UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE PSICOLOGÍA
Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación

LA ACTIVACIÓN DEL CONOCIMIENTO REAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO EVOLUTIVO SOBRE LOS PROBLEMAS NO-RUTINARIOS DE ADICIÓN

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Laura Jiménez Márquez

Bajo la dirección de la doctora
Purificación Rodríguez Marcos

Madrid, 2008

- **ISBN: 978-84-692-1756-6**

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Psicología

Dpto. de Psicología Evolutiva y de la Educación

La Activación del Conocimiento Real en la Resolución de Problemas. Un Estudio Evolutivo sobre los Problemas No-Rutinarios de Adición.

Tesis Doctoral

Autora: Laura Jiménez Márquez

Directora: Purificación Rodríguez Marcos

A MIS PADRES,

GENEROSO Y SOLEDAD

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la directora de esta Tesis Doctoral, *Purificación Rodríguez Marcos.* Aún recuerdo perfectamente el día en que Purificación consiguió entusiasmarme en 3º de carrera con sus trabajos sobre el pensamiento matemático en las clases de Desarrollo Cognitivo. Fue en ese momento cuando le "comuniqué" que realizaría mi tesis doctoral con ella como directora y Purificación no sólo creyó en mí, sino que me dio la oportunidad de incorporarme a su equipo. Casi diez años después de aquel día, le doy las gracias por haber confiado en mí durante tanto tiempo, por toda la ayuda que siempre me ha prestado, por la implicación con la que ha dirigido este trabajo y por el apoyo emocional que me ha brindado. A ella le debo que ese sueño de hace 10 años sea hoy un hecho.

En segundo lugar, estoy convencida de que esta tesis doctoral no hubiera sido posible sin la ayuda prestada por Mª Oliva Lago. Especialmente, tengo que agradecerle todas las horas que siempre me ha dedicado de forma desinteresada, la manera en la que me ha enseñado, casi sin darme cuenta, muchas de las herramientas que han sido necesarias para elaborar esta tesis, su disposición para discutir conmigo cualquier aspecto que me ha inquietado y hacerme ver que las cosas son mucho más sencillas cuando se sabe mirarlas y, sobretodo, por haber podido contar con ella siempre que la he necesitado.

A Ileana Enesco también le debo mucho y le doy las gracias por toda la confianza que ha depositado en mí desde que nos encontramos en su curso de doctorado. Por muchos motivos, estoy convencida de que ha sido una de las "responsables" de que este trabajo dejara de ser una aspiración.

No puedo dejar de mencionar la ayuda prestada por Cristina Dopico en la revisión final del manuscrito. En esa última fase del trabajo, esos pequeños gestos suponen una gran contribución.

Silvia Guerrero ha sido la persona que ha estado a mi lado desde el comienzo y junto con la que he recorrido todo este camino, los cursos de doctorado, el examen para optar al Diploma de Estudios Avanzados y la que fue mi primera vez en una Universidad extranjera. Dar ese paso con ella lo hizo todo mucho más sencillo.

Al resto de las chicas de "nuestro grupo de investigación", Irene Solbes, Carolina Callejas y Ana Escudero, les agradezco todo el apoyo, el cariño y las palabras de ánimo que he recibido. También le doy las gracias a "nuestro invitado especial" de todos los lunes y los miércoles, Juan Ignacio Aragonés, no sólo por las bromas y las anécdotas que en muchas ocasiones me han permitido desconectar del trabajo y las preocupaciones, sino también por sus reflexiones sobre la investigación y la vida académica que siempre me han parecido tan sorprendentes y acertadas.

No puedo dejar de agradecer a Richard Cowan que me acogiera en la Universidad de Londres de forma desinteresada y dedicara muchas horas de su tiempo a la discusión de este trabajo conmigo. A pesar de la distancia, ha seguido disponible, al otro lado de correo electrónico, para ofrecerme su ayuda y explicarme conceptos estadísticos. De la misma manera, no puedo dejar de mencionar a Terezinha Nunes por abrirme las puertas de la Universidad de Oxford.

Le agradezco igualmente al Colegio Público Pablo Sorozábal de Móstoles las facilidades recibidas para la recogida de los datos: al equipo directivo por haberme cedido una parte de las instalaciones para realizar las entrevistas, a los profesores por permitirme interrumpir sus clases y *robarles* a sus alumnos en varias ocasiones y, especialmente, tengo que darles las gracias a todos los niños que participaron de forma voluntaria, renunciado en ocasiones a su tiempo de ocio para venir conmigo a resolver problemas de “mates”.

