

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**Departamento de Geometría y Topología**



**DIMENSIÓN ASSOUD-NAGATA Y LA  
GEOMETRÍA A GRAN ESCALA DE GRUPOS  
NUMERABLES.**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**  
**PRESENTADA POR**

**José Manuel Higes López**

Bajo la dirección de los doctores

Jerzy Dydak  
José Manuel Rodríguez Sanjurjo

**Madrid, 2009**

- ISBN: 978-84-692-8446-9

# Dimensión de Assouad-Nagata y la geometría a gran escala de grupos numerables

Memoria presentada para optar al grado de doctor

José Manuel Higes López  
Departamento de Geometría y Topología.  
Facultad de CC.Matemáticas.  
Universidad Complutense de Madrid.

Directores:  
Jerzy Dydak  
University of Tennessee.  
José Manuel Rodríguez Sanjurjo.  
Universidad Complutense.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>Preliminares</b>	<b>XI</b>
0.1. Definiciones básicas . . . . .	XI
0.2. Propiedades elementales de las dimensiones . . . . .	XX
0.3. Definición de conos asintóticos . . . . .	XXI
0.4. Algunas propiedades geométricas de los grupos . . . . .	XXII
<b>1. Propiedades de la dimensión de Assouad-Nagata</b>	<b>1</b>
1.1. Dimensión microscópica y macroscópica . . . . .	3
1.2. Espacios de dimension cero . . . . .	7
1.2.1. Espacios ultramétricos . . . . .	7
1.2.2. Dimensión de Assouad-Nagata y Espacios Ultramétricos . . . . .	12
1.2.3. Espacios de Dimension Uniforme nula . . . . .	13
1.2.4. Ejemplos de espacios ultramétricos no equivalentes a gran escala . . . . .	15
1.3. Dimensión de Assouad-Nagata y extensiones Lipschitz . . . . .	18
1.3.1. Esferas como extensores Lipschitz . . . . .	18
1.3.2. Dimension de Assouad-Nagata y extensiones Lipschitz . . . . .	23
<b>2. Dimensión de Assouad-Nagata e invariantes a gran escala</b>	<b>27</b>
2.1. Dimensión de Assouad-Nagata y conos asintóticos . . . . .	29

2.1.1.	Dimension de Assouad-Nagata y una propiedad de Nagata . . . . .	29
2.1.2.	Aplicaciones con fibras métricamente paralelas . . . . .	30
2.1.3.	Dimension topológica de conos asintóticos . . . . .	34
2.1.4.	Cotas inferiores para la dimensión de Assouad-Nagata . . . . .	35
2.2.	Dimensión de Assouad-Nagata y otras propiedades geométricas . . . . .	38
<b>3.</b>	<b>Dimensión de Assouad-Nagata de grupos numerables</b>	<b>45</b>
3.1.	Grupos localmente finitos y dimension de Assouad-Nagata . . . . .	48
3.2.	Dimensión de Assouad-Nagata del grupo discreto de Heisenberg . . . . .	56
3.3.	Grupos nilpotentes y dimensión de Assouad-Nagata . . . . .	58
3.4.	Dimensión de Assouad-Nagata de espacios tipo árboles . . . . .	62
3.4.1.	Funciones coloreantes . . . . .	62
3.4.2.	Algunas propiedades de los espacios tipo-árbol . . . . .	64
3.4.3.	Demostración del teorema de dimensión para espacios tipo-árbol . . . . .	66
3.5.	Grupos con conos ultramétricos . . . . .	73
<b>4.</b>	<b>Clasificación a gran escala de grupos numerables</b>	<b>75</b>
4.1.	Clasificación de los grupos localmente finitos . . . . .	79
4.2.	Clasificación de los grupos numerables abelianos . . . . .	84
4.2.1.	Métricas invariantes en espacios homogéneos . . . . .	84
4.2.2.	Un resultado de selección . . . . .	89
4.2.3.	Cuasi-centralizadores y grupos-FC . . . . .	91
4.2.4.	Propiedades a gran escala de las operaciones de grupo . . . . .	93
4.2.5.	Dos teoremas de factorización . . . . .	94
4.2.6.	Grupos localmente finitos-por-abelianos . . . . .	98
4.2.7.	Demostración del teorema principal . . . . .	101
4.2.8.	Embebimientos en grupos abelianos . . . . .	103
4.2.9.	Embebimientos cuasi-isométricos en grupos abelianos . . . . .	105
4.2.10.	Grupos no-distorsionados . . . . .	109
4.2.11.	Grupos equivalentes a grupos abelianos . . . . .	112

# Agradecimientos

A los pocos meses de empezar mis estudios de doctorado tuve la sensación de que no iba a poder escribir nunca una tesis. Estoy seguro de que esa sensación se hubiera convertido en realidad sin la ayuda de mucha gente a la que estoy profundamente agradecido.

Gracias a mi familia, a mis padres y a mi hermana. Siempre me apoyaron (y me apoyan) incondicionalmente y siempre me animaron y ayudaron a superar todos los obstáculos por difíciles que fueran. Sé que siempre puedo contar con ellos.

Gracias a mis directores de tesis, Jurek Dydak y Pepe Sanjurjo.

Thanks to Jurek Dydak because one day he accepted to be the advisor of a student that lived far away. Because his hospitality in Knoxville was very 'big' and because he guided all my mathematical steps wisely. Thanks to him I have reached goals that I never thought I could reach. For all his help during these years: ¡Muchas gracias, Jurek!

Gracias a Pepe Sanjurjo por su infinita paciencia. Por todos sus consejos estos años, matemáticos y no matemáticos, que tienen para mí un valor incalculable.

Gracias al profesor José M. Montesinos porque me presentó a Jurek y me animó para que hiciera la tesis con él. Gracias por transmitir la belleza de las matemáticas y estar dispuesto a escucharme en todo momento.

Gracias a mis abuelas. Una por prestarme su casa dónde resolví varios problemas matemáticos, otra por cocinar cada domingo el bizcocho que inspira las mejores matemáticas.

Gracias a mis amigos Ana, Carlos, Jorge, Iván, Lucía, Miguel, Rubén y Samer, entre otras cosas, por regalarme la mejor insignia de Sheriff del mundo e interesarse

por mis investigaciones, que ellos llaman "topología mamaria". En particular gracias a Lucía por sacarme una semana de Knoxville y llevarme a un motel de Nueva York sórdido y divertido.

Thanks to Kolya for sharing his elegant and beautiful mathematics with me. Every advice he gave me improved exponentially my results.

Thanks to Atish for helping me during my stays in Knoxville and for all the fun, mathematical and non mathematical, that he shared with me.

Gracias a Raquel y Laura por convertir toda experiencia difícil en algo divertido y alegre.

Gracias a Lucia Furokawa por su inmensa hospitalidad en Knoxville.

Gracias a Manuel Alonso Morón y Jesús P. Moreno por las fantásticas charlas coarse que tuvieron conmigo. Fueron de mucho estímulo e inspiración.

Gracias a Álvaro Martínez por incitarme a acabar la tesis de una vez por todas y escuchar mis locuras sobre árboles con troncos.

Gracias a Francisco Romero por todas sus orientaciones sobre si existe vida después de una tesis. Y gracias también por aguantar con paciencia todas mis peticiones económicas sobre el proyecto.

Finalmente gracias a Koto, a quien va dedicada esta tesis. No hay espacio en esta memoria para enumerar todo lo que me ha ayudado estos años. No dudó en montarse en un avión y recorrer miles de kilómetros cuando yo se lo pedí y siempre escuchó estoicamente mis avances y progresos matemáticos aunque probablemente le sonasen a chino.

# Introducción

Desde un punto de vista topológico, y hasta cierto punto geométrico, un grupo finitamente generado y con la métrica de la palabra puede parecer un objeto carente de interés. Después de todo tal métrica es una métrica discreta. Sin embargo Gromov en [41] introdujo una serie de técnicas para estudiar tales espacios. Así un topólogo clásico o un geómetra clásico estaría interesado en el comportamiento de los espacios a pequeña escala, esto es, en las proximidades de un punto. Por otro lado un topólogo (o geómetra) asintótico estaría interesado en las propiedades del espacio a gran escala, es decir, cuando nos "alejamos" del mismo. Las funciones que reflejarían este fenómeno serían las equivalencias a gran escala y las cuasi-isometrías. Estas últimas pueden considerarse la versión a gran escala de las aplicaciones bi-Lipschitz.

Desde el trabajo de Gromov se han ido introduciendo y estudiando numerosos invariantes cuasi-isométricos y a gran escala. Uno de los objetivos de la teoría geométrica de grupos sería recuperar propiedades algebraicas de un grupo a partir de sus propiedades geométricas a gran escala. No sólo esto, como consecuencia del lema de Svarc-Milnor, el grupo fundamental de una variedad compacta Riemanniana es cuasi-isométrico a la cubierta universal de tal variedad. Con lo que el estudio de las propiedades de los grupos invariantes por cuasi-isometrías resulta sumamente importante.

Surgieron así conceptos como crecimiento, conos asintóticos, dimensión asintótica... Por ejemplo relacionado con el tipo de crecimiento de un grupo tendríamos el famoso teorema de Gromov que muestra la equivalencia entre grupos de crecimiento polinomial y grupos virtualmente nilpotentes. Para los conos asintóticos se

pueden ver, por ejemplo, los trabajos de Drutu [33], y su estudio sobre los conos asintóticos de los grupos hiperbólicos.

Desde el punto de vista de la teoría de la dimensión, la dimensión asintótica ha sido el invariante más estudiado. Su estudio es particularmente relevante después de los importantes trabajos de Yu en [72] que relacionaban la dimensión asintótica con la conjetura de Novikov. A partir de este resultado han ido apareciendo numerosos trabajos que analizaban la dimensión asintótica de grupos concretos (ver [13] para una revisión del tema) o que relacionaban la dimensión asintótica con otros invariantes a gran escala como la corona de Higson (por ejemplo [16]) o el crecimiento [59].

Puesto que en los grupos finitamente generados con métrica de la palabra es equivalente hablar de espacios equivalentes a gran escala y espacios cuasi-isométricos resulta natural pensar en un invariante similar a la dimensión asintótica pero de tipo lineal. Tal invariante fue introducido por Gromov en [41] con el nombre de dimensión asintótica de tipo lineal o por Roe en [63] bajo el nombre de dimensión asintótica con la propiedad de Higson. Pronto se vio [52] que tal dimensión no era otra cosa que la versión a gran escala de la dimensión de Nagata (llamada en este trabajo dimensión de Assouad-Nagata).

La dimensión de Assouad-Nagata fue introducida por Assouad [1] a partir de los trabajos de Nagata. Tal dimensión se relaciona con una generalización de Nagata de los espacios ultramétricos.

La dimensión de Assouad-Nagata es un invariante natural para aplicaciones bi-Lipschitz. Como ya hemos dicho su versión a gran escala es la dimensión asintótica con la propiedad de Higson (como se verá en este trabajo). Por otro lado su versión a pequeña escala fue introducida por Buyalo en sus estudios sobre grupos hiperbólicos [23]. En tales trabajos se relacionaba la dimensión asintótica de un grupo hiperbólico con la dimensión de Assouad-Nagata a pequeña escala de la frontera del mismo.

Nuestro trabajo se ha centrado principalmente en la versión a gran escala de la dimensión de Assouad-Nagata y sus relaciones con la teoría geométrica de grupos. No obstante, también hemos estudiado la dimensión de Assouad-Nagata en

espacios métricos más generales pues tiene fuertes conexiones con los espacios ultramétricos y las aplicaciones bi-Lipschitz [52].

Además no sólo hemos trabajado con grupos finitamente generados con métrica de la palabra, sino que hemos estudiado el marco más amplio de grupos numerables con métricas propias invariantes por la izquierda. Tales grupos y métricas surgen de forma natural cuando se ven como subgrupos, no necesariamente finitamente generados, de grupos finitamente generados con métrica de la palabra. En este caso, la métrica que heredan es una métrica propia e invariante por la izquierda pero no una métrica de la palabra.

Este estudio ha sido fructífero en los últimos años como lo demuestran, a modo de ejemplo, los trabajos de Shalom [68], Dranishnikov y Smith [29] y Sauer [67]. En todos ellos se estudiaba invariantes a gran escala de grupos numerables no finitamente generados, como la dimensión asintótica o la dimensión cohomológica racional.

A continuación pasamos a describir los principales problemas o temas de investigación abordados y los resultados obtenidos. Cada problema se corresponderá con un capítulo del libro y cada punto a abordar con una sección de tal capítulo. En la introducción de cada capítulo se encontrará información más detallada sobre estos problemas:

**-Problema 1: Estudiar las propiedades geométricas generales de la dimensión de Assouad-Nagata.**

Dentro de esta línea de investigación estaría el importante trabajo [52] donde Lang y Schliepmaier demostraron, entre otros resultados, que la dimensión de Assouad-Nagata es un invariante por cuasi-simetrías, que todo espacio de dimensión de Assouad-Nagata finita admite un embebimiento cuasi-simétrico en un producto finito de  $\mathbb{R}$ -árboles y finalmente se introdujo la noción de extensor Lipschitz y se estudiaron las relaciones de este concepto con la dimensión de Assouad-Nagata.

Nuestros resultados para este primer problema son los siguientes.

1. Hemos relacionado las dimensiones de capacidad y la dimensión asintótica con la propiedad de Higson con la dimensión de Assouad-Nagata global. Esto se consigue mediante la construcción de dos funtores (microscópico y

macroscópico) en la categoría Lipschitz. Este resultado apareció en [20]

2. Hemos estudiado los espacios con dimensión de Assouad-Nagata igual a cero. Esto nos ha permitido relacionar la dimensión de Assouad-Nagata con los espacios ultramétricos. A saber, todo espacio de dimensión de Assouad-Nagata cero es equivalente bi-Lipschitz a un espacio ultramétrico. De hecho esta propiedad caracteriza los espacios de dimensión de Assouad-Nagata cero. También construimos un espacio universal para espacios ultramétricos separables. Hemos relacionado los espacios ultramétricos con la dimensión uniforme. Conseguimos además, una caracterización interesante de los espacios de dimensión de Assouad-Nagata nula en términos de propiedades de extensión Lipschitz. Finalmente demostramos que existen una cantidad no numerable de espacios ultramétricos no equivalentes a gran escala. Todos estos resultados se recogen en [21]
3. Demostramos que un espacio tiene dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que  $n$  si y solo si la esfera  $\mathbb{S}^n$  es un extensor Lipschitz. Esto puede ser visto como la versión métrica del famoso teorema que dice que un espacio topológico tiene dimensión topológica menor o igual que  $n$  si y solo si la esfera  $\mathbb{S}^n$  es un extensor absoluto del mismo. Este resultado es uno de los más importantes de este trabajo. Aparece recogido en [20]

**- Problema 2: Estudiar la relación de la dimensión asintótica de Assouad-Nagata con otros invariantes a gran escala.**

Así por ejemplo los trabajos de Nowak [59] relacionan la dimensión asintótica de Assouad -Nagata con el crecimiento o las funciones de Folner. O los trabajos de Dranishnikov [30] relacionan tal dimensión con la corona de Higson lineal.

Nuestros resultados en este contexto han sido los siguientes.

1. El primer resultado obtenido se enmarcaría dentro de otro problema más general, a saber: *Relacionar las propiedades topológicas del cono asintótico de un espacio con las propiedades a gran escala del espacio*. El cono asintótico de un espacio métrico puede ser visto como la imagen de dicho espacio cuando lo vemos desde el infinito. Nosotros nos hemos centrado en la dimensión

topológica. En particular hemos obtenido el importante resultado que afirma que la dimensión topológica del cono asintótico de un espacio está acotada por la dimensión asintótica de Assouad-Nagata del espacio. Así, desde este punto de vista, la dimensión de Assouad-Nagata sería más interesante que la dimensión asintótica ya que esta última no guarda relación alguna con la dimensión topológica del cono. Además hemos estudiado que en general esta cota no es una igualdad. Incluso si imponemos la condición sumamente restrictiva de que el cono asintótico sea un espacio ultramétrico, la dimensión asintótica de Assouad-Nagata puede ser cualquiera, incluso infinito. Los resultados de este trabajo aparecen en [36] y en [46]

2. Relacionamos la dimensión asintótica con la dimensión asintótica de Assouad-Nagata. En particular, para todo espacio métrico de dimensión asintótica finita podemos construir una métrica equivalente tal que la dimensión asintótica y la de Assouad-Nagata coincidan. Tal métrica ha mostrado tener interesantes propiedades. Es una métrica hiperbólica con frontera unipuntual, sus conos asintóticos son ultramétricos y sobre todo satisface una propiedad de Nagata que caracteriza los espacios topológicos metrizable de dimensión finita. Ésta último resultado resuelve el problema 1400 de [4]. Los resultados de este apartado han aparecido en [20], [46] y la solución al problema 1400 en [48]

**- Problema 3: Relacionar la dimensión de Assouad-Nagata y la dimensión asintótica en el ámbito de la teoría geométrica de grupos.**

En concreto se abordan tres subproblemas:

- *¿Para que grupos finitamente generados la dimensión de Assouad-Nagata coincide con la dimensión asintótica?*

- *¿Existen métricas propias invariantes por la izquierda en un grupo numerable tal que la dimensión de Assouad-Nagata no coincida con la dimensión asintótica?*

- *Determinar métodos para calcular la dimensión de Assouad-Nagata de familias de grupos concretos*

Con respecto a la primera pregunta se sabe que ambas dimensiones son iguales para los grupos abelianos finitamente generados, los grupos hiperbólicos [64] y los

grupos finitamente presentados de dimensión asintótica igual a 1. No fue hasta los trabajos de Nowak [59] cuando se encontraron ejemplos de grupos finitamente generados de dimensión asintótica finita pero dimensión de Assouad-Nagata infinita. Todos ellos tienen la forma de producto wreath.

Cabe señalar también que en lo relativo a la tercera pregunta existen numerosos métodos para calcular la dimensión asintótica de una gran familia de grupos como los grupos policíclicos, las amalgamaciones, las extensiones HNN (ver [13] para una revisión sobre el tema).

Nuestros resultados son los siguientes.

1. Demostramos que para el grupo de Heisenberg la dimensión asintótica y la dimensión de Assouad-Nagata coinciden. Esto resuelve una pregunta de Roe [63]. El grupo de Heisenberg es el único grupo nilpotente (salvo cuasi-isometrías) no abeliano de dimensión igual a 3. La pregunta más general para los grupos nilpotentes continúa aún abierta. Este resultado apareció en [36]
2. Encontramos grupos localmente finitos de dimensión de Assouad-Nagata arbitraria. Además demostramos que todo grupo localmente finito admite una métrica propia invariante por la izquierda de dimensión de Assouad-Nagata positiva. Recordamos que los grupos localmente finitos tienen dimensión asintótica nula. Como corolario encontramos grupos abelianos (no finitamente generados) tales que su dimensión de Assouad-Nagata y su dimensión asintótica difieren cualquier  $n$  prefijado. Esto resuelve un problema planteado en [18] y parcialmente un problema de [59]. Los resultados aparecieron en [46]
3. Probamos que todo grupo de centro no localmente finito admite una métrica propia invariante por la izquierda de dimensión de Assouad-Nagata infinita. En particular el grupo  $\mathbb{Z}$  admite tal métrica. Recordamos que este grupo con la métrica de la palabra tiene dimensión asintótica y de Assouad-Nagata iguales a 1 y es el grupo finitamente generado no finito más *sencillo*, con lo que cabe esperar que tal resultado sea generalizable a todos los grupos numerables. Como corolario directo obtenemos que todos los grupos nilpotentes no localmente finitos poseen una métrica propia invariante por la izquierda

de dimensión de Assouad-Nagata infinita. Todos estos resultados resolvieron dos problemas de A.N. Dranishnikov de [28]. Este resultado apareció en [47].

4. Damos una fórmula que calcula la dimensión de Assouad-Nagata de los espacios tipo-árboles a partir de la dimensión de Assouad-Nagata de sus componentes. Los espacios tipo-árboles tienen especial relevancia en el estudio de los conos asintóticos de los grupos relativamente hiperbólicos. Además como consecuencia de nuestro resultado obtenemos una fórmula que permite calcular la dimensión de Assouad-Nagata del producto libre de grupos finitamente generados. Este resultado es de suma importancia (apareció como problema en [19]) y permite aumentar considerablemente nuestro catálogo de grupos finitamente generados con dimensión de Assouad-Nagata finita. Este resultado se encuentra en [17]
5. Damos ejemplos de grupos finitamente generados con dimensión de Assouad-Nagata infinita tal que todos sus conos asintóticos son ultramétricos y por tanto de dimensión cero. Este resultado apareció en [46]

#### **Problema 4: Clasificar salvo equivalencias a gran escala los grupos numerables**

Este problema es central para la teoría geométrica de grupos. Hasta ahora pocos progresos se han realizado en esta línea (ver por ejemplo [42] para una revisión). Nosotros nos hemos centrado en los grupos localmente finitos y los grupos abelianos numerables no finitamente generados.

Nuestros resultados son los siguientes:

1. Clasificamos los grupos localmente finitos salvo equivalencias a gran escala biyectivas. Para tal clasificación definimos el concepto de número de  $p$ -Sylow asociado a un grupo numerable. Esta definición coincide con la usual en el caso de grupos finitos. Como consecuencia demostramos que los grupos localmente finitos son universales para los espacios métricos de dimensión asintótica cero y geometría acotada, y así para los espacios ultramétricos de geometría acotada. Los resultados de este trabajo aparecieron en [21].

2. Clasificamos salvo equivalencias a gran escala los grupos abelianos numerables, no necesariamente finitamente generados. La clasificación de los grupos abelianos finitamente generados es bien conocida y sencilla, mientras que la clasificación de los grupos numerables abelianos ha sido considerablemente más difícil. Por ejemplo Smith en [69] se preguntaba por la estructura de  $\mathbb{Q}$  y Dranishnikov y Smith en [29] calculaban la dimensión asintótica de los grupos abelianos. Además de tal clasificación estudiamos las condiciones algebraicas que hacen que un grupo admita un embebimiento a gran escala en un grupo abeliano o que un grupo sea equivalente a gran escala a un grupo abeliano. El resultado principal de este punto apareció inicialmente en [45] y posteriormente se completó con el trabajo [5]. Consideramos que es otro de los resultados más importantes de esta memoria.

Finalmente mencionamos que en [26], Dranishnikov consiguió encontrar equivalentes a gran escala de conceptos topológicos clásicos. Así, conceptos tales como: homotopía, espacio compacto, dimensión topológica, cohomología de Čech, poliedros, ANR, variedad...tienen un análogo a gran escala que se comporta de forma muy similar (aunque no exactamente igual) como se demostró en [26]. Resultaría así natural preguntarse si se pueden aplicar las ideas de [65] y [38] para el estudio de los sistemas dinámicos pero desde un punto de vista a gran escala.

# Preliminares

Damos en este capítulo los conceptos básicos. Proporcionamos demostraciones de algunos resultados que (aunque sencillos) no se encuentran en la literatura debido a nuestro enfoque integrador del tema.

## 0.1. Definiciones básicas

En este trabajo se considerarán espacios métricos  $(X, d)$  con métricas propias o de geometría acotada. Se dice que un espacio métrico es *propio* si las bolas cerradas son compactas. Una aplicación entre espacios métricos  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  se dice *métricamente propia* si las preimágenes de compactos son compactos. También diremos que un espacio es de *geometría acotada* si es propio y para todo  $r$  y todo  $\varepsilon$  existe una constante  $C(r, \varepsilon) > 0$  tal el cardinal de toda  $\varepsilon$ -red maximal en cualquier bola de radio  $r$  está acotado por  $C(r, \varepsilon)$ .

Las siguientes definiciones son clave para el concepto de dimensión.

**Definición 0.1.1.** Sea  $X$  un espacio métrico, y sea  $A$  un subespacio de  $X$ , y  $S$  un número positivo.

Se dice que  $A$  es *S-acotado* si para cada par de puntos  $x, x' \in A$  tenemos que  $d_X(x, x') \leq S$ .

Una *S-cadena* en  $A$  es una sucesión finita de puntos  $x_1, \dots, x_k$  en  $A$  tal que para todo  $i < k$  el conjunto  $\{x_i, x_{i+1}\}$  es *S-acotado*.

Se dice que  $A$  es *S-conexo* si cada par de puntos  $x, x' \in A$  puede ser conectado en  $A$  por una *S-cadena*.

Se dice que  $A$  es *conexo a gran escala* si es *S-conexo* para algún  $S > 0$ .

Obsérvese que cualquier subconjunto  $A$  de  $X$  es la unión de sus  $S$ -componentes conexas, es decir, los subconjuntos  $S$ -conexos maximales de  $A$ . Si  $B$  y  $B'$  son dos  $S$ -componentes conexas del conjunto  $A$  entonces  $B$  y  $B'$  son  $S$ -disjuntas. Se dice que dos subconjuntos  $B, B' \in X$  son  $S$ -disjuntos si  $d_X(x, y) > S$  para todo par de puntos  $x$  e  $y$  tales que  $x \in B$  e  $y \in B'$ .

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $n \in \mathbb{N}$  un número entero (incluido el 0). Decimos que un recubrimiento de  $X$  de la forma  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  es un  $(s, M)$ -recubrimiento  $n$ -dimensional con  $s \in \mathbb{R}_+$  y  $M \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  si las  $s$ -componentes conexas de cada  $\mathcal{U}_i$  están  $M$ -acotadas. En estas condiciones definimos la función  $D^n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  como:

$$D^n(s) = \inf\{M \mid \text{existe un } (s, M)\text{-recubrimiento } n\text{-dimensional de } X\}$$

Claramente la función  $D^n$  es no decreciente.

A cualquier función no decreciente  $f^n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  que cumpla  $f^n(x) \geq D^n(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+$  diremos que es una *función de control  $n$ -dimensional*. Estaremos interesados en el caso de funciones de control  $n$ -dimensional que solo tomen valores reales finitos i.e.  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Proposición 0.1.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se cumple:*

1. *Si  $f^n$  una función de control  $n$ -dimensional entonces  $f^n$  también es una función de control  $n + 1$ -dimensional.*
2. *Existe una función de control  $n$ -dimensional  $f^n$  que está acotada si y solo si el espacio métrico  $X$  está acotado.*
3. *Si existe una función de control  $n$ -dimensional  $f^n$  tal que  $f^n(s) = 0$  para algún  $s > 0$  entonces el espacio métrico  $X$  es discreto. Recíprocamente si el espacio métrico  $X$  es  $\varepsilon$ -discreto para algún  $\varepsilon$  entonces existe una función de control 0-dimensional  $f^0$  tal que  $f^0(s) = 0$  para algún  $s > 0$ .*

*Demostración.* 1) es trivial de la definición.

2) Claramente si  $X$  está acotado por  $M$  la función  $f^n(s) = M$  es una función de control  $n$ -dimensional para todo  $n$  entero no negativo, basta tomar para cualquier  $s$

el  $(s, M)$ -recubrimiento definido por  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  con  $\mathcal{U}_i = X$ . Supongamos que  $f^n$  está acotada por una constante real positiva  $M > 0$ . Razonemos por reducción al absurdo. Si  $X$  no está acotado existe una sucesión  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $d(x_i, x_j) > M \cdot i$  para todo  $i, j \in \mathbb{N}$  con  $i > j$ . Sea  $s = \sup\{d(x_{j_1}, x_{j_2}) \mid j_1, j_2 \leq n + 2\}$ . Como  $f^n$  es una función de control  $n$ -dimensional existe un  $(s, f^n(s))$ -recubrimiento  $n$ -dimensional  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ . Por el principio del palomar existe un  $i$  y dos elementos  $j_1 < j_2 \leq n + 2$  tales que  $x_{j_1}, x_{j_2} \in \mathcal{U}_i$ . Además  $d(x_{j_1}, x_{j_2}) \leq s$  con lo que estarán en la misma componente  $s$ -conexa de  $\mathcal{U}_i$  pero  $d(x_{j_1}, x_{j_2}) > M \cdot j_2$  lo que contradice el hecho de que  $f^n$  está acotada por  $M$ .

3) Si  $X$  es  $\varepsilon$ -discreto i.e.  $d(x, y) \geq \varepsilon$  para todo  $x \neq y$ , entonces la función

$$f^0(s) = \begin{cases} \infty & \text{si } s \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } s < \varepsilon \end{cases}$$

es una función de control 0-dimensional para todo  $s \in \mathbb{R}_+$ . En efecto, si  $s < \varepsilon$  tomando el recubrimiento definido por  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$  con  $\mathcal{U}_0 = X$  se tiene que las  $s$ -componentes conexas de  $X$  son unipuntuales y así será un  $(s, 0)$ -recubrimiento 0-dimensional. Recíprocamente suponemos que  $f^n$  es una función de control  $n$ -dimensional tal que  $f^n(s) = 0$  para algún  $s > 0$  pero  $X$  no es discreto. Como  $X$  no es discreto existirá una sucesión  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de términos distintos tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$  para algún  $x \in X$ . Sea  $0 < s_0 < s$  y sea  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  un  $(s_0, f^n(s_0) = 0)$ -recubrimiento  $n$ -dimensional. Como la sucesión converge a  $x$  y es de términos distintos existirá  $x_j \neq x$  en la bola  $B(x, s_0)$  tal que  $x$  y  $x_j$  están en el mismo  $\mathcal{U}_i$ . Pero  $0 < d(x, x_j) < s_0$  lo que contradice que  $f^n$  es una función de control  $n$ -dimensional.  $\square$

**Lema 0.1.3.** *Si  $f^n$  es una función de control  $n$ -dimensional de un espacio métrico  $(X, d)$  entonces para todo  $s \in \mathbb{R}_+$  existe un  $(s, M)$ -recubrimiento abierto con  $M = f^n(3 \cdot s) + 2 \cdot s$ .*

*Demostración.* Sea  $f^n$  una función de control  $n$ -dimensional de un espacio métrico  $(X, d)$ . Y sea  $s \in \mathbb{R}_+$ . Tenemos que existe un  $(3 \cdot s, f^n(3 \cdot s))$ -recubrimiento de la forma  $\mathcal{V} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{V}_i$ . Para un subconjunto  $V$  de  $X$  y un  $r > 0$  definimos el conjunto

$N(V, r)$  como  $N(V, r) = \{x \mid d(x, V) < r\}$ , este conjunto claramente es abierto. Así construimos el recubrimiento abierto  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$  con  $\mathcal{U}_i = N(\mathcal{V}_i, s)$ . Ahora es claro que si  $x, y \in \mathcal{U}_i$  satisfacen  $d(x, y) \leq s$  entonces existen  $x', y' \in \mathcal{V}_i$ , con  $d(x, x') < s$  y  $d(y, y') < s$  tales que  $d(x', y') \leq 3 \cdot s$ , y por tanto las  $s$ -componentes conexas de cada  $\mathcal{U}_i$  estarán  $f^n(3 \cdot s) + 2 \cdot s$ -acotadas.  $\square$

**Definición 0.1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Los tipos de dimensión más importantes para nosotros son los siguientes:

- a. Diremos que tiene *dimensión de Assouad-Nagata* menor o igual que  $n$  (notación:  $\dim_{AN} X \leq n$ ) si existe un  $C \geq 0$  tal que la función  $D^n(s) = C \cdot s$  es una función de control  $n$ -dimensional.
- b. Diremos que  $X$  tiene *dimensión asintótica de tipo lineal (o dimensión asintótica con la propiedad de Higson)* menor o igual que  $n$  (notación:  $\text{asdim}_{AN} X \leq n$ ) si existe una  $C \geq 0$ , un  $s_0 \in \mathbb{R}_+$  y una función  $n$ -dimensional de control  $D^n$  tal que  $D^n(s) = C \cdot s$  para todo  $s \geq s_0$ .
- c. Diremos que  $X$  tiene *dimensión de capacidad* menor o igual que  $n$  (notación:  $\text{cdim}_{AN} X \leq n$ ) si existe una  $C \geq 0$  y un  $s_0 > 0$  y una función de control  $n$ -dimensional  $D^n$  tal que  $D^n(s) = C \cdot s$  para todo  $s \leq s_0$ .
- d. Se dice que  $X$  tiene *dimensión asintótica* menor o igual que  $n$  (notación:  $\text{asdim} X \leq n$ ) si existe una función de control  $n$ -dimensional  $D^n$  que sólo toma valores reales finitos.
- e. Se dice que  $X$  tiene *dimensión uniforme* menor o igual que  $n$  (notación:  $\dim_u X \leq n$ ) si existe una función de control  $n$ -dimensional  $D^n$  que sólo toma valores finitos tal que  $D^n(0) = 0$ .

*Observaciones 0.1.5.* 1. La dimensión asintótica con la propiedad de Higson se llamará también en este trabajo dimensión asintótica de Assouad-Nagata, de ahí su notación. En la sección 1.1 veremos el motivo de este nombre.

2. Llamaremos  $\mathbb{T}$  a una familia cualquiera de funciones de la forma  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  de alguno los tipos anteriores a)-e).

3. Así, en el primer caso  $\mathbb{T}$  serán todas las funciones lineales sin término independiente, en el segundo caso todas las funciones asintóticamente lineales, en el tercer caso las funciones lineales a pequeña escala...
4. De este modo diremos genéricamente que el espacio  $X$  tiene dimensión tipo  $\mathbb{T}$  menor o igual que  $n$  (notación  $\dim_{\mathbb{T}}(X)$ ) para referirnos a alguno de los casos anteriores.
5. Diremos que  $(X, d)$  tiene dimensión de tipo  $\mathbb{T}$  igual a  $n$  si  $\dim_{\mathbb{T}}(X) \leq n$  pero no ocurre que  $\dim_{\mathbb{T}}(X) \leq n - 1$ .
6. Resulta evidente que si  $A \subset X$  entonces  $\dim_{\mathbb{T}}A \leq \dim_{\mathbb{T}}X$ .

**Lema 0.1.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se tiene las siguientes desigualdades:*

$$\text{asdim}X \leq \text{asdim}_{AN}X \leq \dim_{AN}X$$

$$\text{asdim}X \leq \dim_u X \leq \dim_{AN}X$$

$$\text{cdim}X \leq \dim_{AN}X$$

*Ejemplo 0.1.7.* Sea  $(\mathbb{Z}, d)$  con  $d$  la métrica usual. Tenemos que  $\dim_{AN}\mathbb{Z} = \text{asdim}\mathbb{Z} = 1$  y  $\text{cdim}\mathbb{Z} = 0$ .

*Demostración.* Sea  $s > 0$ . Claramente  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$  es un  $(s, 2 \cdot s)$ -recubrimiento con :

$$\mathcal{U}_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [2 \cdot i \cdot (\lfloor s \rfloor + 1), (2 \cdot i + 1) \cdot (\lfloor s \rfloor + 1)]$$

$$\mathcal{U}_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [(2 \cdot i + 1) \cdot (\lfloor s \rfloor + 1), 2 \cdot i \cdot (\lfloor s \rfloor + 1)]$$

Así  $\dim_{AN}\mathbb{Z} \leq 1$ . Por otro lado no puede ser  $\text{asdim}\mathbb{Z} \leq 0$  ya que el espacio es 1-conexo, así del lema 0.1.6 obtenemos la primera parte. Por otro lado el espacio es 1-discreto, con lo que del tercer apartado de la proposición 0.1.2 deducimos  $\text{cdim}\mathbb{Z} = 0$ . □

Sean  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dos espacios métricos y sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función. Asociada a tal función existen otras dos funciones no decrecientes  $\rho_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  y  $\rho_- : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  llamadas *funciones dilatación y contracción* respectivamente y definidas de la forma.

$$\rho_+(M) = \sup\{d_Y(f(x), f(y)) \mid d_X(x, y) \leq M\}$$

$$\rho_-(M) = \inf\{d_Y(f(x), f(y)) \mid d_X(x, y) \geq M\}$$

Obsérvese que se tiene trivialmente las desigualdades:

$$\rho_-(d_X(x, y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x, y)) \text{ para todo } x, y \in X. \quad (0.1.1)$$

Para una función no decreciente  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  definiremos su inversa  $\rho^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  como:

$$\rho^{-1}(s) = \begin{cases} \sup\{M \mid \rho(M) \leq s\} & \text{si } s \geq \rho(0) \\ 0 & \text{si } s < \rho(0) \end{cases}$$

. Es claro que tal inversa también es no decreciente.

**Proposición 0.1.8.** *Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función entre espacios métricos y sean  $\rho_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  y  $\rho_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dos funciones no decrecientes que satisfacen:*

$$\rho_2(d_X(x, y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_1(d_X(x, y)) \text{ para todo } x, y \in X. \quad (0.1.2)$$

Si  $D_Y^n$  es un función de control  $n$ -dimensional de  $(Y, d_Y)$  entonces la función  $D_X^n$  definida por  $D_X^n = \rho_2^{-1} \circ D_Y^n \circ \rho_1$  es una función de control  $n$ -dimensional de  $(X, d_X)$ .

*Demostración.* Fijemos  $s > 0$  un número real positivo. Como  $D_Y^n$  es una función  $n$ -dimensional de control existe un recubrimiento  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n\}$  en  $Y$  tal que las componentes  $\rho_1(s)$ -conexas de cada  $\mathcal{U}_i$  están  $D_Y^n(\rho_1(s))$ -acotadas. Tomamos ahora el recubrimiento  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n\}$  en  $X$  definido por  $\mathcal{V}_i = f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ . Nótese que si dos puntos  $x, y \in X$  satisfacen  $d_X(x, y) < s$  entonces  $d_Y(f(x), f(y)) < \rho_1(s)$ . Así,

dado una  $s$ -cadena  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  en  $X$  tenemos que  $\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)\}$  es una  $\rho_1(s)$ -cadena. Por tanto  $\rho_2(d(x_0, x_m)) \leq d_Y(f(x_0), f(x_m)) \leq D_Y^n(\rho_1(s))$  lo que implica  $d(x_0, x_m) \leq \rho_2^{-1}(D_Y^n(\rho_1(s)))$  y  $D_X^n = \rho_2^{-1} \circ D_Y^n \circ \rho_1$  es una función de control  $n$ -dimensional.  $\square$

**Definición 0.1.9.** Supongamos que tenemos una función  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios métricos. Dependiendo de las propiedades  $\rho_+$  y  $\rho_-$  tendremos la siguientes definiciones:

- a. Decimos que  $f$  es *Lipschitz* si existe una constante  $C > 0$  tal que  $\rho_+(s) \leq C \cdot s$  si además  $\rho_-(s) \geq \frac{s}{C}$  se dice que  $f$  es un *embebimiento bi-Lipshchitz* o una *aplicación bi-Lipshchitz*.
- b. Decimos que  $f$  es *asintóticamente Lipschitz* si existen una contante  $C > 0$  y un  $s_0 \in \mathbb{R}_+$  tales que  $\rho_+(s) \leq C \cdot s$  para todo  $s \geq s_0$  si además  $\rho_-(x) \geq \frac{x}{C}$  para todo  $s \geq s_0$  se dice que  $f$  es un *embebimiento cuasi-isométrico* o *inmersión cuasi-isométrica*.
- c. Decimos que  $f$  es *Lipschitz a pequeña escala* si existe una constante  $C > 0$  y un  $s_0 \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\rho_+(s) \leq C \cdot s$  para todo  $s \leq s_0$  si además  $\rho_-(x) \geq \frac{x}{C}$  para todo  $s \leq s_0$  se dice que  $f$  es una *aplicación embebimiento bi-Lipshchitz a pequeña escala*.
- d. Decimos que  $f$  es una *aplicación a gran escala ó bornológica* si  $\rho_+$  solo toma valores reales finitos i.e.  $\rho_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , si además  $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_-(x) = \infty$  se dice que  $f$  es un *embebimiento a gran escala* o *inmersión a gran escala*.
- e. Se dice que  $f$  es una *aplicación uniforme* si  $\rho_+$  sólo toma valores reales finitos,  $\rho_+(0) = 0$ , si además,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_-(x) = \infty$  y  $\rho_-(s) > 0$  para todo  $s > 0$  decimos que  $f$  es un *embebimiento bi-uniforme* o *inmersión bi-uniforme*.

*Observaciones 0.1.10.* 1. No es difícil comprobar que la propiedad b) es equivalente a la existencia de dos constantes  $C > 0$  y  $L > 0$  tales que  $\rho_+(s) \leq C \cdot s + L$  y además  $\rho_-(s) \geq \frac{s}{C} - L$  en el caso del embebimiento.

2. Obsérvese que sólo las condiciones a), c) y e) implican continuidad y en el caso de los embebimientos sólo tales condiciones implican que la función  $f$  sea inyectiva.

La siguiente caracterización de aplicaciones a gran escala es una consecuencia directa de su definición.

**Lema 0.1.11.** *Una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  entre espacios métricos es una aplicación a gran escala si y solo si para todo real positivo  $\varepsilon$  existe un número real positivo  $\delta$  tal que para todo par de puntos  $x, y \in X$  que cumplan  $d_X(x, y) \leq \varepsilon$  se satisface  $d_Y(f(x), f(y)) \leq \delta$*

**Proposición 0.1.12.** *Sea  $(X, d)$  e  $(Y, d_Y)$  espacios métricos y una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  que es un embebimiento del tipo a)-e) de la definición 0.1.9. Entonces existe una función  $g : (f(X), d_Y) \rightarrow (X, d_X)$  que es un embebimiento del mismo tipo a)-e) y una constante  $C > 0$  tal que  $d_Y(f(g(y)), y) < C$  para todo  $y \in f(X)$  y  $d_X(g(f(x)), x) < C$  para todo  $x \in X$ .*

*Demostración.* La demostración es directa a partir de las definiciones. □

El siguiente corolario es trivial a partir de la proposición 0.1.8 y la proposición 0.1.12.

**Corolario 0.1.13.** *Sea  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espacios métricos y sea una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ . Se tiene que:*

- a. *Si  $f$  es una aplicación bi-Lipschitz entonces  $\dim_{AN}(X) = \dim_{AN}(f(X))$ .*
- b. *Si  $f$  es un embebimiento cuasi-isométrico entonces  $\text{asdim}_{AN}(X) = \text{asdim}_{AN}(f(X))$ .*
- c. *Si  $f$  es una aplicación bi-Lipschitz a pequeña escala entonces  $\text{cdim}_{AN}(X) = \text{cdim}_{AN}(f(X))$ .*
- d. *Si  $f$  es un embebimiento a gran escala entonces  $\text{asdim}(X) = \text{asdim}(f(X))$ .*
- e. *Si  $f$  es un embebimiento bi-uniforme entonces  $\dim_u(X) = \dim_u(f(X))$ .*

**Definición 0.1.14.** Se dice que una función entre espacios métricos  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia a gran escala* (resp. *cuasi-isometría*) si  $f$  es un embebimiento a gran escala (resp. embebimiento cuasi-isométrico) y existe un  $L > 0$  tal que para todo  $y \in Y$   $d_Y(y, f(X)) \leq L$ . Si existe una equivalencia a gran escala (resp. cuasi-isometría) entre dos espacios métricos  $X$  e  $Y$  diremos que ambos espacios son *equivalentes a gran escala* (resp. *cuasi-isométricos*).

**Definición 0.1.15.** Se dice que una función entre espacios métricos  $f : X \rightarrow Y$  es una *equivalencia bi-Lipschitz* (resp. *equivalencia bi-Lipshchitz a pequeña escala* o *equivalencia bi-uniforme*) si  $f$  es un embebimiento bi-Lipschitz (resp. embebimiento bi-Lipschitz a pequeña escala o embebimiento bi-uniforme) suprayectivo. Si existe una equivalencia bi-Lipschitz (resp. bi-Lipschitz a pequeña escala o bi-uniforme) entre dos espacios métricos  $X$  e  $Y$  diremos que ambos espacios son *bi-Lipshchitz equivalentes* (resp. *bi-Lipschitz equivalentes a pequeña escala* o *bi-uniformemente equivalentes*).

*Observaciones 0.1.16.* 1. Del corolario 0.1.13 deducimos que las dimensiones anteriormente construidas son invariantes de sus equivalencias correspondientes.

2. Es evidente que toda equivalencia cuasi-isométrica será una equivalencia a gran escala pero no al revés.

**Lema 0.1.17.** *Dos espacios métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  son equivalentes a gran escala (resp. cuasi-isométricos) si existe dos aplicaciones a gran escala (resp. asintóticamente Lipschitz)  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  y una constante  $C > 0$  tal que  $d_X(g(f(x)), x) \leq C$  para todo  $x \in X$  y  $d_Y(f(g(y)), y) \leq C$  para todo  $y \in Y$ .*

*Observaciones 0.1.18.* 1. Todo espacio métrico acotado es cuasi-isométrico a un espacio unipuntual.

2. Todo espacio métrico  $(X, d_X)$  es cuasi-isométrico a un espacio métrico 1-discreto, tomando por ejemplo una 1-red maximal del espacio.

## 0.2. Propiedades elementales de las dimensiones

Dado un recubrimiento  $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$  de un espacio métrico  $(X, d)$  existe una familia natural de funciones  $\{f_s\}_{s \in S}$  asociadas a  $\mathcal{U}$ :  $f_s(x) := \text{dist}(x, X \setminus U_s)$ . Para simplificar llamamos *número local de Lebesgue*  $L_{\mathcal{U}}(x)$  de  $\mathcal{U}$  en  $x$  al número

$$\sup\{f_s(x) \mid s \in S\}$$

y llamamos *número (global) de Lebesgue*  $L(\mathcal{U})$  de  $\mathcal{U}$  al número

$$\inf\{L_{\mathcal{U}}(x) \mid x \in X\}.$$

Estaremos interesados en recubrimientos con número de Lebesgue positivo. Para estos la *multiplicidad local*  $m_{\mathcal{U}}(x)$  puede definirse como  $1 + |T(x)|$ , donde  $T(x) = \{s \in S \mid f_s(x) > 0\}$  y la *multiplicidad global*  $m(\mathcal{U})$  se define como

$$\sup\{m_{\mathcal{U}}(x) \mid x \in X\}.$$

Del mismo modo definimos la *r-multiplicidad local*  $m_{\mathcal{U}}^r(x)$  de un recubrimiento  $\mathcal{U}$  como  $1 + |T^r(x)|$ , donde  $T^r(x) = \{i \in S \mid B(x, r) \cap U_s \neq \emptyset\}$  y la *r-multiplicidad global*  $m(\mathcal{U})$  se define como

$$\sup\{m_{\mathcal{U}}^r(x) \mid x \in X\}.$$

Además definimos el número  $\text{mesh}(\mathcal{U}) = \sup\{\text{diam}(U_s) \mid U_s \in \mathcal{U}\}$  y diremos que un recubrimiento  $\mathcal{U}$  está *uniformemente acotado* si  $\text{mesh}(\mathcal{U})$  es finito.

