UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS NO-REGULAR Y TEOREMAS DE INVERSIÓN GLOBAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Óscar Reynaldo Madiedo

Director

Jesús Ángel Jaramillo Aguado

Madrid, 2014

ANÁLISIS NO-REGULAR Y TEOREMAS DE INVERSIÓN GLOBAL.

Óscar Reynaldo Madiedo Castro.

Memoria presentada para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

con mención de *Doctorado Europeo*

Junio 2014

Dirigida por el Profesor

Jesús Ángel Jaramillo Aguado.

Alguien le pregunta, ¿Que hace tu papá?,
y ella responde, mi papá es matemático.
Y vuelve y le pregunta, ¿y que hacen los Matemáticos?
y ella nuevamente responde,
aprenden los números para hacer la paz.

Laura Madiedo

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mis padres Reynaldo Madiedo y Martha Castro, por estar siempre apoyándome en cada proceso de mi vida.

A mi director Jesús Ángel Jaramillo por su gran apoyo y dedicación a lo largo de estos 4 años, por haber aceptado la no muy grata tarea de corregir mis innumerables errores, convirtiendo la lectura de este texto más agradable y sus buenos consejos tanto en lo académico como en lo personal han hecho que esta investigación saliera adelante, gracias Jesús !!!.

A mi esposa Norah y a mis hijos Laura y Martín, quienes me han dado todo su apoyo y comprensión para poder realizar este sueño de ser Doctor. Mi familia ha sido un fuerte motor en la búsqueda de este sueño. Espero seguir compartiendo logros al lado de ellos.

Quiero también agradecer a todos aquellos compañeros-amigos que están y han pasado por el despacho 251; Luis, Jerónimo, Estibalitz, Carlos, Alba, Daniel, Angelo, Óscar y Ana, en muchas ocasiones puede contar con la ayuda de cada uno de ustedes, no solo en lo académico sino en la personal. Y también a los que no pertenecen a ese reducido espacio; Marco, Raquel, Carlos, Nacho, Maribel quienes también me han brindado incondicionalmente su apoyo.

A cada miembro del Departamento de Anlisis Matemático, aunque con unos he tenido más relación que con otros, pero es un departamento en el cual se desarrolla un ambiente muy agradable de trabajo.

Sobre la tesis

Este trabajo de investigación lo he podido realizar con el apoyo económico del *Ministerio de Economia y competitividad*, gracias a la beca de *Formación de personal investigador (FPI)* con referencia BES-2010-031192 y en el marco del proyecto de Investigación *Análisis funcional no lineal y geométrico* con números de referencia MTM2009-07848 y MTM2012-34341 del cual soy miembro. A lo largo de estos cuatro años de investigación he podido realizar dos estancias de investigación en Francia, una de ellas en la Université de Bordeaux y la otra en la Université de Franche-Comté pudiendo establecer trabajo en colaboración con los investigadores Robert Deville y Luis Sánchez-Gónzalez. Esto me ha llevado a tener una formación bastante amplia y de la cual se ha obtenido un buen trabajo de investigación. Fruto de estas colaboraciones y del trabajo con mi director de tesis Jesús Ángel Jaramillo se ha podido obtener resultados nuevos en dos direcciones, una tiene que ver con el estudio de la inversión global en un contexto no regular y la otra está relacionada con la geometría en espacios de Banach, estos resultados se encuentran reflejados en las siguientes publicaciones:

- Global Inversion of nonsmooth mappings on Finsler manifolds. Jorunal of convex Analysis, Volumen 20 (2013), No 4, 1127-1146.
- Global inversion of nonsmooth mappings using pseudo-Jacobian matrices. Aceptado en Nonlinear Analysis.
- A caractererization of Radon-Nikodyn property. Journal Analysis and Application 405 (2013) No 1, 252-258.

Contenido

Introduction

As is well known, if $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a C^1-smooth mapping with everywhere nonzero Jacobian, then f is a local diffeomorphism. A natural problem is to study under which conditions we can obtain that f is, in fact, a global diffeomorphism or, equivalently, when f is globally invertible. This question was first considered by Hadamard [18], who obtained a sufficient condition, called ***integral condition***, in terms of the growth of the norm $\|[df(x)]^{-1}\|$. Namely, f is a global diffeomorphism provided

$$\int_0^\infty \inf_{\|x\|=t} \left\|[df(x)]^{-1}\right\|^{-1} \, dt = \infty.$$

The first chapter of this work is devoted to recall many of the extensions and variants of this result which have been obtained in different contexts. For example, an extension of the Hadamard integral condition to the case of local diffeomorphisms between Banach spaces was given by Plastock in [41]:

Theorem. *Let X and Y be a Banach spaces and let $f : X \to Y$ be a C^1-smooth function such that $df(x)$ is invertible for all $x \in X$. If*

$$\int_0^\infty \inf_{\|x\|\leq t} \left\|[df(x)]^{-1}\right\|^{-1} \, dt = \infty,$$

then f is a global diffeomorphism from X onto Y.

Let us remark that Hadamard's Theorem considers the infimum over the sphere, while Plastock's Theorem considers the infimum over the whole ball.

In a nonsmooth setting, John [30] obtained a variant of the Hadamard integral condition for a local homeomorphism f between Banach spaces in terms of the lower scalar derivative of the function f.

Definition. *Let X and Y be Banach spaces and let $f : X \to Y$ be a continuous function. The* ***lower and upper scalar derivatives*** *of f at $x \in X$ are respectively defined as follows:*

$$D_x^- f = \liminf_{u \to x} \frac{\|f(u) - f(x)\|}{\|u - x\|}, \quad D_x^+ f = \limsup_{u \to x} \frac{\|f(u) - f(x)\|}{\|u - x\|},$$

where $u \in X$ with $u \neq x$.

It was proved by John [30] that, if E and F are Banach spaces and $f : E \to F$ is differentiable at $x \in E$, then $D_x^+ f = ||df(x)||$ and, if in addition $df(x)$ is invertible, $D_x^- f = ||[df(x)]^{-1}||^{-1}$.

John's Theorem is the following one:

Theorem.
Let X and Y be Banach spaces and let $f : X \to Y$ be a local homeomorphism. Suppose that $0 < D_x^- f \leq D_x^+ f < \infty$ for each $x \in X$ and

$$\int_0^\infty \inf_{\|x\| \leq t} D_x^- f dt = \infty.$$

Then f is a global homeomorphism from X onto Y.

In the finite-dimensional case, Pourciau studied in [44] the global inversion of locally Lipschitz functions on $\mathbb{R}^n$. Before giving Pourciau's thereom, we recall that given $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a Lipchitz function on a neighborhood of $x \in \mathbb{R}^n$. The ***Clarke generalized Jacobian*** of f at x, denoted by $\partial f(x)$, is defined as

$$\partial f(x) = \text{co} \left\{ \lim_{i \to \infty} df(x_i) : x_i \to x \text{ and } df(x_i) \text{ exists} \right\}.$$

Now, the ***co-norm*** of a linear mapping $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is defined as

$$/\!/A/\!/ = \inf_{||u||=1} ||Au||,$$

and the co-norm of the Clarke generalized Jacobian is

$$/\!/\partial f(x)/\!/ = \inf\{/\!/A/\!/ : A \in \partial f(x)\}.$$

Note that, if f is a C^1-smooth mapping then $\partial f(x) = \{df(x)\}$ and $/\!/\partial f(x)/\!/ = \|df(x)^{-1}\|^{-1}$. Using these notions, Pourciau proved the following variant of the Hadamard integral condition.

Theorem. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a locally Lipschitz function and suppose that, for every $x \in \mathbb{R}^n$, every element of $\partial f(x)$ is invertible. If*

$$\int_0^\infty \inf_{\|x\|\leq t} /\!/\partial f(x)/\!/ = \infty,$$

then $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a global diffeomorphism.

Let us mention that the global invertibility of local diffeomorphisms between Banach-Finsler manifolds has been studied by Rabier in [47]. For recent global inversion results in a metric space setting, including a version of the Hadamard integral condition in terms of an analogous of lower scalar derivative, we refer to [17] and [15]. With a different approach, some global invertibility and global injectivity theorems have been recently obtained by Fernandes, Gutiérrez and Rabanal [14] and by Biasi, Gutiérrez and dos Santos [3]. These authors provide conditions on the spectrum of a Lipschitz local diffeomorphism f on $\mathbb{R}^n$ in order to obtain that f is globally injective or globally invertible.

Theorem. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a C^1 Lipschitz function and let*

$$Spec(f) = \{\lambda : x \in \mathbb{R}^n \text{ and } \lambda \text{ is an eigenvalue of } df(x)\}.$$

Suppose that for some $\varepsilon > 0$,

$$Spec(f) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\} = \emptyset.$$

Then f is a global diffeomorphism.

Motivated by these results, we study two questions in this thesis. First of all, we consider the problem of finding sufficient conditions for a locally Lipschitz mapping between Finsler manifolds to be a global homeomorphism. With that aim, we develop the notion of the Clarke generalized differential in the context of manifolds and then we obtain a version of the Hadamard integral condition. Consequently, we deduce some global inversion and global injectivity results for Lipschitz mappings on $\mathbb{R}^n$ in terms of the spectrum of the Clarke generalized differential.

The second problem considered in the thesis is the global inversion of a continuous nonsmooth mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, which may be non-locally Lipschitz. To this end, we use the notion of pseudo-Jacobian map associated to f, introduced by Jeyakumar and Luc in [29].

In order to study these two problems, we first have to recall a number of preliminary notions. In Chapter 1, we introduce the definitions and main properties of the Clarke generalized and Finsler manifolds in $\mathbb{R}^n$.

In Chapter 2 we present the already known results about global inversion, both in the smooth and the nonsmooth cases, among them, the theorems due to Hadamard, Plastock, John, Pourciau, Fernandes, Gutierrez and Rabanal that we have mentioned above.

Chapter 3 is organized as follows. In a first section, we introduce the notion of Clarke generalized differential in the general setting of smooth manifolds and obtain some fairly basic properties. In then we focus on the case of Finsler manifolds. Recall that a C^1 ***Finsler manifold*** is a pair $(M, ||\cdot||_M)$, where M is a C^1-smooth manifold and $||\cdot||_M : TM \to [0,\infty)$ is a continuous mapping on the tangent bundle TM of M such that, for every $x \in M$, the restriction $||\cdot||_x := ||\cdot||_{M|_{T_xM}} : T_xM \to [0,\infty)$ is a norm on the tangent space T_xM. Note that, in particular, every Riemann manifold is a Finsler manifold. The next result we compare the upper scalar derivative with the norm of the Clarke generalized differential for a locally Lipschitz mapping between Finsler manifolds. This relation will be of fundamental importance in order to obtain our global inversion results.

Lemma. *Let M and N be connected C^1 Finsler manifolds and let $f : M \to N$ a Lipschitz mapping on a neighborhood of $x \in M$. Then*

$$D_x^+ f \leq |||\partial f(x)|||_x.$$

Finally, we present our global inversion theorems. In the case of locally Lipschitz mappings between Finsler manifolds, we obtain a version of Hadamard integral condition in terms of the co-norm of the Clarke generalized differential:

Theorem. *Let M and N be connected C^1-Finsler manifolds of the same dimension, where M is complete and let $f : M \to N$ be a locally Lipschitz mapping such that, for all $x \in M$, every element of $\partial f(x)$ is invertible. Assume that there exists $x_0 \in M$ such that*

$$\int_0^\infty m(t)dt = \infty, \quad \textit{where} \quad m(t) = \inf_{x \in \overline{B}_M(x_0,t)} ///\partial f(x)///_x.$$

Then f is a covering map. That is, every $z \in N$ has an open neighborhood W such that $f^{-1}(W)$ is the disjoint union open subsets of M, each of which is mapped homeomorphically onto W by f.

Now, let $f : M \to N$ be a covering map between path-connected metric spaces, and $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ the associated morphism between their fundamental groups. It is well known that f is a homeomorphism from M onto N if, and only if, $f_*[\pi_1(M)] = \pi_1(N)$ (see e.g. [50, Chapter 2]). Thus we obtain the following corollary.

Corollary. *Under the assumptions of theorem above, assume that either N is simply connected or $\pi_1(M) = \pi_1(N)$ is finite. Then f is a global homeomorphism.*

As a consequence of the previous theorem, we give an extension of the results due to Fernandes, Gutierrez, dos Santos and Rabanal that appear in [3] and [14]:

Theorem. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a Lipschitz mapping such that, for every $x \in \mathbb{R}^n$, every element of $\partial f(x)$ is invertible. Assume that there exists $x_0 \in \mathbb{R}^n$ such that*

$$\int_0^\infty s(t)dt = \infty, \quad \textit{where} \quad s(t) = \inf_{x \in \overline{B}(x_0,t)} \{|\lambda|^n : \lambda \in \mathrm{Spec}(\partial f(x))\}.$$

Then f is a global homeomorphism.

As we have mentioned above, we are also interested in the global inversion of a continuous nonsmooth function f on $\mathbb{R}^n$ that may be non-locally Lipschitz. This problem is studied in Chapter 4. We will recall the concept of *pseudo-Jacobian* of the mapping f, introduced by Jeyakumar and Luc in [27] and studied later in [28, 35, 29]. This is, let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a continuous mapping. We say that a nonempty closed set of $m \times n$ matrices $Jf(x) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ is a ***pseudo-Jacobian*** of f at x if for every $u \in \mathbb{R}^n$ and $v \in \mathbb{R}^m$ one has

$$(vf)^+(x;u) \leq \sup_{M \in Jf(x)} \langle v, Mu \rangle,$$

where vf is the real function $(vf)(x) = \sum_{i=1}^m v_i f_i(x)$ for every $x \in \mathbb{R}^n$, (v_i being components of v and f_i being components of f), and $(vf)^+(x;u)$ is the upper Dini directional derivative of the function vf at x in the direction u, that is

$$(vf)^+(x;u) := \limsup_{t \to 0^+} \frac{(vf)(x+tu) - (vf)(x)}{t}.$$

If for every $x \in \mathbb{R}^n$ we have that $Jf(x)$ is a pseudo-Jacobian of f at x, we say that the set-valued map $Jf : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ given by $Jf : x \mapsto Jf(x)$ is a pseudo-Jacobian map for f. Throughout the chapter, we will be interested in pseudo-Jacobians with nice stability properties, in the sense that they are upper semicontinuous, this is, let $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be a set-valued map. We say that F is ***upper semicontinuous** (usc)* at x if for every $\varepsilon > 0$, there exists some $\delta > 0$ such that

$$F(x + \delta \mathbf{B}_n) \subseteq F(x) + \varepsilon \mathbf{B}_m.$$

It is well-known that the Clarke generalized Jacobian of a locally Lipschitz mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is usc (see [8, Proposition 2.6.2]). Recall that a set-valued map $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ is said to be ***locally bounded*** at x if there exist a neighborhood U of x and a constant $\alpha > 0$ such that $\|A\| \leq \alpha$ for each $A \in F(U)$. Clearly, if F is usc at x and $F(x)$ is bounded, then F is locally bounded at x. On the other hand, it is proved in [29, Proposition 2.2.8] that a continuous mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ has a locally bounded pseudo-Jacobian map at x if, and only if, f is locally Lipschitz at x.

In search of our main result of global inversion, we introduce the concept of regularity for pseudo-Jacobian maps as follows. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a continuous mapping, and let $Jf : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ be a pseudo-Jacobian map of f. The associated ***regularity index*** of f at $x \in \mathbb{R}^n$ denoted by $\alpha_{Jf}(x)$ is defined as

$$\alpha_{Jf}(x) := \inf\{//A// : A \in co(Jf(x))\}.$$

We say that f is Jf***-regular at*** x if $\alpha_{Jf}(x) > 0$. When f is Jf-regular at x for every $x \in \mathbb{R}^n$, we say that f is Jf-regular.

The connection of the regularity index with the original Hadamard integral condition can be seen as follows. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a a C^1-smooth mapping with everywhere nonzero Jacobian and consider the natural pseudo-Jacobian of Jf of f given by $Jf(x) = \{df(x)\}$. Then it is easy to see that

$$\alpha_{Jf}(x) = \left\|df(x)^{-1}\right\|^{-1}.$$

Using these notions, in Chapter 4 we obtain a characterization of global inversion in terms of the index of regularity:

Theorem. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a continuous mapping and let Jf be a pseudo-Jacobian map of f. Suppose that Jf is upper semicontinuous and f is Jf-regular on $\mathbb{R}^n$. The following conditions are equivalent:*

- *(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a global homeomorphism.*
- *(b) For each compact subset $K \subset \mathbb{R}^n$ there exists $\alpha_K > 0$ such that $\alpha_{Jf}(x) > \alpha_K$ for every $x \in f^{-1}(K)$.*

In the last part of this chapter we are going to obtain variants of the Hadamard integral condition in terms of the lower scalar Dini derivative and of the regularity index. First, we need to recall the following concept from [30]. Suppose that E and F are Banach spaces, $D \subset E$ is an open set and $f : D \to F$ is a local homeomorphism. Then for each $x \in D$ there is a neighborhood S_x of $f(x)$ in F such that f has a local inverse f_x^{-1} in S_x. Moreover, as it was proved in [30], S_x can be chosen as to be the so-called ***maximal star*** with vertex $f(x)$, which is defined as the set of all points $z \in F$ for which the line segment $[f(x), z]$ can be lifted to a path γ in D starting at x, and such that f maps homeomorphically the image $Im(\gamma)$ onto the segment $[f(x), z]$. The following properties are also obtained in [30]:

(i) (Star-shaped) S_x is an open neighborhood of $f(x)$, which is star-shaped with vertex $f(x)$, that is, for each $z \in S_x$ the whole segment $[f(x), z]$ is also contained in S_x.

(ii) (Maximality) S_x is maximal in the sense that for every sequence $(z_n) \subset S_x$ that lies on the same ray from $f(x)$ and converges to a point $z \notin S_x$, the sequence $\{f_x^{-1}(z_n)\}$ does not converge in D.

(iii) (Monodromy) For each path q contained in D connecting x with some point y, and such that $f(Im(q))$ is contained in S_x, we have that $f_x^{-1}(f(y)) = y$.

Theorem. *Let E and F be Banach spaces, let $\mathbf{B}(x_0, \rho)$ be an open ball of E and let $f : \mathbf{B}(x_0, \rho) \to F$ be a local homeomorphism. Suppose that*

$$\inf_{\|x-x_0\| \le r} (D_x^- f) > 0 \quad \textit{for} \quad 0 \le r < \rho,$$

and there exists a locally Riemann-integrable function $\eta : [0, \rho) \to (0, \infty)$ such that

$$0 < \eta(t) \le \inf_{\|x-x_0\| = t} D_x^- f \quad \textit{for} \quad 0 \le t < \rho.$$

Then the maximal star S_{x_0} contains the open ball $\mathbf{B}(f(x_0), \sigma)$, where

$$\sigma = \int_0^\rho \eta(t) dt.$$

As a consequence of Theorem above, we obtain a sufficient condition for global inversion by means of an integral condition in terms of the lower scalar Dini derivative.

Corollary. *Let E and F be Banach spaces and $f : E \to F$ a local homeomorphism such that*

$$\inf_{\|x\| \le r} (D_x^- f) > 0 \quad \textit{for} \quad 0 \le r < \infty.$$

Suppose that there exists a locally Riemann-integrable function $\eta : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *such that*

$$\int_0^\infty \eta(t)dt = \infty \qquad \text{and} \qquad 0 < \eta(t) \leq \inf_{\|x\|=t} D_x^- f \quad \text{for} \quad 0 \leq t < \infty.$$

Then f *is a global homeomorphism from* E *onto* F*. Moreover, for each* $x \in E$*,*

$$\|f(x) - f(0)\| \geq \int_0^{\|x\|} \eta(t)dt.$$

The last part of the thesis considers a problem in the geometry of Banach spaces. It is well known that every bounded below and non increasing sequence in the real line converges. Our purpose is to state an analogue of this in the real line $\mathbb{R}$ converges in the framework of a Banach space X. This is not obvious, even when $X = \mathbb{R}^2$. However, we shall see that it is indeed possible in Banach spaces with the Radon-Nikodym property. Recall that, a Banach space X has the ***Radon-Nikodym property*** if, for every non empty closed convex bounded subset C of X and every $\eta > 0$, there exists g in the unit sphere of the dual of X and $c \in \mathbb{R}$ such that $\{x \in C;\, g(x) < c\}$ is non empty and has diameter less than η. In Chapter 5 we give a version of this result valid in Banach spaces with the Radon-Nikodym property. This chapter is organized as follows. The first part is devoted to the proof of two elementary geometrical lemmas. Then we define a mapping t on a given subset of X such that for every sequence (x_n) in this subset satisfying the assumptions of theorem, the sequence (x_n) is η-Cauchy for some $\eta > 0$. Such a mapping will be called η-tactic. Next we prove that every mapping which is near (in some sense) the function t is also an η-tactic. We are thus led to the definition of multi-η-tactic. We then construct, for a given sequence (η_k) tending to 0, a decreasing sequence of multi-η_k-tactics, and we prove main result in the last part of the chapter.

The main theorem is the following.

Theorem. *Let* X *be a Banach space with the Radon-Nikodym property. Let* $f \in S_{X^*}$ *and* $\varepsilon \in (0,1)$ *be fixed. There exists a function* $t : X \to S_{X^*} \cap B(f,\varepsilon)$ *such that for all sequence* (x_n)*, if the sequence* $\big(f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|\big)$ *is bounded below and if* $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant 0$ *for all* $n \in \mathbb{N}$*, then the sequence* (x_n) *converges in* X*.*

The previous theorem can be reformulated in terms of games. This presentation was introduced in [36], see also [11] and [52]. There are two players A and B who play alternatively. Player A chooses linear functionals $f_n \in S_{X^*} \cap B(f,\varepsilon)$ and player B chooses x_n in the cone $\{x \in X; f(x) - \varepsilon\|x\| + m \geqslant 0\}$ for some $m \in \mathbb{R}$, with the following rules.

- player B chooses a point x_0;
- once B has played x_n, A chooses $f_n \in S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$;
- once A has played f_n, B chooses x_{n+1} such that $f_n(x_{n+1} - x_n) \leqslant 0$.

Player A wins if the sequence (x_n) converges. A winning tactic for player A is a function $t : X \to S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$ such that, if for each n, $f_n = t(x_n)$, then A wins the game. This theorem expresses the fact that in spaces with the Radon-Nikodym property, player A has always a winning tactic.

Let us notice that this theorem is actually a characterization of the Radon-Nikodym property. Indeed, if X fails the Radon-Nikodym property, there exists a non empty convex bounded subset C of X and $\eta > 0$, such that for all $f \in S_{X^*}$ and $c \in \mathbb{R}$, if the slice $C \cap \{f < c\}$ is non empty, then it has diameter greater than 2η. Moreover, we can assume that C is open. Indeed, if $\delta < \eta$, the set $C + B(0, \delta)$ is open and all its slices have diameter greater than $2(\eta - \delta)$. Now let (f_n) be a sequence in S_{X^*}. We construct inductively a sequence (x_n) in C as follows. We choose arbitrarily $x_0 \in C$. Once x_n has been constructed, we note that the slice $C \cap \{f_n < f_n(x_n)\}$ is non empty because $x_n \in C$ and C is open, so this slice has diameter greater than 2η, hence we can choose x_{n+1} in C such that $f_n(x_{n+1} - x_n) < 0$ and $\|x_{n+1} - x_n\| \geqslant \eta$. Moreover, since $\{f(x) - \varepsilon\|x\|;\, x \in C\}$ is bounded below, we have in particular that $\{f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|;\, n \in \mathbb{N}\}$ is bounded below. This clearly contradicts the existence of a function t with the property of Theorem 5.1.3.

Let us notice particular cases of the main theorem have been obtained in [11] and [36], and used there to give a simple proof of Buchzolich's solution of the Weil gradient problem, and also used in [12] to construct almost classical solutions of Hamilton-Jacobi equations.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Fenómenos no regulares en Matemáticas y de modo particular en Optimización se producen de forma natural y con frecuencia; en optimización este tipo de problemas se resuelven por lo general maximizando o minimizando una función y, cuando esta es diferenciable, su derivada entonces se anula. Pero para el caso no-regular tratamos con funciones que no necesariamente son diferenciables. Por esto se ve la necesidad de estudiar propiedades de diferenciabilidad de funciones no necesariamente diferenciables. En este capítulo vamos a dar un conjunto de herramientas básicas que van a ser de gran utilidad en el transcurso de este trabajo. Iniciaremos en la Sección 1.1 estudiando el gradiente generalizado de Clarke [6], [8]. A continuación en la Sección 1.1.2 estudiaremos el Jacobiano generalizado de Clarke [8] con el cual se obtiene un resultado de inversión local; para más detalles consultar en [7]. Y para terminar en la Sección 1.3 estudiaremos resultados básicos sobre variedades diferenciables y los fibrados vectoriales en variedades. Todo este conjunto de herramientas, conceptos, propiedades y resultados se emplea en el grueso de esta tesis.

1.1. GRADIENTE GENERALIZADO EN ESPACIOS DE BANACH

La terminología y notación de esta sección está tomada de Clarke [8]. En esta sección estudiaremos el concepto de Jacobiano generalizado de Clarke y algunas de sus propiedades. Para llegar a esto, empezaremos estudiando los conceptos de derivada generalizada y gradiente generalizado de una función localmente Lipschitz.

1.1.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Durante toda la sección se va a trabajar en un espacio de Banach X, y cada elemento $x \in X$ va a hacer referencia a un punto como vector. Denotaremos por $\|x\|$, $\mathbf{B}_X$, $\overline{\mathbf{B}}_X$ y X^* la norma, la bola unidad abierta, la bola unidad cerrada y el dual del espacio X respectivamente. A continuación vamos a recordar cúando una función satisface la condición de Lipschitz.

Definición 1.1.1. Sea Y un subconjunto de X. Diremos que una función $f : Y \to \mathbb{R}$ satisface la ***condición de Lipschitz (en*** Y***)***, siempre que, para algún K no negativo y para todo par de puntos $y, y' \in Y$, satisface:

$$|f(y) - f(y')| \leq K\|y - y'\|. \tag{1.1.1}$$

Más precisamente, la llamaremos *condición de Lipschitz* de constante K en Y.

Diremos que f es ***Lipschitz*** (de constante K) alrededor de x si, para algún $\varepsilon > 0$, f satisface la condición de Lipschitz (de constante K) en el conjunto $x + \varepsilon\overline{\mathbf{B}}_X$ (es decir, dentro de una ε-vecindad de x).

Ahora veamos la definición de derivada generalizada de una función localmente Lipschitz.

Definición 1.1.2.
Sean X un espacio de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz alrededor de un punto $x \in X$ dado, y v un vector en X. ***La Derivada Direccional Generalizada*** de f en x en la dirección v, denotada por $f^\circ(x; v)$ se define como sigue:

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

donde y es un vector en X y t es un escalar positivo. Podemos notar que esta definición no presupone la existencia de cualquier límite (solo involucra un límite superior). Esto implica sólo el comportamiento de f arbitrariamente cerca de el punto x y se diferencia de la definición clásica de derivada direccional en el sentido que el punto de base y de la diferencia del cociente varía. Recordemos que una función g es *positivamente homogénea* si $g(\lambda v) = \lambda g(v)$ para $\lambda \geq 0$, y *sub-aditiva* si $g(v + w) \leq g(v) + g(w)$.

Por otra parte, recordemos la definición de función semicontinua superiormente e inferiormente, ya que son conceptos que vamos a utilizar en el transcurso de toda la tesis.

Definición 1.1.3. Se dice que una función $f : X \to (\infty, +\infty]$ es ***semicontinua inferiormente (lsc) en*** x si satisface la siguiente condición

$$\liminf_{x' \to x} f(x') \geq f(x)$$

Esta condición es equivalente a que: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \mathbf{B}(x;\delta)$ entonces $f(y) \geq f(x) - \varepsilon$.

Definición 1.1.4. Se dice que f es *semicontinua superiormente (usc) en* x si $-f$ es semicontinua inferiormente.

Los resultados que se presentan a continuación están relacionados con algunas propiedades básicas tanto de la derivada direccional generalizada como del gradiente generalizado. Los detalles se pueden consultar en [8].

Proposición 1.1.5.
Sea f una función Lipschitz de constante K cerca de x. Entonces:

(a) La función $f^\circ(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ dada por $v \mapsto f^\circ(x;v)$ es finita, positivamente homogénea y subaditiva en X, y satisface

$$|f^\circ(x;v)| \leq K\|v\|.$$

(b) $f^\circ(x;v)$ es semicontinua superiormente en función de $(x;v)$ y, como una función sólo de v, es Lipschitz de constante K en X.

