

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS



TESIS DOCTORAL

Marginalismo, valor de Myerson y valor posicional

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Eduardo Ortega Castelló

DIRECTORES

Conrado Miguel Manuel García
Mónica del Pozo Juan

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS



TESIS DOCTORAL

Marginalismo, valor de Myerson y valor posicional

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Eduardo Ortega Castelló

DIRECTOR

D. Conrado Miguel Manuel García y D^a. Mónica del Pozo Juan

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Estudios Estadísticos

Departamento de Estadística y Ciencia de los Datos



Marginalismo, valor de Myerson y valor posicional

Eduardo Ortega Castelló.

*Memoria para optar al grado de Doctor en Análisis de Datos (Data Science),
realizada bajo la dirección de los doctores D. Conrado Miguel Manuel García y
D^a Mónica del Pozo Juan.*

Madrid, Noviembre de 2020.

*'No estoy tan enamorado de mis propias opiniones
que ignore lo que los demás puedan pensar
acerca de ellas.'*

Nicolás Copérnico.

Agradecimientos

Escribir los agradecimientos en una Memoria tiene cierta similitud con relatar las excelencias de un viaje. Por más cuidado y empeño que se ponga, siempre se acabará omitiendo algo que ha sido determinante a la hora de calificarlo como el mejor de los viajes. Y es que escribir una tesis no deja de ser un viaje, largo en mi caso, por cierto. Un viaje compartido, porque rara es la tesis que no es un trabajo de equipo. Esta sección sólo trata de ser un breve recorrido por todos aquellos que hicieron de mi viaje un proyecto, primero posible y luego ilusionante.

Es costumbre, en estos casos, empezar agradeciendo al director de la tesis por su inestimable ayuda. No me atrevería a precisar cuántos de estos agradecimientos son sinceros y cuántos simple consecuencia del ritual académico. En este caso puedo decir, con la certeza que da la experiencia, que este trabajo no habría salido adelante sin la ayuda de mis dos directores, el profesor Manuel García y la profesora del Pozo Juan. Así que, Conrado y Mónica, desde aquí quiero que conste mí más sincero agradecimiento, tanto por la cantidad de vuestra ayuda, como por la calidad de la misma.

No quisiera olvidar aquí a todos mis compañeros, y a pesar de ello amigos, de la Facultad de Estudios Estadísticos. Esos que siempre han tenido una palabra de ánimo con la tesis y que han sido un acicate en mis demasiado frecuentes y prolongados ratos de descuido. A Inés, Enrique, Maena, Julia, Charo y otros muchos que, por no extenderme más no voy a citar, pero que no por eso dejan de merecerlo, mil gracias por haber insistido. También al profesor Guillermo Owen, que en todas sus visitas fue un estímulo para continuar aprendiendo. Y a la propia Facultad, por haberme ofertado un excelente programa de doctorado, de incuestionable calidad, en el que participa un numeroso grupo de excelentes profesionales.

A mi familia. A mis padres, que han sido mi ejemplo de vida. A Cayetana y a Eduardo, para los que espero serlo yo. A mi hermana Pilar y también a Chelo. Sin ninguna duda el mérito de todo este trabajo es tan vuestro como mío.

Y por último a Carmen, apoyo imprescindible e incondicional. Tu paciencia, soportando con una sonrisa mis defectos y manías, compensa, de largo, la saña con la que has revisado la ortografía.

Índice de contenidos

Resumen	iii
Summary	v
1 Introducción	7
2 Preliminares	14
2.1 Juegos cooperativos n -personales	14
2.1.1 Juegos en forma de función característica	15
2.1.2 Clases de juegos en forma de función característica y conceptos de solución	17
2.2 Algunas cuestiones sobre grafos	27
2.3 Situaciones de comunicación	29
2.3.1 Reglas de reparto para situaciones de comunicación	35
2.3.2 Algunas propiedades de las reglas de reparto	37
3 Marginalismo y valores de Myerson	46
3.1 Marginalismos	49
3.1.1 Contribuciones marginales	49
3.1.2 Marginalismo, L-marginalismo y PL-marginalismo	57
3.2 Eficiencia	60
3.3 Contribuciones equilibradas	63
3.4 Trato igualitario	65
3.5 Caracterizaciones	66
3.5.1 Caracterización del valor de Myerson	66
3.5.2 Caracterización del valor WG-Myerson	69
3.5.3 Caracterización del valor BG-Myerson	72
3.6 Independencia de los axiomas	74
3.6.1 Independencia de los axiomas en las caracterizaciones del valor de Myerson	74
3.6.2 Independencia de los axiomas en las caracterizaciones del valor WG-Myerson	75
3.6.3 Independencia de los axiomas en la caracterización del valor BG- Myerson	77
3.7 Resumen de las caracterizaciones	78

3.8	Algunas cuestiones sobre equidad	78
4	Marginalismo y valores posicionales	80
4.1	Algunas cuestiones previas sobre el valor posicional	80
4.2	Descomposición del valor posicional: valores WG-posicional y BG-posicional	81
4.3	Marginalismos	85
4.4	Eficiencia	92
4.5	Contribuciones equilibradas en arcos	97
4.6	Caracterizaciones	98
4.6.1	Caracterización del valor posicional	98
4.6.2	Caracterización del valor WG-posicional	102
4.6.3	Caracterización del valor BG-posicional	106
4.7	Independencia de los axiomas	109
4.7.1	Independencia de los axiomas en la caracterización del valor posicional	109
4.7.2	Independencia de los axiomas en la caracterización del valor WG- posicional	110
4.7.3	Independencia de los axiomas en la caracterización del valor BG- posicional	111
4.8	Resumen de las caracterizaciones	112
5	Conclusiones y futuras líneas de investigación	113
	Bibliografía	116

Resumen

Dentro de la Teoría de Juegos, los contenidos de esta Memoria se sitúan en el estudio de los juegos n -personales cooperativos de utilidad transferible (juegos TU). En particular, se abordan cuestiones relacionadas con aquellas situaciones estratégicas en las que los jugadores ven limitadas sus posibilidades de comunicación a través de un grafo. Los modelos de este tipo reciben el nombre de situaciones de comunicación o juegos sobre grafos. En el estudio de las situaciones de comunicación, se han realizado múltiples esfuerzos para definir conceptos de solución que queden caracterizados por propiedades que los sustenten desde un punto de vista racional. Al respecto, las dos reglas de asignación con mayor preeminencia en la literatura son el valor de Myerson (Myerson, 1977) y el valor posicional (Meessen, 1988; Borm, Owen y Tijs, 1992).

Por otra parte, el marginalismo ¹ es una escuela de pensamiento económico muy relevante. En el contexto de la Teoría de Juegos cooperativos, esta corriente de pensamiento se centra en la importancia de la utilidad marginal del último jugador que se incorpora a una coalición y su relación con el pago que recibe.

Ninguna de las caracterizaciones de los valores de Myerson y posicional, obtenidas hasta el momento, incorpora en sus axiomáticas el concepto de marginalismo. Por el contrario, en el contexto de otras reglas de reparto para juegos TU, es frecuente encontrar caracterizaciones que incluyen esta propiedad.

El objetivo de esta Memoria es analizar la relación entre distintos conceptos de marginalismo y los valores de Myerson y posicional y sus descomposiciones en los valores WG y BG. Para ello, se amplía el concepto clásico de contribución marginal de un jugador a una coalición, asumiendo que, en las situaciones de comunicación, existen formas alternativas de contribuir marginalmente, a saber, la del jugador en el juego subyacente (contribución marginal clásica), la de sus

¹El término original en inglés 'marginality' podría ser traducido por marginalidad, pero el significado que la RAE atribuye a esta palabra no se corresponde en absoluto con el económico. Por otro lado, en el ámbito económico, es frecuente encontrar referencias a la teoría del marginalismo, pero marginalismo no es un término aceptado por la RAE. Ante esta dicotomía hemos decidido utilizar el término habitual en economía aunque no esté aceptado por la Academia.

arcos en el grafo (L-contribución marginal) y la conjunta jugador-arcos (PL-contribución marginal). A partir de ellas se definen distintas monotonías fuertes y sus correspondientes marginalismos.

El núcleo de esta Memoria está dedicado a demostrar que los marginalismos definidos sirven para caracterizar el valor de Myerson, el valor posicional y sus distintas descomposiciones. En particular, se prueba que los valores de Myerson y posicional se pueden caracterizar utilizando PL-marginalismo, los valores WG-Myerson y WG-posicional utilizando marginalismo y los valores BG-Myerson y BG-posicional utilizando L-marginalismo (en cada caso junto con algunas otras propiedades).

Adicionalmente, se lleva a cabo un estudio detallado de la independencia de los axiomas utilizados y se incluyen algunos problemas abiertos que, a nuestro juicio, merecen atención.

Summary

Within the scope of Game Theory, the contents of this Memory are devoted to the study of cooperative n -personal games of transferable utility (TU games). In particular, to those strategic situations in which players possibilities of communication are restricted by means of a graph. The models of this type are called communication situations or games on graphs. In the study of communication situations, multiple efforts have been made to define solution concepts that are characterized by rational and appealing properties. In this regard, the two most prominent allocation rules in the literature are the Myerson value (Myerson, 1977) and the positional value (Meessen, 1988; Borm, Owen y Tijs, 1992).

On the other hand, marginality is a theory that is deeply rooted in the social sciences and particularly in economics. Marginality, in the contest of cooperative Game Theory, argues that the reward of a player should depend on his marginal contributions in the game.

None of the characterizations of Myerson's and positional values obtained so far, incorporates in their axioms the concept of marginality. On the contrary, in the context of other solution concepts for TU games, it is frequent to find characterizations including this property.

The aim of this Memory is to analyze the relationship between different concepts of marginality and the Myerson and positional values and their decompositions in the WG and BG values. We enlarge the idea of the classical marginal contribution of a player to a coalition in a cooperative game. Besides this type of contribution, in games with cooperation restricted by a graph, a player can contribute to a coalition in other ways. For example, lending his links to the coalition but without joining it. We will call it the marginal contribution of the player's links (L-marginal contribution). Also he can contribute to a coalition by joining it with his communication possibilities. This is the marginal contribution of the player with his links (PL-marginal contribution).

In this Memory we prove that the defined marginalities serve to characterize the Myerson value, the positional value and their decompositions. In particular,

the Myerson and positional values can be characterized using PL-marginality, the WG-Myerson and WG-positional values using marginality and the BG-Myerson and BG-positional values using L-marginality (in each case together with some other properties).

In addition, a detailed study of the independence of the axioms used is carried out and some open problems (that in our opinion deserve attention) are proposed.

Capítulo 1

Introducción

*'No hagas a los demás lo que te gustaría que te hicieran a ti:
sus gustos pueden ser diferentes.'*

George Bernard Shaw.

Desde sus orígenes la Teoría de Juegos fue concebida como una disciplina que permitiese analizar conflictos (en sentido amplio) de tipo social o económico. Esta utilidad práctica ha potenciado el estudio de modelos teóricos, así como, su aplicación en numerosos ámbitos relacionados con la toma de decisiones.

Desde finales de la década de los cincuenta del siglo pasado, los avances de la Teoría de Juegos han estado profundamente ligados a la resolución de multitud de problemas del mundo real. Ciencias Humanas y Sociales como la Filosofía, la Economía, la Política o la Sociología, pero también otras como la Biología, la Computación o la Inteligencia Artificial, han encontrado en la Teoría de Juegos un marco de referencia para abordar problemas de la más diversa tipología.

El impulso definitivo a la Teoría de Juegos llegó en el año 1994 con la concesión del Premio Nobel de Economía ¹ a John C. Harsanyi, John F. Nash y Reinhard

¹El premio Nobel de Economía se denomina oficialmente premio de Ciencias Económicas

Selten, por *su análisis fundamental del equilibrio en la Teoría de los Juegos no cooperativos*². Recibió un nuevo impulso en el año 2005, cuando de nuevo se otorgó a Robert Aumann y Thomas Schelling por *haber contribuido a mejorar el entendimiento de la cooperación y de los conflictos a través del análisis de la Teoría de Juegos*. En las ediciones de los años 2007 y 2012 del mismo premio, de nuevo fueron reconocidos avances en el estudio de la Teoría de Juegos. En el año 2007, Leonid Hurwicz, Roger B. Myerson y Eric S. Maskin fueron galardonados por *sentar las bases de la teoría del diseño de mecanismos, una rama de la Teoría de Juegos con un papel importante en las ciencias económicas y políticas contemporáneas*, y en el año 2012, Lloyd S. Shapley y Alvin E. Roth fueron premiados por *sus investigaciones sobre la teoría de las asignaciones estables y la práctica del diseño de mercados*. Finalmente, en el año 2014 el francés Jean Tirole recibió también el galardón por *su análisis sobre el poder de los mercados y la regulación*. Cinco premios Nobel, con múltiples galardonados, en poco más de veinte años hablan de la fortaleza actual de esta disciplina.

Como se ha mencionado, la Teoría de Juegos analiza los conflictos en los que diferentes actores tratan de optimizar sus resultados. Hay muchas situaciones de este tipo y, por tanto, hay muchos tipos de juegos. Una primera clasificación se puede establecer admitiendo la dicotomía de que los actores involucrados en la interacción puedan comunicarse, o no, y que en esta comunicación puedan alcanzar acuerdos vinculantes entre ellos. Esta diferencia marca la distinción entre juegos cooperativos y no cooperativos. Los juegos no cooperativos servirán para modelar situaciones donde la elección de cada jugador está encaminada únicamente a maximizar sus intereses a través de sus propios medios y bajo el supuesto de que el resto de jugadores tienen la misma capacidad que él para tomar las decisiones más racionales. Por el contrario, si en el juego existe la posibilidad de comunicación entre los jugadores, estos podrán negociar llegando a acuerdos que permitan la formación de coaliciones. En este último caso, aspectos cruciales son el análisis de hasta qué punto es factible la formación de distintas coaliciones, la utilidad que cada una de ellas puede obtener coordinando las estrategias de sus integrantes y suponiendo que sea posible, las diferentes formas de repartir esta utilidad entre sus miembros. Si todas las coaliciones son factibles y se conoce la utilidad (transferible) de cada una de ellas, hablaremos de juegos cooperativos con utilidad transferible, o juegos TU, y ellos son la base de esta Memoria.

Cuando en el verano del año 2017 me puse en contacto con los profesores Manuel y del Pozo para comentarles mi deseo de que fueran directores de mi

del Banco de Suecia en memoria de Alfred Nobel, ya que no corresponde al testamento original de Nobel y fue establecido por el instituto emisor sueco en 1968 para conmemorar su 300 aniversario.

²En todas las concesiones se cita textualmente el reconocimiento otorgado por la Real Academia de las Ciencias de Suecia.

tesis, además de recibir todo su apoyo, comprensión y aceptación, me entregaron tres artículos para introducirme en el tema sobre el que íbamos a trabajar:

R.B. Myerson. Graphs and cooperation in games, *Mathematics of Operations Research*, (2):225-229, 1977.

R.B. Myerson. Conference structures and fair allocations rules, *International Journal of Game Theory*,(9):169-182, 1980.

E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, and M. del Pozo. The within groups and the between groups Myerson values, *European Journal of Operational Research*, (257):586-600, 2017.

Los dos primeros, están dedicados a proponer y desarrollar el modelo de los juegos n-personales donde la cooperación aparece limitada por un grafo de comunicación. Este modelo es una propuesta de Myerson para formalizar aquellas situaciones en las que se considera que existen restricciones en la formación de coaliciones, situaciones, por otra parte, muy vinculadas con distintos problemas relacionados con el análisis de las redes sociales.

Myerson aborda el problema de restringir la comunicación en una situación estratégica, añadiendo al juego coalicional un grafo de comunicaciones. En él, los nodos representan a los jugadores y cada arco ³ la posibilidad de comunicación simétrica entre los nodos adyacentes. Bajo esta premisa, solo son factibles aquellas coaliciones que son conexas en el grafo dado. En el ámbito de la Teoría de Juegos cooperativos, el par formado por un juego coalicional y un grafo de comunicaciones recibe el nombre de juego con grafo (*graph game*) o situación de comunicación (*communication situation*). El modelo de las situaciones de comunicación de Myerson puede entenderse como una generalización de los juegos cooperativos con estructura de coalición. Estos fueron propuestos poco antes, por Aumann y Dreze (1974). En este caso se considera que la cooperación puede darse únicamente dentro de cada una de las coaliciones que componen una cierta partición (fijada a priori) del conjunto total de jugadores. Estas particiones ya habían sido utilizadas previamente por Aumann y Maschler (1964) en sus conjuntos de regateo.

El modelo de las situaciones de comunicación de Myerson es de una indudable relevancia dentro de la Teoría de Juegos y por ello ha sido estudiado, y citado, en numerosas ocasiones en la literatura, siendo germen de diferentes variantes. En unas, las restricciones en las comunicaciones se representan a través de grafos probabilísticos, dirigidos o hipergrafos. En otras, considerando que el

³A lo largo de esta Memoria utilizaremos indistintamente los términos arco y arista para identificar, tal y como se definen en el diccionario de la Real Academia, las líneas no orientadas que unen los nodos de un grafo.

valor que puede obtener un grupo de jugadores no depende solo de sus componentes conexas en el grafo de comunicación sino también de la estructura interna de estas componentes. Una muy destacada revisión de todos estos modelos se puede encontrar en Slikker y van den Nouweland (2001).

Myerson (1977), además de introducir la noción de juegos TU con comunicación dada por un grafo, propone una solución puntual al problema del reparto de la utilidad entre los jugadores. A partir del juego coalicional y del grafo que restringe la comunicación definió el juego restringido por el grafo (*graph-restricted game*), un nuevo juego TU en el que el beneficio de una coalición es la suma de los pagos obtenidos en el juego original por todas sus subcoaliciones maximalmente conectadas (en el grafo), es decir, por todas sus componentes conexas. A continuación Myerson propuso el valor de Shapley (Shapley, 1953) de este nuevo juego, como la solución para juegos TU con este tipo de restricciones. Además dio una caracterización del valor así definido, ahora conocido como valor de Myerson, utilizando dos propiedades, eficiencia en componentes conexas y equidad (*fairness*). Posteriormente él mismo (Myerson, 1980), dio una segunda caracterización del valor, sustituyendo el axioma de equidad por el de contribuciones equilibradas (*balanced contributions*). Sobre todas estas propiedades hablaremos con detalle más adelante.

Desde sus orígenes el valor de Myerson ha recibido mucha atención y se han obtenido diferentes generalizaciones del mismo en entornos relacionados con las situaciones de comunicación. Winter (1992) probó que el valor de Myerson puede admitir un potencial, siguiendo el enfoque sugerido por Hart y Mas-Colell (1989) para el valor de Shapley. Van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) extienden el valor de Myerson al caso en el que las posibilidades de comunicación de los agentes vienen dadas por un hipergrafo. Jackson y Wolinsky (1996) introdujeron la regla del poder igualitario, una extensión del valor de Myerson para los juegos con grafo. Algaba, Bilbao, Borm y López (2001) caracterizaron el valor de Myerson para los juegos cooperativos con estructuras de coalición estables. Una estructura de coalición es estable si dos coaliciones factibles no disjuntas generan, a través de su unión, una nueva coalición factible. Calvo, Lasaga y van den Nouweland (1999) lo extienden de forma natural al caso de los juegos con grafos probabilísticos, en los que cada par de nodos tiene una determinada probabilidad de comunicación directa, siendo estas probabilidades independientes. Gómez, González-Arangüena, Manuel y Owen (2008) consideran un enfoque más general, en el que se da una distribución de probabilidad sobre el conjunto de todos los grafos posibles y se elimina la condición de independencia entre las conexiones. Más recientemente González-Arangüena, Manuel y del Pozo (2015) han obtenido otra extensión del valor de Myerson para el caso de los juegos con grafos de arcos ponderados. En Gómez, González-Arangüena, Owen, del Pozo y Tejada (2003), se descompone aditivamente el valor de Myerson para la clase de los

juegos simétricos. Se define así una medida de centralidad por comunicación y otra por intermediación para los miembros de una red social que tienen intereses económicos dados por un juego TU. Esta idea se generaliza a juegos no necesariamente simétricos en González-Arangüena, Manuel, Owen, y del Pozo (2017). Recientemente Li y Shan (2020) extienden el valor de Myerson a las situaciones de comunicación con grafos dirigidos.

El valor de Myerson no es la única regla de reparto propuesta para las situaciones de comunicación. Meessen (1988) introdujo en su tesis doctoral una regla alternativa al valor de Myerson, el valor posicional, aun cuando fueron Borm et al. (1992) los impulsores de su posterior difusión. El valor posicional se define a partir del valor de Shapley en el juego de los arcos. En dicho juego, los jugadores son las aristas que forman el grafo que restringe la comunicación y las coaliciones los subgrafos de éste. El valor de un subgrafo cualquiera en el juego de los arcos es la suma de los valores (en el juego TU original) de sus componentes conexas. Para evitar incoherencias con la definición de función característica, el juego de los arcos se define para situaciones de comunicación en las que las coaliciones unipersonales tienen valor nulo en el juego coalicional (juegos cero-normalizados). Entonces, el valor posicional de un jugador se calcula como un medio de la suma de los valores de Shapley, en el juego de los arcos, de las aristas que inciden en él, asumiendo implícitamente que ambos extremos del arco contribuyen, utilizan o mantienen el arco simétricamente. Borm et al. (1992) obtuvieron una primera caracterización de esta regla de reparto válida para situaciones de comunicación en las que el grafo es un árbol. Slikker (2005) generalizó el resultado para situaciones de comunicación sin restricciones sobre el grafo utilizando dos propiedades, eficiencia en componentes y contribuciones equilibradas en arcos (*balanced link contributions*). Casajus (2007) caracterizó el valor posicional para situaciones de comunicación generales expresándolo en términos del valor de Myerson de un juego asociado al juego original y planteó el problema, aún abierto, del recíproco. Por último en Gómez, González-Arangüena, Manuel, Owen y del Pozo (2004) se puede encontrar un método unificado para el cálculo de los valores de Myerson y posicional a partir de la definición de reglas de reparto para grafos.

Además del valor de Myerson y del valor posicional, existen otras reglas de reparto para situaciones de comunicación como, por ejemplo, el valor de Hamiache (Hamiache, 1999) del que se puede encontrar una discusión detallada en Bilbao, Jiménez y López (2006)⁴. No entramos más en detalle en ellas al no estar directamente relacionadas con los contenidos de esta Memoria.

Tanto el valor de Myerson como el valor posicional se obtienen calculando el valor de Shapley (Shapley, 1953) en juegos inducidos por el grafo que restringe

⁴Analizan el valor y lo generalizan para los juegos TU con estructuras de coalición estables.

la comunicación. Como ya se ha dicho, en el juego restringido por el grafo, en el caso del valor de Myerson y en el juego de los arcos, en el caso del valor posicional.

El valor de Shapley es la solución singular ⁵ más prominente para juegos TU. Shapley justificó su definición mediante tres axiomas, aditividad, simetría, y la propiedad del soporte (*carrier property*), aunque frecuentemente se cita en su lugar una caracterización posterior de Shubik (1962) donde se utilizan los axiomas de eficiencia, aditividad, simetría y la propiedad del jugador nulo. Además, el valor de Shapley de un jugador puede ser calculado como un promedio ponderado (por el tamaño de las coaliciones) de sus contribuciones marginales a las coaliciones a las que no pertenece. En lo que afecta a esta Memoria, Young (1985) caracterizó el valor de Shapley sustituyendo los axiomas de aditividad y propiedad del jugador nulo de Shubik por el axioma de monotonía fuerte. La monotonía fuerte exige que, si al cambiar de juego las contribuciones marginales de un jugador a todas las coaliciones a las que no pertenece no disminuyen, tampoco debe disminuir el pago que el jugador recibe en el reparto del valor del nuevo juego. Aunque Young utiliza en el enunciado de su resultado el axioma de monotonía fuerte, también advierte de que esta propiedad se puede relajar exigiendo que, si al cambiar de juego las contribuciones marginales de un jugador a todas las coaliciones a las que no pertenece se mantienen iguales, el jugador debe recibir el mismo pago en el reparto del valor de ambos juegos. Considera, y así lo cita, que esta propiedad relajada puede interpretarse como un cierto "tipo de independencia". Chun (1989), algunos años después, hizo común el nombre de marginalismo (*marginality*) para la propiedad de independencia introducida por Young.

Tanto el valor de Myerson como el valor posicional no verifican el axioma de marginalismo (y, por tanto, tampoco el de monotonía fuerte) respecto del juego coalicional. Esto se debe a que, en las situaciones de comunicación, la idea clásica de contribución marginal es insuficiente. En una situación de comunicación, los jugadores pueden contribuir a las ganancias de las coaliciones a las que no pertenecen de diferentes formas, a través de su productividad en el juego coalicional, a través de la intermediación de sus conexiones para unir coaliciones inconexas en el grafo, o a través de ambas aportaciones simultáneamente. En este punto se hace necesario referenciar el tercer artículo que citamos al comienzo de esta introducción.

En González-Arangüena et al. (2017), los autores revisan la descomposición en dos componentes del valor de Myerson propuesta en Gómez et al. (2003) generalizándola a juegos no necesariamente simétricos. La primera de estas componentes se relaciona con el beneficio que un jugador obtiene de las coaliciones

⁵Singular en el sentido de que proporciona un único valor para cada jugador.

en las que genera valor en el juego coalicional. La segunda se relaciona con el beneficio que recibe el jugador de aquellas coaliciones a las que no aporta valor en el juego coalicional, pero a las que contribuye conectando, en el grafo de comunicación, a sus integrantes. Los autores además caracterizan ambas componentes utilizando axiomáticas que veremos más adelante.

En esta Memoria nos proponemos conciliar el concepto de marginalismo con los valores de Myerson y posicional. Para ello utilizaremos la descomposición del valor de Myerson definida en González-Arangüena et al. (2017) y propondremos una equivalente para el valor posicional. Definiremos variantes de marginalismo relacionadas con el hecho de que la comunicación esté restringida por un grafo y, por último, caracterizaremos el valor de Myerson y el valor posicional, así como sus descomposiciones, utilizando estos marginalismos junto con otras propiedades.

La parte de estos resultados relativa al valor de Myerson y su descomposición ha dado lugar a la publicación:

C. Manuel, E. Ortega and M. del Pozo. Marginality and Myerson values, *European Journal of Operational Research*, (284):301-312, 2020.

Y la parte de estos resultados relativa al valor posicional y su descomposición está recogida en el artículo, aún en revisión:

C. Manuel, E. Ortega and M. del Pozo. Marginality and position values.

El resto de la Memoria se estructura de la siguiente manera. El segundo capítulo se dedica a los conceptos de la Teoría de Juegos y de la Teoría de Grafos relacionados con el contenido de la misma. En el tercer capítulo se definen los distintos tipos de marginalismo que se utilizarán en las caracterizaciones de los valores de Myerson y posicional y sus descomposiciones. Se formalizan las caracterizaciones para el caso del valor de Myerson y su descomposición y se estudia la independencia de los axiomas utilizados. El capítulo cuatro replica la estructura del capítulo anterior para el caso del valor posicional. Por último, en el quinto capítulo, se exponen algunos problemas abiertos que, a nuestro juicio, merecen atención y las líneas de investigación que nos proponemos desarrollar.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo está dedicado a los conceptos de la Teoría de Juegos y de la Teoría de Grafos que se utilizan a lo largo de esta Memoria. Se definen los juegos n -personales cooperativos en forma de función característica, se precisan algunas nociones relativas a los grafos no dirigidos y se formaliza el modelo de las situaciones de comunicación. Así mismo, se introducen las dos reglas de reparto para situaciones de comunicación con las que vamos a trabajar, el valor de Myerson y el valor posicional, y se estudian algunas de sus propiedades.

2.1 Juegos cooperativos n -personales

La primera referencia a los juegos cooperativos n -personales aparece en el libro *Theory of Games and Economic Behaviour*, cuya autoría corresponde a John von Neumann y a Oskar Morgenstern (1944). En él se introduce el concepto de juego cooperativo y algunas propuestas de solución para este tipo de situaciones estratégicas. Un juego n -personal cooperativo, o juego coalicional, modeliza la situación en la que un conjunto de actores, llamados jugadores, buscan optimizar su beneficio a través de acuerdos vinculantes que les llevan a la formación de coaliciones. Para el análisis de estos juegos solo se dispone del valor de éstas y las estrategias individuales o el orden de las decisiones son ignorados. La información se reduce, por tanto, al resultado que obtendrá cada coalición en caso de formarse.

Si además se supone que el pago obtenido por una coalición es completamente divisible y transferible de unos jugadores a otros, tendremos un juego cooperativo de utilidad transferible o juego TU. Si por algún motivo no fuera posible esta transferencia, la forma coalicional pierde su capacidad para modelar la situación y en estos casos se habla de juegos cooperativos NTU.

2.1.1 Juegos en forma de función característica

A continuación se define un juego cooperativo n -personal en forma de función característica.

Definición 2.1.1. *Un juego cooperativo n -personal en forma de función característica, o juego TU, es un par (N, v) , donde $N = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto finito, cuyos elementos se denominan jugadores, y donde v , la función característica, es una función real con dominio en 2^N , la familia de todos los subconjuntos de N , que satisface $v(\emptyset) = 0$.*

Se llama *coalición* a cualquiera de los elementos de 2^N y $v(S)$ es el valor que obtiene la coalición S si sus miembros cooperan. Cuando no exista ambigüedad sobre N , identificaremos el juego (N, v) con su función característica v . G^N será la clase de los juegos TU con conjunto de jugadores N .

Si en (N, v) , para todo $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$, se dice que el juego es inessential y los jugadores no tienen ningún incentivo para cooperar. Además es inmediato que en los juegos inessential $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$. Los restantes juegos se denominan esenciales.

En G^N se pueden definir una suma interna y un producto por un escalar. Dados (N, v) y $(N, w) \in G^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la suma viene dada por,

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \text{ para todo } S \subseteq N,$$

y el producto externo por,

$$(\lambda v)(S) = \lambda v(S), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

El conjunto G^N , con estas dos operaciones, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, siendo la dimensión de este espacio $2^n - 1$. La base más relevante y útil de este espacio vectorial está formada por los juegos de unanimidad.

Definición 2.1.2. *Para todo S , $\emptyset \neq S \subseteq N$, el juego de unanimidad de S es el juego TU, (N, u_S) donde:*

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para representar un juego en términos de esta base es necesario determinar sus coordenadas en ella. Éstas se denominan dividendos de Harsanyi (Harsanyi, 1963).

Definición 2.1.3. Dado (N, v) , sus dividendos de Harsanyi, $\{\Delta_v(S)\}_{\emptyset \neq S \subseteq N}$, se obtienen a partir de:

$$\Delta_v(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T), \quad (2.1)$$

con $s = |S|$ y $t = |T|$ los cardinales de S y T respectivamente¹.

La expresión anterior permite obtener los dividendos de Harsanyi en términos de los valores de las coaliciones. Recíprocamente, podemos obtener los valores de las coaliciones a partir de los dividendos de Harsanyi:

$$v(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} \Delta_v(T), \text{ para todo } \emptyset \neq S \subseteq N. \quad (2.2)$$

Si dado $(N, v) \in G^N$ solo interesa el valor de las subcoaliciones de un conjunto de jugadores S de N , podemos definir el juego v restringido a S como se muestra a continuación.

Definición 2.1.4. Dada una coalición no vacía $S \subseteq N$ y un juego $(N, v) \in G^N$, se define el juego restringido a S , $(S, v|_S)$, como aquél cuya función característica satisface:

$$v|_S(T) = v(T), \text{ para todo } T \subseteq S.$$

Definición 2.1.5. Dado $(N, v) \in G^N$, se define el soporte de v como el conjunto $\delta(N, v) = \{S \subseteq N \mid \Delta_v(S) \neq 0\}$, i.e., el conjunto de coaliciones con dividendo no nulo en v . Notaremos por $d(N, v) = |\delta(N, v)|$.

Esta Memoria gira en torno al concepto de marginalismo. El marginalismo, en la Teoría de Juegos cooperativos, trata de la relación entre la variación del valor de las coaliciones cuando un nuevo jugador se incorpora a ellas y la recompensa que éste recibe. El cambio en la utilidad de una coalición al incorporarse un nuevo jugador se denomina contribución marginal del jugador a la coalición.

Definición 2.1.6. Dado $(N, v) \in G^N$, $i \in N$ y $S \subseteq N \setminus \{i\}$, la contribución marginal de i a S en v es $v(S \cup i) - v(S)$.

A partir de esta definición se tienen diferentes tipos de jugadores.

Definición 2.1.7. Dado $(N, v) \in G^N$:

i) $i \in N$ es un jugador nulo (Shapley, 1953)² si todas sus contribuciones marginales lo son, i.e.,

$$v(S \cup i) - v(S) = 0, \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

¹Según convenga se utilizará una u otra notación a lo largo de la Memoria.

²Aún cuando no lo cita como tal, el concepto de jugador nulo esta implícito en la definición de 'carrier'. Literalmente, 'The players outside any carrier have no direct influence on the play since they contribute nothing to any coalition'.

ii) $i \in N$ es un jugador pasivo si sus contribuciones marginales coinciden con $v(\{i\})$, i.e.,

$$v(S \cup i) - v(S) = v(\{i\}), \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Un jugador pasivo con $v(\{i\}) = 0$ es un jugador nulo.

iii) $i, j \in N$ son jugadores simétricos si sus contribuciones marginales a todas las coaliciones a las que ambos no pertenecen son iguales, i.e.,

$$v(S \cup i) - v(S) = v(S \cup j) - v(S), \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

iv) $i \in N$ es un jugador necesario (Gilles y van den Brink, 1996) si $v(S) = 0$, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

2.1.2 Clases de juegos en forma de función característica y conceptos de solución

Se pueden definir distintos tipos de juegos TU a partir de las propiedades de sus funciones características. Entre ellos se encuentran los siguientes.

Definición 2.1.8. $(N, v) \in G^N$ es un juego simétrico si para toda coalición $S \subseteq N$, $v(S)$ depende solo del cardinal s de S .

En un juego simétrico todas las coaliciones con el mismo número de jugadores tienen el mismo valor. Por tanto, todos los jugadores participan en el juego en igualdad de condiciones y son intercambiables. Notaremos \mathcal{S}^N el subespacio n -dimensional de G^N formado por los juegos simétricos. Una base de este subespacio es la dada por $\{\sum_{S:|S|=s} u_S\}_{s=1}^n$.

Si (N, v) es un juego simétrico, de (2.1) se tiene que el dividendo de una coalición sólo depende del tamaño de ésta.

Ejemplo 2.1.1. El juego $(N, v) \in G^N$, con $N = \{1, 2, 3\}$,

$$v(S) = \begin{cases} \binom{s}{2}, & \text{si } s \geq 2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es un juego simétrico conocido como juego de los mensajes. Sus dividendos en la base de unanimidad son:

$$\Delta_v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } s = 2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}.$$

Definición 2.1.9. $(N, v) \in G^N$ es un juego monótono si $v(S) \leq v(T)$, para todo $S \subseteq T \subseteq N$. Notaremos \mathcal{M}^N a la clase de juegos monótonos de G^N .