Sin la beca que recibí del Ministerio de Educación y Ciencia hubiera sido imposible centrar todo mi tiempo y todo mi esfuerzo en realizar este trabajo.

Por último, les doy las gracias a mis padres y a mi hermana por haberme apoyado en los momentos de flaqueza.

INTRODUCCIÓN

Desafortunadamente, hablar de las dificultades de los niños en matemáticas se ha convertido hoy en día en algo habitual. Además, dichas dificultades se han confirmado reiteradamente en las distintas evaluaciones nacionales e internacionales. Por ese motivo, en algunos países se han desarrollado programas de intervención como el denominado CGI (*Instrucción Guiada Cognitivamente*) (p.e., Carpenter *et al*., 1999; Carpenter y Peterson, 1988; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef, 1989; Fennema, Carpenter y Lamon, 1991; Fennema *et al*., 1996; Peterson, Carpenter y Fennema, 1989), el programa elaborado por el grupo de *Cognición y Tecnología Vanderbilt* (Bransford et al., 1990; CGT, 1991, 1992, 1993) o el movimiento conocido como *Educación Matemáticas Realistas* (RME) iniciado en Holanda.

Uno de los principios básicos que se encuentran en la base de todos estos programas es la defensa de que la enseñaza de las matemáticas debe estar basada en la comprensión y solución de problemas verbales, ya que éstos constituyen contextos significativos para los niños. Además, se insiste en que estos problemas no deben constituir una mera aplicación de un procedimiento algorítmico de solución, sino que es necesario un proceso de reflexión previo. No obstante, como señala Palm (2006), no podemos olvidar que existen importantes diferencias entre los problemas *reales* que suceden en entornos naturales y los que simulamos en el contexto escolar. Algunas de estas diferencias harían referencia a:

a) Las *propias situaciones* que los problemas describen, ya que es importante que sean eventos que hayan sucedido en la vida de los niños o que éstos conozcan bien. Por ejemplo, en el problema "Este ascensor puede transportar a 14 personas". Por la mañana, 269 personas desean utilizarlo para subir. ¿Cuántas veces debe el ascensor subir y bajar?", la historia descrita hace referencia a un fenómeno habitual de la vida diaria, esto es, un número de personas que espera su turno para coger el ascensor.

b) La *pregunta* final a la que deben dar respuesta ha de indicar claramente cuál es el problema a resolver. Siguiendo con el ejemplo anterior, en el problema se plantea claramente que el objetivo es conocer el número de viajes necesario para que todas las personas que esperan puedan acceder a sus puestos de trabajo.

c) La *información* o los *datos* que figuran en el problema deben ser igualmente representativos. A pesar de que el denominado problema del ascensor ha sido incluido en el Test Nacional Piloto sobre Matemáticas en Gran Bretaña (SEAC, 1992), como un ejemplo representativo de problema realista o no-rutinario, no parece muy plausible que un edificio sólo tenga un ascensor si en hora punta lo utilizan 269 personas. Muchos de los edificios actuales tienen dos ascensores para un número menor de vecinos. En este sentido, podemos afirmar que la información que figura en el problema no es representativa.

d) Es igualmente importante que no olvidemos que *existen múltiples estrategias* para solucionar un problema y no sólo los algoritmos. En la vida real los niños no siempre recurren a las operaciones aritméticas, sino que suelen emplear estrategias que ellos mismos han desarrollado. Además, tampoco podemos presuponer que hay una única respuesta realista al problema. Así, la respuesta realista que en el SEAC esperaban encontrar en el problema del ascensor era que éste tendría que subir y bajar 20 veces, ya que si la respuesta era 19 no era suficiente para trasladar a todas las personas. Sin embargo, de acuerdo con Cooper (1998) algunos niños podrían asumir correctamente que muchas personas acabarían cansándose de esperar y recurrirían a las escaleras y esto es, precisamente, lo que solemos hacer en la vida real.

e) La forma de *presentación del problema* debe ser igualmente tenida en cuenta. En la vida real los problemas se transmiten mediante comunicación oral, mientras que en la escuela se presentan en un formato escrito y, a veces, se acompañan de gráficos o tablas que son difíciles de interpretar.

f) *Las circunstancias* en la que los niños suelen resolver los problemas también son diferentes. En la vida real es posible acudir a otra persona, discutir con ella acerca de cómo solucionar el problema o pedirle ayuda, pero en las tareas escolares se suele trabajar de forma individual en un tiempo predeterminado previamente por el profesor.