(c) $f^\circ(x;-v) = (-f)^\circ(x;v)$.

Recordemos que el Teorema de Hahn-Banach afirma que cualquier funcional positivamente homogéneo y sub-aditivo en X acota por arriba a algún funcional lineal en X. Por tanto, bajo las condiciones de la Proposición 1.1.5, existe al menos un funcional lineal $\zeta : X \to \mathbb{R}$ tal que, para todo v en X, uno tiene $f^\circ(x;v) \geq \zeta(v)$. Se sigue también que ζ es acotado y por tanto pertenece a X^*. Utilizaremos la notación $\langle \zeta, v\rangle$ en lugar de $\zeta(v)$ para los valores del funcional lineal ζ en v. Con esto procederemos a definir el gradiente generalizado y veremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.6.
Sea X un espacio de Banach y sea f una función Lipschitz alrededor de $x \in X$. El ***gradiente generalizado de Clarke de f en*** x, denotado por $\partial f(x)$, es el subconjunto de X^* dado por

$$\partial f(x) := \{\zeta \in X : f^\circ(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle, \text{ para todo } v \in X\}.$$

Recordemos que $F : X \to Y$ es una ***función multivaluada*** si es una función de X en los subconjuntos de Y. Ahora podemos definir la semicontinuidad superior de una función multivaluada.

Definición 1.1.7.
Sean X e Y espacios de Banach. Una función multivaluada $F : X \to Y$ se dice que es *semicontinua superiormente* en x si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$F(y) \subset F(x) + \varepsilon \mathbf{B}_Y \quad \text{para todo} \quad y \in x + \varepsilon \mathbf{B}_X.$$

Denotamos por $\|\zeta\|$ la norma natural en X^* definida como:

$$\|\zeta\| := \sup\{\langle \zeta, v \rangle : v \in X, \|v\| \leq 1\}$$

y $\mathbf{B}_{X^*}$ denota la bola unidad abierta en X^*.

A continuación se resumen algunas propiedades básicas del Gradiente Generalizado.

Proposición 1.1.8.
Sea f una función Lipschitz de constante K alrededor de x. Entonces:

(a) *$\partial f(x)$ es un subconjunto de X^*, no-vacío, convexo y débil*-compacto y $\|\zeta\| \leq K$, para todo $\zeta \in \partial f(x)$.*

(b) *Para todo $v \in X$, se tiene*

$$f^\circ(x, v) = \max\{\langle \zeta, v \rangle \ : \zeta \in \partial f(x)\}.$$

(c) *$\zeta \in \partial f(x)$ si y solo si, $f^\circ(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle$, para todo $v \in X$.*

(d) *Sean $\{x_i\}$ y $\{\zeta_i\}$ sucesiones en X y X^* respectivamente, tales que $\zeta_i \in \partial f(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, si $x_i \to x$ y ζ es un punto de acumulación de la sucesión ζ_i en la topología débil*. Entonces $\zeta \in \partial f(x)$.(Esto es, la función multivaluada ∂f es débil*-cerrada.)*

(e) Si X es finito dimensional, entonces ∂f es semicontinua superiormente en x.

El siguiente ejemplo sencillo nos da una idea de cómo calcular en gradiente generalizado ver ([8, Ejemplo 2.1.3]).

Ejemplo 1.1.9.
Calculemos el Gradiente Generalizado de Clarke para el caso de $X = \mathbb{R}$ y $f(x) = |x|$.

Como f es Lipschitz procedemos a calcular $\partial f(x)$; para esto analizaremos tres casos. Para el caso $x > 0$, calculamos

$$f^{\circ}(x;v) = \lim_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{y + tv - y}{t} = v,$$

de modo que $\partial f(x)$ es el conjunto de números ζ que satisfacen $v \geq \zeta v$ para todo v. De esta manera $\partial f(x)$ se reduce a $\{1\}$. En el otro caso, si $x < 0$, se deduce similarmente a lo anterior que $\partial f(x) = \{-1\}$. Y por último si $x = 0$ obtenemos

$$f^{\circ}(0;v) = \begin{cases} v & \text{si} \quad v \leq 0 \\ -v & \text{si} \quad v < 0, \end{cases}$$

luego, $f^{\circ}(0;v) = |v|$. Así, $\partial f(0)$ consiste en aquellos ζ que satisfacen $|v| \geq \zeta v$ para todo v. Por lo tanto, $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Los siguientes resultados nos proporcionan un teorema del valor medio y una regla de la cadena en un contexto no regular usando el gradiente generalizado.

Teorema 1.1.10 (*Teorema del Valor Medio de Lebourg*)**.**
Sean $x, y \in X$, y supongamos que f es Lipschitz en un conjunto abierto que contenga el segmento $[x, y]$. Entonces existe un punto u en el segmento abierto (x, y) tal que

$$f(y) - f(x) \in \langle \partial f(u), y - x \rangle$$

Teorema 1.1.11 (La regla de la Cadena)**.**
Sean $F : X \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz cerca de x y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ otra función Lipschitz cerca de $F(x)$. Entonces la función $f(x') := g(F(x'))$ es Lipschitz cerca de x, y además tenemos

$$\partial f(x) \subset \overline{co}^{*}\{\partial \langle \gamma, F(\cdot) \rangle (x) : \gamma \in \partial g(F(x))\},$$

donde $\overline{co}^{*}$ significa la envoltura convexa y débil*-cerrada.

1.1.2. GRADIENTE GENERALIZADO EN DIMENSIÓN FINITA

Para empezar, recordemos el célebre Teorema de Rademacher ver [48].

Teorema 1.1.12 (*Teorema de Rademacher*).
Sea U un subconjunto cerrado y no-vacío de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $f : U \to \mathbb{R}^m$ es localmente Lipschitz. Entonces f es (Fréchet) diferenciable en casi todo punto de U (en el sentido de la medida de Lebesgue).

Teniendo en cuenta el Teorema de Rademacher, se puede caracterizar el gradiente generalizado en dimensión finita, ya que éste nos garantiza que, si la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Lipschitz en un conjunto abierto U, entonces es diferenciable en casi todo punto en U (en el sentido de la medida de Lebesgue).

Teorema 1.1.13. [8, Teorema 2.5.1]
Sean f Lipschitz alrededor de x y Ω_f el conjunto de puntos donde f no es diferenciable y supongamos que S es cualquier subconjunto de medida cero (en el sentido de Lebesgue) en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\partial f(x) := co\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) : x_i \to x,\, x_i \notin S, x_i \notin \Omega_f\}.$$

El significado de esto es considerar cualquier sucesión $\{x_i\}$ que converge a x y donde $x_i \notin S \cup \Omega_f$ tal que la sucesión $\{\nabla f(x_i)\}$ converge. Entonces la envoltura convexa de todos estos límites es $\partial f(x)$.

Veamos un ejemplo sencillo de cómo calcular el gradiente generalizado usando el teorema anterior.

Ejemplo 1.1.14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \max\{\min[x, -y], y - x\}.$$

Calculemos $\partial f(0, 0)$.

Para esto, definamos

$$\begin{aligned} C_1 =& \{(x, y) : y \le 2x \text{ e } y \le -x\} \\ C_2 =& \{(x, y) : y \le x/2 \text{ e } y \ge -x\} \\ C_3 =& \{(x, y) : y \ge 2x \text{ o } y \ge x/2\}. \end{aligned}$$

Entonces $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{R}^2$, y además tenemos que

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{para} \quad (x,y) \in C_1 \\ -y, & \text{para} \quad (x,y) \in C_2 \\ y-x, & \text{para} \quad (x,y) \in C_3 \end{cases}$$

Se puede ver que la frontera de estos tres conjuntos forman un conjunto S de medida 0, y que si (x,y) no está en S, entonces f es diferenciable y $\nabla f(x,y)$ es uno de los puntos $(1,0), (0,-1)$, ó $(-1,1)$. Por lo tanto, del Teorema 1.1.13 se sigue que $\partial f(0,0)$ es el triángulo obtenido como la envoltura convexa de estos tres puntos.

1.2. JACOBIANO GENERALIZADO Y TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

En esta sección estudiaremos el clásico Teorema de función inversa, el cual nos proporciona condiciones para que una función f admita (localmente) una inversa. Nuestro propósito está en buscar condiciones para que una función Lipschitz (no necesariamente diferenciable) admita (localmente) una función inversa y que sea Lipschitz. Una forma conveniente para obtener la existencia de esta función inversa es el gradiente generalizado propuesto por Clarke [8].

1.2.1. JACOBIANO GENERALIZADO EN DIMENSIÓN FINITA

Consideremos una función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, escrita en componentes de la forma $f(x) = [f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x)]$. Asumamos que cada f^i (y por lo tanto f) es Lipschitz cerca de un punto de interés x. Al igual que antes el Teorema de Rademacher (Teorema 1.1.12) nos dice que f es diferenciable (es decir cada f^i es diferenciable) en casi todo punto en cualquier vecindad de x en donde f es Lipschitz. Denotamos por Ω_f el conjunto de puntos donde F no es diferenciable y $df(y)$ la matriz jacobiana usual $n \times m$ de derivadas parciales siempre que y sea un punto donde las derivadas parciales existan.

Definición 1.2.1.
El ***Jacobiano Generalizado de Clarke*** de f en x, denotado $\partial f(x)$, es la envoltura convexa

de todas las matrices A obtenidas como el límite de una sucesión de la forma $df(x_i)$ cuando $x_i \to x$ y $x_i \notin \Omega_f$,

De esta manera, tenemos que:

$$\partial f(x) = co\{\lim_{i\to\infty} df(x_i) : x_i \to x, x_i \notin \Omega_f\}.$$

Ahora denotamos de $\mathcal{M}_{m\times n}$ el espacio vectorial de todas matices A de $m \times n$ dotado por la norma

$$\|A\|_{m\times n} = \sup_{\|u\|=1} \|A(u)\|.$$

Cabe notar que si comparamos el enunciado del Teorema 1.1.13 y la definición del *Jacobiano generalizado de Clarke*, el conjunto de medida cero S del Teorema 1.1.13 puede ser omitido. De hecho, el gradiente generalizado Clarke es “ciego” a conjuntos de medida cero, como se muestra en el Teorema 1.1.13, y esto también es cierto para el Jacobiano Generalizado de Clarke como lo demuestra en [6]. Para el caso $m > 1$, M. Fabian y D. Preiss (también se puede consultar Warga [51]) obtienen el siguiente resultado:

Teorema 1.2.2. [13, *M. Fabian y D. Preiss*]
Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función localmente Lipschitz y $\partial_{S_0} f(x)$ el Jacobiano Generalizado de f en x con respecto de S_0 definido por

$$\partial_{S_0} f(x) = co\{\lim df(x_i) : x_i \to x, x_i \notin S_0\},$$

entonces

$$\partial_{S_0} f(x) = \partial f(x)$$

para todo m y para todo conjunto nulo S_0 conteniendo a S.

Se debe hacer notar que $\partial f(x)$ no es en realidad un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (cuando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) como se ha pretendido hasta ahora. Para ser coherente con el Jacobiano Generalizado, ∂f esta conformada por matrices de $1 \times n$ (*i.e.*, vectores filas). Por otra parte, la convención habitual es que los operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son de la forma $f(x) = Ax$ donde A es una matriz de $m \times n$, y son representados por multiplicación. Esto es lo que nos hace ver $\mathbb{R}^n$ como matrices de $n \times 1$ (*i.e.*, vectores columna), y así obtenemos $\partial f(x) = \{A\}$ como nosotros desearíamos. Esta distinción es irrelevante, siempre y cuando permanezcamos en el caso $m = 1$, pero debe respetarse en la interpretación. Este término es introducido por Clarke

[8] para estudiar el control óptimo y problemas variacionales con datos no regulares. Esta noción y variaciones de la misma se han utilizado para ampliar los resultados en programación lineal, control óptimo y análisis global. Se puede consultar por ejemplo Clarke [8, 9], Halkin [19, 20], Hiriart-Urruty [22, 23] o Pourciau [44, 42].

A continuación, damos algunas propiedades fundamentales de $\partial f(x)$; para más propiedades y detalles se puede consultar [8] y [9].

Proposición 1.2.3.

(a) $\partial f(x)$ *es un subconjunto de* $\mathbb{R}^{m\times n}$ *no-vacío, convexo y compacto.*

(b) ∂f *es cerrado en* x*, esto es, si* $x_i \to x y M_i \to M$*, entonces* $M \in \partial f(x)$*.*

(c) ∂f *es semicontinua superiormente en* x*, esto es, para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $y \in x + \delta \mathbf{B}_n$*,*

$$\partial f(y) \subset \partial f(x) + \varepsilon \mathbf{B}_{m\times n}.$$

La siguiente proposición es una extensión del teorema del valor medio vectorial usando el Jacobiano generalizado de Clarke.

Proposición 1.2.4.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y convexo, sea* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *una función Lipschitz y sean* x *e* y *dos puntos de* U*. Entonces*

$$f(y) - f(x) \in co\,\partial f([x, y])(y - x).$$

Por último, damos una versión de regla de la cadena en términos del Jacobiano generalizado de Clarke y una consecuencia inmediata de ella. Estos dos resultados son extendidos en el capítulo 3 de esta tesis en un contexto de variedades Finsler.

Teorema 1.2.5 (Regla de la cadena)**.**
Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función Lipschitz alrededor de* x *y* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *una función Lipschitz alrededor de* $h(x)$*. Entonces,* $f = g \circ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es Lipschitz alrededor de* x *y*

$$\partial f(x) \subset co\{\partial(h(x)) \circ \partial h(x)\}.$$

Si, además, g *es de clase* C^1*, entonces*

$$\partial f(x) = dg(h(x)) \circ \partial h(x).$$

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.6. *Sean $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz alrededor de x y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ una función Lipschitz alrededor de $h(x)$. Entonces, para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$\partial f(x)v \subset co\{\partial g(h(x)) \circ \partial h(x)v\}.$$

Si además g es de clase C^1 alrededor de $f(x)$, entonces

$$\partial f(x) = dg(h(x))\partial h(x)v.$$

1.2.2. TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función localmente Lipschitz. Denotamos por $\mathcal{M}$ al espacio vectorial de matrices $n \times n$ dotado con la norma $\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$ siendo $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n} \in \mathcal{M}$. El Jacobiano Generalizado de f en x_0 es el convexo más pequeño que contiene a todas las matrices A de la forma

$$A = \lim_{i\to\infty} df(x_i)$$

donde $\{x_i\}$ es una sucesión de puntos en los que existe $df(x_i)$ y la sucesión $\{x_i\}$ converge a x_0. La existencia de x_i es una consecuencia del teorema de Rademacher, aplicándolo a las funciones componentes de f. Además, como f es K-Lipschitz entonces $df(x)$ está acotado alrededor de x_0.

Ya que el Jacobiano generalizado es un conjunto de matrices, veremos cuándo tiene rango máximo. Este concepto es importante para la obtención del Teorema de la función inversa local usando el Jacobiano generalizado de Clarke.

Definición 1.2.7.
Sean $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que $\partial f(x_0)$ es de ***rango máximo*** si cada $A \in \partial f(x_0)$ es de ***rango máximo*** .

Ahora procedemos a enunciar el Teorema de la función inversa en un contexto no regular que será de gran utilidad para la obtención de alguno de nuestros resultados de inversión global que presentaremos en el Capítulo 3.

Teorema 1.2.8 (Teorema de Inversión Local Clarke-Pourciau [7], [44])**.**
Supongamos que $\partial f(x)$ es de rango máximo. Entonces la función f es un homeomorfismo de una vecindad U de x en una vecindad V de $y = f(x)$ y satisface que:

(a) La inversa local g definida en $V = f(U)$ es Lipschitz.

(b) Para casi todo $z \in U$, se tiene que

$$dg[f(z)] \circ df(z) = I.$$

Donde I denota la función identidad de $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.2.9. *Cuando f es de clase C^1, $\partial f(x_0)$ se reduce a $df(x_0)$, y la función g es necesariamente de clase C^1. Con esto se recupera el teorema clásico.*

1.3. VARIEDADES DIFERENCIABLES Y FIBRADOS VECTORIALES

En esta sección daremos un rápido repaso de sobre las variedades diferenciables y algunas de sus propiedades, estudiaremos como se define un fibrado vectorial y definiremos lo que son las variedades Riemann y Finsler. Las definiciones y resultados son tomados fundamentalmente de [33], [32], [50], [37].

1.3.1. VARIEDADES DIFERENCIABLES

Esta parte contiene una breve introducción sobre la teoría de variedades diferenciables y sobre sus espacios tangentes.

Definición 1.3.1. [Cartas y Atlas]
Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio n-dimensional y sea M un espacio topológico. Sxupongamos que tenemos:

- Una colección de abiertos $\{U_i\}_{i\in I} \subset M$ tal que $\bigcup_{i\in I} U_i = M$.
- Una colección de funciones $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ de manera que $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ es un homeomorfismo para cada $i \in I$.

Los pares (U_i, φ_i) se llaman ***cartas*** de M, y si $x \in U_i$, entonces diremos que (U_i, φ_i) es una *carta* de M en x. Diremos que M es una ***variedad topológica modelada en*** $\mathbb{R}^n$ si satisface la siguiente condición de compatibilidad: dadas (U, φ) y (V, ψ) cartas en M, entonces la función $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Diremos que un ***atlas*** es una colección de cartas compatibles que recubren a M.

Observación 1.3.2. *A veces es conveniente olvidarnos de la topología inicial de M y dotarlo de una topología utilizando las cartas, esto es, si tenemos recubrimientos de M por abiertos U y funciones inyectivas φ tal que $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces tendremos que los U son abiertos en M y estos inducirían una topología en M (esto tiene sentido siempre y cuando las funciónes $\phi \circ \varphi^{-1}$ sean continuas).*

Definición 1.3.3. Una variedad M es de clase C^k (con $0 \leq k < \infty$), si para todo par de cartas (U, ψ) y (V, φ) de M, las funciones $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^k.

Definición 1.3.4. Sean M y N dos variedades de clase C^k modeladas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Una función $f : M \to N$ es de clase C^k en $x \in M$ si existen cartas (U, φ) de M en x y (V, ψ) de N en $f(x)$, tales que $f(U) \subset V$ y la función

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

es de clase C^k en $\varphi(x)$.

$$\begin{tikzcd}
M \supset U \arrow[r, "f"] & V \subset N \arrow[d, "\psi"] \\
\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[u, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "\psi \circ f \circ \varphi^{-1}"] & \mathbb{R}^n \supset \psi(V)
\end{tikzcd}$$

1.3.2. FIBRADO Y ESPACIO TANGENTE

Dado un producto cartesiano $A \times B$ llamaremos $pr : A \times B \to A$ a la ***proyección*** sobre la primera coordenada.

Definición 1.3.5. Fibrado vectorial
Un ***fibrado vectorial de clase*** C^k (con $0 \leq k \leq \infty$) consiste en una terna (Z, M, π) dada por dos variedades diferenciables Z, M de clase C^k y una función $\pi : Z \to M$ de clase C^k tal que:

- Existe un espacio vectorial de dimensión finita V (llamado ***fibra típica***).
- Existe $\{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento por abiertos de M y para cada $i \in I$ existe un difeomorfismo $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times V$de clase C^k tal que $\pi = pr \circ \Phi_i$. Es decir, localmente, π es una

proyección:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\Phi_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times V \arrow[dl, "pr"] \\ U_i & \end{tikzcd} .$$

Al par (U_i, Φ_i) lo llamaremos ***trivialización local*** del fibrado. En particular, para cada $x \in M$, tomando U_i de modo que $x \in U_i$, obtenemos un difeomorfismo de clase C^k

$$\tau_{i_x} : \pi^{-1}(x) \to V.$$

- Para cada par $i, j \in I$, y para cada $x \in M$, con $x \in U_i \cap U_j$, la función

$$\tau_{j_x} \circ \tau_{i_x}^{-1} : V \to V$$

es un isomorfismo lineal de V en sí mismo. Las funciones $\tau_{ji_x} = \tau_{j_x} \circ \tau_{i_x}^{-1} : V \to V$ se llaman ***funciones de transición*** del fibrado.

A continuación definiremos el fibrado tangente a una variedad, pero antes necesitamos ver cómo se definen las nociones de vector tangente y espacio tangente a la variedad en un punto.

Definición 1.3.6. Sea M una variedad de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$. Una función $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ de clase C^1 se llama ***curva*** de clase C^1 en M. Supongamos que $\gamma(0) = x \in M$ y denotemos por $C^1(M)_x$ el conjunto de curvas en M que son de clase C^1 alrededor de x. El ***vector tangente a la curva*** γ en $t = 0$ es una función $\gamma^{'}(0) : C^1(M)_x \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma^{'}(0)(f) = (f \circ \gamma)^{'}, \text{ para } f \in C^1(M)_x$$

Un ***vector tangente*** en x es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ con $\gamma(0) = x$. El conjunto de todos los vectores tangentes de M en x tiene una estructura natural de espacio vectorial. Lo denotaremos por T_xM y lo llamaremos ***espacio tangente*** a M en el punto x.

Recordemos a continuación cómo se define la diferencial de una función en un punto.

Definición 1.3.7. Sean M y N variedades de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ modeladas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, y sea $f : M \to N$ una función de clase C^1. Para cada $x \in M$ y para cada $v \in T_xM$, eligiendo la curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ con $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = v$, entonces $f \circ \gamma$ es una curva en N con $f \circ \gamma(0) = f(x)$. La aplicación

$$df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N \text{ dada por } df(x) = (f \circ \gamma)'(0)$$

es una aplicación lineal y no depende en la elección de γ. La aplicación lineal $df(x)$ es llamada la ***diferencial*** de f en x. Así si (U, φ) es una carta de M en x, es fácil ver que

$$d\varphi(x) : v \in T_xM \to d\varphi(x)v \in \mathbb{R}^m$$

define un isomorfismo de T_xM sobre $T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$.

Definición 1.3.8. Dada una variedad diferenciable de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ modelada en $\mathbb{R}^m$, definimos TM como la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M, y sea $\pi : TM \to M$ la proyección natural que asigna a cada vector $v \in T_xM$ el punto $x \in M$. Entonces (TM, M, π) tiene una estructura natural de fibrado vectorial de clase C^{k-1}, llamado ***fibrado tangente*** de M, que usualmente se denota TM.

Más concretamente, sea

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM.$$

Ahora consideremos un ***atlas*** $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M y para cada $i \in I$ tomemos

$$TU_i = \pi^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{x \in U_i} T_xM.$$

Se obtiene una trivilización local de TM definiendo el homeomorfismo

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^m$$

dado por

$$\Phi_i(x, v) \mapsto (x, d\varphi_i(x)(v)).$$

De esta manera obtenemos $\{(TU_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ que es un atlas de clase C^{k-1} para TM

1.3.3. VARIEDADES FINSLER

Esta sección está dedicada a introducir el concepto de variedad Finsler. Las definiciones y notación están tomadas [32], [33], [39].

Esta clase de variedades constituye el marco donde presentaremos nuestros resultados de inversión global en el capítulo 3 .

Definición 1.3.9. Una ***variedad Finsler de clase*** C^1 es un par $(M, ||\cdot||_M)$, donde M es una variedad de clase C^1, y $||\cdot||_M : TM \to [0,\infty)$ es una función continua definida en el fibrado tangente TM de M que satisface para cada $x \in M$, la restricción $||\cdot||_x := ||\cdot||_{M_{|T_xM}} : T_xM \to [0,\infty)$ es una norma en el espacio tangente T_xM.

Observación 1.3.10. *Recordamos aquí que una estructura Riemanniana en una variedad M viene definida por la asignación diferenciable a cada punto $x \in M$ de una forma bilineal simétrica definida positiva sobre el espacio tangente T_xM la cual define un producto escalar en T_xM. De este modo se puede ver que en particular toda variedad Riemanniana es una variedad Finsler (ver [39] para los detalles).*

Para terminar, señalaremos que la noción de variedad de Finsler puede ser definida en el marco más general de las variedades modeladas sobre espacios de Banach. Aunque nosotros no vamos hacer uso de este concepto, incluimos a continuacón esta definición general de variedad Finsler dada por Palais [39]

Definición 1.3.11. [Variedad Finsler en el sentido Palais.]
Sea M una variedad de clase C^k modelada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que $(M, \|\cdot\|)$ es una ***variedad de Finsler en el sentido de Palais*** de clase C^k si $\|\cdot\|_M$ satisface las siguientes condiciones:

- para cada $x \in M$, la restricción $||\cdot||_x := ||\cdot||_{M_{|T_xM}} : T_xM \to [0,\infty)$ es una norma en el espacio tangente T_xM tal que, para cada carta $\varphi : U \to X$ con $x \in U$, la norma $v \in X \mapsto \|d\varphi^{-1}(\varphi(x))(v)\|_x$ es equivalente a $\|\cdot\|$ en X.
- para cada $x \in M$, cada $\varepsilon > 0$ y cada carta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ con $x \in U \subset M$, existe una vecindad abierta W con $x \in W \subset U$ tal que
$$\frac{1}{1+\varepsilon}||d\varphi^{-1}(\varphi(x))(v)||_x \leq ||d\varphi^{-1}(\varphi(y))(v)||_y \leq (1+\varepsilon)||d\varphi^{-1}(\varphi(x))(v)||_x \qquad (1.3.1)$$
para cada $y \in W$ y cada $v \in X$. En términos de equivalencia de normas, la anterior desigualdad produce el hecho de que las normas $||d\varphi^{-1}(\varphi(x))(\cdot)||_x$ y $||d\varphi^{-1}(\varphi(y))(\cdot)||_y$ son $(1+\varepsilon)$-equivalentes.

Observación 1.3.12. *Nótese que, si M es una variedad Finsler de dimensión finita, usando la compacidad local, no es difícil demostrar que se satisfacen las condiciones anteriores. Es decir, en el caso finito-dimensional nuestro concepto de variedad Finsler coincide con el concepto de variedad Fisnler de clase C^1 en el sentido de Palais [39].*

Para más información sobre variedades Finsler podemos consultar [39, 10, 47, 31].

Capítulo 2

RESULTADOS PREVIOS DE INVERSION GLOBAL.

La inversión global de funciones es una cuestión relevante en el análisis no regular. En esta sección comenzaremos definiendo lo que es una aplicación recubridora y veremos algunos resultados que relacionan este concepto con el de homomorfismo. Estos conceptos son muy importantes en el momento de obtener nuestros resultados de inversión global en el Capítulo 3 y Capítulo 4. Por último, estudiaremos algunos resultados previos que se tienen de inversión global y que van a ser de gran utilidad en el transcurso del trabajo.

Definición 2.0.13 (Proyección recubridora)**.**
Sean E y F espacios topológicos. Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es una proyección recubridora si cada punto $y \in Y$ tiene un entorno abierto W tal que $f^{-1}(W)$ es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de X cada uno de los cuales es homeomorfo a W por f.

Observación 2.0.14. *Todo homeomorfismo es una proyección recubridora.*

Los dos siguientes resultados son consecuencia inmediata de las definiciones anteriores; para más información se puede consultar [50].

Teorema 2.0.15. *Todo homeomorfismo local es una aplicación abierta.*

Teorema 2.0.16. *Toda proyección recubridora es un homeomorfismo local.*

Ahora daremos algunas condiciones para que un homeomorfismo local sea un homeomorfismo global o proyección recubridora.

Sean $f : M \to N$ una proyección recubridora entre espacios métricos arco conexos, y $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ el morfismo asociado entre sus grupos fundamentales. Es bien conocido que f es un homeomorfismo de M sobre N si, y solo si, $f_*[\pi_1(M)] = \pi_1(N)$ (ver por ejemplo [50, Capítulo 2]). Así obtenemos el siguiente corolario:

Proposición 2.0.17. *Sea $f : M \to N$ una proyección recubridora. Si $\pi_1(M) = \pi_1(N)$ es finito, entonces, f es un homeomorfismo global.*

Por ejemplo, toda proyección recubridora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

2.1. CONTEXTO REGULAR

Empezaremos estudiando algunos resultados de inversión global para funciones de clase C^1 definidas entre espacios de Banach y para ello, primero vamos a recordar la siguiente definición:

Definición 2.1.1 (Difeomorfismo)**.**
Sea $f : X \to Y$ una aplicación de clase C^1 entre espacios de Banach. Se dice que f es un difeomorfismo si es un homeomorfismo sobre Y y su inversa es de clase C^1.

Se sabe que:

1) Si $df(x)$ es invertible, para todo $x \in X$, por el teorema de la función inversa, f es un difeomorfismo local.

2) f es un difeomorfismo de X sobre Y si y sólo si f es un homeomorfismo sobre Y y $df(x)$ es invertible para todo $x \in X$.