Si la multiplicidad  $m(\mathcal{U})$  es finita, entonces  $\mathcal{U}$  tiene una partición natural de la unidad  $\{\phi_s\}_{s \in S}$  asociada:

$$\phi_s(x) = \frac{f_s(x)}{\sum_{t \in S} f_t(x)}.$$

Tal partición puede ser considerada como una *aplicación baricéntrica*  $\phi : X \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{U})$  de  $X$  al *nervio* de  $\mathcal{U}$ . Consideraremos que el nervio tiene la  $l_1$ -métrica. Como cada  $f_s$  es 1-Lipschitz,  $\sum_{t \in S} f_t(x)$  será  $2m(\mathcal{U})$ -Lipschitz y cada  $\phi_s$  será  $\frac{2m(\mathcal{U})}{L(\mathcal{U})}$ -Lipschitz (aquí usamos el hecho de que  $\frac{u}{u+v}$  es  $\frac{\max(\text{Lip}(u), \text{Lip}(v))}{\inf(u+v)}$ -Lipschitz). Por tanto  $\phi : X \rightarrow$

$\mathbb{N}(\mathcal{U})$  es  $\frac{4m(\mathcal{U})^2}{L(\mathcal{U})}$ -Lipschitz. Véase [10] y [24] para más detalles y mejores estimaciones de las constantes de Lipschitz.

Sea  $\mathbb{T}$  una familia de funciones de la forma  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  como en la observación 0.1.5 se tiene el siguiente resultado (véase [52] y [31] para la demostración).

**Proposición 0.2.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $n$  un número entero no negativo. Son equivalentes:*

1.  $\dim_{\mathbb{T}}(X, d) \leq n$ .
2. *Existe una  $f \in \mathbb{T}$  tal que para todo  $r > 0$  existe un recubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $X$  con  $r$ -multiplicidad global menor o igual que  $n + 1$  y uniformemente acotado por  $f(r)$ .*
3. *Existe una  $f \in \mathbb{T}$  tal que para todo  $r > 0$  existe un recubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $X$  con multiplicidad menor o igual que  $n + 1$ , número de Lebesgue mayor o igual que  $r$  y uniformemente acotado por  $f(r)$ .*

El siguiente resultado puede consultarse en [19]

**Proposición 0.2.2.** *Sean  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espacios métricos y sea  $\mathbb{T}$  una familia de funciones de la forma 0.1.5. Consideramos el espacio métrico  $(X \times Y, d_X + d_Y)$ . En esta situación se tiene:*

$$\dim_{\mathbb{T}}(X \times Y) \leq \dim_{\mathbb{T}}(X) + \dim_{\mathbb{T}}(Y).$$

*Ejemplo 0.2.3.* Sea  $\mathbb{T}$  una cualquiera de las familias de funciones de la forma 0.1.5. Se tiene que  $\dim_{\mathbb{T}}(\mathbb{R}^n) = n$ . Además  $\text{asdim}(\mathbb{Z}^n) = \dim_{AN}(\mathbb{Z}^n) = n$ .

### 0.3. Definición de conos asintóticos

Sea  $(X, d_X)$  un espacio métrico. Dado un ultrafiltro no principal  $\omega$  de  $\mathbb{N}$  y una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $X$ , se define el  $\omega$ -límite de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (notación:  $\lim_{\omega} x_n = y$ ) como el elemento  $y$  de  $X$  tal que para todo entorno  $U(y)$  de  $y$  el conjunto  $F_{U(y)} = \{n | x_n \in U(y)\}$  pertenece a  $\omega$ . Se puede demostrar fácilmente que el  $\omega$ -límite de una sucesión de puntos siempre existe un espacio compacto.

Sea  $\omega$  un ultrafiltro no principal de  $\mathbb{N}$ . Sea  $d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión  $\omega$ -divergente de números reales positivos y sea  $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  otra sucesión cualquiera de elementos de  $X$ . Ahora podemos construir el *cono asintótico* (notación:  $Cone_\omega(X, c, d)$ ) de  $X$  de la siguiente forma:

En primer lugar definimos el conjunto de todas las sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  tales que la sucesión  $\{\frac{d_X(x_n, c_n)}{d_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada. En tal conjunto tomamos la pseudo-métrica dada por:

$$D(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{\omega} \frac{d_X(x_n, y_n)}{d_n}.$$

Obsérvese que tal límite existe siempre por lo comentado anteriormente. Identificando las sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $D(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = 0$  obtenemos un espacio métrico que llamaremos cono asintótico,  $Cone_\omega(X, c, d)$ .

*Observaciones 0.3.1.* Obsérvese que una aplicación asintóticamente Lipschitz entre dos espacios métricos  $f : X \rightarrow Y$  induce una aplicación Lipschitz entre sus respectivos conos asintóticos  $Cone_\omega(X, c, d)$  y  $Cone_\omega(Y, f(c), d)$  con  $f(c) = \{f(c_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 0.4. Algunas propiedades geométricas de los grupos

**Definición 0.4.1.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado y sea  $S$  un sistema finito de generadores simétrico i.e.  $S = S^{-1}$ . Dado un elemento  $g \in G$ , definimos la longitud  $l(g)$  de  $g$  según  $S$  como:

$$l(g) = \min\{m \mid g = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_m \text{ con } g_i \in S\}.$$

Utilizando la convención  $l(1_G) = 0$ .

En esta situación definimos *la métrica de la palabra*  $d_S$  asociada a  $S$  en  $G$  como:

$$d_S(g_1, g_2) = l(g_1^{-1}g_2)$$

**Proposición 0.4.2.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado. Sean  $S$  y  $L$  dos sistemas finitos de generadores de  $G$  y sean  $d_S$  y  $d_L$  sus respectivas métricas de la palabra. La identidad  $id : (G, d_S) \rightarrow (G, d_L)$  es una cuasi-isometría.

**Definición 0.4.3.** Sea  $G$  un grupo numerable. Decimos que una métrica  $d_G$  en  $G$  es *invariante por la izquierda* si para todo  $g, g_1, g_2 \in G$  se tiene que  $d_G(g \cdot g_1, g \cdot g_2) = d_G(g_1, g_2)$ .

*Observaciones 0.4.4.* De manera análoga se pueden definir las métricas invariantes por la derecha.

**Proposición 0.4.5.** (Smith [69]) Sean  $d_1$  y  $d_2$  dos métricas propias invariantes por la izquierda definidas en un grupo  $G$ . La aplicación identidad  $id : (G, d_1) \rightarrow (G, d_2)$  es una equivalencia a gran escala.

Decimos que un grupo es localmente finito si todos sus subgrupos finitamente generados son finitos.

**Proposición 0.4.6.** [69] Un grupo  $G$  con una métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$  es localmente finito si y solo si  $asdim(G, d_G) = 0$ .

El siguiente resultado es fácil de probar a partir de las definiciones.

**Proposición 0.4.7.** Sean  $H \subset G$  un subgrupo de un grupo finitamente generado  $G$ . Se cumple que:

1. Si  $H$  tiene índice finito en  $G$  entonces  $(H, d_H)$  es cuasi-isométrico a  $(G, d_G)$  con  $d_H$  y  $d_G$  dos métricas de la palabra.
2. Si  $H$  es finito y normal en  $G$  entonces  $(G/H, d_{G/H})$  es cuasi-isométrico a  $(G, d_G)$  para dos métricas de la palabra  $d_{G/H}$  y  $d_G$ .

Decimos que un grupo satisface una propiedad  $P$  virtualmente si contiene un subgrupo de índice finito que satisface tal propiedad.

**Corolario 0.4.8.** Todo grupo finitamente generado y virtualmente abeliano  $G$  es cuasi-isométrico al grupo  $\mathbb{Z}^n$  siendo  $n$  el rango libre de torsión de un subgrupo abeliano  $H$  de índice finito en  $G$ .

Recordamos que un grupo nilpotente  $G$  es aquel para el que existe una serie central superior es decir una serie de subgrupos normales de la forma:

$$\{1_G\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

tal que  $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ . Las siguientes propiedades para conos asintóticos y grupos nilpotentes y abelianos son bien conocidas:

**Teorema 0.4.9.** 1. *Un grupo es virtualmente nilpotente si y solo si sus conos asintóticos son localmente compactos.*

2. *Un grupo es virtualmente abeliano si y solo si sus conos asintóticos son bi-Lipshchitz equivalentes a  $\mathbb{R}^n$ .*

# Capítulo 1

## Propiedades de la dimensión de Assouad-Nagata

La dimensión de Assouad-Nagata surgió a partir de los trabajos de Nagata (ver [1] y [57]) sobre la caracterización de la dimensión topológica en espacios metrizable. En [52] se estudiaron importantes propiedades de tal dimensión. De hecho se vio que la dimensión de Assouad-Nagata es no sólo un invariante bi-Lipschitz sino un invariante por cuasi-simetrías.

La clase de espacios métricos que tienen dimensión de Assouad-Nagata finita es muy amplia. Incluye los espacios doubling, los árboles métricos, los espacios hiperbólicos geodésicos, los buildings euclídeos y las variedades homogéneas de Hadamard (ver [52], [63][64])

Otro resultado importante de [52] relaciona resultados de Assouad [2] con resultados de Dranishnikov [27]. Así el Teorema 1.3. de [52] dice que todo espacio métrico de dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que  $n$  admite un embebimiento cuasi-simétrico en el producto de  $n + 1$ -árboles métricos. Tal resultado refleja la importancia de la dimensión asintótica de Assouad-Nagata ya que permite estudiar mejor los embebimientos en el cubo de Hilbert de grupos con dimensión de Assouad-Nagata finita, en particular su constante de compresión (Ver [39])

Un resultado de [52] que tendrá especial relevancia para nosotros es el Teorema 1.4.:

**Teorema 1.0.10.** *Supongamos que  $X, Y$  son espacios métricos,  $\dim_{AN} X \leq n < \infty$ , e  $Y$  es completo. Si  $Y$  es Lipschitz  $m$ -conexo para  $m = 0, 1, \dots, n-1$ , entonces  $(X, Y)$  tiene la propiedad de extensión de Lipschitz.*

Recordamos que se dice que  $(X, Y)$  tiene la *propiedad de extensión de Lipschitz* si existe una constante  $C > 0$  tal que para toda aplicación Lipschitz  $f : A \rightarrow Y$ , y para todo subconjunto  $A$  de  $X$ , existe una extensión Lipschitz  $g : X \rightarrow Y$  de  $f$  tal que  $Lip(g) \leq C \cdot Lip(f)$ . En tal caso diremos que  $Y$  es un *extensor Lipschitz* de  $X$ . Se dice que un espacio métrico  $Y$  es *Lipschitz  $m$ -conexo* si existe una constante  $C_m > 0$  tal que toda función Lipschitz  $f : S^m \rightarrow Y$  admite una extensión  $g : B^{m+1} \rightarrow Y$  a la  $(m+1)$ -bola unidad  $B^{m+1}$  de tal forma que  $Lip(g) \leq C_m \cdot Lip(f)$ .

En la sección 1.3.2 daremos uno de los principales resultados de este capítulo y de esta memoria. Caracterizamos la dimensión de Assouad-Nagata en términos de extensiones Lipschitz. Así los espacios de dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que  $n$  serán aquellos para los que la  $n$ -esfera  $S^n$  es un extensor Lipschitz. Este resultado sería análogo al teorema clásico que caracteriza la dimensión topológica en términos de extensiones a esferas [50].

En la sección 1.2 estudiamos los espacios de dimensión de Assouad-Nagata igual a cero. Tales espacios están relacionados con los espacios ultramétricos. Así los espacios de dimensión Assouad-Nagata cero estarán caracterizados por admitir un embebimiento bi-Lipschitz en un espacio ultramétrico. Estos resultados los extendemos a la dimensión uniforme. La dimensión uniforme tiene cierto interés ya que para espacios acotados coincide con la dimensión grande  $\delta dX$  de [49]. Determinaremos así un espacio universal para los espacios métricos separables de dimensión de Assouad-Nagata nula y para todos los espacios separables de dimensión uniforme nula. Esto mejora los trabajos de [31] que encontraron un espacio universal para los espacios de dimensión asintótica nula y geometría acotada. Como apéndice de esta sección mostraremos una cantidad no numerable de espacios ultramétricos que no son equivalentes a gran escala.

En la sección 1.1 introduciremos dos funtores en la categoría Lipschitz que relacionan las dimensión asintótica de Assouad-Nagata y la dimensión de capacidad con la dimensión (global) de Assouad-Nagata. S.Buyalo en [23] introdujo la di-

mensión de capacidad y demostró muchas propiedades análogas a los resultados de U. Lang and T. Schlichenmaier [52] para la dimensión de Assouad-Nagata. Así muchos resultados de [23] pueden deducirse directamente de [52] usando nuestros funtores, a modo de ejemplo veremos alguno de ellos. La dimensión de capacidad juega un importante papel en el estudio de los espacios hiperbólicos visuales. Así en [23] Buyalo demostró que la dimensión asintótica de un espacio visual hiperbólico  $X$  está acotada por 1 más la dimensión de capacidad de la frontera visual de  $X$ . A la luz de nuestros resultados vemos que tal resultado es sobre la dimensión de Assouad-Nagata de la frontera visual.

## 1.1. Dimensión microscópica y macroscópica

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y  $\epsilon > 0$  consideramos la métrica  $\text{máx}(d, \epsilon)$  en  $X$ . Dicha fórmula no se leerá literalmente salvo en el caso  $x \neq y$ . De la misma forma se considera la métrica  $\text{mín}(d, \epsilon)$ . Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice que es *discreto* si  $(X, d)$  es  $\delta$ -discreto para algún  $\delta > 0$ , es decir,  $d(x, y) > \delta$  para todos  $x \neq y$ .

**Lema 1.1.1.** *Todo espacio métrico discreto  $(X, d)$  es equivalente bi-Lipschitz al espacio métrico  $(X, \text{máx}(d, \epsilon))$  para todo  $\epsilon > 0$ .*

*Demostración.* Sea  $(X, d)$  un espacio métrico  $\delta$ -discreto. Basta observar que la identidad  $id : (X, \text{máx}(d, \epsilon)) \rightarrow (X, d)$  es 1-Lipschitz y su inversa es  $(1 + \frac{\epsilon}{\delta})$ -Lipschitz puesto que  $d(x, y) \leq \text{máx}(d(x, y), \epsilon) \leq (1 + \frac{\epsilon}{\delta}) \cdot d(x, y)$  para todo  $x \neq y \in X$ .  $\square$

**Corolario 1.1.2.** *Para todo espacio métrico  $(X, d)$  y  $\epsilon, \delta > 0$  el espacio  $(X, \text{máx}(d, \epsilon))$  es equivalente bi-Lipschitz al espacio  $(X, \text{máx}(d, \delta))$ .*

*Demostración.* Supongamos  $\epsilon > \delta$  y obsérvese que  $\text{máx}(d_\delta, \epsilon) = d_\epsilon$ , con  $d_a = \text{máx}(d, a)$ . De este modo el resultado es consecuencia directa del lema 1.1.1.  $\square$

Como la dimensión de Assouad-Nagata es un invariante de la categoría Lipschitz (corolario 0.1.13) obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 1.1.3.** *Para todo espacio métrico  $(X, d)$  la dimensión de Assouad-Nagata de  $(X, \text{máx}(d, \epsilon))$  es independiente de  $\epsilon > 0$ .*

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  se puede omitir sus propiedades microscópicas al considerar el espacio  $(X, \text{máx}(d, 1))$ . Así definimos la *dimensión asintótica (dimensión macroscópica) de Assouad-Nagata* de  $(X, d)$  como  $\text{dim}_{AN}(X, \text{máx}(d, 1))$ .

**Corolario 1.1.4.** *Si  $X$  es un espacio discreto entonces su dimensión asintótica de Assouad-Nagata es igual a su dimensión de Assouad-Nagata*

**Lema 1.1.5.** *La dimensión asintótica de Assouad-Nagata de un espacio métrico  $X$  es menor o igual que  $n \geq 0$  si y solo si existe un constante  $C > 0$  tal que para un  $r > 0$  suficientemente grande existe un  $(r, C \cdot r)$ -recubrimiento  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  de  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que para  $X$  existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $r > M$ , con  $M > 0$ , existe un recubrimiento  $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  de  $X$  tal que cada  $\mathcal{U}_i$  es  $r$ -disjunto y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}_r$  está acotado por  $C \cdot r$ . Sea  $d_M = \text{máx}(d, M)$ . Observamos que el recubrimiento  $\mathcal{U}_r$ ,  $r \leq M$ , formado por los conjuntos uni-puntuales es  $r$ -disjunto en  $(X, d_M)$ . Como los recubrimientos  $\mathcal{U}_r$ ,  $r > M$ , tienen las mismas propiedades deseadas en  $(X, d_M)$  que en  $(X, d)$  entonces  $\text{dim}_{AN}(X, d_M) \leq n$ .

Si  $\text{dim}_{AN}(X, d_1) \leq n$ , entonces para cada  $r > 1$  existe un recubrimiento  $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  de  $X$  tal que cada  $\mathcal{U}_i$  es  $r$ -disjunto (en  $(X, d_1)$ ) y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}_r$  está acotado por  $C \cdot r$  en  $(X, d_1)$ . Finalmente vemos que  $\mathcal{U}_i$  es también  $r$ -disjunto en  $(X, d)$  y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}_r$  está acotado por  $(C + 1) \cdot r$  en  $(X, d)$ .  $\square$

En vistas de la definición de la dimensión asintótica con la propiedad de Higson 0.1.4 se tiene la siguiente consecuencia directa de 1.1.5.

**Corolario 1.1.6.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces su dimensión asintótica de Assouad-Nagata de  $(X, d)$  es igual a su dimensión asintótica con la propiedad de Higson.*

En lo que resta de sección dualizaremos los resultados anteriores de la categoría a gran escala (macroscópica) a la categoría a pequeña escala (microscópica).

**Lema 1.1.7.** *Todo espacio métrico acotado  $(X, d)$  es equivalente bi-Lipschitz a  $(X, \min(d, \epsilon))$  para todo  $\epsilon > 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que el espacio métrico  $(X, d)$  es  $\delta$ -acotado. Por tanto la aplicación identidad  $id : (X, \min(d, \epsilon)) \rightarrow (X, d)$  será  $(1 + \frac{\epsilon}{\delta})$ -Lipschitz y su inversa será 1-Lipschitz puesto que  $\min(d(x, y), \epsilon) \leq d(x, y) \leq (1 + \frac{\delta}{\epsilon}) \cdot \min(d(x, y), \epsilon)$  para todo  $x \neq y \in X$ .  $\square$

**Corolario 1.1.8.** *Para todo espacio métrico  $(X, d)$  y  $\epsilon, \delta > 0$  el espacio  $(X, \min(d, \epsilon))$  es equivalente bi-Lipschitz a  $(X, \min(d, \delta))$ .*

*Demostración.* Supongamos  $\epsilon < \delta$  y por tanto  $\min(d_\delta, \epsilon) = d_\epsilon$ , con  $d_a = \min(d, a)$ . Aplicando el lema 1.1.7 obtenemos claramente el resultado.  $\square$

Análogamente como la dimensión de Assouad-Nagata es un invariante en la categoría Lipschitz se tiene el siguiente resultado:

**Corolario 1.1.9.** *Para todo espacio métrico  $(X, d)$  la dimensión de Assouad-Nagata de  $(X, \min(d, \epsilon))$  es independiente de  $\epsilon > 0$ .*

Al igual que antes, dado un espacio métrico  $(X, d)$  se pueden descartar sus propiedades macroscópicas al considerar el espacio  $(X, \min(d, 1))$ . Se define por tanto la *dimensión microscópica (de Assouad-Nagata)* de un espacio métrico  $(X, d)$  como  $\dim_{AN}(X, \min(d, 1))$ .

**Corolario 1.1.10.** *Si  $X$  es un espacio métrico acotado entonces su dimensión microscópica (de Assouad-Nagata) es igual a su dimensión de Assouad-Nagata.*

**Lema 1.1.11.** *La dimensión microscópica (de Assouad-Nagata) de un espacio métrico  $X$  es menor o igual que  $n$  si y solo si existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $r > 0$  suficientemente pequeño existe un  $(r, C \cdot r)$ -recubrimiento  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  de  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe una constante  $C \geq 1$  tal que para todo  $r < M$ , con  $M > 0$ , hay un recubrimiento  $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  de  $X$  tal que cada  $\mathcal{U}_i$  es  $r$ -disjunto y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}_r$  está acotado por  $C \cdot r$ . Sea  $d_M = \min(d, M)$ . Observamos que el recubrimiento  $\mathcal{U}_r$ ,  $r \geq M$ , consistente en el espacio total  $X$  tiene diámetro menor o igual que  $(C + 1) \cdot r$  en  $(X, d_M)$ . Como los recubrimientos  $\mathcal{U}_r$ , para  $r < M$ , tienen las mismas propiedades deseadas en  $(X, d_M)$  que en  $(X, d)$  entonces  $\dim_{AN}(X, d_M) \leq n$ .

Si  $\dim_{AN}(X, d_1) \leq n$ , entonces para cada  $r < \frac{1}{C}$  existe un recubrimiento  $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  de  $X$  tal que cada  $\mathcal{U}_i$  es  $r$ -disjunto (en  $(X, d_1)$ ) y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}_r$  está acotado por  $C \cdot r$  en  $(X, d_1)$ . Además vemos que  $\mathcal{U}_i$  es también  $r$ -disjunto en  $(X, d)$  y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}_r$  está acotado por  $C \cdot r < 1$  en  $(X, d)$ .  $\square$

Puesto que la dimensión de Capacidad de Buyalo definida en [23](ver la definición dada por nosotros en 0.1.4) puede caracterizarse por la condición del lema 1.1.11, obtenemos automáticamente el siguiente resultado.

**Corolario 1.1.12.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces su dimensión microscópica  $(X, d)$  es igual a su dimensión de capacidad.*

Veamos ahora un ejemplo en el que a partir de un resultado para la dimensión de Assouad-Nagata se obtiene de forma automática resultados para las dimensiones de capacidad y asintótica de Assouad-Nagata.

En [52] se demostró que si  $X = A \cup B$ , entonces:

$$\dim_{AN}(X) = \max(\dim_{AN}(A), \dim_{AN}(B)).$$

**Corolario 1.1.13.** *Consideraremos por  $D(Y)$  o bien la dimensión microscópica de Assouad-Nagata de  $Y$  o bien la dimensión asintótica de Assouad-Nagata de  $Y$ . Si  $X = A \cup B$ , entonces*

$$D(X) = \max(D(A), D(B)).$$

*Demostración.* Basta aplicar los funtores  $\max(d, 1)$  ó  $\min(d, 1)$  a las métricas en cuestión.  $\square$

El siguiente teorema nos describe la dimensión de Assouad-Nagata global en términos de las dimensiones microscópicas y macroscópicas.

**Teorema 1.1.14.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, entonces:*

$$\dim_{AN}(X, d) = \max\{\dim_{AN}(X, \max(d, 1)), \dim_{AN}(X, \min(d, 1))\}.$$

*Demostración.* Denotamos por

$$M = \max\{\dim_{AN}(X, \max(d, 1)), \dim_{AN}(X, \min(d, 1))\}$$

. Del lema 1.1.5 y del 1.1.11 deducimos que  $M \leq \dim_{AN}(X, d)$ . Supongamos que el espacio  $(X, \min(d, 1))$  tiene dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que  $M$  con constante asociada  $C_1 > 1$ , y que el espacio  $(X, \max(d, 1))$  tiene dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que  $M$  con constante asociada  $C_2 > 1$ . Sea  $s > 0$  y definamos  $C = 2C_2C_1$ . Si  $s < \frac{1}{C_1}$  entonces existe un recubrimiento  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  del espacio métrico  $(X, \min(d, 1))$  tal que cada  $\mathcal{U}_i$  es  $s$ -disjunto y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}$  está acotado por  $C_1 \cdot s$ . Como  $C_1 \cdot s < 1$ , este recubrimiento del espacio  $(X, d)$  es también  $s$ -disjunto y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}$  está acotado por  $C_1 \cdot s$ . Si  $s \geq \frac{1}{C_1}$  entonces existe un recubrimiento  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$  del espacio métrico  $(X, \max(d, 1))$  tal que cada  $\mathcal{U}_i$  es  $2C_1 \cdot s$ -disjunto y el diámetro de los elementos de  $\mathcal{U}$  está acotado por  $C_2 \cdot 2C_1 \cdot s$ . Como  $2C_1 > 1$ , este último recubrimiento del espacio  $(X, d)$  es también  $s$ -disjunto y su diámetro estará acotado por  $2C_2C_1 \cdot s$ . En cualquier caso hemos demostrado que  $\dim_{AN} X \leq M$  con constante asociada  $C$ .  $\square$

## 1.2. Espacios de dimension cero

### 1.2.1. Espacios ultramétricos

**Definición 1.2.1.** Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice que es *ultramétrico* si para todo  $x, y, z \in X$  tenemos  $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ .

Un espacio ultramétrico  $X$  puede caracterizarse por la siguiente propiedad:

**Propiedad ultramétrica de los triángulos.** Si un triángulo en un espacio ultramétrico  $X$  tiene los lados tales que  $a \leq b \leq c$ , entonces  $b = c$ . Resulta fácil de probar que toda bola de radio  $D$  en un espacio ultramétrico tiene diámetro  $D$  o que dos bolas de radio  $D$  en un espacio ultramétrico son o bien  $D$ -disjuntas o bien son idénticas.

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. La métrica  $d$  es ultramétrica si y solo si  $f(d)$  es una métrica para toda función no decreciente de la forma  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ .*

*Demostración.* Si  $d$  es una ultramétrica y  $a \leq b = c$  son los lados de un triángulo en  $(X, d)$  entonces  $f(a) \leq f(b) = f(c)$  son los lados del correspondiente triángulo en  $(X, f(d))$  y por tanto  $f(d)$  es una ultramétrica.

Si  $d$  no fuera una ultramétrica entonces existiría un triángulo en  $(X, d)$  cuyos lados serían de la forma  $a \leq b < c$ . Construyamos la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq b \\ \frac{2b}{c-b}t + \frac{bc-3b^2}{c-b} & \text{if } t \geq b \end{cases}$$

En esta situación los lados del correspondiente triángulo en  $(X, f(d))$  son  $f(a) \leq f(b) = b < 3b = f(c)$  lo cual contradice la desigualdad triangular  $\square$

**Definición 1.2.3.** Se dice que una métrica es  $3^n$ -valorada si los únicos valores que asume en  $\mathbb{R}_+$  son de la forma  $3^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

La desigualdad triangular para una métrica  $d$  implica el siguiente resultado:

**Lema 1.2.4.** *Cualquier métrica  $3^n$ -valorada es ultramétrica.*

**Lema 1.2.5.** *Todo espacio ultramétrico es 3-bi-Lipschitz equivalente a un espacio ultramétrico cuya métrica es  $3^n$ -valorada.*

*Demostración.* Dado un espacio ultramétrico  $(X, d)$  definimos una nueva métrica  $\rho$  en  $X$  como sigue:

$$\rho(x, y) = 3^n \quad \text{si} \quad 3^{n-1} < d(x, y) \leq 3^n.$$

Obviamente la aplicación identidad  $\text{id}: (X, d) \rightarrow (X, \rho)$  es 1-Lipschitz y su inversa es 3-Lipschitz.  $\square$

Describiremos ahora un espacio ultramétrico  $(L_\omega, \mu)$  el cual es universal para todos los espacios ultramétricos separables cuya métrica es  $3^n$ -valorada. Este espacio aparece de forma natural en diferentes áreas de las matemáticas (ver por ejemplo [53]). Fijemos un conjunto numerable  $S$  y fijemos un elemento  $s_0 \in S$ . El conjunto  $L_\omega$  es un subconjunto del conjunto de las sucesiones infinitas  $\bar{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tales que todos sus elementos  $x_n$  pertenecen a  $S$ . Diremos que una sucesión  $\bar{x}$  pertenece a  $L_\omega$  si existe un índice  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_n = s_0$  para todo  $n < k$ . La métrica  $\mu$  se define como  $\mu(\bar{x}, \bar{y}) = 3^{-m}$  donde  $m \in \mathbb{Z}$  es el mínimo índice tal que  $x_m \neq y_m$ . No es difícil ver que el espacio  $L_\omega$  es completo, separable y ultramétrico. Bastaría aplicar el lema 1.2.4.

Para demostrar que todo espacio ultramétrico separable cuya métrica sea  $3^n$ -valorada admite una inmersión isométrica en  $(L_\omega, \mu)$  utilizaremos la idea de P.S. Urysohn [71] y probaremos que el espacio  $L_\omega$  es *finitamente inyectivo*:

**Lema 1.2.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico finito cuya métrica  $d$  es  $3^n$ -valorada. En esta situación, para cualquier subespacio  $A \subset X$ , toda aplicación isométrica  $f: A \rightarrow L_\omega$  admite una extensión isométrica  $\tilde{f}: X \rightarrow L_\omega$ .*

*Demostración.* Bastará probar el caso en el que  $X \setminus A$  esté formado por un único punto  $x$ . En tal caso tenemos que encontrar un punto  $\bar{z} \in L_\omega$  tal que  $\mu(\bar{z}, f(a)) = d(x, a)$  para todo punto  $a \in A$ . Sea  $A_x = \{a \in A \mid d(x, a) = d(x, A)\}$  el conjunto de todos los puntos de  $A$  más próximos a  $x$  y sea  $d(x, A) = 3^{-n}$ . Fijemos un punto  $b \in A_x$  y definamos la sucesión  $\bar{z} = \{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  como sigue:  $z_m = f(b)_m$  si  $m < n$ ,  $z_m = s_0$  si  $m > n$  y  $z_n$  es cualquier elemento del conjunto  $S$  distinto de  $f(c)_n$  para todo punto  $c \in A_x$ .

Es fácil de ver que  $\mu(\bar{z}, f(c)) = 3^{-n} = d(x, c)$  para todo punto  $c \in A_x$ . Por otro lado para todo punto  $a \in A \setminus A_x$  tenemos que  $d(a, x) = d(a, b) = 3^{-m} > 3^{-n}$  lo que significa que  $f(a)_m \neq f(b)_m = z_m$  y por tanto  $\mu(\bar{z}, f(a)) = 3^{-m} = d(x, a)$ .  $\square$

**Teorema 1.2.7.** *Todo espacio métrico separable  $(X, d)$  equipado con una métrica  $d$  que sea  $3^n$ -valorada admite una inmersión isométrica en el espacio  $(L_\omega, \mu)$ .*

*Demostración.* Como  $X$  es separable será suficiente con encontrar una inmersión isométrica de un subespacio denso numerable  $A$  de  $X$ . Para ello se puede construir

tal inmersión por inducción aplicando el lema 1.2.6.  $\square$

**Corolario 1.2.8.** *Todo espacio ultramétrico separable admite una inmersión 3-bi-Lipschitz en el espacio  $(L_\omega, \mu)$ .*

*Demostración.* Basta aplicar por un lado Lema 1.2.5 y posteriormente el teorema 1.2.7.  $\square$

El siguiente teorema nos da una importante propiedad de los espacios ultramétricos. Decimos que un subconjunto  $A$  de un espacio  $X$  es un  $\lambda$ -Lipschitz retracto si existe una aplicación  $\lambda$ -Lipschitz  $f : X \rightarrow A$  tal que  $f|_A$  sea la identidad.

**Teorema 1.2.9.** *Todo conjunto cerrado  $A$  de un espacio ultramétrico  $X$  es un  $\lambda$ -Lipschitz retracto de  $X$  para todo  $\lambda > 1$ . Si el subconjunto  $A$  no está acotado la retracción puede ser métricamente propia.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio ultramétrico y que  $A \subset X$  es un subespacio cerrado. Dado  $\lambda > 1$  elijamos un número  $\delta > 1$  tal que  $\delta^2 < \lambda$ .

Fijemos un punto base  $x_0 \in X$ . Tomemos un buen orden arbitrario  $<_k$  en cada anillo no vacío de la forma  $A_k = \{x \mid k \leq d(x, x_0) < k + 1\}$  en  $X$  para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ahora diremos que  $z \prec z'$  para cada par de puntos  $z, z' \in X$  si  $z \in A_k$ ,  $z' \in A_{k'}$  y  $k > k'$  ó si  $z, z' \in A_k$  y  $z <_k z'$ . Obsérvese que  $\prec$  en un orden en  $X$  tal que para todo subconjunto acotado no vacío  $C$  de  $X$  el orden restringido  $\prec|_C$  es un buen orden.

Definimos la retracción  $r : X \rightarrow A$  como sigue. Para cada punto  $x \in X$  consideramos el conjunto no vacío siguiente:

$$A_x = \{a \in A \mid d(x, a) \leq \delta \cdot \text{dist}(x, A)\}$$

y definimos  $r(x)$  como el punto mínimo del conjunto  $A_x$  con respecto al orden  $\prec$ .

Afirmamos que la retracción  $r$  es  $\lambda$ -Lipschitz. Efectivamente, supongamos que para algunos puntos  $x, y \in X$  tenemos  $d(r(x), r(y)) > \lambda \cdot d(x, y)$ . Sin pérdida de generalidad podemos considerar que  $r(x) \prec r(y)$ .

Si  $d(y, r(x)) \leq d(y, r(y))$ , entonces  $r(x) \in A_y$  y  $r(x) \prec r(y)$  contradice la elección de  $r(y)$  como el mínimo punto del conjunto  $A_y$ .

En el caso que  $d(y, r(x)) > d(y, r(y))$  denotamos por  $D$  la distancia entre  $r(x)$  y  $r(y)$  y vemos que  $d(y, r(x)) = d(r(x), r(y)) = D$  en el triángulo isósceles  $\{y, r(x), r(y)\}$ . Como  $D > d(x, y)$ , obtenemos  $d(x, r(x)) = d(y, r(x)) = D$  en el triángulo isósceles  $\{x, y, r(x)\}$ .

$$d(x, r(y)) \geq \text{dist}(x, A) \geq \frac{1}{\delta} \cdot d(x, r(x)) = \frac{D}{\delta} > \frac{D}{\lambda} > d(x, y)$$

Por tanto  $d(x, r(y)) = d(y, r(y))$  en el triángulo isósceles  $\{x, y, r(y)\}$ . Así el punto  $r(x)$  no pertenecerá a  $A_y$  puesto que  $r(x) \prec r(y)$ , lo que implica que  $d(y, r(x)) = D > \delta \cdot \text{dist}(y, A)$ . Entonces existe un punto  $z \in A$  con  $d(y, z) < \frac{D}{\delta}$ .

$$d(y, z) \geq \text{dist}(y, A) \geq \frac{d(y, r(y))}{\delta} = \frac{d(x, r(y))}{\delta} \geq \frac{D}{\delta^2} > \frac{D}{\lambda} > d(x, y)$$

Por tanto  $d(x, z) = d(y, z)$  en el triángulo isósceles  $\{x, y, z\}$ . Como  $d(x, z) < d(x, r(x))$ , tenemos que  $z \in A_x$ , pero  $d(x, z) < \frac{D}{\delta} = \frac{d(x, r(x))}{\delta}$  contradice la definición de  $A_x$  ya que dos puntos de  $a, a' \in A_x$  no pueden cumplir que  $d(x, a) < \frac{d(x, a')}{\delta}$ .

Vamos a probar ahora que si el subconjunto  $A$  no es acotado entonces la retracción  $r$  es métricamente propia. Sea  $B$  un subconjunto acotado de  $A$ . Elegimos un punto  $a \in A$  el cuál esté en un anillo mayor que cualquier anillo que tenga intersección no vacía con  $B$  (por tanto,  $a \prec B$ ). Dado un punto cualquiera tal que  $x \in r^{-1}(B)$  tenemos que  $a \notin A_x$ , por tanto  $d(x, r(x)) \leq \delta \cdot d(x, A) < d(x, a)$ . La propiedad ultramétrica del triángulo  $\{x, a, r(x)\}$  implica  $d(r(x), a) = d(x, a)$  y por tanto:

$$d(x, B) \leq d(x, r(x)) < d(r(x), a) \leq \text{diam}(B) + d(a, B)$$

□

La condición  $\lambda > 1$  no puede ser eliminada como muestra el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 1.2.10.* Sea  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos. Definimos  $d(x_1, x_n) = 1 + \frac{1}{n}$  y  $d(x_m, x_n) = \max\{1 + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{n}\}$  para todo  $m, n > 1$ . Entonces  $d$  es una ultramétrica en  $X$  y no existe una retracción 1-Lipschitz de  $X$  en  $A = \{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ .

## 1.2.2. Dimensión de Assouad-Nagata y Espacios Ultramétricos

Los espacios ultramétricos son los mejores ejemplos de espacios métricos con dimensión de Assouad-Nagata cero. De hecho para cualquier número positivo  $D$  cualquier componente  $D$ -conexa de un espacio ultramétrico está contenida en una bola de radio  $D$  y por tanto estará  $D$ -acotada. Vamos a caracterizar los espacios de dimensión de Assouad-Nagata 0 usando ultramétricas.

El siguiente teorema aparece en [25, Proposición 15.7].

**Teorema 1.2.11.** *Si en un espacio métrico  $(X, d)$  su dimensión de Assouad-Nagata es tal que  $\dim_{AN}(X) \leq 0$ , entonces existe una ultramétrica  $\rho$  en  $X$  tal que la identidad  $id: (X, d) \rightarrow (X, \rho)$  es bi-Lipschitz.*

**Teorema 1.2.12.** *Todo espacio métrico separable con dimensión de Assouad-Nagata 0 admite una inmersión bi-Lipschitz en el espacio  $(L_\omega, \mu)$ .*

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 1.2.11 y el Teorema 1.2.8. □

**Teorema 1.2.13.** *En la categoría Lipschitz las siguientes condiciones son equivalentes*

1.  $\dim_{AN}(X) \leq 0$ ;
2. *existe un número  $\lambda$  tal que cada subconjunto de  $X$  es un  $\lambda$ -Lipschitz retracto de  $X$ ;*
3. *Existe un número  $\lambda$  tal que cada espacio métrico es un extensor  $\lambda \times$ -Lipschitz para  $X$ ;*
4. *La 0-esfera unidad  $S^0$  es un extensor para  $X$ .*

*Además las condiciones (1), (2), y (3) son equivalentes en la categoría Lipschitz métricamente propia.*

*Demostración.* (1)  $\implies$  (2) en ambas categorías. El teorema 1.2.11 nos permite encontrar una ultramétrica  $\rho$  en  $X$  que sea equivalente bi-Lipschitz a  $d$ . Aplicando el teorema 1.2.9 completamos esta parte de la demostración.

(2)  $\implies$  (3) también en ambas categorías. Dado un subespacio cerrado  $A \subset X$  y una aplicación Lipschitz  $f: A \rightarrow Y$  con  $Y$  un espacio métrico cualquiera. Fijamos una  $\lambda$ -Lipschitz retracción de la forma  $r: X \rightarrow A$ . Entonces la composición  $f \circ r: X \rightarrow Y$  tiene la constante de Lipschitz acotada por  $\lambda \cdot \text{Lip}(f)$ .

(3)  $\implies$  (4) Trivial.

(4)  $\implies$  (1) Sea  $m \geq 1$  un número tal que cualquier aplicación  $\lambda$ -Lipschitz de un subconjunto cerrado  $A \subset X$  a  $S^0$  puede ser extendida a una aplicación  $m\lambda$ -Lipschitz de  $X$ . Si una de las componentes  $S$ -conexas de  $X$  no estuviese  $mS$ -acotada, existirían dos puntos  $z_0$  y  $z_1$  con  $d(z_0, z_1) > mS$  y una  $S$ -cadena de puntos de la forma  $z_0 = x_0, x_1, \dots, x_k = z_1$ . Pero entonces observamos que la aplicación  $f: \{z_0\} \cup \{z_1\} \rightarrow S^0$  definida por  $f(z_0) = 0$  y  $f(z_1) = 1$  es  $\frac{1}{d(z_0, z_1)}$ -Lipschitz pero cualquier extensión suya a la cadena de puntos sería al menos  $\frac{1}{S}$ -Lipschitz y por tanto no puede ser  $\frac{m}{d(z_0, z_1)}$ -Lipschitz (ya que  $\frac{1}{S} > \frac{m}{d(z_0, z_1)}$ ).

(3)  $\implies$  (1) en la categoría Lipschitz propia. Si una componente  $S$ -conexa de  $X$  no fuera  $\lambda S$ -acotada, existirían un par de puntos  $z_0$  y  $z_1$  con  $d(z_0, z_1) > \lambda S$  y una  $S$ -cadena de puntos de la forma  $z_0 = x_0, x_1, \dots, x_k = z_1$ . Sea  $A$  un subconjunto no acotado  $\lambda S$ -discreto de  $X$  que contiene a los puntos  $z_0$  y  $z_1$ . En esta situación la aplicación identidad  $\text{id}_A$  sería 1-Lipschitz pero cualquier extensión de esta aplicación a la cadena no sería  $\lambda S$ -Lipschitz.  $\square$

### 1.2.3. Espacios de Dimension Uniforme nula

**Teorema 1.2.14.** *Si un espacio métrico  $(X, d)$  tiene dimensión uniforme  $\dim_u(X) \leq 0$ , entonces existe una ultramétrica  $\rho$  en  $X$  tal que la aplicación identidad  $\text{id}: (X, d) \rightarrow (X, \rho)$  es bi-uniforme*

*Demostración.* Supongamos que el espacio  $X$  tiene dimensión uniforme igual a zero de tipo  $\mathcal{D}$  i.e.  $\mathcal{D}$  es una función de control 0-dimensional. Consideremos dos puntos  $x, z \in X$  y definimos

$$S = \frac{1}{2} \mathcal{D}^{-1}(d(x, z)).$$

Entonces los puntos  $x$  y  $z$  pertenecerán a diferentes  $S$ -componentes conexas de  $X$ .

Por tanto para cualquier cadena  $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = z$  tenemos que

$$\mathcal{D}^{-1}(d(x, z)) \leq 2 \cdot \max_{0 \leq i < k} \{d(x_i, x_{i+1})\}.$$

Definamos ahora  $\rho(x, z)$  como el ínfimo de  $\max_{0 \leq i < k} \{d(x_i, x_{i+1})\}$  sobre todas las cadenas finitas  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$  con  $x = x_0$  y  $x_k = z$ . Obviamente

$$\frac{1}{2} \cdot \mathcal{D}^{-1}(d(x, z)) \leq \rho(x, z) \leq d(x, z).$$

Para ver que  $\rho$  es una ultramétrica, tomamos tres puntos  $x, y, z$  en  $X$  y sea  $s$  el ínfimo de todos los números positivos  $S$  tal que los tres puntos pertenecen a la misma  $S$ -componente conexa de  $X$ . Si se cumple que o bien los tres puntos pertenecen a la misma  $s$ -componente conexa, o bien los tres puntos pertenecen a distintas  $s$ -componentes conexas, entonces  $\rho(x, y) = \rho(x, z) = \rho(y, z) = s$ . Si, en caso contrario, los puntos  $x$  e  $y$  pertenecieran a la misma  $s$ -componente conexa que no contiene a  $z$ , entonces  $\rho(x, y) \leq s = \rho(x, z) = \rho(y, z)$ .  $\square$

**Corolario 1.2.15.** *Un espacio métrico separable  $X$  tiene dimensión uniforme igual a cero si y solo si admite una inmersión bi-uniforme en  $L_\omega$ .*

*Demostración.* Si  $\dim_u(X) \leq 0$  podemos cambiar la métrica en  $X$  bi-uniformemente para tener un espacio ultramétrico y entonces realizar una inmersión de dicho espacio de forma bi-Lipschitz en  $L_\omega$  usando el teorema 1.2.8.

Si  $X$  admite una inmersión bi-uniforme en  $L_\omega$ , su imagen tiene dimensión uniforme igual a cero como subespacio de  $L_\omega$ . Entonces  $X$  tiene dimensión uniforme igual a cero como consecuencia del corolario 0.1.13.  $\square$

**Teorema 1.2.16.** *En ambas categorías la uniforme y la uniforme propia las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\dim_u X \leq 0$ ;
2. *Existe una función continua creciente  $\mu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  con  $\mu(0) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty$ , tal que cada subespacio cerrado de  $X$  es un retracto  $\mu$ -uniforme de  $X$ .*

*Demostración.* (1)  $\implies$  (2) El teorema 1.2.14 nos permite encontrar una ultramétrica  $\rho$  en  $X$  que sea bi-uniformemente equivalente a  $d$ . Aplicando a continuación el teorema 1.2.9 completamos la demostración

(2)  $\implies$  (1) Si una  $S$ -componente conexa de  $X$  no fuera  $\mu(S)$ -acotada, existirían un par de puntos  $z_0$  y  $z_1$  con  $d(z_0, z_1) > \mu(S)$  y una  $S$ -cadena de puntos  $z_0 = x_0, x_1, \dots, x_k = z_1$ .

En la categoría uniforme sea  $A = \{z_0\} \cup \{z_1\}$ . En la categoría uniforme propia consideramos un subespacio cerrado  $A$  de  $X$  que contenga a los puntos  $z_0$  and  $z_1$  y tal que la distancia de  $\{z_0\} \cup \{z_1\}$  al resto de puntos de  $A$  es mayor que  $d(z_0, z_1)$ .

Observamos ahora que cualquier retracción de  $X$  a  $A$  restringida a la cadena llevaría algunos puntos que estuvieran a distancia menor o igual que  $S$  a dos puntos a distancia mayor que  $d(z_0, z_1) > \mu(S)$ . Por tanto tal retracción no podría ser  $\mu$ -uniforme.  $\square$

#### 1.2.4. Ejemplos de espacios ultramétricos no equivalentes a gran escala

En esta sección construiremos una cantidad no numerable de espacios ultramétricos no equivalentes a gran escala. Todos ellos tendrán geometría acotada.

**Definición 1.2.17.** Un espacio métrico es de *geometría acotada* si existe un número  $r > 0$  y una función  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que la  $r$ -capacidad (el máximo cardinal de un subconjunto  $r$ -discreto) de toda  $\varepsilon$ -bola no supera  $c(\varepsilon)$ .

**Definición 1.2.18.** Sean  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  espacios métricos con puntos destacados. Definimos la *wedge métrico*  $X \vee Y$  como el wedge topológico de estos espacios con la métrica siguiente:

$$d(z, z') \begin{cases} d_X(z, z') & \text{si } z, z' \in X \\ d_Y(z, z') & \text{si } z, z' \in Y \\ \max\{d_X(z, x_0), d_Y(z', y_0)\} & \text{si } z \in X \setminus \{x_0\} \text{ y } z' \in Y \setminus \{y_0\} \end{cases}$$

Del mismo modo se puede definir el wedge métrico en una familia arbitraria de espacios métricos puntuales (cf.[14, Ejemplo 2] o [15, Teorema 2.2]).

El lema siguiente es fácil de demostrar.

