UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra

TESIS DOCTORAL

Construcción axiomática con base en las alineaciones

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Fidel Higuera Garrido

DIRECTOR:

María Paz Bujanda Jáuregui

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Algebra

CONSTRUCCION AXIOMATICA CON BASE EN LAS ALINEACIONES

Fidel Higuera Garrido
Madrid, 1990

Colección Tesis Doctorales. N.º 24/90

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria
Madrid, 1990
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-1169-1990

CONSTRUCCION AXIOMATICA CON BASE EN LAS ALINEACIONES

Memoria presentada en el Departamento de Algebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid - por

FIDEL HIGUERA GARRIDO

para la obtención del Título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Directora: DRA. MARIA PAZ BUJANDA JAUREGUI

I N D I C E

PROLOGO 5

CAPITULO 1. EL PLANO AFIN. COORDENADAS, ORTOGONALIDAD Y ORDEN

1.0 Introducción 28

1.1 Alineaciones 31

1.2 Traslaciones 40

1.3 Introducción de coordenadas 45

1.4 Triángulos semejantes 62

1.5 La relación de ortogonalidad 65

1.6 Colinealidad de los puntos notables
de un triángulo 79

1.7 Las bisectrices de los ángulos 84

1.8 La condición 0.6 y la teoría de círculos ... 95

1.9 La conmutatividad del cuerpo base 97

1.10 El orden en el plano 102

CAPITULO 2. COMPATIBILIDAD E INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS EN EL PLANO

2.0 Introducción 114

2.1 Compatibilidad de los axiomas 115

2.2 Independencia de los axiomas 121

CAPITULO 3. EL ESPACIO AFIN. COORDENADAS, ORTOGONALIDAD Y ORDEN

3.0 Introducción 129

3.1 Alineaciones 132

3.2 Traslaciones 144

3.3 Introducción de coordenadas 148

3.4 La relación de ortogonalidad 161

3.5 El orden en el espacio 171

CAPITULO 4. COMPATIBILIDAD E INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS EN EL ESPACIO

4.0 Introducción 175

4.1 Compatibilidad de los axiomas 177

4.2 Independencia de los axiomas 186

APENDICE. SOBRE LA GENERALIZACION AL ESPACIO N-DIMENSIONAL

A.0 Introducción 193

A.1 Modo algebraico 194

A.2 Modo geométrico 197

BIBLIOGRAFIA 202

PROLOGO

Desde mis estudios de licenciatura, he sentido una gran -- atracción por la Geometría Axiomática, encuadrada en el contexto - matemático - filosófico de los fundamentos, de la distinción cada - vez más nítida entre la mera descripción del mundo físico y la desnudez de la verdad matemática, que no precisa de ninguna referencia a lo real y que, en conocida frase de Einstein,

"En la medida en que se refieren a la realidad, las leyes - de la Matemática no son ciertas; y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad".

He seguido con mucho interés la evolución del pensamiento - matemático, desde la primera organización deductiva de la Matemática griega que ha llegado a nosotros y que constituye el punto de -- partida para toda elaboración científica: "Los Elementos" de Euclides (14). El profesor Abellanas (1) hace una interesante y razonada consideración de la matemática de "Los Elementos", como fotografía de la infancia de nuestra matemática actual: en ella ya están - presentes todos los rasgos (léase, problemas fundamentales) de la - matemática de hoy.

Los reiterados esfuerzos para demostrar el V Postulado de - Euclides, estimulan el sentido crítico de los matemáticos posteriores y la comprobación de lo erróneo de las demostraciones, va estableciendo una cadena de propiedades equivalentes. Son de un particular interés los resultados de Saccheri (31) que, pese a su falsedad final, proporcionan un importante punto de partida para los estudios siguientes: las conocidas hipótesis del ángulo recto, agudo y obtuso. Con ellas, llegará Lobachewski (23), a una de las primeras formulaciones de Geometría no euclídea. Los trabajos de Bolyai y Gauss principalmente, a la vez que presentan, desde otros puntos de vista, Geometrías no euclídeas, van abriendo una importante vía de despegue de la Matemática con el mundo físico; Beltrami (7), al presentar un modelo de Geometría no euclídea, contenido en el marco de la euclídea, dará la garantía final para el reconocimiento total de las Geometrías no euclídeas, como un capítulo más de las construcciones matemáticas.

Esta situación lleva a un deseo cada vez más sentido de precisar los conceptos básicos y formularlos con una gran independencia de su indudable valor como descripción del mundo físico. En el último tercio del siglo XIX, Pasch (27) plantea, como un capítulo cero de su libro "Lecciones de Geometría Moderna", un conjunto de axiomas que le garantice la solidez de sus estudios geométricos posteriores.

Autores como Kennedy (19) discuten la prioridad del trabajo axiomático de Pasch sobre el de Peano (28), este último menos conocido por la dificultad de su lectura.

Hilbert, en sus "Fundamentos de la Geometría" (16), proporcionará la gran construcción de la Geometría axiomática, punto de referencia obligado para cualquier otra construcción. En su obra, además del deliberado intento por despojar a sus axiomas de toda vinculación con el mundo físico, se plantea por primera vez el problema de la compatibilidad del sistema y el de la independencia de sus cinco grupos de axiomas. La compatibilidad, a la vista del Teorema de Gödel, la "resolverá" del único modo posible: estableciendo su solidaridad lógica con un modelo suficientemente "fiable": la aritmética de los números reales. Consecuente con este planteamiento, demostrará la independencia de cada grupo creando modelos que verifiquen todos los axiomas salvo los del grupo que se contrasta.

Una interesante serie de trabajos, tales como los de Pieri (29) y (30), Veblen (33) y (34), Moore (25), Birkhoff (8) y (9), -- Moulton (26), Maclane (24) y Huntington (17), etc. dan testimonio - del interés que la Geometría axiomática suscita en el mundo de la - Matemática.

Al margen de esta intencionalidad axiomática, pero siempre desde la preocupación por el análisis de los elementos geométricos, estudié con mucho interés el gran trabajo de Descartes (11), donde se plantea ya claramente la traducción de los conceptos geométricos al mundo más asequible y potente de los números y de lo algebraico.

Las relaciones entre la Geometría y el Algebra, tratadas -- en un lenguaje axiomático por Baer (5), fundieron mis dos centros - de interés. En su Memoria, Baer, tras una necesaria descripción -- axiomática del plano, pretende fundamentalmente poner de relieve -- una serie de equivalencias entre propiedades algebraicas y geométricas. El detallado estudio de este trabajo de Baer, de lectura muy laboriosa, juntamente con algunas aportaciones personales, constituyeron mi Tesina de Licenciatura (15).

En el mismo año de la publicación del trabajo de Baer, E. - Artin publica (2), donde se aprecia una línea análoga, aunque con - una intencionalidad más claramente axiomática. A partir de un conjunto de axiomas de formulación geométrica, llega a la construcción de un cuerpo (en principio totalmente arbitrario) y a la introducción de coordenadas con los elementos de ese cuerpo. Esto es, se - llega a "afinizar" la Geometría, asignando a cada punto, una vez -- elegido un sistema de referencia, un par ordenado de elementos del cuerpo, y considerando cada recta como el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación lineal con coeficientes en el - cuerpo señalado.

Con posterioridad Artin (3), completaría su estudio estableciendo las equivalencias entre propiedades del cuerpo base y propiedades geométricas del plano afín construido sobre él.

Pues bien, en torno a que el Algebra y la Geometría no son en muchos casos sino distintos modelos de una misma verdad, la presente Memoria tiene por principal objeto el dotar a un conjunto de elementos tales como "puntos", "rectas" y "planos" indefinidos, de una cierta estructura de espacio afín, en el sentido usual del término.

Para ello se propone un conjunto de axiomas de formulación puramente geométrica que conducen a unos resultados algebraicos que nos permiten obtener esa cierta afinización buscada.

Cabe reseñar, además, tres importantes aspectos que se expondrán con más detalle a lo largo de este prólogo.

En primer lugar, la introducción de la axiomática se ha efectuado, a diferencia de los autores que han tratado cuestiones análogas, a medida que los axiomas se han ido necesitando, lo que corresponde a un tratamiento natural del tema. Esto ha dado lugar, por una parte, a una labor más ardua en la demostración de las distintas proposiciones, pero ha posibilitado la obtención del máximo partido de tales axiomas.

En segundo lugar, se ha tenido la intencionalidad expresa de utilizar únicamente axiomas de formulación geométrica, que han conducido a resultados geométricos y algebraicos equivalentes.

Y, en tercer lugar, señalamos la introducción de movimientos en el espacio, en nuestro caso las alineaciones, que nos permiten -

dotarlo de esa cierta estructura de espacio afín.

Según se observa en el breve estudio que se realiza en este prólogo, la introducción de movimientos en el espacio es una característica común de los distintos autores que se han interesado en este tema, Artin (2), Baer (5), Bachman (4), etc. Esto ha conducido a suponer que, sin ningún tipo de movimientos, dotar al conjunto de términos indefinidos de la estructura de espacio afín encerraría una gran dificultad, o quizás, fuera una tarea imposible.

Trataremos ahora de hacer un breve estudio de las axiomáticas propuestas por los autores estudiados en los trabajos previos a la realización de la presente Memoria.

E. Artin (2), en su artículo "Coordinates in affine Geometry", trata en primer lugar, de construir un plano afín sobre un cuerpo totalmente arbitrario. Para ello, formula tres axiomas de incidencia, que postulan:

. La existencia y unicidad de la recta que pasa por dos puntos.

. La existencia y unicidad de la recta paralela a otra por un punto.

. La existencia de tres puntos distintos no alineados.

Como movimientos en el plano introduce las dilataciones: un tipo de biyecciones puntuales que verifican ciertas condiciones. El estudio de la determinación de una dilatación conduce a caracterizar un subconjunto importante de las dilataciones, el de las traslaciones, que es particularmente idóneo para admitir la estructura de grupo. El axioma 4a asegura que este conjunto de traslaciones es un grupo simplemente transitivo, lo que en presencia de los axiomas anteriores implica la conmutatividad del grupo.

Con este axioma y con la definición de homomorfismo entre - traslaciones que conservan las direcciones, se definen las operaciones en el conjunto de estos homomorfismos que hacen que dicho conjunto adquiera la estructura de cuerpo.

Sin embargo, los axiomas propuestos hasta ahora, suficientes para construir el cuerpo, no tienen aún la necesaria potencia para permitir la asignación de coordenadas a cada punto. Es necesario, - por tanto, un nuevo axioma, el 4b que, en sus dos formas equivalentes, "simetriza" la Geometría, asegurando la existencia de suficientes dilataciones, y la introducción de coordenadas.

Como vemos, la axiomática propuesta tiene una gran potencia y, en el trabajo de Artin, se puede observar la relativamente inmediata consecución de este primer objetivo a partir de tal axiomática.

Con posterioridad en (3), retoma la axiomática anterior y - demuestra que el conjunto de axiomas adoptado es equivalente al de cualquier plano afín sobre un cuerpo arbitrario. Con la oportuna - atribución de significados demuestra que un tal plano verifica sus cuatro grupos de axiomas.

Los axiomas 4a y 4b garantizan, respectivamente, la existencia de "suficientes" traslaciones y dilataciones. En presencia de los axiomas 1, 2 y 3, dichos axiomas 4a y 4b tienen una importante traducción geométrica: el plano así obtenido es arguesiano.

Sobre este plano afín, extremadamente débil, se estudian -- equivalencias de tanto interés como las siguientes:

. En el plano se verifica la configuración de Pappus si, y sólo si, el cuerpo es conmutativo.

En virtud del Teorema de Wederburn sobre la conmutatividad de los cuerpos finitos, se tiene que todo plano finito verifica la configuración de Pappus.

. El plano está ordenado si, y sólo si, el cuerpo es ordenado y no tiene característica 2. En este último caso, que corresponde a la Geometría de los cuatro puntos, el orden es trivial.

. El plano tiene un orden arquimediano si, y sólo si, el cuerpo sobre el que está construido es arquimediano.

Como consecuencia del resultado que establece que todo cuerpo arquimediano es un subcuerpo del cuerpo real y, por tanto, conmutativo, tenemos una interesante demostración de que un plano arquimediano verifica la configuración de Pappus. Nótese que en principio un plano puede ser ordenado y no verificar dicha configuración.

Una interesante relación entre el Teorema de Desargues y la verificación de la configuración de Pappus, la establece el conocido Teorema de Hessemberg: "La configuración de Pappus implica la verificación del Teorema de Desargues". Veremos en la axiomática propuesta en la presente Memoria una corroboración de este Teorema, al llegar directamente en presencia de nuestros axiomas, a la construcción del cuerpo conmutativo, esto es, de la Geometría de Pappus que implica en cierto modo la arguesiana.

R. Baer (5), a diferencia de Artin, no persigue tanto dotar de un sistema axiomático riguroso a unos términos indefinidos, cuanto estudiar los resultados de la Geometría elemental en los aspectos que tratamos a continuación.

Tras introducir el plano afín a partir de uno proyectivo en la forma usual, postula cinco axiomas para una relación* del punto - medio. Dichos axiomas son:

. Si C es punto medio de A y B, C está en la recta determinada por A y B.

. Si C es punto medio de A y B, C es punto medio de B y A.

. Si A ≠ B existe y es único un punto C que es punto medio de A -- y B.

. Si A ≠ B son dos puntos, existe un único C tal que B es punto -- medio de A y C.

. La relación es invariante por paralelismo.

Demuestra que los axiomas 3 y 4 son redundantes si se verifican los otros tres, y que dicha relación del punto medio es única si se verifican los cinco axiomas.

Tras obtener propiedades geométricas equivalentes, bajo determinadas condiciones, a los axiomas 3 y 4, introduce ciertas transformaciones en el plano que llama reflexiones. Los axiomas introducidos en la relación del punto medio aseguran la existencia de un - número "suficiente" de reflexiones, lo que garantiza la existencia de otras transformaciones llamadas traslaciones.

En este momento lleva a cabo la introducción de coordenadas mediante un lema que remite a un trabajo suyo en el plano proyectivo (6). La introducción de un plano afín a partir del proyectivo - se justifica por la utilización que hace de los resultados obtenidos en el último trabajo citado, en el que se refiere única y exclusivamente al plano proyectivo.

* Como es habitual en las construcciones axiomáticas, se aceptan los términos "relación", "pertenencia", etc., con su significado usual.

A partir de aquí obtiene una serie de resultados algebraicos y geométricos equivalentes que relacionan propiedades del dominio de donde toma las coordenadas de los puntos con propiedades geométricas del plano.

Ante la extrema debilidad de las propiedades de dicho dominio, introduce una segunda relación, esta vez entre rectas del plano, que es la de ortogonalidad, y que cumple los postulados siguientes:

. Para toda recta existe una recta ortogonal.

. Si una recta es ortogonal a otra, la segunda lo es a la primera.

. Si una recta es ortogonal a otra, toda paralela a la primera es ortogonal a la segunda y toda ortogonal a la segunda es paralela a la primera.

A partir de aquí demuestra la equivalencia entre el Teorema de las alturas y la condición de cuerpo conmutativo del dominio. - Posteriormente, tal y como se había anunciado, se estudian las propiedades geométricas elementales, tales como:

. La colinealidad de los puntos notables de un triángulo.

. La unicidad esencial de la relación de ortogonalidad en los planos afines de las características conseguidas con los postulados introducidos.

. Las propiedades de las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

. La teoría de círculos y su relación con la ortogonalidad.

. Una relación de congruencia entre vectores, que es una a modo de métrica, y que puede inducir, y a su vez ser inducida, por una - relación de ortogonalidad bajo una serie de requisitos.

Schnabel (32), en su Memoria, parte de un plano afín y de-- muestra que, con la simple introducción de un axioma sobre la existencia de reflexiones respecto a tres rectas concurrentes en condiciones particulares, es posible dotar a dicho plano de una configuración euclídea.

Los trabajos de Schnabel (32), Bujanda (10), Dieudonné (12), Diller/Boczek (13), Karkel/Kist (18) y Lingenberg (20), (21) y (22), entre otroe, muestran el interés que la Geometría axiomática sigue inspirando en la investigación matemática actual.

Cabe señalar, por último, que Euclides (14), Hilbert (16), Veblen (33) y Pieri (29) no pretenden en ningún caso obtener esa - cierta afinización del espacio que el presente trabajo persigue, y sí, en cambio, el tratamiento de la Geometría de modo sintético. - Incluso el trabajo de Pieri, pese a basar su axiomática en el movimiento, no pretende en absoluto dotar al plano de ningún significado algebraico.

Sin embargo, su estudio, así como el resto de los autores - de la bibliografía ha sido muy interesante de cara, principalmente, al tratamiento de la compatibilidad e independencia de los axiomas, pues el trabajo tanto de Hilbert, como de Veblen, ha sugerido en algunos casos, la construcción de los modelos donde se muestran tanto una como otra.

Pues bien, el presente trabajo pretende, en primer lugar, - un estudio de un plano entendido como conjunto de puntos y rectas -

(términos indefinidos), y una relación de incidencia entre ambos, al que se dota de una cierta estructura de plano afín mediante la introducción de estos cinco axiomas:

AXIOMA I. Dados dos puntos distintos P y Q, existe una y sólo una recta l tal que P está sobre l y Q está sobre l. Escribimos $l=P+Q$ y decimos que P y Q están alineados.

AXIOMA II. Dados dos puntos distintos A y B alineados, existe un tercero C que no pertenece a la recta $A + B$.

AXIOMA IIIa. Existen una recta y para cada par de puntos de esa recta una alineación que los intercambia.

AXIOMA IIIb. Para todo par de puntos distintos y alineados, existe una alineación que los intercambia.

Nótese que, en presencia de los axiomas I y II el axioma IIIb contiene al IIIa.
La formulación así establecida se ha hecho pensando en desligar los resultados que pueden obtenerse utilizando solamente la formulación débil IIIa.

AXIOMA IV. Existe una relación de ortogonalidad entre las rectas del plano que verifica

0.1 Para cada recta a existe una recta b distinta de a, tal que a es ortogonal a b.

0.2 a es ortogonal a b si y sólo si b es ortogonal a a.

0.3 Si a es ortogonal a b, entonces $a \parallel a'$ es condición necesaria y suficiente para que a' sea ortogonal a b.

0.4 Las alturas de un triángulo son concurrentes.

AXIOMA V. Completitud de Cantor.

Estos axiomas, como ya se ha indicado, no se introducen desde un principio, y sí a medida que se han ido necesitando. De hecho, puede notarse la ausencia del postulado de las paralelas. Ello es debido a que este postulado es consecuencia lógica de los axiomas I, II, III y IV. Sin embargo, con vistas a mantener un orden metodológico, se utiliza dicho postulado, en principio, como hipótesis.

Con el fin de obtener esa cierta afinización del plano, basta con introducir los axiomas I, II y IIIa, junto con la hipótesis de paralelismo (es decir, una cierta parte de los axiomas III y IV) pues según se demuestra son equivalentes los siguientes resultados:

. La existencia de traslaciones en la recta a la que se refiere IIIa.

. La existencia de un sistema de referencia y una caracterización de

a) Los puntos como pares ordenados de elementos de un cierto dominio* F.

b) Las rectas como conjunto de soluciones de una ecuación lineal con coeficientes en F.

El dominio F constituido por los puntos de una recta que es aquella cuya existencia afirma el axioma IIIa, es un grupo respecto de la adición (obtenida mediante un transporte de estructuras con el grupo de las traslaciones) y posee una segunda operación. La definición de la segunda operación, la multiplicación, se da en términos totalmente constructivos y no tiene una equivalencia inmediata en términos de composición de alineaciones. Esta multiplicación así definida, en principio, ni siquiera es manejable como tal operación, esto es, no tiene la propiedad asociativa.

* Utilizamos el término "dominio" al estilo de Hilbert, sin hacer referencia a su habitual significado algebraico.

Para poder continuar el estudio propuesto, se hace uso del axioma IIIb y ello permite asegurar que :

. La alineación que intercambia dos puntos cualesquiera del plano es única.

. Las diagonales de un paralelogramo no son paralelas.

. Si **ABCD** es un paralelogramo tal que $A + B \parallel D + C$ y $A + D \parallel B + C$, si F es un punto de la recta $A + D$ tal que $B + D \parallel C + F$, entonces $F = A^j$, siendo j la alineación de centro D.

. La relación entre puntos mediante alineaciones se conserva por - paralelismo.

. El producto de dos alineaciones es una traslación, y el producto de tres alineaciones es una alineación.

. Si R es el grupo generado por las alineaciones, entonces el grupo de las traslaciones T es un subgrupo abeliano de índice 2 de R.

Se obtiene además, la equivalencia de tal axioma con las -- proposiciones.

. El grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

. El plano es un plano afín sobre un dominio F que es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

Es decir, una serie de propiedades geométricas, por un la-- do, y algebraicas por otro, que, sin embargo, no nos permiten asegu rar más propiedades del dominio F. Es necesario introducir el axio ma IV para que F tenga la estructura de cuerpo conmutativo. A diferencia de E. Artin necesitamos la introducción de un axioma de carácter métrico para llegar a establecer que el dominio F tiene estructura algebraica de cuerpo. Nótese, sin embargo, que el cuerpo que llegamos a construir tiene ya unas propiedades bien definidas.

Posteriormente se efectúa, al modo de Baer, un estudio sucinto de:

- La colinealidad de los puntos notables de un triángulo.
- La concurrencia de las medianas en el caso de que el cuerpo sea de característica distinta de 3.
- Las propiedades de las bisectrices de los ángulos de un triángulo.
- La teoría de círculos.
- La relación entre la conmutatividad del cuerpo base y el Teorema de Pappus.

Hacemos notar que esta relación entre la conmutatividad del dominio y la configuración de Pappus también la pone de relieve Hilbert al construir el cálculo segmentario. La verificación del Teorema de Pappus (al que Hilbert se refiere como Teorema de Pascal en atención sin duda a que este último es una generalización del de Pappus) es equivalente a la conmutatividad del producto del sistema cartesiano que construye como base para el estudio de la semejanza y de las áreas, estudio que realiza brillantemente sin recurrir al axioma de Arquímedes.

La relación existente entre el Teorema de Desargues y la configuración de Pappus, puesta de relieve en el Teorema de Hessemberg, aparece en nuestro contexto, al llegar directamente a la construcción de un cuerpo conmutativo.

Por último, en lo referente al plano, se le dota de un orden, estableciendo, en primer lugar, el orden en el cuerpo base mediante una aplicación biyectiva con el cuerpo de los racionales, y, posteriormente, trasladando el orden de éste a aquél.

Con el objeto de que el plano sea completo, se introduce el axioma V que asegura la completitud del cuerpo base **F**, y posteriormente, se ordena **F**, y, por tanto el plano, según el cuerpo de los reales. La ordenación del plano se efectúa de tal manera que dados tres puntos ordenados y alineados, la ordenación se conserva o se invierte en las proyecciones paralelas.

Posteriormente, y con el objeto de dar un carácter riguroso a la axiomática del plano, se demuestra la compatibilidad eligiendo un modelo que muestre la solidaridad lógica de los axiomas con él, y la independencia de los axiomas, construyendo cinco modelos que cumplen cuatro de los axiomas y no verifican aquél cuya independencia se quiere demostrar.

El estudio propuesto sería limitado si nos detuviéramos en el plano. Por ello, se efectúa una generalización al espacio comenzando por el de tres dimensiones. Por supuesto, la axiomática formulada para tal espacio pretende ser una generalización de la del plano, esto es, que la restricción a cualquier plano nos proporcione un plano isomorfo al descrito en el primer capítulo. Más aún, de hecho, el espacio que construimos cabe considerarlo de modo informal como unión, en las condiciones adecuadas que garanticen los axiomas, de una serie de planos como el construido en el capítulo 1.

Así pues, el espacio es un conjunto formado por tres conjuntos: uno de "puntos", otro de "rectas", y otro de "planos", indefinidos, en el que existen dos relaciones binarias de incidencia entre puntos y rectas, y puntos y planos. Para estos términos se proponen los siguientes

AXIOMA I. Si existen dos puntos distintos P y Q, existe una y sólo una recta l tal que P está situado sobre l y Q está sobre l. Escribimos $l=P+Q$ y decimos que P y Q están alineados.

AXIOMA II. Si existen dos puntos distintos alineados P y Q, existe un punto M no alineado con ellos.

AXIOMA III. Si existen tres puntos distintos no alineados P, Q, M y alineados dos a dos, existe un único plano α que los contiene.

AXIOMA IV. Si dos planos α y β tienen un punto común, tienen al menos otro punto común.

AXIOMA V. Si existen tres puntos P, Q, M no alineados y alineados dos a dos, existe un punto T no coplanario con ellos.

AXIOMA VI. Para cada par de puntos distintos y alineados del espacio, existe una alineación que los intercambia.

AXIOMA VII. Existe una relación de ortogonalidad entre las rectas de cada plano del espacio que verifica 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 (Las mismas propiedades del plano)

AXIOMA VIII. Completitud de Cantor.

Como puede observarse, no se postulan como axiomas el de las paralelas y el de incidencia que afirma que si una recta tiene dos puntos en un plano, todos sus puntos pertenecen al plano; esto es así, porque según se demuestra posteriormente tales proposiciones son consecuencias lógicas de los axiomas VI y VII. Cabe añadir que al objeto de que la generalización sea tal que la restricción a cualquier plano del espacio nos proporcione un plano isomorfo al descrito en el Capítulo 1, la definición de alineación exige, además, que una recta y su transformada sean coplanarias.

Tras la introducción de los seis primeros axiomas, se llega inmediatamente a que

- Si una recta l tiene dos puntos P y Q en común con un plano α , todos los puntos de l pertenecen a α ,

y, además, a resultados geométricos referentes a las alineaciones que permiten dar un criterio constructivo para obtener el transformado de un punto dado.

Posteriormente, se deducen resultados similares a los del plano, tales como:

- Una alineación que intercambia dos puntos cualesquiera del espacio es única.

- Las diagonales de un paralelepípedo no son paralelas.

- Si ABCD es un paralelogramo tal que $A + B \parallel D + C$ y $A + D \parallel B + C$ si F es un punto en $A + D$, tal que $B + D \parallel C + F$, entonces $F = A^{j}$, siendo j la alineación de centro D.

. La relación entre puntos mediante alineaciones se conserva por paralelismo.

. La existencia y unicidad del plano paralelo a otro por un punto dado.

Tras definir las traslaciones en el espacio de la forma -- usual, se demuestra que:

. El producto de dos alineaciones es una traslación, y el producto de tres alineaciones es una alineación.

. Para todo par de puntos existe una alineación que los intercambie si y sólo si el grupo de las traslaciones es simplemente -- transitivo.

Se introducen posteriormente coordenadas en el espacio, -- previa elección de un sistema de referencia. Dichas coordenadas - se toman de un dominio F que es uno de los ejes de dicho sistema - de referencia. Se define la adición en los elementos del dominio mediante un isomorfismo con el grupo de las traslaciones,y la multiplicación de forma un tanto más complicada que en el plano, pero también de modo constructivo. Sin embargo, la demostración de las escasas propiedades de la multiplicación en el dominio F, se efectúa en el plano de referencia determinado por F y otro eje de coordenadas.

De esta forma se consigue una cierta afinización del espacio al caracterizar los puntos mediante ternas de elementos de F y los planos como conjunto de soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes en F

A continuación, se demuestran propiedades de **F** bajo ciertas condiciones geométricas que se cumplen en el plano de referencia antes citado , tales como:

. El grupo de las traslaciones en dicho plano es simplemente transitivo si y sólo si

(1) $(u + v)w = uw + vw$ para $u, v, w \in F$

. Si **F** satisface (1), entonces son equivalentes

(2) $1 + 1 \neq 0$

(iii) Las diagonales de un paraleloplano no son paralelas en el plano de referencia.

(e) Existe una alineación en dicho plano.

Nótese la analogía entre la construcción del dominio para el plano (se imponen condiciones solamente para una recta) y para el espacio (se imponen condiciones para un plano).

Sin embargo, estas condiciones no permiten a **F** alcanzar una estructura de cuerpo. Para ello es necesario introducir el Axioma VII. Con ello se consigue que **F** tenga la estructura de cuerpo conmutativo.

Pues bien, a partir de aquí es posible demostrar la existencia de una nueva relación de ortogonalidad entre las rectas del plano de referencia que contiene a **F** y a un segundo eje de coordenadas; y de una relación de ortogonalidad entre rectas cualesquiera del espacio no necesariamente coplanarias, que es compatible con la anteriormente existente en el plano de referencia.

Esta última relación de ortogonalidad entre rectas del espacio, nos conduce naturalmente a demostrar la existencia de una relación de ortogonalidad entre recta y plano que cumple las siguientes condiciones:

0.1' Para todo plano α existe una recta a tal que a es ortogonal a α , y recíprocamente, para toda recta a existe un plano α que es ortogonal a a.

0.2' α es ortogonal a a si y sólo si a es ortogonal a α.

0.3' Si α es ortogonal a a, son condiciones necesarias y suficientes que $\alpha \parallel \alpha'$ y a $\parallel$ a', para que $\alpha' \perp$ a y a' $\perp \alpha$, respectivamente.

0.4' En todo triángulo las alturas son concurrentes.

La cuestión del orden en el espacio se estudia de forma similar a la del plano. En primer lugar se completa el espacio, completando previamente el dominio **F**, mediante el axioma VIII y después se ordena aquél según **F**; para lo cual se establece una aplicación biyectiva entre **F** y **R**, trasladando el orden de éste a aquél.

Se demuestra finalmente que el orden en cada recta se conserva o se invierte en las proyecciones paralelas, con lo cual el espacio queda convenientemente ordenado.

La compatibilidad de los axiomas se ha tratado en el espacio de forma análoga a la del plano, es decir, se ha elegido un modelo en el que se verifiquen los ocho axiomas, que es $\mathbb{R}^3$. En la cuestión relativa la independencia se han construido ocho modelos, en cada uno de los cuales se verifican siete de los axiomas y no -

se verifica aquél del que se quiere mostrar la independencia. Es de señalar la dificultad que ha presentado la construcción de tales modelos.

En la realización de la presente memoria, se pensó continuar la generalización al espacio n-dimensional. Sin embargo, ante los dos posibles caminos abiertos para tal generalización, el algebraico y el geométrico, se comprobó, tal y como se realiza en el apéndice, que el primero conducía a un modo de trabajo no acorde con el mantenido, fundamentalmente geométrico, a lo largo de la memoria y a una teoría cuyos resultados ya han sido suficientemente estudiados; y, el segundo, a una multiplicidad de axiomas geométricos, cuya enunciación forzosamente ha de ser realizada en forma algebraica, vía inducción, lo que lleva a la no consecución del objetivo planteado al comienzo del trabajo.

Por todo ello se ha dado por finalizada la presente Memoria, optando en la generalización al espacio n-dimensional por el modo algebraico que se aparta radicalmente de los objetivos pretendidos en la misma.

C A P I T U L O   1

EL PLANO AFIN. COORDENADAS, ORTOGONALIDAD Y ORDEN

1.0 INTRODUCCION

Este capítulo es básico en cuanto que la construcción -- del espacio tridimensional y la posible extensión al espacio n-dimensional, no solamente comprenden como caso particular este plano, sino que, además, tienen un importante punto de apoyo en consecuencias derivadas de este capítulo.

Se enuncian en primer lugar los dos axiomas de incidencia, característicos de un plano, es decir, que dos puntos determinan una única recta y que dados dos puntos distintos alineados -- existe un tercero no alineado con ellos. El segundo axioma se ha formulado de una forma tan débil con el propósito de demostrar la independencia de los axiomas.

Inicialmente se propuso como axioma la existencia y unicidad de la paralela a una recta por un punto. Posteriormente, al - tratar la independencia de cada axioma con respecto a los demás, - se pudo comprobar que tal proposición dependía lógicamente de los - axiomas I al IV. Por ello, aun cuando con vistas a mantener un orden metodológico se ha conservado en el lugar que ocupaba, se subraya, sin embargo, su condición de hipótesis, ya que posteriormente se demuestra la dependencia a la que acabamos de aludir.

El axioma III se presenta desglosado en el axioma IIIa y axioma IIIb, con el objeto de estudiar aisladamente las consecuencias que pueden deducirse de la forma débil IIIa, ya que ésa es -- una de las líneas básicas del presente trabajo.

El axioma IIIa asegura la existencia de alineaciones sobre una recta del plano. Con la adición de este axioma a los dos anteriores y la hipótesis de paralelismo, se consigue una cierta afinización del plano según se muestra en el Teorema I.7, en el sentido de que la existencia de traslaciones en la recta en la que existen alineaciones es equivalente a que se pueda elegir un sistema de referencia consistente en tres puntos y que se puedan caracterizar los elementos de dicho plano de la siguiente manera:

- Cada punto del plano por un par de elementos de un dominio **F**

- Cada recta por el conjunto de soluciones de una ecuación lineal con coeficientes en **F**.

Dicho dominio **F**, que está constituido por los puntos de la recta en la que el axioma IIIa asegura la existencia de alineaciones, es un grupo respecto a la adición, operación que se corresponde con la composición de las traslaciones, y posee una segunda operación, la multiplicación, que no tiene una equivalencia inmediata con la composición de alineaciones.

Con respecto a la multiplicación y, en ausencia del axioma IIIb, la estructura multiplicativa de **F** es extremadamente débil. Ni siquiera es asociativa.

El axioma IIIb asegura la existencia de alineaciones que intercambia dos puntos cualesquiera del plano, ello permite asegurar, según se muestra en los Teoremas I.11a y I.11b, además de una serie de propiedades geométricas, que la característica de **F** es distinta de 2 y que la operación multiplicación es distributiva con respecto a la adición por la derecha.

Sin embargo, aún no se puede asegurar más propiedades del dominio **F**. Para ello debemos introducir el axioma IV (de la ortogonalidad) y se llega al resultado importante de que, definida una relación de ortogonalidad en el sentido usual, en presencia de los tres primeros axiomas, es equivalente que las alturas de un triángulo sean concurrentes y que **F** tenga la estructura de cuerpo conmutativo, lo que está demostrado en el Teorema I.13.

Moviéndonos siempre en el estudio de la geometría elemental, se trata posteriormente la colinealidad de los puntos notables de un triángulo, y se llega al resultado que nos asegura el paralelismo de las medianas de un triángulo si la característica del plano es 3 y su concurrencia, si la característica es distinta de 3.