Uno de los pioneros en estudiar cuándo un homeomorfismo local es global es J. Hadamard [18], quien en 1906 establece el siguiente criterio de inversión global de funciones f de clase C^1 definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Dicho criterio es el siguiente:

Teorema 2.1.2 (Teorema de Hadamard o condición integral de Hadamard)**.**
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $df(x)$ es invertible para cada x en $\mathbb{R}^n$ y supongamos que

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=t} (1/\|df(x)^{-1}\|)\, dt = \infty$$

Entonces la función f es un difeomorfismo global de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Como consecuencia del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 2.1.3. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, supongamos que existe una constante* $K > 0$ *tal que* $\|df(x)^{-1}\| \leq K$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*. Entonces,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es un difeomorfismo global.*

En 1920, P. Levy [34] trabaja con funciones definidas en el espacio $L^2([0,1])$ y obtiene una generalización del Teorema de Hadamard. Es una condición válida también en espacios de Banach.

Teorema 2.1.4 (Hadamard-Levy)**.**
Sean X, Y *espacios de Banach y sea* $f : X \to Y$ *una función de clase* C^1*. Supongamos que* $df(x) \in \mathrm{Isom}(X;Y)$ *y además existe* $k = 1/K > 0$ *tal que, para todo* $x \in E$*,* $k \leq \|df(x)^{-1}\|^{-1}$*, entonces* f *es un difeomorfismo de* X *sobre* Y*.*

Siguiendo con la teoría de espacios de Banach y bajo condiciones topológicas, en 1943, S. Banach y S. Mazur [2] obtienen una de las condiciones necesarias y suficientes más comunes de inversión global dando así el siguiente resultado:

Teorema 2.1.5 (Banach-Mazur)**.**
Sean X, Y *espacios de Banach y sea* $f : X \to Y$ *un homeomorfismo local. Si* f *es una aplicación propia, entonces* f *es un homeomorfismo de* X *sobre* Y*.*

Recordemos el concepto de aplicación propia.

Definición 2.1.6 (Función propia o aplicación propia)**.**
Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Se dice que f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto en X, siempre que K sea un compacto en Y.

Observación 2.1.7. *Una función continua* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es propia si y sólo si es coerciva.*

Definición 2.1.8 (Función coerciva)**.**
Sean X e Y espacios de Banach y sea $f : X \to Y$ una función. Diremos que f es coerciva si $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$.

El siguiente corolario es una versión del Teorema de Hadamard (Teorema 2.1.2) en el caso finito dimensional. La prueba se puede consultar en [16].

Corolario 2.1.9.
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\det df(x) \neq 0$. Si f es coerciva, entonces f es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Siguiendo esta línea, F. Browder en 1954, obtiene un resultado más fino que el de Banach-Mazur.

Teorema 2.1.10 (Browder)**.**
Sean X e Y espacios de Banach y sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo local. Si f es una aplicación cerrada, entonces f es un homeomorfismo global.

Seguido de esto, en 1974 Plastock [41] publica un trabajo donde caracteriza a los homeomorfismos entre espacios de Banach utilizando lo que el denomina la *condición ($\mathcal{L}$)* o condición de levantamiento de líneas.

Observación 2.1.11. *Llamaremos* **camino** *sobre un espacio topológico E a cualquier aplicación continua definida en un intervalo con imagen en E. Si E es un espacio vectorial, llamaremos* **línea** *en E, a todo camino E sobre E de la forma $tx_0 + (1-t)x_1$, donde $x_0, x_1 \in E$ y $t \in [0, 1]$.*

Definición 2.1.12 (condición ($\mathcal{L}$) de Plastock)**.**
Sean X e Y espacios de Banach y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Diremos que f satisface la condición ($\mathcal{L}$) de Plastock si, para toda línea $p \in Y$ y $b \in (0, 1]$ tales que existe un camino q que hace conmutar

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ {[0,b)} \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

existe una sucesión $t_i \to b$ tal que $\lim\limits_{t_i \to b} q(t_i)$ existe y está en X.

Teorema 2.1.13 (Plastock)**.**
Sean X e Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ un homeomorfismo local. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) f cumple la condición ($\mathcal{L}$).

2) f es un homeomorfismo sobre Y.

Además obtiene el siguiente teorema en términos de la condición integral de Hadamard.

Teorema 2.1.14. (Plastock)
Sean X e Y espacios de Banach, sea $f : X \to Y$ una función de clase C^1 y tal que $df(x) \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ para todo $x \in X$. Si

$$\int_0^\infty \inf_{\|x\|\leq t} \|df(x)^{-1}\|^{-1}\, dt = \infty,$$

entonces f es un difeomorfismo de X sobre Y.

Observación 2.1.15. *Cabe notar que la diferencia que existe entre el Teorema de Hadamard (Teorema 2.1.2) y el Teorema de Plastock (Teorema 2.1.14) es que Hadamard considera el ínfimo sobre la esfera mientras que Plastock considera el ínfimo sobre toda la bola.*

Además, podemos apreciar en el artículo de Plastock que los Teoremas 2.1.4 (Teorema Hadamard-Levy), 2.1.5 (Teorema Banach-Mazur) y 2.1.10 (Teorema de Browder) son consecuencia de su condición $(\mathcal{L})$ de levantamiento de líneas.

Siguiendo esta línea de levantamiento de caminos, en 1980, S. Radulescu y M. Radulescu [49] obtienen el siguiente resultado:

Teorema 2.1.16 (S. Radulescu y M. Radulescu)**.**
Sean X e Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función de clase C^1 tal que $df(x) \in \mathrm{Isom}(X;Y)$ para todo $x \in X$. Supongamos que existe una función $\mu : [0,\infty] \to (0,\infty)$ no creciente y continua que cumple:

$$\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty,$$

y además,

$$\mu(\|x\|) \leq \|[df(x)]^{-1}\|^{-1}, \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Entonces, f es un difeomorfismo de X sobre Y.

En 1968, John en [30] introduce el concepto de *derivada escalar superior e inferior* para una función continua f definida entre espacios de Banach y con esto establece un criterio muy interesante que generaliza en varios sentidos la condición integral de Hadamard. Motivados por el trabajo de John [30], introducimos la siguiente definición en un contexto más general, ya que será muy útil en la obtención de los resultados en el Capítulo 3 y Capítulo 4.

Definición 2.1.17. Sean X e Y espacios métricos, $f : X \to Y$ una función continua y $x \in X$. La ***derivada escalar inferior y superior*** de f en x son definidas respectivamente de la siguiente forma

$$D_x^- f = \liminf_{u\to x} \frac{d(f(u), f(x))}{d(u,x)}, \quad D_x^+ f = \limsup_{u\to x} \frac{d(f(u), f(x))}{d(u,x)}$$

donde $u \in X$ con $u \neq x$.

Notese que, se puede tener $D_x^- f = 0$ y $D_x^+ f = \infty$. En el caso particular de que f sea una función de clase C^1, se obtiene que $D_x^- f = \|df(x)\|$ y si además $df(x)$ es invertible, entonces, $D_x^- f = \|df(x)^{-1}\|^{-1}$. John trabaja con homeomorfismo locales que cumplan con la condición que para cada $x \in X$:

$$0 < D_x^- f \leq D_x^+ f < \infty$$

y obtiene así una generalización de la condición integral de Hadamard de la siguiente manera:

Teorema 2.1.18 (F. John)**.**
Sean X e Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ un homeomorfismo local. Supongamos que, para cada $x \in X$, $0 < D_x^- f \leq D_x^+ f < \infty$ y

$$\int_0^\infty \operatorname*{ínf}_{\|x\| \leq t} D_x^- f dt = \infty.$$

Entonces, f es un homeomorfismo global de X sobre Y.

En este trabajo se puede apreciar que John estudia el dominio de invertibilidad de la función y para ello introduce lo siguiente. Supongamos que X e Y son espacios de Banach, $D \subset X$ es un conjunto abierto y $f : D \to Y$ es un homeomorfismo local. Entonces, para cada $x \in D$, existe una vecindad S_x de $f(x)$ en Y tal que f tiene una inversa local f_x^{-1} en S_x. Además, como es probado en [30], S_x puede ser elegido como lo que él llama ***estrella maximal*** con vértice en $f(x)$, que es definida como el conjunto de todos los puntos $z \in Y$ para lo que el segmento de línea $[f(x), z]$ puede ser elevado por un camino γ en D comenzando en x, y tal que f es un homeomorfismo de la imagen $Im(\gamma)$ sobre el segmento $[f(x), z]$. Las siguientes propiedades son también obtenidas en [30]:

(i) (Forma de estrella) S_x es una vecindad abierta de $f(x)$, que tiene forma de estrella con vértice en $f(x)$, esto es, para cada $z \in S_x$ todo el segmento $[f(x), z]$ está también contenido en S_x.

(ii) (Maximalidad) S_x es maximal en el sentido que para cada sucesión $(z_n) \subset S_x$ que está en el mismo rayo de $f(x)$ y converge a un punto $z \notin S_x$, la sucesión $\{f_x^{-1}(z_n)\}$ no converge en D.

(iii) (Monodromía) para cada camino q contenido en D conectando x con algún punto y y tal que $f(Im(q))$ está contenida en S_x, se tiene que $f_x^{-1}(f(y)) = y$.

Haciendo uso de la estrella y estudiando el dominio de invertibilidad, obtiene el siguiente resultado.

Sean X e Y espacios de Banach, y denotemos por $\mathbf{B}(a,r)$ la bola con centro en a y radio r y $\overline{xy}$ el segmento de línea cerrado en X que une a x con y dado por $\overline{xy} = \{z : z = (1-t)x + ty, 0 \leq t \leq 1\}$.

Teorema 2.1.19.
Sea $f : \mathbf{B}(x_0,\rho) \subset X \to Y$ un homeomorfismo. Supongamos que

$$\mu(t) = \inf_{|x-x_0|\leq t} D_x^- f \quad \textit{para} \quad 0 \leq t < \rho.$$

Entonces la estrella S_{x_0} contiene la bola con centro en $f(x_0)$ y radio

$$\sigma = \int_0^\rho \mu(t)\, dt.$$

Si además para un punto $x \in \mathbf{B}(x_0,\rho)$ tenemos

$$|f(y) - f(x_0)| < \sigma \quad \textit{para todo} \quad y \in \overline{xx_0},$$

entonces

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \int_0^{|x-x_0|} \mu(t)\, dt.$$

Siguiendo esta línea de la estrella maximal y las ideas del trabajo de F. John [30], en 2002, Hong-Xu Li, Jin Liang y Ti-Jun Xiao [24] obtienen una condición suficiente de inversión global para funciones de clase C^1 definidas en espacios de Banach generales.

Ellos obtienen el siguiente resultado de inversión global que es extendido en el capítulo 4 en un contexto no regular.

Teorema 2.1.20 (Hong-Xu Li, Jin Liang y Ti-Jun Xiao)**.**
Sea $f : \mathbf{B}(x_0,\rho) \to Y$ una función de clase C^1 tal que $df(x) \in \operatorname{Isom}(X,Y)$ para todo $x \in \mathbf{B}(x_0,\rho)$ para $\rho > 0$. Supongamos que

$$\sup_{\|x\|\leq r} \|[df(x)]^{-1}\| < \infty \quad \textit{para } 0 < r < \rho. \tag{2.1.1}$$

Entonces, la estrella maximal S_{x_0} contiene la bola de centro $f(x_0)$ y radio $\sigma = \int_0^\rho \eta(t)\, dt$, donde $\eta : [0,\rho) \to (0,\infty)$ es una función integrable tal que

$$\eta(t) \leq \inf_{\|x-x_0\|=t} \|[df(x)]^{-1}\|^{-1} \quad \textit{para} \quad 0 \leq t < \rho. \tag{2.1.2}$$

Si para $x_1 \in \mathbf{B}(x_0, \rho)$ tenemos

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \sigma \quad \textit{para todo } x \in \overline{x_1 x_0},$$

entonces

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \geq \int_0^{\|x_1 - x_0\|} \eta(t)\, dt. \tag{2.1.3}$$

Para demostrar el teorema anterior, usan el siguiente lema que también será necesario en el capítulo 4 a la hora de extender el teorema anterior en un contexto no regular.

Lema 2.1.21. *Sea $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que $\varphi(a) < \varphi(b)$. Entonces, existen $a_0, b_0 \in [a, b]$ tal que $a_0 < b_0$ y*

$$\varphi(a) = \varphi(a) \leq \varphi(t) \leq \varphi(b_0) = \varphi(b) \quad \textit{para todo} \quad t \in [a_0, b_0].$$

En 2007 en un contexto de espacios métricos, Gutú y Jaramillo [17] en su trabajo prueban una generalización del Teorema de Hadamard en términos de la derivada escalar inferior $D_x^- f$. Para ello usan los espacios localmente fuertemente contractibles que definimos a continuación.

Primero, recordemos que que si $p : [a, b] \to X$ es un camino continuo en un espacio métrico X, la ***longitud*** de p se define como

$$\ell(p) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d\left(p(t_i), p(t_{i+1})\right),$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$. Además, se dice que el camino p es ***rectificable*** si la longitud de p es finita, es decir, $\ell(p) < \infty$.

Definición 2.1.22.
Sea Y un espacio métrico. Se dice que un entorno U de $y_0 \in Y$ es $\mathcal{R}$***-contractible*** si existe una función continua $F : U \times [0, 1] \to U$ tal que:

- $F(y_0, t) = y_0$, para todo $t \in [0, 1]$.
- $F(y, 0) = y_0$ y $F(y, 1) = y$, para todo $y \in U$.
- Para cada $y \in U$, el camino $p_y : [0, 1] \to U$ definido por:

  $$p_y(t) = F(y, t)$$

  es rectificable.

Diremos que el espacio Y es ***localmente $\mathcal{R}$-contractible*** si, es conexo por caminos rectificables y cada punto tiene un entorno $\mathcal{R}$-contractible.

Y así obtienen el siguiente resultado de inversión global:

Teorema 2.1.23 (Gutú y Jaramillo)**.**
Sean X e Y espacios métricos conexos por caminos, donde X es completo e Y es localmente fuertemente contractible. Si

$$\int_0^\infty \inf_{x \in \mathbf{B}_t(x_0)} D_x^- f \, dt = \infty$$

para algún $x_0 \in X$, entonces f es una proyección recubridora.

Además, nos proporcionan una desigualdad del valor medio que es de gran importancia para demostrar algunos de nuestros resultados de inversión global en el capítulo 3 y 4. Con esto, procedemos a enunciar la Desigualdad del Valor Medio 2.1.24 en nuestro contexto.

Proposición 2.1.24. (Desigualdad del valor medio)
Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos, sea $q : [a, b] \to X$ un camino, y supongamos que $p = f \circ q$ es rectificable. Entonces:

1) Si $q(a) \neq q(b)$, existe $\tau \in [a, b]$ tal que $\ell(p) \geq D^-_{q(t)} f \cdot d(q(a), q(b))$.

2) Si $0 < \inf_{x \in Im\, q} D_x^- f < \infty$, tenemos que $\ell(p) \geq \inf_{x \in Im\, q} D_x^- f \cdot \ell(q)$.

En un contexto de variedades Finsler, Rabier en [47] usa las sumersiones fuertes y obtiene un resultado en términos de proyecciones recubridoras.

Definición 2.1.25. (Sumersión fuerte)
Sea $f : M \to N$ una aplicación de clase C^1 entre variedades Finsler de clase C^1 tal que $df(x) \in \mathrm{Isom}(T_x M, T_{f(x)} N)$ para todo $x \in M$. Se dice que f es una ***sumersión fuerte*** si no existe ninguna sucesión $\{x_n\} \subset M$ tal que $f(x_n) \to y \in N$ y

$$\lim_{n \to \infty} \|df(x_n)^{-1}\|^{-1} = 0.$$

Y, con esto, obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1.26. (Rabier)
Sean M y N variedades Finsler de clase C^1 conexas y M además completa. Sea $f : M \to N$ una aplición de clase C^1 tal que $df(x) \in \mathrm{Isom}(T_x M, T_{f(x)} N)$ para todo $x \in M$. Si f es una sumersión fuerte, entonces es una proyeción recubridora.

Por último, bajo condiciones espectrales, en 2004, Fernandes, Gutierrez y Rabadal [14] obtienen resultados de inyectividad goblal utilizando el espectro de una función de clase C^1, esto es:

Definición 2.1.27 (Espectro de una función de clase C^1)**.**
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Denotemos por $\mathrm{Spec}(f)$ el conjunto de autovalores (complejos) de la derivada $df(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

En particular, obtiene los siguientes dos resultados que luego en el capítulo 3 que son obtenidos como consecuencia de una variante de la condición integral de Hadamard usando el Jacobiano generalizado de Clarke.

Teorema 2.1.28. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz de clase C^1. Supongamos que para algun $\varepsilon > 0$*

$$Spec(f) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\} = \emptyset.$$

Entonces, f es inyectiva.

Teorema 2.1.29. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^1 local y Lipschitz . Supongamos que existe una sucesión $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ de discos compactos de $\mathbb{C}$ (con interior no vacío), centrados en puntos t_m de la recta real tal que $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = 0$ y*

$$Spec(f) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m) = \emptyset.$$

Entonces, f es inyectiva.

2.2. CONTEXTO NO-REGULAR

En 1988, en un contexto no-regular, siguiendo la línea del Teorema de Hadamard (Teorema 2.1.2) en su versión finito dimensional, Pourciau en [44] obtiene un resultado análogo para funciones localmente Lipschitz, usando el jacobiano generalizado de Clarke $\partial f(x)$. En la prueba, utiliza las ideas del trabajo de F. John.

Antes de enunciar el teorema, estudiaremos algunos resultados de su trabajo que son importantes tanto para la demostración de su teorema como para nuestros resultados de inversión global que presentaremos en el capítulo siguiente. Recordemos primero que $\partial f(x)$ es de rango máximo, significa que cada aplicación lineal en $\partial f(x)$ es de rango máximo. Ahora, denotemos por I la aplicación identidad en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.1. Sea A cualquier aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Se define la ***norma*** y ***co-norma*** de A como

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \text{ y}$$
$$/\!\!/A/\!\!/ = \inf_{\|u\|=1} \|Au\|,$$

respectivamente. Si A y B son inversas, entonces tenemos que

$$\|B\| = \frac{1}{/\!\!/A/\!\!/} \qquad \text{y} \qquad \|A\| = \frac{1}{/\!\!/B/\!\!/}$$

Ahora bien, si $\mathcal{A}$ es una colección de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, definimos como

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{A\in\mathcal{A}} \|A\|, \qquad /\!\!/\mathcal{A}/\!\!/ = \inf_{A\in\mathcal{A}} /\!\!/A/\!\!/,$$

la *norma* y la *co-norma* de $\mathcal{A}$, respectivamente. Decimos que $\mathcal{A}$ es invertible si cada transformación lineal A en $\mathcal{A}$ es invertible, y en este caso $\mathcal{A}^{-1}$ representa la colección de todas las inversas A^{-1} para $A \in \mathcal{A}$. Por último, $co\mathcal{A}$ denota la envoltura convexa de la colección $\mathcal{A}$.
Vamos a recordar que asumimos que f es una función localmente Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. Si f fuera de clase C^1 en un entorno de un punto particular x, entonces por supuesto f tendría una inversa local g y de clase C^1 definida en una vecindad de $y = f(x)$. Esta inversa local g debe satisfacer

$$dg(y) \circ df(x) = I$$

y por tanto también

$$\|dg(y)\| = \frac{1}{/\!\!/df(x)/\!\!/}. \tag{$*$}$$

Lo que se pretende es buscar un análogo de $(*)$ para el Jacobiano Generalizado de Clarke. Pero para esto requerimos primero el siguiente lema.

Lema 2.2.2. (Lema de la co-norma)
Sea $\mathcal{A}$ una colección de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{A}$ es compacta e invertible, entonces

$$\|co\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{/\!\!/\mathcal{A}/\!\!/}$$

Para obtener un análogo de $(*)$, Pourciau en el lema anterior (Lema 2.2.2) reemplaza $\mathcal{A}$ por el Jacobiano generalizado de Clarke $\partial f(x)$, obteniendo así el siguiente resultado.

Lema 2.2.3. *Sea $\partial f(x)$ de rango máximo y supongamos que g es la función inversa local de f. Entonces,*

$$\|\partial g(y)\| \leq \frac{1}{/\!/\partial f(x)/\!/}$$

cuando $y = f(x)$.

Ahora, con todas las herramientas expuestas, procedemos a enunciar la siguiente extensión del teorema de Hadamard propuesta por Pourciau.

Teorema 2.2.4 (Pourciau)**.**
*Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función localmente Lipschitz y supongamos que el **Jacobiano generalizado de Clarke** $\partial f(x)$ es de rango máximo para cada x. Sea $m(t) = \inf\limits_{|x|\leq t} /\!/\partial f(x)/\!/$. Si*

$$\int_0^\infty m(t)\,dt = \infty,$$

entonces la función f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 3

INVERSIÓN GLOBAL DE FUNCIONES NO REGULARES EN VARIEDADES FINSLER

El propósito en este capítulo es obtener condiciones suficientes para que una aplicación localmente Lipschitz definida entre dos variedades Finsler sea un homeomorfismo global. Para este propósito, desarrollamos la noción de diferencial generalizada de Clarke en este contexto, y usando ésta, obtenemos una versión de la condición de integral de Hadamard para la invertibilidad. Como consecuencia, se deducen algunos resultados de inversión global e inyectividad global para funciones Lipschitz definidas sobre $\mathbb{R}^n$ en términos de condiciones espectrales de la diferencial generalizada de Clarke.

Recordemos que una variedad Finsler consiste en una estructura Finsler definida en una variedad M de clase C^1, es decir, para cada punto $x \in M$ se le asigna una norma $\| \cdot \|_x$ en el espacio tangente T_xM de M en x y depende continuamente del punto x. Los resultados presentados en esta capítulo estan dados en términos de un análogo de la diferencial generalizada de Clarke, extendiendo así los resultados de Pourciau [44] en ese sentido. Además se da una extensión de los resultados de [14] y [3] en el contexto no suave de funciones Lipschitz definidas en $\mathbb{R}^n$.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección introducimos la noción de diferencial generalizada de Clarke en un contexto general de variedades suaves, y se obtienen algunas propiedades básicas. En la segunda parte, nos centramos en el caso de variedades Finsler, introducimos la norma de la diferencial generalizada de Clarke, y exploramos que relación tiene la derivada escalar Dini superior y la constante Lipschitz (local). La parte tercera está dedicada a los resultados de inverión global. Para el caso de funciones localmente Lipschitz definidas entre variedades Finsler, obtenemos una versión de la condición de integral de Hadamard en términos de la co-norma de la diferencial generalizada de Clarke, y en el caso de funciones Lipschitz definidas en $\mathbb{R}^n$, obtenemos una variante de la condición integral de Hadamard utilizando los autovaleres de la diferencial generalizada de Clarke.

3.1. DIFERENCIAL GENERALIZADA EN VARIEDADES DIFERENCIABLES

En esta sección extendemos el concepto de Jacobiano generalizado de Clarke al contexto de variedades de clase C^1 y obtenemos algunas propiedades básicas. Si E y F son espacios vectoriales, denotemos por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de todas las funciones lineales de E en F.

Definición 3.1.1. Sea M y N variedades de clase C^1 de dimensión m y n, respectivamente. Se dice que una función $f : M \to N$ es ***Lipschitz alrededor de*** $x \in M$ si existen cartas (U, φ) de M en x y (V, ψ) de N en $f(x)$, con $f(U) \subset V$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es ***Lipschitz alrededor de*** $\varphi(x)$.

Observemos que cada función de clase C^1 entre espacios euclídeos es localmente Lipschitz. Así, la definición no depende de las cartas, y también tenemos que cada función de clase C^1 entre variedades de clase C^1 es localmente Lipschitz.

Definición 3.1.2. Sean M y N variedades de clase C^1, y sea $f : M \to N$ una función que es Lipschitz alrededor de $x \in M$. Entonces, la ***diferencial generalizada de Clarke*** de f en x se define como

$$\begin{aligned}\partial f(x) :&= \{d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ A \circ d\varphi(x) : A \in \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\} \\ &= d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ d\varphi(x),\end{aligned}$$

donde (U, φ) es una carta de M en x y (V, ψ) es una carta de N en $f(x)$. Observemos que $\partial f(x) \subset \mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N)$.

Proposición 3.1.3. *La definición anterior no depende de las cartas.*

Demostración. Tomemos (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) cartas diferentes de M en x y (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2) cartas diferentes de N en $f(x)$. Denotemos por

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x) &:= \{d\psi_1^{-1}(\psi_1(f(x))) \circ A \circ d\varphi_1(x) : A \in \partial(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x))\}, \text{y} \\ \partial_2 f(x) &:= \{d\psi_2^{-1}(\psi_2(f(x))) \circ A \circ d\varphi_2(x) : A \in \partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(x))\}.\end{aligned}$$

Tendremos que demostrar que $\partial_1 f(x) = \partial_2 f(x)$. Observemos que $\partial_1 f(x)$ y $\partial_2 f(x)$ son conjuntos convexos. Así, es suficiente probar que

$$\begin{aligned}&B \in \partial_2 f(x) \text{ para todo } B = d\psi_1^{-1}(\psi_1(f(x))) \circ A \circ d\varphi_1(x) \in \partial_1 f(x) \text{ con} \\ &\qquad A = \lim_{i\to\infty} d(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x_i)) \in \partial(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x)),\end{aligned}$$

donde $x_i \to x$ y $d(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x_i))$ existe.

Ahora, tomemos B y A de acuerdo con la hipótesis anterior. Ya que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ y $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ son de clase C^1 en una vecindad de $\psi_1(f(x))$ y en una vecindad de $\varphi_2(x)$, respectivamente, entonces

$$(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) = \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$$

es diferenciable en $\varphi_2(x_i)$ para cada i suficientemente grande. Además,

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty} d(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(x_i)) \\ &\qquad = \lim_{i\to\infty} d\left((\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})\right)(\varphi_2(x_i)) \\ &\qquad = d(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(\psi_1(f(x))) \circ A \circ d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(x)) \\ &\qquad = d\psi_2(f(x)) \circ B \circ d\varphi_2^{-1}(\varphi_2(x)) = C \in \partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(x)).\end{aligned}$$

Así, $B = d\psi_2^{-1}(\psi_2(f(x))) \circ C \circ d\varphi_2(x)$ con $C \in \partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(x))$, and $B \in \partial_2 f(x)$. □

Observación 3.1.4. *Sean M y N variedades de clase C^1 de dimensión m y n, respectivamente, y $f : M \to N$ una función continua. Consideremos el fibrado vectorial $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$ definido como la siguiente unión disjunta:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(TM, f^*TN) &:= \bigcup_{x\in M} \{x\} \times \mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N) \\ &= \{(x, B) : x \in M \text{ y } B \in \mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N)\},\end{aligned}$$

donde la proyección $\pi : \mathcal{L}(TM, f^*TN) \to M$ está dada por $\pi(x, B) = x$ (para más detalles se puede consultar el capítulo 1).

Recordemos que la topología de $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$ es la generada por los conjuntos abiertos básicos $\mathcal{O}(U, V, W)$ que describimos más abajo, donde (U, φ) es una carta de M, (V, ψ) es una carta de N con $f(U) \subset V$ y W es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Pongamos

$$\mathcal{O}(U, V, W) = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times W_{x,\varphi,\psi} = \{(x, B) : x \in U \ \ y \ B \in W_{x,\varphi,\psi}\}$$

y $W_{x,\varphi,\psi} = \{d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ A \circ d\varphi(x) : A \in W\} = d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ W \circ d\varphi(x)$ *para todo* $x \in U$.

Así, si (U, φ) es una carta de M con $x \in U$ y (V, ψ) es una carta de N con $f(U) \subset V$, se obtiene una trivialización local de $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$ alrededor de x por medio del homeomorfismo

$$h : \pi^{-1}(U) = \mathcal{O}(U, V, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \to U \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

dado por

$$h(x, B) = \left(x,\, d\psi(f(x)) \circ B \circ d\varphi^{-1}(\varphi(x))\right).$$

Ahora, damos a conocer algunas propiedades básicas de la diferencial generalizada de Clarke en variedades.

Propiedades 3.1.5. *Sean M y N variedades de clase C^1. Sea $f : M \to N$ una función Lipschitz alrededor de $x \in M$. Entonces:*

1. *$\partial f(x)$ es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N)$.*
2. *Si la sucesión (x_i, B_i) converge a (x, B) en $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$ y $B_i \in \partial f(x_i)$ para cada i, entonces $B \in \partial f(x)$.*
3. *Si f es una función de clase C^1, entonces $\partial f(x) = \{df(x)\}$.*

Demostración. Es inmediato comprobar estas propiedades. Para comodidad del lector, se demuestra la propiedad (2).

