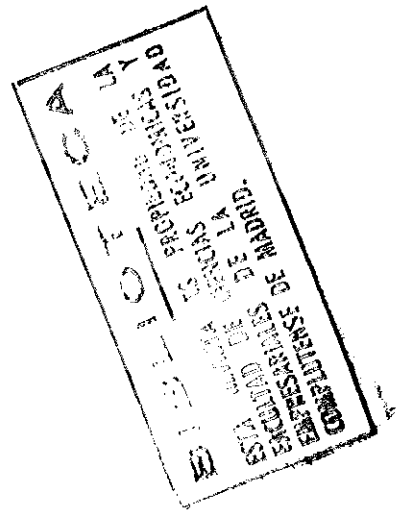


R.4.015



W
28
(8712)



Documento de Trabajo
8 7 1 2

DEFICIT, INFLACION Y COMPOSICION DE LA DEUDA

Josep Baiges
César Molinas
Miguel Sebastián

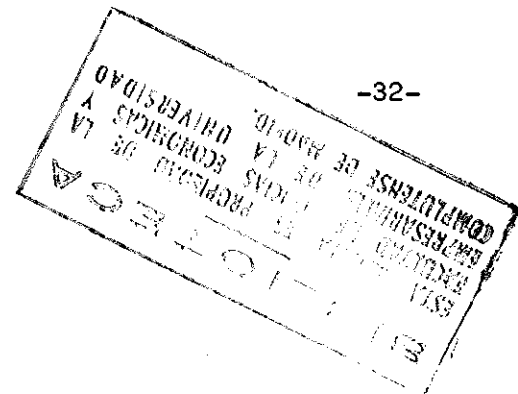
DEFICIT, INFLACION Y COMPOSICION DE LA DEUDA

Josep Baiges
César Molinas
Miguel Sebastián

Enero 1986

N° C → X-53-229915-8

N° E → 5307917684



I N T R O D U C C I O N

La mayoría de los trabajos que utilizan la restricción presupuestaria intertemporal del Gobierno parten del supuesto simplificador de que la Deuda se amortiza en cada período. Sin embargo, existe una intuición generalizada de que la composición de la Deuda puede tener importancia por varios motivos: por una parte, porque se puede aprovechar la estructura de los tipos de interés nominales de forma que se acumule menos Deuda por pagos de intereses. Por otra parte, porque la inflación puede tener efectos en la posición deudora real del Gobierno dependiendo de la composición. En períodos inflacionarios se intuye que conviene que la Deuda esté más a largo plazo y viceversa.

En este papel se precisa dicha intuición, estudiando las implicaciones de tipo cuantitativo de diferentes esquemas de composición de la Deuda. Se empieza por revisar las expresiones para el Déficit - real y acumulación de Deuda cuando ésta se amortiza en cada período - analizando los efectos de la inflación sobre ambas variables. Posteriormente se generalizará al caso de 2 plazos de amortización. El trabajo - también se centra en estudiar los efectos de un cambio en la tasa de inflación en un período determinado. La inflación es un impuesto sobre tenedores de activos monetarios y de bonos si los tipos nominales de éstos no se ajustan ante incrementos de inflación. Definiendo una tasa de inflación inesperada como aquella que no altera los tipos de interés nominales ni es producto de una mayor monetización (shocks de oferta, por ejemplo) se concluye que la composición de la Deuda es irrelevante a la hora de calibrar los efectos de dicho aumento de la inflación sobre el déficit real. Si la inflación es perfectamente anticipada de forma que todos los tipos nominales sin importar cuando fueron contratados se ajustan a los cambios inflacionarios, la composición también es irrelevante. Sólo si la inflación en el período t es anticipada de forma tal que los tipos de interés nominales contratados en $t-1$ se ajustan inmediatamente, pero no los contratados anteriormente, la composi--

ción de la Deuda va a ser relevante. Cuando la Deuda está a un año, los pagos por intereses se contratan con un período de antelación, y si la inflación es anticipada los tipos nominales subirán de tal suerte que - los pagos reales por intereses se mantengan. (El único efecto de la inflación sería por la subida del Deflactor). Sin embargo la reducción es mayor si la Deuda está a más largo plazo y los tipos nominales de la parte de la Deuda emitida en períodos anteriores se mantienen porque sólo - se anticipa el incremento de la inflación con un período de antelación. Entonces se ajustan los tipos a corto (los tipos reales permanecen constantes), pero se mantienen los tipos a largo (los tipos reales bajan), y cuánto más a largo esté la Deuda, mayores reducciones del Déficit con secuencias de tasas de inflación anticipadas solo en t . Esta claro que dicha situación no es sostenible desde el punto de vista del comprador - de títulos que exigirá bien tipos flexibles, tipos más altos o bien Deuda a corto. En este trabajo no entramos en esta cuestión, que requerirá un modelo de equilibrio donde se analizará el comportamiento dinámico de los agentes del sector privado y la reacción ante pérdidas de capital - por inflación inesperada.

En el trabajo se aborda también el caso de inflación por una mayor monetización. El mayor recurso al Banco emisor, al ser sustituto de emisión Deuda Pública en el período t , no tiene efectos sobre el Déficit hasta los períodos $t+1$, $t+2$ Para el período t , el efecto de una mayor inflación por monetización es equivalente al de una mayor inflación por causas ajenas a la restricción presupuestaria del Gobierno. Dado que no se pretende analizar la deseabilidad de una mayor monetización como forma de financiar el Déficit, a partir de este mo--mento se abandona el supuesto de monetización para entrar a analizar - el problema de la Composición óptima de la Deuda.

La Deuda es la suma acumulada de Déficit, cuando no hay monetización. Sin embargo, analizar el efecto de la inflación sobre el Déficit real en un período determinado, según los plazos de maduración, es un enfoque incompleto.

La inflación puede limitarse a cambiar el perfil temporal de los Déficit reales, sin variar, o incluso empeorando, la posición deudora real del Sector Público. Elegir el plazo de maduración con el objetivo de minimizar el Déficit período a período ("hacer lo mejor posible en un período determinado") puede no ser aconsejable, en el sentido de que puede llevar a una mayor acumulación de Deuda en el futuro. Por ello, en este trabajo se especifica un programa de minimización del volumen de Deuda para un horizonte temporal a determinar, y se encuentra la regla de decisión óptima que debe seguir el gobierno dada una estructura de tipos de interés esperados. Se obtiene el resultado de que si los tipos son crecientes en el tiempo, la estructura se desplaza hacia el largo plazo y viceversa. Como los tipos de interés reflejan expectativas de inflación se concluye que expectativas de inflación creciente deben impulsar al gobierno a variar la composición a más largo plazo y viceversa. También se demuestra que la estructura óptima no minimiza el Déficit período a período, y que políticas encaminadas en este sentido pueden ser contraproducentes a largo plazo. Haciendo hincapié en la dificultad de contrastación del grado de desviación de la senda óptima seguida por una economía determinada, se analiza la evolución en la estructura de la Deuda para el caso español en el período 1979 - 84. Dicha evolución apoya la tesis presentada aquí de que expectativas decrecientes de inflación son causa sobrada para un cambio hacia el corto plazo. Con las expectativas para el período 86 - 89 recogidas del programa económico a medio plazo del gobierno se discute que el modelo presentado aquí no es capaz de justificar el cambio anunciado en la tendencia.

El trabajo se organiza como sigue: en la Sección I se encuentra una expresión para el Déficit real cuando la Deuda vence en un período y se analizan los efectos de una mayor inflación, inesperada y anticipada. Se analizan también efectos de la inflación en la senda temporal de dichos Déficits, y por tanto en la evolución de la Deuda. En la Sección II, se repite el ejercicio cuando parte de la Deuda vence en un período y parte en dos períodos, y se consideran incrementos de inflación inesperados, perfectamente anticipados y parcialmente anticipados; en el Apéndice se generaliza a s períodos de maduración. En la Sección III se analiza la composición óptima de la Deuda y se comenta la experiencia española en este respecto.

I. DEUDA A CORTO PLAZO

Suponemos aquí, el caso frecuente en la literatura, que la Deuda tiene su vencimiento al final de cada período.

Es decir, en cada período t observamos:

	<u>t-2</u>	<u>t-1</u>	<u>t</u>	
<u>Emisiones:</u>	B_{t-2}	B_{t-1}	B_t
<u>Amortizaciones:</u>	B_{t-3}	B_{t-2}	B_{t-1}
<u>Deuda viva:</u>	B_{t-2}	B_{t-1}	B_t
<u>Pagos de intereses:</u>	$i_{t-2} B_{t-3}$	$i_{t-1} B_{t-2}$	$i_t B_{t-1}$

Dada dicha secuencia de emisiones, amortizaciones y pagos de intereses la restricción presupuestaria intertemporal del Sector Público es, en términos nominales:

$$(1) \quad G_t - T_t + i_t B_{t-1} = (B_t - B_{t-1}) + (H_t - H_{t-1}) \quad t = 1, 2, \dots$$

donde $G_t - T_t$ es el Déficit sin incluir la carga financiera, $G_t - T_t + i_t B_{t-1}$ el Déficit (necesidad de financiación), $(B_t - B_{t-1})$ el incremento de la deuda en el período t y $(H_t - H_{t-1})$ la monetización o recurso al Banco emisor. Nótese que excluimos, para simplificar, la existencia de activos financieros en manos del Sector Público.

En términos reales, la restricción puede expresarse dividiendo (1) por un índice de precios relevante (deflactor del PIB por ejemplo)

$$(2) \quad \frac{B_t - B_{t-1}}{P_t} = \frac{G_t - T_t}{P_t} + i_t \frac{B_{t-1}}{P_t} - \frac{H_t - H_{t-1}}{P_t} \quad t = 1, 2, \dots$$

El Déficit real viene dado por el cambio en la posición deudora del Sector Público en términos reales, es decir la diferencia entre los pasivos del período t divididos por el índice de precio en t (posición deudora real en t) menos los pasivos del período $t-1$ divididos por el índice de precios en $t-1$ (posición deudora en $t-1$). Recuérdese que no hay activos financieros en manos del Sector Público.

