UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Existencia, unicidad y propiedades de algunas ecuaciones en derivadas parciales semilineales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Juan Luis Vázquez Suárez

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMATICAS

EXISTENCIA, UNICIDAD Y PROPIEDADES DE ALGUNAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES SEMILINEALES

Memoria presentada para optar
al grado de Doctor por
JUAN LUIS VAZQUEZ SUAREZ

Departamento de ECUACIONES FUNCIONALES. Madrid, 1979.

A ISABEL Y MARILUZ

Es hoy día un hecho reconocido que la investigación científica ya no es posible de forma aislada. En consecuencia esta memoria es fruto de múltiples factores que incluyen muchas horas de trabajo conjunto: Entre otros factores quisiera recordar mi presencia en el Departamento de Ecuaciones Funcionales gracias al estímulo del Prof. Baldomero Rubio, mi iniciación a las Ecuaciones en Derivadas Parciales no lineales con el Prof. Ildefonso Díaz, quien dirigió este trabajo y me asesoró a lo largo del mismo y el ambiente de trabajo creado por los profesores del Departamento, estímulo importantísimo.

Parte principal en la elaboración de este trabajo desempeñaron los contactos con las Universidades de Paris VI y Besançon: el Pr. Brézis (Dép. de Mathématiques, Univ. de París VI) me propuso lo esencial del trabajo presente; su consejo me ha sido inestimable. El Pr. Bénilan (Dép. de Math., Univ. de Bensançon) me propuso el estudio de las medidas (cap. I) y supo hacer compatibles sus consejos científicos en diversos temas con la amistad. Muchos otros profesores de ambas Universidades nos han ayudado con su estímulo y múltiples sugerencias.

Miguel Angel Herrero compartió día a día el esfuerzo de elaboración de nuestros trabajos. Con él he tenido numerosas discusiones.

No quisiera olvidar la influencia de tantos otros profesores universitarios a quienes me ha unido -y me une- el esfuerzo por una Universidad renovada al servicio de la Ciencia y de nuestro pueblo; ni la de mis alumnos de las Facultades de Matemáticas y Físicas, de cuyo contacto tanto he aprendido.

Finalmente Soledad Estévez ha realizado un excelente trabajo mecanográfico. A todos deseo expresar aquí mi agradecimiento.

INDICE

INTRODUCCION

A lo largo de la presente memoria se estudia la existencia, unicidad y propiedades de las soluciones de las ecuaciones semilineales en derivadas parciales de los tipos siguientes:

1. Problema (P):

Estudiar en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ el problema semilineal elíptico

$$(P) = (P_{\beta f}) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f$$

en que β es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(0)$ -por ejemplo, una función monótona creciente $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\beta(0) = 0$- y $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

2. Problema (E):

Dado Ω^N, el toro N-dimensional, estudiar el problema de primer orden

$$(E) = (E_{\beta f}) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(u) \ni f$$

en que $f \in L^1(\Omega^N)$, o más en general $f \in L^p(\Omega^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, β es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ y a_i, $i=1,\ldots N$, son constantes reales.

1. El problema (P) ha sido extensamente estudiado durante los últimos años así como el problema de evolución asociado

$$(P_{ev}) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\, \beta(u) \ni f$$

Los problemas (P), (P_{ev}) rigen diversos fenómenos físicos como filtración de líquidos y gases en medios porosos, termoconducción con coeficiente de conductividad dependiente de la temperatura, problemas de elasticidad vía Calculo de Variaciones como ecuaciones de Euler asociadas a la minimización de ciertos funcionales convexos (cf. Díaz |23|, |24| para referencia detallada).

En un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, el problema de existencia y unicidad de soluciones de (P) para $f \in L^1(\Omega)$ es resuelto por Brézis y Strauss |18| con diversas condiciones de contorno. Trabajos similares se deben a Konishi |31|, Crandall |20|, Browder |19| y da Prato |22|. Trabajos pioneros son debidos a Višik (cf. la exposición de Oleĭnik |40|) yLeray-Lions |36|.

En |9| Bénilan, Brézis y Crandall estudian (P) en todo $\mathbb{R}^N$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ obteniendo existencia de soluciones (en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$) y caracterizando la posible unicidad, resultados que citamos en §0.2 y serán punto de referencia capital de esta memoria.

Por último en |7| Bénilan generaliza los resultados de |9| al caso en que $f \in M(\mathbb{R}^N)$, i.e. es una medida de Radón acotada en $\mathbb{R}^N$, siempre que $N \geq 3$. Este resultado es utilizado luego por Bénilan y Brézis |8| para el estudio de la ecuación de Thomas-Fermi en el caso de cargas localizadas, tanto en el caso relativista como en el no relativista.

En cuanto a la existencia de soluciones de soporte compacto Brézis en |13|, |14| *establece este tipo de soluciones para* (P) *en un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *para datos de soporte compacto y* $0 \in \mathrm{Int}\ \beta(0)$, *en particular. En* | 9 | *Bénilan, Brézis y Crandall establecen que la propiedad necesaria y suficiente para que exista para toda* $f \in L_0^1(\mathbb{R}^N)$, *función integrable de soporte compacto, una solución* $u \in L_0^1(\mathbb{R}^N)$ *de* $(P_{\beta f})$, *siendo* β *un g.m.m. tal que* $0 \in \beta(0)$ *es la siguiente*

$$\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{\phi(s)}} < \infty$$

donde $\phi(s) = \int_0^s \beta(r)dr.$

Esta condición es utilizada por I. Díaz |23| *para obtener soluciones de soporte compacto para* $(P_{\beta f})$ *en abiertos no acotados* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *para datos de soporte compacto con condiciones de Dirichlet o Neumann, proporcionando este método un procedimiento de obtención de soluciones en abiertos no acotados de* $\mathbb{R}^N$.

En | 7 | *Bénilan completa estos resultados estudiando el comportamiento en el infinito de las soluciones de* (P) *para* $N \geq 3$: *bajo la restricción de que* f *este acotada por una función radial en un entorno del infinito se demuestra que la solución* u *de* (P) *converge uniformemente a cero en el infinito.*

Nuestro trabajo sobre la ecuación (P) *abarca los capítulos I, II y III.*

En el <u>*Capítulo 0*</u> *dedicamos una sección a fijar los conceptos y resultados fundamentales a que recurriremos a lo largo de* *la memoria. En una segunda sección citamos los teoremas fundamentales de* |18|, |9|, |7| *y* |23| *que sirven de base inmediata a nuestro trabajo.*

En el <u>*capítulo I*</u> *extendemos los resultados de Bénilan sobre existencia de soluciones para* $(P_{\beta f})$ *cuando* f *es una medida acotada a las dimensiones* $N=2$, 1. *Así para* $N=2$ *el* <u>*Teorema I.1*</u> *caracteriza la posible unicidad, el* <u>*Teorema I.2*</u> *la comparación de soluciones y el* <u>*Teorema I.3*</u> *establece la existencia de soluciones* $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ *tales que* $|grd\ u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $\Delta u \in M(\mathbb{R}^2)$ *para* $(P_{\beta f})$, f *cualquier medida acotada si y solo si* β *cumple la condición*

$$(C_2) \qquad D(\beta) = \mathbb{R}\ ; \qquad \int_0^\infty [\beta(r) - \beta(-r)]\, e^{-ar}\, dr < \infty, \quad \forall a > 0$$

La dificultad para probar la existencia de soluciones radica en el distinto comportamiento para $N \geq 3$ *y* $N=1,2$ *de las soluciones fundamentales* $E_N(x)$ *del operador* $-\Delta$, *lo cual ya provoca para* $f \in L^1$ *un estudio separado (ver BBC* |9|*). El útil fundamental introducido por nosotros es un resultado de John y Nirenberg (cf. Lema I.3). Así evitamos el recurso explícito a las funciones B.M.O. (recordemos que* $E_2(x) = \frac{1}{2\pi} lg \frac{1}{|x|} \in B.M.O(\mathbb{R}^2)$*)*

El caso $N=1$ *(*<u>*Teoremas I.b, II.b, III.b*</u>*) es paralelo y esencialmente más fácil, obteniendose un resultado interesante (Teorema III.b).*

En el <u>*Capítulo II*</u> *resolvemos para* $N=2$ *el problema de saber si las soluciones de* $(P_{\beta f})$, $f \in M(\mathbb{R}^2)$ *convergen a cero en el infinito: si* $|f|$ *está acotada en un entorno el infinito por una medida radial* g *y si* β *es un g.m.m. tal que*

$0 = \beta^{-1}(0)$, $\beta \in (C_2)$ *la solución* u *de* $(P_{\beta f})$ *obtenida en* §*1 converge uniformemente a cero en el infinito. Caso de que* $\beta^{-1}(0) = [a,b] \neq \{0\}$ *solo podemos afirmar que*

$$\limsup_{|x| \to \infty} u \leq b \ , \qquad \liminf_{|x| \to \infty} u \geq a$$

La demostración se realiza en una 1ª parte para el caso radial (Teorema II.1, Prop. II.2) y luego en la 2ª parte para el general (Teorema II.2) con la ayuda del importante lema técnico A.2 (Apéndice). En el apartado II.3 se precisa el alcance de los resultados anteriores mediante ejemplos y contraejemplos. En §III.4 se estudia la velocidad de convergencia de las soluciones cuando $|x| \to \infty$ *en función del comportamiento de* β *y* f *(Props. II.5, II.6) y en §III.5 el caso en que* $f \in M(\mathbb{R}^2)$ *es de soporte compacto (Prop. II.7), generalizando en particular la condición de BBC* |9| *sobre* β *para la existencia de soluciones de soporte compacto (Prop. II.7.a3)).*

En la 3ª parte se estudia el caso N=1 esencialmente más fácil, obteniendo resultados análogos.

El Capítulo III reune algunos otros resultados de existencia de soluciones para la ecuación (P) en $\mathbb{R}^N$.

En la 1ª parte tratamos el caso de funciones f *acotadas en el infinito. En el Teorema III.1 obtenemos soluciones* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *para determinadas* f *acotadas en el infinito y establecemos una acotación de las soluciones (cf. (11) y (12) del Tª III.1 y Corolario III.1) que nos permite por una técnica de doble paso al límite que introducimos nosotros obtener en el Teorema III.2 soluciones en* $L^\infty(\Omega)$ *de* $(P_{\beta f})$ *para funciones* f

no integrables, *soluciones que denominamos "sup-inf" e "inf--sup", para las que elaboramos resultados de comparación y unicidad similares al §I (Props III.1, III.2). Finalmente el Teorema III.3 establece para $N \geq 2$ la acotación en un entorno del infinito de las soluciones de $(P_{\beta f})$ cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ está suficientemente acotada en un entorno del infinito, condiciones más débiles que en el Teorema III.1.*

En la 2ª parte utilizando un método de paso al límite doble como en el Teorema III.2 establecemos existencia de soluciones para ciertas f medidas de Radón no acotadas, siempre que $0 \in \beta(0) \equiv [\gamma^-,\gamma^+] \neq \{0\}$ y f esté "casi comprendida" en $\beta(0)$ cuando $|x| \to \infty$ (Teorema III.4), obteniendose resultados de comparación y unicidad de las soluciones resultantes (Prop. III.3).

2. La ecuación $(E_{\beta f})$ ha sido estudiada por Brézis y Nirenberg |16| en el caso en que f es una función continua. Como se señala en |16| no es posible utilizar aquí en general informaciones del tipo de |15| sobre el rango de la suma de dos operadores monótonos en $L^2(\Omega)$:

$$Int_{L^2} R(A + B) = Int_{L^2}(R(A) + R(B))$$

dado que en general si $Au = \Sigma\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ y $B(u) = \beta(u)$, $R(A) + R(B)$ tiene interior vacío.

En el capítulo IV estudiamos $(E_{\beta f})$, para $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, utilizando la teoría de operadores acretivos (cf. Bénilan | 3 |, | 4 |, Crandall |21|) y T-acretivos (cf. Bénilan, op. cit., Picard |41|, Lê |35|), demostramos prime ro (Prop. IV.3) que $A \circ \beta^{-1}$ es un operador T-acretivo en $L^1(\Omega)$ y a continuación §IV.2, deducimos diversos teoremas de existencia: Teorema 1.1', 1" para $f \in L^\infty(\Omega)$, Teorema 2 para $f \in L^1(\Omega)$ y Teorema 3 para $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, imponiendo sobre β las condiciones respectivamente necesarias.

En §IV.3 estudiamos la unicidad y no unicidad de soluciones de (E) en el caso en que $\{a_i\}$ es un conjunto de números reales linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (Prop. IV).

En el Apéndice figuran una serie de resultados de índole más técnica sobre convoluciones, desigualdades integrales y otros tópicos afines. El Apéndice de BBC |9| ("what you always wanted to know about Δ^{-1} in $L^1(\mathbb{R}^N)$") es prerrequisito a muchos de estos resultados y es ampliamente utilizado a lo largo de la memoria.

Los resultados fundamentales empleados quedan reunidos en el capítulo 0. En los restantes capítulos los resultados citados figuran notados con letras mayúsculas (Teorema A) o en la notación original en cita entrecomillada (Theorem 6.5, BBC |9|:...). Los demás resultados figuran numerados por capítulos. Los capítulos se dividen en partes y secciones. La numeración de las fórmulas se realiza en general por partes de capítulo y dentro de la misma parte se prescinde del prefijo de la parte. El final de demostración o enunciado en su caso se nota con una estrella (*).

El artículo de Bénilan, Brézis, Crandall, abreviado en general BBC |9| es prerrequisito obligado para los capítulos I, II, III y el Apéndice.

CAPITULO 0

P R E L I M I N A R E S

0.1: Notaciones y Resultados generales

0.1.1: En esta sección fijaremos las notaciones que se emplearán a lo largo del trabajo y citaremos los resultados fundamentales y referencias de consulta para los principales espacios funcionales, de medidas y operadores empleados.

a) En general Ω será a lo largo del trabajo un abierto de $\mathbb{R}^N$, no necesariamente acotado, de borde $\Gamma = \partial\Omega$. $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$, su cierre $\overline{B}_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$, $S_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = R\}$ es la circunferencia de radio R, $R > 0$ centrada en el origen, $S_R = \partial B_R(0)$. $\Omega^R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R\}$ designa el exterior de $\overline{B}_R(0)$.

Si P es una cierta propiedad escribiremos abreviadamente $\{x \in \mathbb{R}^N : x \in P\}$ cuando el sentido es claro en la forma $[P]$. Así: $[|x| > R]$, $[u > 0]$, etc.

Si Ω es un subconjunto medible (Borel) de $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{ms} \Omega = \int_\Omega dx$ es su medida de Lebesgue.

$\Omega' \subset\subset \Omega$ significa que $\Omega' \subset \Omega$ y $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$.

ctp significa "casi para todo punto" (respecto a la medida de Lebesgue si no se indica lo contrario).

Si m es un entero positivo, $C^m(\Omega)$ son las funciones de clase m en Ω, $C(\Omega) = C^o(\Omega)$, $C_o^m(\Omega)$ las funciones de clase C^m con soporte compacto, $\mathcal{D}(\Omega) = C_o^\infty(\Omega)$ las funciones de clase infinito con soporte compacto, $\mathcal{D}'(\Omega)$ las distribuciones $C_\bullet^m(\Omega)$ designa las funciones de clase C^m que tienden uniformemente a cero en el infinito.

$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$ es el soporte de $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

b) <u>Espacios $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$</u>. (cf. Rudin [43], Dunford-Schwartz [26]). Para $1 \leq p < \infty$ designamos mediante $L^p(\Omega)$ el espacio de las (clases de) funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, medibles y p-integrables respecto a la medida de Lebesgue dx con la norma

$$\|u\|_p = \int_\Omega |u(x)|^p . dx < \infty$$

Para la norma $\|.\|_p$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach. $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto

$$<u,v> = \int_\Omega u(x).v(x)dx$$

Si $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es reflexivo y más aún, uniformemente convexo. Si $p' = \frac{p}{p-1}$ se puede identificar $((L^p(\Omega))'$ con $L^{p'}(\Omega)$.

Para $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ medible definimos

$$\|u\|_\infty = \sup \mathrm{ess} \{|u(x)| : x \in \Omega\}$$

siendo sup ess el supremo esencial que abreviaremos en adelante sup. $L^\infty(\Omega)$ se define como el espacio de las (clases de) funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\|u\|_\infty < \infty$. $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach identificable a $L^1(\Omega)'$, dual de $L^1(\Omega)$.

Si $1 \leq p \leq \infty$ $L^p_o(\Omega)$ es el espacio de funciones de $L^p(\Omega)$ con soporte compacto.

b') <u>Compacidad débil en $L^p(\Omega)$</u> (cf. Friedman [28], Dunford-Schwartz [26]). Si $1 < p < \infty$, un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$ es relativamente débilmente compacto (r.w.c.), dado que

$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo. Esta compacidad es entonces equivalente (T^{a} de Eberlein-Smulian) a la "compacidad secuencial débil" (s.w.c): de toda sucesión se puede extraer una subsucesión débilmente convergente. Designaremos a veces la topología débil $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$ como $L^p(\Omega)$-w y escribiremos $\{u_n\}$ converge débilmente a u : $u_n \longrightarrow u$.

En $L^\infty(\Omega)$ todo subconjunto acotado es r.w*.c. y s.w*.c. para la topología "débil estrella" ó w*, $\sigma(L^\infty, L^1)$. Escribimos en este caso $u_n \longrightarrow u$ en $L^\infty(\Omega)$-w*.

En $L^1(\Omega)$ los subconjuntos rwc ó swc para la topología w, es decir $\sigma(L^1, L^\infty)$ vienen caracterizados por el "Teorema de Dunford-Pettis" (cf. Dunford-Schwartz [26] ó Edwards [27] para $\mu(\Omega) = \infty$):

"Sea (Ω, M, μ) un espacio de medida. Un subconjunto K de $L^1(\Omega)$ es s.w.c. si y solo si es uniformemente integrable, es decir:

i) $\forall \varepsilon > 0$ $\delta > 0$ tal que si $E \subset \Omega$ y $\mu(E) < \delta$, $\forall f \in K$

$$\int_E |f(s)|\,d\mu < \varepsilon$$

ii) $\exists\, C > 0$ tal que $\forall f \in K$, $\int_\Omega |f|\,d\mu < C$

iii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un compacto $E \subset \Omega$ tal que $\forall f \in K$

$$\int_{\Omega - E} |f|\,d\mu < \varepsilon$$

Si Ω es de medida finita, i) es suficiente* b") $\underline{L^p_{loc}(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty}$.

Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $1 \leq p \leq \infty$ se define $L^p_{loc}(\Omega)$ como el espacio de (clases de) funciones medibles cuya restricción a cualquier conjunto compacto, K, de Ω pertenece a $L^p(K)$. $L^p_{loc}(\Omega)$ es un espacio metrizable.

Los criterios de compacidad débil se aplican a $L^p_{loc}(\Omega)$ para las topologías débiles adecuadas razonando sobre una sucesión exhaustiva de compactos, $\{K_n\}$ de Ω $(\bigcup K_n = \Omega)$. En particular (cf. Lê [35]) es válido en $L^1_{loc}(\Omega)$ el Teorema de Dunford-Pettis sustituyendo la uniforme integrabilidad por la "uniforme integrabilidad local" con la topología $\sigma(L^1_{loc}, L^\infty_o)$.

<u>DEFINICION</u>: Un subconjunto $H \subset L^1_{loc}(\Omega)$ es <u>localmente uniformemente integrable</u> si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall K \text{ compacto} \subset \Omega, \exists\ \delta = \delta(\varepsilon, K) \text{ tal que}$$
$$\forall f \in H \text{ y } \forall E \subset K,\ ms(E) < \delta, \quad \int_E |f| < \varepsilon \quad *$$

c) <u>Espacios de Sobolev</u> (cf. Lions-Magènes [39], Adams [1]) si m es un entero y $1 \leq p \leq \infty$ $W^{m,p}(\Omega)$ representa el espacio de Sobolev de las (clases de) funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que para todo multiíndice α, con $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \equiv \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \in L^p(\Omega)$. $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach y para $p=2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. El cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$ lo notamos $W^{m,p}_o(\Omega)$. Si por ejemplo $\Omega = \mathbb{R}^N$: $W^{m,p}_o(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, pero la igualdad no es cierta en general. Se puede definir $W^{s,p}(\Omega)$, $W^{s,p}_o(\Omega)$ para todo $s \geq 0$, cf. Adams [1], así como los espacios metrizables $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ de forma análoga a $L^p_{loc}(\Omega)$.

Utilizaremos en varias ocasiones los "Teoremas de inclusión de Sobolev" que se pueden ver en Friedman [28], Lions-Magènes [39] y con gran detalle en Adams [1], cap. V. Citaremos:

"Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio que cumple uniformemente "la propiedad del cono" se tienen las siguientes inclusiones continuas:

A) si $mp < N$ y $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$, $q \geq p$: $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$

B) si $mp = N$ y $\infty > q \geq p$: $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$

C) si $mp > N$: $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(B)$

siendo $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : D^\alpha u \in L^\infty(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m\}$ ".

Si Ω es además acotado, el "Teorema de Rellich-Kondrachov" proporciona los casos en que las inclusiones anteriores son compactas, cf. Adams [1], cap VI:

"La inclusión de A) es compacta para $1 \leq p < \frac{Np}{N-mp}$

La inclusión de B) es compacta para $1 \leq q < \infty$

La inclusión de C) es compacta".

En particular obrenemos la inclusión compacta $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $N \geq 1$, razonando sobre una sucesión exhaustiva de compactos.

Ocasionalmente utilizamos también los espacios de trazas $L^p(\Gamma)$, $W^{m,p}(\Gamma)$ sobre $\Gamma = \partial\Omega$ para la medida superficial $\partial\Gamma$. Solo citaremos que si Γ es regular se puede definir

$$\gamma = W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$$

lineal, continua, sobreyectiva que coincide para $u \in C^m(\overline{\Omega})$ con la restricción a Γ, $\gamma(u) = u|_\Gamma$.

d) <u>Medidas</u> (cf. Dunford-Schwartz [26], Edwards [27])

Aquí Ω puede ser un espacio localmente compacto y T_2 $C_o(\Omega)$ es el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto en Ω dotado de la topología límite inductivo de $\{C(K)\}$, $K \subset \Omega$ compacto; entonces $(C_o(\Omega))'$ es el conjunto de las medidas de Radón sobre Ω. En particular $L^1_{loc}(\Omega) \subset C_o(\Omega)'$ mediante la inclusión $f \longrightarrow T_f$: si $\phi \in C_o(\Omega)$ $T_f(\phi) \equiv \langle f,\phi\rangle =$ $= \int_\Omega f\,\phi$.

Nos interesaremos por el espacio $M(\Omega)$ de las medidas de Radón acotadas que resulta dual de $C_\bullet(\Omega)$, espacio de las funciones continuas que tienden uniformemente a cero "en el infinito" (i.e. en el filtro de complementarios de compactos en Ω) (cf. Edwards [27], pg. 280). Por ser dual de un Banach separable todo subconjunto acotado en $M(\Omega)$ respecto a su norma $\|\cdot\|$ (si $\mu \in M(\Omega)$, $\|\mu\| = \int d|\mu|$) es secuencialmente w*-compacto.

En $C_o(\Omega)'$ y por restricción en $M(\Omega)$ se definen los conceptos de medida positiva, medida negativa, $\geq$, $\leq$, se puede descomponer una medida en sus partes negativa y positiva

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

También se puede realizar la descomposición de una medida en sus partes regular y singular respecto a la medida dx de Lebesgue y aplicar a la parte regular el Teorema de Radon-Nikodým. La parte singular está concentrada en un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Los subespacios correspondientes de $M(\Omega)$ se designarán por $M^+(\Omega)$, $M^-(\Omega)$, $M_r(\Omega)$, $M_s(\Omega)$.

Por abuso de notación escribiremos para $f \in C_o(\Omega)'$ y $E \subset \Omega$ $f(E) = \int_E f$ cuando resulte cómodo.

e) Operadores monótonos

La referencia obligada para este tema es Brézis [11]. Nosotros fijaremos algunas definiciones, notaciones y resultados:

- Un operador A en un espacio de Banach X es una aplicación $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ donde $D(A) \subset X$ y $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de las partes de X.

A es pues una aplicación multívoca de X en X.

- Un operador A en un espacio de Hilbert H de producto $<.,.>$ se dice monótono si se verifica

$$\text{(M)} \quad \forall x_1, x_2 \in D(A), \quad \forall y_1, y_2 \in H \quad \text{t.q.} \quad y_i \in Ax_i, \quad i=1,2$$

$$<y_2 - y_1, \; x_2 - x_i> \; \geq 0$$

- Se obtiene entonces la siguiente caracterización: A es monótono si y solo si el operador $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}$ es una contracción para $\lambda > 0$.

J_λ^A se denomina "resolvente-λ de A".

- Los operadores de H se ordenan por inclusión de grafos. Así se obtienen operadores maximales monótonos; son de los operadores monótonos los que nos interesan. A Minty se debe la siguiente caracterización:

Teorema de Minty: Las siguientes propiedades son equivalentes para un op. monótono en un espacio de Hilbert:

i) A es maximal monótono

ii) $R(I+A) = H$ (R=rango)

iii) $\forall\lambda > 0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ es una contracción definida en todo H

- Si $H=\mathbb{R}$, los operadores monótonos de $\mathbb{R}$ se suelen denominar grafos monótonos. Asi hablaremos de los grafos maximales monótonos de $\mathbb{R}^2$ (g.m.m.) que pasamos a caracterizar:

"Si β es un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$, $D(\beta)$ es un intervalo I de $\mathbb{R}$. Sean sus extremos a y b, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Entonces se puede elegir una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ no decreciente de modo que

$$\text{(d.1)} \qquad \beta(r) = \begin{cases}]-\infty, f(a+)] & \text{si} \quad r = a, \quad a > -\infty \\ [f(r-), \ f(r+)] & \text{si} \quad a < r < b \\ [f(b-), \infty[& \text{si} \quad r = b, \quad b < \infty \end{cases}$$

Inversamente a partir de una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente (0.1) proporciona un g.m.m. β".

- Por último sea β un grafo de $\mathbb{R}^2$ y β^{-1} el grafo inverso. β es monótono sii β^{-1} lo es. β es g.m.m. sii β^{-1} lo es. β es una función continua sii β^{-1} es estrictamente creciente y a la inversa.

Si β es un g.m.m. y $r \in D(\beta)$, denominamos
$\beta^+ = \sup \beta(\mathbb{R})$, $\beta^- = \inf \beta(\mathbb{R})$ $\beta^+(r) = \sup \{s : s \in \beta(r)\}$, $\beta^-(r) = \inf \{s : s \in \beta(r)\}$; $\beta^\circ(r) = s$ sii $s \in \beta(r)$ y s es de valor absoluto mínimo.

Si $r \in R(\beta)$, $[\beta^{-1}(r)]^+ = \sup \{s : r \in \beta(s)\}$, $[\beta^{-1}(r)]^- = \inf \{s : r \in \beta(s)\}$ Ademas ponemos $\beta^{-1}(0) = [a,b]$ y $\beta(0) = [\gamma^-,\gamma^+]$. Si $0 \in \beta(0)$, $a \leq 0 \leq b$, $\gamma^- \leq 0 \leq \gamma^+$.

f) <u>Operadores acretivos</u> (cf. Bênilan [3], [4], Crandall [21]).

Cuando X es un espacio de Banach no Hilbert carecemos de la identificación natural $X' \simeq X$ y el concepto de monóto no puede traducirse de varias maneras. Una de ellos es el concepto de operador acretivo:

- Un operador de X, $A : D(A)\ X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, se dice <u>acretivo</u> si satisface una de las propiedades equivalentes

$$
(A)\quad \begin{cases}
\text{i) } \forall (x_i,y_i) \in A, \quad i=1,2 \qquad \langle y_1-y_2, x_1-x_2\rangle_s \geq 0 \\
\text{ii) } \forall (x_i,y_i) \in A, \quad i=1,2 \qquad w \in F(x_1-x_2) \text{ tal que} \\
\qquad\qquad \langle y_1-y_2, w\rangle_{X'.X} \geq 0 \\
\text{iii) } \forall \lambda > 0 \qquad J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1} \text{ es una contracción}
\end{cases}
$$

en i) $\langle .,.\rangle_s$ es el producto semiinterior de Sato; en ii) $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X')$ es la aplicación de dualidad (cf. referencias). $\langle .,.\rangle_{X''.X}$ es la dualidad X-X'.

- El concepto de op. maximal monótono se sustituye por el de operador m-acretivo:

Un operador A de X es <u>m-acretivo</u> sii es acretivo y $R(I+A) = X$.

Todo operador m-acretivo es maximal acretivo, en general la inversa no es cierta.

T-acretividad: Un refinamiento que utilizaremos en la T-acretividad introducido en [17] y estudiada por Bénilan [3], [4] y Picard [41]:

Un operador A de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ es T-acretivo sii $J_\lambda = J_\lambda^A$, $\lambda > 0$ cumple la siguiente "propiedad de T-contracción"

$$(T) \quad \begin{cases} \forall (u_i, v_i) \in J_\lambda, \quad i=1,2 \\ \|(v_1-v_2)^+\|_p \leq \|(u_1-u_2)^+\|_p \end{cases}$$

Como (T) implica que J_λ es unívoco podemos escribir la condición (T) en la forma

$$\|(J_\lambda u_1 - J_\lambda u_2)^+\|_p \leq \|(u_1-u_2)^+\|_p$$

Es claro que

i) A T-acretivo en $L^p(\Omega) \Longrightarrow A$ acretivo en $L^p(\Omega)$

ii) A T-acretivo en $L^p(\Omega) \Longrightarrow J_\lambda^A$ "conserva el orden" en $L^p(\Omega)$ en el siguiente sentido:

$$\text{si} \quad u_i \in J_\lambda f_i, \quad i=1,2, \quad f_1 \leq f_2 \ \text{ctp} \Longrightarrow u_1 \leq u_2 \text{ctp}$$

Caracterización de operadores acretivos y T-acretivos en $L^1(\Omega)$ (cf. Bénilan [4], Lê [35])

i) A es acretivo en $L^1(\Omega)$ sii

$$\forall (u_i, v_i) \in A, \quad i=1,2$$

$$(d.2) \qquad \int_{u_1=u_2} |v_1-v_2| + \int_{u_1 \neq u_2} \operatorname{sign}_o(u_1-u_2).\left(v_1-v_2\right) \geq 0$$

o bien sii

$$(d.2') \qquad \alpha \in L^\infty(\Omega), \quad \alpha(x) \in \operatorname{sign}(u_1-u_2)(x) \ \text{ctp tal que}$$

$$\int \alpha \,.\, (v_1-v_2) \geq 0$$

ii) A es <u>T-acretivo</u> en $L^1(\Omega)$ sii

(d.3) $\forall (u_i,v_i)$, $i=1,2$ $\displaystyle\int_{u_1=u_2} (v_1-v_2)^+ + \int_{u_1>u_2} (v_1-v_2) \geq 0$

o bien sii

(d.3') $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \in \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(x)$ ctp tal que

$$\int \alpha \,.\, (v_1-v_2) \geq 0.$$

Fijemos la notación respecto al signo:

$$\mathrm{sign}(r) = \begin{cases} 1 & r>0 \\ [-1,1] & r=0 \\ -1 & r<0 \end{cases} \qquad \mathrm{sign}^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r>0 \\ [0,1] & \text{si} \quad r=0 \\ 0 & \text{si} \quad r<0 \end{cases}$$

sign y sign^+ son g.m.m. Utilizaremos secciones de ellos:

$$\mathrm{sign}_o(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r>0 \\ 0 & \text{si} \quad r=0 \\ -1 & \text{si} \quad r<0 \end{cases} \qquad \mathrm{sign}_o^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r>0 \\ 0 & \text{si} \quad r\leq 0 \end{cases}$$

<u>Las clases $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_\infty^+$ (cf. Lê [35]):</u>

Importantes clases de operadores acretivos son la clase $\mathfrak{M}_\infty$ de operadores m-acretivos en $L^1(\Omega)$ y acretivos en $L^\infty(\Omega)$ y $\mathfrak{M}_\infty^+$ de operadores m-acretivos en $L^1(\Omega)$ y T-acretivos en $L^\infty(\Omega)$.

Debemos a Bénilan la siguiente caracterización:

"Sea A un operador m-acretivo en $L^1(\Omega)$. Entonces:

i) $A \in \mathfrak{M}_\infty$ sii $\forall (u_i,v_i) \in A$, $i=1,2$ $\forall p \in P_i$

$$\int_\Omega p(u_1-u_2)(v_1-v_2) \geq 0$$

ii) $A \in \mathfrak{M}_\infty^+$ sii $\forall (u_i,v_i) \in A$, $i=1,2$ $\forall p \in P_o$

$$\int_{\Omega} p(u_1-u_2)(v_1-v_2) \geq 0 \qquad (P_o, P_i: \text{ ver } 1))$$

Además si $1 \leq q < \infty$, si $A_{\infty} = A \cap (L^{\infty} \times L^{\infty}) \neq \emptyset$ y si definimos $A_q = \overline{A_{\infty}}^{\,L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)}$,

i) implica que A_q es m-acretivo en $L^q(\Omega)$

ii) implica que A_q es m-acretivo en $L^q(\Omega)$

Y el mismo resultado es válido para el espacio de Orlicz $L_M(\Omega)$ siendo M una función de Young, $M \in \Delta_2$ (ver g)).

g) Espacios de Orlicz (cf. Krasnoselskii-Ruticкii [34], Kufner [33])

Definiciones y resultados:

1) Se llama "función de Young" a toda función $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ representable como

$$\text{(g.1)} \qquad M(s) = \int_0^{|s|} p(t)dt, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

en que $p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es no decreciente, continua por la derecha, $p(t) > 0$ si $t > 0$, $p(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$.

2) La función de Young M verifica la "condición Δ_2" si existe $k > 0$ tal que

$$M(2s) \leq k.M(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

3) Sea Ω un espacio de medida, μ una medida en Ω. Se define la "clase de Orlicz" $C_M(\Omega)$ como el conjunto de (clases de) aplicaciones medibles u tales que

$$\text{(g.2)} \qquad \rho(u;M) \equiv \int_{\Omega} M(u).d\mu < \infty$$

4) Si M verifica Δ_2, $C_M(\Omega)$ es un espacio vectorial y lo designamos $L_M(\Omega)$. En general $L_M(\Omega)$ se define como el espacio lineal engendrado por C_M.

$L_M(\Omega)$ es un espacio de Banach para la "norma de Luxemburg":

(g.3) $$\|u\|_M = \inf \{k > 0 : \rho(\tfrac{u}{k} ; M) \leq 1\}$$

5) (cf. Kufner [33], §3.10). Sean $\{u_n\}$, $u \in L_M(\Omega)$:

- Se dice que $u_n \to u$ en $L_M(\Omega)$ sii $\|u_n - u\|_M \to 0$

- Se dice que $u_n \to u$ en M-media sii $\rho(u_n - u; M) \to 0$

Si $M \in \Delta_2$, $u_n \to u$ en $L_M(\Omega)$ equivale a $u_n \to u$ en M-media.

h) <u>Espacios de Marcinkiewicz</u> (cf. BBC [9], Stein-Weiss [47])

Siguiendo la presentación del Apéndice de BBC [9] definimos, para $1 < p < \infty$, $\|\cdot\|_p$:

Si u es una función medible en $\mathbb{R}^N$ y $p' = \frac{p}{p-1}$,

$$\|u\|_{M^p} = \min \{C \in [0,\infty] : \int_K |u(x)|dx \leq C(\mathrm{ms}\ K)^{1/p'}, \quad \forall K : \mathrm{ms}(K) < \infty\}$$

Entonces se define $M^p(\mathbb{R}^N) = \{u$ medible en $\mathbb{R}^N$: $\|u\|_{M^p} < \infty\}$

$M^p(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_{M^p}$.

Detalles sobre los espacios $M^p(\mathbb{R}^N)$ pueden consultarse en BBC [9], Apéndice, que nosotros utilizaremos ampliamente, ó en Stein-Weiss [47] bajo la denominación de espacios $L(p,\infty)$.

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ definimos como en Gilbarg-T. [29] el espacio $M^p(\Omega)$ mediante la norma correspondiente:

$$\|u\|_{M^p} = \min \{C \in [0,\infty] : \int_{\Omega \cap B_R} |u(x)|dx \leq CR^{N/p'} \text{ para toda bola } B_R \text{ de } \mathbb{R}^N\}$$

se obtienen así propiedades análogas, en particular $M^p \subset L^q_{loc}$ para $1 \leq q < p$.

k) <u>Regularización de distribuciones</u> (cf. Friedman [28], Gilbarg-Trudinger [29]).

Dada una distribución $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deseamos aproximarla por funciones regulares. Para ello recurrimos a la convolución con una "sucesión regularizante", a saber, una sucesión $\{\rho_n\}$ tal que $\rho_n \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, ii) $\rho_n \geq 0$, iii) $\int \rho_n = 1$, iv) $\rho_n \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, δ la masa de Dirac en el origen.

Construiremos $\{\rho_n\}$ a partir de $\rho = \rho_1$ cumpliendo i) ii) iii) y poniendo $\rho_n = c_n \cdot \rho(\frac{x}{n})$ con $c_n > 0$ constante de normalización. Suponemos además $\operatorname{supp} \rho \subset \overline{B}_1(0)$.

Entonces para toda $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f_n = f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $f_n \to f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, para $h > 0$ denotemos $\Omega_h = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < h\}$. Entonces para todo $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f_n \in C^\infty(\Omega_{1/n})$.

Si $f \in C^o(\Omega)$ y $\Omega' \subset\subset \Omega$, $f_n \to f$ uniformemente en Ω'.

Si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ (resp. $L^p(\Omega)$), $f_n \in L^p_{loc}(\Omega_{1/n})$, $f_n \to f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$ (resp. $f_n \in L^p(\Omega_{1/n})$, $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$).

Si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α es un multiíndice y n es un entero $D^\alpha(f_n) = D^\alpha f * \rho_n = (D^\alpha f)_n$ en $\Omega_{1/n} \subset\subset \Omega$. Por tanto si

$f \in W^{m,p}(\Omega)$, $\quad f_n \in W^{m,p}(\Omega_{1/n})$ $\quad$ y $\quad f_n \to f$ $\quad$ en $\quad W^{m,p}(\Omega_{1/n})$.