Tomemos (U, φ) y (V, ψ) cartas de M en x y N en $f(x)$, respectivamente, con $f(U) \subset V$, y consideremos la trivialización local de $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$ alrededor de x dada por

$$h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

donde

$$h(x, B) = \left(x,\, d\psi(f(x)) \circ B \circ d\varphi^{-1}(\varphi(x))\right).$$

Para i lo suficientemente grande tenemos que $x_i \in U$ y $f(x_i) \in V$. En este caso, denotemos $A_i = d\psi(f(x_i)) \circ B_i \circ d\varphi^{-1}(\varphi(x_i)) \in \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_i)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Por continuidad, tenemos que la sucesión (A_i) converge a

$$A := d\psi(f(x)) \circ B \circ d\varphi^{-1}(\varphi(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Ahora por (Proposición 1.2.3 (b)) se obtiene que $A \in \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$, y por lo tanto $B = d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ A \circ d\varphi(x) \in \partial f(x)$. □

Ahora damos a conocer algunas propiedades de continuidad de la diferencial generalizada de Clarke.

Definición 3.1.6. Sean X e Y espacios topológicos. Una función multivaluada $\Phi : X \to 2^Y$ es semicontinua superiormente (usc) en $x \in X$ si para cualquier conjunto abierto $\mathcal{O}$ de Y tal que $\Phi(x) \subset \mathcal{O}$, existe una vecindad abierta U de x en X tal que $\Phi(y) \subset \mathcal{O}$ para todo $y \in U$. Una función multivaluada $\Phi : X \to 2^Y$ se dice que semicontinua superiormente (usc) si es usc en x para todo $x \in X$.

Proposición 3.1.7. *Sean M y N variedades de clase C^1 y sea $f : M \to N$ una función localmente Lipschitz. Entonces, la diferencial generalizada de Clarke de f es una función usc, en el sentido que la función multivaluada*

$$\widetilde{\partial} f : M \to 2^{\mathcal{L}(TM, f^*TN)}$$

dada por $\widetilde{\partial} f(x) = \{x\} \times \partial f(x)$ es semicontinua superiormente.

Demostración. Sea $x \in M$ y consideremos un subconjunto abierto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$ con $\widetilde{\partial} f(x) \subset \mathcal{O}$. Acordándonos de la observación 3.1.4, para cada $B \in \partial f(x)$ podemos elegir un conjunto abierto de la forma $\mathcal{O}(U, V, W)$ tal que $(x, B) \in \mathcal{O}(U, V, W) \subset \mathcal{O}$. Ya que $\widetilde{\partial} f(x)$ es compacto, se puede cubrir por una familia finita de conjuntos abiertos básicos. Por lo tanto, podemos asumir que $\mathcal{O} = \mathcal{O}(U, V, W)$ es un conjunto abierto básico, donde (U, φ) es una carta de M en $x \in U$, (V, ψ) es una carta de N con $f(U) \subset V$ y W es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. As $\partial f(x) \subset W_{x,\varphi,\psi} = d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ W \circ d\varphi(x)$ y

$$\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \subset d\psi(f(x)) \circ W_{x,\varphi,\psi} \circ d\varphi^{-1}(\varphi(x)) = W.$$

Ya que

$$\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to 2^{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}$$

es semicontinua superiormente en $\varphi(x)$ (ver [Proposition 1.2.3(c)]), existe una vecindad abierta $\widetilde{U}$ de x tal que $\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(y)) \subset W$ para cada $y \in \widetilde{U}$. Entonces, por la definición de diferencial generalizada de Clarke, tenemos que

$$\partial f(y) \subset d\psi^{-1}(\psi(f(y))) \circ W \circ d\varphi(y) = W_{y,\varphi,\psi},$$

para cada $y \in \widetilde{U}$. Así, $\widetilde{\partial} f(y) \subset \mathcal{O}(U, V, W)$ para cada $y \in \widetilde{U}$. Esto muestra que f es usc en x. $\square$

Observación 3.1.8. *Nótece que por ((2) Propiedad 3.1.5) la función multivaluada $\widetilde{\partial} f$ es cerrada en x, i.e., si la sucesión (x, B_i) converge a (x, B) en $\mathcal{L}(TM, f^*TN)$, y $(x, B_i) \in \widetilde{\partial} f(x)$ para cada i, entonces $(x, B) \in \widetilde{\partial} f(x)$.*

En la siguiente proposición, obtenemos la regla de la cadena para la diferencial generalizada de Clarke.

Proposición 3.1.9. *Sean M y N variedades de clase C^1. Sea $h : M \to N$ una función Lipschitz alrededor de x y $g : N \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz alrededor de $h(x)$. Entonces $f = g \circ h : M \to \mathbb{R}$ es Lipschitz alrededor de x y*

$$\partial f(x) \subset \mathrm{co}\{\partial g(h(x)) \circ \partial h(x)\}.$$

Si, además, g es de clase C^1, entonces

$$\partial f(x) = dg(h(x)) \circ \partial h(x).$$

Demostración. Comencemos con la primera inclusión. Tomemos (U, φ) y (V, ψ) carta de M en x y N en $h(x)$, respectivamente, con $h(U) \subset V$. Por convexidad, es suficiente demostrar que

$$B \in \partial g(h(x)) \circ \partial h(x) \;\; \text{para todo} \;\; B = A \circ d\varphi(x) \;\; \text{con} \;\; A \in \partial(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Tomemos B y A como se han definido en la hipótesis anterior.Ya que

$$\begin{aligned} \partial(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= \partial(g \circ h \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= \partial((g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ h \circ \varphi^{-1}))(\varphi(x)), \end{aligned}$$

y la diferencial generalizada de Clarke en $\mathbb{R}^n$ satisface la correspondiente regla de la cadena [Teorema 1.2.5], obtenemos que

$$\begin{aligned} A \in \partial(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= \partial((g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ h \circ \varphi^{-1}))(\varphi(x)) \\ &\subset \mathrm{co}\{\partial(g \circ \psi^{-1})(\psi(h(x))) \circ \partial(\psi \circ h \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A = A_1 \circ A_2$ con $A_2 \in \partial(\psi \circ h \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ y $A_1 \in \partial(g \circ \psi^{-1})(\psi(h(x)))$. Entonces,

$$\begin{aligned} B &= A \circ d\varphi(x) \\ &= (A_1 \circ d\psi(h(x))) \circ \big(d\psi^{-1}(\psi(h(x))) \circ A_2 \circ d\varphi(x)\big) \in \partial g(h(x)) \circ \partial h(x), \end{aligned}$$

ya que $A_2 \in \partial(\psi \circ h \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ y $A_1 \in \partial(g \circ \psi^{-1})(\psi(h(x)))$.

La última afirmación se sigue del (Teorema 1.2.5) de forma análoga. □

Ahora, usando algunas ideas dadas en la prueba anterior y el [Corolario 1.2.6], se puede demostrar lo siguiente:

Corolario 3.1.10. *Sean M, N y S variedades de clase C^1. Sea $h : M \to N$ una función Lipschitz alrededor de x y $g : N \to S$ una función Lipschitz alrededor de $h(x)$. Entonces, $f = g \circ h : M \to S$ es Lipschitz alrededor de x y*

$$\partial f(x)v \subset \mathrm{co}\{\partial g(h(x)) \circ \partial h(x)v\}$$

para cada $v \in T_xM$. Si, además, g es de clase C^1, entonces

$$\partial f(x) = dg(h(x)) \circ \partial h(x)v.$$

3.2. DIFERENCIAL GENERALIZADA EN VARIEDADES FINSLER

En esta sección, vamos a demostrar algunas características especiales de la diferencial generalizada de Clarke para funciones localmente Lipschitz definidas entre variedades Finsler. Recordemos que el fibrado tangente de una variedad M de clase C^1 es

$$TM = \{(x, v) : x \in M \quad \text{y} \quad v \in T_xM\}.$$

Si $f : M \to N$ es una función de clase C^1 entre variedades Finsler, la norma de la diferencial en el punto $x \in M$ es definida como

$$||df(x)||_x = \sup\{||df(x)(v)||_{f(x)} : v \in T_xM, ||v||_x = 1\}.$$

La estructura Finsler nos permite definir la norma y la co-norma de la diferencial generalizada de Clarke de una función localmente Lipschitz. Recordemos por la Definición 2.2.1 la co-norma de la diferencial generalizada de Clarke con el fin de obtener una formulación de la condición integral de Hadamard en un contexto no suave. Recordando (Definición 2.2.1), la co-norma de una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se define como

$$/\!/A/\!/ = \inf_{||u||=1} ||Au||.$$

Por lo tanto, de manera análoga, podemos ahora presentar las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1. Sean M y N variedades Finsler de clase C^1, y sea $f : M \to N$ una función Lipschitz alrededor de $x \in M$. La norma y la co-norma de la diferencial generalizada de Clarke de f en x están definidas, respectivamente, como

$$|||\partial f(x)|||_x = \sup\{|||B|||_x : B \in \partial f(x)\} \quad \text{y}$$
$$/\!/\!/\partial f(x)/\!/\!/_x = \inf\{/\!/\!/B/\!/\!/_x : B \in \partial f(x)\},$$

donde para cada $B \in \mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N)$, la norma y la co-norma de B son definidas por

$$|||B|||_x = \sup_{\substack{v\in T_xM\\ ||v||_x=1}} ||Bv||_{f(x)} \quad \text{y} \quad /\!/\!/B/\!/\!/_x = \inf_{\substack{v\in T_xM\\ ||v||_x=1}} ||Bv||_{f(x)}.$$

La siguiente notación será útil a lo largo de esta sección:

Notación 3.2.2. *Sean M y N variedades Finsler de clase C^1 de dimensión m y n, respectivamente. Sea $f : M \to N$ una función, sea $x \in M$, y consideremos cartas (U, φ) de M en x y (V, ψ) de N en $f(x)$. Denotamos por*

- $\|\cdot\|_{x,\varphi} : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ *la norma* $\|d\varphi^{-1}(\varphi(x))(\cdot)\|_x$ *en* $\mathbb{R}^m$.
- $\|\cdot\|_{f(x),\psi} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *la norma* $\|d\psi^{-1}(\psi(f(x)))(\cdot)\|_{f(x)}$ *en* $\mathbb{R}^n$.
- $\|\cdot\|_{x,\varphi,\psi} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ *la norma* $\|A\|_{x,\varphi,\psi} = \sup\{\|Av\|_{f(x),\psi} : \|v\|_{x,\varphi} = 1\}$ *en* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
- $/\!/\cdot/\!/_{x,\varphi,\psi} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ *la co-norma* $/\!/A/\!/_{x,\varphi,\psi} = \inf\{||Av||_{f(x),\psi} : ||v||_{x,\varphi} = 1\}$ *en* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Nuestro siguiente resultado muestra cómo la norma y la co-norma de la diferencial generalizada de Clarke se pueden obtener a través de la localización de cartas arbitrarias.

Proposición 3.2.3. *Sean M y N variedades Finsler de clase C^1 y $f : M \to N$ una función Lipschitz en una alrededor de x. Entonces,*

$$|||\partial f(x)|||_x = \|\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\|_{x,\varphi,\psi} \quad y$$
$$/\!/\!/\partial f(x)/\!/\!/_x = /\!/\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))/\!/_{x,\varphi,\psi}$$

para cada par de cartas (U, φ) y (V, ψ) de M en x y N en $f(x)$, respectivamente.

Demostración. La prueba es inmediata a partir de las definiciones de norma y co-norma y del siguiente lema:

Lema 3.2.4. *Bajo la suposición de la Proposición 3.2.3, sea $B \in \mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N)$ que puede ser escrita por $B = d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ A \circ d\varphi(x)$, donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Entonces,*

(a) $|||B|||_x = \|A\|_{x,\varphi,\psi}$, *y*

(b) $/\!/\!/B/\!/\!/_x = /\!/A/\!/_{x,\varphi,\psi}$.

Probaremos la primera igualdad, la demostración de (b) se seguir de forma análoga de (a).

$$\begin{aligned}
|||B|||_x &= \sup_{\|v\|_x=1} \|Bv\|_{f(x)} = \sup_{\|v\|_x=1} \|(d\psi^{-1}(\psi(f(x))) \circ A \circ d\varphi(x))v\|_{f(x)} \\
&= \sup_{\|v\|_x=1} \|A \circ \underbrace{d\varphi(x)v}_{w}\|_{f(x),\psi} = \sup_{\|d\varphi^{-1}(\varphi(x))w\|_x=1} \|Aw\|_{f(x),\psi} \\
&= \sup_{\|w\|_{x,\varphi}=1} \|Aw\|_{f(x),\psi} = \|A\|_{x,\varphi,\psi}.
\end{aligned}$$

□

Cada variedad Finsler ***conexa*** M posee una estructura métrica natural, la cual se define de la siguiente manera. Primero, recordemos que la ***longitud*** de un camino de clase C^1 a trozos $\gamma : [a, b] \to M$ es definido como

$$\ell(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)}\, dt. \tag{3.2.1}$$

Ahora, dada una variedad M conexa, es conexa por caminos de clase C^1 a trozos, y la ***distancia Finsler*** d_M en M asociada es definida como

$$d_M(x, y) = \text{ínf}\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ es un camino de clase } C^1 \text{ a trozos conectando a } x \text{ con } y\}.$$

Esta métrica Finsler es congruente con la topología de la variedad dada en M (ver [39]). Denotaremos la bola abierta y la bola cerrada de centro $x \in M$ y radio $r > 0$ por $\mathbf{B}_M(x,r) := \{y \in M : d_M(x,y) < r\}$ y $\overline{\mathbf{B}}_M(x,r) := \{y \in M : d_M(x,y) \leq r\}$, respectivamente.

Si M y N son variedades Finsler conexas, decimos que la función $f : M \to N$ es Lipschitz si $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ es Lipschitz para las correspondientes distancias Finsler. Su constante Lipschitz $\mathrm{Lip}(f)$ está definida, de manera usual, como

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup\left\{\frac{d_N(f(x), f(y))}{d_M(x,y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}.$$

Ahora, recordemos la siguiente desigualdad de valor medio para variedades Finsler [31, Proposition 2.3] (ver también [1]).

Lema 3.2.5. *Sea M y N variedades Finsler conexas de clase C^1 y $f : M \to N$ una función de clase C^1. Entonces, f es Lipschitz si, y sólo si, $||df||_\infty := \sup\{||df(x)||_x : x \in M\} < \infty$. Además,* $\mathrm{Lip}(f) = ||df||_\infty$.

También necesitaremos el siguiente resultado, que está relacionado con el comportamiento localmente $(1+\varepsilon)$-bi-Lipschitz de las cartas asociadas a una variedad Finsler C^1. Esto es consecuencia inmediata de [31, Lemma 2.4], teniendo en cuenta la observación 1.3.12.

Lema 3.2.6. *Consideremos una variedad Finsler conexa M de clase C^1. Entonces, para cada $x \in M$, para cada carta (U, φ) con $x \in U$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad abierta $W \subset U$ de x que satisface*

$$\frac{1}{1+\varepsilon} d_M(y,z) \leq \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{x,\varphi} \leq (1+\varepsilon) d_M(y,z), \quad \textit{para cada } y, z \in W. \tag{3.2.2}$$

Observación 3.2.7. *Como consecuencia del anterior lema, es fácil ver que si M y N son dos variedades Finsler conexas de clase C^1, una función $f : M \to N$ es localmente Lipschitz en el sentido de la Definición 3.1.1 si, y solo si, $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ es localmente Lipschitz para las correspondientes métricas Finsler.*

Ahora procedemos a dar la definición de la derivada escalar Dini superior e inferior de funciones continuas entre variedades Finsler. Estas cantidades son consideradas por John en [30] para homeomorfismos locales entre espacios de Banach a fin de obtener una versión del Teorema de Hadamard. Más adelante, este tipo de derivadas escalares también son consideradas en [17] y [15] en un marco de espacios métricos.

Definición 3.2.8. Sean M y N variedades Finsler conexas de clase C^1, $f : M \to N$ una función continua y $x \in M$. La ***derivada escalar inferior y superior*** de f en x son definidas respectivamente de la siguiente forma:

$$D_x^- f = \liminf_{y \to x} \frac{d_N(f(y), f(x))}{d_M(y,x)}, \quad D_x^+ f = \limsup_{y \to x} \frac{d_N(f(y), f(x))}{d_M(y,x)}$$

donde $y \in M$ con $y \neq x$.

Recordemos que John en [30] pueba que, si E y F son espacios de Banach y $f : E \to F$ es una función diferenciable en $x \in E$, entonces $D_x^+ f = ||df(x)||$ y, si además $df(x)$ es invertible, $D_x^- f = ||[df(x)]^{-1}||^{-1}$. Una afirmación similar se tiene para funciones suaves entre variedades Riemannianas: si $f : M \to N$ es una función de clase C^1 definida entre dos variedad Riemannianas conexas y completas, entonces $D_x^+ f = ||df(x)||_x$ y, si además $df(x) \in \mathrm{Isom}(T_xM, T_{f(x)}N)$, entonces $D_x^- f = ||[df(x)]^{-1}||_{f(x)}^{-1}$ (ver [17]).

El siguiente resultado muestra que se tiene la misma propiedad en el contexto de variedades Finsler que sean conexas y completas. Recordemos que una variedad Finsler M se dice que es ***completa*** si es completa con respecto a la métrica Finsler d_M

Proposición 3.2.9. *Sea $f : M \to N$ una función de clase C^1 entre variedades variedades Finsler conexas y completas de clase C^1. Entonces, tenemos que $D_x^+ f = ||df(x)||_x$ para cada $x \in M$. Si además $df(x) \in \mathrm{Isom}(T_xM, T_{f(x)}N)$, entonces $D_x^- f = ||[df(x)]^{-1}||_{f(x)}^{-1}$.*

Demostración. La siguiente prueba es tomada de [17, Ejemplo 3.2]. Sea $x \in M$ y consideremos $\varepsilon > 0$. Ya que la función $\|df(x)\|_x$ es continua en M, existe $r > 0$ tal que $|\|df(x)\|_x - \|df(y)\|_x| < \varepsilon$ para cada $y \in \mathbf{B}_M(x, 2r)$. Ahora para cada $z \in \mathbf{B}_M(x, r)$ con $z \neq x$, existe un camino $\gamma_{z,\varepsilon} : [0,1] \to M$ tal que $\ell(\gamma_{z,\varepsilon}) \leq d(x,z) + \min\{r; \varepsilon; \varepsilon d(x,z)\}$. Por lo tanto, para cada $y \in Im\gamma_{z,\varepsilon}$ se tiene que

$$d(x,y) \leq \ell(\gamma_{z,\varepsilon}) \leq \min\{2r; (1+\varepsilon)d(x,z)\}, \quad \text{y} \quad \|df(y)\|_x \leq \|df(x)\|_x + \varepsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(z)) \leq \ell(f \circ \gamma_{z,\varepsilon}) &= \int_0^1 \|(f \circ \gamma_{z,\varepsilon})'\| dt. \\ &\leq \sup\{\|df(y)\|_x : y \in Im\gamma_{z,\varepsilon}\} \cdot \int_0^1 \|(\gamma_{z,\varepsilon})'(t)\| dt. \\ &\leq (\|df(x)\|_x + \varepsilon)(1+\varepsilon)d(x,z). \end{aligned}$$

De este modo, se tiene que $D_x^+ f \leq \|df(x)\|_x$.
Ahora procedemos a probar el otro sentido de la desigualdad. Dado $\varepsilon > 0$, por el Lema 3.2.6, podemos encontrar una carta (U, φ) de M con $x \in U$ y una carta (V, ψ) de N con $f(U) \subset V$ tal que $\varphi(x) = 0$, $\psi(f(x)) = 0$ y las cartas φ y ψ son $(1+\varepsilon)$-bi-Lipschitz para las normas $|| \cdot ||_{x,\varphi}$ en $\mathbb{R}^m$ y $|| \cdot ||_{f(x),\psi}$ en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Fijando $v \in T_xM$ con $||v||_x = 1$, y denotando $w = d\varphi(x)(v) \in \mathbb{R}^m$; entonces $||w||_{x,\varphi} = 1$. Tomemos algún $\delta > 0$ tal que $tw \in \varphi(U)$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$, y consideremos la curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ de clase C^1 dada por $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tw)$, para cada $t \in (-\delta, \delta)$. Usando el hecho de que ψ es $(1+\varepsilon)$-Lipschitz para la norma $|| \cdot ||_{f(x),\psi}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} ||(\psi \circ f \circ \gamma)'(0)||_{f(x),\psi} =& \left\| \lim_{t \to 0} \frac{\psi \circ f \circ \gamma(t) - \psi \circ f \circ \gamma(0)}{t} \right\|_{f(x),\psi} \\ \leq& (1+\varepsilon) \lim_{t \to 0} \frac{d_N(f(\gamma(t)), f(x))}{|t|}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que φ^{-1} es $(1+\varepsilon)$-Lipschitz para la norma $|| \cdot ||_{x,\varphi}$, podemos asegurar que

$$d_M(\gamma(t), x) = d_M(\varphi^{-1}(tw), \varphi^{-1}(0)) \leq (1+\varepsilon)||tw - 0||_{x,\varphi} = (1+\varepsilon)|t|.$$

Hence, since $\gamma'(0) = d\varphi^{-1}(0)(w) = v$,

$$\begin{aligned} ||df(x)(v)||_{f(x)} =& ||d(f \circ \gamma)(0)||_{f(x)} = ||d(\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \gamma)(0)||_{f(x)} \\ =& ||d\psi^{-1}(0)(\psi \circ f \circ \gamma)'(0)||_{f(x)} = ||(\psi \circ f \circ \gamma)'(0)||_{f(x),\psi} \\ \leq& (1+\varepsilon)^2 \lim_{t \to 0} \frac{d_N(f(\gamma(t)), f(x))}{d_M(\gamma(t), x)} \leq (1+\varepsilon)^2 D_x^+ f. \end{aligned}$$

Esto se tiene para cada $v \in T_xM$ con $||v||_x = 1$ y para cada $\varepsilon > 0$, así deducimos que $||df(x)||_x \leq D_x^+ f(x)$. Así que la primera parte queda demostrada.
Para probar la segunda parte, supongamos que $df(x) \in \mathrm{Isom}(T_xM, T_{f(x)}N)$, entonces existen vecindades U y V de x y $f(x)$ respectivamente, tal que $f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo $(D_x^- f)^{-1} = D_{f(x)}^+(f|_V)^{-1} = \|d(f|_V)^{-1}(f(x))\| = \|df(x)^{-1}\|$. Por lo tanto, $(D_x^- f) = \|df(x)^{-1}\|^{-1}$.

□

Observación 3.2.10. *Cabe notar que la anterior prueba también es válida para variedades Finsler infinito-dimensionales en el sentido de Palais.*

En el siguiente resultado comparamos la derivada escalar superior con la norma de la diferencial generalizada de Clarke para una función localmente Lipschiz definida entre variedades

Finsler. Esta relación es fundamentalmente importante para la obtención de nuestros resultados de inversión global en la sección 4.

Lema 3.2.11. *Sean M y N variedades Finsler conexas de clase C^1 y sea $f : M \to N$ una función Lipschitz en una vecindad de $x \in M$. Entonces,*

$$D_x^+ f \leq |||\partial f(x)|||_x.$$

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Usando el Lema 3.2.6, podemos encontrar una carta (U, φ) de M con $x \in U$ tal que $\varphi(U)$ es un conjunto convexo, y una carta (V, ψ) de N con $f(U) \subset V$, tal que φ y ψ son $(1+\varepsilon)$-bi-Lipschitz para las normas $|| \cdot ||_{x,\varphi}$ en $\mathbb{R}^m$ y $|| \cdot ||_{f(x),\psi}$ en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Entonces para cada $y \in U$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(y)) \leq& (1+\varepsilon)||\psi \circ f(x) - \psi \circ f(y)||_{f(x),\psi} \\ =& (1+\varepsilon)||\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(y))||_{f(x),\psi}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio [Proposición 1.2.4] a la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, obtenemos que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(y)) \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{w \in [\varphi(x), \varphi(y)]} \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w)(\varphi(x) - \varphi(y)) \right).$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} & d_N(f(x), f(y)) \leq \\ & \leq (1+\varepsilon) \sup \left\{ \|A\|_{x,\varphi,\psi} : A \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{w \in [\varphi(x), \varphi(y)]} \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) \right) \right\} ||\varphi(x) - \varphi(y)||_{x,\varphi} \\ & \leq (1+\varepsilon)^2 \sup \left\{ \|A\|_{x,\varphi,\psi} : A \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{w \in [\varphi(x), \varphi(y)]} \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) \right) \right\} d_M(x, y). \end{aligned}$$

Dado que la función $\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\cdot)$ es semicontinua superiormente, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $w \in \overline{B}_{x,\varphi}(\varphi(x), \delta) := \{z \in \mathbb{R}^m : ||z - \varphi(x)||_{x,\varphi} \leq \delta\}$, we get

$$\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) \subset \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) + \varepsilon \cdot \overline{B}_{x,\varphi,\psi},$$

donde

$$\overline{B}_{x,\varphi,\psi} := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : ||A||_{x,\varphi,\psi} \leq 1\}.$$

Por lo tanto, usando la Proposición 3.2.3,

$$\|A\|_{x,\varphi,\psi} \leq \|\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\|_{x,\varphi,\psi} + \varepsilon = |||\partial f(x)|||_x + \varepsilon,$$

para todo $w \in \overline{B}_{x,\varphi}(\varphi(x), \delta)$ y $A \in \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w)$.

Ahora, tomemos $\delta' > 0$ tal que $B_M(x, \delta') \subset U$ y $\varphi(B_M(x, \delta')) \subset B_{x,\varphi}(\varphi(x), \delta)$. Para cada $y \in B_M(x, \delta')$, se deduce que el conjunto

$$\bigcup_{w \in [\varphi(x), \varphi(y)]} \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w)$$

está contenido dentro de la bola $(|||\partial f(x)|||_x + \varepsilon) \cdot \overline{B}_{x,\varphi,\psi} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, y por lo tanto también su envoltura convexa está contenida en la misma bola.

Así, para cada $y \in B_M(x, \delta')$ tenemos que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq (1 + \varepsilon)^2 (|||\partial f(x)|||_x + \varepsilon) d_M(x, y).$$

Como consecuencia,

$$D_x^+ f = \lim_{r \to 0} \left\{ \sup_{y \in B_M(x,r)} \frac{d_N(f(x), f(y))}{d_M(x, y)} \right\} \leq (1 + \varepsilon)^2 (|||\partial f(x)|||_x + \varepsilon),$$

para todo $\varepsilon > 0$, así que

$$D_x^+ f \leq |||\partial f(x)|||_x.$$

□

En la última parte de esta sección, vamos a comparar la norma de la diferencial generalizada de Clarke de una función localmente Lipschitz f definida entre dos variedades Finsler con la constante Lipschitz de f.

Proposición 3.2.12. *Sean M y N variedades Finsler conexas de clase C^1 y sea $f : M \to N$ una función K-Lipschitz en alrededor de $x \in M$. Entonces, $|||\partial f(x)|||_x \leq K$.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Usando el Lema 3.2.6 podemos encontrar cartas (U, φ) de M en x y (V, ψ) de N en $f(x)$, tal que $f(U) \subset V$ y son $(1 + \varepsilon)$-bi-Lipschitz para las normas $|| \cdot ||_{x,\varphi}$ en $\mathbb{R}^m$ y $|| \cdot ||_{f(x),\psi}$ en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Así, la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es $(1 + \varepsilon)^2 K$-Lipschitz en una vecindad de $\varphi(x)$ con las normas $\| \cdot \|_{x,\varphi}$ y $\| \cdot \|_{f(x),\psi}$. Entonces, no es difícil ver que $\|A\|_{x,\varphi,\psi} \leq (1+\varepsilon)^2 K$, para cada $A \in \partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$. Usando la Proposición 3.2.3 obtenemos que

$$|||\partial f(x)|||_x = \|\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\|_{x,\varphi,\psi} \leq (1+\varepsilon)^2 K.$$

Ya que la desigualdad anterior se tiene para $\varepsilon > 0$, concluimos que $|||\partial f(x)|||_x \leq K$. □

Si M es una variedad Finsler conexa, la ***longitud*** de un camino continuo $\gamma : [a,b] \to M$ es definido de manera usual como,

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} d_M(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \right\} \in [0, +\infty]$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. El camino $\gamma : [a,b] \to M$ se dice que es ***rectificable*** cúando $\ell(\gamma) < \infty$. En particular, cada camino C^1 a trozos $\gamma : [a,b] \to M$ es rectificable, y en este caso, como en la observación anterior, su longitud esta dada por la formula (3.2.1).