Es decir

$$D_t = \frac{B_t + H_t}{P_t} - \frac{B_{t-1} + H_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Manipulando la expresión (2) y llamando

$$\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \text{ la tasa de inflación en el período } t, \text{ es fácil obtener:}$$

$$(3) \quad D_t = \frac{B_t + H_t}{P_t} - \frac{B_{t-1} + H_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{G_t - T_t + i_t B_{t-1}}{P_t} - \pi_t \frac{B_{t-1} + H_{t-1}}{P_t}$$

La interpretación de (3) es clara: el Déficit real para el período t es igual al déficit nominal (necesidad de financiación) dividido por el índice de precios menos la tasa de inflación por los pasivos vivos en términos reales. El segundo término es el "ajuste por inflación" y refleja la erosión de la posición deudora del gobierno por efectos de la inflación.

Una forma equivalente de interpretar (3) es la siguiente: el Déficit real es igual a la suma de los excesos de gastos sobre recaudaciones, en términos reales, más los pagos de intereses en términos reales, donde $(i_t - \pi_t)$ es el tipo de interés real de la Deuda y $-\pi_t$ el tipo de interés real de los pasivos monetarios:

Efectos de una inflación inesperada sobre el Déficit real. (Deuda constante).

Supongamos que en el período t la inflación es más alta de lo esperado, de forma que el tipo de interés nominal i_t no se ajusta. Supongamos también que esta inflación no es resultado de una mayor monetización, que supondría un nivel menor de Deuda Pública emitida en t , lo cual incidiría en el valor real y nominal del Déficit en $t+1$, $t+2$, etc....., por los menores pagos por intereses.

Suponemos que tanto las partidas de Gastos como de Ingresos no se ven alterados por incrementos de la inflación, es decir $\partial(G_t - T_t) / \partial \pi = 0$. Este es un supuesto simplificador que no podría hacerse al estudiar en un caso práctico los efectos totales de la inflación sobre el Déficit, puesto que numerosas partidas de Gastos tienen un componente de ajuste automático con la inflación; y la recaudación sube al subir la base imponible hacia tramos con tipos más altos. Sin embargo, para aislar el papel de la composición en los efectos de la inflación sobre el Déficit, mantenemos dicho supuesto simplificador.

Llamamos inflación en t inesperada (en $t-1$) a aquella que no hace variar los tipos de interés i_t que se contratan en $t-1$ a pagar en t sobre la Deuda viva del período anterior. De la ecuación (3), se puede derivar parcialmente y obtener bajo estos supuestos el efecto de una inflación en t inesperada sobre el Déficit real en t :

$$(4) \quad \frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = - \frac{P_{t-1}}{P_t} D_t - \frac{B_{t-1} + H_{t-1}}{P_t}, \text{ donde se ha usado}$$

$$P_t = (1 + \pi_t) P_{t-1}$$

En palabras, una inflación inesperada en t hace disminuir el Déficit real por dos motivos: por un lado, el valor del Déficit en términos reales se deprecia al subir el deflactor P_t con la inflación. Por otro lado, el valor de los pasivos en términos reales baja.

Visto de la otra forma, los pagos de intereses en términos reales disminuyen, o si se quiere el tipo de interés "real" baja (*).

Efectos de una inflación anticipada sobre el Déficit real. (Deuda constante, no monetización).

Si el incremento de la inflación en t es anticipado de forma que el tipo de interés nominal se ajusta instantáneamente, es decir $\Delta i_t = \Delta \pi_t$, se tendría de (3).

$$(5) \quad \frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = - \frac{P_{t-1}}{P_t} D_t - \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

En este caso, el efecto de la inflación es menor: el déficit real baja por subida del deflactor y por la caída del valor real de los saldos monetarios, pasivos del Sector Público. En lo que respecta a la Deuda, el valor real se mantiene, porque lo que se deprecia por la inflación aumenta por la subida de los tipos de interés (es decir el tipo real se mantiene).

Efectos de una inflación debida a una mayor monetización.

Hasta ahora hemos supuesto que el recurso al Banco emisor no es la causa del incremento de la inflación, es decir $H_t - H_{t-1}$ se mantiene constante y la Deuda viva B_t se mantiene constante. Se trataba de un incremento de la inflación debido a un shock de oferta u otro incremento autónomo de la base monetaria. Tampoco hemos introducido hasta ahora ningún resultado de modelos teóricos, y lo que se ha expuesto vale en principio para cualquier especificación teórica.

En este apartado incluimos una relación propia de un modelo teórico determinado, en concreto la relación entre el incremento del recurso al Banco emisor y la inflación. Por razones de simplicidad supone

(*) En teoría económica nos referimos al tipo de interés real, del que dependen las decisiones de optimización de los agentes, como la diferencia entre el tipo de interés nominal y la inflación esperada. Aquí nos referimos a los pagos de intereses efectivamente realizados y de ahí que lo pongamos entre comillas.

mos el peor de los casos para la política monetaria: el incremento de la base monetaria se traduce en el período t en un incremento proporcional de la inflación. Suponiendo que un mayor recurso al Banco emisor es la causa del aumento de la base monetaria, tendríamos:

$$(6) \quad \Delta \frac{H_t - H_{t-1}}{H_{t-1}} = \Delta \pi_t$$

Usando (3) se puede ver que un incremento en el recurso al Banco emisor no se traduce en un menor Déficit real para el período t distinto de cuando había un Shock de inflación inesperado (4) o esperado (5). Sin embargo, el volumen de Deuda viva a emitir en t será menor, y éste se traduce en un menor Déficit real para los años t+1, t+2,

Es decir, con una inflación $\pi_t, \pi_{t+1}, \pi_{t+2}, \dots$ y una monetización $H_t - H_{t-1}$, antes teníamos las secuencias:

$$P_{t-1}, P_t, P_{t+1}, P_{t+2} \dots\dots$$

$$D_t = \frac{G_t - T_t}{P_t} + (i_t - \pi_t) \frac{B_{t-1}}{P_t} - \pi_t \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

$$D_{t+1} = \frac{G_{t+1} - T_{t+1}}{P_{t+1}} + (i_{t+1} - \pi_{t+1}) \frac{B_t}{P_{t+1}} - \pi_{t+1} \frac{H_t}{P_{t+1}}$$

...

Con una inflación $\pi_t^*, \pi_{t+1}^*, \pi_{t+2}^*$, monetización $H_t^* - H_{t-1}^*$, tendríamos las secuencias:

$$P_{t-1}^*, P_t^*, P_{t+1}^*, P_{t+2}^* \dots\dots$$

$$D_t^* = \frac{G_t - T_t}{P_t^*} + (i_t^* - \pi_t^*) \frac{B_{t-1}}{P_t^*} - \pi_t^* \frac{H_{t-1}}{P_t^*}$$

$$D_{t+1}^* = \frac{G_{t+1} - T_{t+1}}{P_{t+1}^*} + (i_{t+1}^* - \pi_{t+1}^*) \frac{B_t}{P_{t+1}^*} - \pi_{t+1}^* \frac{H_t^*}{P_{t+1}^*}$$

donde $B_t^* = (1+i_t^*) B_{t-1} + (G_t - T_t) - (H_t^* - H_{t-1})$, es decir la Deuda en t decrece al crecer H_t . Para hallar el efecto de un incremento de la tasa de inflación, de la definición de Deuda, usando (6) se puede obtener

$$\frac{\partial B_t}{\partial \pi_t} = - H_{t-1}$$

Por tanto,

(a) si la tasa de inflación crece inesperadamente ($i_t^* = i_t$, es decir i_t no se ajusta cuando $\pi_t^* - \pi_t \neq 0$ tendríamos:

(4) Para el período t

$$(7) \quad \frac{\partial D_{t+1}}{\partial \pi_t} = \frac{-P_{t-1}}{P_t^* P_{t+1}^*} D_{t+1} - \frac{(i_{t+1} - \pi_{t+1})}{P_{t+1}^*} H_{t-1} \text{ para el período } t+1$$

.....

y así sucesivamente

En (7) el primer término es el equivalente al que aparecía en (4) y (5), y el segundo término refleja la disminución de los pagos de intereses en t+1 por una mayor monetización en t. Dicha disminución en el Déficit real de t+1 se irá transmitiendo en cadena a períodos futuros, pero con un efecto que se irá amortiguando en el tiempo. Nótese que estamos suponiendo que ningún tipo de interés nominal va a ajustarse por la subida de la inflación en t, pero si las expectativas de inflación tuvieran (como veremos más adelante en el apartado (c)) un efecto de revisión al alza de tipos de interés futuros, los efectos reductores en D_{t+1} , D_{t+2} , etc.... serían menores, o incluso de sentido contrario.

(b) si el incremento de la tasa de inflación en t vía monetización es anticipada, de forma que i_t se ajusta instantáneamente, $i_t^* = i_t + (\pi_t^* - \pi_t)$,

habría reducciones en D_t , y también en D_{t+1} , D_{t+2} , ... por la menor emisión de Deuda.

Es decir tendríamos:

- (5) para el período t
- (7) para el período $t+1$
- y así sucesivamente.

Po tanto, una mayor inflación por monetización tiene no sólo efectos sobre el Déficit real en t ((5) si es anticipada, (4) si no lo es) sino también sobre el déficit en $t+1$, $t+2$, que no dependerá tanto de si es anticipada o no en t , como de los efectos que pueda tener sobre los tipos del futuro.

(c) Finalmente, supongamos un caso "mixto" donde se "engaña" a los poseedores de títulos en t , pero luego éstos revisan al alza los tipos de interés nominales en $t+1$. Es decir, i_t no cambia, pero sube i_{t+1} si $\pi_t^* > \pi_t$.

Entonces podría darse el caso de π_t produciendo una reducción del Déficit en t , un aumento del Déficit en $t+1$.

La inflación, por tanto, puede limitarse a cambiar el perfil temporal de los Déficits reales (reducirlo en un período y producir un efecto rebote en el siguiente) sin cambiar sustancialmente la posición deudora real del Sector Público.

