Anales de Psicología
ISSN: 0212-9728
servpubl@fcu.um.es
Universidad de Murcia
España

Rodríguez, Purificación; Lago, Mª Oliva; Caballero, Sonia; Dopico, Cristina; Jiménez, Laura; Solbes, Irene

El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo

Anales de Psicología, vol. 24, núm. 2, diciembre, 2008, pp. 240-252
Universidad de Murcia
Murcia, España

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=16711589007

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org
Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

anales de psicología
2008, vol. 24, nº 2 (diciembre), 240-252

© Copyright 2008: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia. Murcia (España)
ISSN edición impresa: 0212-9728. ISSN edición web (www.um.es/analesps): 1695-2294

TEMA MONOGRÁFICO: Psicología de las matemáticas

El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo

Purificación Rodríguez*, Mª Oliva Lago, Sonia Caballero, Cristina Dopico, Laura Jiménez e Irene Solbes

Universidad Complutense de Madrid

Resumen: Los niños pequeños tienen un conjunto de habilidades matemáticas que les permite enfrentarse con éxito a problemas con estructura aditiva y multiplicativa. Con objeto de determinar el alcance de esta afirmación, hemos evaluado a los mismos niños en dos ocasiones (i.e., cuando tenían 4-5 años y posteriormente a los 5-6 años) en problemas de Cambio y Grupos Iguales, usando objetos para facilitar el proceso de representación de las cantidades. Los resultados mostraron que: (1) el nivel de rendimiento de los niños, independientemente del momento de medición, era muy elevado en todos los problemas; (2) tan sólo se observó un cierto retroceso en el rendimiento en los problemas de sustracción; (3) en todos los problemas los procedimientos de resolución se basaban en general en la representación directa de las cantidades; (4) las estrategias de conteo aparecían exclusivamente en los problemas de adición y sustracción y las de conocimientos derivados, principalmente, en los de multiplicación y división; (5) la variabilidad de las estrategias dependía del tipo de operación y momento de medición y finalmente, (6) el cambio de estrategias era gradual y no abrupto.
Palabras clave: Adición; sustracción; multiplicación; división; problemas verbales; estrategias; variabilidad; cambio.

Title: The development of children's strategies. A study of the additive and multiplicative reasoning.
Abstract: Young children posses a wide range of arithmetical abilities that enable them to successfully face word problem, with additive and multiplicative structures. To test this, we have assessed the participants twice (i.e., when they were 4 to 5 years old and when they were 5 to 6 years old) with Change and Equal Groups problems, where objects were available to ease the representation of the quantities of the problems. The result showed that: (1) the level of children's success was very high, regardless the moment of assessment and the kind of problem; (2) only the subtraction problems registered a decrease during the second assessment; (3) the procedures of resolution were mainly based on the direct representation of the quantities for all kind of problems; (4) the counting strategies were used only in the additive and subtractive problems, while the derived fact strategies were mainly applied in the multiplication and division problems; (5) the variability in the use of the strategies was affected by the kind of operation involved in the problem and the moment of the assessment; and finally (6) strategy change seemed to be gradual rather than abrupt.
Key words: Addition; subtraction; multiplication; division; word problems; strategies; variability; change.

Introducción

Desde hace varias décadas la visión sobre las competencias matemáticas de los niños pequeños ha cambiado drásticamente, hasta el punto de que muchos autores consideran que algunas de estas competencias se encuentran ya presentes en los bebés (para una revisión ver, por ejemplo, Rodríguez, Lago y Jiménez, 2003). Sin embargo, el formalismo simbólico vinculado a las matemáticas imposibilita en muchas ocasiones evaluar el verdadero alcance de los conocimientos informales, pasando a menudo inadvertidos o careciendo de interés a los ojos del adulto que los consideran una manifestación más del juego infantil. Los niños de Educación Infantil (de ahora en adelante, E.I.) no sólo tienen una amplia gama de habilidades matemáticas, sino que las utilizan de manera flexible.

Las competencias matemáticas iniciales van más allá de la adquisición de los principios subyacentes al conteo y la habilidad para determinar el cardinal de un conjunto, implican también la capacidad de establecer relaciones entre las cantidades en términos de adición, sustracción, multiplicación y división. Por ejemplo, se ha estudiado la relación entre la competencia de contar y la resolución de tareas de reparto (p.e., Pepper y Hunting, 1998); el uso funcional de la habilidad de contar en tareas de adición y sustracción (p.e., Zur y Gelman, 2004); las relaciones entre el dividendo, divisor y cociente, así como el orden de adquisición de los modelos de la división (p.e., Correa, Nunes y Bryant, 1998; Squire y Bryant, 2002, 2003); y la comprensión de las propiedades de inversión y conmutatividad (p.e., Baroody, Wilkins y Tiilikainen, 2003; Bermejo y Rodríguez, 1993; Bryant, Christie y Rendu, 1999; Cowan, 2003; Rasmussen, Ho y Bisanz, 2003).

Más próximos a los objetivos del presente trabajo, se sitúan las investigaciones que examinan el desarrollo de los procedimientos de resolución en tareas aritméticas. Las estrategias matemáticas constituyen métodos flexibles y orientados a una meta, que bien pudiera ser la resolución de un problema aritmético. La investigación sobre el desarrollo de las estrategias es importante porque permite determinar cómo los niños organizan y procesan la información. Como señala Baroody (2003), el desarrollo del conocimiento aritmético implica establecer vínculos, gradualmente, entre el conocimiento conceptual y el conocimiento de los procedimientos, lo que permitirá una mayor flexibilidad en el uso e invención de nuevas estrategias. Por tanto, observar cómo emergen y se desarrollan las estrategias es un objetivo primordial de cara a establecer cómo surge y se desarrolla, por ejemplo, la comprensión de las operaciones aritméticas en los niños. En relación con esto, parece que existe una considerable variabilidad en el uso de las estrategias y en el modo en que los niños pasan de unas a otras, incluso cuando cursan E.I. (p.e., Carr y Hettinger, 2003; Geary, 2006). En efec-

* **Dirección para correspondencia** [Correspondence address]: Purificación Rodríguez. Facultad de Psicología. Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas, 28223 Madrid (España).
E-mail: p.marcos@psi.ucm.es

to, los niños disponen de múltiples estrategias para resolver no sólo diferentes problemas, sino un mismo problema (ver, por ejemplo, Siegler, 2003). Asimismo, el cambio de estrategias puede ser gradual o abrupto, esto es, cuando la variabilidad de las estrategias es mayor, los cambios son graduales y, por el contrario, si la variabilidad es menor o interviene un proceso de instrucción los cambios suelen ser abruptos (ver Alibali, 1999). Como señalan Lemaiere y Siegler (1995) la variabilidad es la característica más destacada del pensamiento infantil porque permite su adaptación a las condiciones cambiantes del medio. Además, la variabilidad se ha observado no sólo en el ámbito de la aritmética, sino también en otros ámbitos del desarrollo, como el recuerdo serial o el razonamiento moral, y reconocerla puede ser muy importante para comprender cómo aprenden los niños.

Descendiendo a un nivel más concreto, en el estudio de las estrategias se plantean cuestiones como las siguientes: ¿cuáles son los procedimientos que utilizan los niños de E.I. en la resolución de los problemas aritméticos? ¿existen semejanzas/diferencias entre ellos? ¿qué cambios experimentan antes de recibir enseñanza explícita sobre los algoritmos de adición, sustracción, multiplicación y división? Intentar responder a estos interrogantes constituyó el objetivo principal de este estudio.