**Lema 1.2.19.** *El wedge métrico de una familia de espacios puntuales ultramétricos es un espacio puntual ultramétrico.*

Si  $X$  es un espacio ultramétrico acotado de diámetro menor que  $M$ , entonces *el cono* (notación:  $\text{Cone}(X, M)$ ) se obtiene a partir de  $X$  al añadirle un vértice extra  $v$  y declarar que  $d(v, x) = M$  para todo  $x \in X$ . Es claro que  $\text{Cone}(X, M)$  es un espacio ultramétrico puntual con el vértice  $v$  como punto base.

Nuestros ejemplos se obtendrán al realizar el wedge de conos sobre espacios ultramétricos básicos, esto es, copias de 0-esqueletos de complejos simpliciales con cierto reescalamiento.

Dado un conjunto  $\lambda$  de enteros mayor que 1, construiremos una lista  $X_i, i \geq 1$ , de espacios que llamaremos *islas* por medio de las siguientes condiciones:

1. El cardinal  $n_i$  de  $X_i$  pertenece  $\lambda$ .
2. Existe un entero  $m_i \geq n_i$  tal que  $d(x, y) = m_i$  para todo  $x \neq y \in X_i$ . Es claro que  $m_i = \text{diam}(X_i)$ .
3. Para cada  $m \geq n$  y  $n \in \lambda$  el conjunto de islas  $X_i$  tal que  $m = \text{diam}(X_i)$  y  $n = |X_i|$  es infinito

El wedge  $X_\lambda$  de todos los  $\text{Cone}(X_i, k_i)$ , donde  $k_i = \sum_{j \leq i} m_j$  (póngase  $m_j = 0$  para  $j \leq 0$ ), será llamado el  $\lambda$ -archipiélago.  $k_i$  será la *separación* de la isla  $X_i$  en el  $\lambda$ -archipiélago.

**Proposición 1.2.20.** *Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces el  $\lambda_1$ -archipiélago no es equivalente a gran escala al  $\lambda_2$ -archipiélago.*

*Demostración.* Sea  $X_1$  un  $\lambda_1$ -archipiélago y  $X_2$  un  $\lambda_2$ -archipiélago. Supongamos que  $f: X_1 \rightarrow X_2$  y  $g: X_2 \rightarrow X_1$  son equivalentes a gran escala tales que las aplicaciones  $g \circ f$  y  $f \circ g$  son  $C$ -próximas a la identidad y que no mueven los puntos base. Asumamos que el conjunto  $\lambda_1 \setminus \lambda_2$  es no vacío y fijemos un número  $n$  en él.

Existen tres parámetros asociados a una isla en un archipiélago: el tamaño, el diámetro y la separación. Por simplicidad, decimos que una  $(n, N, S)$ -isla contiene  $n$  puntos, es de diámetro  $N$  y separación  $S$ . Nótese que  $n \leq N \leq S$ .

La idea de la demostración es como sigue. Como el espacio  $X_1$  contiene muchas islas de  $n$ -puntos, vamos a elegir una  $(n, N, S)$ -isla  $P \subset X$  tal que  $f(P)$  sea también una isla de  $n$ -puntos en  $X_2$ . Como el archipiélago  $X_2$  no tiene islas de  $n$ -puntos, obtendremos una contradicción. Primero elegimos el tamaño  $N$  de la isla  $P$  de tal modo que  $N$  sea lo suficientemente grande para que la aplicación  $f$  sea inyectiva en  $P$  y la aplicación  $g$  sea inyectiva en  $f(P)$ . Entonces elegimos la separación  $S$  de la isla  $P$  que sea también suficientemente grande para que  $f(P)$  esté contenida en alguna isla  $Q$  de  $X_2$  y  $g(Q)$  esté contenida en alguna isla de  $X_1$  (de hecho  $g(Q) \subset P$ ).

Introducimos ahora algunas notaciones que usaremos en el resto de la demostración. Dada una equivalencia a gran escala  $h: Y \rightarrow Z$  entre espacios métricos, denotamos por  $\rho_h$  y  $\delta_h$  dos funciones reales tales que  $\rho_h(d_Y(y, y')) \leq d_Z(h(y), h(y')) \leq \delta_h(d_Y(y, y'))$  para todo  $y, y' \in Y$ . Si uno de los espacios  $Y, Z$  no está acotado entonces el otro tampoco y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_h(t) = \infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_h(t)$ .

Sea un entero  $N > C$  tal que  $\rho_f(N) > C$ . Vemos que al ser  $N > C$ , cualquier  $(n, N, S)$ -isla  $P \subset X_1$  es  $C$ -discreta y está  $C$ -separada del resto de  $X_1$ . Por tanto la aplicación  $g \circ f$  es la identidad en  $P$  y la aplicación  $f$  es inyectiva en  $P$ .

Claramente, la imagen  $f(P)$  de cualquier  $(n, N, S)$ -isla  $P \subset X_1$  es  $\delta_f(N)$ -acotada en  $X_2$  y por tanto está contenida en alguna  $\delta_f(N)$ -componente  $Q$  de  $X_2$ . Si la isla  $P$  está  $S$ -separada en  $X_1$ , entonces su imagen  $f(P)$  está al menos  $\rho_f(S)$ -lejos del punto base de  $X_2$ . Elegimos  $S$  suficientemente grande para satisfacer  $\rho_f(S) > \delta_f(N)$  y por tanto tal número garantiza que la  $\delta_f(N)$ -componente conexa de  $Q$  que contiene a  $f(P)$  es una isla. Supongamos que  $Q$  es una  $(k, m, S')$ -isla con  $m \leq \delta_f(N)$  y  $k > n$  ( $f$  es inyectiva en  $P$ ).

Como  $\rho_f(N) > C$ , la imagen  $f(P)$  es  $C$ -discreta y por tanto  $m > C$ . Pero entonces la aplicación  $f \circ g$  es la identidad en  $Q$  y la aplicación  $g$  es inyectiva en  $Q$ .

La imagen  $g(Q)$  está  $\delta_g(m)$ -acotada y contiene a  $P$ . Eligiendo  $S$  mayor que  $\delta_g(\delta_f(N))$  garantizamos que la isla  $P$  tiene una separación mayor que  $\delta_g(m)$  del

resto de  $X_1$ , por tanto el conjunto  $g(Q)$  está completamente en  $P$ . Como  $g$  es inyectiva en  $Q$ , obtendríamos  $n \geq k$ . Esto es una contradicción.  $\square$

Un equivalente a gran escala  $\mathcal{M}^0$  del conjunto de Cantor fue introducido en [31]: Es el conjunto de todos los enteros positivos cuya expresión ternaria contiene solo ceros y doses con la métrica heredada de  $\mathbb{R}_+$ :  $\mathcal{M}^0 = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i 3^i \mid a_i = 0, 2\}$ .

**Proposición 1.2.21.** [31, Theorem 3.11] *El espacio  $\mathcal{M}^0$  es universal para todos los espacios métricos propios de geometría acotada y dimensión asintótica cero*

Como consecuencia obtenemos que:

**Corolario 1.2.22.** *Hay una cantidad no numerable de subespacios en  $\mathbb{R}$  de dimensión asintótica 0 y que no son equivalentes a gran escala.*

*Demostración.* Debido a la proposición 1.2.21 es suficiente comprobar que cada  $\lambda$ -archipiélago de  $X$  es propio y tiene geometría acotada.

Dado  $R > 0$ , toda bola  $\bar{B}(x, R)$  o bien coincide con  $\bar{B}(x_0, R)$ , donde  $x_0$  es el centro del archipiélago  $X$ , o bien consiste en  $x$  únicamente, o bien es la isla que contiene a  $x$  que tiene como mucho  $R$  puntos en tal caso. Así, el número de puntos de cada bola en  $B(x, R)$  está acotado por algún número que sólo depende de  $R$ . Esto demuestra que  $X$  es propio y de geometría acotada.  $\square$

## 1.3. Dimensión de Assouad-Nagata y extensiones Lipschitz

### 1.3.1. Esferas como extensores Lipschitz

Recordamos que un espacio métrico  $E$  es un *extensor Lipschitz* de  $X$  si existe una constante  $C > 0$  tal que cada función  $\lambda$ -Lipschitz  $f : A \rightarrow E$ , con  $A$  un subconjunto de  $X$ , se extiende a una función  $C \cdot \lambda$ -Lipschitz  $\tilde{f} : X \rightarrow E$ .

El objetivo de esta sección es encontrar condiciones necesarias y suficientes para que una esfera  $S^m$  sea un extensor Lipschitz de  $X$ . Esto se hace comparando la existencia de extensiones Lipschitz en rangos acotados de constantes Lipschitz

con la existencia de refinamientos de Lebesgue en rangos acotados de constantes de Lebesgue. (ver 1.3.1, 1.3.2, y 1.3.4).

En analogía con las funciones  $\lambda$ -Lipschitz introducimos el concepto de *recubrimiento  $r$ -Lebesgue*  $\mathcal{U}$  que será una simplificación del hecho  $r \leq L(\mathcal{U})$ .

Denotaremos por  $\Delta^n$  el estándar símplice unidad de dimensión  $n$  con la  $l_1$ -métrica. Obsérvese que la esfera unidad  $S^n$  es equivalente bi-Lipschitz a la frontera  $\partial\Delta^{n+1}$ .

**Proposición 1.3.1.** *Supongamos que  $X$  es un espacio métrico y sean  $m \geq 0$ ,  $C > 0$ , y  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ . Si cualquier función  $\lambda$ -Lipschitz  $f : A \rightarrow S^m$ , con  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , se extiende a una función  $C \cdot \lambda$ -Lipschitz de la forma  $\tilde{f} : X \rightarrow S^m$ , entonces el número  $t = \frac{1}{4C(m+2)^2(m+1)}$  tiene la propiedad de que cualquier recubrimiento  $r$ -Lebesgue finito de la forma  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{m+1}\}$  de  $X$  con  $\frac{4(m+2)^2}{\lambda_2} < r < \frac{4(m+2)^2}{\lambda_1}$  admitirá un refinamiento  $\mathcal{V}$  tal que  $\mathcal{V}$  es  $t \cdot r$ -Lebesgue y la multiplicidad de  $\mathcal{V}$  es menor o igual que  $m + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $r$  un número tal que  $\frac{4(m+2)^2}{\lambda_2} < r < \frac{4(m+2)^2}{\lambda_1}$  y sea  $\mathcal{U}$  un recubrimiento  $r$ -Lebesgue. Por tanto  $\lambda_1 < \frac{4(m+2)^2}{r} < \lambda_2$ . Consideremos la aplicación baricéntrica  $\phi : X \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{U}) = \Delta^{m+1}$ . Obsérvese que  $Lip(\phi) \leq \frac{4(m+2)^2}{r}$ . Existe por tanto  $g : X \rightarrow \partial\Delta^{m+1}$  tal que  $Lip(g) \leq \frac{4C(m+2)^2}{r}$  y  $g(x) = \phi(x)$  para todo  $x \in X$  tal que  $\phi(x) \in \partial\Delta^{m+1}$ . Consideremos la familia de conjuntos  $V_i = \{x \in X \mid g_i(x) > 0\}$ . Obsérvese que  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=0}^{m+1}$  tiene multiplicidad menor o igual que  $m + 1$ . También observamos que  $x \in V_i$  implica  $x \in U_i$ , y por tanto  $\mathcal{V}$  refina  $\mathcal{U}$ . Dado  $x \in X$  existe un  $i$  tal que  $g_i(x) \geq \frac{1}{m+1}$ . Y así si  $d(x, y) < \frac{r}{4C(m+2)^2(m+1)}$ , entonces  $|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{1}{m+1}$  y  $g_i(y) > 0$ . De lo que se sigue que la bola en  $x$  de radio  $\frac{r}{4C(m+2)^2(m+1)}$  está contenida en un elemento de  $\mathcal{V}$ . Esto demuestra que  $\mathcal{V}$  es  $t \cdot r$ -Lebesgue, con  $t = \frac{1}{4C(m+2)^2(m+1)}$ .  $\square$

La idea que hay detrás de la demostración de la siguiente proposición se comprende mejor al pensar en las aplicaciones de  $X$  a un  $(m + 1)$ -símplice  $\Delta^{m+1}$  como una partición de la unidad. Como queremos crear una aplicación a su frontera  $S^m = \partial\Delta^{m+1}$ , una herramienta geométrica será la proyección radial  $r$  que se expresa de la forma  $(1 - \beta) \cdot r + \beta \cdot \phi$ , siendo  $\phi$  una partición de la unidad que viene

de un recubrimiento de  $X$  de multiplicidad menor o igual que  $m + 1$ .

**Proposición 1.3.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sean  $m \geq 0$ ,  $t > 0$ , y  $r_2 > r_1 > 0$ . Existe un  $s > 0$  tal que si cualquier recubrimiento  $r$ -Lebesgue finito  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{m+1}\}$  de  $X$ , donde  $r_1 < r < r_2$ , admite un refinamiento  $t \cdot r$ -Lebesgue  $\mathcal{V}$  que satisface  $m(\mathcal{V}) \leq m + 1$ , entonces cualquier función  $\lambda$ -Lipschitz  $f : A \rightarrow S^m$ ,  $A \subset X$ , admite una extensión  $C \cdot \lambda$ -Lipschitz  $\tilde{f} : X \rightarrow S^m$  siempre y cuando  $\frac{1}{12sr_2(m+2)} < \lambda < \frac{1}{12sr_1(m+2)}$  y  $C = \frac{102s(m+2)^3}{t}$ .*

*Demostración.* Se sigue de [55] que existe  $s > 0$  tal que dada una función  $\lambda$ -Lipschitz  $f : A \rightarrow \Delta^{m+1}$  se puede extender a una función  $s \cdot \lambda$ -Lipschitz  $g : X \rightarrow \Delta^{m+1}$ .

Supongamos  $\frac{1}{12sr_2(m+2)} < \lambda < \frac{1}{12sr_1(m+2)}$  y que  $f : A \rightarrow \partial\Delta^{m+1}$  es una función  $\lambda$ -Lipschitz. Por lo anterior podemos extender tal función a otra función  $s \cdot \lambda$ -Lipschitz  $g : X \rightarrow \Delta^{m+1}$ . Sea  $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$  definida como  $\alpha(x) = (m + 2) \cdot \min\{g_i(x) \mid 0 \leq i \leq m + 1\}$ . Obsérvese que  $Lip(\alpha) \leq (m + 2)s \cdot \lambda$ . Sea  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida como  $\beta(z) = 3z - 1$  en  $[1/3, 2/3]$ ,  $\beta(z) = 0$  para  $z \leq 1/3$  y  $\beta(z) = 1$  para  $z \geq 2/3$ . Obsérvese que  $Lip(\beta) \leq 3$ .

Construimos los conjuntos  $U_i = \{x \in X \mid g_i(x) > \frac{\alpha(x)}{m+2} \text{ ó } \alpha(x) > 2/3\}$ . Veamos que  $L(\mathcal{U}) \geq r = \frac{1}{12s\lambda(m+2)}$  como sigue:

Caso 1:  $x \in X$  y  $\alpha(x) > 3/4$ . De este modo, para cada  $y \in X$  con  $d(x, y) < \frac{1}{12s\lambda(m+2)}$  se tiene  $\alpha(x) - \alpha(y) \leq 1/12$ , y así la desigualdad  $\alpha(y) \leq 2/3$  no es posible. Por tanto, en este caso la bola  $B(x, \frac{1}{12s\lambda(m+2)})$  está contenida en todos los  $U_i$ .

Caso 2:  $\alpha(x) \leq 3/4$ . Existe  $i$  tal que  $g_i(x) \geq \frac{1}{m+2}$ . Como  $\psi_i = g_i - \frac{\alpha}{m+2}$  es  $2s\lambda$ -Lipschitz, para todo  $y \in X$  que satisface  $d(x, y) < \frac{1}{8s\lambda(m+2)}$  tenemos  $\psi_i(x) - \psi_i(y) < \frac{1}{4(m+2)}$  y  $\psi_i(y) > 0$  al cumplirse  $\psi_i(x) \geq \frac{1}{4(m+2)}$ .

Hemos probado que  $\mathcal{U}$  es un recubrimiento  $r$ -Lebesgue y que  $r_1 < r < r_2$ . Ahora refinamos cada  $U_i$  en  $V_i$  de tal forma que  $m(\mathcal{V}) \leq m + 1$  y  $L(\mathcal{V}) \geq \frac{t}{12s\lambda(m+2)}$ . La aplicación baricéntrica  $\phi : X \rightarrow \partial\Delta^{m+1}$  correspondiente a  $\mathcal{V}$  satisface  $Lip(\phi) \leq \frac{4(m+2)^2}{L(\mathcal{V})} \leq \frac{48s\lambda(m+2)^3}{t}$ .

Definimos  $h(x) = \sum_{i=0}^{m+1} (g_i(x) - \frac{\alpha(x)}{m+2}) \cdot \frac{1-\beta(\alpha(x))}{1-\alpha(x)} \cdot e_i + \sum_{i=0}^{m+1} \beta(\alpha(x)) \cdot \phi_i(x) \cdot e_i$ . Para probar que  $Lip(h) \leq C \cdot \lambda$  utilizaremos las siguientes propiedades numéricas que

son fáciles de demostrar:

1. Si  $u, v : X \rightarrow [0, M]$ , entonces  $Lip(u \cdot v) \leq M \cdot (Lip(u) + Lip(v))$ .
2. Si además  $v : X \rightarrow [k, M]$  y  $k > 0$ , entonces

$$Lip\left(\frac{u}{v}\right) \leq M \cdot \frac{Lip(u) + Lip(v)}{k^2}.$$

3.  $v(x) = 1 - \alpha(x) \geq 1/3$  si  $\frac{1-\beta(\alpha(x))}{1-\alpha(x)} > 0$ .

Por tanto  $Lip\left(\sum_{i=0}^{m+1} \beta(\alpha(x)) \cdot \phi_i(x) \cdot e_i\right) \leq (m+2)(3 \cdot Lip(\alpha) + Lip(\phi)) \leq (m+2)(3 \cdot (m+2)s\lambda + \frac{48s\lambda(m+2)^3}{t}) \leq \frac{51s(m+2)^3\lambda}{t}$ . También,  $Lip\left(\frac{1-\beta(\alpha(x))}{1-\alpha(x)}\right) \leq 9 \cdot 4 \cdot Lip(\alpha) \leq 36(m+2)s\lambda$ , así llegamos a que  $Lip\left(\sum_{i=0}^{m+1} (g_i(x) - \frac{\alpha(x)}{m+2}) \cdot \frac{1-\beta(\alpha(x))}{1-\alpha(x)}\right) \leq (m+2) \cdot (2s\lambda + 36(m+2)s\lambda) \leq 50(m+2)^2s\lambda \leq \frac{51s(m+2)^3\lambda}{t}$  y la constante  $C = \frac{102s(m+2)^3}{t}$  satisface lo requerido.

Solo falta demostrar que  $h(X) \subset \partial\Delta^{m+1}$  y que  $h|_A = f$ . Esto último se sigue del hecho  $\alpha(x) = 0$  si  $x \in A$ . Por otro lado, resulta evidente que se cumple  $h(x) \in \partial\Delta^{m+1}$  supuesto que se cumple o bien  $\beta(\alpha(x)) = 0$  o bien  $\beta(\alpha(x)) = 1$ , por tanto supongamos  $0 < \beta(\alpha(x)) < 1$ . En tal caso  $\phi_i(x) > 0$  implica  $g_i(x) - \frac{\alpha(x)}{m+2} > 0$ , así que la única posibilidad para que  $h(x)$  no esté en  $\partial\Delta^{m+1}$  es que  $g_i(x) - \frac{\alpha(x)}{m+2} > 0$  para todo  $i$ , lo cual no es posible.  $\square$

Las proposiciones 1.3.1 y 1.3.3 implican el siguiente corolario:

**Corolario 1.3.3.** *Si  $X$  es un espacio métrico y  $m \geq 0$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a.  $S^m$  es un extensor Lipschitz de  $X$ .
- b. Existe  $t > 0$  tal que cada recubrimiento finito  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{m+1}\}$  de  $X$  admite un refinamiento  $\mathcal{V}$  tal que  $L(\mathcal{V}) \geq tL(\mathcal{U})$  y la multiplicidad de  $\mathcal{V}$  es menor o igual que  $m+1$ .

**Proposición 1.3.4.** *Supongamos que  $X$  es un espacio métrico, y sean  $n \geq 0$ ,  $1 > t > 0$ , y  $r_2 > r_1 > 0$ . Si cada recubrimiento  $r$ -Lebesgue  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{n+1}\}$  de  $X$ , con  $r_1 < r < r_2$ , admite un refinamiento  $4t \cdot r$ -Lebesgue  $\mathcal{V}$  que satisface  $m(\mathcal{V}) \leq n + 1$ , entonces cada recubrimiento  $s$ -Lebesgue  $\mathcal{W} = \{W_0, \dots, W_{n+2}\}$  de  $X$ , con  $4r_1 < s < 4r_2$ , admite un refinamiento  $t \cdot s$ -Lebesgue  $\mathcal{V}$  con multiplicidad menor o igual que  $n + 2$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $4r_1 < s < 4r_2$ . En primer lugar demostraremos que todo recubrimiento  $s/2$ -Lebesgue  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^{i=n+1}$  de  $A \subset X$  consistente en  $n + 2$  elementos admite un refinamiento  $\mathcal{V}$  tal que  $L(\mathcal{V}) \geq t \cdot s$  y  $m(\mathcal{V}) \leq n + 1$ . Definimos  $U'_i = U_i \cup (X \setminus A)$  para  $i \leq n + 1$ . Es claro que se tiene  $L(\mathcal{U}') \geq s/4$ . De hecho, si  $x \in X$ , entonces  $B(x, s/4) \cap A$  es o bien vacío o está contenido en  $B(y, s/2)$  para algún  $y \in A$ . Como  $B(y, s/2) \cap A \subset U_i$  para algún  $i \leq n + 1$  entonces  $B(y, s/2) \subset U'_i$  y  $B(x, s/4) \subset U'_i$ . Así existe un recubrimiento  $\mathcal{W}$  de  $X$  tal que  $\mathcal{W}$  es un refinamiento de  $\mathcal{U}'$ , se cumple que  $L(\mathcal{W}) \geq 4t \cdot s/4$  y  $m(\mathcal{W}) \leq n + 1$ . Basta ahora con definir  $\mathcal{V} = \mathcal{W}|_A$  para finalizar esta parte de la demostración.

Supongamos que  $\mathcal{W} = \{W_0, \dots, W_{n+2}\}$  es un recubrimiento  $s$ -Lebesgue de  $X$ . Sea  $A$  la unión de bolas  $B(x, s/2)$  tales que  $B(x, s)$  no está contenida en  $W_{n+2}$ . Definimos  $U_i = W_i \cap A$  para todo  $i \leq n + 1$ . Se puede ver que  $L(\mathcal{U}) \geq s/2$  al considerar  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^{i=n+1}$  como recubrimiento de  $A$ . Es más, si  $x \in A$ , entonces existe  $y \in X$  tal que  $B(y, s)$  no está contenida en  $W_{n+2}$  y  $x \in B(y, s/2)$ . Por tanto,  $B(y, s) \subset W_i$  para algún  $i \leq n + 1$  lo que significa que  $B(x, s/2) \cap A \subset B(y, s) \cap A \subset W_i \cap A = U_i$ .

Refinamos cada  $U_i$  en  $V_i$  de tal forma que la intersección de todos los  $V_i$  es vacía y  $L(\mathcal{V}) \geq t \cdot s$ . Definimos  $W'_i = V_i$  para  $i \leq n + 1$  y  $W'_{n+2} = W_{n+2}$ . El recubrimiento  $\mathcal{W}'$  tiene multiplicidad menor o igual  $n + 2$ . Queremos ver ahora que  $L(\mathcal{W}') \geq t \cdot s$ . Si  $B(x, s) \subset W_{n+2}$ , no hay nada que probar. De otro modo  $B(x, s/2) \subset A$  y existe  $i \leq n + 1$  tal que  $B(x, t \cdot s) \subset V_i$  en cuyo caso  $B(x, t \cdot s) \subset W'_i$ .  $\square$

**Corolario 1.3.5.** *Supongamos que  $X$  es un espacio métrico y sea  $n \geq 0$ . Si  $S^n$  es un extensor Lipschitz de  $X$  entonces  $S^{n+1}$  también.*

*Demostración.* Por 1.3.3 existe un  $t > 0$  tal que cada recubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $X$  formado por  $n + 2$  elementos admite un refinamiento  $\mathcal{V}$  que satisface  $L(\mathcal{V}) \geq t \cdot L(\mathcal{U})$

y  $m(\mathcal{V}) \leq n + 1$ . Sea  $\lambda_2$  suficientemente grande y  $\lambda_1$  suficientemente pequeño. Podemos suponer que  $t < 1$ , de este modo utilizando 1.3.4 y 1.3.3 terminamos la demostración.  $\square$

**Definición 1.3.6.** Un espacio métrico  $E$  es un *extensor Lipschitz a gran escala* (respectivamente, *extensor Lipschitz a pequeña escala*) de un espacio métrico  $X$  si existen constantes  $C, M > 0$  tal que toda función  $\lambda$ -Lipschitz  $f : A \rightarrow E$ , con  $A$  un subconjunto de  $X$ , se extiende a una función  $C \cdot \lambda$ -Lipschitz  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  para todo  $\lambda < M$  (respectivamente, para todo  $\lambda > M$ ).

Si ahora combinamos 1.3.1, 1.3.2, y 1.3.4 se pueden probar fácilmente las versiones a gran/pequeña escala del resultado 1.3.3.

**Corolario 1.3.7.** Si  $X$  es un espacio métrico y  $m \geq 0$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a.  $S^m$  es un extensor Lipschitz a gran escala (respectivamente, un extensor Lipschitz a pequeña escala) de  $X$ .
- b. Existen constantes  $t, M > 0$  tales que para cada recubrimiento finito Lebesgue  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{m+1}\}$  de  $X$ , con  $r > M$  (respectivamente,  $r < M$ ), admite un refinamiento  $t \cdot r$ -Lebesgue  $\mathcal{V}$  de multiplicidad menor o igual que  $m + 1$ .

Como en 1.3.5 se puede probar la siguiente versión a gran/pequeña escala:

**Corolario 1.3.8.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $n \geq 0$ . Si  $S^n$  es un extensor Lipschitz a gran escala (respectivamente a pequeña escala) de  $X$ , entonces también lo es  $S^{n+1}$ .

### 1.3.2. Dimension de Assouad-Nagata y extensiones Lipschitz

**Teorema 1.3.9.** Sea  $X$  un espacio métrico de dimensión de Assouad-Nagata finita. Y sea  $n \geq 0$ . En esta situación las siguientes condiciones son equivalentes:

a.  $S^n$  es un extensor Lipschitz de  $X$ .

b.  $\dim_{AN}(X) \leq n$ .

*Observaciones* 1.3.10. La implicación b. $\Rightarrow$ a. puede obtenerse de los resultados de [52].

*Demostración.* La implicación b.  $\implies$  a. se sigue de 1.3.3 de la siguiente manera. Sea un recubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $X$  de número de Lebesgue  $L(\mathcal{U}) > 0$  tomemos un recubrimiento  $\mathcal{V}$  tal que  $\text{mesh}(\mathcal{V}) < L(\mathcal{U})$ ,  $L(\mathcal{V}) > L(\mathcal{U})/C$  y  $m(\mathcal{V}) \leq m + 1$ . Es claro que  $\mathcal{V}$  es un refinamiento de  $\mathcal{U}$  y que  $L(\mathcal{V}) > L(\mathcal{U})/C$ .

a.  $\implies$  b. Sin pérdida de generalidad por el resultado 1.3.5, podemos suponer que  $\dim_{AN}(X) \leq n + 1$ . Elegimos  $k > 0$  de tal forma que dado una función  $\lambda$ -Lipschitz  $f : A \rightarrow \partial\Delta^{n+1}$  se pueda extender a una función  $k \cdot \lambda$ -Lipschitz  $g : X \rightarrow \partial\Delta^{n+1}$ . Sea  $c > 1$  una constante tal que para todo  $r > 0$  existe un recubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $X$  de tamaño menor o igual que  $c \cdot r$  y número de Lebesgue mayor o igual que  $r$ . Para tal recubrimiento tomamos una aplicación baricéntrica  $f : X \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})$  al nervio de  $\mathcal{U}$  tal que  $\text{Lip}(f) \leq \frac{4(n+2)^2}{r}$ . Dado un  $(n + 1)$ -símplice  $\Delta$  en  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  tomamos la función  $f|_{f^{-1}(\partial\Delta)}$  y la extendemos en  $f^{-1}(\Delta)$  para obtener  $g_\Delta : f^{-1}(\Delta) \rightarrow \partial\Delta$  de número Lipschitz menor o igual que  $k \cdot \frac{4(n+2)^2}{r}$ . Pegando todos los  $g_\Delta$  conjuntamente obtenemos  $g : X \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})$ .

Si  $v$  es un vértice del complejo simplicial, denotamos por  $st(v)$  la estrella abierta de  $v$ . Nuestro objetivo es estimar el tamaño y el número de Lebesgue de  $g^{-1}(st(v))$ , con  $v$  un vértice de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ .

El tamaño de  $\{g^{-1}(st(v))\}$  es menor o igual que  $\{f^{-1}(st(v))\}$  puesto que para todo  $v$  tenemos la inclusión  $g^{-1}(st(v)) \subset f^{-1}(st(v))$ . Es más, si  $x \in g^{-1}(st(v))$  entonces  $g_v(x) > 0$ . Por la construcción de  $g$  esto implica  $f_v(x) > 0$ . Y así  $x \in f^{-1}(st(v))$ .

Supongamos que  $C$  es un subconjunto de  $X$  de diámetro menor que  $\frac{r}{4k \cdot (n+3)^3}$ . Tomemos todos los elementos  $U_0, \dots, U_m$  de  $\mathcal{U}$  que intersecan a  $C$  y sea  $v_i$  los correspondientes vértices de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ . Tenemos que  $m \leq n + 1$  y  $g(C)$  está contenido en el símplice  $[v_0, \dots, v_m]$  de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ . Escogemos un  $x_0 \in C$  y, sin pérdida de generalidad, suponemos que la coordenada baricéntrica  $g_{v_0}(x_0)$  de  $g(x_0)$  correspondiente

a  $v_0$  es al menos  $\frac{1}{n+2}$ . Suponemos ahora que  $g(x)$  no pertenece a  $st(v_0)$  para algún  $x \in C$ . En ese caso,  $g_{v_0}(x) = 0$  y  $\frac{1}{n+2} \leq |g_{v_0}(x) - g_{v_0}(x_0)| \leq (k \cdot \frac{(n+3)^2}{r}) \cdot d(x, x_0) \leq (k \cdot \frac{4(n+3)^2}{r}) \cdot \frac{r}{4k \cdot (n+3)^3} = \frac{1}{n+3}$ , lo que es una contradicción.

Si definimos  $d = \frac{r}{4k \cdot (n+3)^3}$  el argumento anterior muestra la existencia de un recubrimiento  $\mathcal{V}$  of  $X$  de multiplicidad menor o igual que  $n + 1$ , de número de Lebesgue al menos  $d$ , y de tamaño menor o igual que  $d \cdot 16c \cdot k \cdot (n + 3)^3$ . Esto implica que  $\dim_{AN}(X) \leq n$ .  $\square$

Ajustando la demostración de 1.3.9 se puede deducir fácilmente lo siguiente:

**Teorema 1.3.11.** *Sea  $X$  un espacio métrico de dimensión microscópica de Assouad-Nagata finita (respectivamente, de dimensión asintótica de Assouad-Nagata finita). Si  $n \geq 0$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a.  $S^n$  es un extensor Lipschitz a pequeña escala (respectivamente, a gran escala) de  $X$
- b. La dimensión microscópica de Assouad Nagata (respectivamente, la asintótica de Assouad -Nagata) de  $X$  es menor o igual que  $n$ .



## Capítulo 2

# Dimensión de Assouad-Nagata e invariantes a gran escala

En este capítulo relacionamos la dimensión de Assouad-Nagata con dos invariantes a gran escala: los conos asintóticos y la dimensión asintótica.

Un problema importante en teoría geométrica de grupos es relacionar las propiedades de grupos finitamente generados  $G$  con propiedades topológicas de sus conos asintóticos. Por ejemplo:

- Un grupo finitamente generado es virtualmente abeliano si y solo si sus conos asintóticos son isométricos al espacio  $\mathbb{R}^n$  [40].
- Un grupo finitamente generado es virtualmente nilpotente si y solo si sus conos asintóticos son localmente compactos [40] [32] [33].
- Un grupo finitamente generado es hiperbólico si y solo si sus conos asintóticos son  $\mathbb{R}$ -árboles [41].
- Un grupo finitamente generado  $G$  es relativamente hiperbólico con respecto a los subgrupos finitamente generados  $H_1, \dots, H_n$  si y solo si todo cono asintótico de  $G$  es árbol-graduado con respecto a los  $\omega$ -límites de las secuencias de las clases cocientes de los subgrupos  $H_i$  [34].

Así sería de interés detectar una propiedad en un grupo finitamente generado  $G$  que implique que sus conos asintóticos son finito dimensionales.

En [40], Gromov demostró que los conos asintóticos de los grupos finitamente generados y crecimiento polinomial eran finito-dimensionales, para ello utilizó que su dimensión de Hausdorff es finita.

J.Burillo [22] mostró que los conos asintóticos de los grupos Baumslag-Solitar eran 1-dimensionales y usó esto para demostrar que el grupo fundamental de tales conos es no libre y no numerable.

Recientemente, J.Behrstock y Y.Minsky [9] demostraron lo siguiente:

**Teorema 2.0.12 (Teorema de la Dimension de Behrstock-Minsky).** *La máxima dimensión topológica de un subconjunto localmente compacto del cono asintótico de un grupo mapping class es igual al máximo rango de un subgrupo abeliano.*

El objetivo de la primera parte es relacionar la dimensión asintótica de Assouad-Nagata de un grupo finitamente generado  $G$  con la dimensión topológica de sus conos asintóticos. De hecho demostraremos que  $\dim(\text{Cone}_\omega(X, c, d)) \leq \text{asdim}_{AN}(X)$  para todos los espacios métricos. No está claro como los métodos de esta parte pueden ayudar a mejorar los resultados de 2.0.12 y demostrar que la dimensión topológica de los conos asintóticos de los grupos mapping class es igual al máximo rango de un subgrupo abeliano.

Como aplicación de este resultado damos un método para encontrar cotas inferiores de la dimensión de Assouad-Nagata en algunos espacios. Esto nos permitirá resolver en el siguiente capítulo algunos problemas abiertos sobre la dimensión de Assouad-Nagata de ciertos grupos.

En la segunda parte de este capítulo relacionamos la dimensión de Assouad-Nagata con la dimensión asintótica en el marco de la teoría general de espacios métricos. En el siguiente capítulo estudiaremos tales relaciones en el ámbito de la teoría geométrica de grupos.

Un primer resultado sobre tal relación en los espacios métricos apareció en [31] donde relacionaban la dimensión asintótica con la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional, que caracteriza los espacios de dimensión de Assouad-Nagata finita.

Recientemente en [4] se preguntaba por la relación de la dimensión asintótica con otra propiedad de Nagata.

EL resultado principal de la segunda parte de este capítulo es la construcción de una métrica especial (equivalente a gran escala) en todo espacio métrico de dimensión asintótica finita. Tal métrica tiene las siguientes propiedades que consideramos de gran interés:

1. Caracteriza los espacios de dimensión asintótica finita en términos de la dimensión de Assouad-Nagata.
2. Es una métrica hiperbólica cuya frontera consta de un único punto.
3. Resuelve el problema 1400 de [4]
4. Es asintóticamente ultramétrica i.e. todos sus conos asintóticos son ultramétricos. Esto se relaciona con los resultados de la primera parte de este capítulo ya que muestra que, incluso en el caso de tener como asintótico ultramétrico, la desigualdad entre las dimensiones del cono asintótico y las del espacio base puede ser estricta.

## 2.1. Dimensión de Assouad-Nagata y conos asintóticos

### 2.1.1. Dimension de Assouad-Nagata y una propiedad de Nagata

En esta sección relacionaremos una propiedad de Nagata con la dimensión de Assouad-Nagata. Tal punto será clave en la demostración del teorema principal de esta primera parte.

El siguiente resultado, anteriormente citado, será muy útil para las demostraciones de este capítulo.

**Teorema 2.1.1 (Lang-Schlichenmaier [52]).** *Si  $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$  es una inmersión cuasi-simétrica de espacios métricos entonces  $\dim_{AN}(X) \leq \dim_{AN}(Y)$ .*

Utilizaremos el resultado 2.1.1 en el caso de transformaciones de copo de nieve y el caso de homeomorfismos bi-Lipschitz. Recordamos que una *transformación de copo de nieve* en un espacio métrico  $(X, \rho)$  es la transformación sobre su métrica de la forma  $(X, \rho^p)$  para algún  $0 < p < 1$  (ver [43], p.98). En este caso particular se puede comprobar que la dimensión de Assouad-Nagata es invariante por transformaciones de copo de nieve, para ello podemos usar o bien 2.1.1 o bien como consecuencia sencilla de 0.1.8.

**Definición 2.1.2.** Se dice que  $(X, \rho)$  tiene la *propiedad de Nagata  $n$ -dimensional* si para toda configuración  $y_1, \dots, y_{n+2}$  de  $n + 2$  puntos en  $X$  las condiciones  $\rho(y_i, B(x, r/2)) < r$  para algún  $x \in X$  y para todo  $i \leq n + 2$  implican la existencia de  $i \neq j$  tales que  $\rho(y_i, y_j) < r$ .

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $(X, \rho_X)$  un espacio métrico y sea  $n \geq 0$ .  $\dim_{AN}(X) \leq n$  si y solo si  $(X, \rho_X)$  es equivalente bi-Lipschitz a un espacio métrico  $(Y, \rho_Y)$  tal que existe una transformación de copo de nieve en  $(Y, \rho_Y)$  que satisface la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional.*

*Demostración.* Una dirección de la demostración se sigue de 2.1.1 y del hecho de que  $\dim_{AN}(Y) \leq n$  si  $Y$  tiene la propiedad de Nagata dimensional  $n$ -dimensional. Veamos esto último. Si  $r > 0$  y  $A$  es un subconjunto maximal de  $Y$  con respecto a la propiedad  $\rho(x, y) \geq r$  para todo  $x \neq y \in A$ , entonces la familia de bolas  $\mathcal{U}_r = \{B(y, r)\}_{y \in A}$  es un recubrimiento de  $Y$  y toda bola  $B(x, r/2)$  interseca como mucho a  $n + 1$  elementos diferentes de  $\mathcal{U}_r$  (véase la demostración del Teorema 4.2 en [31]).

La otra implicación está demostrada en la Proposición 2.2 de [1]. □

## 2.1.2. Aplicaciones con fibras métricamente paralelas

J.Burillo [22] definió una interesante clase de aplicaciones llamadas aplicaciones con fibras métricamente paralelas. Recordamos que se dice que  $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$  es una *aplicación con fibras métricamente paralelas* si para cada  $x \in X$  e  $y \in f(X)$  existe un  $x' \in f^{-1}(y)$  tal que  $\rho_X(x, x') = \rho_Y(f(x), f(x')) = \rho_Y(f(x), y)$  (véase Definición 6 en [22]). Parece lógico pensar que las aplicaciones con fibras

métricamente paralelas deben permitir la aplicación de teoremas de tipo Hurewicz que fueron demostrados en [19] (Véase la demostración 2.1.6).

**Ejemplos de aplicaciones con fibras métricamente paralelas:**

1. La proyección  $X \times Y \rightarrow Y$  siempre que la métrica en  $X \times Y$  sea la euclídea o la suma de las correspondientes métricas en  $X$  e  $Y$ .
2.  $Im: \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbf{H}^2$  es el plano hiperbólico en el modelo del semiplano ([22]). Obsérvese que  $\mathbb{R}$  se identifica con el intervalo  $(0, \infty)$  equipado con la métrica  $d(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$ .

Nosotros debilitaremos la condición de la existencia de un  $x'$  tal que  $\rho_X(x, x') = \rho_Y(f(x), f(x')) = \rho_Y(f(x), y)$ . Simplemente asumiremos que  $\rho_X(x, f^{-1}(y)) \leq \rho_Y(f(x), y)$  para todo  $x \in X$  e  $y \in f(X)$ . La razón de este cambio es que las siguientes funciones naturales satisfacen fácilmente esta nueva condición.

1. La función  $x \rightarrow d(x, x_0)$  que va de un  $\mathbb{R}$ -árbol  $T$  a  $\mathbb{R}_+$ , con  $x_0$  el punto base de  $T$ . Estamos asumiendo que todo punto de  $T$  se halla en el interior de una geodésica infinita.
2. Cualquier epimorfismo  $f: (G, d_G) \rightarrow (H, d_H)$  entre grupos finitamente generados equipados con métricas de la palabra inducidas por conjuntos finitos de generadores  $S$  en  $G$  y  $f(S)$  en  $H$ .

La otra razón es el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.4.** *Si  $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$  es una aplicación Lipschitz, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a. *La función natural  $f^{-1}(y) \rightarrow y$  establece una equivalencia bi-Lipschitz entre  $f(X)$  y el espacio de las fibras de  $f$  equipado con la distancia de Hausdorff.*
- b. *Existe  $\mu > 0$  tal que  $\rho_X(x, f^{-1}(y)) \leq \mu \cdot \rho_Y(f(x), y)$  para todo  $x \in X$  e  $y \in f(X)$ .*

*Demostración.* a)  $\implies$  b). Recordemos que la distancia de Hausdorff  $d_H(A, B)$  entre dos subconjuntos

$A$  y  $B$  de  $X$  es el supremo de  $\rho_X(a, B)$  y  $\rho_X(b, A)$  sobre todos los  $a \in A$  y  $b \in B$ . Por tanto b) se sigue fácilmente de a) puesto que  $\rho_X(x, f^{-1}(y)) \leq d_H(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(y)) \leq \mu \cdot \rho(f(x), y)$ , la última desigualdad por la condición de equivalencia bi-Lipschitz, para todo  $x \in X$  e  $y \in f(X)$ .

b)  $\implies$  a). Supongamos que  $f$  es  $\lambda$ -Lipschitz (eso significa que  $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot \rho_X(x, y)$  para todo  $x, y \in X$ ) y  $y_1, y_2 \in f(X)$ . Como  $\rho_X(x, f^{-1}(y_2)) \leq \mu \cdot \rho(y_1, y_2)$  para todo  $x \in f^{-1}(y_1)$  y  $\rho_X(x, f^{-1}(y_1)) \leq \mu \cdot \rho(y_1, y_2)$  para todo  $x \in f^{-1}(y_2)$ , obtenemos que  $d_H(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \leq \mu \cdot \rho_Y(y_1, y_2)$ . De forma similar como  $f$  es  $\lambda$ -Lipschitz, se tiene que  $\lambda \cdot \rho_X(x, f^{-1}(y_2)) \geq \rho_Y(y_1, y_2)$  para todo  $x \in f^{-1}(y_1)$  con lo que resulta  $\frac{\rho_Y(y_1, y_2)}{\lambda} \leq d_H(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$  para todo  $y_1, y_2 \in f(X)$ .  $\square$

El resultado 2.1.4 proporciona una explicación global del por qué del término ‘fibras métricamente paralelas’. Además, después de reescalar  $Y$  se puede considerar  $\mu = 1$  en 2.1.4, asumiremos esto en el resto del trabajo.

J.Burillo demostró en [22] (Teorema 16) que  $\dim(X) \leq \dim(Y)$  si existe una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  con fibras métricamente paralelas tal que  $f^{-1}(y)$  es un espacio ultramétrico para todo  $y \in Y$ . Nuestro análogo resultado para dimensión de Assouad-Nagata tiene una demostración más sencilla cuando se usan aplicaciones Lipschitz:

**Teorema 2.1.5.** *Supongamos que  $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$  es una aplicación Lipschitz con fibras ultramétricas. Si se cumple que:*

$$\rho_X(x, f^{-1}(y)) \leq \rho_Y(f(x), y)$$

para todo  $x \in X$  e  $y \in f(X)$ , entonces  $\dim_{AN}(X) \leq \dim_{AN}(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $f$  una aplicación  $\lambda$ -Lipschitz. Mostraremos que si  $B \subset Y$  y todas las  $\lambda \cdot r$ -componentes de  $B$  son  $K$ -acotadas, entonces todas las  $r$ -componentes de  $f^{-1}(B)$  serán  $(4K + r)$ -acotadas. Para ver esto tenemos que si  $x_1, \dots, x_n$  es una cadena de puntos tales que  $f(x_i) \in B$  y  $\rho_X(x_i, x_{i+1}) < r$  para todo  $i < n$ , entonces  $f(x_i)$  pertenece a la misma  $\lambda \cdot r$ -componente de  $B$ . De este modo, existe una fibra

$F \subset f^{-1}(B)$  tal que  $\rho_X(x_i, F) < K$  para todo  $i \leq n$  y podemos tomar  $y_i \in F$  que satisfice  $\rho_X(x_i, y_i) < K$  para todo  $i \leq n$ . Así todo  $y_i$  pertenecerá a la misma  $(2K+r)$ -componente de  $F$ . Como  $F$  es ultramétrico, esa componente es de tamaño menor que  $2K+r$ . Por tanto  $\rho_X(x_1, x_n) \leq 2K + \rho_X(y_1, y_n) < 2K + 2K + r = 4K + r$ .

Supongamos  $\dim_{AN}(Y) = m < \infty$  (el caso  $\dim_{AN}(Y) = \infty$  es trivial) y sea  $c > 0$  la correspondiente constante para  $Y$ . Dado  $r > 0$  tomamos el recubrimiento  $\{Y_1, \dots, Y_{m+1}\}$  de  $Y$  tal que toda  $\lambda \cdot r$ -componente conexa de cada  $Y_i$  tiene diámetro menor que  $c \cdot \lambda \cdot r$ . Ahora bien, las  $r$ -componentes de cada conjunto  $f^{-1}(Y_i)$  están acotadas por  $(4c\lambda + 1) \cdot r$  lo que demuestra  $\dim_{AN}(X) \leq m$ .  $\square$

Por 2.1.5 podemos obtener nuevamente el hecho de que  $\dim_{AN}(T) \leq 1$  para todo  $\mathbb{R}$ -árbol  $T$  usando la función  $f: T \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = d(x, x_0)$ .

Bell y Dranishnikov [12] introdujeron el concepto de  $\text{asdim}\{A_s\}_{s \in S} \leq n$  uniformemente con respecto a  $s \in S$ . El concepto análogo de  $\dim_{AN}(A_s) \leq n$  *uniformemente con respecto a  $s \in S$*  sería que la constante  $C$  de la definición de dimensión de Assouad-Nagata fuese la misma para todos los  $A_s$ ,  $s \in S$ . Geométricamente lo más común es que todos los  $A_s$  sean isométricos.