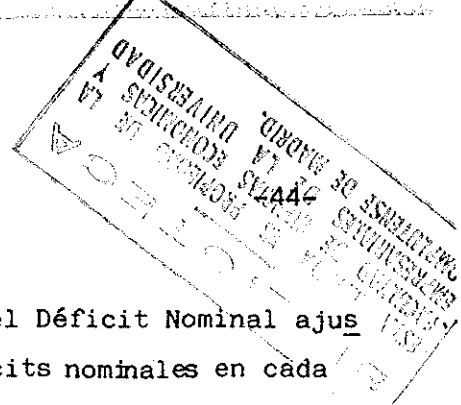
A continuación presentamos un ejemplo que ayuda a ilustrar el ajuste por inflación y a analizar cómo los cambios en la tasa de inflación, inesperados en $t+1$ (no producen cambios en los tipos en $t+1$) pero que producen una reacción en $t+2$ subiendo los tipos, hacen variar la senda temporal de los Déficits reales sin tener que variar la posición Deudora real.

Ejemplo 1: Inflación en t produce caída Déficit real en t, aumento en t+1.

En este ejemplo partimos de una situación inicial (Situación 1) donde un déficit inicial de 100 (el resto de los ejercicios presenta presupuesto corriente equilibrado) es financiado con Deuda a 1 plazo, B_s (no hay monetización). Los Déficit sucesivos en términos nominales DN_s son pagos de intereses. Los Déficit ajustados por la inflación DNA_s son los nominales menos la tasa de inflación contemporánea π_s por la Deuda viva del período anterior B_{s-1} . Los déficit reales DR_s resultan de dividir los déficit ajustados por el Deflactor P_s . La última fila es la Deuda viva real, resultante de dividir B_s por P_s . Por definición, la diferencia entre deuda viva real de dos períodos debe coincidir con el déficit real.

Situación 1:

	<u>t-1</u>	<u>t</u>	<u>t+1</u>	<u>t+2</u>
$(G_s - T_s)$	100	0	0	0
i_s	-	.10	.08	.07
π_s	-	.08	.06	.05
H_s	-	-	-	-
B_s	100	110	118.8	127.1
DN_s	100	10	8.8	8.3
P_s	1	1.08	1.145	1.202
DNA_s	100	2	2.2	2.36
DR_s	100	1.85	1.92	1.96
B_s/P_s	100	101.85	103.77	105.73



El ajuste por inflación hace que tanto el Déficit Nominal ajustado como el Déficit real sean menores que los Déficits nominales en cada período. Sin embargo, obsérvese que, desde un punto de vista intertemporal, los Déficits nominales van disminuyendo mientras que los ajustados y el real suben. La razón es que los tipos nominales van disminuyendo (lo que hace que los pagos nominales bajen) pero la inflación disminuye a un ritmo menor (lo que significa que los pagos reales por interés aumentan).

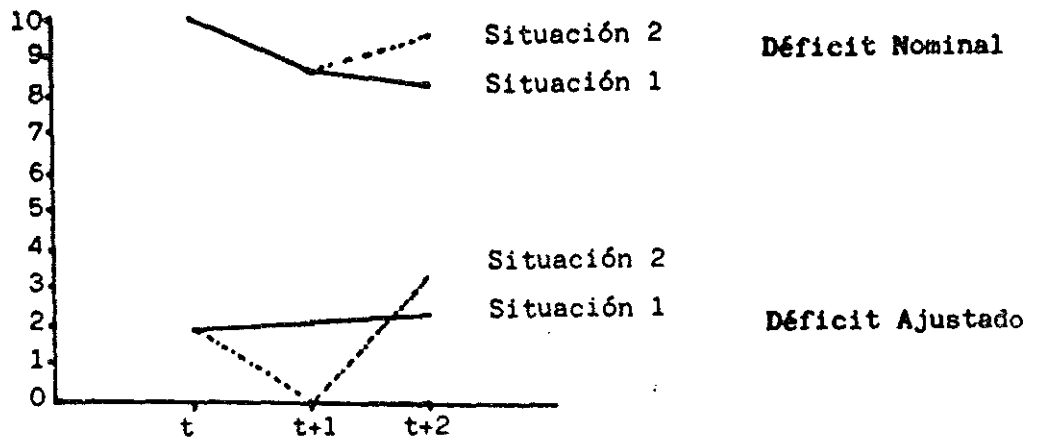
Supongamos ahora que la situación anterior es una previsión hecha a partir del año t y que es aceptada por todos los agentes. Supongamos un incremento inesperado en la inflación en el años $t+1$ (Shock de oferta temporal) que no hace revisar los tipos nominales en el año $t+1$, t , pero sí, en cambio, en el año $t+2$, cuando los compradores de bonos, que han sufrido una pérdida de capital en el año t , intentan recuperarse en el año $t+2$. Supongamos, en el ejemplo, que π_{t+1} sube a .08, i_{t+1} se mantiene e i_{t+2} sube a .08 (mientras π_{t+2} se mantiene).

El gobierno se encontraría, por tanto, en una situación como:

Situación 2:

	<u>t-1</u>	<u>t</u>	<u>t+1</u>	<u>t+2</u>
i_s	-	.10	.08	.08
π_s	-	.08	.08	.05
B_s	100	110	118.8	128.304
DN_s	100	10	8.8	9.50
P_s	1	1.08	1.166	1.224
DNA_s	100	2	0	3.56
DR_s	100	1.85	0	2.91
B_s/P_s	100	101.85	101.85	104.76

Gráficamente:



En el gráfico se muestra la evolución temporal de los Déficit, tanto los nominales (parte superior) como los ajustados por la --inflación (parte inferior). En tramo continuo aparece la situación 1, antes del shock inflacionario, y en tramo punteado la situación 2 que se compone de un shock inflacionario en t+1 y una reacción de los tipos nominales en t+2. La inflación tiene un efecto redistributivo temporal de la senda de déficits, produciendo una caída en t+1 y una subida en t+2, que se ve especialmente reflejada en términos reales. El déficit nominal acaba en t+2 por debajo del déficit nominal en t. Lo contrario ocurre en términos reales, en que se dispara para el período t+2.

¿Cuál de ambas situaciones preferiría el Gobierno?. Dejando a un lado los efectos distorsionadores de la inflación sobre las magnitudes macroeconómicas y los posibles efectos contemporáneos del déficit sobre las variables reales, centrándose al nivel más sencillo posible en una perspectiva de medición, el Gobierno preferiría la situación que terminase en una posición deudora real menor. En el ejemplo, éste sería el caso bajo la Situación 2, en que el Gobierno terminará con una posición deudora real B_{t+2}/P_{t+2} menor que bajo la Situación 1.

Sin embargo, es fácil construir ejemplos muy similares al anterior donde el gobierno, reduciendo el déficit real en t+1 aumenta su posición deudora real en el período t+2. Por tanto, reducciones de Déficit real en sí misma no deben ser nunca la razón aducida para optar por políticas inflacionistas, mientras no se cuenten con proyecciones de Deuda real en el horizonte temporal que garanticen que la posición Deudora

real va a terminar en un nivel menor. El efecto erosionador de la inflación no acaba en un solo período y reacciones de tipos nominales pueden empeorar la posición deudora en el futuro.

A continuación pasamos a estudiar el caso en que la Deuda puede amortizarse a uno o dos plazos. Queremos ver hasta qué punto la medición del Déficit real depende de una composición más variada, y de analizar los efectos de incrementos de la inflación (anticipados o no) en dicha medida de endeudamiento real.

II. DEUDA A DOS PLAZOS

Supongamos ahora que no toda la Deuda se amortiza en un periodo, como hacíamos en la Sección anterior. Tanto la restricción presupuestaria como la expresión para el Déficit real mantienen su vigor, siempre que se interpreten de forma correcta los términos B_t , i_t . Anteriormente éstas eran secuencias univariantes. Ahora, para cada período, se trata de vectores que representan la composición de la Deuda y los tipos de interés correspondientes.

Se trata de responder a las preguntas siguientes:

- (i) Dada una tasa de inflación y un volumen de Deuda viva, ¿influye la composición de la Deuda en la medición del Déficit real correspondiente?
- (ii) Dado un volumen de Deuda, ¿Cómo afecta un incremento de la inflación (inesperado y anticipado) al Déficit real dependiendo de la composición de la Deuda?

En esta Sección analizamos estas cuestiones cuando la Deuda se amortiza a uno o a dos períodos. En el Apéndice se generaliza a S períodos. Empezamos por una formulación de la expresión para el Déficit real cuando la Deuda está a dos plazos y analizamos el efecto de un incremento inesperado de la inflación, uno anticipado y una mayor monetización. Se obtiene que si la inflación es inesperada o completamente anticipada, los efectos erosionadores de la posición deudora del Gobierno son independientes de la composición. Por otro lado, si la inflación es anticipada pero sólo a un período vista, - cuanto más a largo plazo esté la Deuda, mayor será el efecto erosionador sobre el Déficit real y viceversa si la inflación cae inesperadamente. Estos resultados servirán de base para analizar la composición óptima de la Deuda en la Sección III.

Medición del Déficit real cuando la Deuda está a dos plazos

Supongamos que de la Deuda emitida en t , B_t , una parte se amortiza en un periodo $\alpha_t^1 B_t$ y el resto, $\alpha_t^2 B_t$, en dos periodos. Claramente $j=1,2 \alpha_t^j \in [0,1]$ y $\alpha_t^1 + \alpha_t^2 = 1$.

La secuencia de Emisiones, Amortizaciones y Deuda viva es la siguiente:

	t-2	t-1	t
<u>Emisiones</u> :	$B_{t-2} = \alpha_{t-2}^1 B_{t-2}$	$B_{t-1} = \alpha_{t-1}^1 B_{t-1}$	$B_t = \alpha_t^1 B_t +$
	+	+	+
	$\alpha_{t-2}^2 B_{t-2}$	$\alpha_{t-1}^2 B_{t-1}$	$\alpha_t^2 B_t$
 <u>Amortizaciones</u> :	$\alpha_{t-3}^1 B_{t-3}$	$\alpha_{t-2}^1 B_{t-2}$	$\alpha_{t-1}^1 B_{t-1}$
	+	+	+
	$\alpha_{t-4}^2 B_{t-4}$	$\alpha_{t-3}^2 B_{t-3}$	$\alpha_{t-2}^2 B_{t-2}$
 <u>Deuda viva</u> :	$B_{t-2} + \alpha_{t-3}^2 B_{t-3}$	$B_{t-1} + \alpha_{t-2}^2 B_{t-2}$	$B_t + \alpha_{t-1}^2 B_{t-1}$
(al finalizar el período)			

En cada período se pagan los intereses de la Deuda viva del período anterior a unos tipos de interés anuales que dependen del plazo de maduración y del período en que se realicen los pagos. Llamaremos $i_t^j(t-1)$ al tipo de interés a pagar en t de la parte de la deuda emitida en $t-1$ que vence en j períodos.