En general, las investigaciones realizadas sobre las operaciones aritméticas elementales ponen de manifiesto que los niños, antes de recibir enseñanza formal sobre los algoritmos, construyen por sí mismos un amplio abanico de estrategias. Por ejemplo, Baroody y Tiilikainen (2003), a partir del modelo de elección de estrategias que se apoya en las teorías del procesamiento de la información y en la teoría de esquemas, han establecido seis estrategias de adición: (1) *contar todo con objetos concretos* (i.e., representan secuencialmente ambos sumandos y cuentan el total), (2) *contar todo con objetos concretos utilizando atajos* (i.e., representan simultáneamente -- con los dedos de cada mano-- los sumandos y cuentan la cantidad representada), (3) *conteo concreto de la cantidad añadida* (i.e., representan indirectamente la cantidad inicial y directamente la cantidad añadida con objetos, de modo simultáneo o secuencial, antes de contar el total), (4) *conteo abstracto* (i.e., descubren que la representación de los dos sumandos puede hacerse simultáneamente con el recuento total, lo que requiere un proceso de registro de la cantidad añadida), (5) *contar todo empezando por el sumando mayor* (i.e., es semejante a la anterior, pero en ésta la suma se inicia por el sumando mayor) y (6) *contar desde el sumando mayor* (i.e., comienzan el conteo con el cardinal que representa al sumando mayor y prosiguen añadiendo el menor). Igualmente, Baroody y Coslick (1998) encontraron las siguientes estrategias de sustracción: (1) *quitar de* (i.e., representan con objetos la cantidad correspondiente al minuendo y retiran de ese conjunto una cantidad de objetos equivalente al sustraendo), (2) *añadir a* (i.e., representan el sustraendo, añaden objetos hasta alcanzar el minuendo y cuentan la cantidad añadida) y (3) *emparejamiento* (i.e., representan el minuendo e inmediatamente debajo el sustraendo y finalmente, cuentan los objetos que no están emparejados).

Los estudios sobre las estrategias de multiplicación y división guardan ciertos paralelismos con los de adición y sustracción. En concreto, revelan que los niños pequeños recurren a estrategias informales como: (1) el *recuento unitario* (p.e., en un problema de multiplicación, hacen grupos de "x" elementos y cuentan todos los objetos), (2) el *doble recuento* (i.e., integran dos secuencias de conteo; por ejemplo, en un problema de división, generan la secuencia de números correspondiente al dividendo, de forma simultánea llevan la cuenta de los grupos que forman según el tamaño del divisor, siendo la respuesta el número de grupos contados) y (3) el *conteo de transición* (i.e., calculan la respuesta utilizando una secuencia de conteo basada en múltiplos de un mismo factor) (p.e., Anghileri, 1999; Caballero, 2006; Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999; Wright, Mulligan y Gould, 2000).

No obstante, los datos empíricos sobre las estrategias empleadas por los niños pequeños en la resolución de problemas de multiplicación y división son especialmente escasos y, en su mayoría, proceden de alumnos que si bien han iniciado la Educación Primaria no han recibido instrucción formal sobre estos conceptos (p.e., Empson y Turner, 2006; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Mulligan y Michelmore, 1997; Steel y Funnell, 2001). Una notable excepción la constituyen los trabajos de Carpenter y colaboradores (p.e., Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Carpenter *et al.*,1999), que fueron realizados con niños de E.I. En concreto, Carpenter *et al.* (1993) observaron que 60 niños de los 70 que participaron en su estudio emplearon estrategias correctas en el problema de multiplicación (i.e., 46 la representación directa y 14 el conteo), aunque sólo 50 obtuvieron el resultado correcto. En el problema de división de medida (i.e., división por el multiplicando), 51 niños utilizaron estrategias adecuadas y 50 dieron la respuesta numérica correcta (i.e., 50 niños recurrieron a la representación directa y 1 a las de conteo). Por último, en el problema de división partitiva (i.e., división por el multiplicador) 49 emplearon una estrategia válida, que en todos los casos condujo a una respuesta numérica correcta (i.e., 39 niños utilizaron la representación directa, 1 la de conteo y 9 otras estrategias). Este alto rendimiento pudo deberse a que los profesores habían sido entrenados previamente en el programa CGI (i.e., Instrucción Cognitivamente Guiada) y, por tanto, habían recibido instrucción específica sobre la necesidad de trabajar los conceptos matemáticos en el ámbito de los problemas. Por ese motivo, llevamos a cabo un estudio de réplica, con la salvedad de que ni los profesores ni los niños habían formado parte de ningún programa de entrenamiento previo (Lago, Rodríguez y Caballero, 1999). Los resultados corroboraron los hallados por Carpenter *et al.* (1993), ya que los porcentajes de éxito, derivados fundamentalmente de la aplicación de estrategias de representación directa, alcanzaron el 86% en problemas de multiplicación y el 72% y 70% en los de división partitiva y de medida (i.e., división por el multiplicando), respectivamente.

En otro orden de cosas, hay que tener en cuenta que la resolución de los problemas aritméticos depende tanto de factores externos como internos al individuo (ver Geary, 2006). Entre los primeros se incluyen la estructura semántica del problema, el lugar de la incógnita, el tamaño de las cantidades y la presencia o no de objetos para representar las relaciones entre las cantidades descritas en el problema (ver, por ejemplo, Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter y Moser, 1982, 1984; Lago y Rodríguez, 1999; Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2001). Los internos hacen referencia, por ejemplo, a la capacidad de la memoria de trabajo, el conocimiento conceptual y procedimental, la habilidad para formar representaciones viso-espaciales de las relaciones entre los problemas y la perseveración a la hora de resolver los problemas (p.e., Carr y Hettinger, 2003; Fuchs, Fuchs, Prentice, Burch, Hamlett, Owen y Schroeter, 2003; Tronsky y Royer, 2002).

Finalmente, la revisión de la literatura sobre las competencias aritméticas de los niños pequeños pone de manifiesto la falta de investigaciones transversales y especialmente longitudinales, que analicen simultáneamente las cuatro operaciones. Como señalábamos unas líneas más arriba, el estudio de Carpenter *et al.* (1993) representa un hito en este sentido. Uno de los datos más destacados de dicho trabajo es que el rendimiento de los niños en la resolución de problemas de adición, sustracción, multiplicación y división era similar. Además, en todos los problemas, independientemente de la operación, los niños aplicaban habitualmente estrategias que consistían en representar con objetos las acciones y relaciones descritas en los enunciados. A los datos anteriormente mencionados sobre multiplicación y división, hemos de añadir que 56 niños usaban una estrategia correcta en adición y 62 en sustracción.

Teniendo en cuenta todo lo dicho hasta el momento, hemos realizado un estudio longitudinal, con niños de 4 a 6 años, para determinar su conocimiento acerca de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división mediante problemas verbales. Esta meta se ha concretado, a su vez, en dos objetivos específicos. El primero consistía en establecer si las cuatro operaciones aritméticas representaban para los niños niveles semejantes de complejidad, como quedó patente en el estudio de Carpenter *et al.* (1993), o si se producía un proceso gradual de adquisición, como sugerían Wright, Mulligan y Gould (2000), habida cuenta de que la adición y sustracción implican cantidades extensivas que se pueden representar directamente, mientras que la multiplicación y la división entrañan cantidades extensivas e intensivas (i.e., cantidades que se derivan de otras cantidades: *tres sacos en cada casa)* que podrían precisar de una cierta experiencia previa con las anteriores. El segundo objetivo era analizar los procedimientos de resolución con un doble propósito: (1) establecer los tipos de estrategias utilizadas por los niños y (2) determinar la frecuencia de uso, estabilidad y variabilidad de las mismas, teniendo en cuenta el tipo de operación y el momento de medición.

Método

Participantes

El estudio se desarrolló a lo largo de dos cursos escolares. En el primer año se entrevistó a 15 niños de 2º de E.I., con edades comprendidas entre los 4-5 años (M: 4;7 años), y en el segundo se realizó el seguimiento a estos mismos niños cuando cursaban 3º de E.I. y tenían 5-6 años (M: 5;7 años).

