

PUBLICACIONES
DE LA
REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS FISICO-QUIMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA
SERIE 2.^a TOMO VI FASCICULO 1.^o

Ensayo histórico sobre los conceptos
de espacio y Geometría

POR

PEDRO ABELLANAS



1951

ENSAYO HISTORICO SOBRE LOS CONCEPTOS DE ESPACIO Y GEOMETRIA

por PEDRO ABELLANAS

§ 1. — CONCEPTOS, ABSTRACCION, PROPOSICIONES, INTUICION

Como base experimental para la definición *científica* de qué es un concepto, nos fijaremos en cualquier ejemplo: el libro, lo bueno, el pensamiento, el perro, etc.; en primer lugar, observamos que cada uno tenemos un concepto de lo que es un libro, de lo que es lo bueno, etc., pero que estos conceptos difieren de una persona a otra, a veces radicalmente; piénsese, por ejemplo, en la variación del concepto *lo bueno* en los distintos puntos del planeta en la época actual.

Ahora bien, lo común a todos los conceptos, que es precisamente lo que nos interesa para su definición científica, es que aquel que posee un concepto es capaz de decir de cualquier ser o ente que se le presente si dicho ser es o no es aquel concepto; por ejemplo, quien tiene el concepto de lo que es un libro puede decir, por lo menos en la mayor parte de los casos, si un objeto dado es un libro o no lo es.

Resulta, por tanto, que un concepto es *siempre* una *clasificación* de todos los seres y entes posibles, en dos clases: la clase formada por todos los seres o entes, que son aquello representado por el nombre del concepto, y la clase de los seres o entes que no lo son.

Para que esta clasificación tenga sentido *es preciso que existan seres o entes de las dos clases*, ya que en otro caso el concepto, por convenir a todo ente, o por no convenir a ninguno, sería trivial. *Todo ser o ente pertenece a una y sólo una de las clases*. Esta proposición establece de modo radical lo que la experiencia da sólo de un modo aproximado; piénsese, por ejemplo, en el concepto de *lo bello* y se observará que entre la clase de lo bello y lo no bello existe un amplio margen que difícilmente se puede clasificar; algo análogo sucede, como veremos más adelante, con un concepto tan científico como el de la geometría; no obstante, el pensamiento científico necesita de estas aristas vigorosas de un modo esencial, ya que sin ellas resulta imposible la aplicación del mecanismo lógico.

Resulta también inmediatamente que:

- 1.º Todo ser pertenece a la misma clase que él mismo.

2.º Si el ser A pertenece a la misma clase que el ser B, éste pertenece a la misma clase que aquél.

3.º Si el ser A pertenece a la misma clase que el ser B y éste a la misma que el ser C, A pertenece a la misma clase que C. Estas tres propiedades se expresan brevemente diciendo que *la propiedad de pertenecer a una clase es una igualdad lógica*. Estos resultados experimentales e intuitivos nos permiten dar la siguiente:

Definición 1. — Un concepto viene representado por una *clase* de seres o entes, tal que:

1.º Todo ser o ente pertenece o no pertenece a la clase. *Tertium non datur*.

2.º Existe un ser o ente que pertenece a la clase y otro ser o ente que no pertenece.

3.º La propiedad de pertenecer a una clase es una igualdad lógica.

Definición 2. — A este proceso de definición de los conceptos se le llama *definición por abstracción*, y al paso de un objeto de la clase al concepto definido por ella se le llama *abstracción*.

Para obtener ahora el concepto científico de *proposición* vamos a acudir de nuevo a la experiencia y consideraremos proposiciones arbitrarias:

a) “Esto es un libro”. En esta proposición se establece que un objeto que tenemos ante nosotros *pertenece* a la clase que define al concepto libro.

b) “El libro contiene letras”. En esta proposición se establece que todo elemento de la clase que define al libro, e. e. todo libro, *pertenece* a la clase de los objetos que tienen letras; o, más brevemente, que la clase que define el concepto libro *está contenida* en la clase formada por todos los objetos que tienen letras.

c) “Deseo un libro de aritmética o de geometría”. En esta proposición se establece que existe un ente que *pertenece* a la clase formada por mis deseos y a la clase de los libros de aritmética o a la clase de los libros de geometría.

En estos ejemplos sencillos, como en cuantos pudiéramos buscar, se observa que las proposiciones son simples relaciones de *contenido* o *pertenencia* entre clases o entre objetos y clases, respectivamente.

Enunciaremos, por consiguiente: *Toda proposición es una relación de pertenencia de un elemento a una clase o una relación de contenido de una clase en otra.*

Dadas varias clases, existen métodos lógicos de construcción de otras; estos métodos son los siguientes:

1.º Dada la clase A, en virtud de la definición de clase (def. 1) existe la clase formada por todos los objetos que no pertenecen a A, a la cual llamaremos *complementaria* de A y representaremos por A'.

2.º Dadas las clases A y B, el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B forman una nueva clase que se llama *suma* o *unión* de A y B y se representa por $A + B$ o $A \cup B$.

3.º El conjunto de todos los elementos que pertenecen a la clase A y a la clase B forman (cuando no es vacío) una clase que se llama *intersección* de las clases A y B y se representa por $A \cap B$.

Si a todas las clases posibles se le añade la clase de todos los entes U y la clase *vacía* O, resulta que el conjunto así obtenido constituye respecto de las operaciones anteriores ($'$, \cup , \cap) lo que hoy se llama un álgebra de BOOLE, en honor del descubridor de las leyes del pensamiento (1)*.