A continuación damos una generalización de 2.1.5 a dimensiones superiores:

**Teorema 2.1.6.** *Supongamos que  $f: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$  satisfice  $\rho_X(x, f^{-1}(y)) \leq \rho_Y(f(x), y)$  para todo*

*$x \in X$  e  $y \in Y$ . Si  $f$  es Lipschitz y*

$$\dim_{AN}(f^{-1}(y)) \leq k$$

*uniformemente con respecto a  $y \in f(X)$ , entonces  $\dim_{AN}(X) \leq k + \dim_{AN}(Y)$ .*

*Demostración.* La demostración consiste en aplicar el teorema 7.1 de [19]. Tal resultado dice que  $\dim_{AN}(X) \leq \dim_{AN}(f) + \dim_{AN}(Y)$  si  $f$  es Lipschitz. Necesitamos probar que  $\dim_{AN}(f) \leq k$  lo que significa la existencia de dos contantes  $a$  y  $b$  tales que para todo  $r_X, R_Y > 0$  y para todo subconjunto  $A$  de  $X$  tal que  $f(A)$  es  $R_Y$ -acotado,  $A$  se puede expresar como  $A = A_0 \cup \dots \cup A_k$  con  $r_X$ -componentes de cada  $A_i$  siendo  $(a \cdot r_X + b \cdot R_Y)$ -acotado.

Supongamos que  $f$  es  $\lambda$ -Lipschitz. Tomemos  $y \in f(A)$  y pongamos  $F = f^{-1}(y)$ . Recubrimos  $F$  con conjuntos  $F_0, \dots, F_k$  tales que las  $(2R_Y + r_X)$ -componentes de  $F_i$  son  $c \cdot (2R_Y + r_X)$ -acotadas. Al considerar  $A_i = B(F_i, R_Y)$  observamos que sus  $r_X$ -componentes están  $(c(2R_Y + r_X) + 2R_Y)$ -acotadas. Como  $A_i$  recubre  $A$  (utilizando  $\rho_X(x, F) \leq \rho_Y(f(x), f(F)) < R_Y$  para todo  $x \in A$ ) tomamos  $a = c$  y  $b = 2c + 2$  y finalizamos la demostración.  $\square$

### 2.1.3. Dimension topológica de conos asintóticos

**Proposición 2.1.7.** *Sea  $(X, \rho_X)$  un espacio métrico y  $n \geq 0$ . Si  $(X, \rho_X)$  tiene la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional, entonces cada cono asintótico en  $X$  tiene la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional.*

*Demostración.* La propiedad de Nagata  $n$ -dimensional puede reescribirse de la siguiente manera:

Dado  $r > 0$  y los puntos  $y_i, z_i, i \leq n + 2$ , tales que  $\rho_X(y_i, z_i) < r$  y  $\rho_X(x, z_i) < r/2$  para algún  $x \in X$  y todo  $i \leq n + 2$ , existe  $i \neq j$  tal que  $\rho_X(y_i, y_j) < r$ .

Supongamos que  $(Y, \rho_Y) = \text{Cone}_\omega(X, c, d)$  no tiene la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional y que existen puntos  $x \in Y, y_i, z_i \in Y$  con  $i \leq n + 2$  tales que para algún  $r > \epsilon > 0$  las siguientes desigualdades se cumplen

- a.  $\rho_Y(y_i, z_i) < r - \epsilon$  y  $\rho_Y(x, z_i) < r/2 - \epsilon/2$  para todo  $i \leq n + 2$ ,
- b.  $\rho_Y(y_i, y_j) \geq r$  para todo  $i \neq j$ .

Para cada  $i$  tomamos  $P_i \in \omega$  tal que  $\rho_X(y_i(n), z_i(n)) < (r - \epsilon) \cdot d_n$  y  $\rho_X(z_i(n), x(n)) < (r/2 - \epsilon/2) \cdot d_n$  para todo  $n \in P_i$ . De forma análoga para todo  $i \neq j$ , tomamos  $P_{ij} \in \omega$  tal que  $\rho_X(y_i(n), y_j(n)) \geq (r - \epsilon) \cdot d_n$  para todo  $n \in P_{ij}$ . Sea  $P$  la intersección no vacía de todos los  $P_i$  y todos los  $P_{ij}$ . Como  $P \neq \emptyset$ , llegamos a la contradicción de que  $(X, \rho_X)$  no tiene la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional.  $\square$

**Corolario 2.1.8.** *Si  $(X, \rho_X)$  es ultramétrico, entonces todo cono asintótico  $\text{Cone}_\omega(X, c, d)$  es ultramétrico.*

*Demostración.* Se sigue del hecho bien conocido de que ser ultramétrico es lo mismo que tener la propiedad de Nagata 0-dimensional.  $\square$

**Corolario 2.1.9.** *Para todo espacio métrico  $(X, \rho_X)$*

$$\dim(\text{Cone}_\omega(X, c, d)) \leq \dim_{AN}(\text{Cone}_\omega(X, c, d)) \leq \text{asdim}_{AN}(X, \rho_X).$$

*Demostración.* Supongamos  $\text{asdim}_{AN}(X, \rho_X) = n$ . Nótese que  $\text{Cone}_\omega(X, \rho_X, d)$  es isométrico a  $\text{Cone}_\omega(X, \rho_2, d)$ , con  $\rho_2(x, y) = \rho_X(x, y)$  así tenemos que  $\rho_X(x, y) \geq 1$  y  $\rho_2(x, y) = 1$  si  $0 < \rho_X(x, y) < 1$ . También se sigue que,  $\dim_{AN}(X, \rho_2) = n$  puesto que  $\text{asdim}_{AN}(X, \rho_2) = n$  y la dimensión de capacidad de  $(X, \rho_2)$  es 0 por los resultados de la sección 1.1. Por 2.1.3 existe un espacio métrico  $(Y, \rho_Y)$  equivalente bi-Lipschitz a  $(X, \rho_2)$  tal que  $(Y, \rho_Y^p)$  tiene la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional para algún  $0 < p < 1$ . Por tanto  $\text{Cone}_\omega(Y, \rho_Y, d)$  es equivalente bi-Lipschitz a  $\text{Cone}_\omega(X, \rho_X, d)$ . Como la transformación de copo de nieve de  $\text{Cone}_\omega(Y, \rho_Y, d)$  de la forma  $\text{Cone}_\omega(Y, \rho_Y^p, d^p)$  tiene la propiedad de Nagata  $n$ -dimensional por la proposición 2.1.7, concluimos que

$$\dim_{AN}(\text{Cone}_\omega(X, \rho_X, d)) \leq n.$$

Además sabemos que  $\dim(Y) \leq \dim_{AN}(Y)$  para todos los espacios métricos (ver [52]) y así la demostración está terminada.  $\square$

J.Burillo [22] demostró que los conos asintóticos de los grupos de tipo Baumslag-Solitar  $BS_{p,q}$  (grupos cuyos generadores son  $t, x$  y la única relación es  $t^{-1}x^p t = x^q$  con  $p \neq q$ ) tienen dimensión 1 al mostrar una aplicación  $f$  del grafo de Cayley de  $BS_{p,q}$  a un  $\mathbb{R}$ -árbol  $T$  con fibras métricamente paralelas tal que las fibras inducidas en el cono asintótico son ultramétricas. A la vista de 2.1.9 y 2.1.5 se puede mejorar el resultado diciendo que los conos asintóticos de  $BS_{p,q}$  tienen dimensión de Assouad-Nagata igual a 1.

## 2.1.4. Cotas inferiores para la dimensión de Assouad-Nagata

El propósito de esta sección es dar una condición geométrica que garantice que un espacio tiene dimensión asintótica de Assouad-Nagata mayor que un cierto  $n$ . Esta propiedad será de gran utilidad para estudiar las dimensiones de ciertos grupos en el siguiente capítulo.

**Definición 2.1.10.** Se dice que una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  entre espacios métricos es una dilatación si existe una constante  $C \geq 1$  tal que  $d_Y(f(x), f(y)) = C \cdot d_X(x, y)$  para todo  $x, y \in X$ .

Al número  $C$  se le denomina *constante de dilatación*.

En la siguiente proposición las dilataciones serán de bolas de  $\mathbb{Z}^n$  con la  $l_1$ -métrica a espacios más generales.

**Proposición 2.1.11.** Sea  $(X, d_X)$  un espacio métrico y sea  $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de números naturales. Si existe un  $n \in \mathbb{N}$  y una sucesión de dilataciones  $\{f_m\}_{m=1}^\infty$  de la forma  $f_m : B^n(0, k_m) \rightarrow (X, d_X)$  siendo  $B^n(0, k_m) \subset \mathbb{Z}^n$  las bolas de radio  $k_m$  (con la  $l_1$ -métrica), entonces existe un cono asintótico  $Cone_\omega(X, c, d)$  de  $(X, d_X)$  tal que  $[-1, 1]^n \subset Cone_\omega(X, c, d)$ .

*Demostración.* Sean  $(X, d_X)$  y  $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  como en las hipótesis. En primer lugar probaremos el caso  $n = 1$ . Sea  $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  la sucesión de las constantes de dilatación de  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ . Fijemos  $\omega$  un ultrafiltro de  $\mathbb{N}$  y definamos  $c = \{f_m(0)\}_{m=1}^\infty$  y  $d = \{d_m\}_{m=1}^\infty$  con  $d_m = C_m \cdot k_m$ . Veamos que  $Cone_\omega(X, c, d)$  contiene a  $[-1, 1]$ . Sea el conjunto  $U_m = \{-k_m, -k_m + 1, \dots, k_m - 1, k_m\}$ , definimos el subconjunto  $A_m^t$  como:  $x \in A_m^t$  si y solo si  $x \in U_m$  y la distancia entre  $\frac{C_m \cdot x}{d_m}$  y  $t$  es mínima. Obsérvese que esto implica que la distancia entre  $C_m \cdot x$  y  $d_m \cdot t$  es menor que  $C_m$ . Tomemos ahora la sucesión  $\{r_m^t\}_{m=1}^\infty$  donde  $r_m^t$  es el ínfimo de  $A_m^t$ .

Definimos la aplicación  $g : [-1, 1] \rightarrow Cone_\omega(X, c, d)$  de la forma  $g(t) = x^t$  si la sucesión  $\{f_m(r_m^t)\}_{m=1}^\infty$  pertenece a la clase de  $x^t$ . Como tenemos que:

$$\lim_{\omega} \frac{d(f_m(0), f_m(r_m^t))}{d_m} = \lim_{\omega} \frac{C_m \cdot |r_m^t|}{d_m} \leq \lim_{\omega} \frac{C_m \cdot k_m}{d_m} = 1$$

La aplicación está bien definida. Probaremos ahora que es una isometría. De la definición de  $r_m^t$  obtenemos que si  $t_1 < t_2$  entonces  $r_m^{t_1} \leq r_m^{t_2}$  lo que implica  $\lim_{\omega} \frac{d(f_m(r_m^{t_1}), f_m(r_m^{t_2}))}{d_m} = \lim_{\omega} \frac{C_m(r_m^{t_2} - r_m^{t_1})}{d_m}$ . Así lo único que falta por demostrar es que  $\lim_{\omega} \frac{C_m \cdot r_m^t}{d_m} = t$  para todo  $t$ . Obsérvese que tenemos trivialmente que  $\lim_{\omega} \frac{C_m}{d_m} = 0$  y  $\lim_{\omega} \frac{C_m \cdot k_m}{d_m} = 1$ . Esto implica que dado  $\epsilon > 0$  existe  $G_\epsilon \in \omega$  tal que  $\frac{C_m}{d_m} < \epsilon$  para todo  $m \in G_\epsilon$ . Por la elección de  $r_m^t$  si  $m \in G_\epsilon$  tendremos  $|C_m \cdot r_m^t - d_m \cdot t| < C_m$  y entonces  $|\frac{C_m \cdot r_m^t}{d_m} - t| < \frac{C_m}{d_m} \leq \epsilon$ .

Veamos ahora el caso general. Sea  $(s_1, \dots, s_n) \in [-1, 1]^n$ . Por el caso anterior tendremos que para todo  $j = 1, \dots, n$  existe una sucesión  $\{r_m^{s_j}\}_{m \in \mathbb{N}}$  con  $r_m^{s_j} \in \{-k_m, \dots, k_m\}$  tal que  $\lim_{\omega} \frac{C_m \cdot r_m^{s_j}}{d_m} = s_j$ . De modo análogo construimos una aplicación  $g : [-1, 1]^n \rightarrow Cone_{\omega}(X, c, d)$  definiendo  $g(s_1, \dots, s_n)$  como la clase que contiene a la sucesión  $\{f_m(r_m^{s_1}, \dots, r_m^{s_n})\}_{m=1}^{\infty}$ . Para terminar la demostración será suficiente comprobar que para todo  $s, t \in [-1, 1]^n$  con  $s = (s_1, \dots, s_n)$  y  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , la siguiente igualdad es cierta:

$$\lim_{\omega} \frac{d_X(f_m(r_m^{s_1}, \dots, r_m^{s_n}), f_m(r_m^{t_1}, \dots, r_m^{t_n}))}{d_m} = \sum_{i=1}^n |s_i - t_i|$$

Como  $f_m$  es una dilatación de constante  $C_m$  podemos escribir:

$$\lim_{\omega} \frac{d_X(f_m(r_m^{s_1}, \dots, r_m^{s_n}), f_m(r_m^{t_1}, \dots, r_m^{t_n}))}{d_m} = \sum_{i=1}^n \lim_{\omega} \frac{C_m \cdot |r_m^{s_i} - r_m^{t_i}|}{d_m}$$

Y nuevamente por el caso  $n = 1$  podemos deducir que el último término satisface la igualdad:

$$\sum_{i=1}^n \lim_{\omega} \frac{C_m \cdot |r_m^{s_i} - r_m^{t_i}|}{d_m} = \sum_{i=1}^n |s_i - t_i|$$

.

□

De la anterior proposición obtenemos el siguiente resultado que proporciona la cota buscada.

**Corolario 2.1.12.** *Si para un espacio métrico  $(X, d_X)$  y para algún  $n \in \mathbb{N}$  existe una sucesión de dilataciones  $f_m : B^n(0, k_m) \rightarrow (X, d_X)$  con  $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = \infty$  siendo  $B^n(0, k_m) \subset \mathbb{Z}^n$  la bola de radio  $k_m$  (con la métrica  $l_1$ ) entonces  $asdim_{AN}(X, d_X) \geq n$ .*

*Demostración.* Por la proposición 2.1.11 obtenemos que existe un cono asintótico de  $X$  tal que  $[-1, 1]^n \subset Cone_{\omega}(X, c, d)$ . Aplicando el teorema 2.1.9 obtenemos automáticamente:

$$n \leq \dim(Cone_{\omega}(X, c, d)) \leq asdim_{AN}(X, d_X)$$

□

## 2.2. Dimensión de Assouad-Nagata y otras propiedades geométricas

En esta sección relacionamos la dimensión de Assouad-Nagata con las métricas hiperbólicas, la dimensión asintótica, las ultramétricas asintóticas y la segunda propiedad de Nagata.

**Definición 2.2.1.** Decimos que una métrica de un espacio  $(X, d)$  es *asintóticamente ultramétrica* si cumple que:

$$d_X(x, y) \leq (1 + \epsilon) \cdot \max\{d_X(x, z), d_X(y, z)\} + k \text{ para todo } x, y, z \in X$$

donde  $\epsilon$  es una función en  $d = d_X(x, y)$  que tiende a 0 cuando  $d$  tiende a  $\infty$  y  $k > 0$  es una constante fija.

En tal condición se dirá que el espacio es *asintóticamente ultramétrico*.

La razón de tal nombre está justificada por la siguiente proposición sugerida por Gromov en [41] aunque sin demostración:

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $(X, d_X)$  un espacio asintóticamente ultramétrico. Entonces todo cono asintótico de  $(X, d_X)$  es un espacio ultramétrico.*

*Demostración.* Supongamos que  $(X, d_X)$  es un espacio que satisface la hipótesis con constante  $k > 0$  y función  $\epsilon$ . Sean  $x, y, z$  tres puntos de  $Cone_\omega(X, c, d)$  y sean  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  tres sucesiones en las clases  $x, y$  y  $z$  respectivamente. Sin pérdida de generalidad supongamos  $D(x, y) \geq D(x, z)$  y  $D(x, y) \geq D(y, z)$ . Será suficiente demostrar que  $D(x, y) \leq \max\{D(x, z), D(y, z)\}$ .

Obsérvese que  $\lim_\omega \epsilon(d_X(x_n, y_n)) = 0$ . Si no es así, existirá un  $M > 0$  tal que el conjunto  $H = \{n \mid \epsilon(d_X(x_n, y_n)) \geq M\}$  está en  $\omega$ . Pero si asumimos el caso no trivial  $D(x, y) \neq 0$  entonces el conjunto  $G = \{d_X(x_n, y_n) \mid n \in H\}$  no estará acotado. Tomando ahora una subsucesión divergente  $\{d_X(x_{n_i}, y_{n_i})\}_{i=1}^\infty \subset G$  llegaremos a una contradicción puesto que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon(d_X(x_{n_i}, y_{n_i})) = 0$  pero también  $d_X(x_{n_i}, y_{n_i}) \geq M$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Tomemos ahora el subconjunto  $F$  de números naturales definido por:

$$F = \{n \mid d_X(x_n, z_n) \geq d_X(y_n, z_n)\}$$

Como  $\omega$  es un ultrafiltro entonces  $F \in \omega$  ó  $\mathbb{N} \setminus F \in \omega$ . Supongamos el primer caso. En tal caso obtendremos que  $D(x, z) \geq D(y, z)$  y de la hipótesis deducimos que:

$$\frac{d_X(x_n, y_n)}{d_n} \leq \frac{(1 + \epsilon(d_X(x_n, y_n))) \cdot d_X(x_n, z_n)}{d_n} + \frac{k}{d_n} \text{ para cada } n \in F.$$

Tomando límites en las desigualdades anteriores y aplicando el hecho de que  $\lim_{\omega} \epsilon(d_X(x_n, y_n)) = 0$  obtenemos que  $D(x, y) \leq D(x, z) = \max\{D(x, z), D(y, z)\}$ . Finalmente hagamos el caso  $\mathbb{N} \setminus F \in \omega$ . Esto implica que el conjunto  $\mathbb{N} \setminus F = \{n \mid d_X(y_n, z_n) > d_X(x_n, z_n)\}$  pertenece al ultrafiltro lo que nos lleva a que  $D(y, z) \geq D(x, z)$  y aplicando ahora el mismo razonamiento llegamos a que:

$$\frac{d_X(x_n, y_n)}{d_n} \leq \frac{(1 + \epsilon(d_X(x_n, y_n))) \cdot d_X(y_n, z_n)}{d_n} + \frac{k}{d_n} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \setminus F.$$

Tomando nuevamente límites obtenemos  $D(x, y) \leq D(y, z) = \max\{D(x, z), D(y, z)\}$  lo que termina la demostración.  $\square$

**Definición 2.2.3.** Decimos que un espacio métrico  $(X, d)$  satisface la segunda propiedad de Nagata  $(N2)_n$  si para todo  $x, y_1, \dots, y_{n+2} \in X$  existen  $i, j \in \{1, \dots, n+2\}$  con  $i \neq j$ , tales que  $d(y_i, y_j) \leq d(x, y_i)$ .

Obsérvese que de la definición de número de Lebesgue deducimos que el número de Lebesgue de un recubrimiento es al menos  $r$  (notación:  $L(\mathcal{U}) \geq r$ ) si y solo si para cada  $x \in X$  la bola  $B(x, r)$  está contenida en un conjunto del recubrimiento.

**Lema 2.2.4.** *Un espacio métrico  $(X, d)$  tiene dimensión asintótica como mucho  $n$  si y solo si para todo  $r > 0$  existe un recubrimiento uniformemente acotado  $\mathcal{U}$  con  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}^i$  tal que cada  $\mathcal{U}^i$  es una familia  $r$ -disjunta y el número de Lebesgue de  $\mathcal{U}$  es al menos  $r$ .*

*Demostración.* Hagamos la implicación no trivial. Supongamos que  $asdim(X, d) \leq n$  y sea  $r$  un número positivo. Como  $asdim(X, d) \leq n$  existe un recubrimiento uniformemente acotado de la forma  $\mathcal{V}' = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{V}^i$  tal que cada  $\mathcal{V}^i$  es una familia  $3 \cdot r$ -disjunta. Sea  $\mathcal{U}^i$  la familia de subconjuntos dada por  $\mathcal{U}^i = \{N(V, r) \mid V \in \mathcal{V}^i\}$ .

$\mathcal{V}^i\}$  donde  $N(V, r) = \{x \mid d(x, V) < r\}$ . En esta situación si  $U, U' \in \mathcal{U}^i$  fueran elementos diferentes de  $\mathcal{U}^i$  entonces obviamente  $d(U, U') > r$ . Por tanto la familia  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}^i$  es un recubrimiento de tamaño menor o igual que  $mesh(\mathcal{V}) + 2 \cdot r$  y satisface las condiciones del lema.  $\square$

La siguiente proposición es una versión de la proposición 3.6. de [31].

**Proposición 2.2.5.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico tal que  $asdim(X, d) \leq n$ . Entonces existe una sucesión de recubrimientos uniformemente acotados  $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^{\infty}$  y una sucesión creciente de números  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$  tales que:*

1. *Para todo  $k$ ,  $\mathcal{U}_k = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_k^i$  y cada  $\mathcal{U}_k^i$  es una familia  $d_k$ -disjunta.*
2.  *$L(\mathcal{U}_k) \geq d_k$ .*
3.  *$d_{k+1} > 2 \cdot m_k$  con  $m_k = mesh(\mathcal{U}_k)$ .*
4. *Para todo  $i, k, l$  con  $k < l$  y todo  $U \in \mathcal{U}_k^i, V \in \mathcal{U}_l^i$ , si  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $U \subset V$ .*

*Demostración.* Construyamos la sucesión por inducción en  $k$ . El caso  $k = 1$  se obtiene aplicando el lema 2.2.4 para  $d_1 = 1$ . Supongamos ahora que tenemos una sucesión finita de recubrimientos uniformemente acotados  $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^t$  y una sucesión finita de números  $\{d_k\}_{k=1}^t$  que satisfacen las propiedades (1)-(4). Sea  $d_{t+1} > 0$  un número positivo tal que  $d_{t+1} > 2 \cdot m_t$  y definamos  $D_{t+1} = d_{t+1} + 2 \cdot m_t$ . Por el lema 2.2.4 existe un recubrimiento uniformemente acotado  $\mathcal{V}_{t+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{V}_{t+1}^i$  tal que cada  $\mathcal{V}_{t+1}^i$  es  $D_{t+1}$ -disjunto y  $L(\mathcal{V}_{t+1}) \geq D_{t+1}$ . Ahora, para cada  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  definimos la familia de subconjuntos  $\mathcal{U}_{t+1}^i = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}_{t+1}^i\}$  donde  $U_V$  está definido como la unión de  $V$  con todos los subconjuntos  $W \in \mathcal{U}_k^i$  con  $k \in \{1, \dots, t\}$  tales que  $W \cap V \neq \emptyset$ . Afirmamos que el recubrimiento dado por  $\mathcal{U}_{t+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_{t+1}^i$  satisface las propiedades requeridas. Claramente el tamaño de  $\mathcal{U}_{t+1}$  está acotado por  $2 \cdot m_t + mesh(\mathcal{V}_{t+1})$ . También tenemos que  $L(\mathcal{U}_{t+1}) \geq L(\mathcal{V}_{t+1}) \geq D_{t+1} \geq d_{t+1}$ . Sea  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  un número fijo. Para todo  $U_V, U_W \in \mathcal{U}_{t+1}^i$  tenemos  $d(U_V, U_W) > d(V, W) - 2 \cdot m_t = d_{t+1}$  tal que cada  $\mathcal{U}_{t+1}^i$  es  $d_{t+1}$ -disjunto. Así la única propiedad que nos falta por probar es (4). Sean  $k, l$  dos números tales que

$k < l \leq t + 1$ . If  $l < t + 1$ . La cuarta condición se seguirá de la hipótesis de inducción. Supongamos  $l = t + 1$ . Sea  $W \in \mathcal{U}_k^i$  y  $U_V \in \mathcal{U}_{t+1}^i$  tales que  $W \cap U_V \neq \emptyset$ . Esto implica que existe un  $s \leq t$  y un  $V' \in \mathcal{U}_s^i$  tal que  $V' \cap V \neq \emptyset$  y  $W \cap V' \neq \emptyset$ . Por la hipótesis de inducción, lo último implicará  $W \subset V'$  ó  $V' \subset W$ . En ambos casos concluimos que  $W \subset U_V$ .

□

**Definición 2.2.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico con un punto base  $x_0$ . El producto de Gromov  $(x|y)_{x_0}$  de dos puntos  $x, y \in X$  se define como:

$$(x|y)_{x_0} = \frac{d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)}{2}.$$

Un espacio métrico  $(X, d)$  es Gromov-hiperbólico si existe un número  $\delta \geq 0$  tal que dados tres puntos  $x, y, z \in X$  se cumple la siguiente desigualdad:

$$(x|z)_{x_0} \geq \min((x|y)_{x_0}, (y|z)_{x_0}) - \delta$$

Sea  $(X, d)$  un espacio Gromov hiperbólico. Consideramos el conjunto  $S$  de todas las sucesiones de puntos  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  tales que  $\lim_{m, k \rightarrow \infty} (x_m|x_k)_{x_0} = \infty$ . La *frontera* de  $(X, d)$  es el conjunto de las clases de equivalencia en  $S$  con la relación  $\{x_i\}_{i=1}^\infty \equiv \{y_i\}_{i=1}^\infty$  if  $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i|y_i)_{x_0} = \infty$ . Las definiciones anteriores son independientes del la elección del punto base  $x_0$ .

A continuación damos la construcción principal de esta sección:

**Construcción:** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico tal que  $asdim(X, d) \leq n$  y sea  $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty$  la sucesión de recubrimientos como en la proposición 2.2.5. Definimos la aplicación  $d_h : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$  como sigue:

$$d_h(x, y) = \min\{k \mid \text{existe } U \in \mathcal{U}_k \text{ tal que } x, y \in U\}$$

En estas condiciones tenemos la siguientes propiedades:

**Teorema 2.2.7.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico tal que  $asdim(X, d) \leq n$  y sea  $d_h$  la aplicación anterior entonces:*

1.  $(X, d_h)$  es un espacio asintóticamente ultramétrico.

2.  $(X, d_h)$  es equivalente a gran escala a  $(X, d)$ .
3.  $(X, d_h)$  satisface  $\dim_{AN}(X, d_h) \leq n$
4.  $(X, d_h)$  es un espacio métrico hiperbólico cuya frontera hiperbólica es un solo punto.
5.  $(X, d_h)$  satisface la segunda propiedad de Nagata.

*Demostración.* 1) (ultramétrica asintótica) Basta observar que tenemos que para todo  $x, y, z \in X$ :

$$d_h(x, y) \leq \max\{d_h(x, z), d_h(y, z)\} + 1$$

Esto implicará que  $(X, d_h)$  es un espacio asintóticamente ultramétrico. La razón de esta desigualdad es que si tenemos que  $x, y \in U \in \mathcal{U}_i$  y tenemos que  $y, z \in V \in \mathcal{U}_i$  esto implicará la existencia de  $W \in \mathcal{U}_{i+1}$  que contendrá los tres puntos  $x, y, z$  ya que  $U \cup V$  tiene diámetro menor que el número de Lebesgue de  $\mathcal{U}_{i+1}$  por la segunda y la tercera propiedad de 2.2.5.

2) (Equivalencia a gran escala) Demostraremos que la identidad  $id : (X, d) \rightarrow (X, d_h)$  es una equivalencia a gran escala. Efectivamente, si  $d_h(x, y) \leq \delta$  y  $k$  es el mínimo número natural tal que  $\delta \leq k$  entonces  $d(x, y) \leq m_k$ . De forma análoga, supongamos que  $d(x, y) \leq \delta$ . Sea  $d_r$  el mínimo número en la sucesión  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$  de la proposición 2.2.5 tal que  $\delta \leq d_r$ . Tenemos por tanto  $L(\mathcal{U}_r) > d_r$ , esto implica que existe un  $U \in \mathcal{U}_r$  tal que  $x \in U$  and  $y \in U$  lo que significa que  $d_h(x, y) \leq r$  que termina la demostración de que la identidad es una equivalencia a gran escala.

3) (Dimensión de Assouad-Nagata finita) Para demostrar que  $\dim_{AN}(X, d_h) \leq n$  vamos a definir recubrimientos  $\mathcal{V}_r$  de  $(X, d_h)$  tales que  $\text{mesh}(\mathcal{V}_r) \leq r$ ,  $L(\mathcal{V}_r) \geq r/4$ , y  $m(\mathcal{V}_r) \leq n+1$ . Si  $r \leq 4$ , definimos  $\mathcal{V}_r$  como todos los conjuntos unipuntuales de  $X$ , de otro modo definimos  $\mathcal{V}_r = \mathcal{U}_i$  con  $i$  la parte entera de  $r$ . Tenemos que para  $r > 4$ ,  $\text{mesh}(\mathcal{U}_i) \leq i \leq r$  y  $L(\mathcal{U}_i) \geq i - 1 \geq r - 2 \geq r/4$ .

4) (Hiperbolicidad y frontera de un solo punto) Fijemos un  $x_0 \in X$ . Para demostrar que  $(X, d_h)$  es hiperbólico según Gromov bastará demostrar que:

$$(x|z) \geq \min((x|y), (y|z)) - 4$$

para todo  $x, y, z \in X$ . Equivalentemente, el producto de Gromov en un triángulo cualquiera es al menos el producto mediano menos 4.

Si suponemos que las distancias  $d_h(x, x_0)$ ,  $d_h(y, x_0)$ , y  $d_h(z, x_0)$  están a distancia 1,5 de un número  $t$  el resultado es sencillo ya que por otro lado como  $d_h(z, x)$  no puede ser mayor simultáneamente que  $d_h(y, x) + 1$  y  $d_h(y, z) + 1$ , podemos asumir que  $d_h(z, x) \leq d_h(y, x) + 1$ . Ahora tenemos que  $(x|z) \geq (t - 1,5 + t - 1,5 - (d_h(y, x) + 1))/2 = ((t + 1,5) + (t + 1,5) - d_h(y, x))/2 - 3,5 \geq (x|y) - 4$ .

Ordenemos ahora los puntos  $x, y$ , y  $z$  como  $u, v$ , y  $w$  de tal forma que  $s = d_h(u, x_0) \leq m = d_h(v, x_0) \leq l = d_h(w, x_0)$ . Por el párrafo anterior podemos asumir que  $s \leq l - 4$  (de otra forma  $s, m$ , y  $l$  estarían a distancia 1,5 de  $(s + l)/2$ ).

Caso 1:  $m \leq l - 2$ . Ahora  $d_h(w, v)$  debe estar a distancia 1 de  $l$ , así que  $2(w|v) = m + l - d_h(w, v)$  será un número entre  $m - 1$  y  $m + 1$ . De forma análoga,  $s - 1 \leq 2(u|w) \leq s + 1$ . Como  $d_h(u, v) \leq m + 1$ ,  $2(u|v) \geq m + s - (m + 1) = s - 1$  la única posibilidad para que el mínimo producto de Gromov de la tripleta  $uvw$  sea menor que el mediano menos 4 es que  $s \leq m - 2$ . En tal caso  $d_h(u, v) \geq m - 1$ , así  $s + 1 = m + s - (m - 1) \geq 2(u|v) \geq m + s - (m + 1) = s - 1$  y por tanto el menor producto de Gromov para la tripleta  $uvw$  es mayor que el mediano menos 4.

Caso 2:  $m \geq l - 1$ . Ahora  $d_h(u, v)$  deberá estar a distancia 1 de  $m$ , así  $2(u|v) = m + s - d_h(u, v)$  está contenido entre  $s - 1$  y  $s + 1$ . De manera análoga,  $s - 1 \leq 2(u|w) \leq s + 1$ . Como  $d_h(w, v) \leq l + 1$ ,  $2(w|v) \geq m + l - (l + 1) = m - 1 \geq s + 2$ , y el menor producto de Gromov para la tripleta  $uvw$  será mayor que el mediano menos 4.

Probaremos ahora que la frontera de  $(X, d_h)$  consiste en un punto. Dadas dos sucesiones de puntos  $\{x_i\}$  y  $\{y_i\}$  tales que  $(x_m|x_k) \rightarrow \infty$  y  $(y_m|y_k) \rightarrow \infty$  tenemos que demostrar que  $(x_m|y_m) \rightarrow \infty$ . Pero como  $d_h(x_m, y_m)$  es menor que  $\max(d_h(x_m, x_0), d_h(y_m, x_0)) + 2$ , tenemos  $2(x_m|y_m) \geq \min(d_h(x_m, x_0), d_h(y_m, x_0)) - 2 \rightarrow \infty$ .

5)(Segunda propiedad de Nagata) Sean ahora  $y_1, \dots, y_{n+2}, x \in X$  y definamos para cada  $i \in \{1, \dots, n + 2\}$  el número  $r(i) = d_h(y_i, x)$ . Por la construcción de  $d_h$  tenemos que para todo  $i$  existe un  $V_i \in \mathcal{U}_{r(i)}$  tal que  $y_i \in V_i$  y  $x \in V_i$ . Además para

cada  $i$  existirá un  $k(i)$  tal que  $V_i \in \mathcal{U}_{r(i)}^{k(i)}$ . Por el principio del palomar existirán dos  $i, j$  con  $i \neq j$  tales que  $k(i) = k(j)$ . Como  $x \in V_i \cap V_j$  por la cuarta propiedad de la proposición 2.2.5 obtenemos que o bien  $V_i \subseteq V_j$  o  $V_j \subseteq V_i$ . Del primer caso se deduce que  $d_h(y_i, y_j) \leq d_h(x, y_j)$  y del segundo tenemos que  $d_h(y_j, y_i) \leq d_h(x, y_i)$ . Y por tanto  $(X, d_h)$  satisface  $(N2)_n$ .

□

**Corolario 2.2.8.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico tal que  $\text{asdim}(X, d) = n$ . Entonces existe una métrica  $d_h$  en  $X$  equivalente a gran escala a  $(X, d)$  tal que  $\text{dim}_{AN}(X, d_h) = n$  y todos los conos asintóticos de  $(X, d_h)$  son espacios ultramétricos.*

En el siguiente capítulo mostraremos un grupo con una métrica propia invariante por la izquierda de dimensión de Assouad-Nagata infinita tal que todos sus conos asintóticos son ultramétricos.

## Capítulo 3

# Dimensión de Assouad-Nagata de grupos numerables

Como ya se ha dicho, la dimensión de Assouad-Nagata y la dimensión asintótica de Assouad-Nagata coinciden para espacios métricos discretos. Un ejemplo muy importante de espacios métricos discretos son los grupos numerables con métricas propias invariantes por la izquierda. De este modo la dimensión asintótica de Assouad-Nagata pasa a ser un invariante cuasi-isométrico de interés para la teoría geométrica de grupos. Ejemplos de grupos con dimensión de Assouad-Nagata finita serían los grupos hiperbólicos, los grupos virtualmente abelianos, los grupos virtualmente libres, los grupos de Coexter y ciertos grupos tipo Baumslag-Solitar.

Uno de los problemas fundamentales en este ámbito sería sobre el tamaño de la diferencia, cuando exista, entre la dimensión asintótica y la dimensión de Assouad-Nagata de un grupo discreto. Dicho problema se puede subdividir en varios subproblemas importantes:

1. ¿Existen grupos discretos tales que  $asdim(G) < asdim_{AN}(G)$ ?
2. Si  $G$  es un grupo nilpotente (o soluble) ¿Se cumple que  $asdim(G) = asdim_{AN}(G)$  para la métrica de la palabra?
3. Determinar qué grupos finitamente generados  $G$  admiten una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  tal que  $asdim(G, d) < asdim_{AN}(G, d)$

La primera pregunta tiene respuesta afirmativa. P.Nowak en [59] encontró para cada  $n \geq 1$  un grupo finitamente generado de dimensión asintótica igual a  $n$  pero de dimensión de Assouad-Nagata infinita. Como problema final en su trabajo, Nowak preguntaba sobre la existencia de grupos discretos tales que la dimensión asintótica fuera estrictamente menor que la dimensión de Assouad-Nagata pero ésta última fuese finita. Como consecuencia del trabajo de Nowak apareció uno de Brodskyi, Dydak y Lang [18] que relacionaban el crecimiento de un grupo finitamente generado  $G$  con la dimensión de Assouad-Nagata de su producto wreath  $H \wr G$  siendo  $H \neq 1$  un grupo finito. De estos resultados se deducen numerosos ejemplos de grupos numerables localmente finitos de dimensión de Assouad-Nagata infinita.

El principal objetivo de la primera sección será estudiar la dimensión de Assouad-Nagata de grupos localmente finitos y de grupos numerables. En particular mostraremos que para cada  $n$  un grupo localmente finito  $(G, d_G)$  con  $d_G$  una métrica propia invariante por la izquierda satisface que  $asdim_{AN}(G, d_G) = n$ . Este problema se planteó en [18]. También mostraremos que este resultado se puede extender a los grupos abelianos numerables no finitamente generados. Esto resolverá (negativamente) el problema de Nowak para grupos numerables no finitamente generados y el problema de [18] para grupos localmente finitos.

Con respecto a la segunda pregunta es un problema que lleva abierto algunos años. A.N. Dranishnikov nos informó que la conjetura de la igualdad de dimensiones en grupos nilpotentes podría ser falsa. La razón era que John Roe sugería el grupo de Heisenberg (el primer grupo nilpotente no abeliano) como contraejemplo (véase [63] para una discusión sobre este aspecto). En la segunda parte de este capítulo demostramos que esto no es cierto y que para el grupo nilpotente la dimensión de Assouad-Nagata y la dimensión asintótica coinciden.

En la última parte estudiaremos el problema para los grupos nilpotentes. Mostraremos que para todo grupo nilpotente es posible encontrar una métrica propia invariante por la izquierda tal que ambas dimensiones sean diferentes. Dranishnikov en [28] preguntó los siguientes casos particulares:

**Problema 3.0.9.** (Dranishnikov [28]) ¿Se cumple  $dim_{AN}(\mathbb{Z}, d) = 1$  para toda métrica propia invariante por la izquierda en  $\mathbb{Z}$ ?

En relación con el problema anterior preguntó lo siguiente:

**Problema 3.0.10.** (Dranishnikov [28]) ¿Se cumple que  $dim_{AN}(\Gamma \times \mathbb{Z}) = dim_{AN}(\Gamma) + 1$  para toda métrica propia invariante por la izquierda en  $\mathbb{Z}$ ?

Obsérvese que en [30], Dranishnikov y Smith demostraron que  $asdim_{AN}(G \times \mathbb{Z}) = asdim_{AN}(G) + 1$  para todo grupo finitamente generado  $G$  pero en este caso las métricas a considerar fueron métricas de la palabra.

Como consecuencia de nuestro resultado, existirá una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  en  $\mathbb{Z}$  tal que  $asdim_{AN}(\mathbb{Z}, d) = \infty$  lo que resuelve los dos problemas de Dranishnikov.

Otro problema importante es el de proporcionar ejemplos de clases grupos con dimensión de Assouad-Nagata finita y dar un método para calcular las dimensiones. Como ya se ha mencionado hasta ahora los grupos que se conocían con dimensión de Assouad-Nagata finita eran los abelianos, los grupos de Coxeter, los hiperbólicos, ciertos grupos tipo Baumslag-Solitar y los libres. En la penúltima sección de este trabajo damos el resultado que consideramos más importante de este libro: una fórmula para calcular la dimensión de Assouad-Nagata del producto libre de dos grupos. Tal fórmula para la dimensión asintótica se conoce desde los trabajos de [11], sin embargo los métodos de tal artículo no sirven para la dimensión de Assouad-Nagata. Nosotros proporcionamos un método que funcionará tanto para la dimensión de Assouad-Nagata como para la dimensión asintótica. Es más, tal método servirá para una clase de espacios más generales conocidos como espacios tipo-árbol que resultan importantes en el estudio de los grupos relativamente hiperbólicos.

Finalmente como apéndice de este capítulo construiremos un grupo  $G$  con una métrica propia invariante por la izquierda tal que todos sus conos son ultramétricos pero  $asdim_{AN}(G) = \infty$ .

### 3.1. Grupos localmente finitos y dimension de Assouad-Nagata

A continuación damos un método para construir métricas propias invariantes por la izquierda en un grupo numerable. Una aplicación  $\|\cdot\|_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  se dice que es una *norma propia* si satisface las siguientes condiciones:

1.  $\|g\|_G = 0$  si y solo si  $g$  es el elemento neutro de  $G$ .
2.  $\|g\|_G = \|g^{-1}\|_G$  para todo  $g \in G$ .
3.  $\|g \cdot h\|_G \leq \|g\|_G + \|h\|_G$  para todo  $g, h \in G$ .
4. Para todo  $K > 0$  el número de elementos de  $G$  tales que  $\|g\|_G \leq K$  es finito.

Así, si construimos una norma propia  $\|\cdot\|_G$  en  $G$  entonces la aplicación  $d_G(g, h) = \|g^{-1} \cdot h\|_G$  define una métrica propia invariante por la izquierda. Recíprocamente para toda métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$  la aplicación  $\|g\|_G = d_G(1, g)$  define una norma propia.

Un método para obtener una norma en un grupo numerable fue descrito por Smith en [69](véase también [68]). Sea  $S$  un sistema simétrico de generadores (posiblemente infinito) de un grupo numerable  $G$  y sea  $w : L \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función que llamaremos (*función de pesos*) que satisface:

1.  $w(s) = 0$  si y solo si  $s = 1_G$
2.  $w(s) = w(s^{-1})$ .

Entonces la función  $\|\cdot\|_w : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por :

$$\|g\|_w = \min \left\{ \sum_{i=1}^n w(s_i) \mid x = \prod_{i=1}^n s_i, s_i \in S \right\}$$

es una norma. Más aún si  $w$  satisface también que  $w^{-1}[0, N]$  es finito para todo  $N$  entonces  $\|\cdot\|_w$  es una norma propia.

Obsérvese que si definimos  $w(g) = 1$  para todos los elementos  $g \in S$  de un sistema finito de generadores  $S \subset G$ , con  $G$  un grupo finitamente generado, obtendremos una métrica de la palabra al modo estándar.

Este método para grupos finitos tiene la siguiente propiedad de extensión que es sencilla de demostrar:

**Lema 3.1.1.** *Sea  $G$  un grupo numerable y sea  $(G_1, d_{G_1})$  un subgrupo finito de  $G$  con  $d_{G_1}$  un métrica propia invariante por la izquierda. Sea  $S \subset G$  un subconjunto simétrico de  $G$  tal que:*

1.  $S \cap G_1 = \emptyset$ .
2.  $G$  es generado por  $G_1 \cup S$ .

Si  $\|\cdot\|_w : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una norma definida por una función de pesos  $w : G_1 \cup S \cup S^{-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisface

1.  $w(g) = \|g\|_{G_1}$  si  $g \in G_1$
2.  $w(g) \geq \text{diam}(G_1)$  si  $g \in S \cup S^{-1}$ .

entonces para todo  $g \in G_1$  se cumple que  $\|g\|_w = \|g\|_{G_1}$ .

En un grupo localmente finito  $G$  podemos encontrar una filtración  $L$  de subgrupos finitos  $L = \{\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \dots\}$ . Si aplicamos sucesivamente el lema 3.1.1 a  $L$  podemos construir una sucesión de normas  $\|\cdot\|_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}_+$  y una norma  $\|\cdot\|_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que la restricción de  $\|\cdot\|_G$  a  $G_i$  coincida con  $\|\cdot\|_{G_i}$  y cada  $\|\cdot\|_i$  sea una extensión de  $\|\cdot\|_{i-1}$ .

Sea  $L = \{\{0\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots\}$  una filtración de un grupo numerable  $G$ . Diremos que la sucesión  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  de los elementos de  $G$  es un *sistema de generadores* de  $L$  si para cada  $i \geq 1$  existe un  $n_i$  tal que  $G_i = \langle g_1, \dots, g_{n_i} \rangle$ . Si también se cumple que  $n_i = i$  y  $G_{i-1} \neq G_i$  para cada  $i \geq 1$  entonces diremos que la filtración  $L$  es una *cadena ascendente de un-paso*. En una cadena ascendente de un-paso se puede estimar fácilmente el cardinal de  $G_i$ .

**Lema 3.1.2.** *Sea  $G$  un grupo localmente finito y sea  $L = \{\{1\} = G_0 < G_1 < \dots\}$  una cadena ascendente de un-paso entonces  $|G_i| \geq 2^i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de generadores de  $L$ . Para  $i = 1$  el resultado es obvio. Supongamos que el resultado es cierto para algún  $i \geq 1$ . Tomemos  $2^i$  elementos diferentes  $\{x_n\}_{n=1}^{2^i}$  de  $G_i$ . El subconjunto  $X$  de  $G_{i+1}$  definido como  $X = \{x_n\}_{n=1}^{2^i} \cup \{x_n \cdot g_{i+1}\}_{n=1}^{2^i}$  contiene  $2^{i+1}$  elementos diferentes como  $g_{i+1} \notin G_i$ .  $\square$

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $G$  un grupo localmente finito. Para toda función creciente  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  existe una métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$  en  $G$  tal que  $f$  no es una función de control 0-dimensional.*

*Demostración.* La demostración es por contradicción. Sea  $L = \{G_0 < G_1 < \dots\}$  una cadena ascendente de un-paso de  $G$  con  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de generadores de  $L$ . Supongamos que existiese una función  $f$  como en las hipótesis del teorema que fuese una función de control 0-dimensional para toda métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$ . En tal caso afirmamos:

*Existe un  $K > 0$  tal que para todo  $i > 0$  todo elemento  $g \in G_i$  tiene longitud menor o igual que  $K$  como palabra de  $\{g_1, \dots, g_i\}$ .*

Si esta afirmación fuera falsa probaremos que existe una métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$  tal que  $f$  no es una función de control 0-dimensional. Fijemos  $J_1 = 1$  y tomemos  $h_1 \in G_{i_1}$  un elemento tal que su mínima longitud en  $G_{i_1}$  sea mayor que  $f(1)$ . En el sistema de generadores  $\{g_j\}_{j=1}^{i_1}$  definimos las normas  $\|g_j^\epsilon\|_{G_{i_1}} = 1$  con  $\epsilon = \pm 1$ . Considerando tales normas como pesos tendremos una métrica propia invariante por la izquierda en  $G_{i_1}$ . Obsérvese que  $\|h_1\|_{G_{i_1}} > f(J_1)$  pero  $h_1$  está en la misma componente 1-conexa que el origen. Supongamos ahora definida la métrica propia invariante por la izquierda en  $G_{i_r}$  que verifica la siguiente propiedad:

Existe un  $h_r \in G_{i_r}$  con  $\|h_r\|_{G_{i_r}} > f(J_r)$ ,  $J_r \geq \text{diam}(G_{i_{r-1}})$  y tal que  $h_r$  está en la misma componente  $J_r$ -conexa que el origen

Sea  $J_{r+1} > \text{diam}(G_{i_r})$  y sea  $h_{r+1}$  un elemento del grupo  $G_{i_{r+1}}$  tal que su mínima longitud sea mayor que  $f(J_{r+1})$ . Aplicamos 3.1.1 a  $G_{i_r} \cup S$  con  $S = \{g_{i_r+1}, \dots, g_{i_{r+1}}\}$  y una función de pesos  $w$  que satisfaga  $w(g) = J_{r+1}$  para todo generador  $g \in S \cup S^{-1}$ . Entonces obtendremos la norma en  $G_{i_{r+1}}$  que es una extensión de  $\|\cdot\|_{G_{i_r}}$  con la misma propiedad que anteriormente. Repitiendo este procedimiento podemos obtener una norma propia  $\|\cdot\|_G$  definida en  $G$  tal que para todo  $J_r$  existe un

elemento  $h_r$  con  $\|h_r\|_G > f(J_r)$  y  $h_r$  está en la misma componente  $J_r$ -conexa que el origen. Deducimos que  $f$  no puede ser una función de control 0-dimensional de  $d_G$  y de este modo la afirmación anterior será cierta.