Aunque existen limitaciones a la hora emular todos los aspectos que suceden en la vida real en los problemas verbales, esto no justifica que en el contexto escolar sigamos sometiendo a los escolares a la misma "dieta" de problemas que se resuelven simplemente aplicando una operación aritmética (i.e., problemas rutinarios), sino que debemos plantear problemas que constituyan verdaderos desafíos (i.e., problemas no-rutinarios) y que no se resuelvan simplemente aplicando la operación aritmética más obvia. En esta línea han sido ampliamente documentadas las dificultades que los alumnos encuentran cuando tienen que resolver estos tipos de problemas y se han propuesto dos tipos de explicaciones. Desde la primera se afirma que los niños no son capaces de aplicar el conocimiento que poseen sobre el mundo real a la resolución de problemas matemáticos (p.e., Caldwell, 1995; Greer, 1993; Hidalgo, 1997; Verschaffel, De

Corte y Lasure, 1994, 1999). La segunda alude a que las respuestas erróneas se originan en el ámbito escolar debido a la exposición repetida a problemas estereotipados o rutinarios (p.e., Brousseau, 1984; Reusser y Stebler, 1997; Schoenfeld, 1991). En otras palabras, la tarea de los alumnos en la escuela suele residir en *descubrir* la operación aritmética implicada y realizar correctamente los cálculos, por lo que han desarrollado una serie de creencias incorrectas relacionadas con el hecho de que esto es siempre lo más importante en el proceso de resolución. En este sentido y de acuerdo con Cooper (1994, 1998), las respuestas incorrectas de los niños en los problemas no-rutinarios no estarían exentas de realismo, sino que tendrían su origen en el propio proceso de adaptación del niño a la escuela. Desde nuestro punto de vista, estas dos propuestas no resultan irreconciliables, sino más bien complementarias, es decir, las creencias incorrectas de los niños les conducen a no aplicar su conocimiento del mundo real. Profundizar en este aspecto ha sido el objetivo de este estudio. Para ello, hemos intentado superar, por un lado, algunas de las limitaciones que hemos encontrado en los estudios previos sobre los problemas no-rutinarios y, por otro, estamos interesados en ofrecer explicaciones sobre el origen de los errores, con el ánimo de hacer propuestas educativas que ayuden a paliar esta situación.

Para la presentación de este trabajo, hemos diferenciado cuatro grandes bloques: el marco teórico, el marco empírico, las conclusiones y las referencias bibliográficas. En el **marco teórico** se describen, en el capítulo primero, las investigaciones más relevantes que se han realizado sobre los problemas rutinarios de adición y, en el segundo capítulo, nos hacemos eco de los resultados referidos a los problemas no-rutinarios. En este último, se han diferenciado tres subapartados que aluden a los problemas irresolubles o absurdos, los que describen situaciones basadas en la vida real y, por último, los centrados en los problemas de división con resto. A modo de recapitulación, y antes de exponer el trabajo empírico, se presentan algunas conclusiones generales y se resaltan algunas críticas de carácter metodológico que hemos intentado superar en este estudio. En el bloque correspondiente al **marco experimental** se plantean, en primer lugar, los objetivos y las hipótesis de trabajo. A continuación, se describe el método que hemos seguido para alcanzar dichos objetivos: los participantes del estudio, el material empleado y el procedimiento. Posteriormente, se ofrece el análisis y la discusión de los resultados, atendiendo no solamente a los aspectos cuantitativos, sino también a los cualitativos, con el objetivo de discernir el origen de las respuestas de los niños. A continuación, se exponen las **conclusiones** más relevantes del estudio, las limitaciones y perspectivas de futuro, así como algunas directrices educativas. En el último bloque, hemos recogido las **referencias bibliográficas** utilizadas para realizar este estudio.

I. MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1.

EL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS RUTINARIOS DE ADICIÓN

La inclusión de problemas verbales en el aula para trabajar las matemáticas ha estado motivada por la necesidad de desarrollar en los alumnos las habilidades necesarias para resolver de forma efectiva situaciones de la vida diaria (p.e., Burkhardt, 1994). Así, los problemas escolares cumplen dos objetivos esenciales:

- Proporcionar a los estudiantes la posibilidad de resolver problemas de la vida diaria en las que son imprescindibles el uso de las matemáticas aprendidas en la escuela (Thorndike, 1922)
- Motivar a los estudiantes mostrándoles que las matemáticas son realmente útiles.

La descripción de situaciones que implican diversos conocimientos matemáticos se representa en la escuela en forma de problemas verbales. Estos constituyen el contexto significativo dentro del cuál debería enmarcarse la enseñanza de los procedimientos. No obstante, la resolución de problemas suele estar relegada a una mera función de aplicación de los algoritmos recién aprendidos. En lo que sigue, profundizaremos en el estudio de los problemas verbales rutinarios de adición y en las estrategias de resolución correctas e incorrectas empleadas por los niños.

1. Los Problemas Verbales De Adición

En general, los problemas verbales de adición suelen estar compuestos de dos partes, una *informativa* en la que aparecen los dos datos numéricos y *la pregunta* que alude a la cantidad desconocida (i.e., a+b=c). Sin embargo, pueden tomar distintas formas en función del lugar que ocupe la incógnita o cantidad desconocida: en el resultado (i.e., a+b = ?), en el primer sumando (i.e., ?+b = c) o en el segundo sumando (i.e., a+? = c).

Numerosas investigaciones han comprobado que algunos problemas verbales que se representan con los mismos algoritmos (p.e., adición, sustracción...) y que incluyen las mismas cantidades no tienen el mismo nivel de dificultad para los niños, hecho que no puede relacionarse con sus habilidades matemáticas, sino con características inherentes a los propios problemas (p.e., Aguilar y Navarro, 2000; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Christou y Philippou, 1998; Lago, Rodríguez, Zamora y Madroño, 1999; Riley y Greeno, 1988). Todo ello ha derivado en un amplio grupo de investigaciones que se han centrado en estudiar los diferentes aspectos que estarían contribuyendo, en mayor o menor medida, a explicar el grado de dificultad de los mismos. En breve, podríamos resumirlas en las siguientes:

1) El Lugar de la Incógnita

Como hemos adelantado a modo de ejemplo unas líneas más arriba, el lugar en el que se ubica la cantidad desconocida en el problema afecta al grado de dificultad. Así, los niños suelen obtener mejores resultados si la incógnita está situada en el resultado que cuando se desconoce uno de los sumandos, especialmente si éste es el primero (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a; Carpenter, 1986).

2) LA CONCEPCIÓN UNITARIA / BINARIA DE LA ADICIÓN

La concepción unitaria supone que el conjunto inicial sufre un cambio de estado al incrementarse cuando añadimos un segundo conjunto (Fuson, 1988; Weawer, 1995). Esta concepción impide a los niños resolver con la misma facilidad expresiones tales como 1+N y N+1. La concepción binaria implica la combinación de dos conjuntos disjuntos a los que se les asigna el mismo papel, sin que se produzca cambio alguno en ellos (Fuson, 1988). Tendremos ocasión de recuperar estos conceptos cuando tratemos las clasificaciones de los problemas verbales atendiendo a la estructura semántica.

3) VARIABLES SINTÁCTICAS

También se han analizado variables de naturaleza lingüística tales como el número de palabras del texto, la secuencia de la información o la presencia o ausencia de palabras clave (p.e., añadir, dar, más…) que pueden inducir a la operación de sumar (Carpenter, 1985; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987; Nesher, 1982).

4) LA ESTRUCTURA SEMÁNTICA

Actualmente, la mayoría de los autores están de acuerdo en clasificar los problemas verbales en función de su estructura semántica, ya que se ha comprobado que estas variables son las que afectan en mayor medida a la dificultad percibida por los niños (Bermejo, Lago, Rodríguez, Cañizares, Dopico y Moran, 1997; Carpenter y Moser, 1982, 1983; De Corte y Verschaffel, 1985; Heller y Greeno, 1978; Kintsch y Greeno, 1985; Morales, Shute y Pellegrino, 1985; Nesher y Greeno, 1981; Riley, Greeno y Heller, 1983; Vergnaud, 1982; Wolters, 1983). La denominación y el número de categorías que se han empleado para definir las relaciones semánticas ha ido variando a lo largo del tiempo (para una revisión de las mismas ver Tabla 1, p. 24), aunque actualmente la mayoría de los autores han optado por mantener la nomenclatura inicial de Heller y Greeno (1978) en la que se diferencian tres categorías de problemas: cambio, combinación y comparación (Bermejo *et al.*, 1998; Carpenter y Moser, 1996, 1999; Fuson, 1992; Nesher, Greeno y Riley, 1982; Vergnaud, 1982):

a) Cambio.