Observación 2.1.1. *El juego del Ejemplo 2.1.1 es trivialmente monótono. Sin embargo, no es difícil encontrar juegos simétricos que no cumplen esta propiedad. Sea $(N, v) \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \text{ impar,} \\ 2, & \text{si } s \text{ par.} \end{cases}$$

Se tiene que (N, v) es simétrico pero no es monótono.

Definición 2.1.10. $(N, v) \in G^N$ es un juego superaditivo si para todo par de coaliciones disjuntas S y T de N , se tiene que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Todo par de coaliciones disjuntas, para las que la desigualdad de la definición sea estricta, mejoran su utilidad al unirse. En este sentido se puede decir que los juegos superaditivos incentivan la cooperación.

Notaremos \mathcal{A}^N la clase de juegos superaditivos con conjunto de jugadores N . Es trivial comprobar que si un juego toma valores no negativos, la condición de superaditividad implica la de monotonía.

El juego del Ejemplo 2.1.1 es superaditivo, el de la Observación 2.1.1, que no es monótono, tampoco es superaditivo. Sin embargo, existen juegos que son monótonos y no superaditivos.

Ejemplo 2.1.2. Sea $(N, v) \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } s = 0, \\ 1, & \text{si } s = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Se tiene que (N, v) es monótono y sin embargo, $v(N) < v(\{1, 2\}) + v(\{3\})$ y, por tanto, no es superaditivo.

Definición 2.1.11. $(N, v) \in G^N$ es un juego convexo si para todo $S, T \subseteq N$, se tiene que $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$.

Notaremos \mathcal{C}^N la clase de los juegos convexos con conjunto de jugadores N . Todo juego convexo es superaditivo (para comprobarlo basta tomar $S \cap T = \emptyset$) mientras que el recíproco no es necesariamente cierto, como prueba el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.1.3. Sea $(N, v) \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } s = 0, 1, \\ 1, & \text{si } s = 2, 3. \end{cases}$$

(N, v) es superaditivo y no es convexo.

Definición 2.1.12. $(N, v) \in G^N$ es un juego casi-positivo (almost positive) si $\Delta_v(S) \geq 0$, para todo $\emptyset \neq S \subseteq N$.

Notaremos \mathcal{AP}^N la clase de los juegos casi-positivos con conjunto de jugadores N . Todo juego casi-positivo es convexo, siendo la demostración trivial a partir de (2.2). El recíproco, en general no es cierto, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.4. Sea $(N, v) \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } s = 0, 1, \\ 1, & \text{si } s = 2, \\ 2, & \text{si } s = 3. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que (N, v) es convexo. Sin embargo no es casi-positivo ya que, de (2.1), se tiene que $\Delta_v(N) = -1$.

Definición 2.1.13. Un juego $(N, v) \in G^N$ es cero-normalizado si para todo $i \in N$, $v(\{i\}) = 0$.

Dado un juego $(N, v) \in G^N$, se define su forma cero-normalizada como $(N, v_0) \in G^N$ ³, con $v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})$, para todo $S \subseteq N$.

Definición 2.1.14. Un juego $(N, v) \in G^N$ es $(0, 1)$ -normalizado si para todo $i \in N$, $v(\{i\}) = 0$ y $v(N) = 1$.

Definición 2.1.15. Dado $(N, v) \in G^N$ con $v(N) \neq \sum_{i \in N} v(\{i\})$, su $(0, 1)$ -normalización, $(N, v_{0,1})$, viene dada por:

$$v_{0,1}(S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})}, \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Se dice que dos juegos v y $w \in G^N$ son estratégicamente equivalentes si sus formas $(0, 1)$ -normalizadas coinciden.

Definición 2.1.16. $(N, v) \in G^N$ es un juego simple si para todo $S \subseteq N$, $v(S) = 0$ o $v(S) = 1$. Una coalición $S \subseteq N$ es ganadora si $v(S) = 1$. En caso contrario, es perdedora.

Un juego simple queda completamente determinado por su conjunto de coaliciones ganadoras. Todo juego simple es $(0, 1)$ -normalizado pero el recíproco, en general, no es cierto.

Notaremos la clase de los juegos TU con conjunto de jugadores N que sean simétricos, y cero-normalizados con \mathcal{S}_0^N . Paralelamente, \mathcal{M}_0^N , \mathcal{A}_0^N , \mathcal{C}_0^N y \mathcal{AP}_0^N

³Para evitar la acumulación de subíndices, cuando sea preciso se utilizará \hat{v} en lugar de v_0 para notar la forma cero-normalizada del juego v .

notarán las clases de los juegos cero-normalizados que además sean monótonos, superaditivos, convexos y casi-positivos, respectivamente.

Asumamos que para cualquier juego TU todos los repartos del valor de la coalición $v(N)$ son factibles. Una posible forma de seleccionar alguno o algunos de ellos es que los jugadores acuerden, de forma colegiada, ciertas restricciones que debe cumplir un reparto para que sea aceptado por todos ellos. Los repartos así obtenidos son las soluciones de conjunto del juego TU. Las soluciones de conjunto para juegos TU más notables son el núcleo (*core*) (Shapley, 1952; Gillies, 1953; 1959) y la formada por los conjuntos estables (von Neumann y Morgenstern, 1944). Cuando una solución de conjunto para un juego TU tiene la propiedad de que, independientemente del juego, siempre existe un único reparto que cumple todas las propiedades fijadas, entonces recibe el nombre de solución unipuntual (o singular) del juego TU, siendo, en este caso, la más notable el valor de Shapley (Shapley, 1953).

Definición 2.1.17. Dado $(N, v) \in G^N$, diremos que un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es una imputación si $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (eficiencia) y $x_i \geq v(\{i\})$ para todo $i \in N$ (racionalidad individual). $E(N, v)$ será el conjunto de las imputaciones del juego (N, v) .

Para un cierto conjunto de jugadores $S \subseteq N$ es posible que no todas las imputaciones sean igualmente preferidas. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E(N, v)$ y $x_i > y_i$ para todo $i \in S$, y además \mathbf{x} no reparte a S más de lo que se pueden garantizar obtener los jugadores de S , éstos preferirán la imputación \mathbf{x} a la imputación \mathbf{y} . Esta idea se plasma en el concepto de dominancia entre imputaciones.

Definición 2.1.18. Dadas $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E(N, v)$ y $S \subseteq N$, \mathbf{x} domina a \mathbf{y} sobre S ($\mathbf{x} \succ_S \mathbf{y}$) si $x_i > y_i$ para todo $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Así mismo se dice que \mathbf{x} domina a \mathbf{y} ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$) si existe $S \subseteq N$ tal que \mathbf{x} domina a \mathbf{y} sobre S .

Es sencillo encontrar ejemplos de juegos TU para los que existen imputaciones \mathbf{x} e \mathbf{y} tales que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

Definición 2.1.19. Una solución de conjunto en G^N es una función ψ tal que a cada $(N, v) \in G^N$ le hace corresponder $\psi(N, v) \subseteq E(N, v)$.

El núcleo es la solución de conjunto para juegos TU formada por las imputaciones que no están dominadas sobre ningún $S \subseteq N$.

Definición 2.1.20. Dado $(N, v) \in G^N$, su núcleo es la solución de conjunto $C(N, v)$ dada por:

$$C(N, v) = \{\mathbf{x} \in E(N, v) \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subseteq N\}.$$

El cálculo del núcleo de un juego conduce, en general, a resolver un sistema con $2^n - 2$ inecuaciones junto con una ecuación que recoge el principio de eficiencia. Este sistema no siempre tiene solución y por tanto el núcleo puede ser el conjunto vacío, lo cual limita su uso como concepto general de solución para juegos TU. Sin embargo, es cierto que hay importantes clases de juegos TU para los que el núcleo es siempre no vacío. Dentro de estas clases destaca el conjunto de juegos convexos (no es el caso de los juegos superaditivos). En la caracterización de los juegos con núcleo no vacío, Shapley (1967) introdujo el concepto de coaliciones equilibradas y de juego equilibrado.

Definición 2.1.21. Dado $(N, v) \in G^N$, una colección $\{S_1, \dots, S_m\}$ de subconjuntos de N , distintos del vacío se dice que es equilibrada sobre N si existen números reales positivos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (pesos) tales que para todo $i \in N$, $\sum_{j:i \in S_j} \alpha_j = 1$. Si para cualquier colección equilibrada sobre N , se verifica que $\sum_{j=1}^m \alpha_j v(S_j) \leq v(N)$, entonces se dice que el juego (N, v) es equilibrado.

Bondareva (1963) y Shapley (1967) demostraron que la clase de los juegos equilibrados coincide con la clase de juegos con núcleo no vacío.

La otra solución de conjunto citada para juegos TU es la de los conjuntos estables, también conocidos como solución de von Neumann y Morgenstern. Los conjuntos estables no son tan intuitivos como el núcleo pero se mantuvieron en la literatura ya que se conjeturó que al menos debía existir un conjunto estable para cualquier juego TU. Lucas (1968) encontró un juego de diez jugadores sin conjuntos estables, demostrando que la conjetura era falsa.

Definición 2.1.22. Dado $(N, v) \in G^N$, un conjunto estable para (N, v) es una solución $S(N, v)$ que verifica:

- i) Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S(N, v)$, $\mathbf{x} \not\succeq \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \not\succeq \mathbf{x}$
- ii) Para todo $\mathbf{z} \notin S(N, v)$ existe $\mathbf{x} \in S(N, v)$ tal que $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Se puede demostrar que el núcleo de un juego TU está contenido dentro de cualquier conjunto estable del juego y que, por tanto, está contenido en la intersección de todos ellos. Sin embargo, no es en general cierto que coincida con tal intersección (Lucas, 1969).

Al igual que ocurría con el núcleo, el principal problema para considerar los conjuntos estables como soluciones de juegos TU es que no se puede garantizar siempre su existencia. Por otro lado, muchos juegos TU tienen una gran cantidad de conjuntos estables lo que dificulta su determinación.

Entre las soluciones unipuntuales para juegos TU, sin duda la más relevante es el valor de Shapley (Shapley, 1953).

Definición 2.1.23. Una solución unipuntual o regla de asignación en G^N es una solución de conjunto ψ tal que $|\psi(N, v)| = 1$ para todo $(N, v) \in G^N$.

Definición 2.1.24. El valor de Shapley es la solución unipuntual Sh en G^N que para todo $(N, v) \in G^N$ y para todo $i \in N$ se obtiene como la siguiente suma ponderada de sus contribuciones marginales:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Shapley caracterizó su valor como la única regla de asignación, ψ , para juegos TU que satisface las siguientes propiedades:

i) *Aditividad:* Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$,

$$\psi(N, v + w) = \psi(N, v) + \psi(N, w).$$

ii) *Simetría:* Para toda permutación π del conjunto de jugadores N ,

$$\psi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \psi_i(N, v),$$

donde πv es el juego definido por $\pi v(\pi(S)) = v(S)$ para toda $S \subseteq N$.

iii) *Soporte (carrier):* Si $(N, v) \in G^N$ y $C \subseteq N$ es tal que $v(S) = v(S \cap C)$ para todo $S \subseteq N$, entonces

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v) = v(C).$$

Algunos años más tarde, Shubik (1962)⁴ propuso una nueva caracterización sustituyendo la propiedad del soporte por los axiomas de:

i) *Eficiencia:* Para todo $(N, v) \in G^N$,

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N, v) = v(N).$$

ii) *Jugador nulo:* Si $i \in N$ es un jugador nulo en (N, v) ,

$$\psi_i(N, v) = 0.$$

⁴Es frecuente encontrar referencias en la literatura en las que la caracterización de Shubik se identifica erróneamente con la original de Shapley.

En virtud de la linealidad del valor de Shapley, el valor de cualquier jugador en un juego dado puede determinarse a partir de sus correspondientes valores en los juegos de la base de unanimidad y de los dividendos de Harsanyi. Se comprueba sin dificultad que para todo $i \in N$:

$$Sh_i(N, u_S) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & i \in S, \\ 0, & i \notin S, \end{cases} \quad \text{y, por tanto, } Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \frac{\Delta_v(S)}{s}.$$

El innegable interés que ha suscitado el valor de Shapley como solución unipuntual para juegos TU ha hecho que haya sido ampliamente estudiado. En particular, muchos han sido los intentos encaminados a obtener caracterizaciones alternativas del valor de Shapley.

Myerson (1980) propone ⁵ dos propiedades deseables que debe cumplir una solución singular para juegos TU: ser eficiente y verificar contribuciones equilibradas (*balanced contributions*). Esta última propiedad establece que la pérdida que supone para un individuo el que otro jugador abandone el juego, debe ser la misma que la que sufriría éste último si es el primero el que lo abandona. Myerson probó que el valor de Shapley es la única solución puntual eficiente que satisface contribuciones equilibradas.

Para Young (1985) las recompensas que obtiene un jugador en diferentes juegos deben ser consistentes con la relación entre sus contribuciones marginales en dichos juegos. Esta relación se formaliza en torno al concepto de monotonía fuerte. La monotonía fuerte exige que si al cambiar de juego, las contribuciones marginales de un jugador no decrecen, entonces el pago que éste debe recibir tampoco puede decrecer. Utilizando los axiomas de eficiencia y simetría junto con este nuevo axioma de monotonía fuerte, Young caracteriza el valor de Shapley evitando utilizar los axiomas de aditividad y del jugador nulo. Así mismo, demuestra que esta caracterización es válida en la amplia clase de los juegos superaditivos. El axioma de monotonía fuerte se puede relajar sustituyéndolo por el axioma de independencia, renombrado por Chun (1989) como axioma de marginalismo (*marginality*).

Formalmente, una solución singular, ψ , para un juego TU verifica el axioma de monotonía fuerte si dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ tales que para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$, entonces $\psi_i(N, v) \geq \psi_i(N, w)$. Una solución singular, ψ , para un juego TU verifica el axioma de marginalismo si dados $(N, v), (N, w) \in G^N$, tales que $v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S)$, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $\psi_i(N, v) = \psi_i(N, w)$.

⁵Myerson define estos conceptos en el contexto de las estructuras de conferencia, antecesoras de las situaciones de comunicación que se tratan en la presente Memoria.

El problema central de esta Memoria es la adaptación del concepto de marginalismo para caracterizar el valor de Myerson y el valor posicional, teniendo en cuenta que ninguna de estas dos reglas de reparto verifica este axioma.

Chun (1989) caracteriza el valor de Shapley a través de las propiedades de eficiencia, jugador nulo, equivalencia estratégica de coaliciones y ranking justo. La equivalencia estratégica de coaliciones establece que el pago que recibe un jugador no cambia al modificar el dividendo de una coalición a la que no pertenece. La propiedad del ranking justo dice que si dos juegos (N, v) y (N, w) sólo se diferencian en el valor que asignan a una cierta coalición T entonces para cualquier par de jugadores i, j en T , $\psi_i(N, v) > \psi_j(N, v)$ si y sólo si $\psi_i(N, w) > \psi_j(N, w)$.

Hart y Mas-Colell (1989), proponen asociar un único número real (llamado potencial del juego) a cada juego TU y que cada jugador reciba su contribución marginal calculada de acuerdo con estos números. Con esta idea introducen la función potencial como una función P definida en $\bigcup_{n=1}^{\infty} G^N$ en \mathbb{R} y verificando que para cada juego (N, v) las contribuciones marginales de todos los jugadores, $\{P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v)\}_{i \in N}$, verifican que $\sum_{i \in N} [P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v)] = v(N)$ (eficiencia y factibilidad). A partir de aquí demuestran que solo existe un procedimiento para construir la función potencial de un juego TU y que las contribuciones marginales de los jugadores en la función potencial coinciden con el valor de Shapley. Esto les permite presentar dos nuevas caracterizaciones utilizando el principio de preservación de las diferencias, una generalización directa de la idea de dividir el excedente en partes iguales, y la propiedad de la consistencia que establece que eliminar a algunos de los jugadores, después de pagarles de acuerdo con la solución, no cambia el resultado para ninguno de los restantes.

Hamiache (2001), se cuestiona dos de los axiomas de Shapley. El de aditividad, por la dificultad de justificar que la solución de la suma de juegos de naturaleza distinta sea la suma de sus soluciones particulares, y el de eficiencia, ya que considera en exceso optimista que todo el valor de la gran coalición se reparta necesariamente entre los jugadores, como se constata en numerosos resultados experimentales. En consecuencia, propone una axiomática a partir de lo que define como juegos asociados a un juego TU. Dado $(N, v) \in G^N$ sus juegos asociados son (N, v_λ^*) , $\lambda \in [0, 1]$ donde $v_\lambda^*(S) = v(S) + \lambda \sum_{j \in N \setminus S} (v(S \cup \{j\}) - v(S) - v(\{j\}))$. El parámetro λ es la proporción de la contribución neta de un jugador a S que los integrantes de S se reservan por integrarle en S . Se supone igual para toda $S \subseteq N$ y para todo $j \notin S$. Los axiomas propuestos por Hamiache, son tres:

- i) Axioma de inesencialidad. Para todo juego $(N, v) \in G^N$ que sea inesencial $\psi_i(N, v) = v(\{i\})$.*

- ii) *Axioma de consistencia con los juegos asociados.* Para todo $(N, v) \in G^N$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, $\psi(N, v) = \psi(N, v_\lambda^*)$.
- iii) *Axioma de continuidad.* Para toda sucesión de juegos $\{(N, v_k)\}_{k=1}^\infty$, que converja a (N, \bar{v}) , se tiene que el $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(N, v_k) = \psi(N, \bar{v})$.

Hamiache demuestra que el valor de Shapley es la única solución unipuntual para juegos TU que verifica los axiomas de inessentialidad y de continuidad y el de consistencia para el juegos asociados con $\lambda \in (0, \frac{2}{n})$.

Van den Brink (2001) proporciona una caracterización del valor de Shapley para juegos TU a través de los axiomas de eficiencia, jugador nulo y equidad. El axioma de equidad establece que si a un juego TU se le suma un segundo juego TU en el que dos jugadores son simétricos, entonces sus pagos cambian en la misma cantidad, i.e., si i, j son jugadores simétricos en $(N, v) \in G^N$, entonces $\psi_i(N, v + w) - \psi_i(N, w) = \psi_j(N, v + w) - \psi_j(N, w)$, para todo $(N, w) \in G^N$. Además prueba que esta caracterización es válida en el conjunto de los juegos simples⁶.

Kongo, Funaki y Tijs (2007), caracterizan el valor de Shapley utilizando los axiomas de eficiencia, jugador nulo y contribuciones equilibradas en ciclo. Este último axioma requiere que, para cualquier orden de todos los jugadores, la suma de las reclamaciones de cada jugador contra su predecesor se equilibre con la suma de las reclamaciones de cada jugador contra su sucesor, i.e., si $(N, v) \in G^N$ para cualquier orden $(i_1 \dots i_n)$ de N , $\sum_{k=1}^n \psi_{i_k}(N \setminus \{i_{k-1}\}, v) = \sum_{k=1}^n \psi_{i_k}(N \setminus \{i_{k+1}\}, v)$, donde $i_0 = i_n$, $i_{n+1} = i_1$ (se considera predecesor de i_1 a i_n y sucesor de i_n a i_1). Esta propiedad es menos restrictiva que la propiedad de las contribuciones equilibradas de Myerson ya que es satisfecha por otros valores como, por ejemplo, la solución igualitaria⁷.

Casajus (2011; 2014) revisa la caracterización del valor de Shapley dada por van den Brink. En particular, demuestra que esta caracterización también es válida dentro de ciertas clases de juegos TU, que incluyen las clases de juegos superaditivos y convexos. Propone una versión diferencial del axioma de independencia de Young y demuestra que es equivalente al axioma de equidad de van den Brink sobre grandes clases de juegos (la clase de los juegos simples y la de los juegos convexos). Así mismo proporciona una nueva caracterización del valor de Shapley en la que no se utilizan los axiomas de eficiencia y aditividad. En esta caracterización, la eficiencia es reemplazada por el axioma de ganancia-pérdida

⁶La axiomatización de Shapley para su valor no lo caracteriza en importantes subclases de juegos, como por ejemplo en la subclase de los juegos simples, Dubey (1975).

⁷La solución igualitaria asigna a cada $i \in N$, en el juego (N, v) , la cantidad $\frac{v(N)}{n}$.

y la aditividad y la simetría se sustituyen por el axioma de equidad o, alternativamente, por el de marginalismo diferencial. El tercer axioma en esta caracterización es el del jugador pasivo. El axioma de ganancia-perdida, establece que para todo par $(N, v), (N, w) \in G^N$ y para todo $i \in N$ tales que $v(N) = w(N)$ y $\psi_i(N, v) > \psi_i(N, w)$, hay un $j \in N$ tal que $\psi_j(N, v) < \psi_j(N, w)$. Es decir, cuando el valor total generado no cambia, un jugador sólo puede ganar a expensas de las ganancias de otro jugador. El axioma de marginalismo diferencial afirma que para todo par $(N, v), (N, w) \in G^N$ y para todo $i, j \in N$ tales que $v(S \cup \{i\}) - v(S \cup \{j\}) = w(S \cup \{i\}) - w(S \cup \{j\})$ para todo $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ entonces $\psi_i(N, v) - \psi_j(N, v) = \psi_i(N, w) - \psi_j(N, w)$, es decir, la diferencia entre las recompensas que reciben dos jugadores sólo depende de las diferencias entre sus contribuciones marginales.

Manuel, González-Arangüena y van den Brink (2013) obtienen dos nuevas caracterizaciones del valor de Shapley utilizando el concepto de indiferencia mutua entre jugadores. Dos jugadores i y j son indiferentes entre sí (a la cooperación) en el juego (N, v) si existe una partición de N en S y $N \setminus S$ tal que $i \in S, j \in N \setminus S$ y para todo $T \subseteq N$ se verifica que $v(T) = v(T \cap S) + v(T \cap (N \setminus S))$. Con esta definición proponen dos axiomas, el axioma de los jugadores enemistados que establece que los pagos de dos jugadores no indiferentes entre sí se verán afectados de la misma manera si se enemistan, es decir, si se anulan los dividendos de todas las coaliciones en las que ambos están presentes. El segundo es el axioma de las contribuciones nulas para jugadores indiferentes y establece que la recompensa de un jugador no se ve afectada si los jugadores con los que es indiferente abandonan el juego. A partir de aquí demuestran que el valor de Shapley es la única solución puntual para juegos TU que satisface eficiencia y los dos axiomas anteriores. También caracterizan el valor de Shapley a partir del axioma de jugadores enemistados y eficiencia en clases de jugadores no indiferentes.

Más recientemente, Clippel (2018) proporciona una nueva caracterización del valor de Shapley con los axiomas de simetría, eficiencia y el axioma de contabilidad simple. Una solución puntual, ψ , verifica el axioma de la contabilidad simple si para todo $(N, v) \in G^N$ y para todo $i \in N$, existen dos funciones r_i, t_i reales, la primera definida en $\mathbb{R}^{2^{n-1}-1}$ y la segunda definida en $\mathbb{R}^{2^{n-1}}$ ⁸, de forma que, $\psi_i(N, v) = r_i(v(S)_{S:i \in S}) - t_i(v(S)_{S:i \notin S})$. Este axioma afirma que la solución puntual puede descomponerse en la diferencia entre una recompensa, calculada en función de las coaliciones a las que el jugador pertenece, y una tasa, calculada en función de las coaliciones a las que el jugador no pertenece. De ahí su nombre de axioma de contabilidad simple.

⁸Cardinales de los conjuntos de todas las coaliciones a las que i pertenece e i no pertenece, respectivamente.

Existen otros conceptos de solución puntual para juegos TU, en los que no entramos en detalle al no ser objeto de esta Memoria, como el valor de Banzhaf (Banzhaf, 1965)⁹, planteado inicialmente como un índice de poder para juegos simples y que se calcula, al igual que el valor de Shapley, como una suma ponderada de las contribuciones marginales. También el valor coalicional de Owen (Owen, 1977), definido para juegos con sistemas de uniones a priori, y que coincide con el valor de Shapley si la estructura previa de coaliciones está formada únicamente por N o, alternativamente, por todas las coaliciones individuales. También destacan la solución igualitaria, que ya se ha citado en esta Memoria, el valor solidario, axiomatizado por Nowak y Radzik (1994) -variante del valor de Shapley en el que se remplazan las contribuciones marginales por el promedio de las contribuciones marginales de todos los jugadores a la coalición-, o los valores procedurales de Malawski (2012). Estos valores se determinan por un procedimiento subyacente que fija cómo compartir las contribuciones marginales a las coaliciones, cuando éstas se forman en orden aleatorio. Casos particulares de dichos valores son el valor de Shapley, la solución igualitaria y el valor solidario. Flores, Molina y Tejada (2014) proponen un procedimiento general para obtener una amplia clase de soluciones basadas en una distribución piramidal de los beneficios obtenidos si los jugadores acceden al juego de forma secuencial y aleatoria. En este contexto, el valor de Shapley es el promedio de todas las permutaciones de una distribución piramidal muy extrema de los beneficios, en la que el jugador que se incorpora recibe todos los beneficios generados.

Por último, en Castro, Gómez y Tejada (2009), los autores desarrollan un método polinómico, basado en la teoría de muestreo, que permite estimar el valor de Shapley. Una extensa descripción de las aplicaciones del valor de Shapley se puede encontrar en Moretti y Patrone (2008).

2.2 Algunas cuestiones sobre grafos

En los juegos TU superaditivos y sin restricciones en la comunicación es esperable que se acabe formando la gran coalición. Ahora bien, cuando se trata de modelar problemas reales, estas dos suposiciones no se verifican siempre. Se pueden encontrar numerosas situaciones estratégicas que, o bien no son superaditivas, o en las que la comunicación entre todos los jugadores no es factible. Por ejemplo, la distancia (ideológica) entre un partido político de extrema derecha y otro de extrema izquierda normalmente hace imposible que se comuniquen para tratar de formar un gobierno de coalición, aunque éste fuese factible. En resumen, es frecuente observar que solo aquellos jugadores que se encuentran próximos, en algún

⁹Para más información sobre el valor de Banzhaf se pueden consultar Gillies (1953), Lehrer (1988) y Feltkamp (1995).

sentido, acaban formando coaliciones y que éstas no son siempre la gran coalición.

Para modelar estas situaciones estratégicas en las que existen restricciones en la comunicación, Myerson (1977) extendió los juegos TU a las situaciones de comunicación. En una situación de comunicación los jugadores tienen intereses dados por un juego TU que se juega en una red social o grafo que representa las comunicaciones posibles entre ellos. En este epígrafe se presentan algunas definiciones relativas a grafos no dirigidos que son necesarias para la formalización de las situaciones de comunicación de Myerson.

Definición 2.2.1. Dado $N = \{1, \dots, n\}$, diremos que $(N, \gamma)^{10}$ es un grafo no dirigido si $\gamma \subseteq \gamma_N = \{\{i, j\} \mid i, j \in N, i \neq j\}$. Cada $i \in N$ es un nodo y cada $\{i, j\} \in \gamma$ es un arco (alternativamente arista). Si $\{i, j\} \in \gamma$ diremos que los nodos i y j están directamente conectados en γ .

Llamaremos grafo completo con n nodos a (N, γ_N) y Γ^N al conjunto de todos los grafos (N, γ) con conjunto de nodos N . Notaremos por γ_i al conjunto de arcos incidentes en un nodo dado i , i.e., $\gamma_i = \{l \in \gamma \mid i \in l\}$.

Si los nodos i y j no están directamente conectados, en ocasiones podrán conectarse a través de otros que actuarán entonces como intermediarios. Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 2.2.2. Dado $\gamma \in \Gamma^N$, diremos que $i, j \in N$ son conectables en γ si $i = j$, o, si $i \neq j$ y existe un camino en el grafo que conecta i con j , es decir, si existe una sucesión de nodos i_1, \dots, i_t tal que, $i_1 = i$, $i_t = j$ e $\{i_k, i_{k+1}\} \in \gamma$ para todo $k \in \{1, \dots, t-1\}$.

La noción de conexión establece una relación de equivalencia entre los nodos de un grafo. A las clases definidas por esta relación las llamaremos componentes conexas del grafo. El conjunto cociente será notado N/γ . Si N/γ se reduce a una única clase diremos que (N, γ) es conexo. Dado un grafo (N, γ) , para cada $i \in N$, $C_i^{N, \gamma}$ será la clase de equivalencia a la que pertenece el nodo i . Por tanto:

$$C_i^{N, \gamma} = \{j \in N \mid j = i \text{ ó } j \text{ es conectable en } \gamma \text{ con } i\}.$$

Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$, diremos que i es un nodo aislado en γ . Notaremos por $N(\gamma)$ al conjunto de todos los nodos no aislados de γ .

Dados (N, γ) y $S \subseteq N$, $(S, \gamma_{|S})$ es el subgrafo formado por los nodos de S y los arcos existentes entre ellos y, por tanto, $\gamma_{|S} = \{\{i, j\} \in \gamma \mid i, j \in S\}$. Así mismo, si $i \notin S$, notaremos por $\gamma_{i, S}$ al conjunto de arcos que conectan directamente a i

¹⁰Siempre que no exista ambigüedad sobre el conjunto de nodos utilizaremos γ en lugar de (N, γ) .

con algún miembro de S , i.e., $\gamma_{i,S} = \{\{i, j\} \mid j \in S\}$.

El subgrafo $(S, \gamma|_S)$ induce una partición de S en componentes conexas, que será notada S/γ . Si $|S/\gamma| = 1$ diremos que S es un conjunto conexo en (N, γ) .

Definición 2.2.3. Sea (N, γ) y $S \subseteq N$. Un subgrafo $\eta \subseteq \gamma$ es un grafo de conexión de S en γ si S está conectado en (N, η) . Un grafo η de conexión de S en γ se dice minimal, si no existe otro grafo de conexión de S en γ estrictamente contenido en él, i.e., si para todo η' grafo de conexión de S en γ , $\eta' \not\subseteq \eta$.

$\mathcal{MCG}(S, N, \gamma)$ será la familia de todos los grafos minimales de conexión de S en (N, γ) .

Definición 2.2.4. Sea (N, γ) y $S \subseteq N$. $T \subseteq N$ es un conjunto de conexión de S en γ si S está conectado en $(T, \gamma|_T)$. Un conjunto de conexión T de S en γ se dice minimal, si no existe otro conjunto de conexión de S en γ estrictamente contenido en él, i.e., si para todo T' conjunto de conexión de S en γ , $T' \not\subseteq T$.

Notaremos $\mathcal{MCS}(S, N, \gamma)$ a la familia de todos los conjuntos minimales de conexión de S en (N, γ) .

Definición 2.2.5. (N, γ) es un árbol si es conexo y no contiene ciclos, donde un ciclo en (N, γ) es un camino de la forma: $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ con $i_t = i_1$.

Un grafo no conexo cuyas componentes conexas son árboles es un bosque.

Definición 2.2.6. (N, γ) es una estrella con centro en el nodo i si $\gamma = \{\{i, j\}, j \in N, j \neq i\}$. Los nodos $j \in N, j \neq i$ reciben el nombre de satélites.

Definición 2.2.7. (N, γ) es una cadena si, salvo reetiquetaciones de los nodos, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$.

Definición 2.2.8. (N, γ) es ciclo-completo si se satisface que para todo ciclo en (N, γ) , el subgrafo correspondiente al ciclo es un grafo completo. Los bosques y los grafos completos son ciclo-completos.

2.3 Situaciones de comunicación

Las situaciones de comunicación son la extensión de los juegos TU propuesta por Myerson (1977) para modelar los juegos con restricciones en la comunicación. Este tipo de situaciones ya había sido estudiado anteriormente por Aumann y Dreze (1974) utilizando los juegos con estructuras de coalición. Una estructura de coalición para un juego TU es una partición del conjunto N de jugadores de la forma $\mathbb{B} = \{B_1 \dots B_r\}$ ¹¹. Dos propiedades fundamentales, que afectan al desarrollo del juego, caracterizan a las estructuras de coalición. En primer lugar, los

¹¹Las estructuras de coalición ya habían sido utilizadas previamente, por ejemplo, en los conjuntos de regateo de Davis y Maschler (1963).

jugadores sólo pueden cooperar dentro de cada una de las coaliciones definidas en la partición, siendo imposible la comunicación entre jugadores que pertenezcan a diferentes elementos de la misma. En segundo lugar, no se pueden compartir beneficios entre jugadores que se encuentren en elementos distintos de la partición. Variantes sobre el modelo de Aumann y Dreze se encuentran en Owen (1977) y Hart y Kurz (1983)¹². Una revisión de estos y otros trabajos en esta línea puede verse en Greenberg (1994).

Myerson propone un enfoque diferente. Supone que los jugadores sólo cooperan a través de acuerdos bilaterales, los cuales pueden considerarse enlaces entre ellos. Así, cualquier estructura de cooperación puede representarse como un grafo. Entonces, el conjunto de todas las posibles estructuras de cooperación coincide con el conjunto de todos los grafos no orientados con número de nodos igual al número de jugadores. Myerson considera factibles sólo aquellas coaliciones que son conexas en el grafo de relaciones bilaterales. Dado un grafo de cooperación (N, γ) , la estructura de coaliciones asociada a él será la partición de N en componentes conexas, N/γ . Estas componentes conexas hacen la labor de los elementos de la partición en el modelo de Aumann y Dreze, que puede considerarse un caso particular del modelo de Myerson, el que se obtendría tomando el grafo resultante de la unión de todos los grafos completos (B_k, γ_{B_k}) . Además, dos grafos de conexión diferentes pueden dar lugar a una misma estructura de cooperación siempre que sus componentes conexas coincidan. En este sentido, el modelo de Myerson es más general que el de Aumann y Dreze, permitiendo considerar situaciones en las que el grafo restringido a cada una de las componentes no es completo.

A continuación se presenta la formalización de las situaciones de comunicación de Myerson y algunos otros conceptos importantes relacionados con ellas.

Definición 2.3.1. *Una situación de comunicación es una terna (N, v, γ) , donde (N, v) es un juego TU y (N, γ) un grafo no orientado.*

Notaremos \mathcal{CS}^N al conjunto de todas las situaciones de comunicación con conjunto de jugadores N y \mathcal{CS}_0^N a la subclase de la anterior en la que el juego v es cero-normalizado.

La siguiente definición (Myerson, 1977), asocia a cada situación de comunicación un nuevo juego TU llamado juego restringido al grafo. En este juego, el valor de cada coalición está condicionado por las restricciones en la comunicación que impone el grafo y se calcula como la suma de los pagos que pueden obtener sus subcoaliciones conexas maximales.

¹²Fundamentalmente en la línea de evitar condiciones de eficiencia sobre los elementos de la partición, i.e. permitir la compartición de beneficios entre ellas.