Tras obtener algunos resultados sobre las bisectrices de los ángulos, que relacionan una serie de propiedades de las bisectrices de los ángulos de un triángulo con la estructura de cuerpo de **F**, se inicia un estudio de la teoría de círculos, donde se podría, a su vez, comenzar con los giros, y también, el estudio de la relación entre el Teorema de Pappus y la conmutatividad del cuerpo base.

Finalmente, se trata de ordenar el plano, ordenando previamente el cuerpo base de dicho plano.

Esta ordenación se efectúa cuidadosamente, obteniendo, en primer lugar, que dicho cuerpo es denso en presencia de los axiomas I, II, III y IV y, en segundo lugar, estableciendo una aplicación biyectiva entre los elementos del cuerpo y **Q**, y ordenando aquéllos según **Q**. Sin embargo, no podemos asegurar que el cuerpo **F** sea completo, por lo que añadimos a nuestra geometría el axioma V que no es sino el de completitud de Cantor, con lo que nuestra labor sobre el plano axiomatizado de esta manera ha concluido.

1.1 ALINEACIONES

Sean dos conjuntos, uno de "puntos" y otro de "rectas", y una relación binaria entre un punto dado P y una recta dada l, "P está(situado) sobre l" ($P \in l$); esta relación puede ser verdadera o falsa para el par formado por P y l.

Todos los axiomas pueden ser expresados en términos de esta relación. Sin embargo también utilizaremos expresiones equivalentes a la relación binaria con el objeto de aligerar el lenguaje, como "P pertenece a l", o "l contiene a P", o, "l pasa por P". Si P está a la vez sobre l y m, podemos decir que l y m se encuentran en P, y si P es el único punto sobre l y m, diremos que "l y m se cortan en P", o que "P es la intersección de l y m".

Definición I.1

Sean l y m dos rectas tales que $l = m$, o bien que ningún punto P esté a la vez sobre l y m; entonces decimos que l y m son paralel·s, y escribimos $l \parallel m$. Si l y m no son paralelas escribimos $l \nparallel m$.

Si $l \nparallel m$, entonces existe al menos un punto P a la vez sobre l y m.

AXIOMA I

Dados dos puntos distintos P y Q existe una y sólo una — recta l tal que P está sobre l y Q está sobre l. Escribimos — $l = P + Q$.

Si $l \not\parallel m$, existe exactamente un punto P a la vez sobre l y m. En efecto, si existieran dos puntos, el axioma I llevaría a -- $l = m$ y, por tanto, $l \parallel m$.

Hipótesis (H)

Dados un punto P y una recta l, existe una recta y sólo - una recta m paralela a l que pasa por P.

Nota: Indicamos este axioma con el nombre de "Hipótesis", para distinguirlo de los otros, ya que se demostrará en el Teorema -- I.14 que depende lógicamente de los restantes axiomas.

TEOREMA I.1

El paralelismo es una relación de equivalencia.

Demostración

Esta relación es evidentemente reflexiva y simétrica. Para establecer la transitividad, supongamos $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$. Si no existe ningún punto a la vez sobre l_1 y l_3 entonces $l_1 \parallel l_3$. Si - existe un punto P a la vez sobre l_1 y l_3, entonces $l_1 = l_3$ por hipótesis y también $l_1 \parallel l_3$.

Definición I.2

Una clase de equivalencia de rectas paralelas se llama - haz de rectas paralelas.

TEOREMA I.2

Si existen tres haces distintos π_1 , π_2 y π_3 de rectas paralelas, entonces todo haz π contiene el mismo número de rectas, y este número es igual al número de puntos sobre toda recta dada.

Demostración

Sean l una recta de π_1 y m una recta de π_2 . Tenemos que l $\nparallel$ m y, por tanto, existe un único punto P situado en l y m. Por otra parte, sea Q un punto cualquiera de l. Existe exactamente una recta m' $\parallel$ m, es decir, una recta m' de π_2 , tal que Q está sobre m'. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre los puntos de l y las rectas de π_2 ; el número de puntos de l es el mismo que el número de rectas π_2 . Hemos establecido pues el resultado siguiente: Dados dos haces distintos, cada recta de uno de los haces contiene tantos puntos como rectas hay en el otro haz. Si π es un haz cualquiera, es ciertamente distinto de al menos dos de nuestros haces. Por ejemplo $\pi \neq \pi_1$ y $\pi \neq \pi_2$. El número de puntos de una recta de π_1 es igual al número de rectas de π , así como al número de rectas de π_2 , y el teorema resulta fácilmente.

AXIOMA II

Dados dos puntos distintos A y B alineados existe un tercero C que no pertenece a la recta A+B.

Este axioma no asegura la existencia de tres puntos no alineados al no asegurar la existencia de dos puntos distintos.

Sin embargo, esto da lugar a dos tipos distintos de geometría, una en la que no existiera más que uno o ningún punto sin rectas, o -- bien uno o ningún punto y cuyas rectas fueran las de un haz de paralelas sin puntos o un único punto y el haz de rectas que contiene a ese punto y ninguno más; o bien a una geometría en la que -- existiesen dos puntos distintos y en consecuencia tres no alineados.

Evidentemente el estudio presente se refiere a este segundo tipo de geometrías, por considerarlo el más interesante, ya que los restantes exiomas se verifican por el vacío en el primer tipo.

En el resto del trabajo pues, consideraremos únicamente - este segundo tipo de geometrías.

Las rectas $A+B$ y $A+C$ no son paralelas, si no (puesto que contienen a A) serían iguales y C estaría sobre $A+B$. Por la misma razón $A+B \neq B+C$ y $A+C \neq B+C$. Existen, pues, al menos tres haces - distintos de rectas paralelas.

Definición I.3

Una aplicación biyectiva f entre los puntos del plano se denomina alineación* respecto a un punto R si

a) $f^2 = 1$, $f \neq 1$

b) $R^f = R$ (R es el único punto fijo de f)

c) Si P, Q, T son puntos distintos y alineados, P^f, Q^f, T^f están también alineados.

d) Para todo P del plano $R \in P + P^f$

* Nótese que en la geometría euclídea ordinaria, las alineaciones se corresponden con las simetrías centrales.

AXIOMA III a

Existen una recta y para cada par de puntos de esa recta una alineación que los intercambia.

Corolario I.1

Si f es una de las alineaciones que se postulan en el axioma IIIa respecto a un punto R, entonces para todo par de puntos P y Q del plano se verifica que $P + Q \parallel P^f + Q^f$.

Demostración

Sean P y Q dos puntos distintos cualesquiera del plano, y f la alineación con respecto a un punto R, entonces:

1) Si $R \in P + Q$, $R \in P^f + Q^f$, y como $R \in P + P^f$ y $R \in Q + Q^f$, resulta que $P + Q = P^f + Q^f$ y $P + Q \parallel P^f + Q^f$.

2) Si $R \notin P + Q$, entonces como $R \in P + P^f$ y $R \in Q + Q^f$ las rectas $P + P^f$ y $Q + Q^f$ tienen como único punto común R ya que si tuvieran un segundo punto común serían la misma recta y estaríamos en el primer caso. Entonces $P + Q$ y $P^f + Q^f$ son paralelas puesto que si tuvieran un punto común, éste sería fijo y distinto de R, lo que no puede ser.

Corolario I.2

Si f es una alineación de las que se postulan en el axioma IIIa referida a una recta m, se verifica que si R es su centro y P y Q dos puntos de m que intercambien f, existen puntos S y T - no en m tales que $P + S \parallel Q + T$ y $P + T \parallel Q + S$ y R, S, T están -- alineados.

Demostración

Sea S un punto cualquiera del plano no en m y $T = S^f$, entonces resulta que R, S, T están alineados, y $P + S \parallel Q + T$ y -- $P + T \parallel Q + S$ por el corolario I.1.

Nota: Es de hacer notar que si existiera una alineación que intercambiase dos puntos cualesquiera del plano, se verificarían los dos corolarios anteriores, pero esta exigencia sería excesiva, por ahora, para el objeto de nuestro trabajo.

TEOREMA I.3

Si existe una alineación que intercambia dos puntos alineados cualesquiera del plano, dicha alineación es única.

Demostración

Supongamos dos puntos del plano P y Q tales que $P \neq Q$ y sean f y f' dos alineaciones distintas de centros R y R' respectivamente que intercambian P y Q. Sea S un punto cualquiera del plano no en $P + Q$. Según la nota del corolario I.2, $T = S^f$ y $T' = S^{f'}$ son tales que $P + T \parallel Q + S$ y $P + T' \parallel Q + S$, lo que implica que - $P + T \parallel P + T'$ y $P + T = P + T'$; por otro lado $P + S \parallel Q + T$ y - $P + S \parallel Q + T'$, lo que implica que $Q + T = Q + T'$, y puesto que -- $P + T \neq Q + T$, resulta que $T = T'$, $S^f = S^{f'}$ y $f = f'$.

TEOREMA I.4 (Axioma de Fano)

En las condiciones del Teorema I.3, las diagonales de un paralelogramo no son paralelas.

Demostración

Sean A, B, A', B' un paralelogramo tal que $A + B \parallel A' + B'$ y $A + B' \parallel A' + B$ y f la alineación que intercambia A y A', cuyo centro $R \in A + A'$, siendo $A + A'$ una diagonal. Como $A + B' \parallel A' + B'^{f}$ y $A' + B' \parallel A + B'^{f}$, se deduce que $A + B'^{f} = A + B$ y $A' + B'^{f} = A' + B$ entonces $B'^{f} = B$, y en consecuencia, $R \in B + B'$

Corolario I.3

En las condiciones del teorema I.3 las diagonales de todos los paralelogramos que tienen una diagonal común a todos ellos se cortan en un mismo punto.

Demostración

Según el teorema I.4 el punto de intersección es el centro de la alineación que intercambia los vértices de la diagonal común.

TEOREMA I.5

En las condiciones del teorema I.3 si A, B, C, D es un paralelogramo tal que $A + B \parallel D + C$ y $A + D \parallel B + C$, si F es un punto en A + D tal que B + D ‖ C + F (ver figura 1), entonces $F = A^j$, siendo j la alineación de centro D.

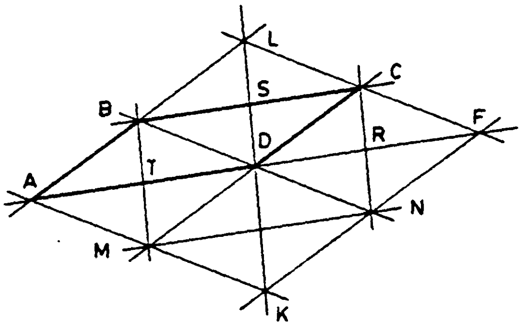

FIG.1

<u>**Demostración**</u>

Notemos por L el punto común de las rectas A + B y C + F (no pueden ser paralelas pues si no, existirían dos paralelas a C + F por B); y por K el punto unívocamente determinado tal que A + K ‖ F + L y F + K ‖ A + L. Además, sean M = (A + K)(C + D), N = (F + K)(B + D), R = (D + F)(C + N), S = (B + C)(D + L) y T = (A + D)(B + M).

Sea f la alineación que intercambia C y D. Esta alineación intercambia B y F, y L y N (corolario I.3) por tanto, C + N ‖ L+D. Sea g la alineación que intercambia B y D. Esta alineación intercambia C y A, y L y M, lo que prueba que D + L ‖ M + B. La transformación gf manda C sobre B y N sobre M, y transforma toda recta en otra paralela, ya que f y g tienen esta última propiedad.

De aquí B + C y M + N son rectas fijas por gf. En efecto, para todo punto X de B + C, X + C se transforma en una paralela a X + C, y como $X^{gf} + C^{gf} = X^{gf} + B$, esta última tiene que ser B + C y $X^{gf} \in B + C$.

Análogamente para $M + N$. Si estas rectas no son paralelas, tendrían un punto común W, y W sería punto fijo de gf. Entonces $W^{gf} = W$ y $W^{g} = W^{f}$, y se seguiría del Teorema I.3 que $f = g$. Pero esto es imposible pues implicaría $B = C$. Hemos mostrado que $B + C \parallel M + N$.

Existe finalmente una alineación h que intercambia D y M, intercambia A y N y además B y K. De aquí, por lo anterior, $B+M \parallel D+K$. Por tanto, $D + L$ y $D + K$ son rectas paralelas y en consecuencia, D, L, K son puntos alineados y $AKFL$ es un paralelogramo cuyas diagonales se encuentran en D, lo que prueba que $F = A^{j}$, siendo j la la alineación de centro D.

TEOREMA I.6

En las condiciones del Teorema I.3 si P y Q son dos puntos distintos y R el centro de la alineación que los intercambia. Si P', Q', R' son puntos alineados y existen tres rectas diferentes paralelas p, q, r tales que $P + P' = p$, $Q + Q' = q$, y $R + R' = r$, entonces R' es el centro de la alineación que intercambie P' y Q'.

Demostración

Se efectuará en una serie de apartados:

1) Supongamos que $P = P'$, $R \neq R'$ y $Q \neq Q'$, $R + R' \parallel Q + Q'$. Luego existe un solo punto T tal que $T + P' \parallel R + Q'$ y $T + Q' \parallel P + R$. Es consecuencia del corolario I.3 que T, R y R' están alineados y que además $T + R' \parallel Q + Q'$, luego R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q', según el Teorema I.5. (Ver fig. 2)

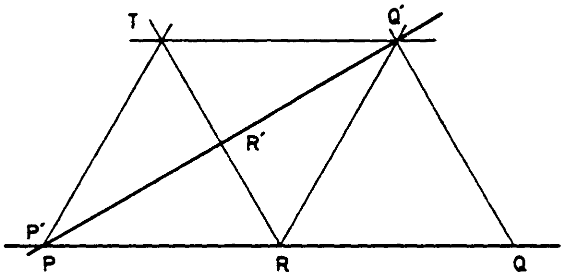

FIG. 2

2) Supongamos ahora que $P + Q \parallel P' + Q'$, entonces $P + Q'$ tendrá un punto en común con $R + R'$ que llamaremos M. Por lo demostrado en 1) M es el centro de la alineación que intercambia P y Q', y en consecuencia R' es el centro de la alineación que intercam-bia P' y Q'.

3) Supongamos ahora que $P + Q$ es no paralela a $P' + Q'$ y $P \neq P'$, entonces sea w la recta paralela a $P' + Q'$ que pasa por Q. Entonces el punto w^r es centro de la alineación que intercambia w^p y Q por 1); y R' es el centro de la alineación que intercam-bia P' y Q'.

1.2 TRASLACIONES

Definición

Una aplicación biyectiva t entre los puntos del plano se llama traslación si

a) $X + X^t \parallel Y + Y^t$ en el caso de que X e Y no son puntos fijos de t.

b) $X + Y \parallel X^t + Y^t$ para $X \neq Y$.

Si la traslación t es distinta de la identidad, entonces las rectas paralelas a las que se refiere la condición (a) forman el mismo haz de rectas paralelas.

Es inmediato que una traslación con un punto fijo es la identidad. Asimismo dos traslaciones son iguales si existe un punto que es transformado por ambas traslaciones en el mismo punto. Las traslaciones forman un grupo **T**. Este grupo es conmutativo si existen traslaciones con diferentes direcciones.

LEMA I.1

En las condiciones del Teorema I.3, el producto de dos alineaciones es una traslación, y el producto de tres alineaciones es una alineación.

Demostración

Si f es el producto de un cierto número de alineaciones, entonces se cumple la propiedad (b). Si el punto P no es un punto fijo por f, entonces la recta $P + P^f$ es fija por f, ya que es enviada por f a una recta paralela que pasa por P^f.

Si r y s son alineaciones, se sigue del Teorema I.3 que la existencia de un punto fijo de rs implica que $r = s$, ya que si $W^{rs} = W$, $W^r = W^s$ y además que $rs = 1$.

Pero si rs no tiene punto fijo, entonces se sigue del resultado del primer párrafo de la demostración que todas las rectas $P + P^{rs}$ son paralelas por ser rectas fijas y no tener puntos fijos, lo que demuestra que rs es una traslación.

Si t es una traslación y r una alineación respecto a un punto R, y si P es un punto, entonces $P + P^t \parallel P^{rt} + (P^{rt})^t$, por (a) y $P + P^{rt} \parallel P^t + (P^{rt})^t$, por (b). Esto implica que $P^r = P^{trt}$ (pues P^t y P^{rt} son los extremos de la diagonal del paralelogramo y el transformado de P por r tiene que ser el otro extremo de la diagonal, es decir, P^{trt}), o también $r = trt$, además, $r^2 = 1$; y ahora es fácil demostrar que rt es una alineación. En efecto, rt es biyección pues es composición de biyecciones, y además,

a) Si $r = trt$ se verifica que $r^2 = rtrt = (rt)^2 = 1$, si $r \neq 1$, entonces $rt \neq 1$.

b) Si P y Q son dos puntos distintos, entonces $P + Q \parallel P^t + Q^t$, como r es una alineación, $P^t + Q^t \parallel P^{rt} + Q^{rt}$, y por tanto, $P + Q \parallel P^{rt} + Q^{rt}$, con lo que se cumple la condición de que rt transforma puntos alineados en puntos alineados, y toda recta en una paralela. De aquí se deduce inmediatamente que $R \in P + P^{rt}$ para todo P del plano.

c) Bastará, por fin, calcular el centro de la alineación rt. Para ello, bastará demostrar que P, Q, P^{rt} y Q^{rt} son los vértices de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en un punto que será el centro de la alineación (ver fig. 3).

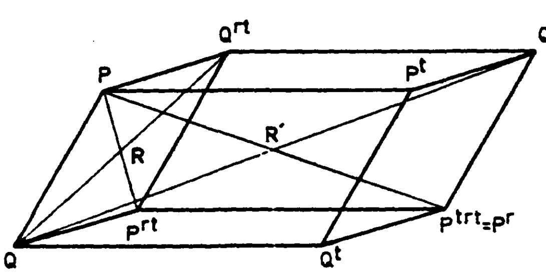

FIG.3

Ya hemos visto que $P + Q \parallel P^{rt} + Q^{rt}$. Veamos que $Q + P^{rt} \parallel P + Q^{rt}$, con lo que habremos terminado. Pero $Q + P^{rt} \parallel Q^{t} + P^{trt} = Q^{t} + P^{r} \parallel Q^{rt} + P^{r^2} = Q^{rt} + P$.

En consecuencia, hemos demostrado también que $t^{-1} = r^{-1} t\, r$ con lo que se verifica el siguiente hecho.

Corolario I.4

Si R es el grupo generado por las alineaciones, entonces T es un subgrupo de índice 2 en R, y T es abeliano.

Una consecuencia inmediata del Lema I.1 y del Teorema I.3 es el importante resultado siguiente.

Corolario I.5

Existe para todo par de puntos distintos alineados una alineación que los intercambia si, y sólo si, el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

Demostración

1) Si para todo par de puntos distintos existe una alineación que los intercambia, por el Teorema I.3 esa alineación es única y en consecuencia, existe una única alineación para cada R del plano que tiene R como centro.

   Bastará con probar que para todo par de puntos distintos P y Q del plano existe una traslación t tal que $Q = P^{t}$. Pero -

como existe una alineación r tal que $P^r = Q$, si R es el centro de esta alineación, entonces existen sendas alineaciones r_1 y r_2 tales que $R = P^{r_1}$ y $R^{r_2} = Q$, en consecuencia, $t = r_2 r_1$ y, por tanto, T es simplemente transitivo.

2) Si el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo, sean P y Q dos puntos distintos, sea R el centro de una alineación r. Si $Q = P^r$ hemos terminado. Si $Q \neq P^r$ entonces $Q + P \parallel Q^r + P^r$ y además $Q + P^r \parallel Q^r + P$. Entonces, por ser el grupo de las traslaciones simplemente transitivo, existe una traslación t que transforma P^r en Q, es decir, $P^{rt} = Q$ y, por tanto, $Q^{rt} = P$ y rt es la alineación buscada.

1.3 INTRODUCCION DE COORDENADAS

Supongamos que **X**, **Y** son dos puntos distintos y que **O** no es un punto de **X + Y**. Denotamos por **F** el sistema de los puntos de **O + Y**. Los elementos de **F** nos servirán como coordenadas e introduciremos más tarde una adición y una multiplicación de los mismos.

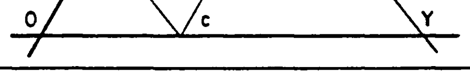

FIG.4

Si **c** es un elemento de **F** (ver fig. 4) entonces existe una única recta paralela a **O + X** que pasa por **c**, por razones que se apreciarán posteriormente la denominaremos **(y = c)**.

Si **c** es un elemento de **F** entonces existe una única recta paralela a **X + Y** que pasa por **c** y no es paralela a **O + X**, pues si lo fuera existirían dos paralelas por **X** a esta recta cuya existencia se afirma; entonces se encuentran en un punto **P** por el que pasa una única recta paralela a **O + Y** que denotaremos **(x = c)**.

Por la unicidad del paralelismo se sigue inmediatamente que **(y = c) = (y = d)** si, y sólo si, **c = d**, y, asimismo, **(x = c) = (x = d)** si, y sólo si, **c = d**.

Si **c** y **d** son elementos de **F** entonces **(x = c)** e **(y = d)** son rectas distintas que se cortan en un punto, pues ambas son paralelas a **O + Y** y **O + X**, respectivamente, y denotamos este punto por (c,d). De $(c,d) = (x = c)\ (y = d)$ y del último parágrafo se sigue inmediatamente que $(c,d) = (c',d')$ si, y sólo si, $c = c'$ y $d = d'$.

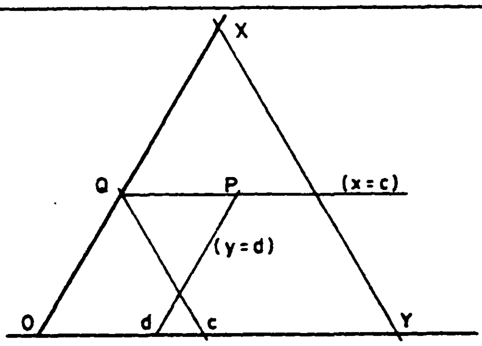

FIG.5

Supongamos inversamente un punto P del plano (ver fig. 5). Entonces, la única recta paralela por P a O + X cortará a O + Y en un punto bien determinado d, y asimismo, la recta paralela por P a O + Y cortará a O + X en un punto Q, por el que pasará una única recta paralela a X + Y, que cortará, a su vez, a O + Y en un punto bien determinado c, y se verificará que $P = (c,d)$ por la propia construcción.

Por tanto, los puntos del plano están en correspondencia biyectiva con los pares (c,d) de elementos de F.

Si existe una traslación $t = t_c$ para todo c de F, tal que $c = 0^{t}c$, trataremos de introducir la adición en F de la forma siguiente:

$$c + d = 0^{t_c t_d}$$

Y es claro que esta operación define un isomorfismo mediante la traslación t de O en el elemento 0^{t} en F. Luego el sistema aditivo $F = F_{+}$ es un grupo (por serlo las traslaciones).

Sea t una traslación de dirección igual a la de la de la recta $O + Y$, entonces $(x = c)^t = (x = c)$, entendiendo aquí que $(x = c)$ es una recta fija no de puntos fijos, puesto que $(x = c)$ es paralela a $O + Y$. Si c es un elemento de F, entonces $c = (0)^{t_c}$ y encontramos que $(y = c)^t = (y = (0)^{t_c})^t$, pues por definición $c = (0)^{t_c}$ y además, puesto que $(y = c)$ es paralela a la recta $O + X$, $(y = (0)^{t_c})^t$ también será la recta de la forma $(y = k)$ donde k es el trasladado de c por t, entonces $(y = (0)^{t_c})^t = (y = (0)^{t_c t})$ = $(y = c + 0^t)$ por definición de suma. Por tanto, si P es un punto del plano tal que $P = (c,d)$ para ciertos c y d de F, encontramos que $P^t = (c\,,\ d + 0^t)$.

Si p es un elemento de F, entonces (o,p) y (p,o) determinan una recta que es paralela a $X + Y$ por construcción. Si q es otro elemento de F, entonces $(o,p)^{t_q} = (o,\ p + q)$, $(p,o)^{t_q} = (p,q)$, ya que $(p)^{t_q} = (0)^{t_p t_q} = p + q$ y, análogamente para la segunda igualdad, además estos puntos $(o\,,\ p + q)$, (p,q) determinan una recta paralela a la determinada por (o,p), (p,o), y por tanto, paralela a $X + Y$, y esto muestra que las rectas paralelas a $X + Y$ están caracterizadas por la ecuación

$$x + y = c \qquad o \qquad y = -x + c$$

En orden a posibilitar la caracterización de todas las re tas en forma de ecuaciones necesitamos una cierta definición de m tiplicación en F; y para hacer esto tenemos que dar preferencia a algún elemento distinto de O que servirá como unidad por la izqu da de esta multiplicación.

Este elemento puede ser elegido, de todas formas, al aza en consecuencia, diferentes elecciones llevan a diferentes defin ciones de multiplicación.

Sea pues 1 un elemento en F distinto de o. Si r y s son elementos de F, entonces $(x = r)$ y $O + (1,s)$ son dos rectas distintas que se cortan en un punto, (Ver fig. 6). En efecto, $(x = r)$ es paralela a $O + Y$ por construcción, y $O \in O + Y$ y $(1,s) \notin O + Y$, pues $1 \neq o$. Por tanto, podemos definir el producto rs como el elemento unívocamente determinado de F que satisface

$$(r\,,\ rs) = (x = r)\ (O + (1,s))$$

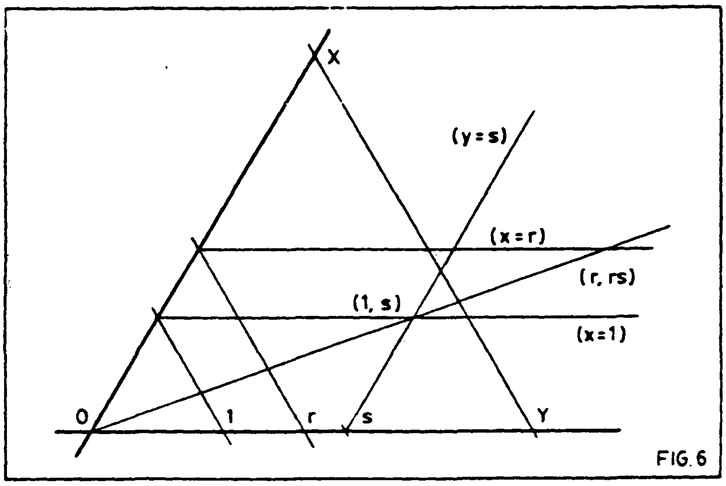

FIG. 6

Si p es una recta no paralela a $O + Y$ - No es de la forma $(x = c)$ - entonces p corta a $O + Y$ en un punto (o,m) para un cierto m de F, puesto que la recta $O + Y$ es tal que sus puntos son del tipo (o,m); y p^{t-m} es una recta paralela a p que pasa por O, puesto que como $(o\,,\,m) \in p$, entonces $(o,m)^{t-m} = (o,m + o^{t-m}) = (o\,,\,m-m) = (o,o) = O$. La recta p^{t-m} corta a $(x = 1)$ en un punto $(1,s)$ para cierto s de F, y es consecuencia inmediata de nuestra definición de multiplicación que

$$p^{t-m} = O + (1,s) = (y = xs)$$

En efecto, si $(o,o) \in p^{t_{-m}}$ veamos si también pertenece a $(y = xs)$. Si $x = o$ entonces $(o\,,\ o.s) = (x = o)\ (O + (1,s)) = (o,o)$, pues es el único punto de intersección de $(x = o)$ y $O + (1,s)$, luego $o.s = o$ análogamente para $(1,s)$.

Por tanto, $p = (O + (1,s))^{t_m} = (O)^{t_m} + (1,s)^{t_m} = (o,m) + (1\,,\ s + m) = (y = xs + m)$.

Las rectas $(y = xs + m)$ e $(y = xt + n)$ son paralelas si y sólo si $s = t$. En efecto:

Si $s = t$, aplicando a la primera recta la traslación t_{-m} queda transformada en la recta $(y = xs)$ que será paralela a $(y=xs+m)$. Aplicando a $(y = xs)$ la traslación t_n entonces se transformará en $(y = xs + n)$, que será paralela a $(y = xs)$, y en consecuencia paralela a $(y = xs + m)$.

Si $s \neq t$, efectuando un razonamiento análogo como resulta que las rectas $(y = xs)$ e $(y = xt)$ son distintas y ambas pasan por (o,o), no son paralelas y sus transformadas $(y = xs + m)$ por t_m e $(y = xt + n)$ por t_n serán distintas y se cortarán también en un punto.

Por tanto, notemos que no solamente ocurre que todá recta determina una ecuación, si no que las rectas recorren exhaustivamente todas las ecuaciones admisibles, y dos rectas serán iguales si, y sólo si, sus ecuaciones son idénticas.

Puesto que $(o,o) = O = (x = o)\ (O + (1,s)) = (o,os)$ por la definición de producto, y puesto que $(r\,,\ ro) = (x = r)\ (O + (1,o)) = (x = r)\ (y = o) = (r,o)$, se sigue que $r\,o = o = o\,s$.

Puesto que $(1,\ 1s) = (x = 1)\ (0 + (1,s)) = (1,s)$ se deduce que $1s = s$.

Puesto que $(y = x\ (-1)) = (0 + (1\ ,\ -1)) = (y = -x)$, pues (o,o) y $(1\ ,\ -1)$ pertenecen a $(y = x\ (-1))$ y a $(y = -x)$, se deduce que $-x = x\ (-1)$.

Puesto que las rectas $(y = xr)$ e $(y = xs + t)$ para $s \neq r$ no son paralelas, se encuentran en uno, y sólo un punto, se sigue - que para tres elementos dados de F, r, s, t tales que $r \neq s$, existe uno, y sólo un, elemento de F que satisface $-xs + xr = t$.

Puesto que los puntos (r,o) y (s,t) para $r \neq s$ determinan una y sólo una recta del tipo $(y = xm + n)$ donde los elementos m y n de F satisfacen las ecuaciones $o = rm + n$ ó $n = -rm$ y $t = sm + n = sm - rm$, se sigue que para tres elementos dados r, s, t de F tales que $r \neq s$, existe uno y sólo un elemento x de F que satisface $sx - - rx = t$.

De esto se deduce que si $r = o$, $s \neq o$, $t = o$ y existe un - único x tal que $-xs + xr = t \quad -xs - xo = o \Rightarrow x = o$, luego F es un Dominio de Integridad.

Para una enunciación conveniente de nuestros resultados in troduciremos algunos términos. Un sistema cartesiano de números es un conjunto F de elementos con una doble composición , adición $m + n$ y multiplicación mn, sujetos a las siguientes reglas:

(1) F es un grupo respecto a la adición

(2) El producto mn de elementos m y n (en este orden) es un elemento unívocamente determinado de F.

(3) $o\ m = m\ o = o$ para todo m de F.

(4) Existe un elemento $1 \neq o$ de F tal que $1\, m = m$, $m\,(-1) = -m$ para todo m de F.

(5) Si r, s, t, son elementos de F tales que $r \neq s$, entonces existe uno y sólo un elemento x, y uno y sólo un elemento y de F tal que

$$-x\,r + x\,s = t \qquad s\,y - r\,y = t$$

Si F es un sistema cartesiano de números entonces notemos por $A\,(F)$ el sistema de todos los pares (p,q) para p y q de F. Para derivar de este sistema $A\,(F)$ de puntos un plano afín basta con establecer qué conjuntos de puntos son los conjuntos de todos los puntos de una recta dada.

a) La recta $(x = c)$ consiste en todos los pares (c,y).

b) La recta $(y = xr + s)$ consiste en todos los pares $(x\,,\, xr + s)$.

El conjunto $A\,(F)$ junto con esta definición de rectas constituye un plano afín en el sentido contenido en la primera sección del capítulo.

Si c es un elemento de F, entonces una aplicación biyectiva t entre los puntos del plano afín sobre F, definida por $(x,y)^t = (x\,,\, y + c)$ deja invariante la recta $(x = d)$ y envía la recta $(y = xr + s)$ sobre la recta $(y = xr + s + c)$ es una traslación en el plano.

Resumiendo todos los resultados de esta sección obtenemos el siguiente:

TEOREMA I.7

Si **O, A, B** son tres puntos no alineados del plano, entonces los siguientes resultados son equivalentes:

(i) Si **X** es un punto de **O + A**, entonces existe una traslación que transforma **O** en **X**.

(ii) Existe un sistema cartesiano numérico **F** y una aplicación biyectiva **f** que relaciona los puntos del plano con el conjunto de todos los pares **(x,y)** de números en **F** que cumple los siguientes requisitos:

(ii)' $f(O) = (o,o)$, $f(A) = (o,1)$; $f(B) = (1,o)$

(ii)'' Las rectas paralelas a **O + A** son enviadas sobre los conjuntos en los que **x = cte.** y las otras son enviadas por **f** sobre los lugares que satisfacen $y = xr + s$.

Esta última condición contiene una descripción de un plano afín al que nos referiremos como el plano afín sobre **F**.

Es de hacer notar que el axioma IIIa del presente estudio asegura la existencia de las traslaciones exigidas en (i) con la única restricción de que la recta **O + A** sea la recta cuya existencia y características afirma dicho axioma.

Por otra parte, si existe en el plano afín sobre **F** una traslación que envía el punto **(o,o)** sobre **(a,b)**, entonces esta traslación puede ser descrita por las siguientes fórmulas de transformación:

$$x' = x + a \qquad\qquad y' = y + b$$

Obtendremos a continuación una serie de resultados en que se muestran las equivalencias entre propiedades geométricas de nuestro plano y propiedades algebraicas de F.

Lema I.2

El grupo de las traslaciones del plano sobre F es simplemente transitivo si y sólo si

(1) $(u + v)\, w = u\, w + v\, w$ para u, v y w pertenecientes a F

Demostración

Si se satisface (1) por F, entonces se ve rápidamente que las fórmulas

$x' = x + a, \quad y' = y + b$ con $a \neq o$ ó $b \neq o$

definen una traslación t en el plano sobre F distinta de la identidad.

En efecto, la aplicación es biyectiva por ser (F,+) un grupo.