Los problemas de cambio describen situaciones dinámicas en las que se introducen modificaciones en la cantidad inicial de un poseedor (i.e., se describe la primera cantidad, una acción que produce un cambio y un estado final). En palabras de Fuson (1982), se corresponden con una concepción unitaria de la suma porque hay un poseedor que incrementa un conjunto inicial. Dependiendo de cuál sea el término desconocido (i.e., la cantidad inicial, la magnitud de cambio o el resultado) podemos diferenciar tres tipos de problemas (ver Cuadro 1. p. 23).

b) Combinación.

Los problemas de combinación representan situaciones estáticas, ya que incluyen dos cantidades disjuntas que se combinan para dar lugar a una tercera. Estos problemas se han denominado también parte-parte-todo porque las partes pueden unirse para formar “el todo” y el todo puede descomponerse en partes. Según Fuson, representan una concepción binaria de la adición por la presencia de dos conjuntos que se combinan entre sí. La información desconocida puede estar situada en uno de los subconjuntos o el resultado (ver Cuadro 1, p. 23).

c) Comparación.

Como en los problemas de combinación, se presenta la relación entre dos cantidades disjuntas (i.e., relaciones estáticas), bien para determinar la diferencia entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. Las cantidades se relacionan mediante la comparación ("más que"). Así, una de las cantidades cumple la función de referente *y* la otra de comparado (ver Cuadro 1, p. 23).

d) Problemas de Igualación.

Por último, tras el trabajo de Carpenter y Moser (1981), algunos autores han aceptado una *categoría adicional* que contiene elementos de los problemas de comparación y de cambio (Bermejo *et al.*, 1998; Carpenter y Moser, 1982, 1983; Fuson, 1992; Riley, 1981; Riley *et al.*, 1983). En los problemas de igualación se produce una comparación entre dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de los subconjuntos para igualarlo al otro (ver Cuadro 1, p. 23).

Cuadro 1. Clasificación de los problemas verbales de estructuras aditivas

PROBLEMAS DE CAMBIO

- Carlos tenía 4 lápices e Irene le dio 3. ¿Cuántos lápices tiene ahora Carlos? (a + b = ?)
- Carlos tenía 3 lápices e Irene le dio algunos. Si ahora Carlos tiene 7 lápices, ¿cuántos lápices le dio Irene? (a + ? = c)
- Carlos tenía algunos lápices e Irene le dio 3. Si ahora Carlos tiene 7 lápices, ¿cuántos lápices tenía al principio? (? + b = c)

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN

- Teresa tiene 4 lápices e Ignacio tiene 3 lápices. ¿Cuántos lápices tienen entre los dos? (a + b = ?)
- Teresa e Ignacio tienen 7 lápices entre los dos. Si Teresa tiene 3 lápices, ¿cuántos lápices tiene Ignacio? (a + ? = c)
- Teresa e Ignacio tienen 7 lápices entre los dos. Si Ignacio tiene 4 lápices, ¿cuántos lápices tiene Teresa? (? + b = c)

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

- Teresa tiene 4 lápices e Ignacio tiene 3. ¿Cuántos lápices tiene Teresa más que Ignacio? (Diferencia desconocida)
- Ignacio tiene 3 lápices y Teresa tiene 1 lápiz más que Ignacio. ¿Cuántos lápices tiene Teresa? (Comparación desconocida)
- Teresa tiene 4 lápices. Si tiene 1 lápiz más que Ignacio. ¿Cuántos lápices tiene Ignacio? (Referente desconocido)

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

- Teresa tiene 4 lápices e Ignacio tiene 3. ¿Cuántos lápices necesita Ignacio para tener los mismos que Teresa? (Igualación desconocida)
- Ignacio tiene 3 lápices. Si le dan un lápiz tendrá los mismos que Teresa. ¿Cuántos lápices tiene Teresa? (Igualar conjunto conocido)
- Teresa tiene 4 lápices. Si a Ignacio le diesen 1 lápiz tendría los mismos que Teresa. ¿Cuántos lápices tiene Ignacio? (Igualar conjunto desconocido)