Ahora bien, el método anterior de construcción de nuevas clases presupone la existencia de otras; por consiguiente, existen clases, llamadas *primitivas*, que es necesario obtener directamente. A la capacidad del hombre para la formación espontánea de las clases primitivas, así como de sus relaciones fundamentales, se le llama *intuición*. De aquí resulta el papel fundamental de la intuición, no sólo en toda ciencia, sino ya en todo pensamiento. Ahora bien, las clases proporcionadas por la intuición son de contornos imprecisos para el propio individuo pensante y, por tanto, mucho más para quien adquiera el concepto mediante una *descripción* intuitiva del mismo hecha por el primero, y como, según acabamos de ver, toda proposición consiste en una relación de pertenencia o contenido, resulta que si no se puede precisar en todo caso si un elemento pertenece o no a una clase primitiva, toda proposición en que intervenga esta clase tendrá un carácter aproximado: valdrá, por decirlo así, para la parte central de la clase, pero será dudosa para su parte periférica. De aquí han nacido los sofismas y paradojas que se han presentado en la filosofía y en la ciencia, y la dificultad de entenderse los hombres, que han señalado todos los pensadores y a la que se refieren las siguientes palabras: (6) "Yo había visto ya con sobrada claridad que nadie entiende a otro, que nadie piensa en las mismas palabras lo mismo que otro, que una lectura, una conversación despierta en diversas personas diversos pensamientos".

Ante la imposibilidad de descripción completa de las clases proporcionadas por la intuición, el pensamiento científico en general, y, más esencialmente, el pensamiento matemático, ha procedido de otro modo: dejar sin describir las clases fundamentales, o primitivas, limitándose a postular las relaciones o proposiciones fundamentales entre ellas a partir de las cuales pueden obtenerse, mediante el mecanismo lógico, todos los restantes conceptos y proposiciones científicas. Ahora bien, estas clases primitivas no son dadas unívocamente por la intuición; de aquí que haya sido necesario adoptar un criterio para la selección de los postulados. Este criterio ha sido, para la Matemática, la no contradicción, y para las ciencias experimentales la concordancia de los resultados teóricos con los experimentales.

El objeto fundamental de este artículo es mostrar, en su evolución histórica, los conceptos de espacio matemático y de geometría.

(*) Los números entre paréntesis se refieren a la bibliografía indicada al final del presente trabajo.

§ 2. — PRIMERA EPOCA DEL CONCEPTO DE ESPACIO

Esta época la limitamos entre la aparición del concepto de espacio, en la época griega, y el año 1882 de su primera axiomatización propiamente tal debida a M. PASCH (10).

El carácter esencial que hemos empleado para la definición de esta época es el siguiente:

En la primera época el espacio matemático tiene un carácter objetivo y real, identificándosele con el espacio físico y con el Universo.

Esta proposición la basamos en los siguientes hechos:

1. En la primitiva Escuela pitagórica se define el punto como *mónada* que tiene posición, siendo, como es sabido, una *mónada* el elemento irreducible del Universo. De aquí la proposición pitagórica "que los números eran los elementos de todas las cosas". En esta época aparece no sólo el espacio matemático confundido con el universo, sino que los mismos puntos geométricos son elementos materiales.

2. En los elementos de EUCLIDES se dan un conjunto de definiciones que no tienen sentido si no se presupone que van referidas al Universo material y sensible. Así, por ejemplo:

Def. 1. Punto es aquello que no tiene parte.

Def. 2. Línea es una longitud sin latitud, cuyos términos son dos puntos.

Def. 4. Recta es la línea que yace de igual modo respecto de todos sus puntos.

Def. 5. Superficie es aquello que posee solamente longitud y latitud.

Def. 6. Plano es la superficie que yace de igual modo respecto de sus rectas.

Estas y otras definiciones no son empleadas en ningún momento en el resto de la obra. La razón de ello es que las clases *descritas* por ellas no están preparadas para aplicarles el mecanismo lógico; su misión es puramente descriptiva y se reduce, exactamente igual que sucede con las descripciones de un novelista, a suscitar en la mente del lector una imagen de un ser material previamente conocido por él. Ahora bien, para que una descripción tenga sentido es necesario que el ente que se describe tenga existencia independiente del sujeto y, por tanto, que aquellos conceptos fundamentales, y el espacio euclídeo con ellos, tengan una existencia material.

Estas mismas definiciones perduran durante toda la época que hemos señalado.

3. El gran matemático del siglo pasado, K. F. GAUSS, dijo explícitamente (5): "Wir müssen in Demut zugeben, dass, wenn die Zahl bloss un-

seres Geistes Productt ist, der Raum auch ausser unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können". En estas palabras queda explícitamente manifestada nuestra tesis sobre el concepto de espacio matemático propio de la época. Hoy, como veremos, no existe en absoluto la diferencia señalada por GAUß entre el concepto de espacio y el de número; la razón de ello es que el concepto de espacio ha alcanzado el mismo grado de evolución que el concepto de número. (Quizá la razón de que GAUß no publicase sus resultados sobre geometrías no euclideas sea la abierta contradicción en que se encontraban respecto de su concepto de espacio que acabamos de transcribir).

4. J. V. PONCELET (12), dice (pág. XII): "C'est ce qui arrive, en particulier, dans la Géométrie, lorsque la figure se complique, ou que les rapports qui en lient les parties se multiplient, parce qu'il n'est plus possible alors de discerner, au simple coup d'oeil, l'ordre de grandeur et de situation de ces parties". En este párrafo se ve claramente el carácter experimental de la geometría, que no es posible sin la identificación del espacio geométrico con el material; esto mismo viene confirmado por el siguiente párrafo de la misma página: "Dans la Géométrie ordinaire, qu'on nomme souvent la *synthèse*, les principes sont tout autres, la marche est plus timide ou plus sévère; la figure est *décrite*, jamais on la perde de vue, toujours on raisonne sur des grandeurs, des formes réelles et existentes, et jamais on ne tire des conséquences qui ne puissent se peindre, à l'imagination ou à la vue, par des objets sensibles; on s'arrete dès que ces objets cessent d'avoir une existence positive et absolue, une existence physique". Este concepto material del espacio matemático conduce a la siguiente definición de elementos imaginarios, que constituye la esencia de su "principio de continuidad" (pág. 28, l. c.). "En général, on poussait désigner par l'adjectif imaginaire tout *objet* qui, d'absolu et réel qu'il était dans une certaine figure, serait devenu entièrement impossible ou inconstructible...". Otra consecuencia del referido concepto de espacio vigente en esta época es la introducción de consideraciones metafísicas en la Matemática, así (l. c. página 52): "Ces dernières considérations, déduites uniquement des principes élémentaires de la projection central, donnent l'interprétation de cette notion métaphysique..."