Si M es una función de Young perteneciente a la clase Δ_2 y $f \in L_M(\Omega)$, $\quad f_n \in L_M(\Omega_{1/n})$ $\quad$ y $\quad f_n \to f$ $\quad$ en $\quad L_M(\Omega)$ (cf. Kufner [33], §3. 8.1).

1) Otras notaciones:

$$J_o = \{j : \mathbb{R} \to |0,\infty|,\ j \text{ convexa, s.c.i y } j(0) = 0\}$$

$$P = \{p \in C^1 \quad L^\infty(\mathbb{R}) : p \text{ es no decreciente}\}$$

$$P_o = \{p \in P : p(0) = 0\}$$

$$P_i = \{p \in P_o : p(-r) = -p(r)\}$$

ζ_o será una función fija de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta_o(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $\zeta_o(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Para $n \geq 1$ ponemos $\zeta_n(x) = \zeta_o(x/n)$.

Las notaciones $o(r)$, $O(r)$ son las "oes de Landau" para la descripción del orden de infinitos e infinitésimos.

0.1.2. El Toro:

En el Capítulo IV tendremos ocasión de considerar como dominio $\Omega = \Omega^N$ el toro N-dimensional, variedad cociente del espacio $\mathbb{R}^N$ ante la acción del grupo $(2\pi\ \mathbb{Z})^N$ que representamos mediante el conjunto $[0,2\pi]^N$ con las correspondientes identificaciones en los bordes:

$$(x_1,\ldots,\underset{(i)}{0},\ldots X_N) \approx (x_1,\ldots,\underset{(i)}{1},\ldots,X_N)$$ a efectos de continuidad.

Como espacio de medida Ω^N será el subconjunto $[0,2\pi]^N$

de $\mathbb{R}^N$ con la medida $dx = dx_1,\dots,dx_N$ de Lebesgue. $|\Omega| = ms(\Omega) = (2\pi)^N$ es el volumen de Ω. Los espacios $L^p(\Omega)$ son como en 0.1.1.b).

Sin embargo $C(\Omega)$, espacio de funciones continuas en el toro se identifica a las funciones contínuas <u>2π-periódicas</u> en cada variable de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$. Del mismo modo se definen $C^m(\Omega)$, $1 \leq m < \infty$ y $C^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el conjunto de las distribuciones <u>periódicas</u> en $[0,2\pi]^N$. Esto se aplica al concepto de derivada débil (o derivada en el sentido de distribuciones) periódica para definir los espacios $W^{m,p}(\Omega)$.

0.2. <u>Resultados sobre la ecuación $-\Delta u + \beta(u) \ni f$</u>

0.2.1. <u>Existencia de soluciones:</u>

En [11] Brézis estudia condiciones bajo las que la suma de dos operadores A, B, monótonos en un espacio de Hilbert, es un operador monótono y para que $Au + Bu = f$ sea resoluble para todo $f \in H$. En [15] Brézis y Haraux estudian el rango $R(A+B)$.

En [18] Brézis y Strauss estudian el caso en que A es un operador lineal m-acretivo en $L^1(\Omega)$ y B es la realización en $L^1(\Omega)$ de un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ β, tal que $0 \in \beta(0)$. Formulamos los resultados de [18] en el siguiente

<u>TEOREMA A</u>:

1) Sea Ω un espacio de medida; β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$, $0 \in \beta(0)$; A un operador lineal (no acotado) de $L^1(\Omega)$ tal

que

I) $\overline{D(A)} = L^1(\Omega)$ y A es m-acretivo en $L^1(\Omega)$

II) A es T-acretivo en $L^\infty(\Omega)$

III) A es coercivo en $L^1(\Omega)$:

$$\exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall u \in D(A), \quad \|Au\|_1 \geq \alpha \|u\|_1$$

Entonces para toda $f \in L^1(\Omega)$

i) existe una única $u \in D(A)$ solución de

$$(P_A) \qquad Au + \beta(u) \ni f$$

ii) Si u_i, $i=1,2$ son soluciones correspondientes a f_i y ponemos $w_i = Au_i + f \in L^1(\Omega)$, se tiene

$$(1) \qquad \|(w_1-w_2)^+\|_1 \leq \|(f_1-f_2)^+\|_1$$

(T-acretividad de $A \circ \beta^{-1}$)

En particular si $f_1 \leq f_2$ ctp, $w_1 \leq w_2$ ctp, además se deduce

$$(2) \qquad \|w_1-w_2\|_1 \leq \|f_1-f_2\|_1$$

(acretividad de $A \circ \beta^{-1}$).

iii) Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ una función convexa, s.c.i., $\phi(0) = 0$.

Sea $f \in L^1(\Omega)$ tal que $\phi \circ f \in L^1(\Omega)$. Entonces

$$(3) \qquad \|\phi \circ w\|_1 \leq \|\phi \circ f\|_1$$

En particular cuando $\phi(s) = |s|^p$:

$$(4) \qquad \forall f \in L^1 \quad L^p(\Omega), \quad w \in L^1(\Omega) \text{ y } \|w\|_p \leq \|f\|_p$$

2) Supongamos que A cumple I, II pero no III, que Ω es de medida finita y β sobreyectivo. Entonces para toda $f \in L^\infty(\Omega)$ existe $u \in D(A)$ $L^\infty(\Omega)$, $Au \in L^\infty(\Omega)$ y u es solución de (P_A). u puede no ser única *

Resultados similares particularizando A en $-\Delta$ en Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ son estudiados por Browder [19], Crandall [20], Konishi [31], da Prato [22].

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$ la condición de coercividad no es satisfecha por la elección $A = -\Delta$ y la ecuación (1) ha de ser substituida por

$$(P_\varepsilon) \qquad \varepsilon u - \Delta u + \beta(u) \ni f$$

En efecto el lema 1.1 de BBC [9] nos muestra que $-\Delta \in \mathfrak{M}^+_\infty(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$. $-\Delta + \varepsilon$ cumple pues las condiciones del Teorema A. Entonces BBC [9] pasan al límite cuando $\varepsilon \to 0$ en (P_ε) obteniendo resultados de existencia y unicidad para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ que resumimos en el siguiente:

<u>TEOREMA B</u> (cf. BBC, §1-4)

Sea β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$ y (P) el problema

$$(P) = (P_{\beta f}) \qquad -\Delta u + \beta u \ni f$$

Entonces:

1)

i) si $N \geq 3$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ existe una única $u \in M^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ con $\Delta u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, solución de (P). Además $|\text{grad } u| \in M^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)$.

ii) si $N=2$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$, para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ existe $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ con $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$ y $\Delta u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, solución de (P).

iii) si $N=1$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$, para toda $f \in L^1(\mathbb{R})$ existe $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ con $\frac{d^2u}{dx^2} \in L^1(\mathbb{R})$, solución de (P).

2) Si $N \geq 3$ la solución reseñada es única. Si $N=1,2$ pueden existir varias soluciones, que diferirán entre si en una constante aditiva. Para que la solución no sea única es necesario que $\int f = 0$, $\beta^{-1}(0) \neq \{0\}$, $w = \Delta u + f = 0$ ctp y $u(x) \in \beta^{-1}(0)$ ctp x.

3) Si f_i, $i=1,2$ son dos funciones de $L^1(\mathbb{R}^N)$, u_i soluciones respectivas de $(P_{\beta f_i})$ y $w_i = \Delta u_i + f$.

i) si $f_1 \geq f_2$ ctp, $w_1 \geq w_2$ ctp. Si $N \geq 3$ $u_1 \geq u_2$ ctp

ii) si $f_1 \geq f_2$, $f_1 \neq f_2$, $u_1 \geq u_2$ *

Según necesitemos algún otro detalle completaremos esta información de BBC [9]. En adelante se entenderá por soluciones de (P) en $L^1(\mathbb{R}^N)$ las soluciones "BBC" expuestas en el Teorema B.

0.2.2. Soluciones con soporte compacto:

Creciente atención se ha dedicado a la existencia de soluciones con soporte compacto para esta y otras ecuaciones similares y para los problemas de evolución asociados. Una extensa referencia bibliográfica puede hallarse en I. Díaz [23], [24].

En [13], [14] Brézis estudia la existencia de soporte compacto para las soluciones de (P) en un abierto Ω (no acotado) de $\mathbb{R}^N$, en [9] Bénilan, Brézis y Crandall estudian la existencia de soluciones de soporte compacto para (P) en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, y en [23] I. Díaz extiende estos resultados utilizando técnicas similares a las desarrolladas por BBC; I.Díaz y M.A. Herrero [25] obtienen por métodos similares soluciones de soporte compacto para ecuaciones más generales. Veamos en concreto los resultados de BBC [9], que tendremos ocasión de precisar y generalizar, extendiéndolos al caso en que f es una medida acotada y estudiando la velocidad de convergencia cuando u no tiene soporte compacto (Caps. II, III).

Entendemos aqui por solución de $(P_{\beta f})$ una función $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Delta u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y cumple (P). Entonces

<u>[9], Theorem 6.1:</u> Let $\phi \in J_o$ satisfy $\partial\phi = \beta$. Then $(P) = (P_{\beta f})$ has a solution $u \in L^1_o(\mathbb{R}^N)$ for all $f \in L^1_o(\mathbb{R}^N)$ if and only if

$$\int_{-1}^{1} \phi(s)^{-1/2} \, ds < \infty$$

<u>[9], Theorem 6,3:</u> Let $\beta(0) = [\gamma_-,\gamma_+]$, $-\infty < \gamma < 0 < \gamma_+ < \infty$ and $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Suppose $R > 0$ and there are functions $g_\pm \in L^1_{loc}([0,\infty))$ such that $\nu(\gamma_\nu - f(x)) \geq g_\nu(|x|) \geq 0$ for $\nu \in \{+,-\}$ on $[|x| \geq R]$ and which satisfy $\int_0^\infty r^{N-1} g_\nu(r)dr = \infty$. Then $(P_{\beta f})$ has a solution $u \in L^1_o(\mathbb{R}^N)$,....

... the simplest case arises if $\gamma_+ > \alpha_+ \geq f \geq \alpha_- > \gamma_-$ for some constants α_+,α_-..... allowing f to be unbounded on $[|x| \leq R]$".

0.2.3. Resultados para medidas acotadas

En [7] Bénilan estudia la existencia, unicidad y comparación de soluciones para la ecuación (P) cuando $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ en dimensión $N \geq 3$, demostrando:

TEOREMA C: Si β es un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$ y además se cumple

$$(C_N) \qquad D(\beta) = \mathbb{R}, \qquad \int_1^{\infty} [\beta(r) - \beta(-r)]\, r^{-\frac{2(N-1)}{N-2}}\, dr < \infty$$

para toda $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ existe una única $u \in M^{N/N-2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ y $w = \Delta u + f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $w \in \beta(u)$ ctp. La condición (C_N) es necesaria para obtener este tipo de solución cuando $f = c.\delta$, siendo $c \in \mathbb{R}$, δ la masa de Dirac *

La comparación se da en las condiciones de BBC [9] para el caso $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (cf. Teorema B).

En una segunda parte de [7] Bénilan demuestra que las soluciones reseñadas de (P) cuando β es un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$ y f es una medida $\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, acotada en un entorno del infinito por una medida radial, se comportan en el infinito de la forma

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^{N-2}}$$

cuando $N \geq 3$, lo cual proviene esencialmente de la forma de las soluciones fundamentales de $-\Delta$ para $N \geq 3$.

En los capítulos I, II demostramos resultados que extienden lo anterior a dimensiones $N=1,2$ venciendo las dificultades inherentes a estas dimensiones que se reflejan en el comportamiento de las soluciones fundamentales respectivas, lo cual hace inviables las estimaciones obtenidas para $N \geq 3$.

0.3. Resultados sobre la ecuación $\Sigma a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(u) \ni f$ en el toro

En [16] Brézis y Nirenberg estudian la existencia de soluciones de

$$(E) : (E_{\beta f}) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(u) \ni f$$

en el toro N-dimensional $(\simeq [0,2\pi]^N)$ bajo la hipôtesis de continuidad sobre f, siendo β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ y a_i constantes reales.

Sea $A = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ operando en $L^2(\Omega)$. $N(A) = \{u \in L^2(\Omega) : Au = 0\}$ es el nûcleo de A. Sea P la proyección ortogonal en $L^2(\Omega)$ sobre $N(A)$: P es una contracción en $L^\infty(\Omega)$ que conserva las constantes y el orden ($f \geq 0 \Longrightarrow$ $\Rightarrow Pf \geq 0$, ctp). En particular si $\{a_i\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$, $P(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f$, P es "la media en Ω".

En [16] se obtienen los siguientes resultados

TEOREMA D: i) Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ es tal que $\beta'(r) > 0$, $\forall r$. $(E_{\beta f})$ tiene una solución (única) en $\mathcal{D}(\Omega)$ sii

(1) $\qquad \beta^- < Pf < \beta^+$

$(\beta^- = \inf R(\beta), \quad \beta^+ = \sup R(\beta))$

ii) si $f \in C(\Omega)$ y β es un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ y si se verifica (1), existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $Au \in L^\infty(\Omega)$, solución de (E).

iii) sea $f \in C(\Omega)$ y β una función continua localmente de variación acotada (no necesariamente g.m.m.). Si se verifica (1) existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $Au \in L^\infty(\Omega)$, solución de (E). Definimos aquí $\beta^+ = \liminf_{r \to \infty} \beta(r)$, $\beta^- = \limsup_{r \to -\infty} \beta(r)$

iv) En todos los casos la expresión $w = f - Au \in \beta(u)$ es única. u puede no ser única en ii) iii).

CAPITULO I

EXISTENCIA, UNICIDAD Y COMPARACION DE SOLUCIONES DE LA ECUACION $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ EN $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^1$ CUANDO f ES UNA MEDIDA ACOTADA.

PRIMERA PARTE: $-\Delta u + \beta(u) \ni f$, $f \in \mathcal{M}$ EN $\mathbb{R}^2$.

En esta parte se estudia el problema de la existencia de soluciones de

$$(P) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f$$

en el espacio $\mathbb{R}^2$, siendo β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(0)$, $0 \in \text{Int } R(\beta)$ y f una medida acotada sobre $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, hipótesis que suponemos siempre.

Bénilan, Brézis y Crandall estudian en [9] el caso en que $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ de forma exhaustiva.

En [7] Bénilan resuelve satisfactoriamente la existencia de soluciones para $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, si $N \geq 3$.

El caso $N = 2$ que nosotros abordamos presenta dificultades especiales ya presentes en el estudio en L^1 (BBC [9]) ligadas al distinto comportamiento de la solución fundamental del laplaciano para $N \geq 3$ y para $N = 2$ (ver BBC - Apéndice o el Apéndice de esta memoria).

Recordamos para empezar el resultado fundamental de BBC [9] sobre las soluciones de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ en $\mathbb{R}^2$, en forma compacta (cf. Teorema 0.B):

TEOREMA A: Sea β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(\ )$, $0 \in \text{Int } \beta(\mathbb{R})$. Para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ existen $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tales que $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$ y son solución de

$$(P)\quad \begin{cases} w \in \beta(u) \text{ ctp} & \text{de} \quad \mathbb{R}^2 \\ -\Delta u + w = f & \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Además w es única, u es única, salvo una constante aditiva en algunos casos.

La aplicación $f \longmapsto u$ (posiblemente multívoca) es acotada: $L^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < 2$.

Si $(\hat{u},\hat{w})$ es la solución correspondiente a otra función $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\|\text{grad}(u-\hat{u})\|_{M^2} \leq C\|f-\hat{f}\|_1 , \qquad C \text{ constante } > 0$$

$$\int(w-\hat{w})^+ \leq \int(f-\hat{f})^+$$

Para todo $j \in J_o = \{j : \mathbb{R} \longrightarrow [o,\infty)$, convexa, s.c.i., $j(o) = o\}$

$$\int j(w) \leq \int j(f)$$

Por fin sobre la unicidad de u se tiene que:

- si $f \leq \hat{f}$ ctp, $f \neq \hat{f}$ ctp $\Longrightarrow$ $u \leq \hat{u}$ ctp

- En el caso de que no sea única necesariamente se tiene

i) $\beta^{-1}(o) = [a,b] \neq \{o\}$

ii) $\int f = o$

iii) $w = o$ ctp

iv) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $R(u) \subsetneq [a,b]$, $-\Delta u = f$

I.1. Unicidad y comparación de soluciones en $\mathbb{R}^2$

Comenzamos el estudio de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ cuando f es una medida acotada en el plano $\mathbb{R}^2$ por el problema de la unicidad.

En la dirección de resultados tan satisfactorios como el Teorema A obtenemos el

TEOREMA I.1. (de unicidad): Las soluciones de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, tales que $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w = f + \Delta u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ son únicas salvo una constante aditiva.

Además si u no es único se tiene necesariamente:

i) $\beta^{-1}(o) = [a,b] \neq \{o\}$

ii) $\int f = o$

iii) $w = f + \Delta u = o$ ctp

iv) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $R(u) \subsetneq [a,b]$, $-\Delta u = f$

Por último, w es siempre única.

Demostración: Según (u_1,w_1), (u_2,w_2) dos soluciones en el sentido del enunciado para una misma $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$.

Entonces:

$$-\Delta u_1 + w_1 = f, \qquad w_1 \in \beta(u_1)$$

$$-\Delta u_2 + w_2 = f, \qquad w_2 \in \beta(u_2)$$

Sean

$$u = u_1 - u_2$$
$$w = w_1 - w_2$$

Entonces

$$u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad |\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = w_1 - w_2 = w \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

Dado que $0 \in \text{Int } R(\beta)$ podemos hallar $\lambda > o$ tal que $\beta(\lambda), -\beta(-\lambda) > o$. Dado que $w_i \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $w_i \in \beta(u_i)$, $i=1,2$, se deduce que ms $[|u_i| > \lambda] < \infty$, luego

$$\text{ms } [|u_1 - u_2| > \lambda] < \infty$$

En virtud del Lema A.13-BBC tenemos que:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} p'(u)\, |\text{grad } u|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \Delta u . p(u) \leq o$$

Tomemos $p(o) = o$. Entonces, en virtud de la monotonía de β,

$$\Delta u . p(u) = (w_1 - w_2)\, p(u_1 - u_2) \geq o$$

Con lo que

$$\int_{\mathbb{R}^2} p'(u)\, |\text{grad } u|^2 \leq o$$

Dado que $p'(u)\, |\text{grad } u|^2 \geq o$, se deduce que $p'(u)\, |\text{grad } u|^2 = o$ ctp. Tomemos pues una p tal que $p'(r) > o$. $\forall r \in \mathbb{R}$. Entonces grad $u = o$, o sea $u = c$ (ctp).

Así pues existe c constante tal que

$$\underline{u_1 - u_2 = c} \qquad (\text{ctp})$$

con lo que

$$w_1 = \Delta u_1 + f = \Delta u_2 + f = w_2 \qquad \text{(ctp)}$$

Estudiemos ahora la no unicidad de u:

Como en el caso de f integrable utilizamos el siguiente Lema de BBC |9|:

"<u>Lemma 3.5</u>. Let β be a max. mon. graph in $\mathbb{R}$, $0 \in \beta(o)$, $p > 1$, $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^M)$, $M \geq 1$, $c \in \mathbb{R}$ and $w(x) \in \beta(u(x))$ $\beta(u(x)+c)$ a.e. if $w \in L^1(\mathbb{R}^M)$, then either $w = o$ or $c = o$".

Si u_1 y $u_2 = u_1 + c$ son dos soluciones de (P), $w = f + \Delta u_i \in \beta(u_1)$, $w \in \beta(u_1 + c)$ ctp. Dado que $w \in L^1(\mathbb{R}^2$ o bien $w = o$ y entonces $-\Delta u_i = f$, $i=1,2$, o bien $w \neq o$ y entonces $c = o$, $u_1 = u_2$. (Recuérdese que $u \in W^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, grad $u \in M^2(\mathbb{R}^2)$ implica $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, para todo $1 \leq p < 2$ utilizando la inclusión $M^2 \subset L^p_{loc}$ (cf. BBC-Lema A.2) y Sobolev)

Si la solución no es única $w = o$ y por tanto $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $-\Delta u = f$, $R(u) \subsetneq \beta^{-1}(o)$ y por tanto $\beta^{-1}(o) = \{o\}$.

La estimación $\int f = o$ es consecuencia de la igualdad $\int \Delta u = o$, verificada por toda solución en las condiciones del teorema, como demostramos en el Lema A.6*

Consideramos ahora la comparación de soluciones, que necesariamente debe tener en cuenta que hay casos en que la solución no es única:

TEOREMA I.2. (de comparación): Sean $f_1, f_2 \in M(\mathbb{R}^2)$, $f_1 \leq f_2$ en $M(\mathbb{R}^2)$. Sean (u_i, w_i), $i=1,2$, las soluciones correspondientes de (P), $u_i \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w_i \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Entonces existen dos posibilidades disjuntas:

i) $u_1 \leq u_2$, $w_1 \leq w_2$ ctp

ii) $u_1 - u_2 = c$, constante $\neq o$, $f_1 = f_2$, $\int f_i = o$, $w_i = o$.

Demostración: Sean

$$u = u_1 - u_2 \quad ; \quad u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad |\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$$

$$w = w_1 - w_2 \quad ; \quad w \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

$$f = f_1 - f_2 \quad ; \quad f \in M(\mathbb{R}^2), \quad f^+ = o$$

Entonces

$$\Delta u = w - f$$

Luego

$$(\Delta u)_r = w - f_r \geq w$$

$$(\Delta u)_s = -f_s$$

Así pues $(-\Delta u)_s^+ = (f)_s^+ = o.$

En el Lema A.5 demostramos que en estas condiciones se tiene para todo $p \in P$, $p \geq o$.

$$(1) \qquad \int p(u_1-u_2)\, |\text{grad}(u_1-u_2)|^2 + \int (w_1-w_2)p(u_1-u_2) \leq o$$

Supongamos que $p(r) = o$ para $r \leq o$ y $p'(r) > o$ para $r > o$. Entonces, dado que $w_i \in \beta(u_i)$,

$(w_1-w_2)\ p(u_1-u_2) \geq o$ y deducimos

$$\int p(u_1 - u_2)\ |\mathrm{grad}(u_1 - u_2)|^2 \leq o$$

Pero $p(u_1-u_2)\ |\mathrm{grad}(u_1-u_2)|^2 \geq o$, luego $p(u_1-u_2)|\mathrm{grad}(u_1-u_2)|$ $= o$ ctp, de donde $\mathrm{grad}\ p(u_1-u_2) = o$ ctp, $p(u_1-u_2) = C$, constante, ctp.

Existen ahora dos posibilidades

1) $C \leq o$; $p(u_1-u_2) \leq o$; $u_1 \leq u_2$ ctp

2) $C > o$; entonces $u_1 = u_2+\overline{c} > u_2$, luego $w_1 \geq w_2$

Pero volviendo a (1) tenemos

$$C \int w_1 - w_2 \leq o, \quad \int w_1 - w_2 \leq o$$

De donde deducimos $w_1 = w_2$ ctp.

Utilizando de nuevo el lema 3.5 de BBC, deducimos $w_1 = w_2 = o$ y $f_1 = -\Delta u_1 + w_1 = -\Delta u_1 = -\Delta u_2 = f_2$; estamos pues ante el caso de no unicidad estudiado en el Teorema 1.

- Solo nos falta ver que es el caso 1) también <u>$w_1 \leq w_2$ ctp:</u>

$$w_2 - w_1 = f_2 + \Delta u_2 - f_1 - \Delta u_1 = (f_2-f_1) -\Delta u$$

Como $w_i \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $(w_2-w_1)_r = w_2 - w_1$. Así:

$$w_2 - w_1 = (f_2-f_1)_r + (-\Delta u)_r$$

Ahora bien: $f_2 \geq f_1$ en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ implica $(f_2-f_1)_r \geq o$ ctp
Para ver que $(\Delta u)_r \geq o$ en el conjunto $[|u| = o]$, recordamos que $-u \geq o$ cumple las hipótesis del corolario del Lema A.7. Así

$$\text{ctp en } [u = o] \qquad w_2 - w_1 \geq o$$

Por otra parte si $-u > o$, $u_2 > u_1$, luego $w_2 \geq w_1$*

I.1. Existencia de soluciones para medidas acotadas de $\mathbb{R}^2$

En línea con el resultado de Bénilan [7], para $N \geq 3$, logramos caracterizar completamente para $N = 2$ las condiciones para que existan soluciones de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ cuando $f \in M(\mathbb{R}^2)$ mediante el siguiente teorema:

TEOREMA I.3. (de existencia):

Sea β un g.m.m., $0 \in \beta(o)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$.

Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) β verifica

$$D(\beta) = \mathbb{R} \quad y \quad \forall a > o \quad \int_0^\infty [\beta(r) - \beta(-r)] e^{-ar} dr < \infty$$

ii) Para toda $f \in M(\mathbb{R}^2)$ existe $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, existe $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ solución de $-\Delta u + \beta(u) = f$, $w = f + \Delta u$.

iii) Para $f = c\delta$, donde δ es la masa de Dirac en el origen y c es una constante real, existe $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, existe $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$, solución de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$, $w = f + \Delta u$.

Entonces la aplicación $f \longmapsto (u,w)$ es acotada de $M(\mathbb{R}^2)$ en $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2) \times L^1(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < 2$ y secuencialmente contínua para la topología $\sigma(M, C_\bullet)$ de M y la topología débil en $W^{1,p}_{loc} \times L^1$.

Si $(\hat{u},\hat{w})$ es la solución correspondiente a $\hat{f}$

$$\|\operatorname{grad}(u-\hat{u})\|_{M^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f-\hat{f}\|_M$$

Por último:

$$\int_{\mathbb{R}^2} w = \int_{\mathbb{R}^2} f$$

<u>Demostración</u>: La implicación ii) $\Longrightarrow$ iii) es inmediata.

La implicación iii) $\Longrightarrow$ i) resulta del siguiente lema:

<u>LEMA I.1</u>: Sean $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ tales que $-\Delta u + w = c\delta$, $w \in \beta(u)$ ctp. Si definimos la "media angular" de u:

$$\tilde{u}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_S u(r\sigma)d\sigma$$

((r,θ) coordenadas polares; S circunferencia unidad, $d\sigma$ medida en S), se tiene que

$$\tilde{u}(r) \sim \frac{c}{2\pi}\lg\frac{1}{r} \quad \text{cuando} \quad r \downarrow 0$$

<u>Dem. del Lema</u>: Sea $v(x) = u(x) + \frac{c}{2\pi} \lg r$

Como $\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{|x|} = E_2(x)$, solución fundamental de $-\Delta$:

$$\Delta v = \Delta u - c\delta = w - c\delta + c\delta = w$$

El lema resulta de que para $0 < r < R$ 1:

$$(2) \qquad |\tilde{v}(r)| \leq |\tilde{v}(R)| - \frac{1}{2\pi}\lg r \,.\int_{|x|<R} |w|$$

Para demostrar (2) podemos partir de u,w regulares (caso contrario regularizamos u,w, demostramos (2) para las regularizadas y pasamos al límite):

$$\frac{d}{dr}\,\tilde{v}(r) = \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, v(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi r}\int_{|x|\le r} \Delta v.dx = \frac{1}{2\pi r}\int_{|x|\le r} w$$

$$(S_r = [|x| = r], \quad d\sigma = rd\theta)$$

Luego:

$$\tilde{v}(R) - \tilde{v}(r) = \int_r^R \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}\, dr = \int_r^R \frac{ds}{2\pi s}\int_{|x|\le s} w \le \int_r^R \frac{ds}{2\pi s}\int_{|x|\le R} w$$

$$\le -\frac{\lg r}{2\pi}\int_{|x|<R} |w| .$$

A partir de (2) resulta el lema:

Como w es integrable, para todo $\varepsilon > o$ existe $R > o$ tal que $\int_{|x|<R} w < \varepsilon/2$. Dado que $\lg(o+) = -\infty$, podemos elegir un

$r_o : o < r_o < R$ tal que $|\tilde{v}(R)| < -\frac{1}{2\pi}\lg r_o.\varepsilon/2$.

Entonces para $o < r < r_o$, en virtud de (2):

$$|\tilde{v}(r)| \le -\frac{1}{2\pi}\lg r.\varepsilon$$

Pero, como $\tilde{v}(r) = \tilde{u}(r) + \frac{c}{2\pi}\lg r$, se deduce que

$$\tilde{u}(r) \sim -\frac{c}{2\pi}\lg r \quad \text{cuando} \quad r \downarrow o_{\#}$$

Veamos ya iii) $\Longrightarrow$ i):

Sea (u,w) una solución de (P) como en iii). Debido a la simetría del problema y el resultado de unicidad salvo constantes, u y w han de ser radiales. En virtud del Lema 1:

$$u(x) = \tilde{u}(r) \sim -\frac{c}{2\pi} \lg r \qquad \text{cuando} \qquad r \downarrow o$$

Así para $|x| = r$ pequeño:

$$\begin{cases} \text{si} \quad c > o, & u(r) > \frac{c}{4\pi} \lg \frac{1}{r} \\ \text{si} \quad c < o, & u(r) < \frac{c}{4\pi} \lg \frac{1}{r} \end{cases}$$

Ya que $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $w \in \beta(u)$ ctp:

$$\begin{cases} w(r) \geq \beta^+(\frac{c}{4\pi} \lg \frac{1}{r}), & \text{si} \quad c > o \\ w(r) \leq \beta^-(\frac{c}{4\pi} \lg \frac{1}{r}), & \text{si} \quad c < o \end{cases}$$

Lo que implica:

$$\begin{cases} \int_o^1 r\ \beta(\frac{c}{4\pi} \lg \frac{1}{r})\, dr < \infty & \text{si} \quad c > o \\ \int_o^1 r\ \beta(\frac{c}{4\pi} \lg \frac{1}{r})\, dr > -\infty & \text{si} \quad c < o \end{cases}$$

En suma

$$\forall a > o \qquad \int_o^1 r\left[\beta(-a \lg r) - \beta(a \lg r)\right] dr < \infty$$

Que se transforma en

$$\forall a > o \qquad \int_o^\infty \left[\beta(s) - \beta(-s)\right] e^{-as}\, ds < \infty$$

Nota.- En las integrales no es preciso determinar la sección de β tomada ya que el conjunto de puntos de multiplicidad de β es numerable.

La demostración i) $\Longrightarrow$ ii) reposa sobre los lemas:

<u>LEMA I.2</u>: Sea β g.m.m., $0 \in \beta(o)$.

Supongamos que

$$D(\beta) = \mathbb{R} \quad y$$

$$\forall a > o, \quad \int_0^\infty \left[\beta(r) - \beta(-r)\right] e^{-ar}\, dr < \infty$$

Sea Ω un espacio de medida finita y $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ dos sucesiones de funciones sobre Ω tales que

i) $w_n \in \beta(u_n)$ ctp, $\forall n$

ii) existe $a > o$, existe $C > o$ y existe $\lambda_o \geq o$

$$\alpha_n(\lambda) \leq C\, e^{-a\lambda} \quad \text{para} \quad \lambda \geq \lambda_o$$

uniformemente en n

($\alpha_n(\lambda) = \alpha_n(\Omega,\lambda) = \text{ms}\,\{x \in \Omega : |u_n(x)| > \lambda\}$, <u>función de distribución de</u> u_n).

Entonces $\{w_n\} \subset L^1(\Omega)$ y es una sucesión débilmente relativamente compacta en $L^1(\Omega)$.

<u>LEMA I.3</u>: Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$

Entonces la función de distribución de u respecto a toda bola B, $\alpha(u,B;\lambda)$ tiene una acotación del tipo

$$\alpha(\lambda) \leq C\, e^{-a\lambda}$$

Siendo $C, a > o$ constantes que solo dependen de $\|u\|_{L^1(B)}$,

$\|\mathrm{grd}\ u\|_{M^2(\mathbb{R}^2)}$ y del radio de B.

Dejando para el final la demostración de ambos lemas, terminemos la demostración del teorema:

i) $\Longrightarrow$ ii):

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, aproximamos f por funciones $f_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $f_n \to f$ en $\sigma(\mathcal{M}, C_\bullet)$, $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{\mathcal{M}}$ (por ejemplo $f_n = f * \rho_n$, $\rho_n \in \mathcal{D}$, $\rho_n \to \delta$).

Planteamos

$$(P_n) \quad \begin{cases} -\Delta u_n + w_n = f_n \\ w_n \in \beta(u_n) \end{cases}$$

En virtud del teorema A, existe $u_n \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\mathrm{grad}\ u_n| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, existe $w_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$, solución de (P_n) y

$$\|\mathrm{grad}\ u_n\|_{M^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\,\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)}$$

$$\|w_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{\mathcal{M}}$$

- Dado que $f \longmapsto u$ es una aplicación acotada de $L^1(\mathbb{R}^2)$ en $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < 2$, $\{u_n\}$ está acotado en $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, luego $\{u_n\}$ es relativamente compacta en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y, pasando si es preciso a una subsucesión:

$$u_n \longmapsto u \quad \text{en} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$$

$$u_n \longmapsto u \quad \text{ctp}$$

$$\mathrm{grad}\ u_n \longmapsto \mathrm{grad}\ u \quad \text{en} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)_w$$

- Probemos que $\{w_n\}$ es dêbilmente relativamente compacta en $L^1(B)$ para toda bola B.

En efecto $u_n \longmapsto u$ en $L^1(B)$, luego $\{\|u_n\|_{L^1(B)}\}$ acotado. $\{\|\operatorname{grad} u_n\|_{M^2}\}$ acotado, por tanto la conclusión sale de los Lemas I.3, I.2.

- Paso al lîmite en $\{w_n\}$:

Tomando una sucesión de bolas exhaustiva, ($\{B_n\}$ tal que $\bigcup B_n = \mathbb{R}^2$) y utilizando el resultado anterior y un procedimiento diagonal y pasando a una subsucesión adecuada:

$$\text{existe } w \text{ tal que } w_n \longmapsto w \text{ en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$$

- Como $u_n \longmapsto u$ en L^1_{loc} y $\Delta u_n \longmapsto w-f$ en L^1_{loc} y Δ es cerrado:

$$-\Delta u + w = f$$

- Como $u_n \longmapsto n\, u$ ctp, $w_n \in \beta(u_n)$ ctp y $w_n \longmapsto w$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ siendo (u_n) una sucesión medible, en virtud del Lema 3 de [7]:

$$w \in \beta(u) \quad \text{ctp}$$

- Finalmente $\|w\|_{L^1} \leq \liminf \|w_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{\mathcal{M}}$

y $\|\operatorname{grad} u\|_{M^2} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{M}}$

son consecuencias de Fatou e implican que $f \longmapsto (u,w)$ es acotada: $\mathcal{M} \longrightarrow W^{1,p}_{loc} \cdot L^1$

$$\|\text{grad } (u-\hat{u})\|_{M^2} \leq C \|f-\hat{f}\|_M$$

también se obtiene a partir del resultado idéntico para $L^1(\mathbb{R}^2)$ (cf. BBC [9]) pasando al límite.

- Ya hemos visto antes <u>que</u> en las condiciones del Teorema $\int \Delta u = o$, por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^2} w = \int_{\mathbb{R}^2} f$$

- La demostración de la continuidad de

$$f \longmapsto (u,w)$$

utiliza exactamente la técnica empleada en la demostración.*

<u>Dem. del Lema I.2</u>:

El criterio de Dunford - Pettis (cf. [26]) nos reduce a demostrar que $\{w_n\}$ está contenida y es acotada en $L^1(\Omega)$ y que $\int_K |w_n| \longrightarrow o$ uniformemente cuando $ms(K)$ tiende a cero.

Sea $K \subset \Omega$ medible. Para $R > o$:

$$\int_K |w_n| = \int_{K\cap[|u_n|<R]} |w_n| + \int_{K\cap[|u_n|\geq R]} |w_n|$$

Sea $M(R) = \sup \{|\beta(r)| : |r| < R\}$.

$$\int_{K\cap[|u_n|\leq R]} |w_n| \leq ms\,(K).\, M(R)$$

Por otra parte si $\gamma(r) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow o} [\beta(r+\varepsilon) - \beta(-r-\varepsilon)] = \beta^+(r) - \beta^-(-r)$ ($\gamma : [o,\infty[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es creciente), ctp $\gamma(r) = \beta(r) - \beta(-r)$ y si

$R \geq \lambda_o$

$$\int_{||u_n| \geq R|} \gamma(|u_n|) = - \int_R^\infty \gamma(r) d\alpha_n(r) = \gamma(R)\alpha_n(R) +$$

$$+ \int_R^\infty \alpha_n(r) d\gamma(r) \leq C|\gamma(R)e^{-\alpha R} + \int_R^\infty e^{-ar} \, d\gamma(r)| =$$

$$= Ca \int_R^\infty \gamma(r)e^{-ar} \, dr$$

En suma

$$(3) \qquad \int_K |w_n| \leq ms(K).\ M(R) + Ca \int_R^\infty \gamma(r)e^{-ar} \, dr$$

Haciendo ahora $R = \lambda_o$, $K = \Omega$

$$||w_n||_{L'(\Omega)} \leq Ca \int_{\lambda_o}^\infty \gamma(r)e^{-ar} \, dr + ms(\Omega).M(\lambda_o)$$

Por tanto $\{w_n\}$ está acotada en $L^1(\Omega)$.

Si por otra parte, dado $\varepsilon > o$ tomamos R de forma que

$$Ca \int_R^\infty \gamma(r)e^{-ar} \, dr < \varepsilon/2$$

y luego tomamos K tal que

$$ms(K).M(R) < \varepsilon/2$$

tenemos en (3) :

$$\int_K |w_n| < \varepsilon$$

Dem. del Lema I.3: Utilizamos el siguiente teorema debido a John y Nirenberg (cf. GT [29], pg 159).