Definición 2.3.2. Dada (N, v, γ) , se define el juego restringido al grafo como $(N, v^\gamma) \in G^N$ donde:

$$v^\gamma(S) = \sum_{S_k \in S/\gamma} v(S_k), \text{ para todo } S \subseteq N. \quad (2.3)$$

De la definición anterior se tiene que si una coalición S es conexa en el grafo (N, γ) , es decir, si cada uno de sus miembros puede comunicarse con el resto utilizando exclusivamente intermediarios de S , entonces podrán coordinarse para obtener la cantidad $v(S)$. Sin embargo, si S no es conexa aparece ineficiencia en las comunicaciones que afecta a la propia eficiencia del juego. S se dividirá en sus componentes conexas y sus jugadores deberán limitarse a coordinar sus acciones dentro de cada una de estas componentes. La cantidad que podrán obtener entonces será la suma de los valores de cada una de ellas. Si el grafo es completo, (N, γ_N) , todas las coaliciones son conexas y v^γ coincide con v , lo cual es consistente con la ausencia de restricciones en la comunicación.

En cuanto a la relación entre los dividendos de Harsanyi del juego v y los del juego restringido al grafo v^γ , el problema no es trivial. Owen (1986) obtuvo una expresión aplicable a las situaciones en las que el grafo no tiene ciclos que fue generalizada por Van den Nouweland (1993) para grafos ciclo completos. Hamiache (1999) obtuvo la relación entre ambos conjuntos de dividendos en el caso general a través de la siguiente expresión:

$$\Delta_{v^\gamma}(S) = \begin{cases} \sum_{T \subseteq S \subseteq T^*} (-1)^{s-t} v(T), & \text{si } |S/\gamma| = 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $T^* = T \cup \{i \in N \mid \text{existe } j \in T \text{ con } \{i, j\} \in \gamma\}$.

Dada la relevancia de los juegos de unanimidad, es interesante conocer cuál es su transformación al pasar al juego restringido al grafo. Gómez et al. (2003), demostraron que dada $(N, u_S, \gamma) \in CS^N$ con $s \geq 1$ y $\mathcal{MCS}(S, N, \gamma) = \{T_k^S\}_{k=1}^{r(S)}$, se tiene que:

$$u_S^\gamma = \begin{cases} 1 - \prod_{k=1}^{r(S)} [1 - u_{T_k^S}], & \text{si } \mathcal{MCS}(S, N, \gamma) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } \mathcal{MCS}(S, N, \gamma) = \emptyset. \end{cases}$$

Otra cuestión de interés, relativa a la relación entre una situación de comunicación y el juego restringido al grafo, es determinar qué condiciones debe verificar

γ para que v^γ herede propiedades de v . A continuación se muestran algunos resultados sobre la herencia de la superaditividad y la convexidad que serán útiles más adelante en esta Memoria.

Proposición 2.3.1. (*Owen, 1986*). Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, si $(N, v) \in \mathcal{A}^N$, entonces $(N, v^\gamma) \in \mathcal{A}^N$.

La superaditividad se conserva sin imponer condiciones al grafo de comunicación. Sin embargo la convexidad solo se mantiene cuando el grafo es ciclo-completo como demuestran Van den Nouweland y Borm (1991).

Proposición 2.3.2. (*Van den Nouweland y Borm, 1991*). Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, si (N, γ) es un grafo ciclo-completo y $(N, v) \in \mathcal{C}^N$, entonces $(N, v^\gamma) \in \mathcal{C}^N$.

Proposición 2.3.3. (*Van den Nouweland y Borm, 1991*). Si (N, γ) es un grafo no ciclo-completo, existe un juego $(N, v) \in \mathcal{C}^N$ para el cual (N, v^γ) no es convexo.

Dada una situación de comunicación (N, v, γ) , Gómez et al. (2003) y González-Arangüena et al. (2017), consideraron $2n$ situaciones de comunicación relacionadas, (N, v_i, γ) y (N, v_{-i}, γ) , $i \in N$ con:

$$v_i = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \Delta_v(S) u_S,$$

$$v_{-i} = \sum_{S \subseteq N: i \notin S} \Delta_v(S) u_S,$$

de donde $v = v_i + v_{-i}$.

En términos de la función característica v , para cada $i \in N$ y para cada $S \subseteq N$, se tiene que (González-Arangüena et al., 2017):

$$v_i(S) = \begin{cases} v(S) - v(S \setminus \{i\}), & \text{si } i \in S, \\ 0, & \text{si } i \notin S, \end{cases}$$

$$v_{-i}(S) = \begin{cases} v(S \setminus \{i\}), & \text{si } i \in S, \\ v(S), & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Los juegos restringidos al grafo por estas situaciones de comunicación tienen, respectivamente, como función característica, para cada $i \in N$ y $S \subseteq N$:

$$(v_i)^\gamma(S) = \begin{cases} \sum_{C \in S/\gamma} v_i(C) = v(C_i^{S,\gamma}) - v(C_i^{S,\gamma} \setminus \{i\}), & \text{si } i \in S, \\ 0, & \text{si } i \notin S, \end{cases}$$

$$(v_{-i})^\gamma(S) = \begin{cases} \sum_{C \in S/\gamma} v_{-i}(C) = v(C_i^{S,\gamma} \setminus \{i\}) + \sum_{C \in S/\gamma: i \notin C} v(C), & \text{si } i \in S, \\ v^\gamma(S) = \sum_{C \in S/\gamma} v(C), & \text{si } i \notin S, \end{cases}$$

con $C_i^{S,\gamma}$ la componente conexa de S en γ a la que i pertenece. Por tanto, $(v_{-i})^\gamma$ asocia a cada coalición $S \subseteq N$ que contiene a i , el valor de la contribución marginal de i en la componente conexa de S a la que i pertenece (y cero si i no está en la coalición), mientras que $(v_{-i})^\gamma$ asigna la diferencia entre esa cantidad y $v^\gamma(S)$.

En su tesis doctoral (en holandés), Meessen (1988) propone una alternativa al juego restringido al grafo de Myerson, el juego de los arcos. Este trabajo fue posteriormente difundido por Borm et al. (1992). El juego de los arcos es un nuevo juego TU en el que los jugadores son las aristas del grafo que restringe la comunicación, las coaliciones los distintos subgrafos de éste y el valor de las coaliciones se calcula a partir del valor, en el juego v , de las componentes conexas que los arcos del subgrafo generan.

Definición 2.3.3. *Dada (N, v, γ) con $(N, v) \in G_0^N$, se define el juego de los arcos como el juego TU, $(\gamma, r_\gamma^v) \in G^\gamma$, donde:*

$$r_\gamma^v(\eta) = v^\eta(N) = \sum_{C \in N/\eta} v(C), \quad \text{para todo } \eta \subseteq \gamma.$$

La restricción de que $(N, v) \in G_0^N$ es necesaria para que r_γ^v sea realmente una función característica. En otro caso $r_\gamma^v(\emptyset)$ podría tomar un valor no nulo¹³.

De manera semejante a como ocurría en el caso del juego restringido al grafo, la definición de r_γ^v refleja que si una coalición sólo dispone de las aristas de η para comunicarse, se dividirá en sus componentes conexas, de forma que el valor alcanzable será la suma de los valores de éstas.

La relación entre los dividendos de Harsanyi de v y r_γ^v fue estudiada por Borm et al. (1992) para el caso de grafos de comunicación sin ciclos.

Proposición 2.3.4. *(Borm et al., 1992). Dada la situación de comunicación (N, v, γ) con $(N, v) \in G_0^N$, $(N, \gamma) \in \Gamma^N$ grafo sin ciclos, se tiene que:*

$$\Delta_{r_\gamma^v}(\eta) = \sum_{S \in \Sigma(\eta)} \Delta_v(S), \text{ para todo } \eta \in 2^\gamma \setminus \{\emptyset\},$$

¹³Si se estimase conveniente, siempre sería posible considerar un juego no cero-normalizado, recurriendo a definir $r_\gamma^{v+}(\eta) = \sum_{C \in N/\eta} v(C) - \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

donde $\Sigma(\eta) = \{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \mid H(N, S, \gamma) \neq \emptyset, \eta = \gamma|_{H(N, S, \gamma)}\}$ y $H(N, \gamma, S)$ es la envoltura conexas de S . La envoltura conexas de S es el menor conexo (con el orden dado por la inclusión de conjuntos) que contiene a S y, por tanto, $H(N, \gamma, S) = \cap \{T \mid S \subseteq T \text{ y } T \text{ conexo en } (N, \gamma)\}$. En caso de que S no sea conectable su envoltura conexas es vacía.

Gómez et al. (2004) generalizan el resultado anterior al caso de grafos de comunicación cualesquiera. Por último, Dietzenbacher, Borm y Hendrickx (2015) obtienen, en el marco de las situaciones de comunicación con estructuras de control, un resultado equivalente al anterior¹⁴.

En cuanto a la transformación de los juegos de unanimidad al pasar al juego de los arcos, Gómez et al. (2004) demostraron que dada $(N, u_S, \gamma) \in CS_0^N$ con $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\eta_k^S\}_{k=1}^{r(S)}$, se tiene que:

$$r_\gamma^{u_S} = \begin{cases} 1 - \prod_{k=1}^{r(S)} [1 - u_{\eta_k^S}], & \text{si } \mathcal{MCG}(S, N, \gamma) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } \mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \emptyset. \end{cases}$$

Por lo que respecta a la herencia de propiedades entre v y r_γ^v tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.5. (Van den Nouweland y Borm, 1991). Dada la situación de comunicación (N, v, γ) con $(N, v) \in \mathcal{C}_0^N$ y $(N, \gamma) \in \Gamma^N$ grafo ciclo completo, entonces $(\gamma, r_\gamma^v) \in \mathcal{C}^\gamma$.

Sin embargo, incluso cuando el grafo que restringe la comunicación no tiene ciclos, no se puede garantizar que r_γ^v herede la superaditividad de v , como se puede ver en el siguiente contraejemplo de Van den Nouweland y Borm (1991).

Ejemplo 2.3.1. (Van den Nouweland y Borm, 1991). Sea (N, v, γ) con $N = \{1, 2, 3\}$, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, sin ciclos y

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq 1, \\ s, & \text{si } s \geq 2, \end{cases}$$

Se tiene que v es trivialmente superaditivo y sin embargo:

$$r_\gamma^v(\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}) = 3 < 4 = r_\gamma^v(\{\{1, 2\}\}) + r_\gamma^v(\{\{2, 3\}\}).$$

¹⁴Las situaciones de comunicación con estructuras de control son situaciones de comunicación a las que se añade una estructura de control que determina cómo los nodos y los arcos del grafo controlan la comunicación. Si se supone que la comunicación es solo controlada por los nodos se obtiene el juego restringido al grafo. Si se supone que lo es solo por los arcos se obtiene el juego de los arcos.

2.3.1 Reglas de reparto para situaciones de comunicación

En la sección anterior se han presentado los juegos que se utilizan en esta Memoria para estudiar las situaciones de comunicación, el juego restringido al grafo de Myerson y el juego de los arcos de Meessen. Este epígrafe contiene una introducción a los valores de Myerson y posicional y una descomposición aditiva del primero de ellos en dos valores, el valor WG de Myerson y el valor BW de Myerson. Todas ellas son soluciones unipuntuales, o reglas de reparto, para situaciones de comunicación, obtenidas a partir de uno de los dos juegos.

Definición 2.3.4. *Una regla de reparto para situaciones de comunicación es una función $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\psi_i(N, v, \gamma)$ es el pago que el jugador i obtiene en la situación de comunicación (N, v, γ) .*

Tanto el valor de Myerson como el valor posicional se calculan a partir del valor de Shapley. El primero asigna a cada jugador su valor de Shapley en el juego restringido al grafo y el segundo un medio de la suma de los valores de Shapley, en el juego de los arcos, de los arcos incidentes en él. Hay otros conceptos de solución para situaciones de comunicación, tanto puntuales como basados en estructuras definidas por propiedades deseables como son, por ejemplo, las redes eficientes y redes estables de Jackson y Wolinsky (1996) y Jackson y van den Nouweland (2005), el valor árbol promedio (*average tree*) de Herings, van den Laan y Talman (2008) o el valor de Hamiache (1999). Sin embargo, como la presente Memoria se centra en las dos primeras, se entrará en detalle solo en ellas.

Definición 2.3.5. *El valor de Myerson es la regla de reparto para situaciones de comunicación, $\mu : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por:*

$$\mu(N, v, \gamma) = Sh(N, v^\gamma), \text{ para toda } (N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N.$$

Ejemplo 2.3.2. *Sea (N, v, γ) , con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v = u_{\{1,4\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, una de cuyas posibles representaciones es la de la Figura 2.1.*

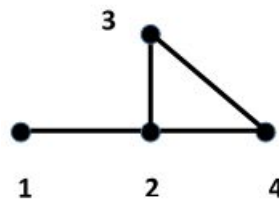


Figura. 2.1: Grafo (N, γ)

El juego restringido al grafo (N, v^γ) , tiene por función característica $v^\gamma = u_{\{1,2,4\}}$, ya que el jugador 2 es necesario para establecer la comunicación entre los

jugadores 1 y 4. Así, $\mu(N, v, \gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$.

Obsérvese que el jugador 3 es nulo en (N, v^γ) ya que para conectar a 1 y 4 su intermediación no es minimal. Sin embargo, como se verá más adelante, ninguna de sus aristas, en el juego de los arcos, es nula.

A partir de la propiedad de que para todo $i \in N$, $v = v_i + v_{-i}$, González-Arangüena et al. (2017) proponen una descomposición aditiva del valor de Myerson en dos nuevas reglas de reparto para situaciones de comunicación, el valor WG de Myerson y el valor BG de Myerson.

Definición 2.3.6. (González-Arangüena et al., 2017). Dada $(N, v, \gamma) \in CS^N$, se define el valor WG de Myerson (WG-Myerson para simplificar), μ^W , como la regla de reparto en CS^N dada por: $\mu_i^W(N, v, \gamma) = \mu_i(N, v_i, \gamma)$, $i \in N$, i.e., μ_i^W es el valor de Shapley de i en el juego $(N, (v_i)^\gamma)$.

Definición 2.3.7. (González-Arangüena et al., 2017). Dada $(N, v, \gamma) \in CS^N$, se define el valor BG de Myerson (BG-Myerson para simplificar), μ^B , como la regla de reparto en CS^N dada por: $\mu_i^B(N, v, \gamma) = \mu_i(N, v_{-i}, \gamma)$, $i \in N$, i.e., μ_i^B es el valor de Shapley de i en el juego $(N, (v_{-i})^\gamma)$.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos la situación de comunicación del Ejemplo 2.3.2. Es sencillo que $v_1 = v_4 = v_{-2} = v_{-3} = u_{\{1,4\}}$ y que $v_{-1} = v_{-4} = v_2 = v_3 = 0$, juego nulo. Por tanto,

$(v_1)^\gamma = (v_4)^\gamma = (v_{-2})^\gamma = (v_{-3})^\gamma = u_{\{1,2,4\}}$ y $(v_{-1})^\gamma = (v_{-4})^\gamma = (v_2)^\gamma = (v_3)^\gamma = 0$, de donde,

$$\mu^W(N, v, \gamma) = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}), \mu^B(N, v, \gamma) = (0, \frac{1}{3}, 0, 0),$$

y efectivamente, $\mu(N, v, \gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}) = \mu^W(N, v, \gamma) + \mu^B(N, v, \gamma)$.

Definición 2.3.8. El valor posicional es la regla de reparto para situaciones de comunicación, $\pi : CS_0^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, que hace corresponder a cada $i \in N$:

$$\pi_i(N, v, \gamma) = \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^v), \text{ para toda } (N, v, \gamma) \in CS_0^N.$$

Ejemplo 2.3.4. Consideremos la situación de comunicación del Ejemplo 2.3.2. Notemos $\{1, 2\} = a$, $\{2, 4\} = b$, $\{2, 3\} = c$, $\{3, 4\} = d$, según la representación de la Figura 2.2. El juego de los arcos tiene por función característica: $r_\gamma^v = u_{\{a,b\}} + u_{\{a,c,d\}} - u_{\{a,b,c,d\}}$.

De esta forma,

$$Sh(\gamma, r_\gamma^v) = (\frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}), \text{ y } \pi(N, v, \gamma) = (\frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}).$$

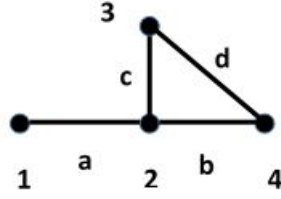


Figura. 2.2: Arcos en (N, γ)

Al contrario de lo que ocurría en este ejemplo al calcular el valor de Myerson, el valor posicional asigna pago no nulo al jugador 3 por su intermediación en la conexión entre 1 y 4. Esto se debe a que, en el caso del valor de Myerson las conexiones solo contemplan caminos geodésicos mientras que en el del valor posicional esta restricción no está presente.

Por otra parte, aunque el valor posicional asume que cada arco es igualmente valioso para los dos jugadores en los que incide, no debe deducirse de ello que la eliminación del arco afecte de la misma manera a ambos (fairness), propiedad clave en el valor de Myerson. En el ejemplo, la eliminación del arco c supone un beneficio para el jugador 2 de $\frac{1}{24}$ mientras que para el jugador 3 representa una pérdida de $\frac{1}{12}$. El perjuicio que supone para el jugador 2 mantener el arco c se puede considerar, de alguna forma, como *el coste de tener amigos*, aunque, es paradójico que este coste solo sea asumido por uno de los dos amigos.

2.3.2 Algunas propiedades de las reglas de reparto

A continuación vamos a definir algunas propiedades de las reglas de reparto para situaciones de comunicación que se utilizarán más adelante para caracterizar el valor de Myerson y su descomposición, así como, el valor posicional.

Definición 2.3.9. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite descomposición en componentes conexas si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$,

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(C_i^{N, \gamma}, v|_{C_i^{N, \gamma}}, \gamma|_{C_i^{N, \gamma}}),$$

siendo $C_i^{N, \gamma}$ la componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i .

Observación 2.3.1. El valor de Myerson y el valor posicional verifican descomposición en componentes conexas (van den Nouweland, 1993). Los valores WG-Myerson y BG-Myerson también verifican esta propiedad. Efectivamente, sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$,

$$\begin{aligned} \mu_i^W(N, v, \gamma) &= \mu_i(N, v_i, \gamma) = \mu_i(C_i^{N, \gamma}, (v_i)|_{C_i^{N, \gamma}}, \gamma|_{C_i^{N, \gamma}}) \\ &= \mu_i(C_i^{N, \gamma}, (v|_{C_i^{N, \gamma}})_i, \gamma|_{C_i^{N, \gamma}}) = \mu_i^W(C_i^{N, \gamma}, v|_{C_i^{N, \gamma}}, \gamma|_{C_i^{N, \gamma}}). \end{aligned}$$

La primera y la última igualdad se verifican por la definición del valor WG-Myerson, la segunda porque el valor de Myerson admite descomposición en componentes conexas y la tercera pues $(v_i)_{|C_i^{N,\gamma}} = (v_{|C_i^{N,\gamma}})_i$. La demostración para μ^B es inmediata por dar lugar, junto con μ^W , a una descomposición aditiva del valor de Myerson, el cual verifica la propiedad.

Definición 2.3.10. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es eficiente en componentes conexas si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y cada componente conexa $C \in N/\gamma$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \gamma) = v(C).$$

Observación 2.3.2. Tanto el valor de Myerson (Myerson, 1977) como el valor posicional (Borm et al., 1992; Slikker, 2005) son eficientes en componentes conexas. No así los valores WG-Myerson y BG-Myerson, como se comprueba en el Ejemplo 2.3.3.

Definición 2.3.11. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de equitatividad (fairness)¹⁵ si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $\{i, j\} \in \gamma$,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

Observación 2.3.3. El valor de Myerson es equitativo (Myerson, 1977), no así el valor posicional, como se observa en el Ejemplo 2.3.4, al eliminar el arco c . Tampoco verifican esta propiedad los valores WG-Myerson y BG-Myerson, como se puede ver en el mismo ejemplo al eliminar el arco a .

Definición 2.3.12. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es estable si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $\{i, j\} \in \gamma$,

$$\psi_i(N, v, \gamma) \geq \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) , \psi_j(N, v, \gamma) \geq \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

Observación 2.3.4. Si el juego es superaditivo, tanto el valor de Myerson, como el valor BG-Myerson verifican estabilidad. Ver, respectivamente, Myerson (1977) y González-Arangüena et al. (2017). Si el juego es convexo, el valor WG-Myerson también verifica estabilidad (González-Arangüena et al., 2017). No ocurre lo mismo con el valor posicional, como se comprueba en el Ejemplo 2.3.4 para el jugador 2 al eliminar el arco c .

Observación 2.3.5. Si una regla de reparto para situaciones de comunicación es equitativa y estable, entonces al eliminar un arco de un grafo, los jugadores en los que incide dicho arco ven disminuida (o al menos no incrementada) su recompensa en la misma cantidad.

¹⁵Una regla de reparto para situaciones de comunicación que verifique equitatividad diremos que es equitativa (fair).

Definición 2.3.13. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de las contribuciones equilibradas (balanced contributions) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in N$,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma_{-j}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma_{-i}),$$

donde $\gamma_{-k} = \gamma \setminus \gamma_k$ es el subgrafo que resulta de eliminar en γ todas las aristas incidentes en el nodo k .

Es decir, una regla de asignación cumple esta propiedad si para cualesquiera dos jugadores i y j , el perjuicio que i puede causar a j aislándose de los demás, es decir, rompiendo todas sus relaciones directas en el grafo, es el mismo que el que j puede ocasionar a i si es él el que se aísla.

Observación 2.3.6. El valor de Myerson verifica la propiedad de las contribuciones equilibradas (Myerson, 1980). El valor posicional no verifica esta propiedad. Si en el Ejemplo 2.3.4 el jugador 2 rompe todos sus enlaces, el jugador 3 pierde todo lo que recibía por valor posicional. Sin embargo, si es el jugador 3 el que decide aislarse, el valor posicional del jugador 2 no solo no disminuye sino que se incrementa. Los valores WG-Myerson y BG-Myerson tampoco verifican esta propiedad. En el mismo ejemplo, si consideramos los jugadores 1 y 2, se tiene que:

$$\mu_2^W(N, v, \gamma) - \mu_2^W(N, v, \gamma_{-1}) = 0, \text{ y } \mu_2^B(N, v, \gamma) - \mu_2^B(N, v, \gamma_{-1}) = \frac{1}{3},$$

mientras que,

$$\mu_1^W(N, v, \gamma) - \mu_1^W(N, v, \gamma_{-2}) = \frac{1}{3}, \text{ y } \mu_1^B(N, v, \gamma) - \mu_1^B(N, v, \gamma_{-2}) = 0.$$

Definición 2.3.14. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de las contribuciones equilibradas en arcos (balanced links contributions) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in N$,

$$\sum_{l \in \gamma_j} [\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l\})] = \sum_{l \in \gamma_i} [\psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\})].$$

La propiedad de las contribuciones equilibradas en arcos mantiene una cierta relación con la propiedad de las contribuciones equilibradas ya que establece que la suma de los perjuicios (podrían no serlo si el juego v no es superaditivo) que un jugador causa a otro eliminando sucesivamente cada uno de sus arcos es simétrica.

Observación 2.3.7. El valor posicional satisface la propiedad de las contribuciones equilibradas en arcos (Slikker, 2005) pero no así el valor de Myerson. En el Ejemplo 2.3.4, si el jugador 1 elimina el arco a , el jugador 2 pasa de obtener $\frac{1}{3}$ a obtener 0. Sin embargo, si el jugador 2 elimina los arcos a , b y c , el jugador 1 pierde, respectivamente, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$ y 0, cantidades cuya suma es superior a $\frac{1}{3}$. Tampoco verifican esta propiedad los valores WG-Myerson y BG-Myerson como se aprecia en el mismo ejemplo considerando de nuevo los jugadores 1 y 2.

Definición 2.3.15. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es aditiva si para toda $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$,

$$\psi(N, v + w, \gamma) = \psi(N, v, \gamma) + \psi(N, w, \gamma).$$

Observación 2.3.8. El valor de Myerson, el valor WG-Myerson, el valor BG-Myerson y el valor posicional verifican aditividad ya que son valores de Shapley, en diferentes juegos TU, y el valor de Shapley, como solución puntual de juegos TU, verifica aditividad.

Definición 2.3.16. $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ es una situación de comunicación de jugadores anónimos si para todo $S, T \subseteq N$ tales que $|S \cap N(\gamma)| = |T \cap N(\gamma)|$ entonces $v^\gamma(S) = v^\gamma(T)$, donde $N(\gamma)$ es el conjunto de nodos no aislados en γ .

Definición 2.3.17. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad del jugador anónimo (anonymous player) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ de jugadores anónimos existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\psi(N, v, \gamma) = \alpha e^{N(\gamma)}, \text{ donde } e_i^{N(\gamma)} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in N(\gamma), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En el juego restringido al grafo de una situación de comunicación de jugadores anónimos, los individuos aislados son pasivos y los jugadores no aislados simétricos. Por tanto, una regla de reparto que verifique la propiedad del jugador anónimo asigna el mismo pago a los jugadores no aislados y pago cero¹⁶ a los aislados.

Observación 2.3.9. El valor de Myerson verifica la propiedad de los jugadores anónimos (Borm et al., 1992). Sin embargo el valor posicional no verifica esta propiedad.

Sea (N, v, γ) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1,3\}}$, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, donde una de sus posibles representaciones es la dada por la Figura 2.3.

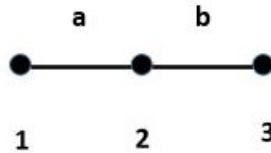


Figura. 2.3: Grafo (N, γ)

¹⁶Una vez cero-normalizado el juego subyacente v .

En estas condiciones (N, v, γ) es de jugadores anónimos, ya que, $v^\gamma(S) = 0$ si $s \leq 2$ y $v^\gamma(S) = 1$, si $s = 3$. Además, $r_\gamma^v = u_{\{a,b\}}$, luego $\pi_1(N, v, \gamma) = \pi_3(N, v, \gamma) = \frac{1}{4}$, mientras que $\pi_2(N, v, \gamma) = \frac{1}{2}$, y determinados nodos no aislados reciben diferente pago.

En cuanto a los valores WG-Myerson y BG-Myerson, en el mismo ejemplo se comprueba fácilmente que, $\frac{1}{3} = \mu_1^W(N, v, \gamma) \neq \mu_2^W(N, v, \gamma) = 0$ y que $0 = \mu_1^B(N, v, \gamma) \neq \mu_2^B(N, v, \gamma) = \frac{1}{3}$; de donde, en ambas reglas, no todos los jugadores no aislados reciben el mismo pago. Así pues, ninguna de las dos verifica la propiedad de los jugadores anónimos.

Definición 2.3.18. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de los jugadores superfluos (superfluous players) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ jugador nulo en v^γ ,

$$\psi(N, v, \gamma) = \psi(N, v, \gamma \setminus \gamma_i).$$

Observación 2.3.10. El valor de Myerson verifica la propiedad de los jugadores superfluos (van den Nouweland, 1993). No es el caso del valor posicional. En el Ejemplo 2.3.4, el jugador 3 es nulo en $v^\gamma = u_{\{1,2,4\}}$ y sin embargo $\pi_3(N, v, \gamma) = \frac{1}{12} > 0 = \pi_3(N, v, \gamma \setminus \{c, d\})$.

Los valores WG-Myerson y BG-Myerson tampoco verifican esta propiedad.

Sea (N, v, γ) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1,2,3\}} - u_{\{1,3\}}$, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, del cual una de sus posibles representaciones es la dada por la Figura 2.4.

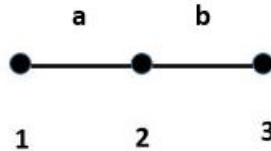


Figura. 2.4: Grafo (N, γ)

Observamos que $v^\gamma = \mathbf{0}$ y, por tanto, todos los jugadores son nulos en v^γ , en particular 2. Se tiene que, $v_2 = u_{\{1,2,3\}}$, $v_2^\gamma = u_{\{1,2,3\}}$, $v_2^{\gamma \setminus \{a,b\}} = \mathbf{0}$, y

$$\frac{1}{3} = \mu_2^W(N, v, \gamma) \neq \mu_2^W(N, v, \gamma \setminus \{a, b\}) = 0.$$

Análogamente, $v_{-2} = -u_{\{1,3\}}$, $v_{-2}^\gamma = -u_{\{1,2,3\}}$, $v_{-2}^{\gamma \setminus \{a,b\}} = \mathbf{0}$, y

$$-\frac{1}{3} = \mu_2^B(N, v, \gamma) \neq \mu_2^B(N, v, \gamma \setminus \{a, b\}) = 0.$$

Definición 2.3.19. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de los arcos fuertemente superfluos (*strong superfluous links*) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y $l \in \gamma$, tal que $v^\gamma(S) = v^{\gamma \setminus \{l\}}(S)$, $S \subseteq N$,

$$\psi(N, v, \gamma) = \psi(N, v, \gamma \setminus \{l\}).$$

Observación 2.3.11. El valor de Myerson verifica la propiedad de los arcos fuertemente superfluos (*van den Nouweland, 1993*). No así el valor posicional como se observa en el Ejemplo 2.3.4 pues se tiene que $v^\gamma = v^{\gamma \setminus \{c\}} = u_{\{1,2,4\}}$ y sin embargo $\pi_3(N, v, \gamma) = \frac{1}{12} > 0 = \pi_3(N, v, \gamma \setminus \{c\})$.

Los valores WG-Myerson y BG-Myerson tampoco verifican esta propiedad.

Sea (N, v, γ) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1,2,3\}} - u_{\{1,3\}}$, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, donde una de sus posibles representaciones es la dada por la Figura 2.5.

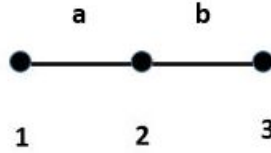


Figura. 2.5: Grafo (N, γ)

Se tiene que $v^\gamma = \mathbf{0}$, y por tanto, para $l \in \{a, b\}$, $v^\gamma(S) = v^{\gamma \setminus \{l\}}(S)$, $S \subseteq N$.

Para el jugador 2,

$$v_2 = u_{\{1,2,3\}}, \quad v_2^\gamma = u_{\{1,2,3\}}, \quad v_2^{\gamma \setminus \{a\}} = \mathbf{0}, \quad y$$

$$\frac{1}{3} = \mu_2^W(N, v, \gamma) \neq \mu_2^W(N, v, \gamma \setminus \{a\}) = 0.$$

Análogamente, $v_{-2} = -u_{\{1,3\}}$, $v_{-2}^\gamma = -u_{\{1,2,3\}}$, $v_{-2}^{\gamma \setminus \{a\}} = \mathbf{0}$, y

$$-\frac{1}{3} = \mu_2^B(N, v, \gamma) \neq \mu_2^B(N, v, \gamma \setminus \{a\}) = 0.$$

Definición 2.3.20. $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ es una situación de comunicación anónima para los arcos, si para todo η_1, η_2 subgrafos de γ tales que $|\eta_1| = |\eta_2|$ entonces $r_\gamma^v(\eta_1) = r_\gamma^v(\eta_2)$.

Definición 2.3.21. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de los arcos anónimos (anonymous links) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ anónima para los arcos existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \alpha |\gamma_i|, \text{ para todo } i \in N.$$

Observación 2.3.12. El valor posicional verifica la propiedad de los arcos anónimos (Borm et al., 1992), no así el valor de Myerson. La situación de comunicación de la Observación 2.3.9 es anónima para los arcos. Sin embargo, $\mu_1(N, v, \gamma) = \mu_2(N, v, \gamma) = \mu_3(N, v, \gamma) = \frac{1}{3}$, y $|\gamma_1| = |\gamma_3| \neq |\gamma_2|$.

Los valores WG-Myerson y BG-Myerson tampoco verifican la propiedad de los arcos anónimos. Considerando de nuevo el Ejemplo 2.3.9, se tiene que:

$$\mu_1^W(N, v, \gamma) = \mu_3^W(N, v, \gamma) = \frac{1}{3} \text{ y } |\gamma_1| = |\gamma_3|, \text{ de donde } \alpha = \frac{1}{3}, \text{ pero,}$$

$$\mu_2^W(N, v, \gamma) = 0, \text{ } |\gamma_2| = 2, \text{ y } \mu_2^W(N, v, \gamma) \neq \frac{2}{3}.$$

Análogamente, $\mu_1^B(N, v, \gamma) = \mu_3^B(N, v, \gamma) = 0$, de donde, $\alpha = 0$ y sin embargo, $\mu_2^B(N, v, \gamma) = \frac{1}{3} \neq 0$.

Definición 2.3.22. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad de los arcos superfluos (superfluous links) si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y $l \in \gamma$, tal que $r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\eta \setminus \{l\})$, $\eta \subseteq \gamma$,

$$\psi(N, v, \gamma) = \psi(N, v, \gamma \setminus \{l\}).$$

Observación 2.3.13. Los valores de Myerson y posicional verifican la propiedad de los arcos superfluos (Borm et al., 1992). Los valores WG-Myerson y BG-Myerson no verifican esta propiedad.

Sea (N, v, γ) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1,2,3\}} - u_{\{1,3\}}$, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, donde una de sus posibles representaciones es la dada por la Figura 2.6.

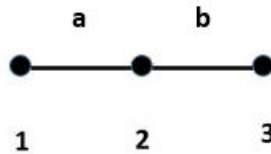


Figura. 2.6: Grafo (N, γ)

Se tiene que $r_\gamma^v = \mathbf{0}$ y $r_\gamma^v(\eta \setminus \{l\}) = 0$, $\eta \subseteq \gamma$, $l \in \{a, b\}$.

Sin embargo, $v_2 = u_{\{1,2,3\}}$, $v_2^\gamma = u_{\{1,2,3\}}$, $v_2^{\gamma \setminus \{a\}} = \mathbf{0}$, y

$$\frac{1}{3} = \mu_2^W(N, v, \gamma) \neq \mu_2^W(N, v, \gamma \setminus \{a\}) = 0.$$

Análogamente, $v_{-2} = -u_{\{1,3\}}$, $v_{-2}^\gamma = -u_{\{1,2,3\}}$, $v_{-2}^{\gamma \setminus \{a\}} = \mathbf{0}$, y

$$-\frac{1}{3} = \mu_2^B(N, v, \gamma) \neq \mu_2^B(N, v, \gamma \setminus \{a\}) = 0.$$

Los valores de Myerson, WG-Myerson, BG-Myerson y posicional admiten diversas caracterizaciones que utilizan las propiedades anteriores.