Así $i_t^j (t-1) \alpha_{t-1}^j B_{t-1}$ son los intereses de la parte de la Deuda de $t-1$ que vence en j periodos, $\alpha_{t-1}^j B_{t-1}$

La secuencia de pagos de intereses será, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Intereses: } & \overbrace{i_{t-1}^1 \alpha_{t-2}^1 B_{t-2} + i_{t-1}^2 (t-2) \alpha_{t-2}^2 B_{t-2}}^{t-1} \quad \overbrace{i_t^1 \alpha_{t-1}^1 B_{t-1} + i_t^2 (t-2) \alpha_{t-1}^2 B_{t-1}}^t \\ & + i_{t-1}^2 (t-3) \alpha_{t-3}^2 B_{t-3} \quad + i_t^2 (t-2) \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} \end{aligned}$$

Donde para ahorrar notación se suprimen temporalmente los paréntesis asociados a los tipos de interés de la Deuda a un período, i_t^1 , i_{t-1}^1

La restricción presupuestaria del gobierno es, en términos nominales,

$$\begin{aligned} (8) \quad & G_t - T_t + \alpha_{t-1}^1 B_{t-1} + \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} + i_t^1 \alpha_{t-1}^1 B_{t-1} + i_t^2 (t-1) \alpha_{t-1}^2 B_{t-1} \\ & + i_t^2 (t-2) \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} = B_t + H_t - H_{t-1} \quad , t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En palabras, para cada periodo, la suma de los Déficitos corrientes no financieros $G_t - T_t$, más las amortizaciones más los pagos de intereses han de ser cubiertos con emisiones nuevas o recurso al Banco emisor.

Nótese que si $\alpha_t^1 = 1$, es decir toda la Deuda se amortiza en un período, tenemos la expresión (2) del apartado anterior.

Reagrupando términos podemos reescribir (8) como:

$$\begin{aligned} (9) \quad & G_t + T_t + \left[(1 + i_t^1) \alpha_{t-1}^1 + i_t^2 (t-1) \alpha_{t-1}^2 \right] B_{t-1} + \\ & + (1 + i_t^2 (t-2)) \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} = B_t + H_t - H_{t-1} \end{aligned}$$

y llamando al vector

$$(10) \quad 1 + \hat{i}_t = \left[(1 + i_t^1 \alpha_{t-1}^1) + i_t^2 (t-1) \frac{2}{t-1} + 1 + i_t^2 (t-2) \right], \text{vector}$$

de intereses y amortizaciones de la parte de la Deuda que se arrastra al año t.

y al vector

$$(11) \quad \hat{B}_{t-1} = \begin{bmatrix} B_{t-1} \\ \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} \end{bmatrix}, \quad \text{el vector de Deuda viva que se arrastra al período t,}$$

podemos reescribir (9) como:

$$G_t - T_t + (1 + \hat{i}_t) \hat{B}_{t-1} = B_t + H_t - H_{t-1}, \text{ que es la expresión familiar(1)}$$

que usamos en el primer apartado, y donde $(1 + \hat{i}_t)$, \hat{B}_{t-1} tienen ahora la interpretación (10) y (11).

En términos reales, la restricción presupuestaria (9) queda dividida por el índice de precios P_t .

El déficit en términos reales, D_t es igual al cambio en la posición deudora del sector público en términos reales, es decir al incremento de t-1 a t del stock de Deuda viva en términos reales más el incremento en el recurso al Banco emisor utilizado durante t, y medido en términos reales. Dado que el stock de Deuda viva en t viene dado por $B_t + \alpha_{t-1}^2 B_{t-1}$ el Déficit real es

$$(12) \quad D_t = \frac{B_t + \alpha_{t-1}^2 B_{t-1}}{P_t} - \frac{B_{t-1} + \alpha_{t-2}^2 B_{t-2}}{P_{t-1}} + \frac{H_t}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_{t-1}}$$

De la definición (12), usando la restricción (9) en términos reales, el Déficit real se puede expresar, reagrupando, usando

$$\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad \text{y simplificando:}$$

$$(13) \quad D_t = \frac{G_t - T_t}{P_t} + (i_t^1 - \pi_t) \alpha_{t-1}^1 \frac{B_{t-1}}{P_t} + (i_t^2(t-2) - \pi_t) \alpha_{t-2}^2 \frac{B_{t-2}}{P_t} + \\ (i_t^2(t-1) - \pi_t) \alpha_{t-1}^2 \frac{B_{t-1}}{P_t} - \pi_t \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

Es decir, el Déficit real es igual a la suma del Déficit real no financiero más los gastos de intereses descontados por la inflación anual, de todos los pasivos. De nuevo, si $\alpha_t^1 = \alpha_{t-1}^1 = 1$, toda la Deuda se amortiza en un periodo, tendríamos nuestra expresión original (3).

En general (13) es nuestra expresión (3) con la interpretación (10) (11) en forma de vectores.

Déficit real e inflación inesperada.

Supongamos ahora que la inflación crece por motivos ajenos a la restricción presupuestaria del Gobierno, (es decir, no hay mayor recurso al Banco emisor) El volumen de Deuda viva es el mismo que en caso en que la Deuda estaba a un plazo. Supongamos que los tipos nominales están dados y un incremento de la tasa de inflación no los afecta, es decir la inflación es totalmente inesperada. Claramente, el Déficit en términos reales baja con la inflación porque los tipos de interés "reales" se reducen. Pero ¿será este efecto mayor dependiendo de la composición de la Deuda? La respuesta es negativa, como vemos a continuación.

De la expresión para el Déficit real (13), tomando la derivada con respecto a la inflación se obtiene (*)

$$\frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = \frac{-P_{t-1}}{P_t} (G_t - T_t) + (i_t^1 - \pi_t) \alpha_{t-1}^1 B_{t-1} + (i_t^2(t-2) - \pi_t) \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} + \\ + (i_t^2(t-1) - \pi_t) \alpha_{t-1}^2 B_{t-1} - \frac{\text{Deuda viva en } t-1}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

(*) En la derivada se debe incluir $P_t = (1 + \pi_t) P_{t-1}$

y usando (13)

$$(14) \quad \frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = \frac{-P_{t-1}}{P_t} D_t - \frac{\text{Deuda viva en } t-1}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

Nótese que esta expresión es idéntica a (4). Por tanto la composición de la Deuda no hace que el efecto (negativo) de una inflación inesperada sobre el Déficit real sea mayor o menor porque la estructura de los tipos de interés nominales no varía. Como veremos más adelante, sólo si la inflación hace variar dicha estructura la composición jugará un papel.

Déficit real e inflación perfectamente anticipada

A continuación vamos a analizar el caso en que el incremento de la inflación en t es totalmente anticipado, de forma que los tipos a pagar en t , $i_t^1(t-1)$, $i_t^2(t-1)$, $i_t^2(t-2)$ y contratados con uno o dos períodos de antelación se ajustan de forma que el tipo de interés real se mantiene y la estructura relativa de los tipos se mantiene.

De (13) tendríamos

$$(15) \quad \frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = \frac{-P_{t-1}}{P_t} D_t - \frac{H_{t-1}}{P_t} \quad \text{que es el equivalente a (5). Por tanto, la}$$

composición es igualmente irrelevante cuando los incrementos de la inflación son perfectamente anticipados en todos los períodos.

A continuación estudiamos el caso donde el incremento de la inflación es solamente anticipado en t , y cambia la estructura de los tipos de interés nominales.

Déficit real e inflación parcialmente anticipada

Supongamos ahora que un incremento en la tasa de inflación para t , π_t , es anticipado por los agentes de forma que los tipos de la parte de la Deuda emitida en $t-1$ se ajustan inmediatamente pero no ocurre lo mismo con los tipos de la Deuda emitida en un plazo anterior, que no varían, $i_t^2(t-2)$

De (13) tendríamos

$$(16) \quad \frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = \frac{-P_{t-1}}{P_t} D_t - \alpha_{t-2}^2 \frac{B_{t-2}}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

Comparando con (5) vemos que, en este caso la composición de la Deuda influye en un menor Déficit real por incremento de la inflación. Cuanto mayor sea la proporción de la Deuda emitida a largo plazo, α_{t-2}^2 , mayor el efecto negativo de la inflación sobre el Déficit real.

En resumen, cuando la Deuda está a un plazo, los tipos nominales se contratan a un período vista, y la inflación o bien es perfectamente anticipada o totalmente inesperada, no habiendo casos intermedios de habilidad en el poder de predicción. Sin embargo, cuando la Deuda se puede emitir a diferentes plazos de Amortización, la habilidad en la capacidad de predicción juega un papel importante a la hora de calibrar los efectos erosinadores de la inflación. Si la habilidad es nula o perfecta, la composición es irrelevante: las pérdidas de capital (ganancias por el Gobierno) de tenerle a un plazo o a varios son idénticas a las de 2 plazos (muchas pérdidas si la habilidad es nula, cero si la habilidad es perfecta). Pero en un caso intermedio de habilidad, en que el stock inflacionario es anticipado correctamente a un período vista, pero no a dos períodos, la composición es relevante: cuánto más parte de la Deuda esté a largo plazo, mayores los efectos erosinadores de la inflación, y viceversa para la deflación.

Déficit real y mayor monetización

Para terminar volvamos al caso de una mayor inflación asociada a un mayor recurso al Banco emisor, que reduce las necesidades de emisiones de Deuda y, por tanto futuros pagos de intereses.

Los resultados de este apartado se pueden derivar directamente de lo obtenido en la sección anterior.