Si $P = (x_1, y_1)$, $P^t = (x_1', y_1')$, $Q = (x_2, y_2)$, $Q^t = (x_2', y_2')$, sean $P + P^t \equiv (y = xr + s)$ y $Q + Q^t \equiv (y = xt + v)$

De la primera recta resulta

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 r + s \\ y_1' = x_1' r + s \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 + b = (x_1 + a)r + s \Rightarrow y_1 + b = x_1 r + ar + s$$

y por ser **F** un grupo

$$y_1 = x_1 r + ar + s - b = x_1 r + s \Rightarrow \quad ar + s - b = s$$

Por análoga discusión para $Q + Q^t$ resulta $at + v - b = v$, y entonces, sustituyendo adecuadamente

$$ar + s = s - v + at + v = s - v - (-(at + v)) = s - v - (-v - at) =$$
$$= s + v(-1) + (-v - at)\,(-1) = s + (v - v - at)\,(-1) =$$
$$= s + (-at)\,(-1) = s + at$$

$$ar = s + at - s = s - (-(at - s)) = s - (s - at) = -(-s) - (s - at) =$$
$$= (-s)\,(-1) + (s - at)\,(-1) = (-s + s - at)\,(-1) = (-at)(-1) =$$
$$= at$$

Veamos que $r = t$. Si $r \neq t$, existe un elemento de **F** y uno sólo, x tal que $-xr + xt = o$, pero entonces $x = o$. Luego $a = o$, y no puede ocurrir pues si $a = o$, como $at + v - b = v$, resultaría que b también sería igual a o, contra lo supuesto.

Entonces, $P + P^t$ y $Q + Q^t$ son paralelas según se vio en el desarrollo de la demostración del Teorema I.7.

La demostración sería totalmente análoga para $P + Q$ y -- $P^t + Q^t$.

En cuanto a que el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo se demuestra de la siguiente manera:

Dados dos puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ existe la traslación que tiene por fórmulas de transformación

$$x' = x + (-p_1 + q_1), \qquad y' = y + (-p_2 + q_2)$$

transforma P en Q.

Supongamos ahora que el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo, entonces este grupo es conmutativo como se ha señalado anteriormente. Si u es un elemento en F, entonces existe una traslación que envía (o,o) sobre $(-u,o)$ y se verifica que las fórmulas de transformación de esta traslación son

$$x' = x - u, \qquad y' = y$$

De este hecho y de la conmutatividad del grupo de las traslaciones, deducimos la conmutatividad de la adición en F. En efecto, si aplicamos la traslación de ecuación

$$x'' = x' + a, \qquad y'' = y' + b$$

resulta, en virtud de la conmutatividad de las traslaciones, que

$x'' = x - u + a$ y $x'' = x + a - u$, es decir, $-u + a = a - u$.

La primera traslación envía la recta $(y = xr)$ sobre la recta $(y = (x + u)r)$ que tiene que ser de la forma $(y = xr + s)$. Sustituyendo $x = o$ encontramos que $s = ur$, de donde se sigue que

$$(x + u)\, r = xr + ur$$

como queríamos demostrar.

Lema I.3

Si el sistema cartesiano de números F satisface la ley distributiva (1), entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

(2) $1 + 1 \neq o$

(iii) Las diagonales de un paralelogramo no son paralelas en el plano sobre **F**.

(e) Existe una alineación en el plano sobre **F**.

Demostración

(2) $\Rightarrow$ (e)

Si $1 + 1 \neq o$ entonces $1 \neq -1$. Se verifica que una alineación r con centro en el origen está definida por las fórmulas -- $x' = -x$, $y' = -y$.

En efecto, esta aplicación es biyectiva por ser **F** un grupo, además $r^2 = 1$, $r \neq 1$ y $(o,o)^r = (o,o)$ y es el único punto fijo. Veamos que si P y Q son dos puntos distintos, $P + Q \equiv (y = xt + s)$- es paralela a $P^r + Q^r \equiv (-y = -xt + s)$y, por tanto, si M, P, Q es--tán alineados, M^r, P^r y Q^r también lo están y, que para todo X del plano $(o,o) \in X + X^r$.

Si $s = o$, entonces $P + Q = P^r + Q^r$.

Si $s \neq o$, puesto que se verifica (1), $(F,+)$ es conmutativo, luego, $-y = -xt + s \Rightarrow y = xt - s$, de donde para que $P + Q$ y -- $P^r + Q^r$ tengan un punto común $xt + s = xt - s$, de donde se deduce que $s + s = -xt + xt = (-x + x)t = ot = o$, es decir, $s + s = o$, ó lo que es lo mismo, $(1 + 1)s = o$ y, por ser **F** un dominio de integridad, entonces $s = o$ contra lo supuesto.

(e) $\Rightarrow$ (2)

Inversamente, si existe una alineación r se sigue del --

Teorema I.7, Lema 1,2, Corolario I.6 y Teorema I.3 que existe una alineación en el origen, pues bastaría con trasladar el centro de la alineación a dicho punto.

Esta alineación r manda el punto (1,o) sobre el punto -- (r,o) (en la recta (y = o)), donde r es diferente de o y 1, ya que si es o, entonces $(1,o)^r = (o,o)$ y el centro no sería punto fijo, y si fuera 1, entonces $(1,o)^r = (1,o)$, con lo que otro punto fijo sería el (1,o).

Entonces r envía la recta (x = 1) sobre la recta (x = r). Como el punto (1,c) está en la recta (y = xc) que es enviada sobre sí misma por r por contener al centro de la alineación, tenemos -- que $(1,c)^r = (r,rc)$.

Por tanto, en particular, (1,-1) es enviado sobre (r,-r) y en consecuencia, la recta (y = -1) es enviada sobre la recta (y = -r) paralela a (y = -1) que pasa por el punto (r,-r). Pero el punto - (1,-r) es enviado sobre el punto (r,r(-r)) y las rectas (y = -1) e (y = -r) son intercambiadas por r, de aquí r(-r) = -1 y como, por hipótesis, $r \neq 1$ y (-1 + 1)1 = o implica -11 + 1 = o, y (-1)1 = -1 entonces r = -1. Por tanto, si 1 + 1 = o entonces r(-r)+r(-r) = o implicaría que r(-r) = -(r(-r)), es decir, r(-r) = 1, lo que no es.

(iii) $\Rightarrow$ (2)

Si (iii) es cierto, entonces consideramos el paralelogramo determinado por los puntos (o,o), (o,1), (1,o) y (1,1). Sus -- diagonales son las rectas (y = x1) e (y = -x + 1) que no son paralelas, lo que prueba que $1 \neq -1$.

(2) $\Rightarrow$ (iii)

Supongamos finalmente que se satisface (2) y los puntos **A, B, C, D** determinan un paralelogramo. Es consecuencia del Teorema I.7 y del Corolario I.4 que existe un sistema cartesiano de números **F'** tal que nuestro plano puede ser considerado un plano sobre **F'** y tal que en este sistema de coordenadas los puntos **A,B,C,D** son los puntos **(o,o), (o,1), (1,1), (1,o)** respectivamente, por tanto, si se verifica (2) por **F** se sigue del resultado del primer parágrafo de la demostración, que existen alineaciones. Si (1) es satisfecho por **F** se sigue del lema I.2 que el grupo de las traslaciones es transitivo. De aquí se sigue por el mismo Lema I.2 que (1) es satisfecho por **F'** y, por tanto, podemos aplicar el resultado del segundo parágrafo de la demostración a **F'**, lo que muestra que (2) es satisfecho por **F'** también.

Que las diagonales del paralelogramo **ABCD** se encuentran se verifica por cálculo directo, ya que si $(y = x1)$ e $(y = x(-1)+1)$ son las diagonales. resulta la ecuación $x1 = x(-1) + 1$, es decir, $-x\,(-1) + x\,1 = 1$ y por (5) de **F'** existe un solo valor de **x** que lo cumple.

TEOREMA I.8

Existe para todo par de puntos distintos alineados una alineación que los intercambia si, y solamente si, el plano es el plano sobre un sistema cartesiano de números que satisface (1) y (2), esto es, **F** es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

Demostración

Si existe para todo par de puntos alineados una alineación que los intercambia, entonces existen alineaciones y, por el Corolario I.6, el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

Supongamos que los puntos A, B, C, D, del plano forman un paralelogramo. Como consecuencia del Teorema I.7 existe un sistema cartesiano de números F tal que nuestro plano puede ser considerado un plano sobre F y, tal que los puntos A, B, C, D, son los puntos (o,o), (o,1), (1,1), (1,o), respectivamente. Entonces, por el Lema I.2, como el grupo de las traslaciones es transitivo sobre el plano considerado como plano sobre F se cumple que F es distributivo por la derecha. Además, como existe una alineación, por hipótesis, en dicho plano y, por tanto, en el plano sobre F, por el Lema I.3 se cumple que $1 + 1 \neq o$, es decir, F es de característica distinta de 2.

Supongamos inversamente que el plano es el plano sobre un sistema cartesiano de números F que es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

Sean P y Q dos puntos cualesquiera del plano, y A, B, C, los puntos (o,o), (o,1) y (1,o). Si $P = (p_1,p_2)$ y $Q = (q_1,q_2)$, entonces $D = (q_1,p_2)$ y $E = (p_1,q_2)$ son tales que P, E, Q, D, forman un paralelogramo. Por el Lema I.3, las diagonales de dicho paralelogramo se cortan en un punto R y es inmediato demostrar que R es el centro de la alineación que intercambia P y Q, según se deduce del Corolario I.2.

A la vista de los resultados obtenidos hasta ahora y con el fin de dotar de la suficiente potencia a nuestra axiomática, parece natural admitir el siguiente

AXIOMA III b

Para todo par de puntos distintos alineados existe una alineación que los intercambia.

En estas condiciones podemos enunciar sin demostrarlos pues se ha efectuado previamente, los siguientes

TEOREMA I.11 a

En presencia de los Axiomas I al III y de la hipótesis (H) se verifican:

a) La alineación que intercambia dos puntos cualesquiera del plano es única.

b) Las diagonales de un paralelogramo no son paralelas.

c) Si ABCD es un paralelogramo tal que $A + B \parallel D + C$ y $A + D \parallel B + C$, si F es un punto en $A + D$ tal que $B + D \parallel C + F$, entonces $F = A^j$, siendo j la alineación de centro D.

d) Si P y Q son dos puntos distintos alineados, y R el centro de la alineación que los intercambia; si P', Q', R' son puntos alineados y existen tres rectas distintas paralelas p, q, r, tales que $P + P' = p$, $Q + Q' = q$ y $R + R' = r$, entonces R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q'.

e) El producto de dos alineaciones es una traslación, y el producto de tres alineaciones es una alineación.

f) Si R es el grupo generado por las alineaciones, entonces el grupo de las traslaciones T es un subgrupo abeliano de índice 2 en R.

TEOREMA I.11 b

En presencia de los axiomas I al III se verifica la equivalencia de

a) Para todo par de puntos distintos alineados del plano existe una alineación que los intercambia (Axioma IIIb).

b) El grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

c) El plano es el plano sobre un sistema cartesiano de números F que es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

1.4 TRIANGULOS SEMEJANTES

TEOREMA I.9

En presencia de los Axiomas I al III y la hipótesis (H), si los tres puntos **A, B, C,** no están alineados y si **A'** es el centro de la alineación que intercambia **B** y **C**, y **B'** el centro de la alineación que intercambia **C** y **A**, entonces **A + B** || **A' + B'**. (Ver fig. 7)

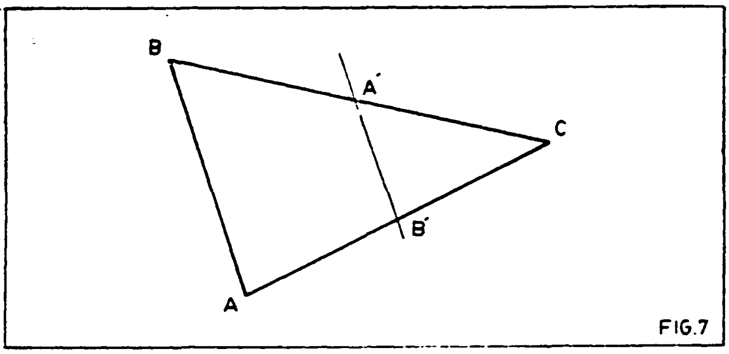

FIG.7

Demostración

Sea **a** la alineación que intercambia **B** y **C** con centro **A'** y **b** la alineación que intercambia **C** y **A** con centro **B'**. Deducimos del **Lema** I.1 que **ba** es una traslación. Pero **ba** envía **B** sobre **A**, luego **A + B** es invariante. Asimismo **A' + B'** es invariante por **ba** pues - $(A')^{ba} = (A')^{b}$ y la recta **A' + B'** se transforma en $(A')^{b} + (B')^{ba}$ - que será paralela a **A' + B'** y tal que $(A')^{b}$ pertenece a **A' + B'**, - pues **B'** es el centro de la alineación **b**.

Puesto que **A** $\neq$ **B**, se sigue que **ba** $\neq$ **1** y, como además to-- das las rectas invariantes por la traslación son paralelas, resulta que **A + B** || **A' + B'**, como queríamos demostrar.

TEOREMA I.10

En presencia de los Axiomas I al III y la hipótesis (H), si tres puntos A, B, C, no están alineados, y si A', B', C' son tres puntos distintos situados en las rectas B + C, C + A, A + B, respectivamente, entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

(a) A', B', C' son los centros de sendas alineaciones que intercambian B y C, C y A, y, A y B, respectivamente.

(b) A + B ∥ A' + B', B + C ∥ B' + C', C + A ∥ C' + A'

Demostración

Se comprueba inmediatamente que si (a) y (b) son equivalentes, entonces se verifica el Teorema I.6. En efecto, sean A, B, C, D, cuatro puntos distintos no alineados tres a tres tales que A + B ∥ D + C y A + D ∥ B + C (ver fig. 8)

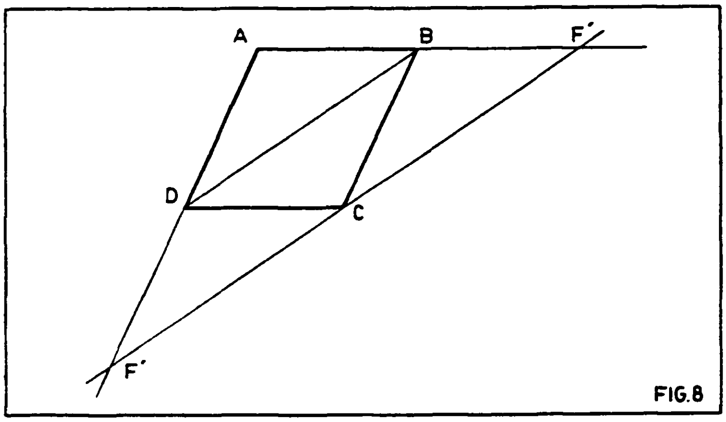

FIG.8

Si F es un punto de A + D tal que B + D ∥ C + F, veamos que D es el centro de la alineación que intercambia A y F si (a) y

(b) son equivalentes.

Consideremos el punto **F'= (A + B) (C + F)**, ya que **A + B** y **C + F** no pueden ser paralelas, pues existirían dos paralelas a **A+B** por **C**.

Entonces **A, F, F'**, son puntos distintos no alineados y como **D + B || F + F', B + C || A + D, D + C || A + F'**, resulta que se verifica (b), y por tanto, (a), en consecuencia, **D** es el centro de la alineación que intercambia **A** y **F**.

Es evidente, por otra parte, que el Teorema I.4 implica la equivalencia entre (a) y (b).

1.5 LA RELACION DE ORTOGONALIDAD

En todo el resto del trabajo supondremos que estamos tratando de un plano afín en el que se satisfacen los axiomas I, II, III y la hipótesis (H).

Añadiremos ahora una relación de ortogonalidad diciendo que unas rectas son perpendiculares a otras, en símbolos $a \perp b$. Esta relación estará sometida a las siguientes condiciones:

0.1 Para cada recta a existe una recta $b \neq a$ tal que $a \perp b$

0.2 $a \perp b$ si y sólo si $b \perp a$.

0.3 Si $a \perp b$, entonces $a \parallel a'$ es condición necesaria y suficiente para que $a' \perp b$.

En resumen, una relación de ortogonalidad constituye un correspondencia involutiva entre los haces de rectas paralelas

TEOREMA I.12

Las siguientes propiedades son equivalente:

0.4 Las alturas de un triángulo concurren en un punto

0.5 Las mediatrices de un triángulo concurren en un pu

Demostración

Supongamos que tres puntos A, B, C, no están alineados

Entonces se sigue del Teorema I.10 que las rectas A + B, B + C, y - C + A son paralelas a las rectas A' + B', B' + C', C' + A', respectivamente, siendo A', B', C' los centros de las alineaciones que intercambian B y C, C y A, y, A y B, respectivamente. Las mediatrices del triángulo ABC son asimismo las alturas del triángulo A'B'C' y, por tanto, 0.5 es consecuencia de 0.4.

Para probar que 0.4 es consecuencia de 0.5 notemos por a, b, c, las rectas que contienen a los puntos A, B, C, y que son paralelas a las rectas B + C, C + A y A + B, respectivamente. Entonces se sigue del Teorema I.10 que A es el centro de la alineación que - intercambia ab y ac, B es el centro de la alineación que intercambia bc y ba, y C es el centro de la alineación que intercambia ca y cb. Entonces, las alturas del triángulo ABC son las mediatrices -- del triángulo bc,ca,ab; por tanto, 0.4 es una consecuencia de 0.5.

Si decimos que las rectas paralelas y sólo éstas son perpendiculares, entonces se satisfacen los postulados 0.1 a 0.3. Excluiremos siempre esta posibilidad trivial que es, por ejemplo, incompatible con 0.4.

Si la relación de ortogonalidad no es trivial, entonces - es posible introducir coordenadas de tal manera que las rectas --- (x = cte) son ortogonales a las rectas (y = cte). En el futuro consideraremos solamente tal sistema rectangular de coordenadas.

Supongamos ahora que el plano es descrito por un sistema rectangular de coordenadas y que las coordenadas son elementos de - un sistema cartesiano de números distributivo por la derecha de característica distinta de 2 .

Entonces, todas las rectas perpendiculares a la recta — $(y = xr)$, $r \neq o$, son paralelas, y son perpendiculares a toda recta $(y = xr + s)$ pues ésta es paralela a $(y = xr)$. Además, no son de - la forma $(x = cte)$ o $(y = cte)$.

Por tanto, hay para todo número $r \neq o$ en F un y sólo un - número $r^* \neq o$ en F tal que

(1) La recta $(y = xr + s)$ es perpendicular a la recta - $(y = xr^* + t)$, $r^{**} = r$.

(2) La perpendicularidad de la recta $(y = xr + s)$ y de - la recta a implica que la recta a es de la forma — $(y = xr^* + t)$.

Notemos que la función r^* depende del sistema de coordenadas y no solamente de la relación de perpendicularidad que consideramos. Un cambio de coordenadas puede efectuar un cambio en el sistema F, pero aunque no haga eso puede efectuar un cambio en la función r^*. Por otra parte , la función r^* determina completamente la perpendicularidad.

TEOREMA I.13

Si el plano está caracterizado por un sistema rectangular de coordenadas, tomado de un sistema cartesiano de números distributivo por la derecha y de característica distinta de 2, y si la relación de perpendicularidad está determinada por la función r^*, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

0.4 Las alturas de un triángulo concurren en un punto.

0.6 Dados cuatro puntos **A**, **B**, **C**, **D**, no alineados tres a tres, si $A + B \parallel C + D$, $A + C \parallel B + D$, $A + B \perp A + C$, y si **U** es un punto distinto de **A**, **B**, **C**, **D**, tal que $B + U \perp C + U$, entonces, $A + U \perp D + U$.

0.7 **F** es un cuerpo conmutativo y asociativo* y $rr^{*} = ss^{*}$, para $r \neq o$, $s \neq o$, de **F**.

Demostración

Será efectuada en una serie de apartados

(2.1) 0.4 y 0.6 implican la siguiente propiedad de r^{*}

(2.1') Si **r**, **s**, **u**, **v** son distintos de **o** en **F**, entonces $ru = sv$ y $rv^{*} = su^{*}$ son equivalentes.

En efecto, puesto que $r^{**} = r$ si $ru = sv$ implica $rv^{*} = su^{*}$ se verifica que si $rv^{*} = su^{*}$ entonces $ru^{**} = sv^{**}$, es decir $ru = sv$. Bastará con mostrar que $rv^{*} = su^{*}$ es consecuencia de $ru = sv$, si son ciertas 0.4 ó 0.6. Este es el caso en que $r = s$, pues tendríamos que $u = v$. En consecuencia suponemos $r \neq s$. Asimismo podemos suponer $u \neq v$.

Pongamos $t = -(ru) = -(sv)$ y supongamos la validez de 0.4. El triángulo de vértices (o,t), (r,o), y (s,o) está determinado por las rectas $(y = o)$, $(y = xu + t)$, $(y = xv + t)$. Las alturas serán las rectas $(x = o)$, perpendicular a $(y = o)$ por (o,t); $(y = xu^{*} - su^{*})$, ya que por ser perpendicular a $(y = xu + t)$, será del tipo $(y = xu^{*} + m)$, y como debe pasar por el punto (s,o), $o = su^{*} + m$, $m = -su^{*}$; e $(y = xv^{*} - rv^{*})$ por razones análogas a las anteriores. Hay tres rectas distintas que tienen uno y sólo un punto en común, luego si --

* Si bien todo cuerpo es asociativo, mantenemos la terminología de Baer.

$x = o$ y $xv^* - rv^* = xu^* - su^*$ resulta que $-rv^* = -su^*$.

Si $ru = su^*$ entonces $u^* = v$, $v^* = u$ y entonces $rv^* = su^*$. Por tanto, podemos suponer que $ru \neq su^*$ y que 0.6 es cierto. Consideremos los puntos $A = (o, ru - su^*)$, $B = (r - s, ru - su^*)$, $C = (o,o)$ y $D = (r - s, o)$. Como $B + D$ es la recta $(x = r - s)$ paralela a la recta $A + C$ que es $(x = o)$ y perpendiculares a $C + D$ que es $(y = o)$ y análogamente para $A + B$ y $C + D$, estos cuatro puntos forman un rectángulo. Consideremos asimismo el punto $U = (r, ru)$ que es ciertamente diferente de los otros cuatro.

La recta $B + U$ viene dada por la ecuación $y = xu^* + ru - ru^*$ como se comprueba inmediatamente por sustitución de B y U en la ecuación, y la recta $C + U$ viene dada por $y = xu$. — Claramente estas dos rectas son perpendiculares. Por 0.6 deducimos la ortogonalidad de las rectas $A + U$ y $D + U$. Pero la recta $D + U$ está dada por la ecuación $y = xv + (s - r)v$. La recta $(y = xv^* - rv^* + ru)$ es claramente perpendicular a $D + U$ y contiene a U. Por tanto, contendrá también a A, lo que muestra, sustituyendo las coordenadas de A en ella, que $ru - su^* = ru - rv^*$, es decir, $rv^* = su^*$.

(2.2) Si h y k son dos números distintos de o en F, y si se satisface (2.1') por la función r^*, entonces

$$hh^* = kk^* \quad y \quad hk = kh$$

Nota: Designemos por c el valor común de todos los productos rr^*. Este número que llamaremos constante de ortogonalidad es distinto de o, y depende del distema rectangular de coordenadas elegido.

Es distinto de o pues $h \neq o$ y $h^* \neq o$ y por la definición de multiplicación $(r, rs) = (x = r)\ (O + (1,s))$, si $rs = o$ y $r \neq o$, $s \neq o$, entonces

$$(r,o) = (x = r)\ (O + (1,s))$$

Por tanto, (r,o) pertenece a $(O + (1,s))$ e $(y = o)$. En consecuencia, si $(y = o) \equiv (O + (1,s))$ se verifica que $s = o$, si $(y = o) \neq (O + (1,s))$ entonces $(r,o) = (o,o)$ y $r = o$, contradicción que determina el que F - sea un dominio de integridad.

En cuanto a que c depende del sistema rectangular de coordenadas elegido, la afirmación es evidente puesto que la elección de r^* también depende.

Vayamos pues a la demostración de (2.2).

Sea $r = -v$, $u = -1$, $s = 1$. Entonces $ru = v = 1v = sv$, y se sigue de (2.1') que $(-v)v^* = rv^* = su^* = (-1)^*$ y, en consecuencia, se obtiene que $vv^* = (-1)\ (-1)^*$. En efecto, -- $(-v)v^* = -(vv^*)$ ya que $(-v)v^* + vv^* = ((-v) + v)v^* = o$, entonces $vv^* = -(-1)^* = (-1)\ (-1)^*$, ya que el opuesto de $(-1)^*$ es $(-1)\ (-1)^*$ pues $(-1)\ (-1)^* + (-1)^* = ((-1) + 1)\ (-1)^* = o$.

Según hemos visto hay uno y sólo un número z tal que -- $hk = zh$. Estos números h, k, z son distintos de o, h y k - por hipótesis, y z también, pues si $z = o$, $hk = o$, y F es - dominio de integridad. De aquí se sigue, de (2.1') que -- $hh^* = zk^*$. Pero hemos visto anteriormente que $kk^* = hh^*$. De aquí $k = z$, por la ausencia de divisores de o en F, lo - que prueba que $hk = kh$.

Para el enunciado del próximo lema será conveniente introducir algunas notaciones. Si F es un sistema cartesiano de números, y si e es un número distinto de o en F, entonces existe un sistema cartesiano de números F_e, con un elemento unidad 1_e y un elemento nulo o, tal que $(o,o) = (o,o)$, $(o,e) = (o,1_e)$ y $(e,o) = (1_e,o)$, como se sigue de los Teoremas I.7 y I.8. Entonces, el plano sobre F y el plano sobre el plano F_e son el mismo, ambos sistemas de coordenadas tienen el mismo eje $O + X$ y el mismo eje $O + Y$. Puesto que el grupo aditivo del sistema cartesiano de números es justamente el grupo de las traslaciones en la dirección del eje $O + Y$, se sigue que los grupos aditivos de F y F_e son idénticos y que estos sistemas difieren únicamente en la definición de multiplicación.

Notamos el producto de dos elementos m y n en F por mn, y en F_e por $m \cdot_e n$. La recta $(y = xr)$ pasa por los puntos (o,o) y $(e,er) = (1_e,er)$, por lo que esta recta coincide con la recta $(y = x \cdot_e (er))$, en consecuencia obtenemos la fórmula

$$sr = s \cdot_e (er) \tag{2.3}$$

lo que conecta la multiplicación en F y la multiplicación en F_e.

(2.4) Si la multiplicación es conmutativa en todo F_e, entonces es asociativa en F (y en todo F_e).

En efecto, de (2.3) y de las hipótesis deducimos la siguiente cadena de igualdades:

$$r(es) = (es)r = (es) \cdot_e (er) = (er) \cdot_e (es) = (er)s = (re)s$$

Demostración de que 0.7 es consecuencia de 0.4 y 0.6

Si la relación de ortogonalidad satisface 0.4 ó 0.6, entonces (2.1') ocurre en todo F_e para $e \neq o$, ya que la demostración --

que se vio en (2.1) sería análoga para cualquier F_e. En consecuencia se sigue de (2.2) que todo F_e es conmutativo, e inferimos de -- (2.4) que F es asociativo.

Pero F es distributivo por la derecha y de aquí F es un cuerpo conmutativo ordinario. En efecto, falta por ver que todo r tiene simétrico, y esto es consecuencia de (2.1'), pues si $rx = (1)(1)$ entonces $r1^* = 1x^*$ y de aquí $(r1^*)^* = x$.

Si F es un cuerpo conmutativo ordinario de característica -- distinta de 2, si c es un número distinto de o en F, la definición de ortogonalidad podría ser dada por las siguientes condiciones:

(1) Las rectas $(x = cte)$ e $(y = cte)$ son ortogonales.

(2) Si $r \neq o$, entonces las rectas $(y = xr + s)$ y las rectas $(y = xcr^{-1} + t)$ son ortogonales.

Es evidente que esta definición satisface las condiciones -- 0.1 a 0.3, como se deduce trivialmente.

(2.5) Si 0.7 se satisface, si $A = (u,v)$, $B = (-u,-v)$ son distintos de (o,o) y si $P = (x,y)$ es distinto de A y B, entonces la -- condición siguiente es necesaria y suficiente para que $A + P \perp B + P$

(2.5') $\quad y^2 - v^2 = c(x^2 - u^2)$

donde $c \neq o$ es la constante de ortogonalidad.

En efecto, si $u = x$, entonces $y = -v$ es condición necesaria y suficiente para que se cumpla (2.5') y $A + P \perp B + P$.

Si $v = y$, entonces $x = -u$ es condición necesaria y suficiente para que se cumplan (2.5') y la ortogonalidad de $A + P$ y $B + P$.

Si una recta viene dada por la ecuación ($y = xr + s$) entonces r es su pendiente. Si $u \neq \pm x$ y $v \neq \pm y$, entonces la pendiente de $A + P$ es $(y - v)/(x - u)$ y la pendiente de $B + P$ es $(y + r)/(x + u)$. Por tanto, la perpendicularidad de $A + P$ y $B + P$ es equivalente a

$$\frac{y - v}{x - u} \cdot \frac{y + v}{x + u} = c$$

y esta ecuación es equivalente a (2.5').

Demostración de que 0.6 es una consecuencia de 0.7

Suponemos que no hay tres puntos alineados de cuatro puntos A, B, C, D, que $A + B \parallel C + D$, $A + C \parallel B + D$, $A + B \perp A + C$, que el punto U es distinto de A, B, C, D, y que $A + U \perp D + U$.

Puesto que el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que las diagonales del paralelogramo $ABCD$ se cortan en (o,o). Entonces, $A = (u,v)$, $B = (r,s)$, $C = (-r,-s)$ y $D = (-u,-v)$ puesto que (o,o) es el centro de la alineación que intercambia A y D, y, B y C.

Si $U = (x,y)$ entonces se sigue de nuestras hipótesis y de (2.5) que

$$y^2 - v^2 = c(x^2 - u^2) \text{ (por hipótesis } A + U \perp D + U)$$
$$s^2 - v^2 = c(r^2 - u^2) \text{ (por hipótesis } A + B \perp D + B)$$

restando obtenemos la expresión $y^2 - s^2 = c(x^2 - r^2)$. Pero entonces, se sigue de (2.5) que esta última ecuación es equivalente a la perpendicularidad de U + B y U + C, lo que prueba 0.6.

Demostración de que 0.4 es consecuencia de o.7

De la equivalencia entre 0.6 y 0.7 se sigue que todo sistema de coordenadas cumple las hipótesis de 0.7 si al menos uno de ellos satisface 0.7, pues 0.6 no depende de la elección de dicho sistema.

Supongamos ahora que tres puntos A, B, C no están alineados. Si A + B $\perp$ B + C, entonces las tres alturas del triángulo ABC se cortan en B. En consecuencia podemos asumir que A, B, C, no forman un triángulo rectángulo.

Es imposible que las tres rectas A + B, B + C, C + A, sean perpendiculares a sí mismas. Como cualesquiera dos de ellas no son paralelas, existen a lo más dos haces de rectas paralelas que son perpendiculares a sí mismas. Este último hecho puede ser verificado como sigue. Si c es la constante de orotogonalidad en el sistema de coordenadas elegido, entonces la perpendicularidad de la recta ($y = xr + s$) a sí misma es equivalente a $r^2 = c$. Pero esta ecuación tiene dos o ninguna soluciones.

Suponemos entonces que la recta A + B es la no perpendicular a sí misma. Ahora bien, se sigue de una nota anterior que podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$A = (o,o),\ B = (o,r) \text{ y } C = (s,t) \quad \text{donde } r \neq t,\ st \neq o$$

puesto que A, B, C, no están alineados y no forman un triángulo rectángulo. Entonces las rectas A + B, B + C, C + A vienen dadas por las ecuaciones $x = o$, $y = x(t - r)s^{-1} + r$, $y = xts^{-1}$ respectivamente, y las tres alturas desde A, B, C, vienen dadas por $y = xs(t-r)^{-1}c$, $y = xst^{-1}c + r$, $y = t$, respectivamente, y estas tres rectas tienen en común el punto $(t(t - r)s^{-1}c^{-1}, t)$, como se comprueba por simple cómputo.

Esto completa la demostración.

Así pues, a la vista de los resultados obtenidos y con el fin de dotar de la suficiente potencia a nuestra axiomática, debemos introducir el siguiente

AXIOMA IV

Existe una relación de ortogonalidad entre las rectas del plano que cumple las condiciones 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

TEOREMA I.14

En presencia de los axiomas I, II, III y IV, se verifica que por un punto exterior a una recta existe una única recta paralela.

Demostración

Sea P y r una recta dados, entonces por el axioma IV existe una recta s, $s \neq r$, tal que $s \perp r$, y Q tal que $Q \in s$ y $Q \in r$ pues s y r no son paralelas.

Se presentan dos casos:

1) $P \in s$.

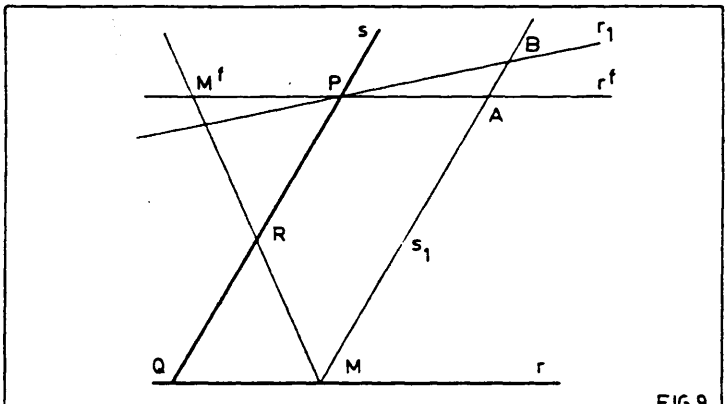

FIG.9

Entonces, existe un único punto **R** centro de la alineación **f** que intercambia **P** y **Q**, por el axioma II, existe **M** tal que $M \notin P + Q$ entonces:

a) $M \in r$ (Ver fig. 9). $r^f = P + M^f$, si $r^f \not\parallel r$, tiene un punto en común con ella y este punto será fijo. Como **R** es el único punto fijo de **f**, resulta que $r^f = P + M^f = P + R = s = P + Q$, y entonces **Q** sería punto fijo, contradicción que lleva a que $r^f \parallel r$.

Si existe otra paralela r_1 por **P** a **r**, resulta que considerando el mismo razonamiento para **M** y **s** que para **P** y **r**, existe una recta s_1 que contiene a **M** y es paralela a **s**. s_1 es ortogonal a r_1 y a r^f, pues lo es a **r** y las corta en dos puntos distintos **A** y **B**. De aquí se deduce que las alturas del triángulo **PAB** se cortan en dos puntos distintos **A** y **B**, lo que contradice 0.4.

b) $M \notin r$.