Proposición 3.2.13. *Sean M y N variedades Finsler conexas de clase C^1 y $f : M \to N$ una función localmente Lipschitz. Si $\gamma : [a,b] \to M$ es un camino rectificable y $\sigma = f \circ \gamma : [a,b] \to N$, entonces*

$$\ell(\sigma) \leq \sup \{|||\partial f(z)|||_z \,:\, z \in \mathrm{Im}(\gamma)\} \,\ell(\gamma).$$

Demostración. La desigualdad del valor medio ((a) Proposición 2.1.24) nos proporciona que

$$\ell(\sigma) \leq \sup \left\{ D^+ f(z) \,:\, z \in \mathrm{Im}(\gamma) \right\} \ell(\gamma),$$

así el resultado se sigue del Lema 3.2.11. □

Corolario 3.2.14. *Sean M y N variedades Finsler conexas de clase C^1 y sea $f : M \to N$ una función localmente Lipschitz. Entonces, f es Lipschitz si, y sólo si, $||\partial f||_\infty := \sup\{|||\partial f(x)|||_x \,:\, x \in M\} < \infty$. Además,* $\mathrm{Lip}(f) = ||\partial f||_\infty$.

Demostración. Si f es Lipchitz, la Proposición 3.2.12 nos proporciona que $||\partial f||_\infty \leq \mathrm{Lip}(f)$. En el otro sentido, supongamos que $||\partial f||_\infty \leq K$. Para cada $x, y \in M$ y cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un camino $\gamma : [a,b] \to M$ de clase C^1 que une a x con y tal que $\ell(\gamma) \leq d_M(x,y) + \varepsilon/K$. Entonces, por la Proposición 3.2.13 tenemos que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq \ell(f \circ \gamma) \leq K\,\ell(\gamma) \leq K d_M(x,y) + \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es K-Lipschitz. □

3.3. PROYECCIÓN RECUBRIDORA E INVERSIÓN GLOBAL

Comenzaremos esta sección con el problema de inversión local. Para el caso de funciones localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, tenemos un teorema de inversión local [(a) Teorema 1.2.8], y el Lema 2.2.2, que nos establece la relación entre la co-norma del Jacobiano generalizado de Clarke de una función y la norma del Jacobiano generalizado de Clarke de la correspondiente inversa local. Ahora vamos a extender estos resultados al caso de funciones definidas entre variedades Finsler.

Definición 3.3.1. Sean M y N variedades Finsler n-dimensionales de clase C^1, y sea $f : M \to N$ una función Lipschitz en una vecindad de $x \in M$. Decimos que $\partial f(x)$ tiene ***rango maximal*** si cada elemento $B \in \partial f(x)$ tiene rango n, es decir, B es una función lineal invertible de T_xM sobre $T_{f(x)}N$.

En lo que sigue, si $\mathcal{B}$ es una familia de funciones lineales invertibles, denotamos por $\mathcal{B}^{-1}$ el conjunto de sus inversas definido por $\mathcal{B}^{-1} = \{B^{-1} \,:\, B \in \mathcal{B}\}$, y denotemos por $co(\mathcal{B}^{-1})$ su envoltura convexa.

Proposición 3.3.2. *Sean M y N variedades Finsler de clase C^1 de la misma dimensión, y sea $f : M \to N$ una función Lipschitz en una vecindad de x tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal. Entonces, existen vecindades abiertas U de x y V de $f(x)$ tal que $f_{|U} : U \to V$ es un homeomorfismo. Además, si $g = (f_{|U})^{-1}$, entonces g es Lipschitz en una vecindad de $f(x)$, y tenemos que*

$$\partial g(f(x)) \subset \mathrm{co}(\partial f(x)^{-1})$$

y

$$|||\partial g(f(x))|||_{f(x)} \leq \frac{1}{/\!/\!/\partial f(x)/\!/\!/_x}.$$

Demostración. Sean (U_0, φ) una carta de M en x y (V_0, ψ) una carta de N en $f(x)$ tal que f es lipschitz en U_0 y $f(U_0) \subset V_0$. Ya que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es Lipschitz en una vecindad de $\varphi(x)$ y $\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ tiene rango maximal, usando el teorema de la función inversa local dado por Clarke [Teorema 1.2.8], obtenemos una vecindad abierta W de $\varphi(x)$ con $W \subset \varphi(U_0)$ tal que la restricción $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{|W}$ es un homeomorfismo bi-Lipschitz sobre su imagen. Setting $U = \varphi^{-1}(W)$ y $V = f(U)$, tenemos que $f_{|U} : U \to V$ es un homeomorfismo, y $g = (f_{|U})^{-1}$ es Lipschitz en una vecindad de $f(x)$.

Por otro lado, ya que $\varphi \circ g \circ \psi^{-1} = (\psi \circ f_{|_U} \circ \varphi^{-1})^{-1}$, se sigue de Lema 2.2.3 que

$$\partial(\varphi \circ g \circ \psi^{-1})(\psi(f(x))) \subset \mathrm{co}\left(\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))^{-1}\right).$$

Entonces, es claro que

$$\partial g(f(x)) \subset \mathrm{co}(\partial f(x)^{-1}).$$

Ahora procedemos a demostrar la última desigualdad. Primero, nótese que $/\!\!/\!\!/ \partial f(x) /\!\!/\!\!/_x > 0$ ya que cada elemento en $\partial f(x)$ es invertible y $\partial f(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{L}(T_xM, T_{f(x)}N)$. Ahora elijamos $B \in (\partial f(x))^{-1}$. Entonces, $B^{-1} \in \partial f(x)$ y, por [44] y el Lema 3.2.4, se ve facilmente que

$$|||B|||_{f(x)} = \frac{1}{/\!\!/\!\!/ B^{-1} /\!\!/\!\!/_x} \leq \frac{1}{/\!\!/\!\!/ \partial f(x) /\!\!/\!\!/_x}. \tag{3.3.1}$$

Por convexidad, la anterior desigualdad siempre se tiene para cada $B \in \mathrm{co}(\partial f(x)^{-1})$. Por lo tanto,

$$|||\partial g(f(x))|||_{f(x)} \leq \frac{1}{/\!\!/\!\!/ \partial f(x) /\!\!/\!\!/_x}.$$

□

A continuación, damos nuestro principal resultado sobre inversión global. Primero recordemos la definición de proyección recubridora (Definición 2.0.13) y, utilizando la co-norma de la diferencial generalizada de Clarke, obtenemos el siguiente resultado, que es una extención de la condición integral de Hadamard para funciones localmente Lipschitz definidas entre variedades Finsler.

Teorema 3.3.3. *Sean M y N variedades Finsler conexas de clase C^1 de la misma dimensión, donde M es completa, y sea $f : M \to N$ una función localmente Lipschitz tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal para todo $x \in M$. Supongamos que existe $x_0 \in M$ tal que*

$$\int_0^\infty m(t)dt = \infty, \quad \textit{donde} \quad m(t) = \inf_{x \in \overline{B}_M(x_0,t)} /\!\!/\!\!/ \partial f(x) /\!\!/\!\!/_x.$$

Entonces f es una proyección recubridora.

Demostración. Primero que todo, nótese que $m(t) > 0$ para todo $t > 0$. En efecto, si existe $t_0 > 0$ tal que $m(t_0) = 0$, entonces $0 \leq m(t) \leq m(t_0) = 0$ para todo $t \geq t_0$ y, ya que $m(t) \leq /\!\!/\!\!/ \partial f(x_0) /\!\!/\!\!/_{x_0}$ para todo $t > 0$, obtenemos que

$$\int_0^\infty m(t)dt = \int_0^{t_0} m(t)dt \leq t_0 /\!\!/\!\!/ \partial f(x_0) /\!\!/\!\!/_{x_0} < \infty,$$

lo cual contradice la hipótesis.

Por otro lado, para cada $x \in M$, conocemos de la Proposición 3.3.2 que f es un homeomorfismo local alrededor de x y que, si g es la inversa local de f en $f(x)$, usando el Lema 3.2.11 tenemos que

$$D^+_{f(x)} g \leq |||\partial g(f(x))|||_{f(x)} \leq \frac{1}{///\partial f(x)///_x}.$$

Así,

$$D^-_x f = \frac{1}{D^+_{f(x)} g} \geq ///\partial f(x)///_x.$$

Ahora vamos a definir $w(t) = \frac{1}{m(t)}$. Es claro que w es un peso, i.e., $w : (0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función no decreciente (no necesariamente continua) tal que $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{w(t)} = \infty$.

Ya que f es un homeomorfismo local, y usando el hecho proporcionado en [17, Lema 4.5 y Teorema 4.6], es suficiente probar que $D^-_x f \cdot w(d_M(x, x_0)) \geq 1$, para cada $x \in M$. Teniendo en cuenta que $x \in \overline{B}_M(x_0, d_M(x, x_0))$, podemos finalizar la prueba:

$$\begin{aligned} D^-_x f \cdot w(d_M(x, x_0)) &\geq ///\partial f(x)///_x \frac{1}{m(d_M(x, x_0))} \\ &= \frac{///\partial f(x)///_x}{\inf\limits_{z \in \overline{B}_M(x_0, d_M(x, x_0))} ///\partial f(z)///_z} \geq \frac{///\partial f(x)///_x}{///\partial f(x)///_x} = 1. \end{aligned}$$

□

Recordemos que, si $f : M \to N$ es una proyección recubridora entre espacios métricos arco conexos y $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es el morfismo asociado entre sus grupos fundamentales, es bien conocido que f es un homeomorfismo de M sobre N si, y sólo si, $f_*[\pi_1(M)] = \pi_1(N)$. Así obtenemos el siguiente corolario:

Proposición 3.3.4. *Bajo las condiciones del Teorema 3.3.3 y supongamos que N es simplemente conexa o $\pi_1(M) = \pi_1(N)$ es finito. Entonces, f es un homeomorfismo global.*

En la parte final de este capítulo, usamos una variante de la condición integral de Hadamard para obtener resultados de de inversión global y de inyectividad global para funciones Lipschitz definidas en $\mathbb{R}^n$ en términos de condiciones espectrales de la diferencial generalizada de Clarke. En particular, extendemos algunos de los resultados dados en [3] y [14] a un contexto no regular. Teniendo en cuenta que para una función localmete Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, denotamos por $\mathrm{Spec}(f)$ el conjunto de todos los autovalores reales (o complejos) de todas las matrices $A \in \partial f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.3.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Asumamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\int_0^\infty s(t)dt = \infty, \quad \textit{donde} \quad s(t) = \inf_{x \in \overline{B}(x_0,t)} \{|\lambda|^n : \lambda \in \mathrm{Spec}(\partial f(x))\}.$$

Entonces f es un homeomorfismo global.

Demostración. Supongamos que f es K-Lipschitz. Por la Proposición 3.2.12, tenemos que $\|A\| \leq K$ para cada $A \in \partial f(x)$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$. Denotemos por $\|\cdot\|_\infty$ la norma del supremo en el espacio de las matrices reales de $n \times n$, i.e.,

$$\|A\|_\infty := \sup\{|a_{i,j}| : 1 \leq i, j \leq n\} \quad \text{donde} \quad A = (a_{ij}).$$

Ya que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas equivalentes, existe una constante $K_1 > 0$ tal que

$$\|A\|_\infty \leq K_1 \quad \text{para cada } A \in \partial f(x) \text{ y cada } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora, denotemos por $\mathrm{adj}\,(A)$ la *adjunta* de la matriz A, esto es, la matriz transpuesta de cofatores de A. En este sentido, si A es invertible, su inversa está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}\,(A).$$

Así, obtenemos que $\|\mathrm{adj}\,(A)\|_\infty \leq (n-1)!(K_1)^{n-1} = K_2$ para cada $A \in \partial f(x)$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, fijado $t > 0$, $x \in \overline{B}(x_0, t)$ y $A \in \partial f(x)$, tenemos que $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ donde λ_i son los autovalores de A, así que

$$\begin{aligned} |\det A| = |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \cdots |\lambda_n| &\geq \inf\{|\lambda|^n : \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} \\ &\geq \inf_{x \in \overline{B}(x_0,t)} \{|\lambda|^n : \lambda \in \mathrm{Spec}(\partial f(x))\} = s(t). \end{aligned}$$

De manera que la matriz inversa A^{-1} satisface

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{|\det A|}\,\|\mathrm{adj}\,(A)\|_\infty \leq \frac{1}{|\det A|}\,K_2 \leq \frac{K_2}{s(t)}.$$

Usando el hecho de que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes, obtenemos una constante $K_3 > 0$ tal que

$$\|A^{-1}\|^{-1} \geq K_3 \cdot s(t) \quad \text{para cada } A \in \partial f(x) \text{ y } x \in \overline{B}(x_0, t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_3 \cdot s(t) &\leq \inf_{x\in\overline{B}(x_0,t)} \left\{ \inf_{A\in\partial f(x)} \|A^{-1}\|^{-1} \right\} \\ &= \inf_{x\in\overline{B}(x_0,t)} \left\{ \inf_{A\in\partial f(x)} /\!\!/A/\!\!/ \right\} \\ &= \inf_{x\in\overline{B}(x_0,t)} /\!\!/\partial f(x)/\!\!/ = m(t). \end{aligned}$$

Hence, $\int_0^\infty m(t)dt \geq \int_0^\infty K_3 \cdot s(t)dt = \infty$. Ya que $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo, obtenemos del corolario 3.3.4 (ver también [44]) que la función f es un homeomorfismo global. $\square$

Como consecuencia directa del teorema anterior, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y supongamos que existe algún $\varepsilon > 0$ que satisface*

$$\mathrm{Spec}(\partial f(x)) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\} = \emptyset, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, f es un homeomorfismo global.

Finalmente, damos un resultado de inyectividad global para funciones no regulares. Para ello necesitaremos el siguiente lema, que es una versión no regular del Lema Principal de [14].

Lema 3.3.7. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Dado $t \in \mathbb{R}$, consideremos la función $f_t(x) := f(x) - tx$. Si existe una sucesión (t_k) de números reales convergiendo a 0 tal que cada función f_{t_k} es inyectiva, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Vamos a demostrar que $x_1 = x_2$. Definimos la función $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ por $h(t, x) = (t, f(x) - tx)$. Entonces h es localmente Lipschitz, y no es difícil ver que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, h tiene rango maximal en $(0, x)$. Aplicando el el teorema de la función inversa ((a) Teorema 1.2.8) a h en $(0, x_1)$ y $(0, x_2)$, obtenemos vecindades abiertas W_1 de $(0, x_1)$, W_2 de $(0, x_2)$ y V de y y algún $\delta > 0$ tal que $h_{|W_1} : W_1 \to (-\delta, \delta) \times V$ y $h_{|W_2} : W_2 \to (-\delta, \delta) \times V$ son homeomorfismos. Para $i = 1, 2$ ponemos $g_i = (h_{|W_i})^{-1}$, y notemos que $g_i(0, y) = (0, x_i)$ para $i = 1, 2$. Ahora $t_k \in (-\delta, \delta)$ para k suficientemente grande, y para $i = 1, 2$ tenemos que $g_i(t_k, y) = (t_k, x_k^i)$ para algún

$x_k^i \in W_i$ satisfaciendo $y = f_{t_k}(x_k^i)$. Ya que cada f_{t_k} es inyectiva, deducimos que $x_k^1 = x_k^2$ para k suficientemente grande. Pero para $i = 1, 2$, sabemos que $x_i = \lim_{k\to\infty} x_k^i$. De esta manera, obtenemos que $x_1 = x_2$. □

Teorema 3.3.8. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipchitz tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que existe una sucesión (D_k) de discos compactos de $\mathbb{C}$ (con interior no vacío), centrados en puntos t_k del eje real, tal que $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ y*

$$\mathrm{Spec}(\partial f(x)) \cap (\cup_{k=1}^{\infty} D_k) = \emptyset.$$

Entonces, f es inyectiva

Demostración. Pongamos $f_m(x) = f(x) - t_m x$ para toda t_m. Es claro que $\mathrm{Spec}(\partial f_m(x)) \cap (D_m - t_m) = \emptyset$, donde $D_m - t_m = \{z \in \mathbb{C} : z + t_m \in D_m\}$ es un disco compacto centrado en 0. Usando el Corolario 3.3.6, obtenemos que f_m es un homeomorfismo global para cada m. El Lema 3.3.7 nos permite concluir que f es inyectiva.

□

Como una consecuencia, obtenemos:

Corolario 3.3.9. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz tal que $\partial f(x)$ tiene rango maximal para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y supongamos que*

$$\mathrm{Spec}(\partial f(x)) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}.$$

Entonces, f es inyectiva.

Capítulo 4

INVERSIÓN GLOBAL DE FUNCIONES NO REGULARES USANDO MATRICES PSEUDO-JACOBIANAS.

El propósito principal en este capítulo es el uso de técnicas del análisis no regulares para estudiar la inversión global de funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que pueden no ser localmente Lipschitz y para las cuales el Jacobiano generalizado de Clarke (Definición 1.2.1) no está necesariamente definida. Para este fin, usaremos el concepto de *pseudo-Jacobiano* (también llamado *Jacobiano aproximado*) de la función f, introducido por Jeyakumar y Luc en [27] y estudiado más tarde en [28, 35, 29] y definimos un índice de regularidad para f relacionado con esta función. Así obtenemos una caracterización de inversión global en términos de este índice de regularidad. En particular, veremos que la condición de integral de Hadamard tiene un homólogo natural en este sentido, y probamos una condición suficiente de invertibilidad global.

Este capítulo esta organizado de la siguiente manera. En la primera parte, introducimos algunas definiciones básicas y resultados previos que serán de gran ayuda en el transcurso de este capítulo. En la segunda parte, introducimos el índice de regularidad de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ relacionado con el la función pseudo-Jacobiana Jf, y vemos la conexión que existe con la derivada de Dini escalar inferior de f. En la tercera parte, probamos nuestros resultados principales. El Teorema 4.3.4 nos proporciona una caracterización de inversión global para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en términos del índice de regularidad de f. En el

Colorario 4.3.10, obtenemos una estimación de el dominio de invertibilidad de f alrededor de un punto, y finalmente en el Corolario 4.3.11 damos una versión de la condición de integral de Hadamard usando el índice de regularidad, con lo cual obtenemos una condición suficiente de inversión global.

4.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Empezaremos recordando la definición de pseudo-Jacobiano asociado a una función continua, así como algunas propiedades básicas. Esta noción es introducida en [27] donde éste es llamado Jacobiano aproximado. Para mayor información sobre este concepto y sus aplicaciones, se puede consultar [29]. La notación usada en este capítulo es estándar y es tomada de [29]. El espacio Euclídeo n-dimensional es denotado por $\mathbb{R}^n$, y el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota el espacio de todas las funciones lineales de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que pueden ser consideradas como matrices de orden $m \times n$. El espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ está dotado con su norma matricial habitual. La bola unidad abierta de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ son denotadas, respectivamente, por $\mathbf{B}_n$ y $\mathbf{B}_{m\times n}$.

Definición 4.1.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Decimos que un conjunto de matrices de orden $m \times n$ no vacío y cerrado $Jf(x) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x si para cada $u \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^m$ uno tiene

$$(vf)^+(x; u) \leq \sup_{M \in Jf(x)} \langle v, Mu \rangle, \tag{4.1.1}$$

donde vf es la funcion real $(vf)(x) = \sum_{i=1}^{m} v_i f_i(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, (siendo v_i componentes de v y f_i componentes f), y $(vf)^+(x; u)$ es la derivada direccional de Dini superior de la función vf en x en la direción u, esto es

$$(vf)^+(x; u) := \limsup_{t \to 0^+} \frac{(vf)(x + tu) - (vf)(x)}{t}.$$

Cada elemento de $Jf(x)$ es llamado matriz pseudo-Jacobiana de f en el punto x. Si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $Jf(x)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x, decimos que la función multivaluada $Jf : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dada por $Jf : x \mapsto Jf(x)$ es una función pseudo-Jacobiana para f.

Observación 4.1.2. Cabe resaltar que el pseudo-Jacobiano definido de esta forma axiomática no es único.

Proposición 4.1.3. Las siguientes propiedades del Pseudo-Jacobiano se tienen:

(i) Un conjunto de matrices cerrado $Jf(x) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x si y solo si para cada $u \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^m$ tenemos

$$(vf)^-(x; u) \geq \inf_{M \in Jf(x)} \langle v, M(u) \rangle.$$

(ii) Si $Jf(x) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un psuedo-Jacobiano de f en x, entonces cada subconjunto cerrado $A \subseteq L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que contiene a $Jf(x)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x.

(iii) Si $J_i f(x)_{i=1}^{\infty} \subseteq L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es una sucesión decresiente (por inclusión) de pseudo-Jacobianos acotados de f en x, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_i f(x)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua y Gâteaux-diferenciable en x con derivada $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, entonces $Jf(x) := \{df(x)\}$ es un pseudo-Jacobiano de f en x. Por otra parte, como se puede ver en [29, Sección 1.3], muchas de las derivadas generalizadas usadas frecuentemente en el análisis no regular son ejemplos de pseudo-Jacobianos. En particular, el Jacobiano generalizado de Clarke de una función localemente Lipschitz es un pseudo-Jacobiano. Sin embargo, hay ejemplos de funciones localmente Lipschitz cuyo jacobiano generalizado de Clarke contiene estrictamente un pseudo-Jacobiano. Consideremos el siguiente ejemplo tomado de [29].

Ejemplo 4.1.4. [29, Ejemplo 1.3.2]
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función definida por

$$f(x, y) = (|x|, |y|)$$

Se puede comprobar fácilmente que un pseudo-Jacobiano de f en el punto $(0, 0)$ esta dado por el siguiente conjunto

$$Jf(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mientras que el Jacobiano generalizado de Clarke está dado por

$$\partial f(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in [-1, 1] \right\},$$

que también es un pseudo-Jacobiano de f en $(0, 0)$ y contiene a $Jf(0, 0)$, en efecto, $\partial f(0, 0)$ es la envoltura convexa de $Jf(0, 0)$.

Sin embargo, este no es siempre el caso. El siguiente ejemplo tomado de [29] ilustra que incluso para el caso donde $m = 1$, la envoltura convexa de un pseudo-Jacobiano de una función localmente Lipschitz puede estar estrictamente contenido en el *Jacobiano generalizado de Clarke*.

Ejemplo 4.1.5. [29, Ejemplo 1.3.3]
Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = |x| - |y|.$$

Entonces se puede verificar fácilmente que

$$J_1 f(0) = \{(1, 1), (-1, -1)\} \quad \text{y} \quad J_2 f(0) = \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

son pseudo-Jacobianos de f en 0; donde

$$\partial f(0) = co\{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}.$$

Observese que la envoltura convexa del pseudo-Jacobiano $J_1 f(0)$ es un subconjunto propio de *Jacobiano generalizado de Clarke* y que estos dos pseudos-Jacobianos $J_1 f(0)$ y $J_2 f(0)$ no está incluido el uno en el otro. Veamos unos ejemplos de cómo calcular un psedo-Jacobiano de una función continua y el Jacobiano de Clarke no se puede calcular ya que no son localmente Lipschitz.

Ejemplo 4.1.6.
Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x - y, x + 3y^{1/3})$$

Procederemos a calcular su pseudo-Jacobiano.
Para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, la función real (vf) en el punto (x, y) esta dada por

$$(vf)(x, y) = v_1(x - y) + v_2(x + 3y^{1/3}).$$

Ahora la derivada escalar Dini superior de vf en (x, y) en la dirección $u = (u_1, u_2)$ se calcula como

$$\begin{aligned}(vf)^+((x, y); (u_1, u_2)) &= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{(vf)((x, y) + t(u_1, u_2)) - (vf)(x, y)}{t} \\ &= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{(vf)(x + tu_1, y + tu_2) - (vf)(x, y)}{t}.\end{aligned}$$

Pero

$$(vf)(x+tu_1, y+tu_2) = v_1(x+tu_1-(y+tu_2)) + (x+tu_1+3(y+tu_2)^{1/3}),$$

así tenemos que

$$\begin{aligned}(vf)^+((x,y);(u_1,u_2)) &= \limsup_{t\downarrow 0} \frac{tv_1(u_1-u_2)+tu_1v_2+3v_2((y+tu_2)^{1/3}-y^{1/3})}{t} \qquad (4.1.2)\\ &= v_1(u_1-u_2)+u_1v_2+3v_2(y^{1/3})'\\ &= v_1(u_1-u_2)+v_2(u_1+y^{-2/3}u_2)\\ &= \left\langle \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & y^{-2/3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}$$

Ahora por definición tenemos que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ y para todo $u \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$(vf)^+((x,y);u) \leq \sup_{M\in Jf(x,y)} \langle v; M(u)\rangle.$$

Luego bastaría tomar $M = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & y^{-2/3}\end{pmatrix}$, por lo tanto el pseudo-Jacobiano de f está dado por

$$Jf(x,y) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & y^{-2/3}\end{pmatrix}\right\} \quad \text{para} \quad y \neq 0.$$

Ahora probaremos que el pseudo-Jacobiano en el punto $(x,0)$ viene dado por el siguiente conjunto de matrices, es decir:

$$Jf(x,0) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & \beta\end{pmatrix} \quad : \beta \geq 0.\right\} \quad \text{para} \quad y = 0.$$

Para esto reemplazando $x=y=0$ en (4.1.2) tenemos que

$$\begin{aligned}(vf)^+((0,0);(u_1,u_2)) &= \limsup_{t\downarrow 0} \frac{tv_1(u_1-u_2)+tu_1v_2+3v_2(tu_2)^{1/3}}{t}\\ &= v_1(u_1-u_2)+u_1v_2+3u_2^{1/3}v_2 \limsup_{t\downarrow 0}\frac{1}{t^{2/3}}\\ &= v_1(u_1-u_2)+v_2\left(u_1+3u_2^{1/3}\limsup_{t\downarrow 0}\frac{1}{t^{2/3}}\right)\\ &= v_1(u_1-u_2)+u_1v_2+3u_2^{1/3}v_2 \limsup_{t\downarrow 0}\frac{1}{t^{2/3}}. \qquad (4.1.3)\end{aligned}$$

Por el otro lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{\beta\geq 0}\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right\rangle &\leq \sup_{\beta\geq 0}\{v_1(u_1-u_2)+v_2(u_1+\beta u_2)\} \\
&\leq v_1(u_1-u_2)+v_2u_1+\sup_{\beta\geq 0}\beta(u_2v_2) \qquad (4.1.4)
\end{aligned}
$$

Ahora para que cumpla con la desigualdad (4.1.1) de la definición de pseudo-Jacobiano tenemos que analizar el producto de $u_2.v_2$ así, tenemos que

$$
(4.1.3) \text{ y } (4.1.4) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad u_2.v_2 > 0 \\ v_1(u_1-u_2) & \\ \quad \text{ó} & \text{si} \quad u_2.v_2 = 0 \\ u_1(v_1+v_2) & \\ -\infty & \text{si} \quad u_2.v_2 < 0 \end{cases}
$$

Luego

$$
Jf(x,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \quad : \beta \geq 1. \right\}.
$$

Ejemplo 4.1.7.
Consideremos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$
g(x,y) = (x + 3y^{1/3},\, 3y^{1/3}).
$$

Haciendo similarmente los cálculos que en el ejemplo anterior se puede comprobar fácilmente que:

$$
Jg(x,y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y^{-2/3} \\ 0 & y^{-2/3} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para } y \neq 0 \ , \quad \text{ y } \quad Jg(x,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \ \alpha \geq 1 \right\}.
$$

El siguiente resultado tiene que ver con el Teorema del valor medio usando pseudo-Jacobianos. Este teorema es probado por Jeyakumar y Luc y su demostración se puede consultar en [29, Teorema 2.2.2].