Proposición 2.3.6. *(Myerson, 1977). μ es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que verifica eficiencia en componentes conexas y equidad. Además, si el juego subyacente es superaditivo, verifica también estabilidad.*

Proposición 2.3.7. *(Myerson, 1980). μ es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que verifica eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas.*

Proposición 2.3.8. *(van den Nouweland, 1993). μ es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que verifica eficiencia en componentes conexas, aditividad, la propiedad de los jugadores superfluos y la propiedad del jugador anónimo.*

Proposición 2.3.9. *(van den Nouweland, 1993). μ es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que verifica eficiencia en componentes conexas, aditividad, la propiedad de los arcos fuertemente superfluos y la propiedad del jugador anónimo.*

Proposición 2.3.10. *(Borm et al., 1992). π es la única regla de reparto para situaciones de comunicación con juego cero-normalizado y grafo sin ciclos, que verifica eficiencia en componentes conexas, aditividad, la propiedad de los arcos superfluos y la propiedad de los arcos anónimos.*

Proposición 2.3.11. *(Slikker and van den Nouweland., 2001). μ es la única regla de reparto para situaciones de comunicación con juego cero-normalizado y grafo sin ciclos, que verifica eficiencia en componentes conexas, aditividad y las propiedades de los arcos superfluos y del jugador anónimo.*

Proposición 2.3.12. *(Slikker, 2005). El valor posicional π es la única regla de reparto en \mathcal{CS}_0^N que verifica eficiencia en componentes conexas y la propiedad de las contribuciones equilibradas en arcos.*

Proposición 2.3.13. *(González-Arangüena et al., 2017). El valor WG-Myerson es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que es aditiva, verifica la propiedad del jugador nulo y coincide con el valor de Myerson para los jugadores necesarios en el juego.*

Proposición 2.3.14. *(González-Arangüena et al., 2017). El valor BG-Myerson es la única regla de reparto en CS^N aditiva, que asigna pago cero a los jugadores necesarios en el juego y coincide con el valor de Myerson para los jugadores nulos.*

Además, Casajus (2007) caracterizó el valor posicional sin restricciones sobre el grafo de comunicación, expresándolo en términos del valor de Myerson de una nueva situación de comunicación. Ésta es obtenida desdoblando cada nodo del grafo en tantos nodos como arcos inciden él y extendiendo convenientemente el valor de v . La situación de comunicación así obtenida recibe el nombre de 'Hyperlink agent form' (HAF) de forma que, el valor de Myerson para la situación de comunicación HAF coincide con el valor posicional en la situación de comunicación original.

Capítulo 3

Marginalismo y valores de Myerson

A mediados del siglo XIX surgió una escuela de pensamiento económico, el marginalismo, en un intento de reaccionar frente a la escuela clásica a través de la introducción de un lenguaje formalizado y tratando de asimilar la matemática en la Economía. El marginalismo económico puede considerarse el antecesor de la economía neoclásica que, a su vez, es el marco teórico de la economía moderna. Las figuras más destacadas de la revolución marginalista fueron William S. Jevons (con la introducción del concepto de utilidad marginal), Carl Menger (con el postulado de que la Economía debe ser una disciplina puramente deductiva) y Léon Walras (con su propuesta de una teoría del equilibrio general que implica la interrelación matemática de todos los procesos económicos).

El hecho de incluir el lenguaje matemático en el análisis de la Economía, supuso un paso fundamental para transformar esta disciplina en una auténtica ciencia. Considerar que el precio, el valor o la utilidad que genera la adquisición de un cierto bien debe estar relacionado con el incremento de satisfacción que conlleva (contribución marginal), es uno de los pilares del capitalismo moderno.

En el marco de la Teoría de Juegos cooperativos el marginalismo, como se ha dicho, asume que jugadores con igual contribución marginal a todas las coaliciones, deben ser igualmente retribuidos.

Este capítulo está dedicado a analizar la relación entre el marginalismo y los valores de Myerson, WG-Myerson y BG-Myerson.

El valor de Myerson no satisface la propiedad de marginalismo de Chun (1989) y, por tanto, tampoco la propiedad de la monotonía fuerte de Young (1985).

Consideremos las situaciones de comunicación (N, v, γ) y (N, w, γ) con $N =$

$\{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1,2\}}$, $w = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se puede ver en la *Figura 3.1*.

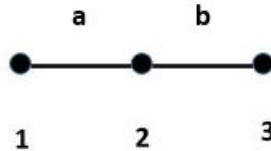


Figura. 3.1: Grafo (N, γ)

Las contribuciones marginales del jugador 2 en v y w son iguales pues:

$$v(S \cup \{2\}) - v(S) = w(S \cup \{2\}) - w(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1\}, S = \{1, 3\}, \\ 0, & \text{si } S = \{3\}, \end{cases}$$

y sin embargo, $\mu_2(N, v, \gamma) = \frac{1}{2}$, $\mu_2(N, w, \gamma) = \frac{5}{6}$.

Lo mismo ocurre con el valor BG-Myerson ya que, en este mismo ejemplo, $\mu_2^B(N, v, \gamma) = 0$, $\mu_2^B(N, w, \gamma) = \frac{1}{3}$. Por el contrario, como demostraremos más adelante, el valor WG-Myerson sí verifica la propiedad de monotonía fuerte y, por tanto, la de marginalismo.

En este capítulo vamos a ampliar el concepto clásico de contribución marginal para tener en cuenta que, en juegos con cooperación restringida dada por una red social, un jugador puede contribuir a una coalición de diferentes maneras:

- i) uniéndose a la coalición pero ignorando sus arcos. Esta es la contribución marginal clásica (Young, 1985) en el juego (N, v) .
- ii) cediendo sus arcos ¹ (todos o parte de ellos) a la coalición pero sin unirse a ella. La llamaremos contribución marginal de los arcos, (L-contribución marginal para abreviar).
- iii) uniéndose a la coalición junto con sus arcos. La llamaremos contribución marginal del jugador con sus arcos ², (PL-contribución marginal para abreviar).

¹Para la influencia de los arcos en lugar de la de los jugadores y propiedades relacionadas ver Belau (2018).

²Para un reparto que tiene en cuenta tanto la influencia de los jugadores como de los arcos ver Borkotokey, Kumar y Sarangi (2015) y Dietzenbacher, et al.(2015).

De acuerdo con esto, las L-contribuciones marginales de un jugador se definirán como las contribuciones marginales (clásicas) en el juego los arcos (Meessen, 1988; Borm et al., 1992) de los enlaces de éste, cuando abandona el juego (N, v) y solo participa en la situación de comunicación prestando sus arcos a los demás, mientras que las PL-contribuciones marginales se definirán de la misma manera, pero suponiendo que el jugador no abandona el juego (N, v) . Para cada uno de estos tres tipos de contribución marginal, se puede definir la correspondiente propiedad de monotonía fuerte para reglas de asignación, la monotonía fuerte de Young (1985), la L-monotonía fuerte y la PL-monotonía fuerte y las versiones más débiles de estas propiedades, el marginalismo de Chun (1989), el L-marginalismo y el PL-marginalismo.

Llegados aquí, no es sorprendente que el PL-marginalismo (centrado en las contribuciones conjuntas del jugador y sus arcos) pueda ser una propiedad crucial del valor de Myerson y, de manera similar, que el marginalismo clásico (centrado en las contribuciones en el juego) y el L-marginalismo (centrado en la conectividad) sean propiedades cruciales para los valores WG-Myerson y BG-Myerson, respectivamente. Esto es así hasta tal punto que demostraremos que el valor de Myerson, el valor WG-Myerson y el valor BG-Myerson pueden caracterizarse utilizando PL-marginalismo, marginalismo y L-marginalismo, respectivamente.

En particular probaremos que:

- i) El valor de Myerson es la única regla de reparto para situaciones de comunicación que satisface eficiencia en componentes conexas, trato igualitario (alternativamente contribuciones equilibradas) para jugadores necesarios³ y PL-marginalismo.
- ii) El valor WG-Myerson es la única regla de reparto para situaciones de comunicación que verifica eficiencia en la comunicación en componentes conexas (el valor de la componente después de pagar los costes de intermediación), trato igualitario (alternativamente contribuciones equilibradas) para jugadores necesarios y marginalismo (clásico).
- iii) El valor BG-Myerson es la única regla de reparto para situaciones de comunicación que verifica eficiencia en la intermediación en componentes conexas (coste de intermediación en la componente debido a la imperfección en las comunicaciones), contribuciones equilibradas para jugadores nulos y L-marginalismo.

³El concepto de jugador necesario, (introducido en Gilles y van den Brink, 1996), el axioma de trato igualitario para jugadores necesarios, el axioma de equidad y el de tratamiento igualitario para iguales, junto con sus relaciones con el valor de Myerson, han sido tratados en Navarro (2018a, 2018b).

El capítulo finaliza con la demostración de la independencia de las propiedades utilizadas en las caracterizaciones y un resumen de éstas.

3.1 Marginalismos

3.1.1 Contribuciones marginales

En esta sección vamos a formalizar, para las situaciones de comunicación, diferentes tipos de contribuciones marginales. Como ya hemos citado, en una situación de comunicación, un jugador puede contribuir a una coalición uniéndose a ella, con o sin sus conexiones, o prestando solo sus arcos, quedando por tanto al margen, para que los miembros de ésta puedan mejorar su comunicación. Esto lleva a las siguientes definiciones.

Definición 3.1.1. Dado $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $i \in N$ y $S \subseteq N \setminus \{i\}$, se define la contribución marginal del jugador i a la coalición S como $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Esta es, obviamente, la definición clásica de contribución marginal en un juego TU.

Definición 3.1.2. Dados $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $i \in N$ y $\delta \subseteq \gamma_i$, la contribución marginal de los arcos de i , δ , a $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, (*L-contribución marginal*, para abreviar) se define como:

$$r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta),$$

donde \widehat{v}_{-i} es la cero-normalización del juego $v_{-i} = \sum_{S \subseteq N: i \notin S} \Delta_v(S) u_S$.

Observación 3.1.1. Supongamos que C_1, C_2, \dots, C_r son las componentes conexas de $(N \setminus \{i\}, \eta)$ que pueden conectarse usando los arcos de $\delta \subseteq \gamma_i$. Trivialmente se comprueba que,

$$r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta) = v\left(\bigcup_{j=1}^r C_j\right) - \sum_{j=1}^r v(C_j),$$

lo que enfatiza la idea de que el jugador i contribuye a la coalición $\bigcup_{j=1}^r C_j$ cediendo sus arcos para que puedan conectarse, pero sin involucrarse él mismo en el juego (N, v) .

Definición 3.1.3. Dados $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $i \in N$ y $\delta \subseteq \gamma_i$, la contribución marginal de i y sus arcos δ , a $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ (*PL-contribución marginal*, para abreviar) se define como:

$$r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta),$$

donde \hat{v} es la cero-normalización del juego v .

Observación 3.1.2. *Supongamos que C_1, C_2, \dots, C_r son las componentes conexas en $(N \setminus \{i\}, \eta)$ que se conectan cuando se añaden los arcos de $\delta \subseteq \gamma_i$. Entonces,*

$$r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta) = \hat{v}\left(\bigcup_{j=1}^r C_j \cup \{i\}\right) - \sum_{j=1}^r \hat{v}(C_j),$$

de forma que el jugador i contribuye con su incorporación a la coalición, así como, con su capacidad para unir algunas componentes que, sin sus arcos, permanecerían desconectadas.

Para aclarar estos conceptos y, en particular, sus diferencias, vamos a introducir dos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1. *Supongamos que el jugador 1 vende un apartamento y los jugadores 2 y 3 están interesados en comprarlo. Viven en una pequeña ciudad donde solo hay una agencia inmobiliaria, el jugador 4. Asumamos entonces dos situaciones diferentes:*

En la primera, si solo uno de los compradores negocia con el vendedor, el valor de la transacción es de 1 unidad (diferencia entre las valoraciones del comprador y el vendedor). Pero si ambos compradores negocian, esta diferencia aumenta hasta 1.5 unidades.⁴

En la segunda, el jugador 2, que es algo desconfiado, impone dos condiciones:

- i) Solo comprará el apartamento si el agente inmobiliario participa proporcionando asesoramiento legal en la transacción.*
- ii) Si aparece otro comprador, abandona la oferta. En cualquier caso, si se vende el apartamento, la diferencia de valoración es de 1 unidad.*

La primera de estas situaciones puede modelarse a través de un juego TU, (N, v) donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1, 2\}, S = \{1, 3\}, S = \{1, 2, 4\}, S = \{1, 3, 4\}, \\ 1.5, & \text{si } \{1, 2, 3\} \subseteq S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

⁴En general, los compradores considerarán que el apartamento es más valioso si la demanda aumenta.

La segunda situación puede, a su vez, modelarse a través de un segundo juego TU, (N, w) donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y:

$$w(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1, 3\}, \text{ o, si } |S| \geq 3, \text{ y } 1 \in S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sin embargo, frecuentemente, el vendedor y los compradores no pueden comunicarse a menos que un agente inmobiliario (u otro tipo de intermediario) los ponga en contacto. Supondremos que este es el caso y que la comunicación en ambos juegos se restringe mediante el grafo (N, γ) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\gamma = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se encuentra en la *Figura 3.2*.

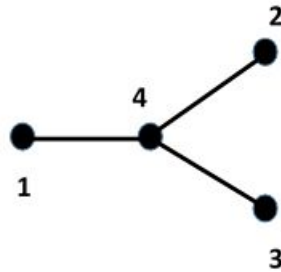


Figura. 3.2: Grafo (N, γ)

En estas condiciones, ambas situaciones estratégicas se formalizan a través de dos situaciones de comunicación, (N, v, γ) y (N, w, γ) respectivamente.

La contribución marginal del agente inmobiliario en (N, v, γ) (y también en (N, v)) viene dada por:

$$v(S \cup \{4\}) - v(S) = 0, \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{4\},$$

ya que la agencia inmobiliaria es claramente un jugador nulo en este juego.

Sin embargo, las contribuciones marginales del agente inmobiliario en (N, w, γ) son:

$$w(S \cup \{4\}) - w(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1, 2\}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

ya que el jugador 4 contribuye a la coalición $\{1, 2\}$ dando soporte legal a la transacción, si es que ésta finalmente se lleva a cabo.

Las contribuciones marginales del jugador 4 y sus arcos (PL-contribuciones marginales de 4) en las situaciones de comunicación (N, v, γ) y (N, w, γ) vienen dadas, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_4$, $\delta \subseteq \gamma_4$, por:

$$r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta) = r_{\gamma}^v(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^v(\eta),$$

$$r_{\gamma}^{\hat{w}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\hat{w}}(\eta) = r_{\gamma}^w(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^w(\eta),$$

respectivamente.

Así, η es necesariamente el conjunto vacío ya que $\gamma_4 = \gamma$, y por tanto, δ puede ser cada uno de los posibles subgrafos de (N, γ) . Por ejemplo, si $\delta = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, entonces,

$$r_{\gamma}^v(\delta) - r_{\gamma}^v(\emptyset) = v(\{1, 2, 4\}) + v(\{3\}) - \sum_{i=1}^4 v(\{i\}) = 1,$$

$$r_{\gamma}^w(\delta) - r_{\gamma}^w(\emptyset) = w(\{1, 2, 4\}) + w(\{3\}) - \sum_{i=1}^4 w(\{i\}) = 1.$$

En la *Tabla 3.1* se pueden observar las diferentes PL-contribuciones marginales del jugador 4, en ambas situaciones de comunicación.

δ	$r_{\gamma}^v(\delta) - r_{\gamma}^v(\emptyset)$	$r_{\gamma}^w(\delta) - r_{\gamma}^w(\emptyset)$
$\{\{\emptyset\}\}$	0	0
$\{\{1, 4\}\}$	0	0
$\{\{2, 4\}\}$	0	0
$\{\{3, 4\}\}$	0	0
$\{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$	1	1
$\{\{1, 4\}, \{3, 4\}\}$	1	1
$\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$	0	0
$\{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$	1.5	1

Tabla. 3.1: PL-contribuciones marginales del jugador 4 en (N, v, γ) y en (N, w, γ) .

De igual forma, las L-contribuciones marginales del agente inmobiliario, en (N, v, γ) y en (N, w, γ) vienen dadas por,

$$r_{\gamma}^{\widehat{v-4}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v-4}}(\eta) = r_{\gamma}^{v-4}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{v-4}(\eta),$$

$$r_{\gamma}^{\widehat{w-4}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{w-4}}(\eta) = r_{\gamma}^{w-4}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{w-4}(\eta),$$

para todo $\delta \subseteq \gamma_4$, respectivamente.

En el caso particular de que $\delta = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, considerado anteriormente, se tiene que:

$$r_{\gamma}^{v-4}(\delta) - r_{\gamma}^{v-4}(\emptyset) = v_{-4}(\{1, 2, 4\}) + v_{-4}(\{3\}) - \sum_{i=1}^4 v_{-4}(\{i\}) = 1,$$

$$r_{\gamma}^{w-4}(\delta) - r_{\gamma}^{w-4}(\emptyset) = w_{-4}(\{1, 2, 4\}) + w_{-4}(\{3\}) - \sum_{i=1}^4 w_{-4}(\{i\}) = 0.$$

En la *Tabla 3.2* se pueden observar las distintas L-contribuciones marginales del jugador 4 en ambas situaciones de comunicación.

δ	$r_{\gamma}^{v-4}(\delta) - r_{\gamma}^{v-4}(\emptyset)$	$r_{\gamma}^{w-4}(\delta) - r_{\gamma}^{w-4}(\emptyset)$
$\{\{\emptyset\}\}$	0	0
$\{\{1,4\}\}$	0	0
$\{\{2,4\}\}$	0	0
$\{\{3,4\}\}$	0	0
$\{\{1,4\}, \{2,4\}\}$	1	0
$\{\{1,4\}, \{3,4\}\}$	1	1
$\{\{2,4\}, \{3,4\}\}$	0	0
$\{\{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$	1.5	1

Tabla. 3.2: L-contribuciones marginales del jugador 4 en (N, v, γ) y en (N, w, γ) .

Como se observa en ambas tablas, las PL-contribuciones marginales y las L-contribuciones marginales del agente inmobiliario coinciden en la situación de comunicación (N, v, γ) , ya que es un jugador nulo en el juego (N, v) . Esto no ocurre en la situación de comunicación (N, w, γ) . Si calculamos el valor de Myerson, el valor WG-Myerson y el valor BG-Myerson del jugador 4 en ambas situaciones de comunicación obtenemos:

$$i) \mu_4(N, v, \gamma) = \mu_4(N, u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}} - 0.5u_{\{1,2,3\}}, \gamma) = Sh_4(N, v^{\gamma})$$

$$= Sh_4(N, u_{\{1,2,4\}} + u_{\{1,3,4\}} - 0.5u_{\{1,2,3,4\}}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{13}{24}.$$

$$ii) \mu_4^W(N, v, \gamma) = \mu_4(N, v_4, \gamma) = 0, \text{ pues } v_4 = \mathbf{0}, \text{ por ser 4 jugador nulo en } v.$$

$$iii) \mu_4^B(N, v, \gamma) = \mu_4(N, v_{-4}, \gamma) = \mu_4(N, v, \gamma) = \frac{13}{24}.$$

$$iv) \mu_4(N, w, \gamma) = \mu_4(N, u_{\{1,2,4\}} + u_{\{1,3\}} - u_{\{1,2,3,4\}}, \gamma) = Sh_4(N, w^\gamma) \\ = Sh_4(N, u_{\{1,2,4\}} + u_{\{1,3,4\}} - u_{\{1,2,3,4\}}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

$$v) \mu_4^W(N, w, \gamma) = \mu_4(N, w_4, \gamma) = \mu_4(N, u_{\{1,2,4\}} - u_{\{1,2,3,4\}}, \gamma) \\ = Sh_4(N, u_{\{1,2,4\}} - u_{\{1,2,3,4\}}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$vi) \mu_4^B(N, w, \gamma) = \mu_4(N, w_{-4}, \gamma) = \mu_4(N, u_{\{1,3\}}, \gamma) = Sh_4(N, u_{\{1,3,4\}}) = \frac{1}{3}.$$

En el ejemplo se aprecia (y más adelante demostraremos que no es accidental) que el jugador 4, i.e., el agente inmobiliario:

- i) Tiene mayores PL-contribuciones marginales en (N, v, γ) que en (N, w, γ) , además $v(\{4\}) \geq w(\{4\})$ y también obtiene mayor valor de Myerson en (N, v, γ) que en (N, w, γ) .
- ii) Tiene mayores contribuciones marginales en (N, w, γ) que en (N, v, γ) y, a su vez, mayor valor WG-Myerson en (N, w, γ) que en (N, v, γ) .
- iii) Tiene mayores L-contribuciones marginales en (N, v, γ) que en (N, w, γ) y, a su vez, mayor valor BG-Myerson en (N, v, γ) que en (N, w, γ) .

Ejemplo 3.1.2. *Supongamos que una cierta empresa (jugador 1) licita servicios (por ejemplo la limpieza de dos municipios) con la administración pública. Dos gestores políticos afines y que mantienen una relación 'fluida'⁵ entre ellos (jugadores 2 y 3), son los encargados de decidir si la empresa es adjudicataria, o no, de cada uno de los dos contratos. La empresa tiene cierta confianza 'especial' con el primero de los gestores (jugador 2) mientras que su relación con el otro gestor (jugador 3) es totalmente formal. Asumamos entonces dos situaciones diferentes:*

En la primera, cada uno de los gestores decide sobre la adjudicación de un contrato.

En la segunda, sospechas sobre el comportamiento del jugador 2 hacen que se le retire la capacidad de adjudicar, responsabilizándose el jugador 3 de ambos contratos.

⁵Tan 'fluida' como será luego de 'especial' la confianza que tiene el jugador 2 con la empresa licitadora.

La primera de estas situaciones puede modelarse a través de un juego TU, (N, v) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1, 2\}, S = \{1, 3\}, \\ 2, & \text{si } S = \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La segunda situación puede, a su vez, modelarse a través de un segundo juego TU, (N, w) donde $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$w(S) = \begin{cases} 2, & \text{si } S = \{1, 3\}, S = \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sin embargo, la empresa solo tiene una relación de 'suficiente confianza' con el primero de los gestores, por tanto, la comunicación en ambos juegos se restringe mediante el grafo (N, γ) con $N = \{1, 2, 3\}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se encuentra en la Figura 3.3.

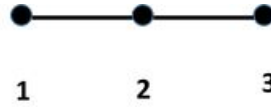


Figura. 3.3: Grafo (N, γ)

Estas dos situaciones estratégicas se formalizan a través de las situaciones de comunicación (N, v, γ) y (N, w, γ) respectivamente.

Las contribuciones marginales del primer gestor (jugador 2) en la situación de comunicación (N, v, γ) vienen dadas por:

$$v(S \cup \{2\}) - v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1\}, S = \{1, 3\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En cambio, las contribuciones marginales de este mismo jugador en la situación de comunicación (N, w, γ) son todas nulas:

$$w(S \cup \{2\}) - w(S) = 0, \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{2\}.$$

Por otro lado, las contribuciones marginales del jugador 2 y sus arcos (PL-contribuciones marginales de 2) en las situaciones de comunicación (N, v, γ) y (N, w, γ) vienen dadas, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_2$, $\delta \subseteq \gamma_2$ por:

$$r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\hat{v}}(\eta) = r_{\gamma}^v(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^v(\eta),$$

$$r_{\gamma}^{\hat{w}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\hat{w}}(\eta) = r_{\gamma}^w(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^w(\eta),$$

respectivamente.

En este caso, η es necesariamente el conjunto vacío ya que $\gamma_2 = \gamma$ y δ puede ser cada uno de los posibles subgrafos de (N, γ) .

En las *Tablas 3.3 y 3.4* respectivamente, se encuentran las PL-contribuciones y L-contribuciones marginales del jugador 2, en ambas situaciones de comunicación.

δ	$r_{\gamma}^v(\delta) - r_{\gamma}^v(\emptyset)$	$r_{\gamma}^w(\delta) - r_{\gamma}^w(\emptyset)$
$\{\{\emptyset\}\}$	0	0
$\{\{1,2\}\}$	1	0
$\{\{2,3\}\}$	0	0
$\{\{1.2\}, \{2.3\}\}$	2	2

Tabla. 3.3: PL-contribuciones marginales del jugador 2 en (N, v, γ) y en (N, w, γ) .

δ	$r_{\gamma}^{v-2}(\delta) - r_{\gamma}^{v-2}(\emptyset)$	$r_{\gamma}^{w-2}(\delta) - r_{\gamma}^{w-2}(\emptyset)$
$\{\{\emptyset\}\}$	0	0
$\{\{1,2\}\}$	0	0
$\{\{2,3\}\}$	0	0
$\{\{1.2\}, \{2.3\}\}$	1	2

Tabla. 3.4: L-contribuciones marginales del jugador 2 en (N, v, γ) y en (N, w, γ) .

Calculando los valores de Myerson, WG-Myerson y BG-Myerson del jugador 2 en ambas situaciones, se tiene que:

- i) $\mu_2(N, v, \gamma) = Sh_2(N, v^{\gamma}) = Sh_2(N, u_{\{1,2\}} + u_{\{1,2,3\}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.
- ii) $\mu_2^W(N, v, \gamma) = Sh_2(N, u_{\{1,2\}}) = \frac{1}{2}$.
- iii) $\mu_2^B(N, v, \gamma) = Sh_2(N, u_{\{1,2,3\}}) = \frac{1}{3}$.
- iv) $\mu_2(N, w, \gamma) = Sh_2(N, u_{2u_{\{1,2,3\}}}) = \frac{2}{3}$.
- v) $\mu_2^W(N, w, \gamma) = 0$, pues es jugador nulo en w .
- vi) $\mu_2^B(N, w, \gamma) = Sh_2(N, u_{2u_{\{1,2,3\}}}) = \frac{2}{3}$.

Y en este caso, el jugador que representa al primer gestor, i.e., el jugador 2, tiene:

- i)* Mayores PL-contribuciones marginales en (N, v, γ) que en (N, w, γ) , además $v(\{2\}) \geq w(\{2\})$ y también obtiene mayor valor de Myerson en (N, v, γ) que en (N, w, γ) .
- ii)* Mayores contribuciones marginales en (N, v, γ) que en (N, w, γ) y, a su vez, mayor valor WG-Myerson en (N, v, γ) que en (N, w, γ) .
- iii)* Mayores L-contribuciones marginales en (N, w, γ) que en (N, v, γ) y, a su vez, mayor valor BG-Myerson en (N, w, γ) que en (N, v, γ) .

3.1.2 Marginalismo, L-marginalismo y PL-marginalismo

En esta sección vamos a definir la monotonía fuerte (y los correspondientes marginalismos) de las reglas de reparto en \mathcal{CS}^N respecto de los diferentes tipos de contribuciones marginales presentados con anterioridad. A continuación se demostrará que los valores WG-Myerson, BG-Myerson y Myerson satisfacen, respectivamente, estas monotonías fuertes.

Definición 3.1.4. (Young, 1985) Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface monotonía fuerte si dadas $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ tales que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S), \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\},$$

entonces $\psi_i(N, v, \gamma) \geq \psi_i(N, w, \gamma)$ ⁶.

Se dice que una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica marginalismo si dadas $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ tales que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S), \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\},$$

entonces $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, w, \gamma)$ ⁷.

Definición 3.1.5. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface L-monotonía fuerte si dadas $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ tales que:

$$r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta) \geq r_{\gamma}^{\widehat{w}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{w}_{-i}}(\eta), \text{ para todo } \eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta \subseteq \gamma_i,$$

entonces $\psi_i(N, v, \gamma) \geq \psi_i(N, w, \gamma)$, donde \widehat{v}_{-i} y \widehat{w}_{-i} son las cero-normalizaciones

⁶Young propone esta definición en el contexto de las reglas de reparto en G^N . La extensión a las situaciones de comunicación pasa por obviar el grafo γ .

⁷Aunque no es estrictamente necesario, hemos preferido definir el marginalismo como una relajación de la monotonía fuerte como tributo a la contribución original de Young. Este criterio se mantendrá en el resto de marginalismos que se definen a lo largo de esta Memoria.

de los juegos $v_{-i} = \sum_{S \subseteq N: i \notin S} \Delta_v(S) u_S$ y $w_{-i} = \sum_{S \subseteq N: i \notin S} \Delta_w(S) u_S$, respectivamente.

Se dice que una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica *L-marginalismo* si dadas $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ tales que:

$$r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}_{-i}}(\eta) = r_{\gamma}^{\widehat{w}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{w}_{-i}}(\eta), \text{ para todo } \eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta \subseteq \gamma_i,$$

entonces $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, w, \gamma)$.

Definición 3.1.6. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface *PL-monotonía fuerte* si dadas $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ tales que:

$$r_{\gamma}^{\widehat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}}(\eta) \geq r_{\gamma}^{\widehat{w}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{w}}(\eta), \text{ para todo } \eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta \subseteq \gamma_i, \text{ y } v(\{i\}) \geq w(\{i\}),$$

entonces $\psi_i(N, v, \gamma) \geq \psi_i(N, w, \gamma)$, donde \widehat{v} y \widehat{w} son las *cero-normalizaciones* de v y w respectivamente.

Se dice que una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica *PL-marginalismo* si dadas $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$ tales que:

$$r_{\gamma}^{\widehat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}}(\eta) = r_{\gamma}^{\widehat{w}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{w}}(\eta), \text{ para todo } \eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta \subseteq \gamma_i, \text{ y } v(\{i\}) = w(\{i\}),$$

entonces $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, w, \gamma)$.

Proposición 3.1.1. El valor de Myerson satisface *PL-monotonía fuerte* y, por tanto, *PL-marginalismo*.

Demostración. Supongamos $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$. Sean $(N, \widehat{v}), (N, \widehat{w})$ las formas *cero-normalizadas* de $(N, v), (N, w)$ y sea $i \in N$ tal que para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ y $\delta \subseteq \gamma_i$, $r_{\gamma}^{\widehat{v}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{v}}(\eta) \geq r_{\gamma}^{\widehat{w}}(\eta \cup \delta) - r_{\gamma}^{\widehat{w}}(\eta)$ y, además, $v(\{i\}) \geq w(\{i\})$.

Se tiene que,

$$\begin{aligned} \mu_i(N, v, \gamma) &= v(\{i\}) + \mu_i(N, \widehat{v}, \gamma) \\ &= v(\{i\}) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [(\widehat{v})^{\gamma}(S \cup \{i\}) - (\widehat{v})^{\gamma}(S)]. \end{aligned}$$

Si $C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}$ es la componente conexa de $(S \cup \{i\}, \gamma|_{(S \cup \{i\})})$ a la que pertenece i y $|C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}|$ es su cardinal, entonces,

$$\mu_i(N, v, \gamma) = v(\{i\}) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}: |C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}|=1} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [(\widehat{v})^{\gamma}(S \cup \{i\}) - (\widehat{v})^{\gamma}(S)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\} : |C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}| > 1} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [(\hat{v})^\gamma(S \cup \{i\}) - (\hat{v})^\gamma(S)] \\
 & = v(\{i\}) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\} : |C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}| = 1} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} \hat{v}(\{i\}) \\
 & + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\} : |C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}| > 1} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [r_\gamma^{\hat{v}}(\gamma|_S \cup \gamma_{i,S}) - r_\gamma^{\hat{v}}(\gamma|_S)] \\
 & = v(\{i\}) + \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\} : |C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}| > 1} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [r_\gamma^{\hat{v}}(\gamma|_S \cup \gamma_{i,S}) - r_\gamma^{\hat{v}}(\gamma|_S)],
 \end{aligned}$$

con $\gamma_{i,S} = \{\{i, j\} \in \gamma \mid j \in S\}$.

La segunda igualdad es cierta por la *Observación 3.1.2*, ya que, $(\hat{v})^\gamma(S \cup \{i\}) - (\hat{v})^\gamma(S) = r_\gamma^{\hat{v}}(\gamma|_S \cup \gamma_{i,S}) - r_\gamma^{\hat{v}}(\gamma|_S)$ y la última es consecuencia de que $\hat{v}(\{i\}) = 0$.

Razonando de igual modo para $\mu_i(N, w, \gamma)$ y aplicando las hipótesis, se tiene que $\mu_i(N, v, \gamma) \geq \mu_i(N, w, \gamma)$. \square

Para probar el siguiente resultado haremos uso de un lema previo cuya demostración se encuentra en González-Arangüena et al. (2017).

Lema 3.1.1. (González-Arangüena et al., 2017). Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $i \in N$:

$$\mu_i^W(N, v, \gamma) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [v(C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}) - v(C_i^{S \cup \{i\}, \gamma} \setminus \{i\})].$$

Proposición 3.1.2. El valor WG-Myerson satisface monotonía fuerte y, por tanto, marginalismo.

Demostración. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y sea $i \in N$ tales que para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$. En virtud del *Lema 3.1.1*,

$$\mu_i^W(N, v, \gamma) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [v(C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}) - v(C_i^{S \cup \{i\}, \gamma} \setminus \{i\})],$$

donde $C_i^{S \cup \{i\}, \gamma}$ es la componente conexa de $\gamma|_{S \cup \{i\}}$ a la que pertenece i . Una expresión semejante se obtiene para $\mu_i^W(N, w, \gamma)$ y dada la hipótesis, llegamos a que $\mu_i^W(N, v, \gamma) \geq \mu_i^W(N, w, \gamma)$. \square

Proposición 3.1.3. El valor BG-Myerson satisface L-monotonía fuerte y, por tanto, L-marginalismo.

Demostración. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y sean $(N, \widehat{v}_{-i}), (N, \widehat{w}_{-i})$ las formas cero-normalizadas de $(N, v_{-i}), (N, w_{-i})$, respectivamente. Si $i \in N$ es tal que para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ y $\delta \subseteq \gamma_i$, $r_{\widehat{v}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\widehat{v}_{-i}}(\eta) \geq r_{\widehat{w}_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_{\widehat{w}_{-i}}(\eta)$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mu_i^B(N, v, \gamma) &= Sh_i(N, (v_{-i})^\gamma) = Sh_i(N, (\widehat{v}_{-i})^\gamma) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [(\widehat{v}_{-i})^\gamma(S \cup \{i\}) - (\widehat{v}_{-i})^\gamma(S)] \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} \left[v \left(\bigcup_{k=1}^{r(S)} C_k^S \right) - \sum_{k=1}^{r(S)} v(C_k^S) \right], \end{aligned}$$

con $C_1^S, \dots, C_{r(S)}^S$ los $r(S)$ elementos de S/γ , $S \subseteq N \setminus \{i\}$, que se conectan usando los arcos que inciden en i . Utilizando la *Observación 3.1.2*,

$$v \left(\bigcup_{k=1}^{r(S)} C_k^S \right) - \sum_{k=1}^{r(S)} v(C_k^S) = r_{\widehat{v}_{-i}}(\gamma|_S \cup \gamma_{i,S}) - r_{\widehat{w}_{-i}}(\gamma|_S).$$

De nuevo, se puede obtener una expresión equivalente para $\mu_i^B(N, w, \gamma)$, y por la hipótesis de la proposición, $\mu_i^B(N, v, \gamma) \geq \mu_i^B(N, w, \gamma)$. \square

3.2 Eficiencia

Esta sección se dedica a mostrar cómo la eficiencia clásica en componentes conexas se puede descomponer en dos cantidades. La primera -relativa al valor de la componente una vez descontados los costes de intermediación- a la que llamaremos eficiencia en la comunicación en componentes conexas, y la segunda -relativa a la fracción del valor de la componente conexas que suponen los costes de intermediación ocasionados por las ineficiencias en la comunicación- a la que llamaremos eficiencia en la intermediación en componentes conexas.