Entonces si $P + M$ es paralela a r (ver fig. 10), como por M -

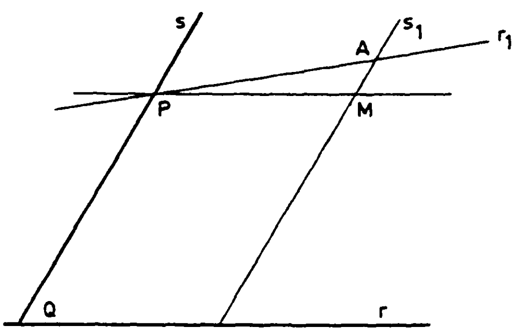

FIG.10

existe una única paralela a $P + Q$, por los resultados del parágrafo anterior, esta paralela s_1 será ortogonal a $P + M$, y a r_1, siendo r_1 una segunda paralela a r que pasa por P y distinta de $P + M$. Si A es la intersección de s_1 y r_1, el triángulo PMA -- tampoco verifica 0.4.

Si $P + M$ no es paralela a r, existirá un punto de intersección de ambas, que llamaremos T y estaremos entonces en las hipótesis de a).

2) $P \notin s$

Entonces existe un único punto R que es el centro de la - alineación f que intercambia P y Q, por el axioma II, existe un punto M tal que $M \notin P + Q$. Se presentan tres casos:

a) Si $M \in r$ (Ver fig. 11), $P + M^f$ es paralela a r, según razonamien tos anteriores, y es única pues si existiera otra r_1, conside-rando el punto **A** intersección de **P + M^f** con **s**, y **B** intersección de r_1 con **s**, resultaría que el triángulo **PAB** no cumpliría 0.4.

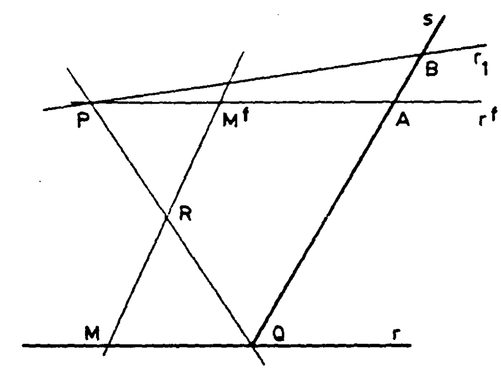

FIG. 11

b) Si **M** $\in$ **s**, entonces **P + M** puede ser paralela a **r** y sería única - por el mismo razonamiento final del apartado a), o no sería paralela y cortaría en un punto **M'** a **r**, con lo cual estaríamos en las hipótesis de a).

c) Si **M** $\notin$ **s** y **M** $\notin$ **r**, podría ser que **P + M** fuera paralela a **r** y sería única por los mismos razonamientos anteriores, o bien cortaría a **r** en un punto **M'** y estaríamos en las hipótesis de **a**).

1.6 COLINEALIDAD DE LOS PUNTOS NOTABLES DE UN TRIANGULO

La validez de la tantas veces llamada especialización afín del Teorema de Desargues es una consecuencia inmediata de la condición 0.7. Vamos a suponer en todo este parágrafo que el plano afín en consideración es de característica distinta de 2 y satisface la especialización afín del Teorema de Desargues. Usando los resultados anteriores se sigue que para cada par de puntos distintos alineados existe una única alineación que los intercambia. Suponemos, -- además, que se ha definido una relación de ortogonalidad que cumple las hipótesis 0.1 a 0.4.

Si tres puntos A, B, C, no están alineados, entonces notemos por A', B', C' los centros de las alineaciones que intercambian B y C; C y A, y A y B respectivamente, por h(X) la altura correspondiente a X, por b(X) la mediatriz por X' y por m(X) la mediana -- correspondiente a X y X'.

TEOREMA I.15

(a) Si la característica del plano es distinta de 3, entonces las medianas de un triángulo concurren en un punto.

(b) Si la característica del plano es 3, entonces las medianas de un triángulo son paralelas.

Demostración

Supongamos que los tres puntos A, B, C, no están alineados, entonces, por el Teorema I.7 existe una representación del plano -

por medio de coordenadas de un sistema cartesiano de números tales que $A = (o,o)$, $B = (1,o)$ y $C = (o,1)$. Notemos por A', B', C' los centros de las alineaciones que intercambian B y C, C y A, y A y B, respectivamente.

Puesto que la alineación en el origen puede ser descrita por las fórmulas $x' = -x$, $y' = -y$, se sigue que la alineación respecto del punto (a,b) viene dada por las fórmulas

$$x' = -x + 2a \qquad\qquad y' = -y + 2b$$

De aquí se sigue del corolario I.3, que $A' = (½,½)$. En efecto, A' es el centro de la alineación que intercambia $C = (o,1)$ y $B = (1,o)$, luego está en la recta $x + y = 1$, por otra parte el transformado de $A = (o,o)$ es el punto P intersección de las rectas $(x = 1)$ e $(y = 1)$, es decir, $P = (1,1)$ que está alineado con A y A'. Pero $A + P \equiv (y = x)$ y la intersección de esta recta con $x + y = 1$ es $A' = (½,½)$.

Hemos considerado que F es de característica distinta de 2. Análogamente veríamos que $B' = (o,½)$ y $C' = (½,o)$.

Las ecuaciones de las tres medianas del triángulo son

$$A + A' \equiv (y = x1); \quad B + B' \equiv (y = x(-½) + ½) \quad C + C' \equiv (y = x(-2)+1)$$

Si la característica del plano es 3 entonces $-2 = -½ = 1$, las tres medianas son paralelas.

Si la característica no es 3 entonces el punto común es $(1/3,1/3)$. En efecto:

Si consideramos 1/3 como el número $\mathbf{m}$ tal que $3\mathbf{m} = 1$, re-- sulta que, si $\mathbf{y} = \mathbf{x}1$, sumando dos veces da $\mathbf{y} + \mathbf{y} = \mathbf{x}1 + \mathbf{x}1$, y de -- aquí

$$(1 + 1)\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{x})1 = ((1 + 1)\mathbf{x})1 = (2\mathbf{x})1$$

y sumando de nuevo $3\mathbf{y} = (3\mathbf{x})1$, pero si $\mathbf{x} = \mathbf{m}$, $3\mathbf{x} = 1$, $3\mathbf{y} = 1$, $\mathbf{y} = 1/3$, y el punto $(1/3,1/3)$ pertenece a la recta $(\mathbf{y} = \mathbf{x}1)$.

Si $\mathbf{y} = \mathbf{x}(-½) + ½$ y sumamos tres veces, resultará

$3\mathbf{y} = (3\mathbf{x})\,(-½) + ½ + ½ + ½$; si $\mathbf{x} = \mathbf{m}$, entonces $3\mathbf{y} = -½ + ½ + ½ + ½ = ½ + ½ = (1 + 1)\,½ = 2\cdot½ = 1$, y el punto $(1/3,1/3)$ pertenece a la recta $(\mathbf{y} = \mathbf{x}(-½) + ½)$.

Para la tercera ecuación se efectuará la comprobación de forma análoga.

De la prueba vemos que las medianas se dividen en la razón ½ si la característica no es 3. Aquí decimos que el punto **U** divide a **V** + **W** en la razón ½ si **U** es el centro de la alineación que intercambia **V** y **Z**, siendo **Z** tal que **W** es el centro de la alineación que intercambia **U** y **Z**.

Para demostrar que el punto común que llamaremos $\mathbf{P}=(1/3,1/3)$ divide a todas las medianas en la razón ½ veremos que cumple las -- condiciones de la definición. La alineación de centro **A'** transforma al punto **P** en otro punto $\mathbf{P}' = (\mathbf{x}',\mathbf{y}')$ cuyas coordenadas son

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x} + 2\cdot½ = -(1/3) + 1 = -(1/3) + 1/3 + 1/3 + 1/3 = 2\cdot 1/3$$

$$\mathbf{y}' = -\mathbf{y} + 2\cdot½ = -(1/3) + 1 = 2\cdot 1/3.$$

La alineación de centro **P** transforma el punto **A** en el --- punto **P'**, ya que

$$x' = o + 2.1/3 = 2.1/3 \qquad y' = o + 2.1/3 = 2.1/3$$

Luego, **P** es el centro de la alineación que transforma **A** - en **P'** donde **P'** es el centro unívocamente determinado tal que **A'** es el centro de la alineación que intercambia **P** y **P'**.

La demostración sería análoga para las restantes medianas.

Es fácil demostrar que **h(A)** y **h(B)** se encuentran en un -- punto bien determinado, ya que si fueran paralelas los lados **C + B**, y **A + B** serían paralelos, lo que no es y, en consecuencia, por el - Teorema I.12 las mediatrices **b(A)** y **b(B)** también se cortan.

TEOREMA I.16

Si **F** es de característica distinta de 2 y 3, **M**, **h(A)h(B)** y **b(A)b(B)** están alineados.

Demostración

Consideramos los triángulos determinados por los puntos **A**, **B**, **h(A)h(B)** y **A'**, **B'** y **b(A)b(B)** (ver fig. 12).

Puesto que **h(X)** y **b(X)** son perpendiculares al mismo lado del triángulo **ABC**, entonces son paralelas, y el paralelismo de **A + B** y A' + B' es una consecuencia del Teorema I.10. Por tanto, los lados correspondientes de estos triángulos son paralelos. Aplicando el Teorema de Desargues - que puede serlo siempre que nuestra afirmación no sea satisfecha trivialmente - deducimos la perspectividad de los dos triángulos A B h(A)h(B) y A'B' b(A)b(B), lo que prueba nuestro aserto.

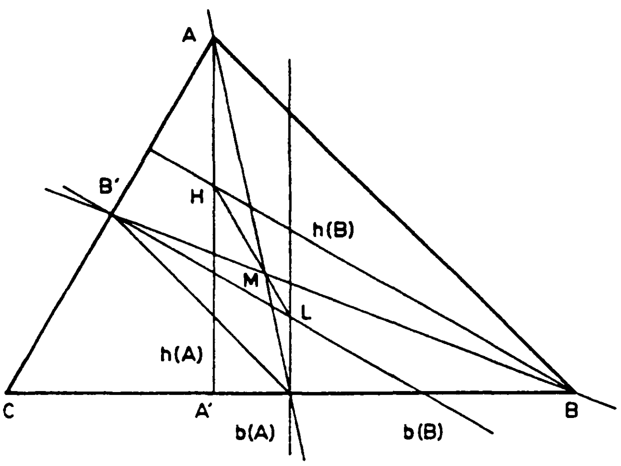

FIG.12

1.7 LAS BISECTRICES DE LOS ANGULOS

Supongamos ahora que u, v, w son tres rectas distintas -- que contienen al punto P y que cumplen la siguiente condición:

(B) Si $W \neq P$ es un punto de w, si w' es una recta ortogonal a w - por W, entonces w' no es paralela ni a u ni a v, y W es el centro de la alineación que intercambia w'u y w'v.

Entonces, llamaremos a w bisectriz del ángulo (u,v). Señalamos que una bisectriz del ángulo (u,v) es al mismo tiempo una - bisectriz del ángulo (v,u). Debe ser entendido que un ángulo no es sino un par de rectas.

TEOREMA I.17

La validez de 0.4 es equivalente a la validez de las tres condiciones siguientes:

(i) Si los tres puntos A, B, C, no están alineados y si A', B', C' son los pies de las alturas del triángulo ABC a través de A, B, C, entonces A', B', C' no están alineados y la recta A + A' es una bisectriz del ángulo (A'+ C', A'+ B'). (Ver fig. 13).

(ii) Si los tres puntos A, B, C, no están alineados, si u es una -- bisectriz del ángulo (A+B , A+C) y v una bisectriz del ángulo (B+A , B+C), entonces C + uv es una bisectriz del ángulo ---- (C+A , C+B). (Ver fig. 14).

(ii) Si w y w' son bisectrices distintas del ángulo (u,v) entonces $w \perp w'$.

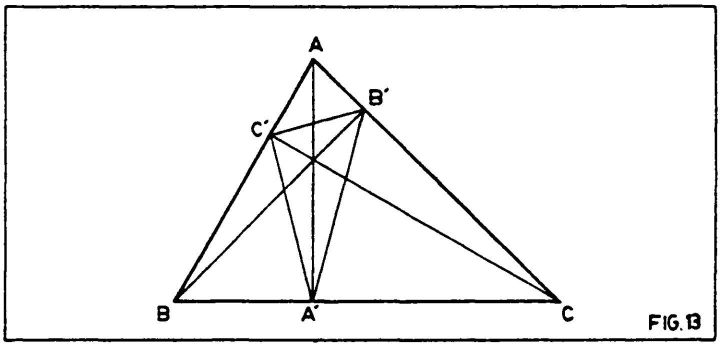

FIG.13

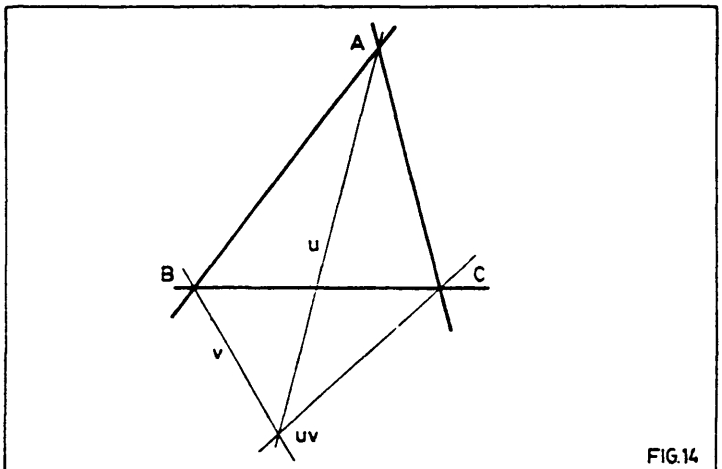

FIG.14

Demostración

Suponemos primeramente la validez de las condiciones (i) a (iii).

Si los tres puntos **A, B, C,** forman un triángulo rectángulo, entonces sus alturas tienen ciertamente un punto en común, y, por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los puntos **A, B, C,** no alineados, no forman un triángulo rectángulo.

Notemos por A', B', C' los puntos unívocamente determinados sobre $B + C$, $C + A$ y $A + B$, respectivamente, tales que $A + A' \perp B + C$, $B + B' \perp C + A$ y $C + C' \perp A + B$.

Entonces, deducimos por (i) que $A + A'$ es bisectriz del ángulo $(A'+C', A' + B')$, que $B + B'$ es bisectriz del ángulo $(B'+C', B'+A')$ y que $C + C'$ es bisectriz del ángulo $(C'+A', C'+B')$.

Se sigue de (ii) que $w = C' + (A + A')(B + B')$ es bisectriz del ángulo $(C'+A', C'+B')$. Si w fuera distinta de $C + C'$, como $C + C'$ es también bisectriz del mismo ángulo, se deduce de (iii) que $w \perp C + C'$. Por tanto, tendríamos que $w = A + B$ pues existe una única recta perpendicular a otra por un punto, en virtud del Teorema I.14.

En consecuencia, $(A + A')(B + B')$ estaría en $A + B$. Pero $A + B$ y $A + A'$ tienen en común A y $A + B$ y $B + B'$ tienen en común B, luego $A = (A + A')(B + B') = B$, una imposibilidad que prueba que $w = C + C'$.

De aquí $C + C'$ pasa por $(A + A')(B + B')$, lo que prueba que 0.4 es consecuencia de las condiciones (i), (ii) e (iii).

Supongamos ahora que 0.4 es válido. Entonces también se satisface 0.7 como se sigue del Teorema I.13. Por tanto, el plano afín es el plano sobre un cuerpo conmutativo ordinario de característica distinta de 2.

Si consideramos un sistema de coordenadas, entonces la ortogonalidad está determinada por la constante **c**. Probemos algunos lemas.

Lema (1,1)

La recta $(y = xs)$ es bisectriz del ángulo $(y = o, x = o)$ si y sólo si $s^2 = -c$.

Demostración

Consideremos el punto (h, hs), $h \neq o$ de la recta $(y = xs)$. La recta perpendicular a $(y = xs)$ que pasa por (h,hs) viene dada por la ecuación $y = xcs^{-1} - hcs^{-1} + hs$, lo que se comprueba por simple cómputo; y esta recta corta al eje $O + Y$ en el punto $(o, hs-hcs^{-1})$, y al eje $O + X$ en el punto $(-hs^2c^{-1}+h, o)$. El punto (h,hs) es el centro de la alineación que intercambia ambos si y sólo si

$$2h = -hs^2c^{-1} + h \qquad y \qquad 2hs = hs - hcs^{-1}$$

y estas dos ecuaciones son ambas equivalentes a que $s^2 = -c$.

Lema (1.2)

La recta $(y = xs)$ es bisectriz del ángulo $(y = o, y = xr)$ si y sólo si $s^2r - 2sc + rc = o$.

Demostración

Consideremos el nuevo punto (h,hs) de la recta $(y = xs)$ y la recta dada por la ecuación $y = xcs^{-1} - hcs^{-1} + hs$ que pasa por el punto (h,hs) y es perpendicular a $(y = xs)$. Esta recta corta al eje $0 + X$ en el punto $(-hs^2c^{-1}+h,\ o)$ y a la recta $(y = xr)$ en el punto $(h(s^2-c)(rs-c)^{-1}\ ,\ hr(s^2-c)(rs-c)^{-1})$, lo que se comprueba por simple cómputo.

El punto (h,hs) es el centro de la alineación que intercambia esos dos puntos si y sólo si,

$$2h = -hs^2c^{-1} + h + h(s^2 - c)(rs - c)^{-1} \quad y$$
$$2hs = hr(s^2 - c)(rs - c)^{-1}$$

La última de estas ecuaciones es claramente equivalente a la ecuación $s^2r - 2sc + rc = o$, y la primera es fácil de comprobar que es satisfecha cuando lo es la segunda.

Lema (1.3)

El eje $0 + Y$ es bisectriz de las rectas $(y = xr)$ e $(y = xs)$ para $r \neq s$ y $rs \neq o$ si y sólo si $r = -s$.

Demostración

En efecto, un punto del eje $0 + Y$ será de la forma (o,h). La recta perpendicular al eje $0 + Y$ por ese punto será $(y = h)$; esta recta corta a $(y = xr)$ en el punto (hr^{-1},h) y a la recta $(y = xs)$ en el punto (hs^{-1},h). Entonces el punto (o,h) será el centro de la alineación que intercambia aquellos dos si, y solamente si, se verifica que

$$2\cdot o = hr^{-1} + hs^{-1} \quad y \quad 2h = h + h$$

La segunda ecuación es una identidad y la primera es equivalente a la igualdad $r = -s$.

Si w y w' son bisectrices distintas del ángulo (u,v) entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad, que u es el eje $O + X$, que v es o bien el eje $O + Y$ o la recta $(y = xr)$, y que w y w' son las rectas $(y = xs)$ e $(y = xs')$ respectivamente.

En el primer caso, si $(y = xs)$ es bisectriz de $(y=o\ ,\ x=o)$, entonces $s^2 = -c$ y si $(y = xs')$ es bisectriz de $(y=o\ ,\ x=o)$, $s'^2=-c$ por $(1,1)$, luego $s^2s'^2 = c^2$ y entonces $ss' = c$, ya que si ss' fuera igual a $-c$ entonces $ss' = ss$ y $s' = s$, con lo que sólo existiría una bisectriz.

En el segundo caso si $(y = xs)$ es bisectriz de $(y=o,y=xr)$, entonces $s^2r - 2sc + rc = o$ y si $(y = xs')$ es bisectriz del mismo ángulo entonces $s'^2r - 2s'c + rc = o$, entonces $r(s^2 + c) = 2sc$ y $r(s'^2 + c) = 2s'c$, de donde,

$$2rs'c\ (s^2 + c) = 2rsc\ (s'^2 + c) \quad y \quad s's^2 - ss'^2 = sc - s'c$$

Por tanto, $s's\ (s - s') = c\ (s - s')$, como $s \neq s'$ resulta que $s's = c$, como queríamos demostrar.

En ambos casos se cumple (iii).

Si los tres puntos **A, B, C,** no **están alineados**, y no forman un triángulo rectángulo, por el Teorema I.7 **podemos** elegir el sistema de coordenadas de tal manera que $A = (s,o)$, $B = (r,o)$ y $C = (o,t)$, donde $rst \neq o$ y $r \neq s$, y tal que el pie de la altura correspondiente a C es $C' = (o,o)$. Entonces $A + C$ viene dada por la ecuación $y = -xts^{-1} + t$ y $B + C$ por $y = -xtr^{-1} + t$.

Las alturas correspondientes a **A** y **B** son

$y = -xrct^{-1} + srct^{-1}$ e $y = -xsct^{-1} + rsct^{-1}$, como se comprueba por simple cálculo, donde **c** es la constante de ortogonalidad que pertenece al sistema de coordenadas considerado.

El pie de la altura correspondiente a **A** es el punto $A' = (r(src-t^2)(r^2c-t^2)^{-1}, trc(s-r)(t^2-r^2c)^{-1})$ y el pie de la altura correspondiente a **B** es el punto

$$B' = (s(src-t^2)(s^2c-t^2)^{-1}, tsc(r-s)(t^2-s^2c)^{-1})$$

De aquí la recta $A' + C'$ viene dada por la ecuación $y = xtc(s - r)(t^2 - src)^{-1}$, y la recta $B' + C'$ viene dada por la ecuación $y = xtc(r - s)(t^2 - src)^{-1}$. Pero $C + C'$ es el eje $O + Y$ y de aquí se deduce de (1,3) que $C + C'$ es la bisectriz del ángulo $(A'+C', B'+C')$, lo que prueba (i).

Procedamos a la prueba de (ii) por la demostración de un lema que no hace uso de O.4.

Lema (1.4)

Si tres puntos **A, B, C,** no están alineados, si **u** es bisectriz del ángulo **(A+B , A+C)** y si **v** es bisectriz de **(B+A , B+C)** entonces **u** y **v** no son paralelas ni perpendiculares.

Demostración

Supongamos primeramente que **u** ∥ **v**. Entonces hay una y sólo una recta **w** por **C** que es ortogonal a ambas **u** y **v**. Se sigue por la definición de bisectriz que **w** no es paralela a **A + B**, que **w** corta a **A + B** en un punto **W** y que **uw** es el centro de la alineación que intercambia **W** y **C**. Como dicho centro es único, deducimos que **uw = vw**, lo que contradice el supuesto paralelismo de **u** y **v**, puesto que **u** y **v** son ciertamente distintas.

Supongamos que **u** ⊥ **v**. Entonces **u(B + C)** es un punto **B'** bien determinado y **uv** es el centro de la alineación que intercambia **A** y **B'**; y **v(A + C)** es un punto **A'** bien determinado y **uv** es el centro de la alineación que intercambia **B** y **A'**.

En consecuencia, **A, A', B', B** forman un cuadrilátero tal que una diagonal biseca a la otra. Puesto que hay un solo punto **X** en la recta **B + uv** tal que **uv** es centro de la alineación que intercambia **B** y **X**, se sigue del corolario I.2 que este cuadrilátero es un paralelogramo, lo que es imposible puesto que **A + A'** y **B + B'** son dos rectas distintas que se cortan en **C**. Esto completa la demostración del lema.

Volvemos ahora a la demostración del hecho que (ii) es consecuencia de 0.4.

Si los tres puntos **A**, **B**, **C**, no están alineados, si **u** es - una bisectriz del ángulo (**A+B** , **A+C**) y **v** una bisectriz del ángulo - (**B+A** , **B+C**) (ver fig. 15), entonces notemos por **a** la recta unívocamente determinada que pasa por **A** y es perpendicular a **u**, y por **b** la

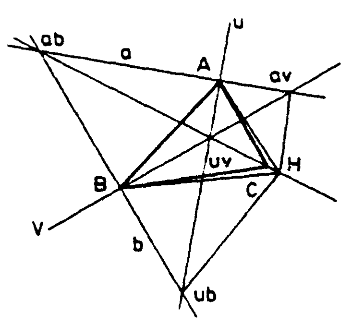

FIG.15

recta unívocamente determinada que pasa por **B** y es perpendicular a **v**. Deducimos de (1.4) que las rectas **u** y **b** no son paralelas, si lo fueran **v** sería perpendicular a **u**, lo que no es; y por la misma ra-- zón, **v** y **a** no son paralelas.

Las rectas **a** y **b** no son paralelas puesto que **u** y **v** no lo - son. Entonces, **ab**, **av** y **bu** son puntos que determinan un triángulo. Dos de sus alturas son **u** y **v**, la tercera es una recta **H + ab** con -- pie **H** de la recta **bu + av**. Es consecuencia de 0.4 que las tres alturas pasan por el mismo punto denominado **uv**. Pero se sigue de la propiedad (i) que hemos verificado, que **u** es una bisectriz del ángulo (**A+B** , **A+H**), **v** una bisectriz del ángulo (**B+A** , **B+H**) y **ab + H** es una bisectriz del ángulo (**H+B** , **H+A**).

Pero **u** es bisectriz de (**A+B** , **A+C**), por tanto, **A + H = A + C**, ya que hay sobre la recta **X + Y** sólo un punto **Z** tal que **Y** es el centro de la alineación que intercambia **X** y **Z**; similarmente **B** + **H** = = **B** + **C**. De aquí resulta que **H** = **C**, lo que muestra que la recta -- **ab** + **H** = **C** + **uv** es una bisectriz del ángulo (**C+A** , **C+B**), como queríamos demostrar.

De la demostración, en particular de los lemas (1.1) y -- (1.2) es fácil deducir el siguiente hecho:

Corolario I.7

Si 0.4 es satisfecho. entonces la condición siguiente es - necesaria y suficiente para la existencia de bisectrices de cualquier ángulo

(iv) Si **c** es la constante de ortogonalidad en algún sistema de -- coordenadas, entonces **-c** es un cuadrado y la suma de algunos pares de cuadrados es un cuadrado.

Demostración

Si existen bisectrices decualquier ángulo, existe la bisectriz del ángulo recto determinado por tres puntos no alineados, **A**, **B**, **C** tales que **A** + **B** $\perp$ **A** + **C**. Sin pérdida de generalidad podemos elegir un sistema de coordenadas tal que **A** = (o,o), **B** = (o,1) y C = (1,o), entonces **A** + **B** $\equiv$ (x = o), **A** + **C** $\equiv$ (y = o), y en el que - la constante de ortogonalidad es c. Entonces si la bisectriz del - ángulo es la recta dada por la ecuación **y** = **xs**, resulta de (1.1) -- que $-c = s^2$.

Supongamos ahora que $A + B$ y $A + C$ no son perpendiculares, por análoga discusión resulta que si $A + C \equiv (y = o)$ y $A + B \equiv (y = xr)$, y su bisectriz es $(y = xs)$, se deduce de (1.2) que $s^2r - 2sc + rc = o$, o lo que es lo mismo $s^2r - 2sc - rc + 2rc = o$, o también $r(s^2 - c) = 2c(s - r)$, pero como $-c$ es un cuadrado resulta que

$$s^2 + t^2 = t^2(1 - sr^{-1})\ 2$$

Entonces, para los pares de valores de r y s tales que se cumpla que $(1 - sr^{-1})\ 2$ sea un cuadrado, se verificará el corolario.

Los recíprocos son ciertos a partir de la doble implicación de (1.1) y (1.2).

1.8 LA CONDICION O.6 Y LA TEORIA DE CIRCULOS

Supongamos que en un plano afín ha sido definida una relación de ortogonalidad que satisface 0.1, 0.2, 0.3.

Si D' y D'' son puntos distintos, entonces definimos el círculo con diámetro D'D'' como el lugar de los puntos de intersección de las rectas perpendiculares trazadas por D' y D''. Consiste, por tanto, en los puntos D', D'' y todos los puntos P para los cuales D' + P $\perp$ D'' + P.

El centro Z de la alineación que intercambia D' y D'', puede ser llamado centro de este círculo, y los puntos Q' $\neq$ Q'' del círculo pueden ser llamados opuestos si Z, Q', Q'' están alineados.

Este es claramente el caso si los puntos D', Q', D'' y Q'' forman un rectángulo y también si Q' + Q'' = D' + D''. Esto lleva a la cuestión de si todo par de puntos opuestos determina un diámetro, esto es, si el círculo con diámetro Q'Q'' es siempre igual al círculo de diámetro D'D''.

Es evidente que la condición 0.6 es necesaria y suficiente para asegurar esta igualdad.

Supongamos ahora que o.6 es satisfecha por la relación de ortogonalidad que consideramos, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad, que el centro Z del círculo es el origen (o,o) de nuestro sistema de coordenadas. Esto implica que D' = (r,s) $\neq$ (o,o) y D'' = (-r,-s). Si la constante de ortogonalidad perteneciente a nuestro sistema de coordenadas es c, entonces deducimos de (2.5) de 1.5 y del Teorema I.13 que el punto (x,y) pertenece al círculo dediámetro D'D'' si y sólo si

$$y^2 - cx^2 = s^2 - cr^2$$

ya que si se verifica 0.6 se verifica 0.7, por el Teorema I.13, y - aplicando el resultado (2.5) de 1.5, resulta la ecuación anterior.

Debería ser señalado, sim embargo, que los postulados 0.1 a 0.4 no aseguran la existencia de rotaciones que transformen un - cierto haz de rectas paralelas en otro haz de rectas paralelas pre designado, como puede verse en el siguiente ejemplo:

El plano es el plano afín sobre el cuerpo de los números racionales y la constante de ortogonalidad para un sistema elegido es -1. El círculo dado por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ tiene como centro el origen y contiene a los puntos opuestos $(\pm 1,o)$. Pero no contiene ningún punto de la recta $(y = x \cdot 2)$ puesto que 5 no es un cuadrado; y por tanto, no existe ninguna rotación alrededor del — origen que transforme el eje $O + X$ en la recta $(y = x \cdot 2)$ y tampoco una reflexión con respecto a una recta a elegir que intercambie — estas dos rectas.

1.9 LA CONMUTATIVIDAD DEL CUERPO BASE

Vamos a obtener unos resultados que muestran la relación entre la conmutatividad del cuerpo base y el Teorema de Pappus.

TEOREMA I.18

En las condiciones del Teorema I.13 si se verifica 0.4 - entonces se cumple el Teorema de Pappus.

Demostración

Sean dos rectas de nuestro plano, que sin pérdida de generalidad pueden ser consideradas como la $(y = o)$ y la recta — $(y = xm + n)$. Consideramos sobre la primera recta tres puntos, -- $A = (o,o)$, $B = (b,o)$ y $C = (c,o)$, y sobre la segunda un punto $A' = (a_1,a_2)$. (Ver fig. 16).

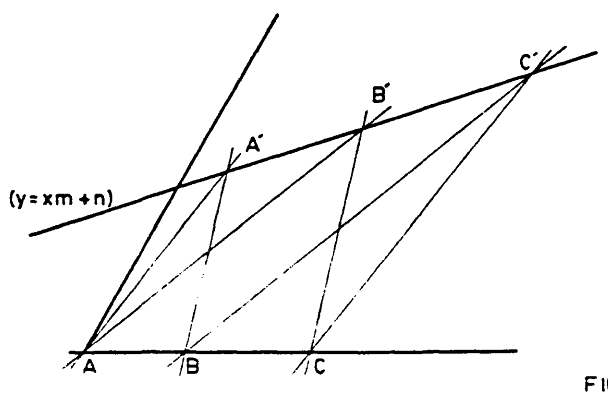

FIG.16

Trataremos de demostrar a partir de las hipótesis que si por C trazamos las rectas paralelas a A + A' y B + A' que cortan a la recta ($y = xm + n$) en los puntos C' y B' respectivamente, entonces las rectas A + B' y B + C' son paralelas.

Pues bien, si se verifica 0.4 el sistema numérico cartesiano F de nuestro plano afín es un cuerpo conmutativo y a partir de ahí calcularemos las ecuaciones de las rectas mencionadas.

La recta A + A' ≡ ($y = xa_2a_1^{-1}$), entonces la recta C + C' que es paralela a la anterior y contiene a C, vendrá definida por la ecuación $y = xa_2a_1^{-1} - ca_2a_1^{-1}$. De aquí C' es el punto de intersección de las rectas ($y = xm + n$) e ($y = xa_2a_1^{-1} - ca_2a_1^{-1}$), y resulta que $xm + n = xa_2a_1^{-1} - ca_2a_1^{-1}$ o también

$$x\,(m - a_2a_1^{-1}) = -n - ca_2a_1^{-1}$$

con lo que las coordenadas de C' son

$$x = (-n - ca_2a_1^{-1})(m - a_2a_1^{-1})^{-1},\quad y = (-n - ca_2a_1^{-1})(m - a_2a_1^{-1})^{-1}m + n$$

La recta B + A' viene dada por la ecuación

$$y = x\,(-a_2)\,(b - a_1)^{-1} - a_1a_2\,(b - a_1)^{-1} + a_2$$

y la ecuación de la recta B' + C, que es paralela a la anterior y contiene a C viene dada por la ecuación

$$y = x\,(-a_2)(b - a_1)^{-1} - c\,(-a_2)\,(b - a_1)^{-1}$$

lo que se comprueba por simple cómputo. Entonces B' es la intersección de las rectas ($y = xm + n$) e($y = x(-a_2)(b-a_1)^{-1} - c(-a_2)(b-a_1)^{-1}$) y resulta que

$$xm + n = x\,(-a_2)\,(b - a_1)^{-1} - c\,(-a_2)\,(b - a_1)^{-1}$$

$$x\ (m + a_2(b - a_1)^{-1}) = -n - c\ (-a_2)\ (b - a_1)^{-1}$$

con lo que las coordenadas de B' son

$$x = (-n - c\ (-a_2)(b - a_1)^{-1})(m + a_2(b - a_1)^{-1})^{-1}$$

$$y = (-n - c\ (-a_2)\ (b - a_1)^{-1})(m + a_2\ (b - a_1)^{-1})^{-1} m + n$$

Veamos ahora la ecuación de la recta A + B' que es

$$y = x\ (m + n(m + a_2(b - a_1)^{-1})(-n - c(-a_2)(b - a_1)^{-1})^{-1})$$

y la pendiente de la recta B + C' será

$$((-n - ca_2a_1^{-1})(m - a_2a_1^{-1})^{-1} m + n)((-n - ca_2a_1^{-1})(m - a_2a_1^{-1})^{-1} - b)^{-1}$$

Comprobemos que las pendientes de las dos rectas son iguales.