Tabla 1

Clasificaciones de los problemas verbales de adición

Bermejo *et al.* (1998)	**Carpenter y Moser (1996, 1999)**	**Fuson (1992)**	**Carpenter y Moser (1983)**	**Vergnaud (1982)**	**Carpenter y Moser (1982)**	**Nesher, Greeno y Riley (1982)**	**Heller y Greeno (1978)**
Cambio	-Unión. - Separación.	Activa con operación unitaria	Cambio	▪ Transformación que une dos medidas. ▪ Composición de dos transformaciones. ▪ Transformación que une dos relaciones estáticas	Cambio-unión Cambio – Separación	Cambio	Cambio
Combinación	Parte – parte - todo.	▪ Activa con operación binaria. ▪ Estática con operación binaria.	Combinación	Composición de medida.	Parte-parte-todo.	Combinación	Combinación
Comparación	Comparación	Estática con operación binaria	Comparación	Relación estática que une dos medidas.	Comparación	Comparación	Comparación
Igualación		Activa con operación binaria.	Igualación		Igualación.		
				Composición de relaciones estáticas.			

Los resultados de las investigaciones que se han centrado en el estudio de la estructura semántica han aceptado, en términos generales, un orden de dificultad creciente: cambio, combinación, igualación y comparación. Así, los problemas más sencillos de resolver son los de cambio, debido a que las situaciones que describen conllevan acción y existe un único poseedor que aumenta o decrementa su cantidad inicial (p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999; De Corte y Verschaffel, 1987; Lago, Rodríguez y Caballero, 1999). En contraposición, los problemas que representan relaciones estáticas y más de un poseedor (i.e., combinación y comparación) resultarían más difíciles. Por último, los problemas de igualación, dado que poseen características de ambos problemas, se situarían en un nivel de dificultad intermedio (p.e., Aguilar, Alcalde, Marchena y Navarro, 1998; Bermejo y Rodríguez, 1987b).

Sin embargo, esta jerarquía no debe considerarse de forma rígida y estática, ya que existen otros factores adicionales como, por ejemplo, el lugar que ocupa la incógnita, la presencia o no de ayudas y el tamaño de las cantidades que afectan a los niveles de ejecución y que deben considerarse de forma conjunta con la estructura del problema.

En primer lugar, nos centraremos el lugar que ocupa la incógnita en el enunciado. En un trabajo realizado por Bermejo *et al.* (1998) presentaron a niños de E.I., 1º de E.P. y 2º de E.P. problemas verbales de adición y substracción, en los que variaron la estructura semántica (i.e., cambio, combinación, igualación y comparación) y la incógnita del problema (i.e., primer término, segundo término y resultado). Los resultados mostraron, entre otras cosas, que:

- El rendimiento se encontraba mediatizado por la influencia de ambas variables. Por ejemplo, los problemas de cambio con la incógnita situada en el conjunto de cambio resultaban más sencillos que los de comparación en los que se desconocía el conjunto de comparación, lo que concuerda con los datos encontrados en otras investigaciones anteriores (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987).
- El hecho de que un problema implicara acción no garantizaba, en todos los casos, un nivel de rendimiento superior en los niños. Prueba de ello es que los problemas de combinación con la incógnita en el resultado fueron los más sencillos (más aún que los de cambio).
- La ejecución correcta en un tipo de estructura no aseguraba el éxito posterior del alumno cuando se variaba la situación de la incógnita.

Estos dos últimos hallazgos confirman que la noción de cambio no se adquiere en primer lugar en todas las circunstancias, sino que se desarrolla en paralelo junto con las de comparación, combinación e igualación.

En segundo lugar, haremos una breve mención a otras variables que han sido también estudiadas. Así, la presencia de ayudas (i.e., dibujos o materiales que se puedan manipular) para representar los términos del problema (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1987a; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Carpenter y Moser, 1982; Pepper y Hunting, 1998), el uso de cantidades pequeñas (p.e., Aguilar *et al.*, 1998; Bermejo y Lago, 1988; Carpenter y Moser, 1982; Siegler y Robinson, 1982; Vergnaud 1991) y la formulación verbal de los problemas que consiste en explicitar las relaciones semánticas sin afectar a su estructura (p.e., De

Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Hudson, 1980) facilita notoriamente la comprensión y solución de estas tareas. Estas variables, por tanto, afectan igualmente a los niveles de ejecución encontrados en los niños, por lo que es necesario que sean controladas en el diseño de situaciones matemáticas.