- (a) Si la tasa de inflación crece inesperadamente, (4) y (7) mantienen su vigor, y la composición de la Deuda es irrelevante. Se reduce el Déficit real en t por un aumento del deflactor (ecuación (4)) y se reduce en $t+1$ por los menores pagos de in

III. SOBRE LA COMPOSICION OPTIMA DE LA DEUDA

De los apartados anteriores se deduce que cambios en la estructura de los tipos de interés nominales, o lo que es lo mismo, cambios en las expectativas de inflación, hacen variar tanto el Déficit en términos nominales como el Déficit real (por la variación de los tipos reales y del deflactor) y la Deuda (tanto en términos nominales como reales). - Está claro que dichos cambios pueden ser diferentes dependiendo de cómo sea la estructura de la Deuda y de cómo varía dicha estructura.

También está claro que sendas muy diferentes de Déficit son compatibles con una misma o una muy diferente acumulación de Deuda real. Dejando a un lado los efectos período a período del Déficit sobre las variables reales, un gobierno preocupado meramente en su restricción - presupuestaria, y por tanto en su stock real de pasivos en un horizonte determinado, no debería prestar tanta atención al Déficit período a período como a su evolución a lo largo del tiempo, y al nivel de endeudamiento que genera.

Es decir, bajo un criterio estrictamente contable, el Gobierno debería optar por una composición que minimice el valor real de sus pasivos para un horizonte determinado (*). Por supuesto que esto podría - suponer tasas de inflación más altas, que erosionan rápidamente los pasivos, pero que son incompatibles con un programa económico más general del gobierno. No entramos en la cuestión de la elección de una tasa de inflación. La inflación será una variable dada.

El propósito de esta sección es, en primer lugar, analizar en términos nominales la composición óptima de la Deuda, para luego, generalizarlo al caso real. Empezamos haciendo unas consideraciones generales sobre el programa de optimización a ser realizado por el gobierno. Presentamos un método de solución del que se sacan algunas conclusiones cuantitativas. La primera es que si bien la Deuda es la suma de los Dé-

(*) La función objetivo requiere en este caso un horizonte temporal finito. Podría pensarse con una función más apropiada para aplicar resultados concretos de Teoría de la Programación Dinámica, como una suma infinita descontada de variación de pasivos (valor presente). Pero aquí se entraría en el obstáculo insalvable de la elección del factor descuento.

tereses, dadas las menores necesidades de emisión de Deuda en t (ecuación (7)), independiente de la composición de la Deuda.

- (b) Si la tasa de inflación es perfectamente anticipada, y todos los tipos se ajustan, tendríamos (5) y (7) y la composición de la Deuda es irrelevante.
- (c) Si la tasa de inflación es anticipada en t de forma que los tipos nominales en t , $i_t^1(t-1)$, $i_t^2(t-1)$ se ajustan, pero no el tipo de dos períodos, a pagar en t , $i_t^2(t-2)$ entonces tendríamos:

(16) para el período t

(7) Para el período $t+1$

etc.

Tal y como hicimos en la sección I, está claro que la reacción futura de los tipos de interés nominales a stocks inflacionarios hoy, puede jugar un papel importante a la hora de calibrar los efectos temporales de cambios en la inflación sobre la medición del Déficit. Sin embargo, aquí hemos supuesto, por simplicidad que ante cambios en π_t , se producirían o no cambios en $i_t^1(t-1)$, $i_t^2(t-1)$, $i_t^2(t-2)$, pero no se afectaría a los tipos $i_{t+1}^1(t)$, $i_{t+1}^2(t)$, $i_{t+1}^2(t-1)$.

Hasta ahora, dada una composición y unos tipos, hemos analizado posibles efectos de la inflación en el Déficit ante diferentes escenarios de predicción: los tipos no cambian en absoluto, cambian totalmente sin cambiar la estructura, cambian parcialmente cambiando la estructura. Hemos concluido que sólo en el último caso es relevante la composición. Además hemos concluido que la senda de los Déficits puede no dar la imagen adecuada de la posición deudora a la que se tiende.

A continuación, y teniendo como base estos resultados, nos adentraremos en su ejercicio más sofisticado: partiendo de unos conocidos (o estimados) tipos de interés nominales (o tasas de inflación y tipos reales) ¿que composición se debe seguir tal que se acabe con la mejor posición deudora real?

ficits a lo largo del tiempo, minimizar la Deuda para un período determinado no es equivalente a minimizar el Déficit período a período. Es decir, podrían hallarse casos donde en un terminado período concurren pagos de intereses que parece que se podrían haber corregido con otra composición, pero que sin embargo hubieran supuesto apartarse de la senda óptima y "pagar el error más adelante".

Posteriormente, se prueba que expectativas de tipos nominales crecientes hacen tender a una composición óptima más a largo plazo y viceversa. Al recoger los tipos nominales expectativas de inflación, es inmediato deducir que tasas de inflación crecientes empujan a una composición más a largo, y viceversa.

A continuación, se generaliza el caso real, analizando la composición óptima de la Deuda en términos reales. Finalmente, se discute la dificultad, por no decir imposibilidad, de uso de los datos reales de una economía para contrastar el grado de desviación de la senda óptima de composición y se comentan tendencias recientes en la estructura de la Deuda para el caso español, así como el anuncio reciente de cambios en dicha estructura.

A continuación, presentamos un marco analítico sencillo, donde la Deuda puede estar solamente a 1 ó 2 plazos, donde no hay monetización y donde no hay costes asociados a tener la Deuda a mayor o menor plazo, es decir, el coste marginal de amortización y emisiones es nulo.

Composición óptima de la Deuda en términos nominales

Supongamos que el gobierno decide minimizar el valor de la Deuda en un horizonte $t+N$, es decir $B_{t+N} + \alpha_{t+N-1}^2 B_{t+N-1}$ eligiendo una composición

$\alpha_t^1, \alpha_t^2, \dots, \alpha_{t+N-1}^1, \alpha_{t+N-1}^2$ conociendo (o habiéndose formado expectativas de) la secuencia de todos los tipos nominales anuales a 1 ó 2 plazos $i_{t+1}^1(t), i_{t+1}^2(t), i_{t+2}^2(t) \dots, i_{t+N}^1(t+N-1), i_{t+N}^2(t+N-1)$ y tomando como datos las secuencias de gas-

tos e ingresos corrientes $\left\{ G_j - T_j \right\}_{j=t}^{t+N}$.

Está claro, que $B_{t+N} + \alpha_{t+N}^2 B_{t+N-1}$ depende de las decisiones de t a $t+N-1$, puesto que la Deuda es la suma acumulada de Déficits - que incluyen pagos por intereses que han sido de uno u otro volumen dependiendo de la composición.

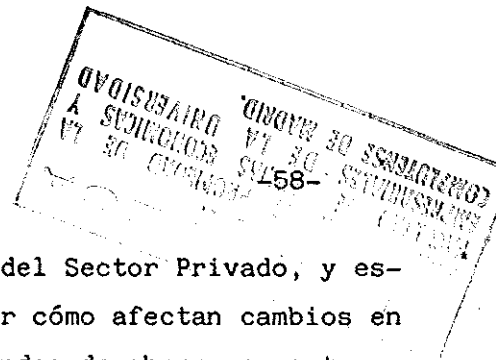
Podríamos expresar la función objetivo como :

$$(17) \min. F (G_t - T_t, \dots, G_{t+N} - T_{t+N}, \alpha_t^1, \alpha_t^2, \dots, \alpha_{t+N-1}^1, \alpha_{t+N}^2 (t+N-1), i_{t+1}^1 (t), i_{t+1}^2 (t), i_{t+1}^2 (t-1), \dots, i_{t+N}^2 (t+N-1))$$

donde los tipos nominales están dados, y la secuencias de gastos corrientes sobre ingresos están prefijados. Sabiendo que $\alpha_t^1 + \alpha_t^2 = 1$ para todo t , el gobierno tiene N incógnitas : $\alpha_t^1 \dots \alpha_{t+N-1}^1$

El gobierno parte de una situación inicial B_{t-1} que incluye - una composición pasada, que le viene dada.

En la formulación anterior tomamos como conocida la secuencia futura de los tipos de interés y de excesos de gastos corrientes sobre ingresos. En realidad, el gobierno resolvería un problema de incertidumbre: minimizar el valor esperado de (17) dadas una predicciones de variables futuras en base a un conjunto de información en t que habría que especificar. Este es un problema técnico cuya resolución no nos libraría de problemas graves que más adelante mencionaremos. Hemos considerado - como exógenas las secuencias de gastos corrientes e ingresos recaudatorios, es decir que no forman parte de las variables de decisión del Gobierno, con el motivo de aislar el problema de la composición en sentido estricto. El problema más grave de la formulación anterior es la consideración de los tipos de interés nominales como exógenos. Es decir, que - cambios en la composición (elegir unas α 's y no otras) no afectan a los tipos a corto o a largo. Este ya es un problema económico que requiere -



modelización del comportamiento de los agentes del Sector Privado, y estimación de sus reglas de decisión para analizar cómo afectan cambios en la composición de la Deuda (mayor demanda de fondos de ahorro a corto sobre largo) a la estructura relativa de los tipos de interés. Además, si el peso de la Deuda Pública es, como parece razonable suponer, lo suficientemente grande como para ejercer una gran distorsión en los mercados a crédito a la hora de fijar los tipos, esto le da un papel oligopólico al Estado, de forma tal que debería ser modelado como un jugador relevante en dichos mercados.

En cualquier caso, si mantener el supuesto de exogeneidad de los tipos es poco razonable, también es verdad que es necesario para hacer que el programa de composición óptima sea abordable.

Para terminar con el reconocimiento de los fuertes supuestos - simplificadores de que partimos, hemos ignorado como variable de decisión el recurso al Banco emisor. Este jugaría un papel importante en la composición de la Deuda, no solo porque la monetización es un sustituto de emisión de Deuda, sino porque al considerar ésta en términos reales, una mayor monetización iría asociada a una mayor inflación y por tanto a una mayor erosión de la posición deudora real del Sector Público. Sin embargo, por simplicidad supondremos $H_t = H_{t-1}$ para todo $t, \dots, t+N$.

El problema de minimización de (17) es recursivo. Dado que la Deuda puede estar sólo a uno o a dos plazos, las decisiones en t se arrastran durante los dos siguientes períodos (en que se pagan amortizaciones e intereses). Por tanto, en cada período concurren decisiones tomadas en dos períodos diferentes y que dependen de los tipos de interés en dos períodos futuros. Casos numéricos pueden ser resueltos utilizando algoritmos de Programación Dinámica empezando por solucionar el problema en el período final, tomando como dada una estructura anterior, e ir solucionando " hacia atrás ".