5. J. STEINER (14), dice (pág. 233): "Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind".

Su misma definición de proyectividad no tiene sentido si no se identifica su espacio proyectivo con el espacio material, ya que procede del siguiente modo: define, en primer lugar, la perspectividad entre una serie rectilínea y un haz de rectas, y a continuación define la proyectividad entre un haz de rectas y una serie rectilínea como la correspondencia que resulta de aquella "Beziehung (la correspondencia establecida por la perspectividad) festhalten, während man die Gebilde selbst auf irgend eine Weise ihre ursprüngliche Lage ändern lässt".

6. C. v. STAUDT (13). Respecto de las definiciones dadas en los párrafos 1 y 2 se puede repetir lo dicho para las de Euclides: tienen el carácter de descripciones y no se utilizan en el resto de la obra. La definición y estudio de los elementos de retroceso de una línea (l. c., pág. 110) tiene un carácter completamente experimental del espacio material. Otro tanto sucede con los conceptos de regiones de puntos interiores a una cónica y a una cuádrica no reglada (págs. 137 y 197, resp.). Sin embargo, en sus *Beiträge* puede considerársele ya como perteneciente a la época de transición; en efecto, véanse los dos párrafos siguientes de su introducción: "In der analytischen Geometrie nennt man, was sehr einfach zu sein scheint, ein Punkt imaginär, wenn seine Coordinaten nicht sämmtlich reell sind. Indessen ist hierdurch nur die Sprache der Algebra auf die Geometrie übertragen, keineswegs aber nachgewiesen, daß ein imaginärer Punkt, gleichwie ein reeller Punkt, etwas von Coordinatensysteme Unabhängiges sei". Ahora bien, en lugar de contestar a esta cuestión demostrando la invariancia respecto de la transformación general de coordenadas en el espacio real, la plantea en el sentido siguiente: "Wo ist, fragt sich wohl Jeder, der imaginäre Punkt, wenn man vom Coordinatensystem abstrahirt? So entbehrte dann bisher die Geometrie, wenn sich von imaginären Elementen handelte, der *Evidenz*, welche man sonst an ihr rühmt und wohl auch mit Recht von ihr verlangt". Con lo cual se busca la materialización de los elementos imaginarios. La misma demostración falsa del teorema fundamental de la proyectividad, que lleva su nombre, es debida a una intuición del espacio como espacio material, ya que el error de la demostración se debe a faltar en aquella época el concepto de conjunto *denso* en un segmento, el cual no podía intuirse directamente del espacio material.

7. En la siguiente nota de MÖBIUS se menciona explícitamente la unicidad del espacio (9), (pág. 274, nota): "Da jeder dieser Räume unbegrenzt gedacht werden muss, und es gleichwohl nur einen unendlichen Raum giebt, so hat man sich die beiden Räume einander durchdringend vorzustellen..."

8. CAYLEY (2), debido a la orientación analítica de su obra llega a las definiciones analíticas del espacio proyectivo y de los espacios lineales de dimensión n (l. c., vol. 6, pág. 456, año 1869): refiriéndose a la interpretación geométrica de los invariantes y covariantes de formas del espacio ordinario, dice: "but this can only be obtained by mean of the notion of space of the proper dimensionality; and the use such a representation, we require the geometry of such space". Aun cuando es el matemático cuyas ideas respecto del espacio son más avanzadas, según queda claramente manifestado en el párrafo anterior y ello debido a su estudio analítico de la geometría, no obstante estos espacios tienen para él un carácter esencialmente distinto del espacio euclideo u ordinario, por lo que los califica de espacios *ideales*, que realmente son, pero lo que queremos señalar es que tal calificativo lo introduce para distinguirlos del espacio ordinario, con lo que éste sigue siendo para él, según hemos dicho, el espacio material (véase

vol. 2, pág. 221). (An introductory Memoir upon quantics), I have spoken of the coordinates of a point in space. I consider that there is an *ideal* space of any number of dimensions, *but of course, in the ordinary acceptation of the word, space is of three dimensions...*" (vol. 5, pág. 471): "Note on the Lobatschewsky's *imaginary* geometry". En este título se ve claramente que la geometría de LOBACHEFSKY tenía un carácter imaginario, en el sentido que empleaba PONCELET para esta palabra y que hemos reseñado arriba, e. e., no material, lo que, por contraposición, señala el carácter material del espacio ordinario.

De todo esto resulta, por tanto, que toda la época tenía el matemático ante sí el espacio del mismo modo que tengo en este momento ante mí la mesa, esto es, con una presencia material tan evidente que cualquier referencia a él parecía redundante (véase la cita de PASCH que hacemos en el § 4); por ello se limitaban a ligeras descripciones en la seguridad de que con ellas el lector podría identificar, sin ninguna duda, aquellos objetos del espacio material que tenía ante él.

§ 3.—SEGUNDA EPOCA DEL CONCEPTO DE ESPACIO (1882-1906)

Esta segunda época es en realidad una época de transición y, por ello, muy importante en el estudio de la evolución del concepto de espacio.