La pendiente de A + B' es

$$m + \frac{nm + \dfrac{n\,a_2}{b - a_1}}{-n - \dfrac{c(-a_2)}{b - a_1}} = m + \frac{n\,m(b - a_1) + n\,a_2}{-n(b - a_1) - c(-a_2)} =$$

$$= \frac{-m\,n(b - a_1) + m\,c\,a_2 + n\,m\,(b - a_1) + n\,a_2}{-n\,(b - a_1) + c\,a_2} = \frac{a_2(mc + n)}{-nb + na_1 + c\,a_2}$$

La pendiente de $B + C'$ es

$$\frac{\dfrac{-n-\dfrac{c\,a_2}{a_1}}{m-\dfrac{a_2}{a_1}}\,m+n}{\dfrac{-n-\dfrac{c\,a_2}{a_1}}{m-\dfrac{a_2}{a_1}}-b} = \frac{\dfrac{-na_1-ca_2}{ma_1-a_2}\,m+n}{\dfrac{-na_1-ca_2}{ma_1-a_2}-b} =$$

$$= \frac{(-na_1-ca_2)\,m+n\,(ma_1-a_2)}{(-na_1-ca_2)-b(ma_1-a_2)} = \frac{a_2(-cm-n)}{-na_1-c\,a_2-b(ma_1-a_2)} =$$

$$= \frac{a_2(-cm-n)}{-na_1-ca_2-b(-n)} = \frac{a_2(-cm-n)}{-na_1-ca_2+bn}$$

que es evidentemente igual a la anterior.

TEOREMA I.19

Si se verifica el Teorema de Pappus en el plano sobre un sistema cartesiano **F** que es un cuerpo, entonces este cuerpo es conmutativo.

Demostración

Sean a y b dos elementos de **F** distintos de o, pues si no la demostración sería trivial, y sea B' el punto de coordenadas ---

(a,b) (Ver fig. 17). Entonces O + B' ≡ ($y = xba^{-1}$) y B + C' que

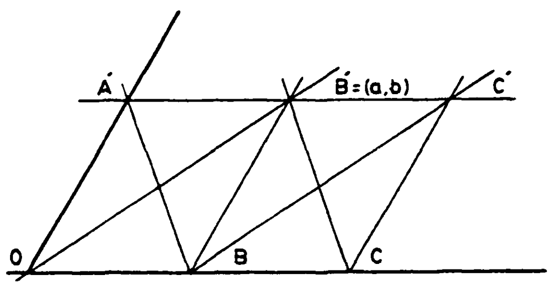

FIG.17

es paralela a ella por construcción, es la recta ($y = xba^{-1} - aba^{-1}$). Luego C' intersección de ésta última y la recta ($y = b$) tendrá como abscisa el valor de x que satisfaga la ecuación $b = xba^{-1} - aba^{-1}$ lo que implica que $x = bab^{-1} + a$.

Por otra parte, la recta A' + B ≡ ($y = xa^{-1}(-b) + b$), -- luego la recta B' + C paralela a ella por B' tendrá la forma ---- ($y = xa^{-1}(-b) + 2b$). El punto C intersección de ésta última con - la recta ($y = o$) será el que tenga como abscisa el valor de x que satisfaga la ecuación $o = xa^{-1}(-b) + 2b$, y entonces $x = 2a$, ya que $2aa^{-1}(-b) + 2b = 2(-b) + 2b = (-b) + (-b) + b + b = o$.

Por tanto, si se verifica el Teorema de Pappus, C y C' - están en una recta paralela a ($x = o$), es decir, tendrán la misma abscisa y, en consecuencia,

$bab^{-1} + a = 2a \Rightarrow bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab$

1.10 EL ORDEN EN EL PLANO

Cón el objeto de dotar de un orden a los puntos del plano nos será preciso dotar previamente de un orden al cuerpo **F** asociado a él, para lo cual es necesario introducir nuevas definiciones, ya que trataremos de caracterizar los elementos de **F** (puntos de una recta) como elementos reales partiendo de elementos naturales.

Si existen tres puntos no alineados que denominaremos O, X, Y y si para cada par de puntos de una recta, elegiremos sin pérdida de generalidad la recta $O + Y$, existe una alineación que los intercambia, entonces existe un punto R centro de la alineación h que intercambia O e Y, distinto de ambos, pues es el único punto fijo. Supongamos asimismo que $Y = 1$ (1 elemento unidad del grupo multiplicativo **F**).

A su vez, existirá el centro R' de una alineación f que intercambia O y R, y el centro R'' de una alineación g que intercambia R y 1, es decir,

$$f: \begin{cases} f(R') = R' \\ f(O) = R \end{cases} \qquad g: \begin{cases} g(R'') = R'' \\ g(R) = 1 \end{cases}$$

Evidentemente, $f \neq g$, y por tanto, $R' \neq R''$, pero además $R'' \neq O$, ya que si h es la alineación tal que $h(R) = R$ y $h(O) = 1$, y g es la anterior con $R'' = O$, resulta:

$hg(O) = h(O) = 1$ luego $hg = t_1$, donde t_1 es tal que $t_1(O) = 1$

$hg(R) = h(1) = O$ luego $hg = -t_R$, donde t_R es tal que $t_R(O) = R$

$hg(1) = h(R) = R$ luego $hg = t_{1,R}$, donde $t_{1,R}$ es tal que $t_{1,R}(1) = R$

entonces, $t_1 = -t_R = t_{1,R} = \tau$

y resulta que $-t_R\, t_{1,R}\, t_1 = 1$ o $t_{1,R}\, t_1 = t_R$, $\tau^2 = \tau$, $\tau = 1$
lo que es imposible pues $0 \neq 1$.

Por análogo razonamiento, $R' \neq 1$. En consecuencia, existen al menos cinco puntos distintos en nuestra recta. Por otra parte, puesto que $t_1 = hg$, $t_1(1) = A$, con A distinto de 0, 1, R, R' y R''. Que es distinto de 0 y 1 es evidente, veamos que es distinto de los otros tres puntos, para lo cual necesitaremos el siguiente

TEOREMA I.20

R es el centro de la alineación que intercambia dos puntos A y B si y sólo si $t_{A,R} = t_{R,B}$.

Demostración

Sea R el centro de la alineación f que intercambia los puntos A y B de la recta $0 + 1$ (ver la fig. 18)

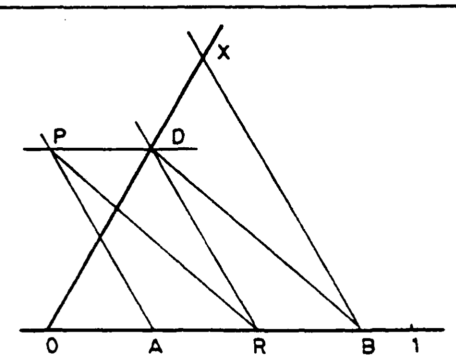

FIG.18

Tracemos por R la paralela a $B + X$ que cortará en un punto D a la recta $O + X$, por D una paralela a $O + 1$, y por A una paralela a $B + X$. Estas dos últimas rectas se cortarán en un cierto punto P, entonces la paralela por D a la recta $P + R$ del paralelogramo ARPD cortará en un punto a $O + 1$ que será el transformado de A por la alineación de centro R, según el Teorema I.5. Pero ese punto no es otro sino B y por la construcción que hemos hecho resulta $t_{A,R} = t_{P,D} = t_{R,B}$.

Supongamos ahora que $t_{A,R} = t_{R,B}$. Haciendo la construcción inversa pero análoga a la anterior, resulta que se cumplen las hipótesis del Teorema I.5, luego R es el centro de la alineación que intercambia A y B.

Según esto $A \neq R$ en nuestra recta, ya que $2t_R = t_1$ y $2t_1 = t_A$, entonces $4t_R = t_A$.

Como $t_R(0) = R$ y $t_A(0) = A$, resulta $A \neq R$ y, análogamente para R' y R'', ya que

$2t_{R'} = t_R$; $4t_{R'} = t_1$; $8t_{R'} = t_A$, y además

$t_R = t_{R,1}$; $2t_{R'} = 2t_{R,R''}$, luego $t_R, t_{R'}(-t_{R,R''})(t_{R,R''}) = 1$ y

$t_{R'}(-t_{R,R''})t_{R'}(-t_{R,R''}) = 1$; $t_{R'}(-t_{R,R''}) = 1$; $t_{R'} = t_{R,R''} \neq t_A$.

A la vista de lo anterior, podemos dar la siguiente

Definición I.4

Dada la traslación t_1 ($t_1(0) = 1$) definimos elemento entero positivo (negativo) de F a aquel elemento m $(-m)$ de F tal que $m = mt_1(0)$ $(-m = m(-t_1(0)))$, con m perteneciente a los números naturales.

Con esta definición se ordenan los elementos enteros de F trasladando el orden de N de la siguiente manera:

a) Si m, n son elementos enteros positivos de F $m \leqslant n$ si y sólo si $m \leqslant n$ en N, siendo $m = mt_1(0)$ y $n = nt_1(0)$,

b) Si $-m$, $-n$ son elementos enteros negativos de F, $-m \leqslant -n$ si y sólo si $n \leqslant m$ en N, siendo $-m = m(-t_1(0))$ y $-n = n(-t_1(0))$.

c) Cualquier elemento entero negativo es menor que cualquier entero positivo.

Hemos visto por otra parte, que los centros R, R', R'' de las alineaciones h, f, g, respectivamente, son tales que

$$2t_R = t_1, \qquad 4t_{R'} = 4t_{R,R''} = t_1$$

Si consideramos ahora las alineaciones

$$f_1:\begin{cases} f_1(R_1) = R_1 \\ f_1(0) = R' \end{cases}; \; f_2:\begin{cases} f_2(R_2) = R_2 \\ f_2(R') = R \end{cases}; \; f_3:\begin{cases} f_3(R_3) = R_3 \\ f_3(R) = R'' \end{cases}; f_4:\begin{cases} f_4(R_4) = R_4 \\ f_4(R'') = 1 \end{cases}$$

resulta, aplicando reiteradamente el Teorema I.19 que, por ejemplo,

$t_{R_3} = t_{R,R_3} t_R = t_{R_1} t_{R'}$ entonces

$$8t_{R_3} = 8(t_{R_1} t_R) = 8t_{R_1} 8t_R = 8t_{R_1} 4(2t_R) = t_1 4t_1 = 5t_1$$

Y, análogamente, considerando la alineación que intercambia 1 y 2, resultaría que si su centro es Q entonces, $2t_Q = 3t_1$.

Todo esto nos sugiere la siguiente

Definición I.5

Dada la traslación t_1 ($t_1(0) = 1$), definimos elemento racional positivo (negativo) $c(F)$ a aquel que verifica la igualdad $nt_c = mt_1$ ($nt_c = m(-t_1)$), siendo n y m números naturales y notaremos $c = m/n$ ($c = -m/n$).

Es evidente que estableciendo la aplicación entre los elementos enteros de F y los racionales de denominador 1 de F, que tienen el mismo numerador entero, dicha aplicación es un isomorfismo y conserva el orden.

Es de señalar, sin embargo, que, hasta ahora, los únicos elementos racionales de F caracterizados son aquellos que tienen como denominador una potencia de 2.

Por otra parte, al objeto de ordenar estos elementos racionales de F y los que obtendremos, trasladaremos la ordenación de Q de la siguiente manera:

a) Si c, d son elementos racionales positivos de F, $c \leqslant d$ si y sólo si, $m/n \leqslant p/q$ en $\mathbb{Q}$, siendo $c = m/n$ y $d = p/q$.

b) Si c y d son elementos racionales negativos de F, $c \leqslant d$ si y sólo si, $m/n \leqslant p/q$ en $\mathbb{Q}$, siendo $c = -m/n$ y $d = -p/q$.

c) Cualquier elemento racional negativo es menor que cualquier -- elemento racional positivo.

Caractericemos ahora los elementos de F inversos de los elementos enteros (se incluyen las potencias de 2).

Si m es un elemento entero de F, sabemos que existe un - elemento $m^{-1} \in F$, tal que $m\,m^{-1} = 1$, y existe un punto en la recta $0 + 1$ que cumple esta igualdad.

En efecto (Ver fig. 19), por el punto (o,m) la única pa-

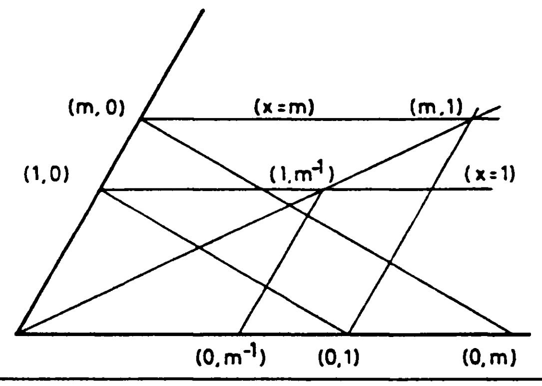

FIG.19

ralela a $1 + 1$ corta a la recta $0 + (1,o)$ en un punto (m,o) y la - recta paralela a $0 + (1,o)$ por (m,o) que no es sino la recta $(x = m)$, cortará a la recta $(y = 1)$ en el punto $(m,1)$. Entonces, la recta $0 + (m,1)$ cortará a la recta $(x = 1)$ en un punto $(1,c)$ tal que --- c por la definición de multiplicación, no es sino m^{-1} y la paralela a $0 + (1,o)$ por $(1,c)$ cortará a $0 + (o,1)$ en el punto de ordenada m^{-1}.

Consecuencia de todo ello es que

$$mt_{m^{-1}} = \underbrace{t_{m^{-1}}t_{m^{-1}}t_{m^{-1}}\cdots\cdots t_{m^{-1}}}_{m} = \underbrace{m^{-1} + m^{-1} + m^{-1} + \dots + m^{-1}}_{m} =$$

$$= m\,m^{-1} = 1$$

Luego, $m\, t_{m^{-1}}(0) = 1$ como $t_1(0) = 1$, resulta que $mt_{m^{-1}} = t_1$ y, por tanto, $m^{-1} = 1/m$, según nuestra definición de elemento racional; y, evidentemente, salvo $m = 1$, $m^{-1} \neq n$ para todo n elemento entero de F, ya que, $n\,mt_{m^{-1}} = nt_1 = t_n$.

Por otra parte, existe c perteneciente a F, tal que -- $nt_{m^{-1}} = t_c$ entonces $mt_c = n\,mt_{m^{-1}} = nt_1$, y de aquí $c = n/m$, en la notación adoptada para caracterizar los elementos racionales de F.

Por tanto, hemos caracterizado todos los elementos racionales de F, ya que, dados dos elementos enteros n y m, el elemento racional de F que les corresponde es aquel que cumple que $t_c = nt_{m^{-1}}$, que se corresponde a su vez con el número racional nm^{-1}.

Además, podemos asegurar a la vista de la definición de orden de los elementos racionales de F que F es denso, es decir, - que en todo intervalo entre dos elementos racionales hay otro, y - por tanto, infinitos. Basta, en efecto, ver que si $m/n < p/q$ se - verifica que $m/n < (m+p)/(n+q) < p/q$, lo que es inmediato.

Definición I.6

Llamaremos par de sucesiones monótonas contiguas o de intervalos encajados (a_n, a'_n) a dos sucesiones infinitas de elementos racionales de F

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots\cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots\cdots$$

$$a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \cdots\cdots \leqslant a'_n \leqslant \cdots\cdots$$

tales que

1ª.- La primera es monótona, no decreciente; y la segunda es monótona no creciente.

2ª.- Todo elemento de la primera es menor que el correspondiente - de la segunda, $a_n < a'_n$ para todo n de $\mathbb{N}$.

3ª.- La diferencia $a'_n - a_n$ llega a ser menor que cualquier elemento $\varepsilon > o$, tan pequeño como se quiera, desde un valor de n en adelante.

<u>Definición I.7</u>

Llamaremos elemento de separación o frontera del par de sucesiones o del encaje de intervalos, a todo elemento de F que -- esté contenido en todos ellos.

Existe a lo más un elemento racional contenido en todos los intervalos, ya que si existiesen dos x_1, x_2 y $x_2 > x_1$, ocurriría que $a'_n - a_n \geqslant x_2 - x_1$ para todo n, lo que es contradistorio -- con la condición 3ª.

Pero puede ocurrir que no exista ningún elemento racio-- nal de F contenido en todos los intervalos. Para asegurar que -- existe un elemento de F contenido en todos los intervalos necesita mos el siguiente

AXIOMA V (Cantor)

Dada una sucesión de segmentos encajados A_nB_n en **F**, existe un elemento contenido en todos ellos.

Evidentemente este punto es único, pues si no,no se cumpliría la tercera condición de la definición I.6.

En estas condiciones podemos efectuar la siguiente

Definición I.8

Llamaremos elemento real de **F** al elemento de separación de un par de sucesiones de intervalos encajados.

Evidentemente, este elemento puede ser racional o no. - De esta manera hemos caracterizado todos los elementos de **F** (puntos de una recta). Necesitaremos ahora la siguiente

Definición I.9

Un elemento real **a** de **F** se dice positivo (y se escribe - $a \geqslant o$) si una de las sucesiones que lo define tiene todos sus elementos racionales positivos o iguales a **o** a partir de un cierto -- valor del subíndice.

Esta definición permite establecer un orden total en **F**, escribiendo $a \geqslant b$, si y sólo si, $a - b \geqslant o$.

De esta manera, hemos ordenado los elementos del cuerpo F, que no son otros sino los de la recta $O + 1$. Ahora bien, la caracterización de los puntos del plano como pares de elementos de F se ha efectuado asignando un elemento de F como abscisa o primera coordenada, obtenido al trazar sendas rectas paralelas, una al eje $O + 1$, por el punto dado, y otra a la recta $X + 1$, por el punto de intersección de la anterior con $O + X$ (siendo O, X, 1 los puntos que nos servían para determinar los ejes). Esta última paralela a $X + 1$ corta a $O + 1$ en un punto (elemento de F) que es la abscisa asignada. La ordenada o segunda coordenada del punto se ha obtenido al trazar una paralela a la recta $O + X$ por el punto dado, dicha paralela corta a la recta $O + 1$ en un punto que es la ordenada.

De esta manera podemos dar la siguiente

Definición I.10

Dados dos puntos del plano $A = (a_1,a_2)$ y $B = (b_1,b_2)$ donde a_1, a_2, b_1, b_2 pertenecen a F, diremos que $A < B$ si y sólo si, ocurre que $a_1 < b_1$ o si $a_1 = b_1$ entonces $a_2 < b_2$ en el orden definido en F.

Por otra parte, si suponemos tres puntos (x,y), (x',y') y (x'',y'') de una recta cualquiera, resulta que $(x,y) < (x',y') < (x'',y'')$ si se verifica que $x < x' < x''$, o su inversa, o si $y < y' < y''$, o su inversa, entonces la proyección paralela a un eje de esos puntos sobre el otro nos da los puntos (x,o), (x',o) y (x'',o) o (o,y), (o,y') y (o,y''), entonces o bien $(x,o) < (x',o) < (x'',o)$ si $x < x' < x''$, o $(x,o) > (x',o) > (x'',o)$ si $x > x' > x''$ o $(o,y) < (o,y') < (o,y'')$ si $y < y' < y''$ o $(o,y) > (o,y') > (o,y'')$ si $y > y' > y''$.

En cualquiera de los casos, vemos que se conserva el orden por esta proyección.

Podemos entonces enunciar el siguiente

TEOREMA I.21

El plano sobre el cuerpo **F** está totalmente ordenado.

C A P I T U L O   2

COMPATIBILIDAD E INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS EN EL PLANO

2.0 INTRODUCCION

En este capítulo se estudian la compatibilidad e independencia de los axiomas del plano.

El camino seguido para ello es el clásico en estos casos, es decir, para la compatibilidad se ha elegido un modelo en el que se verifican los cinco axiomas, lo que garantiza la solidaridad -- lógica entre el sistema axiomático y el modelo. Dicho modelo elegido ha sido $\mathbb{R}^2$ (no se podría haber elegido $\mathbb{Q}^2$ pues en éste no se verifica el axioma V). Este modelo, según se demuestra en la primera parte del capítulo, verifica los cinco axiomas, bien entendido que, previamente y según se ha ido necesitando, ha sido necesario efectuar una atribución de significados a los términos indefinidos de nuestra geometría, tales como puntos, rectas, relación binaria de incidencia entre unos y otras, alineaciones, etc.

En lo referente a la demostración de la independencia de cada axioma respecto a los restantes, se ha efectuado de modo -- usual mediante la construcción de modelos en cada caso, en los que se verifican cuatro de los axiomas y no se verifica el axioma cuya independencia se quiere demostrar. De esta manera existe un modelo (el que demuestra la compatibilidad) en el que se verifican los cinco axiomas, y otros, uno para cada uno de los axiomas, en el -- que se verifican cuatro y no el quinto, en consecuencia, ese quinto axioma es independiente de los restantes.

Los modelos han sido construidos con gran dificultad en - la mayoría de los casos, y, en alguno de ellos, tales modelos verifican los axiomas para los que están propuestos por no cumplir las condiciones de las hipótesis de los mismos. Esta técnica es utilizada también por algunos autores de la Bibliografía, como Veblen.

2.1 COMPATIBILIDAD DE LOS AXIOMAS

Los cinco axiomas enunciados en el capítulo 1 no son contradictorios, es decir, no es posible deducir lógicamente de estas proposiciones una proposición y su contraria. Para mostrarlo vamos a construir un sistema de cosas que satisface a todos los axiomas.

Consideremos el dominio de los números reales, y un par de números (x,y) del dominio como un punto, y las ternas (u,v,w) de tres números reales y sus proporcionales como una recta, con la condición de que u y v no sean los dos nulos.

Si la ecuación $ux + vy + w = o$ se satisface, decimos que el punto (x,y) pertenece a la recta (u,v,w). Veamos que se satisfacen los cinco axiomas.

AXIOMA I

Sean dos puntos $A = (a_1,a_2)$ y $B = (b_1,b_2)$ tales que $A \neq B$. Si existe la recta que contiene a ambos, se tendrá que

$$\left.\begin{array}{l} ua_1 + va_2 + w = o \\ ub_1 + vb_2 + w = o \end{array}\right\}$$

Entonces, si

$a_1 = b_1 = o$, se tiene que $A + B \equiv x = o$

$a_2 = b_2 = o$, se tiene que $A + B \equiv y = o$

$a_1 = a_2 = o$, se tiene que $A + B \equiv -(b_2/b_1)x + y = o$

$b_1 = b_2 = o$, se tiene que $A + B \equiv x - (a_1/a_2)y = o$

$a_1b_2 = b_1a_2$, se deduce que $(a_2/a_1) = (b_2/b_1) = k$ y se tiene que -

$$A + B \equiv -kx + y = o$$

En cualquier otro caso

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & w \\ b_1 & b_2 & w \end{pmatrix}$$

Y el sistema tiene solución única con $u = \lambda w$ y $v = \mu w$.

Por otra parte, si dos rectas (u,v,w) y (u',v',w') son - tales que $u/u' = v/v'$, entonces como es bien conocido, o bien --- $u/u' = v/v' = w/w'$ y son la misma recta, o bien, $u/u' = v/v' \neq w/w'$ y entonces, el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ux + vy + w = o \\ u'x + v'y + w' = o \end{array}\right\}$$

no tiene solución, es decir, no hay ningún par (x,y) que satisfaga a ambas ecuaciones, en consecuencia, (u,v,w) y (u',v',w') son paralelas.

AXIOMA II

Es evidente que para todo par de puntos alineados existe otro no alineado con ellos. En efecto, sean dos puntos distintos

$A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, entonces, la recta que los contiene será de la forma $(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - a_1b_2 + a_2b_1 = o$ como se puede comprobar por simple cómputo y, donde $b_2 - a_2 \neq o$ ó $b_1 - a_1 \neq o$.

En el caso de que $b_1 - a_1 \neq o$ los puntos de la recta serán de la forma $(x, (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)^{-1}x + (-a_1b_2 + a_2b_1)(b_1 - a_1)^{-1})$ y cualquier punto de la forma

$$(x + 1, (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)^{-1}x + (-a_1b_2 + a_2b_1)(b_1 - a_1)^{-1})$$

no pertenece a la recta.

AXIOMA III

Para la demostración de la compatibilidad de este axioma demostraremos que se cumple para su forma fuerte, es decir, para - el axioma III b.

Dados dos puntos del plano real cualesquiera $P = (a,b)$ y $Q = (a',b')$ definimos el punto $R = (r_1, r_2)$ de tal manera que --- $r_1 = (a + a')/2$, $r_2 = (b + b')/2$, y la siguiente aplicación entre los puntos del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ f: (x,y) &\longmapsto (2r_1 - x\ ,\ 2r_2 - y) \end{aligned}$$

que evidentemente es biyectiva, por ser $\mathbb{R}$ cuerpo. Pues bien, esta aplicación es una alineación que intercambia P y Q. En efecto:

a) $f \neq 1$, pues $x \neq 2r_1 - x$ e $y \neq 2r_2 - y$

$f^2 = 1$, pues $x = 2r_1 - (2r_1 - x)$ e $y = 2r_2 - (2r_2 - y)$

b) El único punto fijo de f es R, ya que

$$x = 2r_1 - x \Rightarrow \quad x = r_1$$
$$y = 2r_2 - y \Rightarrow \quad y = r_2$$

c) Sea la recta (u,v,w) que está formada por los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación $ux + vy + w = o$. Entonces, como (x,y) se transforma en $(2r_1 - x, 2r_2 - y)$ esta ecuación se transforma en

$$u(2r_1 - x) + v(2r_2 - y) + w = o$$
$$-ux - vy + 2r_1u + 2r_2v + w = 0$$

y la recta $(-u,-v,2r_1u + 2r_2v + w)$ es paralela a la recta --- (u,v,w) por nuestra definición de paralelismo. Luego, nuestra transformación transforma puntos alineados en puntos alineados.

d) Si $P = (x,y)$ y $P^f = (2r_1 - x\ ,\ 2r_2 - y)$ pertenecen a la recta $ux + vy + w = o$, entonces

$$ux + vy + w + u(2r_1 - x) + v(2r_2 - y) + w = o \quad y$$
$$2ur_1 + 2vr_2 + 2w = o$$ y R también pertenece a dicha recta.

Cabe añadir, además, que $f(P) = Q$ y $f(Q) = P$, ya que --

$$f((a,b)) = (a + a' - a,\ b + b' - b) = (a',b')$$
$$f((a',b')) = (a + a' - a',\ b + b' - b') = (a,b)$$

AXIOMA IV

Definiremos una relación entre las rectas del plano de - la siguiente manera. la recta (u,v,w) es ortogonal a la recta ---

(u',v',w') si $uu' + vv' = o$. Esta relación satisface 0.1, 0.2, 0.3, y 0.4. En efecto

0.1 Dada la recta (u,v,w) existe la recta $(-v,u,w)$ que es ortogonal a ella, pues $-uv + vu = o$.

0.2 Es trivial, pues la condición dada es simétrica.

0.3 Si las rectas (u,v,w) y (u',v',w') son ortogonales, entonces $uu' + vv' = o$. Si (u'',v'',w'') es paralela a (u,v,w) entonces $u/u'' = v/v'' = k$ y $u = ku''$, $v = kv''$.

Por tanto, $ku''u' + kv''v' = o$ y $u''u' + v''v' = o$, luego (u'',v'',w'') es ortogonal a (u',v',w').

Por otra parte, si (u'',v'',w'') es ortogonal a (u',v',w') entonces $u''u' + v''v' = o$ y $u''/v'' = -v'/u'$.

Como $uu' + vv' = o$ y $u/v = -v'/u'$, resulta que $u''/v'' = u/v$ y $u/u'' = v/v''$, con lo que las rectas (u,v,w) y (u'',v'',w'') son paralelas.

0.4 Consideremos el triángulo determinado por los puntos $A = (a_1,a_2)$ $B = (b_1,b_2)$ y $C = (c_1,c_2)$. Entonces, la recta $A + B$ sería la determinada por los puntos que satisfacen la ecuación

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - a_1(b_2 - a_2) + a_2(b_1 - a_1) = o$$

y la altura trazada por C al lado $A + B$

$$(b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)y - c_1(b_1 - a_1) - c_2(b_2 - a_2) = o$$

lo que se comprueba inmediatamente por simple cómputo.

La recta $A + C$ sería la formada por los puntos que satisfacen la ecuación

$$(a_2 - c_2)x - (a_1 - c_1)y - c_1(a_2 - c_2) + c_2(a_1 - c_1) = o$$

y la altura trazada por B al lado A + C

$$(a_1 - c_1)x + (a_2 - c_2)y - b_1(a_1 - c_1) - b_2(a_2 - c_2) = o$$

Las dos alturas calculadas no son paralelas, pues si lo fueran los lados A + B y A + C también lo serían.

La recta B + C sería la formada por los puntos que satis facen la ecuación

$$(b_2 - c_2)x - (b_1 - c_1)y - c_1(b_2 - c_2) + c_2(b_1 - c_1) = o$$

y la altura por A al lado B + C

$$(b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2)y - a_1(b_1 - c_1) - a_2(b_2 - c_2) = o$$

Esta última ecuación no es sino la suma de las ecuaciones correspondientes a las otras dos alturas calculadas anteriormente, luego, las tres alturas concurren en un mismo punto, - como queríamos demostrar.

AXIOMA V

Se cumple trivialmente pues el cuerpo de los números reales es completo.

2.2 INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS

Con el objeto de mostrar la independencia de los axiomas trataremos de encontrar unos modelos de geometría donde se verifiquen cuatro de ellos y no se verifique el quinto. A tales modelos los designaremos por **M** I, **M** II, **M** III, **M** IV y **M** V, entendiendo aquí por **M** I el modelo en donde se verifican todos los axiomas menos el primero, por **M** II el modelo donde se verifican todos menos el segundo, y así sucesivamente.

Independencia del axioma I

Nuestro modelo **M** I consiste en el conjunto de dos rectas r_1 y r_2 y dos puntos P_1 y P_2, tales que P_1 está situado en ambas rectas y P_2 en ninguna (ver fig. 20)

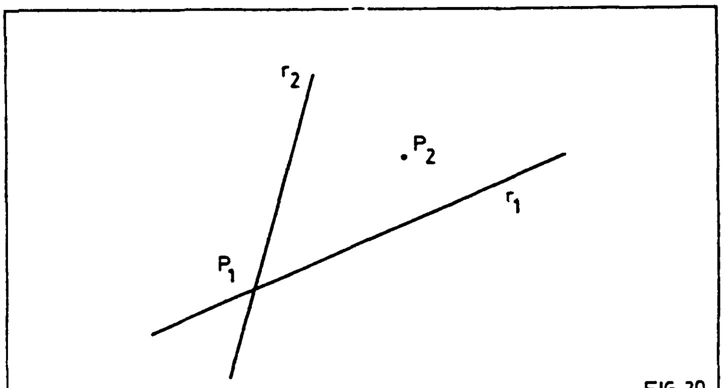

FIG. 20

Evidentemente no se verifica el axioma I, pues no existe una recta que contenga a P_1 y a P_2, sin embargo, se verifican:

AXIOMAS II y III: Se verifican por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

AXIOMA IV: Definimos la relación entre las rectas r_1 y r_2 de la siguiente manera

$$p: \begin{cases} p(r_1) = r_2 \\ p(r_2) = r_1 \end{cases}$$

que verifica 0.1 y 0.2 y, por no cumplirse las condiciones de las hipótesis 0.3 y 0.4.

AXIOMA V: Se verifica por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

Independencia del axioma II

Nuestro modelo **M II** consiste en el conjunto de rectas formado por la recta real r_1 y una recta $r_2 \neq r_1$ que sólo tiene un -- punto que es el de la intersección con r_1; el conjunto de puntos - evidentemente es el de la recta real r_1.

Evidentemente, puesto que r_2 no tiene ningún punto que - no sea el de su intersección con r_1 no se verifica el axioma II. Veamos que se verifican los restantes.

AXIOMA I: Se verifica trivialmente , pues todo par de puntos está en una única recta dada r_1

AXIOMA III: Dados dos puntos cualesquiera de r_1, P y Q, definimos el punto $R = (P + Q)/2$ y definimos la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de la forma $f: X \longmapsto 2R - X$, que es biyectiva, distinta de la identidad, $f^2 = 1$, su único punto fijo es R, transforma la recta r_1 en ella misma e intercambia P y Q. Luego se verifica el axioma III.

AXIOMA IV: Definimos la relación entre las rectas r_1 y r_2 de la siguiente manera:

$$p: \begin{cases} p(r_1) = r_2 \\ p(r_2) = r_1 \end{cases}$$

y esta relación verifica 0.1 y 0.2 y, por no cumplir las condiciones de las hipótesis, 0.3 y 0.4.

AXIOMA V: Se verifica trivialmente pues la recta r_1 es continua.

<u>**Independencia del axioma III**</u>

Nuestro modelo **M III** consiste en cuatro puntos A,B,C,D, y las rectas A + B, A + C, A + D, B + C, B + D y C + D.(Ver fig. 21)

En este modelo no se verifica el axioma III, pues si tratamos de definir una aplicación biyectiva entre nuestros puntos y tomamos dos cualesquiera de ellos que tal aplicación intercambie, resulta que los otros dos,o son los dos puntos fijos, o también se intercambiarían, no habiendo punto fijo. En ambos casos tal aplicación no cumpliría la definición de alineación. Veamos que se verifican los restantes axiomas.

AXIOMA I: Se verifica trivialmente pues la propia definición de las rectas del modelo asegura que para todo par de puntos distintos existe una única recta que los contiene.

AXIOMA II: Es evidente que para cada par de puntos alineados existe otro no alineado con ellos.

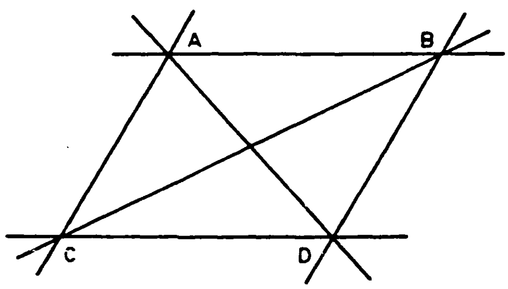

FIG. 21

AXIOMA IV: Definimos la siguiente relación p entre las rectas:

p(A + B) = A + C ; p(A + C) = A + B ; p(A + B) = B + D

p(B + D) = A + B ; p(C + D) = A + C ; p(A + C) = C + D

p(C + D) = B + D ; p (B + D) = C + D; p(A + D) = B + C

p(B + C) = A + D

Entonces se verifican:

0.1 Pues para cualquier recta existe una ortogonal a ella.

0.2 La propia definición es simétrica.

0.3 También por la propia definición, si una recta es ortogonal a otra, se verifica que es condición necesaria y suficiente que una tercera sea ortogonal a la primera para que sea paralela a la segunda.