Ahora aplicando un argumento combinatorio sencillo podemos estimar la cardinalidad de cada subgrupo  $G_i$ :

$$|G_i| \leq \sum_{j=0}^K (2 \cdot i)^j \leq (K + 1) \cdot 2^K \cdot i^K$$

Esto último contradice el lema 3.1.2 para  $i$  suficientemente grande. □

**Corolario 3.1.4.** *Un grupo localmente finito y numerable es finito si y solo si  $asdim_{AN}(G, d_G) = 0$  para toda métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$ .*

*Demostración.* Resulta evidente que todo grupo finito satisface (al estar acotado)  $asdim_{AN}(G, d_G) = 0$  para toda métrica  $d_G$  propia e invariante por la izquierda.

Para probar el recíproco observamos que si  $(X, d_X)$  es una métrica discreta y  $f$  no es una función de control 0-dimensional de  $(X, d_X)$  entonces  $g$  no será una función de control 0-dimensional de  $(X, d_X)$  para toda función  $g$  tal que  $g \leq f$  asintóticamente es decir que existe un  $x_0$  tal que  $g(x) \leq f(x)$  para todo  $x \geq x_0$ . Por tanto por el teorema anterior si  $G$  no es finito podemos tomar una métrica  $d_G$  tal que la función  $f(x) = x^2$  no sea una función de control 0-dimensional de  $(G, d_G)$ . Entonces ninguna función lineal puede ser una función de control 0-dimensional de  $(G, d_G)$  y así  $asdim_{AN}(G, d_G) > 0$ . □

El resto de la sección se centrará en encontrar grupos localmente finitos con dimensión de Assouad-Nagata no nula pero finita. Tales grupos serán de la forma  $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G_i$  siendo  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de grupos finitos y  $G_0 = \{0\}$ . Nuestro primer paso será definir una métrica propia invariante por la izquierda en  $G$  utilizando una sucesión de métricas propias invariantes por la izquierda  $\{d_{G_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\{G_i\}$ . Supongamos que  $d_{G_i}(x, y) \geq 1$  para cada pareja de elementos de  $G_i$ . Para construir tal métrica tomamos una sucesión de números positivos  $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tales que  $s_1 \geq 1$  y  $s_i \geq s_{i-1} \cdot \text{diam}(G_{i-1}) + 1$  y definimos la aplicación  $k : G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  por  $k(g) = \max\{i \mid \pi_i(g) \neq 1_{G_i}\}$ . Las funciones  $\pi_i : G \rightarrow G_i$  son las proyecciones canónicas. En esta situación podemos construir una norma propia como sigue:

**Lema 3.1.5.** Sea  $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G_i$  con  $G_0 = \{0\}$  y  $\{G_i, d_{G_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de grupos finitos con métricas propias invariantes por la izquierda  $d_{G_i}$ . Sea  $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números finitos definida anteriormente. Entonces la aplicación  $\|\cdot\|_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por  $\|g\|_G = s_{k(g)} \cdot \|\pi_{k(g)}(g)\|_{G_i}$  satisface:

1.  $\|\cdot\|_G$  es una norma propia en  $G$ .
2. Si  $g \in G_i$  entonces  $\|j_i(g)\|_G = s_i \|g\|_{G_i}$  con  $j_i : G_i \rightarrow G$  la inclusión canónica.

*Demostración.* (2) es obvio por definición de  $\|\cdot\|_G$  así que demostremos (1). Veamos en primer lugar que  $\|\cdot\|_G$  define una norma en  $G$ . Tenemos que demostrar que  $\|\cdot\|_G$  satisface las tres condiciones de norma. Usaremos la convención  $k(g) = 0$  si y solo si  $\pi_i(g) = 1_{G_i}$  para todo  $i$ . Esto implica  $g = 1_G$ . Así la primera condición puede deducirse fácilmente del hecho de que cada  $\|\cdot\|_{G_i}$  es una norma (propia). La segunda condición es trivial. Para la tercera sean  $g, h \in G$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $k(g) \geq k(h)$ . Como  $\pi_i(g \cdot h) = \pi_i(g)$  Para cada  $i > k(h)$  el caso  $k(g) > k(h)$  es obvio. Consideremos ahora que  $k(g) = k(h)$ . En tal caso tenemos que  $\pi_i(g \cdot h) = 1_{G_i}$  para cada  $i > k(g)$ . Existen ahora dos posibilidades:

1.  $\pi_{k(g)}(g \cdot h) \neq 1_{G_{k(g)}}$ . Entonces como cada  $\|\cdot\|_{G_i}$  es una norma tenemos:

$$\begin{aligned} \|g \cdot h\|_G &= s_{k(g)} \cdot \|\pi_{k(g)}(g) \cdot \pi_{k(g)}(h)\|_{G_{k(g)}} \leq \\ &s_{k(g)} \cdot (\|\pi_{k(g)}(g)\|_{G_{k(g)}} + \|\pi_{k(g)}(h)\|_{G_{k(g)}}) = \|g\|_G + \|h\|_G \end{aligned}$$

2.  $\pi_{k(g)}(g \cdot h) = 1_{G_{k(g)}}$ . Lo que implica trivialmente  $\|g \cdot h\|_G < s_{k(g)} \leq \|g\|_G + \|h\|_G$ .

Finalmente para demostrar que es una norma propia dado  $K > 0$  podemos tomar  $s_i$  tal que  $K < s_i$ . Así el número de elementos de  $g \in G$  con norma menor o igual que  $K$  estará acotado por  $\prod_{j=1}^{i-1} |G_j|$  con  $|G_j|$  el cardinal de  $G_j$ .  $\square$

La métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$  asociada a la norma anterior la llamaremos *cuasi-ultramétrica generada* por  $\{d_{G_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ . La razón de este nombre se muestra en el siguiente lema.

**Lema 3.1.6.** Sea  $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G_i$  el grupo definido anteriormente con  $d_G$  la métrica propia invariante por la izquierda del lema anterior. Entonces para cada  $g_1, g_2, g_3 \in G$  tal que  $k(g_i) \neq k(g_j)$  con  $i, j = 1, 2, 3$  tenemos:

$$d_G(g_1, g_2) \leq \max\{d_G(g_2, g_3), d_G(g_1, g_3)\}$$

*Demostración.* Si  $k(g_1) > k(g_2)$  y  $k(g_1) > k(g_3)$  entonces tendremos  $\pi_{k(g_1)}(g_1^{-1} \cdot g_j) = \pi_{k(g_1)}(g_1^{-1})$  con  $j = 2, 3$ , esto implicará que  $d_G(g_1, g_j) = \|g_1^{-1} \cdot g_j\|_G = \|g_1^{-1}\|_G$ . Y así  $d_G(g_1, g_2) = d_G(g_1, g_3)$ . Supongamos ahora que  $k(g_2) > k(g_1)$  y  $k(g_2) > k(g_3)$ . Aplicando el mismo razonamiento obtenemos:  $d_G(g_1, g_2) = d_G(g_2, g_3)$ . Finalmente si  $k(g_3) > k(g_1)$  y  $k(g_3) > k(g_2)$  obtendremos por un razonamiento análogo que  $d_G(g_1, g_2) < s_{k(g_3)} \leq d_G(g_3, g_2)$ .  $\square$

Podemos estimar la dimension de Assouad-Nagata de  $G$  a partir de la dimensión de Assouad-Nagata de cada  $G_i$ .

**Lema 3.1.7.** Sea  $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G_i$  donde  $G_0 = \{0\}$  y  $\{G_i, d_{G_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de grupos finitos con  $d_{G_i}$  una métrica propia invariante por la izquierda. Sea  $d_G$  la cuasi-ultramétrica generada por  $\{d_{G_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Si existe una constante  $C \geq 1$  tal que para cada  $s \in (1, \text{diam}(G_i)]$  existe un recubrimiento  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n\}$  de  $(G_i, d_{G_i})$  tal que las componentes  $s$ -conexas de cada  $\mathcal{U}_j$  están  $C \cdot s$ -acotadas entonces  $\text{asdim}_{AN}(G, d_G) \leq n$ .

*Demostración.* Sea  $s \in (s_i, s_{i+1}]$  y sea  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n\}$  un recubrimiento de  $(G_i, d_{G_i})$  tal que las componentes  $\frac{s}{s_i}$ -conexas de cada  $\mathcal{U}_j$  están  $C \cdot \frac{s}{s_i}$ -acotadas. Si  $s \in (s_i \cdot \text{diam}(G_i), s_i \cdot \text{diam}(G_i) + 1]$  Definimos  $\mathcal{U}_j = G_i$  para cada  $j = 0, \dots, n$ . Construimos ahora el recubrimiento  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n\}$  de  $(G, d_G)$  usando la propiedad  $g \in \mathcal{V}_j$  si y solo si  $\pi_i(g) \in \mathcal{U}_j$ . Veamos que las componentes  $s$ -conexas de  $\mathcal{V}_j$  están  $C \cdot s$ -acotadas. Dado una  $s$ -cadena  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de  $\mathcal{V}_j$ , definimos la cadena asociada  $y_1, \dots, y_m$  mediante  $y_r = x_1^{-1} \cdot x_r$ . Si demostramos que  $\|y_m\|_G \leq C \cdot s$  habremos terminado.

Primero observamos que  $y_1 = 1_G$ . Ahora supongamos que es cierto para algún  $r < m$  que  $\pi_j(y_r) = 1_{G_j}$  para todo  $j > i$  entonces como consecuencia del hecho de que  $d_G(y_r, y_{r+1}) < s \leq s_{i+1}$  obtendremos  $\pi_j(y_{r+1}) = 1_{G_j}$  para cada  $j > i$ . Esto

prueba que  $\pi_j(y_r) = 1_{G_j}$  para cada  $j > i$  y cada  $r = 1, \dots, m$ . Por la construcción de la métrica  $d_G$  obtenemos que  $d_{G_i}(\pi_i(y_r), \pi_i(y_{r+1})) < \frac{s}{s_i}$  y entonces  $\pi_i(y_1), \dots, \pi_i(y_m)$  es una  $\frac{s}{s_i}$ -cadena de  $\pi_i(x_1^{-1}) \cdot \mathcal{U}_j$ . Así, ésta será  $C \cdot \frac{s}{s_i}$ -acotada. Combinando este resultado y  $\pi_i(y_1) = 1_{G_i}$  obtenemos finalmente que  $\|\pi_i(y_m)\|_{G_i} \leq C \cdot \frac{s}{s_i}$  lo que implica  $\|y_m\|_G \leq C \cdot s$ .  $\square$

Para obtener el principal teorema de esta sección tenemos que encontrar grupos finitos con métricas propias invariantes que satisfagan el lema anterior y garanticen que  $(G, d_G)$  tiene dimension de Assouad-Nagata no nula. Este es el objetivo del siguiente lema.

**Lema 3.1.8.** *Sea  $n$  un número natural fijo. Existe una constante  $C_n \geq 1$  tal que para cada  $s \in \mathbb{R}_+$ , todo grupo finito  $(\mathbb{Z}_k^n, d_k^n)$  con  $k > 1$  y  $d_k$  la métrica de la palabra canónica de  $\mathbb{Z}_k$  admite un recubrimiento  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n\}$  donde las componentes  $s$ -conexas de cada  $\mathcal{U}_i$  están  $C_n \cdot s$ -acotadas.*

*Demostración.* Definimos  $r$  como la parte entera de  $\frac{k}{2}$ . En esta demostración vemos los grupos  $\mathbb{Z}_k$  como:

$$\mathbb{Z}_k = \{-r, -r + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, r - 1, r\}.$$

Como consecuencia trivial de los resultados de [52] se puede demostrar que  $\dim_{AN} \mathbb{Z}^n \leq n$  así que sea  $D(s) = C'_n \cdot s$  una función de control  $n$ -dimensional de  $\mathbb{Z}^n$  con  $C'_n \geq 1$ . Fijemos  $s$  un número positivo y sean un recubrimiento  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n\}$  de  $\mathbb{Z}^n$  tal que la componente  $s$ -conexa de cada  $\mathcal{V}'_i$  está  $C'_n \cdot s$ -acotada. Construimos un recubrimiento  $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}'_0, \dots, \mathcal{U}'_n\}$  de  $I_r^n = \{0, 1, \dots, r\}^n$  de la forma  $\mathcal{U}'_i = \mathcal{V}_i \cap I_r^n$ . Obsérvese que la restricción de  $d_k^n$  a  $I_r^n$  coincide con la  $l_1$ -métrica de  $I_r^n$ . Sea  $\pi_i : \mathbb{Z}_k^n \rightarrow \mathbb{Z}_k$  la proyección canónica sobre la coordenada  $i$ -ésima. Para cada subconjunto  $\lambda$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tomamos el automorfismo  $p_\lambda : \mathbb{Z}_k^n \rightarrow \mathbb{Z}_k^n$  dado por  $\pi_i(p_\lambda(x)) = \epsilon_{(\lambda, i)} \cdot \pi_i(x)$  con  $\epsilon_{(\lambda, i)} = 1$  ó  $\epsilon_{(\lambda, i)} = -1$  dependiendo de si  $i \in \lambda$  ó  $i \notin \lambda$ . Definimos el recubrimiento  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n\}$  de  $\mathbb{Z}_k^n$  de la forma  $x \in \mathcal{U}_i$  si y solo si existe un  $\lambda$  tal que  $p_\lambda(x) \in \mathcal{U}'_i$ . Estimemos el diámetro de las componentes  $s$ -conexas de  $\mathcal{U}_i$ . Primero afirmamos que si  $L$  y  $M$  son dos diferentes componentes  $s$ -conexas de  $\mathcal{U}'_i$  entonces  $d(p_{\lambda_1}(L), p_{\lambda_2}(M)) \geq s$  para todo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  subconjuntos

de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Supongamos que no es así y que existen  $x \in L$  e  $y \in M$  tales que  $d(p_{\lambda_1}(x), p_{\lambda_2}(y)) < s$ . Pero si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  entonces:

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq \sum_{i=1}^n d_k(\epsilon_{(\lambda_1, i)} \cdot x_i, \epsilon_{(\lambda_2, i)} \cdot y_i) < s$$

Una contradicción con el hecho de que  $L$  y  $M$  son diferentes componentes  $s$ -conexas.

A partir de esto deducimos que si  $L'$  es una componente  $s$ -conexa de  $\mathcal{U}_i$  entonces existe una componente  $s$ -conexa de  $L$  de  $\mathcal{U}'_i$  y algunos subconjuntos  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  de  $\{1, \dots, n\}$  tales que  $L' = \bigcup_{j=1}^m p_{\lambda_j}(L)$ . Cada  $p_{\lambda_j}(L)$  es  $s$ -conexo y está  $C'_n \cdot s$ -acotado ya que las aplicaciones  $p_{\lambda}$  son isometrías. Resulta evidente que  $m \leq 2^n$ . Así obtenemos que:

$$\text{diam}(L') = \text{diam}\left(\bigcup_{j=1}^m p_{\lambda_j}(L)\right) \leq \sum_{i=1}^m (C'_n \cdot s + s) \leq 2^n \cdot (C'_n + 1) \cdot s$$

Por tanto el recubrimiento  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n\}$  satisface los requerimientos del lema con  $C_n = 2^n \cdot (C'_n + 1)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.9.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  existe un grupo localmente finito  $G^n$  con una métrica propia invariante por la izquierda  $d_n$  tal que  $\text{asdim}_{AN}(G^n, d_n) = n$ .*

*Demostración.* Caso  $n < \infty$ . Supongamos  $n$  fijado. Sea  $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de números naturales con  $k_1 > 1$  y sea  $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  la sucesión dada por la parte entera de  $\frac{k_i}{2}$ . Tomamos los grupos finitos  $(G_i^n = \mathbb{Z}_{k_i}^n, d_{G_i^n})$  con  $d_{G_i^n}$  la métrica de la palabra usual, sea  $(G, d_G)$  el grupo  $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i^n$  con  $d_G$  la cuasi-ultramétrica generada por  $\{d_{G_i^n}\}$ . Resulta claro que las condiciones del corolario 2.1.12 se cumplen con lo que obtenemos  $\text{asdim}_{AN}(G, d_G) \geq n$ . Por otro lado por los lemas 3.1.7 y 3.1.8 concluimos que  $\text{asdim}_{AN}(G, d_G) \leq n$ .

Caso  $n = \infty$ . Simplemente basta tomar el grupo  $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i^i$  donde  $G_i^i$  son los grupos definidos en el anterior caso de la demostración y construimos la cuasi-ultramétrica  $d_G$  generada por  $\{d_{G_i^i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Aplicando un razonamiento análogo tenemos que  $\text{asdim}_{AN}(G, d_G) \geq n$  para cada  $n$ .  $\square$

*Observaciones 3.1.10.* En [19] se preguntaba sobre la posibilidad de definir la dimensión asintótica de Assouad-Nagata de un grupo arbitrario  $G$  como el supremo de las dimensiones asintóticas de Assouad-Nagata de sus subgrupos finitamente generados  $H$ . Resulta evidente por el resultado anterior que tal estrategia no es acertada. Incluso si suponemos que la dimensión de Assouad-Nagata de  $G$  es finita.

**Corolario 3.1.11.** *Para cada  $n, k$  con  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  existe un grupo abeliano numerable  $(G^{(n,k)}, d_{(n,k)})$  con  $d_{(n,k)}$  una métrica propia invariante por la izquierda tal que  $\text{asdim}(G^{(n,k)}, d_{(n,k)}) = n$  pero  $\text{asdim}_{AN}((G^{(n,k)}, d_{(n,k)})) = n + k$ .*

*Demostración.* Fijemos  $n$  y  $k$  como en las hipótesis y tomemos el grupo  $(G^k, d_k)$  como en el teorema 3.3.2. Definimos el grupo  $G^{(n,k)} = \mathbb{Z}^n \oplus G^k$  y la métrica propia invariante por la izquierda  $d_{(n,k)}$  definida por  $d_{(n,k)}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|x_1 - x_2\|_1 + d_k(y_1, y_2)$ . Resulta claro que existe una sucesión de dilataciones  $f_m : B(0, k_m)^{n+k} \rightarrow G^{(n,k)}$  con  $\lim k_m = \infty$  y  $B(0, k_m)^{n+k}$  la bola de radio  $k_m$  en  $\mathbb{Z}^{n+k}$ . Aplicando 2.1.12 deducimos  $\text{asdim}_{AN}(G^{(n,k)}, d_{(n,k)}) \geq n + k$ . Las otras desigualdades se siguen fácilmente de la subaditividad de la dimensión asintótica y la dimensión de Assouad-Nagata con respecto al producto cartesiano (véase los preliminares) y del hecho de que  $\text{asdim}(\mathbb{Z}^n, d_1) = n$ .  $\square$

## 3.2. Dimensión de Assouad-Nagata del grupo discreto de Heisenberg

**Proposición 3.2.1.** *La dimensión asintótica y la dimensión de Assouad-Nagata del grupo discreto de Heisenberg  $H_3(\mathbb{Z})$  son ambas iguales a 3.*

*Demostración.* Recordamos (ver [41], p.51) que el grupo continuo de Heisenberg  $H_3(\mathbb{R})$  es el único grupo no abeliano nilpotente de dimensión tres. Éste contiene, como red cocompacta, al grupo discreto de Heisenberg  $H_3(\mathbb{Z})$  generado por  $a, b$ , y  $c$  con las relaciones  $c = [a, b]$ ,  $[a, c] = 1$ , y  $[b, c] = 1$ . Como  $G = H_3(\mathbb{Z})$  tiene longitud de Hirsch 3, su dimensión asintótica es 3 (véase el Teorema 3.5 de [29]). Para probar que  $\text{asdim}_{AN}(G) \leq 3$  consideraremos la sucesión exacta  $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow G/\mathbb{Z} \rightarrow 1$ , donde  $\mathbb{Z}$  está generado por  $c$ . Como  $G/\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , bastará demostrar que  $(\mathbb{Z}, d)$

es cuasi-simétricamente equivalente a  $\mathbb{Z}$  equipado con la métrica usual, donde  $d$  es una métrica de  $\mathbb{Z}$  proveniente de una métrica de la palabra en  $G$ . De hecho, a la vista de 2.1.1 tenemos que  $\text{asdim}_{AN}(\mathbb{Z}, d) = 1$  y aplicando 2.1.6 obtendremos  $3 = \text{asdim}(G) \leq \text{asdim}_{AN}(G) \leq 3$ .

En [41] p.52 se sugirió que la métrica  $d$  es cuasi-isométrica a la raíz cuadrada de la métrica usual de  $\mathbb{Z}$  (se menciona la igualdad  $[a^n, b^n] = c^{n^2}$ ). Como esa afirmación no está totalmente clara, mostraremos una exposición detallada del resultado. Para ello afirmamos que:

**Afirmación 1.** Sea  $K > 16$  suficientemente grande de tal forma que  $4(n+1) + K \cdot \sqrt{n} \leq K \cdot n$  para todo  $n \geq 2$  (equivalentemente,  $K \geq \frac{4(n+1)}{n-\sqrt{n}}$  para todo  $n \geq 2$ ). Para cada entero  $k$  existe una palabra  $w$  en  $a$  y  $b$  (incluyendo los inversos) tal que  $w = c^k$  en  $G$  y  $l(w) \leq K\sqrt{|k|}$ , donde  $l(w)$  es la longitud de  $w$ .

**Demostración de la afirmación 1:** Usaremos la igualdad  $[a^u, b^v] = c^{u \cdot v}$  cuya demostración se dejará al lector. Bastará considerar el caso  $k$  positivo. La demostración será por inducción en  $k$ . Si  $k = n^2$  para algún número natural  $n$ , entonces pondremos  $w = [a^n, b^n]$  cuya longitud es  $4 \cdot n$ . Para  $k = 2$  se puede tomar  $w = [a, b]^2$ . De manera análoga, se realiza el caso  $k = 3$ . Si existe un número natural  $n \geq 2$  tal que  $n^2 < k \leq n^2 + n$ , entonces tomamos la palabra  $w'$  para  $k' = k - n^2$  y escribimos  $w = [a^n, b^n] \cdot w'$ . Observamos que  $l(w) \leq 4n + l(w') \leq 4n + K\sqrt{k - n^2} \leq Kn \leq K\sqrt{k}$ . De otro modo existirá  $n \geq 2$  tal que  $(n+1)^2 - n \leq k < (n+1)^2$  en cuyo caso pondremos  $k' = k - (n+1)^2$  y  $w = [a^{n+1}, b^{n+1}] \cdot w'$ , donde  $w' = c^{k'}$  y  $l(w') \leq K\sqrt{n}$ .

**Afirmación 2.** Si  $w$  es una palabra en  $a$  y  $b$  (inversos incluidos) tales que  $w = c^k$  en  $G$  para algún  $k$ , entonces  $2\sqrt{|k|} \leq l(w)$ .

**Demostración de la afirmación 2:** Se hará por reducción al absurdo. Sea  $w$  de longitud mínima tal que  $w = c^k$  y  $l(w) < 2\sqrt{|k|}$ . Entre todas las palabras que minimizan  $l(w)$  elegimos una que maximice  $|k|$  (tal máximo no puede ser infinito porque sólo hay un número finito de palabras de una longitud determinada). Obsérvese que  $l(w) > 4$ . Como  $c$  está en el centro de  $G$ , la igualdad  $x \cdot y = c^k$  implica que  $y \cdot x = c^k$ . Por tanto (por una permutación cíclica) podemos suponer que  $w = a^{m(1)} \cdot b^{n(1)} \cdot \dots \cdot a^{m(s)} \cdot b^{n(s)}$ , donde todos los exponentes son no nulos y

$l(w) = \sum(|m(i)| + |n(i)|)$ . Obsérvese que  $\sum m(i) = \sum n(i) = 0$ . También podemos asumir  $k > 0$ .

La primera observación es que  $m(i) \cdot n(i) > 0$  para todo  $i$ . De hecho, si  $m(i) \cdot n(i) < 0$  para algún  $i$  podemos asumir que  $i = s$  sin pérdida de generalidad y observamos que  $a^{m(s)}b^{n(s)} = b^{n(s)}a^{m(s)}c^{m(s)n(s)}$ , así se puede encontrar o bien una palabra de menor longitud  $w'$  o bien un número mayor  $k' = k - m(s)n(s)$  que satisface  $w' = c^{k'}$ , lo que es una contradicción.

Del mismo modo el signo de  $m(i)$  no puede ser el mismo que el de  $m(i+1)$  para todo  $i$ . De hecho  $b^{n(i)}a^{m(i+1)} = c^{-n(i)m(i+1)}a^{m(i+1)}b^{n(i)}$  y como anteriormente obtenemos una contradicción.

Si ahora consideramos el mínimo valor absoluto de los exponentes  $m(i)$  y  $n(i)$ , entonces (salvo permutación cíclica) se puede expresar  $w$  como o bien  $x(a^u \cdot b^u \cdot a^{-u})y$  ó  $x(b^u \cdot a^{-u} \cdot b^{-u})y$  con  $l(w) = l(x) + l(y) + 3|u|$ . En el primer caso se tiene que  $a^u \cdot b^u \cdot a^{-u} = c^{u^2}b^u$ , así  $x \cdot b^u \cdot y = c^{k-u^2}$ . Y por inducción  $l(w) - 2|u| \geq 2\sqrt{|k - u^2|}$ , y así  $l(w) \geq 2|u| + 2\sqrt{|k - u^2|} \geq 2\sqrt{k}$ , lo que es una contradicción. El segundo caso es análogo.

Ahora  $d(c^m, c^n) = d(c^{m-n}, 1) \geq 2\sqrt{|m - n|}$  por la afirmación 2 y  $d(c^m, c^n) \leq K\sqrt{|m - n|}$  por la afirmación 1. Lo que significa que  $(\mathbb{Z}, d)$  es equivalente bi-Lipschitz a  $(\mathbb{Z}, \sqrt{|m - n|})$ . Como  $(\mathbb{Z}, \sqrt{|m - n|})$  es cuasi-simétricamente equivalente a  $(\mathbb{Z}, |m - n|)$  tendrá su misma dimensión de Assouad-Nagata.  $\square$

### 3.3. Grupos nilpotentes y dimensión de Assouad-Nagata

La idea de la demostración del teorema central de esta sección consiste en crear una métrica de forma inductiva. En cada paso construiremos una métrica nueva que satisfaga dos condiciones. La primera condición será que la nueva métrica no perturba una bola suficientemente grande de la métrica antigua. La segunda condición implica que existe una dilatación para una bola suficientemente grande de  $\mathbb{Z}^n$  en el grupo con la métrica nueva. De hecho tal dilatación será la restricción de un homomorfismo de la forma  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ . Entonces aplicaremos el corolario

2.1.12. El lema siguiente podría considerarse el paso de inducción.

**Lema 3.3.1.** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado tal que su centro no es localmente finito. Sea  $d_G$  una métrica propia invariante por la izquierda. En tal condición para cada  $k, m, R \in \mathbb{N}$  existe una métrica propia invariante por la izquierda  $d_\omega$  que satisface las siguientes condiciones:*

1.  $\|g\|_\omega \leq \|g\|_G$ .
2.  $\|g\|_G = \|g\|_\omega$  si  $\|g\|_\omega \leq R$ .
3. *Existe un homomorfismo  $f : \mathbb{Z}^m \rightarrow G$  tal que la restricción  $f|_{B(0,k)}$  de  $f$  a la bola de radio  $k$  es una dilatación en  $(G, d_\omega)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $k, m$  y  $R$  están dados y sea  $a$  y  $C$  dos números naturales que satisfacen:

$$R < C < \frac{a}{2 \cdot k \cdot m^2}.$$

Como el centro de  $G$  no es localmente finito existe un elemento  $g$  en el centro de orden infinito. La restricción de la métrica  $d_G$  al subgrupo generado por  $g$  define una métrica propia invariante por la izquierda en  $\mathbb{Z} = \langle g \rangle$ . Por el teorema 0.4.5 sabemos que dos métricas propias invariantes por la izquierda definidas en un grupo son equivalentes a gran escala, por tanto podemos encontrar un número entero  $h_1 \in \mathbb{Z}$  tal que si  $|h| \geq |h_1|$  entonces  $\|g^h\|_G \geq a$ . Sea  $p_1 = 1$  y para cada  $j = 2 \dots m$  definimos  $p_j$  como un número suficientemente grande que satisface  $\sum_{i=1}^{j-1} (2 \cdot k \cdot m) 2^{p_i} < 2^{p_j}$ . Tomamos ahora el conjunto finito de números enteros  $\{h_1, \dots, h_m\}$  con  $h_j = 2^{p_j} \cdot h_1$  para todo  $j = 2, \dots, m$ . En esta situación creamos la norma  $\|\cdot\|_\omega$  generada por el siguiente sistema de pesos:

$$\omega(z) = \begin{cases} \|z\|_G & \text{si } z \neq g^{\pm h_i} \text{ para todo } i = 1 \dots m \\ C & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por la elección de  $C$  y  $\{h_1, \dots, h_m\}$  resulta claro que las dos primeras condiciones del lema se satisfacen. Para demostrar la tercera condición definimos el homomorfismo  $f : \mathbb{Z}^m \rightarrow G$  como  $f(x_1, \dots, x_m) = g^h$  con  $h = \sum_{i=1}^m x_i \cdot h_i$ . Mostraremos

que la restricción  $f|_{B(0,k)} : B(0,k) \rightarrow G$  a la bola de radio  $k$  es una dilatación de constante  $C$ . Será suficiente comprobar que:

$$\|g^h\|_\omega = \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot C \text{ si } h = \sum_{i=1}^m x_i \cdot h_i \text{ y } |x_i| \leq k$$

El razonamiento será por contradicción. Supongamos que existe un elemento de la forma  $g^h$  con  $h = \sum_{i=1}^m x_i \cdot h_i$  y  $|x_i| \leq k$  tal que  $\|g^h\|_\omega < \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot C$ . Esto implica que existe un  $r = \sum_{i=1}^m y_i \cdot h_i$  y un  $s \in G$  tal que  $g^h = g^r \cdot s$  y además:

$$\|g^h\|_\omega = \sum_{i=1}^m |y_i| \cdot C + \|s\|_G.$$

Obsérvese que  $|y_i| \leq k \cdot m$ . Existen ahora dos casos posibles:

Caso  $s = 1_G$ : En esta situación tenemos que  $\sum_{i=1}^m |y_i| \cdot C < \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot C$  así que existe un  $i$  tal que  $x_i \neq y_i$ . Sea  $j = \max\{i | x_i \neq y_i\}$ . Del hecho de que  $g^h = g^r$  podemos deducir  $(x_j - y_j) \cdot h_j = \sum_{i=1}^{j-1} (y_i - x_i) \cdot h_i$  lo que significa que  $(x_j - y_j) \cdot 2^{p_j} \cdot h_1 = \sum_{i=1}^{j-1} (y_i - x_i) \cdot 2^{p_i} \cdot h_1$  y entonces:

$$2^{p_j} \leq |x_j - y_j| \cdot 2^{p_j} \leq \sum_{i=1}^{j-1} |y_i - x_i| \cdot 2^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{j-1} (|y_i| + |x_i|) \cdot 2^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{j-1} 2^{p_i} \cdot (k \cdot m + k) < 2^{p_j}$$

Lo que es una contradicción. Por tanto el primer caso no es posible.

Caso 2:  $s \neq 1_G$ . En este caso tenemos  $g^{(h-r)} = s$  y  $h - r \neq 0$  lo que implica  $|h - r| \geq |h_1|$  y así  $\|s\|_G \geq a$ . Pero del hecho de que  $\|g^h\|_\omega = \sum_{i=1}^m |y_i| \cdot C + \|s\|_G < \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot C$  podemos deducir:

$$a \leq \|s\|_G < \sum_{i=1}^m (|x_i| - |y_i|) \cdot C \leq \sum_{i=1}^m (k + k \cdot m) \cdot C \leq 2 \cdot k \cdot m^2 \cdot C.$$

Por tanto  $C \geq \frac{a}{2 \cdot k \cdot m^2}$  y esto contradice la elección de  $a$  y  $C$ . □

A continuación demostramos el teorema principal de esta sección.

**Teorema 3.3.2.** *Si  $G$  es un grupo tal que su centro no es localmente finito entonces existe una métrica propia invariante por la izquierda  $d_G$  tal que  $\text{asdim}_{AN}(G, d_G) = \infty$ .*

*Demostración.* Usaremos el corolario 2.1.12 y el lema anterior. Tomemos una métrica entera y propia invariante por la izquierda  $d$  en  $G$  y dos sucesiones crecientes  $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  y  $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de números naturales. Construiremos la métrica  $d_G$  del teorema mediante un procedimiento inductivo.

Paso 1: Aplicamos el lema anterior a  $d$  con  $k = k_1$ ,  $m = 1$  y  $R = M_1$ . Obtenemos así una métrica propia invariante por la izquierda  $d_{\omega_1}$  tal que la bola  $B_{\omega_1}(1_G, R_1)$  es igual a la bola de radio  $R_1$  de  $d$ . También existe una dilatación  $f : B(0, k_1) \rightarrow G$  de la bola de radio  $k_1$  de  $\mathbb{Z}$  a  $G$ .

Paso de inducción: Supongamos que hemos construido una sucesión finita de métricas propias invariantes por la izquierda  $L = \{d_{\omega_1}, \dots, d_{\omega_n}\}$  y una sucesión finita de números naturales  $R_1 < R_2 < \dots < R_n$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $\|g\|_{\omega_i} \leq \|g\|_{\omega_{i-1}}$ .
2.  $\|g\|_{\omega_i} = \|g\|_{\omega_{i-1}}$  si  $\|g\|_{\omega_i} \leq R_i$
3. Existe un homomorfismo  $f_i : \mathbb{Z}^i \rightarrow G$  tal que la restricción  $f_i|_{B(0, k_i)}$  es una dilatación en  $(G, d_{\omega_i})$  para todo  $i = 1, \dots, n$
4.  $\text{diam}(f_i(B(0, k_i))) < R_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, n - 1$

En estas condiciones definimos  $R_{n+1} = \max\{M_{n+1}, R_n + 1, \text{diam}(f_n(B(0, k_n)))\}$  y aplicamos el lema anterior a  $d_{\omega_n}$  con  $k = k_{n+1}$ ,  $m = n + 1$  y  $R = R_{n+1}$ . Tenemos así una nueva métrica propia invariante por la izquierda  $d_{\omega_{n+1}}$ . Resulta evidente que la nueva sucesión finita de métricas propias invariantes por la izquierda  $\{d_{\omega_{n+1}}\} \cup L$  y la nueva sucesión finita de números  $R_1 < R_2 < \dots < R_n < R_{n+1}$  satisface las mismas cuatro condiciones.

Repetiendo este procedimiento podemos construir una sucesión de métricas enteras propias e invariantes por la izquierda  $\{d_{\omega_i}\}_{i=1}^{\infty}$  y una sucesión de números naturales  $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ . De las dos primeras propiedades y el hecho de que  $\lim_{i \rightarrow \infty} R_i = \infty$  podemos deducir que para todo  $g \in G$  la sucesión  $\{\|g\|_{\omega_i}\}_{i=1}^{\infty}$  es constante asintóticamente. Definimos ahora la función  $\|\cdot\|_G : G \rightarrow \mathbb{N}$  de la forma  $\|g\|_G = \lim_{i \rightarrow \infty} \|g\|_{\omega_i}$ . Nuevamente por las dos primeras propiedades podemos ver que  $\|\cdot\|_G$  es una norma propia. Así esta norma define una métrica propia invariante por la

izquierda  $d_G$ . Usando la tercera y la cuarta propiedad tenemos que para todo  $i \in \mathbb{N}$  existe un homomorfismo  $f_i : \mathbb{Z}^i \rightarrow G$  tal que la restricción a la bola  $B(0, k_i)$  es una dilatación en  $(G, d_G)$ . Como en cada paso estamos incrementando la dimensión de las bolas tenemos que para todo  $m \in \mathbb{N}$  el espacio métrico  $(G, d_G)$  satisface las condiciones del corolario 2.1.12 y así tenemos  $asdim_{AN}(G, d_G) \geq m$ . Por tanto  $asdim_{AN}(G, d_G) = \infty$ .  $\square$

Recordamos que en [29] Dranishnikov y Smith demostraron que la dimensión asintótica de un grupo nilpotente finitamente generado era igual a su longitud de Hirsch. De este modo la dimensión asintótica de un grupo nilpotente siempre es finita para toda métrica propia invariante por la izquierda. El siguiente corolario trivial muestra que los únicos grupos nilpotentes que satisfacen la misma propiedad para dimensión asintótica de Assouad-Nagata son los finitos.

**Corolario 3.3.3.** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado y nilpotente.  $G$  no es finito si y solo si existe una métrica propia invariante por la izquierda  $d_\omega$  en  $G$  tal que  $asdim_{AN}(G, d_\omega) = \infty$ .*

*Demostración.* Una implicación es trivial ya que la dimensión de Assouad-Nagata de todo conjunto acotado es finita. La otra es simplemente un caso particular del teorema.  $\square$

## 3.4. Dimensión de Assouad-Nagata de espacios tipo árboles

### 3.4.1. Funciones coloreantes

Los espacios tipo-árboles fueron introducidos por Drutu y Sapir en [34] para el estudio de los grupos relativamente hiperbólicos. El principal interés de la noción de espacios tipo árboles reside en la siguiente caracterización de grupos relativamente hiperbólicos demostrada en el citado artículo: Un grupo finitamente generado  $G$  es relativamente hiperbólico con respecto a los subgrupos finitamente generados

$H_1, \dots, H_n$  si y solo si todo cono asintótico es tipo-árbol con respecto a los  $\omega$ -límites de las sucesiones de las clases de los subgrupos  $H_i$  [34].

Los espacios tipo árboles son generalizaciones de los  $\mathbb{R}$ -árboles y comparten muchas propiedades con los mismos. Surgen de forma natural como conos asintóticos de grupos. Una teoría de los grupos que actúan en los espacios tipo-árboles ha sido desarrollada recientemente por Drutu y Sapir en [35].

**Definición 3.4.1.** Sea  $X$  un espacio geodésico completo y sea  $\mathcal{P}$  una colección de subconjuntos cerrados geodésicamente (llamadas *piezas*) que recubren a  $X$ . Se dice que el espacio  $X$  es un espacio *tipo-árbol con respecto a  $\mathcal{P}$*  si las siguientes dos propiedades se satisfacen:

- ( $T_1$ ) Todo par de piezas tienen como mucho un punto en común.
- ( $T_2''$ ) Todo lazo simple (curva cerrada y simple) de  $X$  está contenido en una pieza.

Un ejemplo sencillo pero muy importante de espacio tipo-árbol es el grafo de Cayley del producto libre  $A*B$  de grupos finitamente generados cuando el conjunto de generadores de  $A*B$  es la unión de los conjuntos de generadores de  $A$  y  $B$ .

El principal resultado es el siguiente.

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $X$  un espacio geodésico tipo-árbol. Sea  $n$  un entero positivo y sean  $r$  y  $f(r) \geq r$  dos números reales positivos. Si cada pieza de  $X$  admite un  $(r, f(r))$ -recubrimiento  $n$ -dimensional entonces el espacio  $X$  admite un  $(r, 300 \cdot f(r))$ -recubrimiento  $n$ -dimensional.*

A partir de lo mencionado anteriormente como corolario importante y directo tenemos:

**Corolario 3.4.3.** *Sen dos grupos  $G$  y  $H$  finitamente generados e infinitos con métricas de la palabra. Se tiene que:*

$$\text{asdim}_{AN}(G * H) = \text{máx}\{\text{asdim}_{AN}(G), \text{asdim}_{AN}(H)\}$$

*Observaciones 3.4.4.* Obsérvese que también podemos deducir la fórmula del producto libre para la dimensión asintótica que Dranishnikov obtuvo en [11]

Pasemos a explicar la idea de la demostración. Sea  $X$  un espacio métrico geodésico que es tipo-árbol con respecto a una colección  $\mathcal{P} = \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de piezas. Fijamos un punto base  $\hat{x} \in X$ . Para cada pieza  $P$  hacemos que la proyección de  $\hat{x}$  en  $P$  sea el punto base de  $P$  (llamémosla  $x_P$ ). Cada pieza  $P$  admite un  $(r, f(r))$ -recubrimiento  $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{n+1} \mathcal{U}_i$   $n$ -dimensional y es fácil ver que tal recubrimiento puede hacerse disjunto i.e.  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Podemos así construir una *función coloreante*  $c_P: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$  usando  $n + 1$  colores tal que el punto base  $x_P$  tenga color 0. Esto se consigue mediante  $c_P(x) = i$  si  $x \in \mathcal{U}_i$ . Es más el hecho de que exista una función coloreante en un espacio  $P$  de la forma  $c_P: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$  tal que las  $r$ -componentes conexas de cada color están  $f(r)$ -acotadas es equivalente a que exista un  $(r, f(r))$ -recubrimiento  $n$ -dimensional. Por tanto nuestro objetivo será construir una función coloreante en  $X$  que satisfaga tal propiedad. Para ello utilizaremos la siguiente:

**Definición 3.4.5.** Sea  $\beta$  una geodésica en un espacio tipo árbol  $X$  que une un punto  $\beta_-$  con un punto  $\beta_+$ . Consideramos la estructura tipo-árbol inducida en  $\beta$ . Sea  $[\beta', \beta_+]$  la pieza de esta estructura que contiene  $\beta_+$ . Denotamos por  $[\beta]$  el subcamino de  $\beta$  que une  $\beta_-$  con  $\beta'$ .

La función coloreante que buscamos para el espacio  $X$  tendrá la forma siguiente:

$$c_X''(x) = \sum_P c_P(\pi_P(x)) + \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{|\beta_i|}{99 \cdot f(r)} \right\rfloor \pmod{n+1}$$

Donde  $|\cdot|$  denota la longitud y  $\lfloor a \rfloor$  la parte entera  $a$  cuando  $a$  se un número y no a un camino como en la definición anterior. El significado de los  $\beta_i$  se explicará en la sección 3.4.3.

### 3.4.2. Algunas propiedades de los espacios tipo-árbol

Recogemos en esta sección todas las propiedades de los espacios tipo-árboles que usaremos en la demostración de nuestro teorema principal.

**Lema 3.4.6 ([34, Proposición 2.17]).** *La condición  $(T_2'')$  en la definición de los espacios tipo-árboles puede reemplazarse por la siguiente condición:*

$(T_2')$  *Para todo arco topológico  $C: [0, d] \rightarrow X$  y  $t \in [0, d]$ , sea  $C[t - a, t + b]$  un sub-arco maximal de  $C$  que contiene a  $C(t)$  y está contenido en una pieza. Entonces cualquier otro arco topológico con los mismos puntos iniciales y finales de  $C$  debe contener los puntos  $C(t - a)$  y  $C(t + b)$ .*

Si  $X$  es tipo-árbol respecto a  $\mathcal{P}$  entonces siempre podemos añadir subconjuntos unipuntuales de  $X$  a  $\mathcal{P}$ , y así  $X$  será un espacio tipo-árbol con respecto a un conjunto más grande de piezas. Para evitar usar piezas extras suponemos que las piezas no pueden contener otras piezas.

Dada una geodésica  $\gamma$  en  $X$  y una pieza  $P$  de  $X$ , denotamos por  $\gamma_P$  la intersección de  $\gamma$  con  $P$ . Por [34, Corolario 2.10],  $\gamma_P$  es o bien vacío o un punto o subcamino cerrado de  $\gamma$ . Obsérvese que  $\gamma_P$  es una pieza de la estructura tipo-árbol inducida en  $\gamma$  por la estructura en  $X$ .

**Lema 3.4.7 ([34, Lema 2.6]).** *Sea  $X$  un espacio tipo-árbol y sea  $P$  una pieza de  $X$ . Para cada punto  $x \in X$  existe un único punto  $y \in P$  tal que  $d(x, P) = d(x, y)$ . Más aún, toda geodésica que una  $x$  con un punto de  $P$  contiene a  $y$ .*

**Definición 3.4.8.** El punto  $y$  en 3.4.7 se llama *la proyección de  $x$  en la pieza  $P$*  y se denota por  $\pi_P(x)$ .

Usaremos el siguiente lema varias veces en un contexto como el que sigue: Si  $d(x, y) \leq r$  y  $\pi_P(x) \neq \pi_P(y)$ , entonces  $d(x, P) \leq r$ .

**Lema 3.4.9 ([34, Lema 2.8]).** *Sea  $X$  un espacio tipo-árbol y  $P$  una pieza de  $X$ . Si  $x$  e  $y$  son dos puntos de  $X$  con  $d(x, y) \leq d(x, P)$ , entonces  $\pi_P(x) = \pi_P(y)$ .*

**Lema 3.4.10 ([34, Lema 2.20]).** *Sea  $X$  un espacio tipo-árbol y  $P$  una pieza de  $X$ . La proyección  $\pi_P: X \rightarrow P$  es una retracción 1-Lipschitz.*

**Lema 3.4.11.** *Sea  $X$  un espacio tipo-árbol y sea  $\{x_i\}_{i=0}^m$  una  $r$ -cadena de puntos en  $X$ . Sea  $\omega$  una geodésica que une  $x_0$  con  $x_m$ . Si  $P$  es una pieza de  $X$  tal que  $\omega_P \neq \emptyset$ , entonces  $\omega_P$  es un camino que une  $\omega_P^- = \pi_P(x_0)$  con  $\omega_P^+ = \pi_P(x_m)$  y*

existe un punto  $x_k$  de la cadena tal que  $\pi_P(x_k) = \omega_P^-$  y  $d(x_k, \omega_P^-) \leq r$ . Más aún, toda geodésica que une  $x_k$  con  $x_m$  pasa por  $\omega_P^-$ .