En conclusión, podemos afirmar que contamos con datos más que suficientes acerca de cómo deberían presentarse los problemas verbales en el aula. Así, es posible ir introduciendo a los alumnos problemas en los que se desarrollan distintas relaciones (i.e., dinámicas vs. estáticas). Incluso, los problemas de comparación pueden irse introduciendo tempranamente reformulando el enunciado de forma que la sentencia relacional *más que* sea más explicita y permitiendo ayudas u objetos que faciliten la representación inicial del problema. Asimismo, el nivel de dificultad de los mismos debería ir variándose progresivamente modificando, por ejemplo, el lugar que ocupa la incógnita y aumentando el tamaño de las cantidades.

Por tanto, el objetivo de introducir una amplia variedad de situaciones iría encaminado a no formar expertos en un tipo concreto de problema. Diversos análisis que se han realizado sobre los tipos de problemas que aparecen en los libros de texto han comprobado que éstos aparecen agrupados según la última operación estudiada (Säljö y Wyndhamn, 1987; Schoenfeld, 1991; Sowder, 1988; Stern, 1992; Stigler, Fuson, Han y Kim, 1986) o, en ocasiones, aparece una segunda operación aritmética simple (De Corte y Verschaffel, 1985; Greer, 1997; Hernández, 2004; Reusser, 1988; Reusser y Stebler, 1997; Stigler *et al.*, 1986; Verschaffel *et al*., 1994). Además, suelen estar presentes distintas *palabras clave* que provocan que el alumno detecte como llegar a la solución sin haber comprendido previamente el problema (ver p.e., Hegarty, Mayer y Monk, 1995;

Nesher y Teubal, 1975; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992). En definitiva, los problemas acaban empleándose como una ocasión más de practicar la última operación que hallan estudiado, cuando en realidad los niños disponen de diversas estrategias que van sustituyéndose paulatinamente hasta procedimientos más rápidos y económicos cognitivamente como son los algoritmos. Y, precisamente, este debería ser el objetivo de la enseñanza de las operaciones. No obstante, retomaremos estas y otras características de los problemas escolares cuando tratemos de explicar qué sucede cuando los alumnos tienen que resolver problemas no-rutinarios, esto es, atípicos en el contexto escolar y pasaremos a describir algunas de las estrategias de las que disponen los niños antes de la enseñanza formal.

2. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS

El estudio de los procedimientos de resolución, correctos e incorrectos, resulta de gran importancia para conocer los procesos subyacentes a las ejecuciones correctas e incorrectas de los niños. Con este propósito, en los últimos años se han realizado una gran cantidad de estudios que han tenido por objeto el examen de las estrategias infantiles y su evolución (p.e., Beishuizen, Van Putten y Van Mulken, 1997; Bertelli, Joanni y Martlew, 1998; Blöte, Klein y Beishuizen, 2000; Caballero, 2005; Cobb, 1995; Deboys y Pitt, 1995; Lefevre, Sadesky y Bisanz, 1996; Lozano, 2001; Siegler y Stern, 1998; Thompson, 1999; Verschaffel, De Corte, Lamote y Dherdt, 1998). A lo largo de este apartado, vamos a centrarnos en describir los procedimientos correctos e incorrectos de resolución.

2.1. LAS ESTRATEGIAS CORRECTAS

De acuerdo con la clasificación de Carpenter y Moser (1982) pueden distinguirse tres grandes bloques de procedimientos: (1) estrategias de representación directa, (2) estrategias de conteo y (3) hechos numéricos.

1) LAS ESTRATEGIAS DE REPRESENTACIÓN DIRECTA

La característica principal de las estrategias de Representación Directa es el empleo de contadores físicos (p.e., objetos o los dedos de la mano) para representar cada uno de los términos del problema. En el caso de la adición, destaca el procedimiento de **juntar todo**, que sería el más elemental y se encuentra presente antes de que los niños hayan recibido instrucción formal (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1987a; Caballero, 2005; Carpenter y Moser, 1984; Ginsburg y Rusell, 1981; Lago, 1992; Lindvall e Ibarra, 1980; Lozano, 2001; Resnick, 1983). Aún así, algunos niños continúan incluso utilizándola durante los primeros años de escolarización, junto con otros procedimientos más elaborados (Fuson, 1982). El modo de proceder consiste en representar de forma separada las dos cantidades utilizando apoyos físicos (como objetos o los dedos de la mano) y, después, contar todos los elementos.