Material y procedimiento

Todos los participantes tuvieron a su disposición distintos materiales para resolver los problemas. En concreto, tenían 8 casas de diferentes colores (i.e., 2 rojas, 2 verdes, 2 azules y 2 amarillas), 20 gallinas de plástico duro (iguales en tamaño, color y forma) y 20 sacos de trigo confeccionados con tela de color amarillo y rellenos de algodón (del mismo color, tamaño y forma). Además, se utilizó una marioneta de guante ("la vaca Paca"), que era la encargada de formular los problemas a los niños. Se han incluido fotografías de estos materiales en las representaciones de las estrategias, que aparecen en las distintas figuras a lo largo del artículo.

Todos los participantes resolvieron problemas con estructura semántica de Cambio (dos de adición y dos de sustracción) y de Grupos Iguales (dos de multiplicación y dos de división partitivos). Los problemas de Cambio hacen referencia a un suceso que introduce modificaciones en una cantidad inicial. Los de Grupos Iguales, como los que aparecen en la Tabla 1, implican tres cantidades: (a) el número de grupos (p.e., *la casa verde, la casa azul y la casa amarilla*), (b) el número de objetos en cada grupo (p.e., *3 sacos de trigo*) y (c) el número total de objetos (p.e., *9 sacos de trigo*). Cualquiera de estas cantidades puede constituir el elemento desconocido, de tal manera que los problemas que implican encontrar la cantidad final son los de multiplicación y aquéllos en los que el elemento desconocido es la segunda cantidad son los problemas de división partitivos (i.e., división por el multiplicador). En este trabajo hemos formulado los problemas de Grupos Iguales especificando la naturaleza concreta de cada uno de los grupos (p.e., *la casa verde, la casa azul y la casa amarilla*), pero no el papel que desempeñaban en la resolución de los problemas. Esta transformación se realizó para simplificar el proceso de representación de las cantidades del problema.

Es importante señalar que ninguno de los participantes había recibido instrucción explícita sobre estos contenidos.

En ambos cursos escolares, las pruebas fueron aplicadas en dos sesiones individuales, para evitar el cansancio de los niños. Asimismo, el orden de presentación fue establecido al azar y se mantuvo constante.

Tabla 1: Ejemplos de uno de los ensayos en cada tipo de problema.

ADICIÓN CAMBIO	En la casa azul hay 3 gallinas, y otras 5 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?
SUSTRACCIÓN CAMBIO	En la casa verde hay 6 gallinas y 2 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?
MULTIPLICACIÓN GRUPOS IGUALES	Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 3 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?
DIVISIÓN PARTITIVA GRUPOS IGUALES	Tenemos 12 gallinas que hay que guardar entre la casa azul, la amarilla y la verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada una?

En cuanto al tamaño de las cantidades, cuando los niños cursaban 2º de E.I., tanto los términos como los resultados de las diferentes operaciones aritméticas no excedieron en ningún caso de 7 (p.e., 3+3, 6-2, 3x2, 6÷3), mientras que en 3º de E.I. podían llegar hasta 12 (p.e., 3+5, 8-4, 3x3, 12÷3). En las dos mediciones se emplearon cantidades pequeñas para asegurarnos de que los niños eran capaces de contar con soltura hasta dichas cantidades y evitar que pudieran constituir una dificultad añadida. Sin embargo, las cantidades se elevaron en la segunda medición para que tuvieran ocasión de aplicar un mayor número de estrategias.

Por último, todas las sesiones fueron grabadas en vídeo para su análisis posterior.

Las respuestas a los problemas se consideraron apropiadas siempre que los niños aplicasen una estrategia adecuada de resolución, (a) tanto cuando ejecutaban correctamente los cálculos requeridos como (b) cuando cometían algún error de ejecución (p.e., un error al contar). Se consideraron respuestas propiamente erróneas aquellas derivadas de errores conceptuales, pero dada su escasa incidencia no van a ser tenidas en cuenta en el análisis de los datos

Resultados y discusión

¿Existen diferencias en el rendimiento de los niños en función del tipo de operación aritmética?

Para responder a esta cuestión, hemos realizado un ANOVA 2 (Momento de Medición: Medición 1 vs. Medición 2) x 4 (Tipo de Operación: Adición vs. Sustracción vs. Multiplicación vs. División) con medidas repetidas en los dos factores y ejecutado con el programa SPSS 15. El análisis reveló que no eran significativos los efectos principales de los factores Medición y Tipo de Operación, pero sí la interacción de estos dos factores ($F_{3,42} = 2.95$, $p < .05$, $\eta_p^2 = 0.174$) (ver Tabla 2).

La interacción Momento de Medición x Tipo de Operación puso de manifiesto que el rendimiento de los niños, en las dos mediciones, variaba dependiendo de la operación implicada en los problemas. Como más adelante tendremos ocasión de ver en el análisis de los procedimientos de resolución, los niños experimentaron importantes cambios en su comprensión aritmética en la segunda medición, pero los efectos no siempre se trasladaron al ámbito cuantitativo. En efecto, estas mejoras se apreciaron tan sólo en los problemas de adición y división (ver Tabla 2). Sin embargo, en los problemas de multiplicación alcanzaron niveles de éxito similares en ambas mediciones y en los de sustracción incluso registraron un retroceso durante la segunda medición (ver Tabla 2). Este retroceso fue debido a que 2 de 15 niños, que habían empleado estrategias correctas en los dos ensayos de la primera medición, resolvieron los problemas de sustracción como si se tratasen de problemas de adición en uno de los ensayos de la segunda medición, y otro hizo lo mismo en los dos ensayos.

Tabla 2: Medias y Desviaciones Típicas (entre paréntesis) de las respuestas correctas en los cuatro Tipos de Operación, según el Momento de Medición.

	Medición 1	Medición 2
Adición	1.47 (0.83)	1.87 (0.35)
Sustracción	1.73 (0.70)	1.47 (0.83)
Multiplicación	1.60 (0.74)	1.67 (0.72)
División	1.27 (0.88)	1.53 (0.83)

La puntuación máxima posible es 2.00

Asimismo, el hecho de que no resultasen significativos los efectos principales de los dos factores estudiados indica, por un lado, que la dificultad de todas las operaciones era similar para los niños de E.I., ratificando el planteamiento defendido por Carpenter *et al.* (1993) y Carpenter *et al.* (1999). Muy probablemente, debido a que los niños carecían de un conocimiento formal acerca de las operaciones aritméticas, las situaban todas en el mismo plano de dificultad y afrontaban los problemas representando con objetos las relaciones descritas entre los conjuntos, con independencia de que se tratase de cantidades intensivas o extensivas. Por otro, sugiere que si bien el rendimiento de los niños mejoró globalmente en el transcurso de un año, como señalábamos unas líneas más arriba, no fue suficiente para alcanzar la significación. En general, como ya había encontrado Carpenter *et al.* (1993) y Lago *et al.* (1999) el rendimiento fue muy elevado y en este caso, además, en las dos mediciones (i.e., el 60% de los niños resolvían 7 u 8 problemas correctamente en la primera medición y el 73.3% lo hacían en la segunda medición).