En la época anterior se habían presentado tres hechos del máximo interés: las creaciones de los espacios proyectivo, lineales de dimensión n y del hiperbólico. Respecto del primero, conviene observar que en toda la obra de PONCELET no se establece distinción alguna entre el espacio euclídeo y el proyectivo; por el contrario, lo que hace es intentar demostrar que el espacio euclídeo (empleamos este nombre para representar al espacio único de la época) es un espacio proyectivo (l. c., pág. 52). Otro tanto hace STEINER al principio de su *Systematische Entwicklung...*, quien emplea para ello la hipérbola. Como ya hemos advertido, STAUDT parte de la descripción del espacio de EUCLIDES, etc. En cuanto a los segundos, CAYLEY, al introducir los espacios lineales de dimensión n indica con el adjetivo *ideal* la separación esencial entre ellos y el espacio ordinario. Análogamente, respecto del tercero, LOBACHEFSKY, al introducir su espacio no habla de tal espacio, sino que emplea el título de "Geometría imaginaria", que claramente indica el carácter esencialmente distinto de la geometría ordinaria; y posteriormente se introdujo el nombre de *Geometrías* no euclídeas, cuando en realidad de lo que se trataba era de *espacios* no euclídeos. Resulta, por tanto, que a pesar de ser la creación de nuevos espacios fruto de las postimerías de la época anterior, se encontraban tan en pugna estos hechos con la concepción de espacio vigente en ella, que se desvirtúan los nuevos espacios con los calificativos de ideales, imaginarios, o, simplemente, se identifican con el espacio vigente, o, finalmente, se escamotea el concepto de espacio sustituyéndole por el de geometría. En cuanto a los espacios lineales de di-

mención n cuya introducción, por vía analítica, hizo CAYLEY con objeto de poder emplear lenguaje geométrico en el estudio de invariantes, su influencia en la crisis del concepto de espacio fué escasa; ello era debido a que al ser la definición analítica de espacio una definición abstracta, ya que se apoya en el concepto de número, mientras que el concepto vigente de espacio era el de espacio material (ver § anterior), no podía considerarse (como realmente no lo es), idéntico el espacio vigente con el espacio definido analíticamente por ternas de números; de aquí el carácter exclusivo de método que tuvo la Geometría Analítica, a la que no se le reconocía capacidad alguna para poder definir completamente al espacio. Esta es también la razón por la que los geómetras se aferraban al método sintético y sentían suspicacias por el método analítico, ya que tenían la impresión intuitiva de que se dejaban escapar muchos caracteres del espacio al pasar del espacio material, que creían se podía manejar directamente, al espacio definido analíticamente. Esta sospecha intuitiva es cierta; ahora bien, lo que sucede, según hemos visto en el § 1, es que un concepto no abstracto no es apto para poderlo someter al mecanismo lógico; por lo que no tardó en surgir la necesidad de la definición abstracta del concepto de espacio; esto se alcanzó en esta segunda época y es uno de los principales caracteres de la misma.

Esta *necesidad* de elaborar de modo abstracto, o, dicho de otro modo, de axiomatizar el espacio, queda manifestada explícitamente en el prólogo de PASCH (10): "...para establecer los fundamentos de la Geometría de un modo que responda a exigencias cada día más acentuadas..." Es de observar que PASCH no habla de espacio, sino de Geometría, como en la época anterior. Es más, en la nota de la pág. 141 (§ 77), dice: "Como ejemplo de palabras superfluas pueden citarse *espacio* y *dimensión*, ninguna de las cuales se presenta en esta obra". Creemos que esta nota, a pesar de su brevedad, es muy substanciosa, ya que en ella se manifiesta claramente un hecho: *el reconocimiento implícito de la dificultad del concepto de espacio*, que hasta entonces aparecía completamente claro e indubitable. Ahora bien, PASCH comete la ingenuidad de creer que podía acabarse con la dificultad eliminando la palabra "espacio", y ésto es debido a otra creencia casi general de esta época: *la intuición proporciona de modo único los conceptos y proposiciones fundamentales del espacio*, por lo que aun siendo el espacio matemático un concepto abstracto y, por tanto, distinto del espacio material o Universo, como viene dado unívocamente por la intuición, sobra el nombre. Esta unicidad del espacio geométrico queda también reconocida en el siguiente párrafo de VERONESE (15), pág. XII: "Per i caratteri che distinguono la geometria, un ipotesi astratta è geometricamente possibile quando essa non contraddice agli assiomi necessari allo svolgimento teorico della geometria, che prendiamo dall'esperienza, ossia alle proprietà dell'intuizione spaziale nel campo limitato di essa, corrispondente a quello delle nostre osservazioni esterne". En la misma creencia se manifiesta G. PEANO (11), página 3: "Quali fra gli enti geometrici si possono definire, e quali occorre assumere senza definizione?"

"E, fra le proprietà, *sperimentalmente vere*, di questi enti quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza?"