0.4 En cualquiera de los triángulos **ABC**, **ABD**, **BCD** y **ACD** los pun--

tos de intersección de las alturas son A, B, C y D, respectivamente.

AXIOMA V: Se verifica por no cumplirse las condiciones de las hipó tesis del axioma.

Independencia del axioma IV

Nuestro modelo M IV consiste en una única recta sin puntos. Evidentemente, no se verifica el axioma IV.

Los axiomas I, II, III y V se verifican por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

Independencia del axioma V

Nuestro modelo M V consiste en el plano racional Q x Q, donde no se verifica, evidentemente, el axioma V.

Los puntos serán los pares (x,y) de Q x Q y las ternas (u,v,w) de números racionales y sus proporcionales, se considerarán como rectas, con la condición de que u y v no sean ambos nulos. Si la ecuación $ux + vy + w = o$ se satisface por el par (x,y), diremos que este punto pertenece a la recta (u,v,w). Veamos que se verifican los restantes axiomas.

AXIOMA I: Dados dos puntos cualesquiera $A = (a_1,a_2)$ y $B = (b_1,b_2)$ existe la recta que los contiene y es única, de la forma

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - a_1b_2 + a_2b_1 = o$$

Los puntos de esta recta son de la forma

$(x,\ (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)^{-1}x + (-a_1b_2 + a_2b_1)(b_1 - a_1)^{-1})$ si $b_1 \neq a_1$

$((b_1 - a_1)(b_2 - a_2)^{-1}y + (a_1b_2 - a_2b_1)(b_2 - a_2)^{-1},\ y)$ si $b_2 \neq a_2$.

En ambos casos dichos puntos pertenecen a $Q \times Q$.

AXIOMA II: Es evidente que se cumple, pues dados dos puntos cualesquiera $A = (a_1,a_2)$ y $B = (b_1,b_2)$ distintos, por un razonamiento análogo al anterior, los puntos

$(x + 1,\ (b_2 - a_2)(b_1 - a_1)^{-1}x + (-a_1b_2 + a_2b_1)(b_1 - a_1)^{-1})$ o

$((b_1 - a_1)(b_2 - a_2)^{-1}y + (a_1b_2 - a_2b_1)(b_2 - a_2)^{-1},\ y + 1)$ en los casos descritos anteriormente, resulta que no pertenecen a la recta $A + B$.

AXIOMA III: Dados dos puntos cualesquiera del plano racional $P = (a,b)$ y $Q = (a',b')$ definimos el punto $R = (r_1r_2)$ tal que $r_1 = (a + a')/2$, $r_2 = (b + b')/2$ y la siguiente aplicación entre los puntos del plano

$$\begin{aligned} Q \times Q &\longrightarrow Q \times Q \\ f: (x,y) &\longmapsto (2r_1 - x,\ 2r_2 - y) \end{aligned}$$

y se demuestra de forma análoga a como se hizo en 2.1 que esta aplicación es una alineación que intercambia P y Q .

AXIOMA IV: Definimos una relación entre las rectas del plano de la siguiente manera, la recta (u,v,w) es ortogonal a la recta (u',v',w') si $uu' + vv' = o$. Esta relación satisface 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

Su demostración es análoga a la efectuada en 2.1 para el plano real, teniendo en cuenta que aquí los elementos son números racionales.

C A P I T U L O 3

EL ESPACIO AFIN. COORDENADAS, ORTOGONALIDAD Y ORDEN

3.0 INTRODUCCION

En este capítulo se lleva a cabo la extensión del plano al espacio de tres dimensiones. Nos encontramos con tres tipos de elementos indefinidos , puntos, rectas y planos, y las relaciones binarias de incidencias entre puntos y rectas, y puntos y planos.

Se define, en primer lugar, el paralelismo entre rectas, entre planos, y entre rectas y planos, e inmediatamente después se enuncian los axiomas de incidencia que son los cinco primeros. Intencionadamente estos axiomas han sido enunciados en su forma más débil por dos motivos, el primero porque es una de las características del presente trabajo, y el segundo, porque así se facilita la demostración de la independencia de los axiomas, sobre todo del primero de ellos. Quizás se note a faltar el axioma de las paralelas, y el axioma de incidencia, que afirma la pertenencia a un plano de todos los puntos de una recta si dos puntos de ésta pertenecen a aquel. Como se despuestra posteriormente, tales axiomas son consecuencias de los axiomas VI (existencia de alineaciones) y VII (ortogonalidad).

Es de observar, asimismo, que, con el objeto de que esta axiomática del espacio comprenda,al restringirla a cada plano,la axiomática presentada en el capítulo 1, la definición de alineación en el espacio exige, además, que una recta y su transformada sean coplanarias.

Pues bien, tras la obtención de unos primeros resultados geométricos que permiten efectuar la construcción del punto transformado de otro por una alineación, y la demostración de que por un punto existe un único plano paralelo a otro, se definen las —

traslaciones, y se demuestra que cada traslación es el producto - de dos alineaciones.

La introducción del axioma VI en su forma fuerte directamente, y no como se hizo en el plano, se debe precisamente, a la - necesidad de la demostración de la existencia y unicidad del plano que pasa por un punto y es paralelo a otro.

En este momento, se procede a la introducción de coordenadas de una forma similar a como se hizo en el plano, pero si bien la adición entre los elementos del sistema F de donde se toman las coordenadas (que no es otro que el conjunto de puntos de una recta) se efectúa de forma análoga a la del plano, en el espacio, la definición de producto reviste una mayor complicación. De todas - formas se llega al importante resultado expuesto en el Teorema — III.8 que asegura, en presencia de los axiomas I al VI, una cierta afinización del espacio, de manera que el dominio de los elementos constitutivos de dicho espacio es un sistema numérico cartesiano -- análogo al sistema elegido en el plano.

Posteriormente, se llega a la demostración de las propiedades de distributividad por la derecha de F y de que su característica es distinta de 2, estudiando únicamente un plano del espacio y remitiéndonos a los resultados obtenidos en el capítulo 1.

Con el objeto de dotar a nuestro sistema numérico F de la estructura de cuerpo y definir una relación de ortogonalidad entre rectas y planos, es necesario introducir el axioma VII que asegura la existencia de una relación de ortogonalidad entre las rectas de cada plano del espacio, que verifica una serie de propiedades que son las mismas que en el plano. Esto nos permite dotar al sistema F de la estructura de cuerpo conmutativo.

En esta situación, se define una nueva relación de ortogo nalidad en un plano del espacio (el que contiene a la recta que ha servido para la definición de F y un segundo eje de ordenadas), que se extiende de forma natural a la ortogonalidad entre rectas en el espacio y entre rectas y planos del espacio.

Para finalizar este capítulo se ordena el espacio igual que se hizo con el plano, completándolo previamente mediante la introducción del axioma VIII que completa el cuerpo base, y posteriormente, dando una relación de orden para puntos alineados que se conserva o se invierte en las proyecciones paralelas.

3.1 ALINEACIONES

Sean tres conjuntos, uno de "puntos", otro de "rectas", y otro de "planos" y dos relaciones binarias, una entre un punto dado, P y una recta dada l, "P está (situado) sobre l" ($P \in l$); - y otra entre un punto dado P y un plano dado α, "P está (situado) sobre α" ($P \in \alpha$). Estas relaciones pueden ser verdaderas o falsas para los pares P y l, P y α.

Todos los axiomas pueden ser expresados en términos de estas relaciones. Sin embargo, también utilizaremos expresiones - equivalentes al objeto de aligerar el lenguaje, como "P pertenece a l", "P pertenece a α", o "l contiene a P", "α contiene a P", o, "l pasa por P".

Podemos decir que l y m se encuentran en P si P está a la vez sobre l y sobre m, y si P es el único punto sobre l y m, diremos que "l y m se cortan en P" o que "P es la intersección de l y m".

Definición III.1

Sean l y m dos rectas cuyos puntos están en un mismo -- plano, tales que $l = m$ o bien ningún punto P está a la vez sobre l y m; entonces, decimos que l y m son paralelas, y escribimos $l \parallel m$.

Si l y m no son paralelas y todos sus puntos pertenecen a un mismo plano, existe al menos un punto P a la vez sobre l y m.

Definición III. 2

Sean α y β dos planos tales que $\alpha = \beta$, o bien, que ningún punto P está a la vez sobre α y β, entonces decimos que α y β son paralelos, y escribimos $\alpha \parallel \beta$.

Si α no es paralelo a β, entonces existe al menos un punto a la vez sobre α y β.

Definición III.3

Sean m y α una recta y un plano tales que todos los puntos de m están en α o ningún punto de m pertenece a α, entonces decimos que m es paralela a α y escribimos $m \parallel \alpha$.

AXIOMA I

Si existen dos puntos distintos P y Q, existe una y sólo una recta l tal que P está sobre l y Q está sobre l. Escribimos $l = P + Q$, y decimos que P y Q están alineados.

Si l no es paralela a m y está en el mismo plano, existe exactamente un punto P a la vez sobre l y m. En efecto, si existieran dos puntos el axioma I llevaría a $l = m$ y, por tanto, $l \parallel m$.

AXIOMA II

Si existen dos puntos alineados P y Q, existe un punto M no alineado con ellos.

AXIOMA III

Si existen tres puntos P, Q y M no alineados, y alineados dos a dos, existe un único plano α que los contiene. Escribimos $\alpha = P + Q + M$, y decimos que P, Q y M son coplanarios.

AXIOMA IV

Si dos planos α y β tienen un punto común P, tienen al menos otro punto común Q.

AXIOMA V

Si existen tres puntos P, Q, M no alineados, y alineados dos a dos, existe un punto T no coplanario con ellos.

Hipótesis (H)

Si existen tres puntos P, Q, M no alineados y alineados dos a dos, existe una y sólo una recta que pasa por uno de ellos y es paralela a la recta determinada por los otros dos.

Indicamos este axioma con el nombre de "Hipótesis" para distinguirlo de los otros, ya que se demostrará en el Teorema III.14 que depende lógicamente de los restantes axiomas.

Definición III.4

Una aplicación biyectiva f entre los puntos del espacio se denomina alineación respecto a un punto R si

a) $f^2 = 1$; $f \neq 1$

b) $R^f = R$ (R es el único punto fijo de f)

c) Si P, Q, T son puntos alineados distintos, P^f, Q^f, T^f están alineados y ambas rectas son coplanarias.

d) Para todo P del espacio $R \in P + P^f$.

AXIOMA VI

Para cada par de puntos distintos y alineados del espacio existe una alineación que los intercambia.

Corolario III.1

Si una recta l tiene dos puntos P y Q en común con un plano α, todos los puntos de l pertenecen a α.

Demostración

Puesto que existe una alineación f con centro en l que intercambia P y Q, para todo punto T de l resultará que P + T estará en el mismo plano que $Q + T^f = P + Q$, es decir, todos los puntos de la recta estarán en un mismo plano y, como P y Q pertenecen a α todos los demás también pertenecen a α.

Como consecuencia inmediata, si dos planos tienen un punto común, según el axioma IV tienen un segundo punto común y, --

por tanto, la recta que contiene a ambos puntos será también común a los dos planos.

También se verifica trivialmente que un plano y una recta no incidentes tiene a lo más un punto en común.

TEOREMA III.I

Por una recta que contenga dos puntos, y un punto exterior a ella, o por dos rectas distintas que se corten y contengan sendos puntos distintos, pasa un plano y uno solo.

Demostración

En ambos casos tenemos tres puntos no alineados y en virtud del axioma III, existe un único plano que contiene a los tres puntos, y además, según el corolario III.1, la primera recta y las otras dos pertenecen al plano.

Corolario III.2

Si f es una alineación con centro en R, entonces para todo par de puntos P y Q del espacio, se verifica que $P + Q \parallel P^f + Q^f$.

Demostración

Si R es el centro de f, entonces:

1) Si $R \in P + Q$, resulta que $R \in P^f + Q^f$, y como $R \in P + P^f$ y -- $R \in Q + Q^f$, entonces $P + Q = P^f + Q^f$ y $P + Q \parallel P^f + Q^f$.

2) Si $R \notin P + Q$, entonces $R \notin P^f + Q^f$, y si $P + Q$ y $P^f + Q^f$ no -- son paralelas, resulta que por ser coplanarias se cortan en un punto que sería fijo y distinto de R, lo que no puede ser.

Corolario III.3

Si f es una alineación con centro en R, se verifica - que si P y Q son dos puntos que intercambia f, y si existe un punto S no en $P + Q$, entonces existe T no en $P + Q$ tal que $P + S \parallel Q + T$, y $P + T \parallel Q + S$ y R, S y T están alineados.

Demostración

Si existe S no en $P + Q$, sea $T = S^f$, entonces R, S y T están alineados y, por el corolario III.2, $P + S \parallel Q + T$, y $P + T \parallel Q + S$.

TEOREMA III.2

Una alineación que intercambia dos puntos cualesquiera del espacio es única.

Demostración

Sean dos puntos del espacio P y Q distintos y sean f y f' dos alineaciones distintas de centros R y R' respectivamente, -

que intercambian P y Q. Sea S un punto cualquiera del espacio no en $P + Q$. Entonces, $T = S^f$ y $T' = S^{f'}$ son tales que $P + T \parallel Q + S$, y $P + T' \parallel Q + S$, lo que implica que $P + T \parallel P + T'$ y $P + T = P + T'$, por otra parte, $P + S \parallel Q + T$ y $P + S \parallel Q + T'$, lo que implica que $Q + T = Q + T'$, y puesto que $P + T \nparallel Q + T$, resulta que $T = T'$, - $S^f = S^{f'}$ y $f = f'$.

TEOREMA III.3 (Axioma de Fano)

Las diagonales de una paralelogramo no son paralelas.

Demostración

Sea $ABA'B'$ un paralelogramo tal que $A + B \parallel A' + B'$ y - $A + B' \parallel A' + B$, y f la alineación que intercambia A y A' cuyo centro $R \in A + A'$, siendo $A + A'$ una diagonal. Como $A + B' \parallel A' + B'^f$ y $A' + B' \parallel A + B'^f$, se deduce que $A + B'^f = A + B$ y $A' + B'^f =$ $= A' + B$, entonces $B'^f = B$ y, en consecuencia, $R \in B + B'$.

Corolario III.4

Las diagonales de todos los paralelogramos que tienen - una diagonal común a todos ellos se cortan en un mismo punto.

Demostración

Según el Teorema III.3 el punto de intersección es el - centro de la alineación que intercambia los vértices de la diagonal común.

Corolario III.5

Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en un mismo punto.

Demostración

Sea el paralelepípedo ABCDA'B'C'D' (ver fig. 22) tal --

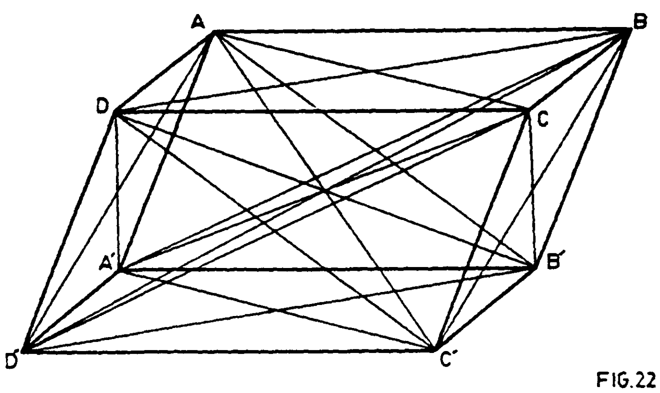

FIG.22

que A + D ∥ B + C ∥ B' + C' ∥ A' + D', A + B ∥ D + C ∥ D' + C' ∥ A' + B', A + A' ∥ B + B' ∥ C + C' ∥ D + D'. Las diagonales de las caras ABCD y A'B'C'D' son paralelas, pues pertenecen a los planos determinados por dichas caras que son paralelos, y además al plano determinado por B + B' y D + D'. Lo mismo ocurre con las diagonales de las restantes caras, A + C y A' + C', A + D' y B + C', --- D + A' y C + B', A + B' y D + C', y, D' + C y A' + B. Entonces, - A' + C diagonal del paralelepípedo, es diagonal común a los paralelogramos ACA'C', A'D'BC y A'DCB', cuyas diagonales A + C', B + D', y D + B' son las diagonales del paralelepípedo, que se cortan según el corolario III.3.

TEOREMA III.5

Si **ABCD** es un paralelogramo tal que **A + B** $\parallel$ **D + C** y -- **A + D** **B + C**, si **F** es un punto en **A + D** tal que **B + D** $\parallel$ **C + F**, -- (ver fig. 23), entonces **F** = A^j, siendo **j** la alineación de centro **D**.

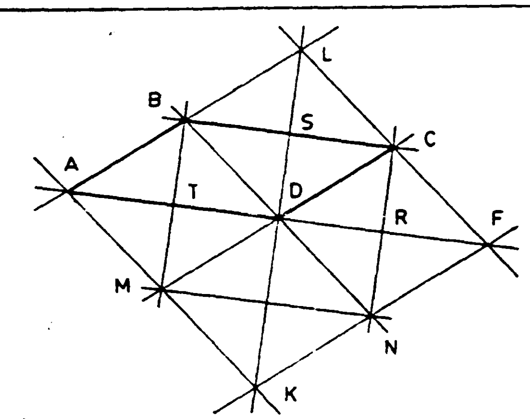

FIG.23

Demostración

Notemos por **L** el punto común de las rectas **A + B** y **C + F** (que están en el mismo plano y no pueden ser paralelas, pues si no existirían dos paralelas por **B** a **C + F**); y por **K** el punto unívocamente determinado tal que **A + K** $\parallel$ **F + L** y **F + K** $\parallel$ **A + L**, además, - sean **M** = (**A + K**)(**C + D**), **N** = (**F + K**)(**B + D**), **R** = (**D + F**)(**C + N**), - **S** = (**B + C**)(**D + L**) y **T** = (**A + D**)(**B + M**).

Sea **f** la alineación que intercambia **C** y **D**. Esta alineación intercambia **B** y **F**, y **L** y **N** (corolario III.4), y por tanto, -- **C + N** $\parallel$ **L + D**. Sea **g** la alineación que intercambia **B** y **D**. Esta - alineación intercambia **C** y **A**, y **L** y **M**, lo que prueba que **D + L** **M + B**. La transformación **gf** manda **C** sobre **B** y **N** sobre **M**, y transforma toda recta en otra paralela, ya que **f** y **g** tienen esta última propiedad. De aquí **B + C** y **M + N** son rectas fijas por **gf**. En --

efecto, para todo punto X de $B + C$, $X + C$ se transforma en una paralela a $X + C$ y como $X^{gf} + C^{gf} = X^{gf} + B$, esta última tiene que ser $B + C$ y X^{gf} pertenece a $B + C$. Análogamente, para $M + N$. Si estas rectas no son paralelas tendrían un punto común W y éste sería fijo por gf. Entonces, $W^{gf} = W$ y $W^{g} = W^{f}$, y se seguiría del Teorema III.2 que $f = g$. Pero esto es imposible, pues implicaría $B = C$. Hemos demostrado que $B + C \parallel M + N$.

Existe finalmente, una alineación h que intercambia D y M, intercambia A y N y además, B y K. De aquí, por lo anterior, $B + M \parallel D + K$. Por tanto, $D + L$ y $D + K$ son rectas paralelas y D, L y K están alineados, y $AKFL$ es un paralelogramo cuyas diagonales se encuentran en D, lo que prueba que $F = A^{j}$, siendo j la alineación de centro D.

TEOREMA III.6

Si P y Q son dos puntos distintos y R el centro de la alineación que los intercambia. Si P', Q' y R' son puntos alineados y existen tres rectas distintas paralelas p, q, r tales que $P + P' = p$, $Q + Q' = q$ y $R + R' = r$, entonces R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q'.

Demostración

Se efectuará en una serie de apartados teniendo en cuenta que evidentemente todos los puntos son coplanarios.

1) Supongamos que $P = P'$, $R \neq R'$ y $Q \neq Q'$, $R + R' \parallel Q + Q'$. Existe un solo punto T tal que $T + P' \parallel R + Q'$ y $T + Q' \parallel P + R$. Es consecuencia del corolario III.3 que T, R y R' están alinea

dos y además, $T + R' \parallel Q + Q'$. Luego R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q' según el Teorema III.5.

2) Supongamos ahora que $P + Q \parallel P' + Q'$, entonces, $P + Q'$ tendrá un punto en común con $R + R'$ que llamaremos M. Por lo demostrado en 1), M es el centro de la alineación que intercambia P y Q' y, en consecuencia, R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q'.

3) Supongamos ahora que $P + Q \nparallel P' + Q'$ y $P \neq P'$, entonces sea w la recta paralela a $P' + Q'$ que pasa por Q. El punto wr es centro de la alineación que intercambia wp y Q por 1), y R' es el centro de la alineación que intercambia P' y Q' por 2).

TEOREMA III.7

Dado un plano α determinado por tres puntos P, Q, S, y un punto T no en α, existe un único plano paralelo a α por T.

Demostración

Sean f, g, h las alineaciones que intercambian P y T, Q y T, y, S y T, respectivamente, entonces, T, Q^f, S^f determinan un plano β que veremos es paralelo a α, (análogamente para T, P^g, S^g, y T, P^h y Q^h). Posteriormente demostraremos la unicidad.

1) Si el plano β no es paralelo a α, tiene un punto común con él y, por tanto, una recta común m cuyos puntos pertenecen a α y a β. Consideremos las rectas $T + Q^f$ y $T + S^f$ que están en β. Puesto que ambas se cortan en T, la recta m no puede ser paralela a ambas; supongamos que corta a $T + Q^f$ en A. Entonces el plano determinado por P, T y Q corta a la recta m en

A, pues este plano contiene a la recta $T + Q^f$; luego A está en los planos α, β y en el determinado por P, T y Q, es decir, estará en la recta intersección de α y $P + T + Q$ que es $P + Q$, por tanto, $P + Q$ y $T + Q^f$ no son paralelas, lo que no es por el corolario III.2.

2) Supongamos ahora que dados α y T existen dos planos β y β' paralelos a α por T, entonces, existe una recta m contenida en ambos. Esta recta no es paralela a alguna de las tres determinadas por P, Q y S. Consideremos esta recta no paralela a m, por ejemplo $P + Q$, entonces el plano determinado por P, Q y T, cortará a β y β' en sendas rectas distintas y ambas paralelas a $P + Q$, lo que está en contradicción con la hipótesis (H).

3.2 TRASLACIONES

Definición III.5

Una aplicación biyectiva **t** entre los puntos del espacio se llama traslación si:

(a) $X + X^t \parallel Y + Y^t$, en el caso de que **X** e **Y** no son puntos fijos de **t**.

(b) $X + Y \parallel X^t + Y^t$, para $X \neq Y$.

Si la traslación **t** es distinta de la identidad, entonces las rectas paralelas a las que se refiere la condición (a) forman un haz de rectas paralelas.

Es inmediato que una traslación con un punto fijo es la identidad. Asimismo, dos traslaciones son iguales si existe un punto que es transformado por ambas traslaciones en el mismo punto. Las traslaciones forman un punto **T**. Este grupo es conmutativo si existen traslaciones de distintas direcciones.

Lema III.1

El producto de dos alineaciones es una traslación, y el producto de tres alineaciones es una alineación.

Demostración

Si **f** es el producto de un cierto número de alineaciones, entonces se cumple la propiedad (b). Si el punto **P** no es -

fijo por f, entonces la recta $P + P^f$ es fija por f, ya que es enviada por f a una recta paralela que pasa por P^f.

Si r y s son alineaciones, se sigue del Teorema III.2 que la existencia de un punto fijo de rs implica que $r = s$, ya que si $W^{rs} = W$, $W^r = W^s$, y además $rs = 1$.

Pero si rs no tiene punto fijo, entonces se sigue del resultado del primer parágrafo de la demostración que todas las rectas $P + P^{rs}$ son paralelas por ser rectas fijas y no tener puntos fijos, lo que demuestra que rs es una traslación.

Si t es una traslación y r es una alineación respecto a un punto R, y si P es un punto cualquiera del espacio, entonces $P + P^t \parallel P^{rt} + (P^{rt})^t$ por (a) y, $P + P^{rt} \parallel P^t + (P^{rt})^t$, por (b). Esto implica que $P^r = P^{trt}$ (pues P^t y P^{rt} son los extremos de la diagonal del paralelogramo y el transformado de P por r tiene que ser el otro extremo de la otra diagonal, es decir, P^{trt}), o también $r = trt$. Además, $r^2 = 1$; y ahora es fácil demostrar que rt es una alineación. En efecto, rt es biyección, pues es composición de dos biyecciones, además:

(a) Si $r = trt$, se verifica que $r^2 = rtrt = (rt)^2 = 1$, y si $r \neq 1$ entonces $rt \neq 1$.

(b) Si P y Q son dos puntos distintos, entonces $P + Q \parallel P^t + Q^t$, y como r es una alineación, $P^t + Q^t \parallel P^{rt} + Q^{rt}$ y, por tanto, se cumple la condición de rt transforma puntos alineados en puntos alineados del mismo plano.

(c) El centro de la alineación rt se calcula de la siguiente forma: Basta con demostrar que P, Q, P^{rt}, Q^{rt} son los vértices de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en un punto que será dicho centro. (Ver fig. 24).

Ya hemos visto que $P + Q \parallel P^{rt} + Q^{rt}$. Veamos que $Q + P^{rt} \parallel P + Q^{rt}$, con lo que habremos terminado, pero
$Q + P^{rt} \parallel Q^{t} + P^{trt} = Q^{t} + P^{r} \parallel Q^{rt} + P^{r^2} = Q^{rt} + P$.

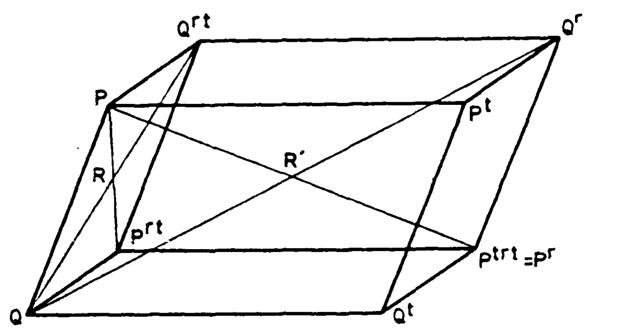

FIG. 24

Hemos demostrado también que $t^{-1} = r^{-1}tr$, con lo que se verifica el siguiente resultado:

Corolario III.6

Si **R** es el grupo generado por las alineaciones, entonces **T** es un subgrupo de índice 2 de **R** y **T** es abeliano.

Una consecuencia inmediata del lema III.1 y del Teorema III.2 es el importante resultado siguiente:

Corolario III.7

Existe para todo par de puntos distintos una alineación que los intercambia si y sólo si el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo.

Demostración

Si para todo par de puntos distintos existe una alineación que los intercambia, por el Teorema III.2, esa alineación es única y, en consecuencia, existe una única alineación para cada R del espacio que tiene R como centro.

Bastará con probar que para todo par de puntos distintos P y Q del espacio, existe una traslación tal que $P^t = Q$. Pero como existe una alineación r tal que $P^r = Q$, si R es el centro de esta alineación, existen sendas alineaciones r_1 y r_2, tales que — $R = P^{r_1}$ y $R^{r_2} = Q$, en consecuencia, $t = r_2 r_1$ y, por tanto T es simplemente transitivo.

Si el grupo de las traslaciones es simplemente transitivo, sean P y Q dos puntos distintos, y sea R el centro de una - alineación r. Si $Q = P^r$, hemos terminado; si $Q \neq P^r$, entonces -- $Q + P \parallel Q^r + P^r$ y, además, $Q + P^r \parallel Q^r + P$. Entonces, por ser el grupo de las traslaciones simplemente transitivo, existe una traslación que transforma P^r en Q, es decir, $P^{rt} = Q$ y, por tanto, - $Q^{rt} = P$, y rt es la alineación buscada.

3.3 **INTRODUCCION DE COORDENADAS**

Supongamos que **X**, **Y**, **Z** son tres puntos no alineados - y que **O** no es un punto del plano **X + Y + Z**. Denotamos por **F** el - sistema de puntos de **O + Y**. Los elementos de **F** nos servirán como coordenadas e introduciremos más tarde una adición y una multiplicación de los mismos.

Si **c** es un elemento de **F** (ver fig. 25) entonces existe un único plano paralelo al plano **O + Z + X** que pasa por **c**, por razones que se apreciarán posteriormente, le denominaremos **(y = c)**.

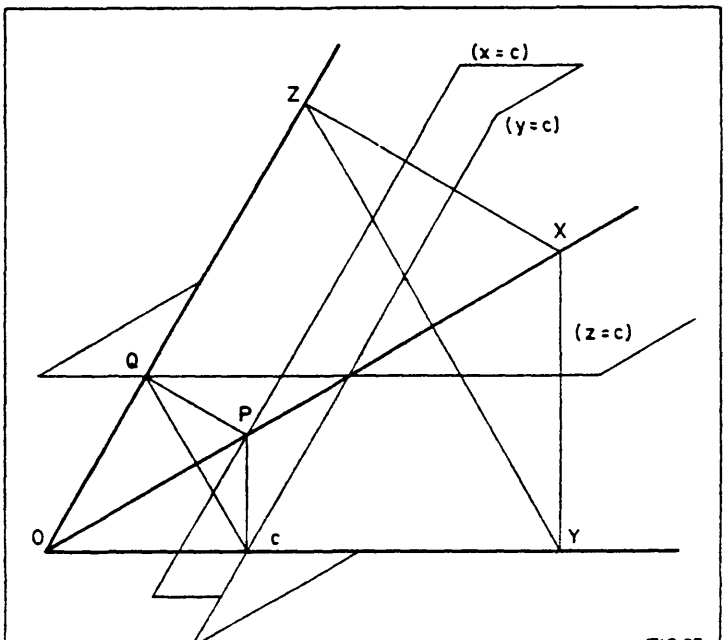

FIG.25

Si c es un elemento de F entonces existe una única -- recta paralela a X + Y que pasa por c y no es paralela a O + X, - pues si lo fuera, existirían dos rectas paralelas por X a esta -- recta cuya existencia se afirma; entonces, se encuentran en un -- punto P por el que pasa un único plano paralelo al plano O + Z + Y que denotaremos por (x = c).

Por último, si c es un elemento de F, entonces existe un único plano paralelo a X + Y + Z que pasa por c y no es paralelo a la recta O + Z, por no ser-lo X + Y + Z; entonces, se encuentran en un punto Q por el que pasa un único plano paralelo a --- O + X + Y, que denotaremos por (z = c).

Por la unicidad del paralelismo se sigue inmediatamente que (y = c) = (y = d) si, y sólo si, c = d; (x = c) = (x = d) si, y sólo si, c = d; y, finalmente, (z = c) = (z = d) si, y sólo si c = d.

Si b, c, d, son elementos de F, entonces (x = b), -- (y = c), (z = d) son planos distintos que se cortan en un punto, - pues son paralelos a O + Y + Z, O + X + Z, y O + X + Y, respectivamente, y denotamos este punto por (b,c,d). De (b,c,d) = (x = b) (y = c)(z = d), y del último parágrafo, se sigue inmediatamente -- que (b,c,d) = (b',c',d') si y sólo si b = b', c = c' y d = d'.

Supongamos, inversamente, un punto P del espacio, -- (ver fig. 26). Entonces, el único plano paralelo por P a O+Z +X cortará a O + Y en un punto c bien determinado. El plano paralelo por P a O + Z + Y cortará a O + X en un punto Q por el que pasará una única recta paralela a X + Y que cortará a su vez, a O + Y en un punto bien determinado b, y, por último, el único plano paralelo por P a O + X + Y cortará a O + Z en un punto bien determinado

R por el que pasará un único plano a $X + Y + Z$ que cortará a $O + Y$ en un punto bien determinado d, y se verifica por la propia construcción, que $P = (b,c,d)$.

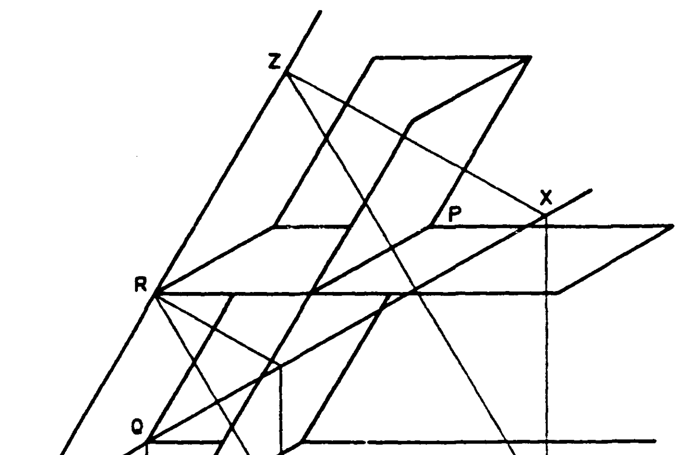

FIG. 26

Por tanto, los puntos del espacio están en correspondencia biyectiva con las ternas (b,c,d) de elementos de f.

Si existe una traslación $t = t_c$ para todo c de F, tal que $c = O^{t_c}$, trataremos de introducir la adición en F de la forma

$$c + d = O^{t_c t_d}$$

Es claro que esta operación define un isomorfismo mediante la traslación de t de O en el elemento O^t de F del grupo -

de las traslaciones en F. Luego el sistema aditivo F_+ es un grupo, por serlo las traslaciones.

Sea t una traslación de dirección igual a la de la recta $O + Y$, entonces el plano $(x = c)^t = (x = c)$, entendiendo aquí que $(x = c)$ es un plano fijo no de puntos fijos, puesto que $(x = c)$ es paralelo a $O + Y$, análogamente ocurre para $(z = c)$. Si c es un elemento de F entonces $c = (O)^{t_c}$, y encontraremos que $(y = c)^t = (y = (O)^{t_c})^t$ y será un plano de la forma $(y = k)$, donde k es el trasladado de c por t, entonces, por definición de suma,

$$(y = (O)^{t_c})^t = (y = (O)^{t_c t}) = (y = c + O^t)$$

Por tanto, si P es un punto del plano, tal que $P = (b,c,d)$ para ciertos b,c,d de F, encontramos que $P^t = (b,c+O^t,d)$.