Ya hemos mencionado, en las caracterizaciones del valor de Myerson, que esta regla de reparto cumple la propiedad de ser eficiente en componentes conexas, i.e., si $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y C es una componente conexas en (N, γ) , entonces: $\sum_{i \in C} \mu_i(N, v, \gamma) = v(C)$. Sin embargo, no es difícil comprobar que tanto el valor WG-Myerson como el valor BG-Myerson no verifican esta propiedad.

González-Arangüena et al. (2017) prueban que, dado $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i \in N$, $\mu_i^W(N, v, \gamma) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \Delta_v(S) \alpha_\gamma(S)$, donde $\alpha_\gamma(S)$ es una función de los $r(S)$ conjuntos

minimales de conexión de S en (N, γ) , $S_1, S_2 \dots S_{r(S)}$, dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma(S) = & \sum_{j=1}^{r(S)} \frac{1}{|S_j|} - \sum_{j=1}^{r(S)-1} \sum_{k=j+1}^{r(S)} \frac{1}{|S_j \cup S_k|} + \sum_{j=1}^{r(S)-2} \sum_{k=j+1}^{r(S)-1} \sum_{m=k+1}^{r(S)} \frac{1}{|S_j \cup S_k \cup S_m|} \\ & + \dots + (-1)^{r(S)-1} \frac{1}{|S_1 \cup \dots \cup S_{r(S)}|}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como consecuencia de esto, dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y C una componente conexa en (N, γ) ,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} \mu_i^W(N, v, \gamma) &= \sum_{i \in C} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \Delta_v(S) \alpha_\gamma(S) = \sum_{i \in C} \sum_{\substack{S \subseteq C \\ i \in S}} \Delta_v(S) \alpha_\gamma(S) \\ &= \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) \sum_{i \in S} \alpha_\gamma(S) = \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) s \alpha_\gamma(S). \end{aligned}$$

Entonces, por (3.1), para $\emptyset \neq S \subseteq N$, S conexo en (N, γ) , $\alpha_\gamma(S) = \frac{1}{s}$ y así, si $\mathfrak{C} = \{S \subseteq N \mid S \text{ conexo en } (N, \gamma)\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} \mu_i^W(N, v, \gamma) &= \sum_{S \subseteq C: S \in \mathfrak{C}} \Delta_v(S) + \sum_{S \subseteq C: S \notin \mathfrak{C}} \Delta_v(S) s \alpha_\gamma(S) \\ &= \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) - \sum_{S \subseteq C: S \notin \mathfrak{C}} \Delta_v(S) [1 - s \alpha_\gamma(S)] = v(C) - \sum_{S \subseteq C: S \notin \mathfrak{C}} \Delta_v(S) [1 - s \alpha_\gamma(S)]. \end{aligned}$$

Por tanto, $1 - s \alpha_\gamma(S)$ es la proporción de su dividendo que los individuos en S deben pagar a aquellos otros que les permiten conectarse a través de sus arcos y $\sum_{S \subseteq C: S \notin \mathfrak{C}} \Delta_v(S) [1 - s \alpha_\gamma(S)]$ es la cantidad que los individuos de C deben pagar por intermediación. Los jugadores en una componente en la que no existen costes de intermediación tienen una comunicación totalmente eficiente. Utilizando estas ideas previas, vamos a introducir las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface eficiencia en la comunicación en componentes conexas (W -eficiencia en componentes conexas) si dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y $C \in N/\gamma$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \gamma) = v(C) - \sum_{S \subseteq C: S \notin \mathfrak{C}} \Delta_v(S) [1 - s \alpha_\gamma(S)],$$

donde $\mathfrak{C} = \{S \subseteq N \mid S \text{ conexo en } (N, \gamma)\}$.

Definición 3.2.2. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface eficiencia en la intermediación en componentes conexas (B-eficiencia en componentes conexas) si dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y $C \in N/\gamma$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \gamma) = \sum_{S \subseteq C, S \notin \mathfrak{C}} \Delta_v(S)[1 - s\alpha_\gamma(S)],$$

donde $\mathfrak{C} = \{S \subseteq N \mid S \text{ conexo en } (N, \gamma)\}$.

Para aclarar estas dos definiciones incluimos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1. Sea (N, v, γ) situación de comunicación con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v = u_{\{1,3\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$. En este caso $C = \{1, 2, 3, 4\}$ es la única componente conexas en (N, γ) y $\mathfrak{C} = \{S \subseteq N \mid S \neq \emptyset, S \neq \{1, 3\}, S \neq \{2, 4\}\}$.

$$\text{Más aún, } \Delta_v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \{1, 3\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La familia de los conjuntos minimales de conexión de $S = \{1, 3\}$ en (N, γ) es:

$$\mathcal{MCS}(S, N, \gamma) = \{S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 3, 4\}\} \text{ y } r(S) = 2.$$

Entonces, $\alpha_\gamma(S) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ y $v(C) = 1$ se divide en:

$$\sum_{i \in N} \mu_i^W(N, v, \gamma) = v(C) - \Delta_v(\{1, 3\}) \left(1 - 2 \cdot \frac{5}{12}\right) = \frac{5}{6},$$

(W-eficiencia en componentes conexas) y:

$$\sum_{i \in N} \mu_i^B(N, v, \gamma) = \Delta_v(\{1, 3\}) \left(1 - 2 \cdot \frac{5}{12}\right) = \frac{1}{6},$$

costes de intermediación pagados por 1 y 3 a 2 y 4 (B-eficiencia en componentes conexas).

De forma semejante, si consideramos esa misma situación de comunicación y sustituimos v por v' , con $v' = u_{\{1,2,3\}}$, $\sum_{i \in N} \mu_i^W(N, v', \gamma) = 1$. Como 4 no es necesario para conectar $\{1, 2, 3\}$, la B-eficiencia en la componente conexas es nula.

Observación 3.2.1. De las propias definiciones se tiene que el valor de Myerson cumple eficiencia en componentes conexas, el valor WG-Myerson cumple W-eficiencia en componentes conexas y el valor BG-Myerson cumple B-eficiencia en componentes conexas.

3.3 Contribuciones equilibradas

Como ya se ha dicho con anterioridad, la caracterización del valor de Myerson (Myerson, 1980) incluye la propiedad de contribuciones equilibradas. Recientemente varios autores han propuesto relajaciones de esta propiedad en el sentido de que solo deba ser cumplida por ciertos conjuntos de jugadores. Ejemplos se pueden ver en Calvo y Santos (2006), Lorenzo-Freire (2016), Lorenzo-Freire, Alonso-Mejide, Casa-Méndez y Hendrickx (2007), Yokote y Kongo (2017), y Yokote, Kongo y Funaki (2018). En esta sección, a la espera de incluir este axioma en las caracterizaciones de los valores de Myerson, WG-Myerson y BG-Myerson, demostraremos que el valor WG-Myerson verifica la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores necesarios, mientras que el valor BG-Myerson verifica la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores nulos. Obviamente, como el valor de Myerson verifica contribuciones equilibradas, satisface la propiedad para ambos tipos de jugadores.

La siguiente definición introduce la propiedad de contribuciones equilibradas para un cierto conjunto de jugadores.

Definición 3.3.1. *Una regla de reparto ψ en \mathcal{CS}^N satisface la propiedad de contribuciones equilibradas para los jugadores de $T \subseteq N$ si para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in T$ se verifica que:*

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i).$$

Lema 3.3.1. *Dado $(N, v) \in G^N$, si i es un jugador necesario en (N, v) entonces $v_i = v$.*

Demostración. En los preliminares ya se expuso que en González-Arangüena et al., (2017), los autores demuestran que dado $(N, v) \in G^N$ e $i \in N$:

$$v_i(S) = \begin{cases} v(S) - v(S \setminus \{i\}), & \text{si } S \subseteq N, i \in S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si i es jugador necesario en (N, v) , entonces:

$$v_i(S) = \begin{cases} v(S), & \text{si } S \subseteq N, i \in S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $v(S) = 0$, si $i \notin S$, se tiene que $v_i(S) = v(S)$, para todo $S \subseteq N$ y por lo tanto $v_i = v$. \square

Proposición 3.3.1. *El valor WG-Myerson satisface contribuciones equilibradas para los jugadores necesarios.*

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e i, j jugadores necesarios en (N, v) , i.e., $v(S) = 0$ si $i \notin S$ o $j \notin S$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mu_i^W(N, v, \gamma) - \mu_i^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) &= \mu_i(N, v_i, \gamma) - \mu_i(N, v_i, \gamma \setminus \gamma_j) \\ &= \mu_j(N, v_i, \gamma) - \mu_j(N, v_i, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_j(N, v_j, \gamma) - \mu_j(N, v_j, \gamma \setminus \gamma_i) \\ &= \mu_j^W(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_i), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene por la definición de μ^W , la segunda dado que el valor de Myerson satisface contribuciones equilibradas, la tercera por el *Lema 3.3.1*, ya que de él se tiene que $v_i = v_j = v$, y la cuarta, de nuevo, por la definición de μ^W . \square

Lema 3.3.2. Dado $(N, v) \in G^N$, si i es un jugador nulo en (N, v) entonces $v_i = \mathbf{0}$, el juego nulo.

Demostración. Sea $(N, v) \in G^N$ e $i \in N$; de González-Arangüena et al., (2017) sabemos que:

$$v_i(S) = \begin{cases} v(S) - v(S \setminus \{i\}), & \text{si } S \subseteq N, i \in S, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y si i es jugador nulo en v , entonces $v_i(S) = 0$ para todo $S \subseteq N$, i.e., $v_i = \mathbf{0}$. \square

Proposición 3.3.2. El valor BG-Myerson satisface contribuciones equilibradas para jugadores nulos.

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e i, j jugadores nulos en (N, v) . Por el *Lema 3.3.2*, $v - v_i = v - v_j = v$ y así:

$$\begin{aligned} \mu_i^B(N, v, \gamma) - \mu_i^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) &= \mu_i(N, v - v_i, \gamma) - \mu_i(N, v - v_i, \gamma \setminus \gamma_j) \\ &= \mu_j(N, v - v_i, \gamma) - \mu_j(N, v - v_i, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_j(N, v - v_j, \gamma) - \mu_j(N, v - v_j, \gamma \setminus \gamma_i) \\ &= \mu_j^B(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_i), \end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad son ciertas de la definición de μ^B y la segunda porque el valor de Myerson satisface contribuciones equilibradas. \square

Observación 3.3.1. Es directo que el valor BG-Myerson también satisface contribuciones equilibradas para jugadores necesarios (ya que les asigna cero en cualquier situación de comunicación) y que, de forma equivalente, el valor WG-Myerson satisface contribuciones equilibradas para los jugadores nulos (ya que les asigna cero en cualquier situación de comunicación). Por tanto, los tres valores considerados verifican la propiedad de las contribuciones equilibradas tanto para jugadores necesarios como para jugadores nulos.

3.4 Trato igualitario

En esta sección analizaremos hasta qué punto los tres valores de Myerson satisfacen la propiedad de trato igualitario para un conjunto de jugadores.

Definición 3.4.1. *Una regla de reparto ψ en \mathcal{CS}^N satisface la propiedad de trato igualitario para los jugadores de $T \subseteq N$ si para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in T$, $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma)$.*

Proposición 3.4.1. *(Navarro, 2018a) El valor de Myerson satisface trato igualitario para jugadores necesarios.*

Proposición 3.4.2. *El valor WG-Myerson satisface trato igualitario para jugadores necesarios.*

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in N$ jugadores necesarios en (N, v) . Por el Lema 3.3.1 se tiene que $v_i = v_j = v$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_i^W(N, v, \gamma) &= \mu_i(N, v_i, \gamma) = \mu_i(N, v, \gamma) = \mu_j(N, v, \gamma) \\ &= \mu_j(N, v_j, \gamma) = \mu_j^W(N, v, \gamma), \end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad se verifican por la definición de μ^W y la tercera igualdad por la Proposición 3.4.1. \square

Proposición 3.4.3. *El valor WG-Myerson satisface trato igualitario para jugadores nulos.*

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in N$ jugadores nulos en (N, v) . Por el Lema 3.3.2, $v_i = v_j = \mathbf{0}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_i^W(N, v, \gamma) &= \mu_i(N, v_i, \gamma) = \mu_i(N, \mathbf{0}, \gamma) = \mu_j(N, \mathbf{0}, \gamma) \\ &= \mu_j(N, v_j, \gamma) = \mu_j^W(N, v, \gamma). \end{aligned}$$

\square

Proposición 3.4.4. *El valor BG-Myerson satisface trato igualitario para jugadores necesarios.*

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in N$ jugadores necesarios en (N, v) . Por el Lema 3.3.1, $v_i = v_j = v$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_i^B(N, v, \gamma) &= \mu_i(N, v - v_i, \gamma) = \mu_i(N, \mathbf{0}, \gamma) = \mu_j(N, \mathbf{0}, \gamma) \\ &= \mu_j(N, v - v_j, \gamma) = \mu_j^B(N, v, \gamma). \end{aligned}$$

\square

Observación 3.4.1. *En los resultados anteriores se ha demostrado que los tres valores de Myerson verifican trato igualitario para jugadores necesarios. Se ha probado que, para dichos jugadores, el valor de Myerson coincide con el valor WG-Myerson y que el valor BG-Myerson es cero. También ha quedado demostrado que el valor WG-Myerson verifica trato igualitario para jugadores nulos, siendo éste siempre cero, y que, para estos jugadores, el valor de Myerson y el valor BG-Myerson coinciden. Sin embargo, no es en general cierto que el valor de Myerson y el valor BG-Myerson verifiquen la propiedad de trato igualitario para jugadores nulos, como se puede ver en el contraejemplo que sigue.*

Ejemplo 3.4.1. *Consideremos la situación de comunicación planteada en el Ejemplo 2.3.2, donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, la función característica es $v = u_{\{1,4\}}$ y el grafo $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se puede ver en la Figura 3.4. Los jugadores 2 y 3 son nulos en (N, v) , además $v^\gamma = u_{\{1,2,4\}}$, de donde $\mu_2(N, v, \gamma) = \mu_2^B(N, v, \gamma) = \frac{1}{3} \neq \mu_3^B(N, v, \gamma) = \mu_3(N, v, \gamma) = 0$.*

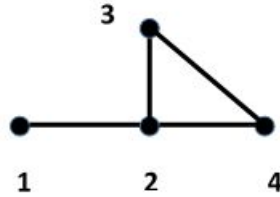


Figura. 3.4: Grafo (N, γ)

3.5 Caracterizaciones

Esta sección está dedicada a obtener, utilizando las propiedades definidas en las secciones anteriores, caracterizaciones de los tres valores de Myerson.

3.5.1 Caracterización del valor de Myerson

Proposición 3.5.1. *El valor de Myerson es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que satisface eficiencia en componentes conexas, trato igualitario para jugadores necesarios y PL-marginalismo.*

Demostración. Ya hemos probado que el valor de Myerson satisface trato igualitario para jugadores necesarios y PL-marginalismo. Además es conocido que verifica eficiencia en componentes conexas. Sea $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla que verifica estas tres propiedades. Vamos a probar que $\psi_i(N, v, \gamma) = \mu_i(N, v, \gamma)$ para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y para todo $i \in N$. En primer lugar, consideremos

$(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y el juego restringido al grafo (N, v^γ) . Entonces, si $i \in N$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ y todo $\delta \subseteq \gamma_i$, tenemos,

$$r_\gamma^{\widehat{v^\gamma}}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{\widehat{v^\gamma}}(\eta) = \sum_{C \in N/(\eta \cup \delta)} \widehat{v^\gamma}(C) - \sum_{C \in N/\eta} \widehat{v^\gamma}(C).$$

Como una componente conexa C de un subgrafo γ está también conectada en γ , $v^\gamma(C) = v(C)$, y entonces,

$$r_\gamma^{\widehat{v^\gamma}}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{\widehat{v^\gamma}}(\eta) = r_{\widehat{v^\gamma}}(\eta \cup \delta) - r_{\widehat{v^\gamma}}(\eta).$$

Además, $v^\gamma(\{i\}) = v(\{i\})$ y así, usando PL-marginalismo:

$$\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \psi_i(N, v, \gamma), \text{ para todo } (N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N \text{ y todo } i \in N. \quad (3.2)$$

Vamos a demostrar el resultado por inducción sobre $d(N, v^\gamma)$, el cardinal de $\delta(N, v^\gamma) = \{S \mid \Delta_{v^\gamma}(S) \neq 0\}$. Sea (N, v, γ) tal que $d(N, v^\gamma) = 0$. Entonces todo $i \in N$ es jugador necesario en (N, v^γ) y así, si $C_i^{N, \gamma}$ es la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i , tenemos que para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$, $\psi_j(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) = c$. Utilizando la eficiencia en componentes conexas,

$$\sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) = c |C_i^{N, \gamma}| = v^\gamma(C_i^{N, \gamma}) = 0,$$

lo que implica que $c = 0$ y entonces, $\psi_i(N, v, \gamma) = 0 = \mu_i(N, v, \gamma)$. Supongamos ahora que el resultado es cierto para situaciones de comunicación (N, v, γ) tales que $d(N, v^\gamma) \leq k$, $k \geq 0$ y consideremos (N, v, γ) con $\delta(N, v^\gamma) = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$ y, por tanto, con $d(N, v^\gamma) = k + 1$ y $v^\gamma = \sum_{r=1}^{k+1} \Delta_{v^\gamma}(S_r) u_{S_r}$.

Si $i \notin \bigcap_{r=1}^{k+1} S_r$, sea $(v^\gamma)_i = \sum_{S_r: i \in S_r} \Delta_{v^\gamma}(S_r) u_{S_r}$. Para $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ y $\delta \subseteq \gamma_i$, (con $C_i^{N, \eta \cup \delta}$ componente conexa de $(N, \eta \cup \delta)$ a la que pertenece i),

$$\begin{aligned} r_\gamma^{\widehat{(v^\gamma)_i}}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{\widehat{(v^\gamma)_i}}(\eta) &= \widehat{(v^\gamma)_i}(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - \widehat{(v^\gamma)_i}(\{i\}) \\ &= \widehat{(v^\gamma)_i}(C_i^{N, \eta \cup \delta}) = (v^\gamma)_i(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - (v^\gamma)_i(\{i\}) = (v^\gamma)_i(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - v^\gamma(\{i\}) \\ &= v^\gamma(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - v^\gamma(C_i^{N, \eta \cup \delta} \setminus \{i\}) - v(\{i\}). \end{aligned}$$

Por otro lado, para $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ y $\delta \subseteq \gamma_i$,

$$\begin{aligned} r_\gamma^{\widehat{v^\gamma}}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{\widehat{v^\gamma}}(\eta) &= \widehat{v^\gamma}(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - \widehat{v^\gamma}(C_i^{N, \eta \cup \delta} \setminus \{i\}) - \widehat{v^\gamma}(\{i\}) \\ &= \widehat{v^\gamma}(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - \widehat{v^\gamma}(C_i^{N, \eta \cup \delta} \setminus \{i\}) \\ &= v^\gamma(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - \sum_{j \in C_i^{N, \eta \cup \delta}} v^\gamma(\{j\}) - [v^\gamma(C_i^{N, \eta \cup \delta} \setminus \{i\}) - \sum_{j \in (C_i^{N, \eta \cup \delta} \setminus \{i\})} v^\gamma(\{j\})] \end{aligned}$$

$$= v^\gamma(C_i^{N,\eta \cup \delta}) - v^\gamma(C_i^{N,\eta \cup \delta} \setminus \{i\}) - v^\gamma(\{i\}) = v^\gamma(C_i^{N,\eta \cup \delta}) - v^\gamma(C_i^{N,\eta \cup \delta} \setminus \{i\}) - v(\{i\}).$$

Entonces, para $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$ y $\delta \subseteq \gamma_i$,

$$r_{\widehat{\gamma}}^{(v^\gamma)_i}(\eta \cup \delta) - r_{\widehat{\gamma}}^{(v^\gamma)_i}(\eta) = r_{\widehat{\gamma}}^{v^\gamma}(\eta \cup \delta) - r_{\widehat{\gamma}}^{v^\gamma}(\eta).$$

Además es claro que $(v^\gamma)_i(\{i\}) = v^\gamma(\{i\})$ y, por lo tanto,

$$\psi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) = \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \psi_i(N, v, \gamma). \quad (3.3)$$

La primera igualdad se tiene porque ψ verifica PL-marginalismo y la segunda por (3.2). Como $d(N, (v^\gamma)_i) \leq k$, utilizando la hipótesis de inducción,

$$\psi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) = \mu(N, (v^\gamma)_i, \gamma) = Sh_i(N, [(v^\gamma)_i]^\gamma). \quad (3.4)$$

Además,

$$[(v^\gamma)_i]^\gamma = \sum_{S_r: i \in S_r} \Delta_{v^\gamma}(S_r) u_{S_r}^\gamma = \sum_{S_r: i \in S_r} \Delta_{v^\gamma}(S_r) u_{S_r} = (v^\gamma)_i,$$

pues para todo $S_r \subseteq N$ tal que $\Delta_{v^\gamma}(S_r) \neq \emptyset$, S_r está conectado en (N, γ) y, por lo tanto, $u_{S_r}^\gamma = u_{S_r}$. Entonces,

$$Sh_i(N, [(v^\gamma)_i]^\gamma) = Sh_i(N, (v^\gamma)_i) = Sh_i(N, v^\gamma), \quad (3.5)$$

dado que para cada juego (N, w) y cada jugador $i \in N$, $Sh_i(N, w) = Sh_i(N, w_i)$. Usando que $Sh_i(N, v^\gamma) = \mu_i(N, v, \gamma)$ tenemos, de (3.2), (3.4) y (3.5), $\psi_i(N, v, \gamma) = \mu_i(N, v, \gamma)$, para el caso en el que $i \notin \bigcap_{r=1}^{k+1} S_r$.

Para terminar, supongamos ahora que $i \in \bigcap_{r=1}^{k+1} S_r$. Entonces i un jugador necesario en (N, v^γ) . Sea $C_i^{N,\gamma}$, la componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i . Como ψ verifica trato igualitario para jugadores necesarios, todos los jugadores necesarios j , en (N, v^γ) , que están en $C_i^{N,\gamma}$ reciben el mismo pago $h = \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma)$. El mismo razonamiento se aplica a μ . En cuanto a los jugadores no necesarios en (N, v^γ) , ψ y μ coinciden. Utilizando eficiencia en componentes conexas, ambas reglas también deben coincidir para los jugadores necesarios (pertenecientes a la componente), y así el resultado queda probado. \square

Observación 3.5.1. *Es posible demostrar que en la caracterización anterior la propiedad de trato igualitario para jugadores necesarios se puede reemplazar por la de contribuciones equilibradas para jugadores necesarios. La demostración sigue los mismos pasos que la que haremos en la caracterización del valor WG-Myerson y, por tanto, preferimos omitirla. Como consecuencia de ello, se tiene esta segunda caracterización del valor de Myerson.*

Proposición 3.5.2. *El valor de Myerson es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que satisface eficiencia en componentes conexas, contribuciones equilibradas para jugadores necesarios y PL-marginalismo.*

3.5.2 Caracterización del valor WG-Myerson

Proposición 3.5.3. *El valor WG-Myerson es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que verifica W-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores necesarios.*

Demostración. Ya hemos demostrado que el valor WG-Myerson verifica W-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores necesarios.

Recíprocamente, sea $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla que cumple las tres propiedades anteriores. Vamos a probar que $\psi = \mu^W$ por inducción sobre $d(N, v)$ cardinal de $\delta(N, v) = \{S \mid \Delta_v(S) \neq 0\}$. Sea (N, v) con $d(N, v) = 0$. Entonces todos los jugadores son necesarios en (N, v) . Vamos a probar que, en este caso, $\psi_i(N, v, \gamma) = \mu_i^W(N, v, \gamma)$, para $i \in N$, razonando por inducción sobre $|\gamma|$.

Sea γ tal que $|\gamma| = 0$. Entonces todos los jugadores son aislados en γ . Por W-eficiencia en componentes conexas, $\psi_i(N, v, \gamma) = v(\{i\}) = 0 = \mu_i^W(N, v, \gamma)$ y el resultado queda probado.

Supongamos que el resultado es cierto para todo γ con $|\gamma| \leq r$, $r \geq 0$ y sea γ con $|\gamma| = r + 1$. Si i está aislado en (N, γ) , al igual que en el caso anterior, $\psi_i(N, v, \gamma) = 0 = \mu_i^W(N, v, \gamma)$. En otro caso, para cada $j \in C_i^{N, \gamma}$ (componente conexas de (N, γ) a la que pertenece i), aplicando la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores necesarios, tenemos:

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i),$$

y, por lo tanto,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma) = \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i).$$

Como $\gamma_i \neq \emptyset$ y $\gamma_j \neq \emptyset$, utilizando la hipótesis de inducción (sobre $|\gamma|$),

$$\psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_i^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \mu_j^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_i). \quad (3.6)$$

Pero,

$$\mu_i^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \mu_j^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_i^W(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma), \quad (3.7)$$

porque μ^W también verifica contribuciones equilibradas para jugadores necesarios. De (3.6) y (3.7),

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \mu_i^W(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma) = h$$

para todo $j \in C_i^{N,\gamma}$. Entonces:

$$\sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} [\psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma)] = \sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} \mu_j^W(N, v, \gamma) = h|C_i^{N,\gamma}|,$$

y utilizando de nuevo W-eficiencia, $h = 0$, lo que completa la inducción sobre r y la demostración del resultado para $d(N, v) = 0$.

Supongamos, entonces, que el resultado es cierto para todo (N, v) con $d(N, v) \leq k$, $k \geq 0$ y sea (N, v) con $d(N, v) = k + 1$ y $\delta(N, v) = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$. Entonces $v = \sum_{l=1}^{k+1} \Delta_v(S_l)u_{S_l}$. Vamos a demostrar que $\psi_i(N, v, \gamma) = \mu_i^W(N, v, \gamma)$, por inducción sobre $|\gamma|$.

Si γ es tal que $|\gamma| = 0$, entonces $C_i^{N,\gamma} = \{i\}$ y por W-eficiencia en componentes conexas se tiene el resultado.

Supongamos que el resultado es cierto para todo γ con $|\gamma| \leq r$, $r \geq 0$, y sea γ con $|\gamma| = r + 1$.

$$\text{Si } i \notin \bigcap_{l=1}^{k+1} S_l, \text{ i.e., si } i \text{ es jugador no necesario en } (N, v), \text{ sea } v_i = \sum_{S_l: i \in S_l} \Delta_v(S_l)u_{S_l}.$$

Tenemos, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$,

$$v_i(S \cup \{i\}) - v_i(S) = v_i(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{i\}) - v(S),$$

y así, utilizando marginalismo, $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, v_i, \gamma)$. Como $d(N, v_i) < d(N, v)$, por hipótesis de inducción, por la definición de μ^W y por el hecho de que $(v_i)_i = v_i$ se tiene que,

$$\psi_i(N, v_i, \gamma) = \mu_i^W(N, v_i, \gamma) = \mu_i(N, (v_i)_i, \gamma) = \mu_i(N, v_i, \gamma) = \mu_i^W(N, v, \gamma),$$

y en este caso, el resultado queda probado.

Finalmente, supongamos que $i \in \bigcap_{l=1}^{k+1} S_l$, i.e., i es un jugador necesario en (N, v) . Si $C_i^{N,\gamma} = \{i\}$ o i es el único jugador necesario en la componente, de nuevo por W-eficiencia en componentes conexas (y por el hecho de que para todos los jugadores no necesarios las reglas coinciden) el resultado queda probado. Si existe $j \neq i$ jugador necesario en $C_i^{N,\gamma}$, utilizando contribuciones equilibradas para jugadores necesarios, tenemos:

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma) &= \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) \\ &= \mu_i^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \mu_j^W(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_i^W(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se verifica por la hipótesis de inducción y la última porque μ^W verifica contribuciones equilibradas para jugadores necesarios. Entonces,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \mu_i^W(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma) = h,$$

para $j \neq i$, $j \in C_i^{N,\gamma}$, j jugador necesario en (N, v) .

Como ya se ha probado que las reglas coinciden para todos los jugadores no necesarios en (N, v) , utilizando W-eficiencia en componentes conexas,

$$\sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} \psi_j(N, v, \gamma) = \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} \mu_j^W(N, v, \gamma),$$

donde $(C_i^{N,\gamma})_n$ es el conjunto de jugadores necesarios en $C_i^{N,\gamma}$. Y así,

$$\begin{aligned} &\sum_{(C_i^{N,\gamma})_n} [\psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma)] \\ &= \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} \mu_j^W(N, v, \gamma) = h|(C_i^{N,\gamma})_n| = 0, \end{aligned}$$

de donde $h = 0$ y se completa la inducción para r y para k . □

Observación 3.5.2. *Siguiendo los pasos de la demostración anterior, se puede probar que en la caracterización del valor WG-Myerson, la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores necesarios se puede sustituir por la propiedad de trato igualitario para jugadores necesarios. En general, si una regla de reparto verifica marginalismo y algún tipo de eficiencia en componentes conexas (no necesariamente una de las definidas en esta Memoria) entonces contribuciones equilibradas y trato igualitario, ambas para jugadores necesarios, son intercambiables para su caracterización.*

Proposición 3.5.4. *El valor WG-Myerson es la única regla de reparto en CS^N que verifica W-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y trato igualitario para jugadores necesarios.*

3.5.3 Caracterización del valor BG-Myerson

Proposición 3.5.5. *El valor BG-Myerson es la única regla de reparto en \mathcal{CS}^N que satisface B-eficiencia en componentes conexas, contribuciones equilibradas para jugadores nulos y L-marginalismo.*

Demostración. Ya hemos demostrado que el valor BG-Myerson verifica B-eficiencia en componentes conexas, L-marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores nulos.

Recíprocamente, sea $\psi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla cumpliendo las tres propiedades anteriores. Vamos a probar que $\psi = \mu^B$ por inducción sobre $d(N, v)$ cardinal de $\delta(N, v) = \{S \mid \Delta_v(S) \neq 0\}$. Sea (N, v) con $d(N, v) = 0$. Entonces todos los jugadores son nulos en (N, v) . Vamos a demostrar que, en este caso, $\psi_i(N, v, \gamma) = \mu_i^B(N, v, \gamma)$, para $i \in N$ razonando por inducción sobre $|\gamma|$.

Si γ es tal que $|\gamma| = 0$ todos los jugadores están aislados en γ y entonces $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$ (donde $C_i^{N, \gamma}$ es la componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i) y $\psi_i(N, v, \gamma) = \mu_i^B(N, v, \gamma)$ dado que las dos reglas verifican B-eficiencia en componentes conexas.

Supongamos que el resultado es cierto para todo γ tal que $|\gamma| \leq r$, $r \geq 0$ y sea γ con $|\gamma| = r+1$. De nuevo, si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$, utilizando B-eficiencia en componentes conexas el resultado es cierto. Supongamos que existe $j \neq i$, $j \in C_i^{N, \gamma}$. Como ψ verifica la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores nulos,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i),$$

de donde,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma) = \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i).$$

Ahora bien, $|\gamma \setminus \gamma_i| \leq r$ y $|\gamma \setminus \gamma_j| \leq r$ ya que i y j están en la misma componente conexa. Utilizando la hipótesis de inducción, $\psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) = \mu_i^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_j)$ y $\psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_j^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_i)$ y por tanto,

$$\begin{aligned} & \psi_i(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma) \\ &= \mu_i^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \mu_j^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_i^B(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta porque μ^B verifica contribuciones equilibradas para jugadores nulos. Así pues, $\psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma) = h$ para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$ y

$$\sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} [\psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma)] = h|C_i^{N, \gamma}|.$$

Utilizando B-eficiencia en componentes conexas, $h|C_i^{N,\gamma}| = 0$ y entonces $h = 0$. Con esto, el resultado queda probado para $d(N, v) = 0$.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo (N, v) tal que $d(N, v) \leq k$, $k \geq 0$ y sea (N, v) con $\delta(N, v) = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$ y, por tanto, $d(N, v) = k + 1$. Entonces,

$$v = \sum_{r=1}^{k+1} \Delta_v(S_r)u_{S_r}.$$

Probaremos el resultado por inducción sobre $|\gamma|$.

Si γ es tal que $|\gamma| = 0$ todos los jugadores son aislados en γ y por B-eficiencia en componentes conexas el resultado queda probado.

Supongamos que el resultado se verifica para todo γ con $|\gamma| \leq l$, $l \geq 0$ y sea γ con $|\gamma| = l + 1$. Sea $i \in N$ tal que existe $r \in \{1, \dots, k+1\}$ con $i \in S_r$, i.e., sea i un jugador no nulo y consideremos el juego $v_{-i} = v - v_i = \sum_{S_r: i \notin S_r} \Delta_v(S_r)u_{S_r}$. Como $(v_{-i})_{-i} = v_{-i}$, por la propiedad de L-marginalismo, $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, v_{-i}, \gamma)$. Además como $d(N, v_{-i}) \leq k$, aplicando la hipótesis inducción, $\psi_i(N, v_{-i}, \gamma) = \mu_i^B(N, v_{-i}, \gamma)$. Y por la definición de μ^B ,

$$\mu_i^B(N, v_{-i}, \gamma) = \mu_i(N, (v_{-i})_{-i}, \gamma) = \mu_i(N, v_{-i}, \gamma) = \mu_i^B(N, v, \gamma),$$

con lo que el resultado queda probado para cualquier jugador no nulo.

Para terminar, sea $i \in N$ tal que $i \notin S_r$ para todo $r \in \{1, \dots, k+1\}$, i.e., sea i un jugador nulo en (N, v) . Si i esta aislado en γ (o es el único jugador nulo en su componente conexa) aplicando B-eficiencia en componentes conexas el resultado queda demostrado (ya que ambas reglas coinciden para los jugadores no nulos). Supongamos que existe $j \neq i$, $j \in C_i^{N,\gamma}$, j jugador nulo en v . Por verificar ψ contribuciones equilibradas para jugadores nulos,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i),$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma) &= \psi_i(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) \\ &= \mu_i^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \mu_j^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_i), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de aplicar la hipótesis de inducción (sobre $|\gamma|$). Como μ^B también verifica contribuciones equilibradas para jugadores nulos,

$$\mu_i^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_j) - \mu_j^B(N, v, \gamma \setminus \gamma_i) = \mu_i^B(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma).$$

Entonces, $\psi_i(N, v, \gamma) - \mu_i^B(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma) = h$ y así para todo $j \in (C_i^{N,\gamma})_0$, donde $(C_i^{N,\gamma})_0$ es el conjunto de todos los jugadores nulos en (N, v) que pertenecen a $C_i^{N,\gamma}$, utilizando B-eficiencia en componentes conexas (y que para los jugadores no nulos las reglas coinciden),

$$0 = \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_0} \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_0} \mu_j^B(N, v, \gamma) = h|(C_i^{N,\gamma})_0|,$$

de donde $h = 0$ y el resultado queda probado para todo l y todo k . \square

Observación 3.5.3. *El valor BG-Myerson no verifica trato igualitario para jugadores nulos, como se constató en el Ejemplo 3.4.1.*

3.6 Independencia de los axiomas

Una cuestión importante, relativa a las caracterizaciones anteriores, es comprobar que, en cada una de ellas, los axiomas utilizados son independientes entre sí. Vamos a dedicar este epígrafe a ver que es así.