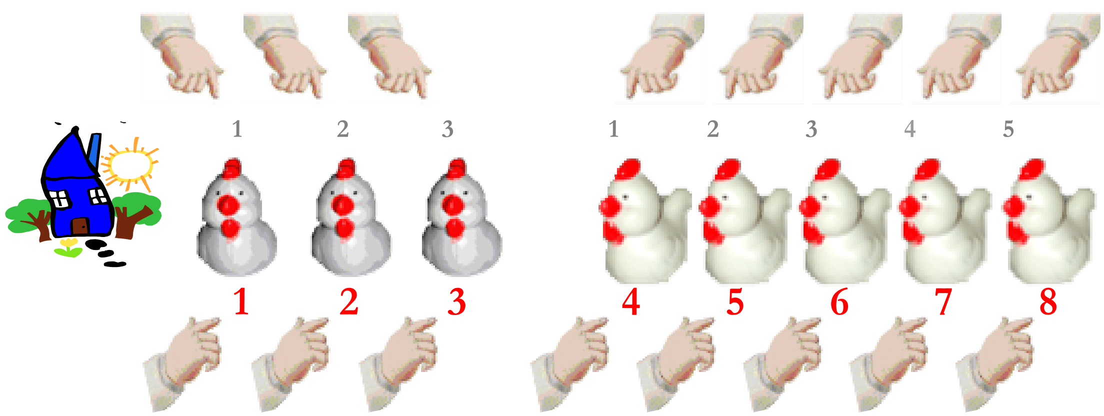
Tipos de estrategias de resolución

En este apartado se describen exhaustivamente los procedimientos de resolución empleados en los diferentes problemas, ya que apenas existen trabajos sobre las estrategias de multiplicación y división de los niños pequeños, ni estudios longitudinales en los que se analicen simultáneamente las cuatro operaciones aritméticas.

El análisis de los datos ha permitido diferenciar la presencia de tres tipos de estrategias: representación directa, conteo y conocimientos numéricos (i.e., conocimientos derivados y memorísticas). No obstante, antes de proceder a explicar dichos procedimientos conviene resaltar, como veremos en el siguiente apartado, que la mayoría de los niños utilizaron estrategias informales basadas en la representación de las cantidades con objetos, independientemente del momento de medida y el tipo de operación implicada, mientras que mostraron escaso conocimiento de otros procedimientos más evolucionados como las estrategias de conteo y las de conocimientos numéricos.

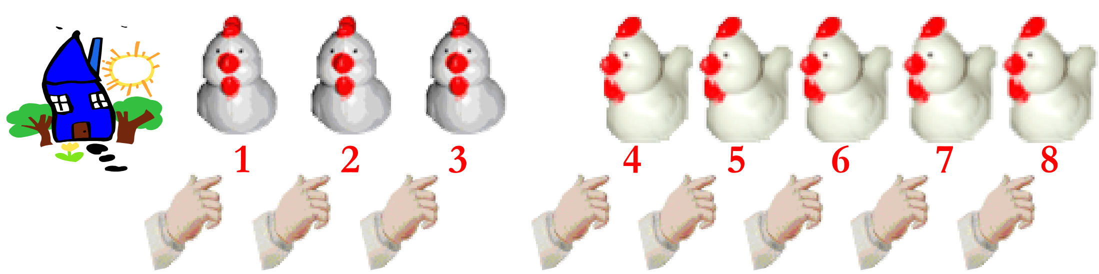
En los problemas de **adición** los niños ponían en marcha un total de tres estrategias de representación directa: (1) *representar todo y contar todo*; (2) *representar y contar a la vez*; (3) *representar un único término y contar*. Dos de conteo: (1) *contar todo sin objetos*; (2) *contar a partir del primer sumando* y las *memorísticas*.

En el primer caso, representaban y contaban el primer sumando, procedían de la misma forma con el segundo sumando y finalmente, para responder a la pregunta del problema, llevaban a cabo un nuevo recuento final de todos los elementos (ver Figura 1). En la segunda estrategia el avance que se producía tenía que ver con que los niños no necesitaban volver a contar, sino que representaban y contaban al mismo tiempo (ver Figura 2). En la tercera, representaban el primer sumando pero en esta ocasión el conteo proseguía con el segundo sin necesidad de representarlo físicamente. Por ejemplo, en el problema de adición que figura en la Tabla 1, los niños representaron tres gallinas y seguían contando "cuatro, cinco, seis, siete y ocho", sin recurrir a los objetos para representarlas. La estrategia en la que *cuentan todo sin objetos* consistía en que los niños representaban mentalmente los elementos a ser contados. Por ejemplo, uno de los participantes resolvió el problema de adición de la Tabla 1 indicando: "cuento primero tres y después cinco, en total son ocho", sin dar muestras en ningún momento de que hubiese utilizado los dedos o cualquier otra forma de representación. La estrategia de *contar a partir del primer sumando* tenía menos carga cognitiva que las anteriores porque los niños no necesitaban contar los dos sumandos. Por ejemplo, un niño respondió al mismo problema: "Son ocho, tengo tres y cuento cinco más y son ocho". Por último, las respuestas en las que los niños conocían el resultado de memoria fueron categorizadas como *memorísticas*.



En la casa azul hay 3 gallinas, y otras 5 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?

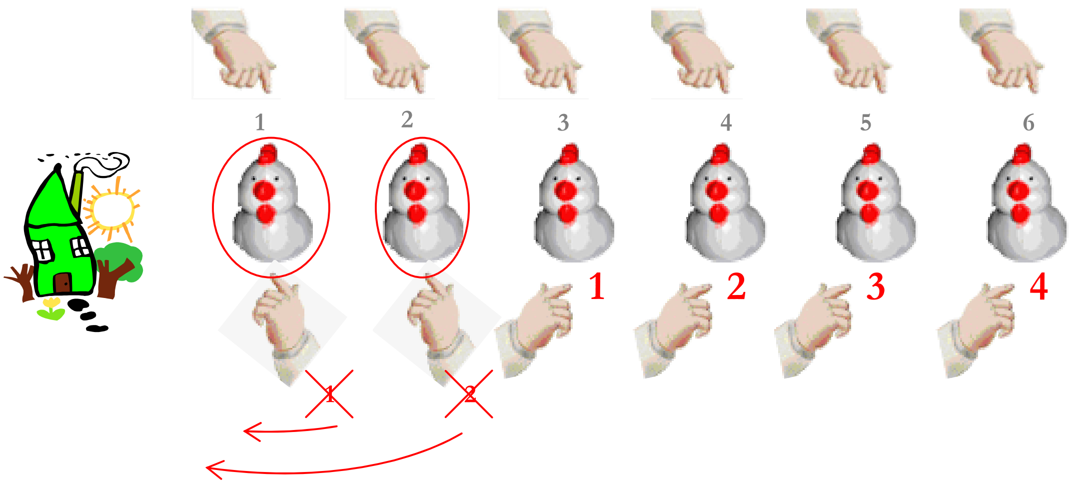
Figura 1: Estrategia 1 de adición: *representar todo y contar todo.*



En la casa azul hay 3 gallinas, y otras 5 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?

Figura 2: Estrategia 2 de adición: *representar y contar a la vez.*

En los problemas de **sustracción** aplicaron dos estrategias de representación directa: (1) *quitar de* y (2) *añadir a*; una de conteo (*contar hacia atrás*) y las de *conocimientos derivados*. En la estrategia *quitar de* los niños representaban con objetos el minuendo y retiraban una cantidad de objetos equivalente al sustraendo, contando finalmente los que quedaban (ver Figura 3).



En la casa verde hay 6 gallinas y 2 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?

Figura 3: Estrategia 1 de sustracción: *quitar de*.

La estrategia *añadir a* se basaba en la adición porque implicaba transformar el problema de sustracción “a – b = ?” en uno de adición “a + ? = b”. Como en el procedimiento anterior, representaban las dos cantidades pero comenzaban con el sustraendo e iban añadiendo elementos hasta igualarlo con el minuendo, respondiendo con el número de elementos añadidos. En la estrategia de *contar hacia atrás* contaban desde el minuendo hasta el sustraendo y respondían con el último término de la secuencia de conteo. Por ejemplo, en el problema de sustracción de la Tabla 1, uno de los participantes indicó lo siguiente: “quito la seis, quito la cinco y quedan cuatro”. Por último, también estuvieron presentes las estrategias de *conocimientos derivados*. Así, en el problema “En la casa verde hay 8 gallinas y 4 se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?” la respuesta de uno de los niños fue: “cuatro, porque cuatro y cuatro son ocho”. De hecho, los dos niños que optaron por las estrategias de conocimientos numéricos se basaron en sus conocimientos sobre la adición y no en la sustracción. En este sentido, Barrouillet, Mignon y Thevenot (2008) sugieren que los procedimientos de resolución de la sustracción (p.e., *contar hacia atrás*) suelen ser lentos e imprecisos, de ahí que si llegan a generar asociaciones entre el problema y la respuesta, éstas son débiles. Estos autores observaron además que algunas estrategias de sustracción (p.e., *añadir a*) contribuyen a reforzar el recuerdo de los conocimientos derivados en la adición, pero no en la sustracción.