"Theorem: Let $u \in W^{1,1}(\Omega)$ where Ω is convex, and suppose there exists a constant K such that

$$\int_{\Omega \cap B_R} |Du| \, dx \leq K R^{n-1}$$

for all balls B_R. Then there exist positive constants μ_o and C depending only on n (dimension of the space) such that

$$(4) \qquad \int_\Omega \exp\left(\frac{\mu}{K} \cdot |u-u_\Omega| \right) dx \leq C \; (\text{diam } \Omega)^n$$

where

$$\mu = \mu_o |\Omega| \; (\text{diam } \Omega)^{-n}$$

$$u_\Omega = |\Omega|^{-1} \int_\Omega u \, dx \text{ ".}$$

Aplicamos el teorema para $n=2$ y $\Omega = B_R$. La constante K es la norma-M^2 de grad $u \equiv Du$. Así deducimos de (4) que

$$\text{ms } \{x \in B : |u-u_B| > \lambda\} \leq \frac{C(2R)^2}{e^{\mu/_k \lambda}} \equiv C_1 \, e^{-a\lambda}$$

Pero si $u \in L^1(B)$, $|u_B| \leq \dfrac{||u||_{L^1(B)}}{\Omega} \equiv \lambda_1$, de donde obtenemos que:

$$\text{para} \quad \lambda > \lambda_1 , \quad \text{ms } \{x \in B : |u| > \lambda\} \leq \text{ms}\{x \in B : |u-u_B| > \lambda-\lambda_1\}$$

$$\leq C_1 \, e^{-a(\lambda-\lambda_1)} \equiv C_2 \, e^{-a\lambda}$$

Donde:
$$\begin{cases} a = \frac{1}{k} \mu = ||\text{grad } u||^{-1}_{M^2} \cdot \mu_o \, (\pi R^2) \, (2R)^{-2} \\ C_2 = C(2R)^2 \, e^{a\lambda_1} \end{cases}$$

SEGUNDA PARTE: $-\Delta u + \beta(u) \ni f, \quad f \in \mathcal{M} \quad$ EN $\mathbb{R}^1$.

También en una dimensión la hipótesis natural sobre β para obtener soluciones de $-u'' + \beta(u) \ni f$ viene indicada en BBC [9], y consiste en que β sea un g.m.m. tal que $0 \in \beta(o)$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. En efecto podemos resumir los resultados obtenidos en BBC en el siguiente teorema:

TEOREMA A.b: Sea β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \beta(o)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(o)$. Para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ existen $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $w \in L^1(\mathbb{R})$ tales que

$$\begin{cases} w \in \beta(u) & \text{ctp de } \mathbb{R} \\ -u'' + w = f & \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Además w es única y u es única salvo posibles constantes aditivas. $u \in C^1(\mathbb{R})$, u' es absolutamente continua y $u'(\pm\infty) = o$.

La aplicación $f \longmapsto (u,w)$ (posiblemente multívoca) es acotada: $L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$.

Si $(\hat{u},\hat{w})$ es la solución correspondiente a $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\|u'-\hat{u}'\|_\infty \leq 2\,\|f-\hat{f}\|_1$$

$$\int (w-\hat{w})^+ \leq \int (f-\hat{f})^+$$

Para todo $j \in J_o$:

$$\int j(w) \leq \int j(f)$$

Además

$$\int w = \int f$$

Por fin, sobre la unicidad de u se tiene:

- si $f \leq \hat{f}$ ctp, $f \neq \hat{f}$ ctp $\Longrightarrow$ $u \leq \hat{u}$ ctp

- si u no es única, necesariamente se tiene

i) $\beta^{-1}(o) = [a,b] \neq \{o\}$

ii) $\int f = o$

iii) $w = o$ ctp

iv) $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, $R(u) \subsetneq [a,b]$, $-u'' = f$

Pasamos a considerar (P) cuando f es una medida acotada. La unicidad de soluciones se demuestra como en el Teorema I.1. haciendo uso del "Lemma 3.5" de BBC y del hecho trivial de que

"si $u \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ y $u'' \in L'(\mathbb{R})$, $p(u)u'^2 \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int p'(u)\, u^2 + \int p(u)u'' = o \qquad \forall p \in P"$$

se obtiene así el

<u>TEOREMA I.1.b. (de unicidad):</u>

Las soluciones de $-u'' + \beta(u)$ f, $f \in M$ tales que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $w = f + u'' \in L^1(\mathbb{R})$ son únicas (salvo una constante aditiva u).

Además si u no es única se cumple i) ii) iii) iv) del Teorema 1.

En cuanto a la comparación de soluciones el Lema 1.5 del apéndice es cierto en $\mathbb{R}$ si pedimos que $u \in W^{1,\infty}$, $u'' \in M$, $w \in L^1$ con lo que el Teorema I.2 se puede reproducir obteniéndose el

TEOREMA I.2.b. (de comparación de soluciones):

Sean $f_1, f_2 \in (\mathbb{R})$, $f_1 \leq f_2$ en $M(\mathbb{R})$. Sean (u_i, w_i), $u=1,2$ las soluciones correspondientes de (P), $u_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $w_i \in L^1(\mathbb{R})$.

Entonces existen dos posibilidades disjuntas

i) $u_1 \leq u_2$, $w_1 \leq w_2$ ctp

ii) $u_1 - u_2 = C$, constante $> o$, $f_1 = f_2$, $\int f_i = o$, $w_i = o$

TEOREMA I.3.b. (de existencia):

Sea β un g.m.m., $0 \in \beta(o)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$.

Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $D(\beta)$ es un abierto de $\mathbb{R}$

ii) Para toda $f \in M(\mathbb{R})$ existe $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, existe $w \in L^1(\mathbb{R})$ y $-u'' + w = f$, $w \in \beta(u)$.

iii) Para $f = c\delta$, siendo δ la masa de Dirac y c una constante real existe $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, existe $w \in L^1(\mathbb{R})$ y $-u'' + w = f$, $w \in \beta(u)$.

Entonces la aplicación $f \longmapsto (u,w)$ es acotada de $M(\mathbb{R})$ en $W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ y secuencialmente continua para las topologías débiles ($\sigma(M, C_\bullet)$ en $M(\mathbb{R})$)

Si $(u,\hat{w})$ es la solución corresp. a $\hat{f}$

$$\|u' - \hat{u}'\|_\infty \leq 2\,\|f-\hat{f}\|_M$$

$$\int_{\mathbb{R}} w \leq \int_{\mathbb{R}} f \equiv f(\mathbb{R})$$

<u>Demostración</u>: ii) $\Longrightarrow$ iii) trivial.

i) $\Longrightarrow$ ii) Seguimos el procedimiento ya usado en $\mathbb{R}^2$:

Regularizando por ejemplo, aproximamos f por una sucesión $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, $f_n \to f$ en $\sigma(M,c_o)$, $\|f_n\|_1 \leq \|f\|_M$ y planteamos

$$(P_n)\quad \begin{cases} -u_n'' + w_n = f_n \\ \qquad w_n \in \beta(u_n) \end{cases}$$

En virtud del Teorema A.b, existen $u_n \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y $w_n \in L^1(\mathbb{R})$ solución de (P_n) tales que

$$\|u_n'\|_\infty \leq 2\,\|f_n\|_{L^1} \leq 2\,\|f\|_M$$

Si $j(r) = \int_0^r \beta(s)ds$, tenemos $j(o) = o$, $j : \mathbb{R} \longrightarrow [o,\infty[$ es convexa, s.ci., propia y

$$\|j(u_n)\|_\infty \leq 2\,\|f_n\|_{L^1}^2 \leq 2\,\|f\|_M$$

Con lo que la sucesión $\{u_n\}$ está uniformemente acotada, $\{u_n\}$ es una sucesión acotada en $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, en consecuencia relativamente compacta en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pasando si es preciso a una subsucesión adecuada

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \quad \text{en } L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ y ctp.}$$

$$u' = \lim_{n\to\infty} u'_n \quad \text{en} \quad L^\infty \quad \text{débil}_*$$

El hecho de que $D(\beta)$ sea un intervalo abierto (por hipótesis) permite deducir de $\{u_n\}$ acotada en $L^\infty(\mathbb{R})$ que $\{w_n\}$ está acotado en $L^\infty(\mathbb{R})$. Pasando a una subsucesión adecuada:

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n \quad \text{en} \quad L^\infty\text{-}w\text{-}_*$$

y por tanto en L^1_{loc} - w.

Como antes deducimos que

$$u'' + f = w \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'$$

$$w \in \beta(u) \quad \text{ctp}$$

iii) $\Longrightarrow$ i) Vamos a mostrar que si $D(\beta)$ no es un abierto, existen valores de la constante c para los que es imposible resolver $-u'' + \beta(u) \ni c\delta$:

Es suficiente estudiar el caso en que

$$\operatorname{Sup}\,(D(\beta)) = b < \infty$$

$$D(\beta) \cap [o,\infty[\; = [o,b]$$

Tomemos $f = c\delta$, $c > o$.

La ecuación $-u'' + \beta(u) \ni c\delta$ significa para $x \neq o$:

$$u'' = w \in \beta(u) \quad \text{si} \quad u < b$$

$$u'' \geq o \quad \text{si} \quad u = b$$

Si $\beta^{-1}(o) = [\alpha,\beta]$, $\alpha \leq o \leq \hat{\beta} \leq b$ $u_1 = \hat{\beta}$ es una solución de $-u'' + \beta(u) = o$ y como $o \leq c\delta$, $o \neq c\delta$, el teore ma de comparación asegura que $\hat{\beta} \leq u$. Dado que el razonamiento no pierde generalidad si suponemos $\beta^{-1}(o) = \{o\}$ y es más simple, tomaremos $\alpha = \hat{\beta} = o$, con lo que $u \geq o$ ctp. También es cierto que $w \geq o$.

Partimos de que existen $(u,w) \in W^{1,\infty} \times L^1(\mathbb{R})$ solución y vamos a caracterizar para qué $c > o$ ello es posible:

Dado que $w \in L^1$, $u'' = w$, si $x \neq o$, $u'' \in L^1(\mathbb{R} - \{o\})$ [en $x=o$ puede estar localizada una componente de u'' que sea una medida acotada, lo cual es el caso, como se verá]. Así $u' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ y existen $u'(\pm\infty)$. Además $u'(\pm\infty) = o$ dado que en caso contrario $w \in \beta(u)$ dejaría de ser integrable.

$w \geq o$ implica $u'' \geq o$, u' creciente.

Además $u'(\pm\infty) = o$ implica $u' \geq o$ si $x < o$, $u' \leq o$ si $x > o$. Así u es creciente si $x \leq o$, decreciente si $x < o$. Basta que estudiemos u en $[x > o]$, pues la unicidad de soluciones y la simetría de f implican que u es par.

Existe pues $u(\pm\infty)$. Como w es integrable y suponemos $\beta^{-1}(o) = \{o\}$, $u(\pm\infty) = o$.

En estas condiciones el cumplimiento de (P) en el origen equivale a

$$u'(o+) - u'(o-) = -c$$

Y, dada la simetría, $\underline{-u'(o+) = c/2}$.

Observamos que es imposible que $u(x_o) = b$ para un $x_o > o$. En efecto en este caso, u es <u>contínua</u> y por tanto $u \approx b$ en un entorno de x_o. $u'' = w$ es estrictamente positiva en ese entorno y dado que $u \leq b$ ctp esto es imposible.

Tratemos de calcular explícitamente u en $[x > o]$:

$$u'' \in \beta(u)$$

$$u''u' \in \beta(u)u'$$

Integrando:

$$u'^2(x) - u'^2(x_o) = 2j(u(x)) - 2j(u(x_o))$$

Sabemos que $u'(\infty) = o$, $u(\infty) = o$, $j(o) = o$, luego

$$u'^2(x) = 2j(u(x)) \tag{4}$$

Como $u' \leq o$:

$$\int_{u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{2j(u)}} = -\int_{o}^{x} dx = -x$$ (ecuación implícita de u)

El detalle que nos interesa se obtiene haciendo tender x a 0 en (4). Entonces

$$u_o'^2 = 2j(u_o)$$

Pero según lo visto antes, $u(x) < b$ si $x > o$ luego

$$o \leq u_o \leq b$$

Así que: $o \leq u_o'^2 \leq 2j(b) = 2\int_o^b \beta(s)ds$

$$o \geq u_o' \geq -\sqrt{2j(b)}$$

Por lo que

$$o \leq c \leq 2\sqrt{2j(b)}$$

Dado que la demostración es análoga para c negativa, obtenemos la siguiente

PROPOSICION I.1: La ecuación $-u'' + \beta(u) \ni c\delta$ es resoluble en el sentido de iii), T$^{\underline{a}}$3.b si y sólo si $|c| \leq 2(2 \int_0^b \beta(s)ds)^{1/2}$ $_{*}$

Las afirmaciones finales del Teorema se demuestran como en el Teorema I.3 sin ninguna dificultad$_{**}$

Ejemplo I.1: Tomemos β g.m.m. tal que

$$(5) \qquad \begin{cases} \beta(r) = o & \text{si} \quad o \leq r < b < \infty \\ \beta(b) = [o,\infty[\end{cases}$$

Entonces $u = b$ es una solución en $W^{1,\infty}$ de $- u''+ \beta(u) \ni o$ (con $w=o$). Por el teorema de comparación si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $f \geq o$, $f \neq o$ y existe solución (u,w) en el sentido del Teorema 3.b, $u \geq b$, es decir $u = b$. En consecuencia, $u'' = o$, $w = f$ y obtenemos el siguiente resultado

"existe solución si y sólo si $f \in L^1(\mathbb{R})$".

Este ejemplo plantea la posibilidad de extender el concepto de solución para englobar la posibilidad presente: $u=b$, $u''=o$, $w=f \in \mathcal{M}^+$.

DEFINICION I.1: Se dice que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $w \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ es una solución generalizada de

$$-u'' + \beta(u) \ni f, \quad f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

cuando $D(\beta) = [a,b]$ $,-\infty < a \leq o \leq b < \infty$ sii

$$\begin{cases} 1) \text{ en el conjunto } [a<u<b], \quad w \in L^1 \text{ y } w \in \beta(u) \text{ ctp, } w=f+du \\ 2) \text{ en } [u=b], \quad f+u'' \in M^+ \\ 3) \text{ en } [u=a], \quad f+u'' \in M^- \end{cases}$$

De forma análoga en los demás casos en que $D(\beta)$ no es abierto, definimos la solución generalizada.

Al menos en algunos casos esta definición generalizada permite obtener soluciones de (P) cuando $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ y $D(\beta)$ no es un abierto.

CAPITULO II

COMPORTAMIENTO EN EL INFINITO DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION $-\Delta u + \beta(u) \ni f$

Se pretende en este capítulo demostrar que en las condiciones del capítulo anterior, la solución u del problema (P_2):

$$(P_2) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f, \qquad f \in M(\mathbb{R}^2)$$

converge uniformemente a cero en el infinito si f está acotada en un entorno del infinito por una medida radial y si $\beta^{-1}(o) = \{o\}$.

Si $\beta^{-1}(o) \neq \{o\}$ se demuestra que este resultado no es cierto en general y obtenemos una estimación óptima (Prop. II.1).

También se estudian diversos aspectos sobre la velocidad de convergencia de las soluciones y el caso en que f tiene soporte compacto (Prop. II.7). Obtenemos cuando f tiene soporte compacto la condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones de soporte compacto hallada por Brézis [13] para abiertos acotados, por BBC [9] en $\mathbb{R}^N$ y por Díaz Díaz [23] en abiertos no acotados de $\mathbb{R}^N$ cuando f es una función integrable adecuada. Además cuando no hay soporte compacto estimamos la velocidad de convergencia en función de β.

El estudio empieza por el resultado más general: si f es una medida acotada no necesariamente radial la solución u del problema (P) converge en "media angular" en el infinito (T^a II.1).

Como final tratamos brevemente el mismo problema en una dimensión N = 1. Los resultados son análogos al caso bidimensional, siendo las demostraciones más sencillas.

En [7], Bénilan trata el caso $N \geq 3$, utilizando el hecho, allí crucial, de que para $N \geq 3$ la solución fundamental del laplaciano es de la forma

$$E_N(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2}}\right)$$

(cf. apéndice de BBC [9]).

Nosotros hemos de superar el inconveniente de que $|E_2(x)| \to \infty$ cuando $|x| \to 0,\infty$, resultando un proceso más laborioso: en un primer paso se obtiene el resultado para f radial y en un segundo paso se elabora un teorema de comparación adecuado a la acotación de f en un entorno del infinito, de donde se obtiene el resultado deseado (Tª II.2).

PRIMERA PARTE: Convergencia en media y el caso radial en $\mathbb{R}^2$

II.1. Empezamos por un resultado general, para el que no es necesaria ninguna acotación radial de $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. Se trata de que si $\beta^{-1}(o) = \{o\}$ y $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, la solución u del problema (P) $-\Delta u + \beta(u) \ni f$, con la regularidad del T$^{\underline{a}}$ I.3, converge a cero en el infinito en "media angular".

Para $N \geq 3$ este resultado es citado por Bénilan [7]

Nosotros para $N = 2$ obtenemos el

TEOREMA II.1: Sea β un g.m.m. tal que $\beta(o) \ni o$ y sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. Supongamos que existe (u,w) solución de (P) en el sentido aquí usual: $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w = f + \Delta u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, y $\|w\|_1 \leq \|f\|_{\mathcal{M}}$.

Pongamos $\beta^{-1}(o) = [a,b]$, $a \leq o \leq b$. Entonces:

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} \sup \ \tilde{u}(r) \leq b \\ \\ \lim\limits_{r\to\infty} \inf \ \tilde{u}(r) \geq a \end{cases}$$

siendo $\tilde{u}(r) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)d\theta \equiv \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r} u.d\sigma$ la media angular de u en la circunferencia $[|x| = r]$, $r > o$.

Demostración: Observemos primero que la solución (u,w) del enunciado existe en cuanto β cumpla la condición (C_2) del teorema I.3.

En segundo lugar, sobre la definición de $\tilde{u}(r)$, dado que $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, si $r > o$ $u \in W^{1,1}(B_r(o))$ y por los teoremas de trazas (cf. [ ]) $u|_{S_r} \in L^1(S_r)$ y podemos definir $\tilde{u} :]o,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Demostremos que si $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $\Delta u \in M(\mathbb{R}^2)$ y si $r_1 > r_1 > o$

$$\tilde{u}(r_2) - \tilde{u}(r_1) \geq - \|\Delta u\|_M \ \lg \frac{r_2}{r_1}$$

Regularizamos para ello u mediante $\{\rho_n\}$, $\rho_n \in \mathcal{D}*(\mathbb{R}^2)$, $\rho_n \to \delta$ en $\mathcal{D}'$. Sea $u_n = u * \rho_n$; $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $u_n \to u$ en $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y ctp, (pasando a una subsucesión), $\Delta u_n \to \Delta u$ en $\sigma(M,C_\bullet)$, $\|\Delta u_n\|_1 \leq \|\Delta \ \|_M$. Además

$$\frac{d}{dr}\tilde{u}_n(r) = \frac{d}{dr}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_n}{\partial r}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r}\frac{\partial u_n}{\partial \nu}.d\sigma = \frac{1}{2\pi r}\int_{|x|\leq r}\Delta u_n.dx \geq -\frac{1}{2\pi r}\|\Delta u_n\|_{L^1}$$

integrando este r_1 y r_2:

$$\tilde{u}_n(r_2) - \tilde{u}_n(r_1) \geq -\frac{1}{2\pi}\lg\frac{r_2}{r_1}\ \|\Delta u_n\|_{L'}$$

Y pasando al límite, recordando que $u_n \to u$ en $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ implica $u_n|_{S_r} \mapsto u|_{S_r}$ en $L^1(S_r)$:

$$\tilde{u}(r_2) - \tilde{u}(r_1) \geq -\frac{1}{2\pi}\lg\frac{r_2}{r_1}\ \|\Delta u\|_M$$

2) Demostremos ahora que $\limsup_{r\to\infty} \tilde{u}(r) \leq b$.

En caso contrario podemos hallar una sucesión $\{r_n\}$ tal que

i) $r_n \to \infty$, $r_{n+1} \geq 2r_n$

ii) $\tilde{u}(r_n) \geq b_1 > b$ para todo n.

Entonces si $r_n \leq r \leq r_n c$

$$\tilde{u}(r) - \tilde{u}(r_n) \geq - ||\Delta u|| \quad . \frac{1}{2\pi} \lg \frac{r}{r_n}$$

Sea $1 < c$ tan pequeño que

$$\lg c \leq \pi b_1 \varepsilon \quad ||f||^{-1}$$

Entonces

$$\tilde{u}(r) \geq b_1(1-\varepsilon) \equiv b_2 > b$$

Sabemos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$. Además por un argumento ya repetido, el hecho de que $w \in \beta(u)$ y $w \in L^1(\mathbb{R}^2$ implica que $\text{ms}\,[u > \lambda] < \infty$ si $\lambda > b$. Entonces podemos aplicar el Lema 5.9 de BBC [9] que dice que en estas hipótesis

$$\int (u-\lambda)^+ \leq C \,||\text{grad } u||_{M^2} \cdot \text{ms}\,[u > \lambda] = k.m(\lambda)$$

donde C es independiente de u y λ y $m(\lambda) = \text{ms}\,[u > \lambda]$

Tomemos $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, r_n \leq r \leq r_n . c\}$. Entonces

$$(3) \qquad \int_{\Omega_n} u^+ \leq \int_{\mathbb{R}^2} (u-\lambda)^+ + \lambda\, \text{ms}(\Omega_n) \leq k\, m(\lambda) + \lambda\, \text{ms}(\Omega_n)$$

Sin embargo, en virtud de (38):

$$(4) \qquad \int_{\Omega_n} u^+ \geq \int_{\Omega_n} u = \int_{r_n}^{r_n c} r\, \text{fr} \int_0^{2\pi} u\, d\theta = \int_{r_n}^{r_n c} 2\pi r\, dr\, \tilde{u}(r) \geq$$

$$\geq g_2\, \text{ms}(\Omega_n)$$

Comparando (3) y (4):

$$(5) \qquad b_2\, \text{ms}(\Omega_n) \leq K\, m(\lambda) + \lambda\, \text{ms}(\Omega_n)$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \text{ms}(\Omega_n) = \infty$, es necesario que $\lambda \geq b_2$.

Sin embargo podemos tomar cualquier $\lambda > b$, en particular $b < \lambda < b_2$, por lo que (5) no puede ser cierto.

3. Para $\lim_{r\to\infty} \tilde{u}(r) \geq a$ la demostración es análoga.

II.2. Examinemos en adelante el caso en que $f \in M(\mathbb{R}^2)$ es una medida radial, es decir invariante por rotaciones alrededor del origen.

En este caso dado que la ecuación $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ es invariante ante las rotaciones, si las soluciones son únicas han de ser necesariamente radiales. En el Teorema I.1 se exhibe un tipo de soluciones únicas y en el Teorema I.3 se muestra para qué grafos β se obtienen estas soluciones.

Así pues, en virtud del Teorema II.1, observando que si u es radial, la media angular $\tilde{u}$ coincide con u, tenemos como corolario

PROPOSICION II.1: Sea β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(o)$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. Sea $f \in M(\mathbb{R}^2)$ una medida radial y supongamos que (u,w) es una solución de (P) tal que $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\operatorname{grad} u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Entonces u (solución única con las propiedades anteriores) y es radial y se tiene que

$$(6) \quad \begin{cases} \limsup_{|x|\to\infty} u \leq b \\ \liminf_{|x|\to\infty} u \geq a \end{cases}$$

donde $\beta^{-1}(o) = [a,b]$ y los límites son uniformes.

Sin embargo en el caso en que f es radial podemos demostrar los límites (6) en condiciones más generales mediante un cálculo más directo.

PROPOSICION II.2: Sea β un g.m.m tal que $0 \in \beta(o)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$ y pongamos $\beta^{-1}(o) = [a,b]$. Sea $\Omega_o = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > R_o\}$, $R_o > o$ y $S_o = \partial\Omega_o \equiv S_{R_o}$. Sea $f \in M(\Omega_o)$ radial y sean $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_o)$ y $w \in L^1(\Omega_o)$ radiales tales que

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + w = f & \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega_o) \\ w \in \beta(u) & \text{ctp} \quad \Omega_o \end{cases}$$

Entonces

$$(6) \quad \begin{cases} \limsup\limits_{|x| \to \infty} u \leq b \\ \liminf\limits_{|x| \to \infty} u \geq a \end{cases} \qquad \text{(límites uniformes)}$$

Demostración: Observemos para empezar que no necesitamos la hipótesis $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$.

1) Si $f \in M(\Omega_o)$ es radial, f en función de la única variable $r = |x|$, que escribiremos $f(r)$ es tal que $rf(r) \in M(]R_o,\infty[)$. Para comprobarlo basta pasar a coordenadas polares.

Por lo mismo si $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_o)$, es radial, $u(r) \in L^1_{loc}(]R_o,\infty[)$ y existe $\frac{\partial u}{\partial r} \equiv \sum_i \frac{x_i}{r} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^1_{loc}(]R_o,\infty[)$. Además $\Delta u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}$ se puede expresar como $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{du}{dr})$

En las condiciones de la Proposición podemos pues escribir (P) de la forma $(' \equiv \frac{d}{dr})$

$$(7) \quad \begin{cases} + \frac{1}{2} (ru')' = w-f & \text{en} \quad \mathcal{D}'(]R_o,\infty[) \\ w(r) \in \beta(u(r)) & \text{ctp} \quad r > R_o \end{cases}$$

Integrando $(ru')' = (w-f)r$ entre r_1 y r_2, $R_o < r_1 < r$ obtenemos

$$\int_{r_1 \leq r \leq r_2} (ru')'dr = \int_{r_1 < r \leq r_2} w(r)r\,dr - \int_{r_1 < r \leq r_2} f(r).r$$

O sea

$$(8) \qquad r_2u'(r_2+) - r_1u'(r_1+) = \frac{1}{2\pi} \int_{r_1 < |x| \leq r_2} (w-f)dx$$

De donde

$$|r_2\, u'(r_2+) - r_1\, u'(r_1+)| \leq \frac{1}{2\pi} (\|f\|_{M(\Omega_o)} + \|w\|_{L^1(\Omega_o)})$$

Además, integrando en $S_r = [|x| = r]$, $r > R_o$:

$$(9) \qquad ru'(r+) - ru'(r-) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x|=r} (w-f) = \frac{-1}{2\pi} \int_{|x|=r} f$$

Así pues $ru'(r)$ es una función reglada, $ru'(r) \in L^\infty(]R_o,\infty[)$ y por tanto

$$(10) \qquad u'(r) = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Es entonces inmediato que $u(r) \in C(]R_o,\infty[)$.

Notas: 1) Si $f \in L^1(\Omega_o)$, $u(r) \in C^1(]R_o,\infty[)$ como es sabido.

2) El resultado (10) juega el papel de (1) del Teorema II.1.

2) Ahora obtenemos el resultado (6) en virtud del siguiente lema utilizando (10):

LEMA II.1: Sean $u \in W^{1,1}_{loc}(R,\infty)$, $w \in L^1_{loc}(R,\infty)$ tales que

i) $u'(r+) \leq Cr$, $C > o$ para $r > R$

ii) $rw(r) \in L^1(R,\infty)$

iii) $w \in \beta(u)$ ctp $r > R$, siendo β como en la Prop. II.1.

Entonces

$$\limsup_{r \to \infty} u(r) \le b$$

Demostración: Si por el contrario $\limsup_{r \to \infty} u > b$, podemos tomar una sucesión real $\{r_n\}$ tal que

i) $r_n > R$, $r_{n+1} > r_n + 1$

ii) $u(r_n) > l > b$, $w(r_n) > L > o$

Fijemos l_1 : $b < l_1 < l$ y $L_1 = \beta^o(l_1) > o$.

Sea $\delta_n = \min\left(1, \frac{l-l_1}{C\, r_n}\right)$

Entonces para r : $r_n - \delta_n \le r \le r_n$:

$$u(r_n) - u(r) \le \sup u'(r+)(r_n - r) \le C\, r_n (r_n - r) \le C\, \delta_n\, r_n <$$
$$< l - l_1$$

de donde

$$u(r) \ge u(r_n) - (l - l_1) > l_1$$

$$w(r) \ge \beta^o(l_1) = L_1 > o$$

Podemos ahora estimar $\|w\|_{L^1(\Omega_o)}$:

$$\int_R^\infty r|w(r)|dr \ge \sum_1^\infty \int_{r_n - \delta_n}^{r_n} r\, w(r)dr \ge L_1 \sum_1^\infty r_n\, \delta_n = \infty$$

Pero $r.w \in L^1(R, \infty)$, luego $\int_R^\infty r|w(r)|dr < \infty$ *

3) Del mismo modo obtenemos $\liminf_{r \to \infty} u(r) \geq a$, con lo que termina la demostración de la Proposición*

Cuando $f \in M(\mathbb{R}^2)$ cumple $f \geq o$, en virtud el Teorema I.2 sabemos que para las soluciones que cumplen la regularidad allí citada, $w \geq o$ y si $f \neq o$, $u \geq o$, ctp. En este caso vamos a ver que se tiene además la siguiente estimación asintótica

$$(11) \qquad u'(r) \leq o(\frac{1}{r})$$

y análogamente si $f \leq o$.

LEMA II.2: Si en las condiciones de PROP. II.1 además $w \geq o$, se tiene

$$u'(r) \leq o\ (\frac{1}{r})$$

$$\text{si} \quad w \leq o \qquad u'(r) \geq o\ (\frac{1}{r})$$

Demostración: 1) Para $r > R_o$, escribamos

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x|>r} f$$

Entonces $F: \left]R_o, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ verifica

i) F es continua por la derecha y

$$F(r-) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq r} f$$

ii) $\lim_{r\to\infty} F(r) = o$

Usando el hecho de que $w \geq o$ en (9) se tiene que

$$r_2u'(r_2+) - r_1u'(r_1+) \geq -F(r_1) + F(r_2)$$

o sea

$$r_2u'(r_2+) - F(r_2) \geq r_1u'(r_1+) - F(r_1)$$

Es decir

(12) $\quad ru'(r+) - F(r) \quad$ es creciente

2) Veamos que $ru'(r+) - F(r) \leq o$.

Si por el contrario existe $r_o > o$ tal que $r_ou'(r_o+) - F(r_o) \geq \varepsilon > o$, en virtud de (12) para $r > r_o$ $ru'(r+) - F(r) \geq \varepsilon > o$. Pero $F(r) \to o$ y por tanto existe $r_1 \geq r_o$ tal que

$$\text{para } r \geq r_1 \qquad \begin{aligned} ru'(r+) &\geq \varepsilon/2 \\ u'(r+) &\geq \varepsilon/2 \\ u(r) &\geq \frac{\varepsilon}{2} \lg r + C \end{aligned}$$

Entonces $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = \infty$, lo que contradice el hecho de que $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$, $w \in \beta(u)$, $w \in L^1(\Omega_o)$.

Por tanto deducimos

(13) $\quad u'(r+) \leq \dfrac{F(r)}{r} \quad$ para $r > R_{o_*}$

3) El caso $w \leq o$ es análogo.

II.3. Precisamos en esta sección el alcance de los resultados anteriores mostrando, mediante una serie de ejemplos y resultados, que en algún sentido sus conclusiones no pueden mejorarse.

PROPOSICION II.3: Si $\beta^{-1}(o) \neq \{o\}$ no puede esperarse que $\lim\limits_{x\to\infty} \text{unif}\ u(x) = o$; varios hechos contradicen esta esperanza.

1. Cuando $f \geq o$, $f \neq o$ en la Prop. II.1 tenemos

$$\limsup_{|x|\to\infty} u \leq b \quad \text{(Prop. II.1)}$$

$$u \geq b \quad \text{(Teorema I.2 de comparación)}$$

Por tanto

$$\lim_{|x|\to\infty} u = b$$

2. Del mismo modo si $f \leq o$. $f \neq o$

$$\lim_{|x|\to\infty} u = a$$

3. Veamos un caso en que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, pero $u \not\to o$ en el infinito:

- Sean c tal que $a \leq -c < o$ y $1 = b+c$.

  Sea $\bar{u} \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|\bar{u}\|_\infty = 1$. Pongamos $f = -\Delta\bar{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ Entonces $u = \overline{u-c}$ es solución de

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f$$

  si y solo si $a \leq -\bar{c} \leq -c$ y $\lim\limits_{|x|\to\infty} u = -\bar{c} < o$

  En este caso $w = f + \Delta u = o$

- Caso análogo si $o < c \leq b$, $1=c-a$, $\bar{u} \in \mathcal{D}^-(\mathbb{R}^2), \ldots$

4. $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $w \neq o$ y $u \not\to o$ en el infinito:

- Supongamos $\text{Int}\, D(\beta) \ni b$.

- Sean como antes $a \leq -c < o$, $1 = b+c$,

  $\bar{u} \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$, $\|\bar{u}\|_\infty > 1$, $\bar{f} = -\Delta\bar{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Tomamos $u = \bar{u} - c$ y $w = \beta_o(u)$.

Entonces w tiene soporte compacto $\subset \{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) > 1\}$ y es acotada, luego integrable.

Si $f = \bar{f} + w \in L^1_o(\mathbb{R}^2)$

$$-\Delta u + w = f, \quad w \in \beta(u), \quad \lim_{|x|\to\infty} u = -c < o$$

y la solución u es única, pues $w \neq o$.

PROPOSICION II.4: En las condiciones de la Prop. II.1 se puede afirmar que

i) para toda $f \in M^+(\mathbb{R}^2)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} w = o$ (unif) si y solo si β es contínua en b.

ii) para toda $f \in M^-(\mathbb{R}^2)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} w = o$ (unif) sii β es contínua en a.

iii) para todo $f \in M(\mathbb{R}^2)$, $\lim w = o$ (unif) sii β es contínua en a y b

$(\beta^{-1}(o) = [a,b])$.

Demostración: En sentido $\Leftarrow$) las implicaciones son inmediatas. Veamos por ejemplo iii):

Sabemos que $\limsup\limits_{|x|\to\infty} u \leq b$, $\liminf\limits_{|x|\to\infty} u \geq a$ (unif)

Por la continuidad de β y $\beta([a,b]) = \{o\}$:

$$\lim_{|x|\to\infty} w = o \quad \text{(unif)}$$

$\Rightarrow$)1. Supongamos para más sencillez que $\beta^{-1}(o) = \{o\}$, $\beta(o) = [\gamma^-, \gamma^+]$, $-\infty < \gamma^- < o < \gamma^+ < \infty$. En virtud del Teorema 6.B de BBC [ ], si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y existen α^-, α^+ constantes tales que $\gamma^- < \alpha^- \leq f \leq \alpha^+ < \gamma^+$ en un entorno del infinito, existe entonces u solución de $-\Delta u + w \ni f$ en el sentido de BBC y de soporte compacto. Además fuera del soporte de u, $w = f$. Así, si $f \not\to o$ en el infinito, $w \not\to o$, en el infinito.

2. Sea ahora $\beta^{-1}(o) = [a,b]$, $b > o$ $\beta(b) \neq \{o\}$ y tomemos $f \in L^1$, $f \geq o$, $f \neq o$. Entonces existe solución única $u \geq b$ y $w \geq o$ de forma que la parte negativa de β no juega ningún papel.

Trasladando β de forma que b sea el nuevo origen y corrigiendo β en la parte negativa nos ponemos en el caso anterior (es preciso corregir u : $\overline{u} = u-b$).

3. Mismo procedimiento si $\beta^{-1}(o) = [a,b]$, $\beta(a) \neq \{o\}$, $a < o$.

<u>COROLARIO II.1</u>: En las condiciones de la Prop. II.1 se puede afirmar que para toda $f \in M(\mathbb{R}^2)$.

$$|x| \to \infty \Longrightarrow u \longrightarrow o, \quad w \longrightarrow o$$

si y solo si $\beta(o) = \beta^{-1}(o) = \{o\}$.

II.4. <u>Estimaciones sobre la convergencia</u>

Realmente en la demostración de la Prop. II.1 no hemos apurado la información disponible, como ya observamos en el Lema II.2.

En efecto, la estimación $u'(r+) \leq \frac{F(r)}{r}$, $F(r) \downarrow o$ permite estimar la velocidad de convergencia de u en función del comportamiento de β en los extremos de $\beta^{-1}(o) = [a,b]$:

PROPOSICION II.5:

a) En las condiciones de la Prop. II.1, sea β un g.m.m que verifica además la condición

(14) $\beta(r+b) \geq Cr^{\alpha}$ para $C,\alpha > o$, $r > o$ pequeño

entonces se tiene

(15) $u(r)-b \leq o\,(\frac{1}{r^N})$, $N = \frac{2}{\alpha+1}$

Y si β es tal que

(16) $\beta(r+b) \sim r^{\alpha}$ para $r > o$, $r \approx o$

se tiene

(17) $\beta(u(r)) \ni w(r) \leq o\,(\frac{1}{r^M})$, $M = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$

b) Resultados análogos para el extremo a:

Si $\beta(a-r) \leq -Cr^{\alpha}$, para $C,\alpha > o$, $r > o$ pequeño

$$u(r)-a \geq o\,(\frac{1}{r^N}), \quad N = \frac{2}{\alpha+1}$$

Y si $\beta(a-r) \sim -r^{\alpha}$, para $r > o$, $r \approx o$

$$\beta(u(r)) \quad w(r) \geq o\,(\frac{1}{r^M}), \quad M = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$$

c) En el caso más general en que

(18) $\beta(r+b) \geq q(r) > o$, $r > o$, $r \approx o$

siendo $q(r)$ una función creciente definida en un entorno de $o+$, $q(o) = o$ (se puede tomar $q(r) = \beta^o(r+b)$). Pongamos $r.q(r) = p(r)$ y definamos p^{-1} localmente en un entorno de $o+$ en el sentido de los grafos: p^{-1} resultará continua. Entonces para $r \to \infty$:

(19) $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{u(r)-b}{p^{-1}(\varepsilon r^{-2})} \leq 1$, $\forall \varepsilon > o$

Además si $\beta(r+b) \sim q(r)$:

$$(20) \qquad w(r) \leq \frac{\varepsilon r^{-2}}{p^{-1}(\varepsilon r^{-2})}$$

d) Resultados análogos para el extremo a.

