de Γ .

Q. E. D.

TEOREMA 11 (de Riemann-Roch).—*Si T es un ciclo arbitrario, T' un ciclo complementario de T , g el género de la clase $[T]$, ν su grado y p_a el género aritmético de Σ , se verifica que*

$$r | T | + r | T' | \geq \nu - g + p_a + 2.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea Γ un ciclo irreducible que verifique las condiciones de los lemas 12 y 16. En virtud del lema 12, será

$$j[T] \geq j[T \Gamma];$$

por el lema 15 es

$$j[T \Gamma] \geq j[K \Gamma^3],$$

siendo K un ciclo canónico. En virtud del lema 16 es

$$j[K \Gamma^3] = j[K \Gamma],$$

y por (75) es

$$j[K \Gamma] = p_a + 1.$$

Por consiguiente,

$$(82) \quad j[T] \geq p_a + 1;$$

pero por (71) es

$$j[T] = r|T| + r|T'| + \frac{1}{2}i(T \cap T')$$

y

$$\frac{1}{2}i(T \cap T') = \frac{1}{2}i(T \cap \mathfrak{K} T) - i(T \cap T),$$

y como $i(T \cap T) = v$ y $\frac{1}{2}i(T \cap \mathfrak{K} T) = g - 1$, resulta

$$\frac{1}{2}i(T \cap T') = g - 1 - v,$$

y sustituyendo en (82)

$$((83) \quad r|T| + r|T'| \geq v - g + p_a + 2.$$

Q. E. D.

Al rango de $|T'|$ se le suele llamar *índice de especialidad de $|T|$* , y se le representa por i , con lo que (83) se puede escribir también en la forma

$$(84) \quad \dim. |T| \geq v - g + p_a + 1 - i.$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. ABELLANAS: *Théorie arithmétique des correspondances algébriques*. «Rev. Mat. Hisp. Am.», 1949.
- [2] — — *Subvariedades principales de una variedad algebraica*. «Rev. Mat. Hisp. Am.», 1953.
- [3] C. CHEVALLEY: *Semilocal rings*. «Ann. of Math.», vol. 45.
- [4] — — *Theory of algebraic functions of a variable*. «Math. Surveys», II.
- [5] D. GORENSTEIN: *An arithmetic theory of adjoint plane curves*. «Trans. Am. Math. Soc.», 1952.
- [6] H. W. E. JUNG: *Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier veränderlicher*. Akademie Verlag, Berlin, 1951.
- [7] S. KOIZUMI: *On the differential forms of the first kind on algebraic varieties. I. II.* «J. of Math. Soc. of Jap.», vols. 1 y 2.
- [8] Y. NAKAI: *On the divisors of differential forms on algebraic varieties*. «J. of Math. Soc. of Jap.», vol. 5.
- [9] A. WEIL: *Foundations of Algebraic Geometry*. «Am. Math. Soc. Coll. Pub.», vol. XXIX, 1946.
- [10] O. ZARISKI: *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*. «Trans. Am. Math. Soc.», vol. 62.
- [11] — — *Complete linear systems on normal varieties*. «Ann. of Math.», vol. 55, 1952.
- [12] — — *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*. «J. Am. J. of Math.», vol. 61.

*Universidad de Madrid.
Patronato "Juan de la Cierva"*