Ahora bien, esta univocidad de las propiedades experimentalmente verdaderas fué destruida por las geometrías no euclídeas, ya que se presentaba la cuestión: ¿Cuál de los postulados de paralelismo es experimentalmente cierto? A esta cuestión, fundamental de la época, contesta KLEIN (8) con las siguientes palabras: "...ich die räumliche Anschauung als etwas wesentlich Ungenaueres ansehe. — Mag nun vor der abstracten Anschauung die Rede sein, wie sie um durch Gewöhnung gelaüfig geworden ist; oder der konkreten Anschauung, die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt. Das axiom ist mir nun *die Forderung*, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung genaue Aussagen hineinlege. Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, daß wir die Figur, um die es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten, und uns dann in jedem Augenblicke in dem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome als festes logisches Substrat zurückbeziehen— Der Inhalt der Axiome erscheint bei dieser Auffassung so weit willkürlich, als mit der Ungenauigkeit unserer Raumanschauung verträglich ist. Eben hierin aber nur hierin, ruht für mich die Berechtigung der Nicht-Euklidischen Geometrie (unter Nicht-Euklidischen Geometrie die reale Disziplin und nicht bloss die abstrakten mathematischen Betrachtungen verstanden, zu denen dieselbe Anlass gegeben hat). Ubrigens ist es von diesen Standpunkte aus selbstverständlich, daß wir unter gleichberechtigten Systemen von Axiomen jeweils das einfachste bevorzugen und eben darum zumeist mit der euklidischen Geometrie operieren, welche für die gewöhnlichen Fragestellungen die einfacheren Aussagen liefert. — Was aber die Entstehung der Axiome angeht, so weis ich darüber nichts weiter zu sagen als daß wir die zu ihnen führende Abstraktion hier wie in anderen Gebieten unwillkürlich vollziehen. Das, was in der Anschauung oder im experimente nur approximativ gegeben ist, das formulieren wir in exacten Weise, weil wir anderenfallsin damit nichts anzufangen wissen". En las palabras anteriores aparece completamente clara la misión de los axiomas y su razón de ser, así como la indeterminación del concepto de espacio respecto a la intuición. Sin embargo, el criterio dado para la elección de un espacio, así como el concepto de Geometría no euclídea señalado en el paréntesis, indica que, para KLEIN, el concepto de espacio matemático había pasado a coincidir con el actual espacio físico, e. e., un espacio matemático, lo más sencillo posible, en el que se verificasen todos los fenómenos experimentales. Este carácter físico del espacio matemático es también suscrito por F. SCHÜR (16), pág. 2: "Bei der Auswahl derjenigen Tatsachen der Anschauung, denen unser System von Axiomen Ausdruck verleihen soll, kann zwar eine gewisse Willkür nicht vermeiden werden, inimmerhin aber wird man sich an die folgenden Regeln halten müssen. *Damit unsere Arbeit überhaupt den namen Geometrie verdiene scheint es uns notwendig daß diese Axiome oder Postulate das Resultat der einfachsten und elementarsten Beobachtungen der natürlichen Figuren ausdrücken*, aus deren Abstraktion sie entstanden sind".

De todo lo que antecede se deduce la siguiente definición:

La segunda época del concepto del espacio está caracterizada por los siguientes hechos:

1.º *En ella se reconoce el carácter abstracto del concepto de espacio matemático.*

2.º *Como consecuencia, la necesidad ineludible de una axiomatización del mismo.*

3.º *Se encuentra muy extendida la creencia de que la experiencia e intuición del espacio material proporcionan de modo único los conceptos primitivos y los postulados del espacio; e. e. que el espacio matemático, aunque abstracto, y, por ende, distinto del espacio material, viene unívocamente determinado por éste.*

4.º *El espacio matemático se identifica con el espacio físico, e. e., con aquel espacio abstracto más sencillo en el que pueden encontrar representación no contradictoria todos los fenómenos naturales conocidos.*

§ 4. — TERCERA EPOCA DEL CONCEPTO DE ESPACIO (1906 HASTA NUESTROS DÍAS)

Hemos señalado anteriormente (§ 3) que ha existido una repulsión intuitiva, por parte de los geómetras, hacia el método analítico de la geometría y, todavía mayor, a la definición analítica del espacio (de CAYLEY); justificábamos este temor por la percepción de que en el paso de abstracción que supone pasar del espacio material a un espacio abstracto, como en todo proceso de abstracción, se pierden muchas características del primero. Sin embargo, hemos visto que en la segunda época apareció la necesidad de axiomatización del espacio con carácter ineludible. Ahora bien, esta axiomatización, aplicada al espacio euclídeo, trajo como consecuencia, en virtud de los trabajos de HILBERT (7) la demostración de la equivalencia entre las definiciones axiomática y analítica del espacio euclídeo. Con esto se colocó al espacio euclídeo en un plano de igualdad con los demás espacios matemáticos.

Por otra parte, los trabajos de KLEIN y de CLIFFORD sobre las Raumformen, buscando interpretaciones diferenciales de los espacios no euclídeos, seguidos con los trabajos de RIEMANN y, finalmente, la necesidad de plantear de modo adecuado muchos problemas del Análisis, especialmente los del Cálculo de Variaciones, dieron lugar a la aparición de espacios mucho más generales, cuya creación se debe a FRÉCHET (4) y E. H. MOORE. Con la creación de estos nuevos espacios, hoy llamados *espacios topológicos*, alcanza el concepto de espacio el mismo grado de elaboración que el concepto de número y con él queda la Geometría definitivamente incorporada a la Matemática y con los mismos caracteres que la Aritmética o el Álgebra.

Resumiremos el carácter de la época actual, respecto del concepto de espacio, en la proposición siguiente:

El concepto de espacio matemático coincide con el de espacio topológico.

habiéndose liberado completamente del espacio del Universo, al que se le reconoce un carácter transcendente en la ciencia, y del espacio físico. El concepto de espacio ha alcanzado en la época actual el mismo grado de desarrollo que el concepto de número.

§ 5. — EL CONCEPTO DE GEOMETRÍA: 1.^a ÉPOCA
(DESDE EUCLIDES HASTA 1822)

Vista una síntesis de la evolución del concepto de espacio, vamos a ocuparnos ahora de análoga cuestión respecto del de geometría.