Se puede demostrar que la solución óptima de minimización de la Deuda en $t+N$ debe cumplir:

$$(18) \quad \alpha_{t+N-1}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } i_{t+N}^1(t+N-1) < i_{t+N}^2(t+N-1) \\ & \text{para } t+N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\alpha_t^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \left[1+i_{t+2}^2(t+1) + (i_{t+2}^1(t+1) - i_{t+2}^2(t+1)) \alpha_{t+1}^1 \right] \left[1+i_{t+1}^1(t) - i_{t+1}^2(t) \right] < 1+i_{t+2}^2(t) \\ & \text{para } t, t+1, \dots, t+N-2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En $t+N-1$ se decide por α_{t+N-1}^1 ; la siguiente decisión es entre

$$\alpha_{t+N-2}^1 = \text{uno o cero, donde se necesita saber la decisión } \alpha_{t+N-1}^1$$

y así sucesivamente "hacia atrás".

Nótese que en cada período se decide por una solución esquina (emitir la nueva deuda bien a largo o bien a corto) lo cual no quiere decir que la deuda se halle siempre a largo o a corto, puesto que, como - hemos dicho, en cada período el estado de la deuda es fruto de decisiones de 2 períodos.

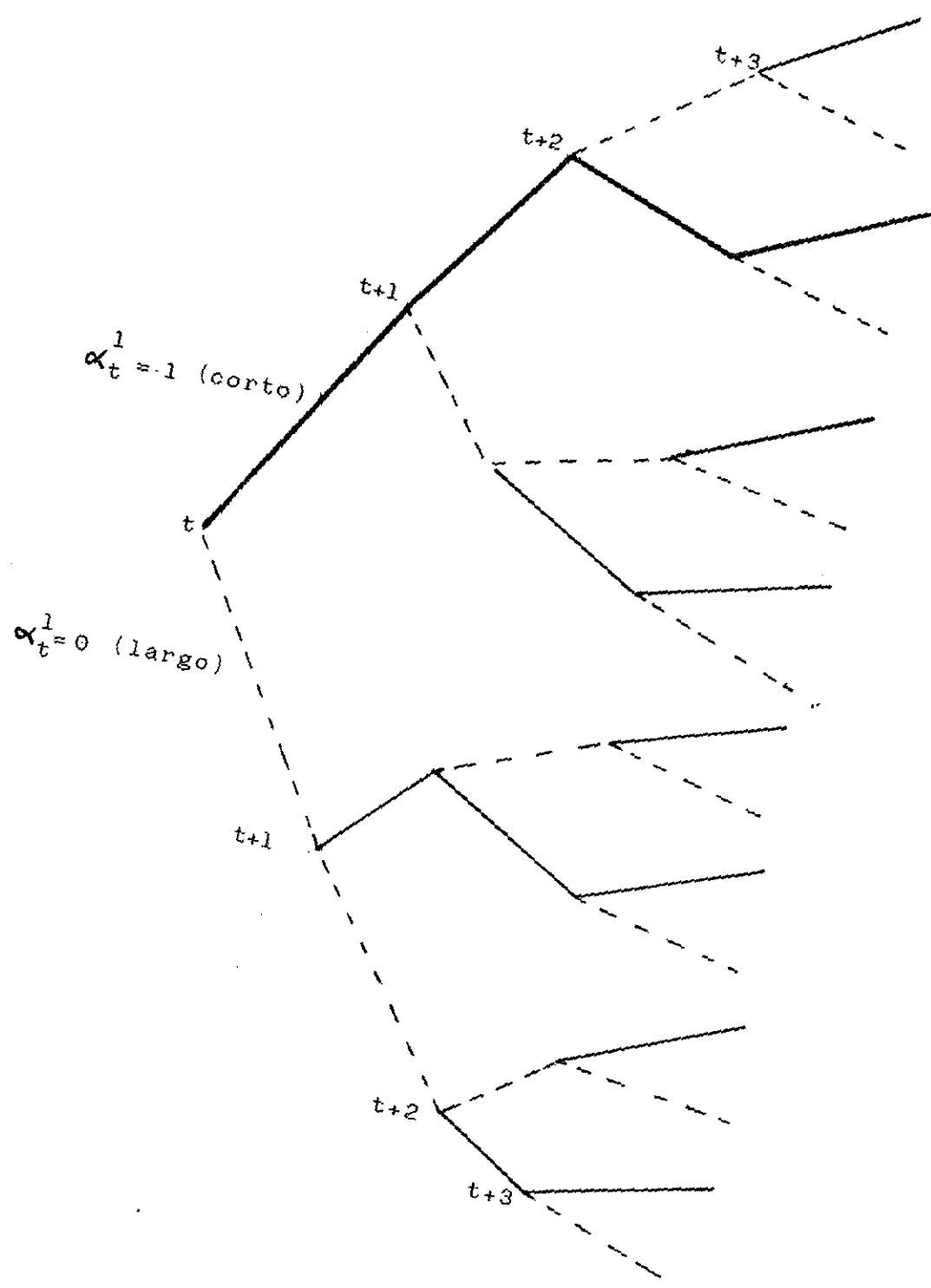
La estructura dinámica del problema tiene la forma de árbol - donde en cada nudo (períodos) se decide por optar por una rama (largo o corto). La regla (18) nos indica en cada nudo por qué rama optar. Empezando por el final, en cada nudo del árbol se pone, un trazo continuo, la decisión tomada; siguiendo el tramo continuo se deriva la senda optima.

En el gráfico siguiente aparece un ejemplo para ilustrar la forma de solución de éste problema dinámico. En cada nudo se debe optar por ir hacia arriba ("corto"), es decir $\alpha_t^1 = 1$ ó hacia abajo ("largo

plazo") es decir $\alpha_t^1 = 0$ ó $\alpha_t^2 = 1$. Se empieza por el período final donde usando (18) se opta por el corto plazo, independientemente de la composición hasta ese período. Se pone en tramo oscuro la rama "corto". A continuación se pasa al período anterior y siguiendo (18) se opta por la rama correspondiente. Uniendo todas las ramas elegidas se deriva a la senda óptima de composición de la Deuda. En el ejemplo representado en el gráfico siguiente, $N=4$ y se opta por $\alpha_{t+3}^1 = 1$, $\alpha_{t+2}^1 = 0$,

$$\alpha_{t+1}^1 = 1 \text{ y } \alpha_t^1 = 1$$

SENDA OPTI



En el caso de que en cada período se puede elegir entre una mayor variedad de plazos, la estructura básica del problema (17) no cambia, ni tampoco la forma de solución que tendría una estructura similar a (18) aunque con una regla más complicada.

De (18) se puede deducir los siguiente:

- 1.- La senda óptima no tiene por qué ser una que minimice el Déficit período a período. La razón está en que se liga información de más de un período a la hora de tomar cada decisión temporal, mientras que en el Déficit sólo entra información puntual de cada período. Minimizar el Déficit período a período, dada una estructura anterior vendría dado por:

$$\alpha_t^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } i_{t+1}^1(t) < i_{t+1}^2(t) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad \text{para } t, t+1, \dots, t+N-1$$

Claramente, en (18) podría darse el caso que $i_{t+1}^1 < i_{t+1}^2$ y optar por $\alpha_t^1 = 0$. Por tanto, seguir una senda de minimizar el Déficit período a período es miope, en el sentido de poder terminar en un nivel de endeudamiento más elevado, -o "pagar el error" más adelante en el tiempo.

- 2.- Si la estructura de los tipos es tal que la condición (18) se cumple con igualdad, la composición es irrelevante para ese período. Si la igualdad se repite en cada período, la composición de la Deuda es irrelevante a la hora de minimizar la Deuda de un cierto horizonte temporal. Un caso particular es : $i_{t+1}^1(t) = i_{t+1}^2(t) = i_{t+2}^2(t)$ en cuyo caso (18) se cumple con igualdad en todos los períodos y la composición es irrelevante.

Nótese también que igualdad en la Condición (18) no supone eficiencia en los mercados de crédito. La condición de

eficiencia habría que derivarla en un marco teórico. Nuestra conjetura es que (18) con igualdad será la condición de eficiencia si todos los agentes que participan en el mercado de crédito tanto prestamistas como prestatarios, tuvieran como objetivo el mismo horizonte temporal y coincidieran en el mercado el mismo número de períodos.

- 3.- Si la inflación es creciente, la Deuda debe estar a más largo plazo. Una inflación creciente debe verse reflejada en unos tipos nominales crecientes $i_{t+2}^2(t+1) > i_{t+2}^2(t)$ o bien $i_{t+2}^1(t+1) > i_{t+1}^1(t)$. Entonces en (18) se tendería (supongamos $i_{t+j}^1(t) = i_{t+j}^2(t)$ para verlo claramente en un caso especial) a la desigualdad $>$ y por tanto $\alpha_t^1 = 0$, es decir optar por el "largo plazo". La inflación se traduce en una subida de los tipos nominales, que incrementan los pagos de intereses de la Deuda. Cuanto mayor sea la proporción de la Deuda atada a unos tipos anteriores a la inflación (tipos más bajos) menores serán los pagos por intereses y menor la acumulación de Deuda en el tiempo.

Composición de la Deuda real e inflación

Hasta ahora hemos analizado la composición óptima de la Deuda en términos nominales. La Deuda real resulta de dividir la Deuda nominal por el deflactor del período. En este apartado hacemos unas consideraciones sobre la estructura de la Deuda e inflación.

No consideramos la inflación como variable de decisión. Está claro que con el objetivo de minimizar la Deuda real, si consideramos la inflación como variable a elección, se optaría trivialmente por unas tasas de inflación tan grandes como se pudieran con el objeto de maximizar la erosión real de los pasivos nominales del Sector Público. Pero es evidente que, en términos de política económica, la inflación es más un objetivo que un instrumento, y por tanto, para el análisis estricto de composición optamos por considerarla aquí como una variable exógena.

Dado que la Deuda real no es más que la nominal dividida por el Deflactor en cada período, un programa de minimización de Deuda real con inflación exógena es equivalente a un programa de minimización de la Deuda nominal. Por tanto, (18) sigue siendo la regla de decisión en cada período.