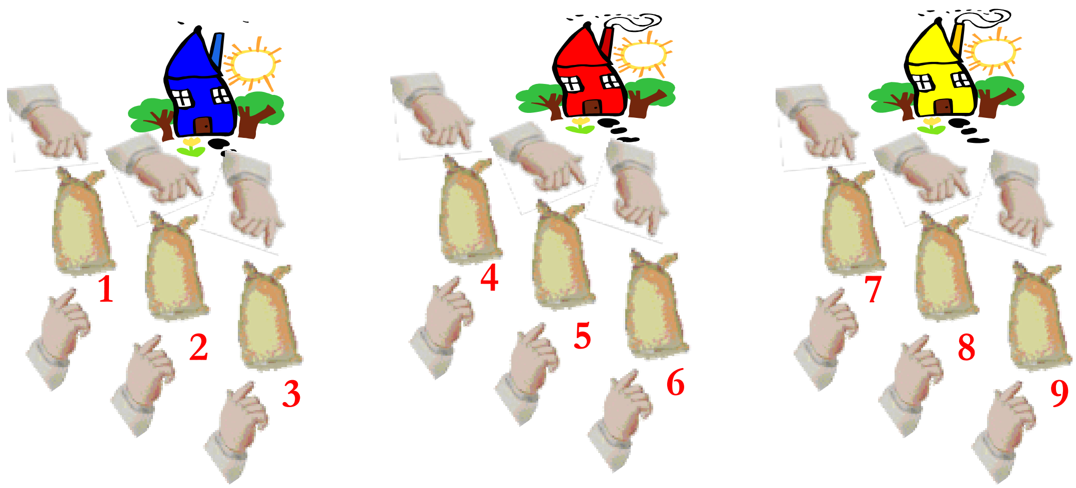
En cuanto a las estrategias de **multiplicación**, los niños aplicaron cuatro estrategias de representación directa: (1) *adición repetida con representación uno-a-uno*; (2) *adición repetida con representación por múltiplos*; (3) *adición repetida con representación uno-a-uno sin recuento final*; (4) *adición repetida representando un único factor sin recuento final*. También recurrieron a las estrategias *de conocimientos derivados*.

En la estrategia de *adición repetida con representación uno-a-uno* creaban con objetos un conjunto equivalente al multiplicando y, a continuación, les asignaban sucesivamente, uno-a-uno, los elementos correspondientes al multiplicador. Por último, contaban todos los elementos asignados (ver Figura 4).

A diferencia de la anterior, en la estrategia de *adición repetida con representación por múltiplos* asignaban simultáneamente los elementos correspondientes a cada uno de los objetos del multiplicando (ver Figura 5). Como en las dos estrategias precedentes los niños que recurrían a la estrategia de *adición repetida con representación uno-a-uno sin recuento final* construyeron el multiplicando con objetos y añadieron los elementos del multiplicador al tiempo que los iban contando, de modo que no necesitaban volver a contar para responder. Por ejemplo, en el problema de la Tabla 1, representaron tres casas y después fueron asignando a cada una tres sacos de trigo al tiempo que los contaban: “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve”. La estrategia de *adición repetida con representación de un único factor sin recuento final* fue empleada por un único participante en un ensayo durante la segunda medición. Representó con objetos sólo el multiplicando y añadió mentalmente los elementos del multiplicador. En concreto, la aplicó en el problema de la Tabla 1 y después de coger las tres casas añadió tres sacos en cada una y contó: “uno, dos, tres…cuatro, cinco, seis…siete, ocho, nueve”. Finalmente, las estrategias *de conocimientos derivados* se basaban en el repertorio de sumas de dobles que ya conocían. Por ejemplo, en el problema “Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa roja y en la casa verde 4 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?" los niños respondían: "cuatro aquí y cuatro aquí, son ocho".

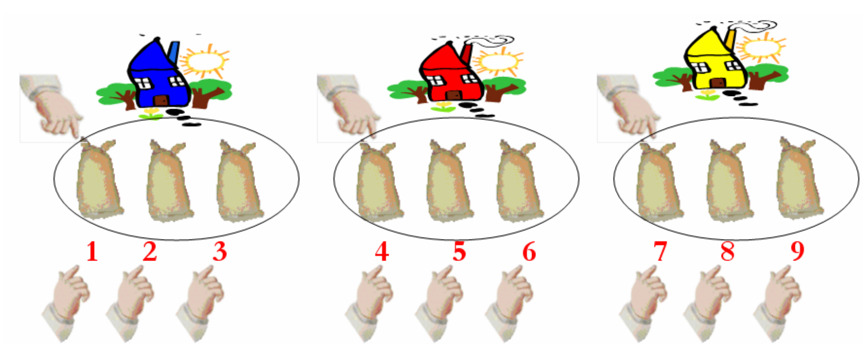
En la **división**, hemos encontrado tres estrategias de representación directa: (1) *reparto por ensayo y error*; (2) *reparto de uno en uno*; y (3) *reparto por múltiplos*. Los niños también emplearon algunas veces las estrategias *de conocimientos derivados*.

En la estrategia de *reparto por ensayo y erro*r, representaban el dividendo, luego el divisor repartiendo al azar los elementos correspondientes al dividendo entre los del divisor. A continuación, redistribuían los elementos hasta igualar los conjuntos y, finalmente, contaban cada uno de los conjuntos formados (ver Figura 6). En la estrategia de *reparto de uno en uno* realizaban los mismos pasos que en la anterior, pero la asignación de los elementos del dividendo a los del divisor se efectuaba secuencialmente y de uno en uno, procediendo por último a contar separadamente cada uno de los conjuntos formados (ver Figura 7). En el procedimiento de *reparto por múltiplos* seguían los pasos iniciales de las precedentes, pero ahora asignaban los elementos del divisor en función de un múltiplo conocido (p.e., de tres en tres) y posteriormente redistribuían los elementos que aún quedaban. La respuesta la obtenían, como en el caso anterior, contando.