Como una primera aproximación, observaremos que un carácter común a la Geometría de toda época es el *consistir en un conjunto de proposiciones relativas al espacio o a figuras definidas en él*. Ahora bien, según hemos indicado en el § 1, toda proposición se reduce a una o varias relaciones de contenido de la forma $a \subset A$ ó $A \subseteq B$, en donde a es un elemento y A y B son *clases* de las definidas en el mencionado párrafo; por consiguiente, si queremos afinar más en el concepto de Geometría, tendremos que investigar el criterio adoptado en Geometría para la construcción de las clases correspondientes a sus conceptos y a sus proposiciones. Al dar este nuevo paso es cuando aparecen las diversas épocas respecto del concepto de geometría, que nosotros vamos a dividir en tres de la siguiente forma:

1.^a época: Desde Euclides hasta el año 1822.

2.^a época: 1822-1872.

3.^a época: 1872 hasta nuestros días.

I. *Época*. (Desde Euclides hasta el año 1822). En toda esta época existe una única Geometría: los Elementos de Euclides, por lo que caracterizar a la época es casi equivalente a la caracterización de los Elementos. Ahora bien, una simple lectura de éstos muestra, por una parte, y según hemos dicho anteriormente, que el espacio matemático coincidía con el espacio material y, por otra, que los procesos fundamentales para la construcción de las clases A y B de las proposiciones y de los conceptos, se apoyan en las dos *peticiones* siguientes (I Libro):

1.^a Por cualquier punto se puede trazar una recta.

2.^a De cualquier centro y con cualquier radio se puede describir una circunferencia.

Respecto de esta última debe entenderse que por radio de una circunferencia no se entiende un segmento abstracto, o su equivalente: el número que mide un segmento, sino un segmento particular, uno de cuyos extremos sea el centro de la circunferencia, y el otro, un punto de la misma, por lo que el enunciado más correcto de la petición 2.^a sería el siguiente:

2^a De cualquier centro se puede describir una circunferencia que contenga a un punto dado.

En virtud de estas operaciones fundamentales se ve precisado, para resolver la cuestión fundamental del transporte de segmentos, a resolver los problemas I y II (Libro primero).

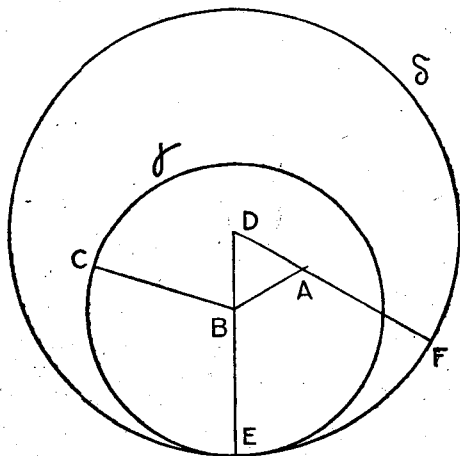


FIG. 1

El primero de los cuales construye un triángulo equilátero sobre un segmento dado, y el segundo construye un segmento congruente con un segmento dado y uno de cuyos extremos es un punto dado. Vamos a reproducir la construcción de este último problema, porque creemos que caracteriza muy bien el espíritu de toda la obra de EUCLIDES. Sea el punto A, que se quiere sea extremo de un segmento congruente con un segmento dado \overline{BC} . Para ello se construye el triángulo equilátero ABD , uno de cuyos lados es AB (prob. I). Con centro B se describe la circunferencia γ que contiene el

punto C (petición 2'), se halla la intersección E del diámetro DB con γ , tal que B esté entre D y E , y se describe la circunferencia δ , de centro D y que contiene a E . Se determina el punto F de intersección del diámetro DA con δ , tal que A esté entre D y F . El segmento \overline{AF} es congruente con el segmento BC .

Ahora bien, esta construcción que establece el transporte de segmentos de modo riguroso a partir de las peticiones anteriores y de las propiedades formales de la adición de segmentos (empleadas implícitamente) y que constituye un paso necesario para la demostración del primer caso de congruencia de triángulos (Teorema I, Prop. IV, libro I) y que EUCLIDES demuestra a continuación, no constituye el único material necesario para la demostración de éste, ya que ésta exige también el transporte de ángulos y éste no se construye hasta más tarde (Problema IX, Prop. XXIII, Libro I), por lo que dicha demostración emplea consideraciones experimentales del movimiento de figuras en el espacio material.

Lo que interesa observar es que con esta operación del transporte de segmentos crea EUCLIDES las clases de segmentos congruentes entre sí mediante las cuales se define el concepto abstracto de congruencia de segmentos, que es uno de los conceptos fundamentales de toda la obra euclídea. De modo análogo, el transporte de ángulos permite construir las clases que definen la congruencia de ángulos.

Resulta, por tanto, que en esta época se opera sobre el espacio material, y los conceptos fundamentales de congruencia de figuras se establecen cons-

truyendo las clases de figuras congruentes entre sí, para lo que se emplean, bien directamente la idea intuitiva de movimiento, bien el método más elaborado del transporte, que acabamos de indicar y que se refiere a segmentos y ángulos. Es de observar que las clases que sirven para definir la congruencia de segmentos y de ángulos se construyen a partir de uno de ellos mediante aplicación sucesiva de todos los transportes posibles. Sin embargo, las clases de figuras a que se refieren los teoremas se definen generalmente dando el género próximo y diferencia específica a partir de las clases de figuras primitivas que, como ya hemos dicho, no se definen, sino que simplemente se describen como objetos del mundo material.