3.6.1 Independencia de los axiomas en las caracterizaciones del valor de Myerson

Eficiencia en componentes conexas, PL-marginalismo y trato igualitario para jugadores necesarios.

i) Eficiencia en componentes conexas y PL-marginalismo no implican trato igualitario para jugadores necesarios.

Sea ψ en \mathcal{CS}^N definida, para todo $i \in N$:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \mu_i(N, v, \gamma) + (|C_i^{N,\gamma}| - 1)\varepsilon, & \text{si } i = \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \\ \mu_i(N, v, \gamma) - \varepsilon, & \text{si } i \neq \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $C_i^{N,\gamma}$ es la componente conexas en (N, γ) a la que pertenece i . Trivialmente ψ satisface eficiencia en componentes conexas y PL-marginalismo pero obviamente no cumple trato igualitario para jugadores necesarios.

ii) Eficiencia en componentes conexas y trato igualitario para jugadores necesarios no implican PL-marginalismo.

Es suficiente considerar la regla ψ en \mathcal{CS}^N , definida para todo $i \in N$ como:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = Sh_i(C_i^{N,\gamma}, v|_{C_i^{N,\gamma}}) \quad (3.8)$$

donde $C_i^{N,\gamma}$ es, de nuevo, la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i .

ψ verifica trivialmente eficiencia en componentes conexas. Más aún, si todos los jugadores necesarios en v están en la misma componente conexa, todos reciben la misma recompensa. En otro caso todos reciben cero. Esta regla, sin embargo, no satisface PL-marginalismo ya que no coincide con el valor de Myerson.

iii) Trato igualitario para jugadores necesarios y PL-marginalismo no implican eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\mu$.

Eficiencia en componentes conexas, PL-marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores necesarios.

i) Eficiencia en componentes conexas y PL-marginalismo no pueden implicar contribuciones equilibradas para jugadores necesarios ya que en ese caso también implicarían trato igualitario para jugadores necesarios.

ii) Eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas para jugadores necesarios no implican PL-marginalismo.

Considérese de nuevo la regla en (3.8) y razónese de forma análoga.

iii) Contribuciones equilibradas para jugadores necesarios y PL-marginalismo no implican eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\mu$.

3.6.2 Independencia de los axiomas en las caracterizaciones del valor WG-Myerson

W-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y trato igualitario para jugadores necesarios.

i) W-eficiencia en componentes conexas y marginalismo no implican trato igualitario para jugadores necesarios.

Sea ψ en \mathcal{CS}^N , definida como sigue:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \mu_i^W(N, v, \gamma) + (|C_i^{N,\gamma}| - 1)\varepsilon, & \text{si } i = \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \\ \mu_i^W(N, v, \gamma) - \varepsilon, & \text{si } i \neq \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $C_i^{N,\gamma}$ es la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i . ψ verifica trivialmente W-eficiencia en componentes conexas y marginalismo pero es evidente que no satisface trato igualitario para jugadores necesarios.

ii) W-eficiencia en componentes conexas y trato igualitario para jugadores necesarios no implican marginalismo.

Para (N, v, γ) e $i \in N$, con $C_i^{N, \gamma}$ como ha sido definido con anterioridad, notemos por $(C_i^{N, \gamma})_n$ al subconjunto de los jugadores necesarios en v que pertenecen a $C_i^{N, \gamma}$ (puede ser vacío). Sea ψ en \mathcal{CS}^N definida como sigue:

$$\text{si } (C_i^{N, \gamma})_n = \emptyset, \psi_i(N, v, \gamma) = \frac{\sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} \mu_j^W(N, v, \gamma)}{|C_i^{N, \gamma}|}, \text{ y}$$

$$\text{si } (C_i^{N, \gamma})_n \neq \emptyset, \psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} \mu_j^W(N, v, \gamma) \\ \frac{\quad}{|(C_i^{N, \gamma})_n|}, & \text{si } i \in (C_i^{N, \gamma})_n, \\ 0, & \text{si } i \notin (C_i^{N, \gamma})_n. \end{cases}$$

ψ verifica trivialmente W-eficiencia en componentes conexas. En cuanto a trato igualitario para jugadores necesarios también la verifica pues, por definición, en el caso de que todos los jugadores necesarios en (N, v) no estén en la misma componente conexa todos ellos obtienen una recompensa nula, mientras que, si todos pertenecen a la misma componente conexa todos son igualmente recompensados. Esta regla sin embargo no es μ^W , y por tanto no puede verificar marginalismo.

iii) Trato igualitario para jugadores necesarios y marginalismo no implican W-eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\mu^W$.

W-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores necesarios.

i) W-eficiencia en componentes conexas, y marginalismo no implican contribuciones equilibradas para jugadores necesarios ya que de hacerlo también implicarían trato igualitario para jugadores necesarios.

ii) W-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas para jugadores necesarios no implican marginalismo.

Considérese de nuevo la regla en (3.8) y razónese de forma análoga.

iii) Contribuciones equilibradas para jugadores necesarios y marginalismo no implican W-eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\mu^W$ de nuevo como contraejemplo.

3.6.3 Independencia de los axiomas en la caracterización del valor BG-Myerson

B-eficiencia en componentes conexas, L-marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores nulos.

- i)* B-eficiencia en componentes conexas y L-marginalismo no implican contribuciones equilibradas para jugadores nulos. Consideremos ψ en \mathcal{CS}^N , definida como sigue:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \mu_i^B(N, v, \gamma) + (|C_i^{N,\gamma}| - 1)\varepsilon, & \text{si } i = \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \\ \mu_i^B(N, v, \gamma) - \varepsilon, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $C_i^{N,\gamma}$ es la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i . ψ satisface trivialmente B-eficiencia en componentes conexas y L-marginalismo pero es obvio que no satisface contribuciones equilibradas para jugadores nulos.

- ii)* B-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas para jugadores nulos no implican L-marginalismo.

Para (N, v, γ) e $i \in N$, sea $(C_i^{N,\gamma})_0$ el subconjunto de los jugadores nulos que pertenecen a $C_i^{N,\gamma}$ la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i (podría ser el vacío). Definamos ψ en \mathcal{CS}^N de la siguiente forma:

$$\text{si } (C_i^{N,\gamma})_0 = \emptyset, \psi_i(N, v, \gamma) = \frac{\sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} \mu_j^B(N, v, \gamma)}{|C_i^{N,\gamma}|}, \text{ y}$$

$$\text{si } (C_i^{N,\gamma})_0 \neq \emptyset, \psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} \mu_j^B(N, v, \gamma)}{|(C_i^{N,\gamma})_0|}, & \text{si } i \in (C_i^{N,\gamma})_0, \\ 0, & \text{si } i \notin (C_i^{N,\gamma})_0. \end{cases}$$

La regla así definida satisface trivialmente B-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas para jugadores nulos pero no satisface L-marginalismo.

- iii)* L-marginalismo y contribuciones equilibradas para jugadores nulos no implican B-eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\mu^B$ como contraejemplo.

3.7 Resumen de las caracterizaciones

Como resumen de todas las propiedades consideradas anteriormente, y de su relación con los diferentes valores, se presenta la *Tabla 3.5*. Se puede destacar la transversalidad de la propiedad de contribuciones equilibradas para jugadores necesarios y para jugadores nulos, y de la propiedad de trato igualitario para jugadores necesarios. Las diferencias están presentes en los tipos de eficiencia y marginalismo satisfechos y en el hecho de verificar la propiedad de trato igualitario para jugadores nulos. Es decir, mientras que los jugadores necesarios reciben trato igualitario en las tres reglas, la recompensa que reciben los jugadores nulos depende de su capacidad para conectar a otros individuos en el grafo, i.e., de sus posibilidades de intermediación.

	M	WG-M	BG-M
Eficiencia en CC	✓	×	×
W-eficiencia en CC	×	✓	×
B-eficiencia en CC	×	×	✓
Contribuciones equilibradas	✓	×	×
Contribuciones equilibradas para necesarios	✓	✓	✓
Contribuciones equilibradas para nulos	✓	✓	✓
Trato igualitario para necesarios	✓	✓	✓
Trato igualitario para nulos	×	✓	×
Marginalismo	×	✓	×
L-marginalismo	×	×	✓
PL-marginalismo	✓	×	×

Tabla. 3.5: Resumen de propiedades y relación con los distintos valores.

3.8 Algunas cuestiones sobre equidad

En la caracterización del valor de Myerson la propiedad de equidad (fairness) puede sustituir a la de contribuciones equilibradas⁸. En esta sección demostraremos que el valor WG-Myerson verifica la propiedad de equidad para jugadores necesarios, mientras que el valor BG-Myerson verifica la propiedad de equidad para jugadores nulos. El valor de Myerson verifica la propiedad tanto para uno como para otro tipo de jugadores ya que la satisface para todos.

No obstante, permanece abierto el problema de determinar hasta qué punto en las caracterizaciones obtenidas en esta Memoria para los tres valores de Myerson,

⁸Originalmente fue la propiedad de contribuciones equilibradas la que sustituyó a la de equidad.

la propiedad de contribuciones equilibradas (para distintos tipos de jugadores) puede ser sustituida por la de equidad (para esos mismos tipos de jugadores u otros).

Definición 3.8.1. *Una regla de reparto ψ en \mathcal{CS}^N satisface la propiedad de equidad para los jugadores de $T \subseteq N$ si para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ e $i, j \in T$, $\{i, j\} \in \gamma$ se verifica que:*

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

Proposición 3.8.1. *El valor WG-Myerson verifica equidad para jugadores necesarios.*

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y sean i, j jugadores necesarios en (N, v) . Por el Lema 3.3.1, $v = v_i = v_j$ y así,

$$\begin{aligned} \mu_i^W(N, v, \gamma) - \mu_i^W(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) &= \mu_i(N, v_i, \gamma) - \mu_i(N, v_i, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) \\ &= \mu_i(N, v, \gamma) - \mu_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \mu_j(N, v, \gamma) - \mu_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) \\ &= \mu_j(N, v_j, \gamma) - \mu_j(N, v_j, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \mu_j^W(N, v, \gamma) - \mu_j^W(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}), \end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad se deben a la definición de μ^W , y la tercera a que el valor de Myerson verifica equidad. \square

Proposición 3.8.2. *El valor BG-Myerson satisface equidad para jugadores nulos.*

Demostración. Dado $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y dados i, j jugadores nulos en (N, v) , por el Lema 3.3.2, se tiene que, $v - v_i = v = v - v_j$ y así,

$$\begin{aligned} \mu_i^B(N, v, \gamma) - \mu_i^B(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) &= \mu_i(N, v - v_i, \gamma) - \mu_i(N, v - v_i, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) \\ &= \mu_i(N, v, \gamma) - \mu_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \mu_j(N, v, \gamma) - \mu_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) \\ &= \mu_j(N, v - v_j, \gamma) - \mu_j(N, v - v_j, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \mu_j^B(N, v, \gamma) - \mu_j^B(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}), \end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad se deben a la definición de μ^B , y la tercera a que el valor de Myerson verifica equidad. \square

Observación 3.8.1. *El valor BG-Myerson también satisface equidad para jugadores necesarios (ya que les asigna cero en cualquier situación de comunicación) y de forma equivalente, el valor WG-Myerson satisface equidad para los jugadores nulos (ya que les asigna cero en cualquier situación de comunicación). Por tanto, los tres valores verifican la propiedad de equidad para jugadores necesarios y nulos.*

Capítulo 4

Marginalismo y valores posicionales

En este capítulo, siguiendo un desarrollo paralelo al del anterior, se definen los valores WG-posicional y BG-posicional. Además, se caracterizarán estos valores así como el valor posicional utilizando, entre otras propiedades, los marginalismos definidos con anterioridad.

Después de incluir algunas propiedades del valor posicional se obtienen los valores WG-posicional y BG-posicional como descomposición aditiva de éste. Se demuestra que los valores posicional, WG-posicional y BG-posicional verifican PL-marginalismo, marginalismo y L-marginalismo, respectivamente. Por último, se obtienen caracterizaciones de los tres valores utilizando estos marginalismos, junto con algunas otras propiedades conocidas, algunas de ellas satisfechas solo por subconjuntos específicos de jugadores como los necesarios o los nulos. Finalmente se incluye un estudio de la independencia entre los distintos axiomas utilizados en cada caracterización.

4.1 Algunas cuestiones previas sobre el valor posicional

El valor posicional es la regla de reparto para situaciones de comunicación en la que el juego es cero-normalizado, π , que asigna a cada $i \in N$ en $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$:

$$\pi_i(N, v, \gamma) = \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^v),$$

donde $Sh_l(\gamma, r_\gamma^v)$ es el valor de Shapley del jugador l en el juego de los arcos, $(\gamma, r_\gamma^v) \in G^\gamma$, con:

$$r_\gamma^v(\eta) = v^\eta(N) = \sum_{C \in N/\eta} v(C), \quad \text{para todo } \eta \subseteq \gamma^1.$$

Observación 4.1.1. *Slikker (2005) define el juego de los arcos asociado a cualquier situación de comunicación como la restricción a su grafo de un juego, al que denomina juego-grafo, cuyo conjunto de jugadores es el grafo completo. Es decir, si $(N, v) \in G_0^N$ y $\gamma_N = \{\{i, j\} \mid i, j \in N, i \neq j\}$ es el grafo completo, el juego-grafo asociado a (N, v) es el juego (γ_N, r^v) con función característica dada por $r^v(\eta) = \sum_{C \in N/\eta} v(C)$ para cada $\eta \subseteq \gamma_N$. Así, dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$, en Slikker (2005), (γ, r_γ^v) es la restricción a γ de (γ_N, r^v) .*

Slikker (2005) proporcionó una caracterización general (sin condiciones sobre el grafo) del valor posicional para situaciones de comunicación en \mathcal{CS}_0^N utilizando las propiedades de eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos².

4.2 Descomposición del valor posicional: valores WG-posicional y BG-posicional

Dada una situación de comunicación $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$, para definir los valores WG-posicional y BG-posicional de $i \in N$, vamos a utilizar, como en el caso de sus valores de Myerson, los juegos (N, v_i) y (N, v_{-i}) , $i \in N$ y las situaciones de comunicación asociadas.

El valor WG-posicional de un jugador va a representar la parte de su valor posicional obtenida por su productividad en la función característica, mientras que, el valor BG-posicional supondrá la parte que recibe (del valor posicional) por su capacidad de intermediación en la conexión de otros.

Definición 4.2.1. *El valor WG-posicional, π^W , es la regla de reparto en \mathcal{CS}_0^N que asigna a cada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y cada $i \in N$:*

$$\pi_i^W(N, v, \gamma) = \pi_i(N, v_i, \gamma) = \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_i}).$$

Observación 4.2.1. *Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$, la función característica $r_\gamma^{v_i}$ asocia a cada $\eta \subseteq \gamma$ la cantidad:*

$$r_\gamma^{v_i}(\eta) = \sum_{C \in N/\eta} v_i(C) = \sum_{C \in N/\eta} [v(C) - v(C \setminus \{i\})] = v(C_i^{N, \eta}) - v(C_i^{N, \eta} \setminus \{i\}),$$

¹La restricción de que el juego sea cero-normalizado es necesaria para garantizar que $r_\gamma^v(\emptyset) = 0$.

²Ver *Proposición 2.3.12*.

siendo $C_i^{N,\eta}$ la componente conexa de (N, η) a la que pertenece i .

Por tanto, $r_\gamma^{v_i}$ proporciona la productividad de i a través de la función característica (contribución marginal) en su componente conexa en cada subgrafo de (N, γ) .

Definición 4.2.2. El valor BG-posicional, π^B , es la regla de reparto en CS_0^N que asigna a cada $(N, v, \gamma) \in CS_0^N$ y cada $i \in N$:

$$\pi_i^B(N, v, \gamma) = \pi_i(N, v_{-i}, \gamma) = \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_{-i}}).$$

La siguiente proposición y el lema que la precede garantizan que el valor posicional, para cada jugador, es la suma de los valores WG-posicional y BG-posicional.

Lema 4.2.1. Dada $(N, v, \gamma) \in CS_0^N$, se tiene que para todo $i \in N$, $r_\gamma^v = r_\gamma^{v_i} + r_\gamma^{v_{-i}}$.

Demostración. Sea $\eta \subseteq \gamma$,

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta) &= \sum_{C \in N/\eta} v(C) = \sum_{C \in N/\eta} (v_i + v_{-i})(C) = \sum_{C \in N/\eta} v_i(C) + \sum_{C \in N/\eta} v_{-i}(C) \\ &= r_\gamma^{v_i}(\eta) + r_\gamma^{v_{-i}}(\eta). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a que $v = v_i + v_{-i}$ y la tercera a la definición de suma de juegos. \square

Proposición 4.2.1. Dada $(N, v, \gamma) \in CS_0^N$ e $i \in N$,

$$\pi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^W(N, v, \gamma) + \pi_i^B(N, v, \gamma).$$

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in CS_0^N$ e $i \in N$. Por el lema anterior y la aditividad del valor de Shapley se tiene que,

$$\begin{aligned} \pi_i(N, v, \gamma) &= \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^v) = \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_i} + r_\gamma^{v_{-i}}) \\ &= \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_i}) + \sum_{l \in \gamma_i} \frac{1}{2} Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_{-i}}) = \pi_i^W(N, v, \gamma) + \pi_i^B(N, v, \gamma). \end{aligned}$$

\square

Para ilustrar estas definiciones vamos a calcular los valores WG-posicional y BG-posicional en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. Sea (N, v, γ) la situación de comunicación con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, función característica dada por $v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}}$ y grafo (N, γ) , donde: $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Una posible representación de dicho grafo, junto con una notación simplificada para los arcos, se encuentra en la Figura 4.1.

El juego de los arcos tiene por función característica $r_\gamma^v = u_{\{a\}} + u_{\{a,b\}} + u_{\{a,c,d\}} - u_{\{a,b,c,d\}}$. Por tanto,

$$Sh(\gamma, r_\gamma^v) = \left(\frac{19}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right), \text{ y } \pi(N, v, \gamma) = \left(\frac{19}{24}, \frac{23}{24}, \frac{2}{24}, \frac{4}{24} \right).$$

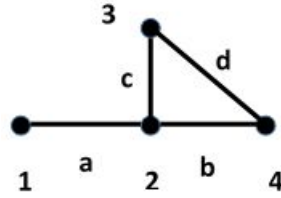


Figura. 4.1: Grafo (N, γ)

Por otro lado se tiene que:

$$v_i = \begin{cases} u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}}, & \text{si } i = 1, \\ u_{\{1,2\}}, & \text{si } i = 2, \\ 0, & \text{si } i = 3, \\ u_{\{1,4\}}, & \text{si } i = 4. \end{cases}$$

$$v_{-i} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, \\ u_{\{1,4\}}, & \text{si } i = 2, \\ u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}}, & \text{si } i = 3, \\ u_{\{1,2\}}, & \text{si } i = 4. \end{cases}$$

De donde,

$$r_\gamma^{v_i} = \begin{cases} u_{\{a\}} + u_{\{a,b\}} + u_{\{a,c,d\}} - u_{\{a,b,c,d\}}, & \text{si } i = 1, \\ u_{\{a\}}, & \text{si } i = 2, \\ 0, & \text{si } i = 3, \\ u_{\{a,b\}} + u_{\{a,c,d\}} - u_{\{a,b,c,d\}}, & \text{si } i = 4. \end{cases}$$

$$r_\gamma^{v_{-i}} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, \\ u_{\{a,b\}} + u_{\{a,c,d\}} - u_{\{a,b,c,d\}}, & \text{si } i = 2, \\ u_{\{a\}} + u_{\{a,b\}} + u_{\{a,c,d\}} - u_{\{a,b,c,d\}}, & \text{si } i = 3, \\ u_{\{a\}}, & \text{si } i = 4. \end{cases}$$

Entonces, los valores de Shapley de los diferentes arcos en los distintos juegos aparecen en la Tabla 4.1.

	$r_{\gamma}^{v_1}$	$r_{\gamma}^{v_2}$	$r_{\gamma}^{v_3}$	$r_{\gamma}^{v_4}$	r_{γ}^{v-1}	r_{γ}^{v-2}	r_{γ}^{v-3}	r_{γ}^{v-4}
<i>a</i>	$\frac{19}{12}$	1	0	$\frac{7}{12}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{19}{12}$	1
<i>b</i>	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
<i>c</i>	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
<i>d</i>	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

Tabla. 4.1: Valores de Shapley en los distintos juegos de los arcos

Los valores posicionales resultantes aparecen en la Tabla 4.2.

	π	π^W	π^B
<i>i</i> = 1	$\frac{19}{24}$	$\frac{19}{24}$	0
<i>i</i> = 2	$\frac{23}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$
<i>i</i> = 3	$\frac{2}{24}$	0	$\frac{2}{24}$
<i>i</i> = 4	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	0

Tabla. 4.2: Valores posicionales

Según se observa en la Tabla 4.2., el jugador 1 tiene una productividad de $\frac{19}{24}$ en la función característica y no intermedia en absoluto, dado que es un nodo terminal en el grafo. El jugador 2 tiene sus valores posicionales más compensados. Su productividad en la situación de comunicación vía la función característica es $\frac{1}{2}$ y obtiene casi lo mismo, $\frac{11}{24}$, dada su posición en la red que le permite intermediar para unir a 1 con 4. El jugador 3 es nulo en el juego y todo su valor posicional lo obtiene por intermediar entre 1 y 4. Finalmente, el jugador 4 no puede intermediar para conectar a 1 con 2 y todo lo que obtiene es debido a su papel en la función característica. Además, de acuerdo con la última proposición, $\pi(N, v, \gamma) = \pi^W(N, v, \gamma) + \pi^B(N, v, \gamma)$.

Al igual que en el caso de la descomposición del valor de Myerson, podemos caracterizar estos dos nuevos valores a partir de propiedades que los relacionan con el valor posicional.

Proposición 4.2.2. *El valor WG-posicional es la única regla de reparto en CS_0^N que es aditiva, verifica la propiedad del jugador nulo y coincide con el valor posicional para jugadores necesarios.*

Demostración. π^W satisface las tres propiedades citadas. Es aditiva pues es suma de valores de Shapley y el valor de Shapley verifica aditividad. Satisface la propiedad del jugador nulo, ya que si i es nulo entonces $v_i = \mathbf{0}$, $r_\gamma^{v_i} = \mathbf{0}$ y $Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_i}) = 0$, para todo $l \in \gamma_i$. Por último, si i es jugador necesario en v entonces $v = v_i$ y, por tanto, $r_\gamma^{v_i} = r_\gamma^v$, de donde $\pi_i = \pi_i^W$.

Veamos que el recíproco es cierto. Sea ψ una regla de reparto en CS_0^N verificando las tres propiedades citadas. Como ψ es aditiva, es suficiente probar la unicidad para situaciones de comunicación de la forma (N, Ku_S, γ) , donde $K \in \mathbb{R}$ y u_S , $s \geq 2$, es la función característica de un juego de unanimidad cero-normalizado. Si $i \notin S$ entonces es jugador nulo en Ku_S y $\psi_i(N, Ku_S, \gamma) = 0 = \pi_i^W(N, Ku_S, \gamma)$. Por otra parte, si $i \in S$ entonces es necesario en Ku_S y $\psi_i(N, Ku_S, \gamma) = \pi_i(N, Ku_S, \gamma) = \pi_i^W(N, Ku_S, \gamma)$. \square

Proposición 4.2.3. *El valor BG-posicional es la única regla de reparto en CS_0^N que es aditiva, nula para jugadores necesarios y coincide con el valor posicional para jugadores nulos.*

Demostración. π^B cumple las tres propiedades citadas. Es aditiva pues es suma de valores de Shapley y el valor de Shapley verifica aditividad. Es nula para jugadores necesarios ya que, si i es necesario en v entonces $v_{-i} = \mathbf{0}$, $r_\gamma^{v_{-i}} = \mathbf{0}$ y $Sh_l(\gamma, r_\gamma^{v_{-i}}) = 0$, para todo $l \in \gamma_i$. Por último, si i es jugador nulo entonces $v = v_{-i}$ y, por tanto, $r_\gamma^{v_{-i}} = r_\gamma^v$, de donde $\pi_i = \pi_i^B$.

Veamos entonces que el recíproco es cierto. Sea ψ una regla de reparto en CS_0^N verificando las tres propiedades citadas. Como ψ es aditiva es suficiente probar la unicidad para situaciones de comunicación de la forma (N, Ku_S, γ) , donde $K \in \mathbb{R}$ y u_S , $s \geq 2$, es la función característica de un juego de unanimidad cero-normalizado. Si $i \notin S$ entonces es jugador nulo en Ku_S y $\psi_i(N, Ku_S, \gamma) = \pi_i(N, Ku_S, \gamma) = \pi_i^B(N, Ku_S, \gamma)$. Por otra parte, si $i \in S$ entonces es necesario en Ku_S y $\psi_i(N, Ku_S, \gamma) = 0 = \pi_i^B(N, Ku_S, \gamma)$. \square

4.3 Marginalismos

En esta sección vamos a demostrar que los valores posicional, WG-posicional y BG-posicional verifican PL-marginalismo, marginalismo y L-marginalismo, respectivamente. Para ello utilizaremos los siguientes tres lemas.

Lema 4.3.1. Sean $(N, v), (N, w) \in G_0^N$ e $i \in N$. Son equivalentes:

- i) $v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S)$, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.
- ii) $v_i(S \cup \{i\}) - v_i(T \cup \{i\}) = w_i(S \cup \{i\}) - w_i(T \cup \{i\})$, para todo $T, S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Demostración. Para probar que i) implica ii) es suficiente con observar que para todo $S, T \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$v_i(S \cup \{i\}) - v_i(T \cup \{i\}) = [v(S \cup \{i\}) - v(S)] - [v(T \cup \{i\}) - v(T)],$$

y análogamente, para w .

Como $v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S)$ y $v(T \cup \{i\}) - v(T) = w(T \cup \{i\}) - w(T)$, la implicación queda probada.

Probar que ii) implica i) es trivial haciendo $T = \emptyset$ y notando que $v_i(\{i\}) = v(\{i\}) = 0$ por ser v cero-normalizado y análogamente para w . \square

Lema 4.3.2. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$. Son equivalentes:

- i) $r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v-i}(\eta) = r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{w-i}(\eta)$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, $\delta \subseteq \gamma_i$.
- ii) $r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta^*) = r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta^*)$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, $\delta, \delta^* \subseteq \gamma_i$.

Demostración. Para probar que i) implica ii) es suficiente con notar que para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, $\delta, \delta^* \subseteq \gamma_i$:

$$\begin{aligned} & r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta^*) \\ &= [r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v-i}(\eta)] - [r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta^*) - r_\gamma^{v-i}(\eta)] \\ &= [r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{w-i}(\eta)] - [r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta^*) - r_\gamma^{w-i}(\eta)] \\ &= r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta^*), \end{aligned}$$

y la implicación queda probada.

Probar que ii) implica i) es trivial haciendo $\delta^* = \emptyset$. \square

Lema 4.3.3. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$. Son equivalentes:

- i) $r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta)$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, $\delta \subseteq \gamma_i$.
- ii) $r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta \cup \delta^*) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta \cup \delta^*)$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, $\delta, \delta^* \subseteq \gamma_i$.

Demostración. Es análoga a la del lema anterior sustituyendo v_{-i} y w_{-i} por v y w respectivamente. \square

Proposición 4.3.1. *El valor posicional satisface PL-marginalismo.*

Demostración. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$ tales que $r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta)$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta \subseteq \gamma_i$. Por el Lema 4.3.3, ello es equivalente a que:

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta \cup \delta^*) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta \cup \delta^*) \text{ para todo } \eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta, \delta^* \subseteq \gamma_i. \quad (4.1)$$

Para cada $l \in \gamma_i$ y cada $\nu \subseteq \gamma \setminus \{l\}$, sea $\nu_i = \nu \cap \gamma_i$ el conjunto de los arcos de ν que inciden en i .

Se tiene que $\nu_i \subseteq \gamma_i$ y, por tanto, $\nu_i \cup \{l\} \subseteq \gamma_i$. Además, $\nu \setminus \nu_i \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, y entonces haciendo en la expresión (4.1), $\eta = \nu \setminus \nu_i, \delta = \nu_i \cup \{l\}$ y $\delta^* = \nu_i \subseteq \delta$ tenemos,

$$r_\gamma^v((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i \cup \{l\}) - r_\gamma^v((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i) = r_\gamma^w((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i \cup \{l\}) - r_\gamma^w((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i),$$

o equivalentemente,

$$r_\gamma^v(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^v(\nu) = r_\gamma^w(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^w(\nu).$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} \pi_i(N, v, \gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{\nu \subseteq \gamma \setminus \{l\}} \frac{(|\gamma| - |\nu| - 1)! |\nu|!}{|\gamma|!} [r_\gamma^v(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^v(\nu)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{\nu \subseteq \gamma \setminus \{l\}} \frac{(|\gamma| - |\nu| - 1)! |\nu|!}{|\gamma|!} [r_\gamma^w(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^w(\nu)] = \pi_i(N, w, \gamma). \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. \square

Ilustramos el resultado anterior con un ejemplo.

Ejemplo 4.3.1. Sean (N, v, γ) y (N, w, γ) situaciones de comunicación con $N = \{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1,2,3\}}$, $w = u_{\{1,2,3\}} + u_{\{2,3\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se encuentra en la Figura 4.2.

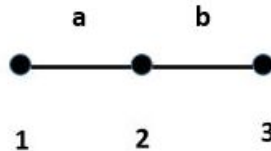


Figura. 4.2: Grafo (N, γ)

Se tiene que $r_\gamma^v = u_{\{a,b\}}$ y que $r_\gamma^w = u_{\{a,b\}} + u_{\{b\}}$. Para el jugador 1, $\gamma_1 = \{a\}$ y $\gamma \setminus \gamma_1 = \{b\}$.

Para $\eta = \emptyset$,

i) Si $\delta = \emptyset$ entonces

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\emptyset) - r_\gamma^v(\emptyset) = 0 = r_\gamma^w(\emptyset) - r_\gamma^w(\emptyset) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta).$$

ii) Si $\delta = \{a\}$ entonces

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) &= r_\gamma^v(\{a\}) - r_\gamma^v(\emptyset) = 0 \\ &= r_\gamma^w(\{a\}) - r_\gamma^w(\emptyset) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta). \end{aligned}$$

Para $\eta = \{b\}$.

i) Si $\delta = \emptyset$ entonces

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\{b\}) - r_\gamma^v(\{b\}) = 0 = r_\gamma^w(\{b\}) - r_\gamma^w(\{b\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta).$$

ii) Si $\delta = \{a\}$ entonces

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) &= r_\gamma^v(\{a, b\}) - r_\gamma^v(\{b\}) = 1 \\ &= r_\gamma^w(\{a, b\}) - r_\gamma^w(\{b\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto, todas las PL-contribuciones marginales del jugador 1 son iguales en ambas situaciones de comunicación. Como el valor posicional verifica PL-marginalismo, $\pi_1(N, v, \gamma)$ debe coincidir con $\pi_1(N, w, \gamma)$. Efectivamente, se tiene que, $\pi_1(N, v, \gamma) = \pi_1(N, w, \gamma) = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 4.3.2. Como se acaba de probar, el valor posicional verifica PL-marginalismo. Sin embargo, no verifica PL-monotonía fuerte. Para ello, sean (N, v, γ) y (N, w, γ) dos situaciones de comunicación con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v = u_{\{1,2,3\}}$, $w = u_{\{1,2,3,4\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se encuentra en la Figura 4.3.

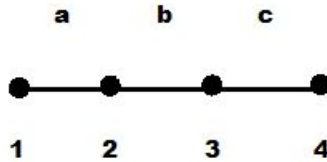


Figura. 4.3: Grafo (N, γ)

Se tiene que $r_\gamma^v = u_{\{a,b\}}$ y que $r_\gamma^w = u_{\{a,b,c\}}$. Para el jugador 3, $\gamma_3 = \{b, c\}$ y $\gamma \setminus \gamma_3 = \{a\}$.

Para $\eta = \emptyset$.

i) Si $\delta = \emptyset$ entonces

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\{\emptyset\}) - r_\gamma^v(\{\emptyset\}) = 0 = r_\gamma^w(\{\emptyset\}) - r_\gamma^w(\{\emptyset\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta).$$

ii) Si $\delta = \{b\}$ entonces

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\{b\}) - r_\gamma^v(\{\emptyset\}) = 0 = r_\gamma^w(\{b\}) - r_\gamma^w(\{\emptyset\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta).$$

iii) Si $\delta = \{c\}$ entonces

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\{c\}) - r_\gamma^v(\{\emptyset\}) = 0 = r_\gamma^w(\{c\}) - r_\gamma^w(\{\emptyset\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta).$$

iv) Si $\delta = \{b, c\}$ entonces

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) &= r_\gamma^v(\{b, c\}) - r_\gamma^v(\{\emptyset\}) = 0 \\ &= r_\gamma^w(\{b, c\}) - r_\gamma^w(\{\emptyset\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta). \end{aligned}$$

Para $\eta = \{a\}$.

i) Si $\delta = \emptyset$ entonces

$$r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) = r_\gamma^v(\{a\}) - r_\gamma^v(\{a\}) = 0 = r_\gamma^w(\{a\}) - r_\gamma^w(\{a\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta).$$

ii) Si $\delta = \{b\}$ entonces

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) &= r_\gamma^v(\{a, b\}) - r_\gamma^v(\{a\}) = 1 \\ &> 0 = r_\gamma^w(\{a, b\}) - r_\gamma^w(\{a\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta). \end{aligned}$$

iii) Si $\delta = \{c\}$ entonces

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) &= r_\gamma^v(\{a, c\}) - r_\gamma^v(\{a\}) = 0 \\ &= r_\gamma^w(\{a, c\}) - r_\gamma^w(\{a\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta). \end{aligned}$$

iv) Si $\delta = \{b, c\}$ entonces

$$\begin{aligned} r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta) &= r_\gamma^v(\{a, b, c\}) - r_\gamma^v(\{a\}) = 1 \\ &= r_\gamma^w(\{a, b, c\}) - r_\gamma^w(\{a\}) = r_\gamma^w(\eta \cup \delta) - r_\gamma^w(\eta). \end{aligned}$$

Entonces todas las PL-contribuciones marginales del jugador 3 son mayores o iguales en (N, v, γ) que en (N, w, γ) y sin embargo,

$$\pi_3(N, v, \gamma) = \frac{1}{2}[Sh_b(\gamma, r_\gamma^v) + Sh_c(\gamma, r_\gamma^v)] = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\pi_3(N, w, \gamma) = \frac{1}{2}[Sh_b(\gamma, r_\gamma^w) + Sh_c(\gamma, r_\gamma^w)] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Proposición 4.3.2. *El valor WG-posicional satisface marginalismo.*

Demostración. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$ tales que para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S)$. Por el Lema 4.3.1 ello equivale a que para todo $T, S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v_i(S \cup \{i\}) - v_i(T \cup \{i\}) = w_i(S \cup \{i\}) - w_i(T \cup \{i\})$.