La inflación influye, por tanto, en la composición óptima de la Deuda en la medida en que se ve traducida en tipos nominales más altos. Cuanto mayor inflación se espere mayor subida de los tipos nominales y más conveniente el que la Deuda se encuentre a largo plazo. Si los aumentos de inflación no se ven reflejados en subidas de tipos nominales (inflación inesperada) la composición es irrelevante, y la erosión de la Deuda viva es del mismo volumen independientemente de los plazos a los que se encuentre.

Si la inflación es esperada se debe ver reflejada en una subida de los tipos nominales y esto afectará la composición en el sentido adelantado en el apartado anterior: la composición se desplaza a más largo

plazo.

En concreto las expectativas de tasas nominales de interes pueden expresarse siempre como una constante i más unas expectativas de inflación (*). Es decir:

$$E_t i_{t+1}^h(t) = i^h + E_t \pi_{t+1} \quad \text{para } h=1,2$$

$$E_t i_{t+2}^h(t) = i^h + E_t \pi_{t+2} \quad \text{para } h=1,2$$

Por tanto, (18) puede expresarse como una condición que relaciona expectativas de inflación con composición óptima de la Deuda.

En el caso de resolver el problema con incertidumbre, habría que incluir un factor más: la ausencia de capacidad o habilidad predictora del gobierno sobre tasas de inflación futuras debe introducir un sesgo hacia la Deuda a corto plazo. Es decir, en épocas de acusada incertidumbre sobre tasas de inflación futura, la Deuda a corto minimiza tanto las pérdidas como ganancias de capital asociados a errores de estimación de tasas de inflación. El motivo es que el error se paga durante un período de tiempo corto, mientras que si la Deuda se emite a largo se deja la posibilidad de repetición acumulada del error. (Supondremos un gobierno con aversión al riesgo).

El Déficit real (cuya suma acumulada coincide con la Deuda real) tiene un perfil muy diferente al Déficit nominal como hemos visto en secciones anteriores. Dada una composición óptima $\alpha_t^1 \dots \alpha_{t+N-1}^1$ se pueden obtener los perfiles de Déficit real y Déficit nominal óptimos, y de nuevo observaríamos que minimización de la Deuda real no es equivalente a minimización del Déficit real período a período.

(*) La constancia de i^h es equivalente a suponer tipos de interés reales constante. Más adelante comentaremos este supuesto.

Contrastación empírica de la optimalidad de la composición de la Deuda.

En principio podría pensarse en un test usando los datos de una economía concreta para un período determinado, y, con una versión de la condición (18) generalizada al caso de s períodos, estudiar si se ha seguido una senda óptima. Si (18) se hubiera cumplido con igualdad durante esos períodos, la composición sería irrelevante. Si para algún período la desigualdad se dió en un sentido contrario a la decisión de plazo de maduración que (18) sugiere, se podría argumentar que la composición no ha sido la óptima, y que un cambio en la estructura hubiera reducido los pagos por intereses y la consiguiente acumulación de Deuda. Sin embargo, tal y como adelantábamos en la introducción de esta Sección, este enfoque es incorrecto si se relajan dos de los supuestos simplificadores que hemos utilizado. Por un lado, el problema con incertidumbre requiere elección de una composición óptima en base a unas tasas de inflación esperadas, que luego pueden ser no las efectivamente realizadas dependiendo de la capacidad predictora del gobierno. Errores de predicción en dichas tasas de inflación son de diferente naturaleza que errores o ausencia de elección óptima en la composición de la Deuda. En segundo lugar, puede ser erróneo suponer que cambios en la estructura de las emisiones de Deuda no varían la relación de los tipos de interés entre corto y largo plazo, es decir si se parte de una situación con Deuda a muy largo plazo, cambios hacia endeudamiento más a corto harían variar la estructura esperada de los tipos de interés en el sentido de subir los de corto relativamente a los de largo. Podría darse el caso de que la Deuda acumulada en el tiempo de resultados de dicho cambio fuera la misma de aquella resultante de haber mantenido la estructura inicial.

Por todo ello, una contrastación del "grado de desviación" de la optimalidad de la senda de composición usando (18) es incompleta y puede derivar en conclusiones falsas. Se requeriría una modelización del comportamiento de los agentes que intervienen en los mercados de crédito y analizar cómo afectan las variaciones en el comportamiento del agente Sector Público sobre los precios relevantes de dichos mercados (tipos de interés), así como una estimación de la elasticidad de los tipos de interés a

los cambios en la demanda de fondos a corto o a largo por parte del gobierno. El problema se complica si el tamaño de algunos agentes en el mercado, como el Sector Público o la Banca Privada es lo suficientemente grande como para que el mercado reúna características de oligopolio. Entonces, la modelización requeriría un juego donde se analizara la interdependencia estratégica entre ambos agentes.

Composición de la Deuda: el caso español.

La imposibilidad en la práctica de un test del que se pueda medir cuantitativamente el grado de desviación de la senda óptima no anula las conclusiones cualitativas que se derivan de (18) y que pueden servir como soporte teórico para analizar la evolución reciente de la composición de la Deuda en el caso español, así como comentar algunos cambios anunciados en dicha tendencia.

En el cuadro siguiente se presenta la evolución reciente de la composición de la Deuda para el caso de la economía española para el período 1979-84. El cambio en la composición es drástico, lo que refuerza la idea de "solución esquina" de la decisión. El ritmo de creación de la Deuda que se ha disparado en los últimos 4 años, ha sido dirigido hacia Deuda, muy a corto plazo, prácticamente desapareciendo en términos relativos la Deuda Perpetua y con una fuerte pérdida de peso específico de la parte viva que se encuentra a medio y largo. Dicho cambio tan drástico en la composición es consistente con unas expectativas de inflación decreciente durante dichos años. Las expectativas del retroceso de la inflación que hayan generado ese cambio en la composición se han visto realizadas, por lo que el cambio en la composición puede calificarse de justificado.

Con el mismo grado de prudencia y haciendo hincapié en la dificultad de un juicio cuantitativo riguroso, se puede discutir el acierto del anunciado cambio en la composición de la Deuda hacia más largo plazo a partir de 1986 en adelante. Hay varias posibilidades que justifican dicho cambio en la tendencia. En primer lugar, que hay expectativas de inflación

COMPOSICION DE LA DEUDA DE LAS A.A.P.P. (saldos vivos) (*)

	Medio y Largo Plazo	Pagarés Tesoro	Perpetua
1979	96,10 %	-	3,9 %
1980	96,94 %	-	3,06 %
1981	91,97 %	5,92 %	2,10 %
1982	85,56 %	13,20 %	1,22 %
1983	39,55 %	59,95 %	0,48 %
1984	21,27 %	78,49 %	0,22 %

Fuente : Banco de España y elaboración propia

(*) No incluye Deuda no negociable.

creciente. Pero ello parece contradecir el programa a medio plazo del gobierno. En segundo lugar, que había más incertidumbre entonces sobre tasas de inflación futura que la que hay ahora, lo que condujo a un sesgo hacia el corto plazo que ahora debe verse corregido al desaparecer esa incertidumbre. Esta afirmación es, cuanto menos, discutible.

En tercer lugar, que hay expectativas de crecimiento en los tipos de interés reales que compensarían la reducción en las tasas de inflación de forma que los tipos nominales subirían. Muchos autores han estudiado el carácter procíclico de los tipos reales, que subirían en una fase de recuperación y expansión de la economía. Dejando a un lado el debate, en absoluto cerrado, sobre dicha correlación, el Programa Económico a Medio y Largo plazo del gobierno predice tasas de crecimiento medios anuales del 2.6% para el período 86-89, y en ningún año por encima del 3%. Debería quedar explicitado que el gobierno considera por este motivo que los tipos de interés reales van a subir lo suficientemente como para compensar las previstas reducciones en las tasas de inflación, y que espera tipos nominales crecientes.

En cuarto lugar, que se dispone de un modelo capaz de generar esa decisión porque relaja algunos de nuestros supuestos simplificadores. En concreto, el supuesto de exogeneidad en la estructura de los tipos de intereses nominales puede verse relajado y concluir que merezca la pena el cambio, en términos de acumulación de Deuda, hacia el largo plazo porque los tipos variarán en dicha dirección al variar la composición. Alternativamente, se han relajado nuestro supuesto de coste marginal nulo de Emisión o "colocación" y Amortización. Es difícil, al menos a un nivel teórico, imaginar la importancia de dichos costes: el mercado de crédito no debería presentar dificultades de "renovación de títulos" porque en cada momento del tiempo los ahorradores netos estarán deseando hacerlo a los tipos de equilibrio. Es decir, la composición de la Deuda no debe influir en el volumen de ahorro privado dispuesto a adquirirla. El mercado se reúne con periodicidad suficiente como para que se incurra en unos "costes de encuentro" significativos. En cualquier caso, se precisa una formulación explícita de cuáles

(*) " Programa Económico a medio plazo" . Secretaría General de Economía y Planificación del Mº de Economía y Hacienda.

son esos costes y de en qué medida justifican un cambio en la tendencia, hacia el largo plazo, una vez han sido fijadas como objetivo del gobierno (*), unas tasas de inflación para los años 86-89 del 8.3, 7.1, 6.1 y 5.1 respectivamente. En contraste con la dificultad de medir los costes de emisión y colocación, es fácil imaginar y medir los costes en que se incurren si la inflación se comporta conforme los objetivos citados, los tipos nominales se reducen en la misma o parecida proporción y el cuantioso volumen de Deuda queda atado para el futuro a los tipos actuales (alrededor de un 10%) que son consistentes con las tasas actuales de inflación (alrededor del 9%).

Conviene aquí de nuevo poner énfasis en el resultado de que la composición óptima de la Deuda no pasa por la minimización del Déficit período a período ni para un grupo de períodos. Ni qué decir tiene que la senda óptima no guarda ninguna relación con la suma de Déficits y Amortizaciones. Cambiar la estructura con el objeto de minimizar dicha suma durante algunos períodos no es, según lo expuesto anteriormente, aconsejable. Por tanto, medidas en ese sentido deberían ir acompañadas de una mayor clarificación tanto sobre cuáles son los costes de Amortización y colocación que han provocado dicho cambio como cuáles son los tipos de inflación esperados, y consiguientemente los tipos nominales esperados que han hecho que los costes de transacción hayan tenido más peso que la tendencia decreciente de sus tipos para poder justificar el desplazamiento hacia el largo plazo.