*Demostración.* Por 3.4.6, toda geodésica que une  $x_0$  con  $x_m$  atraviesa  $\omega_P^-$ . Consideremos el índice maximal  $k$  tal que toda geodésica que una  $x_k$  con  $x_m$  pase por  $\omega_P^-$  y  $\pi_P(x_k) = \omega_P^-$ . Si  $\pi_P(x_{k+1}) \neq \omega_P^-$ , entonces  $d(x_k, P) \leq r$  por 3.4.9; así  $d(x_k, \omega_P^-) = d(x_k, \pi_P(x_k)) = d(x_k, P) \leq r$ . Si existe una geodésica que una  $x_{k+1}$  con  $x_m$  y no pase a través de  $\omega_P^-$ , entonces por 3.4.6, toda geodésica que una  $x_k$  con  $x_{k+1}$  pasará por  $\omega_P^-$ . Como  $d(x_k, x_{k+1}) \leq r$ , tenemos que  $d(x_k, \omega_P^-) \leq r$ .  $\square$

### 3.4.3. Demostración del teorema de dimensión para espacios tipo-árbol

Introducimos a continuación algunas notaciones antes de definir la función coloreante  $c_X^*: X \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$  de  $X$ . Fijemos un punto base  $\hat{x} \in X$ . Para toda pieza  $P$  denotamos a la proyección  $\hat{x}$  de  $P$  ser el punto base de la pieza  $P$  ( lo llamaremos  $x_P$ ).

Como cada pieza  $P$  admite un  $(r, f(r))$ -recubrimiento  $n$ -dimensional, podemos fijar una función coloreante  $c'_P: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$  de  $P$  usando  $n + 1$  colores tal que las  $r$ -componentes de cada color están  $f(r)$ -acotadas. Llamaremos  $c_P$  la función coloreante de  $P$  que se obtiene a partir de  $c'_P$  al cambiar el color de un  $2r$ -entorno cerrado  $B(x_P, 2r)$  del punto base  $x_P$  al color 0. Observamos que ahora las  $r$ -componentes de cada  $c_P$ -color que no sea 0 están  $f(r)$ -acotadas y que las  $r$ -componentes del  $c_P$ -color igual 0 están  $8 \cdot f(r)$ -acotadas. Como la componente del punto  $x_P$  de  $c_P$ -color igual a 0 será de suma importancia en nuestra definición de la nueva función coloreante  $c_X^*$ , le daremos una notación especial  $\mathfrak{C}_P$ . Denotamos por  $\mathfrak{C}_P^o$  al subconjunto  $\mathfrak{C}_P \setminus \{x_P\}$ .

Dado un punto cualquiera  $x \in X$  consideramos la geodésica  $\gamma$  que une  $\hat{x}$  con  $x$ . La intersección  $\gamma_P$  de  $\gamma$  con una pieza  $P$  puede ser o vacía o un subcamino cerrado de  $\gamma$  que una  $x_P$  con  $\pi_P(x)$ .

**Definición 3.4.12.** Diremos que  $\gamma_P$  es un camino *corto* de  $\gamma$  si su punto final  $\pi_P(x)$  pertenece al conjunto  $\mathfrak{C}_P$ . De otra forma diremos que este subcamino de  $\gamma$

es largo.

Obsérvese que todo camino corto  $\gamma_P$  tiene longitud menor o igual que  $8 \cdot f(r)$  y que todo camino largo tiene longitud mayor que  $2r$ .

Para cada camino largo  $\gamma_P$  consideramos el camino  $\gamma'_P = \gamma_P \setminus B(x_P, r)$ . A tal camino se llamará *camino largo reducido*. Consideramos el complementario en  $\gamma$  de los interiores de todas los caminos largos reducidos de  $\gamma$ . Como sólo existen un número finito de caminos largos de  $\gamma$ , este complementario es una unión de sub-caminos cerrados  $\{\beta_i\}_{i=1}^k$  de  $\gamma$ . Usando la definición 3.4.5, construimos la función coloreante de  $X$  de la siguiente manera :

$$c_X^*(x) = \sum_P c_P(\pi_P(x)) + \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{|\beta_i|}{99 \cdot f(r)} \right\rfloor \pmod{n+1}$$

Es fácil comprobar usando 3.4.6 que el color  $c_X^*(x)$  no depende de la elección de la geodésica  $\gamma$  que una  $\hat{x}$  con  $x$ . El siguiente lema dice que (excepto posiblemente en el punto base  $x_P$ ) la función coloreante  $c_X^*$  difiere de la función coloreante  $c_P$  por una constante modulo  $n+1$ .

**Lema 3.4.13.** *Para toda pieza  $P$  del espacio tipo-árbol  $X$  tenemos que o bien*

$$c_X^*|_{P \setminus x_P} = c_P + c_X^*(x_P) \pmod{n+1}$$

ó

$$c_X^*|_{P \setminus x_P} = c_P + c_X^*(x_P) + 1 \pmod{n+1}$$

*En particular, en toda pieza  $P$  las  $r$ -componentes de cada  $c_X^*$ -color están  $8 \cdot f(r)$ -acotadas.*

*Demostración.* Fijemos una pieza  $Q$  de  $X$ , un punto  $x \in Q \setminus \{x_Q\}$ , y una geodésica  $\gamma$  que una  $\hat{x}$  con  $x$ . Claramente  $\sum_P c_P(\pi_P(x)) = c_Q(x) + \sum_{P \neq Q} c_P(\pi_P(x))$  y la primera suma en la definición de la función coloreante  $c_X^*$  cambia  $c_Q(x)$  cuando nos movemos de  $x_Q$  hacia  $x$ . Si el camino  $\gamma_{Q-1}$  que conecta la pieza que contiene a  $x_Q$  y a la porción inmediata de geodésica es largo, entonces  $c_X^*(x) = c_Q(x) + c_X^*(x_Q) \pmod{n+1}$  porque la segunda suma en la definición de la función coloreante  $c_X^*$  tiene el mismo valor para los puntos  $x$  y  $x_Q$ . Si el camino  $\gamma_{Q-1}$

es corto, entonces la segunda suma en la definición de la función coloreante  $c_X^*$  podría cambiar el valor. Como la distancia desde  $x_Q$  hasta el extremo final del  $\beta_i$  contenido en  $Q$  está acotada por  $8 \cdot f(r) < 99 \cdot f(r)$ , la segunda suma podría cambiar el valor como mucho en uno.  $\square$

El siguiente lema afirma que el valor de la función  $c_X^*$ -colorerante del  $r$ -entorno de cada pieza  $P$  ( excepto para el  $r$ -entorno del conjunto  $\mathfrak{C}_P$ ) está determinada por el valor de la función  $c_X^*$ -coloreante de la pieza  $P$ .

**Lema 3.4.14.** *Si  $d(x, P) \leq r$  y  $\pi_P(x) \notin \mathfrak{C}_P$ , entonces  $c_X^*(x) = c_X^*(\pi_P(x))$ .*

*Demostración.* Si  $\gamma$  es una geodésica que une  $\hat{x}$  con  $x$ , entonces pasa por ambos  $x_P$  y  $\pi_P(x)$  (obsérvese que  $x_P \neq \pi_P(x)$ ). Como el subcamino  $\beta$  de  $\gamma$  que une  $\pi_P(x)$  con  $x$  tiene longitud  $\leq r$ , no puede contener un camino largo de  $\gamma$ , por tanto la primera suma en la definición de la función coloreante  $c_X^*$  da el mismo valor para  $\pi_P(x)$  y para  $x$ . Como el subcamino de  $\gamma$  que une  $x_P$  con  $\pi_P(x)$  es largo, la contribución al subcamino  $\beta$  de la segunda suma en la definición de la función coloreante  $c_X^*$  cumple que  $\left\lfloor \frac{\|\beta\|}{99 \cdot f(r)} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{r}{99 \cdot f(r)} \right\rfloor = 0$ .  $\square$

**Lema 3.4.15.** *Si una  $r$ -cadena de puntos  $\{x_i\}_{i=0}^m$  en  $X$  del mismo  $c_X^*$ -color  $\mathfrak{c}$  conecta dos puntos  $x = x_0$  e  $y = x_m$  de la misma pieza  $P$  de  $X$ , entonces  $\{\pi_P(x_i)\}_{i=0}^m$  es una  $r$ -cadena de puntos del mismo  $c_X^*$ -color  $\mathfrak{c}$  que conecta  $x$  e  $y$  en  $P$  supuesto que ninguno de los puntos  $\pi_P(x_i)$  pertenezca a  $\mathfrak{C}_P$ .*

*Demostración.* Por 3.4.10, la proyección  $\pi_P$  no aumenta las distancias, así la  $\pi_P$ -imagen de toda  $r$ -cadena es una  $r$ -cadena .

Demostraremos que  $c_X^*(\pi_P(x_k)) = \mathfrak{c}$  por inducción en  $k$ . Obviamente,  $\pi_P(x_0) = x_0$  y  $c_X^*(\pi_P(x_0)) = c_X^*(x_0) = \mathfrak{c}$ . Si  $d(x_k, P) \leq r$ , entonces  $c_X^*(x_k) = c_X^*(\pi_P(x_k))$  por 3.4.14. Si  $d(x_k, P) > r$ , entonces  $\pi_P(x_k) = \pi_P(x_{k-1})$  por 3.4.9. Así  $c_X^*(\pi_P(x_k)) = c_X^*(\pi_P(x_{k-1})) = \mathfrak{c}$ .  $\square$

**Lema 3.4.16.** *Si dos puntos  $x$  e  $y$  de una pieza  $P$  tienen el mismo  $c_X^*$ -color y pueden conectarse por una  $r$ -cadena de ese  $c_X^*$ -color en  $X$ , entonces  $d(x, y) \leq 36 \cdot f(r)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $d(x, y) > 36 \cdot f(r)$ . Entonces al menos uno de los puntos  $x$  ó  $y$  (supongamos  $x$ ) está a distancia  $> 18 \cdot f(r)$  del punto base  $x_P$  de la pieza  $P$ . Sea  $\{x_i\}_{i=0}^m$  una  $r$ -cadena de puntos en  $X$  del mismo  $c_X^*$ -color que conecta los puntos  $x = x_0$  e  $y = x_m$ . Por 3.4.10, la cadena  $\{\pi_P(x_i)\}_{i=0}^m$  es también una  $r$ -cadena que conecta los puntos  $x$  e  $y$  en  $P$ .

Si ninguno de los puntos  $\pi_P(x_i)$  pertenece a  $\mathfrak{C}_P$ , entonces todos los puntos de la cadena  $\{\pi_P(x_i)\}_{i=0}^m$  tienen el mismo  $c_X^*$ -color por 3.4.15. Así los puntos  $x$  e  $y$  pertenecen a una  $r$ -componente de ese color en  $P$ . Por tanto  $d(x, y) \leq 8 \cdot f(r)$  por 3.4.13. Si existe un punto  $x_i$  con  $\pi_P(x_i) \in \mathfrak{C}_P$ , consideramos el siguiente número

$$k = \text{máx}\{l \mid \pi_P(x_i) \notin \mathfrak{C}_P \text{ para todo } i \leq l\}$$

Como  $d(x_k, x_{k+1}) \leq r$  y  $\pi_P(x_k) \neq \pi_P(x_{k+1})$ , tenemos que  $d(x_k, P) \leq r$  por 3.4.9. Como  $\pi_P(x_k) \notin \mathfrak{C}_P$ , tenemos que  $c_X^*(x_k) = c_X^*(\pi_P(x_k))$  por 3.4.14. Entonces todos los puntos de la cadena  $\{\pi_P(x_i)\}_{i=0}^k$  que conecta  $x$  con  $\pi_P(x_k)$  tienen el mismo  $c_X^*$ -color por 3.4.15. Por tanto  $d(x, \pi_P(x_k)) \leq 8 \cdot f(r)$  por 3.4.13. Así  $d(x, x_P) \leq d(x, \pi_P(x_k)) + d(\pi_P(x_k), \pi_P(x_{k+1})) + d(\pi_P(x_{k+1}), x_P) \leq 8 \cdot f(r) + r + 8 \cdot f(r) \leq 17 \cdot f(r)$  lo que contradice  $d(x, x_P) > 18 \cdot f(r)$ .  $\square$

**Lema 3.4.17.** *Sea  $x$  un punto en  $X$  y sea  $\gamma$  una geodésica que une  $\hat{x}$  con  $x$ . Supongamos que existe una  $r$ -cadena  $\{x_i\}_{i=0}^m$  desde  $x = x_0$  al punto  $x_m \in \gamma$  tal que todos los puntos de la cadena, excepto posiblemente  $x_m$ , tienen el mismo  $c_X^*$ -color  $\mathfrak{c}$ . Denotamos por  $\gamma'$  el subcamino de  $\gamma$  entre  $x$  y  $x_m$ . Supongamos que si una pieza larga  $\gamma_P$  de  $\gamma$  interseca  $\gamma'$ , entonces o bien  $\gamma_P \subset \gamma'$  ó  $\gamma_P \cap \gamma' = x_m$ . Entonces  $d(x, x_m) \leq 140 \cdot f(r)$ .*

*Demostración.* Consideramos el complementario en  $\gamma$  de los interiores de todas los caminos largos de  $\gamma$ . Como existen solo un número finito de caminos largos de  $\gamma$ , este complemento es la unión de subcaminos cerrados  $\{\beta_i\}_{i=1}^k$  de  $\gamma$ .

**Afirmación 1.** Todo subcamino  $\beta'$  de una intersección  $\beta_i \cap \gamma'$  de longitud  $|\beta'| > 10 \cdot f(r)$  contiene un punto de color  $\mathfrak{c}$ .

*Demostración de la afirmación 1.* Denotamos por  $y$  el punto final de  $\beta'$  más cercano a  $x_m$ . Sea  $\gamma_P$  un subcamino corto de  $\gamma$  que contiene al punto  $y$ . La intersección  $\gamma_P \cap \beta'$  es un subcamino de  $\beta'$  con puntos finales  $y$  e  $y'$ . Como  $\gamma_P$  es

corto,  $d(y, y') \leq 8 \cdot f(r)$ . Por 3.4.11, existe un elemento  $x_t$  de la  $r$ -cadena tal que  $d(x_t, y') \leq r$  y toda geodésica que una  $x_t$  con  $x_m$  pasa por  $y'$ . La única razón para que el punto  $y'$  tenga  $c_X^*$ -color diferente al de  $c_X^*(x_t) = \mathbf{c}$  podría ser debida al cambio en la segunda suma de la definición de la función  $c_X^*$ -coloreante cuando vamos de  $y'$  a  $x_t$ . Supongamos que tal cambio sucede. Entonces el mismo cambio ocurrirá si vamos desde  $y'$  por  $\beta'$  debido a la distancia  $d(x_t, y') \leq r$  llegando así a un punto de  $\beta'$  de color  $\mathbf{c}$ .

**Afirmación 2.** Si existe un camino largo  $\gamma_Q$  contenido en  $\gamma'$ , entonces  $|\gamma_Q| \leq 17 \cdot f(r)$ , es el único camino largo de  $\gamma$  en  $\gamma'$ , y el punto  $x_m$  está a distancia menor que  $10 \cdot f(r)$  de  $\gamma_Q$ .

*Demostración de la afirmación 2.* Llamamos  $y$  al punto  $\pi_Q(x)$ . Por 3.4.11, existe un elemento  $x_k$  de la  $r$ -cadena tal que  $d(x_k, y) \leq r$  y existe un elemento  $x_l$  de la  $r$ -cadena tal que  $d(x_l, x_Q) \leq r$ . Por 3.4.14,  $c_X^*(y) = c_X^*(x_k) = \mathbf{c}$ . Denotamos por  $H$  la  $r$ -cadena  $y, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, x_l, x_Q$ . Por 3.4.10, la proyección  $\pi_Q(H)$  es también una  $r$ -cadena de  $y$  hacia  $x_Q$ . Consideramos el primer punto  $x_s$  de la cadena  $H$  tal que  $\pi_Q(x_s) \in \mathfrak{C}_Q$ . Por 3.4.9,  $d(x_{s-1}, Q) \leq r$  y por 3.4.14,  $c_X^*(\pi_Q(x_{s-1})) = c_X^*(x_{s-1}) = \mathbf{c}$ . Por tanto  $y, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}, \pi_Q(x_{s-1})$  es una  $r$ -cadena de color  $\mathbf{c}$ . Por 3.4.15, la cadena  $y, \pi_Q(x_{k+1}), \dots, \pi_Q(x_{s-1}), \pi_Q(x_{s-1})$  es también una  $r$ -cadena de color  $\mathbf{c}$  (así por 3.4.13,  $d(y, \pi_Q(x_{s-1})) \leq 8 \cdot f(r)$ ). Si el conjunto  $\mathfrak{C}_Q^\circ$  tuviese  $c_X^*$ -color igual a  $\mathbf{c}$ , la cadena  $y, \pi_Q(x_{k+1}), \dots, \pi_Q(x_{s-1}), \pi_Q(x_s)$  mostraría que el punto  $y$  pertenece a  $\mathfrak{C}_Q$  contradiciendo la definición de camino largo. Así,  $c_X^*(\mathfrak{C}_Q^\circ) \neq \mathbf{c}$ . Como nos movemos por una geodésica desde el punto  $\pi_Q(x_s)$  al punto  $x_s$ , el  $c_X^*$ -color cambia de  $c_X^*(\pi_Q(x_s)) = c_X^*(\mathfrak{C}_Q^\circ)$  a  $c_X^*(x_s) = \mathbf{c}$ . La única razón posible para este cambio es debida al cambio en el segundo sumando de la definición de la función  $c_X^*$ -coloreante. Por tanto  $c_X^*(\mathfrak{C}_Q) = \mathbf{c} - 1 \pmod{n+1}$  y el camino largo  $\gamma_Q$  es precedido por algún  $\beta_j$  de longitud al menos  $99 \cdot f(r) - d(\pi_Q(x_s), x_Q) \geq 90 \cdot f(r)$ . Esto entra en contradicción con la afirmación 1, a menos que  $d(x_m, x_Q) < 10 \cdot f(r)$ . Ahora podemos estimar  $|\gamma_Q| = d(y, x_Q) \leq d(y, \pi_Q(x_{s-1})) + d(\pi_Q(x_{s-1}), \pi_Q(x_s)) + d(\pi_Q(x_s), x_Q) \leq 8 \cdot f(r) + r + \text{diam}(\mathfrak{C}_Q) \leq 17 \cdot f(r)$ .

Finalizamos a continuación la demostración del lema. Si  $\gamma'$  no contiene un camino largo, está contenido en algún  $\beta_i$  y por la afirmación 1 no puede contener

subcaminos de un color que no sea  $\mathfrak{c}$  de longitud mayor que  $10 \cdot f(r)$ . Por la definición de función coloreante  $c_X^*$ , el color de  $\beta_i$  cambia con periodicidad  $99 \cdot f(r)$ . Así  $\gamma'$  no puede ser mayor que  $(10 + 99 + 10) \cdot f(r)$ .

Si  $\gamma'$  contiene un camino largo  $\gamma_Q$ , entonces  $d(x, x_m) = d(x, \pi_Q(x)) + |\gamma_Q| + d(x_Q, x_m)$ . Por la afirmación 2, el subcamino de  $\gamma$  entre los puntos  $x$  y  $\pi_Q(x)$  no contiene un camino largo y cambia el color con periodicidad  $99 \cdot f(r)$ . Por la afirmación 1, este subcamino no puede ser mayor que  $(10 + 99) \cdot f(r)$ . Por la afirmación 2,  $|\gamma_Q| \leq 17 \cdot f(r)$  y  $d(x_Q, x_m) \leq 10 \cdot f(r)$ . Finalmente,

$$d(x, x_m) \leq (10 + 99) \cdot f(r) + 17 \cdot f(r) + 10 \cdot f(r) < 140 \cdot f(r).$$

□

El resto de esta sección se dedica a la demostración de que las  $r$ -componentes en  $X$  de cada  $c_X^*$ -color están  $300 \cdot f(r)$ -acotadas. Consideramos dos puntos  $x'$  y  $x''$  en  $X$ . Supongamos que estos puntos tienen el mismo  $c_X^*$ -color que denotaremos por  $\mathfrak{c}$ . Supongamos además que existe una  $r$ -cadena  $\{x_i\}_{i=0}^l$  de color  $\mathfrak{c}$  que une  $x' = x_0$  con  $x'' = x_l$ . Nuestro objetivo es mostrar que  $d(x', x'') \leq 300 \cdot f(r)$ .

Si los puntos  $x'$  e  $x''$  pertenecen a una misma pieza, entonces  $d(x', x'') \leq 36 \cdot f(r)$  por 3.4.16.

Supongamos que el punto base  $\hat{x}$  del espacio  $X$  y uno de los puntos  $x'$  ó  $x''$  (supongamos  $x''$ ) pertenecen a una pieza  $Q$ . Denotemos por  $z'$  el punto  $\pi_Q(x')$ . Consideremos el siguiente número  $k = \max\{l \mid \pi_Q(x_i) = z' \text{ para todo } i \leq l\}$ . Por 3.4.9,  $d(x_k, z') \leq r$ . Por la definición de la función coloreante  $c_X^*$ , tenemos que

$$\mathfrak{c} = c_X^*(x_k) = c_Q(\pi_Q(x_k)) + \left\lfloor \frac{|\beta|}{99 \cdot f(r)} \right\rfloor = c_Q(z') + 0 = c_X^*(z')$$

donde  $\beta$  es la parte de la geodésica de  $\hat{x}$  a  $x_k$  entre  $z'$  y  $x_k$ . Por tanto la cadena  $x' = x_0, x_1, \dots, x_k, z', x_k, x_{k+1}, \dots, x_m = x''$  es una  $r$ -cadena de color  $\mathfrak{c}$ . Por 3.4.17,  $d(x', z') \leq 140 \cdot f(r)$ . por 3.4.16,  $d(z', x'') \leq 36 \cdot f(r)$ . De este modo,  $d(x', x'') \leq d(x', z') + d(z', x'') \leq 200 \cdot f(r)$ .

Supongamos ahora que ninguna pareja de puntos de  $x'$ ,  $x''$ ,  $\hat{x}$  pertenece a la misma pieza. Sea  $\gamma'$  (resp.  $\gamma''$ ) una geodésica desde  $\hat{x}$  a  $x'$  (resp.  $x''$ ). Sea  $\omega$  una geodésica desde  $x'$  hasta  $x''$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada

par de estas geodésicas intersecan en un subcamino común. Sea  $x'$  y  $y'$  (resp.  $x''$  y  $y''$ ) los puntos finales de la intersección  $\gamma' \cap \omega$  (resp.  $\gamma'' \cap \omega$ ). Sea  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  los puntos finales de la intersección  $\gamma' \cap \gamma''$ .

Supongamos  $y' = y''$  y la pieza de  $\omega$  que contiene el punto  $y'$  es igual a  $y'$ . Por 3.4.11, existe un elemento  $x_k$  de la  $r$ -cadena tal que  $d(x_k, y') \leq r$ . Entonces tenemos las  $r$ -cadenas  $x' = x_0, \dots, x_k, y'$  y  $y', x_k, x_{k+1}, \dots, x_m = x''$ . Por 3.4.17,  $d(x', y') \leq 140 \cdot f(r)$  y  $d(y', x'') \leq 140 \cdot f(r)$ . Así  $d(x', x'') \leq 280 \cdot f(r)$ .

Supongamos  $y' \neq y''$ . Entonces existe un camino cerrado simple formado por partes de las geodésicas  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ , y  $\omega$  entre los puntos  $y'$ ,  $y''$ , y  $\hat{y}$ . Por 3.4.1, este camino cerrado pertenece a una pieza  $Q$ . Consideramos también aquí la posibilidad restante de que  $y' = y''$  y este punto pertenezca a una pieza no trivial  $\omega_Q$  de la geodésica  $\omega$ .

Denotamos por  $z' = \pi_Q(x')$  y  $z'' = \pi_Q(x'')$  los puntos finales de la pieza  $\omega_Q$ . Entonces

$$d(x', x'') = d(x', z') + d(z', z'') + d(z'', x'')$$

Por 3.4.11, existe un punto  $x_k$  de la cadena que une  $x'$  con  $x''$  la cual está  $r$ -cercana a  $z'$ . Por 3.4.17,  $d(x', z') \leq 140 \cdot f(r)$ . De manera análoga,  $d(z'', x'') \leq 140 \cdot f(r)$ .

Estimamos ahora  $d(z', z'')$ . Por 3.4.11, existe un punto  $x_k$  de la cadena tal que  $\pi_Q(x_k) = z'$  y  $d(x_k, z') \leq r$ . Del mismo modo, existe un punto  $x_l$  de la cadena tal que  $\pi_Q(x_l) = z''$  y  $d(x_l, z'') \leq r$ . Así tenemos una  $r$ -cadena  $z', x_k, x_{k+1}, \dots, x_l, z''$ . Denotemos esta cadena por  $H$ . Si ambos puntos  $z'$  y  $z''$  pertenecen a  $\mathfrak{C}_Q$ , entonces  $d(z', z'') \leq 8 \cdot f(r)$ . Si los puntos  $z'$  y  $z''$  no pertenecen a  $\mathfrak{C}_Q$ , entonces  $c_X^*(z') = c_X^*(x_k) = \mathfrak{c}$  y  $c_X^*(z'') = c_X^*(x_l) = \mathfrak{c}$  por 3.4.14; por tanto  $d(z', z'') \leq 36 \cdot f(r)$  por 3.4.16.

Solo falta considerar el caso cuando uno de los puntos  $z'$ ,  $z''$  (supongamos  $z''$ ) pertenece a  $\mathfrak{C}_Q$  y el otro punto no pertenece a  $\mathfrak{C}_Q$ . Por 3.4.10, la proyección  $\pi_Q(H)$  es también una  $r$ -cadena de  $z'$  a  $z''$ . Consideremos el primer punto  $x_s$  de la cadena  $H$  tal que  $\pi_Q(x_s) \in \mathfrak{C}_Q$ . Por 3.4.9,  $d(x_{s-1}, Q) \leq r$  y por 3.4.14,  $c_X^*(\pi_Q(x_{s-1})) = c_X^*(x_{s-1}) = \mathfrak{c}$ . Por tanto  $z', x_k, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}, \pi_Q(x_{s-1})$  es una  $r$ -cadena de color  $\mathfrak{c}$ . Por 3.4.15, la cadena  $z', \pi_Q(x_k), \pi_Q(x_{k+1}), \dots, \pi_Q(x_{s-1}), \pi_Q(x_{s-1})$  es también una  $r$ -cadena de color  $\mathfrak{c}$  (así por 3.4.13,  $d(z', \pi_Q(x_{s-1})) \leq 8 \cdot f(r)$ ). Ahora podemos

estimar  $d(z', z'') \leq d(z', \pi_Q(x_{s-1})) + d(\pi_Q(x_{s-1}), \pi_Q(x_s)) + d(\pi_Q(x_s), z'') \leq 8 \cdot f(r) + r + \text{diam}(\mathfrak{C}_Q) \leq 17 \cdot f(r)$ .

Y finalmente,

$$d(x', x'') = d(x', z') + d(z', z'') + d(z'', x'') \leq 140 \cdot f(r) + 17 \cdot f(r) + 140 \cdot f(r) < 300 \cdot f(r).$$

### 3.5. Grupos con conos ultramétricos

Nos preguntamos en esta sección sobre la existencia de un grupo finitamente generado con una métrica propia invariante por la izquierda de dimensión de Assouad-Nagata infinita y tal que todos sus conos asintóticos sean de dimensión cero, en particular espacios ultramétricos. Para la construcción de tales ejemplos necesitamos el siguiente resultado de [18].

**Teorema 3.5.1.** *(Brodskiy, Dydak y Lang [18]) Supongamos que  $H$  y  $G$  son grupos finitamente generados y que  $K$  es el núcleo de la proyección de  $H \wr G \rightarrow G$  equipada con la métrica inducida de  $H \wr G$ . Si  $\gamma$  es la función de crecimiento de  $G$  y  $D_K^{n-1}$  es una función de control  $n-1$ -dimensional de  $K$ , entonces la parte entera de  $\frac{\gamma(r)}{n}$  es como mucho  $D_K^{n-1}(3 \cdot n \cdot r)$ .*

Para construir los ejemplos necesitaremos el siguiente lema:

**Lema 3.5.2.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $\text{asdim}_{AN}(X, \log(1+d)) \leq n$  entonces existe un función de control  $n$ -dimensional de  $(X, d)$  de tipo polinomial.*

*Demostración.* Supongamos  $\text{asdim}_{AN}(X, \log(1+d)) \leq n$ . Esto implica que existe una función de control  $n$ -dimensional de tipo lineal  $D_X^n(s) = C \cdot s + b$  del espacio  $(X, \log(1+d))$  con  $C$  y  $b$  dos constantes fijadas. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $C \in \mathbb{N}$ . Ahora, la identidad  $(X, d|_x) \rightarrow (X, \log(1+d))$  es claramente una equivalencia a gran escala con  $\rho_+(d) = \log(1+d) = \rho_-(d)$ . Por la proposición 0.1.8 obtenemos que la función  $Q_X^n = \rho_-^{-1} \circ D_X^n \circ \rho_+$  es una función de control  $n$ -dimensional de  $(X, d)$ . Esto implica que  $Q_X^n(s) = (10^b \cdot (1+s))^C - 1$ . Y por tanto existe una función de control  $n$ -dimensional de tipo polinomial de  $(X, d)$ .  $\square$

El siguiente resultado nos da el método para construir los ejemplos buscados.

**Teorema 3.5.3.** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado de crecimiento exponencial y sea  $H$  un grupo finito. Supongamos que  $d$  es una métrica de la palabra de  $H \wr G$  entonces:*

1. *Todos los conos asintóticos de  $(H \wr G, \log(1 + d))$  son ultramétricos.*
2.  $\text{asdim}_{AN}(H \wr G, \log(1 + d)) = \infty$ .

*Demostración.* La primera afirmación es una consecuencia de la proposición 2.2.2. De hecho se puede ver fácilmente que si la métrica  $D(x, y)$  de  $X$  es de la forma  $D(x, y) = \log(1 + d(x, y))$  donde  $d(x, y)$  es otra métrica entonces  $\epsilon(d) = \frac{\log(2)}{\log(\frac{d}{2}+1)}$  satisface las condiciones de la proposición.

La segunda afirmación es consecuencia del lema 3.5.2 y el teorema 3.5.1. La demostración es por contradicción. Supongamos que  $\text{asdim}_{AN}(H \wr G, \log(1 + d)) \leq n$ . Por el lema 3.5.2 tenemos que existe una función de control  $n$ -dimensional de tipo polinomial de  $(H \wr G, d)$  y entonces existirá un función de control  $n$ -dimensional de tipo polinomial del núcleo  $K \subset H \wr G$  con la métrica restringida. Pero como el crecimiento de  $G$  es exponencial por el teorema 3.5.1 toda función de control  $n$ -dimensional de  $(K, d|_K)$  debe ser de tipo al menos exponencial lo cual es una contradicción.  $\square$

*Observaciones 3.5.4.* Como los espacios métricos  $(H \wr G, d)$  y  $(H \wr G, \log(1 + d))$  son equivalentes a gran escala entonces ambos tienen que tener la misma dimensión asintótica. Por tanto podemos suponer que el grupo  $(H \wr G, \log(1 + d))$  tiene dimensión asintótica finita. El siguiente ejemplo muestra este caso.

*Ejemplo 3.5.5.* Sea  $G = F_2$  el grupo libre generado por dos elementos y sea  $H = \mathbb{Z}_2$ . Para toda métrica de la palabra  $d$  en  $\mathbb{Z}_2 \wr F_2$  tenemos  $\text{asdim}(\mathbb{Z}_2 \wr F_2, d) = 1$  y tal grupo satisface las condiciones del teorema anterior.

Resulta evidente que el núcleo  $K$  de la proyección  $H \wr G \rightarrow G$  es un grupo localmente finito cuando  $H$  es finito. De la demostración de 3.5.3 obtendremos fácilmente:

**Corolario 3.5.6.** *Existe grupos localmente finito  $K$  con una métrica propia invariante por la izquierda  $d_K$  tal que  $\text{asdim}_{AN}(K, d_K) = \infty$  y todos los conos asintóticos son ultramétricos.*

## Capítulo 4

# Clasificación a gran escala de grupos numerables

Uno de los problemas más importantes en la teoría geométrica de grupos es la clasificación salvo cuasi-isometrías de los grupos finitamente generados con métricas de la palabra ([42]). Tal problema ha sido resuelto en algunos casos particulares como por ejemplo algunos grupos metabelianos ([70]), los grupos de *lamplighter* ([37]). El problema general está aún abierto incluso para grupos nilpotentes.

Para grupos finitamente generados y abelianos la solución es muy fácil: dos grupos finitamente generados son cuasi-isométricos si y solo si tienen el mismo rango libre de torsión. De hecho a partir de un resultado de Gromov [40], sobre la caracterización de los grupos con crecimiento polinomial, y la fórmula de Bass [8] se puede deducir fácilmente (!) un teorema de rigidez para grupos virtualmente abelianos: Un grupo finitamente generado  $G$  es cuasi-isométrico a un grupo abeliano si y solo si  $G$  es virtualmente abeliano. Recordamos que un grupo es *virtualmente abeliano* o abeliano-por-finito si contiene un grupo abeliano de índice finito. De hecho se dice que un grupo  $G$  es  $\mathcal{P}_1$ -por- $\mathcal{P}_2$  donde  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  son dos propiedades de los grupos, si  $G$  contiene un subgrupo normal  $H$  con la propiedad  $\mathcal{P}_1$  cuyo grupo cociente  $G/H$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}_2$ . Un grupo  $G$  tiene una propiedad  $\mathcal{P}$  *localmente* si cada subgrupo finitamente generado de  $G$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ .

Para los grupos numerables la clasificación interesante a estudiar sería la clasi-

ficación salvo equivalencias a gran escala. Observamos que una clasificación a gran escala de los grupos finitamente generados con métricas propias invariantes por la izquierda es equivalente a una clasificación salvo cuasi-isometrías de los grupos finitamente generados con métricas de la palabra. La razón de este hecho sería que los espacios son cuasi-geodésicos.

El propósito de este capítulo es estudiar la clasificación salvo equivalencias a gran escala de los grupos numerables. El principal resultado de este capítulo y, a nuestro juicio, uno de los más importantes del libro es el siguiente:

**Teorema 4.0.7.** *Sean  $G, H$  dos grupos abelianos numerables con métricas propias invariantes por la izquierda, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Los espacios métricos  $G, H$  son equivalentes a gran escala;*
2.  *$\text{asdim}(G) = \text{asdim}(H)$  y los espacios  $G, H$  son o ambos conexos a gran escala o ambos no conexos a gran escala;*
3.  *$r_0(G) = r_0(H)$  y los grupos  $G, H$  son ambos finitamente-generados o ambos no finitamente generados.*

Resulta interesante resaltar que las dos primeras condiciones en este teorema tienen naturaleza métrica y siguen siendo ciertas para espacios métricos que son equivalentes a grupos abelianos. Para tales espacios el Teorema 4.0.7 implica la siguiente clasificación:

**Corolario 4.0.8.** *Si un espacio métrico  $X$  de dimensión asintótica  $n = \text{asdim}(X)$  es equivalente a gran escala a un grupo abeliano numerable, entonces  $X$  es equivalente a gran escala a*

- $\mathbb{Z}^n$  si y solo si  $X$  es conexo a gran escala;
- $\mathbb{Z}^n \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  si y solo si  $X$  es no conexo a gran escala.

En vista de estos resultados podemos plantearnos el siguiente problema,

**Problema 4.0.9.** Detectar grupos numerables que sean equivalentes a gran escala a grupos abelianos.

Mostraremos que la clase de tales grupos contiene todos los grupos abelianos-por-finito y todos los grupos finito-por-abeliano. Para todo grupo localmente nilpotente y no-distorsionado demostraremos que el converso también es cierto. La clase de los grupos no-distorsionados contiene también todos los grupos localmente abelianos-por-finito y todos los grupos localmente policíclicos-por-finitos de dimensión asintótica finita.

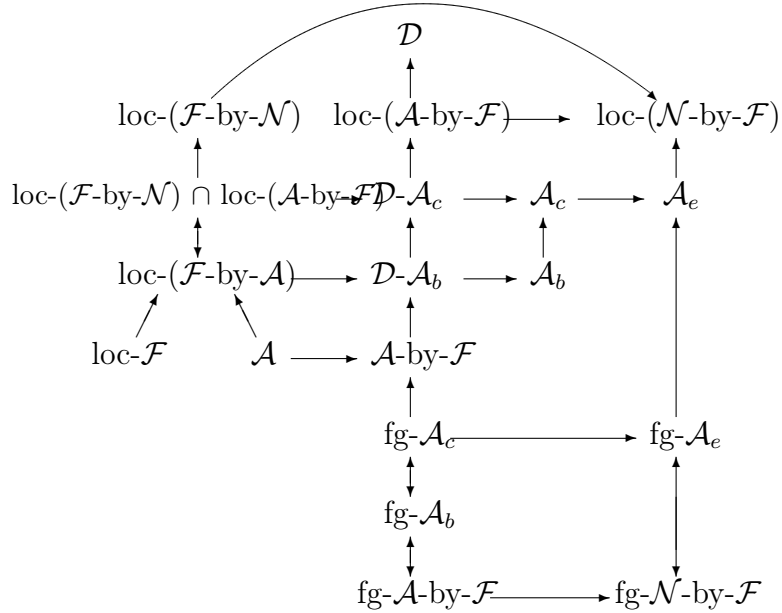
Los resultados centrales (además del teorema de clasificación) sobre este tema serían los siguientes:

**Teorema 4.0.10.** *Un grupo numerable  $G$  es biyectivamente equivalente a gran escala a un grupo abeliano si  $G$  es abeliano-por-finito o es localmente finito-por-abeliano.*

**Teorema 4.0.11.** *Supongamos que un grupo numerable  $G$  es equivalente a gran escala a un grupo abeliano numerable. Entonces:*

1.  *$G$  es localmente nilpotente-por-finito;*
2.  *$G$  es localmente abeliano-por-finito si y solo si  $G$  es no-distorsionado;*
3.  *$G$  es localmente finito-por-abeliano si y solo si  $G$  es no-distorsionado y localmente finito-por-nilpotente.*

A continuación dibujamos un diagrama que muestra la interrelación de diferentes clases de grupos cercanas a ser abelianas en un sentido a gran escala.



En el diagrama consideramos las siguientes clases de grupos numerables:

- $\mathcal{A}$  de grupos abelianos;
- $\mathcal{A}_b$  grupos que son equivalentes a gran escala a grupos abelianos por biyecciones;
- $\mathcal{A}_c$  grupos que son equivalentes a gran escala a grupos abelianos;
- $\mathcal{A}_e$  grupos que admiten un embebimiento a gran escala en grupos abelianos;
- $\mathcal{N}$  grupos nilpotentes;
- $\mathcal{F}$  grupos finitos;
- fg grupos finitamente generados;
- $\mathcal{D}$  grupos no-distorsionados.

Las otras clases se obtienen como intersecciones, extensiones y localizaciones de estas clases.

En la primera parte de este capítulo estudiaremos los grupos localmente finitos y sus clasificaciones salvo equivalencias a gran escala biyectivas. Daremos un criterio algebraico para tal clasificación basado en el número de  $p$ -Sylow que definiremos. Esto nos permitirá mostrar el carácter universal de los grupos localmente finitos para los espacios ultramétricos de geometría acotada.

En la segunda parte de este capítulo damos los principales resultados citados anteriormente, la clasificación de los grupos abelianos, y el estudio de los grupos que admiten un embebimiento a gran escala en grupos abelianos.

## 4.1. Clasificación de los grupos localmente finitos

Sea  $G$  un grupo numerable localmente finito. A continuación damos otro método para definir métricas propias invariantes por la izquierda. Consideremos una filtración  $\mathcal{L}$  de  $G$  por subgrupos finitos  $\mathcal{L} = \{1 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 \dots\}$  y definimos la métrica  $d_{\mathcal{L}}$  asociada a esta filtración como:

$$d_{\mathcal{L}}(x, y) = \text{mín}\{i \mid x^{-1}y \in G_i\}.$$

Claramente,  $d_{\mathcal{L}}$  es una ultramétrica (por tanto, la dimensión asintótica de  $(G, d_{\mathcal{L}})$  es cero).

**Lema 4.1.1.** *Supongamos que dos grupos  $G$  y  $H$  tienen filtraciones por subgrupos finitos:  $\mathcal{L} = \{1 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 \dots\}$  de  $G$  y  $\mathcal{K} = \{1 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 \dots\}$  de  $H$ . Si el índice  $[G_i : G_{i-1}]$  es menor que o igual que el índice  $[H_i : H_{i-1}]$  para todo  $i$ , entonces  $(G, d_{\mathcal{L}})$  admite un embebimiento isométrico en  $(H, d_{\mathcal{H}})$ . Más aún, si  $[G_i : G_{i-1}] = [H_i : H_{i-1}]$  para todo  $i$  (equivalentemente, el cardinal de  $G_i$  es igual al cardinal de  $H_i$  para todo  $i$ ), entonces los grupos  $(G, d_{\mathcal{L}})$  y  $(H, d_{\mathcal{H}})$  son isométricos.*

*Demostración.* Definamos  $a_i = [G_i : G_{i-1}]$  y  $b_i = [H_i : H_{i-1}]$ . Fijemos una aplicación inyectiva  $f_1 : G_1 \rightarrow H_1$  y supongamos conocidas ciertas aplicaciones inyectivas  $f_k : G_k \rightarrow H_k$  para todo  $k \leq n$  tales que se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $f_i(x) = f_j(x)$  para  $i < j$  y  $x \in G_i$ ,

2. La aplicación inyectiva  $f_k: G_k \rightarrow H_k$  es una isometría.

Construimos una aplicación inyectiva del conjunto de las clases cocientes  $\{x \cdot G_n\}$  de  $G_n$  en  $G_{n+1}$  al conjunto de las clases cocientes  $\{y \cdot H_n\}$  de  $H_n$  en  $H_{n+1}$ . Para ello se toman representantes  $1, x_1, \dots, x_m$  ( $m = a_{n+1} - 1$ ) de las clases de  $G_n$  en  $G_{n+1}$  y representantes  $1, y_1, \dots, y_l$  ( $l = b_{n+1} - 1$ ) de las clases de  $H_n$  en  $H_{n+1}$ . Para asegurar la inyectividad se envía la clase  $\{1 \cdot G_n\}$  a  $\{1 \cdot H_n\}$ . Ahora extendemos  $f_n$  a  $f_{n+1}: G_{n+1} \rightarrow H_{n+1}$  como sigue: si  $x \in G_{n+1} \setminus G_n$ , escribimos  $x$  como  $x_k \cdot x'$  para un único  $k \leq m$  y definimos  $f_{n+1}(x)$  como  $y_k \cdot f_n(x')$ .

Si  $x$  y  $z$  pertenecen a clases diferentes de  $G_n$  en  $G_{n+1}$ , entonces  $f_{n+1}(x)$  y  $f_{n+1}(z)$  pertenecerán a clases diferentes de  $H_n$  en  $H_{n+1}$  y  $d_{\mathcal{L}}(x, z) = n + 1 = d_{\mathcal{H}}(f_{n+1}(x), f_{n+1}(z))$ . Si  $x$  y  $z$  pertenecen a la misma clase  $x_k \cdot G_n$  de  $G_n$  en  $G_{n+1}$ , entonces  $x = x_k \cdot x'$ ,  $z = x_k \cdot z'$ . Como  $f_{n+1}(x) = y_k \cdot f_n(x')$ ,  $f_{n+1}(z) = y_k \cdot f_n(z')$ , y la aplicación  $f_n$  es una isometría, y así

$$d_{\mathcal{L}}(x, z) = d_{\mathcal{L}}(x', z')d_{\mathcal{H}}(f_n(x'), f_n(z'))d_{\mathcal{H}}(f_{n+1}(x), f_{n+1}(z)).$$

Pegando todos los  $f_n$  tenemos la aplicación inyectiva isométrica  $f: G \rightarrow H$ . Obsérvese que en el caso de que  $[G_i : G_{i-1}] = [H_i : H_{i-1}]$  para todo  $i$ , la aplicación  $f$  es biyectiva y establece una isometría entre  $(G, d_{\mathcal{L}})$  y  $(H, d_{\mathcal{H}})$ .  $\square$

**Lema 4.1.2.** *Dados dos grupos localmente finitos  $G$  y  $H$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen métricas propias invariantes por la izquierda  $d_G$  en  $G$  y  $d_H$  en  $H$  tales que  $(G, d_G)$  es isométrico a  $(H, d_H)$ .*
2. *Existen filtraciones por subgrupos finitos:  $\mathcal{L} = \{1 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 \dots\}$  de  $G$  y  $\mathcal{K} = \{1 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 \dots\}$  de  $H$  tales que el cardinal de  $G_i$  es igual al cardinal de  $H_i$  para todo  $i$ .*

*Demostración.* Por 4.1.1, bastará con demostrar que (1)  $\implies$  (2). Claramente, podemos tomar una isometría  $f: G \rightarrow H$  tal que  $f(1_G) = 1_H$  con tal de reemplazar cualquier  $f$  por  $f(1_G)^{-1} \cdot f$ . Obsérvese que  $f$  establece biyectividad entre la  $m$ -componente de  $G$  que contienen a  $1_G$  y la  $m$ -componente de  $H$  que contiene a

$1_H$ . También, esas componentes son subgrupos de  $G$  y  $H$ . Por tanto, definimos  $G_1$  como la 1-componente de  $G$  que contiene a  $1_G$  e, inductivamente,  $G_{i+1}$  como la  $(\text{diam}(G_i) + i)$ -componente de  $G$  que contiene a  $1_G$ .  $\square$

**Ejemplo principal.** Si  $G$  es una suma directa de grupos cíclicos  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{a_i}$  consideramos la métrica en  $G$  asociada a la filtración

$$\mathcal{L} = \{1 \subset \mathbb{Z}_{a_1} \subset \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \subset \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \mathbb{Z}_{a_3} \subset \dots\}$$

Si escribimos los elementos del grupo  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{a_i}$  como  $p = p_1 p_2 \dots p_n$  donde  $p_j \in \mathbb{Z}_{a_j}$  y denotamos  $|p| = n$  entonces la ultramétrica  $d_{\mathcal{L}}$  puede definirse explícitamente como

$$d_{\mathcal{L}}(p, q) = \begin{cases} \text{máx}\{|p|, |q|\} & \text{if } |p| \neq |q| \\ \text{máx}\{i \mid p_i \neq q_i\} & \text{if } |p| = |q| \end{cases}$$

**Teorema 4.1.3.** *Todo grupo localmente finito numerable  $G$  con una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  es bi-uniformemente equivalente a la suma directa de grupos cíclicos.*

*Demostración.* Tomemos una filtración  $\mathcal{L}$  de  $G$  por subgrupos finitos  $\mathcal{L} = \{1 \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 \dots\}$ . Entonces  $(G, d)$  es bi-uniformemente equivalente a  $(G, d_{\mathcal{L}})$  [69, Proposition 1]. Por 4.1.1,  $(G, d_{\mathcal{L}})$  es isométrico a  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{a_i}$  donde  $a_i = [G_i : G_{i-1}]$ .  $\square$

*Observaciones 4.1.4.* En el teorema anterior se puede conseguir fácilmente que los grupos cíclicos sean de orden primo. Basta con comprobar que si  $a = m \cdot n$  y  $(m, n) = 1$  entonces  $\mathbb{Z}_a$  admite la filtración finita:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_a$$

Con índice  $[\mathbb{Z}_a : \mathbb{Z}_m] = n$ . Por otro lado si  $a = p^k$  entonces  $\mathbb{Z}_a$  admite la filtración finita:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$$

Tal que el índice es  $[\mathbb{Z}_{p^{i+1}} : \mathbb{Z}_{p^i}] = p$ .