Teorema 4.1.8. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y $u, v \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $Jf(x)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x para cada x en el segmento $[u, v]$. Entonces*

$$f(u) - f(v) \in \overline{co}(Jf([u, v])(u - v)).$$

A lo largo de este cápitulo vamos a estar interesados en pseudo-Jacobianos con propiedades de estabilidad buenas, en el sentido de que sean semicontinuos superiormente. Recordemos que una función $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ es semicontinua superiormente (usc) en x si para cada $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que

$$F(x + \delta \mathbf{B}_n) \subseteq F(x) + \varepsilon \mathbf{B}_m.$$

En este sentido, se conoce que el Jacobiano generalizado de Clarke de una función localmente Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es usc [Proposición 1.2.3]. Además cabe recordar que una función $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se dice que es *localmente acotada* en x si existe una vecindad U de x y una constante $\alpha > 0$ tal que $\|A\| \leq \alpha$ para cada $A \in F(U)$. Claramente, si F es usc en x y $F(x)$ es acotada, entonces F es localmente acotada en x. Por otro lado, Jeyakumar y Luc prueban en [29, Proposition 2.2.8] prueban el siguiente resultado:

Proposición 4.1.9. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua entonces, f admite una función pseudo-Jacobiana localmente acotada en x si, y sólo si, f es localmente Lipschitz en x.*

4.2. ÍNDICE DE REGULARIDAD Y DERIVADA ESCALAR INFERIOR

En esta sección estudiamos la equi-invertibilidad de matrices pseudo-Jacobianas, y cómo se relaciona con la derivada escalar inferior. Para esto, recordemos que (Definición 2.2.1), la co-norma de una matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se define como

$$/\!/A/\!/ = \inf_{||u||=1} ||Au||.$$

Es claro que la matriz A es invertible si, y sólo si, $/\!/A/\!/ > 0$. Un subconjunto de matrices $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se dice que son *equi-invertible* siempre que

$$\inf\{/\!/A/\!/ \,:\, A \in \mathcal{A}\} > 0.$$

Como habíamos mencionado antes, en el caso de funciones continuas pero no localmente Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tenemos que la función pseudo-Jacobiana puede ser, en general no acotada. Con el fin de hacer frente a este problema una herramienta útil es lo llamado el cono de recesión, que se define acontinuación.

Definición 4.2.1. Consideremos un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$; el *cono de recesión* (o *cono asintótico*) de $\mathcal{A}$ denotado por $\mathcal{A}_\infty$ es definido por

$$\mathcal{A}_\infty := \{\lim_{j\to\infty} t_j A_j \;:\; A_j \in \mathcal{A}, t_j \downarrow 0\}.$$

Los elementos de $\mathcal{A}_\infty$ son llamados direcciones recesión de $\mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es *asintotable* si para cada $A \in \mathcal{A}_\infty \backslash \{0\}$, y para cada sucesión $\{t_i\}_{i\geq 1}$ de números positivos que convergen a ∞, existe una sucesión $\{A_i\}_{i\geq 1}$ que converge a A tal que $t_i A_i \in \mathcal{A}$ para todo i.

Ahora veremos algunas propiedades básicas sobre los conos de recesión, para más información se puede consultar en [29].

Proposición 4.2.2. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C \subseteq \mathbb{R}^m$ subconjuntos no vacíos. Entonces las siguientes afirmaciones se tienen.*

(a) *A_∞ es un cono cerrado.*

(b) *A es acotado sí y solo si $A_\infty = \{0\}$.*

(c) *Si A es convexo y cerrado, entonces $A = A + A_\infty$.*

(d) *$co(A_\infty) \subseteq (coA)_\infty$. La igualdad se tiene cuando $co(A_\infty)$ no contiene subespacios lineales no triviales.*

(f) *$(A \cup B)_\infty = A_\infty \cup B_\infty$.*

(g) *$(A \cap B)_\infty \subseteq A_\infty \cap B_\infty$. La igualdad se tiene cuando A y B son cerrados, convexos y $A \cap B \neq \emptyset$.*

(h) *$(A + B)_\infty \subseteq A_\infty + B_\infty$ cuando $A_\infty \cap -B_\infty = \{0\}$; y $A_\infty + B_\infty \subseteq (A + B)_\infty$ cuando A es asintótico. La igualdad se tiene cuando B es acotado.*

(i) *$(A \times C)_\infty \subseteq A_\infty \times C_\infty$. La igualdad se tiene cuando A es asintótico.*

Ahora supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y que $Jf(x)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x. El conjunto $Jf(x)_\infty$ denota el cono de recesión de $Jf(x)$. Los elementos de $Jf(x)_\infty$ son llamados *matrices de recesión* de $Jf(x)$. Veamos algunas propiedades del pseudo-Jacobiano en términos del cono de reseción para sus detalles consultar [29].

Proposición 4.2.3. *Supongamos que $Jf(x)$ es un pseudo-Jacobiano de f en x. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

(a) $Jf(x)$ es acotado si y sólo si $(Jf(x))_\infty = \{0\}$.

(b) Si $Jf(x)$ es convexo, entonces $Jf(x) = Jf(x) + (Jf(x))_\infty$.

(c) Si $Jf(x)$ es convexo y $0 \in Jf(x)$, entonces $(Jf(x))_\infty \subset Jf(x)$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.2.4. [29, Ejemplo 1.5.4]
Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

$$f(x, y) = (\sqrt{|x|}sign(x) + |y|, \sqrt{|y|}sign(y) + |y|)$$

Notese que f no es localmente Lipchitz en $(0, 0)$ y así el Jacobiano de Clarke no existe. Por otra parte, haciendo los cálculos como en los Ejemplos 4.1.6 y 4.1.7 tenemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$Jf(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \geq c \right\}$$

es un pseudo-Jacobiano de f en $(0, 0)$ El cono de recesión de $Jf(0, 0)$ está dado por

$$(Jf(0,0))_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \right\}.$$

Notese que $Jf(0, 0)$ es no convexo.

Ejemplo 4.2.5. Consideremos la función del Ejemplo 4.1.6 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x - y, x + 3y^{1/3})$$

Sabemos que

$$Jf(x,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para} \quad \beta \geq 1.$$

Luego, el cono de recesión viene dado por el siguiente conjunto de matrices

$$co(Jf(0,0))_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para} \quad \beta \geq 0.$$

Ejemplo 4.2.6. Consideremos la función del Ejemplo 4.1.7 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$g(x, y) = (x + 3y^{1/3}, 3y^{1/3})$$

sabemos que $Jg(x, 0)$ viene dado por

$$Jg(x, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \geq 1 \right\},$$

y el cono de recesión del conjunto $co(Jf(0,0))$ está dado por

$$(Jf(0,0))_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \beta \geq 0 \right\}.$$

Haciendo uso del cono de recesión Jeyakumar y Luc en [29] nos proporcionan en el siguiente resultado una condición suficiente para la equi-invertibilidad de un conjunto no acotado de matrices invertibles.

Lema 4.2.7. *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto cerrado de matrices de orden $n \times n$. Si cada elemento de $\mathcal{A} \cup (\mathcal{A}_\infty \backslash \{0\})$ es invertible, entonces $\mathcal{A}$ es equi-invertible.*

Ahora, siguiendo en esta línea, la equi-invertibilidad de una función pseudo-jacobiana alrededor de un punto x_0 puede ser garantizada por la invertibilidad de la función pseudo-Jacobiana en el punto x_0 y de sus matrices de recesión, como lo muestra el siguiente resultado de Jeyakumar y Luc.

Proposición 4.2.8. [29, Proposición 3.1.6]
Supongamos que Jf es usc en x_0. Si cada elemento de el conjunto $\overline{co}(Jf(x_0)) \cup co(Jf(x_0)_\infty \backslash \{0\})$ es invertible, entonces existe $\beta > 0$ tal que el conjunto $\overline{co}(Jf(x_0 + \beta \overline{\mathbf{B}}_n))$ es equi-invertible.

Además nos proporcianan el siguiente teorema de la aplicación abierta para funciones continuas usando el pseudo-Jacabiano.

Teorema 4.2.9. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado. Si existe $\beta > 0$ tal que el conjunto $co(Jf(x_0 + \beta\overline{\mathbf{B}}_n))$ es equi-invertible, entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \geq \delta\|h\| \quad \textit{para toda } h \neq 0,\ \|h\| < \beta, \tag{4.2.1}$$

y

$$f(x_0) + \frac{\beta\delta}{4}\mathbf{B}_n \subseteq f\left(x_0 + \frac{\beta}{2}\mathbf{B}_n\right). \tag{4.2.2}$$

El concepto de regularidad para funciones pseudo-Jacobianas se define acontinuación:

Definición 4.2.10. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y $Jf : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ una función pseudo-Jacobiana de f. El índice de regularidad asociado $\alpha_{Jf}(x)$ de f en $x \in \mathbb{R}^n$ es definido por*

$$\alpha_{Jf}(x) := \text{ínf}\{/\!/A/\!/ : A \in co(Jf(x))\}.$$

Se dice que f es Jf-regular en x si $\alpha_{Jf}(x) > 0$. Cuando f es Jf-regular en x para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que f es Jf-regular.

La conección de el índice de regularidad con la condición integral de Hadamard original puede verse de la siguiente manera. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 con Jacobiano distinto de cero en cada punto y consideremos el pseudo-Jacobiano natural de Jf de f dado por $Jf(x) := \{df(x)\}$. Entonces se puede ver fácilmente que

$$\alpha_{Jf}(x) = \left\|df(x)^{-1}\right\|^{-1}.$$

Con el fin de analizar el comportamiento del indice de regularidad utilizaremos la siguiente notación:

Notación 4.2.11. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y $Jf : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ una función pseudo-Jacobiana de f. Para cada $\beta > 0$, denotamos:

$$\alpha_{Jf}(x, \beta) := \text{ínf}\{/\!/A/\!/ : A \in co(Jf(x + \beta\mathbf{B}_n))\}.$$

En busca de nuestro resultado principal en este cápitulo necesitaremos de estos sencillos lemas, que serán de gran utilidad.

Lema 4.2.12. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Si Jf es usc en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\lim_{\beta \to 0^+} \alpha_{Jf}(x, \beta) = \sup_{\beta > 0} \alpha_{Jf}(x, \beta) = \alpha_{Jf}(x).$$

Demostración. Primero que todo, notece que $\alpha_{Jf}(x) \geq \alpha_{Jf}(x, \beta_1) \geq \alpha_{Jf}(x, \beta_2)$ siempre que $0 < \beta_1 < \beta_2$, así que la primera igualdad es clara. Ahora, ya que Jf es usc en x, dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\beta > 0$ tal que

$$Jf(x + \beta \mathbf{B}_n) \subset Jf(x) + \varepsilon \mathbf{B}_{n \times n}.$$

Entonces,

$$co(Jf(x + \beta \mathbf{B}_n)) \subset co(Jf(x) + \varepsilon \mathbf{B}_{n \times n}) \subset co(Jf(x)) + \varepsilon \mathbf{B}_{n \times n}.$$

Por lo tanto, para cada $A \in co(Jf(x + \beta \mathbf{B}_n))$ existe $\tilde{A} \in co(Jf(x))$ y $\tilde{B} \in \mathbf{B}_{n \times n}$ tal que $A = \tilde{A} + \varepsilon \tilde{B}$. Como consecuencia, para cada $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$, tenemos que

$$\|Au\| \geq \|\tilde{A}u\| - \varepsilon \|u\| \geq \alpha_{Jf}(x) - \varepsilon,$$

y así $/\!/A/\!/ \geq \alpha_{Jf}(x) - \varepsilon$. Entonces, se sigue que

$$\alpha_{Jf}(x) \geq \alpha_{Jf}(x, \beta) \geq \alpha_{Jf}(x) - \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, y la segunda igualdad se tiene. $\square$

Nuestro segundo lema útil es el siguiente:

Lema 4.2.13. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Si existe $x \in \mathbb{R}^n$ y $\beta > 0$ tal que $\alpha_{Jf}(x, \beta) > 0$, entonces*

$$\|f(x + h) - f(x)\| \geq \alpha_{Jf}(x, \beta) \cdot \|h\| \quad \textit{for all} \quad \|h\| < \beta.$$

Demostración. Elegimos $0 < \|h\| < \beta$. Por el teorema del valor medio (Teorema 4.1.8) tenemos que, para cualquier ε fijado con $0 < \varepsilon \leq \alpha_{Jf}(x, \beta)$, tenemos lo siguiente

$$f(x + h) - f(x) \in \overline{co}(Jf([x, x + h])(h)) \subseteq \overline{co}(Jf(x + \beta \mathbf{B}_n)(h))$$

$$\subseteq co(Jf(x + \beta \mathbf{B}_n)(h)) + \varepsilon \|h\| \mathbf{B}_n = co(Jf(x + \beta \mathbf{B}_n))(h) + \varepsilon \|h\| \mathbf{B}_n.$$

As, existe $A \in co(Jf(x + \beta \mathbf{B}_n))$ y $v \in \mathbf{B}_n$ tal que $f(x + h) - f(x) = Ah + \varepsilon \|h\| v$. Entonces

$$\|f(x + h) - f(x)\| \geq \|Ah\| - \varepsilon \|h\| \geq (\alpha_{Jf}(x, \beta) - \varepsilon) \|h\|.$$

Como consecuencia, obtenemos que $\|f(x + h) - f(x)\| \geq \alpha_{Jf}(x, \beta) \|h\|$.

$\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los lemas anteriores (lema 4.2.12) y (lema 5.5.1) ya que comparamos la derivada escalar inferior de una función continua f con el indice de regularidad de un pseudo-Jacobiano de f. Esta relación será una de las claves para la obtención de nuestros resultados de inversión global en este cápitulo.

Teorema 4.2.14. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Si Jf es usc en $x \in \mathbb{R}^n$ y f es Jf-regular en x, entonces*

$$D_x^- f \geq \alpha_{Jf}(x).$$

Haciendo uso de la Proposición 4.2.8 tenemos que f es Jf-regular siempre que el conjunto $\overline{co}(Jf(x)) \cup co(Jf(x)_\infty \backslash \{0\})$ es invertible. De este modo, podemos obtener la siguiente consecuencia directa.

Corolario 4.2.15. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Si Jf es usc en $x \in \mathbb{R}^n$ y cada elemento de el conjunto $\overline{co}(Jf(x)) \cup co(Jf(x)_\infty \backslash \{0\})$ es invertible, entonces*

$$D_x^- f \geq \alpha_{Jf}(x) > 0.$$

4.3. INVERSIÓN GLOBAL

Primero que todo, consideremos el problema de inversión local. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado. Se dice que f admite localmente una inversa en x_0 si existen vecindades U de x_0 y V of $f(x_0)$, y una función continua $g : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ para cada $x \in U$ y $y \in V$. En este sentido Luc obtiene el siguiente resultado de inversión local:

Corolario 4.3.1. [35, Corolario 5.2]
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Supongamos que existe algún $\beta > 0$ tal que el conjunto $co\,\partial f(x_0 + \beta \mathbf{B}_n)$ es equi-invertible. Entonces f admite localmente una inversa que es localmente Lipschitz en $f(x_0)$.

Siguiendo en la línea de inversión local, Jeyakumar y Luc en [29] obtienen el siguiente resultado, donde se puede apreciar la forma en que se dividen las componentes de una función en subgrupos de naturalezas similares.

Teorema 4.3.2. [29, Teorema 3.3.1]
Sea $n = n_1 + n_2$ y sea $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_2}$ una función continua. Supongamos que f_1 y f_2, respectivamente, admiten funciones pseudo-Jacobainas ∂f_1 y ∂f_2 que son usc en x_0 y que cada matriz (p, q) donde $p \in \overline{co}(\partial f_1(x_0)) \cup co((\partial f_1(x_0))_\infty \backslash \{0\})$ y $q \in \overline{co}(\partial f_2(x_0)) \cup co((\partial f_2(x_0))_\infty \backslash \{0\})$ son invertibles. Entonces f admite una inversa que es Lipschitz en $f(x_0)$.

Teniendo en cuenta el Lema 4.2.12 y el Lema 5.5.1, y el Corolario 4.3.1 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.3.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Si Jf es usc en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y f es Jf-regular en x_0, entonces f admite localmente una inversa en x_0, que es Lipschitz en $f(x_0)$.*

Ahora, vamos a dar una caracterización de inversión global de una función continua, en términos de el indice de regularidad de una función pseudo-Jacobiana.

Teorema 4.3.4. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobian de f. Supongamos que Jf es usc y f es Jf-regular en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo global.

(b) Para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe $\alpha_K > 0$ tal que $\alpha_{Jf}(x) > \alpha_K$ para cada $x \in f^{-1}(K)$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Entonces $f^{-1}(K)$ es también un compacto. Ahora consideremos

$$\alpha_K = \text{ínf}\{\alpha_{Jf}(x) \, : \, x \in f^{-1}(K)\}.$$

Afirmamos que $\alpha_K > 0$. En efecto, de lo contrario podemos encontrar una sucesión (x_j) en $f^{-1}(K)$ tal que $\alpha_{Jf}(x_j)$ converge a cero. Por compacidad, podemos asumir que (x_j) converge a algun punto x, y sabemos que $\alpha_{Jf}(x) > 0$. Por el Lema 4.2.12, existe algún $\beta > 0$ tal que $\alpha_{Jf}(x, \beta) > \frac{1}{2}\alpha_{Jf}(x) > 0$. Pero x_j pertenece a la bola $x + \beta\mathbf{B}_n$ para j suficientemente grande, lo cual es una contradiccón.

$(b) \Rightarrow (a)$ Por el Teorema 4.3.3 sabemos que f es un homeomorfismo local. Por lo tanto, de acuerdo con [41, Teorema 1.2], es suficiente probar que f satisface la condición $(\mathcal{L})$ de Plastock:

($\mathcal{L}$) Para cada segmento de línea $p : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, dado por $p(t) = (1-t)y_0 + ty_1$ para algunos $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, para cada $0 < b \leq 1$ y para camino continuo $q : [0,b) \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(q(t)) = p(t)$ para cada $t \in [0,b)$, existe una sucesión (t_j) en $[0,b)$ que converge a b y tal que la sucesión $\{q(t_j)\}$ es convergente en $\mathbb{R}^n$.

En orden de verificar la condición ($\mathcal{L}$), consideremos un segmento de línea $p : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dado por $p(t) = (1-t)y_0 + ty_1$ para algunos $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, consideremos algún $0 < b \leq 1$, y sea $q : [0,b) \to \mathbb{R}^n$ un camino continuo tal que $f(q(t)) = p(t)$ para cada $t \in [0,b)$. El conjunto $K := p([0,1])$ es compacto en $\mathbb{R}^n$ y $q([0,b)) \subset f^{-1}(K)$, así, por hipótesis, existe $\alpha_K > 0$ tal que $\alpha_{Jf}(x) > \alpha_K > 0$ para cada $x \in q([0,b))$. Usando el Teorema 4.2.14 deducimos que

$$D_x^- f \geq \alpha_{Jf}(x) > \alpha_K > 0,$$

para cada $x \in q([0,b))$. Ahora por la Proposición 2.1.24 tenemos que, para cada $s,t \in [0,b)$ con $s < t$:

$$\ell(p_{|[s,t]}) \geq \text{ínf}\{D_x^- f \ : \ x \in q([s,t])\} \cdot \|q(s) - q(t)\|.$$

Ya que $\ell(p_{|[s,t]}) = |s-t| \cdot \|y_0 - y_1\|$, obtenemos que

$$|s-t| \cdot \|y_0 - y_1\| \geq \alpha_K \|q(s) - q(t)\|.$$

Ahora consideremos cualquier sucesión (t_j) en $[0,b)$ que converge a b. La desigualdad anterior nos lleva a que

$$\|q(t_i) - q(t_j)\| \leq \frac{1}{\alpha_K} |t_i - t_j| \cdot \|y_0 - y_1\|,$$

para cada i,j. Esto demuestra que la sucesión $\{q(t_j)\}$ es de Cauchy, y además converge en $\mathbb{R}^n$. □

Como una consecuencia del anterior resultado, se obtiene de forma inmediata el siguiente resultado:

Corolario 4.3.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana de f. Supongamos que Jf es usc y existe algún $\alpha > 0$ tal que $\alpha_{Jf}(x) \geq \alpha$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo global.*

Vale la pena notar que, por la Proposición 4.2.8 la Jf-regularidad de una función f es más débil que la condición de que cada elemento del conjunto $\overline{co}(Jf(x)) \cup co(Jf(x)_\infty \setminus \{0\})$ es invertible. En el siguiente ejemplo, demostramos que es, de hecho, una condición estrictamente más débil. Por lo tanto, el Teorema 4.3.3 es más general que el dado en [28].

Ejemplo 4.3.6. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x - y,\, x + 3y^{1/3}).$$

Sabemos que del Ejemplo 4.1.6 f tiene el siguiente pseudo-Jacobiano:

$$Jf(x,y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & y^{-2/3} \end{pmatrix} \quad : y \neq 0 \right\}, \quad \text{y} \quad Jf(x,0) = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} : \beta \geq 0 \right\}.$$

Es claro que Jf es usc. Por otro lado, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cada matriz de $Jf(x, y)$ es invertible. Además, para cada $\beta \geq 0$ tenemos que

$$A_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\beta + 1} \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\|A_\beta^{-1}\| = \sup_{\|(u,v)\| \leq 1} \left\| \frac{1}{\beta+1} \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| \quad \leq \sqrt{2} \sup_{\|(u,v)\|_\infty \leq 1} \left\| \frac{1}{\beta+1} \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\leq \sqrt{2}\, \text{máx} \left\{ 1, \frac{2}{\beta + 1} \right\} \leq 2\sqrt{2}.$$

Así, $//A_\beta// = ||A_\beta^{-1}||^{-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ for all $\beta \geq 0$. Por lo tanto, $\alpha_{Jf}(x, y) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, así f is Jf-regular. Por consiguiente, como una consecuencia del Colorario 4.3.5 obtenemos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo global. Ahora por el Ejemplo 4.2.5 sabemos que, el cono de recesión de el conjunto $co(Jf(0, 0))$ está dado por

$$(Jf(0,0))_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} : \beta \geq 0 \right\},$$

cuyas matrices no son invertibles.

Notese que la función anterior f puede ser dividida en el producto $f_1 \times f_2$ con $f_1(x, y) = x - y$ y $f_2(x, y) = x + 3y^{1/3}$, donde admite respectivamente los pseudo-Jacobianos dados por: $Jf_1(x, y) = \{(1, -1)\}$, $Jf_2(x, y) = \{(1, y^{-2/3})\}$ para $y \neq 0$ y $Jf_2(x, 0) = \{(1, \beta), \beta \geq 0\}$. Ya que cada matriz (p, q) con

$$p \in co(Jf_1(x, y)) \cup co(Jf_1(x, y)_\infty \backslash \{0\})$$

y

$$q \in co(Jf_2(x,y)) \cup co(Jf_2(x,y)_\infty \backslash \{0\})$$

son invertibles, podemos aplicar el Teorema 4.3.2 con el fin de obtener la inversión local. Pero desafortunadamente, el método de dividir no siempre funciona, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.7. Consideremos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del Ejemplo 4.1.7 definida por

$$g(x,y) = (x + 3y^{1/3}, 3y^{1/3}),$$

sabemos la función g tiene el siguiente pseudo-Jacobiano:

$$Jg(x,y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y^{-2/3} \\ 0 & y^{-2/3} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para } y \neq 0 \ , \quad \text{and} \quad Jg(x,0) = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \geq 1 \right\}.$$

Además, Jg es usc y cada matriz $Jg(x,y)$ es invertible para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por otra parte, para cada $\alpha \geq 1$ tenemos que

$$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando la norma de la matriz A_α^{-1} obtenemos que:

$$\|A_\alpha^{-1}\| = \sup_{\|(u,v)\| \leq 1} \left\| \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| \quad \leq \sup_{\|(u,v)\|_\infty \leq 1} \sqrt{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 2\sqrt{2}.$$

Así, $//A_\alpha// = ||A_\alpha^{-1}||^{-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ para todo $\alpha \geq 0$ y $\alpha_{Jg}(x,y) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ahora, usando el Corolario 4.3.5 obtenemos que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo global.

Ahora, si dividimos las función g en el producto $g_1 \times g_2$ donde $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$g_1(x,y) = x + 3y^{1/3} \quad \text{y} \quad g_2(x,y) = 3y^{1/3},$$

haciendo los cálculos pertinentes tenemos que los pseudo-Jacobians de las funciones g_1 y g_2 son los siguientes:

$$Jg_1(x,0) = \{(1,\alpha), \alpha \geq \alpha_0\} \quad \text{y} \quad Jg_2(x,0) = \{(0,\alpha), \alpha \geq \alpha_0\},$$

para cualquier $\alpha_0 > 0$. Entonces, los conos de recesión en el origen vienen dados por:

$$(Jg_1(0,0))_\infty = (Jg_2(0,0))_\infty = \{(0,\alpha), \alpha \geq 0\}.$$

Por lo tanto, algunas matrices de la forma (p, q) con

$$p \in co(Jg_1(x, y)) \cup co(Jg_1(x, y)_\infty \backslash \{0\})$$

y

$$q \in co(Jg_2(x, y)) \cup co(Jg_2(x, y)_\infty \backslash \{0\})$$

no son invertibles y el Teorema 4.3.2 no puede ser usado.

Para finalizar este cápitulo nos vamos a dedicar a obtener variantes de la condición de integral de Hadamard en términos de la derivada escalar Dini inferior y del índice de regularidad.

En el siguiente resultado damos una versión no regular del Teorema 2.1.20, y a su vez proporciona una ligera mejora de la condición del Teorema 2.1.19.

Teorema 4.3.8. *Sean E y F espacios de Banach, sea $\mathbf{B}(x_0, \rho)$ una bola abierta de E y sea $f : \mathbf{B}(x_0, \rho) \to F$ un homeomorfsimo local. Supongamos que*

$$\inf_{\|x-x_0\| \leq r} (D_x^- f) > 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq r < \rho, \tag{4.3.1}$$

y existe una función Riemann-integrable $\eta : [0, \rho) \to (0, \infty)$ tal que

$$0 < \eta(t) \leq \inf_{\|x-x_0\|=t} D_x^- f \quad \text{for} \quad 0 \leq t < \rho. \tag{4.3.2}$$

Entonces la extrella maximal S_{x_0} contine la bola abierta $\mathbf{B}(f(x_0), \sigma)$, donde

$$\sigma = \int_0^\rho \eta(t)dt. \tag{4.3.3}$$

Demostración. Considerando la función $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$. Podemos asumir, sin perdida de generalidad, que $x_0 = 0$ y $f(x_0) = 0$. Ahora supongamos que la estrella maximal S_0 no contiene la bola $\mathbf{B}(0, \sigma)$. Entonces existe un vector $w \in \mathbf{B}(0, \sigma)$ tal que $w \notin S_0$. Consideremos $u = \frac{w}{\|w\|}$, y definimos

$$R := \sup\{\lambda \geq 0 \, : \, \lambda u \in S_0\}.$$

Entonces

$$R = \|Ru\| \leq \|w\| < \sigma.$$

Ahora, sea

$$r := \sup\{\|f^{-1}(\lambda u)\| \, : \, 0 \leq \lambda < R\}.$$

Por construcción, es claro que $r \leq \rho$. Vamos a ver que, $r = \rho$. De hecho, si $r < \rho$ tenemos que $m = \inf_{\|x\| \leq r}(D_x^- f) > 0$ por la condición (4.3.1). Ahora, fijado $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, R)$ con $\lambda_1 < \lambda_2$ consideremos el camino $p(t) = tu$ definido por $t \in [\lambda_1, \lambda_2]$ y hagamos $q = f^{-1} \circ p$. Aplicando la Proposición 2.1.24, obtenemos que, para algún $\tau \in [\lambda_1, \lambda_2]$,

$$|\lambda_2 - \lambda_1| \geq (D_{f^{-1}(\tau u)}^- f)\|f^{-1}(\lambda_1 u) - f^{-1}(\lambda_2 u)\| \geq m\,\|f^{-1}(\lambda_1 u) - f^{-1}(\lambda_2 u)\|.$$

Esto implica que

$$\lim_{\lambda \to R} f^{-1}(\lambda u)$$

existe en la bola cerrada $\overline{\mathbf{B}}(x_0, r)$, y esto contradice la maximalidad de S_0. Por lo tanto, $r = \rho$.