(*) "Programa Económico a medio plazo. Secretaría de Economía y Planificación del Mº de Economía y Hacienda.

APENDICE

UNA GENERALIZACION A "S" PLAZOS DE MADURACION

Llamemos α_t^j a la proporción de la Deuda emitida en t y que vence en j períodos. Entonces $\sum_{j=1}^s \alpha_t^j = 1$, para todo t, donde s es el máximo plazo de maduración. Vamos a suponer el caso más general, en que la Deuda no tiene por qué estar dividida siempre en los mismos plazos, es decir admitimos $\alpha_t^K = 0$ para algunos K en algunos t.

Llamemos $i_t^j(t-1)$ al tipo de interés anual, a pagar en t, de la Deuda a j plazos emitida en t-1. Nótese que la parte de la Deuda emitida en t-1 que vence en 1 año, α_{t-1}^1 , le corresponde un tipo i_t^1 a pagar en t. A la parte que vence en dos años α_{t-1}^2 le corresponde un par (i_t^2, i_{t+1}^2) , y así sucesivamente. Es decir en cada período t observamos:

Pagos de intereses en t:

$$\underbrace{i_t^1(t-1)\alpha_{t-1}^1 B_{t-1} + i_t^2(t-1)\alpha_{t-1}^2 B_{t-1} + \dots + i_t^s(t-1)\alpha_{t-1}^s B_{t-1}}_{\text{emitido en t-1}} + \underbrace{i_t^2(t-2)\alpha_{t-2}^2 B_{t-2} + \dots + i_t^s(t-2)\alpha_{t-2}^s B_{t-2}}_{\text{emitido en t-2}} + \dots + \underbrace{i_t^s(t-s)\alpha_{t-s}^s B_{t-s}}_{\text{emitido en t-s}}$$

Es decir en cada período t observamos los pagos de intereses

$$(19) \sum_{j=1}^s \sum_{h=1}^s i_t^h(t-j) \alpha_{t-j}^h$$

Para el caso s=2, (19) se convierte en $\sum_{h=1}^2 i_t^h(t-1) \alpha_{t-1}^h B_{t-1} + i_t^2(t-2) \alpha_{t-2}^2 B_{t-2}$, que es la expresión de la sección II.

Por otra parte, en cada período t observamos

amortizaciones:

$$\alpha_{t-1}^1 B_{t-1} + \alpha_{t-2}^2 B_{t-2} + \dots + \alpha_{t-s}^s B_{t-s} = \sum_{j=1}^s \alpha_{t-j}^j B_{t-j}$$

y Deuda viva en t:

$$\underbrace{B_t + \alpha_{t-1}^2 B_{t-1} + \alpha_{t-1}^3 B_{t-1} + \dots + \alpha_{t-1}^s B_{t-1}}_{\text{emitido en } t-1} +$$

$$\underbrace{+ \alpha_{t-2}^3 B_{t-2} + \dots + \alpha_{t-2}^s B_{t-2}}_{\text{emitido en } t-2} + \dots + \underbrace{+ \alpha_{t-s+1}^s B_{t-s+1}}_{\text{emitido en } t-s+1}$$

que se puede reescribir como

$$(20) \quad B_t + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-j}^h B_{t-j}$$

(para el caso $s=2$, tendríamos $B_t + \alpha_{t-1}^2 B_{t-1}$)

usando $B_t = \sum_{j=1}^s \alpha_t^j B_t$, se puede reescribir

$$\text{Deuda viva en } t = \sum_{j=1}^s \sum_{h=j}^s \alpha_{t+1-j}^h B_{t+1-j}$$

Entonces podemos reescribir la restricción presupuestaria en términos nominales (1) como

$$(21) \quad G_t - T_t + \sum_{j=1}^s \alpha_{t-j}^j B_{t-j} + \sum_{j=1}^s \sum_{h=j}^s i_t^{h(t-j)} \alpha_{t-j}^h B_{t-j} =$$

$$= B_t + H_t - H_{t-1}$$

(es decir, déficit corriente no financiero + amortizaciones + intereses = Deuda emitida + recurso al Banco emisor)

Dividiendo por el índice P_t obtendríamos la expresión en términos reales.

El Déficit real viene dado por el incremento de la posición deudora real, es decir los pasivos en términos reales de un período menos los pasivos - en términos reales del período anterior

$$D_t = \frac{\text{Deuda viva en } t}{P_t} - \frac{\text{Deuda viva en } t-1}{P_{t-1}} + \frac{H_t}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_{t-1}}$$

$$\text{donde } \frac{\text{Deuda viva en } t}{P_t} = \frac{B_t}{P_t} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t}$$

De la expresión (21) en términos reales se puede obtener (Ver Addendum)

$$(22) \quad D_t = \frac{G_t - T_t}{P_t} + \sum_{j=1}^s \sum_{h=j}^s (i_t^{h(t-j)} - \pi_t) \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t} - \pi_t \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

Expresión general para el Déficit real cuando la Deuda se amortiza a plazos diferentes. Los dos últimos términos incluyen el "ajuste por inflación" que se trata simplemente de descontar la tasa de inflación de todos los tipos nominales de cada apartado de la Deuda, y descartar el "inflation tax" de los pasivos monetarios del Sector Público.

Déficit real e inflación inesperada

Al igual que para el caso de 2 períodos, se puede tomar la derivada de con respecto a la inflación, suponiendo que los tipos nominales no varían y obtener :

$$\frac{\partial D_t}{\partial \pi_t} = - \frac{P_{t-1}}{P_t} D_t - \frac{\text{Deuda viva en } t-1}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

Dicha expresión es idéntica a (14). Por tanto, la generalización a s períodos no cambia el resultado de que si bien la inflación inesperada hace disminuir el valor real del Déficit en cada período, la composición de la Deuda no interviene para que dicho efecto sea mayor o menor.

Déficit real e inflación parcialmente anticipada

Los resultados de la Sección II se generalizan de forma inmediata. Al cambiar la estructura de los tipos de interés nominales, la composición de la Deuda influye en el sentido de que cuantas más emisiones a largo plazo, - mayor la reducción del Déficit por incremento de la inflación.

La novedad en este apartado es la siguiente. Cuando la Deuda estaba a 2 - plazos, si los tipos se ajustaban en t, en el período t+1 acababa el efecto de reducción del Déficit pues los agentes ante un incremento de π_t -- revisaban no solo i_t^1 sino i_t^2 . Por tanto un nuevo incremento de π_{t+1} no deja ningún tipo nominal sin revisar.

Sin embargo, cuando la Deuda esté a mayor horizonte (es decir haya más - Deuda proveniente de períodos más retardados) quedan "atados" más tipos - nominales que permiten que futuros incrementos de la inflación

($\pi_{t+1}, \pi_{t+2}, \dots, \pi_{t+s-1}$) aún anticipados en cada período, sigan - teniendo efectos adicionales de reducción del Déficit. En el período - $t+s-1$ termina la capacidad de "aprovechamiento" de los tipos nominales y todos se ajustan.

Está claro que una reacción de los tenedores de bonos que exija mayores tipos reales para compensar pérdidas pasadas, se empezaría a notar especialmente a partir del período t+s-1 en que los efectos de reducción por inflación pasada terminan y comienza a pagarse el efecto por "reacción" - ante inflación inesperada. Alternativamente, otra reacción posible es que el Sector Público se vea incapacitado a colocar Deuda a largo plazo en - período inflacionista, y se vea obligado a cambiar la estructura hacia plazos cada vez más cortos. Si la inflación no va a ser utilizada como - medida "sorpresa" para reducir el Déficit Público, el cambio en la composición no afecta a la valoración del Déficit real.

ADDENDUM(a) Deuda viva en $t=$

$$= \frac{B_t}{P_t} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t}$$

Analogamente:

(b) Deuda viva en $t-1=$

$$= \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t}$$

Por tanto, Déficit real en t :

$$D_t = (a) - (b) + \frac{H_t}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_{t-1}} =$$

$$= \frac{B_t}{P_t} + \frac{H_t}{P_t} - \frac{H_{t-1}}{P_{t-1}} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t} - \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}} - \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-1-j}^h \frac{B_{t-1-j}}{P_{t-1}}$$

usando (21)

$$D_t = \frac{G_t - T_t}{P_t} + \sum_{j=1}^s \alpha_{t-j}^j \frac{B_{t-j}}{P_t} + \sum_{j=1}^s \sum_{h=j}^s i_t^h(t-j) \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t} - \frac{B_{t-1}}{P_t} - \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s \alpha_{t-1-j}^h \frac{B_{t-1-j}}{P_t} - \pi_t \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

$$\text{Reagrupando y usando } \frac{B_{t-1}}{P_{t-1}} = \sum_{j=1}^s (1 + \pi_t) \alpha_{t-1}^j \frac{B_{t-1}}{P_t}$$



$$D_t = \frac{G_t - T_t}{P_t} + \sum_{j=1}^s (1 + i_t^j(t-j)) \alpha_{t-j}^j \frac{B_{t-j}}{P_t} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s (1 + i_t^h(t-j)) \alpha_{t-j}^h \frac{B_{t-j}}{P_t} -$$

$$- \sum_{j=1}^s (1 + \pi_t) \alpha_{t-1}^j \frac{B_{t-1}}{P_t} - \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s (1 + \pi_t) \alpha_{t-1-j}^h \frac{B_{t-1-j}}{P_t} - \pi_t \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

Reagrupando nuevamente:

$$D_t = \frac{G_t - T_t}{P_t} + \sum_{j=1}^s (i_t^j(t-1) - \pi_t) \alpha_{t-1}^j \frac{B_{t-1}}{P_t} + \sum_{j=2}^s (i_t^j(t-j) - \pi_t) \alpha_{t-j}^j \frac{B_{t-j}}{P_t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{h=j+1}^s (i_t^h(t-1-j) - \pi_t) \alpha_{t-1-j}^h \frac{B_{t-1-j}}{P_t} - \pi_t \frac{H_{t-1}}{P_t}$$

De donde obtenemos (22)