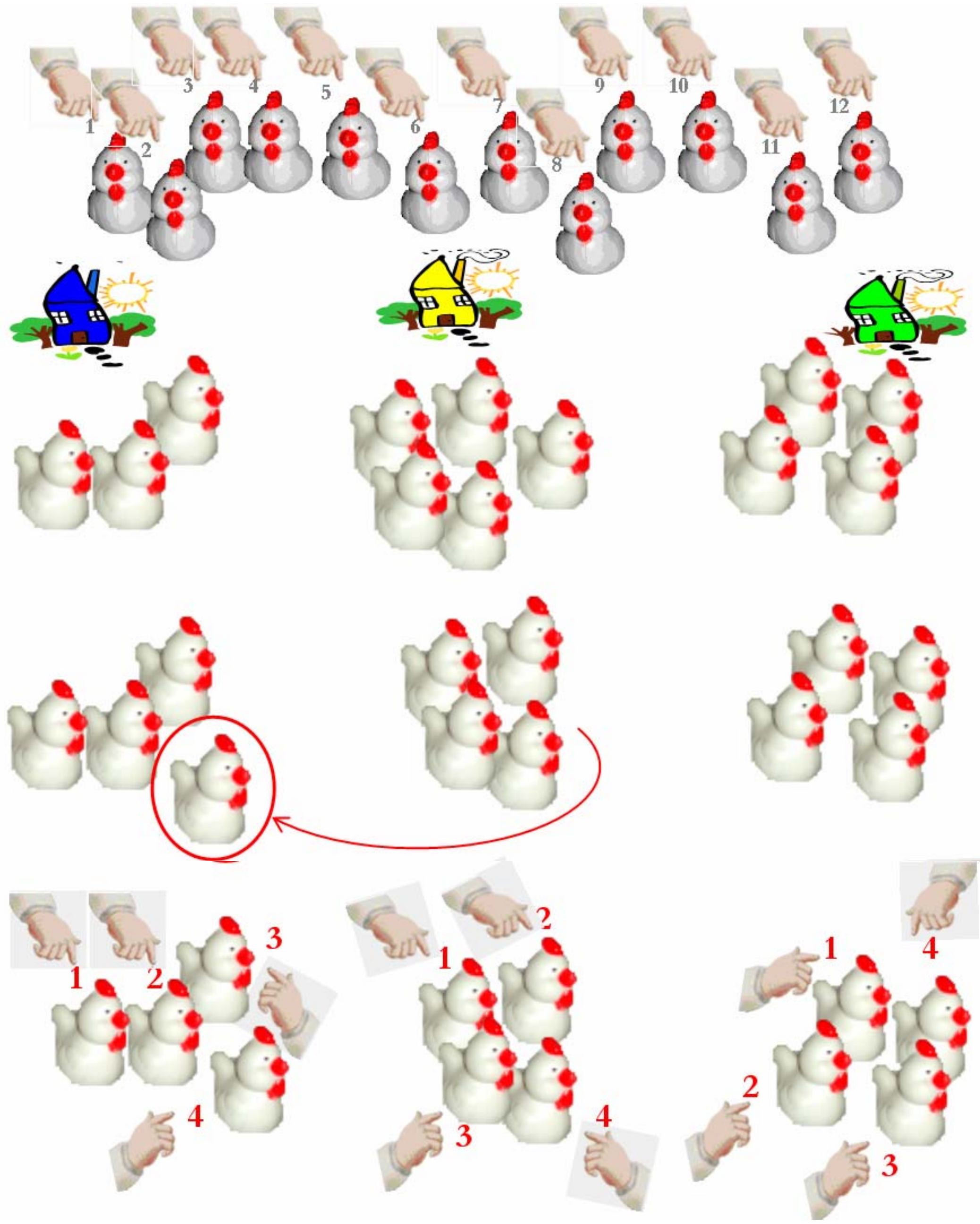
Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 3 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?

Figura 4: Estrategia 1 de multiplicación: *adición repetida con representación uno a uno.*



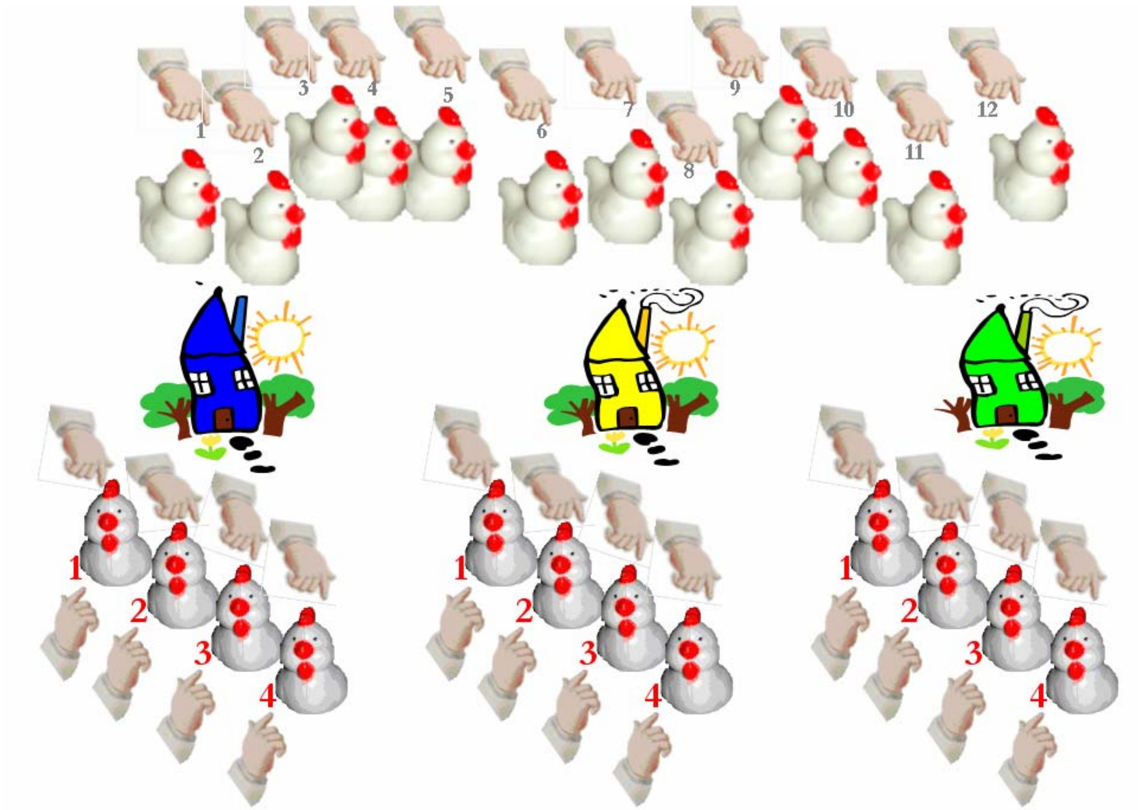
Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 3 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?

Figura 5: Estrategia 2 de multiplicación: *adición repetida con representación por múltiplos.*



Tenemos 12 gallinas que hay que guardar entre la casa azul, la amarilla y la verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada una?

Figura 6: Estrategia 1 de división: *reparto por ensayo y error.*



Tenemos 12 gallinas que hay que guardar entre la casa azul, la amarilla y la verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada una?

Figura 7: Estrategia 2 de división: *reparto de uno en uno.*

Las estrategias *de conocimientos derivados* parecen respaldar el planteamiento de Barrouillet, Mignon y Thevenot (2008), ya que no sólo hacen uso de las asociaciones aditivas sino que además las refuerzan. Por ejemplo, en el problema "Tenemos 8 gallinas que hay que guardar entre la casa azul y la amarilla. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada una?" uno de los niños respondió: "tiene que haber cuatro, porque cuatro y cuatro son ocho".

Frecuencia de uso, estabilidad y variabilidad de las estrategias

Con respecto a la frecuencia de uso de las estrategias, los datos de este estudio concuerdan con los de otras investigaciones (p.e., Carpenter *et al.*, 1993; Geary, 2006). Como puede observarse en la Tabla 3, en la primera medición, los niños claramente recurrieron a estrategias basadas en la representación directa de las cantidades con objetos, independientemente del tipo de operación implicada (i.e., 95.5%, 92.3%, 95.8% y 100% de los ensayos correctos, respectivamente en los problemas de adición, sustracción, multiplicación y división). En la segunda medición, descendió notablemente la aplicación de estos procedimientos en los problemas de multiplicación (i.e., 76% de los ensayos correctos) y de división (i.e., 73.9% de los ensayos correctos), debido a la aparición de la estrategia de conocimientos derivados. En concreto, en la segunda medición el 40% de los niños comenzaron a utilizar la estrategia de conocimientos derivados en multiplicación y división. Por último, en los problemas de adición y sustracción comenzaron a emplear estrategias de conteo (i.e., *contar todo sin objetos*, *contar a partir del primer sumando* y *contar hacia atrás*), pero no en los problemas de multiplicación y división (ver Tabla 3).

Tabla 3: Frecuencias de ensayos de las estrategias utilizadas por los niños en los diferentes problemas.