Demostración: a) Supongamos que β cumple (14) pero que $(N = \frac{2}{\alpha+1})$:

$$\limsup_{r \to \infty} (u(r)-b).r^N > 1 > o$$

Sea $\{r_n\}$ una sucesión real tal que

i) $r_n \to \infty, \quad r_{n+1} \geq 2r_n$

ii) $(u(r_n)-b).r_n^N > 1$

Y sea $\delta_n = \min\left(\frac{r_n}{2}, \frac{1}{4r_n^{N-1}}\right)$

Entonces todo r: $r_n-\delta_n \leq r \leq r_n$ y para $n >> o$ de forma que $F(^{r_n}/_2) < 1$:

$$u(r_n)-u(r) = \int_r^{r_n} u'(r+)dr \leq \frac{F(^{r_n}/_2)}{^{r_n}/_2} \cdot \delta_n \leq \frac{1}{2 r_n^N}$$

Luego:

$$u(r)-b \geq \frac{1}{r_n^N} - \frac{1}{2r_n^N} = \frac{1}{2r_n^N}$$

Así estimamos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w| \geq \sum_1^{\infty} 2\pi \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} |w(r)|rdr \geq \sum_{N_o}^{\infty} 2\pi \left(\frac{1}{2r_n^N}\right)^{\alpha} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r_n-\delta_n}^{r_n} \geq$$

$$\geq \sum \frac{2\pi 1^{\alpha}}{2^{\alpha} r_n^{N\alpha}} \cdot \frac{3}{4} r_n \delta_n \geq C \sum \frac{r_n^2}{r_n^{N\alpha}\, r_n^N} = C \sum \frac{1}{r_n^{N(\alpha+1)-2}} = \infty$$

Contradiciendo la hipôtesis $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Así pues (15) es cierto. (17) se deduce de (16) de forma inmediata.

b) Idem mutatis mutandis.

c) Dejemos sentado para empezar que por ser $q : [o, r_o] \to \mathbb{R}$ creciente, $p(r) = rq(r)$ es estrictamente creciente. luego p^{-1} es continua y creciente.

Denominemos $g(r) = p^{-1}(\varepsilon r^{-2})$ para un $\varepsilon > o$ y $r >> o$:

$$g(r) \downarrow o \qquad \text{cuando} \qquad r \uparrow \infty$$

Supongamos pues que a pesar de cumplirse (9) se tiene:

$$\limsup_{r \to \infty} (u(r)-b) \cdot \frac{1}{g(r)} \geq l > 1$$

Tomemos una sucesión $\{r_n\}$ tal que

i) $r_n \to \infty$, $\quad r_{n+1} \geq 2r_n$

ii) $u(r_n) - b \geq l\, g(r_n)$

Sea $\quad \delta_n = \min\left(\frac{1}{2} r_n, \frac{l-1}{2} g(r_n) r_n\right)$

Entonces para $r : r_n - \delta_n \leq r \leq r_n$ siendo $n >> o$ de forma que $F(r) < 1/2$

$$U(r_n) - u(r) \leq \frac{1}{2} \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} \frac{dr}{r} \leq \frac{1}{2} \frac{\delta_n}{r_{n/2}} \leq \frac{l-1}{2} g(r_n)$$

Así pues $\quad u(r)-b \geq l_1\, g(r_n) \quad$ para un $\quad l_1 : l > l_1 > 1$

Y como $\quad w(r) \in \beta(u(r)) \quad$ ctp $\quad w(r) \geq q(l_1\, g(r_n)) > o.$

Continuamos ahora $\quad \|w\|_1$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w| \geq \sum_1^\infty 2\pi \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} |w(r)|rdr \geq \sum 2\pi\ q(1_1\ g(r_n))$$

$$(r_n - \frac{\delta n}{2})r_n \geq \frac{3}{2} \sum_{n>>o} r_n^2(1-1)g(r_n)q(1_1\ g(r_n)) =$$

$$= C \sum_{n>>o} r_n^2\ p(1_1\ g(r_n)) = \infty$$

pues $r_n^2\ p(1_1\ g(r_n)) = r_n^2\ p(1_1\ p^{-1}\ (\varepsilon r_n^{-2})) \geq r_n\ \varepsilon r_n^{-2} = \varepsilon.$

En suma se obtiene $\|w\|_1 = \infty$, lo cual no es cierto, y esto demuestra (19).

(20) resulta inmediatamente.

Estas estimaciones no utilizan ningún tipo de información sobre f salvo el hecho de que $f \in M(\mathbb{R}^2)$. Si conocemos datos sobre el comportamiento en el infinito de f las estimaciones anteriores pueden mejorarse grandemente. Así tenemos:

PROPOSICION II.6:

a) En las condiciones de la Prop. II.1, si sabemos además que

$$(21) \quad \begin{cases} F(r) \leq C_1\ r^{-\gamma} & ,\gamma > o, \quad C_1 > o \\ \beta(r+b) \geq C_2 r^{\alpha}, & \alpha > o, \quad C_2 > o \end{cases}$$

Entonces

a.1) si $\underline{\alpha\gamma < 2}$ se obtiene

$$(22) \qquad u(r) - b \leq o(\frac{1}{r^N}), \qquad N = \frac{\gamma+2}{\alpha+1}$$

Además si $\beta(r+b) \sim r^{\alpha}$

$$(23) \qquad w(r) \leq o\left(\frac{1}{r^M}\right), \qquad M = \frac{(\gamma+2)\alpha}{\alpha+1}$$

a.2) Si $\underline{\alpha\gamma \geq 2}$ se obtiene

$$(24) \qquad u(r) - b \leq o\left(\frac{1}{r^{N'}}\right), \qquad N' = \frac{2}{\alpha}$$

Además si $\beta(r+b) \sim r^{\alpha}$

$$(25) \qquad w(r) \leq o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

b) Resultados análogos para el extremo a de $\beta^{-1}(o)$.

<u>Demostración</u>: Utilizamos la misma técnica de la Prop. II.5.

Supongamos que se cumple (21) y que $\underline{\alpha\gamma < 2}$.

Si $\limsup_{r \to \infty} (u(r)-b) \cdot r^N > 1 > o, \qquad N = \frac{\gamma+2}{\alpha+1}$

tomamos una sucesión $\{r_n\}$ tal que

i) $r_n \longrightarrow \infty, \quad r_{n+1} > 2r_n$

ii) $(u(r_n)-b) \cdot r_n^N > 1$

Sea $\delta_n = \min\left(\frac{1}{2} r_n, \dfrac{1 r_n^{\gamma+1}}{2^{\gamma} C_1 \; r_n^N}\right)$

$\alpha\gamma < 2$ implica $\gamma < N$. Así para $n >> o$, $\delta_n = \frac{1}{2^r} r_n^{\gamma+1-N}$

Para todo $r : r_n - \delta_n \leq r \leq r_n$ tenemos

$$u(r_n) - u(r) \leq \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} \frac{C_1 \; r^{-\gamma}}{r} \cdot dr \leq C_1 \frac{\delta_n}{(r_n-\delta_n)^{\gamma+1}} \leq$$

$$\leq \frac{C_1 2^{\gamma+1} \delta_n}{r_n^{\gamma+1}} \leq \frac{1}{2 r_n^N}$$

De donde

$$u(r) - b \geq \frac{1}{2 r_n^N} > o$$

y $\qquad w(r) \geq c_2(\frac{1}{2r_n^N})^\alpha > o$

Estimamos así $\|w\|_1$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w| \geq 2\pi \sum_1^\infty \int_{r_n-\delta_n} w(r)rdr \geq 2\pi \sum_{n>>o} c_2(\frac{1}{2r_n^N})^\alpha \frac{3}{4} r_n \delta_n =$$

$$= C \sum_{n>>o} \frac{r_n^{\gamma+2}}{r_n^{N\alpha+N}} = \infty$$

Que contradice $\|w\|_1 < \infty$. Asi (22) es cierto.

(23) se deduce de (24) inmediatamente.

a.2) Supongamos ahora (21) y $\alpha\gamma \geq 2$.

Si (24) no es cierto, existe $l > o$ y una sucesión $\{r_n\}$ tal que

i) $r_n \longrightarrow \infty$, $r_{n+1} \geq C r_n$ $\quad$ ($1 < c$ será fijado después)

ii) $(u(r_n)-b)r_n^{N'} > l$

Sea $\delta_n = r_n(1 - \frac{1}{c})$

$\alpha\gamma \geq 2$ es equivalente a $\gamma \geq N'$.

Luego para todo $r : r_n-\delta_n \leq r \leq r_n$ y $n>>o$:

$$u(r_n)-u(r) \leq \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} \frac{c_1 r^{-\gamma}}{r} dr + c_1 \left[\frac{r^{-\gamma}}{-\gamma}\right]_{r_n-\delta_n}^{r_n} =$$

$$= \frac{c_1}{\ } \frac{r_n^\gamma - (r_n-\delta_n)^\gamma}{(r_n-\delta_n)^\gamma \, r_n^\gamma} = \frac{c_1(c^\gamma-1)}{\gamma} \cdot r_n^{-\gamma} \frac{1}{2r_n^{N'}}$$

La última desigualdad se consigue, si $\gamma > N'$ para $c > 1$ cualquiera y si $\gamma = N'$ para un $c > 1$ tal que

$$\frac{C_1(c^{\gamma}-1)}{\gamma} < \frac{1}{2} \qquad (c \approx 1).$$

Entonces $\qquad u(r) - b > \frac{1}{2r_n^{N'}} > 0$

y

$$w(r) \geq C_2 \left(\frac{1}{2r_n^{N'}}\right)^{\alpha} > 0$$

Estimamos $\qquad \|w\|_1$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w| \geq \sum_1^{\infty} 2\pi \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} |w(r)|rdr \geq 2\pi \sum C_2 \frac{1^{\alpha}}{2^{\alpha} r_n^{N'\alpha}} \cdot k\, r_n^2$$

$$(k>0) \geq \sum C = \infty$$

Contrariamente a la hipótesis $\quad w \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Por tanto se verifica (24).

(25) resulta de (24) fácilmente$_*$

II.5. <u>Convergencia en el infinito para f de soporte compacto</u>

El conocimiento de que $f \in M_o(\mathbb{R}^2)$, conjunto de las medidas acotadas de soporte compacto permite mejorar los resultados de la sección anterior.

Se obtiene el siguiente resumen de resultados;

<u>PROPOSICION II.7</u>:

En las condiciones de la Prop. II.1, supongamos que $f \in M_o(\mathbb{R}^2)$.

a) Sea $f \geq 0$, $f \neq 0$. Entonces se tiene

a.1) $u \geq b$; fuera del soporte de f, $u' \leq 0$, $u' = o(\frac{1}{r})$, $u \downarrow b$

a.2) $w = o(\frac{1}{r^2})$

a.3) si ponemos $\overline{\beta}(r) = \beta(r+b)$, $r \geq 0$ y

$j(r) = \int_0^r \overline{\beta}(r)dr$ y se verifica

$$(26) \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{j(s)}} < \infty$$

u-b y w, tienen soporte compacto. La condición (26) es además necesaria.

(En particular este es el caso cuando $\beta(r+b) \geq Cr^{\alpha}$, $C > 0$, $\alpha < 1$, para $r > 0$, $r \approx 0$ ó cuando β no es unívoca en b).

a.4) Si por el contrario

$$(27) \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{j(s)}} = \infty$$

y ponemos $u(r_o) = \bar{u}_o + b$ para $r_o > R$ y

$$\tau(u) = \int_u^{\bar{u}_o} \frac{ds}{\sqrt{j(s)}}, \qquad \tau = [0,\bar{u}_o] \longrightarrow [r_o,\infty]$$

decreciente y $h : [2r_o,\infty[\to]0,\bar{u}_o]$, $h(r) =$

$= \tau^{-1}(r-r_o)$

Entonces en general u-b y w no tienen soporte compacto pero se obtiene $u(r)-b = O(h(r))$

En particular, si $\beta(r+b) \sim r^{\alpha}$, $\alpha > 1$

$$(28) \quad \begin{cases} u(r)-b = O(r^{-N}), & N = 2(\alpha-1)^{-1} \\ w(r) = O(r^{-M}), & M = 2\alpha(\alpha-1)^{-1} > 2 \end{cases}$$

Y si $\beta(r+b) \sim r$

$$(29)\quad \begin{cases} u(r)-b = 0(e^{-c_2 r}) \\ w(r) = 0(e^{-c_2 r}) \end{cases}$$

b) Si $f \leq 0$, $f \neq 0$, resultados análogos en función del comportamiento de β en $a = \inf \beta^{-1}(0)$.

c) Si $f \in M_o$ es de signo cualquiera:

c.1) $a \leq \liminf_{r \to \infty} u \leq \limsup_{r \to \infty} u \leq b$

c.2) $w = o(\frac{1}{r^2})$

c.3) si definimos $\begin{cases} \overline{\beta}(r) = \beta(r+b) & \text{para } r \geq 0 \\ \overline{\beta}(r) = \beta(r+a) & \text{para } r \leq 0 \end{cases}$

$$j(r) = \int_0^r \overline{\beta}(r)dr, \quad j : \mathbb{R} \to [0,\infty]$$

y se tiene $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{j(s)}} < \infty$

$(u-b)^+$ y $(u-a)^-$ y w tienen soporte compacto.

(En particular esto es cierto cuando

$$\begin{cases} \beta(r+b) \geq C\, r^{\alpha}, & C,\alpha > 0; \quad r>0, \quad r \approx 0 \\ \beta(r+a) \leq -C, & C_1,\alpha > 0; \quad r>0, \quad r \approx 0 \end{cases}$$

o bien β no es unívoca en a ó b).

c.4) Resultado equivalente a a.4) + b.4).

<u>OBSERVACION</u>: Si $\beta^{-1}(0) = [a,b] = \{0\}$, los apartados a.3) b.3) c.3) afirman que u es una función de <u>soporte compacto</u>, lo que extiende el Teorema 6.1 de BBC [9].

Dem. de la Proposición:

a) Ya sabemos que $u \geq b$

Supongamos que $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$. Entonces para $r > R$ (P) se escribe

$$-\frac{1}{r}(ru')' + w = 0$$

o sea $(ru')' = rw \geq 0$. Así ru' es creciente. En particular el Lema II.2 afirma que $u' \leq 0$. Por tanto u es decreciente y como consecuencia de la Prop. II.1 $u \downarrow b$ uniformemente cuando $|x| \to \infty$

La estimación $u' = o(\frac{1}{r})$ es consecuencia de lo anterior mediante el Lema II.3 poniendo $u' = g$.

LEMA II.3: Sea $g :]R,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva, integrable y tal que $rg(r)$ es decreciente. Entonces $g(r) = o(\frac{1}{r})$ cuando $r \to \infty$

Demostración: Si $g(r) \neq o(\frac{1}{r})$, podemos tomar una sucesión $\{r_n\}$ tal que

i) $r_n \longrightarrow \infty$, $r_{n+1} \geq 2r_n$, $r_o \geq R$

ii) $r_n\, g(r_n) \geq 1 > 0$

Entonces estimamos:

$$\int^{\infty} g(r)dr \geq \sum \frac{1}{r_n} \int_{r_{n-1}}^{r_n} rg(r)dr \geq \sum \frac{r_n g(r_n)}{r_n} \delta_n \geq$$

$$\geq \sum g(r_n)\frac{r_n}{2} = \infty$$

En contra de la integrabilidad de $rg(r)_*$

a.2) La estimación $w = o(\frac{1}{r^2})$ proviene del siguiente Lema:

<u>LEMA II.4</u>: Sea $g : [R,\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente tal que $rg(r) \in L^1(R,\infty)$. Entonces $g(r) = o(\frac{1}{r^2})$ cuando $r \to \infty$.

<u>Demostración</u>: Si $g(r) \neq o(\frac{1}{r^2})$ se puede tomar una subsucesión $\{r_n\}$ tal que:

i) $r_n \to \infty$, $r_{n+1} \geq 2r_n$, $r_o \geq R$

ii) $r_n^2\, g(r_n) \geq 1 > 0$

Entonces

$$\int^{\infty} g(r)rdr \geq \sum \int_{r_n}^{r_{n+1}} rg(r)dr \geq \sum g(r_{n+1}) \int_{r_n}^{r_{n+1}} rdr \geq$$

$$\geq \sum\ g(r_{n+1})\ \frac{r_{n+1}^2}{4} = \infty$$

En contra de la integrabilidad de $rg(r)$*

La demostración de $w = o(\frac{1}{r^2})$ procede ahora así:

Podemos suponer que β es contínuo en b, en caso contrario probaremos en 1.3) de forma independiente que w tiene soporte compacto.

Tomamos entonces $g(r) = \beta^-(u(r))$. El Lema II.4 asegura que $\beta^-(u(r)) = o(\frac{1}{r^2})$ ya que $w(r) \geq \beta^-(u(r))$ ctp y $w(r)r \in L^1(R,\infty)$.

Pasar de $\beta^-(u(r)) = o(\frac{1}{r^2})$ a $w = o(\frac{1}{r^2})$ no ofrece dificultad:

- si existe r_o R t.q. $w(r_o) = 0$, entonces $u(r_o) \leq b$ y como u es decreciente, $u(r) \leq b$ para $r > r_o$, $w(r) = 0$, para $r > r_o$.

- si $w(r) > 0$ para $r > R$, $(u'r)' > 0$, $u'r$ es creciente estrictamente y como $u' \to 0$, $u'(r) < 0$, luego u estrict. decreciente para $r > R$.

Entonces si $\varepsilon > 0$ $u(r+\varepsilon) < u(r)$

Luego $w(r+\varepsilon) \leq \beta^+ u(r+\varepsilon) \leq \beta^- u(r)$

Con lo que $w(r) = o(\frac{1}{r^2})$*

a.3) La condición necesaria y suficiente para que el problema (P) tenga soluciones de soporte compacto para $f \in L^1_o(\mathbb{R}^N)$ es según BBC [9] (Teorema 6.1)

$$(3) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{\phi(s)}} < \infty \quad , \text{ si } \quad \phi(s) = \int_o^s \beta(r)dr$$

observemos que si $b=0$, $\phi=j$ y que si tratamos de $f \geq 0$, $f \neq 0$ se tiene $u \geq b$ por lo que la parte negativa del grafo de β no interviene.

Por otra parte la demostración del Teorema 6.1 es perfectamente válida para $f \in M_o(\mathbb{R}^N)$ dado que se razona en el abierto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R\}$ (supp $f \subset B_R(0)$), y que el Teorema de comparación utilizado es válido.

En resumen, si nos reducimos al caso $b=0$ y $f \geq 0$ (21) equivale a (17) y podemos aplicar T.6.1. de BBC [9]

Si $b > 0$ podemos reducirnos a $b=0$ así: ponemos $\overline{\beta}(r) = \beta(r+b)$ para $r > 0$, $\overline{\beta}(r)$ a voluntad si $r < 0$, $\overline{u} = u-b$, $\overline{w} = w$, $\overline{f} = f$. Entonces $-\Delta u + w = f$, $w \in \beta(u)$ equivale a $-\Delta\overline{u} + \overline{w} = \overline{f}$, $\overline{w} \in \overline{\beta}(\overline{u})$.

Concluimos que $\bar{u}$ y $\bar{w}$ tienen soporte compacto c.q.d. La necesidad de la condición (26) ya estaba probada para $f \in L_o^1(\mathbb{R}^2)$.

a.4) Para $r > R$, (P) se escribe

$$(u'r)' = rw$$

o sea $u'' + \frac{1}{r} u' = w$

como $u' \leq 0$, se tiene $u'' \geq w$, $w \in \beta(u)$

Llamemos $\bar{u} = u-b$. Se tiene $\bar{u} \geq 0$, $\bar{u}' = u' \leq 0$, $\bar{u}'' = u''$ y $w \in \bar{\beta}(\bar{u})$. Asi multiplicando $\bar{u}'' \geq w$ por $\bar{u}' \leq 0$ tenemos

$$\bar{u}''\bar{u}' \leq w\bar{u}'$$

Integrando esta desigualdad de r_1 a r_2, $R < r_1 < r_2$:

$$\frac{1}{2}\left[\bar{u}'^2(r_2) - \bar{u}'^2(r_1)\right] \leq \bar{j}(\bar{u}(r_2)) - \bar{j}(\bar{u}(r_1))$$

Hacemos tender r_2 a $+\infty$ con lo que $\bar{u}'(r_2) \to 0$, $\bar{j}(\bar{u}(r_2)) \to 0$ así para $r_1 > R$:

$$\bar{u}'^2(r_1) \geq 2\bar{j}(\bar{u}(r_1))$$

Y como $\bar{u}' \leq 0$:

$$- u'(r_1) \geq \sqrt{2\bar{j}(\bar{u}(r_1))}$$

Integrando entre r_o y r tenemos $(\bar{u}(r_o) = u(r_o)-b = \bar{u}_o)$

$$\int_{\bar{u}}^{\bar{u}_o} \frac{ds}{\sqrt{2\bar{j}(s)}} \geq \int_{r_o}^{r} dr = r-r_o$$

o sea $\tau(\bar{u}) \geq (r-r_o)$, $\bar{u} \leq h(r)$

Si $\bar{\beta}(r) \sim r^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $\bar{j}(r) \sim r^{\alpha+1}$, $\tau(\bar{u}) \geq C\left|\frac{1}{\bar{u}^m} - \frac{1}{\bar{u}_o^m}\right|$, $m = \frac{\alpha-1}{2}$ y terminamos así:

$$\frac{1}{\overline{u}^m} - \frac{1}{\overline{u}_o^m} \geq C\,[r-r_o]$$

$$0 \leq \overline{u}^m \leq \frac{1}{c_1 r + c_2}$$

$$\overline{u} = 0(r^{-1/m}), \qquad -\frac{1}{m} = -\frac{2}{\alpha-1}$$

Si $\quad \overline{\beta}(r) \geq Cr, \quad \overline{j}(r) \geq \frac{c}{2}\, r^2, \quad \tau(\overline{u}) = \frac{1}{\sqrt{c}}\, \lg \frac{\overline{u}_o}{\overline{u}}$

y el câlculo termina asî

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\, \lg \frac{\overline{u}_o}{\overline{u}} \geq r-r_o$$

$$0 \leq \overline{u} \leq \overline{u}_o\, e^{-\sqrt{c}(r-r_o)}$$

o sea $\qquad \overline{u} \geq 0, \quad \overline{u} = 0(e^{-\sqrt{c}r})$

Las estimaciones sobre w resultan inmediatamente.

b) Los câlculos son anâlogos en todo.

c) Utilîcese el Teorema de comparaciôn I.2 aplicado a $-f^- \leq f \leq$ $\leq f^+$, reduciendo asî el problema a a) y b).

Obsêrvese que si $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2j(s)}} < \infty$, $(u-b)^+$ tiene soporte compacto, si $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{ds}{\sqrt{2j(s)}} < \infty$, $(u-a)^-$ tiene soporte compacto y si $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{2j(s)}}$ se tiene c.3*

SEGUNDA PARTE: f está acotada por una medida real en ∞

Bajo la hipótesis de que la medida $f \in M(\mathbb{R}^2)$ está limitada entre medidas radiales acotadas en un entorno del infinito se establece que, en el caso en que $\beta^{-1}(0) = \{0\}$, la solución u del problema (P) en $\mathbb{R}^2$ converge uniformemente a cero en el infinito.

Este resultado se obtiene por comparación con la solución de un problema radial en que un instrumento básico de la comparación es el laborioso lema A.2.

Las estimaciones obtenidas en la primera parte de este capítulo se aplican pues al presente caso.

Demostramos el siguiente teorema:

TEOREMA II.2: Sea β un g.m.m, $0 \in \beta(0)$, $0 \in \mathrm{Int}\,\beta(\mathbb{R})$, β verifica la propiedad (C_2) del Teorema I.3

$$(C_2) \qquad D(\beta) = \mathbb{R}; \quad \int_0^\infty [\beta(r)-\beta(-r)]e^{-ar}.dr < \infty, \qquad \forall a > 0$$

Sea $\Omega^R = [|x| > R]$, $S_R = \partial\Omega^R$, $\Omega_o = \Omega^{R_o}$ para un $R_o > 0$

Sean $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_o)$, $|\mathrm{grad}\, u| \in M^2(\Omega_o)$, $w \in L^1(\Omega_o)$, $f \in M(\Omega_o)$ tales que

$$(P_{\Omega_o}) \quad \begin{cases} w \in \beta(u) & \text{ctp} \quad \Omega_o \\ -\Delta u + w = f & \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega_o) \end{cases}$$

Supongamos que existe $g \in M(\Omega_o)$ (resp. $\overline{g} \in M(\Omega_o)$) radial tal que $f \leq g$ (resp. $f \geq \overline{g}$) en $M(\Omega_o)$. Entonces

$$\limsup_{|x| \to \infty} u \leq b \qquad (\text{resp} \quad \liminf_{|x| \to \infty} u \geq a)$$

Más aún u esta mayorada (resp. minorada) por la solución de un problema radial en $\mathbb{R}^2$.

$$(\beta^{-1}(0) = [a,b] \quad -\infty < a \leq 0 \leq b < \infty)$$

<u>OBSERVACION</u>: Si g (resp. $\bar{g}$) $\in L^1(\Omega_o)$ la condición (C_2) sobre β no es necesaria pues su papel es garantizar la existencia de soluciones del problema radial.

El Teorema es consecuencia de las siguientes proposiciones II.6 y II.7, que permiten comparar con soluciones del problema radial. Consideramos solo el caso de la acotación superior, la acotación inferior procede análogamente.

<u>PROPOSICION II.8</u>: Sean Ω_o, β, u, w, f, g como en el T.II.2. Sea $\bar{g}$ la prolongación de g^+ a $\mathbb{R}^2$ mediante la medida nula en $\mathbb{R}^2 - \Omega_o$ $(\bar{g} \in M^+(\mathbb{R}^2))$ y sean u_1, w_1 la solución de (P) para $\bar{g}$, es decir:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + w_1 = \bar{g} & \text{en} \quad M(\mathbb{R}^2) \\ w_1 \in \beta(u_1) & \text{ctp} \quad \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$u_1 \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u_1| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. (si $g^+ = 0$, tómese $u_1 = b$).

Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $R_1 > R_o$ tal que

$$u(x) \leq u_1(x) + \varepsilon \quad \text{ctp} \quad \Omega^{R_1}$$

<u>Demostración</u>: Como $\bar{g} \geq 0$, por el Teorema de Comparación I.2, $u_1 \geq b$ ctp.

Sea $\varepsilon > 0$ y pongamos $\lambda = b + \varepsilon > b$. Entonces $\overset{o}{\beta}(\lambda) > 0$.

Sea $U = u-u_1-\varepsilon$. Entonces $U \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_o)$, $|\text{grad } U| \in M^2(\Omega_o)$, $U \in \mathcal{M}(\Omega_o)$.

Pongamos $v \equiv U^+ \equiv (u-u_1-\varepsilon)^+$.

Es inmediato que $v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } v| \in M^2(\mathbb{R}^2)$ (para la derivada de u^+ consultar GT [29], §7.6).

2. Por un argumento standard, (cf. BBC [9], pg 530), como $w \in L^1(\Omega_o)$ y $w \in \beta(u)$ ctp $\in \Omega_o$ se tiene que para todo $k : k > b$, $k > -a$

$$\text{ms } \{x \in \Omega_o : |u(x)| > k\} \leq \frac{\|w\|_{L^1(\Omega_o)}}{\beta^o(k)} < \infty$$

Por el mismo motivo:

$$\text{ms } \{x \in \Omega_o : |u_1(x)| > k\} < \infty$$

Así, $\exists\ k > 0$ tal que

$$\text{ms } \{x \in \Omega_o : |U(x)| > k\} < \infty$$

y podemos aplicar a U el Lema A.7b siendo $j(r) = r^+$ y por lo tanto $p : p(r)=1$ si $r > 0$, $p(r) = 0$ si $r \leq 0$. Entonces $v = j(U)$ y resulta del Lª A7.b

$$\Delta v \geq p(U)(\Delta U)_r - (\Delta U)_s^- \quad \text{en} \quad \mathcal{M}(\Omega_o^{R'}), \qquad R' > R_o$$

Pero $\Delta U = \Delta u - \Delta u_1 = (w-w_1) + (\overline{g}-f)$

Así en $\Omega^{R'}$: $(\Delta U)_s = (\overline{g}-f)_s \geq 0$, $(\Delta U)_s^- = 0$;

$$(\Delta U)_r = (w-w_1) + (\overline{g}-f)_r \geq w-w_1 \quad \text{ctp.}$$

Por tanto:

$$\text{si} \quad U < 0, \quad \Delta v \geq 0.(\Delta U)_r - 0 = 0$$

si $\quad U = 0, \quad \Delta v \geq 0.(\Delta U)_r - 0 = 0$

si $\quad U > 0, \quad \Delta v \geq (\Delta U)_r \geq w - w_1 > 0$

así pues tenemos

(31) $$\Delta v \in \mathcal{M}^+(\Omega^{R'})$$

3. Con las propiedades de v obtenidas podemos aplicarle el lema A.2 en $\Omega^{R'}$: así para toda $p \in \mathcal{P}$, $p \geq 0$ si j es la primitiva de p tal que $j(0) = 0$

(32) $$\int_{\Omega^{R_1}} |\text{grad } v|^2 \, p'(v) \leq \frac{1}{Ll} \left(\int_{A_2} j(u) - \int_{A_1} j(u)\right)$$

siendo L, l, A_1, A_2 como en el Lema. R_1 es el R_2 del lema, luego $R_1 > R' > R_o$.

4. Si demostramos que existen A_1, A_2 anillos como en (22) de forma que para un $p \in \mathcal{P}$, $p \geq 0$ tal que $p'(r) > 0$ para $r > 0$:

(33) $$\int_{A_2} j(v) \leq \int_{A_1} j(v)$$

la demostración de la Prop. II.8 se realiza así:

De (32) se deduce que

$$\int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 \, p'(v) \leq 0$$

luego $|\text{grad } v|^2 \, p'(v) = 0$ ctp $\in \Omega^{R_1}$, o sea $\text{grad } p(v) = 0$ ctp, $p(v) = c$, constante ≥ 0, ctp de Ω^{R_1}.

Si $c > 0$, $v = p^{-1}(c) \equiv c_1 > 0$, luego

$$u(x) = u_1(x) + \varepsilon + c_1 \quad \text{ctp de } \Omega^{R_1}$$

Dado que $u_1(x) \geq b$ ctp y que $\overset{\circ}{\beta}(b+\varepsilon) > 0$ este hecho contradice la hipótesis $w \in L^1(\Omega_o)$, $w \in \beta(u)$ ctp Ω_o.

Así pues la única posibilidad de $c=0$, $v=0$, es decir

$$u(x) \leq u_1(x) + \varepsilon \qquad \text{ctp de} \quad \Omega^{R_1}$$

lo que termina la demostración de la proposición.

5. Veamos pues que (33) es cierto:

Si fuera falso, para todo par de anillos A_1, A_2 contenidos en Ω_o en las condiciones del Lema A.2

$$(34) \qquad \int_{A_2} j(v) \geq \int_{A_1} j(v)$$

Es inmediato ver que si dividimos $B_R(0) \cap \Omega_o$ en anillos de espesor constante, (34) implica una estimación del tipo

$$\int_{B_R(0) \cap \Omega_o} j(v) \geq k_1 R + k_2 \ , \qquad k_1 > 0$$

En particular $\int_{\Omega_o} j(v) = \infty$

En las condiciones de (33) si $r \geq 0$ $0 < j(r) \leq \|p\|_\infty r$.

Así tendríamos:

$$(35) \qquad \int_{\Omega_o} v \geq \frac{1}{\|p\|_\infty} \int_{\Omega_o} j(v) = +\infty$$

Sin embargo vamos a demostrar que $\int_{\Omega_o} v < \infty$:

Sabemos que $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_o)$, $|\text{grad } u| \in M^2(\Omega_o)$. Además dado que $w \in \beta(u)$ en Ω_o y que $w \in L^1(\Omega_o)$, para todo $\lambda > b = \sup \beta^{-1}(0)$, $\text{ms } [u > \lambda] \leq \dfrac{\|w\|_1}{\beta_o(\lambda)} < \infty$.

Tomamos $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 0$ en $[|x| \leq R_o+\varepsilon]$ y $\zeta = 1$ en $[|x| \geq R_1-\varepsilon]$ para $R_1 > R_o$.

Sea $\overline{u} = \zeta u$. Entonces:

a) $\overline{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $\quad \operatorname{supp} \overline{u} \subset \Omega_o$

b) $\operatorname{grad} \overline{u} = \operatorname{grad} \zeta . u + \zeta . \operatorname{grad} u$

Como $\operatorname{grad} u \in M^2(\Omega_o)$, $\zeta . \operatorname{grad} u \in M^2(\mathbb{R}^2)$

Como $u \in L^1_{loc}(\Omega_o)$, $|\operatorname{grad} u| \in M^2(\Omega_o)$ es inmediato que $u \in L^p_{loc}(\Omega_o)$, $1 \leq p < \infty$ (pues $M^2(\Omega_o) \subset L^q_{loc}(\Omega_o)$ si $1 \leq q < 2$ y aplicamos el lema A.16 de BBC [9]). Así $u \in L^2_{loc}(\Omega_o)$. Dado que $\operatorname{grad} \zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u \operatorname{grad} \zeta \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Así:

$$\operatorname{grad} \overline{u} \in M^2(L_o)$$

c) si $u \geq 0$, $0 \leq \overline{u} \leq u$. Por tanto $(\lambda > b)$

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \overline{u}(x) > \lambda\} \subset \{x \in \Omega_o : u(x) \geq \lambda\}$$

Aplicamos el lema 5.9 de BBC [9] que nos da

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\overline{u}-\lambda)^+ \leq C \, \|\operatorname{grad} \overline{u}\|_{M^2(\mathbb{R}^2)} . \operatorname{ms}[\overline{u} > \lambda] < \infty$$

Ahora bien, si $|x| \geq R_1$, $\overline{u} = u$. Por otra parte $v = u - u_1 - \varepsilon \leq u - b - \varepsilon = u - \lambda \leq (u-\lambda)^+$. Así pues

$$\int_{|x| \geq R_1} v \leq \int_{\mathbb{R}^2} (u-\lambda)^+ < \infty$$

Y como $v \in L^1_{loc}(\Omega_o)$, $\displaystyle\int_{\Omega_o} v < \infty$*

Demostración del Teorema II.2. (salvo la última afirmación)

A partir de la Prop. II.8 se deduce el Teorema aplicado a u_1 el T.II.1, dado que es solución de (P) para una medida radial y por tanto

$$\limsup_{|x|\to\infty} u_1 \leq b$$

Por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ existe $R_1' \geq R_1$ tal que $u_1(x) \leq b+\varepsilon/2$ y dado que la proposición nos garantiza $u(x) \leq$ $\leq u_1(x) + \varepsilon/2$, $u(x) \leq b+\varepsilon$. Así

$$\limsup_{|x|\to\infty} u \leq b$$

La estimación inferior se obtiene cambiando de signo la ecuación y sustituyendo β por $\overline{\beta}$ tal que $\overline{\beta}(r) = -\beta(-r)$*

Sin embargo hay un aspecto en que el resultado de comparación prop. II.8 es insatisfactorio: es el hecho de que la estimación $u(x) \leq u_1(x) + \varepsilon$ para $|x| > R_1$ no es todo lo fuerte que se desea. Deseamos obtener $u(x) \leq \overline{u}(x)$, solución de un problema radial en $\mathbb{R}^2$ para $|x| > R$. En particular esto permite aplicar a la estimación de la velocidad de convergencia de u todos los resultados obtenidos en la primera parte de este capítulo y que se aplican a $\overline{u}$.

Por eso completamos el T$^{\underline{a}}$ II.2 demostrando:

PROPOSICION II.9: En las condiciones del Teorema II.2 existe $R > R_o$ y existen $\overline{u},\overline{w}$, solución de (P) para g^+ en Ω^R (es decir $\overline{u} \in W^{1,1}_{loc}(\Omega^R)$, $\overline{w} \in L^1(\Omega^R)$, $|\text{grad } \overline{u}| \in M^2(\Omega^R)$, $-\Delta\overline{u}+\overline{w} = g^+$ en $\mathcal{D}'(\Omega^R)$, $\overline{w} \in \beta(\overline{u})$ ctp Ω^R) tales que

$$u \leq \overline{u} \quad \text{ctp } \Omega^R$$

Demostración: 1. En el caso de que b sea el extremo superior de $D(\beta)$, se tiene que $\beta(b) = [0,\infty[$ y que $u \leq b$ ctp. Dado que no se cumple entonces la condición (C_2), hemos de suponer que $g \in L^1(\Omega_o)$ (cf. T.II.2), por lo que podemos tomar $\overline{u}=b$, $\overline{w} = g^+$.

2. En adelante admitimos pues que $b \in \operatorname{Int} D(\beta)$.
En la anterior Prop. II.6 hemos mostrado que existen u_1 y w_1 con las propiedades citadas de forma que

$$u(x) \leq u_1(x) + \varepsilon \qquad \text{en} \quad \Omega^{R_1}, \ R_1 > R_o$$

$$\limsup_{|x| \to \infty} u_1 \leq b$$

Así pues, dado $\varepsilon > 0$ existe $R_2 = R_2(\varepsilon) > R_o$ tal que

$$(36) \qquad \begin{cases} u(x) \leq u_1(x) + \varepsilon/2 \\ u_1(x) \leq b+\varepsilon/2 \end{cases} \qquad \text{ctp} \quad |x| > R_2$$

Tomamos ε de forma que $b+\varepsilon < \sup(D(\beta))$.
Sea $M = \beta^+(b+\varepsilon) < \infty$.

Truncamos β superiormente por M, es decir definimos el g.m.m β_M

$$\beta_M(r) = \begin{cases} \beta(r) & \text{si} \quad r < b+\varepsilon \\ \beta(r) \cap [o,M] & \text{si} \quad r = b+\varepsilon \\ M & \text{si} \quad r > b+\varepsilon \end{cases}$$

Es evidente que $D(\beta_M) \supset [o,\infty[$ y que en virtud de (36) (u,w) sigue siendo solución de (P) en Ω^{R_2} cuando sustituimos β por β_M.