Es curioso señalar que, en este ambiente geométrico dominado por los conceptos fundamentales de *congruencia* y de su derivado *medida*, surgen un tipo especial de proposiciones de las que, aunque desgraciadamente no han llegado hasta nosotros, podemos hacernos una idea gracias a los lemas de PAPPUS (IV d. C.), que tenían por finalidad facilitar su demostración y que, afortunadamente, conocemos. Nos referimos a los llamados *porismas* de EUCLIDES. Uno de los lemas de PAPPUS es el que durante varios años se llamó teorema de Pascal del exágono inscrito en un par de rectas. Análogos son los restantes lemas conocidos, por lo que se infiere que los porismas de EUCLIDES serían proposiciones relativas a configuraciones. Ahora bien, en estas proposiciones no intervienen, en absoluto, los conceptos de congruencia y medida que constituían las ideas fundamentales de la Geometría, de aquí su carácter sorprendente y hasta cierto punto mágico de las mismas dentro del concepto vigente en la época, carácter que ha trascendido a través del nombre con que las bautizaron, pues, como es sabido, "poros" significa salida que se encuentra en un lugar en el que parecía no haberla; de donde porisma significa *fisura*, que, como decíamos, patentiza el asombro producido por tales proposiciones que no se podían encajar dentro del concepto de Geometría de la época. En confirmación de nuestra idea de considerar como una misma época hasta 1882, señalaremos que en pleno siglo XVII se emplea para la configuración de PASCAL, del exágono inscrito en una cónica, el nombre de "exagrama *misthycum*", que revela el mismo grado de extrañeza ante esta proposición dentro de las ideas del siglo XVII que mostraron los griegos respecto de los porismas.

Todavía, abundando en estas ideas, citaremos el caso de G. DESARGUES. En 1639 publica DESARGUES su importante obra (3) en la que construye el espacio proyectivo de modo mucho más correcto que los geómetras del primer tercio del siglo pasado, ya que establece una denominación común para los puntos a distancia finita y puntos del infinito (but d'une ordonnance des lignes droites) y lo mismo para las rectas a distancia finita y del infinito (l'essieu d'une ordonnance de plans), estableciendo las relaciones de incidencia entre unas y otras, con lo que crea el espacio proyectivo. Sólo por ésto ya merecería DESARGUES un lugar destacadísimo en la Historia de la Matemática, cuánto más habiendo aportado a la Geometría una contribución fundamental con su configuración, la definición de involución y el establecimiento de las propiedades fundamentales sobre involución y haces de cónicas, así como la definición de polaridad respecto de cónicas y cuádricas. Ahora

bien, lo que queremos resaltar es que esta importantísima obra de DESARGUES permanece ignorada durante más de dos siglos. Creemos que la razón de este olvido está en que durante estos dos siglos el concepto de espacio y el de geometría tenían, como hemos visto anteriormente, un contenido radicalmente distinto al de espacio proyectivo y geometría proyectiva y, siendo así, no podían en modo alguno entenderse las ideas de DESARGUES, quien, como precursor, estaba irremediabilmente condenado al fracaso entre sus contemporáneos y al olvido. Justamente cuando los tiempos llegan a la altura del pensamiento de DESARGUES, esto es, a mediados del siglo pasado, es éste descubierto y adquieren validez e importancia sus ideas.

§ 6. — SEGUNDA EPOCA DEL CONCEPTO DE GEOMETRIA (1822-1872)

Esta segunda época la caracterizamos por el triunfo y desarrollo de la geometría proyectiva. Esta geometría toma carta de naturaleza, y esto significa que las clases de entes que sirven para definir los conceptos fundamentales se construyen mediante un mecanismo distinto que en la época anterior, mientras que en ésta se empleaban los movimientos y transportes, en la segunda época se emplean las proyecciones y secciones (PONCELET, STEINER) y las proyectividades (v. STAUDT). Así, por ejemplo, se justifican los puntos y las rectas del infinito por la necesidad de que los conceptos de puntos y rectas sean invariantes mediante proyección y sección, o, dicho con mayor precisión, la clase que define estos entes se obtiene mediante aplicación a uno de ellos de todas las perspectivas o proyectividades.

Sin embargo, como ya hemos dicho, el descubrimiento del método proyectivo para construir las clases fundamentales de la geometría proyectiva no trae como consecuencia que se considere al espacio proyectivo como algo distinto del espacio material único de la época. Por el contrario, los nuevos resultados se interpretan como un mayor poder de penetración para el conocimiento del espacio material, proporcionado por los nuevos métodos, que permiten estudiar las regiones infinitamente alejadas sin necesidad de recurrir a consideraciones metafísicas. Volvemos a recordar las palabras de PONCELET anteriormente citadas: "Ces dernières considerations, déduites uniquement des principes élémentaires de la projection central, donnent l'interprétation de cette notion métaphysique..."

En esta época aparecen también las geometrías no euclídeas y las geometrías lineales de dimensión n , introducidas analíticamente por CAYLEY, pero ninguno de estos hechos tiene dentro de la época una importancia comparable a la aceptación universal del método proyectivo. Su importancia, como hemos visto, está en su intervención en la crisis del concepto de espacio, pero no llegan a tener una influencia decisiva en la formación del concepto de geometría vigente en la época.

Es de interés observar, que al final de la época adquiere un espléndido

desarrollo el método analítico para el estudio de la geometría, gracias principalmente a los trabajos de PLÜCKER, MÖBIUS y, principalmente CAYLEY. Como consecuencia de este desarrollo nace y progresa la teoría de invariantes, ya que representándose analíticamente las figuras del espacio euclídeo o del proyectivo por un sistema de ecuaciones o inecuaciones, las propiedades de estas figuras vienen dadas por ecuaciones o inecuaciones entre sus coeficientes, pero para que estas ecuaciones o inecuaciones entre los coeficientes representen una propiedad geométrica, es preciso que sean independientes del sistema de referencia. De aquí a la definición de Geometría del Programa de ERLANGEN sólo hay un paso: la observación de que las transformaciones de coordenadas pueden interpretarse como transformaciones geométricas.

§ 7. — TERCERA EPOCA DEL CONCEPTO DE GEOMETRÍA (1872 - actualidad).