	Medición 1	Medición 2
ADICIÓN		
Representar todo y contar todo	14	16
Representar y contar a la vez	5	6
Representar un único término y contar	2	---
Contar todo sin objetos	---	3
Contar a partir del primer sumando	---	2
Memorísticas	1	1
SUSTRACCIÓN		
Quitar de	19	18
Añadir a	5	---
Contar hacia atrás	2	2
Conocimientos derivados	---	2
MULTIPLICACIÓN		
Adición repetida con representación uno-a-uno	17	11
Adición repetida con representación por múltiplos	6	6
Adición repetida con representación uno-a-uno, sin recuento final	---	1
Adición repetida representando un único factor, sin recuento final	---	1
Conocimientos derivados	1	6
DIVISIÓN		
Reparto por ensayo y error	18	11
Reparto de uno-en-uno	---	6
Reparto por múltiplos	1	---
Conocimientos derivados	---	6

En cuanto a la consistencia en la selección de estrategias, en la primera medición fue similar en todos los problemas (i.e., 40%, 53.3%, 46.7% y 46.7% de los niños en los problemas de adición, sustracción, multiplicación y división respectivamente), de modo que empleaban la misma estrategia en el primer y segundo ensayo de cada operación (i.e., las de representación directa). Sin embargo, en la segunda medición, este nivel de consistencia se mantuvo en la adición y sustracción (i.e., 46.7% y 53.3% de los niños respectivamente), pero descendió en multiplicación (i.e., 13.3% de los niños) y división (i.e., 26.7% de los niños). En los primeros, la ejecución consistente giraba en torno al uso de procedimientos de representación directa. No obstante, mientras que en los problemas de adición el 33.3% de los niños combinaron el uso de estrategias de representación directa con otras de conteo, en los problemas de sustracción los dos niños que no emplearon siempre la misma estrategia aplicaron las de conocimientos derivados junto con alguna de representación directa o de conteo. Por lo que respecta a la falta de consistencia en los problemas de multiplicación y división, se explica nuevamente porque combinaban las estrategias de representación directa con una de conocimientos derivados. La aparición de este procedimiento en la segunda medición no fue debido ni a la presencia de palabras clave, ni a las cantidades empleadas, ya que la formulación de los problemas no variaba entre una medición y otra y las cantidades que podrían elicitar este tipo de estrategias estaban en las dos mediciones, por ejemplo, los "dobles" (p.e., 3+3, 2x2) o la "mitad" (p.e., 8÷2, 4÷2).

El análisis de la variabilidad de las estrategias se realizó a partir del número total de procedimientos correctos diferentes mostrados por los niños en las distintas operaciones y momentos de medición. El ANOVA 2 (Momento de Medición: Medición 1 vs. Medición 2) x 4 (Tipo de Operación: Adición vs. Sustracción vs. Multiplicación vs. División), con medidas repetidas en los dos factores y ejecutado con el programa SPSS 15, reveló que era significativa la interacción de los dos factores ($F_{3,42}$) = 4.68, $p < .05$, $\eta_p^2 = 0.25$) y no los efectos principales (ver Tabla 4).

Tabla 4: Medias y Desviaciones Típicas (entre paréntesis) del número total de estrategias correctas en los cuatro Tipos de Operación, según el Momento de Medición.

	Medición 1	Medición 2
Adición	1.06 (0.70)	1.40 (0.51)
Sustracción	1.20 (0.68)	0.93 (0.59)
Multiplicación	1.13 (0.64)	1.53 (0.74)
División	0.80 (0.56)	1.27 (0.80)

La puntuación máxima posible es 2.00

En general, la variabilidad de las estrategias aumentó en la segunda medición, excepto en el caso de la sustracción. En efecto, la interacción mostró que en la primera medición el número de estrategias utilizadas por los niños era similar en los problemas de adición, sustracción y multiplicación y muy superior al promedio de estrategias de división (ver Tabla 4). Sin embargo, en la segunda medición el número de estrategias de sustracción se situó por debajo de las empleadas en las restantes operaciones que, por el contrario, experimentaron una tendencia creciente (ver Tabla 4). Estos datos parecen indicar que no existe una única tendencia en la variabilidad sino varias, dependiendo del tipo de operación y del nivel de partida. Así parece desprenderse del caso de la sustracción, porque la evolución de las estrategias de representación directa había alcanzado su techo durante la primera medición. De ahí que en la segunda medición, 8 niños utilizaran estrategias más evolucionadas en los problemas de adición, 10 en los de multiplicación, 10 en los de división y tan sólo 3 en los de sustracción. Con respecto a esto, es importante tener en cuenta que los cambios no se producían en los mismos niños a lo largo de las cuatro operaciones. De hecho, tan sólo uno de ellos cambió a una estrategia más evolucionada en las cuatro operaciones. Por eso, este resultado ha de interpretarse con precaución, ya que un mismo niño puede emplear una estrategia de conocimientos numéricos (i.e., conocimientos derivados y memorísticas) en un ensayo de una operación dada y en el siguiente recurrir a otro procedimiento más primitivo. Del mismo modo, puede usar una estrategia más sofisticada en una operación que en otra. Desde nuestro punto de vista, lo que está ocurriendo en la segunda medición es que al aumentar las experiencias informales, los niños se sienten más seguros y confiados en sus propios recursos y por ese motivo, prueban distintas formas de resolver los problemas. Este comportamiento se asemeja al *modelo de olas que se solapan* de Siegler (p.e., 1996). Este autor concibe el desarrollo de las estrategias no como una sucesión de niveles de complejidad creciente, sino como diversas estrategias que se van incorporando y solapando con las ya existentes y que con el tiempo, también serán eliminadas.

Otro aspecto a destacar en relación con la variabilidad fue que los cambios en las estrategias consistían en un acortamiento de los procedimientos empleados (i.e., representación directa), pero raramente los niños daban el salto a estrategias de conteo y conocimientos derivados, al menos simultáneamente en las cuatro operaciones.

En suma, los resultados de este estudio apuntan que el cambio de estrategias en estas edades parece ser más bien gradual. Por tanto, nuestros datos no concuerdan con los de Alibali (1999), ya que esta autora encontró un decremento en la variabilidad de las estrategias entre las medidas pretest y postest. No obstante, este efecto era debido al influjo de la instrucción que recibían los niños entre ambas mediciones, mientras que en la presente investigación no mediaba ningún proceso de enseñanza-aprendizaje.

Conclusiones

El mundo físico y social en el que se desarrollan los niños pequeños les brinda la oportunidad de adquirir numerosos conceptos relacionados con la aritmética, antes de la enseñanza formal. Como se ha puesto de relieve en el presente estudio, los niños de Educación Infantil afrontaban con éxito problemas de adición, sustracción, multiplicación y división a través de un amplio abanico de estrategias, entre las que destacaban las basadas en la representación directa de las cantidades con los objetos. No obstante, los datos de este estudio también indicaron que no había diferencias entre una medición y otra, a pesar de haber transcurrido un año. Este resultado podría estar indicando, bien que la presencia de los objetos ha inhibido la manifestación de otras estrategias más sofisticadas y conocidas por los niños, como las basadas en el conteo, bien que estos conocimientos informales tienen limitaciones conceptuales y procedimentales, que muy probablemente sólo se superarán a través de la enseñanza formal. De hecho, los cambios en las estrategias solían consistir en acortamientos de los procedimientos ya conocidos y sólo algunos de los participantes empezaban a desarrollar estrategias de conteo en adición y sustracción y de conocimientos derivados en algunos ensayos en los problemas de multiplicación y división, que a su vez eran las responsables de la falta de consistencia y la variabilidad en la segunda medición. En cualquier caso, como señalan Carr y Hettinger (2003), a medida que los niños tienen más práctica con diferentes tipos de problemas son capaces de recurrir a estrategias más eficientes y sofisticadas. Usar debidamente una estrategia significa, según estos mismos autores, que han desarrollado una buena comprensión conceptual de la misma, lo que les permite adaptarla y aplicarla a una gran variedad de situaciones.