**Definición 4.1.5.** Sea  $G$  un grupo numerable localmente finito y sea  $p$  un número primo. Definimos el *número  $p$ -Sylow de  $G$*  (finito o infinito) del siguiente modo:

$$|p\text{-Syl}|(G) = \sup\{p^n \mid p^n \text{ divide } |F|, F \text{ un subgrupo finito de } G, n \in \mathbb{Z}\}$$

Observamos que si el número  $p$ -Sylow de  $G$  es finito, entonces es igual al orden de un subgrupo de  $p$ -Sylow de algún subgrupo finito de  $G$ . Para un grupo abeliano de torsión  $G$  el número de  $p$ -Sylow de  $G$  es igual al orden de los subgrupos de de  $p$ -torsión de  $G$ .

Usaremos el siguiente teorema de Protasov:

**Teorema 4.1.6 ([61, Teorema 5]).** *Dos grupos numerables localmente finitos  $G$  y  $H$  con métricas propias invariantes por la izquierda son bi-uniformemente equivalentes si y solo si, para cada subgrupo finito  $F$  de  $G$ , existe un subgrupo finito  $E$  de  $H$  tal que  $|F|$  es un divisor de  $|E|$ , y para cada subgrupo finito  $E$  de  $H$ , existe un subgrupo finito  $F$  de  $G$  tal que  $|E|$  es un divisor de  $|F|$ .*

**Corolario 4.1.7.** *Sean  $G$  y  $H$  dos grupos que son sumas numerables de grupos cíclicos de orden primo. Sean  $d_G$  y  $d_H$  dos métricas invariantes propias en  $G$  y  $H$ . Entonces los espacios métricos  $(G, d_G)$  y  $(H, d_H)$  son bi-uniformemente equivalentes si y solo si los grupos  $G$  y  $H$  son isomorfos*

**Teorema 4.1.8.** *Sean  $G$  y  $H$  grupos localmente finitos numerables con métricas propias invariantes por la izquierda  $d_G$  y  $d_H$ . Los espacios métricos  $(G, d_G)$  y  $(H, d_H)$  son bi-uniformemente equivalentes si y solo si para todo primo  $p$  tenemos que  $|p\text{-Syl}|(G) = |p\text{-Syl}|(H)$ .*

*Demostración.* Supongamos que los espacios métricos  $(G, d_G)$  y  $(H, d_H)$  son bi-uniformemente equivalentes. Nuestro objetivo es demostrar que si  $|p\text{-Syl}|(G) \geq p^n$ , entonces  $|p\text{-Syl}|(H) \geq p^n$ . Si existe un subgrupo finito  $F$  de  $G$  tal que  $p^n$  divide a  $|F|$ , entonces por 4.1.6 existirá un subgrupo  $E$  de  $H$  tal que  $p^n$  divide a  $|E|$ . Por tanto  $|p\text{-Syl}|(H) \geq p^n$ .

Supongamos ahora  $|p\text{-Syl}|(G) = |p\text{-Syl}|(H)$  para cada primo  $p$ . Por 4.1.6, Bastará demostrar que para todo subgrupo finito  $F$  de  $G$ , existe un subgrupo finito  $E$  de  $H$  tal que  $|F|$  es un divisor de  $|E|$ . Si  $|F| = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  entonces

$p_i^{\alpha_i} \leq |p_i\text{-Syl}|(H)$  para cada  $i$ . Para cada  $i$  encontramos un subgrupo  $E_i$  de  $H$  tal que  $p_i^{\alpha_i}$  divide a  $|E_i|$ . Sea  $E$  un subgrupo finito de  $H$  que contiene todos los grupos  $E_i$ . Es obvio que  $|F|$  divide a  $|E|$ .  $\square$

**Proposición 4.1.9.** *El espacio  $\mathcal{M}^0$  es equivalente a gran escala a  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ .*

*Demostración.* Definimos la aplicación  $f: \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{M}^0$  y consideramos un elemento  $p = p_1 p_2 \dots p_n$  del grupo  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  donde  $p_j \in \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$  y escribimos

$$f(p) = \sum_{i=1}^{\infty} 2p_i \cdot 3^{i-1}.$$

Se puede comprobar fácilmente que la aplicación  $f$  es una equivalencia a gran escala: Para cada par de elementos  $p, q \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  tenemos

$$3^{d_{\mathcal{L}}(p,q)} \leq d_{\mathcal{M}^0}(f(p), f(q)) \leq 3 \cdot 3^{d_{\mathcal{L}}(p,q)}$$

$\square$

*Observaciones 4.1.10 (cf. Proposition 1.2.2).* La demostración anterior prueba además que el grupo  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  con la ultramétrica  $3^{d_{\mathcal{L}}}$  es equivalente bi-Lipschitz al espacio  $\mathcal{M}^0$ .

**Proposición 4.1.11 (cf. [61, Theorem 4]).** *Sean  $G$  y  $H$  dos grupos localmente finitos y numerables con métricas propias invariantes por la izquierda. Entonces el espacio métrico  $G$  es equivalente a gran escala a un subespacio métrico del espacio  $H$*

*Demostración.* Por la proposición 1.2.21 y 4.1.9 el grupo  $G$  es equivalente a gran escala a un subespacio del grupo  $\bigoplus \mathbb{Z}_2$ . Por el lema 4.1.1 el grupo  $(\bigoplus \mathbb{Z}_2, d_{\mathcal{L}})$  admite una inmersión isométrica en cualquier grupo de la forma  $(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{a_i}, d_{\mathcal{L}})$ . Finalmente, el grupo  $H$  es bi-uniformemente equivalente a la suma directa de grupos cíclicos por el teorema 4.1.3.  $\square$

## 4.2. Clasificación de los grupos numerables abelianos

### 4.2.1. Métricas invariantes en espacios homogéneos

En esta sección extenderemos el resultado de Smith [69] al espacio de las formas  $G/H = \{xH : x \in G\}$  donde  $H$  es un subgrupo (no necesariamente normal) de un grupo numerable  $G$ . El espacio  $G/H$  admite de forma natural una acción por la izquierda del grupo  $G$ :  $g \cdot xH \mapsto (gx)H$ .

Una métrica  $d$  en  $G/H$  se dice que es  $G$ -invariante si  $d(gx, gy) = d(x, y)$  para todo  $x, y \in G/H$  y  $g \in G$ . Es evidente que  $G/H$  junto con una métrica  $G$ -invariante es homogéneo como espacio métrico.

Se dice que un espacio métrico  $X$  es *homogéneo* si para cada pareja de puntos  $x, y \in X$  existe una isometría biyectiva  $f : X \rightarrow X$  tal que  $f(x) = y$ . El teorema de Baire garantiza que en un espacio numerable, propio y con métrica homogénea todas las bolas son finitas. Esta simple observación nos permitirá demostrar la unicidad de las métricas propias  $G$ -invariantes en espacios numerables  $G/H$ .

**Lema 4.2.1.** *Sea  $H$  un subgrupo de un grupo numerable  $G$ . Para cada dos métricas propias  $G$ -invariantes  $d, \rho$  definidas en  $G/H$  la aplicación identidad  $(G/H, d) \rightarrow (G/H, \rho)$  es una equivalencia a gran escala.*

*Demostración.* Bastará con ver que la aplicación identidad  $(G/H, d) \rightarrow (G/H, \rho)$  es bornológica. Obsérvese que para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  el número real

$$\delta = \max\{\rho(xH, H) : d(xH, H) \leq \varepsilon\}$$

es finito porque todas las bolas en  $(G/H, d)$  son finitas. Entonces para cada pareja de clases cociente  $xH, yH \in G/H$  con  $d(xH, yH) \leq \varepsilon$  obtenemos  $d(y^{-1}xH, H) = d(xH, yH) \leq \varepsilon$  por la propiedad de la  $G$ -invariancia de la métrica  $d$ . Consecuentemente,

$$\rho(xH, yH) = \rho(y^{-1}xH, H) \leq \delta,$$

lo que completa la demostración. □

A continuación, estudiaremos el problema de la existencia de una métrica propia  $G$ -invariante en  $G/H$ . Mostraremos que tal métrica en  $G/H$  existe si y solo si el subgrupo  $H$  es cuasi-normal en  $G$ .

**Definición 4.2.2.** Decimos que un subgrupo  $H \subset G$  es

1. *cuasi-normal* si para todo  $x \in G$  existe un subconjunto finito  $F_x \subset G$  tal que  $x^{-1}Hx \subset F_xH$ ;
2. *uniformemente cuasi-normal* si existe un subconjunto finito  $F \subset G$  tal que  $x^{-1}Hx \subset FH$  para todo  $x \in G$ .

La cuasi-normalidad (uniforme) está altamente relacionada con la normalidad usual.

**Proposición 4.2.3.** *Un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  es*

1. *cuasi-normal siempre y cuando  $H$  contenga un subgrupo de índice finito que sea normal en  $G$ ;*
2. *uniformemente cuasi-normal siempre y cuando  $H$  tenga índice finito en algún subgrupo normal de  $G$ .*

*Demostración.* 1. Supongamos que  $N \subset H$  es un subgrupo de índice finito que es normal en  $G$ . Entonces para todo  $x \in G$  tenemos que  $x^{-1}Hx \supset x^{-1}Nx = N$ . Sea  $q : G \rightarrow G/N$  el homomorfismo cociente. Como  $N$  tiene índice finito en  $H$ , tendrá índice finito también en  $x^{-1}Hx$ . Entonces  $q(x^{-1}Hx)$  es finito y por tanto existe un subconjunto finito  $F_x \subset G$  tal que  $x^{-1}Hx \subset F_xN \subset F_xH$ .

2. A continuación, supongamos que  $H$  tiene índice finito en algún subgrupo normal  $N$  de  $G$ . Entonces  $N = F \cdot H$  para algún conjunto finito  $F \subset N$  y así para todo  $x \in G$  tenemos que

$$x^{-1}Hx \subset x^{-1}Nx = N = FH.$$

□

El siguiente lema caracteriza subgrupos  $H \subset G$  cuyo espacio cociente admite una métrica propia  $G$ -invariante.

**Lema 4.2.4.** *Un subgrupo  $H$  de un grupo numerable  $G$  es cuasi-normal en  $G$  si y solo si el espacio cociente  $G/H$  admite una métrica propia  $G$ -invariante.*

*Demostración.* Para demostrar la suficiencia, supongamos que  $d$  es una métrica propia  $G$ -invariante en  $G/H$ . Como  $G/H$  es numerable, el teorema de Baire garantiza que todas las bolas con respecto a la métrica  $d$  son finitas. En particular, para todo  $x \in G$  la bola  $B_r(x^{-1}H)$  de radio  $r = d(H, x^{-1}H)$  centrada en  $x^{-1}H$  es finita. Así, podemos encontrar un subconjunto finito  $F_x \subset G$  tal que  $B_r(x^{-1}H) = \{yH : y \in F_x\}$ . Afirmamos que  $x^{-1}Hx \subset F_xH$ . Tomamos cualquier elemento  $h \in H$  y consideramos la isometría  $f : G/H \rightarrow G/H$ ,  $f : yH \mapsto x^{-1}hx \cdot yH$ . Observamos que  $f(x^{-1}H) = x^{-1}H$  y así

$$d(x^{-1}hxH, x^{-1}H) = d(f(H), f(x^{-1}H)) = d(H, x^{-1}H) = r.$$

En consecuencia,  $x^{-1}hxH \in B_r(x^{-1}H)$  y obtenemos la inclusión requerida  $x^{-1}hx \in F_xH$ , que significa que  $H$  es cuasi-normal en  $G$ .

A continuación probamos la condición necesaria. Supongamos que el subgrupo  $H$  es cuasi-normal en  $G$ . Fijemos una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  en  $G$ . Mostraremos que para todo par de clases cocientes  $xH, yH \in G/H$  la distancia de Hausdorff

$$d_H(xH, yH) = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : xH \subset O_\varepsilon(yH), yH \subset O_\varepsilon(xH)\}$$

es finita. Aquí  $O_\varepsilon(yH) = \{g \in G : \text{dist}(g, yH) < \varepsilon\}$  será el  $\varepsilon$ -entorno abierto alrededor de  $yH$  en  $G$ . Consideremos el punto  $z = x^{-1}y$  y por la cuasi-normalidad de  $H$  en  $G$ , encontramos un subconjunto finito  $F_z \subset G$  tal que  $z^{-1}Hz \subset F_zH$ . Entonces  $Hz \subset zF_zH$  y después de aplicar la inversión obtenemos que  $z^{-1}H \subset HF_z^{-1}z^{-1}$ . Encontramos ahora un finito  $\varepsilon$  tal que la  $\varepsilon$ -bola abierta  $O_\varepsilon(1_G)$  centrada en el elemento neutro  $1_G$  de  $G$  contiene el conjunto finito  $F_z^{-1}z^{-1}$ . Entonces

$$y^{-1}xH = z^{-1}H \subset HF_z^{-1}z^{-1} \subset H \cdot O_\varepsilon(1_G)$$

y así  $xH \subset yH \cdot O_\varepsilon(1_G) = O_\varepsilon(yH)$ .

De forma análoga, podemos comprobar que  $yH \subset O_\delta(xH)$  para algún  $\delta \in \mathbb{R}_+$ . Esto demuestra que la distancia de Hausdorff es una métrica bien definida  $d_H$  en

$G/H$ . Es fácil ver también que la propiedad de invariancia por la izquierda de la métrica  $d$  en  $G$  implica la propiedad de la  $G$ -invariancia de la métrica de Hausdorff  $d_H$  en  $G/H$ .

También es obvio que la aplicación cociente  $q : (G, d) \rightarrow (G/H, d_H)$  es contractiva y para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  la imagen  $q(O_\varepsilon(1_G))$  de la  $\varepsilon$ -bola abierta centrada en el elemento neutro de  $G$  coincide con la  $\varepsilon$ -bola abierta de  $G/H$  centrada en  $H$ . Esta observación implica que la métrica  $d_H$  en  $G/H$  es propia.  $\square$

Finalmente, damos condiciones en un subgrupo  $H \subset G$  que garanticen que el espacio cociente  $G/H$  admite una ultramétrica propia  $G$ -invariante.

Diremos que un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  tiene *índice localmente finito* en  $G$  si  $H$  tiene índice finito, en cada subgrupo de  $G$ , generado por  $H \cup F$  para algún subconjunto finito  $F \subset G$ .

**Lema 4.2.5.** *Sea  $H$  un subgrupo de un grupo numerable  $G$ . El espacio  $G/H$  admite una ultramétrica propia  $G$ -invariante si y solo si el subgrupo  $H$  tiene índice localmente finito en  $G$ .*

*Demostración.* Supongamos que el grupo  $H$  tiene índice localmente finito en  $G$ . Si  $H = G$ , entonces el espacio  $G/H$  es un conjunto unipuntual y trivialmente admite una ultramétrica propia  $G$ -invariante. Así, supongamos que  $H \neq G$ . Escribimos  $G$  como la unión  $G = \bigcup_{n \in \omega} G_n$  de una sucesión de subgrupos

$$H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$$

Tales que  $H \neq G_1$  y el subgrupo  $H$  tiene índice finito en cada subgrupo  $G_n$ . Definimos una ultramétrica propia  $G$ -invariante  $d$  en  $G/H$  haciendo

$$d(xH, yH) = \text{mín}\{n \in \omega : xG_n = yG_n\}.$$

Ahora supongamos recíprocamente que el espacio  $G/H$  admite una ultramétrica propia  $G$ -invariante  $\rho$ . Para demostrar que  $H$  tiene índice localmente finito en  $G$ , bastará comprobar que para cada  $r \in \mathbb{R}_+$  el conjunto  $G_r = \{x \in G : \rho(xH, H) \leq r\}$  es un subgrupo de  $G$ . Es obvio que  $G = \bigcup_{r=1}^{\infty} G_r$  y el índice de  $H$  en  $G_r$  es igual

al cardinal de la  $r$ -bola cerrada en  $G/H$ . Tomamos ahora dos puntos  $x, y \in G_r$ . Como la ultramétrica  $\rho$  es  $G$ -invariante, tenemos

$$\rho(H, xyH) \leq \max\{\rho(H, xH), \rho(xH, xyH)\} = \max\{\rho(H, xH), \rho(H, yH)\} \leq r,$$

lo que significa que  $xy \in G_r$ . También para todo  $x \in G_r$  tenemos que

$$\rho(H, x^{-1}H) = \rho(xH, xx^{-1}H) = \rho(xH, H) \leq r,$$

lo que quiere decir que  $x^{-1} \in G_r$ . Y así  $G_r$  es un subgrupo de  $G$ .  $\square$

Por [7], dos espacios propios homogéneos y ultra-métricos son equivalentes a gran escala. En particular, cualquier espacio de ese tipo es equivalente a gran escala al grupo de torsión infinitamente generado  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Esto resolvió el problema 1606 de [66].

Como cada espacio  $G/H$  con una métrica  $G$ -invariante es homogéneo, podemos aplicar lemas 4.2.5 y 4.2.1 para obtener el siguiente resultado de clasificación.

**Corolario 4.2.6.** *Para todo subgrupo  $H$  de índice localmente finito en un grupo numerable  $G$  el espacio  $G/H$  con una métrica propia  $G$ -invariante es equivalente a gran escala a un conjunto unipuntual o al grupo  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .*

La clasificación de espacios  $G/H$  salvo equivalencia a gran escala biyectiva es más rica. Por [7], cada espacio ultramétrico propio y homogéneo  $X$  es biyectivamente equivalente a gran escala a la suma directa

$$\mathbb{Z}_f = \bigoplus_{p \in \Pi} \mathbb{Z}_p^{f(p)}$$

de grupos cíclicos  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  para alguna función adecuada  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$  definida en el conjunto  $\Pi$  de los números primos. Si  $f(p) = \infty$  entonces por  $\mathbb{Z}_p^{f(p)} = \mathbb{Z}_p^\infty$  denotaremos a la suma directa de una cantidad numerable de copias del grupo  $\mathbb{Z}_p$ . Este resultado combinado con los lemas 4.2.1 y 4.2.5 implican.

**Corolario 4.2.7.** *Para todo subgrupo  $H$  que tiene índice localmente finito en un grupo numerable  $G$  el espacio  $G/H$  con una métrica propia  $G$ -invariante es biyectivamente equivalente a gran escala al grupo abeliano  $\mathbb{Z}_f$  para una elección de una función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ .*

### 4.2.2. Un resultado de selección

En esta sección, dado un subgrupo cuasi-normal  $H$  de un grupo numerable  $G$ , estudiaremos las propiedades a gran escala de la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$ ,  $q : x \mapsto xH$ . Los lemas 4.2.1 y 4.2.4 garantizan que  $G/H$  admite una métrica propia  $G$ -invariante y que tal métrica es única salvo equivalencias a gran escala biyectivas.

**Lema 4.2.8.** *Para un subgrupo cuasi-normal  $H$  de un grupo numerable  $G$  la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$  es bornológica.*

*Demostración.* Por la demostración del lema 4.2.4 se tiene que para toda métrica propia invariante por la izquierda  $d$  en  $G$  la distancia de Hausdorff  $d_H$  es una métrica propia  $G$ -invariante en  $G/H$ . Es evidente que la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$  es contractiva y por tanto bornológica con respecto a las métricas  $d$  y  $d_H$ . El lema 4.2.1 garantiza que  $q : G \rightarrow G/H$  es bornológica para toda métrica propia  $G$ -invariante en  $G$  y  $G/H$ .  $\square$

A continuación abordaremos el problema de la existencia de secciones bornológicas  $s : G/H \rightarrow G$  para la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$ . Una aplicación  $s : Y \rightarrow X$  se dice que es una *sección* para una función  $f : X \rightarrow Y$  si  $f \circ s(y) = y$  para todo  $y \in Y$ .

**Teorema 4.2.9.** *Sea  $H$  un subgrupo de índice localmente finito en un grupo numerable  $G$ . Para todo subsemigrupo  $S$  de  $G$  con  $S \cdot H = G$ , la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$  tiene una sección bornológica  $s : G/H \rightarrow S \subset G$ .*

*Demostración.* Como  $G$  es numerable y  $H$  tiene índice localmente finito en  $G$ , podemos escribir el grupo  $G$  como la unión  $G = \bigcup_{n \in \omega} G_n$  de una sucesión

$$H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$$

de subgrupos de  $G$  tales que  $H$  tiene índice finito en cada grupo  $G_n$ . Si  $H \neq G$ , entonces asumiremos  $G_1 \neq G_0$ . Con esta convención la fórmula

$$\rho(xH, yH) = \text{mín} \{n \in \omega : xG_n = yG_n\}$$

determina una ultramétrica propia  $G$ -invariante en  $G/H$ . Fijemos también una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  en  $G$ .

Sea  $S \subset G$  un subsemigrupo de  $G$  tal que  $S \cdot H = G$ . Incluyendo la unidad a  $S$  definimos  $S^1 = S \cup \{1_G\}$ .

Sea  $\alpha_0 : G_0/H \rightarrow S \cap H$  una aplicación y para cada  $n \in \mathbb{N}$  fijamos una sección  $\alpha_n : G_n/G_{n-1} \rightarrow S^1 \cap G_n$  de la aplicación cociente  $\pi_n : G_n \rightarrow G_n/G_{n-1}$  tal que  $\alpha_n(G_{n-1}) = 1_G$  y  $\alpha_n(xG_{n-1}) \in S \cap xG_{n-1}$  para cada  $x \in G_n \setminus G_{n-1}$ .

Pongamos  $s_0 = \alpha_0 : G_0/H \rightarrow S \cap H$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos una sección  $s_n : G_n/H \rightarrow G_n$  de la aplicación cociente  $q|G_n : G_n \rightarrow G_n/H$  mediante la fórmula recursiva:

$$s_n(xH) = \alpha_n(xG_{n-1}) \cdot s_{n-1}(\alpha_n(xG_{n-1})^{-1} \cdot xH) \quad (4.2.1)$$

para  $xH \in G_n/H$ .

Primero mostraremos que  $s_n(xH)$  está bien definida para cada  $xH \in G_n/H$ . Como  $\alpha_n$  es una sección de la aplicación cociente  $G_n \rightarrow G_n/G_{n-1}$ , tenemos  $a = \alpha_n(xG_{n-1}) \in xG_{n-1}$  y en consecuencia,  $x^{-1}a \in G_{n-1}$ . Como  $H \subset G_{n-1}$ , obtenemos  $a^{-1}xH \subset a^{-1}xG_{n-1} = a^{-1}x(x^{-1}a)G_{n-1} = G_{n-1}$ . Finalmente definimos  $s_{n-1}(a^{-1}xH)$  y  $s_n(xH) = a \cdot s_{n-1}(a^{-1}xH)$ .

Obsérvese que para cada  $x \in G_{n-1}$ , tenemos  $\alpha_n(xG_{n-1}) = \alpha_n(G_{n-1}) = 1_G$  y por tanto  $s_n(xH) = s_{n-1}(xH)$ . Esto significa que  $s_n|G_{n-1}/H = s_{n-1}$  y podemos definir una aplicación  $s : G/H \rightarrow G$  haciendo  $s(xH) = s_n(xH)$  para cada  $n \in \omega$  tal que  $xH \subset G_n$ .

Demostraremos que la aplicación definida  $s$  es una sección de  $q : G \rightarrow G/H$  con  $s(G/H) \subset S$ . Bastará ver que para cada  $n \in \omega$  y  $x \in G_n$  tenemos  $s(xH) \in S \cap xH$ . Lo haremos por inducción en  $n$ . Si  $n = 0$ , entonces  $s(xH) = s(H) = s_0(H) \in S \cap H$  por la elección de  $s_0$ . Supongamos que  $s_{n-1}(xH) \in S \cap xH$  para todo  $x \in G_{n-1}$ . Dado un punto cualquiera  $x \in G_n \setminus G_{n-1}$  y tomando en consideración que  $a = \alpha_n(xG_{n-1}) \in S \cap xG_{n-1}$ , obtenemos

$$s(xH) = s_n(xH) = a \cdot s_{n-1}(a^{-1}xH) \in a \cdot a^{-1}xH = xH$$

y

$$s(xH) = a \cdot s_{n-1}(a^{-1}xH) \subset S \cdot S \subset S$$

por la hipótesis de inducción.

Finalmente, mostraremos que la aplicación  $s : G/H \rightarrow G$  es bornológica. Dado cualquier  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  tomamos un entero  $k \geq \varepsilon$  y sea

$$\delta = \text{diam}(s(G_k/H)).$$

La propiedad bornológica de  $s$  se seguirá de la desigualdad  $d(s(xH), s(yH)) \leq \delta$  para todo  $n \in \omega$  y para toda pareja de puntos  $x, y \in G_n$  con  $\rho(xH, yH) \leq \varepsilon$ . Veamos esto por inducción en  $n$ . Si  $n \leq k$ , entonces  $d(s(xH), s(yH)) \leq \text{diam}(s(G_k/H)) = \delta$ . Supongamos que la desigualdad se demuestra para cualquier  $x, y \in G_{n-1}$  con  $n > k$ . Tomamos dos puntos  $x, y \in G_n$  y observamos que  $\rho(xH, yH) \leq \varepsilon \leq k$  implica  $xG_k = yG_k$  y tenemos que  $xG_{n-1} = yG_{n-1}$ . Sea  $a = \alpha_n(xG_{n-1}) = \alpha_n(yG_{n-1}) \in xG_{n-1} = yG_{n-1}$  y observamos que

$$\begin{aligned} d(s(xH), s(yH)) &= d(s_n(xH), s_n(yH)) = d(a \cdot s_{n-1}(a^{-1}xH), a \cdot s_{n-1}(a^{-1}yH)) = \\ &= d(s_{n-1}(a^{-1}xH), s_{n-1}(a^{-1}yH)) \leq \delta. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de la hipótesis de inducción ya que  $\rho(a^{-1}xH, a^{-1}yH) = \rho(xH, yH) \leq \varepsilon$ . □

### 4.2.3. Cuasi-centralizadores y grupos-FC

Recordamos que el centralizador de un subconjunto  $A$  de un grupo  $G$  es el subgrupo

$$C(A) = \{x \in G : x^A = \{x\}\} \quad \text{donde} \quad x^A = \{a^{-1}xa : a \in A\}.$$

Por analogía, definimos el *cuasi-centralizador*

$$Q(A) = \{x \in G : x^A \text{ es finito}\}$$

de  $A$  en  $G$ .

**Lema 4.2.10.** *El cuasi-centralizador  $Q(A)$  de cualquier subconjunto  $A \subset G$  es un subgrupo de  $G$ .*

*Demostración.* Como  $a^{-1}xya = a^{-1}xaa^{-1}ya \subset x^A \cdot y^A$  y por tanto  $(xy)^A \subset x^A \cdot y^A$ , observamos que  $(xy)^A \in Q(A)$  para todo  $x, y \in Q(A)$ . Por la igualdad  $(x^{-1})^A = (x^A)^{-1}$  vemos también que  $x^{-1} \in Q(A)$  para cada  $x \in Q(A)$ , lo que implica que  $Q(A)$  es de hecho un subgrupo de  $G$ .  $\square$

Si  $A$  es un subgrupo de  $G$  entonces se puede decir algo más del subgrupo  $Q(A)$ . El siguiente lema se sigue fácilmente de la definición de los cuasi-centralizadores.

**Lema 4.2.11.** *Si  $H$  es un subgrupo de un grupo  $G$ , entonces  $x^{-1}Q(H)x = Q(H)$  para cada  $x \in H$ . En consecuencia,  $Q(H) \cdot H = H \cdot Q(H)$  es un subgrupo de  $G$  que contiene a  $Q(H)$  como un subgrupo normal.*

Los cuasi-centralizadores pueden usarse para caracterizar los FC-grupos (localmente). Siguiendo [3] decimos que un grupo  $G$  es un *FC-grupo* si las clases de conjugación  $x^G$  de cada punto  $x \in G$  son finitas.

La siguiente caracterización de los FC-grupos se sigue directamente de las definiciones.

**Proposición 4.2.12.** *Un grupo  $G$  es un FC-grupo si y solo si  $Q(G) = G$ .*

Por un viejo resultado de B.H.Neumann [58] un grupo finitamente generado es finito-por-abeliano si y solo si es un FC-grupo. Esta caracterización implica la siguiente caracterización de los grupos localmente finitos-por-abeliano.

**Proposición 4.2.13.** *Para un grupo  $G$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $G$  es un FC-grupo localmente;
2.  $G$  es localmente finito-por-abeliano;
3.  $Q(H) \supset H$  para cada subgrupo finitamente generado  $H \subset G$ .
4.  $Q(H) = G$  para cada subgrupo finitamente generado  $H \subset G$ .

#### 4.2.4. Propiedades a gran escala de las operaciones de grupo

En esta sección establecemos algunas propiedades bornológicas de las operaciones de grupo.

**Lema 4.2.14.** Sean  $A, B$  dos subconjuntos de un grupo numerable  $G$ , la aplicación multiplicación

$$\cdot : A \times B \rightarrow G, \quad \cdot : (a, b) \mapsto ab,$$

es bornológica si y solo si  $A^{-1}A \subset Q(B)$ .

*Demostración.* Sea  $d$  una métrica propia invariante por la izquierda y sea  $\|\cdot\|$  su norma correspondiente en el grupo  $G$ .

Para demostrar la condición necesaria supongamos que la aplicación  $\cdot : A \times B \rightarrow G$  es bornológica. Entonces para todo  $x \in A^{-1}A$  existe un  $\delta \in \mathbb{R}_+$  tal que  $d(ab, a'b') \leq \delta$  para los puntos  $(a, b), (a', b') \in A \times B$  tales que  $\max\{d(a, a'), d(b, b')\} \leq \|x\|$ .

Escribimos el punto  $x \in A^{-1}A$  como  $x = a_1^{-1}a_2$  y observamos ahora que  $d(a_1, a_2) = \|a_1^{-1}a_2\| = \|x\|$ . En consecuencia, para todo  $b \in B$  tenemos que

$$\|b^{-1}xb\| = d(xb, b) = d(a_1^{-1}a_2b, b) = d(a_2b, a_1b) \leq \delta.$$

esto quiere decir que  $b^{-1}xb \in B_\delta(1_G)$  y por tanto  $x^B \subset B_\delta(1_G)$ , obteniendo  $x \in Q(B)$ .

Para la condición suficiente supongamos que para todo  $x \in A^{-1}A$  el conjunto  $x^B$  es finito, queremos ver que la aplicación  $\cdot : A \times B \rightarrow G$  es bornológica. Fijamos un  $\varepsilon \geq 0$  y consideramos el conjunto finito

$$F = \bigcup \{x^B : x \in A^{-1}A, \|x\| \leq \varepsilon\}.$$

Sea  $\delta = \max\{\|y\| : y \in F\}$ . Tomamos ahora dos pares de puntos  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$  con  $\max\{d(a_1, a_2), d(b_1, b_2)\} \leq \varepsilon$ . Afirmamos que  $d(a_1b_1, a_2b_2) \leq \delta + \varepsilon$ . Sea  $x = a_2^{-1}a_1$  y observamos que  $\|x\| \leq \varepsilon$  y por tanto  $x^B \subset F$ . Esto implica que  $\|b_1^{-1}xb_1\| \leq \delta$  y que

$$\begin{aligned} d(a_1b_1, a_2b_2) &\leq d(a_1b_1, a_2b_1) + d(a_2b_1, a_2b_2) = \\ &= d(b_1^{-1}a_2^{-1}a_1b_1, 1) + d(b_1, b_2) \leq \|b_1^{-1}xb_1\| + \varepsilon \leq \delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.2.15.** *Sea  $A$  un subconjunto de un grupo numerable. La operación inversión*

$$(\cdot)^{-1} : A \rightarrow A^{-1}, \quad (\cdot)^{-1} : a \mapsto a^{-1},$$

*es bornológica supuesto que  $A^{-1}A \subset Q(A^{-1})$ .*

*Demostración.* Sea  $d$  un métrica propia invariante por la izquierda en el grupo  $G$  y sea  $\|\cdot\|$  la norma inducida por  $d$ . Dado un  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , consideramos el conjunto

$$F = \{a^{-1}xa : a \in A^{-1}, x \in A^{-1}A, \|x\| \leq \varepsilon\}.$$

Tal conjunto es finito porque  $A^{-1}A \subset Q(A^{-1})$ . De este modo  $\delta = \max_{x \in F} \|x\|$  es finito.

Para demostrar que la aplicación inversa  $(\cdot)^{-1} : A \rightarrow A^{-1}$  es bornológica bastará ver que  $d(x^{-1}, y^{-1}) \leq \delta$  para cada pareja de puntos  $x, y \in A$  con  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . De la última desigualdad deducimos que  $\|x^{-1}y\| = d(x, y) \leq \varepsilon$  y por tanto  $yx^{-1} = y(x^{-1}y)y^{-1} \in F$ . En consecuencia tenemos que  $d(x^{-1}, y^{-1}) = \|yx^{-1}\| \leq \delta$ . □

#### 4.2.5. Dos teoremas de factorización

En esta sección buscaremos condiciones en un grupo numerable  $G$  y en un subgrupo cuasi-normal  $H \subset G$  que garanticen que  $G$  es equivalente (biyectivamente) a gran escala al producto  $H \times (G/H)$ . Aquí consideramos que  $G/H$  tiene una métrica propia  $G$ -invariante. Los lemas 4.2.1 y 4.2.4 garantizan que tal métrica en  $G/H$  existe y es única salvo equivalencias a gran escala.

**Teorema 4.2.16.** *Sea  $H$  un subgrupo cuasi-normal de un grupo numerable  $G$ . El grupo  $G$  es equivalente a gran escala a  $H \times (G/H)$  por medio de una biyección si la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$  admite una sección bornológica  $s : G/H \rightarrow G$  tal que  $s(G/H) \subset Q(H)$ .*

*Demostración.* Sea  $d$  una métrica propia invariante por la izquierda en el grupo  $G$  y sea  $\|\cdot\|$  la norma correspondiente en  $G$ . Sea  $s : G/H \rightarrow G$  una sección bornológica de la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$  tal que  $s(G/H) \subset Q(H)$ .

Definimos una equivalencia a gran escala biyectiva  $f : H \times (G/H) \rightarrow G$  mediante la fórmula  $f(x, yH) = s(yH) \cdot x$ . Es facil comprobar que la aplicación  $f$  es biyectiva. Tomando en consideración que  $Q(H)$  es un grupo, concluimos que  $A^{-1}A \subset Q(H)$  donde  $A = s(G/H)$ . Ahora el lema 4.2.14 implica que  $f$  es bornológica.

Sólo falta probar que la aplicación inversa

$$f^{-1} : G \rightarrow H \times G/H, \quad f^{-1}(z) = (s(zH)^{-1}z, q(z)).$$

es bornológica.

La aplicación cociente  $q$  es bornológica por el lema 4.2.8. Así sólo faltaría ver si es bornológica la aplicación

$$h : G \rightarrow H, \quad h : z \mapsto s(zH)^{-1}z.$$

Fijemos un número real positivo  $\varepsilon$ . Como lo aplicación  $s \circ q : G \rightarrow G$  es bornológica, existe  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+$  tal que  $d(s(zH), s(z'H)) \leq \varepsilon_1$  para cada par de puntos  $z, z' \in G$  con  $d(z, z') \leq \varepsilon$ . Como el conjunto  $F = \{x^H : x \in Q(H), \|x\| \leq \varepsilon_1\}$  es finito, el número  $\delta = \max\{\|y\| : y \in F\}$  también será finito.

Ahora la propiedad bornológica de la aplicación  $h$  quedará demostrada tan pronto comprobemos que  $d(h(z), h(z')) \leq \delta + \varepsilon$  para cada dos puntos  $z, z' \in G$  con  $d(z, z') \leq \varepsilon$ . Como  $z = s(zH) \cdot h(z)$  y  $z' = s(z'H) \cdot h(z')$ , obtenemos

$$d(z, z') = d(s(zH) \cdot h(z), s(z'H) \cdot h(z')) = d(s(z'H)^{-1}s(zH)h(z), h(z')).$$

Además como  $s(G/H) \subset Q(H)$  y  $\|s(z'H)^{-1}s(zH)\| = d(s(z'H), s(zH)) \leq \varepsilon_1$ , obtenemos también  $h(z)^{-1}s(z'H)^{-1}s(zH)h(z) \in F$  y así  $\|h(z)^{-1}s(z'H)^{-1}s(zH)h(z)\| \leq \delta$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} d(h(z), h(z')) &\leq d(h(z), s(z'H)^{-1}s(zH)h(z)) + d(s(z'H)^{-1}s(zH)h(z), h(z')) = \\ &= \|h(z)^{-1}s(z'H)^{-1}s(zH)h(z)\| + d(z, z') \leq \delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Recordemos que un subgrupo  $H \subset G$  es uniformemente quasi-normal si existe un conjunto finito  $F \subset G$  tal que  $x^{-1}Hx \subset F \cdot H$  para todo  $x \in G$ .

**Teorema 4.2.17.** *Sea  $H$  un subgrupo uniformemente cuasi-normal de un grupo numerable  $G$  y sea  $A$  un subconjunto de  $G$  tal que  $A = A^{-1}$  y  $Q(A) = G$ . El grupo  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times (G/H)$  si la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$  admite una sección bornológica  $s : G/H \rightarrow A \subset G$ .*

*Demostración.* Fijemos una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  en  $G$  y una métrica propia  $G$ -invariante  $\rho$  en  $G/H$ . Sea  $s : G/H \rightarrow A$  una sección bornológica de la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/H$ . Afirmamos que la aplicación

$$f : H \times G/H \rightarrow G, \quad f : (x, y) \mapsto x \cdot s(y)^{-1},$$

es una equivalencia a gran escala biyectiva.

Como  $Q(A^{-1}) = G$ , las aplicaciones multiplicación e inversión  $\mu : H \times A^{-1} \rightarrow G$  e  $i : A \rightarrow A^{-1}$  son bornológicas de acuerdo con los lemas 4.2.14 y 4.2.15. Entonces la aplicación  $f$  es bornológica vista como composición de tres aplicaciones bornológicas:

$$H \times G/H \xrightarrow{\text{id} \times s} H \times A \xrightarrow{\text{id} \times i} H \times A^{-1} \xrightarrow{\mu} G.$$

Sólo falta demostrar que es bornológica la aplicación inversa

$$f^{-1} : G \rightarrow H \times G/H, \quad f^{-1} : z \mapsto (z \cdot s(z^{-1}H), z^{-1}H).$$

Primero demostramos que la aplicación  $g : G \rightarrow G/H$ ,  $g : z \mapsto z^{-1}H$  es bornológica.

Sea  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . La propiedad bornológica de la aplicación  $s \circ q : G \rightarrow G$  implica que existe un número real positivo  $\varepsilon_1$  tal que  $d(s(zH), s(z'H)) \leq \varepsilon_1$  para todos los puntos  $z, z' \in G$  con  $d(z, z') \leq \varepsilon$ . De la inclusión  $s(G/H) \subset A = A^{-1}$  y la igualdad  $Q(A) = G$  se sigue que el conjunto  $F_1 = \{axa^{-1} : a \in s(G/H), x \in G, \|x\| \leq \varepsilon_1\}$  es finito. Como el subgrupo  $H$  es uniformemente cuasi-normal, existe un subconjunto finito  $F_2 \subset G$  tal que  $x^{-1}Hx \subset F_2H$  para todo  $x \in G$ . Finalmente, sea  $\delta = \text{máx}\{\rho(xH, H) : x \in F_1 \cdot F_2\}$ .

Afirmamos que  $\rho(x^{-1}H, y^{-1}H) \leq \delta$  para toda pareja de puntos  $x, y \in G$  con  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . Obsérvese que  $x = s(xH) \cdot h_x$  y  $y = s(yH) \cdot h_y$  donde  $h_x = s(xH)^{-1} \cdot x \in H$  and  $h_y = s(yH)^{-1} \cdot y \in H$ . La elección del número  $\varepsilon_1$  garantiza que  $\|s(yH)^{-1}s(xH)\| = d(s(xH), s(yH)) \leq \varepsilon_1$ .

Vemos además que

$$\begin{aligned}
xy^{-1} &= s(xH)h_xh_y^{-1}s(yH)^{-1} \in s(xH)Hs(yH)^{-1} = \\
&= s(yH)(s(yH)^{-1}s(xH))s(yH)^{-1}s(yH)Hs(yH)^{-1} \subset \\
&\subset F_1s(yH)Hs(yH)^{-1} \subset F_1F_2H
\end{aligned}$$

y por tanto  $xy^{-1}H = zH$  para algún  $z \in F_1F_2$ . Ahora la elección de  $\delta$  garantiza que  $\rho(x^{-1}H, y^{-1}H) = \rho(H, xy^{-1}H) = \rho(H, zH) \leq \delta$ .

Esto completa la demostración de la propiedad bornológica de la aplicación  $g : G \rightarrow G/H$ ,  $g : z \mapsto z^{-1}H$  que coincide con la segunda componente de  $f^{-1}$ . Finalmente, comprobemos que es bornológica la aplicación  $h : G \rightarrow H$ ,  $h : z \mapsto z \cdot (s \circ g(z))$ , que coincide con la primera componente de  $f^{-1}$ . Por el lema 4.2.14, la multiplicación  $\cdot : G \times s(G/H) \rightarrow G$ ,  $\cdot : (x, y) \mapsto x \cdot y$ , es bornológica. Este hecho en combinación con el hecho de que las aplicaciones  $s$  y  $g$  son bornológicas implica que la aplicación  $h$  es bornológica.  $\square$

Derivamos ahora algunos corolarios de los teoremas de factorización 4.2.16 y 4.2.17.

**Corolario 4.2.18.** *Sea  $H$  un subgrupo de índice localmente finito en un grupo numerable  $G$ . Si el subgrupo  $Q(H) \cdot H$  tiene índice finito en  $G$ , entonces  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times \mathbb{Z}_f$  para alguna función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ .*

*Demostración.* En primer lugar demostraremos que el subgrupo  $Q = Q(H) \cdot H$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times Q/H$ . Como  $H$  tiene índice localmente finito en  $Q$ , la aplicación cociente  $q : Q \rightarrow Q/H$  tiene una sección bornológica  $s : Q/H \rightarrow Q(H) \subset Q$  por el teorema 4.2.9. Aplicando el teorema 4.2.16, concluimos que  $Q$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times Q/H$ .

El subgrupo  $Q = Q(H) \cdot H$  tiene índice finito en  $G$  y por tanto es uniformemente cuasi-normal por la proposición 4.2.3. Sea  $s_1 : G/Q \rightarrow G$  una sección de la aplicación cociente  $q : G \rightarrow G/Q$ . Tomando en consideración que  $G/Q$  es finito, concluimos que  $G = Q(s(G/Q)^{-1} \cup s(G/Q))$  y por tanto  $G$  es equivalente a gran

escala biyectivamente a  $Q \times (G/Q)$  por el teorema 4.2.17. Así,  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times Q/H \times G/Q$ .

Por el corolario 4.2.7, el espacio  $Q/H$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $\mathbb{Z}_f$  para una función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ . El espacio  $G/Q$ , siendo finito, es equivalente a gran escala biyectivamente al grupo  $\mathbb{Z}_g$  para una función  $g : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ . Entonces el producto  $Q/H \times G/Q$  es equivalente a gran escala biyectivamente al producto  $\mathbb{Z}_f \times \mathbb{Z}_g$ , que es isomorfo a  $\mathbb{Z}_{f+g}$ . Así tenemos que  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times \mathbb{Z}_{f+g}$ .  $\square$

Este corolario implica la parte abeliano-por-finito del teorema 4.0.10.

**Corolario 4.2.19.** *Todo grupo numerable finito-por-abeliano es equivalente a gran escala biyectivamente a un grupo abeliano.*

*Demostración.* Dado un grupo numerable finito-por-abeliano  $G$ , encontramos un subgrupo abeliano  $H$  de índice finito en  $G$ . Entonces  $Q(H) \cdot H \supset H$  tiene índice finito en  $G$  y podemos aplicar el corolario 4.2.18 para concluir que  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente al grupo abeliano  $H \times \mathbb{Z}_f$  para una función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ .  $\square$

Aplicando el teorema 4.2.16 (ó el 4.2.17) al subgrupo  $n\mathbb{Z}$  del grupo  $\mathbb{Z}$  Obtenemos

**Corolario 4.2.20.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$  el grupo  $\mathbb{Z}$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ .*

## 4.2.6. Grupos localmente finitos-por-abelianos

En esta sección demostraremos la parte 'localmente finito-por-abeliano' del teorema 4.0.10. Esto se hará con la ayuda del corolario de factorización 4.2.7 y del teorema de selección 4.2.9.

El próximo lema está basado en un resultado bien conocida en la teoría de grupos nilpotentes, incluimos la demostración aquí para hacer el trabajo lo más autocontenido posible. Está basado en la demostración del teorema 1.1 de [44].