Para todo $l \in \gamma_i$ y para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \{l\}$, sean $C_i^{N, \eta \cup \{l\}}$ y $C_i^{N, \eta}$ las componentes conexas respectivas a las que pertenece i en $(N, \eta \cup \{l\})$ y (N, η) . Entonces,

$$\begin{aligned} r_\gamma^{v_i}(\eta \cup \{l\}) - r_\gamma^{v_i}(\eta) &= v_i(C_i^{N, \eta \cup \{l\}}) - v_i(C_i^{N, \eta}) \\ &= v(C_i^{N, \eta \cup \{l\}}) - v(C_i^{N, \eta \cup \{l\}} \setminus \{i\}) - [v(C_i^{N, \eta}) - v(C_i^{N, \eta} \setminus \{i\})] \\ &= w(C_i^{N, \eta \cup \{l\}}) - w(C_i^{N, \eta \cup \{l\}} \setminus \{i\}) - [w(C_i^{N, \eta}) - w(C_i^{N, \eta} \setminus \{i\})] \\ &= w_i(C_i^{N, \eta \cup \{l\}}) - w_i(C_i^{N, \eta}) = r_\gamma^{w_i}(\eta \cup \{l\}) - r_\gamma^{w_i}(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto,

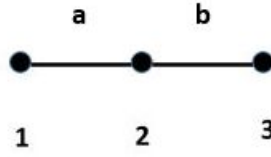
$$\begin{aligned} \pi_i^W(N, v, \gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{\eta \subseteq \gamma \setminus \{l\}} \frac{(|\gamma| - |\eta| - 1)! |\eta|!}{|\gamma|!} [r_\gamma^{v_i}(\eta \cup \{l\}) - r_\gamma^{v_i}(\eta)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{\eta \subseteq \gamma \setminus \{l\}} \frac{(|\gamma| - |\eta| - 1)! |\eta|!}{|\gamma|!} [r_\gamma^{w_i}(\eta \cup \{l\}) - r_\gamma^{w_i}(\eta)] = \pi_i^W(N, w, \gamma), \end{aligned}$$

y el valor WG-posicional satisface marginalismo. \square

Ilustramos el resultado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.3. Sean (N, v, γ) y (N, w, γ) dos situaciones de comunicación con $N = \{1, 2, 3\}$, $v = u_{\{1, 2, 3\}}$, $w = u_{\{1, 2, 3\}} + u_{\{2, 3\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, una de cuyas posibles representaciones se encuentra en la Figura 4.4.³

³En este caso, en realidad, el grafo es irrelevante.


 Figura. 4.4: Grafo (N, γ)

Para el jugador 1 la familia de los subconjuntos de $N \setminus \{1\}$ es $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$. Se tiene que, para todo $S \in \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$, $v(S \cup \{1\}) - v(S) = w(S \cup \{1\}) - w(S) = 0$, mientras que para $S = \{2, 3\}$, $v(S \cup \{1\}) - v(S) = w(S \cup \{1\}) - w(S) = 1$.

Por tanto, todas las contribuciones marginales del jugador 1 son iguales en ambas situaciones de comunicación. Como el valor WG-posicional satisface marginalismo, $\pi_1^W(N, v, \gamma)$ debe coincidir con $\pi_1^W(N, w, \gamma)$. Efectivamente,

$$\pi_1^W(N, v, \gamma) = \pi_1^W(N, w, \gamma) = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 4.3.4. El resultado anterior demuestra que el valor WG-posicional verifica marginalismo. Sin embargo, no es cierto que verifique monotonía fuerte. Utilizaremos el Ejemplo 4.3.2. El jugador 3 es necesario en (N, v) y (N, w) y, por tanto, $\pi_3^W(N, v, \gamma) = \pi_3(N, v, \gamma) = \frac{1}{4}$, y $\pi_3^W(N, w, \gamma) = \pi_3(N, w, \gamma) = \frac{1}{3}$.

Sin embargo, veamos que las contribuciones marginales del jugador 3 son mayores o iguales en el juego v que en el juego w . La familia de los subconjuntos de $N \setminus \{3\}$ es $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$.

Si $S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $v(S \cup \{3\}) - v(S) = w(S \cup \{3\}) - w(S) = 0$. Si $S = \{1, 2\}$, $v(S \cup \{3\}) - v(S) = 1 > w(S \cup \{3\}) - w(S) = 0$ y finalmente, si $S = \{1, 2, 4\}$, $v(S \cup \{3\}) - v(S) = 1 = w(S \cup \{3\}) - w(S)$.

Proposición 4.3.3. El valor BG-posicional satisface L-marginalismo.

Demostración. Sean $(N, v, \gamma), (N, w, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$ tales que $r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v-i}(\eta) = r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{w-i}(\eta)$, para todo $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta \subseteq \gamma_i$. Por el Lema 4.3.2, ello equivale a que,

$$r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v-i}(\eta \cup \delta^*) = r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{w-i}(\eta \cup \delta^*) \text{ para todo } \eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i, \delta, \delta^* \subseteq \gamma_i. \quad (4.2)$$

Para cada $l \in \gamma_i$ y cada $\nu \subseteq \gamma \setminus \{l\}$, sea $\nu_i = \nu \cap \gamma_i$ el conjunto de los arcos de ν que inciden en i .

Se tiene que $\nu_i \subseteq \gamma_i$ y por tanto $\nu_i \cup \{l\} \subseteq \gamma_i$. Además, $\nu \setminus \nu_i \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$. Entonces si en la expresión (4.2) hacemos $\eta = \nu \setminus \nu_i$, $\delta = \nu_i \cup \{l\}$ y $\delta^* = \nu_i \subseteq \delta$, se obtiene,

$$r_\gamma^{v-i}((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i \cup \{l\}) - r_\gamma^{v-i}((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i) = r_\gamma^{w-i}((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i \cup \{l\}) - r_\gamma^{w-i}((\nu \setminus \nu_i) \cup \nu_i),$$

o equivalentemente,

$$r_\gamma^{v-i}(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^{v-i}(\nu) = r_\gamma^{w-i}(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^{w-i}(\nu).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \pi_i^B(N, v, \gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{\nu \subseteq \gamma \setminus \{l\}} \frac{(|\gamma| - |\nu| - 1)! |\nu|!}{|\gamma|!} [r_\gamma^{v-i}(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^{v-i}(\nu)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{\nu \subseteq \gamma \setminus \{l\}} \frac{(|\gamma| - |\nu| - 1)! |\nu|!}{|\gamma|!} [r_\gamma^{w-i}(\nu \cup \{l\}) - r_\gamma^{w-i}(\nu)] = \pi_i^B(N, w, \gamma). \end{aligned}$$

□

Observación 4.3.1. *El resultado anterior prueba que el valor WG-posicional verifica L-marginalismo. Es un problema abierto determinar si el valor WG-posicional satisface L-monotonía fuerte.*

4.4 Eficiencia

En esta sección el valor de cada componente conexa se dividirá en la parte que los jugadores pueden mantener como consecuencia de las comunicaciones presentes en el grafo más la parte correspondiente a los costes de intermediación que deben afrontar y que surgen, precisamente, de cierta ineficiencia en las comunicaciones debida a la falta de conexión directa entre algunos de ellos. La primera de estas cantidades recibirá el nombre de eficiencia posicional en la comunicación en componentes conexas y coincidirá con la suma de los valores WG-posicional de los diferentes jugadores de la componente. La segunda recibirá el nombre de eficiencia posicional en la intermediación en componentes conexas y será igual a la suma de los valores BG-posicional de los jugadores de dicha componente. Para obtener estos resultados introducimos cierta notación adicional.

Dado $(N, \gamma) \in \Gamma^N$ y $\eta \subseteq \gamma$, notaremos $D(\eta) = \{k \in N \text{ tales que existe } m \in N \text{ con } \{k, m\} \in \eta\}$. En el grafo $(D(\eta), \eta)$, para cada $i \in D(\eta)$, $d_i(\eta)$ representará su grado y $rd_i(\eta) = \frac{d_i(\eta)}{\sum_{j \in D(\eta)} d_j(\eta)}$ su grado relativo.

Proposición 4.4.1. (Gómez et al., 2004) Dada $(N, u_S, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$, para cada $\emptyset \neq S \subseteq N$,

$$r_\gamma^{u_S} = 1 - \prod_{i=1}^{l(S)} (1 - u_{\eta_i^S}) = \sum_{i=1}^{l(S)} u_{\eta_i^S} - \sum_{i=1}^{l(S)-1} \sum_{j=i+1}^{l(S)} u_{\eta_i^S \cup \eta_j^S} + \dots + (-1)^{l(S)+1} u_{\cup_{i=1}^{l(S)} \eta_i^S},$$

si $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\eta_1^S, \dots, \eta_{l(S)}^S\}$ es la familia no vacía de los grafos minimales de conexión de S en (N, γ) y

$$r_\gamma^{u_S} = 0, \\ \text{si } \mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \emptyset.$$

Proposición 4.4.2. (Gómez et al., 2004) Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i \in N$, si $C_i^{N, \gamma}$ es la componente conexa de γ a la que pertenece i , entonces:

$$\begin{aligned} \pi_i(N, v, \gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq C_i^{N, \gamma}} \Delta_v(S) & \left[\sum_{j=1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S \cup \eta_k^S) \right. \\ & \left. + \dots + (-1)^{l(S)+1} rd_i(\cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S) \right], \end{aligned}$$

donde para cada $S \subseteq C_i^{N, \gamma}$, $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\eta_1^S, \dots, \eta_{l(S)}^S\}$ es la familia no vacía de los grafos minimales de conexión de S en (N, γ) .

Proposición 4.4.3. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y $C \in N/\gamma$, entonces:

$$\sum_{i \in C} \pi_i^W(N, v, \gamma) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq C} \Delta_v(S) \beta_\gamma(S),$$

con

$$\begin{aligned} \beta_\gamma(S) = \sum_{j=1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S \cup \eta_k^S) \\ + \dots + (-1)^{l(S)+1} rd(S, \cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S), \end{aligned}$$

donde, para cada $S \subseteq C$, $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\eta_1^S, \dots, \eta_{l(S)}^S\}$ es la familia no vacía de los grafos minimales de conexión de S en (N, γ) y para cada $S \subseteq C$ y cada $\eta \subseteq \gamma|_C$, $rd(S, \eta)$ es la proporción del grado total de η debida a los grados de los nodos de S .

Demostación. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y $C \in N/\gamma$. Para cada $i \in C$, utilizando la Proposición 4.4.2, se tiene que:

$$\pi_i^W(N, v, \gamma) = \pi_i(N, v_i, \gamma)$$

$$= \sum_{i \in S \subseteq C} \Delta_v(S) \left[\sum_{j=1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S \cup \eta_k^S) + \cdots + (-1)^{l(S)+1} rd_i(\cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S) \right].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} \pi_i^W(N, v, \gamma) &= \sum_{i \in C} \left\{ \sum_{i \in S \subseteq C} \Delta_v(S) \left[\sum_{j=1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S \cup \eta_k^S) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cdots + (-1)^{l(S)+1} rd_i(\cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Y sacando factor común a los dividendos,

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in C} \pi_i^W(N, v, \gamma) \\ &= \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) \sum_{i \in S} \left[\sum_{j=1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd_i(\eta_j^S \cup \eta_k^S) + \cdots + (-1)^{l(S)+1} rd_i(\cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S) \right] \\ &= \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) \left\{ \sum_{j=1}^{l(S)} \left[\sum_{i \in S} rd_i(\eta_j^S) \right] - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} \left[\sum_{i \in S} rd_i(\eta_j^S \cup \eta_k^S) \right] \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^{l(S)+1} \left[\sum_{i \in S} rd_i(\cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que para cada $S \subseteq C$ y para cada $\eta \subseteq \gamma_C$ $\sum_{i \in S} rd_i(\eta) = rd(S, \eta)$, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} \pi_i^W(N, v, \gamma) &= \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) \left\{ \sum_{j=1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S \cup \eta_k^S) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^{l(S)+1} rd(S, \cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S) \right\} = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq C} \Delta_v(S) \beta_\gamma(S), \end{aligned}$$

como se requería. \square

Definición 4.4.1. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}_0^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de eficiencia posicional en la comunicación en componentes conexas, WP-eficiencia en componentes conexas para abreviar, si dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y $C \in N/\gamma$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \gamma) = \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S) \beta_\gamma(S),$$

con

$$\beta_\gamma(S) = \sum_{j=1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S \cup \eta_k^S)$$

$$+ \dots + (-1)^{l(S)+1} rd(S, \cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S),$$

donde para cada $S \subseteq C$, $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\eta_1^S, \dots, \eta_{l(S)}^S\}$ es la familia no vacía de los grafos minimales de conexión de S en (N, γ) y para cada $S \subseteq C$ y cada $\eta \subseteq \gamma|_C$, $rd(S, \eta)$ es la proporción del grado total de η debida a los grados de los nodos de S .

$\beta_\gamma(S)$ representa la proporción del dividendo $\Delta_v(S)$ que los miembros de la coalición pueden mantener dadas las comunicaciones presentes en el grafo.

Definición 4.4.2. Una regla de reparto $\psi : \mathcal{CS}_0^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de eficiencia posicional en la intermediación en componentes conexas, BP-eficiencia en componentes conexas para abreviar, si dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y $C \in N/\gamma$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \gamma) = \sum_{S \subseteq C} \Delta_v(S)(1 - \beta_\gamma(S)),$$

con,

$$\begin{aligned} \beta_\gamma(S) = & \sum_{j=1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S) - \sum_{j=1}^{l(S)-1} \sum_{k=j+1}^{l(S)} rd(S, \eta_j^S \cup \eta_k^S) \\ & + \dots + (-1)^{l(S)+1} rd(S, \cup_{j=1}^{l(S)} \eta_j^S), \end{aligned}$$

donde para cada $S \subseteq C$, $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\eta_1^S, \dots, \eta_{l(S)}^S\}$ es la familia no vacía de los grafos minimales de conexión de S en (N, γ) y para cada $S \subseteq C$ y cada $\eta \subseteq \gamma|_C$, $rd(S, \eta)$ es la proporción del grado total de η debida a los grados de los nodos de S .

$1 - \beta_\gamma(S)$ representa la proporción del dividendo $\Delta_v(S)$ que los miembros de la coalición deben pagar a otros miembros fuera de dicha coalición (gastos de intermediación), como consecuencia de la ineficiencia en sus comunicaciones generada por la eventual falta de ciertas relaciones entre ellos.

Observación 4.4.1. Si en $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ para un cierto $S \subseteq N$ existe un único grafo minimal de conexión, η , tal que $S = D(\eta)$, entonces $\beta_\gamma(S) = 1$. Dicho de otro modo, cuando el conjunto S es internamente conexo en (N, γ) entonces este nivel de comunicación les permite mantener todo el dividendo. Sin embargo, si existe un único grafo minimal de conexión, η , para S en el que todos sus jugadores son nodos terminales y tal que $D(\eta) = N$, entonces $\beta_\gamma(S) = \frac{s}{2^n - 1}$. Cuanto mayor sea n y más pequeño sea s menor proporción de dividendo podrá mantener la coalición S y en consecuencia, mayores serán sus costes de intermediación.

Para ilustrar las definiciones anteriores veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.4.1. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}}$ y $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, una de cuyas posibles representaciones aparece en la Figura 4.5.

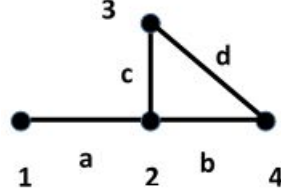


Figura. 4.5: Arcos en (N, γ)

Las únicas coaliciones en v con dividendo distinto de 0 son $\{1, 2\}$ y $\{1, 4\}$.

En el caso de $S = \{1, 2\}$, $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\{a\}\}$, y $\beta_\gamma(\{1, 2\}) = rd(\{1, 2\}, \{a\}) = 1$. Los jugadores 1 y 2 están directamente conectados y pueden preservar todo su dividendo sin tener que pagar intermediarios.

En el caso de $S = \{1, 4\}$ se tiene que $\mathcal{MCG}(S, N, \gamma) = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}\}$. Por tanto, $\beta_\gamma(\{1, 4\}) = rd(\{1, 4\}, \{a, b\}) + rd(\{1, 4\}, \{a, c, d\}) - rd(\{1, 4\}, \{a, b, c, d\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}$. Es decir, 1 y 4 tienen que ceder $\frac{13}{24}$ de su dividendo a 2 y 3 por su labor de intermediación para conectarlos.

Así el valor de la eficiencia posicional en la comunicación en componentes conexas, WP-eficiencia en componentes, será:

$$\sum_{S \subseteq N} \Delta_v(S) \beta_\gamma(S) = 1 + \frac{11}{24} = \frac{35}{24}.$$

mientras que el valor de la eficiencia posicional en la intermediación en componentes conexas, BP-eficiencia en componentes conexas, será:

$$\sum_{S \subseteq N} \Delta_v(S) (1 - \beta_\gamma(S)) = \frac{13}{24}.$$

Lo cual es consistente con los valores posicionales calculados en el Ejemplo 4.2.1.

Observación 4.4.2. A partir de la caracterización del valor posicional de Slikker (2005) y de la Proposición 4.4.3 se tiene que el valor posicional verifica eficiencia en componentes conexas, el valor WG-posicional verifica WP-eficiencia en componentes conexas y el valor BG-posicional verifica BP-eficiencia en componentes conexas.

4.5 Contribuciones equilibradas en arcos

La caracterización del valor posicional de Slikker (2005) utiliza la propiedad de contribuciones equilibradas en arcos. En esta sección probaremos que los valores WG-posicional y BG-posicional satisfacen tal propiedad tanto para jugadores necesarios como para jugadores nulos.

Definición 4.5.1. Una regla de reparto ψ en \mathcal{CS}_0^N satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en arcos para los jugadores de $T \subseteq N$, si para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e $i, j \in T$,

$$\sum_{l \in \gamma_j} [\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l\})] = \sum_{l' \in \gamma_i} [\psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l'\})].$$

Proposición 4.5.1. El valor WG-posicional verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios.

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e i, j jugadores necesarios en (N, v) . Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \gamma_j} [\pi_i^W(N, v, \gamma) - \pi_i^W(N, v, \gamma \setminus \{l\})] &= \sum_{l \in \gamma_j} [\pi_i(N, v_i, \gamma) - \pi_i(N, v_i, \gamma \setminus \{l\})] \\ &= \sum_{l \in \gamma_j} [\pi_i(N, v, \gamma) - \pi_i(N, v, \gamma \setminus \{l\})] = \sum_{l' \in \gamma_i} [\pi_j(N, v, \gamma) - \pi_j(N, v, \gamma \setminus \{l'\})] \\ &= \sum_{l' \in \gamma_i} [\pi_j(N, v_j, \gamma) - \pi_j(N, v_j, \gamma \setminus \{l'\})] \\ &= \sum_{l' \in \gamma_i} [\pi_j^W(N, v, \gamma) - \pi_j^W(N, v, \gamma \setminus \{l'\})], \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la definición del valor WG-posicional, la segunda a que, por el *Lema 3.3.1*, $v_i = v_j = v$ por ser i, j jugadores necesarios, la tercera a que el valor posicional satisface contribuciones equilibradas en arcos y la cuarta y la quinta de nuevo al *Lema 3.3.1* y a la definición de valor WG-posicional, respectivamente. \square

Proposición 4.5.2. El valor BG-posicional satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos.

Demostración. Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ e i, j jugadores nulos en (N, v) . Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \gamma_j} [\pi_i^B(N, v, \gamma) - \pi_i^B(N, v, \gamma \setminus \{l\})] &= \sum_{l \in \gamma_j} [\pi_i(N, v_{-i}, \gamma) - \pi_i(N, v_{-i}, \gamma \setminus \{l\})] \\ &= \sum_{l \in \gamma_j} [\pi_i(N, v, \gamma) - \pi_i(N, v, \gamma \setminus \{l\})] = \sum_{l' \in \gamma_i} [\pi_j(N, v, \gamma) - \pi_j(N, v, \gamma \setminus \{l'\})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l' \in \gamma_i} [\pi_j(N, v_{-j}, \gamma) - \pi_j(N, v_{-j}, \gamma \setminus \{l'\})] \\
 &= \sum_{l' \in \gamma_i} [\pi_j^B(N, v, \gamma) - \pi_j^B(N, v, \gamma \setminus \{l'\})],
 \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la definición del valor BG-posicional, la segunda a que, por el *Lema 3.3.2*, $v_{-i} = v_{-j} = v$ por ser i, j nulos, la tercera a que el valor posicional satisface contribuciones equilibradas en arcos y la cuarta y la quinta de nuevo al *Lema 3.3.2* y a la definición de valor BG-posicional, respectivamente. \square

Observación 4.5.1. *El valor BG-posicional también satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios (ya que el valor BG-posicional de un jugador necesario es cero en cualquier situación de comunicación). De igual modo, el valor de WG-posicional verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos (ya que el valor WG-posicional de un jugador nulo es cero en cualquier situación de comunicación). Por tanto, los tres valores verifican la propiedad de contribuciones equilibradas en arcos, tanto para jugadores necesarios como para jugadores nulos.*

4.6 Caracterizaciones

Esta sección está dedicada a la caracterización del valor posicional y de su descomposición utilizando los distintos marginalismos y eficiencias definidos en las secciones anteriores y la propiedad de contribuciones equilibradas en arcos para ciertos subconjuntos de jugadores.

4.6.1 Caracterización del valor posicional

Proposición 4.6.1. *El valor posicional es la única regla de reparto en \mathcal{CS}_0^N que satisface eficiencia en componentes conexas, contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios y PL-marginalismo.*

Demostración. Ya hemos probado que el valor posicional satisface PL-marginalismo y es conocido que verifica eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos (Slikker, 2005), en particular, para jugadores necesarios.

Recíprocamente, sea $\psi : \mathcal{CS}_0^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla de asignación que verifica estas tres propiedades. Vamos a probar que $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i(N, v, \gamma)$ para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y para todo $i \in N$.

En primer lugar, consideremos el juego restringido al grafo, (N, v^γ) . Para todo $i \in N$, $\delta \subseteq \gamma_i$, $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$,

$$r_\gamma^{v^\gamma}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v^\gamma}(\eta) = \sum_{C \in N/(\eta \cup \delta)} v^\gamma(C) - \sum_{C \in N/\eta} v^\gamma(C).$$

Como cualquier componente conexa, C , de un subgrafo de γ es un conjunto conexo en γ , se tiene que $v^\gamma(C) = v(C)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{C \in N/(\eta \cup \delta)} v^\gamma(C) - \sum_{C \in N/\eta} v^\gamma(C) &= \sum_{C \in N/(\eta \cup \delta)} v(C) - \sum_{C \in N/\eta} v(C) \\ &= r_\gamma^v(\eta \cup \delta) - r_\gamma^v(\eta). \end{aligned}$$

Dado que tanto ψ como π satisfacen PL-marginalismo, entonces,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) &= \psi_i(N, v, \gamma), \\ \pi_i(N, v^\gamma, \gamma) &= \pi_i(N, v, \gamma). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por tanto, es suficiente probar el resultado para las situaciones de comunicación de la forma (N, v^γ, γ) .

La demostración utilizará inducción sobre $d(N, v^\gamma)$, el cardinal de $\delta(N, v^\gamma) = \{S \mid \Delta_{v^\gamma}(S) \neq 0\}$.

Sea (N, v, γ) tal que $d(N, v^\gamma) = 0$. Entonces, todo $i \in N$ es un jugador necesario en v^γ . Vamos a probar que, en este caso, $\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma)$ por inducción sobre $|\gamma|$.

Si $|\gamma| = 0$ entonces i es aislado en (N, γ) y por la eficiencia en componentes conexas $\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = v^\gamma(\{i\}) = 0 = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma)$ y el resultado queda probado.

Supongamos que el resultado es cierto para todo γ con $|\gamma| \leq r$, $r \geq 0$ y sea γ tal que $|\gamma| = r + 1$.

Sea $C_i^{N, \gamma}$ la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i . Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$, por eficiencia en componentes conexas y análogamente al caso anterior $\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma) = 0$. En otro caso, para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$, utilizando contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios se tiene que:

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \psi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \psi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y como $|\gamma \setminus \{l\}| < r + 1$ y $|\gamma \setminus \{l'\}| < r + 1$, aplicando la hipótesis de inducción (sobre $|\gamma|$) y el hecho de que el juego v^γ es el juego nulo,

$$\psi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l'\}) = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l'\}) = 0, \quad l' \in \gamma_j,$$

$$\psi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l\}) = \pi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l\}) = 0, \quad l \in \gamma_i,$$

de donde,

$$|\gamma_j| \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = |\gamma_i| \psi_j(N, v^\gamma, \gamma),$$

o,

$$\psi_j(N, v^\gamma, \gamma) = \frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|} \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = c |\gamma_j| \text{ para todo } j \in C_i^{N, \gamma}.$$

Obsérvese que $|\gamma_i|$ y $|\gamma_j|$ son estrictamente positivos.

Por la eficiencia en componentes conexas,

$$0 = \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) = \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} c |\gamma_j|,$$

de donde $c = 0$ y $\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = 0 = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma)$, lo que completa la inducción sobre $|\gamma|$ y el resultado para $d(N, v^\gamma) = 0$.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para situaciones de comunicación (N, v, γ) tales que $d(N, v^\gamma) \leq k$, $k \geq 0$, y consideremos (N, v, γ) con $\delta(N, v^\gamma) = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$ y, por tanto, con $d(N, v^\gamma) = k + 1$. Entonces, $v^\gamma = \sum_{m=1}^{k+1} \Delta_{v^\gamma}(S_m) u_{S_m}$.

Si $i \notin \bigcap_{m=1}^{k+1} S_m$, consideremos:

$$(v^\gamma)_i = \sum_{S_m: i \in S_m} \Delta_{v^\gamma}(S_m) u_{S_m}.$$

Para cada $\delta \subseteq \gamma_i$, $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$, sean $C_i^{N, \eta \cup \delta}$ y $C_i^{N, \eta}$ las componentes conexas en $(N, \eta \cup \delta)$ y (N, η) , respectivamente, a las que pertenece i . Así,

$$\begin{aligned} r_\gamma^{(v^\gamma)_i}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{(v^\gamma)_i}(\eta) &= (v^\gamma)_i(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - 0 \\ &= v^\gamma(C_i^{N, \eta \cup \delta}) - v^\gamma(C_i^{N, \eta \cup \delta} \setminus \{i\}) = r_\gamma^{v^\gamma}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v^\gamma}(\eta). \end{aligned}$$

Entonces, utilizando que tanto ψ como π verifican PL-marginalismo,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) &= \psi_i(N, v^\gamma, \gamma), \\ \pi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) &= \pi_i(N, v^\gamma, \gamma). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ahora bien, $d(N, (v^\gamma)_i) \leq k$, y por la hipótesis de inducción,

$$\psi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) = \pi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma). \tag{4.5}$$

Por tanto, de (4.3), (4.4) y (4.5),

$$\begin{aligned}\psi_i(N, v, \gamma) &= \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \psi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) \\ &= \pi_i(N, (v^\gamma)_i, \gamma) = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \pi_i(N, v, \gamma).\end{aligned}$$

Entonces, el resultado queda probado en el caso de que $i \notin \bigcap_{m=1}^{k+1} S_m$.

Para terminar, supongamos ahora que $i \in \bigcap_{m=1}^{k+1} S_m$, i.e., i es jugador necesario en (N, v^γ) . Sea $C_i^{N, \gamma}$, la componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i .

Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$, ó i es el único jugador necesario en la componente, entonces por eficiencia en componentes conexas (y del hecho de que para todos los jugadores no necesarios las reglas coinciden) ambas reglas asignan lo mismo.

Sea $j \neq i$, $j \in C_i^{N, \gamma}$ y j necesario en (N, v^γ) .

Probaremos la igualdad de las reglas en i por inducción sobre $|\gamma|$. Si $|\gamma| = 1$, entonces $C_i^{N, \gamma} = \{i, j\}$ y como ψ verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios,

$$\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \psi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \psi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

En $\gamma \setminus \{\{i, j\}\}$, i y j están aislados, y por tanto, por la eficiencia en componentes conexas, $\psi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = 0$.

Entonces, la regla ψ asigna tanto a i como a j , $\frac{v^\gamma(C_i^{N, \gamma})}{2}$, que coincide con lo que asigna π a ambos jugadores, ya que π también satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios y eficiencia.

Supongamos, entonces, que el resultado es cierto si $|\gamma| \leq r$, $r \geq 1$ y sea $|\gamma| = r + 1$. Como ψ satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios,

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \psi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \psi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y como $|\gamma \setminus \{l\}| = |\gamma \setminus \{l'\}| \leq r$, aplicando la hipótesis de inducción,

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \pi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \pi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l'\}).$$

Por otra parte, π verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios, luego,

$$|\gamma_i| \pi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \pi_j(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \pi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \pi_i(N, v^\gamma, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y entonces,

$$|\gamma_i|\psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - |\gamma_j|\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = |\gamma_i|\pi_j(N, v^\gamma, \gamma) - |\gamma_j|\pi_i(N, v^\gamma, \gamma),$$

es decir,

$$|\gamma_i|[\psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \pi_j(N, v^\gamma, \gamma)] = |\gamma_j|[\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \pi_i(N, v^\gamma, \gamma)].$$

Por tanto,

$$\psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \pi_j(N, v^\gamma, \gamma) = |\gamma_j| \frac{1}{|\gamma_i|} [\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) - \pi_i(N, v^\gamma, \gamma)] = |\gamma_j|c,$$

para todo $j \in C_i^{N,\gamma}$, j necesario en (N, v^γ) .

Por la eficiencia en componentes conexas, y dado que para todos los jugadores no necesarios ambas reglas coinciden,

$$\sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} \psi_j(N, v^\gamma, \gamma) = \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} \pi_j(N, v^\gamma, \gamma),$$

donde $(C_i^{N,\gamma})_n$ es el conjunto de jugadores necesarios en $C_i^{N,\gamma}$. Y así,

$$0 = \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} [\psi_j(N, v^\gamma, \gamma) - \pi_j(N, v^\gamma, \gamma)] = \sum_{j \in (C_i^{N,\gamma})_n} |\gamma_j|c,$$

de donde, $c = 0$ y $\psi_i(N, v^\gamma, \gamma) = \pi_i(N, v^\gamma, \gamma)$, con lo que se completa la inducción para r y para k quedando probado el resultado. \square

4.6.2 Caracterización del valor WG-posicional

Proposición 4.6.2. *El valor WG-posicional es la única regla de reparto en \mathcal{CS}_0^N que verifica WP-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios.*

Demostración. Ya hemos demostrado que el valor WG-posicional verifica WP-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios.

Recíprocamente, sea $\psi : \mathcal{CS}_0^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla de asignación que satisface las tres propiedades anteriores. Vamos a probar que $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^W(N, v, \gamma)$ para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}_0^N$ y para todo $i \in N$.

La demostración utilizará inducción sobre $d(N, v)$, el cardinal de $\delta(N, v) = \{S \mid \Delta_v(S) \neq 0\}$.

Sea (N, v, γ) tal que $d(N, v) = 0$. Entonces todo $i \in N$ es un jugador necesario en (N, v) . Vamos a probar que, en este caso, $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^W(N, v, \gamma)$ por inducción sobre $|\gamma|$.

Si $|\gamma| = 0$, entonces i es aislado en (N, γ) y por WP-eficiencia en componentes conexas, $\psi_i(N, v, \gamma) = v(\{i\}) = 0 = \pi_i^W(N, v, \gamma)$ ⁴ y el resultado queda probado en este caso.

Supongamos que se da la igualdad para todo γ con $|\gamma| \leq r$, $r \geq 0$, y sea γ con $|\gamma| = r + 1$.

Sea $C_i^{N, \gamma}$ la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i . Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$, por WP-eficiencia en componentes conexas y análogamente al caso anterior, $\psi_i(N, v, \gamma) = 0 = \pi_i^W(N, v, \gamma)$. En otro caso, para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$, utilizando contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios, se tiene que:

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y como $|\gamma \setminus \{l\}| < r + 1$ y $|\gamma \setminus \{l'\}| < r + 1$, aplicando la hipótesis de inducción y el hecho de que el juego v es el juego nulo,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l'\}) &= \pi_i^W(N, v, \gamma \setminus \{l'\}) = 0, \text{ si } l' \in \gamma_j, \\ \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}) &= \pi_j^W(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = 0, \text{ si } l \in \gamma_i. \end{aligned}$$

De donde, $|\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) = |\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma)$, es decir, para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$,

$$\psi_j(N, v, \gamma) = \frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|} \psi_i(N, v, \gamma) = |\gamma_j| c,$$

con $c = \frac{1}{|\gamma_i|} \psi_i(N, v, \gamma)$.

Obsérvese que $|\gamma_i|$ y $|\gamma_j|$ son estrictamente positivos.

Por WP-eficiencia en componentes conexas,

$$0 = \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} \psi_j(N, v, \gamma) = \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} |\gamma_j| c,$$

de donde $c = 0$ y $\psi_i(N, v, \gamma) = 0 = \pi_i^W(N, v, \gamma)$, lo que completa la inducción sobre $|\gamma|$ y el resultado para $d(N, v) = 0$.

⁴Recordemos que el juego es cero-normalizado.

Supongamos entonces que el resultado es cierto para todo (N, v) con $d(N, v) \leq k$, $k \geq 0$ y sea (N, v) con $d(N, v) = k + 1$ y $\delta(N, v) = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$. Entonces $v = \sum_{m=1}^{k+1} \Delta_v(S_m)u_{S_m}$. Supongamos que $i \notin \bigcap_{m=1}^{k+1} S_m$, i.e., i es un jugador no necesario en (N, v) . Sea $v_i = \sum_{S_m: i \in S_m} \Delta_v(S_m)u_{S_m}$.

Entonces, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v_i(S \cup \{i\}) = v_i(S \cup \{i\}) - v_i(S),$$

y como ψ verifica marginalismo, $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, v_i, \gamma)$.

Ahora bien, $d(N, v_i) < d(N, v)$ y por hipótesis de inducción, entonces:

$$\psi_i(N, v_i, \gamma) = \pi_i^W(N, v_i, \gamma).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, \gamma) &= \psi_i(N, v_i, \gamma) = \pi_i^W(N, v_i, \gamma) \\ &= \pi_i(N, (v_i)_i, \gamma) = \pi_i(N, v_i, \gamma) = \pi_i^W(N, v, \gamma), \end{aligned}$$

y en este caso, el resultado queda probado.