Ahora, ya que la función $\lambda \mapsto \|f^{-1}(\lambda u)\|$ es continua, asume todos sus valores entre 0 y ρ. Entonces, para cualquier sucesión de valores $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \rho$ existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0, R)$ tal que $t_i = \|f^{-1}(\lambda_i u)\|$ para $i = 1, \cdots, n$. Fijado cada $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, supongamos que $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, y aplicando el Lema 2.1.21 podemos encontrar $\lambda_i', \lambda_{i+1}' \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ con $\lambda_i' < \lambda_{i+1}'$ tal que

$$t_i = \|f^{-1}(\lambda_i u)\| = \|f^{-1}(\lambda_i' u)\| \leq \|f^{-1}(\lambda u)\| \leq \|f^{-1}(\lambda_{i+1}' u)\| = \|f^{-1}(\lambda_{i+1} u)\| = t_{i+1}$$

para cada $\lambda \in [\lambda_i', \lambda_{i+1}']$. Usuando de nuevo la Proposición 2.1.24, existen $\tau_i \in [\lambda_i', \lambda_{i+1}']$ tal que

$$(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \geq (\lambda_{i+1}' - \lambda_i') \geq (D_{f^{-1}(\tau_i u)}^- f)\|f^{-1}(\lambda_{i+1}' u) - f^{-1}(\lambda_i' u)\|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} t_{i+1} - t_i &= \|f^{-1}(\lambda_{i+1}' u)\| - \|f^{-1}(\lambda_i' u)\| \\ &\leq \|f^{-1}(\lambda_{i+1}' u) - f^{-1}(\lambda_i' u)\| \\ &\leq (D_{f^{-1}(\tau_i u)}^- f)^{-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i). \end{aligned}$$

Puesto que $\|f^{-1}(\tau_i u)\| \in [t_i, t_{i+1}]$ para cada $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, deducimos de la condición (4.3.2) que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \eta(\|f^{-1}(\tau_i u)\|)(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (D_{f^{-1}(\tau_i u)}^- f)(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) = \lambda_n < R.$$

Como consequencia, tenemos que

$$\sigma = \int_0^\rho \eta(t)dt \leq R,$$

lo cual es una contradicción $\square$

Como consecuencia del Teorema anterior, obtenemos una condición suficiente para la inversión global mediante una condición integral en términos de la derivada escalar Dini inferior.

Corolario 4.3.9. *Sean E y F espacios de Banach y sea $f : E \to F$ un homeomorfismo local tal que*

$$\inf_{\|x\| \le r} (D_x^- f) > 0 \quad \textit{for} \quad 0 \le r < \infty. \tag{4.3.4}$$

Supongamos que existe una función Riemann-integrable $\eta : [0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que

$$\int_0^\infty \eta(t)dt = \infty \qquad y \qquad 0 < \eta(t) \le \inf_{\|x\|=t} D_x^- f \quad \textit{para} \quad 0 \le t < \infty. \tag{4.3.5}$$

Entonces f es un homeomorfismo global de E sobre F. Por otra parte, para cada $x \in E$,

$$\|f(x) - f(0)\| \ge \int_0^{\|x\|} \eta(t)dt. \tag{4.3.6}$$

Demostración. Por (4.3.5) y el Teorema 4.3.8 tenemos que cada bola abierta centrada en $f(0)$ en F está contenida en la estrella maximal S_0. Por lo tanto S_0 es todo el espacio F, y f (maps) mapea E sobre F. Por otro lado, de la propiedad de monodromia (iii) de la estrella maximal tenemos que f es uno a uno.

Ahora, vamos a probar (4.3.6). Sea $x \in E$ distinto de cero, consideremos $\rho = \|x\| > 0$ y $\sigma = \int_0^\rho \eta(t)dt$, y supongamos que $\|f(x) - f(0)\| < \sigma$. Aplicando el Teorema 4.3.8 a la restricción de de f a la bola abierta $\mathbf{B}(0, \rho)$, obtenemos que $f(x)$ pertenece a la correspondiente estrella maximal S_0, y entonces, por la propiedad de la monodromía (iii), tenemos que $x = f^{-1}(f(x))$ pertenece a la bola abierta $\mathbf{B}(0, \rho)$, lo cual es una contradición. Esto completa la prueba.

Ahora aplicando el Teorema 4.3.8 a la restrición de f a la bola abierta $\mathbf{B}(0, \rho)$, obtenemos que $f(x)$ pertenece a la correspondoente estrella maximal S_0, y entonces, por la propiedad de monodromia (iii), tenemos que, $x = f^{-1}(f(x))$ pertenece a la bola abierta $\mathbf{B}(0, \rho)$, lo cual es una contradicción. Así se completa la prueba. □

En el siguiente resultado damos una estimación del dominio de invertibilidad de una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que es un homeomorfismo local alrededor de un punto x, en términos del índice de regularidad de f asociado a la función pseudo-Jacobiana.

Corolario 4.3.10. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y sea Jf una función pseudo-Jacobiana usc de f. Sea $x_0 \in E$ y $\rho > 0$, y supongamos que existe una función Riemann-integrable $\eta : [0, \rho) \to (0, \infty)$ tal que*

$$0 < \eta(t) \le \inf_{\|x - x_0\| = t} \alpha_{Jf}(x) \quad \textit{for} \quad 0 \le t < \rho.$$

Entonces $f(x_0+\rho\mathbf{B}_n) \supset f(x_0)+\sigma\mathbf{B}_n$ *y* f *admite una inversa local definida en la bola abierta* $f(x_0)+\sigma\mathbf{B}_n$, *donde*

$$\sigma = \int_0^\rho \eta(t)dt.$$

Demostración. Por el Teorema 4.3.3 y el Teorema 4.2.14, applicados al Teorema 4.3.8 sólo nos queda por demostrar que la condición (4.3.1) se tiene. Fijado $0 < r < \rho$. Para cada x en la bola cerrada $x_0 + r\overline{\mathbf{B}}_n$, por el Lema 4.2.12 existe $\beta_x > 0$ tal que $\alpha_{Jf}(x, \beta_x) > 0$. El resultado deseado se sigue por la compacidad de $x_0 + r\overline{\mathbf{B}}_n$ y usando de nuevo el Teorema 4.2.14. □

Finalmente, obtenemos una versión de la condición de integral de Hadamard para funciones continuas, en términos del índice de regularidad asociado a la función pseudo-Jacobiana.

Corolario 4.3.11. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función continua y sea* Jf *una función pseudo-Jacobia usc de* f. *Supongamos que existe una función Riemann-integrable* $\eta : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *tal que*

$$\int_0^\infty \eta(t)dt = \infty \qquad y \qquad 0 < \eta(t) \leq \inf_{\|x\|=t} \alpha_{Jf}(x) \quad for \quad 0 \leq t < \infty.$$

Entonces f *es un homeomorfismo global. Por otra parte, para cada* $x \in E$,

$$\|f(x) - f(0)\| \geq \int_0^{\|x\|} \eta(t)dt.$$

Demostración. EL resultado se puede deducir del Corolario 4.3.9 siguiendo las líneas de el anterior Corolario 4.3.10 □

Capítulo 5

UNA CARACTERIZACIÓN DE LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM

5.1. INTRODUCCIÓN.

Es bien conocido que toda sucesión en la recta real, acotada inferiormente y no creciente, es convergente. Un resultado de este tipo en Espacios de Banach, depende de la geometría del espacio.

El proposito en este capítulo es dar un análogo del hecho de que cada sucesión no creciente y acotada inferiormente en la recta real $\mathbb{R}$ converge en el marco de un espacio de Banach X. Esto no es claro, aún cuando $X = \mathbb{R}^2$. Sin embargo veremos que sí es posible en espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym. Empezaremos recordando que significa que un espacio de Banach tenga esta propiedad.

Definición 5.1.1 (Propiedad de Radon-Nikodym)**.**
Sea X un espacio de Banach. Se dice que X tiene la *propiedad de Radon-Nikodym* si, para cada subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado C de X y cada $\eta > 0$, existen g en la esfera unidad del dual de X y $c \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in C;\ g(x) < c\}$ es no vacío y tiene diámetro menor que η.

Veamos el siguiente resultado, que es una versión válida en este marco de los espacios de Banach y es dado por Antonín Procházka en [45]:

Teorema 5.1.2. [45, Teorema 2.3]
Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym y K un subconjunto cerrado, acotado y convexo de X. Existe una función t de K en la esfera unidad del dual de X tal que para toda sucesión (x_n) en K, si $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (x_n) converge en X.

Todo espacio de Banach reflexivo tiene la propiedad de Radon-Nikodym, pero los espacios $L^1([0,1])$ y $\mathcal{C}(K)$ cuando K es un espacio infinito y compacto no satisfacen esta propiedad. Por otra parte, si Y es un subespacio de un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, entonces Y tiene la proiedad de Radon-Nikodym. La propiedad de Radon-Nikodym puede caracterizarse de muchas maneras, ver por ejemplo [4], [11] y [40].

Antes de enunciar nuestro resultado principal, necesitaremos algunas notaciones. Si X es un espacio de Banach real, S_X y S_{X^*} denotan la esfera unidad y la esfera unidad del dual de X respectivamente. Para $f \in X^*$ y $r > 0$ denotamos $\overline{B}(f,r) = \{g \in X^* : \|f - g\| \leqslant r\}$ y $B(f,r) = \{g \in X^* : \|f - g\| < r\}$ la bola cerrada y abierta centrada en f y de radio r respectivamente. Recordemos que X siempre es una espacio de Banach, $g \in X^*$ and $c \in \mathbb{R}$, denotamos por $\{g \geqslant c\}$ el semi-plano cerrado $\{u \in X;\, g(u) \geqslant c\}$ y $\{g < c\}$ el semi-plano abierto $\{u \in X;\, g(u) < c\}$. Si C es un subconjunto no vacío y convexo de X, el conjunto $C \cap \{g \geqslant c\}$ es llamado una rebanada ("slice") cerrada de C y y $D \cap \{g < c\}$ es una rebanada ('slice") abierta de C. Si $x \in X$ y $f \in X^*$, usaremos las notaciones tanto $y(x)$ como $\langle f, x\rangle$ para la evaluación de f en x. Además usaremos el término rebanada para referirnos a "slice".

Ahora veamos el resultado principal de este capítulo cuya demostración la daremos en la Sección 5.6.

Teorema 5.1.3. Sea X espacio de Banach con la propiedad Radon-Nikodym. Sea $f \in S_{X^*}$ y $\varepsilon \in (0,1)$ fijado. Existe una función $t : X \to S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$ tal que para toda sucesión (x_n) en X, si la sucesión $\big(f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|\big)$ es acotada inferiormente y si $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (x_n) converge en X.

Observación 5.1.4. El Teorema 5.1.3 puede ser reformulado en términos de juegos. Esta representación fue introducida en [36], y también se puede consultar en [11] y [52]. Hay dos jugadores A y B que juegan alternativamente. El jugador A elige funcionales lineales $f_n \in S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$ y el jugador B elige puntos x_n en el cono $\{x \in X; f(x) - \varepsilon\|x\| + m \geqslant 0\}$ para algún $m \in \mathbb{R}$, con las siguientes reglas.

- El jugador B elige un punto x_0;

- Una vez que B ha jugado x_n, A elige $f_n \in S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$;

- Una vez que A ha jugado f_n, B elige x_{n+1} tal que $f_n(x_{n+1} - x_n) \leqslant 0$.

El jugador A gana si la sucesión (x_n) converge. Una táctica ganadora para el jugador A es una función $t : X \to S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$ tal que, si para cada n, $f_n = t(x_n)$, entonces A gana el juego. El Teorema 5.1.3 expresa el hecho que en espacios con la propiedad de Radon-Nikodym, el jugador A tiene siempre una táctica ganadora.

A continuación damos un caso particular del Teorema 5.1.3. Supongamos aquí que $X = \mathbb{R}^2$ y que tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Es claro que si (x_n, y_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que (y_n) es no-creciente y acotada inferiormente, entonces la sucesión (y_n) converge, pero en general la sucesión (x_n, y_n) no converge, aunque es necesario que la sucesión (x_n, y_n) este incluida en un cono $C = \{(x, y); y - \varepsilon|x| + m \geqslant 0\}$ para algún $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{R}$.

Una consecuencia inmediata de nuestro Teorema 5.1.3 es la siguiente:

Corolario 5.1.5. *Dado $0 < \varepsilon < 1/2$, existe una función $\tau : \mathbb{R}^2 \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que para sucesión $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, si la sucesión $(y_n - \varepsilon|x_n|)$ es acotada inferiormente y si $y_{n+1} - y_n \leqslant \tau(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (x_n, y_n) converges.*

Demostración. Asumamos que $X = \mathbb{R}^2$ esta dotado con la norma $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ y que $0 < \varepsilon < 1$. Fijemos $f \in X^*$ con coordenadas $(0, 1)$. Obsérvese primero que si $X_n \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas (x_n, y_n) y si la sucesión $(y_n - \varepsilon|x_n|)$ es acotada inferiormente, entonces la sucesión $\left(f(X_n) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|X_n\|_1\right)$ es acotada inferiormente. Aplicando el Teorema 5.1.3, existe $t : X \to S_{X^*} \cap B(f, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})$ tal que si la sucesión $\left(f(X_n) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|X_n\|\right)$ es acotada inferiormente y $\langle t(X_n), X_{n+1} - X_n\rangle \leqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (X_n) converge en $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, $X^* = \mathbb{R}^2$ y esta dotado con la norma del supremo. Ya que $t(x, y) \in S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$, tenemos que las coordenadas de $t(x, y)$ son de la forma $(-\tau(x, y), 1)$, con $-\varepsilon < \tau(x, y) < \varepsilon$. Finalmente, la condición $\langle t(X_n), X_{n+1} - X_n\rangle \leqslant 0$ es equivalente a $y_{n+1} - y_n \leqslant \tau(X_n)(x_{n+1} - x_n)$. □

Observación 5.1.6. El resultado anterior Teorema 5.1.3 es una mejora del Teorema 5.1.2 y lo extiende en tres maneras.

- La táctica t está definida en todo el espacio X.

- La hipótesis de que la sucesión la sucesión (x_n) es acotada $(x_n \in K)$ es reemplazada por una hipótesis más débil, que la sucesión $\big(f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|\big)$ esté acotada inferiormente, lo que significa que la sucesión (x_n) esté en el cono $\{x;\ f(x) - \varepsilon\|x\| + m \geqslant 0\}$ para algún $m \in \mathbb{R}$.

- La táctica t en nuestro Teorema toma sus valores solo en un subconjunto de S_{X^*} de diámetro pequeño.

Observación 5.1.7. Nótese que el Teorema 5.1.3 es una caracterización de la propiedad Radon-Nikodym. En efecto, si X no satisface la propiedad de Radon-Nikodym existe un subconjunto no vacío, convexo y acotado C de X y $\eta > 0$, tal que para todo $f \in S_{X^*}$ y $c \in \mathbb{R}$, si la rebanada $C \cap \{f < c\}$ es no vacía, entonces tiene diámetro mayor que 2η. Además, podemos asumir que C es abierto. En efecto, si $\delta < \eta$, el conjunto $C + B(0, \delta)$ es abierto y todas sus rebanadas tienen diámetro mayor que $2(\eta - \delta)$. Ahora sea (f_n) una sucesión en S_{X^*}. Construimos inductivamente un sucesión (x_n) en C de la siguiente manera. Elegimos arbitrariamente un $x_0 \in C$. Una vez x_n se ha construido, observamos que la rebanada $C \cap \{f_n < f_n(x_n)\}$ es no vacía porque $x_n \in C$ y C es abierto, así esta rebanada tiene diámetro mayor que 2η, por lo tanto podemos elegir x_{n+1} en C tal que $f_n(x_{n+1} - x_n) < 0$ y $\|x_{n+1} - x_n\| \geqslant \eta$.

Por otra parte, ya que $\{f(x) - \varepsilon\|x\|;\ x \in C\}$ es acotado inferiormente, tenemos en particular que $\{f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|;\ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado inferiormente. Esto claramente contradice la existencia de una función t con la propiedad del Teorema 5.1.3.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. La Sección 5.2 está dedicada a la prueba de dos lemas geométricos elementales. En la Sección 5.3, definimos una función t en un subconjunto dado de X tal que para cada sucesión (x_n) en este subconjunto y que satisface las hipótesis del Teorema 5.1.3, la sucesión es η-Cauchy para algún $\eta > 0$. Tal función se llamará η-táctica. La Sección 5.4 esta dedicada a probar que cada función que está cerca (en cierto sentido, que precisamos más adelante) a la función t es también una η-táctica. Llegamos así a la definición de multi-η-táctica. A continuación en la Sección 5.5 se construyen, para una sucesión dada (η_k) tendiendo a 0, una sucesión decreciente de multi-η_k-tácticas, y finalmente en la Sección 5.6 probamos el Teorema 5.1.3.

5.2. REBANADAS.

El siguiente Lema expresa el hecho de que si D es un conjunto cerrado y convexo de X, posiblemente no acotado, y si S es una rebanada acotada definida por $\widehat{f} \in S_{X^*}$, entonces los funcionales que se encuentran alrededor de $\widehat{f}$ definen unas rebanadas de D incluidas en S.

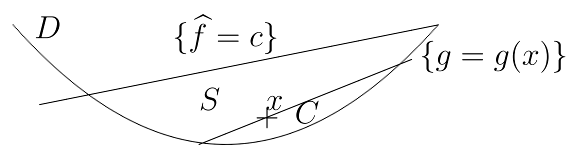
Lema 5.2.1. *Sea D un conjunto cerrado y convexo de X, $\widehat{f} \in S_{X^*}$ y $c \in \mathbb{R}$. Asumamos que $S = D \cap \{\widehat{f} < c\}$ es acotado y que tanto S y $D \backslash S$ son no vacíos. Denotemos $M := \max\{\|u\|; u \in S\}$ y $R(x) = \frac{c - \widehat{f}(x)}{4M}$. Si $x \in S$ y $g \in S_{X^*}$ tal que $\|g - \widehat{f}\| \leqslant R(x)$, entonces $\big(D \backslash S\big) \cap \{g \leqslant g(x)\} = \emptyset$.*

Demostración. Es claro que $0 < M < +\infty$. Así, para $x \in S$, $R(x)$ está bien definido y $R(x) > 0$. Asumamos que $\big(D \backslash S\big) \cap \{g \leqslant g(x)\} \neq \emptyset$ y fijemos $z \in D \backslash S$ tal que $g(z) \leqslant g(x)$. Existe un único $q \in [0, 1]$ tal que, si $y = qx + (1 - q)z$, entonces $\widehat{f}(y) = c$. Así y está en la clausura de S y $\|y\| \leqslant M$. Por otro lado, por la linealidad de g, $g(z) \leqslant g(y) \leqslant g(x)$. Por hipótesis, $g(x) \leqslant \widehat{f}(x) + R(x)\|x\| \leqslant \widehat{f}(x) + MR(x)$. Por lo tanto

$$\widehat{f}(y) \leqslant g(y) + \|g - \widehat{f}\|\|y\| \leqslant g(x) + R(x)M \leqslant \widehat{f}(x) + 2MR(x) = \frac{\widehat{f}(x) + c}{2} < c$$

Así $\widehat{f}(y) < c$. Esta contradicción concluye la prueba. $\square$

La Gráfica 1 ilustra tanto el Lema anterior como el siguiente lema.



Gráfica 1

Si D es un conjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach X, y si $g \in X^*$, se dice que g expone fuertemente a D si $diam(D \cap \{g < c\})$ tiende a 0 cuando c tiende a $\inf\{g(u);\, u \in D\}$.

El siguiente lema expresa el hecho de que si D es un conjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach con la propiedad Radon-Nikodym y si S es una rebanada acotada definida por $\widehat{f} \in S_{X^*}$, entonces existen funcionales en una vecindad de $\widehat{f}$ que definen rebanadas pequeñas de D incluidas en S.

Lema 5.2.2. *Supongamos que X tiene la propiedad Radon-Nikodym. Sea $\eta, r > 0$ y D un conjunto cerrado y convexo de X. Sea $\widehat{f} \in X^*$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $S = D \cap \{\widehat{f} < c\}$ es un conjunto no vacío y acotado. Entonces, existen $g \in S_{X^*}$ y $d \in \mathbb{R}$ tal que, si $C = D \cap \{g < d\}$, entonces*

(i) $C \neq \emptyset$, *diam* $C < \eta$ *y* $C \subset S$,

(ii) $\|g - \widehat{f}\| < \text{mín}\{r, \text{ínf}\{R(u); u \in C\}\}$.

Demostración. Afirmamos primero que si $\tau > 0$, existe $g_\tau \in X^*$ tal que $\|g_\tau - \widehat{f}\| < \tau$ y g_τ expone fuertemente a D en algún punto $x_\tau \in D \cap \{\widehat{f} < c\}$. En efecto, el conjunto $\overline{S} = D \cap \{\widehat{f} \leqslant c\}$ es un subconjunto no vacío cerrado, convexo y acotado de X. Así, el conjunto $\{g \in X^*;\ g$ exposa fuertemente a $\overline{S}\}$ es denso en X^* (ver [4]). Ahora, para cada $\tau > 0$, seleccionamos $g_\tau \in X^*$ y $x_\tau \in \overline{S}$ tal que $\|\widehat{f} - g_\tau\| \leqslant \tau$ y g_τ expone fuertemente a $\overline{S}$ en x_τ.

Ahora vamos a usar el siguiente afirmación:

Hecho 1.
$R(x_\tau)$ converge a $\sup\{R(u);\ u \in \overline{S}\} = \sup\{R(u);\ u \in D\} > 0$ cuando τ tiende a 0.

Ya que $R(x) = \gamma\big(c - \widehat{f}(x)\big)$ donde γ es una constante positiva, es suficiente probar que $\widehat{f}(x_\tau)$ converge a $\text{ínf}\{\widehat{f}(x);\ x \in \overline{S}\}$. Si denotamos $A = \sup\{\|x\|;\ x \in \overline{S}\}$, tenemos que

$$\widehat{f}(x_\tau) \leqslant g_\tau(x_\tau) + A\|g_\tau - \widehat{f}\| \leqslant \tau A + g_\tau(x)$$

para todo $x \in \overline{S}$. Así

$$\widehat{f}(x_\tau) \leqslant \tau A + \widehat{f}(x) + \|\widehat{f} - g_\tau\| \cdot \|x\| \leqslant 2\tau A + \widehat{f}(x)$$

Tomando el infimo sobre todos los $x \in \overline{S}$, obtenemos

$$\text{ínf}\{\widehat{f}(x);\ x \in \overline{S}\} \leqslant \widehat{f}(x_\tau) \leqslant 2\tau A + \text{ínf}\{\widehat{f}(x);\ x \in \overline{S}\}$$

y esto prueba la Hecho 1. Ya que $\sup\{R(u);\ u \in D\} > 0$, si τ es lo suficientemente pequeño, tenemos que $R(x_\tau) > 0$, así g_τ expone fuertemente a $\overline{S}$ en algún punto $x_\tau \in D \cap \{\widehat{f} < c\}$, por lo tanto g_τ expone fuertemente a D en algún punto $x_\tau \in D \cap \{\widehat{f} < c\}$, y esto prueba la afirmación.

Ahora procedemos a probar el Lema. Fijemos τ tal que $\tau \leqslant \min\{r, \sup\{R(u);\, u \in D\}/2\}$ y tal que $R(x_\tau) > \sup\{R(u);\, u \in D\}/2$. Denotemos $C_\delta = D \cap \{g_\tau < g_\tau(x_\tau) + \delta\}$. Usando la continuidad de R y como g_τ expone fuertemente a D tenemos que $\inf\{R(u);\, u \in C_\delta\}$ tiende a $R(x_\tau)$. Ahora fijamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de modo que $\inf\{R(u);\, u \in C_\delta\} > \sup\{R(u);\, u \in D\}/2$ y $diam(C_\delta) < \eta$. Ahora ponemos $g = g_\tau$ y $d = g_\tau(x_\tau) + \delta$. El conjunto $C = C_\delta = D \cap \{g < d\}$ es no vacío y $diam(C) < \eta$. Ya que, $\inf\{R(u);\, u \in C\} > 0$, tenemos que $C \subset S$. Finalmente, $\|g - \widehat{f}\| < \tau \leqslant \min\{r, \sup\{R(u);\, u \in D\}/2\} \leqslant \min\{r, \inf\{R(u);\, u \in C\}\}$.

□

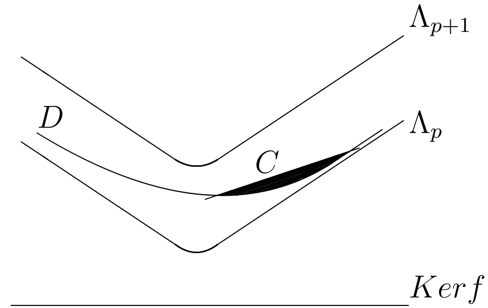
5.3. ε-TÁCTICAS.

Fijemos un espacio de Banach X con la propiedad de Radon-Nikodym, $f \in S_{X^*}$ y $0 < \varepsilon < 1$. Para $p \in \mathbb{Z}$, definimos $\Lambda_p = \{x; f(x) \geqslant \varepsilon\|x\| + p\}$. Para todo p, Λ_p es un subconjunto cerrado, convexo y no acotado de X, $\Lambda_q \subset \Lambda_p$ siempre que $p \leqslant q$, Λ_0 es un cono de X, y si $p \geqslant 0$, para todo $x \in \Lambda_p$ y para todo $\tau \geqslant 1$, $\tau x \in \Lambda_p$.

El siguiente resultado nos dice que si D es un conjunto convexo que contiene a Λ_{p+1}, y diferente de Λ_{p+1}, y está incluido en Λ_p, entonces existe una slice pequeña de D que no interseca a Λ_{p+1}. La Gráfica 2, nos representa la situación del siguiente lema.

Lema 5.3.1. *Sean $\eta > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y D un conjunto cerrado y convexo de X tal que $\Lambda_{p+1} \subset D \subset \Lambda_p$ y $D \neq \Lambda_{p+1}$. Entonces, existe $g \in X^*$, $\|g - f\| < \varepsilon$ y $d \in \mathbb{R}$ tal que*

$$C = D \cap \{g < d\} \neq \emptyset, \qquad C \cap \Lambda_{p+1} = \emptyset \quad y \quad diam\,(C) < \eta.$$



Gráfica 2

Demostración. Tomemos $x_0 \in D \backslash \Lambda_{p+1}$. De acuerdo el Teorema de Hahn-Banach, existe $h \in X^*$ tal que

$$h(x_0) < \text{ínf}\{h(x);\, x \in \Lambda_{p+1}\}. \tag{5.3.1}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\|h\| = 1$.

Hecho 2.
Si $h(x) = 0$ implica que $f(x) \leqslant \varepsilon\|x\|$.

En efecto, si $h(x) = 0$, entonces, para todo $\tau > 0$, $h(\tau x + x_0) = h(x_0)$, por lo tanto, recordando la desigualdad (5.3.1), tenemos que $f(\tau x + x_0) < \varepsilon\|\tau x + x_0\| + p + 1 \leqslant \tau\varepsilon\|x\| + \varepsilon\|x_0\| + p + 1$. Por otro lado, $x_0 \in \Lambda_p$, así $f(x_0) \geqslant \varepsilon\|x_0\| + p$, y la anterior desigualdad implica

$$f(x) \leqslant \varepsilon\|x\| + \frac{1}{\tau}$$

El Hecho 2 queda probado ya que esto es cierto para todo $\tau > 0$.

Hecho 3. *Existe $\lambda > 0$ tal que $\|f - \lambda h\| \leqslant \varepsilon$.*

Se sigue del Hecho 2 y del Teorema de Hahn-Banach que existe $h' \in X^*$ tal que $\|h'\| = \varepsilon$ y para todo $x \in Ker(h)$, $h'(x) = f(x)$. Por lo tanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f - h' = \lambda h$. Tomando $x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_{p+1}$ esto implica que $\tau x \in \Lambda_{p+1}$ para todo $\tau > 1$. Si $h(x) < 0$, entonces $h(\tau x)$ tiende a $-\infty$ cuando τ tiende a $+\infty$, lo que contradice el hecho de que $\tau x \in \Lambda_{p+1}$ para $\tau > 1$ y el hecho de que h es acotada inferiormente en Λ_{p+1}. Por lo tanto $h(x) \geqslant 0$. Ahora, vamos a demostrar que $\lambda > 0$. De otra manera, $h'(x) = f(x) - \lambda h(x) > \varepsilon\|x\|$, lo que contradice el hecho de que $\|h'\| \leqslant \varepsilon$.

Para $\tau \in (0,1)$, denotamos $h_\tau = (1-\tau)\lambda h + \tau f$. Claramente, $\|h_\tau - f\| < \varepsilon$. Si τ es suficientemente pequeño, h_τ también satisface (5.3.1). En efecto, si denotamos $m = \text{ínf}\{h(x);\, x \in \Lambda_{p+1}\}$, tenemos $m > h(x_0)$. Por lo tanto,

$$\text{ínf}\{h_\tau(x);\, x \in \Lambda_{p+1}\} \geqslant (1-\tau)\lambda m + \tau p > (1-\tau)\lambda h(x_0) + \tau f(x_0)$$

siempre que τ es suficientemente pequeño.