**Lema 4.2.21.** *El centro de un grupo finitamente generado y finito-por-abeliano tiene índice finito.*

*Demostración.* Sea  $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  un grupo finitamente generado y finito-por-abeliano y sea  $H$  un subgrupo finito tal que  $G/H$  es abeliano. Esto implica que el conmutador  $[G, G]$  de  $G$  está incluido en  $H$  y que es finito. Ahora existe una correspondencia biyectiva  $y^{-1} \cdot x \cdot y \rightarrow x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x \cdot y$  entre el conjunto de los conjugados de  $x$  y algún subconjunto del conmutador. Así  $[G : C_G x]$  es finito para todo  $x \in G$  donde  $C_G x$  es el centralizador de  $x$ . Por tanto  $[G : \bigcap_{i=1}^n C_G x_i]$  es finito. Es obvio que  $\bigcap_{i=1}^n C_G x_i = Z(G)$ , con  $Z(G)$  el centro de  $G$ . Y así el centro tiene índice finito.  $\square$

**Lema 4.2.22.** *Todo grupo localmente finito-por-abeliano  $G$  contiene un subgrupo abeliano libre  $H$  de índice localmente finito en  $G$  tal que  $Q(H) = G$ .*

*Demostración.* Escribimos  $G$  como la unión de una sucesión creciente  $(G_n)_{n \in \omega}$  de subgrupos finitamente generados de  $G$  tales que  $G_0 = \{1_G\}$ . Cada grupo  $G_n$  es finito-por-abeliano, aplicando el lema 4.2.21 su centro  $Z(G_n)$  tiene índice finito en  $G_n$ . Sea  $A_0 = G_0$  y  $A_n = A_{n-1} \cdot Z(G_n)$  para  $n > 0$ . Se sigue que cada  $A_n$  es un subgrupo abeliano de índice finito en  $G_n$ . Decimos que un subconjunto  $L = \{a_1, \dots, a_n\}$  de un grupo abeliano  $A$  es *linealmente independiente* si el homomorfismo

$$h : \mathbb{Z}^n \rightarrow A, h : (k_1, \dots, k_n) \mapsto \sum_{i=1}^n k_i a_i,$$

es inyectivo. Sea  $L_0 = \emptyset$  y por inducción en cada grupo abeliano  $A_n$  elegimos un subconjunto linealmente independiente maximal  $L_n$  tal que  $L_n \supset L_{n-1}$  y  $L_n \setminus L_{n-1} \subset Z(G_n)$ . Tal elección es posible porque para cada elemento  $x \in A_n$  existe  $k \in \mathbb{N}$  con  $x^k \in Z(G_n)$ .

Se sigue ahora que el subgrupo  $H_n$  de  $A_n$  generado por  $L_n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^{|L_n|}$  mientras que el subgrupo  $H$  de  $G$  generado por el conjunto  $L = \bigcup_{n \in \omega} L_n$  es un grupo abeliano libre. De la elección de los conjuntos  $L_i \setminus L_{i-1} \subset Z(G_i)$  obtenemos que para todo  $n \in \omega$  el conjunto  $L \setminus L_{n-1}$  está en el centralizador  $C(G_n) = \{x \in G : \forall y \in G_n xy = yx\}$  del subgrupo  $G_n$  en  $G$ . Como  $H \cap G_n \supset H_n \cap G_n$  tiene índice finito en  $G_n$ , el subgrupo  $H$  tiene índice localmente finito en  $G$ .

Falta por demostrar que  $Q(H) = G$ . Tomamos un elemento cualquiera  $x \in G$  y encontramos  $n \in \omega$  tal que  $x \in G_n$ . El grupo  $G_n$ , al ser finitamente generado

y finito-por-abeliano es un FC-grupo por [58]. En consecuencia al conjunto  $x^{G_n}$  es finito y por tanto también lo será el subconjunto  $x^{H_n}$  de  $x^{G_n}$ . Afirmamos que  $x^H = x^{H_n}$ . De hecho, tomamos un elemento cualquiera  $h \in H$  y lo escribimos como  $h = ab$  donde  $b \in H_n$  y  $a$  pertenece al subgrupo de  $G$  generado por el conjunto  $L \setminus L_n$ . Como  $L \setminus L_n \subset C(G_{n+1}) \subset C(G_n)$ , el elemento  $a$  conmuta con  $x$ . Finalmente deducimos que  $x^h = h^{-1}xh = b^{-1}a^{-1}xab = b^{-1}xb \in x^{H_n}$ .  $\square$

Ahora podemos demostrar la parte localmente finita -por -abeliano del teorema 4.0.11.

**Teorema 4.2.23.** *Todo grupo localmente finito-por-abeliano  $G$  es biyectivamente equivalente a gran escala al grupo abeliano  $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_f$  para algún  $m \in \omega \cup \infty$  y alguna función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\omega\}$ .*

*Demostración.* Por el lema 4.2.22, el grupo  $G$  contiene un subgrupo abeliano libre  $H$  de índice localmente finito en  $G$  tal que  $Q(H) = G$ . El grupo  $H$ , siendo libre abeliano, es isomorfo a  $\mathbb{Z}^m$  para algún  $m \in \omega \cup \{\infty\}$ . Por el corolario 4.2.18, el grupo  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $H \times \mathbb{Z}_f$  para alguna función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ .  $\square$

Para grupos de dimensión asintótica infinita el teorema 4.2.23 puede mejorarse del siguiente modo.

**Teorema 4.2.24.** *Un grupo numerable  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $\mathbb{Z}^\infty$  si y solo si  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a un grupo abeliano y  $\text{asdim}(G) = \infty$ .*

*Demostración.* La condición necesaria es trivial. Para demostrar la condición suficiente suponemos que  $\text{asdim}(G) = \infty$  y que  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente al grupo abeliano  $A$ . Por el teorema 4.2.23, el grupo  $A$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_f$  para algún  $m \in \omega \cup \{\infty\}$  y alguna función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ . Por el corolario 3.3 de [29],

$$\infty = \text{asdim}(G) = \text{asdim}(\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_f) = \text{asdim}(\mathbb{Z}^m) + \text{asdim}(\mathbb{Z}_f) = m + 0 = m.$$

Como consecuencia de esto  $G$  será equivalente a gran escala biyectivamente a

$$\mathbb{Z}^\infty \times \mathbb{Z}_f = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_i}$$

para alguna sucesión  $\{p_i\}_{i=1}^\infty \in \{1\} \cup \Pi$ .

Se sigue del corolario 4.2.20 que para todo  $i \in \omega$  existe una equivalencia a gran escala biyectiva  $\varphi_i : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_i} \rightarrow \mathbb{Z}$  que envía el elemento neutro de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_i}$  al elemento neutro de  $\mathbb{Z}$ . Las biyecciones  $(\varphi_i)$  inducen una equivalencia a gran escala biyectiva

$$\varphi : \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_i} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^\infty, \quad \varphi(g_i) \mapsto (\varphi_i(g_i)).$$

Así,

$$G \sim A \sim \mathbb{Z}^\infty \times \mathbb{Z}_f \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{p_i} \sim \mathbb{Z}^\infty$$

donde  $\simeq$  significa isomorfo y  $\sim$  equivalente a gran escala biyectivamente.  $\square$

#### 4.2.7. Demostración del teorema principal

Dados dos grupos abelianos numerables  $G, H$  con métricas propias invariantes por la izquierda Necesitamos demostrar la equivalencia de las siguientes tres condiciones:

1. Los espacios métricos  $G, H$  son equivalentes a gran escala;
2.  $\text{asdim}(G) = \text{asdim}(H)$  y los espacios  $G, H$  son ambos conexos a gran escala o no conexos a gran escala;
3.  $r_0(G) = r_0(H)$  y los grupos  $G, H$  son ambos finitamente generados o ambos no finitamente generados.

La implicación (1)  $\Rightarrow$  (2) se sigue inmediatamente de la invariancia e la dimensión asintótica y la conexión a gran escala bajo equivalencias a gran escala.

La equivalencia (2)  $\Leftrightarrow$  (3) se sigue de los siguientes dos lemas. El primero se demostró en [29].

**Lema 4.2.25 (Dranishnikov, Smith).** *La dimensión asintótica  $\text{asdim}(G)$  de un grupo abeliano numerable  $G$  es igual a su rango libre de torsión  $G$ .*

El segundo lema es muy conocido. No obstante damos la demostración.

**Lema 4.2.26.** *Un grupo numerable  $G$  con una métrica propia invariante por la izquierda es conexo a gran escala si y solo si  $G$  es finitamente generado.*

*Demostración.* Si  $G$  es un grupo finitamente generado entonces su métrica de la palabra es conexa a gran escala, de hecho es  $\varepsilon$ -conexa para  $\varepsilon = 1$ . Para el recíproco supongamos que un grupo numerable  $G$  con una métrica propia invariante por la izquierda  $d$  es  $\varepsilon$ -conexo para algún  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . Como  $d$  es propio la bola cerrada  $B_\varepsilon(1_G)$  es finita. Como  $(G, d)$  es  $\varepsilon$ -conexo, todo elemento  $g \in G$  puede unirse con la unidad  $1_G$  por medio de una cadena  $1_G = g_0, g_1, \dots, g_n = g$  tal que  $d(g_i, g_{i+1}) \leq \varepsilon$  para todo  $i \leq n$ . Por la condición de invariancia por la izquierda esto implica  $g_i^{-1} \cdot g_{i+1} \in B_\varepsilon(1_G)$  y como podemos escribir  $g = (g_0^{-1} \cdot g_1) \cdot (g_1^{-1} \cdot g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1} \cdot g_n)$  obtenemos que  $G$  es generado por el conjunto finito  $B_\varepsilon(1_G)$ .  $\square$

Finalmente, la implicación (2)  $\Rightarrow$  (1) del teorema 4.0.7 se sigue de la versión abeliana del corolario 4.0.8.

**Lema 4.2.27.** *Un grupo numerable abeliano  $G$  de dimensión asintótica  $n = \text{asdim}(G)$  es equivalente a gran escala a*

- $\mathbb{Z}^n$  si  $G$  es finitamente generado;
- $\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  si  $G$  es infinitamente generado.

*Demostración.* Por el lema 4.2.25,  $r_0(G) = \text{asdim}(G) = n$ .

Si  $G$  es finitamente generado, entonces  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^n \oplus T$  para algún grupo finito  $T$ . Como la proyección  $\mathbb{Z}^n \oplus T \rightarrow \mathbb{Z}^n$  es una equivalencia a gran escala, el grupo  $G$  es equivalente a gran escala a  $\mathbb{Z}^n$ .

Si  $G$  no es finitamente generado, entonces por el teorema 4.2.23,  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente al grupo  $\mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_f$  para algún  $m \in \omega \cup \{\infty\}$  y alguna función  $f : \Pi \rightarrow \omega \cup \{\infty\}$ . Por el corolario 3.3 en [29],

$$n = \text{asdim}(G) = \text{asdim}(\mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_f) = \text{asdim}(\mathbb{Z}^m) + \text{asdim}(\mathbb{Z}_f) = m + 0 = m.$$

Si el grupo  $\mathbb{Z}_f$  no es finitamente generado, entonces es equivalente a gran escala a  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  de acuerdo con el corolario 4.2.6. En este caso  $G$  es equivalente a gran escala biyectivamente a  $\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

Si  $\mathbb{Z}_f$  es finitamente generado, entonces es finito y así  $n = \infty$  porque de otro modo los grupos  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_f$  y  $G$  serían finitamente generados. Como el grupo abeliano  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_f$  tiene dimensión asintótica infinita podemos aplicar el teorema 4.2.24 para concluir que  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_f$  es equivalente a gran escala biyectivamente a cualquier otro grupo numerable de dimensión asintótica infinita, en particular al grupo  $\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .  $\square$

#### 4.2.8. Embebimientos en grupos abelianos

Ahora nos ocuparemos del problema 4.0.9 de detectar grupos que son equivalentes a gran escala a grupos abelianos. Empezamos estudiando las propiedades que hacen que un grupo numerable admita una inmersión a gran escala en un grupo numerable abeliano.

Recordamos que una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios métricos se dice que es una *inmersión a gran escala* si  $f : X \rightarrow f(X)$  es una equivalencia a gran escala, donde  $f(X)$  tiene la métrica inducida por  $Y$ .

**Proposición 4.2.28.** *Si un grupo numerable  $G$  admite una inmersión a gran escala en un grupo abeliano numerable, entonces  $G$  es localmente nilpotente-*por-finito*.*

*Demostración.* Esta proposición es un corolario sencillo de un famoso teorema de M.Gromov [40].

**Teorema 4.2.29 (Gromov).** *Un grupo finitamente generado  $G$  es nilpotente-*por-finito* si y solo si  $G$  tiene crecimiento polinomial.*

Recordamos que un grupo  $G$  con un conjunto finitamente generado  $S = S^{-1}$  tiene *crecimiento polinomial* si existen constantes  $C$  y  $d$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $|S^n| \leq C \cdot n^d$ .

Para demostrar la proposición 4.2.28, suponemos que  $f : G \rightarrow A$  es una inmersión a gran escala de un grupo numerable  $G$  en un grupo abeliano  $A$ . Necesitamos

demostrar que cada subgrupo finitamente generado de  $G$  es nilpotente-por-finito. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $G$  es finitamente-generado. Elegimos un subconjunto finito de generadores  $S = S^{-1}$  para el grupo  $G$  y consideramos la métrica de la palabra  $d$  correspondiente a este conjunto  $S$ .

Se sigue que el espacio métrico  $(G, d)$  es  $\varepsilon$ -conexo para  $\varepsilon = 1$ . Como  $f$  es bornológica, el número

$$r = \omega_f(1) = \sup\{\text{diam}f(B) : B \subset G, \text{diam}(B) \leq 1\}$$

es finito. Sea  $B$  la  $r$ -bola cerrada en el grupo abeliano  $A$ , centrada en el elemento neutro de  $A$ . Como el grupo numerable  $A$  posee una métrica propia invariante por la izquierda, la bola  $B$  es finita. El subgrupo de  $A$ , generado por el conjunto  $B$  es abeliano y en consecuencia, tiene crecimiento polinomial. De este modo podemos encontrar constantes  $C, d$  tales que  $|B^n| \leq Cn^d$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $f$  es una inmersión a gran escala, el número  $m = \sup\{|f^{-1}(a)| : a \in A\}$  es finito. Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos

$$|S^n| \leq m \cdot |f(S^n)| \leq m \cdot |B^n| \leq m \cdot C \cdot n^d,$$

lo que implica que el grupo  $G$  tiene crecimiento polinomial y así es nilpotente-por-finito por el teorema de Gromov 4.2.29.  $\square$

Para grupos finitamente generados se puede demostrar el recíproco de la proposición 4.2.28

**Proposición 4.2.30.** *Un grupo finitamente generado  $G$  admite una inmersión a gran escala en un grupo abeliano numerable si y solo si  $G$  es nilpotente-por-finito.*

*Demostración.* La condición necesaria se sigue de la proposición 4.2.28. Para demostrar la condición suficiente, sea  $G$  un grupo finitamente generado y nilpotente-por-finito. Fijemos un conjunto finito de generadores  $S = S^{-1}$  para  $G$ . Por el teorema 2 de Bass en [8], el grupo  $G$  tiene crecimiento polinomial de grado entero  $d$  de tal forma que existe una constante  $C$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos

$$C^{-1}n^d \leq |S^n| \leq Cn^d.$$

Este hecho implica que la métrica de la palabra  $\rho$  en  $G$  inducida por el sistema de generadores  $S$  es 'doubling' en el sentido de que existen una constante  $C \in \mathbb{R}_+$  tal que para todo  $r \in \mathbb{R}_+$  y todo  $x_0 \in G$  tenemos

$$|B_{2r}(x_0)| \leq C \cdot |B_r(x_0)|,$$

donde  $B_r(x_0)$  denota la  $r$ -bola cerrada centrada en  $x_0$ .

Es facil ver que la fórmula

$$\sqrt{\rho}(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}, \quad x, y \in G,$$

determina una métrica propia invariante por la izquierda  $\sqrt{\rho}$  en  $G$ . En consecuencia, la aplicación identidad  $(G, \rho) \rightarrow (G, \sqrt{\rho})$  es una equivalencia a gran escala.

Como la métrica  $\rho$  en  $G$  es doubling, el teorema de embebimiento de Assouad [2] nos da un embebimiento bi-Lipschitz  $f : (G, \sqrt{\rho}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Como la aplicación identidad  $(G, \rho) \rightarrow (G, \sqrt{\rho})$  es una equivalencia a gran escala, la aplicación  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  vista como una aplicación de  $(G, \rho)$  a  $\mathbb{R}^m$  es un embebimiento a gran escala.

Es obvio que la aplicación  $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , que asigna a cada número real  $x \in \mathbb{R}$  su parte entera  $[x]$ , es una equivalencia a gran escala que induce la equivalencia a gran escala

$$i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m, \quad [\cdot]^m : (x_1, \dots, x_m) \mapsto ([x_1], \dots, [x_m]).$$

Vemos ahora que la composición  $g = i \circ f : G \rightarrow \mathbb{Z}^m$  es la inmersión a gran escala requerida. □

No sabemos si la proposición 4.2.30 es cierta para grupos localmente nilpotente-por-finito en general.

#### 4.2.9. Embebimientos cuasi-isométricos en grupos abelianos

En la sección anterior caracterizamos grupos finitamente-generados que admiten inmersiones a gran escala en grupos abelianos numerable como los grupos nilpotentes-por-finitos. En esta sección obtendremos una caracterización similar

para embebimientos cuasi-isométricos. Recordamos que una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un *embebimiento cuasi-isométrico* si existen constantes  $L, C$  tales que para todo  $x, x' \in X$  tenemos

$$\frac{1}{L}d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Ld_X(x, x') + C.$$

La desigualdad de la derecha significa que la aplicación  $f$  es *asintóticamente Lipschitz*.

Un embebimiento cuasi-isométrico  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es una *cuasi-isometría* si  $f(X)$  es grande en  $Y$ , es decir, si existe una constante real positiva  $K$  tal que para todo  $y \in Y$  existe  $x \in X$  con  $d_Y(y, f(x)) \leq K$ .

Es fácil comprobar que toda aplicación asintóticamente Lipschitz es bornológica. En consecuencia, toda cuasi-isometría es una equivalencia a gran escala. El recíproco es cierto si los espacios son geodésicos a gran escala.

Decimos que un espacio métrico  $X$  es *geodésico a gran escala* si existe una constante  $C$  tal que cada par de puntos  $x, y \in X$  pueden ser unidos por una cadena de la forma  $x = x_0, \dots, x_n = y$  tal que  $n \leq d(x, y) + 1$  y  $d_X(x_{i-1}, x_i) \leq C$  para todo  $i \leq n$ .

El siguiente lema es bien conocido.

**Lema 4.2.31.** *Toda aplicación bornológica  $f : X \rightarrow Y$  definida en un espacio métrico geodésico a gran escala es asintóticamente Lipschitz.*

Este Lema implica que toda equivalencia a gran escala entre espacios geodésicos a gran escala es una cuasi-isometría. En contraste, un embebimiento a gran escala entre espacios geodésicos a gran escala no es necesariamente un embebimiento cuasi-isométrico. El siguiente contraejemplo lo demuestra.

Consideremos el grupo de Heisenberg  $UT_3(\mathbb{Z})$  consistente en las matrices unitriangulares de la forma

$$H_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

De acuerdo con [63, 1.38], para toda métrica de la palabra en  $UT_3(\mathbb{Z})$  existen constantes positivas  $c, C$  tales que la distancias  $\|H_{(x,y,z)}\|$  de una matriz  $H_{x,y,z}$  a la matriz identidad está en el intervalo

$$c(|x| + |y| + \sqrt{|z|}) \leq \|H_{(x,y,z)}\| \leq C(|x| + |y| + \sqrt{|z|}).$$

Esto significa que el homomorfismo

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow UT_3(\mathbb{Z}), \quad h : z \mapsto H_{(0,0,z)},$$

es un embebimiento a gran escala pero no un embebimiento cuasi-isométrico.

El grupo de Heisenberg es el ejemplo más simple de un grupo no abeliano nilpotente y libre de torsión. Para tales grupos tenemos la siguiente caracterización.

**Proposición 4.2.32.** *Un grupo finitamente generado, nilpotente y libre de torsión  $G$  es abeliano si y solo si  $G$  admite un embebimiento cuasi-isométrico en un grupo finitamente generado abeliano.*

*Demostración.* Esta proposición se seguirá de su versión continua demostrada por Scott Pauls en [60].

**Teorema 4.2.33 (Pauls).** *Si un grupo de lie nilpotente y conexo  $G$  con una métrica riemanniana invariante por la izquierda admite un embebimiento cuasi-isométrico en un espacio euclídeo finito-dimensional entonces  $G$  es abeliano.*

La reducción de la proposición 4.2.32 al teorema de Pauls se hará con la ayuda de un resultado clásico de Malcev [54], ver también [62, 2.18].

**Teorema 4.2.34 (Malcev).** *Todo grupo finitamente generado nilpotente y libre de torsión es isomorfo a una red uniforme en un grupo de Lie nilpotente y simple conexo*

Recordamos que un subgrupo discreto  $H$  de un grupo topológico  $G$  se dice que es una *red uniforme* si el espacio cociente  $G/H$  es compacto.

Para demostrar la proposición 4.2.32, tomamos cualquier embebimiento cuasi-isométrico  $f : G \rightarrow A$  de un grupo finitamente generado nilpotente y libre de torsión  $G$  en un grupo finitamente generado y abeliano  $A$ . Como  $A$  es cuasi-isométrico a  $\mathbb{Z}^m$  para  $m = r_0(G)$ , podemos asumir que  $A = \mathbb{Z}^m$  sin pérdida de generalidad.

Por el teorema de Malcev, el grupo  $G$  puede ser considerado como una red uniforme en un grupo de Lie conexo y nilpotente  $L$ . Tomemos en  $L$  una métrica Riemmaniana propia e invariante por la izquierda  $L$ . Como el grupo cociente  $L/G$  es compacto, existe un subconjunto compacto  $K \subset L$  tal que  $G \cdot K = L$ . Para cada punto  $x \in L$  podemos elegir un punto  $g(x) \in G$  tal que  $x \in g(x) \cdot K$ . Se sigue así que la aplicación  $g : L \rightarrow G$  es un embebimiento cuasi-isométrico y así lo es la composición  $g \circ f : L \rightarrow A = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ . Por el teorema de Pauls podemos concluir que el grupo de Lie  $L$  es abeliano y así lo es su subgrupo  $G$ .  $\square$

**Corolario 4.2.35.** *Un grupo finitamente-generado  $G$  admite un embebimiento cuasi-isométrico en un grupo finitamente generado abeliano si y solo si  $G$  es abeliano -por-finito*

*Demostración.* Si un grupo finitamente generado  $G$  es abeliano-por-finito entonces  $G$  contiene a un subgrupo abeliano  $A$  de índice finito. En este caso la inclusión  $A \subset G$  es una cuasi-isometría y así  $G$  admite un embebimiento cuasi-isométrico en un grupo finitamente generado abeliano  $A$ .

Para demostrar la condición necesaria supongamos que un grupo finitamente generado  $G$  admite un embebimiento cuasi-isométrico en un grupo finitamente generado y abeliano. Como todo embebimiento cuasi-isométrico es un embebimiento a gran escala, el grupo  $G$  será nilpotente-por-finito de acuerdo con la proposición 4.2.28. En consecuencia  $G$  contiene un subgrupo nilpotente  $N$  de índice finito en  $G$ . Este subgrupo es finitamente generado por tres motivos:  $G$  es finitamente generado,  $N$  tiene índice finito en  $G$  y la aplicación inclusión  $i : N \rightarrow G$  es una cuasi-isometría.

Sea  $T$  el conjunto de los elementos periódicos de un grupo nilpotente  $N$ . Por el teorema 17.2.2. de [51],  $T$  es un subgrupo finito normal de  $N$  y el grupo cociente  $N/T$  es un grupo finitamente generado, nilpotente y libre de torsión. Como  $T$  es finito, el homomorfismo cociente  $q : N \rightarrow N/T$  es una cuasi-isometría. Tomando en consideración que  $q : N \rightarrow N/T$  y que  $i : N \rightarrow G$  son cuasi-isometrías, concluimos que el grupo  $N/T$  es cuasi-isométrico a  $G$  y por tanto admite un embebimiento cuasi-isométrico en un grupo finitamente generado y abeliano. Por la proposición 4.2.32, el grupo  $N/T$  es abeliano. En consecuencia, el grupo  $N$  es finito-

por-abeliano y así su centro  $Z(N)$  tiene índice finito en  $N$  por el lema 4.2.21. Esto implica que  $N$  es abeliano-por-finito y así lo será el grupo  $G$ .  $\square$

Con la ayuda del corolario 4.2.35 podemos caracterizar grupos finitos-por-abeliano de la forma que sigue.

**Corolario 4.2.36.** *Un grupo finitamente generado es finito-por-abeliano si y solo si es abeliano-por-finito y finito-por-nilpotente.*

*Demostración.* La condición necesaria se sigue del lema 4.2.21.

Para demostrar la condición suficiente, suponemos que un grupo finitamente generado  $G$  es abeliano-por-finito y finito-por-nilpotente. Sea  $A \subset G$  un subgrupo abeliano de índice finito y  $F \subset G$  un subgrupo normal finito con cociente nilpotente  $G/F$ . Sea  $q : G \rightarrow G/F$  el homomorfismo cociente. Se sigue que el grupo nilpotente  $G/F$  es finitamente-generado. Así, el subgrupo de torsión  $T$  de  $G/F$  es finito. Reemplazando el subgrupo  $F$  por  $F \cdot q^{-1}(T)$ , podemos suponer que el grupo cociente  $G/F$  es libre de torsión. Como las aplicaciones  $A \rightarrow G$  y  $G \rightarrow G/F$  son cuasi-isometrías, vemos que el grupo nilpotente libre de torsión  $G/F$  es cuasi-isométrico al grupo abeliano  $A$ . Por la proposición 4.2.32, el grupo  $G/F$  es abeliano. Por tanto, el grupo  $G$  es finito-por-abeliano.  $\square$

**Corolario 4.2.37.** *Un grupo numerable es localmente finito-por-abeliano si y solo si es localmente abeliano-por-finito y localmente finito-por-nilpotente.*

## 4.2.10. Grupos no-distorsionados

En esta sección establecemos algunas propiedades de los grupos no distorsionados. Recordamos que un subgrupo finitamente-generado  $H$  de un grupo finitamente generado  $G$  se dice *no distorsionado* en  $G$  si la aplicación inclusión  $i : H \rightarrow G$  es un embebimiento cuasi-isométrico con respecto a algunas (equivalentemente a todas) métricas de la palabra en los grupos  $H, G$ , ver [56]. Un ejemplo de subgrupos distorsionados es el subgrupo cíclico generado por la matriz  $H_{(0,0,1)}$  en el grupo de Heisenberg  $UT_3(\mathbb{Z})$ .

Decimos que un subgrupo  $H$  de un grupo numerable  $G$  es un *retracto bornológico* de  $G$  si existe una aplicación bornológica  $r : G \rightarrow H$  tal que  $r(h) = h$  para todo  $h \in H$ . Si  $r$  puede elegirse de tal forma que sea un homomorfismo de grupos, entonces diremos que  $H$  es un *complemento* en  $G$ .

**Lema 4.2.38.** *Un subgrupo finitamente generado  $H$  de un grupo finitamente generado  $G$  es no distorsionado en  $G$  si una de las siguientes condiciones se satisface:*

1.  $H$  es un retracto bornológico de  $G$ ;
2.  $H$  es un complemento en  $G$ ;
3.  $H$  tiene índice finito en  $G$ ;
4.  $G$  es abeliano-por-finito;
5.  $G$  es policíclico-por-finito y  $\text{asdim}(H) = \text{asdim}(G)$ ;

*Demostración.* Fijemos métricas de la palabra en los grupos  $H, G$ . Como una métrica de la palabra en  $H$  es geodésica a gran escala, la aplicación inclusión  $i : H \rightarrow G$  será asintóticamente Lipschitz por el lema 4.2.31.

1. Supongamos que  $r : G \rightarrow H$  es una retracción bornológica. Como la métrica de la palabra en  $G$  es geodésica a gran escala,  $r$  es asintóticamente Lipschitz y así lo será su restricción  $r|_{i(H)} = i^{-1} : i(H) \rightarrow H$ , observando que  $i$  es un embebimiento cuasi-isométrico.

2. Si  $H$  es un complemento en  $G$ , entonces  $H$  es no distorsionado en  $G$ , al ser un retracto bornológico de  $G$ .

3. Si  $H$  tiene índice finito en  $G$ , entonces la inclusión  $H \rightarrow G$  es una equivalencia a gran escala y así será una cuasi-isometría porque las métricas de la palabra en  $H$  y  $G$  son geodésicas a gran escala.

4. Supongamos que  $G$  es abeliano-por-finito y sea  $A$  un subgrupo abeliano de índice finito en  $G$ . Como  $G$  es finitamente generado, así lo será el subgrupo abeliano  $A$  y  $A \cap H$ . Como  $A$  tiene índice finito en  $G$ , el subgrupo  $A \cap H$  tiene índice finito en  $H$ . Sea  $L_1$  subconjunto linealmente independiente maximal del grupo abeliano  $A \cap H$ . Tal conjunto puede ser ampliado a un subconjunto linealmente

independiente maximal  $L$  en  $A$ . Se sigue que el subgrupo abeliano libre  $F_1$  generado por  $L_1$  es un complemento en el grupo abeliano libre  $F$ , generado por el conjunto  $L$  en  $A$ . Consecuentemente,  $L_1$  es no distorsionado en  $L$ .

Por la maximalidad de  $L_1$  y  $L$  el subgrupo  $F_1$  tiene índice finito en  $A \cap H$  mientras que  $L$  tiene índice finito en  $A$ . Así, las inclusiones  $L_1 \rightarrow A \cap H \rightarrow H$  y  $L \rightarrow A \rightarrow G$  son cuasi-isometrías. Como  $L_1$  no está distorsionado en  $L$ , el subgrupo  $H$  no estará distorsionado en  $G$ .

5. Supongamos que  $G$  es policíclico y que  $\text{asdim}(H) = \text{asdim}(G)$ . Por [29],  $\text{asdim}(G)$  es igual al rango de Hirsh  $hr(G)$  de  $G$ , mientras  $\text{asdim}(H)$  es igual a  $hr(H)$ . Por inducción en la longitud de Hirsh se puede ver fácilmente que la igualdad  $hr(H) = hr(G)$  implica que  $H$  tiene índice finito en  $G$  y así  $H$  es no distorsionado en  $G$  por el tercer ítem del lema.  $\square$

Un grupo  $G$  se dice que es *no distorsionado* si  $G$  es unión de una sucesión no decreciente  $(G_n)_{n \in \omega}$  de subgrupos finitamente generados tal que cada subgrupo  $G_n$  es no distorsionado en  $G_{n+1}$ .

**Proposición 4.2.39.** *Un grupo numerable  $G$  es no distorsionado si una de las siguientes condiciones se satisface:*

1.  $G$  contiene un subgrupo finitamente generado  $H$  de índice localmente finito en  $G$ ;
2.  $G$  es localmente abeliano-por-finito;
3.  $G$  es localmente policíclico-por-finito y  $\text{asdim}(G) < \infty$ ;
4.  $G$  admite un embebimiento a gran escala en un grupo numerable abeliano y  $\text{asdim}(G) < \infty$ .

*Demostración.* 1,2. Los dos primeros ítems de esta proposición se siguen inmediatamente de los ítems 3,4 del lema 4.2.38.

3. Supongamos que el grupo  $G$  es localmente policíclico-por finito y que  $\text{asdim}(G) < \infty$ . Por [29], el grupo  $G$  contiene un subgrupo finitamente generado  $H$  tal que  $\text{asdim}(H) = \text{asdim}(G)$ . Escribimos  $G$  como la unión de la sucesión  $H = G_0 \subset G_1 \subset$

... de subgrupos finitamente generados. Cada grupo  $G_n$  es policíclico-por-finito porque  $G$  es localmente policíclico-por-finito. Se sigue de  $\text{asdim}(H) = \text{asdim}(G)$  que  $\text{asdim}(G_n) = \text{asdim}(H)$  para todo  $n$ . Ahora el lema 4.2.38(5) implica que el grupo  $G_n$  es no distorsionado en  $G_{n+1}$ , lo que significa que el grupo  $G$  es no distorsionado.

4. Supongamos que  $G$  admite un embebimiento a gran escala en un grupo abeliano numerable y que  $\text{asdim}(G) < \infty$ . Por la proposición 4.2.28, el grupo  $G$  es localmente nilpotente-por-finito. Como los grupos nilpotentes finitamente generados son policíclicos,  $G$  es localmente policíclico-por-finito y así es no distorsionado de acuerdo con el ítem precedente.  $\square$

#### 4.2.11. Grupos equivalentes a grupos abelianos

En esta sección estudiamos grupos no distorsionados que son equivalentes a gran escala a grupos abelianos. El siguiente teorema es nuestro mayor resultado en esta dirección.

**Teorema 4.2.40.** *Si un grupo numerable  $G$  no distorsionado es equivalente a gran escala a un grupo abeliano numerable  $A$ , entonces  $G$  es localmente abeliano-por-finito*

*Demostración.* Como  $G$  es equivalente a gran escala a  $A$  existen dos aplicaciones bornológicas  $f : G \rightarrow A$ ,  $g : A \rightarrow G$  y una constante  $r \in \mathbb{R}_+$  tal que  $d_G(g \circ f(x), x) \leq r$  y  $d_A(f \circ g(y), y) \leq r$  para todo  $x \in G$  y  $y \in A$ .

El grupo  $G$  al ser no distorsionado, puede escribirse como la unión  $G = \bigcup_{n \in \omega} G_n$  de una sucesión no decreciente  $(G_n)_{n \in \omega}$  de subgrupos finitamente generados de  $G$  tal que cada subgrupo  $G_n$  es no distorsionado en  $G_{n+1}$ . También podemos suponer que el grupo  $G_0$  contiene a la  $r$ -bola cerrada  $B_r(1_G) \subset G$ .

Como las restricciones  $f|_{G_n} : G_n \rightarrow A$  son embebimientos a gran escala, los grupos  $G_n$  son nilpotentes-por-finito de acuerdo con la proposición 4.2.28. Afirmamos que cada grupo  $G_n$  es abeliano-por-finito. Existe un subgrupo abeliano finitamente generado  $A_n \subset A$  tal que  $f(G_n) \subset A_n$ . La propiedad de ser abeliano-por-finito del grupo  $G_n$  se seguirá del corolario 4.2.35 tan pronto como veamos que

la restricción  $f|_{G_n} : G_n \rightarrow A_n$  es un embebimiento cuasi-isométrico con respecto a las métricas de la palabra en  $G_n$  y  $A_n$ . En primer lugar obsérvese que esta aplicación es asintóticamente Lipschitz porque la métrica de la palabra en  $G_n$  es geodésica a gran escala.

Como el subgrupo  $A_n$  es finitamente generado y  $g : A \rightarrow G$  es bornológica, la imagen  $g(A_n)$  está contenida en algún subgrupo finitamente generado de  $G_m$  de  $G$ . Además, al ser la métrica de la palabra en  $A_n$  geodésica a gran escala, la aplicación  $g|_{A_n} : A_n \rightarrow G_m$  es asintóticamente Lipschitz y así lo es su restricción  $g|_{f(G_n)} : f(G_n) \rightarrow G_m$ . Considerando la definición de  $r$  y la inclusión  $B_r \subset G_0 \subset G_n$ , podemos afirmar que  $g \circ f(G_n) \subset G_n$ . Como la inclusión  $G_n \subset G_m$  es un embebimiento cuasi-isométrico, la aplicación  $g : f(G_n) \rightarrow G_n$  es asintóticamente Lipschitz con respecto a la métrica de la palabra en el grupo  $G_n$ . Esto implica que  $f|_{G_n} : G_n \rightarrow A_n$  es un embebimiento cuasi-isométrico. Así, podemos aplicar el Corolario 4.2.35 para concluir que el grupo  $G_n$  es abeliano-por-finito y en consecuencia, el grupo  $G$  es localmente abeliano-por-finito.  $\square$

Unificando el Teorema 4.2.40 con la proposición 4.2.39 y el corolario 4.2.37 obtenemos los dos últimos ítems del teorema 4.0.11 (el primer ítem de este teorema se sigue directamente de la proposición 4.2.28).

**Corolario 4.2.41.** *Si un grupo numerable  $G$  es equivalente a gran escala a un grupo abeliano, entonces*

1.  *$G$  es localmente abeliano-por-finito si y solo si  $G$  es no distorsionado;*
2.  *$G$  es finito-por-abeliano si y solo si  $G$  es no distorsionado y localmente finito-por-nilpotente.*

El siguiente corolario se refiere a grupos con dimensión asintótica finita.

**Corolario 4.2.42.** *Si un grupo numerable  $G$  de dimensión asintótica finita es equivalente a gran escala a un grupo abeliano, entonces  $G$  es localmente abeliano-por-finito.*

*Demostración.* Por la proposición 4.2.39(4), el grupo  $G$  es no distorsionado y por el teorema 4.0.7,  $G$  es localmente abeliano-por-finito.  $\square$

Finalmente, caracterizamos los grupos finitamente generados que son (biyectivamente) equivalentes a gran escala a grupos abelianos.

**Corolario 4.2.43.** *Para un grupo finitamente generado  $G$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  *$G$  es abeliano-por-finito.*
2.  *$G$  es equivalente a gran escala a un grupo abeliano numerable;*
3.  *$G$  es biyectivamente equivalente a gran escala a un grupo abeliano numerable;*

*Demostración.* La implicación (1)  $\Rightarrow$  (3) se demostró en el corolario 4.2.19 mientras que (3)  $\Rightarrow$  (2) es trivial. Como los grupos finitamente generados son no distorsionados, la implicación (2)  $\Rightarrow$  (1) se sigue del teorema 4.2.40.  $\square$

# Bibliografía

- [1] P. Assouad, *Sur la distance de Nagata*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **294** (1982), no. 1, 31–34.
- [2] P. Assouad, *Plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$* , Bull. Soc. Math. France **111** (1983), 429–448.
- [3] R. Baer, *Finiteness properties of groups*, Duke Math. J. **15** (1948), 1021–1032.
- [4] T. Banakh, B. Bokalo, I. Guran, T. Radul, M. Zarichnyi *Problems from the Lviv topological seminar*, in Open problems in Topology II. (E. Pearl ed.) Elsevier, 2007. P. 655–667.
- [5] T. Banakh, **J. Higes**, I. Zarichnyi *The coarse classification of countable abelian groups*. preprint.
- [6] T. Banakh, I. Protasov, *Ball structures and colorings of graphs and groups*, Matem. Studii Monograph Series. 11, VNTL Publ. 2003, 148p.
- [7] T. Banakh, I. Zarichnyy, *The coarse classification of homogeneous ultra-metric spaces*. preprint (arXiv:0801.2132).
- [8] H. Bass, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 603–614.
- [9] J. Behrstock and Y.N. Minsky, *Dimension and rank for mapping class groups*, preprint ArXiv:math.GT/0512352.

- [10] G.Bell and A.Dranishnikov, *On asymptotic dimension of groups acting on trees* Geom. Dedicata **103** (2004), 89–101.
- [11] G. Bell, A. N. Dranishnikov, J. E. Keesling, *On a formula for the asymptotic dimension of free products.* Fund. Math. 183 (2004), no. 1, 39–45.
- [12] G. Bell and A. Dranishnikov, *A Hurewicz-type theorem for asymptotic dimension and applications to geometric group theory,* Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 11, 4749–4764
- [13] G.Bell, A.Dranishnikov *Asymptotic dimension,* Topology Appl. 155 (2008), no. 12, 1265–1296.
- [14] Bogatyĭ, S. A., *A universal uniform rational ultrametric on the space irrational numbers,* (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2000, no. 6, 20–24; translation in Moscow Univ. Math. Bull. **55** (2000), no. 6, 20–24 (2001).
- [15] Bogatyĭ, S. A., *Metrically homogeneous spaces,* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 2(344), 3–22; translation in Russian Math. Surveys **57** (2002), no. 2, 221–240.
- [16] N. Brodskiy, J. Dydak, *Coarse dimensions and partitions of unity,* RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 102 (2008), no. 1, 1–19.
- [17] N. Brodskiy, **J. Higes**, *Assouad-Nagata dimension of tree-graded spaces.* Preprint.
- [18] N.Brodskiy, J.Dydak, U.Lang, *Assouad-Nagata dimension of wreath products of groups,* preprint math.MG/0611331v2.
- [19] N. Brodskiy, J. Dydak, M. Levin, A. Mitra, *Hurewicz Theorem for Assouad-Nagata dimension,* J. Lond. Math. Soc. (2) 77 (2008), no. 3, 741–756.
- [20] N.Brodskiy, J.Dydak, **J.Higes**, A.Mitra, *Nagata-Assouad dimension via Lipschitz extension,* Israel Journal of Mathematics (acceptado), arxiv:math.MG/0601226.

- [21] N.Brodskiy, J.Dydak, **J.Higes**, A.Mitra, *Dimension zero at all scales*, Topology and its Appl. **154** (2007), 2729-2740.
- [22] J.Burillo, *Dimension and fundamental group of asymptotic cones*, Journal of the London Mathematical Society (1999), 59, 557–572.
- [23] S. Buyalo, *Asymptotic dimension of a hyperbolic space and capacity dimension of its boundary at infinity*, Algebra i analiz (St. Petersburg Math. J.), **17** (2005), 70–95 (in Russian).
- [24] S.Buyalo and V.Schroeder, *Hyperbolic dimension of metric spaces*, Algebra i Analiz 19 (2007), no. 1, 93–108; translation in St. Petersburg Math. J. 19 (2008), no. 1, 67–76.
- [25] G. David, S. Semmes, *Fractured fractals and broken dreams. Self-similar geometry through metric and measure*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 7. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.
- [26] A. Dranishnikov, *Asymptotic topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), no.6, 1085–1129.
- [27] A. Dranishnikov, *On hypersphericity of manifolds with finite asymptotic dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 155–167.
- [28] A. Dranishnikov, *Open problems in asymptotic dimension theory*, preprint, in <http://aimbri12.securesites.net/pggt>
- [29] A.Dranishnikov and J.Smith, *Asymptotic dimension of discrete groups*, Fund. Math. 189 (2006), 27–34.
- [30] A.Dranishnikov and J.Smith *On asymptotic Assouad-Nagata dimension*, Topology and its Appl. **154** (2007), no. 4, 934–952
- [31] A. Dranishnikov, M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*, Topology Appl. **140** (2004), no.2-3, 203–225.

- [32] L. van den Dries, A.J. Wilkie, *On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*, J. Algebra 89 (1984), 349–374.
- [33] C. Drutu, *Quasi-isometry invariants and asymptotic cones*, Int. J. Algebra Comput. 12 (1 and 2) (2002),99–135.
- [34] C. Drutu, M. Sapir, *Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups*, Topology **40** (2005), 959–1058.
- [35] C. Drutu, M.Sapir, *Groups acting on tree-graded spaces and splittings of relatively hyperbolic groups*, Adv. Math. 217 (2008), no. 3, 1313–1367.
- [36] J.Dydak, **J.Higes**, *Asymptotic cones and Assouad-Nagata dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 6, 2225–2233
- [37] A. Eskin, D. Fisher, K. Whyte *Coarse differentiation of quasi-isometries II: Rigidity for Sol and Lamplighter groups*. preprint. arXiv:0706.0940
- [38] A. Giraldo, M. A. Morón, F. R. Ruiz Del Portal, J.M.R. Sanjurjo, *Shape of global attractors in topological spaces*. Nonlinear Anal. 60 (2005), no. 5, 837–847
- [39] S. R. Gal, *Asymptotic dimension and uniform embeddings*, Groups Geom. Dyn. 2 (2008), no. 1, 63–84.
- [40] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. IHES 53 (1981) 53–73.
- [41] M. Gromov, *Asymptotic invariants for infinite groups*, in Geometric Group Theory, vol. 2, 1–295, G. Niblo and M. Roller, eds., Cambridge University Press, 1993.
- [42] P. de la Harpe *Topics in geometric group theory*. Chicago lectures in Math. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [43] J.Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer Verlag, Universitext 2001.

- [44] P. Hilton, *On a theorem of Schur*, Int. J. Math. Math. Sci. **28**: 8 (2001), 455–460.
- [45] **J.Higes**, *A coarse classification of countable Abelian groups*, preprint (arXiv:0803.0379v1).
- [46] **J.Higes**, *Assouad-Nagata dimension of locally finite groups and asymptotic cones*, preprint (arXiv:0711.1512).
- [47] **J. Higes**, *Assouad-Nagata dimension of nilpotent groups with arbitrary left invariant metrics*, preprint arXiv:0804.4533
- [48] **J. Higes**, A. Mitra, *Asymptotic dimension and a property of Nagata*, preprint arXiv:0812.1641
- [49] J.R. Isbell, *Uniform spaces*, Mathematical Surveys, No. 12 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1964 xi+175 pp.
- [50] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [51] M.I. Kargapolov, Ju.I.Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer, 1979.
- [52] U. Lang, T. Schlichenmaier, *Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions*, IMRN International Mathematics Research Notices (2005), no. 58, 3625–3655.
- [53] A. Lemin, *On ultrametrization of general metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 979–989.
- [54] A.I. Malcev, *On a class of homogeneous spaces*, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 13, (1949). 9–32.
- [55] E.J. McShane, *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 837–842.

- [56] M. Mitra, *Coarse extrinsic geometry: a survey*, Geom. Topol. Monogr. 1 (1998), 341-364.
- [57] J. Nagata, *On a relation between dimension and metrization*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 237–240.
- [58] B.H. Neumann, *Groups covered by permutable subsets*, J. London Math. Soc. 29 (1954), 236-248.
- [59] P.W. Nowak, *On exactness and isoperimetric profiles of discrete groups*, Journal of functional analysis. **243** (2007), no.1, 323-344.
- [60] S. Pauls, *The large scale geometry of nilpotent Lie groups*, Comm. Anal. Geom. **9**:5 (2001), 951–982.
- [61] I.V. Protasov, *Morphisms of ball's structures of groups and graphs*, Ukrainian Math. J. **54** (2002), no. 6, 1027–1037.
- [62] M.S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, 1972.
- [63] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [64] J. Roe, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 9, 2489–2490
- [65] J.M. R. Sanjurjo, *Multihomotopy, Cech spaces of loops and shape groups*. Proc. London Math. Soc. (3) 69 (1994), no. 2, 330–344
- [66] J. M. Sanjurjo, *Problems from the Madrid department of Geometry and Topology* in: Open Problems in Topology, II (E. Pearl ed.) Elsevier, 2007. P. 737-741.
- [67] R. Sauer, *Homological invariants and quasi-isometry*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 476–515.
- [68] Y. Shalom, *Harmonic analysis, cohomology, and the large-scale geometry of amenable groups*, Acta Math., **192** (2004), 119–185.

- [69] J. Smith, *On Asymptotic Dimension of Countable Abelian Groups*, *Topology Appl.* 153 (2006), no. 12, 2047–2054.
- [70] J. Taback, K. Whyte, *The large scale geometry of some metabelian groups*, *Michigan Math. J.* 52 (2004), no. 1, 205–218.
- [71] P.S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, *Bull. Sci. Math.* **51** (1927), 43–65 and 74–96.
- [72] G. Yu *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*. *Ann. of Math. (2)* 147 (1998), no. 2, 325–355.