Desafortunadamente, como ya advertíamos al inicio de este trabajo, estos conocimientos informales suelen pasar a menudo inadvertidos, especialmente los referidos a la multiplicación y división. Sin embargo, tal y como hemos hallado en éste y otros trabajos, entre los 4 y los 6 años los niños empiezan a construir conceptos sobre las operaciones de multiplicación y división que implican agrupamientos o particiones de colecciones de objetos discretos. La vida diaria les ofrece múltiples oportunidades para enfrentarse a este tipo de situaciones, que pueden ser fácilmente superadas con la presencia de objetos físicos que les sirven de ayuda para representar las diferentes condiciones. El reto que queda por delante no sólo es reconocer estos conocimientos, sino también vincularlos con la enseñanza formal de las operaciones aritméticas en la Educación Primaria. En otras palabras, tender un puente entre las estrategias ideadas por los propios niños y los procedimientos formales basados en los algoritmos. Con respecto a esto, si reconocemos que los niños no sólo tienen facilidad para resolver problemas de adición y sustracción, sino que también pueden resolver problemas de multiplicación y división, significaría, por un lado, que la enseñanza de las nociones aritméticas elementales basadas en la utilización de problemas verbales con estructuras semánticas diferentes puede ser extremadamente útil para todas las operaciones y, por otro, que no hay que esperar una serie de años a que asienten las nociones de adición y sustracción para comenzar con la enseñanza de la multiplicación y la división. Si nuestro punto de partida es que los niños "saben" y aprovechamos esos conocimientos, seguramente se van a sentir más competentes a la hora de afrontar nuevos aprendizajes. Al mismo tiempo, esto también podría inhibir la manifestación de creencias erróneas y emociones negativas sobre las matemáticas que se comienzan a desarrollar desde muy temprano.

Con todo esto, estamos defendiendo una perspectiva de la educación en la que el objetivo cambia de intentar averiguar lo que los niños "no pueden hacer" a intentar descubrir "lo que pueden hacer", de enseñar directamente procedimientos concretos a fomentar que sean ellos mismos quienes los inventen y descubran relaciones entre unos y otros. Precisamente, una de las grandes enseñanzas del programa de Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) ha sido observar cuánto pueden aprender los niños cuando sus profesores realmente comprenden el pensamiento infantil y les dan la oportunidad de construir su propio conocimiento. Uno de los comentarios realizados por una profesora que intervino en este programa resulta especialmente revelador. Afirmaba que los niños no tenían dificultad para comprender los conceptos que les estaba intentando enseñar, pero que eran incapaces de encontrar sentido a los procedimientos específicos que ella estaba intentando que usasen. En esta misma línea, señala Baroody (2003) que si los profesores tienen una profunda comprensión acerca de cómo aprenden los niños y cómo se desarrolla su pensamiento matemático, podrán planificar mejor las tareas, provocar el conflicto cognitivo y promover el aprendizaje significativo. Los niños no siempre razonan y aprenden las matemáticas del mismo modo que los adultos, de ahí que su aprendizaje debería ser autodirigido y tendría que surgir de la interacción con el mundo físico y social.

Referencias

Alibali, M. W. (1999). How children change their minds: Strategy change can be gradual or abrupt. *Developmental Psychology*, *35(1)*, 127-145.

Anghileri, J.(1999). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 367-385.

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A.J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptative expertise* (pp.1-33). Mahwah: Erlbaum.

Baroody, A. J. y Coslick, R.T. (1998). *Fostering children´s mathematical power: An investigative approach to k-8 mathematics instruction*. Mahwah: Erlbaum.

Baroody, A.J. y Tiilikainen, S. (2003). Two perspective on addition development. En A.J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptative expertise* (pp.75-125). Mahwah: Erlbaum.

Baroody, A.J., WilkinsJ.L. y Tiilikainen, S. (2003). The development of children´s understanding of additive commutativity; From protoquantitative concept to general concept. En A.J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptative expertise* (pp.127-160). Mahwah: Erlbaum.

Barrouillet, P., Mignon, M. y Thevenot, C. (2008). Strategies in subtraction problem solving in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *99*, 233-251.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, *39-40*, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1993). Children´s understanding of the commutative law of addition. *Learning and Instruction*, *3*, 55-72.

Bryant, P., Christie, C. y Rendu, A. (1999). Children´s understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*, 194-212.

Caballero, S. (2006). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de Educación Infantil.* Madrid: UCM.

Carr, M. y Hettinger, H. (2003). Perspectives on mathematics strategy development. En J. Royer (Ed.), *Mathematical cognition* (pp.33-68). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carpenter, T. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 179-202

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24(5)*, 428-441.

Carpenter, T. Fenenma, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Children´s mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Porstmouth: Heinemann.

Correa, J., Nunes, T. y Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, *90(2)*, 321-329.

Cowan, R. (2003). Does it all add up? Changes in children´s knowledge of addition combinations, strategies, and principles. En A.J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptative expertise* (pp.35- 74). Mahwah: Erlbaum.

Empson, S.B. y Turner, E.E. (2006). The emergence of multiplicative thinking in children's solutions to paper folding tasks. *Journal of Mathematical Behavior, 25,* 46-56.

Fuchs, L., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C., Owen, R. y Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade students' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, *95*, 306-315.

Geary, D. (2006). Development of mathematical understanding. En D. Kuhn y R. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology* (pp. 777-810). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Kouba, V. (1989). Children´s solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20(2)*, 147-158.

Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1999). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción II. Áreas curriculares* (pp. 75-95). Madrid: Síntesis.

Lago, M.O., Rodríguez, P. y Caballero, S. (1999). La resolución de problemas verbales de multiplicación y división en niños de educación infantil. Comunicación presentada en el III Congreso Internacional de Psicología y Educación, Santiago de Compostela, España. 8- 11 de septiembre.

Lago, M.O. Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, M.J. (2001). La reformulación de los enunciados el problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *Suma*, 37, 55-62.

Lemaire, P. y Siegler, R. (1995). Four aspects of strategic change: Contribution to children´s learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124(1)*, 83-97.

Mulligan, J. (1992). Children´s solutions strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Mathematics Education Research Journal*, *4*, 24-42.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (1997). Young children´s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28(3)*, 309-330.

Pepper, K.L. y Hunting, R.P. (1998). Preschoolers counting and sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29(2)*, 164-183.

Rasmussen,C.. y Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *85*, 89-102.

Rodríguez, P., Lago, M.O. y Jiménez, L. (2003). El bebé y los números. En I. Enesco (Coord.), *El desarrollo del bebé. Cognición, emoción y afectividad* (pp. 147-169). Madrid: Alianza Editorial.

Siegler, R. (1996). *Emerging minds. The process of change in children´s thinking.* Oxford: Oxford University Press.

Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. En Kilpatrick, J., Martin, W. B., y Schifter, D. E. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Squire, S. y Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology*, *81*, 1-43.

Squire, S. y Bryant, P. (2003). Children's models of division. *Cognitive Development*, *18*, 355-376.

Steel, S. y Funnell, E. (2001). Learning multiplication facts: A study of children taught by discovery methods in England. *Journal of Experimental Child Psychology*, *79*(1), 37-55.

Tronsky, L. y Royer, J. (2002). Relationships among basic computational automaticity, working memory, and complex mathematical problem-solving. En J. Royer (Ed.), *Mathematical cognition* (pp. 117-146). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Wright, J., Mulligan, J. y Gould, P. (2000). Extending the learning framework to multiplication and division. En R.J. Wright, J. Martland y A. Stafford (Eds.), *Assessment for teaching and intervention* (pp. 154-176). London: Sage.

Zur, D. y Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 121-137.

(Artículo recibido: 30-7-2008; aceptado: 1-9-2008)