Finalmente, supongamos que $i \in \bigcap_{m=1}^{k+1} S_m$, i.e., i es un jugador necesario en (N, v) . Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$ o i es el único jugador necesario en la componente, de nuevo por WP-eficiencia en componentes conexas (y por el hecho de que para todos los jugadores no necesarios las reglas coinciden), se tiene el resultado.

Sea $j \neq i$, $j \in C_i^{N, \gamma}$ y j necesario en (N, v) . Haremos la demostración por inducción sobre $|\gamma|$. Si $|\gamma| = 1$, entonces $C_i^{N, \gamma} = \{i, j\}$ y como ψ verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

En $\gamma \setminus \{\{i, j\}\}$, i y j están aislados y por la WP-eficiencia en componentes conexas,

$$\psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = 0.$$

Luego,

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma),$$

y entonces la regla ψ asigna tanto a i como a j , $\frac{v^\gamma(C_i^{N, \gamma})}{2}$, que coincide con lo que asigna π^W a ambos jugadores, ya que π^W también satisface contribuciones

equilibradas en arcos para jugadores necesarios y WP-eficiencia.

Supongamos entonces que el resultado es cierto si $|\gamma| \leq r$, $r \geq 1$ y sea $|\gamma| = r + 1$.

Como ψ verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios,

$$|\gamma_i|\psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j|\psi_i(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y por ser $|\gamma \setminus \{l\}| = |\gamma \setminus \{l'\}| \leq r$, aplicando la hipótesis de inducción,

$$|\gamma_i|\psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \pi_j^W(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j|\psi_i(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \pi_i^W(N, v, \gamma \setminus \{l'\}).$$

Por otra parte, π^W verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios, luego,

$$|\gamma_i|\pi_j^W(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \pi_j^W(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j|\pi_i^W(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \pi_i^W(N, v, \gamma \setminus \{l'\}).$$

Entonces,

$$|\gamma_i|\psi_j(N, v, \gamma) - |\gamma_j|\psi_i(N, v, \gamma) = |\gamma_i|\pi_j^W(N, v, \gamma) - |\gamma_j|\pi_i^W(N, v, \gamma),$$

es decir,

$$|\gamma_i|[\psi_j(N, v, \gamma) - \pi_j^W(N, v, \gamma)] = |\gamma_j|[\psi_i(N, v, \gamma) - \pi_i^W(N, v, \gamma)],$$

y así, $\psi_j(N, v, \gamma) - \pi_j^W(N, v, \gamma) = \frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|}[\psi_i(N, v, \gamma) - \pi_i^W(N, v, \gamma)] = |\gamma_j|c$, para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$, j necesario en (N, v) .

Por la WP-eficiencia en componentes conexas, y por el hecho de que para todos los jugadores no necesarios ambas reglas coinciden,

$$\sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_n} \psi_j(N, v, \gamma) = \sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_n} \pi_j^W(N, v, \gamma),$$

donde $(C_i^{N, \gamma})_n$ es el conjunto de jugadores necesarios en $C_i^{N, \gamma}$. Por tanto,

$$0 = \sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_n} [\psi_j(N, v, \gamma) - \pi_j^W(N, v, \gamma)] = \sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_n} |\gamma_j|c,$$

y como para todo $j \in (C_i^{N, \gamma})_n$ se tiene que $|\gamma_j| > 0$, entonces $c = 0$ y $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^W(N, v, \gamma)$, con lo que se completa la inducción para r y para k , y el resultado queda probado. \square

4.6.3 Caracterización del valor BG-posicional

Proposición 4.6.3. *El valor BG-posicional es la única regla de reparto en \mathcal{CS}_0^N que satisface BP-eficiencia en componentes conexas, contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos y L-marginalismo.*

Demostración. Ya hemos demostrado que el valor BG-posicional verifica BP-eficiencia en componentes conexas, L-marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos.

Recíprocamente, sea $\psi : \mathcal{CS}_0^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla de asignación que satisface las tres propiedades anteriores. Vamos a probar que $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^B(N, v, \gamma)$ para todo $i \in N$, por inducción sobre $d(N, v)$, cardinal de $\delta(N, v) = \{S \mid \Delta_v(S) \neq 0\}$.

Sea (N, v) con $d(N, v) = 0$. Entonces todos los jugadores son nulos en (N, v) . Vamos a probar que, en este caso, $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^B(N, v, \gamma)$, para $i \in N$, por inducción sobre $|\gamma|$.

Si γ es tal que $|\gamma| = 0$, todos los jugadores están aislados en γ , y entonces, $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$ (donde $C_i^{N, \gamma}$ es la componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i), con lo que $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^B(N, v, \gamma)$, dado que las dos reglas verifican BP-eficiencia en componentes conexas.

Supongamos que el resultado es cierto para todo γ tal que $|\gamma| \leq r$, $r \geq 0$, y sea γ con $|\gamma| = r + 1$.

Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$, utilizando BP-eficiencia en componentes conexas el resultado es cierto. Supongamos que existe $j \neq i$, $j \in C_i^{N, \gamma}$. Como ψ satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos,

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y como $|\gamma \setminus \{l\}| = |\gamma \setminus \{l'\}| < r + 1$, para todo $l \in \gamma_i$, $l' \in \gamma_j$, aplicando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l'\}) &= \pi_i^B(N, v, \gamma \setminus \{l'\}) = 0, \text{ si } l' \in \gamma_j, \\ \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}) &= \pi_j^B(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = 0, \text{ si } l \in \gamma_i, \end{aligned}$$

de donde,

$$|\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) = |\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma),$$

es decir,

$$\psi_j(N, v, \gamma) = \frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|} \psi_i(N, v, \gamma) = |\gamma_j|c, \text{ para todo } j \in C_i^{N, \gamma}.$$

Nótese que $|\gamma_i|$ y $|\gamma_j|$ son positivos. Como ψ cumple BP-eficiencia en componentes conexas y el valor de la componente es cero,

$$0 = \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} \psi_j(N, v, \gamma) = \sum_{j \in C_i^{N, \gamma}} |\gamma_j|c,$$

entonces $c = 0$ y $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^B(N, v, \gamma)$, lo que completa la inducción sobre $|\gamma|$ y el resultado para $d(N, v) = 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para todo (N, v) tal que $d(N, v) \leq k$, $k \geq 0$ y sea (N, v) con $d(N, v) = k + 1$ y $\delta(N, v) = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$. Entonces, $v = \sum_{m=1}^{k+1} \Delta_v(S_m)u_{S_m}$.

Si $i \in N$ es tal que existe $m' \in \{1, \dots, k+1\}$ con $i \in S_{m'}$, i.e., i es un jugador no nulo, sea el juego $v_{-i} = v - v_i = \sum_{S_m: i \notin S_m} \Delta_v(S_m)u_{S_m}$.

Se tiene que $(v_{-i})_{-i} = v_{-i}$ y entonces, para todo $\delta \subseteq \gamma_i$, $\eta \subseteq \gamma \setminus \gamma_i$,

$$r_\gamma^{v_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{v_{-i}}(\eta) = r_\gamma^{(v_{-i})_{-i}}(\eta \cup \delta) - r_\gamma^{(v_{-i})_{-i}}(\eta),$$

y como ψ verifica L-marginalismo, $\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_i(N, v_{-i}, \gamma)$.

Ahora bien, $d(N, v_{-i}) \leq k$ y entonces, por la hipótesis de inducción,

$$\psi_i(N, v_{-i}, \gamma) = \pi_i^B(N, v_{-i}, \gamma).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \psi_i(N, v, \gamma) &= \psi_i(N, v_{-i}, \gamma) = \pi_i^B(N, v_{-i}, \gamma) \\ &= \pi_i(N, (v_{-i})_{-i}, \gamma) = \pi_i(N, v_{-i}, \gamma) = \pi_i^B(N, v, \gamma), \end{aligned}$$

y en este caso, el resultado queda probado.

Finalmente, supongamos que $i \in N$ es tal que para todo $m \in \{1, \dots, k+1\}$, $i \notin S_m$, i.e., i es un jugador nulo en (N, v) . Si $C_i^{N, \gamma} = \{i\}$ o i es el único jugador nulo en la componente, de nuevo por BP-eficiencia en componentes conexas (y por el hecho de que para todos los jugadores no nulos las reglas coinciden) se tiene el resultado.

Sea $j \neq i$, $j \in C_i^{N, \gamma}$ y j nulo en (N, v) . Haremos la demostración por inducción sobre $|\gamma|$. Si $|\gamma| = 1$, entonces $C_i^{N, \gamma} = \{i, j\}$ y como ψ verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

En $\gamma \setminus \{\{i, j\}\}$, i y j están aislados y por la BP-eficiencia en componentes conexas,

$$\psi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = 0,$$

de donde,

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \psi_j(N, v, \gamma),$$

y de nuevo, por la BP-eficiencia, la regla ψ asigna tanto a i como a j , 0, que coincide con lo que asigna π^B a ambos jugadores, ya que π^B también satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos y BP-eficiencia.

Supongamos entonces que el resultado es cierto si $|\gamma| \leq r$, $r \geq 1$ y sea $|\gamma| = r + 1$. Como ψ verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos,

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l'\}),$$

y por ser $|\gamma \setminus \{l\}| = |\gamma \setminus \{l'\}| \leq r$, aplicando la hipótesis de inducción,

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \pi_j^B(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \pi_i^B(N, v, \gamma \setminus \{l'\}).$$

Por otra parte, π^B verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos, luego,

$$|\gamma_i| \pi_j^B(N, v, \gamma) - \sum_{l \in \gamma_i} \pi_j^B(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = |\gamma_j| \pi_i^B(N, v, \gamma) - \sum_{l' \in \gamma_j} \pi_i^B(N, v, \gamma \setminus \{l'\}).$$

Entonces,

$$|\gamma_i| \psi_j(N, v, \gamma) - |\gamma_j| \psi_i(N, v, \gamma) = |\gamma_i| \pi_j^B(N, v, \gamma) - |\gamma_j| \pi_i^B(N, v, \gamma),$$

es decir,

$$|\gamma_i| [\psi_j(N, v, \gamma) - \pi_j^B(N, v, \gamma)] = |\gamma_j| [\psi_i(N, v, \gamma) - \pi_i^B(N, v, \gamma)],$$

y así, $\psi_j(N, v, \gamma) - \pi_j^B(N, v, \gamma) = |\gamma_j| c$, para todo $j \in C_i^{N, \gamma}$, j nulo en (N, v) .

Por BP-eficiencia en componentes conexas, y por el hecho de que para todos los jugadores no nulos ambas reglas coinciden,

$$\sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_0} \psi_j(N, v, \gamma) = \sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_0} \pi_j^B(N, v, \gamma),$$

donde $(C_i^{N, \gamma})_0$ es el conjunto de jugadores nulos en $C_i^{N, \gamma}$. Por tanto,

$$0 = \sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_0} [\psi_j(N, v, \gamma) - \pi_j^B(N, v, \gamma)] = \sum_{j \in (C_i^{N, \gamma})_0} |\gamma_j| c,$$

y como para todo $j \in (C_i^{N, \gamma})_0$ se tiene que $|\gamma_j| > 0$, entonces $c = 0$ y $\psi_i(N, v, \gamma) = \pi_i^W(N, v, \gamma)$, con lo que se completa la inducción para r y para k y el resultado queda probado. \square

4.7 Independencia de los axiomas

Al igual que se hizo en el caso de los valores de Myerson, WG-Myerson y BG-Myerson, este epígrafe se dedica a demostrar que los axiomas utilizados en las caracterizaciones del valor posicional, el valor WG-posicional y el valor BG-posicional son independientes entre sí.

4.7.1 Independencia de los axiomas en la caracterización del valor posicional

Eficiencia en componentes conexas, PL-marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios.

- i)* Eficiencia en componentes conexas y PL-marginalismo no implican contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios. El valor de Myerson verifica eficiencia en componentes conexas, PL-marginalismo y sin embargo, no verifica contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios, dado que no coincide con el valor posicional.
- ii)* Eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios no implican PL-marginalismo.

Dada (N, v, γ) situación de comunicación, $i \in N$ y $C_i^{N,\gamma}$ la componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i , sea $(C_i^{N,\gamma})_n$ conjunto de jugadores necesarios en v que pertenecen a $C_i^{N,\gamma}$ y $\overline{(C_i^{N,\gamma})_n}$ su complementario en $C_i^{N,\gamma}$. Consideremos la regla de asignación que a $i \in N$ le asigna el valor dado por:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \pi_i(N, v, \gamma), & \text{si } (C_i^{N,\gamma})_n = \emptyset \text{ ó } (C_i^{N,\gamma})_n = C_i^{N,\gamma}, \\ 0, & \text{si } (C_i^{N,\gamma})_n \neq C_i^{N,\gamma} \text{ e } i \in (C_i^{N,\gamma})_n, \\ v(C_i^{N,\gamma})|(\overline{(C_i^{N,\gamma})_n})|^{-1}, & \text{si } (C_i^{N,\gamma})_n \neq \emptyset \text{ e } i \notin (C_i^{N,\gamma})_n. \end{cases}$$

ψ verifica eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios. Sin embargo no verifica PL-marginalismo pues no coincide con el valor posicional.

- iii)* Contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios y PL-marginalismo no implican eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\pi$.

4.7.2 Independencia de los axiomas en la caracterización del valor WG-posicional

WP-eficiencia en componentes conexas, marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios.

- i)* WP-eficiencia en componentes conexas y marginalismo no implican contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios.

Sea ψ en \mathcal{CS}^N , definida como sigue:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \pi_i^W(N, v, \gamma) + (|C_i^{N,\gamma}| - 1)\varepsilon, & \text{si } i = \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \\ \pi_i^W(N, v, \gamma) - \varepsilon, & \text{si } i \neq \min_j \{j \in C_i^{N,\gamma}\}, \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $C_i^{N,\gamma}$ es la componente conexa de i en (N, γ) . ψ verifica WP-eficiencia en componentes conexas y marginalismo pero no satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios pues no coincide con π^W .

- ii)* WP-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios no implica marginalismo.

Dada (N, v, γ) situación de comunicación, $i \in N$ y $C_i^{N,\gamma}$ la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i , sea $(C_i^{N,\gamma})_n$ conjunto de jugadores

necesarios en v que pertenecen a $C_i^{N,\gamma}$ y $\overline{(C_i^{N,\gamma})_n}$ su complementario en $C_i^{N,\gamma}$. Consideremos la regla de asignación que a $i \in N$ le asigna el valor $\psi_i(N, v, \gamma)$ dado por:

$$\begin{cases} \pi_i^W(N, v, \gamma), & \text{si } (C_i^{N,\gamma})_n = \emptyset \text{ ó } (C_i^{N,\gamma})_n = C_i^{N,\gamma}, \\ 0, & \text{si } (C_i^{N,\gamma})_n \neq C_i^{N,\gamma} \text{ e } i \in (C_i^{N,\gamma})_n, \\ \sum_{j \in \overline{(C_i^{N,\gamma})_n}} \pi_j^W(N, v, \gamma) |(C_i^{N,\gamma})_n|^{-1}, & \text{si } (C_i^{N,\gamma})_n \neq \emptyset \text{ e } i \notin (C_i^{N,\gamma})_n. \end{cases}$$

ψ verifica WP-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios. Sin embargo no verifica marginalismo pues no coincide con el valor WG-posicional.

- iii)* Contribuciones equilibradas en arcos para jugadores necesarios y marginalismo no implican WP-eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\pi^W$.

4.7.3 Independencia de los axiomas en la caracterización del valor BG-posicional

BP-eficiencia en componentes conexas, L-marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos.

- i)* BP-eficiencia en componentes conexas y L-marginalismo no implican contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos. Consideremos ψ en \mathcal{CS}^N , definida como sigue:

$$\psi_i(N, v, \gamma) = \begin{cases} \pi_i^B(N, v, \gamma) + (|C_i^{N, \gamma}| - 1)\varepsilon, & \text{si } i = \min_j \{j \in C_i^{N, \gamma}\}, \\ \pi_i^B(N, v, \gamma) - \varepsilon, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $C_i^{N, \gamma}$ componente conexa de (N, γ) a la que pertenece i . ψ satisface BP-eficiencia en componentes conexas y L-marginalismo pero es obvio que no satisface contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos pues no coincide con π^B .

- ii)* BP-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos no implican L-marginalismo.

Dada (N, v, γ) situación de comunicación, $i \in N$ y $C_i^{N, \gamma}$ la componente conexa en (N, γ) a la que pertenece i , sea $(C_i^{N, \gamma})_0$ conjunto de jugadores nulos en v que pertenecen a $C_i^{N, \gamma}$ y $\overline{(C_i^{N, \gamma})_0}$ su complementario en $C_i^{N, \gamma}$. Consideremos la regla de asignación que a $i \in N$ le asigna el valor $\psi_i(N, v, \gamma)$ dado por:

$$\begin{cases} \pi_i^B(N, v, \gamma), & \text{si } (C_i^{N, \gamma})_0 = \emptyset \text{ ó } (C_i^{N, \gamma})_0 = C_i^{N, \gamma}, \\ 0, & \text{si } (C_i^{N, \gamma})_0 \neq C_i^{N, \gamma} \text{ e } i \in (C_i^{N, \gamma})_0, \\ \sum_{j \in \overline{(C_i^{N, \gamma})_0}} \pi_j^B(N, v, \gamma) |(C_i^{N, \gamma})_0|^{-1}, & \text{si } (C_i^{N, \gamma})_0 \neq \emptyset \text{ e } i \notin (C_i^{N, \gamma})_0. \end{cases}$$

ψ verifica BP-eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos. Sin embargo, no verifica L-marginalismo pues no coincide con el valor BG-posicional.

- iii)* L-marginalismo y contribuciones equilibradas en arcos para jugadores nulos no implican BP-eficiencia en componentes conexas.

Es suficiente considerar $\psi = 0.5\pi^B$ como contraejemplo.

4.8 Resumen de las caracterizaciones

Como resumen de todas las propiedades consideradas anteriormente, y su relación con los diferentes valores se presenta la tabla siguiente.

	P	WG-P	BG-P
Eficiencia en CC	✓	×	×
WP-eficiencia en CC	×	✓	×
BP-eficiencia en CC	×	×	✓
Contribuciones equilibradas en arcos	✓	×	×
Contribuciones equilibradas en arcos para necesarios	✓	✓	✓
Contribuciones equilibradas en arcos para nulos	✓	✓	✓
Marginalismo	×	✓	×
L-marginalismo	×	×	✓
PL-marginalismo	✓	×	×

Tabla. 4.3: Resumen de propiedades y relación con los distintos valores.

Capítulo 5

Conclusiones y futuras líneas de investigación

A lo largo de esta Memoria se han estudiado en detalle dos de las soluciones puntuales para situaciones de comunicación más citadas en la literatura, el valor de Myerson y el valor posicional. En particular se han relacionado estas dos reglas de asignación con una escuela de pensamiento económico muy relevante, el marginalismo. En el contexto de la Teoría de Juegos, esta corriente de pensamiento se centra en la importancia de la utilidad marginal del último jugador que se incorpora a una coalición y su relación con el pago que recibe.

Las caracterizaciones existentes, hasta donde nosotros conocemos, del valor de Myerson y del valor posicional, no incluyen propiedades relacionadas con el marginalismo. Esto se debe a que ninguno de los dos valores verifica esta propiedad en el sentido de Young (1985) o Chun (1989). En el desarrollo de nuestro trabajo hemos extendido el concepto clásico de contribución marginal, planteando la idea de que, en las situaciones de comunicación, existen diferentes posibilidades para los jugadores de contribuir marginalmente a las coaliciones. Es evidente que la contribución marginal clásica, es decir, la productividad que cada individuo aporta en la función característica del juego coalicional, sigue siendo relevante. Sin embargo, las limitaciones en la comunicación generan nuevas posibilidades de influencia de los jugadores a través de su intermediación conectando coaliciones. Ello permite hablar de otros dos tipos de contribuciones marginales, a saber, por un lado, la utilidad de los arcos de un jugador cuando los presta a una coalición quedando al margen (sin participar en la función característica), para que los miembros de ésta puedan mejorar su comunicación y, por otro, su productividad al incorporarse a las coaliciones con sus habilidades relacionales.

A partir de estos conceptos y de propiedades existentes en la literatura, hemos caracterizado el valor de Myerson y el valor posicional, así como dos descomposiciones aditivas de éstos que dividen la recompensa que recibe cada jugador en

la parte que procede de su productividad en la función característica más la que procede de su habilidad para conectar coaliciones a las que no pertenece. Estos valores reciben los nombres respectivos de valor WG-Myerson, BG-Myerson, WG-posicional y BG-posicional. En particular, hemos utilizado distintos tipos de eficiencia junto con restricciones, a diferentes tipos de jugadores (nulos o necesarios), de propiedades clásicas como contribuciones equilibradas, trato igualitario y contribuciones equilibradas en arcos. Los resultados correspondientes a los valores de Myerson han sido publicados en Manuel et al.(2020).

La tabla siguiente muestra las propiedades satisfechas por cada uno de los valores, así como aquellas que se utilizan en sus caracterizaciones. De forma adicional, en dicha tabla se aprecia qué propiedades son comunes a diferentes valores y que propiedades son exclusivas.

	M	WG-M	BG-M	P	WG-P	BG-P
Efic. en CC	√/C	×	×	√/C	×	×
W-eficiencia en CC	×	√/C	×	×	×	×
B-eficiencia en CC	×	×	√/C	×	×	×
WP-eficiencia en CC	×	×	×	×	√/C	×
BP-eficiencia en CC	×	×	×	×	×	√/C
BC	√/C	×	×	×	×	×
BC necesarios	√/C	√/C	√	×	×	√
BC nulos	√	√	√/C	×	√	×
BLC	×	×	×	√/C	×	×
BLC necesarios	×	×	√	√/C	√/C	√
BLC nulos	×	√	×	√	√	√/C
ET	×	×	×	×	×	×
ET necesarios	√/C	√/C	√	×	×	√
ET nulos	×	√	×	×	√	×
Equidad	√/C	×	×	×	×	×
Equidad necesarios	√	√	√	×	×	√
Equidad nulos	√	√	√	×	√	×
Marginalismo	×	√/C	×	×	√/C	×
L-marginalismo	×	×	√/C	×	×	√/C
PL-marginalismo	√/C	×	×	√/C	×	×

BC.- Contribuciones balanceadas, BLC.- Contribuciones balanceadas en arcos, ET.- Igual trato.

Tabla. 5.1: Resumen de propiedades y propiedades que se utilizan en sus caracterizaciones (C).

Varias cuestiones que consideramos interesantes y que están relacionadas con los resultados obtenidos, quedan pendientes para un trabajo futuro. En particu-

lar queremos citar las siguientes.

Como se demostró en su momento, los tres valores de Myerson verifican equidad para jugadores necesarios y nulos. Un problema que queda abierto es demostrar (o encontrar los correspondientes contraejemplos) que, en las caracterizaciones proporcionadas de estos tres valores, la propiedad de contribuciones equilibradas (para jugadores necesarios, en el caso del valor de Myerson y del valor WG-Myerson y nulos en el caso del valor BG-Myerson) puede sustituirse por la de equidad (para esos mismos tipos de jugadores, u otros).

Un segundo aspecto que resulta relevante es la relación entre la retribución de la intermediación en los valores de Myerson y posicional. Si bien es cierto que el valor de Myerson y WG-Myerson pueden superar al valor posicional y al valor WG-posicional, respectivamente, y recíprocamente, parece que siempre que el juego coalicional sea al menos superaditivo, el valor BG-posicional es mayor o igual que el valor BW-Myerson (al menos nos ha resultado imposible, hasta el momento, obtener un contraejemplo). Tampoco hemos conseguido demostrar que ésta sea una propiedad general. Es conocido que el valor posicional puede recompensar por intermediación a jugadores nulos en el juego restringido al grafo¹, pero también que el aumento de posibilidades de relación de un jugador puede incluso reducir su valor posicional². Este problema está íntimamente relacionado con el de determinar si el valor BG-posicional verifica L-monotonía fuerte, que, por el momento, queda abierto.

Otra línea de investigación abierta es el análisis de hasta qué punto los resultados obtenidos pueden ser extrapolados a situaciones de comunicación con grafos ponderados y dirigidos.

Finalmente, la descomposición obtenida para el valor posicional, que también es novedosa en la literatura, y en particular las eficiencias resultantes en esta descomposición, parecen gozar de buenas propiedades para medir eficiencia y vulnerabilidad en redes de comunicación en las que los actores mantienen intereses que se puede modelar como un juego TU.

¹Ver *Ejemplo 2.3.4*.

²Puede observarse en el mismo *Ejemplo 2.3.4* al suprimir el arco c . Es conocido que esto es imposible si el juego es superaditivo en el caso del valor de Myerson ya que satisface estabilidad.

Bibliografía

- [1] E. Algaba, J. M. Bilbao, P. Borm, and J.J. López. The Myerson value for union stable structures. *Mathematical Methods of Operations Research*, (54):359–371, 2001.
- [2] R.J. Aumann and J.H. Dreze. Cooperative games with coalition structures. *International Journal of Game Theory.*, 3(4):217–237, 1974.
- [3] R.J. Aumann and M. Maschler. The bargaining set for cooperative games. In Shapley L.S. y Tucker W. En Dresher, M., editor, *Advances in Game Theory*, number 52, pages 443–476. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1964.
- [4] J. Banzhaf. Wheighted voting does not work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, (19):317–343, 1965.
- [5] J. Belau. The class of asn-position values - centrality and consequences of connection failure. *Social Choice and Welfare*, (50 (1)):65–99, 2018.
- [6] J.M. Bilbao, N. Jiménez, and J.J. López. A note on a value with incomplete communication. *Games and Economic Behavior*, (54):419–429, 2006.
- [7] O. Bondareva. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. *Problemy Kybernetiki.*, (10):119–139, 1963.
- [8] S. Borkotokey, R. Kumar, and Sarangi S. A solution concept for network games: The role of multilateral interactions. *European Journal of Operational Research*, (243 (3)):912–920, 2015.
- [9] P. Borm, G. Owen, and S. Tijs. On the position value for communication situations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, (5-3):305–320, 1992.
- [10] E. Calvo, J. Lasaga, and A. van den Nouweland. Values of games with probabilistic graphs. *Mathematical Social Sciences*, (37):79–95, 1999.
- [11] E. Calvo and J. Santos. The serial property and restricted balanced contributions in discrete cost sharing problems. *TOP*, (14):343–353, 2006.

-
- [12] A. Casajus. The position value is the Myerson value, in a sense. *International Journal of Game Theory.*, (36):47–56, 2007.
- [13] A. Casajus. Differential marginality, van den Brink fairness, and the Shapley value. *Theory and Decision*, (71):163–174, 2011.
- [14] A. Casajus. The Shapley value without efficiency and additivity. *Mathematical Social Science*, (68):1–4, 2014.
- [15] J. Castro, D. Gomez, and J. Tejada. Polynomial calculation of the Shapley value based on sampling. *Computers and Operations Research*, 36:1726–1730, 2009.
- [16] Y. Chun. A new axiomatization of the Shapley value. *Games and Economic Behavior*, (1):119–130, 1989.
- [17] M. Davis and M. Maschler. Existence of stable payoff configurations for cooperative games. *Bulletin American Mathematical Society.*, (69):106–108, 1963.
- [18] G. de Clippel. Membership separability: A new axiomatization of the Shapley value. *Games and Economic Behavior*, (108):125–129, 2018.
- [19] B. Dietzenbacher, P. Borm, and R. Hendrickx. Decomposition of network communication games. Workingpaper, CentER, Center for Economic Research., 12, 2015.
- [20] P. Dubey. On the uniqueness of the Shapley value. *International Journal of Game Theory.*, (4):131–139, 1975.
- [21] V. Feltkamp. Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values. *International Journal of Games Theory.*, (24):179–186, 1995.
- [22] R. Flores, E. Molina, and J. Tejada. Pyramidal values. *Annals of Operations Research*, 217:233–252, 2014.
- [23] R.P. Gilles and R. van den Brink. Axiomatizations of the conjunctive permission value for games with permission structures. *Games and Economic Behaviour*, (12):113–126, 1996.
- [24] D.B. Gillies. *Some theorems on N-person games*. PhD thesis, Department of Mathematics, Princeton University, 1953.
- [25] D.B. Gillies. Solutions to general zero-sum games. In A. Tucker and Eds. Luce, R., editors, *Contributions to the Theory of Games IV*, pages 47–85. Princeton University Press, Princeton., 1959.

-
- [26] D. Gómez, E. González-Arangüena, C. Manuel, and G. Owen. A value for probabilistic communication situations. *European Journal of Operational Research*, (190):539–556, 2008.
- [27] D. Gómez, E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, and M. del Pozo. A unified approach to the Myerson and the positional value. *Theory and Decision*, (56):63–76, 2004.
- [28] D. Gómez, E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, M. del Pozo, and Tejada J. Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences*, (46):27–54, 2003.
- [29] E. González-Arangüena, C. Manuel, and M. del Pozo. Values of games with weighted graphs. *European Journal of Operational Research*, (243):248–257, 2015.
- [30] E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, and M. del Pozo. The within groups and the between groups Myerson values. *European Journal of Operational Research*, (257):586–600, 2017.
- [31] J. Greenberg. *Handbook of Game Theory with Economic Applications.*, volume Volume 2, chapter Coalition structures, Chapter 37, pages 1305–1337. 1994.
- [32] G. Hamiache. A value with incomplete communication. *Games and Economic Behaviour*, (26):59–78, 1999.
- [33] G. Hamiache. Associated consistency and the Shapley value. *International Journal of Game Theory.*, (30):279–289, 2001.
- [34] J.C. Harsanyi. A simplified bargaining model for the N-person cooperative game. *International Economic Review*, (4):194–220, 1963.
- [35] S. Hart and M. Kurz. Endogenous formation of coalitions. *Econometrica*, (51(4)):1047–1064, 1983.
- [36] S. Hart and A. Mas-Colell. Potential, value and consistency. *Econometrica*, (57):589–614, 1989.
- [37] P.J.J. Herings, G. van der Laan, and D. Talman. The average tree solution for cycle-free graph games. *Games and Economic Behavior*, (62):77–92, 2008.
- [38] M. Jackson and A. Wolinsky. A strategic model of social and economic networks,. *Journal of Economic Theory*, (71):44–74, 1996.
- [39] M.O. Jackson and A. van den Nouweland. Strongly stable networks. *Games and Economic Behavior*, Volume 51, Issue 2,:420–444, 2005.

- [40] T. Kongo, Y. Funaki, and S. Tijs. New axiomatization and implementation of the Shapley value. Technical Report Discussion Paper 2007-90, CentER, 2007.
- [41] E. Lehrer. An axiomatization of the Banzhaf value. *International Journal of Game Theory*, 17(2):89–99, 1988.
- [42] D. Li Li and E. Shan. The Myerson value for directed graph games. *Operations research letters*, 48:142–146, 2020.
- [43] S. Lorenzo-Freire. On new characterizations of the Owen value. *Operations Research Letters*, (44):491–494, 2016.
- [44] S. Lorenzo-Freire, J.M. Alonso-Mejide, B. Casas-Méndez, and R. Hendrickx. Balanced contributions for TU games with awards and applications. *European Journal of Operational Research*, (182):958–964, 2007.
- [45] W.F. Lucas. A game with no solution. *Bulletin American Mathematical Society.*, 74(2):237–239., 1968.
- [46] W.F. Lucas. The proof that a game may not have a solution. *Transactions of the American Mathematical Society*, (137):219–229, 1969.
- [47] M. Malawski. Procedural values for cooperative games. *International Journal of Game Theory.*, (42):305–324, 2013.
- [48] C. Manuel, E. González-Arangüena, and R. van den Brink. Players indifferent to cooperate and characterizations of the Shapley value. *Mathematical Methods of Operations Research*, (77):1–14, 2013.
- [49] C. Manuel, E. Ortega, and M. del Pozo. Marginality and Myerson values. *European Journal of Operational Research*, 284:301–312, 2020.
- [50] R. Meessen. *Communication games*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Nijmegen, 1988.
- [51] S. Moretti and F. Patrone. Transversality of the Shapley value. *TOP*, (16):1–41, 2008.
- [52] R.B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operation Research*, (2):225–229, 1977.
- [53] R.B. Myerson. Conference structures and fair allocations rules. *International Journal of Game Theory.*, (9):169–182, 1980.
- [54] F. Navarro. *Economie des réseaux et jeux coopératifs*. PhD thesis, Université de Lille, 2018.

-
- [55] F. Navarro. Necessary players, Myerson fairness and the equal treatment of equals. *Annals of Operations Research*, 280, 2018a.
- [56] A.S. Nowak and T. Radzik. A solidarity value for n-person transferable utility games. *International Journal of Game Theory.*, (23):43–48, 1994.
- [57] G. Owen. Values of games with a priori unions. *Mathematical Economics and Game Theory*, (141):76–88, 1977.
- [58] G. Owen. Values of graph-restricted games. *Siam Journal on Algebraic and Discrete Methods*, (7):210–220, 1986.
- [59] L.S. Shapley. Notes on the n-person game III: Some variants of the von Neuman-Morgenstern definition of solution. Technical report, Rand Corporation research memorandum, 1952.
- [60] L.S. Shapley. *A value for N-person games.*, volume 28. pp. 307-317. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1953.
- [61] L.S. Shapley. On balanced sets and cores. *Naval Research Logistics Quarterly*, 14(4):453–460, 1967.
- [62] M. Shubik. Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing. *Management Science*, (8):325–343, 1962.
- [63] M. Slikker. A characterization of the position value. *International Journal of Game Theory.*, (33 (4)):505–514, 2005.
- [64] M. Slikker and A. Van den Nouweland. *Social and Economic Networks in cooperative game theory*. Kluwer Academic Publisher, Boston, 2001.
- [65] R. van den Brink. An axiomatization of the Shapley value using a fairness property. *International Journal of Game Theory.*, (30):309–319, 2001.
- [66] A. van den Nouweland. *Games and graphs in economic situations*. PhD thesis, Tilburg University. Tilburg. Netherlands, 1993.
- [67] A. van den Nouweland and P. Borm. On the convexity of communication games. *International Journal of Game Theory.*, (19):421–430, 1991.
- [68] A. van den Nouweland, P. Borm, and S. Tijs. Allocation rules for hypergraph communication situations. *International Journal of Game Theory.*, (20):255–268, 1992.
- [69] J. von Neumann and O. Morgestern. *Theory of games and economic behaviour*. Princeton, NJ, 1944.

-
- [70] E. Winter. The consistency and potential for values of games with coalition structure,. *Games and Economic Behavior*, (4):132–144, 1992.
- [71] K. Yokote and T. Kongo. The balanced contributions property for symmetric players. *Operations Research Letters*, (45):227–231, 2017.
- [72] K. Yokote, T. Kongo, and Y. Funaki. The balanced contributions property for equal contributors. *Games and Economic Behavior*, (108):113–124, 2018.
- [73] H.P. Young. Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory.*, (14):65–72, 1985.