3. Utilizamos en lo que sigue el siguiente lema cuya demostración posponemos:

LEMA II.5: Sea β un g.m.m acotado superiormente tal que $0 \in \beta(0)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. Sea

$$g_k = k\,\chi_{B_R(0)} + g^+ \cdot \chi_{\Omega_o}$$

donde $k, R > 0$. Entonces si u_k es la solución (en el sentido usual del Cap. I) de $-\Delta u + \beta(u) \ni g_k$ en $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\sup \{u_k(R) : k > \beta^+(0)\} = \infty \qquad \ast$$

En virtud de este lema existe $\bar{g} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$, $\bar{g} = g^+$ en Ω^{R_2} y existe una solución radial $\bar{u}$ de

$$(37) \qquad -\Delta u + \beta_M u \ni \bar{g}$$

que verifica $\bar{u}(R_2) > u_1(R_2) + \varepsilon/2$

Esta relación sigue siendo cierta por continuidad en un pequeño anillo entorno a $S_{R_2} = [|x| = R_2]$.

4. Retomamos la demostración de la Prop. II.8 con $\beta = \beta_M$ y $v = (u - \bar{u})^+$. Entonces $v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega^{R_2})$, $|\text{grad } v| \in M^2(\Omega^{R_2})$, $\Delta v \in \mathcal{M}^+(\Omega^{R_2})$ como allí y asimismo podemos aplicar el Lema A.2:

$$\int_{\Omega^{R_2}} p'(v)\,|\text{grad } v|^2 \leq \frac{1}{L1} \left(\int_{A_2} j(v) - \int_{A_1} j(v) \right)$$

con las notaciones del Lema A.2 y R_3 en lugar de $R_2, R_3 > R_2$

Ahora bien en un entorno de S_{R_2} $u < \bar{u}$, luego $v = 0$. Toman do A_1 y A_2 incluidas en esa región $\int_{A_2} j(v) = \int_{A_1} j(v) = 0$ y entonces

$$\int_{\Omega^{R_3}} p'(v)\,|\text{grad } v|^2 \leq 0, \ \forall p \in P, \quad \begin{array}{ll} p(r) = 0 & \text{si } r \leq 0 \\ p'(r) > 0 & \text{si } r > 0 \end{array}$$

De donde, como antes, deducimos que $p(v) = C \geq 0$. También del mismo modo se ve que $c=0$, $v\leq 0$. Por tanto

$$u(x) \leq \bar{u}(x) \quad \text{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega^{R_3}$$

5. Por último señalemos que siendo $\bar{u}$ solución de un problema radial, $\limsup_{|x|\to\infty} \bar{u} \leq b$. Por lo tanto existe $R \geq R_3$ tal que para $|x| > R_3$, $\bar{u}(x) < M$ $\beta(\bar{u}(x)) = \beta_M(\bar{u}(x))$ y $\bar{u}$ es solución de $-\Delta\bar{u} + \beta(\bar{u}) \ni g^+$ en Ω^R_*

OBSERVACION: Nótese que $\bar{u}$ es solución de (37) $-\Delta u + \beta_M(u) \ni \bar{g}$ en todo $\mathbb{R}^2$ y solo en Ω^R podemos sustituir β_M por β. Pero precisamente las estimaciones sobre la convergencia de las soluciones en la 1a. parte dependen todas del comportamiento de β "para pequeños valores".

En cuanto a la demostración del lema II.5 observamos:

1°) En virtud el Teorema de comparación I.2 se deduce el lema conseguimos demostrar el mismo resultado cuando $g_k = k\,\chi_{B_R(0)}$, $k > 0$ pues $k\,\chi_{B_R(0)} \geq 0$, $k\,\chi_{B_R(0)} \leq k\,\chi_{B_R(0)} + g^+ \cdot \chi_{\Omega_o}$.

2°) Por otra parte basta demostrar el resultado del lema para un grafo $\tilde{\beta}$ tal que $0 \in \tilde{\beta}(0)$, y $\beta^o(r) \leq \tilde{\beta}^o(r)$ para $r > 0$ pues el argumento del lema 6.5 de BBC [9] se aplica literalmente y las soluciones de β mayoran a las de $\tilde{\beta}$.

3°) Un grafo β tal que $0 \in \beta(0)$ y es acotado superiormente por M queda mayorado por $\tilde{\beta}$ tal que $\tilde{\beta}(r) = \beta(r)$ si $r < 0$, $\tilde{\beta}(0) = [0,M]$, $\tilde{\beta}(r) = M$ para $r > 0$.

Así el Lema II.5 es consecuencia del siguiente resultado

<u>LEMA II.6</u>: Sea β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$, $D \in \operatorname{Int}\beta(0)$ y el grafo de β es concavo en el intervalo $0 \leq r < \infty$ (en particular β es unívoco si $r > 0$).

Sea $R > 0$, $f = \chi_{B_R(0)}$, $k > 0$ y u_k solución (en el sentido BBC [9]) de

$$-\Delta u + \beta(u) \ni kf$$

Entonces

$$\sup\{u_k(R) : k > 0\} = \infty$$

<u>Demostración</u>: 1) Veamos que si $k > \beta^+(0)$, $\underline{u_k(R) > 0}$. Reproducimos el argumento de BBC [9], pg. 544: como $kf \geq 0$, $kf \neq 0$, $u \geq 0$. Además u_k es radial y $u_k = u_k(r)$ es una función de clase C^1 en $0 < r < \infty$ (ya que $kf \in L^1(\mathbb{R}^2)$). Denotamos por $u_k' = \frac{du_k}{dr}$.

Como vimos en la parte I de este capítulo, para $r > R$, $u_k' \leq 0$, luego u_k es decreciente. Por tanto de ser $u(R) = 0$, $u \geq 0$ implicaría $u_k(r) = 0$ para $r > R$ y en consecuencia $u_k'(r) = 0$ y en el límite $u_k'(R) = u_k(R) = 0$.

Ahora bien, si $w_k = \Delta u_k + kf \in \beta(u)$, es conocido (ver corolario al T$^{\underline{a}}$ III.1) que

$$\|w_k\|_\infty \leq \|kf\|_\infty = k$$

por lo que para $0 < r < R$ la ecuación

$$-\frac{1}{r}(ru_k')' + w_k = kf$$

implica $\quad (ru_k')' = r(w_k(r) - k) \leq 0$

Así $\; ru_k'$ es decreciente en $0 < r < R$. Como $u_k'(R) = 0$ esto implica $u_k' \leq 0$ en $0 < r < R$ que junto a $u(r) \geq 0$, $u(R) = 0$ nos dan $u(r) = 0$. Pero esto es imposible si $k > \beta^+(0)$.

2) Comparación:

Sabemos que $-\Delta u_1 + w_1 = f$, $w_1 \in \beta(u_1)$, $u_1 \geq 0$, $w_1 \geq 0$. Definamos para $k > 1$:

$$\bar{u} = ku_1$$

$$\bar{w} = \begin{cases} w & \text{si} \quad u=0 \\ \beta(kw) & \text{si} \quad u > 0 \end{cases} \quad \left(\beta(r) \text{ es unívoco si } r > 0\right)$$

Entonces

$$-\Delta\bar{u} + \bar{w} = -k\Delta u_1 + kw_1 + (\bar{w} - kw_1)$$

Pero

$$\begin{cases} \text{si} \quad u(x) = 0, \quad \bar{w}(x) - kw_1(x) = w(x)(1-k) < 0 \\ \text{si} \quad u(x) > 0, \quad \bar{w}(x) - kw_1(x) = \beta(ku(k)) - k\beta(u(x)) \leq 0 \end{cases}$$

(por concavidad)

Así pues

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta\bar{u} + \bar{w} \leq kf \\ \bar{w} \in \beta(\bar{u}) \end{array}\right\}$$

Además

Dado que

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta u_k + w_k = kf \\ w_k \in \beta(u_k) \end{array}\right\}$$

El Teorema de comparación nos asegura que si $k > 1$:

$$u_k \geq \bar{u} = k\, u_1$$

Así pues

$$u_k(R) \geq ku_1(R)$$

Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} u_k(R) = \infty \quad *$$

TERCERA PARTE: El caso unidimensional

El problema de estudiar el comportamiento en el infinito de las soluciones de

$$(P_1) \qquad -u'' + \beta(u) \ni f, \qquad f \in M(\mathbb{R}^1)$$

discurre por cauces análogos, pero es esencialmente más fácil, al no existir la dualidad radial-no radial.

Entendemos aquí por solución de (P_1) (en la lína del capítulo I) una función $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ tal que $w = u'' + f \in L^1(\mathbb{R})$, $w \in \beta(u)$ ctp.

En el T$^{\underline{a}}$ I.3b vimos que la condición necesaria y suficiente para la existencia de tales soluciones para todo $f \in M(\mathbb{R})$ es que el grafo β m.m, tal que $0 \in \beta(0)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$, verifique además $D(\beta) = \mathbb{R}$. Las condiciones $0 \in \beta(0)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$ ya son necesarias para el problema planteado en $L^1(\mathbb{R})$ (cf. BBC [9]).

Observemos de paso que $W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Cont}(\mathbb{R})$.

Demostramos entonces el

TEOREMA II.1b: Sea β un g.m.m, $0 \in \beta(0)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. Sea $f \in M(\mathbb{R})$ y (u,w) solución de (P_1) para f. Sea $\beta^{-1}(0) = [a,b]$, $a \leq 0 \leq b$. Entonces

$$\limsup_{x \to \pm\infty} u(x) \leq b$$

$$\limsup_{x \to \pm\infty} u(x) \geq a$$

además $\lim u'(x) = 0$

Demostración:

1) La demostración de $\limsup\limits_{x \to \infty} u \leq b$ se basa en el siguiente Lema, análogo al Lema II.1.

LEMA II.1b: Sean $u \in W^{1,\infty}(R,\infty)$, $w \in L^1(R,\infty)$, $R > 0$; $w \in \beta(u)$ ctp, siendo β como en el Teorema. Entonces

$$\limsup_{r \to \infty} u \leq b$$

Demostración: Si $\limsup u > b$, tomamos $\{r_n\}$ tal que

$$\begin{cases} \text{i) } r_n > R, \quad r_{n+1} \geq 2r_n \\ \text{ii) } u(r_n) \geq l > b, \quad w(r_n) \geq L > 0 \quad \text{para todo } n \end{cases}$$

Entonces si $\delta_n = \dfrac{l-b}{2\|u'\|_\infty}$ y $r : r_n - \delta_n \leq r \leq r_n$

$$u(r_n) - u(r) \leq \int_r^{r_n} u'(r)dr \leq \|u'\|_\infty \delta_n \leq \frac{l-b}{2}$$

Así
$$u(r) \geq \frac{l+b}{2} = l_1 > b$$
$$w(r) \geq \beta^o(l_1) = L_1 > 0$$

Y estimamos
$$\int_R^\infty |w| \geq \sum \int_{r_n-\delta_n}^{r_n} w(r)dr \geq L_1 \sum \delta_n = \infty ,$$

que contradice $w \in L^1(R,\infty)$*

2) Del mismo se demuestra lim inf y el caso $x \to -\infty$.

3) Dado que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y $u'' \in M(\mathbb{R})$, u' es una función de variación acotada. Además si $x_1 < x_2$:

$$u'(x_2+) - u'(x_1+) = \int_{]x_1,x_2]} u''.dx$$

$$u'(x_2-) - u'(x_1-) = \int_{[x_1 x_2[} u''dx$$

Así pues existe

$$L = \lim_{x\to\infty} u'(x+) = u'(x_1+) + \int_{]x_1,\infty[} u'' \, dx$$

$$L = \lim_{k\to\infty} u'(x-) = u'(x_1-) + \int_{[x_1,\infty[} u'' \, dx$$

Ahora bien si $L > 0$ es inmediato que $\lim_{x\to\infty} u(x) = +\infty$, y si $L < 0$, $\lim_{x\to\infty} u(x) = -\infty$, contra lo ya demostrado. Análogamente para el límite de u' cuando $x \to -\infty$ *

La demostración del lema II.2 puede repetirse asimismo en el caso unidimensional para obtener que si $w \geq 0$ en el T$^{\underline{a}}$ II.1b (lo cual ocurre por ej. si $D(\beta) = \mathbb{R}$ y $f \in M^+(\mathbb{R})$ o si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$), definiendo

$$(37) \qquad F(r) = \int_{x>r} f \qquad\qquad G(r) = \int_{x>r} f,$$

se tiene que $u'(x+) - F(x)$ es creciente, $u'(x-) - F(x-)$ es creciente, $u'(x+) + G(x+)$ es creciente y $u'(x-) + G(x)$ es creciente. Como $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} u'(x) = 0$ se deduce que

$$(38) \quad \begin{cases} -G(x+) \leq u'(x+) \leq F(x) \\ -G(x) \leq u'(x-) \leq F(x-) \end{cases}$$

(obsérvese que $F(x+) = F(x)$, $G(x-) = G(x)$)

De (38) se obtiene

$$(38) \qquad \|u'\|_\infty \leq \|f\|_M$$

resultado ya conocido por la demostración del T$^{\underline{a}}$ I.3b.

Las estimaciones que constituyen las secciones II.4 y II.5 pueden repetirse con resultados análogos a las proposiciones II.5, II.6, II.7 Solo nos detendremos en esta última que trata el importante caso en que <u>tiene soporte compacto</u>:

<u>PROPOSICION II.7b</u>:

En las condiciones del T$^{\underline{a}}$ II.1b supongamos que $f \in M_o(\mathbb{R})$

a) Sea $f \geq 0$. Entonces

a.1) $u \geq b$; fuera del soporte de f, $u' \leq 0$, $u' = o(\frac{1}{r})$, $r \downarrow b$.

a.2) $w = o(\frac{1}{r})$

a.3) a.4) como en la Prop. II.7

b) Como Prop. II,7.

c) Como Prop. II.7, salvo $w = O(\frac{1}{r})$.

<u>Demostración</u>: La demostración de los apartados a.1) a.2) es análoga. La demostración de a.3) a.4) es la misma una vez sustituido $\Delta u = \frac{1}{r}(ru')'$ por $\Delta u = u''$.

Nos remitimos por tanto a la Prop. II.7 *

CAPITULO III

OTROS RESULTADOS DE EXISTENCIA PARA LA ECUACION $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ EN $\mathbb{R}^N$.

PARTE PRIMERA: Existencia de soluciones acotadas

Demostramos en esta sección varios teoremas de existencia de soluciones de (P) $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Recordemos que si $N=1$, el $T^{\underline{a}}$ 1.3b (resp. Th. 4.1 de BBC [9]) garantizan la existencia de soluciones en $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ cuando $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ (resp. $f \in L^1(\mathbb{R})$).

TEOREMA III.1: Sea $N \geq 2$ y β un g.m.m tal que $0 \in \beta(0)$ (y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$ si $N=2$). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para un $p > N/2$, verificando además

$$(C_\infty) \begin{cases} \limsup_{|x| \to \infty} f < \beta^+ \equiv \lim_{r\to\infty} \beta(r) \\ \liminf_{|x| \to \infty} f > \beta^- \equiv \lim_{r\to-\infty} \beta(r) \end{cases}$$

Entonces toda solución u en el sentido de BBC [9]. 1 (es decir $u \in M^{N/N-2}(\mathbb{R}^N)$, $|\operatorname{grad} u| \in M^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)$, $w = \Delta u + f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 3$, $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\operatorname{grad} u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w = \Delta u + f \in$ $\in L^1(\mathbb{R}^2)$ si $N=2$) verifica

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Además se estima $\|u\|_\infty$: cf. (11), (12).

Demostración:

Veamos el caso $N=2$ que comporta dificultades adicionales sobre el caso $N \geq 3$:

1) Comenzamos descomponiendo f de la forma:

$$(1) \qquad f = f_1 + f_2$$

siendo $f_2 = f\big|_{\Omega^{R_1}}$ para un cierto $R_1 > 0$ suficientemente grande para que $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ y en virtud de (C_∞):

(2) $\begin{cases} B = \sup\ f_2 < \beta^+ \\ A = \inf\ f_2 > \beta^- \end{cases}$

Dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $f_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ y es obvio entonces que $B \geq 0$ y $A \leq 0$.

Entonces

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1 = f - f_2 \in L_o^p(\mathbb{R}^2), \quad p > 1 \\ \operatorname{supp}(f_1) \subset \overline{B}_{R_1}(0) \end{cases}$$

Escribimos ahora la ecuación (P) como

$$(4) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f_2 + f_1 - k\ \chi_{B_R(0)} + k\ \chi_{B_R(0)}$$

siendo χ_E la función característica del conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ y k y $\tilde{R}$ constantes relacionadas por la condición

$$(5) \qquad \int_{\mathbb{R}^2} (f_1 - k\ \chi_{B_{\tilde{R}}(0)}) = 0$$

Es decir

$$k = k(\tilde{R}, f_1) = |ms(B_R(0))|^{-1} \cdot \int f_1$$

Por lo tanto $\lim\limits_{\tilde{R}\to\infty} k = 0$. Designamos $k^+ = \max(k,0)$, $k^- = \max(-k,0)$ e imponemos a $\tilde{R}$ la condición de ser tan grande que

i) $\tilde{R} > R_1$

ii) $\sup\ f_2 + k^+ < \beta^+$

$\inf\ f_2 - k^- > \beta^-$

2) En virtud del Lema A.1 el problema

$$(P') \qquad -\Delta v = f_1 - k\ \chi_{B_{\tilde{R}}(0)}$$

posee una solución $v \in C(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } v| \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$(6) \qquad v = \left[f_1 - k\, \chi_{B_R(0)}\right] * E_2$$

Además v verifica $\lim\limits_{|x|\to\infty} v = 0$ (límite uniforme) debido a (5).

3) Entonces, dada la solución u del enunciado, $w = \Delta u + f \in \beta(u)$ ctp, es inmediato que $u-v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } (u-v)| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $\Delta(u-v) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Además se tiene que

$$(7) \qquad \exists\, k > 0 : \text{ ms } \{x \in \mathbb{R}^2 : |u(x) - v(x)| > k\} < \infty$$

En efecto, si la afirmación fuese falsa, dado que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, se tendría que para todo $k > 0$, ms $[|u| > k] = \infty$. Pero dado que $0 \in \text{Int } R(\beta)$ y que $w \in \beta(u)$ es tal que $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ esto es imposible, según argumento ya repetido.

Así pues podemos aplicar a $u-v$ el lema A.13 de BBC [9] y deducir

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta(u-v) \cdot p(u-v) \leq 0, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}$$

Ahora bien $\Delta(u-v) = w - (f_2 + k\, \chi_{B_R(0)})$, luego

$$(8) \qquad \int_{\mathbb{R}^2} p(u-v) . w \leq \int_{\mathbb{R}^2} (f_2 + k\, \chi_{B_R(0)}) \cdot p(u-v)$$

4) Veamos que $\underline{\sup\ u < \infty}$:

Tomamos una sucesión $p_n(s) \in \mathcal{P}$ creciente hacia $\text{sig}_0^+(s-r)$, $r > 0$ fijo. Sea $E_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) > v(x)+r\}$ y pasemos al límite en (8) por la convergencia dominada. Entonces

(9) $$\int_{E_r} w \leq \int_{E_r} f_2 + k\,\chi_{B_R(0)}$$

Si suponemos que $\sup u = \infty$, dado que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\sup\,(u-v) = \infty$. Por tanto para todo $r > 0$ $ms(E_r) > 0$. De (9) se deduce entonces que ha de existir $F_r \subset E_r$, $ms(F_r) > 0$ tal que para todo $y \in F_r$

$$w(y) \leq f_2(y) + k\,\chi_{B_R(0)}(y)$$

Por tanto $w(y) \leq \sup f_2 + k^+ < \beta^+$. Ponemos $m = [\beta^{-1}(B+k^+)]^+ < \infty$ entonces cty, $u(y) \leq m$ $v(y) = u(y) - (u(y) - v(y)) \leq m-r$. Haciendo crecer r indefinidamente deducimos que $v \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$, resultado contradictorio.

(Notación: $[\beta^{-1}(c)]^+ = \sup\,\{s \in \mathbb{R} : \beta(s) \ni c\}$, $[\beta^{-1}(c)]^- = \inf\,\{s \in \mathbb{R} : \beta(s) \ni c\}$)

5) $\underline{\inf u > \infty}$ en virtud del razonamiento análogo correspondiente.

c) <u>Estimación de las cotas de u</u>:

Sea $L = \sup\,(u-v)$

1°) si $L \leq 0$ $\sup u \leq \sup v \leq \|v\|_\infty$

2°) Si $L > 0$, pongamos para un $\varepsilon > 0$, $r = L - \varepsilon < L$. Según lo visto en 4) cty $\in F_r$ $u(y) \leq m$. Además ctp $x \in \mathbb{R}^2$ $u(x) - v(x) \leq L$. Así

$$u(x) \leq L + v(x) = r + \varepsilon + v(x) < u(y) - v(y) + v(x) + \varepsilon$$

$$u(x) < M + 2\,\|v\|_\infty + \varepsilon$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$:

(10) $\quad$ ct$x \in \mathbb{R}^2$, $\quad u(x) \leq m + 2\,\|v\|_\infty$

De ambos casos se concluye que

(11) $\quad \underline{\sup u \leq m + 2\,\|v\|_\infty}$, $\quad 0 \leq m = [\beta^{-1}(B+k^+)]^+ < \infty$

De forma análoga

(12) $\quad \underline{\inf u \geq \overline{m} - 2\,\|v\|_\infty}$, $\quad 0 \geq \overline{m} = [\beta^{-1}(A-k^-)]^- > -\infty$

Demostración para $N \_ 3$:

El término $k\,\chi_{B_R(0)}$ resulta superfluo pues la existencia de v solución de (P') acotado no exige que el segundo miembro tenga integral nula (ver obs. al Lema A.1). La fórmula (8) se obtiene mediante el Lema A.10 de BBC [9] para $p \in \mathcal{P}_o$.

(Complemento al) TEOREMA III.1 ($N = 1$):

Sea β un g.m.m tal que $0 \in \beta(0)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ verificando la condición (C_∞). Entonces la solución $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, tal que $w = u'' + f \in L^1(\mathbb{R})$ de (P) (cf. BBC [9], Th. 4.1) verifica las acotaciones (11) y (12).

Demostración: Totalmente análoga al caso $N=2$. Sustituir el Lema A.13 de BBC [9] por la fórmula equivalente 4.2, pg. 535, BBC y el Lema A.1 de este trabajo por la observación subsiguiente para $N=1$, E_2 por E_1, etc.*

COROLARIO III.1: Si en las condiciones del Tª III.1, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, se tienen las estimaciones

(13) $\quad [\beta^{-1}(\inf f)]^- \leq u(x) \leq [\beta^{-1}(\sup f)]^+$, $\quad$ ct x

(14) $\quad \inf f \leq w(x) \leq \sup f \qquad$ ct x

[(14) es un principio del máximo].

<u>Demostración</u>: Si $\sup f \geq \beta^+$ ó $\inf f \leq \beta^-$ las desigualdades correspondientes son obvias.

En caso contrario repítase la demostración del teorema con $h=0$, $k=0$, $v=0$, obteniendo (13).

Para demostrar (14) empecemos por $w(x) \leq \sup f$:

- Si $\sup f$ es un valor no perteneciente a un tramo vertical del grafo β, $\beta(\beta^{-1}(\sup f)^+)$ es un valor único y vale $\sup f$, por lo que $u(x) \leq [\beta^{-1}(\sup f)]^+$ y $w \in \beta(u)$ ctp x implican $w(x) \leq \sup f$.

- En caso contrario es claro que si $u(x) < [\beta^{-1}(\sup f)]^+$, ctp $w(x) \leq \sup f$ y nos basta obtener el resultado siguiente: ct $x \in [u = [\beta^{-1}(\sup f)]^+]$, $w(x) \leq f(x)$, o lo que es lo mismo <u>$-\Delta u(x) \geq 0$</u>.

Para $N=2$ este resultado es consecuencia del Corolario del Lema A.7 aplicado a la función positiva $[\beta^{-1}(\sup f)]^+ - u$. Para $N \geq 3$ se puede probar un resultado análogo con las hipótesis $u \in M^{N/N-2}(\mathbb{R}^N)$, $|\text{grad } u| \in M^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)$, $\Delta u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, como variante de Bénilan [7], lemme 12. Para $N=1$ con las hipótesis $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $\Delta u \in L^1(\mathbb{R})$ el cálculo resulta aún más fácil*

El Teorema III.1 puede ser utilizado para demostrar la existencia de soluciones acotadas -no necesariamente únicas- de (P) cuando f no necesariamente pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$.

El concepto de solución de (P) quedará ampliado en adelante del modo siguiente: u es solución de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\Delta u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $w \equiv f + \Delta u \in \beta(u)$ ctp.

Así obtenemos el

<u>TEOREMA III.2</u>: Sea β un g.m.m tal que $0 \in \beta(0)$ y $R(\beta) = \mathbb{R}$.

<u>1er. caso</u>: Supongamos que f verifica las siguientes condiciones

i) Si $N \geq 2$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para un $p > N/2$. si $N=1$ $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

ii) f esta (esencialmente) acotada en un entorno del infinito.

y que $D(\beta) = \mathbb{R}$.

<u>2° caso</u>: Supongamos que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$.

En ambos casos existe al menos una solución u de (P) en el sentido anteriormente citado tal que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$w = \Delta u + f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Además en el 2° caso:

$$\inf f \leq w(x) \leq \sup f, \quad \text{ct } x \in \mathbb{R}^N$$

si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ las soluciones obtenidas son soluciones usuales (cf. BBC [9]).

<u>Demostración</u>:

Como antes trataremos en detalle la demostración en <u>dimensión $N = 2$</u>:

1) Comenzamos por un caso particular: <u>$f \geq 0$ en un entorno del infinito</u>.

Suponemos pues que existe $R_o > 0$ y $f \geq 0$ en $\Omega_o = \Omega^{R_o} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > R_o\}$ y además $0 \leq \sup_{\Omega_o} f = B < \infty$.

- Planteamos el problema aproximado

$$(P_n) \qquad -\Delta u_n + \beta(u_n) \ni f_n$$

Donde

$$(15) \qquad f_n = f.\chi_{B_n(0)} \in L^1_o(\mathbb{R}^2)$$

Para (P_n), BBC [9] nos proporciona la existencia de solución $u_n \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grad } u_n| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $w_n = \Delta u_n + f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ Además $\|w_n\|_p \leq \|f_n\|_p$, luego $\Delta u_n \in L^p(\mathbb{R}^2)$, de donde por resultados de regularidad conocidos $u_n \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y por Sobolev $(p > 1)$, u_n es <u>continua</u> (cf. este argumento con BBC [9], pg 542).

- Apliquemos ahora el T$^{\underline{a}}$ III.1 y las estimaciones (11), (12) a las soluciones $\{u_n\}$. Veamos que puede hacerse de forma uniforme:

En virtud de las hipótesis para $|x|, n > R_o$, $0 \leq f_n(x) \leq B$, por lo que en la descomposición (1) $f_n = (f_n)_1 + (f_n)_2$, $(f_n)_2 = f_n|_{\Omega^{R_1}}$ podemos tomar $R_1 = R_o$ uniformemente en n.

Asimismo si $n > R_o$ $(f_n)_1 = f_n|_{B_{R_o}(0)} = f|_{B_{R_o}(0)}$ es constante y por tanto constantes son k y ν respecto a n.

Así tenemos uniformemente en $n > R_o$:

$$(11') \qquad u_n(x) \leq m + 2\|v\|_\infty$$

(12') $\qquad u_n(x) \geq \bar{m} - 2\,\|v\|_\infty$

Dado que hemos supuesto $f \geq 0$ si $|x| > R_o$, la sucesión de truncadas $\{f_n\}$ es creciente para $n > R_o$. En virtud de los teoremas de comparación para soluciones en $L^1(\mathbb{R}^2)$ (cf. BBC [9], prop 3.6), $\{w_n\}$ es creciente y $\{u_n\}$ es creciente a condición de tomar $u_n = u_m$ si $f_n = f_m$. Deducimos pues de (11') y (12') que la sucesión $\{u_n\}$, creciente y acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, tiene un límite u y $u_n \to u$ en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ débil, ctp y en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (convergencia monótona). Además u verifica (11') y (12').

- La convergencia de $\{w_n\}$ obedece a razones distintas en los dos casos del enunciado:

2°) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, en virtud del Corolario III.1, $\{w_n\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$:

(14) $\qquad \inf f \leq w_n(x) \leq \sup f, \quad$ ct $x \in \mathbb{R}^2$

Luego existe $w = \lim w_n$ en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ débil, en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y ctp.

Además:

$$\inf f \leq w(x) \leq \sup f$$

1°) Si $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (caso 1°) suponemos que $D(\beta) = \mathbb{R}$, por lo que $\{u_n\}$ acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ implica $\{w_n\}$ acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- Es una solución de (P):

$$u_n \to u \text{ en } L^1_{loc}\ ;\ w_n \to w \text{ en } L^1_{loc},\ f_n \to f \text{ en } L^1_{loc}$$

luego $-\Delta u_n \to f-w$ en L^1_{loc}. Dado que Δ es un operador de derivación es cerrado en L^1_{loc}, luego $\underline{-\Delta u = f-w.}$

El lema 3 de Brézis [12] nos permite concluir de u_n, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $u_n \to u$ ctp y de $w_n \to w$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ $w_n \in \beta(u_n)$ ctp que $\underline{w \in \beta(u)}$ ctp.

- La solución obtenida u es una función <u>s.c.i.</u>, por ser límite (monótono) de funciones continuas.

- Si f no tiene soporte compacto <u>esta</u> solución obtenida es <u>única</u>. Si f tiene soporte compacto, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ y nos remitimos a BBC [9] para la no unicidad:

En efecto si f no tiene soporte compacto, pasando a una subsucesión podemos asegurar que $\{f_n\}$ es estrictamente creciente.

Entonces, aunque la solución u_n correspondiente a f_n no sea única podemos asegurar que si $f_{n+1} \geq f_n$, $f_{n+1} \neq f_n$, toda solución para f_{n+1} es superior o igual a toda solución para f_n. Por lo tanto el límite monótono u es único.

- Si $f \geq \hat{f}$, $f \neq \hat{f}$ son dos funciones como en este apartado, para $n>>0$ $f_n \geq \hat{f}_n$, $f_n \neq \hat{f}_n$, luego $w_n \geq \hat{w}_n$, $u_n \geq \hat{u}_n$ y en el límite $w \geq \hat{w}$, $u \geq \hat{w}$. Este es el resultado de comparación de soluciones.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $f_n \to f$ en L^1 luego según BBC [9] $w_n \to w$ en L^1 y $\{u_n\}$ está acotado en $W^{1,1}_{loc}$, luego $\exists \{n_k\}$ tal que $u_{n_k} \to u$ en L^1_{loc} y ctp. Así (u,w) son una solución en el sentido usual (cf. BBC [9], 3).

- Para $N = 3$ ó $N = 1$ se realiza paso por paso el proceso anterior utilizando las soluciones u_n, w_n dadas por BBC [9] con la regularidad correspondiente.

DEFINICION: En adelante nos referiremos a las soluciones obtenidas en este apartado como "inf-soluciones" (obtenidas por truncación).

2) Caso en que $f \leq 0$ en un entorno del infinito:

Calculos totalmente análogos conducen a "sup-soluciones" por truncación que en este caso son funciones s.c.s.

Resumimos los resultados obtenidos en la

PROPOSICION III.1: En las condiciones del T$^{\underline{a}}$ III.2, si $f \geq 0$ en un entorno del infinito,

1) se puede hallar una inf-solución u de (P) como límite creciente de soluciones del problema truncado (P_n). Además $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $w = \Delta u + f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ u verifica las estimaciones (11) y (12) y es s.c.i.

2) si $N \geq 3$ u es siempre única. Si $N = 1,2$ u es única si por ejemplo f no tiene soporte compacto, o si $\beta^{-1}(0) = \{o\}$.

3) es válido el resultado de comparación conocido para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

- si $f \geq \hat{f}$, $w \geq \hat{w}$ y si $N \geq 3$ $u \geq \hat{u}$
- si $N = 1,2$ es preciso $f \geq \hat{f}$, $f \neq \hat{f}$ para concluir $u \geq \hat{u}$

En las condiciones del $T^{\underline{a}}$ III.2, si $f \leq 0$ en un entorno del infinito se obtienen "sup-soluciones" como límite decreciente del problema truncado que son funciones s.c.s. y cumplen el resto de las afirmaciones hechas para $f \geq 0$.

3) Terminamos la demostración del $T^{\underline{a}}$ III.2 considerando el caso general.

Utilizaremos dos tipos de aproximación:

a) <u>Aproximación "sup-inf"</u>

Consiste en reducirse al caso 1) definiendo

$$(16) \qquad f^{(m)}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |x| \leq m \\ f^{+}(x), & \text{si } |x| > m \end{cases}$$

($f^{+}(x) = \max(f(x),0)$). Si f cumple las condiciones exigidas en el Teorema también $f^{(m)}$. Además $f^{(m)} \downarrow f$ en L^1_{loc} y $f^{(m)} \geq 0$ si $|x| > m$.

Ahora podemos someter $f^{(m)}$ al proceso del apartado 1) definiendo

$$(17) \qquad f_n^{(m)}(x) = \begin{cases} f^{(m)}(x) & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| > n \end{cases}$$

Y planteando

$$(P_n^{(m)}) \qquad -\Delta u_n^m + \beta(u_n^m) \ni f_n^{(m)}$$

Como vimos se obtienen en el límite soluciones u^m para

$$(P^{(m)}) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f^{(m)} .$$

De nuevo repitiendo el argumento visto en 1) podemos afirmar que las u^m verifican uniformemente las acotaciones (11) y

(12) por lo que $\{u^m\}$ es una sucesión acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Además, dado que $\{f^{(m)}\}$ es una sucesión decreciente la sucesión $\{w^m\}$ es decreciente y $\{u^m\}$ lo es si tenemos el cuidado de tomar u^m fija cuando f tenga soporte compacto y $N=1,2$ y la solución no sea única (caso por otra parte ya incluido en BBC [9]).

Podemos pues pasar al límite en $\{u^m\}$ y obtener

$$\bar{u} = \lim_{m\to\infty} u^m \quad \text{en } L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ débil, en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ y ctp}$$

Para pasar al límite $\{w^n\}$ hemos de precisar que es una sucesión acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con exactamente el mismo argumento de 1). Así existe el límite monótono

$$\bar{w} = \lim_{m\to\infty} w^m \quad \text{en } L^\infty \text{ débil, } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ y ctp}$$

Por último $\bar{u}$ verifica (11), (12) y si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\bar{w}$ verifica (14).

b) <u>Aproximación "inf-sup"</u>:

En este caso nos reducimos a 2) mediante

$$(18) \qquad f_{(m)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq m \\ f^-(x) & \text{si } |x| > m \end{cases}$$

$(-f^-(x) = \min(f(x),0))$. Resolvemos

$$(P_{(m)}) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f_{(m)}$$

Obteniendo sucesiones $\{u_m\}$, $\{w_m\}$ crecientes y límites monótonos:

$$\underline{u} = \lim u_m \quad \text{en} \quad L^\infty \text{ débil}, \ L^1_{loc} \ \text{y ctp}$$

$$\underline{w} = \lim w_m \quad \text{en} \quad L^\infty \text{ débil}, \ L^1_{loc} \ \text{y ctp}$$

en las condiciones de a).

- Soluciones usuales

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f^{(m)} \to f$ en L^1 luego según BBC [9] $w^m \to w$ en L^1. Además $\{u^m\}$ es un conjunto acotado en $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ luego existe una subsucesión $\{m_k\}$ tal que $u^{m_k} \to u$ en L^1_{loc} y ctp. Así $(\bar{u},\bar{w})$ son una solución en el sentido de BBC [9].

Idem para $(\underline{u},\underline{w})$.

Dada la unicidad de soluciones $\underline{w} = \bar{w}$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Además si $N \geq 3$ ó si $N=1,2$ y $\beta^{-1}(0) = \{0\}$ ó si $N=1,2$ y $\int f = 0$ $\underline{u} = \bar{u}$.

- Comparación de soluciones:

Dado que $f^{(m)} \geq f_{(m)}$ para todo m, $w^m \geq w_m$ y por tanto $\bar{w} \geq \underline{w}$, ctp.

Además si f no es de soporte compacto para $m>>0$ $f^{(m)} \neq f_{(m)}$ y concluimos que $u^m \geq u_m$ y de ahí $\bar{u} \geq \underline{u}$, ctp.

Utilizamos aquí los resultados de comparación para soluciones cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y el hecho de que u^m y u_m se obtienen como límites de tales soluciones. Omitimos los detalles por brevedad.

Resumimos los resultados deducidos de 3) en la

PROPOSICION III.2: En las condiciones del $T^{\underline{a}}$ III.2

1) se pueden hallar soluciones de (P) llamadas sup-inf, $\overline{u}$ e inf-sup $\underline{u}$, que cumplen $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $w = \Delta u + f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, verifican (11), (12) y si $f \in L^{\infty}$ $\overline{w}, \underline{w}$ verifican (14).

2) si $f \in L^1$ son soluciones usuales. En general $\overline{w} \geq \underline{w}$ y en las condiciones antes citadas $\overline{u} \geq \underline{u}$.

3) si $N \geq 3$ o si $N=1,2$ y f no tiene soporte compacto o si $\beta^{-1}(0) = \{0\}$, $\overline{u}$, $\underline{u}$ están ûnicamente determiandos. $\overline{w}$ y $\underline{w}$ están unicamente determinados siempre.

4) el resultado de comparación usual es válido para ambos tipos de soluciones

- si $f_1 \geq f_2$, $\overline{w}_1 \geq \overline{w}_2$ y $\underline{w}_1 \geq \underline{w}_2$
- si $f_1 \geq f_2$, $N \geq 3$ ó si $N=1,2$ y $\beta^{-1}(0) = \{0\}$ o una no tiene soporte compacto

Los apartados 3) y 4) tienen demostración análoga al apartado 1 y la omitimos.

(fin del Teorema III.2)

Demostramos finalmente para $N \geq 2$ un resultado que muestra que las soluciones están acotadas en el infinito cuando f es una función integrable acotada en el infinito. En este caso no se logra pasar al límite en las condiciones del

$T^{\underline{a}}$ III.2 y prescindir de la integrabilidad de f. Para $N = 1$ un resultado más fuerte es cierto en general, $T^{\underline{a}}$ I.3b.