Si p es un elemento de F, entonces (o,o,p), (p,o,o), (o,p,o) determinan un plano que es paralelo a $X + Y + Z$, por construcción. Si q es otro elemento de F, entonces

$(o,o,p)^{t_q} = (o,q,p)$, $(p,o,o)^{t_q} = (p,q,o)$, y $(o,p,o)^{t_q} = (o,p+q,o)$

ya que $p^{t_q} = (O)^{t_p t_q} = p + q$ y, análogamente para las otras igualdades; además, estos puntos determinan un plano paralelo al determinado por (o,p,o), (p,o,o) y (o,o,p) y, por tanto, paralelo a $X + Y + Z$. Esto muestra que los planos paralelos a $X + Y + Z$ están caracterizados por la ecuación

$$x + y + z = c \quad \text{ó} \quad y = -x + c - z$$

En orden a posibilitar la caracterización de todos los planos en forma de ecuaciones, necesitamos una cierta definición de multiplicación en F. Para hacer esto, tenemos que dar preferencia a algún elemento de F distinto de o, que servirá como unidad por la izquierda de esta multiplicación.

Este elemento unidad puede ser elegido, de todas formas al azar. En consecuencia, diferentes elecciones llevan a distintas definiciones de multiplicación.

Sea pues, 1 un elemento de F distinto de o. Si r y s son elementos de F, entonces el plano (z = r) y la recta O+(1,s,1) son tales que se cortan en un punto, pues (z = r) es paralelo a - O + X + Y, O $\in$ O + X + Y, y (1,s,1) $\notin$ O + X + Y, pues 1 $\neq$ o. Por otra parte, se demuestra fácilmente que los puntos de la recta -- O + (1,s,1) tienen iguales su primera y tercera coordenadas, dada la construcción por paralelismo de éstas.

Por tanto, podemos definir el producto de rs como el elemento unívocamente determinado de F que satisface

(r,rs,r) = (z = r)(O+(1,s,1)) (Ver fig. 27)

En estas condiciones, la recta (x = r)(y = rs) cortará al plano (z = o) en el punto (r,rs,o), y la recta paralela a - la anterior (x = 1)(y = s) en el punto (1,s,o).

Como las rectas (x = r)(y = rs), (x = 1)(y = s) y -- O+(1,s,1) están en un mismo plano, las dos primeras por ser paralelas y la tercera por tener los dos puntos (1,s,1) y (r,rs,r), - cada uno en una de ellas, y además O pertenecer a la intersección de este plano con (z = o); entonces, O pertenece a la recta determinada por los puntos (1,s,o) y (r,rs,o), con lo que, restringiéndonos al plano O + X + Y, la definición de multiplicación en F -- podría escribirse

(r,rs) = (x = r)(O + (1,s))

y, por análogas razones, si nos restringimos al plano O + Z + Y, la definición de multiplicación compatible con la anterior, sería

$$(r,rs) = (z = r)(O + (1,s))$$

Situémonos, pues, en el plano $(z = o)$. Si p es una recta del plano no paralela a $O + Y$ - no es de la forma $(x = c)$ (tengamos en cuenta que esta notación ya corresponde a un plano, no al espacio), entonces , entonces p corta a $O + Y$ en un punto (o,m) --

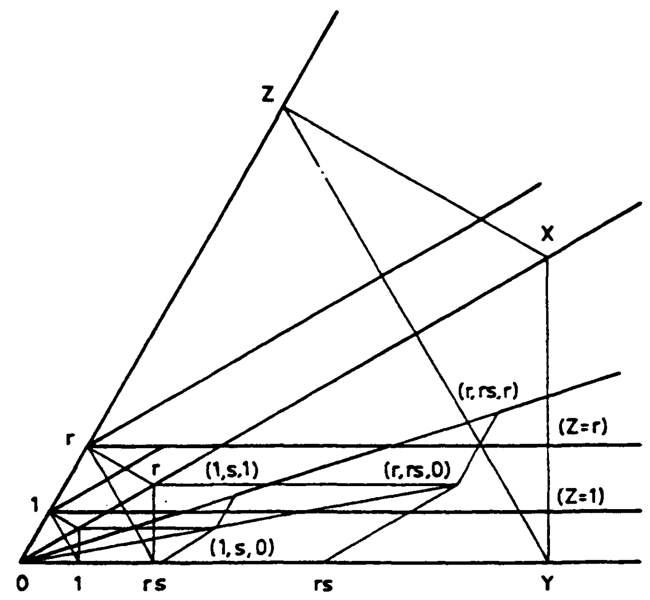

FIG. 27

para un cierto m de F, pues la recta $O + Y$ es tal que sus puntos - son de la forma (o,m); y p^{t-m} es una recta paralela a p que pasa por O, ya que, como $(o,m) \in p$, entonces,

$$(o,m)^{t-m} = (o,m + o^{t-m}) = (o\,,\, m - m) = (o,o) = O$$

La recta $p^{t_{-m}}$ corta a $(x = 1)$ en un punto $(1,s)$ para cierto s de F, y es consecuencia de nuestra definición de multiplicación que

$$p^{t_{-m}} = 0 + (1,s) = (y = xs)$$

En efecto, si $(o,o) \in p^{t_{-m}}$, veamos que también pertenece a $(y = xs)$. Si $x = o$, entonces $(o,os) = (x = o)(0 + (1,s)) = (o,o)$, pues $0 = (o,o)$ es el único punto de intersección de $(x = o)$ y $0 + (1,s)$, que son distintas, luego, $os = o$. Análogamente para $(1,s)$.

Por tanto, $p = (0 + (1,s))^{t_m} = (0)^{t_m} + (1,s)^{t_m} =$
$= (o,m) + (1,s + m) = (y = xs + m)$.

Las rectas $(y = xs + m)$ e $(y = xt + n)$ son paralelas si y sólo si $s = t$. En efecto:

Si $s = t$, aplicando a la primera recta la traslación t_{-m} queda transformada en la recta $(y = xs)$ que será paralela a $(y = xs + m)$. Aplicando a $(y = xs)$ la traslación t_n, entonces se transformará en la recta $(y = xs + n)$ que será paralela a $(y = xs)$, y en consecuencia, paralela a $(y = xs + m)$.

Si $s \neq t$, efectuando un razonamiento análogo, como resulta que las rectas $(y = xs)$ e $(y = xt)$ son distintas y ambas pasan por el punto (o,o), no son paralelas y sus transformadas $(y = xs + m)$ por t_m e $(y = xt + n)$ por t_n, serán distintas y se cortarán también en un punto.

Por tanto, notemos que no solamente ocurre que toda recta cuyos puntos están en el plano $(z = o)$ determina una ecuación, sino que las rectas recorren todas las ecuaciones admisibles; y dos rectas serán iguales si y sólo si sus ecuaciones son idénticas.

Considerando el plano $(x = o)$, se llega a la misma conclusión, teniendo en cuenta que las ecuaciones son de la forma $(y = zs + n)$, y análogamente para el plano $(y = o)$ y las ecuaciones $(z = xr + p)$.

Vamos a deducir una serie de propiedades de la multiplicación definida en F, restringiéndonos, como ya hemos hecho, al plano $(z = o)$, por lo que seguimos notando los puntos de dicho plano mediante dos coordenadas (x,y).

Puesto que $(o,o) = 0 = (x = o)(0 + (1,s)) = (o,os)$ por la definición de producto, y puesto que $(r,ro) = (x = r)(0 + (1,o)) = (x = r)(y = o) = (r,o)$, se sigue que $ro = o = os$.

Puesto que $(1,1s) = (x = 1)(0 + (1,s)) = (1,s)$ se deduce que $1s = s$.

Puesto que $(y = x(-1)) = (0 + (1,-1)) = (y = -x)$, pues (o,o) y $(1,-1)$ pertenecen a las rectas $(y = x(-1))$ e $(y = -x)$, se deduce que $-x = x(-1)$.

Puesto que las rectas $(y = xr)$ e $(y = xs + t)$, para $s \neq r$, no son paralelas, se encuentran en uno y sólo un punto y se sigue que para tres elementos dados de F, r, s, t, tales que $r \neq s$, existe uno, y sólo un, elemento de F que satisface la ecuación $-xs + xr = t$.

Puesto que los puntos (r,o) y (s,t) para $r \neq s$, determinan una y sólo una recta del tipo $(y = xm + n)$, donde los elementos m y n de F satisfacen las ecuaciones $o = rm + n$ ó $n = -rm$ y $t = sm + n = sm - rm$, se sigue que para tres elementos dados r, s, t de F, tales que $r \neq s$, existe uno y sólo un elemento x de F que satisface la ecuación $sx - rx = t$.

De aquí se deduce también que si $r = o$, $s \neq o$, $t = o$, y existe un único elemento x tal que $-xs + xr = t$, es decir, $-xs + xo = o$, entonces $x = o$, luego F es un dominio de integridad.

Para una enunciación conveniente de nuestros resultados, introduciremos algunos términos. Un sistema cartesiano de números es un conjunto F de elementos con una doble composición, adición, $m + n$, y multiplicación mn, sujetas a las siguientes reglas:

(1) F es un grupo respecto de la adición

(2) El producto mn de elementos m y n (en este orden) es un elemento unívocamente determinado de F.

(3) $om = mo = o$, para todo m de F.

(4) Existe un elemento $1 \neq o$ de F tal que $1m = m$ y $m(-1) = -m$, para todo m de F.

(5) Si r, s, t son elementos de F tales que $r \neq s$, entonces existe uno y sólo un elemento x y uno y sólo un elemento y de F, tales que

$$-xr + xs = t\,, \qquad sy - ry = t$$

Si F es un sistema cartesiano de números, entonces notemos por $E(F)$ el sistema de todas las ternas (p,q,r) de F. Para derivar de este sistema de puntos $E(F)$ un espacio afín, basta con establecer qué conjuntos de puntos son los conjuntos de todos los puntos de - un plano dado. Lo que se hace como sigue:

a) El plano $(x = c)$ consiste en todos los puntos (c,y,z).
El plano $(z = c)$ consiste en todos los puntos (x,y,c).
El plano $(z = xs + m)$ consiste en todos los puntos $(x,y,xs+m)$.

Estos planos son los paralelos al eje $O + Y$, como se demuestra fácilmente pues, o lo contienen, caso de $c = o$ ó $m = o$, -, o no contienen ningún punto del mismo cuando $c \neq o$ y $m \neq o$. Quedan por ver los planos que cortan al eje $O + Y$.

b) Un plano α de este tipo cortará al plano $O + Y + Z$ en una recta $(y = zs + m)(x = o)$ y al plano $O + Y + X$ en una recta --- $(y = xt + m)(z = o)$, estas dos rectas tienen el punto común -- (o,m,o), y contienen cada una los puntos de intersección con - los ejes $O + Z$ y $O + X$, respectivamente, que serán los que satisfagan las ecuaciones $zs = -m$ y $xt = -m$. Luego, tales rectas determinan un plano que será
$(y = zs + m)(x = o) + (y = xt + m)(z = o) = (y = xt + zs + m)$
y es evidente que los tres puntos antes descritos satisfacen - la ecuación que define el plano.

Los planos $(y = xs + zt + m)$ e $(y = xr + zu + n)$ son paralelos si y sólo si $r = s$ y $u = t$. En efecto:

Si $r = s$ y $u = t$, aplicando la traslación t_{-m} al primer plano y t_{-n} al segundo, ambos se transforman en el plano $(y = xr+zu)$ paralelo a ambos, por ser el transformado por una traslación, luego ellos son paralelos entre sí.

Si $r \neq s$ o $u \neq t$, resulta que los planos $(y = xs + zt)$ e $(y = xr + zu)$ son distintos, pues si $r \neq s$, el punto $(1,s,o)$ perte nece al primer plano y no pertenece al segundo, y se cortan en —— (o,o,o). Por tanto, sus trasladados por t_m y t_n respectivamente, no pueden ser paralelos.

El conjunto $E(F)$ con la anterior definición de planos, - constituye un espacio afín en el sentido de los axiomas definidos en este capítulo.

Si c es un elemento de F, entonces una aplicación biyectiva t entre los puntos del espacio afín sobre F definida por -- $(x,y,z)^t = (x,y+c,z)$ deja invariante los planos definidos en a) y envía el plano $(y = xs + zt + m)$ sobre el plano $(y = xs + zt + m + c)$ es una traslación en el espacio $E(F)$.

Toda la exposición anterior nos lleva a concluir el si-- guiente:

TEOREMA III.8

Si O, A, B, C, son cuatro puntos distintos no coplanarios, entonces existe un sistema cartesiano de números F y una aplicación biyectiva f que relaciona los puntos del espacio con el conjunto de todas las ternas (x,y,z) de números de F que cumple los siguientes requisitos:

(i) $f(O) = (o,o,o)$; $f(A) = (o,1,o)$; $f(B) = (1,o,o)$; $f(C) = (o,o,1)$

(ii) Los planos paralelos a O + A son enviados sobre los conjuntos en los que x = cte., z = cte. o bien sobre los lugares --- $(z = xs + m)$, y los restantes, sobre los lugares que satisfacen $(y = xr + zt + m)$.

Estas condiciones contienen una descripción de un espacio afín, al que nos referiremos con el espacio afín sobre F, y contienen una descripción exhaustiva de todos los puntos y todos los planos de E(F).

Por otra parte, si existen en el espacio afín sobre F una traslación que envíe el punto (o,o,o) sobre el punto (a,b,c); entonces, la traslación puede ser descrita por las siguientes fórmulas de transformación:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b \quad y \quad z' = z + c$$

Lema III.2

El grupo de las traslaciones en el plano O + X + Y sobre F es simplemente transitivo si y sólo si

(1) $(u + v)w = uw + vw$, para u, v, w pertenecientes a F.

Demostrción

Es análoga a la del lema I.2 del capítulo 1.

Lema III.3

Si el sistema cartesiano de números F satisface la ley distributiva (1), entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

(2) $1 + 1 \neq o$

(iii) Las diagonales de un paralelogramo no son paralelas en el -- plano **O + X + Y** sobre **F**.

(e) Existe una alineación en el plano **O + X + Y** sobre **F**.

Demostración

Es análoga a la del lema I.3 del capítulo 1.

TEOREMA III.9

Existe para todo par de puntos alineados del plano --- **O + X + Y** una alineación que los intercambia si y solamente si el plano **O + X + Y** es el plano sobre un sistema cartesiano de números que satisface (1) y (2), esto es, **F** es distributivo por la derecha y de característica distinta de 2.

Demostración

Es análoga a la del Teorema I.8 del capítulo 1.

3.4 LA RELACION DE ORTOGONALIDAD

En todo el resto del trabajo supondremos que estamos trabajando en un espacio afín que satisface los seis primeros axiomas. Añadiremos ahora sendas relaciones de ortogonalidad definidas sobre cada uno de los planos del espacio, a partir de lo cual se definirá una relación de ortogonalidad común entre las rectas de todos los planos que se extenderá después a todo el espacio. Las primeras vendrán definidas así:

En cualquier plano una recta será perpendicular a otra, en símboloa, $a \perp b$, si se cumplen

0.1 Para cada recta a existe una recta $b \neq a$ tal que $a \perp b$.

0.2 $a \perp b$ si y sólo si $b \perp a$.

0.3 Si $a \perp b$, entonces $a \parallel a'$ es condición necesaria y suficiente para que $a' \perp b$.

En resumen, una relación de ortogonalidad constituye una correspondencia involutiva entre los haces de rectas paralelas de cualquier plano.

TEOREMA III.10

Las siguientes propiedades son equivalentes:

0.4 Las alturas de un triángulo concurren en un punto.

0.5 Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto.

Demostración

Análoga a la del Teorema I.12 del capítulo 1.

En el plano **O + X + Y**, si decimos que las rectas paralelas y sólo éstas son perpendiculares, entonces se satisfacen los requisitos 0.1 a 0.3 . Excluiremos siempre esta posibilidad trivial ya que es incompatible con 0.4.

Si la relación de ortogonalidad no es trivial, entonces es posible introducir coordenadas de tal manera que en dicho plano las rectas **(x = cte)** son ortogonales a las rectas **(y = cte)**(recordemos que esta notación corresponde al plano **O + X + Y** en el que nos movemos). Supongamos ahora que el plano es descrito por un sistema rectangular de coordenadas y que dichas coordenadas son elementos de un sistema cartesiano de números distributivo por la derecha de característica distinta de 2. Entonces, todas las rectas perpendiculares a la recta **(y = xr)**, con **r ≠ o**, son paralelas y son perpendiculares a toda recta **(y = xr + s)**, pues ésta es paralela a **(y = xr)**. Además, no son de la forma **(x = cte)** o **(y = cte)**. Por tanto, hay para todo número **r ≠ o** en **F** uno y sólo un número **r* ≠ o** en **F** tal que

(1) La recta **(y = xr + s)** es perpendicular a la recta **(y = xr*+ t)**, **r** = r**.

(2) La perpendicularidad de la recta **(y = xr + s)** y de la recta **a** implica que la recta **a** es de la forma **(y = xr* + t)**.

Notemos que la función **r*** depende del sistema de coordenadas elegido y no solamente de la relación de perpendicularidad que consideramos. Un cambio de coordenadas puede efectuar un cambio en el sistema **F**, pero aunque no haga esto, puede efectuar un cambio en la función r^*. Por otra parte la función r^* determina - completamente la perpendicularidad.

Dicho en otros términos, como veremos posteriormente, la función r^* no es única y este hecho lo utilizaremos para definir - la perpendicularidad en todo el espacio.

En estas condiciones, se puede enunciar en forma análoga a la del Teorema I.13 del capítulo 1, el siguiente

TEOREMA III.11

Si un plano determinado por tres puntos del espacio está caracterizado por un sistema rectangular de coordenadas, tomado de un sistema cartesiano de números distributivo por la derecha, y de característica distinta de 2, y si la relación de perpendicularidad está determinada por la función r^*, entonces, las siguientes pro-- piedades son equivalentes:

0.4 Las alturas de un triángulo concurren en un punto.

0.6 Dados cuatro puntos A, B, C, D, del plano no alineados tres a tres, si $A + B \parallel C + D$, $A + C \parallel B + D$, -- $A + B \perp A + C$, y si U es un punto distinto de A, B, C, D, tal que $B + U \perp C + U$, entonces, $A + U \perp D + U$.

0.7 F es un cuerpo conmutativo y asociativo y $rr^* = ss^*$, para $r \neq o$ y $s \neq o$.

La demostración de este importante teorema es igual a la del Teorema I.13 del capítulo 1.

Sin embargo, es necesario reseñar que el valor común de todos los productos rr^* que llamaremos constante de ortogonalidad, y designamos por c, es evidentemente distinto de o, y depende del sistema rectangular de coordenadas elegido.

Pues bien, a la vista de los resultados obtenidos, y con el fin de dotar de la suficiente potencia a nuestra axiomática, debemos introducir el siguiente

AXIOMA VII

Existe una relación de ortogonalidad entre las rectas de cada plano del espacio que cumple O.1, O.2, O.3 y O.4.

Este axioma nos asegura que F es un cuerpo conmutativo, entonces para cada $r \in F$ existe $r^* = -1/r$, o lo que es lo mismo, $rr^* = -1$.

Por otra parte, la ecuación de una recta del plano ($z = o$) puede ser descrita como ($y = xr + s$) o bien $-rx + y - s = o$, y en general, como toda terna (u,v,w) y sus proporcionales. Los puntos pertenecientes a esa recta serán los que satisfagan la ecuación $ux + vy + w = o$, en donde a $r = -u/v$ llamaremos a partir de ahora pendiente.

Definamos ahora una relación entre las rectas de ($z = o$) Las rectas (u,v,w) y (u',v',w') están relacionadas si $uu' + vv' = o$. Dicho en otros términos, si las rectas no son de la forma $x = cte$, $y = cte$, están relacionadas si $rr^* = -1$. Es evidente que hemos definido una nueva relación de ortogonalidad, pues se verifican --

0.1, 0.2, 0.3 y 0.4, como se puede comprobar inmediatamente (para --- más detalle ver 2.1 del capítulo 2).

Trataremos de extender esta definición a todo el espacio. Dados cuatro puntos $P_o = (x_o, y_o, z_o)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P'_o = (x'_o, y'_o, z'_o)$ $P'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$, diremos que la recta $P_o + P_1$ es perpendicular a - la recta $P'_o + P'_1$ si

$$(x_1 - x_o)(x'_1 - x'_o) + (y_1 - y_o)(y'_1 - y'_o) + (z_1 - z_o)(z'_1 - z'_o) = o.$$

Esta definición es compatible con la anterior para $(z = o)$ pues en este caso

$$1 + (y_1 - y_o)(x_1 - x_o)^{-1}(y'_1 - y'_o)(x'_1 - x'_o)^{-1} = o$$

Sin embargo, en esta relación entre las rectas del espa-- cio, no podemos asegurar que se cumpla 0.3, como evidentemente -- ocurre con la recta $(x = o)(y = o)$, la recta $(y = o)(z = o)$ y la - recta $(x = o)(z = o)$, que son ortogonales dos a dos y concurrentes en (o,o,o).

Definimos a continuación la ortogonalidad entre recta y - plano. Sea la recta definida por los puntos P_o y P_1 y el plano determinado por los puntos P_2, P_3 y P_4, entonces diremos que $P_o + P_1$ es ortogonal al plano $P_2 + P_3 + P_4$ si $P_o + P_1$ es ortogonal a cua-- lesquiera dos de las rectas $P_2 + P_3$, $P_3 + P_4$ y $P_2 + P_4$.

Veamos que con esta definición se verifican las siguien-- tes propiedades:

0.1' Para todo plano α determinado por tres puntos no - alineados, existe una recta $a \perp \alpha$ y su recíproco.

0.2' $\alpha \perp a$ si y sólo si $a \perp \alpha$

0.3' Si $\alpha \perp a$, es condición necesaria y suficiente que $\alpha \parallel \alpha'$ para que $\alpha' \perp a$, y que $a \parallel a'$ para que - $a' \perp \alpha$.

0.4' En todo triángulo las alturas son concurrentes.

En efecto:

0.1' Dada una recta $P_o + P_1$, entonces los puntos P_2, P_3 y P_4 ten drán unas coordenadas que deberán satisfacer las ecuaciones

$$(x_1 - x_o)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_o)(y_3 - y_2) + (z_1 - z_o)(z_3 - z_2) = o$$

$$(x_1 - x_o)(x_4 - x_2) + (y_1 - y_o)(y_4 - y_2) + (z_1 - z_o)(z_4 - z_2) = o$$

que es un sistema de dos ecuaciones con nueve incógnitas y - que, haciendo un estudio detallado de las distintas rectas - que pueden ser $P_o + P_1$, nos lleva a que tiene infinitas solu ciones.

Recíprocamente, dados P_2, P_3 y P_4, la recta determinada por P_o y P_1 será tal que las coordenadas de estos puntos de berán satisfacer el mismo sistema, que tendrá ahora como -- incógnitas x_o, y_o, x_1, y_1.

0.2' Es trivial por la propia definición simétrica de la ortogo- nalidad.

0.3' Dado que nuestros planos están caracterizados por ecuacio-- nes del tipo $y = xr + zt + m$, o lo que es equivalente, -- $ux + vy + wz + n = o$, dos planos $(y = xr + zt + m)$ e ---- $(y = xr' + zt' + m')$ son paralelos si $r = r'$ y $t = t'$, o -- bien su equivalente, si $u/u' = v/v' = w/w'$.

Entonces, si P_o, P_1, y P_2 son puntos del primer plano de coordenadas $(x_o, rx_o + tz_o + m, z_o)$, $(x_1, rx_1 + tz_1 + m, z_1)$,

$(x_2, rx_2 + tz_2 + m, z_2)$ se sigue que la recta determinada - por dos puntos P_3 y P_4 será ortogonal al plano determinado pcr los tres primeros si

$$(x_4 - x_3)(x_1 - x_o) + (y_4 - y_3)(r(x_1 - x_o) + t(z_1 - z_o)) + \\ + (z_4 - z_3)(z_1 - z_o) = o$$

$$(x_4 - x_3)(x_2 - x_o) + (y_4 - y_3)(r(x_2 - x_o) + t(z_2 - z_o)) + \\ + (z_4 - z_3)(z_2 - z_o) = o$$

Pues bien, si $(y = xr' + zt' + m')$ es paralelo a -- $(y = xr + zt + m)$ y $(x'_o, rx'_o + tz'_o + m', z'_o)$ es un punto -- del mismo plano, existen dos puntos pertenecientes al plano cuyas coordenadas son $(x_1 - x_o + x'_o, r(x_1 - x_o + x'_o) + t(z_1 - z_o + z'_o) + m', z_1 - z_o + z'_o)$ y $(x_2 - x_o + x'_o, r(x_2 - x_o + x'_o) + t(z_2 - z_o + z'_o) + m', z_2 - z_o + z'_o)$ y tales que se verifican las ecuaciones anteriores y, en consecuencia, - el plano $(y = xr + zt + m)$ es ortogonal a $P_3 + P_4$.

Por un razonamiento análogo al anterior, tenemos que si - dos planos $(y = xr + zt + m)$ e $(y = xr' + zt' + m')$ son ortogonales a una recta $P_3 + P_4$, ambos son paralelos, ya que las condiciones para el primer plano

$$(x_4 - x_3)(x_1 - x_o) + (y_4 - y_3)(r(x_1 - x_o) + t(z_1 - z_o)) + \\ + (z_4 - z_3)(z_1 - z_o) = o$$

$$(x_4 - x_3)(x_2 - x_o) + (y_4 - y_3)(r(x_2 - x_o) + t(z_2 - z_o)) + \\ + (z_4 - z_3)(z_2 - z_o) = o$$

y para el segundo

$$(x_4 - x_3)(x'_1 - x'_o) + (y_4 - y_3)(r'(x'_1 - x'_o) + t'(z'_1 - z'_o)) + \\ + (z_4 - z_3)(z'_1 - z'_o) = o$$

$$(x_4 - x_3)(x'_2 - x'_o) + (y_4 - y_3)(r'(x'_2 - x'_o) + t'(z'_2 - z'_o)) +$$
$$+ (z_4 - z_3)(z'_2 - z'_o) = o$$

determinan que $r = r'$ y $t = t'$, con la única condición de - que $x_1 - x_o = x'_1 - x'_o$, $x_2 - x_o = x'_2 - x'_o$ $y_1 - y_o = y'_1 - y'_o$, $y_2 - y_o = y'_2 - y'_o$, $z_1 - z_o = z'_1 - z'_o$ y $z_2 - z_o = z'_2 - z'_o$ lo que siempre puede conseguirse.

El resto de la propiedad 0.3' se demuestra de manera totalmente análoga a la anterior.

0.4' Si un triángulo viene determinado por los puntos $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ y $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$, resulta que las rectas - perpendiculares a cada uno de los lados por el vértice opuesto se encontrarán en los planos determinados por las ecuaciones

$$(x - x_o)(x_2 - x_1) + (y - y_o)(y_2 - y_1) + (z - z_o)(z_2 - z_1) = o$$

para $P_1 + P_2$ y P_o

$$(x - x_1)(x_2 - x_o) + (y - y_1)(y_2 - y_o) + (z - z_1)(z_2 - z_o) = o$$

para $P_o + P_2$ y P_1

$$(x - x_2)(x_1 - x_o) + (y - y_2)(y_1 - y_o) + (z - z_2)(z_1 - z_o) = o$$

para $P_o + P_1$ y P_2.

Como se comprueba inmediatamente, los planos dos a dos no son paralelos y una ecuación es combinación lineal de las - otras dos, luego los tres planos se cortan en una misma recta y la intersección de ésta con el plano $P_o + P_1 + P_2$ es - punto de intersección de las alturas.

Con todo lo anterior hemos demostrado el siguiente:

TEOREMA III.12

Si se verifican los axiomas I al VII, entonces existe una relación de ortogonalidad entre rectas y planos del espacio, que - verifica 0.1', 0.2', 0.3' y 0.4'.

Otra forma de caracterizar por ecuaciones un plano determinado por tres puntos P_o, P_1, P_2 es la siguiente:

$$x = x_o + \lambda(x_1 - x_o) + \mu(x_2 - x_o)$$
$$y = y_o + \lambda(y_1 - y_o) + \mu(y_2 - y_o)$$
$$z = z_o + \lambda(z_1 - z_o) + \mu(z_2 - z_o) \quad \text{con } \lambda, \mu \in F$$

Es evidente que P_o, P_1 y P_2 pertenecen a este plano. -- Pues bien, con esta notación podemos pasar a demostrar el siguiente

TEOREMA III.13

Si una recta determinada por dos puntos es perpendicular a un plano determinado por tres puntos no alineados, entonces es perpendicular a todas las rectas del plano.

Demostración

Sean dos puntos del plano determinado por P_o, P_1, P_2, y la recta $P_3 + P_4$. Si la recta es perpendicular al plano se verifican las condiciones siguientes:

$$(x_4 - x_3)(x_1 - x_o) + (y_4 - y_3)(y_1 - y_o) + (z_4 - z_3)(z_1 - z_o) = o$$
$$(x_4 - x_3)(x_2 - x_o) + (y_4 - y_3)(y_2 - y_o) + (z_4 - z_3)(z_2 - z_o) = o$$

Sean dos puntos del plano

$P' = (x',y',z')$ y $P'' = (x'',y'',z'')$, entonces

$$x'' - x' = (x_1 - x_o)(\lambda'' - \lambda') + (x_2 - x_o)(\mu'' - \mu')$$

$$y'' - y' = (y_1 - y_o)(\lambda'' - \lambda') + (y_2 - y_o)(\mu'' - \mu')$$

$$z'' - z' = (z_1 - z_o)(\lambda'' - \lambda') + (z_2 - z_o)(\mu'' - \mu')$$

y, de aquí,

$$(x_4 - x_3)(x'' - x') + (y_4 - y_3)(y'' - y') + (z_4 - z_3)(z'' - z') =$$
$$= (\lambda'' - \lambda')((x_4 - x_3)(x_1 - x_o) + (y_4 - y_3)(y_1 - y_o) + (z_4 - z_3)$$
$$(z_1 - z_o)) + (\mu'' - \mu')((x_4 - x_3)(x_2 - x_o) + (y_4 - y_3)(y_2 - y_o) +$$
$$+ (z_4 - z_3)(z_2 - z_o)) = o$$

TEOREMA III.14

En presencia de los axiomas I al VII se verifica que si existen tres puntos no alineados **P, Q, M**, y alineados dos a dos, entonces existe una y sólo una recta que pasa por uno de ellos y es paralela a la recta determinada por los otros dos.

Demostración

Si existen tres puntos no alineados **P, Q, M** y alineados dos a dos, existe un único plano α que los contiene, y según el axioma VII, una relación de ortogonalidad entre las rectas del -- plano que satisface 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4, entonces se verifican -- las hipótesis del Teorema I.14 del capítulo 1, y en consecuencia se verifica el Teorema.

3.5 EL ORDEN EN EL ESPACIO

Trataremos a continuación de ordenar los puntos del espacio, teniendo para ello ordenado el cuerpo base F. La ordenación de dicho cuerpo se ha efectuado en 1.8 del capítulo 1, partiendo de la axiomática referida al plano.

Resulta, sin embargo, que tal axiomática del plano está contenida en la axiomática del espacio que estamos tratando, en efecto:

a) El axioma I del espacio implica el axioma I del plano.

b) El axioma II del espacio implica el axioma II del plano.

c) El axioma VI del espacio implica el axioma III del plano.

d) El axioma VII del espacio implica el axioma IV del plano, (referido dicho axioma VII a un plano, una de cuyas rectas, sin pérdida de generalidad la O + Y, es de donde extraemos los elementos del cuerpo).

Así las cosas, con estos axiomas podemos asegurar que el cuerpo está ordenado y es denso, si bien no completo, como ya ocurría en el plano. Si queremos añadir esta característica al cuerpo base basta con introducir el siguiente

AXIOMA VIII (Cantor)

Dada una sucesión de segmentos encajados $A_n B_n$ en F, existe un elemento contenido en todos ellos.

A partir de aquí se ordenan los nuevos elementos de F, -

que llamaremos elementos reales de la misma forma que hacíamos en 1.8 del capítulo 1, con lo que se obtiene la caracterización de F como cuerpo ordenado y completo.

Ahora bien, la caracterización de un punto cualquiera del espacio como terna de elementos de F, se ha efectuado asignando - un elemento de F como primera coordenada, obtenido al trazar por el punto un plano paralelo al plano O + Z + Y que corta a O + X - en un punto, y por éste una recta paralela a X + Y en el plano - O + X + Y, que corta a O + Y en un punto que es la primera coordenada; otro elemento de F como segunda coordenada, obtenido por la intersección del plano paralelo a O + Z + X por el punto con el - eje O + Y; y un tercer elemento de F como tercera coordenada, obtenido al trazar por el punto un plano paralelo a O + X + Y, que cortará a O + Z en otro punto, por el cual pasará un plano paralelo a X + Y + Z que corta a O + Y en un punto que es la tercera -- coordenada.

De esta manera podemos dar la siguiente

Definición III.6

Dados dos puntos del espacio $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ donde, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 pertenecen a F, diremos que $A < B$ si y sólo si, ocurre que $a_1 < b_1$, o si $a_1 = b_1$ entonces $a_2 < b_2$, o si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$ entonces $a_3 < b_3$ en el orden definido en F.

Si suponemos tres puntos (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z'') de una recta cualquiera, resulta que

$$(x,y,z) < (x',y',z') < (x'',y'',z'')$$

si se verifica que $x < x' < x''$ o su inversa, o si $y < y' < y''$, o su inversa, o si $z < z' < z''$ o su inversa. Como la proyección paralela a un plano determinado por dos ejes de coordenadas nos da los puntos (x,o,o), (x',o,o), (x'',o,o); (o,y,o), (o,y',o), (o,y'',o); (o,o,z), (o,o,z'), (o,o,z''), entonces

o bien $(x,o,o) < (x',o,o) < (x'',o,o)$ si $x < x' < x''$

o bien $(x,o,o) > (x',o,o) > (x'',o,o)$ si $x > x' > x''$

o bien $(o,y,o) < (o,y',o) < (o,y'',o)$ si $y < y' < y''$

o bien $(o,y,o) > (o,y',o) > (o,y'',o)$ si $y > y' > y''$

o bien $(o,o,z) < (o,o,z') < (o,o,z'')$ si $z < z' < z''$

o bien $(o,o,z) > (o,o,z') > (o,o,z'')$ si $z > z' > z''$

En cualquiera de los casos, se conserva el orden en esta proyección.

Podemos entonces enunciar el siguiente

TEOREMA III.5

El espacio sobre el cuerpo F está totalmente ordenado.

C A P I T U L O 4

COMPATIBILIDAD E INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS EN EL ESPACIO

4.0 INTRODUCCION

En este capítulo se estudian la compatibilidad e independencia de los axiomas en el espacio de tres dimensiones.