Fijemos τ tal que $h_\tau(x_0) < \text{ínf}\{h_\tau(x);\, x \in \Lambda_{p+1}\}$, denotemos $\widehat{f} = h_\tau$, y elijamos c tal que $\widehat{f}(x_0) < c < \text{ínf}\{\widehat{f}(x);\, x \in \Lambda_{p+1}\}$. La rebanada abierta $S = D \cap \{\widehat{f} < c\}$ es no vacía y no interseca a Λ_{p+1}, y es acotada, por que si x pertenece a esta slice, entonces $\|f - \widehat{f}\| \cdot \|x\| \geqslant (f - \widehat{f})(x) > \varepsilon\|x\| - c$, y en consecuencia $\|x\| \leqslant \frac{c}{\varepsilon - \|f - \widehat{f}\|}$.

Por el Lema 5.2.2, existe $g \in X^*$, $\|g - \widehat{f}\| < \varepsilon - \|f - \widehat{f}\|$ y $d \in \mathbb{R}$ tal que la rebanada $C := D \cap \{g < d\}$ es no vaciá y está contenida en S (por lo tanto no interseca a Λ_{p+1}), y *diam* $(C) < \eta$. Claramente, $\|f - g\| \leqslant \|f - \widehat{f}\| + \|\widehat{f} - g\| < \varepsilon$.

$\square$

A partir de ahora, fijamos $p \in \mathbb{Z}$. El siguiente resultado nos da la existencia de una "slicing" de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ en trozos pequeños.

Lema 5.3.2. *Sea $\eta > 0$. Entonces, existe una sucesión transfinita $(f_\alpha) \in Y^*$ con $\|f_\alpha - f\| < \varepsilon$, y (c_α) en $\mathbb{R}$, tal que, si $(D_\alpha)_{\alpha \leqslant \mu}$ es una sucesión transfinita decresiente de conjuntos cerrados y convexos definida de la siguiente manera:*

- $D_0 = \Lambda_p$;
- *Para todo* α, $D_{\alpha+1} = D_\alpha \backslash \{f_\alpha < c_\alpha\}$
- $D_\alpha = \bigcap_{\gamma < \alpha} D_\gamma$ *para todo ordinal limite* α,

y si, para todo α, $C_\alpha = D_\alpha \backslash D_{\alpha+1}$, entonces C_α es no vacío, diam $(C_\alpha) < \eta$, $D_\mu = \Lambda_{p+1}$, y $\{C_\alpha;\, \alpha < \mu\}$ es una partición de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$.

Demostración. Probaremos la existencia de f_α y c_α por inducción transfinita. Supongamos que f_β y c_β se han construido para $\beta < \alpha$. Por lo tanto, hemos construido $D_\alpha = \Lambda_p \cap \left(\bigcap_{\gamma < \alpha} \{f_\gamma \geqslant c_\gamma\}\right)$. Si $D_\alpha = \Lambda_{p+1}$, entonces ponemos $\mu = \alpha$ y terminamos. Por otra parte, aplicamos el Lema 5.3.1 con $D = D_\alpha$ construimos $g = f_\alpha$ y $d = c_\alpha$ tal que, si $C_\alpha = D_\alpha \cap \{f_\alpha < c_\alpha\}$, entonces C_α es no vacío y tiene diámetro menor que η. Además, ya que $C_\alpha \subset \Lambda_p$ y $C_\alpha \cap \Lambda_{p+1} = \emptyset$, tenemos que la unión de los C_α está incluida en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$. Los conjuntos C_α, $\alpha < \mu$ son disjuntos dos a dos, y su unión es igual a $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ por que $D_\mu = \Lambda_{p+1}$, así $\{C_\alpha;\, \alpha < \mu\}$ es una partición de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$.

$\square$

Ahora definamos una función t_0 en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$.

Proposición 5.3.3. *Sea $\eta > 0$. Existe una función $t_0 : \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1} \to S_{X^*} \cap B(f, \varepsilon)$ tal que*

- *Si $x \in \Lambda_p$ e $y \in X$ y satisfacen que $\langle t_0(x), y - x\rangle \leqslant 0$, entonces $y \notin \Lambda_{p+1}$,*

- *Para todo sucesión* (x_n) *en* $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$*, si* $\langle t_0(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* (x_n) *es* η*-Cauchy.*

Una función t_0 con la propiedad de la Proposición 5.3.3 se llamará más tarde una η-táctica ganadora (el jugador A puede forzar la sucesión x_n para ser η-Cauchy)

Demostración. En primer lugar vamos a definir t_0. Primero observemos que si para $0 < \varepsilon < 1/2$, tenemos una función $t_0 : \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1} \to B(f, \varepsilon)$, entonces la función definida por $t_1(x) = t_0(x)/\|t_0(x)\|$ tiene sus valores en $S_{X^*} \cap B(f, 2\varepsilon)$ y $\langle t_1(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$ es equivalente a $\langle t_0(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$. Así es suficiente construir $t_0 : \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1} \to B(f, \varepsilon)$ de forma que cumpla la propiedad que aparece en la Proposición 5.3.3. Sean f_α los funcionales construidos en el Lema 5.3.2. Para cada α, tenemos que $\|f - f_\alpha\| < \varepsilon$. Si $x \in \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$, entonces existe α tal que $x \in C_\alpha$, y ponemos $t_0(x) = f_\alpha$. Notese que si $x \in C_\alpha$, $y \in X$, y $\langle t_0(x), y - x \rangle \leqslant 0$, entonces $f_\alpha(y) \leqslant f_\alpha(x) < c_\alpha$ y la anterior desigualdad implica que $y \notin D_{\alpha+1}$, y en particular $y \notin \Lambda_{p+1}$.

Tomemos una sucesión (x_n) en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ tal que $\langle t_0(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. sea α_n tal que $x_n \in C_{\alpha_n}$. Ya que $t_0(x_n) = f_{\alpha_n}$ y $\langle t_0(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$, obtenemos $f_{\alpha_n}(x_{n+1}) \leqslant f_{\alpha_n}(x_n)$. Esto implica que $x_{n+1} \notin D_{\alpha_n+1}$. Pero $x_{n+1} \in C_{\alpha_{n+1}}$, así $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Por lo tanto (α_n) es una sucesión no creciente. El conjunto $A = \{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\} \subset [0, \mu]$ está bien ordenado, así existe n_0 tal que $\alpha_{n_0} = \min A$. Entonces para todo $n \geqslant n_0$, $\alpha_n = \alpha_0$. Ahora, para todo $n, m \geqslant n_0$, tenemos $x_n, x_m \in C_{\alpha_{n_0}}$, so $\|x_n - x_m\| < \eta$. Así la sucesión (x_n) es η-Cauchy.

□

5.4. MULTI-ε-TÁCTICAS.

Sea E un conjunto, denotamos $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de los subconjuntos de E.

Definición 5.4.1. *Sea* $T : A \subset X \to \mathcal{P}(X^*)$*. Decimos que* $t : A \to X^*$ *es una selección de* T *si* $t(x) \in T(x)$ *para todo* $x \in A$*.*

En el Lema 5.3.2, hemos construido $f_\alpha \in X^*$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha \subset X$ tales que, si $C_\alpha = D_\alpha \backslash D_{\alpha+1} = D_\alpha \cap \{f_\alpha < c_\alpha\}$, entonces $\{C_\alpha;\, \alpha < \mu\}$ es una partición de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$. Ahora definamos $R(x) = \dfrac{c_\alpha - f_\alpha(x)}{4 \max\{\|u\|; u \in C_\alpha\}}$ siempre que $x \in C_\alpha$.

Proposición 5.4.2. *Bajo las condiciones de el Lema 5.3.2, definimos* $T : \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1} \to \mathcal{P}\big(S_{X^*} \cap B(f,\varepsilon)\big)$ *por* $T(x) = S_{X^*} \cap B(f,\varepsilon) \cap \overline{B}(f_\alpha, R(x))$ *siempre que* $x \in C_\alpha$. *Entonces, para cada selección* t *de* T, t *es una* η*-táctica ganadora*

Demostración. Sea t una selección de T, y vamos a probar que la selección es η-ganadora. Si $x \in C_\alpha$ y $t(x)(y) \leqslant t(x)(x)$ entonces, recordando el Lema 5.2.1, $y \notin D_{\alpha+1}$, y en particular, $y \notin \Lambda_{p+1}$. Ahora, sea (x_n) una sucesión en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ tal que $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea α_n tal que $x_n \in C_{\alpha_n}$. Ya que $t(x_n)(x_{n+1}) \leqslant t(x_n)(x_n)$ y $x_n \in C_{\alpha_n}$, obtenemos que $x_{n+1} \notin D_{\alpha_n+1}$. Pero $x_{n+1} \in C_{\alpha_{n+1}}$, así $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$, por tanto (α_n) es una sucesión no creciente de números ordinales. En consecuencia, la sucesión (α_n) es estacionaria, y como en la prueba de la Proposición 5.3.3, todos los x_n salvo un número finito de ellos están en el mismo C_α, el cual tiene diámetro menor que η. Así, la sucesión (x_n) es η-Cauchy.

□

5.5. UNA SUCESIÓN DE MULTI-ε-TÁCTICAS.

Lema 5.5.1. *Supongamos que* X *tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Sean* $\eta, r > 0$ *y* D *un conjunto cerrado y convexo de* X. *Sean* $\widehat{f} \in X^*$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $S = D \cap \{\widehat{f} < c\}$ *es un conjunto no vacío y acotado. Entonces, existen sucesiónes transfinitas* $(g_\beta)_{1 \leqslant \beta < \mu}$ *in* S_{X^*} *y* $(d_\beta)_{1 \leqslant \beta < \mu}$ *en* $\mathbb{R}$ *tales que, si* $(D_\beta)_{0 \leqslant \beta \leqslant \mu}$ *se define como sigue:*

$$\textit{para todo}\, \beta \in [0,\mu],\;\; D_\beta = D \cap \Big(\bigcap_{\gamma < \beta} \{g_\gamma \geqslant d_\gamma\}\Big)$$

Entonces, para todo $\beta < \mu$, $D_\beta \supset D \cap \{\widehat{f} \geqslant c\}$, *y, si denotamos por* $C_\beta = D_\beta \backslash D_{\beta+1}$, *tenemos que:*

(i) $C_\beta \neq \emptyset$ *y diam* $(C_\beta) < \eta$.

(ii) $\|g_\beta - \widehat{f}\| < \min\big\{r, \inf\{R(u); u \in C_\beta\}\big\}$.

(iii) $\big\{C_\beta;\, \beta < \mu\big\}$ *es una partición de* S.

Demostración. Vamos a construir g_β y d_β por inducción transfinita usando el Lema 5.2.2 en cada paso. Vamos a suponer que g_γ y d_γ se han construido para $\gamma < \beta$. Por lo tanto $D_\beta = D \cap \big(\bigcap_{\gamma<\beta} \{g_\gamma \geqslant d_\gamma\}\big)$ está bien definida (notece que $D_0 = D$).

Si $D_\beta \cap \{\widehat{f} < c\}$ es no vacío, también es acotado porque está incluido en $S = D \cap \{\widehat{f} < c\}$. Aplicando el Lema 5.2.2 con D_β en lugar de D, encontramos g_β y d_β tales que $C_\beta = D_\beta \cap \{g_\beta < d_\beta\}$ y satisfacen las condiciones (i), (ii) y $C_\beta \subset S$. Esta última condición implica que $D_{\beta+1} = D_\beta \backslash C_\beta \supset D \cap \{\widehat{f} \geqslant c\}$.

Por otro lado, si $D_\beta = D \cap \{\widehat{f} \geqslant c\}$, entonces ponemos $\mu = \beta$ y terminamos, de modo que la condición (iii) se satisface. □

Ahora estamos listos para construir una sucesión decreciente (T_k) de multi-ε-tácticas.

Teorema 5.5.2. *Fijemos una sucesión (η_k) que converge a 0 tal que $\eta_k > 0$ para todo k. Entonces existe una sucesión de funciones multivaluadas de T_k de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ en S_{X^*} tal que $T_k(x) = S_{X^*} \cap \overline{B}(\widehat{f}_{x,k}, r_k(x))$, donde $\widehat{f}_{x,k} \in S_{X^*}$, $r_k(x) > 0$, $r_k(x) \to 0$ y $T_{k+1}(x) \subset T_k(x)$, y con la propiedad de que, para toda selección t de T_k, t es una η_k-táctica ganadora.*

Demostración. La construcción se llevará acabo por inducción sobre k.

Construcción de T_0.

Es suficiente aplicar la Proposición 5.4.2 con $\eta = \eta_0$.

Paso de inducción.

Asumamos que $T_k(x) = S_{X^*} \cap \overline{B}(\widehat{f}_{x,k}, r_k(x))$ ha sido constuido con las siguientes propiedades:

- Existe una particicón de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$, dada por $C_{\alpha,k} = D_{\alpha,k} \cap \{f_{\alpha,k} < c_{\alpha,k}\}$ con $\alpha < \mu_k$, tal que $diam(C_{\alpha,k}) < \eta_k$ y $\widehat{f}_{x,k} = f_{\alpha,k}$ siempre que $x \in C_{\alpha,k}$.
- Si $x \in C_{\alpha,k}$, $r_k(x) = \min\{R_k(x), r_k\}$, donde $r_k > 0$ es una constante en $C_{\alpha,k}$ y $R_k(x) = \dfrac{c_{\alpha,k} - f_{\alpha,k}(x)}{4 \max\{\|u\|; u \in C_{\alpha,k}\}}$.
- Para toda selección t de T_k, t es una η_k-táctica ganadora.

Ya que $\{C_{\alpha,k};\, \alpha < \mu_k\}$ es una partición de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$, es suficiente, para cada $\alpha < \mu_k$, definir T_{k+1} en $C_{\alpha,k}$. Usando el Lema 5.5.1 con $D = D_{\alpha,k}$, $\widehat{f} = f_{\alpha,k}$ y $c = c_{\alpha,k}$, existen $g_{\alpha,\beta} \in S_{X^*}$ y $d_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ para $\beta < \mu_{\alpha,k}$, tales que $\|g_{\alpha,\beta} - \widehat{f}_{x,k}\| < r_k(x)$, y, si

$$D_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,k} \cap \Big(\bigcap_{\beta < \mu_{\alpha,k}} \{g_{\alpha,\beta} \geqslant d_{\alpha,\beta}\} \Big),$$

entonces $D_{\alpha,\beta+1} \supset D_{\alpha+1,k}$, $C_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta} \backslash D_{\alpha,\beta+1}$ es no vacío, tiene diámetro menor que η_{k+1} y $\{C_{\alpha,\beta};\ \beta < \mu_{\alpha,k}\}$ es una partición de $S = D_{\alpha,k} \cap \{f_{\alpha,k} < c_{\alpha,k}\} = C_{\alpha,k}$. Para cada $x \in C_{\alpha,\beta}$, denotemos

$$\widehat{f}_{x,k+1} = g_{\alpha,\beta} \quad \text{y} \quad r_{k+1} = \text{mín}\left\{r_k, \text{ínf}\{R_k(u);\ u \in C_{\alpha,\beta}\}\right\} - \|g_{\alpha,\beta} - f_{\alpha,k}\| > 0.$$

A continuación $R_{k+1}(x)$ de define por $R_{k+1}(x) = \dfrac{d_{\alpha,\beta} - g_{\alpha,\beta}(x)}{4\,\text{máx}\{\|u\|;\ u \in C_{\alpha,\beta}\}}$. Por lo tanto, tenemos definido $r_{k+1}(x) = \text{mín}\left\{R_{k+1}(x), r_{k+1}\right\}$ y $T_{k+1}(x) = S_{X^*} \cap \overline{B}(\widehat{f}_{x,k+1}, r_{k+1}(x))$. Afirmamos que $T_{k+1}(x) \subset T_k(x)$. En efecto, para $x \in C_{\alpha,\beta}$,

$$T_{k+1}(x) \subset \overline{B}(g_{\alpha,\beta}, r_{k+1}) \subset \overline{B}(f_{\alpha,k}, \|f_{\alpha,k} - g_{\alpha,\beta}\| + r_{k+1}) \subset \overline{B}(\widehat{f}_{x,k}, r_k),$$

y, por otro lado,

$$T_{k+1}(x) \subset \overline{B}(g_{\alpha,\beta}, r_{k+1}) \subset \overline{B}(g_{\alpha,\beta}, R_k(x) - \|g_{\alpha,\beta} - f_{\alpha,k}\|) \subset \overline{B}(\widehat{f}_{x,k}, R_k(x)).$$

Si $x \in C_{\alpha,\beta}$ y $g \in T_{k+1}(x)$, y como $\|g - g_{\alpha,\beta}\| \leqslant R_{k+1}(x)$, podemos aplicar el Lema 5.2.1 con $D = D_{\alpha,\beta}$, $\widehat{f} = g_{\alpha,\beta}$ y $c = d_{\alpha,\beta}$ obtenemos que $\{g \leqslant g(x)\} \cap D_{\alpha,\beta+1} = \emptyset$, y ya que $D_{\alpha,\beta+1} \supset D_{\alpha+1,k}$, también tenemos que $\{g \leqslant g(x)\} \cap D_{\alpha+1,k} = \emptyset$. Así, si $y \in X$ y $g(y) \leqslant g(x)$ entonces $y \notin \Lambda_{p+1} \subset D_{\alpha+1,k}$. Además, si $y \in \Lambda_p$ y $g(y) \leqslant g(x)$, entonces o bien, $y \in C_{\alpha,\beta'}$ con $\beta' \leqslant \beta$ o bien, $y \in C_{\alpha'}$ para algún $\alpha' \leqslant \alpha$.

El conjunto $E = \left\{(\alpha,\beta);\ \alpha < \mu_k,\ \beta < \mu_{\alpha,k}\right\}$ está bien ordenado por la relación siguiente: $(\alpha,\beta) \leq (\alpha',\beta')$ si, y sólo si $\alpha = \alpha'$ y $\beta \leqslant \beta'$, o bien, $\alpha \leqslant \alpha'$. Así existen un único ordinal μ_{k+1} y biyección preservando el orden de $\pi : [0, \mu_{k+1}) \to E$. Entonces definimos, para $\alpha < \mu_{k+1}$, $C_{\alpha,k+1} = C_{\pi(\alpha)}$, $f_{\alpha,k+1} = g_{\pi(\alpha)}$ y $c_{\alpha,k+1} = d_{\pi(\alpha)}$. Por lo tanto $\left\{C_{\alpha,k+1};\ \alpha \leq \mu_{k+1}\right\}$ es una partición de $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ en conjuntos de diámetro menor que η_{k+1}. Además, si $x \in C_{\alpha,k+1}$ y $g \in T_{k+1}(x)$, entonces para todo $y \in \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1} \cap \{g \leqslant g(x)\}$, existen $\alpha' \leqslant \alpha$ tal que $y \in C_{\alpha',k+1}$.

Ahora vamos a probar que, si t es una selección de T_{k+1}, entonces t es η_{k+1}-ganadora. Si $x \in C_{\alpha,k+1}$ e $y \in X$ y satisfacen que $t(x)(y) \leqslant t(x)(x)$, entonces $y \notin \Lambda_{p+1}$, y en el caso que $y \in \Lambda_p$, entonces $y \in C_{\alpha',k+1}$ para algún $\alpha' \leqslant \alpha$. Ahora sea (x_n) una sucesión en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ tal que $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle \leqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea α_n tal que $x_n \in C_{\alpha_n,k+1}$. Ya que $t(x_n)(x_{n+1}) \leqslant t(x_n)(x_n)$, obtenemos que $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Así (α_n) es una sucesión no creciente de números ordinales, por lo tanto, existe n_0 tal que, para todo $n \geqslant n_0$, $\alpha_n = \alpha_{n_0}$. Todos los x_n, excepto un número finito de ellos, están en $C_{\alpha_{n_0},k+1}$ y tienen diámetro menor que η_{k+1}. Esto prueba que la sucesión (x_n) es η_{k+1}-Cauchy. Y por lo tanto, esto completa la inducción.

$\square$

5.6. PRUEBA DEL TEOREMA PRINCIPAL

Demostración. Para cada $p \in \mathbb{Z}$, definimos $t(x)$ siempre que $x \in \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$. En este caso, $\big(T_k(x)\big)$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados en el espacio de Banach X^* y $diam\big(T_k(x)\big) \to 0$. Por consiguiente $\bigcap T_k(x)$ consta de un único elemento, y denotemos por $t(x)$ este único elemento de esta intersección. Siempre que $x \in \Lambda_p$, tenemos que $t(x) \in T_1(x)$, así

$$x \in \Lambda_p \quad \text{y} \quad \langle t(x), y - x\rangle \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad y \notin \Lambda_{p+1}$$

Ahora vamos a probar que t es una táctica ganadora en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$. Fijemos una sucesión $(x_n) \in \Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ tal que para cada n, $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant 0$. Ya que $t(x) \in T_k(x)$, la sucesión (x_n) es η_k-Cauchy, y como esto es cierto para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (x_n) es convergente.

Ahora sea (x_n) una sucesión tal que la sucesión $\big(f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|\big)$ es acotada inferiormente y $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego para cada n, existe un entero $p_n \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n \in \Lambda_{p_n} \backslash \Lambda_{p_{n+1}}$. Ya que $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant 0$, $x_{n+1} \notin \Lambda_{p_n+1}$, así $p_{n+1} \leqslant p_n$. Dado que $\big(f(x_n) - \varepsilon\|x_n\|\big)$ es acotada inferiormente, la sucesión (p_n) es acotada inferiormente. Así (p_n) es una sucesión no creciente que es acotada inferiormente, por lo tanto existe un n_1 tal que $p_n = p_{n_1} := p$ para todo $n \leqslant n_1$. Así, toda la sucesión $(x_n)_{n \geqslant n_1}$ esta incluida en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$. Puesto que $t|_{\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}}$ es una táctica ganadora en $\Lambda_p \backslash \Lambda_{p+1}$ y $\langle t(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant 0$, tenemos que la sucesión (x_n) es convergente.

$\square$

Bibliografía

[1] D. Azagra, J. Ferrera and F. López-Mesas, *Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **220** (2005), 304-361.

[2] S. Banach and S. Mazur, *Über mehrdeutige stetige abbildungen*, Studia Math. **5** (1934), 174-178.

[3] C. Biasi, C. Gutiérrez and E. L. dos Santos, *Global inverse mapping theorems*, Cadernos de Matemática. **10** (2009), 9-18.

[4] R. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property*, Lecture Notes in Math. **993** (Springer, Berlin, 1983). MR704815 (85d:46023).

[5] F.E. Browder, *Covering spaces, fiber spaces and local homeomorphism*, Duke Math. J. **21** (1954), 329-336.

[6] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975), 247-262.

[7] F. H. Clarke, *On the inverse function theorem*, Pac. J. Math **64** (1976), no. 1, 97-102.

[8] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Classics in Applied Mathematics 5, SIAM, Philadelphia (1990).

[9] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, GTM. 178 (1998).

[10] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlang, New York (1985).

[11] R. Deville and É. Matheron, *Infinite games, Banach Space geometry and the eikonal equation*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **95** (2007), no. 1, 4968

[12] R. Deville and J. Jaramillo, *Almost classical solutions of Hamilton-Jacobi equations*,Rev. Mat. Iberoam. **24**, no. 3 (2008), 989-1010.

[13] M. Fabián, D. Preiss, *On the Clarkes generalized Jacobian.* Rend. Circ. Mat. Palermo, Suppl. **2** (14), 305307 (1987); In: Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis (Srní,1986) (MR 9d:58016)

[14] A. Fernandes, C. Gutiérrez and R. Rabanal, *On Local Diffeomorphisms of* $\mathbb{R}^n$ *that are Injective*, Qual. Theory Dyn. Syst. **4** (2004), 255-262.

[15] I. Garrido, O. Gutú and J. A. Jaramillo, *Global inversion and covering maps on length spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), no. 5, 1364-1374.

[16] W.B. Gordon. *On the diffeomorphisms of Euclidean space*, Amer. Math. Monthly. **79** (1972), 755-759.

[17] O. Gutú and J. A. Jaramillo, *Global homeomorphisms and covering projections on metric spaces*, Math. Ann. **338** (2007), no. 5, 75-95.

[18] J. Hadamard, *Sur les transformations ponctuelles*, Bull. Soc. Math. France **34** (1906) 71-84.

[19] H. Halkin, *Interior mapping theorem with set-valued derivatives.* J. Analyse Math, **30** (1976), 200 - 207.

[20] H. Halkin,*Mathematical programming without differentiability, in "Calculus of Variations and Control Theory"*, D. Rusell, Ed., Academic Press, New York (1976).

[21] R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations*, Math. in Sci. and Eng, Vol 49, Academic Press, New York, (1968).

[22] J.-B. Hiriart-Urruty, *On necesary optimality conditions in nondifferentiable programming*, Math. Programming, **4**, No 1 (1978), 73 - 86.

[23] J.-B. Hiriart-Urruty, *Mean valued theorems in nonsmooth analysis.*, Numer. Funct. Anal. Optim. **2**, (1980), 1 - 30.

[24] Hong-Xu Li, Jin Liang and Ti-Jun Xiao, *Criteria for the global invertibility of* C^1 *functions between Banach spaces*, Nonlinear Anal. **51** (2002), no. 2, 189-195.

[25] A.D. Ioffe, *Global surjection and global inverse mapping theorem in Banach spaces*, Ann. New York Acad. Sci. **491**, (1987) 181-188.

[26] J. A. Jaramillo, O. Madiedo and L. Sánchez-González, *Global inversion of nonsmooth mappings on Finsler manifolds*, to appear in J. Convex Anal. **20** (2013), no. 4.

[27] V. Jeyakumar and D.T. Luc, *Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C^1-optimization*, SIAM J. Control Optim. **36** (1998), no. 5, 1815-1832.

[28] V. Jeyakumar and D.T. Luc, *An open mapping theorem using unbounded generalized Jacobian*, Nonlinear Anal. **50** (2002), no. 5, 647-663.

[29] V. Jeyakumar and D.T. Luc, *Nonsmooth Vector Functions and Continuous Optimization*, Optimization and its Applications 10, Springer, New York (2008).

[30] F. John, *On quasi-isometric maps I*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968), 77-110.

[31] M. Jiménez-Sevilla and L. Sánchez-González, *On some problems on smooth approximation and smooth extension of Lipschitz functions on Banach-Finsler manifolds*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 3487-3500.

[32] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, GTM 191, Springer-Verlag, New York (1999).

[33] G. Larotonda, *Estructuras geométricas para las variedades de Banach*. Colección Ciencia Innovación y Desarrollo, Universidad Nacional de General Sarmiento (2011), en prensa.

[34] P. Levy, *Sur les fonctions de ligne implicites*, Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 13-27.

[35] D. T. Luc, *Chain rules for approximate Jacobians of continuous functions*, Nonlinear Anal. **61** (2005), no. 1-2, 97-114.

[36] J. Malý and M. Zelený, *A note on Buchzolich's solution of the Weil gradient problem: A construction based on an infinite game*, Acta Math. Hungar. **113** (2006),145-158.

[37] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, Princeton (1974).

[38] S. Nollet and F. Xavier, *Global inversion via the Palais-Smale condition*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8**(2002), no. 1, 17-28.

[39] R. S. Palais, *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology **5** (1966), 115-132.

[40] R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, 2nd Edition, Lecture Notes in Math. **1364** (Springer, Berlin, 1993). MR1238715 (94f:46055).

[41] R. Plastock, *Homeomorphisms between Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 169-183.

[42] B. H. Pourciau, *Analysis and optimization of Lipschitz continuous mappings*, J. Optim. Theory Appl. **22** (1977), no. 3, 311-351.

[43] B. H. Pourciau, *Hadamard's theorem for locally Lipschitzian maps*, J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 279-285.

[44] B. H. Pourciau, *Global lnvertibility of Nonsmooth Mappings*, J. Math. Anal. Appl. **131** (1988), 170-179.

[45] Antonín Procházka, *Winning tactics in a geometrical game*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 3, 1051-1061.

[46] P.J. Rabier, *On global diffeomorphisms of euclidian space*, Nonlinear Anal.**21** (1993), no. 12, 925-947.

[47] P. J. Rabier, *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds*, Ann. of Math. **146** (1997), no. 3, 647-691.

[48] H. Radamacher, *Uber partielle und totale differenzierbarkeit*, Math. Ann. **79** (1919), 340-359.

[49] M. Radulescu and S. Radulescu, *Global inversion theorem and applications to differential equations*, Nonlinear Anal. **4** (1989), no. 5, 539-553.

[50] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, New York (1966).

[51] J. WARGA, *Fat homeomorphisms and unbounded derivate containers*, J. Math. And, Appl.**81** (1981), 545-560.

[52] M. Zelený, *The Denjoy-Clarkson property with respect to Hausdorff measures for the gradient mapping of functions of several variables*, Ann. Inst. Fourier. **58** (2008), no. 2, 405-428.