TEOREMA III.3: Sean $N \geq 2$ y β un g.m.m tal que $0 \in \beta(0)$, (y $0 \in \operatorname{Int} R(\beta)$ si $N=2$). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ una función acotada en un entorno del infinito de forma que

$$B = \limsup_{|x| \to \infty} f < \beta^+$$

$$A = \liminf_{|x| \to \infty} f > \beta^-$$

Entonces la solución u de (P) en el sentido de BBC [9] es acotada en un entorno del infinito.

Demostración:

Veamos la demostración en dimensión $N=2$ con detalle. La técnica tiene gran similitud con la empleada en el $T^{\underline{a}}$ III.1 aunque en este caso haremos estimaciones en el exterior de una bola.

1) En virtud de los resultados de comparación de soluciones podemos suponer que $f \geq 0$ (cf. BBC [9], pg 532) y que β es un grafo acotado (cf. BBC [9], pg 542).

2) Como en el $T^{\underline{a}}$ III.1 descomponemos

$$f = f_1 + f_2$$

con: $\quad f_2 = f\,\big|_{\Omega R_1}$, $R_1 >> 0$ tal que $\sup f_2 < \beta^+$, $\inf f_2 > \beta^-$

$\quad f_1 = f - f_2 \in L^1_o(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} f_1 \subset \bar{B}_{R_1}(0)$

Entonces si $w = \Delta u + f \in \beta(u)$ escribimos (P) de la forma:

$$-\Delta u + w \ni f_1 + f_2 - k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)} + k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)}$$

con k y $\tilde{R}$ como en el $T^{\underline{a}}$ III.1. Por tanto

$$\int f_1 - k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)} = 0$$

y definimos igualmente $v = E_2 * (f_1 - k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)})$, solución de $-\Delta v = f_1 - k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)}$.

Según el Lema A.1 $v = O(\frac{1}{|x|})$. Por tanto existe R_2, $R_2 > R_1$, $R_2 > \tilde{R}$ tal que $v \in L^\infty(\Omega^{R_2})$. Además v es armó nica en $\Omega^{R_2}(-\Delta v = 0)$ y en virtud de BBC [9], lemma A.3, grad $v \in M^2(\Omega^{R_2})$, grad v = grad $E_2 * (f_1 - k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)})$

3) Escribimos ahora (P) como:

$$w - \Delta(u-v) = f_2 + k\,\chi_{B_{\tilde{R}}(0)} \equiv h$$

Hemos escogido $\tilde{R}$ y k de forma que

$$\sup_{\Omega^{R_2}} h < \beta^+ , \qquad \inf_{\Omega^{R_2}} h > \beta^-$$

y pretendemos aplicar el Lema A.3. Para ello hemos de observar que se cumplen las hipótesis de regularidad del lema:

i) Dado que β es acotado y $f \in L^\infty(\Omega^{R_2})$, $\Delta u = w-f \in L^\infty(\Omega^{R_2})$ y como $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega^{R_2})$. Por Sobolev $u \in C^1(\Omega^{R_2})$. Recordando las propiedades de v concluimos que $u-v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, grad $(u-v) \in M^2(\Omega^{R_2})$, $\Delta(u-v) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $u-v \in C^1(\Omega^{R_2})$.

ii) Existe $c > 0$ tal que ms $\{x \in \Omega^{R_2} : |u(x)-v(x)| > c\} < < \infty$ pues de lo contrario dado que $v \in \Omega^{R_2}$, para todo $c > 0$ ms $\{x \in \Omega^{R_2} : |u(x)| > c\} = \infty$ contra la hipótesis de que Int $\beta(\mathbb{R}) \ni 0$, $w \in \beta(u)$ ctp y $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Aplicando pues el lema A.3 obtenemos para $R > R_2$ y para $p \in \mathcal{P}$, siendo $r = |x|$:

$$\int_{\Omega} p(u-v)\ (u-v) \leq \int_{S^R} p(u-v)\ \frac{\partial}{\partial r}\ (u-v)$$

Dado que $\Delta(u-v) = w-h$

$$(19)\qquad \int_{\Omega^R} p(u-v)w \leq \int_{\Omega^R} p(u-v)h + \int_{S^R} p(u-v)\ \frac{\partial}{\partial r}\ (u-v)$$

4) Veamos ahora que $\sup\limits_{\Omega^R} u < \infty$:

Sea $M(R) = \sup\limits_{S_R} (u-v)$. Si $R > R_2$ $M(R) < \infty$ ya que $u-v$ es contínua.

Tomemos en (19) $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(r) = 0$ si $r \leq M$. Entonces (19) se reduce a

$$(19')\qquad \int_{\Omega^R} p(u-v)w \leq \int_{\Omega^R} p(u-v)h$$

Aproximamos $\mathrm{sig}_o^+(s-r)$ para $r > M$ por una sucesión $p_n(s)$ como en (19') creciente y pasamos al límite por la convergencia dominada. Sea $E_r = \{x \in \Omega^R : u(x)-v(x) > r\}$. Entonces (19') da

$$(20)\qquad \int_{E_r} w \leq \int_{E_r} h$$

Si suponemos que $\sup\{u(x) : |x| > R\} = \infty$, dado que v es acotada en Ω^R, $\sup(u-v) = \infty$ en Ω^R. Así para todo $r > M$ $ms(E_r) > 0$ y (2) implica la existencia de $F_r : F_r \subset E_r$ y $ms(F_r) > 0$ y tal que para $y \in F_r$

$$w(y) \leq h(y) = f_2(y) = f(y) < \beta^+$$

luego ct $y \in F_r$

$$u(y) \leq m = [\beta^{-1}(\sup f_2)]^+$$

Pero dado que en E_r $u-v > r$ y que $E_r \subset F_r$ si hacemos $r \uparrow \infty$ concluimos que $v(r) \notin L^\infty(\Omega^R)$, falso.

5) Del mismo modo se obtiene $\inf\limits_{\Omega^R} u > -\infty$, a partir de (19).

6) Estimación de $\sup\limits_{\Omega^R} u$:

Designemos por $N(R) = \sup\limits_{\Omega^R} (u-v)$. Caben dos posibilidades:

a) Existe $R > R_2$ tal que $N(R) > M(R)$:

Entonces aplicamos lo visto en 4) y con $N-\varepsilon = r > M$ se obtiene para ct $x \in \Omega^R$, ct $y \in F_r$ (abreviamos $\|v\|_{L^\infty(\Omega^R)} = \|v\|_\infty$)

$$u(x) = u(x)-v(x) + v(x) \leq N + \|v\|_\infty = r+\varepsilon + \|v\|_\infty =$$

$$= u(y)-v(y) + \varepsilon + \|v\|_\infty \leq u(y) + \varepsilon + 2\|v\|_\infty$$

Pero según 4) $u(y) \leq m = |\beta^{-1}(\sup f_2)|^+$, luego

$$u(x) \leq m+\varepsilon + 2\|v\|_\infty$$

Si como $\varepsilon > 0$ es arbitrario

$$(21) \qquad u(x) \leq m + 2\|v\|_\infty$$

b) para todo $R > R_2$, $N(R) \geq M(R)$

Entonces ct $x \in \Omega^R$ $u(x) \leq M(R) + \|v\|_\infty$

O aún:

$$(22) \qquad u(x) \leq \sup_{S_R} u + 2\|v\|_\infty , \qquad \text{ct } x \in \Omega^R$$

Dado que $\lim_{R\to\infty} \|v\|_{L^\infty(\Omega^R)} = 0$, la estimación (22) nos indica la "casi ausencia" de crecimiento de u.

7) Idem para $\inf_{\Omega^R} u$ *

PARTE SEGUNDA: Resultados de existencia cuando $\beta(0) \neq \{0\}$

En esta sección suponemos que $0 \in \beta(0)$ pero $\{o\} \neq \beta(0)$. Con las hipótesis usuales sobre el grafo β obtenemos soluciones del problema (P) $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ para algunas medidas no acotadas f.

Como en el T$^{\underline{a}}$ III.2 entendemos aquí por solución de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$, f medida de Radón en $\mathbb{R}^N$, una función $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que $w = \Delta u + f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Obtenemos el

TEOREMA III.4: Sea β un g.m.m. tal que $\beta(0) = [\gamma^-, \gamma^+] \ni 0$, β cumple la condición (C_N)

$$
(C_N) \quad \begin{cases} \text{si} \quad N \geq 3 \quad D(\beta) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{\beta(r) - \beta(r)}{r^{\frac{2(N-1)}{N-2}}}\, dr < \infty \\ \text{si} \quad N=2 \quad D(\beta) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \displaystyle\int_0^\infty [\beta(r) - \beta(-r)] e^{-ar} dr < \infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{para todo} \quad a > 0 \\ \text{si} \quad N=1 \quad D(\beta) = \mathbb{R} \end{cases}
$$

Además si $N=1$ pedimos que $\operatorname{Int} \beta(\mathbb{R}) \supset [\gamma^-, \gamma^+]$

Sea f una medida de Radón en $\mathbb{R}^N$ tal que $(f-\gamma^+)^+$, $(f+\gamma^-)^- \in$ $\in M(\mathbb{R}^N)$.

Entonces existen soluciones $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ que cumplen además

$$
(22) \qquad \begin{aligned} \liminf u &\geq a = [\beta^{-1}(\gamma^-)]^- \\ \limsup u &\leq b = [\beta^{-1}(\gamma^+)]^+ \end{aligned}
$$

si $(f+\gamma^-)^-$, $(f+\gamma^+)^+$ están acotadas por medidas radiales de $M(\mathbb{R}^N)$ en un entorno del infinito resp.

OBSERVACION: Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ la condición (C_N) no es necesaria. Para $N=2$ es preciso explicitar entonces que $\operatorname{Int} \beta(\mathbb{R}) \supset$ $\supset [\gamma^-,\gamma^+]$.

Si $\gamma^- = \gamma^+ = 0$ estamos en el caso $f \in M(\mathbb{R}^N)$ y no hay nada que demostrar (cf. cap. I). Por lo tanto suponemos en adelante que γ^+ ó $\gamma^- \neq 0$.

Demostración: Utilizamos la técnica del T$^{\underline{a}}$ III.2.

1) Comenzamos por el caso particular: $f \geq 0$ en $[|x| > R]$, $R > 0$. Si $\gamma^+ = 0$, $f \in M(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto suponemos $\gamma^+ > 0$. Planteamos como partida el problema

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} -\Delta\tilde{u} + \tilde{w} = (f-\gamma^+)^+ \equiv \tilde{f} \\ \\ \tilde{w} \in \overline{\beta}(\tilde{u}) \end{cases}$$

donde se define $\overline{\beta}(r) = \beta(r) - \gamma^+$: $\overline{\beta}$ es un g.m.m tal que $0 \in \overline{\beta}(0)$, $\overline{\beta}$ cumple (C_N) si lo cumple β y si $N=1,2$ tenemos la seguridad de que $0 \in \operatorname{Int} \overline{\beta}(\mathbb{R})$. Además $\sup \overline{\beta}^{-1}(0) = b$.

Dado que $\tilde{f} \in M^+(\mathbb{R}^N)$ existen $\tilde{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{w} = \Delta\tilde{u} + \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ solución de $(\tilde{P})$ (cf. Bénilan [7] para $N \geq 3$; capítulo I para $N=1,2$). Si $N=1,2$ y $\tilde{f} = 0$ tomemos $\tilde{u} = b$, la solución máxima. En caso contrario la solución es única.

En virtud del Cap. II sabemos que $\lim\limits_{|x|\to\infty} \tilde{u} = b$ si $N=1,2$. Si $N \geq 3$ Bénilan [7] demuestra que $\lim \tilde{u} = 0$. Además en virtud del T$^{\underline{a}}$ de Comparación I.2 (cf. Bénilan [7] para $N \geq 3$), $\tilde{u},\tilde{w} \geq 0$.

- Ahora pasamos al problema

$$(P_n)\qquad \begin{cases} -\Delta u_n + w_n = f_n \\ w_n \in \beta(u_n) \end{cases}$$

donde $\quad f_n = f.\chi_{B_n(0)} = f|_{B_n(0)} \in M_o(\mathbb{R}^N)$

Traduciendo los resultados BBC [9], $T^{\underline{a}}$ 6.1 y $T^{\underline{a}}$ 6.3 a medidas, para lo que disponemos de Bénilan [7] si $N\geq 3$; Prop. II.7,a.3) si $N=2$; Prop. II.7b, a.3) si $N=1$, $\exists\ u_n \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $w_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$, solución de (P_n), ambos de <u>soporte compacto</u>.

- Comparemos las soluciones de $(\tilde{P})$ y (P_n):

Sea $R_n \geq n$ tal que $\mathrm{supp}(u_n)$, $\mathrm{supp}(w_n) \subset B_{R_n}(0)$.

Definimos
$$\bar{w}_n = \begin{cases} w_n - \gamma^+ & \text{si} \quad |x| < R_n \\ 0 = w_n & \text{si} \quad |x| \geq R_n \end{cases}$$

y
$$\bar{f}_n = \begin{cases} f_n - \gamma^+ & \text{si} \quad |x| > R_n \\ 0 = f_n & \text{si} \quad |x| \leq R_n \end{cases}$$

Entonces

$$(23)\qquad -\Delta u_n + \bar{w}_n = \bar{f}_n$$

$$(24)\qquad \bar{w}_n \in \bar{\beta}(u_n), \quad \bar{w}_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

En virtud del $T^{\underline{a}}$ de Comparación para $f \in M(\mathbb{R}^N)$ (cf. Bénilan [ ] para $N\geq 3$; T^{as} I.2 y I.2b resp. para $N=1,2$) de $(\tilde{P})$ y (23)-(24) deducimos

$$(25)\qquad \begin{cases} u_n \leq \tilde{u} \\ w_n \leq \tilde{w} + \gamma^+ \end{cases}$$

- Utilizamos ahora la hipótesis $f \geq 0$ en $[|x| > R]$: Entonces si $n' > n >> 0$, $f_{n'} \geq f_n$ luego en virtud de los T^{as} de Comparación $\{w_n\}$ es una sucesión eventualmente creciente y $\{u_n\}$ es eventualmente creciente si tomamos la precaución de poner $u_n = u_m$ si $f_n = f_m$ y la solución no es única.

Pasamos ahora al límite monótono ($T^{\underline{a}}$ de B. Levi) en virtud de las acotaciones (24). Así existen

$$(26) \quad \begin{cases} u = \lim u_n & \text{en } L^1_{loc} \text{ y ctp } \uparrow \\ w = \lim w_n & \text{en } L^1_{loc} \text{ y ctp } \uparrow \end{cases}$$

Cumpliendo

$$(27) \quad \begin{cases} u \leq \tilde{u} \\ w \leq \tilde{w} + \gamma^+ \end{cases}$$

Pasando al límite en (P_n) obtenemos

$$-\Delta u + w = f$$

Y por el ya utilizado $T^{\underline{a}}$ 3 de Brézis [12] $w \in \beta(u)$ ctp. Así u es una solución de (P), que denominamos por el procedimiento de construcción, "inf-solución".

- Dado que $u \leq \tilde{u}$ y que $\lim\limits_{|x| \to \infty} \tilde{u} = b$, obtenemos $\limsup\limits_{|x| \to \infty} u \leq b$.

Además $u \geq u_n$ y aplicando el cap. II a u_n obtenemos

$$\liminf u \geq \liminf u_n \geq [\beta^{-1}(0)]^- \begin{pmatrix} = 0 & \text{si} & \gamma^- < 0 \\ = a & \text{si} & \gamma^- = 0 \end{pmatrix}$$

con lo que queda demostrado (22), incluso mejorado si $\gamma^- < 0$.

- Si $f \in M(\mathbb{R}^N)$, las inf-soluciones son soluciones en el sentido del capítulo I y por tanto son la solución única en las condiciones del $T^{\underline{a}}$ I.1 (I.1.b) para $N=2$ $(N=1)$ (cf. Bénilan si $N \geq 3$): el argumento es que las inf-soluciones se obtienen como límites en L^1_{loc} y que en las condiciones del cap. I, $T^{\underline{a}}$ I.3 la aplicación $f \longrightarrow (u,w)$ es débilmente secuencialmente continua.

- Las inf-soluciones son únicas si f no tiene soporte compacto: entonces $\{f_n\}$ es una sucesión creciente no constante e incluso para $N=1,2$ el límite de $\{u_n\}$ es único, aunque algunas u_n no estén unívocamente determinadas. Si $N\geq 3$, o si $N=1,2$ y $\beta^{-1}(0) = \{0\}$, lo cual se cumple si $\gamma^- < 0 < \gamma^+$, no hay ningún problema con la unicidad.

- También el T$^{\underline{a}}$ de comparación usual resulta cierto con los mismos argumentos del T$^{\underline{a}}$ III.2.

2) Caso en que $f \leq 0$ en $[|x| > R]$, $R > 0$:

Cálculos análogos conducen a "sup-soluciones", obtenidas por un proceso de límite monótono decreciente en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Si $f \in M(\mathbb{R}^N)$, en particular si $\gamma^- = 0$, se obtienen las soluciones del cap. I.

En este caso si $\gamma^- < 0$ la acotación inferior la establecen las soluciones de

$$(\check{P}) \quad \begin{cases} -\Delta\check{u} + \check{w} = (f + \gamma^-)^- = \check{f} \\ \check{w} \in \check{\beta}(\check{u}) \end{cases}$$

con $\check{\beta}(r) = \beta(r) - \gamma^-$. Se obtiene para la sup-solución u

$$(28) \quad \begin{cases} u \geq \check{u} \\ w \geq \check{w} + \gamma^- \end{cases}$$

3) Caso General

a) Aproximaciones "sup-inf" e "inf-sup"

Nos reducimos al caso 1) definiendo

$$(29) \qquad f^{(m)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |x| \leq m \\ f^+(x) & \text{si} \quad |x| > m \end{cases}$$

Si f cumple las condiciones exigidas tambien $f^{(m)}$. Además $f^{(m)} \downarrow f$ en el espacio de las medidas de Radón y $f^{(m)} \geq 0$ en $[|x| > m]$.

Calculamos ahora la solución de

$$(P^m) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f^{(m)}$$

que por 1) existe inf-solución $u^{(m)} \in L^1_{loc}$ con $w^{(m)} = \Delta u^{(m)} + f^{(m)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Además si $f = f^{(m)}$ para algún m estamos en el caso 1). En caso contrario $f^{(m)}$ es decreciente no constante y en virtud de los resultados de comparación $\{u^{(m)}\}$ es decreciente así como $\{w^{(m)}\}$.

También nos podemos reducir al caso (2) mediante

$$(30) \qquad f_{(m)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |x| \leq m \\ -f^-(x) & \text{si} \quad |x| > m \end{cases}$$

Y resolviendo

$$(P_m) \qquad -\Delta u + \beta(u) = f_{(m)}$$

obteniendo una sup-solución $u_{(m)} \in L^1_{loc}$ con $w_{(m)} = -\Delta u_{(m)} + f_{(m)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Como $u^{(m)}$ y $u_{(m)}$ se obtienen respectivamente como límites de las sucesiones $\{u_n^{(m)}\}$ y $\{u_{(m)n}\}$ de soluciones correspondientes resp. a $\{f_n^{(m)}\}$ y $\{f_{(m),n}\}$ y dado que $f_n^{(m)} \geq f_{(m),n}$ podemos tomar $u_n^{(m)} \geq u_{(m),n}$ y con ello $u^{(m)} \geq u_{(n)}$. Asimismo $w^{(m)} \geq w_{(m)}$.

Así tenemos para $m < m'$

$$(31)\quad \begin{cases} u_{(m)} \le u_{(m')} \le \cdots \le w^{(m')} \le u^{(m)} \\ w_{(m)} \le w_{(m')} \le \cdots \le w^{(m')} \le w^{(m)} \end{cases}$$

Podemos ahora pasar al límite en ambas sucesiones monótonas gracias a la acotación respectiva (30) y obtener

$$(32)\quad \begin{aligned} \bar{u} &= \lim u^{(m)} \ge \lim u_{(m)} = \underline{u} \\ \bar{w} &= \lim w^{(m)} \ge \lim w_{(m)} = \underline{w} \end{aligned}$$

límites en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y ctp; $\bar{u}$ recibe el nombre de sup-inf-solución y $\underline{u}$ de inf-sup-solución.

Además las acotaciones (25), (28) son válidas tanto para $u^{(m)}$ como para $u_{(m)}$:

$$\check{u} \le u_{(m)} \le u^{(m)} \le \tilde{u}$$

Por lo que en el límite

$$(33)\qquad \check{u} \le \underline{u} \le \bar{u} \le \tilde{u}$$

Así en las condiciones del Teorema se obtiene (22):

$$\limsup \bar{u} \le b$$

$$\liminf \underline{u} \ge a$$

- La unicidad y la comparación de soluciones no ofrecen novedades sobre lo visto en 1) 2) ó en el T$^{\underline{a}}$ III.2. Lo mismo sucede con las soluciones cuando $f \in M(\mathbb{R}^N)$ que resultan ser las usuales (cap. I).

Podemos resumir los resultados obtenidos en la demostración en la siguiente

PROPOSICION III.3: En las condiciones del T$^{\underline{a}}$ III.2

i) se pueden hallar soluciones de (P) de los tipos sup-inf-solución $\overline{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\overline{w} = \Delta\overline{u} + f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ como límite monótono decreciente en L^1_{loc} e inf-sup-solución $\underline{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\underline{w} = \Delta\underline{u} + f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ como límite $\uparrow$ en L^1_{loc}. Además $\underline{u} \leq \overline{u}$, $\underline{w} \leq \overline{w}$ ctp.

ii) si $N \geq 3$ o si $N=1,2$ y $\beta^{-1}(o) = \{o\}$ o si f tiene soporte compacto tanto la sup-inf como la inf-sup-solución es única. $\underline{w}$ y $\overline{w}$ son siempre únicas. La no unicidad de u responde al Teorema I.1 para $N=2$. I.1b $N=1$, análogo si $N \geq 3$.

iii) Con las hipótesis $f \geq \hat{f}$, $f \neq \hat{f}$ se tiene

$$\overline{u} \geq \overline{\hat{u}} \quad , \qquad \underline{u} \geq \underline{\hat{u}}$$

solamente con $f \geq \hat{f}$ se tiene

$$\overline{w} \geq \overline{\hat{w}} \quad , \qquad \underline{w} \geq \underline{\hat{w}}$$

En las condiciones de ii) la hipótesis $f \neq \hat{f}$ no es necesaria.

iv) si $f \geq 0$ ó $f \leq 0$ en un entorno del infinito ambas soluciones coinciden y se obtienen como límite de soluciones de problemas con soporte compacto.

v) Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ las soluciones anteriores coinciden con las del Cap. I y en este caso, en las condiciones de ii), coinciden.

OBSERVACION: En el caso anterior es claro que $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ no converge en general a cero cuando $|x| \to \infty$ ya que, fuera del soporte de u, $w = f$, por lo que $w \to 0$ si y solo si $f \to 0$. La estimación que se obtiene es $\gamma^- < w(x) < \gamma^+$ para $|x| >> 0$.

En las condiciones del T$^{\underline{a}}$ III.4 se puede obtener una estimación del tipo $\gamma^- \leq \liminf_{|x|\to\infty} w \leq \limsup_{|x|\to\infty} w \leq \gamma^+$ con solo suponer (22) y que β no tenga tramos verticales en a y b.

En el ejemplo siguiente observamos las limitaciones que hemos de observar en los resultados cuando $\beta(0)$ y $\beta^{-1}(0)$ son distintos de cero.

<u>EJEMPLO</u>: Sean $a < 0 < b$ y $\gamma^- < 0 < \gamma^+$ y sea β un g.m.m tal que $\beta(]a,0[) = \{\gamma^-\}$, $\beta(0) = [\gamma^-,\gamma^+]$ y $\beta(]0,b[) = \gamma^+$.

Sea $c \in [a,b]$ y $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u-c$ es de soporte compacto. Sea $\sup u = b$, $\inf u = a$ y para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $\gamma^- \leq \Delta u(x) \leq \gamma^+$.

Definimos w y f de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \text{si} \quad u(x) > 0, & w(x) = \gamma^+, \quad f(x) = -\Delta u(x) + \gamma^+ \\ \text{si} \quad u(x) < 0, & w(x) = \gamma^-, \quad f(x) = -\Delta u(x) + \gamma^- \\ \text{si} \quad u(x) = 0, & w(x) = \Delta u(x), \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

Entonces $(f-\gamma^+)^+ \in C_o^\infty$, $(f-\gamma^-)^- \in C_o^\infty$; $\gamma^- \leq w \leq \gamma^+$, luego $w \in L^\infty \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y se cumple la ecuación $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ $w = \Delta u + f$.

Sin embargo
$$\begin{cases} \text{si} \quad c < 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \gamma^- \quad \text{pero} \quad \lim_{|x|\to\infty} u = \\ \qquad = c < 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} w = \gamma^- \\ \text{si} \quad c > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \gamma^+ \quad \text{pero} \quad \lim_{|x|\to\infty} u = c > 0, \\ \qquad \lim_{|x|\to\infty} w = \gamma^+. \end{cases}$$

Además sobre la existencia de soluciones de soporte compacto tenemos por ejemplo el siguiente sencillo resultado

PROPOSICION III.4: Si en las condiciones del T$^{\underline{a}}$ III.4, $\limsup_{|x|\to\infty} f < \gamma^+$, $\liminf_{|x|\to\infty} f > \gamma^-$ (lo que implica que f viene representado por una función medible acotada en un entorno del infinito), las soluciones obtenidas en el T$^{\underline{a}}$ III.4 tienen soporte compacto.

Demostración: Basta repetir la demostración del T$^{\underline{a}}$ III.4 modificando los problemas $(\tilde{P})$ y (P) empleados para acotar las soluciones aproximadas.

Por traslación de f y w podemos suponer $\gamma^- < 0 < \gamma^+$. Planteamos ahora

$$(\tilde{P}_\alpha)\quad \begin{cases} -\Delta\tilde{u} + \tilde{w} = \tilde{f} \\ \tilde{w} \in \overline{\beta}(\overline{f}) \end{cases}$$

siendo $\overline{\beta}(r) = \beta(r-\alpha)$ y $\tilde{f} = (f-\alpha)^+$ para un α tal que $\max(0, \limsup f) < \alpha < \gamma^+$. Entonces $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, tiene soporte compacto, es ≥ 0 y $[\overline{\beta}(0)]^+ = \gamma^+ - \alpha > 0$ por lo que en virtud de la Prop. II.7, a.3) para N=2 (Prop. II.7b, a.3) para N=1, Bénilan [ ] para $N \geq 3$), $\tilde{u}$ tiene soporte compacto.

Del mismo modo se plantea

$$(\check{P}_{\alpha'})\quad \begin{cases} -\Delta\check{u} + \check{w} = \check{f} \\ \check{w} \in \check{\beta}(\check{f}) \end{cases}$$

siendo $\check{\beta}(r) = \beta(r-\alpha')$, $\check{f} = -(f-\alpha')^-$ y $\min(0, \liminf f) > \alpha' > \gamma^-$.

Así obtenemos $\check{u}$ de soporte compacto.

Como en el T$^{\underline{a}}$ III.4 se obtiene para toda solución u de las estudiadas:

$$\check{u} \leq u \leq \tilde{u}$$

Luego u es de soporte compacto$_*$

CAPITULO IV

ALGUNOS RESULTADOS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION

$$\Sigma\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(u) \ni f$$

EN EL TORO.

Estudiamos en este capítulo la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación

$$(E) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(u) \ni f$$

en el toro N-dimensional $\Omega^N = \Omega$, siendo a_i, $i=1,\ldots N$ constantes reales β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ y $f \in L^1(\Omega)$.

Si f es continua [16] describe resultados que exponemos sucintamente en §0.3. Nuestro interés reside en f meramente integrables.

Comenzamos estudiando la acretividad del operador $A = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ en $L^1(\Omega)$, así como del operador $A \circ \beta^{-1}$, mediante técnicas desarrolladas por Brézis, Bénilan y otros.

IV.1. Propiedades de Acretividad

En esta sección estudiamos las propiedades de acretividad de los operadores A y $A\phi$ en los espacios $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, Ω el toro N-dimensional.

El operador lineal A:

Para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos $Au = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a_i \in \mathbb{R}$. A es un operador lineal con coeficientes constantes que opera en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ de forma natural.

DEFINICION 1:

$$(1) \qquad \begin{cases} D(A_p) = \{u \in L^p(\Omega) : Au \in L^p(\Omega)\} \\ A_p u = Au \,, \qquad \text{si} \qquad u \in D(A_p) \end{cases}$$

Dado que Ω es de medida finita, evidentemente

$$A \supset A_1 \supset A_p \supset A_\infty$$

Y además

$$\begin{cases} A_\infty = A \cap (L^\infty \times L^\infty) = A_1 \cap (L^\infty \times L^\infty) = A_p \cap (L^\infty \times L^\infty) \\ A_p = A \cap (L^p \times L^p) = A_1 \cap (L^p \times L^p) \end{cases}$$

más aún

PROPOSICION 1 $\qquad A_p = \overline{A_\infty}^{\,L^p \times L^p} \,, \qquad 1 \leq p$

Demostración: Sea $(u, Au) \in A_p$, es decir $u \in L^p(\Omega)$, $Au \in L^p(\Omega)$. Regularizamos (cf. I.0.8) y tenemos

$$\begin{cases} u_n = u * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{en} \quad L^p(\Omega) \\ Au_n = Au * \rho_n \in \mathcal{D}(\mathcal{D}), \quad Au_n \longrightarrow Au \quad \text{en} \quad L^p(\Omega) \end{cases}$$

Pero $(u_n, Au_n) \in A_\infty$ *

OBSERVACION: Del mismo modo se demuestra que

$$A_M = \overline{A_\infty}^{L_M \times L_M} \quad \text{si} \quad A_M = A_1 \cap (L^M \times L^M)$$

Para todo espacio de Orlicz (cf. §I.1.1.g) $L_M(\Omega)$

LEMA 1:

i) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $u \in C^1(\Omega)$. Entonces

$$(2) \qquad \int_\Omega Au.\phi(u)dx = 0$$

ii) Sea $1 < p < \infty$, $u \in D(A_p)$, $\phi(u) \equiv |u|^{p-1}\text{sign}(u)$. Entonces

$$(2') \qquad \int_\Omega Au.\phi(u)dx = \int_\Omega Au.|u|^{p-1}\text{sign}(u)dx = 0$$

iii) Sea $u \in D(A_1)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^o \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces

$$(2'') \qquad \int_\Omega Au.\phi(u)dx = 0$$

Demostración: i) Sea $\Phi(r) = \int_0^r \phi(s)ds$. Entonces $\Phi'(r) = \phi(r)$ y

$$\int_\Omega \phi(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(u) = 0$$ pues $\phi(u)$ es periódica, $\in C(\Omega)$

ii) Regularizamos:

$$u_n = u * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad u_n \to u \quad \text{en} \quad L^p(\Omega)$$

$$Au_n = Au * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad Au_n \to Au \quad \text{en} \quad L^p(\Omega)$$

según i):

(3) $\int_\Omega Au_n . \phi(u_n) dx = 0$

Dado que ϕ es en este caso la aplicación de dualidad entre L^p y $L^{p'}$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ (cf. Barbu [2]), $\phi(u_n) \in L^{p'}(\Omega)$ y $\|\phi(u_n)\|_{p'} = \|u_n\|_p^{p-1}$. Por tanto $\{\phi(u_n)\}$ es un subconjunto acotado de $L^{p'}(\Omega)$.

Tomando una subsucesión $\{n_k\}$ podemos afirmar que

$$\begin{cases} u_{n_k} \to u \ \text{ctp} \ \text{ y en } \ L^p(\Omega) \Rightarrow \phi(u_{n_k}) \to \phi(u) \ \text{ctp} \\ (u_{n_k}) \rightharpoonup \nu \quad \text{en} \ L^{p'}(\Omega) \ \text{débil} \end{cases}$$

Entonces (cf. Lions [37], pg. 12) $\nu = \phi(u)$ y pasando al límite en (3) obtenemos (2').

iii) Regularizamos también:

$$\begin{cases} u_n = u * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad u_n \to u \quad \text{en} \ L^1(\Omega) \\ Au_n = Au * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad Au_n \to Au \quad \text{en} \ L^1(\Omega) \end{cases}$$

Tomando luego una subsucesión $\{n_k\}$ es posible que:

$u_{n_k} \longrightarrow u$ ctp, luego como ϕ es continua;

$\phi(u_{n_k}) \longrightarrow \phi(u)$ ctp

Ahora pasamos al límite en la subsucesión $\{n_k\}$ de la igualdad i) $\int Au_n . \phi(u_n) dx = o$ aplicando el T$^{\underline{a}}$ de la Convergencia dominada*

<u>OBSERVACION</u>: iii) implica la "propiedad M_o" de Bénilan [3] pag II.3 para A.

Estamos ahora en condiciones de demostrar la acretividad de A.

PROPOSICION 2: Para todo p: $1 \leq p \leq \infty$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, si $(a_1,...,a_n) \neq 0$ A_p es un operador m-T-acretivo en $L^p(\Omega)$. Además

i) A_1 verifica la propiedad M_o

ii) si $\lambda Au + u = f \in L^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(4) \qquad \begin{cases} \sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\Omega} f \\ \inf\limits_{\Omega} u \geq \inf\limits_{\Omega} f \end{cases}$$

(4) es un "Principio del máximo".

Demostración: Como, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A = \Sigma\, (\lambda a_i) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $(\lambda a_i) \neq (0)$ es suficiente demostrar para $\lambda = 1$.

i) Acretividad en $L^1(\Omega)$:

Sean $u,f \in L^1(\Omega)$ tales que $u \in D(A_1)$

$$(5) \qquad Au + u = f$$

Como A es lineal basta demostrar que

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_1$$

sea $p \in C^o \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Multiplicamos (5) por $p(u)$ e integramos como (2")

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\int u.p(u) = 0 \\ &\int u.p(u) = \int f.p(u) \end{aligned}$$

Sustiuyamos p por una sucesi´on p_n de funciones tales que $|p_n(r)| \uparrow 1$ y $p_n(r) \to \operatorname{sign}_o(r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

Entonces en (6)

$$\lim \int u.p_n(u) = \int(u) = \|u\|_1 \quad \text{(convergencia dominada)}$$

$$\int f.p_n(u) \leq \int(f).1 = \|f\|_1$$

Luego $\qquad \|u\|_1 \leq \|f\|_1$ *

Lo acretividad implica la unicidad de soluciones de (5).

ii) <u>Demóstración de (4) y T-acretividad en $L^\infty(\Omega)$</u>:

- Supongamos que $f \in L^1(\Omega)$ y que $\sup f (\equiv \sup \text{ess } f)$ $M < 0$ y que $\Delta u + u = f$.

Regularizando la ecuación obtenemos

$$\Delta u_n + u_n = f_n, \quad \text{con} \quad f_n,\ u_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \sup f_n \leq M$$

Sea $x_n \in \Omega$ el punto en que u_n alcanza el máximo. Entonces $Au_n(x_n) = 0$. Luego

$$\text{(7)} \qquad \sup u_n = u_n(x_n) = f_n(x_n) \leq \sup f_n \leq M$$

Ahora bien, $u_n \to u$ en $L^1(\Omega)$, así que se puede encontrar una subsucesión $\{n_k\}$ tal que ctp $u_{n_k}(x) \to u(x)$. En virtud de (7) se obtiene

$$\sup u \leq M$$

- Idêntica demostración para inf.

- El "princípio del máximo" (4) implica automáticamente la T-acretividad de A en $L^\infty(\Omega)$, que se escribe

$$\|u^+\|_\infty \leq \|f^+\|_\infty$$

o bien $\qquad u(x) \leq \max(0, \sup f)$ ctp

iii) <u>m-acretividad en $L^1(\Omega)$</u>:

Hemos de demostrar que $R(I+A_1) = L^1(\Omega)$:

Sea $f \in L^1(\Omega)$. Regularizamos f y planteamos

$$Au_n + u_n = f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Gracias a §0.3 (cf. Brézis-Nirenberg [16]), existe una (única) soluci´on $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dada la acretividad como $f_n \to f$ en $L^1(\Omega)$, $\{u_n\}$ es L^1-Cauchy y existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^1(\Omega)$. Además $\|u_n\|_1 \leq \|f_n\| \leq \|f\|_1$. Por tanto $\|u\|_1 \leq \|f\|_1$.

Además

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u & \text{en} \quad L^1(\Omega) \\ Au_n \longrightarrow f-u & \text{en} \quad L^1(\Omega) \end{cases}$$

Dado que A es un operador de derivación, es cerrado en $L^1 x L^1$, luego

$$Au = f-u$$

iv) <u>m-T-acretividad en $L^p(\Omega)$ y $L_M(\Omega)$</u>:

Dado que: $A \in \mathfrak{M}_\infty^+$ (clase de los operadores m-acretivos en $L^1(\Omega)$ y T-acretivos en $L^\infty(\Omega)$) que $A_\infty \neq \phi$ y que para toda función de Young M verificando la condición Δ_2, $A_M \equiv A \cap L_M(\Omega) \times L_M(\Omega)$ es tal que $A_M = \overline{A_\infty}^{L_M(\Omega) x L_M(\Omega)}$, la caracterización de §0.1.1f nos garantiza que A_M es m-T-acretivo en $L_M(\Omega)_n$ en particular en $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

En este último caso la demostración directa es fácil: la T-acretividad se demuestra como en i) multiplicando por $|u|^{p-2}u^+$ y la m-acretividad como en iii).

v) A es <u>m-acretivo en $L^\infty(\Omega)$</u> dado que es m-acretivo en $L^1(\Omega) \supset L^\infty(\Omega)$ y cumple el "principio del máximo".

vi) Dado que A_1 es un operador m-acretivo de $L^1(\Omega)$, T-acretivo en $L^\infty(\Omega)$, se verifican las propiedades I y II del

Teorema 0.2.4 (Teorema 1 de Brézis-Strauss [18]) y podemos apli car el lema 2 de esta obra:

<u>LEMA 2</u>: "Sea $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $(p=1 \Longrightarrow p' = \infty)$.

Sea γ g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in \gamma(0)$.