El modo de hacerlo ha sido totalmente análogo al efectuado en el capítulo 2 para el plano. Por tanto, para el estudio de la compatibilidad procedemos de la forma usual, estableciendo la solidaridad lógica de nuestra axiomática con un modelo fiable, en este caso con la aritmética de los números reales. Se ha tomado como modelo $\mathbb{R}^3$. Se ha efectuado una atribución de significados a los conceptos indefinidos de punto, recta, plano, relación binaria de incidencia entre punto y recta, punto y plano, etc. Al igual que ocurría en el capítulo 2, se podría haber elegido como modelo $\mathbb{Q}^3$, pero no satisfaría el axioma de completitud.

En cuanto a la demostración de la independencia de los axiomas, se ha elegido el mismo método que en el capítulo 2, es decir, se han construido ocho modelos de geometría, en cada uno de los cuales se verifican siete de los axiomas y no se verifica aquel cuya independencia se quiere demostrar.

De este modo, existe un modelo (el que demuestra la compatibilidad) en el que se verifican los ocho axiomas, y otros modelos en los que se verifican siete y no el octavo, en consecuencia, este último es independiente de los anteriores.

La dificultad en construir los modelos ha sido superior, en la mayoría de los casos, a la de los modelos construidos en el plano, pues se añaden las dificultades de ser mayor el número de axiomas y de elementos con los que actuar. Al igual que en el plano, en algunos de tales modelos, los axiomas se verifican por no cumplirse las condiciones de las hipótesis de los mismos.

4.1 COMPATIBILIDAD DE LOS AXIOMAS

Los ocho axiomas enunciados en el capítulo 3 no son contradictorios, es decir, no es posible deducir lógicamente de estas proposiciones una proposición y su contraria. Para mostrarlo vamos a construir un sistema de elementos que satisfacen a todos los axiomas.

Consideremos el dominio de los números reales, una terna de números (x,y,z) del dominio como un punto, y las cuaternas (u,v,w,r) de cuatro números reales y sus proporcionales como un plano, con la condición de que u, v, w no sean los tres nulos.

Si la ecuación $ux + vy + wz + r$ se satisface por (x,y,z), decimos que este punto pertenece al plano (u,v,w,r). En fin, llamaremos recta al conjunto de los puntos pertenecientes a dos planos para los cuales las ternas (u,v,w) son distintas no proporcionales. Veamos que se satisfacen los ocho axiomas.

AXIOMA I.

Sean dos puntos $A \neq B$, $A = (a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3)$. Si existe la recta que contiene a ambos, se tendrán dos planos distintos cuya intersección será dicha recta, sean (u,v,w,r) y (u',v',w',r') dichos planos. Entonces se tendrá que verificar que

$$\left.\begin{array}{l} ua_1 + va_2 + wa_3 + r = o \\ ub_1 + vb_2 + wb_3 + r = o \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} u'a_1 + v'a_2 + w'a_3 + r' = o \\ u'b_1 + v'b_2 + w'b_3 + r' = o \end{array}\right\}$$

Si $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = o$ entonces $A + B = (x = o)(y = o)$

Si $a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = o$ entonces $A + B = (x = o)(z = o)$

Si $a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = o$ entonces $A + B = (y = o)(z = o)$

Si $a_1 = a_2 = a_3 = o$, como al menos dos b_i no son nulos, pues si - no estaríamos en los casos anteriores, entonces $r = o$, y la ecuación $ub_1 + vb_2 + wb_3 = o$ tiene infinitas soluciones, de las cuales dos cualesquiera nos sirven para obtener los planos cuya intersec ción es la recta pedida. Análogamente ocurriría para $b_1 = b_2 = - = b_3 = o$.

Si, por último, $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} a_2/a_1 = b_2/b_1 = k \\ a_3/a_1 = b_3/b_1 = k' \end{array}\right\} \text{ y la recta } A + B \equiv \left\{\begin{array}{l} -kx + y = o \\ -k'x + z = o \end{array}\right.$$

Vistos todos los casos particulares, en cualquier otro - para ambos sistemas resultará que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & r \\ b_1 & b_2 & b_3 & r \end{pmatrix}$$

Y el sistema tiene solución, que es el haz de planos que contiene a una recta.

Por otra parte, si dos planos (u,v,w,r) y (u',v',w',r') son tales que $u/u' = v/v' = w/w'$, entonces o bien $u/u' = v/v' = w/w' = r/r'$ y son el mismo plano, o bien, $u/u' = v/v' = w/w' \neq r/r'$ y entonces el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ux + vy + wz + r = o \\ u'x + v'y + w'z + r' = o \end{array}\right\}$$

no tiene solución, es decir, no hay ninguna terna (x,y,z) que satisfaga ambas ecuaciones y, en consecuencia, ambos planos son paralelos.

Diremos que dos rectas son paralelas si cada una de ellas es cada una de las intersecciones de un plano con dos planos paralelos.

AXIOMA II

Sean dos puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, sabemos por lo anterior que existe una única recta que los contiene, que será la intersección de dos planos (u,v,w,r) y (u',v',w',r').

Entonces, cualquier punto que satisfaga una de las dos - ecuaciones y no satisfaga a la otra, verifica que no está alineado con A y B.

AXIOMA III

Supongamos tres puntos no alineados, $A = (a_1, a_2, a_3)$, -- $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$. Veamos que existe un único plano (u,v,w,r) que los contiene.

Si existe dicho plano los elementos de la cuaterna dada deberán satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$ua_1 + va_2 + wa_3 + r = o$$
$$ub_1 + vb_2 + wb_3 + r = o$$
$$uc_1 + vc_2 + wc_3 + r = o$$

En el caso de existir solución tendría que ocurrir que - necesariamente dicha solución sería esencialmente única salvo factores de proporcionalidad, de manera que $u = \lambda r$, $v = \mu r$, $w = \theta r$, pues bien, se puede comprobar inmediatamente que el plano que contiene a los tres puntos viene dado por los coeficientes de la ecuación

$$\begin{aligned}((c_3 - a_3)(b_2 - a_2) - (c_2 - a_2)(b_3 - a_3))(x - a_1) &+ \\ + ((b_3 - a_3)(c_1 - a_1) - (b_1 - a_1)(c_3 - a_3))(y - a_2) &+ \\ + ((b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (c_1 - a_1)(b_2 - a_2))(z - a_3) &= o\end{aligned}$$

como se puede comprobar por simple cómputo.

AXIOMA IV

Es consecuencia inmediata de nuestra definición de recta. Si dos planos son paralelos (u,v,w,r) y (u',v',w',r'), y tienen un punto común (x_o,y_o,z_o), resulta que

$$\left.\begin{aligned} ux + vy + wz + r &= o \\ \lambda ux + \lambda vy + \lambda wz + r' &= o \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -r &= ux_o + vy_o + wz_o \\ -r' &= \lambda(ux_o + vy_o + wz_o) = \lambda(-r) \end{aligned}$$

y, en consecuencia, son el mismo plano y tienen todos los puntos comunes.

Si no son paralelos y tienen un punto común, por la definición de recta, su intersección es la recta conjunto de puntos comunes a ambos, entre ellos el (x_o,y_o,z_o).

AXIOMA V

Es trivial pues para cada tres puntos P, Q, M no alineados, existe un plano y un sólo que los contiene. Entonces un punto de cualquier otro plano que contenga a cualquiera de las rectas $P + Q$, $Q + M$ y $P + M$, y tal que dicho punto no esté en las rectas anteriores, no pertenece al plano $P + Q + M$.

De otra manera, bastará con dar sendos valores a dos de las variables en la ecuación del plano obtenida en la demostración de la compatibilidad del axioma III, obtener la tercera resolviendo la ecuación, y el punto obtenido con los dos valores dados y -- un tercero distinto del calculado, corresponde a un punto no perteneciente al plano.

AXIOMA VI

Dados dos puntos del espacio real cualesquiera, $P = (a,b,c)$ y $Q = (a',b',c')$, definimos el punto $R = (r_1,r_2,r_3)$, tal que --- $r_1 = (a + a')/2$, $r_2 = (b + b')/2$ y $r_3 = (c + c')/2$, y la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f\colon &(x,y,z) \longmapsto (2r_1 - x,\ 2r_2 - y,\ 2r_3 - z) \end{aligned}$$

que, evidentemente, es biyectiva.

Pues bien, esta aplicación es una alineación. En efecto:

a) $f \neq 1$, pues $x \neq 2r_1 - x$, $y \neq 2r_2 - y$, $z \neq 2r_3 - z$

$f^2 = 1$, pues $x = 2r_1 - (2r_1 - x)$, $y = 2r_2 - (2r_2 - y)$

$z = 2r_3 - (2r_3 - z)$

b) El único punto fijo de f es R, ya que

$$x = 2r_1 - x \Rightarrow x = r_1$$

$$y = 2r_2 - y \Rightarrow \quad y = r_2$$

$$z = 2r_3 - z \Rightarrow \quad z = r_3$$

c) Antes de comprobar que la aplicación transforma una recta en - otra paralela, veamos que un plano se transforma en otro paralelo. En efecto:

Sea el plano definido por la ecuación $ux + vy + wz + r = o$ que se transforma en $u(2r_1 - x) + v(2r_2 - y) + w(2r_3 - z) + r = o$, es decir, en el plano $(-u, -v, -w, 2r_1u + 2r_2v + 2r_3w + r)$, que es - evidentemente, paralelo al primero.

Supongamos, ahora, la recta determinada por dos puntos, P_o y P_1; el plano $R + P_o + P_1$ se transforma en el plano $R + P_o^f + P_1^f$, - que es igual a $R + P_o + P_1$, por ser paralelo y tener un punto - común con él. Otro plano que contenga a $P_o + P_1$ y no contenga a R se transformará en un plano paralelo que contiene a $P_o^f + P_1^f$. En consecuencia, la recta $P_o + P_1$ intersección del plano --- $R + P_o + P_1$ y otro plano α, que no contiene a R, se transforma en la intersección de $R + P_o + P_1$ y el transformado de α, que es paralelo a éste, luego la recta transformada es paralela a $P_o + P_1$.

Por tanto, se verifica que puntos alineados se transforman en puntos alineados y coplanarios con los anteriores.

d) Si un punto $P = (x_o, y_o, z_o)$ y su transformado

$P^f = (2r_1 - x_o, 2r_2 - y_o, 2r_3 - z_o)$ satisfacen las ecuaciones de dos planos distintos, es decir, pertenecen a la recta intersección de ambos planos, satisfarán las ecuaciones $ux + vy + wz + r = o$ y $u'x + v'y + w'z + r' = o$ correspondientes a los planos α y β.

Veamos que R satisface también las dos ecuaciones.

Si $P \in \alpha$, entonces $ux_o + vy_o + wz_o + r = o$

Si $P^f \in \alpha$, entonces

$$u(2r_1 - x_o) + v(2r_2 - y_o) + w(2r_3 - z_o) + r = o$$

y de aquí, $2ur_1 + 2vr_2 + 2wr_3 - ux_o - vy_o - wz_o + r = o$, y, -- entonces, $2ur_1 + 2vr_2 + 2wr_3 + 2r = o$, y $R \in \alpha$.

Análogamente se efectúa para β .

AXIOMA VII

Antes de definir una relación de ortogonalidad entre las rectas de cualquier plano del espacio y al objeto de aligerar el - cálculo, vamos a atribuir un significado algebraico al puramente - geométrico de recta definido hasta ahora.

Supongamos una recta determinada por dos puntos: $A = (x_o,y_o,z_o)$ y $B = (x_1,y_1,z_1)$ que es intersección de dos planos (u,v,w,r) y (u',v',w',r').

Se puede ver, por simple cómputo, que los puntos de la -- recta que pertenecen a ambos planos vienen dados por las ecuacio-- nes

$$x = x_o + \lambda (x_1 - x_o)$$
$$y = y_o + \lambda (y_1 - y_o)$$
$$z = z_o + \lambda (z_1 - z_o)$$

Pues bien, dentro de un plano cualquiera del espacio, podemos definir la relación de ortogonalidad de la siguiente manera: Dos rectas determinadas por sendos pares de puntos, $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P'_o = (x'_o, y'_o, z'_o)$ y $P'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$

$$\begin{aligned} x &= x_o + \lambda (x_1 - x_o) & \qquad x &= x'_o + \lambda (x'_1 - x'_o) \\ y &= y_o + \lambda (y_1 - y_o) & \qquad y &= y'_o + \lambda (y'_1 - y'_o) \\ z &= z_o + \lambda (z_1 - z_o) & \qquad z &= z'_o + \lambda (z'_1 - z'_o) \end{aligned}$$

son ortogonales si

$$(x_1 - x_o)(x'_1 - x'_o) + (y_1 - y_o)(y'_1 - y'_o) + (z_1 - z_o)(z'_1 - z'_o) = o$$

Es evidente que con esta definición de ortogonalidad y la definición de las rectas se verifican 0.1, 0.2 y 0.4, como se puede comprobar en la geometría elemental.

Para comprobar que se cumple la propiedad 0.3, podemos -- aplicar un criterio algebraico al paralelismo de rectas que se -- corresponde con el criterio geométrico ya visto. Sean los puntos P_o, P_1, P'_o, P'_1, entonces, $P_o + P_1 \quad P'_o + P'_1$ si y sólo si

$$\begin{aligned} x_o - x_1 &= \lambda (x'_o - x'_1) \\ y_o - y_1 &= \lambda (y'_o - y'_1) \\ z_o - z_1 &= \lambda (z'_o - z'_1) \end{aligned}$$

Con este criterio se comprueba inmediatamente que ambas - rectas son coplanarias y no concurrentes. Es válida esta condi--- ción para que se cumpla 0.3, como se puede comprobar en la geome-- tría elemental.

AXIOMA VIII

Se cumple trivialmente, pues el cuerpo de los números reales es completo.

4.2 INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS

Con el objeto de mostrar la independencia de los axiomas, trataremos de construir unos modelos de geometrías, donde se verifiquen siete de ellos y no se verifique aquel del que se quiere -- mostrar su independencia.

A tales modelos los designaremos por **MI**, **MII**, **MIII**, ... **MVIII**, entendiendo por **MI** al modelo donde se verifican todos los - axiomas menos el primero, **MII** donde se verifican todos menos el segundo, y así sucesivamente.

Independencia del Axioma I

Nuestro modelo **MI** consistirá en un par de puntos P_1 y P_2, un par de rectas r_1 y r_2 que contienen a P_1 y no contienen a P_2, y un plano que contiene a los cuatro elementos anteriores.

Es evidente que no se verifica el axioma I.

AXIOMAS II, III, IV, V, VI y VIII: Se verifican por no cumplirse - las condiciones de las hipótesis.

AXIOMA VII: Para comprobar que se verifica definimos la relación - entre las rectas de nuestro plano, de tal manera que $p(r_1) = r_2$ y $p(r_2) = r_1$, entonces se verifica 0.1 y 0.2 y, por no cumplirse las condiciones de las hipótesis, 0.3 y 0.4.

Independencia del Axioma II

Nuestro modelo MII consiste en un conjunto de rectas formado por la recta real r_1 y una recta $r_2 \neq r_1$ que sólo tiene un punto, que es el de intersección con r_1, y el plano el conjunto formado por la recta r_1 y sus puntos y la recta r_2.

Evidentemente no se verifica el axioma II. Comprobemos que se verifican los restantes.

AXIOMA I: Se verifica trivialmente.

AXIOMAS III, IV y V: Se verifican por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

AXIOMA VI: Dados dos puntos cualesquiera de r_1, P y Q, definimos el punto $R = (P + Q)/2$ y a partir de ahí, la aplicación

$$f: X \longrightarrow 2R - X$$

Esta aplicación es biyectiva, distinta de la identidad, $f^2 = 1$, existe un único punto fijo, precisamente R, y transforma la recta r_1 en ella misma.

AXIOMA VII: Definimos la relación p entre las rectas del plano, de manera que, $p(r_1) = r_2$, $p(r_2) = r_1$ que verifica 0.1 y 0.2 y, por no cumplirse las condiciones de las hipótesis, 0.3 y 0.4.

AXIOMA VIII: Se verifica trivialmente, pues r_1 es continua.

Independencia del Axioma III

Nuestro modelo **MIII** consiste en el conjunto de puntos del espacio real tridimensional, el conjunto de rectas del mismo y, como planos, las cuádruplas de elementos de **R**, **(u,v,w,r)**, donde **u,v, w** no son todos nulos. Diremos que un punto **(x,y,z)** pertenece a un plano si se verifica la ecuación

$$ux + vy + wz + r = o$$

Es evidente que tres puntos no alineados y alineados dos a dos pertenecen a más de un plano, concretamente, a la cuádrupla **(u,v,w,r)** y a sus proporcionales, que por la definición de plano, son distintos. Luego, no se verifica el axioma III.

Los restantes axiomas se verifican trivialmente, como ya se ha demostrado en la compatibilidad de los mismos.

Independencia del Axioma IV

Nuestro modelo **MIV** consiste en dos planos α_1 y α_2 que son las dos hojas de una superficie cónica de revolución, un punto **P**, que es el vértice de dicha superficie cónica y las rectas serán -- las semirrectas de cada hoja que tienen en común **P**.

Es evidente que los planos α_1 y α_2 tienen en común el punto P y ninguno más. luego no se verifica el axioma IV.

Veamos si se verifican los restantes axiomas:

AXIOMAS I, II, III, V, VI y VIII: Se verifican por no cumplirse - las condiciones de las hipótesis.

AXIOMA VII: Se verifica definiendo en cada plano la siguiente relación: A cada recta le hacemos corresponder su recta diametralmente opuesta. Es evidente que se verifican 0.1 y 0.2 y, por no verificarse las condiciones de las hipótesis, 0.3 y 0.4.

Independencia del Axioma V

Nuestro modelo **MV** consiste en el plano real $\mathbb{R}^2$, con sus rectas y sus puntos. Es evidente que no se verifica el axioma V, pues dados cualesquiera tres puntos del plano no alineados y alineados dos a dos, no existe otro punto que no sea coplanario con ellos.

Veamos que se verifican los restantes.

AXIOMAS I, II, VI, VII y VIII: Se verifican tal y como se demostró al tratar la compatibilidad de los axiomas del plano en el capítulo 2.

AXIOMA III: Se verifica evidentemente, pues cualesquiera tres puntos determinan el único plano existente $\mathbb{R}^2$.

AXIOMA IV: Se verifica por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

Independencia del Axioma VI

Nuestro modelo **MVI** consiste en cuatro puntos **A**, **B**, **C**, **D**; como planos las ternas de dichos puntos, y como rectas los pares de los mismos más una recta en cada plano que contiene sólo uno de los vértices.

Es evidente que no se verifica el axioma VI, pues en cada recta existen a lo más dos puntos y no existe un tercero que sea el centro de la alineación que los intercambia.

Veamos que se verifican los restantes axiomas:

AXIOMAS I, II, III, IV y V: Se verifican trivialmente.

AXIOMA VII: Si en cada plano definimos la relación entre rectas de la siguiente manera, en el vértice en el que concurren tres rectas, sean las que tienen dos puntos, ortogonales entre sí, y la tercera que sólo tiene en común dicho vértice, ortogonal a la tercera recta del plano que contiene dos puntos, y ésta a aquélla.

Entonces, en cada plano se verifican trivialmente 0.1 y 0.2. Se verifica, asímismo 0.3, por no cumplirse las condiciones de las hipótesis. En cuanto a 0.4, el punto de la intersección de las alturas en cada triángulo es precisamente el punto donde concurren las tres rectas que tienen un punto común en cada plano.

AXIOMA VIII: Se verifica por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

<u>Independencia del Axioma VII</u>

Nuestro modelo **MVII** consiste en un único punto, en una única recta que contiene ese punto, y en un único plano que contiene a ambos.

Es evidente que no se verifica el axioma VII, pues no existe una segunda recta que pueda ser ortogonal a la existente.

El resto de los axiomas se verifican por no cumplirse las condiciones de las hipótesis.

Independencia del Axioma VIII

Nuestro modelo **MVIII** será el espacio racional tridimensional, con la geometría analítica elemental de puntos, rectas y planos.

Es evidente que no se verifica el axioma VIII, y sin embargo, sí se verifican los restantes. Bastaría considerar en la demostración de la compatibilidad de los axiomas, en 4.1, en vez del cuerpo $\mathbb{R}$, el cuerpo $\mathbb{Q}$, y observar que ninguna de las ecuaciones obtenidas en dicha demostración lleva a la consideración de elementos irracionales.

A P E N D I C E

SOBRE LA GENERALIZACION AL ESPACIO N-DIMENSIONAL

A.0 INTRODUCCION

Parece natural pensar que, a la vista del desarrollo de la presente memoria, la axiomática propuesta debiera poder extenderse al caso n-dimensional. Es lo que haremos en el presente apéndice de dos modos distintos, uno, el puramente algebraico, y otro, el geométrico.

Sin embargo, como se verá tanto uno como otro, una vez perdida la noción intuitiva tan importante en los capítulos anteriores, nos conducen a resultados que carecen en principio de un interés claro y no aportan nada nuevo al objeto de nuestro trabajo. Es por lo que se hace en el modo algebraico una iniciación de la generalización definiendo puntos y un espacio vectorial, a partir del cual se pueden definir bases y el concepto de recta e hiperplano ortogonal a ella y, en general de hiperplano.

En cuanto al modo geométrico, se comienza el estudio del ejemplo de dimensión cuatro, en el que se han debido añadir un cierto número de axiomas, con respecto a los del capítulo 3, para asegurarnos que las incidencias entre los distintos elementos que se definen tengan las propiedades adecuadas. Se inicia una generalización de los axiomas, vía inducción, para el espacio n-dimensional, lo cual nos lleva a una gran complejidad axiomática que, en realidad, no conduce a ningún resultado interesante fuera del ya obtenido en el modo algebraico.

A.1 MODO ALGEBRAICO

Supongamos un plano como conjunto de puntos y rectas, -- con la relación binaria de pertenencia, y en el que se verifican - los cinco axiomas propuestos en el capítulo 1. Allí obtuvimos la caracterización de los elementos de una recta como elementos de un cuerpo **F** conmutativo, ordenado y completo.

Consideremos, pues, F^n, y definamos como punto **X** del -- n-espacio la n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in F$ para todo i. Definimos a partir de aquí el vector determinado por dos puntos **X**, **Y** - de F^n, como la n-pla $(y_1-x_1, y_2-x_2, \ldots, y_n-x_n)$ y a cada una de - estas diferencias las llamaremos coordenadas del vector.

Pues bien, definiendo en el conjunto de vectores la equipolencia de manera que un vector determinado por dos puntos **X**, **Y** - de F^n es equipolente a otro vector determinado por los puntos **X'**, **Y'**, si y sólo si las coordenadas de ambos son las mismas, se obtiene de forma inmediata que esta relación es de equivalencia, y el - conjunto cociente lo llamamos conjunto de los vectores libres, y a las clases de equivalencia vectores libres del espacio n-dimensional.

A partir de aquí se puede definir de forma natural, en - primer lugar la adición de vectores libres, haciendo corresponder a cada par de vectores, otro vector cuyas coordenadas son la suma de las coordenadas de los otros dos; y, en segundo lugar, el producto por un elemento de **F** de la forma siguiente:

$$\lambda v = (\lambda(y_1 - x_1), \lambda(y_2 - x_2), \ldots, \lambda(y_n - x_n))$$

Y se comprueba inmediatamente que con estas dos operaciones el conjunto de los vectores libres de F^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo F.

A partir de aquí se puede definir dependencia lineal de vectores y sus propiedades del modo usual, y deducir el Teorema de la base de un espacio vectorial.

Así las cosas, se pueden definir igualmente, variedades lineales vectoriales engendradas por un conjunto de vectores -- $G = \{ v_1, v_2, \ldots v_r\}$ como el conjunto de todos los vectos x tales que

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_r v_r$$

que será la ecuación vectorial de la variedad lineal engendrada por los vectores $v_1, v_2, \ldots v_r$.

Por último, si V es el espacio vectorial sobre el cuerpo F, D una variedad lineal vectorial engendrada por un conjunto G de vectores, y a un vector de V, se llama variedad lineal afín de origen a y variedad de dirección D, al conjunto A de todos los vectores de V que se obtienen sumando el vector a con cada uno de los vectores de D, lo que se expresa simbólicamente así

$$A = a + D$$

Es inmediato definir aquí el paralelismo entre dos variedades afines de la misma dimensión y pertenecientes ambas a una -- misma variedad de una dimensión inmediatamente superior; también todas las posibles incidencias entre variedades; y, por último, la relación de ortogonalidad que más interesa, que es la de recta e -

hiperplano, considerando éste como cualquier variedad afín de di--mensión n-1 en el espacio de dimensión n.

Pero todo este tratamiento se puede encontrar en cual---quier tratado de Algebra Lineal, y no se corresponde con el objeto del presente trabajo.

A.2 MODO GEOMETRICO

Sean en el tetraespacio (n-espacio), cuatro (n) conjuntos, uno de "puntos", otro de "rectas", otro de "planos", y otro de - "triplanos" (en el n-espacio continuaríamos hasta los (n-1)-planos), y tres relaciones binarias ((n-1) relaciones binarias), entre un - punto dado P y una recta dada l "P está (situado) sobre l" ($P \in l$); otra entre un punto dado P y un plano dado α, "P está (situado) sobre α" ($P \in \alpha$); y otra entre un punto dado P y un triplano $\mathfrak{a}$, "P está (situado) sobre $\mathfrak{a}$" ($P \in \mathfrak{a}$), (en el n-espacio continuaríamos con la relación entre un punto y un tetraplano, pentaplano, hasta un hiperplano (n-1)-plano). Estas relaciones pueden ser verdaderas o falsas para los pares P y l, P y α, P y $\mathfrak{a}$.

Todos los axiomas pueden ser expresados en términos de - estas relaciones. Sin embargo, también utilizaremos expresiones - equivalentes, con el objeto de aligerar el lenguaje, como "P pertenece a l", "P pertenece a α", "P pertenece a $\mathfrak{a}$", o, "l contiene a P", "α contiene a P", "$\mathfrak{a}$ contiene a P" o, "l pasa por P".

Podemos decir que l y m se encuentran en P, si P está a la vez sobre l y sobre m, y si P es el único punto sobre l y m, diremos que "l y m se cortan en P", o que "P es la intersección de - l y m".

Definición

Sean l y m dos rectas cuyos puntos están en un mismo plano, tales que $l = m$, o bien, ningún punto P está a la vez sobre l y m; entonces decimos que l y m son paralelas, y escribimos $l \parallel m$.

Si l y m no son paralelas y todos sus puntos pertenecen a un mismo plano, existe al menos un punto P a la vez sobre l y m.

Definición

Sean α y β dos planos cuyos puntos están en un mismo triplano, tales que $\alpha = \beta$, o bien, ningún punto P está a la vez sobre α y β ; entonces decimos que α y β son paralelos, y escribimos $\alpha \parallel \beta$.

Si α no es paralelo a β , entonces existe al menos un punto a la vez sobre α y β .

Definición

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos triplanos, tales que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, o bien que ningún punto P esté a la vez sobre $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, entonces decimos que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son paralelos, y escribimos $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$.

A continuación definiríamos el paralelismo entre rectas y planos, entre rectas y triplanos, y entre planos y triplanos, y esto en dimensión cuatro. Las definiciones de paralelismo aumentarían de forma espectacular si nos moviéramos en el espacio.

Veamos qué ocurre con los axiomas.

AXIOMA I

Si existen dos puntos distintos P y Q, existe un y sólo una recta l, tal que P está sobre l, y Q está sobre l. Escribimos $l = P + Q$.

AXIOMA II

Si existen dos puntos distintos alineados P y Q, existe un punto M no alineado con ellos.

AXIOMA III

Si existen tres puntos P, Q, M no alineados y alineados dos a dos, existe un único plano α, que los contiene. Escribimos $\alpha = P + Q + M$.

AXIOMA IV

Si dos planos α y β tienen un punto común P, tienen - al menos otro punto común Q.

AXIOMA V

Si existen tres puntos distintos no alineados P, Q, M, y alineados dos a dos, existe un punto T no coplanario con ellos.

AXIOMA VI

Si existen cuatro puntos no coplanarios, **P, Q, M, T**, existe un único triplano $\mathcal{Q}$ que los contiene. Escribimos

$$\mathcal{Q} = P + Q + M + T$$

AXIOMA VII

Si un plano α tiene tres puntos comunes con un triplano $\mathcal{Q}$, entonces todos los puntos de α están en $\mathcal{Q}$.

AXIOMA VIII

Si dos triplanos tienen un punto común, entonces tienen - al menos otros dos puntos en común.

AXIOMA IX

Si un plano α tiene un punto en común con un triplano - $\mathcal{Q}$, tiene al menos otro punto en común.

Estos axiomas serían los correspondientes a las inciden-- cias entre puntos, rectas, planos y triplanos, faltan evidentemente todos los referentes a paralelismo, incluidos como hipótesis en los capítulos 1 y 3, ya que parece razonable pensar que los axiomas de existencia de alineaciones y ortogonalidad en los i-planos del espacio pudieran conducir a los axiomas de paralelismo, como ha ocurrido en dichos capítulos 1 y 3

Debemos añadir que los axiomas de incidencia referidos a triplanos han sido propuestos no precisamente por una necesidad -- más o menos intuitiva, y sí con la intención de que se verifique - geométricamente lo que se verifica en los espacios vectoriales de dimensión cuatro. Un ejemplo de ello es el axioma VIII, ya que la intersección, si es no vacía, de dos variedades afines de dimensión tres en un espacio vectorial tetradimensional, es una variedad de dimensión dos.

En la generalización al n-espacio los axiomas serían -- enunciados por vía de inducción, por ejemplo: "si existen i puntos no pertenecientes a un (i-2)-plano, existe un único (i-1)-plano -- que los contiene, para $i > 3$".

Es decir, al trabajar en este modo geométrico, llegamos a que en la generalización a un n-espacio los axiomas pierden absolutamente tal carácter geométrico.

Como consecuencia inmediata parece lógico concluir que - la solución a la generalización que pretendíamos se encuentra en - el modo algebraico, que ya ha sido estudiado como se ha dicho anteriormente, y que no reviste mayor interés en la realización de esta memoria.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

(1) ABELLANAS, P. Discurso apertura Curso Académico 1979-80. Universidad Complutense.

(2) ARTIN, E. "Coordinates in affine geometry". Rep. Math. -- Colloquium (2). 2. 15-20 (1940)

(3) ARTIN, E. "Geometric Algebra". Intersiencie Publishers, Inc. New. York (1966)

(4) BACHMAN, F. "Aufbau der Geometric aus dem Spieglungs-be--- griff". Springer - Verlag (1959)

(5) BAER, R. "The fundamental Theorems of elementary Geometry". Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 56 (1944), pp.94

(6) BAER, R. "Homogeneity of proyective planes". Amer. J. - Math. Vol 64 (1942), pp. 137-152.

(7) BELTRAMI "Ensayo sobre la interpretación de la Geometría no euclídea" (1868)

(8) BIRKHOFF, G.D. "Collected Mathematical Papers" (American Ma-- thematical Society, 1950; Dover, 1968)

(9) BIRKHOFF, G.D. "A Set of Postulates for Plane Geometry bassed on Scale and Protactor". Annals of Mathematics. Vol. 33 (1932), pp. 329-345.

(10) BUJANDA, M.P. "Sobre el carácter algebraico de la Geometría" Reunión anual de Matemáticos Españoles. Valencia 1964.

(11) DESCARTES, R. "La géométrie". L' Arefppi. Nantes (1984)

(12) DIEUDONNE, J. "Algèbre Linéaire et géometrie élémentaire" Hermann. París (1964)

(13) DILLER,J/BOCZEK,J. "Euklidische Ebenen". Kap. 4. Göttingen -- (1967)

(14) EUCLIDES. "Euclid's elements". Traducción y versión - crítica de Sir Thomas L. Heath. Dover Publications, Inc. New York, 1956.

(15) HIGUERA, F. "Formulaciones algebraicas y geométricas - equivalentes". Memoria de Licenciatura. Facultad de Matemáticas. Universidad Complu-- tense (1985).

(16) HILBERT, D. "Grundlangen der Geometrie" 7 th. ed. Leipzig and Berlín (1930).

(17) HUNTINGTON, E.V. "A new set of Postulates for betwenness" -- Trans. American Mathematical Society. (1924), XXVI, p. 257.

(18) KARKEL,H/KIST,G. "Zur Begründung metrisch affiner Ebenen" - Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 49, 234-236 (1979)

(19) KENNEDY, H.C. "The origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano". The American Mathematical Monthly. Vol. 79 (1972), pp. 133-136.

(20) LINGENBERG, R. "Grundlangen der Geometrie". I. Mannheim - (1969)

(21) LINGENBERG, R. "Metric planes and metric vector spaces" -- New. York (1979)

(22) LINGENBERG, R. "Vollstandige metrische Ebenen". Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 48, (1979), pp. 241-263.

(23) LOBACHEWSKI "La teoría de las paralelas". 1866.

(24) MACLANE, S. "Metric Postulates for Plane Geometry". The American Mathematical Monthly. Vol. 66 -- (1959), pp. 543-555.

(25) MOORE, R. "Sets of metrical hypoteses for geometry". Trans. American Mathematical Society. Vol 9, (1908) pp. 487-512.

(26) MOULTON, F. R. "A simple non-desarguesian Plane Geometry". Transactions of the American Mathematical - Society. Vol. 3 (1902), pp. 192-195.

(27) PASCH, M. "Vorlesungen Über neuere Geometrie". 1882.

(28) PEANO, G. "I principi di geometria locamente esposti". 1889.

(29) PIERI, M. "Della Geometria elementale come sistema im potetico deduttivo, Monografía del Punto e del Moto". Memorie della Reale Academia delle Sciencie di Torino. Vol 49 (1899), pp. 173-222.

(30) PIERI, M. "Sopra gli assiomi aritmetici". Bolletino - dell' Acc. Gioenia in Catania. Serie 2ª -- (1908), p. 26.

(31) SACCHERI, G. "Euclides ab omni Naevo Vindicatus". (1733)

(32) SCHNABEL, R. "Kennzeichnungen euklidischer Ebenen als -- affine Ebenen mit Spiegelungsoperator". -- (1981).

(33) VEBLEN, O. "A system of axioms for Geometry". Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 5 (1904), pp. 343-384.

(34) VEBLEN, O. y otros "Non-desarguesian and non-pascalian geome-- tries". Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 8 (1907), pp. 379-388.