Acabamos de ver que el avance analítico de la Geometría al final de la época anterior llevaba a la conclusión de que para que una relación de una figura fuese una propiedad geométrica debía de conservarse cuando se efectuaba cualquier transformación de coordenadas o, lo que es lo mismo, que la *clase* formada por todas las figuras que gozan de una propiedad geométrica quedaba dividida en subclases equivalentes y disjuntas, formada cada una de éstas por una figura de la clase total y todas las que se deducen de ella por aplicación a la misma de todas las transformaciones equiformes, afines o proyectivas, según los casos. Esta observación, juntamente con la necesidad de dar una definición de Geometría que sirviese para las nuevas geometrías que habían ido surgiendo, condujo a KLEIN a formular su definición de geometría en su Erlanger Programm. Su pensamiento queda claramente fijado en los siguientes párrafos (l. c., pág. 460, T. I.):

“Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der projektivischen Geometrie die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Beandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projizieren nicht ungeändert bleiben so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projektivischen Standpunkte aufzufassen so daß nun die projektivische Methode die gesamte Geometrie umspannt. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlichfernen Kugelkreise”.

“Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Prinzip, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger, als sich neben die elementare und projektivische Geometrie,

ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, dessen man dasselbe Recht selbständiger Existenz zugestehen muß. Dahin gehören die Geometrie der rationalen Umformungen u. s. w., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen”.

“Wenn wir es im nachstehenden unternehmen ein solches Prinzip aufzustellen so entwickeln wir wohl keiner eigentlich neuen Gedanken, sondern umgrenzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von manchen gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publizieren, als die Geometrie, die doch ihrem stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disziplinen zerfallen ist, die sich ziemlich unabhängig von einander weiter bilden...”.

“Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden”.

En los párrafos anteriores resultan claramente dos ideas fundamentales:

1.^a Unificación, dentro de la Geometría proyectiva, de ésta y la Geometría clásica. 2.^a Definición del concepto de Geometría de modo que en él tuviesen cabida las geometrías no euclídeas, la proyectiva, la birracional, etc.

Obsérvese que de las dos cuestiones anteriores la primera era la que presentaba más interés y hubiese hecho innecesaria la segunda si se hubiese podido agrupar a todas las geometrías posibles dentro de un mismo espacio, pero el hecho de haber surgido infinitos espacios posibles es el que hace necesaria la segunda cuestión. Ahora bien, según hemos visto al tratar del concepto de espacio, lo que sucede es que en esta época el concepto de espacio estaba arribando a su madurez, llegándose a principio de siglo a su definición matemática; con ello, la Geometría se incorpora a la Matemática, y esto, como toda incorporación verdadera, hace que se pierdan los límites, que se pierda la forma del ente absorbido, en este caso la Geometría, dentro del ente absorbente, la Matemática. De aquí resulta la imprecisión actual del concepto de geometría de KLEIN, ya que muchos teoremas de Análisis podrían considerarse, según la definición anterior, como teoremas geométricos, e incluso teorías completas del análisis, como la de la medida de conjuntos y de la integral. Sería interminable la enunciación de teoremas que admiten un enunciado con conceptos del Análisis, o del Algebra o de la Aritmética y otro con conceptos geométricos. De aquí la dificultad de clasificar en muchas ocasiones una determinada proposición o memoria. En muchos casos es el instrumento empleado el que sirve para clasificar una determinada proposición geométrica. Así, por ejemplo, el concepto de simplicidad o multiplicidad de un punto o una subvariedad de una variedad algebraica se acostumbra a considerar como un concepto de la Geome-

tría de las correspondencias birracionales, o geometría algebraica, en el sentido corriente, cuando, en realidad, tal concepto es un concepto proyectivo, en el sentido de KLEIN, de ser invariante respecto de las transformaciones proyectivas y no serlo respecto de las birracionales. La Geometría algebraica, propiamente tal, es decir, la geometría en el sentido de KLEIN correspondiente a las transformaciones algebraicas, hace equivalentes entre sí todas las subvariedades de la variedad que actúa como espacio ambiente. Respecto de ella el concepto de dimensión no es invariable; sin embargo, el estudio de las relaciones entre las dimensiones de una subvariedad y de su transformada se considera como una propiedad de tal geometría, aunque en el sentido estricto de la definición de KLEIN no lo sea.

Patronato Juan de la Cierva del C. S. I. C.

Madrid, 15 de marzo de 1951.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BOOLE.—An investigation of the laws thought. London, 1854.
- (2) CAYLEY.—Collected Mathematical Papers.
- (3) G. DESARGUES.—Brouillonproiect d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan. Paris, 1639.
- (4) M. FRÉCHÉT.—Les Espaces abstraites. 1928.
- (5) K. F. GAUSS.—(Cita del libro de Th. Vahlen: Abstrakte Geometrie. Leipzig, 1905).
- (6) GÖTHE.—Memorias.
- (7) D. HILBERT.—Grundlagen der Geometrie. (1898-1937).
- (8) F. KLEIN.—Gessamelte Werke. T. 1.
- (9) MÖBIUS.—Der barycentrische Calcul. Leipzig, 1827.
- (10) M. PASCH.—Lecciones de Geometría Moderna. Madrid, 1913.
- (11) G. PEANO.—Principii di Geometria. Torino, 1889.
- (12) J. V. PONCELET.—Traité des Propriétés Projectives des figures. 2.^a edición, 2 vol. 1864.
- (13) C. V. STAUDT.—Geometrie der Lage, 1847.
— Beiträge zur Geometrie der Lage. Tres cuadernos, 1856-60.
- (14) J. STEINER.—Systematische Entwicklung der abhängigkeit Geometrischer Gestalten von einander. 1832. Gess. Werk, Págs. 229-460. T. 1.
- (15) G. VERONESE.—Fondamenti di Geometria. Padova, 1891.
- (16) F. SCHUR.—Grundlagen der Geometrie. Teubner, 1909.