Sean $u \in D(A_p)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ tales que $g(x) \in \gamma(u(x))$ ctp. Entonces

$$(8) \qquad \int_\Omega Au.g \geq 0".$$

Dado que el resultado es válido para $-A$

$$(8') \qquad \int_\Omega Au.g = 0$$

<u>Observación</u>: (8') mejora (2") del Lema 1.

Aplicamos el Lema al caso $\gamma = \text{sign}^+$ (definido en 0.1.1.f) y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & u(x) > 0 \\ 0 & u(x) < 0 \\ \text{sign}_o^+(Au(x)) & u(x) = 0 \end{cases}$$

Obtenemos

$$\int_{u=o} (Au)^+ + \int_{u>o} Au = 0$$

es decir A es <u>T-acretivo en $L^1(\Omega)$</u> **

<u>El operador</u> $A\phi$:

- Sea $A = \Sigma\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ como hemos estudiado.
- Sea ϕ un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$.

Entonces ϕ induce un operador ϕ_p en $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$

$$(9)\quad \begin{cases} D(\phi_p) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\, v \in L^p(\Omega) \ \ y \ \ v(x) \in \phi(u(x)) \ \ ctp\} \\ u(u,v) \in \phi_p \ \ sii \ \ u,v \in L^p(\Omega) \ \ y \ \ v(x) \in \phi(u(x)) \ \ ctp \end{cases}$$

ϕ_p es un operador m-acretivo (m-T-acretivo si $0 \in \phi(0)$).

- Definimos $A\phi$ en $L^p(\Omega)$:

<u>DEFINICION 2</u>:

$$(10)\quad \begin{cases} D((A\phi)_p) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\, v \in L^1(\Omega), \ w \in L^p(\Omega) \ y \\ \qquad\qquad v \in \phi(u) \ ctp, \ Av = w\} \\ \text{entonces se dice que } (u,w) \in (A\phi)_p = A\phi_p \end{cases}$$

Obsérvese que $(A\phi)_1 = A_1 \circ \phi_1$.

Se obtienen los siguientes resultados:

<u>PROPOSICION 3</u>:

1) (Lê [35], §III.1.3) si $0 \in \phi(0)$, ϕ inyectivo, $A\phi_1$ <u>verifica (M_o)</u>

2) $A\phi_1$ es <u>T-acretivo en $L^1(\Omega)$</u>, es decir

$\forall f_i, u_i, w_i \in L^1(\Omega)$, $i=1,2$ tales que

$$(11)\quad \begin{cases} u_i \in \phi(w_i) \\ Au_i + w_i = f_i \end{cases}$$

se tiene

$$(12)\qquad \|(w_1-w_2)^+\|_1 \leq \|(f_1-f_2)^+\|_1$$

<u>Demostración</u>:

- Si $0 \in \phi(0)$, poniendo $\phi = \beta^{-1}$, la T-acretividad de $A\phi_1$ es literalmente la afirmación del Teorema 0.2.A. (Brézis-Strauss [18], Ta.1) pues la ecuación $A\phi(w) + w \ni f$ equivale a $Au + \beta(u) \ni f$ si $\beta = \phi^{-1}$.

- Si $0 \notin \phi(0)$, corregimos el problema para aplicar (1.12). Supongamos que $b \in \beta(a)$. Definimos un nuevo g.m.m. $\overline{\beta}$ como $\overline{\beta}(r) = \beta(r+a)-b$. Así $0 \in \overline{\beta}(0)$.

Poniendo $\overline{f} = f-b$, $\overline{w} = w-b$, $\overline{u} = u-a$, resultan equivalentes

$$Au + w = f, \qquad w \in \beta(u)$$

y

$$A\overline{u} + \overline{w} = \overline{f}, \qquad \overline{w} \in \overline{\beta}(\overline{u})$$

Así, en las hipótesis de (11) afirmamos para la ecuación equivalente que

$$\|(\overline{w}_1-\overline{w}_2)^+\|_1 \leq \|(f_1-f_2)^+\|_1$$

De donde se deduce (12) inmediatamente.

<u>COROLARIO</u>: En las hipôtesis de (12) si $f_1 \leq f_2$ ctp, se obtiene $w_1 \leq w_2$ ctp. (lo cual suele denominarse "teorema de comparación" para la ecuación $A\phi(u) + u \quad f$).

3) Sea $0 \in \phi(0)$. Para toda $j : \mathbb{R} \to |0,\infty)$ convexa, s.c.i., $j(0) = 0$ si $f \in L^1(\Omega)$ es tal que $\int j(f) < \infty$ y $w = (I + A\phi_1)^{-1}f$ se tiene que $\int j(w) \leq \int j(f)$. En particular si $f \in L^p(\Omega)$, $w \in L^p(\Omega)$ y $\|w\|_p \leq \|f\|_p$. (cf. T.0.2A. (3), (4))

IV.2. <u>Resultados de existencia cuando f no es continua.</u>

Comenzamos por el siguiente teorema para $f \in L^\infty(\Omega)$.

<u>TEOREMA 1</u>: Sea β un g.m.m. sobreyectivo de $\mathbb{R}^2$. Entonces para toda $f \in L^\infty(\Omega)$ existen $u \in L^\infty(\Omega)$, $w \in L^\infty(\Omega)$ tales que

$$\begin{cases} Au + w = f & \text{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega \\ w \in \beta(u) & \text{ctp} \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Además $\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\Omega} f$, $\inf_{\Omega} w \leq \inf_{\Omega} f$

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de Brézis-Strauss [18], nota, pg. 574, aproximando nuestro problema por

$$(E\ ) \qquad \varepsilon u_{\varepsilon} + Au_{\varepsilon} + \beta(u_{\varepsilon}) \ni f$$

Dado que $\varepsilon I + A$ es coercivo en $L^1(\Omega)$ podemos aplicar el T$^{\underline{a}}$ 1, pg 566, de Brézis-Strauss [18] (cf. Teorema 0.A) obteniendo la existencia de u_{ε}, $w_{\varepsilon} \in L^1(\Omega)$ tales que

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon u_{\varepsilon} + Au_{\varepsilon} + w_{\varepsilon} = f & \text{ctp} \\ w_{\varepsilon} \in \beta(u_{\varepsilon}) & \text{ctp} \end{cases}$$

Además se tiene que $\|w_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$. Dado que β es sobreyectivo deducimos que $\{u_{\varepsilon}\}$ es un subconjunto acotado en $L^{\infty}(\Omega)$ y, por (13), también $\{Au_{\varepsilon}\}$ lo es. Tomando una sucesión $\varepsilon_n \downarrow 0$ adecuada se puede afirmar que

$$\exists u = \lim u_{\varepsilon_n} \quad \text{en} \quad L^{\infty}\text{-}w^*$$

$$\exists v = \lim Au_{\varepsilon_n} \quad \text{en} \quad L^{\infty}\text{-}w^*$$

Dado que A es obviamente cerrado en estas topologías $Au = v$. Finalmente pasando al límite en (13)

$$w_{\varepsilon} \longrightarrow f - Au \quad \text{en} \quad L^{\infty}\text{-débil-}*$$

Dado que $L^{\infty}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, la proposición 2.5 de Brézis [11] nos permite concluir que $w \in \beta(u)$ ctp, siendo $w = f\text{-}Au$. (ver el detalle de la demostración $w \in \beta(u)$ en [18], pg 574).

La estimación final es consecuencia de la T-acretividad en $L^1(\Omega)$ de $A\beta^{-1}$. En efecto si $\sup f = M$ y $a \in \beta^{-1}(M)$, $\overline{u} = a, \overline{w} = M$ son una solución de (E) para $\overline{f} = M$. Entonces:

$$\|(w-\overline{w})^+\|_1 \leq \|(f-\overline{f})_+\|_1$$

Ahora $f \leq M = \overline{f}$ ctp, implica $w \leq \overline{w} = M$ ctp.

Idéntico razonamiento para $\inf f$ *

COMENTARIO: Con este resultado generalizamos el Th 3 de Brézis-Nirenberg [16] ($T^{\underline{a}}$ 0.D) en el caso de grafos sobreyectivos, admitiendo $f \in L^\infty(\Omega)$.

OBSERVACIONES:

1) Poniendo $\phi = \beta^{-1}$ el Teorema 1 se puede formular así:

"Si ϕ es un g.m.m. tal que $D(\phi) = \mathbb{R}$,

$$R(I + (A\phi)_\infty) = L^\infty(\Omega)".$$

2) Al contrario que en las hipótesis de [18] no es necesario que $0 \in \beta(0)$, utilizando el hecho de que Ω es finito.

3) El Teorema 1 solo utiliza sobre el g.m.m. β el hecho de que $(\beta^{\pm} = \lim\limits_{r \to \pm\infty} \beta(r))$

$$(14) \qquad \beta^- < \inf f, \quad \sup f < \beta^+$$

pudiendo aplicarse a grafos no sobreyectivos, con tal que se verifique (14). En este sentido el Teorema 1 se puede mejorar en el siguiente sentido:

TEOREMA 1': Sea β un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$. Sea $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que existe una descomposición $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in C(\Omega)$ y $f_2 \in L^\infty(\Omega)$ verificando

$$(15) \quad \begin{cases} \beta^+ > \sup f_2 + Pf_1, & \text{ctp} \\ \beta^- < \inf f_2 + Pf_1, & \text{ctp} \end{cases}$$

siendo $P : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ la proyección definida por §0.3. Entonces existen $u \in L^\infty(\Omega)$, $w \in L^\infty(\Omega)$ tales que $w \in \beta(u)$ ctp, $Au+w = f$ ctp. Además se tiene: $\sup w \leq \sup f$, $\inf w \geq \inf f$.

Demostración: Regularizamos f_2 en $f_{2,n} = f_2 * p_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ (cf. 0.1.1.k) Planteamos

$$(E_n) \quad \begin{cases} Au_n + w_n = f_1 + f_{2,n} \\ w_n \in \beta(u_n) \end{cases}$$

Dado que $f_n \equiv f_1 + f_{2,n}$ es continua, en virtud del Tª 0.D se obtienen $u_n, w_n \in L^\infty(\Omega)$, solución de (E_n) puesto que $Pf_n = Pf_{2,n} + Pf_1 \leq \sup f_{2,n} + Pf_1 \leq \sup f_2 + Pf_1 < \beta^+$ y análogamente $Pf_n > \beta^-$.

Estimación sobre u_n:

Dado que f_1 es continua y periódica se pueden hallar (cf. [16], lema 1, pg 2) $v \in C^\infty(\Omega)$, $\zeta \in C^\infty(\Omega) \cap N(A)$ tales que

$$f_1 = Av + \zeta + R$$

Donde $\|R\|_{L^\infty(\Omega)}$ es tan pequeño como se haya deseado.

Sea $\delta > 0$ tal que

$$\begin{cases} \beta^+ > \sup f_2 + Pf_1 + \delta \\ \beta^- < \inf f_2 + Pf_1 - \delta \end{cases}$$

Y tomemos $\|R\|_\infty < \delta/4$.

Tenemos que $Pf_1 = P(Av) + P\zeta + R \geq \zeta \ \|R\|_\infty$, de donde $\beta^+ > \sup f_2 + \zeta + \delta - \delta/4$, $\sup f_2 + \zeta < \beta^+ - \frac{3}{4}\delta$.

Por otra parte escribimos $Au_n+w_n = f_n$ de la forma: $A(u_n-v) + w_n = \zeta + R + f_{2,n} < \beta^+ - \delta/2$. Sea ahora $r > [\beta^{-1}(\beta^+ - \delta/2)]^+ = r_o$ (es decir r es tal que $s \in \beta(r)$ implica $s > \beta^+ - \delta/2$). Sea $E_r = \{x \in \Omega : u_n - v > r + \|v\|_\infty\}$ Multiplicamos $A(u_n-v) + w_n < \beta^+ - \delta/2$ por χ_{E_r} e integramos en Ω. Dado que (cf. Lema 2) $\int_{E_r} A(u_n-v) = o$ se obtiene

$$\int_{E_r} w_n \leq \int_{E_r} (\beta^+ - \delta/2)$$

Debido a la elección de r esta desigualdad solo es posible si $ms(E_r) = 0$. Así pues

$$\sup(u_n-v) \leq [\beta^{-1}(\beta^+ - \delta/2)]^+ + \|v\|_\infty$$

$\{\sup_\Omega u_n\}_n$ esta pues uniformemente acotado superiormente por $r_o + 2\|v\|_\infty$. Un cálculo análogo se aplica a $\{\inf_\Omega u_n\}_n$.

<u>Paso al límite</u>:

Es obvio que $f_{2,n} \to f_2$ en $L^1(\Omega)$; así $f_n \to f$ en $L^1(\Omega)$.

Por acretividad se deduce que $\{w_n\}$ es L^1-Cauchy y por tanto existe $w = \lim w_n$ en $L^1(\Omega)$. Además $\|w_n\|_1 \leq \|f_n\|_1$ implica $\|w\|_1 \leq \|f\|_1$.

El conjunto $\{u_n\}$ es un subconjunto acotado de $L^\infty(\Omega)$, existe pues una subsucesión que converge en L^∞-w*, $u_{n_k} \longrightarrow u$. Como antes A es cerrado en estas topologías, luego $Au = f-w$. Por último el lema 3 de [12] nos permite concluir que $u \in \phi(w)$ ctp, siendo $\phi = \beta^{-1}$.

Las estimaciones de sup w, inf w se realizan como en el Teorema 1.

En realidad se puede demostrar un teorema en la linea del T$^{\underline{a}}$ 1' sin suponer que β es monótona. En efecto el siguiente teorema extiende el T$^{\underline{a}}$ 2' de [16] (cf. T$^{\underline{a}}$ O.D.iii) utilizando una técnica de demostración similar:

<u>TEOREMA 1"</u>: Sea $g \in VB_{loc}(\mathbb{R})$ (localmente de variación acotada), $g \in C(\mathbb{R})$. Sea $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que existe una descomposición $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in C(\Omega)$ y $f_2 \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \limsup\limits_{r \to -\infty} g(r) < P(f_1) + \inf f_2 \\ \liminf\limits_{r \to +\infty} g(r) > P(f_1) + \sup f_2 \end{cases}$$

Entonces existe al menos una solución $u \in L^\infty(\Omega)$ de $Au+g(u) = f$.

<u>Demostración</u>: Comenzamos construyendo sub y supersoluciones.

Sea $\limsup\limits_{r \to -\infty} g(r) = M$. Supongamos $M > -\infty$ (si $M = -\infty$ los cambios a realizar son fáciles).

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $-R$ tal que si $r < -R$ $g(r) < M+\varepsilon$. Construimos un g.m.m. continuo β:

$$\begin{cases} \beta(r) = M + \varepsilon & \text{si} \quad r \leq -R \\ M + \varepsilon + V_g[-R,x] + c(r+R) & \text{si} \quad r > -R \end{cases}$$

($V_g[-R,x] \equiv$ variación de g de $-R$ a x).

Tomamos $c > o$ de forma que $\beta(o) > \sup f$.

Se tiene $\beta(r) \geq g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$.

Planteamos ahora

$$(E_\beta) \quad \begin{cases} Au_1 + w_1 = f \\ w_1 = \beta(u_1) \end{cases}$$

si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño para que $\beta^- < Pf_1 + \inf f_2$ (observese que $\beta^- = M + \varepsilon$), como $\beta^+ > \limsup_{r \to \infty} g(r) > Pf_1 + \sup f_2$, el Teorema 1' nos proporciona $u_1, w_1 \in L^\infty(\Omega)$, solución de (E_β).

Entonces u_1 es una <u>subsolución</u> de $(E\ )$ $Au+g(u) = f$ pues

$$Au_1 + g(u_1) \leq Au_1 + \beta(u_1) = f$$

Ademas dado que (ver Teorema 1') $\sup w_1 \leq \sup f$ y $\beta(0) > \sup f$ <u>$u_1 \leq 0$.</u>

De análoga manera obtenemos una <u>supersolución</u> $u_2 \in L^\infty(\Omega)$, t.q. $Au_2 \in L^\infty(\Omega)$, $Au_2 + g(u_2) \geq f$, <u>$u_2 \geq 0$</u>, $g(u_2) \in L^\infty(\Omega)$.

Utilizamos ahora el esquema de iteración monótona de [ ], th. 2' descomponiendo $g=g_1-g_2$ en el dominio $[\min u_1, \max u_2]$, siendo g_1 y g_2 funciones no decrecientes acotadas y contínuas.

Resolvemos la ecuación

$$Tu \equiv (I + A + g_1)^{-1} (f + u + g_2 u) = u$$

observando que $(I + A + g_1)$ es invertible en L^2 ($A + g_1$ es maximal monótono) y que T conserva el orden. Así u_1 es subsolución implica $Tu_1 \geq u_1$, u_2 es supersolución implica $Tu_2 \geq u_2$, $u_1 \leq u_2$ implica $Tu_1 \leq Tu_2$, ctp luego por iteración obtenemos

$$u_1 \leq \ldots \leq T^n u_1 \leq \ldots \leq T^n u_2 \leq \ldots \leq u_2$$

existen pues los límites monótonos $\underline{u} = \lim \uparrow T^n u_1$ y $\overline{u} = \lim \downarrow T^n u_2$, $u_1 \leq u_1 \leq \overline{u} \leq u_2$. Con los razonamientos usuales se prueba que $\underline{u}$ y $\overline{u}$ son soluciones de (Eg) en $L^\infty(\Omega)$. (Se puede demostrar que $\underline{u}$ es maximal entre las sub y $\overline{u}$ es minimal entre las super).

<u>COROLARIO</u>: Sea $g \in C \cap VB_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $g(\infty) = +\infty$, $g(-\infty) = -\infty$. Entonces para toda $f \in L^\infty(\Omega)$ existe $u \in L^\infty(\Omega)$ solución de $Au + g(u) = f$.

<u>TEOREMA 2</u>: Sea ϕ un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{|\phi(r)|}{|r|} < \infty$$

(lo que implica $D(\phi) = \mathbb{R}$)

Entonces $(A\phi)$ es m-T-acretivo en $L^1(\Omega)$. Más precisamente, $\forall f \in L^1(\Omega)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ existe $w \in L^1(\Omega)$ única y existe $u \in L^1(\Omega)$ tales que

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda Au + w = f & \text{ctp} \\ u \in \phi(u) & \text{ctp} \end{array}\right\}$$

<u>Observación</u>: Este enunciado equivale para $\beta = \phi^{-1}$ a la existencia de solución $u \in L^1(\Omega)$, $Au \in L^1(\Omega)$ de

$$Au + \beta(u) \ni f$$

para toda $f \in L^1(\Omega)$ cuando β es un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ que verifica la condición

$$\liminf_{|r| \to \infty} \frac{|\beta(r)|}{|r|} > 0$$

Demostración: Ya sabemos que $A\phi$ es T-acreitvo en $L^1(\Omega)$. Probemos pues que $R(I + (A\phi)_1) = L^1(\Omega)$:

Sea $f \in L^1(\Omega)$. Mediante una sucesión $\{\rho_n\}$ regularizante obtenemos $f_n = f * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tales que $f_n \to f$ en $L^1(\Omega)$ y $\|f_n\|_1 \leq \|f\|_1$.

Planteamos

$$(P_n) \quad \begin{cases} Au_n + w_n = f_n \\ w_n \in \beta(u_n) \end{cases}$$

El T$^{\underline{a}}$ O.D (th. 3 de [16]) nos asegura que existen $u_n, w_n \in L^\infty(\Omega)$ solución de (P_n).

Además se verifican las relaciones (ver Prop. IV.3)

$$\|w_n\|_1 \leq \|f_n\|_1 \leq \|f\|_1$$

$$\|w_n - w_m\|_1 \leq \|f_n - f_m\|_1 \longrightarrow 0$$

Así pues existe $w \in L^1(\Omega)$ tal que $\lim w_n = w$ en $L^1(\Omega)$. Se tiene $\|w\|_1 \leq \|f\|_1$.

Se puede tomar una subsucesión $\{w_{n_k}\}$ de $\{w_n\}$ tal que exista $g \in L^1(\Omega)$ verificando $|w_{n_k}(x)| \leq g(x)$ ctp de Ω. (ver [ ], T$^{\underline{a}}$ 3.11).

Como $\limsup_{|r| \to \infty} \frac{|\phi(r)|}{|r|} < \infty$ equivale a

$$\exists\, C_1, C_2 > 0 \quad \text{tales que} \quad |\phi(r)| < C_1|r| + C_2$$

Con lo que

$$|u_{n_k}(x)| \leq C_1|w_{n_k}(x)| + C_2 \leq C_1|g(x)| + C_2 \in L^1(\Omega)$$

Así pues $\{u_{n_k}\}$ es un conjunto uniformemente integrable de $L^1(\Omega)$ (cf. 0.1.1.b') y por tanto secuencialmente debilmente compacto. Por tanto existe una subsucesión $\{n_k\}$ y una función $u \in L^1(\Omega)$ de modo que

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{en} \quad L^1(\Omega) \quad \text{débil}$$

A partir del lema 3 de [ ] deducimos que

$$u \in \beta(w) \quad \text{ctp}$$

Además
$$\left.\begin{array}{l} u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{en} \quad L^1_w \\ Au_n \longrightarrow f-w \quad \text{en} \quad L^1 \\ A \text{ cerrado débil-fuerte} \end{array}\right\} \Longrightarrow Au = f-w$$

**

<u>COROLARIO</u>: La ecuación

$$\Sigma\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + |u|^m u = f, \qquad m > 0$$

tiene soluciones (únicas) en $L^1(\Omega)$, $\forall f \in L^1(\Omega)$.

<u>TEOREMA 3</u>: Sea ϕ un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(C_p) \qquad p,\ 1 \leq p < \infty \quad \text{y} \quad \limsup_{|r| \to \infty} \frac{|\phi(r)|}{|r|^p} < \infty$$

Entonces $R(I + (A\phi)_1) \supset L^p(\Omega)$.

Precisamente:

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \exists\ w \in L^p(\Omega) \text{ única},\ \exists\, u \in L^1(\Omega) \text{ tales que}$$

$$\begin{cases} Au + w = f & \text{ctp} \\ u \in \phi(w) & \text{ctp} \end{cases}$$

OBSERVACION: Este enunciado equivale, para $\beta = \phi^{-1}$, a la existencia de solución $u \in L^1(\Omega)$ con $Au \in L^p(\Omega)$ de la ecuación

$$Au + \beta(u) \ni f$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$ cuando β es un g.m.m. de $\mathbb{R}^2$ que verifica la condición

$$\liminf_{|r| \to \infty} \frac{|\beta(r)|^p}{|r|} > 0$$

Demostración: Sea $f \in L^p(\Omega)$. Entonces $|f|^p \in L^1(\Omega)$.

Utilizaremos el siguiente resultado sobre espacios de Orlicz (ver Lè [35], Props. I.1.1 y I.1.3).

PROPOSICION A: Sea $u \in L^1(\Omega)$. Existe entonces una función $p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, concava, $p(0) = 0$, $\lim_{s\to\infty} p(s) = \infty$ y u pertenece a la clase de Orlicz $C_\Phi(\Omega)$ asociada a la función de Young $\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(s)ds$.

Además Φ verifica la condición Δ_2, por lo que $C_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ es el "espacio de Orlicz", y $L_\Phi(\Omega) \subset L^1(\Omega)$*

Designamos por Ψ la función $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\Psi(r) = \Phi(|r|^p), \quad 1 \leq p < \infty$$

Ψ es una función de Young perteneciente a la clase Δ_2, como es evidente comprobar. Además $L_\Psi(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Aplicando a nuestra $f \in L^p(\Omega)$ tenemos $|f|^p \in L^1(\Omega)$, luego existe Φ como hemos dicho tal que $|f|^p \in L_\Phi(\Omega)$, o lo que es lo mismo $f \in L_\Psi(\Omega)$.

Como anteriormente regularizamos f mediante una sucesión $\{\rho_n\}$, $\rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\rho_n \to \delta$. Así

$$f_n = \rho_n * f \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad f_n \to f \quad \text{en} \quad L^p(\Omega)$$

Pero más aún (ver Kufner [33], §3.8.1), si $f \in L_\Psi(\Omega)$, $f_n \in L_\Psi(\Omega)$, $f_n \to f$ en $L_\Psi(\Omega)$ y se tiene $\|f_n\|_{L_\Psi(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_\Psi(\Omega)}$. Entonces (Kufner [33], §3.10) $f_n \to f$ en Ψ-media y las cantidades

$$\rho(f_n,\Psi) = \int_\Omega \Psi(f_n).dx$$

están acotadas.

Resolvemos ahora (T$^{\underline{a}}$ O.D.).

$$\left.\begin{array}{r} Au_n + w_n = f_n \quad \text{ctp} \\ u_n \in \phi(w_n) \quad \text{ctp} \end{array}\right\}$$

Según el Teorema O.A, iii) tenemos que

$$\rho(w_n;\Psi) \leq \rho(f_n;\Psi) \quad \left(\int_\Omega \Psi(w_n).dx \leq \int_\Omega \Psi(f_n)dx\right)$$

Y $\quad \|w_n - w_m\|_1 \leq \|f_n - f_m\|_1$.

Por lo que $\quad w = \lim w_n$ en $L^1(\Omega)$ y $\|w\|_1 \leq \|f\|_1$.

- Veamos que los $\{u_n\}$ forman un conjunto <u>uniformemente integrable</u> de $L^1(\Omega)$:

En efecto, sea $E \subset \Omega$.

De (C_p) deducimos que existen constantes $C_1 > 0$ y C_2 tales que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$|\phi(r)| \leq C_1 |r|^p + C_2$$

Además, dado que la función p de la Prop. A es tal que $p(\infty) = \infty$, para todo $A > o$, existe $R > o$ tal que

$$\text{si} \quad |r| > R, \qquad \Phi(r) \geq A|r|$$

Entonces $(|E| = \text{ms } E)$

$$\int_E |u_n| = \int_E |\phi(w_n)| \leq C_1 \int_E |w_n|^p + C_2|E|$$

Y

$$\int_E |w_n|^p = \int_{E\cap\{|w_n|^p \leq R\}} |w_n|^p + \int_{E\cap\{|w_n|^p > R\}} |w_n|^p \leq$$

$$\leq R.|E| + \frac{1}{A} \int_E \Phi(|w_n|^p) = R.|E| + A^{-1}. \int \Phi(w_n),$$

y esta última expresión esta uniformemente acotada. Así deducimos que

$$\text{si} \quad \varepsilon > 0, \quad \text{existe} \quad \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |E| < \delta \Longrightarrow \int_E |u_n| < \varepsilon, \text{ cqd}$$

Podemos pues pasar al límite en $L^1(\Omega)$-w en una subsución $\{u_{n_k}\}$: $\lim u_{n_k} = u$ en $L^1(\Omega)_w$

Como en el TEOREMA 2 deducimos que

$$\beta(u) \ni w \quad \text{ctp}$$

$$\text{y} \qquad Au = f-w \quad \text{ctp} \quad *$$

<u>COROLARIO</u>: La ecuación $\Sigma\, a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (|u|^m u) + u = f$, $m > 0$ tiene solución (única) en $L^1(\Omega)$ para toda $f \in L^m(\Omega)$.

<u>IV.3. Sobre la unicidad de soluciones</u>

La acretividad del operador $A\beta^{-1}$ en $L^1(\Omega)$ garantiza la <u>unicidad de w</u> en el problema

$$(E_1) \qquad \begin{cases} Au + w \quad f & \text{ctp de } \Omega \\ w \in \beta(u) & \text{ctp de } \Omega \\ u,w,f \in L^1(\Omega) \end{cases}$$

En efecto, si (u_i, w_i) son la solución correspondiente a f_i, $i=1,2$, la acretividad de $A\beta^{-1}$ en L^1 equivale a

$$\|w_1 - w_2\|_1 \leq \|f_1 - f_2\|_1$$

De donde $f_1 = f_2$ implica $w_1 = w_2$.

En cuanto a la <u>unicidad de u</u> es evidente que si β es estrictamente creciente (i.e. β^{-1} es contínua), u es única, dado que $w \in \beta(u)$ ctp de Ω.

De no cumplirse esta condición puede aparecer no-unicidad de soluciones. Para hacer el estudio de este fenómeno supondremos en adelante que <u>los coeficientes a_i</u> del operador A son constantes reales <u>linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$</u>.

Supongamos que $u_1, u_2 \in L^1(\Omega)$ son dos soluciones de (E_1) correspondientes a una misma $f \in L^1(\Omega)$. Como hemos visto $w_1 = w_2 = w$. Demostramos la siguiente proposición:

<u>PROPOSICION 4</u>: Sean $u_1, u_2 \in L^1(\Omega)$ dos soluciones distintas de (E_1) correspondientes a una misma $f \in L^1(\Omega)$. Sean $\{a_i\}_{i=1,...}$ un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$.

Entonces

i) El conjunto total de soluciones de (E_1) es de la forma

$$\{u_\lambda = u_1 + \lambda\}_{\lambda \in I}$$

donde λ recorre un intervalo cerrado, $0 \in I \subset \mathbb{R}$.
Existe pues una constante c tal que $u_2-u_1 = c$.

ii) El grafo de β ha de contener segmentos horizontales, cuyas ordenadas son los posibles valores de w.

iii) $w(x) = w_1(x) = w_2(x) = \beta(u_2(x)) \cap \beta(u_1(x))$ ctp de Ω es constante y además $w = \frac{1}{|\Omega|} \int f$, donde $|\Omega|$ es la medida de Ω.

Demostración: Tenemos
$$\left.\begin{array}{l} Au_1 + w_1 = f \\ Au_2 + w_2 = f \end{array}\right\}$$

Como hemos visto, $w_1 = w_2 = w$. Así pues:

$$A(u_1-u_2) = 0$$

En virtud del siguiente lema existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u_1-u_2 = c$.

LEMA 4: Si $u \in L^1(\Omega)$ es tal que $Au_1 = 0$ y si los coeficientes a_i son l.ind. sobre $\mathbb{Q}$, u es constante (c.t.p).

Demostración del Lema: Si $u \in C^1(\Omega)$ $[\Longrightarrow$ periódica!$]$ el resultado es inmediato pues u tiene derivada nula a lo largo de la trayectoria de dirección $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ del toro, que es densa; así pues u es constante.

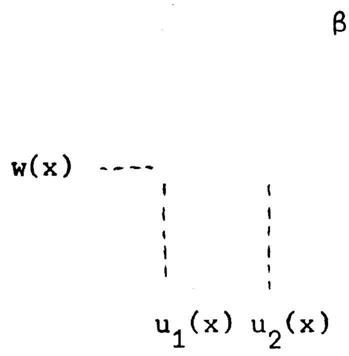
En general, si $u \in L^1(\Omega)$, regularizamos u. Así

$$u_n = u * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega), \quad u_n \to u \quad \text{en } L^1(\Omega)$$

Y $$Au_n = Au * \rho_n = 0$$

Entonces $u_n = c_n$, constante y $u = \lim\limits_{L^1(\Omega)} c_n = c$ *

Supongamos por comodidad que $u_2 - u_1 = c > o$.



Entonces ctp. $w_1(x) = w_2(x) = w(x)$, $w(x) \in \beta(u,(x))$, $w(x) \in \beta(u_2(x))$, $u_2(x) = u_1(x) + c$, lo cual implica que grafo (β) tiene un segmento horizontal de ordenada $w(x)$ cuyas abscisas contienen el intervalo $[u_1(x), u_2(x)]$.

Es evidente que si ponemos

$$u_\lambda = u_1 + \lambda, \qquad 0 \leq \lambda \leq c$$

se tiene

$$\begin{cases} u_\lambda \in L^1(\Omega) \\ Au_\lambda = Au_1 \\ \beta(u_\lambda) \ni w \quad \text{ctp} \end{cases}$$

Luego u_λ es solución de (P_1). Esto demuestra que las λ del conjunto de soluciones forman un intervalo. El hecho de que este intervalo sea cerrado es consecuencia inmediata de que los segmentos horizontales de β lo son (β es un g.m.m.).

Obsérvese que si $u(x)$ pertenece a un extremo del segmento horizontal es posible que $\beta(u(x)) \ni w(x)$ pero $\beta(u(x)) \neq \{w(x)\}$. En todo caso es obvio que

$$w(x) = \beta(u_2(x)) \cap \beta(u_1(x)) \quad \text{ctp}$$

Finalmente w resulta constante en virtud del lema A.9 (ver apéndice), que se aplica en las condiciones presentes.

<u>COROLARIO</u>: Para que el problema (E_1) tenga más de una solución es preciso que $|\Omega|^{-1} \int f = k$ sea la ordenada de un seg

mento horizontal del grafo β. Entonces el problema es equivalente a hallar $u \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Au = f-k \\ R(u) \subset \beta^{-1}(k) \end{cases} \qquad (R(u) = \text{rango de } u)$$

Toda otra solución se obtiene como $\overline{u} = u + c$ con tal que $R(u+c) \subset \beta^{-1}(k)$.

A P E N D I C E

Formulamos en este Apéndice una serie de lemas técnicos que utilizamos en los capítulos anteriores. Estos resultados completan en diversos aspectos que nos han sido útiles el apéndice de [9] (abreviado A(BBC)), donde se realiza un profundo estudio de la ecuación $-\Delta u = f$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, estudio del cual hacemos nosotros extenso uso en la presente memoria. Recordamos a efectos de notación algunos detalles de A(BCC):

Los espacios $M^p(\mathbb{R}^N)$ de Marcinkiewicz permiten obtener soluciones de $-\Delta u = f$ por convolución con las soluciones fundamentales, $E_N(x)$ del operador $-\Delta$:

. si $N \geq 3$, $E_N(x) = \dfrac{1}{(N-2)b_N|x|^{N-2}}$

. si $N = 2$, $E_2(x) = \dfrac{1}{2\pi} \lg \dfrac{1}{|x|}$

. si $N = 1$, $E_1(x) = -\dfrac{1}{2} |x|$

donde $b_N = \text{ms } B_1(0) = \text{ms } \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}$.

$E_N \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $-\Delta E_N = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. si $N \geq 3$, $E_N \in M^{N/N-2}(\mathbb{R}^N)$; si $N \geq 2$, $|\text{grad } E_N| \in M^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)$; $|\text{grad } E_1| \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Resultados relacionados con A-BBC se recogen en A.1, A.2, A.3.

En la sección A.4 se estudian ciertos resultados para medidas acotadas.

En la sección A.5 se prueban ciertos resultados para un operador diferencial lineal de primer orden utilizados en el

Cap. IV para establecer unicidad de soluciones.

A.1. Sobre $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^2$

En A-BCC se apunta que $E_2 \in BMO(\mathbb{R}^2)$, la funciones de variación media acotada y se establece que $|\text{grad } E_2| \in M^2(\mathbb{R}^2)$. $-\Delta E_2 = \delta$. Además toda solución u de $-\Delta u = f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y que cumpla diversas condiciones que A-BBC cita es tal que $\text{grad } u = \text{grad } E_2 * f$, $|\text{grad } u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$ y $\|\text{grd } u\|_{M^2(\mathbb{R}^2)} \leq d. \|\Delta u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$,

$d = \|\text{grad } E_2\|_{M^2(\mathbb{R}^2)}$.

Completamos esta información estudiando el caso en que $f \in L^1_o(\mathbb{R}^2)$:

- Observamos que si $f \in L^p_o(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$, $r \geq 1$,

$$f * g \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

(la demostración no varía sustancialmente respecto al caso normal).

- Sabemos que $E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$ y que $|\text{grd } E_2| = \frac{1}{2\pi x} \in M^2(\mathbb{R}^2) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)$ $\forall q$, $1 \leq q < 2$, con inclusión contínua (cf. A.2-BBC).

Demostramos el siguiente Lema

LEMA A.1: Sean $f \in L^1_o(\mathbb{R}^2)$

i) $u = E_2 * f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $\forall p : 1 \leq p < \infty$.

ii) $\text{grd } u = \text{grd } E_2 * f \in M^2(\mathbb{R}^2) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq q < 2$

iii) Comportamiento en el infinito:

Si $\int f = c$.

$$(1) \qquad u(x) - \frac{c}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} = 0\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

de forma que u converge uniformemente a cero en el infinito sii $\int f = 0$.

Además en este caso $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $\forall p > 2$, $p < \infty$

iv) si $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, u es continua y $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Si además $\int f = 0$, u es acotada y $|\text{grd } u| \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Demostración: En ii) $\text{grad}\,(E_2 * f) = \text{grad}(E_2) * f$ es una propiedad general de las convoluciones.

iii) Sea K el soporte de f, $d = \sup\{|\xi| : \xi \in K\} < \infty$ $r = |x-\xi|$ y $s = r-|x|$. Entonces $|s| \leq d$ y

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_K \lg \frac{1}{r} \,.\, f(\xi)d\xi$$

$$\frac{c}{2\pi} \lg \frac{1}{|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_K \lg \frac{1}{|x|} \,.\, f(\xi)d\xi$$

de donde restando

$$u(x) - \frac{c}{2\pi} \lg \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{2\pi} \int_K \lg \frac{r}{|x|} \,.\, f(\xi)d\xi$$

Para estimar el 2° miembro, observamos que $\lg(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha)$. Así, $\forall \varepsilon > o$ $\exists$ $R > o$ tales que si $|x| \geq R$

$$\left|\lg\left(\frac{r}{|x|}\right)\right| = \left|\lg\left(1 + \frac{s}{|x|}\right)\right| \leq (1+\varepsilon) \frac{d}{|x|}$$

y así

$$(1') \qquad \left|u(x) - \frac{c}{2\pi} \lg \frac{1}{|x|}\right| \leq \frac{(1+\varepsilon)d\, \|f\|_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|x|}$$

iv) si $f \in L^p_o(\mathbb{R}^2)$, $p > 1$, dado que $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^2)$, entonces en virtud de conocidos resultados de regularidad $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y en virtud de las inclusiones de Sobolev, u es contínua.

Si además $\int f = o$, u es acotada dado que es contínua y tiende a cero en el infinito uniformemente.
$u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $\Delta u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ implican $|grd\ u| \in L^2(\mathbb{R}^2)$ según A.15-BBC*

OBSERVACIONES:

1) El caso $N \geq 3$ es conocido y esencialmente más fácil:

- En A-BCC se demuestra que para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $u = E_N * f \in M^{N/N-2}(\mathbb{R}^N)$, $\text{grad } u = \text{grad } E_N * f \in M^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)$.

- B [7] utiliza el hecho de que si $f \in L^1_o(\mathbb{R}^N)$ $u = O(\frac{1}{|x|^{N-2}})$, sin necesidad de imponer $\int f = 0$, dado que $E_N = O(\frac{1}{|x|^{N-2}})$. Esto simplifica muchos cálculos para $N \geq 3$.

- u continua exige $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p > N/2$ y $f \in L^p_o(\mathbb{R}^N)$, $p > N/2$ implica u acotada *

2) Para $N = 1$, es fácil demostrar que:

i) $\forall f \in L^1$ existe $u \in C^1$ solución de $-u'' = f$ ctp Además u' siempre es de la forma $u' = v+c$ siendo c constante y

$$(2) \qquad v(x) = (E_1' * f)(x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty f - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x f; \quad 2\|v\|_\infty \leq \|f\|_1$$

La diferencia entre dos soluciones u_1 y u_2 es pues de la forma $ax + b$, de forma que toda solución es de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Se observa que $v(\pm\infty) = 0$ sii $\int f = 0$.

ii) si $f \in L_o^1(\mathbb{R})$, $u_1 = -\frac{|x|}{2} * f$ es una solución tal que

$$(3) \qquad \left|u(x) + \frac{|x|}{2} \int_{\mathbb{R}} f\right| \leq \frac{d}{2} \|f\|_1$$

Se deduce que u_1 es acotada sii $\int f = 0$ y que u_1 es la única posible solución acotada *

A.2. Una desigualdad integral

En el estudio del comportamiento en el infinito de las soluciones de $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ comparando con soluciones radiales es fundamental el

LEMA A.2: Dado $R_o > 0$, y siendo $\Omega_o = \Omega^{R_o} = [|x| > R_o]$, sea u una función tal que

$$u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_o), \quad |\nabla u| \in M^2(\Omega_o), \quad \Delta u \in M^+(\Omega_o)$$

supongamos además que existe un $k > 0$ tal que $ms\,[|u| > k] < \infty$.

Entonces para todos los anillos A_i, $i=1,2$, de radio máximo R_i y espesor (diferencia de radios) 1, tales que

$$R_2 - R_1 = L > 0, \quad R_1 - 1 > R_o$$

y para todo $p \in P$, $p \geq 0$, con $j(r) = \int_0^r p(s)ds$, $r \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{\Omega^{R_2}} |grd\ u|^2\ p'(u) \leq \frac{1}{L1} \left(\int_{A_2} j(u) - \int_{A_1} j(u)\right)$$

Demostración: Sea $R > R_o$ y sea $\{\rho_n\}$ una sucesión regularizante. Tomemos n tan grande que $\frac{1}{n} < R-R_o$ y $\sup \rho_n \subset B_{R-R_o}(o)$. Entonces $u_n = u * \rho_n \in C^\infty(\Omega^R)$, $u_n \to u$ en $W^{1,1}_{loc}(\Omega^R)$ y, pasando a una subsucesión adecuada si es preciso, existe convergencia c.t.p.

Análogamente, denominando $f = \Delta u$, $f_n = \Delta u_n = \Delta u * \rho_n \in C^\infty(\Omega^R)$ y f_n converge a f en la topología débil $\sigma(M, C_\bullet)$ sobre Ω^R. Además $\|f_n\|_{L^1(\Omega^R)} \leq \|f\|_{M(\Omega^{R_o})}$.

Para n como antes podemos escribir $\forall n >> 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $(r = |x|)$

$$\int_{S_R} p(u_n) \cdot \frac{\partial u_n}{\partial r} \cdot \zeta_N = \int_{\Omega^R} |\text{grd } u_n|^2 \, p'(u_n)\zeta_N + \int_{\Omega^R} \Delta u_n \cdot p(u_n) \cdot \zeta_N$$

$$+ \int \text{grd } u_n \cdot \text{grd } \zeta_N \cdot p(u_n).$$

Ahora bien, $\Delta u \in M^+(\Omega^{R_o})$ implica $\Delta u_n \in M^+(\Omega^R)$, luego

$$\int_{\Omega^R} \Delta u_n \cdot p(u_n) \cdot \zeta_N \geq 0$$

Llegamos pues una primera desigualdad:

$$(I_1) \qquad \int_{S_R} p(u_n) \cdot \frac{\partial u_n}{\partial r} \cdot \zeta_N \geq \int_{\Omega^R} |\text{grd } u_n|^2 \, p'(u_n)\zeta_N +$$

$$+ \int_{\Omega^R} \text{grd } u_n \cdot \text{grd } \zeta_N \cdot p(u_n)$$

Integramos ahora (I_1) respecto a R de r_1 a r_2, $r_2 - r_1 = 1 > 0$, $r_1 > R_o$. Tomamos $N > r_2$ de forma que $\text{grd } \zeta_N = 0$ en el anillo $A[r_1, r_2] = [r_1 \leq |x| \leq r_2]$, con lo que es constante el último término de (I_1). Entonces para $n>>0$:

$$\int_{A[r_1,r_2]} p(u_n) \cdot \frac{\partial u_n}{\partial r} \cdot \zeta_N \geq L \int_{\Omega^{r_2}} |\text{grd } u_n|^2 \; p'(u_n)\zeta_N +$$

$$+ L \int_{\Omega^{r_2}} \text{grd } u_n \cdot \text{grd } \zeta_N \cdot p(u_n)$$

Observemos que en $A[r_1,r_2]$, $\zeta_N \equiv 1$ y que $\frac{\partial}{\partial r}[j \circ u_n] = p(u_n) \cdot \frac{\partial u_n}{\partial r}$. Podemos pues integrar por partes el primer miembro de la desigualdad anterior:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1}^{r_2} r dr . (j(u_n))'_r = \int_0^{2\pi} d\theta . [r_2 \; j(u_n(r_2,\theta)) -$$

$$- r_1 \; j(u_n(r_1,\theta)) - \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1}^{r_2} dr . j(u_n(r,\theta))$$

Dado que $j \geq 0$, suprimiendo el último têrmino que es negativo tenemos:

$$(I_2) \qquad \frac{1}{L} \left(\int_{S_{r_2}} j(u_n) - \int_{S_{r_1}} j(u_n) \right) \geq \int_{\Omega^{r_2}} |\text{grd } u_n|^2 . p'(u_n) . \zeta_N +$$

$$+ \int_{\Omega^{r_2}} \text{grd } u_n \cdot \text{grd } \zeta_N \cdot p(u_n)$$

Recordemos que $r_2 = r_1 + L$. Hacemos variar r_1 de $R_1 - 1 > R_o$ a R_1 (con lo cual r_2 varîa de R_2-1 a $R_2 = R_1+L$). Entonces si $N \geq R_2$ y n es suficientemente grande, integramos respecto a r_1 entre los lîmites expuestos y obtenemos:

$$\frac{1}{L} \left(\int_{A_2} j(u_n) - \int_{A_1} j(u_n) \right) \geq 1 \int_{\Omega^{R_2}} |\text{grd } u_n|^2 \; p'(u_n)\zeta_N +$$

$$+ 1 \int_{\Omega^{R_2}} \text{grd } u_n \cdot \text{grd } \zeta_N \cdot p(u_n)$$

o sea

$$(I_3) \qquad \frac{1}{L\ 1}\left(\int_{A_2} j(u_n) - \int_{A_1} j(u_1)\right) \geq \int_{\Omega^{R_2}} |\mathrm{grd}\ u_n|^2 . p'(u_n).\zeta_N +$$

$$+ \int_{\Omega^{R_1}} \mathrm{grd}\ u_n . \mathrm{grd}\ \zeta_N \ .\ p(u_n)$$

Sobre esta tercera desigualdad podemos efectuar el paso al límite en n y N:

Dado que $p \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, j es una función lipschitziana y así $j(u_n) \to j(u)$ en L^1_{loc} (y c.t.p. pasando a una subsucesión adecuada). También $p(u_n) \to p(u)$ c.t.p. (en el mismo sentido). Como $\mathrm{grd}\ u_n \to \mathrm{grd}\ u$ en L^1_{loc}, en virtud del Lema de Fatou, se obtiene en el límite de (I_3) que

$$|\mathrm{grd}\ u|^2\ p'(u) \in L^1_{loc}(\Omega^{R_2}),$$

y que

$$\frac{1}{L\ 1}\left(\int_{A_2} j(u) - \int_{A_1} j(u)\right) \geq \int_{\Omega^{R_2}} |\mathrm{grd}\ u|^2\ p'(u)\zeta_N +$$

$$+ \int_{\Omega^R} \mathrm{grd}\ u\ .\ \mathrm{grd}\ \zeta_N\ .\ p(u)$$

Hagamos ahora el paso $N \to \infty$. El razonamiento de BBC [9], Lema A.13, pg 553, se aplica palabra por palabra aquí con solo sustituir $M^2(\mathbb{R}^2)$ por $M^2(\Omega^{R_2})$ resultando que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega^{R_2}} \mathrm{grd}\ u\ .\ \mathrm{grd}\ \zeta_N\ .\ p(u) = 0$$

Así, por convergencia monótona:

$$\int_{\Omega^{R_2}} |\mathrm{grd}\ u|^2\ .\ p'(u) \leq \frac{1}{L\ 1}\left(\int_{A_2} j(u) - \int_{A_1} j(u)\right) *$$

A.3. Desigualdades tipo Green

En la demostración de la existencia de soluciones acotadas en el infinito utilizamos esta versión del Lema A.13-BBC que se generaliza para el caso en que el dominio es el complementario de una bola:

LEMA A.3: Sea $\Omega = \Omega^R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > R\}$, $R > 0$ y $S = \partial\Omega$

Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $|grd\ u| \in M^2(\Omega)$, $\Delta u \in L^1(\Omega)$ y además $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Entonces para todo $p \in P$, $p'(u)\ |grd\ u|^2 \in L^1(\Omega)$; en particular $|grd\ u| \in L^2(\Omega \cap [|u| \leq \lambda])$, para todo $\lambda > 0$.

Si ademas existe un $k > 0$ tal que $ms\ \{x \in \Omega^R : |u| > k\} < \infty$

$$\int_\Omega p'(u).|grd\ u|^2 + \int_\Omega \Delta u.p(u) \leq \int_S \frac{\partial u}{\partial n} . p(u) \quad \forall p \in P$$

En particular

$$\int_\Omega \Delta u = \int_S \frac{\partial u}{\partial n}$$

Demostración: Sean $\Omega_n = \Omega^{R+\frac{1}{n}} = \{x \in \mathbb{R}^2\ |\ |x| > R + \frac{1}{n}\}$ y $S_n = \partial\Omega_n$

Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión regularizante, $\rho_n \in \mathcal{D}$, $\rho_n \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ $supp(\rho_n) \subset B_{1/n}(0)$. Así si $u_n = u * \rho_n \in C^\infty(\Omega_n)$, $u_n \to u$ en $W^{1,1}_{loc}(\Omega_N)$, ctp. (pasando a una subsucesión si es preciso). Más aún $u_n \to u$ en C^1 de cada bola subconjunto de Ω_N. Sea $f = -\Delta u$. Entonces $f_n = f * \rho_n = -\Delta u_n$ y $f_n \to f$ en $L^1(\Omega_N)$ siendo N un entero fijo.

Sean $\zeta \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$ y $p \in P$. Entonces para todo $n \geq N$

$$\int_\Omega p'(u_n).|grd\ u_n|^2 \zeta = \int_{\Omega_N} f_n\ p(u_n)\zeta - \int_{\Omega_N} p(u_n) grd\ u_n\ grd\ \zeta + \int_{S_N} p(u_n)\ \frac{\partial u_n}{\partial r} . \zeta$$

Hagamos $n \to \infty$:

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\Omega_N} p'(u_n)\, |\mathrm{grd}\ u_n|^2 = \int_{\Omega_N} f.p(u) -$$

$$- \int_{\Omega_N} p(u)\mathrm{grd}\ u\ \mathrm{grd}\ \zeta + \int_{S_N} p(u) \frac{\partial u}{\partial r} . \zeta$$

De aqui, utilizando Fatou, se deduce que

$p'(u)\, |\mathrm{grad}\ u|^2 \in L^1_{loc}(\Omega_N)$ y

$$\int_{\Omega_N} p'(u)\, |\mathrm{grd}\ u|^2 \zeta \leq \int_{\Omega_N} f.p(u)\zeta - \int_{\Omega_N} p(u)\mathrm{grad}\ u\ \mathrm{grad}\ \zeta +$$

$$+ \int_{S_N} p(u) \frac{\partial u}{\partial r} \zeta$$

Haciendo $N \to \infty$, $\bigcup \Omega_N = \Omega$ y

$$\int_{\Omega} p'(u)\, |\mathrm{grad}\ u|^2 \zeta \leq \int_{\Omega} f.p(u)\zeta - \int_{\Omega} p(u)\mathrm{grd}\ u\ \mathrm{grd}\ \zeta +$$

$$+ \int_{S} p(u) \frac{\partial u}{\partial r} \zeta$$

Es aquî donde utilizamos $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Ahora hacemos como en A.13-BBC, haciendo $\zeta = \zeta_n(x) = \zeta_o(x/n)$ y $X_n = \int_{\Omega} p(u)\ \mathrm{grd}\ u.\mathrm{grd}\ \zeta_n$. Como allî se deduce que X_n permanece acotado cuando $n \to \infty$ y si se cumple la ûl tima condición del enunciado, $X_n \to 0$. Además como $\zeta_n \uparrow 1$,

$$\int_{\Omega} f\ p(u)\zeta_n \to \int_{\Omega} f\ p(u)$$

$$\int_{S} \frac{\partial u}{\partial r}\, p(u)\ \zeta_n \to \int_{S} \frac{\partial u}{\partial r}\, p(u)$$

Con lo que si $X_n \to 0$

$$\int_{\Omega} p'(u)\, |\mathrm{grd}\ u|^2 \leq \int_{\Omega} f\ p(u) + \int_{S} \frac{\partial u}{\partial r} . p(u)$$

Finalmente, si $p = \pm 1$ se obtiene

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{S} \frac{\partial u}{\partial n}$$

OBSERVACIONES:

1) La condición $u \in C^1(\overline{\Omega})$ es solo utilizada en la afirmación

$$\lim_{N \to \infty} \int_{S_N} p(u) \frac{\partial u}{\partial r} \zeta = \int_S p(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \zeta$$

Si queremos afinar el lema, podemos sustituirla por $\underline{u \in C^1(A)}$, A el anillo $[R \le |x| \le R']$ para un $R' > R$.

2) Ω puede ser el complemento de cualquier convexo compacto de $\mathbb{R}^N$ sin cambiar la demostración en nada esencial,

3) Si tomamos $p \in P$ tal que $\underline{p(r) = 0 \text{ para } r \le 0}$ podemos sustituir $u \in C^1(\overline{\Omega})$ por $u \le 0$ en A, el anillo antes citado de radios R y $R' > R$.

Entonces el término en el borde se anula en las aproximaciones y tenemos

$$\int_\Omega p'(u)\, |\text{grd } u|^2 + \int_\Omega \Delta u . p(u) \le 0$$

COROLARIO: Si con hipótesis tales que el lema A.3 sea cierto, además $u \in L^\infty(\Omega)$, se obtiene $|\text{grd } u| \in L^2(\Omega)$ y

$$\|\text{grd } u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|\Delta u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^1(S)} \right)$$

Demostración: Tomar $p(r) = r$ si $|r| \le \|u\|_\infty$ $p(r) = \|u\|_\infty \text{sign}(r)$ si $|r| > \|u\|_\infty$ En realidad las hipótesis del Corolario se pueden rebajar haciendo una demostración directa, que generaliza el Lema A.15 de BBC para Ω.

LEMA A.4: Sean Ω y S como en A.3 y $u \in L^{\infty}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\Delta u \in L^1(\Omega)$.

Entonces $|\text{grd } u| \in L^2(\Omega)$ y se tiene

$$\|\text{grd } u\|^2_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty} (\|\Delta u\|_{L^1} + C\|u\|_{L^\infty}) +$$

$$+ \|u\|_{L^\infty(S)} \|\text{grd } u\|_{L^1(S)} .$$

Demostración:

Sea $u \in C^2(\Omega)$; si $\zeta \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$ se tiene

$$\int_\Omega \Delta u . u\zeta = \int_S \frac{\partial u}{\partial r} \zeta - \int_\Omega |\text{grd } u|^2 \zeta - \int_\Omega u \text{ grd } u \text{ grd } \zeta$$

$$= \int_S \frac{\partial u}{\partial r} u\zeta - \int_\Omega |\text{grd } u|^2 \zeta - \int_S u^2/2 . \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \int_\Omega u^2/2 . \Delta\zeta_n$$

Entonces:

$$\int_\Omega |\text{grd } u|^2 \zeta = -\int_\Omega \Delta u . u\zeta + \int_\Omega \frac{u^2}{2} \Delta\zeta_n + \int_S \frac{\partial u}{\partial r} u\zeta - \int_S \frac{u^2}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial r}$$

Poniendo $\zeta = \zeta_n$:

i) $\sup (\text{grad } \zeta_n) \subset [n \leq |x| \leq 2n]$

luego si $n \to \infty$, $\displaystyle\int_S \frac{\partial \zeta_n}{\partial r} . \frac{u^2}{2} \longrightarrow 0$

ii) $\|\Delta\zeta_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\Delta\zeta_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$

Con esto llegamos para $n >> 0$

$$\int_\Omega |\text{grd } u|^2 \zeta_n \leq \frac{1}{2} \|u\|^2_\infty \|\Delta\zeta_0\|_1 + \|\Delta u\|_1 \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_{L^1(S)} . \|u\|_{L^\infty(S)}$$

Tomando límites $n \to \infty$ se obtiene el resultado.

- Si $u \notin C^2(\Omega)$, se utiliza regularización como en A.3.

OBSERVACION: Las observaciones 1) 2) de A.3 se aplican también aquí: Basta $u \in C^1(A)$ y Ω complemento de un convexo compacto.

El lema A.3 es cierto para $N \geq 3$ (en la versión correspondiente cuya demostración omitimos pues generaliza el lema A.10-BCC con las técnicas usadas en A.3):

LEMA A.3': Sean $N \geq 3$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R\}$, $R > 0$ y $S = \partial\Omega$

Sea $u \in M^{N/N-2}(\Omega)$, $|\Delta u| \in L^1(\Omega)$ y $u \in C^1(\bar{\Omega})$

Entonces $p \in P_o$, $\sqrt{p'(u)}\ |\text{grd } u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y

$$\int_\Omega p'(u)\ |\text{grd } u|^2 + \int_\Omega \Delta u . p(u) \leq \int_S \frac{\partial u}{\partial r} \cdot p(u)$$

NOTA: Las observaciones hechas en L.A.3 son válidas.

A.4. Algunos Lemas para medidas acotadas

Al demostrar la existencia de soluciones de la ecuación $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ en $\mathbb{R}^2$ cuando $f \in M(\mathbb{R}^2)$, necesitamos algunos resultados equivalentes para este caso de resultados conocidos si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

LEMA A.5: Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\text{grd } u| \in M^2$, $\Delta u = f \in M(\mathbb{R}^2)$ y supongamos que existe $k > 0$ tal que $ms\ [|u| > k] < \infty$.

Entonces para todo $p \in P$, $p \geq 0$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^2} p'(u)\,|\mathrm{grd}\ u|^2 + \int f_r\ p(u) \leq \|p\|_\infty\ \|(f_s)^-\|_M$$

(f_r y f_s son las partes regular y singular de la medida M).

Demostración: Regularizando como de costumbre y multiplicando por $\zeta \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$ se tiene

$$\int p'(u_n)\ |\mathrm{grd}\ u_n|^2\zeta + \int \Delta u_n . p(u_n)\zeta + \int \mathrm{grd}\ u_n . p(u_n) . \mathrm{grd}\ \zeta = 0$$

Pero $p(u_n) \geq 0$; $-f_s \leq (-f_s)^+$ luego $(-f_s)_n = [(-f_s)^+]_n$

de donde:

$$\int p'(u_n)\ |\mathrm{grd}\ u_n|^2\zeta + \int (f_r)_n\ p(u_n)\zeta + \int \mathrm{grd}\ u_n . p(u_n)\mathrm{grd}\ \zeta \leq$$

$$\leq \|p\|_\infty\ \|(f_s)^-\|_M$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$:

$$\int p'(u)\ |\mathrm{grd}\ u|^2\zeta + \int f_r\ p(u)\zeta + \int \mathrm{grd}\ u.p(u)\mathrm{grd}\ \zeta \leq$$

$$\leq \|p\|_\infty\ \|(f_s)^-\|_M$$

Ponemos $\zeta = \zeta_n$ y pasamos al límite. Como en A.13-BBC $\int \mathrm{grd}\ u.p(u).\mathrm{grd}\ \zeta_n \longrightarrow 0$ y obtenemos el resultado *

También cuando $\Delta u \in M(\mathbb{R}^2)$ podemos demostrar como en A.13 que $\int \Delta u = 0$:

LEMA A.6: Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\mathrm{grd}\ u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $\Delta u \in M(\mathbb{R}^2)$ Si existe $k > 0$ tal que $\mathrm{ms}\ [|u| > k] < \infty$:

$$\int \Delta u = 0$$

Demostración: Regularizamos mediante $\{\rho_n\}$, $\rho_n \in \mathcal{D}$, $\rho_n \to \delta$.

Entonces si $f = -\Delta u$, $f_n = f * \rho_n = \Delta u_n \to f$ en la topología débil $\sigma(M, C_\bullet)$. Además $u_n \to u$ en $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y ctp. Si $\zeta \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$ tenemos

$$\int f_n \zeta = \int \operatorname{grd} u_n \cdot \operatorname{grd} \zeta$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\int f \zeta = \int \operatorname{grd} u \cdot \operatorname{grd} \zeta$$

Sustituimos ζ por $\zeta_n(x) = \zeta_0(x/n)$ y como en A.13-BBC, $X_n = \int \operatorname{grd} u \cdot \operatorname{grd} \zeta_n \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$.
Así

$$\int \Delta u = \lim_{n\to\infty} \int \Delta u . \zeta_n = -\lim X_n = 0 \quad *$$

Citamos por último un importante resultado debido a Ph. Bénilan [7] para $N \geq 3$, cuya demostración para la formulación natural del caso $N=2$ es idéntica sustituyendo como instrumento de demostración el Lema A.10 de BBC por A.13-BBC. La omitimos por brevedad, véase [7].

LEMA A.7: Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\operatorname{grd} u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $\Delta u \in M(\mathbb{R}^2)$ y supongamos que existe $k > 0$ tal que ms $[|u| > k] < \infty$. Sea $j : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$ contracción convexa tal que $j(0) = 0$. Entonces $\Delta j(u) \in M$ y $\|\Delta j(u)\|_M \leq 2 \|\Delta u\|_M$.

Si además j es creciente se tiene

$$\Delta j(u) \geq p(u).(\Delta u)_r - (\Delta u)_s^-$$

(p es la derivada a la izquierda de j; $(\Delta u)_r$, $(\Delta u)_s$ son las partes regular y singular de Δu) *

Este lema tiene un corolario interesante

COROLARIO: Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|grd\ u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$, $\Delta u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ y supongamos que existe $k > 0$ tal que $ms\ [|u| > k] < \infty$. Sea además $u \geq 0$. Entonces

$$(\Delta u)_r \geq 0 \quad \text{ctp del conjunto} \quad [u=0].$$

(si $\Delta u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\Delta u \geq 0$ ctp en $[u = 0]$) *

Demostración: Tómese $j(r) = r^+$. Así $p(r) = 0$ para $r \leq 0$, $p(r) = 1$ para $r > 0$, y

$$\Delta u = \Delta u^+ = \Delta j(u) \geq p(u)(\Delta u)_r - (\Delta u)_s^-$$

si $u=0$, ctp

$$\Delta u \geq p(0)(\Delta u)_r - (\Delta u)_s^- = -(\Delta u)_s^-. \quad \text{Así} \quad (\Delta u)_r \geq 0 \ *$$

OBSERVACION: Resultados análogos al corolario se obtienen para el caso $u \geq m$ en $[u=m]$ y para $u \leq m$ en $[u=m]$.

El lema A.7 es válido también para abiertos de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\Omega = [|x| \geq R]$ en la siguiente formulación:

LEMA A.7b: Sea $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $|grd\ u| \in M^2(\Omega)$, $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, y supongamos que existe $k > 0$ tal que $ms\ [|u| > k] < \infty$.
Sea $j : \mathbb{R} \longrightarrow [o,\infty[$ contracción convexa tal que $j(0) = 0$ y p la derivada a la izquierda de j.

Entonces para todo $R_1 > R$, $\Delta j(u) \in (\Omega^{R_1})$ y

$$||j(u)||_{\mathcal{M}(\Omega^{R_1})} \leq 2\ ||\Delta u||_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

Además si j es creciente

$$\Delta j(u) \geq p(u)(\Delta u)_r - (\Delta u)_s^- \quad \text{en} \quad \Omega^{R_1}$$

Demostración: Sea $\zeta \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^2)$, $\zeta=0$ en un entorno de $[|x| \leq R]$, $\zeta=1$ en un entorno de $\overline{\Omega}^{R_1} = [|x| \geq R_1]$.

Pongamos $\nu = \zeta u$. Entonces $\nu \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, grd $\nu \in M^2(\mathbb{R}^2)$ y $\Delta\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ pues

$$\begin{cases} \text{grd } \nu = \text{grd } \zeta . u + \zeta . \text{grd } u \\ \Delta\nu = \zeta\Delta u + 2 \text{ grd } u \text{ grd } \zeta + u \Delta \zeta \end{cases}$$

y es claro que grd ζ, $\Delta\zeta$ son funciones de clase C^∞ con soporte compacto en $\Omega-\overline{\Omega}^{R_1}$.

Además, restringido a Ω^{R_1}

$$\begin{cases} \text{grd } \nu = \text{grd } u \\ \Delta\nu = \Delta u \end{cases}$$

Aplicamos A.7 y el resultado es inmediato, ya que las distribuciones tienen un carácter local $*$

OBSERVACION: Nosotros utilizaremos el Lema A.7b exactamente así, pero la demostración es obvio que vale para Ω un dominio de frontera compacta de $\mathbb{R}^2$.

A.5. Un resultado para un operador diferencial lineal de primer orden

Sea Ω^N el toro N-dimensional. En el estudio de la unicidad de soluciones del problema (E) en el Cap. IV hemos utilizado un resultado en la línea del Lema 3.5 de BBC [9] que demostraremos aquí.

Comenzamos por un resultado que necesitaremos para la obtención del resultado principal, lema A.8.

LEMA A.8: Sea β un g.m.m. acotado, $A = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, a_i constantes reales, $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $j(r) = \int_0^r \beta(r)dt$.

Sea $u \in L^1(\Omega)$ tal que $Au \in L^1(\Omega)$

Entonces

$$A(j \circ u) = \beta \circ u . Au \in L^1(\Omega)$$

Demostración:

a) Empecemos por el caso en que β es contínua:

Tomamos una sucesión regularizante $\{\rho_n\}$, $\rho_n \to \delta$.

Entonces $u_n = u * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u_n \to u$ en $L^1(\Omega)$, $Au_n = Au * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $Au_n \to Au$ en $L^1(\Omega)$

En este caso

$$(3) \qquad A(j(u_n)) = j'(u_n).Au_n = \beta(u_n).Au_n$$

Tomando una subsucesión si es necesario se puede afirmar que $Au_n \to u$ ctp, $u_n \to u$ ctp y, siendo β contínua, $\beta u_n \to \beta u$ ctp. Entonces en virtud del Teorema de Conv. Dominada:

$$(4) \qquad \beta(u_n).Au_n \longrightarrow \beta(u).Au \quad \text{ctp y en } L^1(\Omega)$$

Dado que β es acotado, j es Lipschitziana y

$$(5) \qquad j(u_n) \longrightarrow j(u) \quad \text{en} \quad L^1(\Omega)$$

Como A es un operador de derivación es cerrado en $L^1(\Omega)$, luego de (3), (4) y (5)

$$A(j(u)) = \beta(u).Au$$

b) β g.m.m. acotado, $\beta(o) \ni o$

Sea β_λ la aproximación Yosida de β (cf. Brézis [11]) que es contínua y acotada (por β). Sea j_λ la aproximación convexa s.c.i asociada a j (cf. [11])

$$j_\lambda(r) = \frac{\lambda}{2}\,|\beta_\lambda(r)|^2 + j\,(J_\lambda^\beta\,(r)) \geq 0$$

Entonces $j_\lambda(x) \uparrow j(x)$, existe $j'_\lambda(x) = \beta_\lambda(x)$, $\beta_\lambda(x) \to \beta^\circ(x)$, $|\beta_\lambda(x)| \uparrow |\beta^\circ(x)|$.

Gracias a a) sabemos que $A(j_\lambda(u)) = \beta_\lambda u.Au$. Además $\beta u \in L^1(\Omega)$ implica por la convergencia monótona (T^a Beppo-Levi) que $\beta_\lambda u \to \beta^\circ u$ en $L^1(\Omega)$ Por el mismo motivo $j_\lambda u \to j(u)$ ctp y en $L^1(\Omega)$. $\beta_\lambda u.Au \to \beta u.Au$ por el $T^{\underline{a}}$ de la Conv. Dominada. Por lo tanto, siendo A cerrado,

$$Aj(u) = \beta^\circ u.Au \in L^1(\Omega)$$

c) $\underline{\beta \text{ g.m.m.}}$

Si $\beta(0) \neq 0$ nos reducimos a b) modificando β, j así: sea $c \in \beta(0)$. Definimos

$$\begin{cases} \overline{\beta}(r) = \beta(r)-c & , \quad \overline{\beta}(0) \ni 0 \\ \overline{j}(r) = j(r)-cr & , \quad \partial\overline{j}(r) = \overline{\beta}(r), \quad \overline{j}(0) = 0 \end{cases}$$

por b) $A\overline{j}(u) = \overline{\beta}^\circ(u).Au$

Luego $A(j(u)) = A(\overline{j}u + cu) = A(\overline{j}(u)) + cAu = \beta^\circ u.Au$ *

Pasamos ahora al resultado principal

<u>LEMA A.9</u>: Sea β un g.m.m. $A = \Sigma\, a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a_i \in \mathbb{R}$, $\{a_i\}$ lin.ind. sobre $\mathbb{Q}$, $u \in L^1(\Omega)$, $Au \in L^1(\Omega)$, $c > 0$ y ct $x \in \Omega$ $w(x) \in \beta(u(x)) \cap \beta(u(x)+c)$, $w(x) \in L^1(\Omega)$. Entonces w es constante.

<u>Demostración</u>: Sea j la primitiva de β tal que $j(0) = 0$.

Entonces $$\begin{cases} j(u(x)+c) - j(u(x)) \geq w(x)\,c \\ j(u(x)) - j(u(x)+c) \geq w(x)(-c) \end{cases}$$

Luego $j(u(x)+c) - j(u(x)) = w(x).c \in L^1(\Omega)$ ctp.

i) <u>Supongamos β acotado</u>:

En virtud del lema A.8,

$$A(j(u)) = w.Au \qquad \text{ctp}$$

de donde

$$A\left[j(u(x)+c) - j(u(x))\right] = A\left[j(u(x)+c)\right] - A\left[j(u(x))\right] = 0$$

Pero en el Cap IV, lema 4 vimos que en este caso $Av = 0$ implica v = constante. Entonces

$$w(x).c = j(u(x)+c) - j(u(x)) = K$$

Y como $c \neq 0$, w = constante.

ii) <u>β no acotado</u>:

Truncamos β por M y $-M$ superior e inferiormente (resp.) en β_M. De la misma manera queda truncado w en w_M. Entonces w_M resulta constante al aplicar i) a w_M, β_M, u. Hacemos $M \to \infty$ y obtenemos el resultado *

BIBLIOGRAFIA

R.A. ADAMS:

|1| "Sobolev Spaces". Academic Press. New York. 1975

V. BARBU:

|2| "Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces". Noordhoff, Leyden. 1976.

Ph. BENILAN:

|3| "Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications". Thèse Univ. Paris XI, Orsay, 1972.

|4| "Curso de 3r. ciclo". Univ. Paris VI, Paris, 1974/75.

|5| "Opérateurs accrêtifs et sêmi-groupes dans les espaces $L^p(\Omega)$ $(1\leq p\leq\infty)$". Proceedings France-Japan Seminar on functional and numerical analysis, 1976.

|6| "Sur un problème d'évolution non monotone dans $L^2(\Omega)$". Preprint, Besançon. 1976.

|7| "Quelques propiétés des solutions de $-\Delta u+\beta(u)\ni f$". Comunicación personal, Besançon 1978. Aparecerá.

Ph. BENILAN - H. BREZIS:

|8| "Sur l'équation de Thomas-Fermi". Aparecerá.

Ph. BENILAN - H. BREZIS - M.G. CRANDALL:

|9| "A Semilinear Equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa II, nº 4 (1975), pp. 523-555.

H. BREZIS:

|10| "Problèmes unilatéraux". J. Math. Pures et Appl., 51 (1972) pp. 1-168.

|11| "Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert". Lectures Notes, 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

|12| "Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations". Contributions to Non Linear Analysis, Ed. Zarantello, Ac. Press (1971).

|13| "Solutions of variational inequalities with compact support", Uspekhi Mat. Nauk, 129 (1974), pp. 103-108.

|14| "Solutions a support compact d'Inêquations Variationnelles". Sêminaire Leray. College de France (1974).

H. BREZIS - A. HARAUX:

|15| "Image d'une somme d'opêrateurs monotones et applications". Israel Jour Math., 23 (1976) pp. 165-186.

H. BREZIS - L. Nirenberg:

|16| "Some First Order Nonlinear Equations on a Torus". Comm. Pure Applied Math., XXX (1977) pp 1-11.

H. BREZIS - G. STAMPACCHIA:

|17| "Une nouvelle mêthode pour l'êtude d'êcoulements stationnaires", C.R. Acad. Sci. Paris, 276 (1973) pp 129-132.

H. BREZIS - W. STRAUSS:

|18| "Semilinear elliptic equations in L^1", J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), pp 565-590.

F. BROWDER:

|19| "Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems with strongly nonlinear lower order torms", Berkeley conference on partial diff. equations, Agosto, 1971.

M.G. CRANDALL:

|20| "Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces". Contributions to Nonlin. Funct. Analysis. Ac. Press, 1971.

|21| "An Introduction to Evolution Governed by Accretive Operators", Dyn. Systems, Int. Symposium, Providence 1974.

G. DA PRATO:

|22| "Somme d'applications non linéaires", Symposia Mathematica VII, Ist. Naz. di Alta Mat, Academic Press, 1971, p. 170.

J.I. DIAZ:

|23| "Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales". Aparecerá en Collectanea Mathematica.

|24| "Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems". Aparecerá en J. of Nonlinear Analysis.

J.I. DIAZ - M.A. HERRERO:

|25| "Propriétés de support compact pour certaines équations elliptiques et paraboliques non linéaires", C.R.A.S., Paris, t. 286 (1978).

N. DUNFORD - J.T. SCHWARZ:

|26| "Linear Operators", Parte I, Insterscience, New York, 1958.

R.E. EDWARDS:

|27| "Functional Analysis. Theory and Applications", Holt, Rinehart & Winston, New York, 1965.

A. FRIEDMAN:

|28| "Partial Differential Equations", Holt, Rinehart & Winston, New York, 1969.

D. GILBARG - N.S. TRUDINGER:

|29| "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer Verlag, Berlin - H.-N.Y., 1977

F. JOHN - L. NIRENBERG:

|30| "On functions of bounded mean oscillation", Comm. Pure Appl. Math, 14 (1961) pp. 415-426.

Y. KONISHI:

|31| "Une remarque sur la perturbation d'opérateurs m-accré tifs dans un espace de Banach", Proc. Japan Acad., 48 (1972), pp. 157-160.

|32| "Semi-linear Poisson's Equations", Proc. Japan Acad., 49 (1973), pp 100-105.

A. KUFNER y otros:

|33| "Function Spaces", Noordhoff, Leyden, 1977.

M.A. KRASNOSELSKII - Ya.B. RUTICHII:

|34| "Convex functions and Orlicz Spaces", Noordhoff, Groningen, 1961.

LE CHAU-HOAN:

|35| "Etude de la classe des opérateurs m-accrétifs de $L^1(\Omega)$ et accrétifs dans $L^\infty(\Omega)$", Tesis doctoral, Univ. Paris VI, 1977.

J. LERAY - J.L. LIONS:

|36| "Quelques résultats de Višik sur les problemes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder", Bull. Soc. Math. France, 93 (1965) pp. 97-107.

J.L. LIONS:

|37| "Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires", Dunod, Paris, 1967.

|38| "Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles". Presses de l'Univ. de Montréal, n° 1, 1965.

J.L. LIONS - E. MAGENES:

|39| "Problèmes aux limites non homogènes et applications", Dunod, Paris, 1968.

O.A. OLEINIK:

|40| "Sur certaines équations paraboliques dégénérescentes de la Mécanique". Les équations aux dérivées partielles, Coll. Inter. du C.N.R.S., Paris, 1963.

C. PICARD:

|41| "Opérateurs ϕ-accrétifs et génération de semi-groupes non linéaires", Tesis Univ. Orsay, Paris, 1972.

R. REDHEFFER:

|42| "Nonlinear differential inequalities and functions of compact support", Trans. Amer. Soc., 220 (1976), pp. 133-157.

W. RUDIN:

|43| "Real and Complex Analysis", Mc Graw Hill, New York, 1970.

G. STAMPACCHIA:

|44| "Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second-order elliptic equations", Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), pp. 505-510.

|45| "Equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus", Les Presses de l'Université de Montréal, n° 16, Montréal, 1966.

E. STEIN:

|46| "Singular integrals and differentiability properties of functions", Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

E. STEIN - G. WEISS:

|47| "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

J.L. VAZQUEZ:

|48| "Comportamiento en el infinito de las soluciones de una ecuación semilineal elíptica en $\mathbb{R}^2$", Comunicación presentada al Congreso de Ec. Diferenciales y Aplicaciones, El Escorial (Madrid), 1978.