Por ejemplo, Bermejo y Rodríguez (1987a) observaron que Diana (5;5 años) resolvía el algoritmo 4+3 representando el primer término con los dedos de una mano, contando «1, 2, 3, 4» y el segundo sumando con los dedos de la otra «1, 2, 3». Por último, contaba todo de nuevo para llegar a la solución.

2) ESTRATEGIAS DE CONTEO

La característica que las define es el uso de la secuencia de numerales para contar los objetos. En algunas ocasiones, los niños emplean algún objeto físico (como golpes con los pies en el suelo, movimientos con la cabeza...) o los dedos de la mano como apoyo al conteo (p.e., Baroody, 1987; Bermejo y Lago, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987a, 1990, 1992; Carpenter y Mooser, 1982, 1983, 1984; Fuson, 1988), pero no con la función de representar los sumandos. Por tanto, los objetos físicos se emplean como método para determinar el número de pasos que deben dar mientras están contando y determinar cuando deben parar.

En el caso en la adición, se conocen tres tipos de estrategias que responden a momentos evolutivos distintos:

a) Contar Todo

En este procedimiento, los niños comienzan contando el primer sumando y finalizan la secuencia numérica cuando han acabado de contar los dos conjuntos. El resultado es el último numeral de la secuencia de conteo. Por ejemplo, para resolver el problema “María tiene 4 galletas y

Pedro le da 5 galletas ¿Cuántas galletas tiene ahora María?", los niños empezarían contando «1, 2, 3 y 4» y continuarían hasta añadir los cinco elementos del segundo sumando, esto es, «5, 6, 7, 8 y 9», utilizando alguno de los apoyos que hemos señalado anteriormente. La respuesta final sería el último número de la secuencia.

b) Contar a partir del Primer Sumando

Supone una mejora en la rapidez y eficacia de la ejecución, ya que los niños no cuentan ambos sumandos, sino que comienzan a partir del primero. Si volvemos al ejemplo anterior, el niño partiría del número 4 y continuaría contando «5, 6, 7, 8 y 9».

c) Contar a partir del Sumando Mayor

Es la estrategia más evolucionada y más económica cognitivamente. La diferencia con respecto al procedimiento anterior reside en que los niños parten del sumando mayor, independientemente de su posición en el problema, y continúan contando hasta añadir el número menor. Siguiendo con el ejemplo, el niño comenzaría con el número 5 y contaría hasta añadir los cuatro elementos restantes «6, 7, 8, 9».

3) ESTRATEGIAS MEMORÍSTICAS

Con el tiempo, los niños comienzan a sustituir las estrategias de conteo por otras más sofisticadas basadas en la memorización. Las estrategias memorísticas se encuentran en la base del cálculo mental (p.e., Ashcraft, 1990; Ashcraft y Fierman, 1982; Cooney, Swanson y Ladd, 1988; Koshmider y Ashcraft, 1991; Lefevre, Bisanz y Mrkonjic, 1988) y están compuestas por aquellas combinaciones numéricas que ya han aprendido (i.e., los hechos numéricos) o que pueden derivar a partir de otras (i.e., hechos derivados). Aunque la mayoría de ellas se adquieren en la etapa de la escolarización formal, debido a la practica repetida con ciertas combinaciones numéricas, incluso los niños de Educación Infantil ya han memorizado algunas combinaciones sencillas (p.e., Ginsburg, Posner y Russell, 1981; Caballero, 2005).

a) Hechos Numéricos

Son aquellas combinaciones numéricas que los niños han aprendido a partir de la experiencia repetida. La ventaja es que la recuperación es rápida y automática, siempre y cuando se hayan almacenado correctamente en la memoria (Ashcraft, Donley, Halas y Vakali, 1992). Otra ventaja adicional es que la recuperación se produce independientemente del orden de los sumandos. Alguna de las combinaciones que los alumnos aprenden antes serían los dobles (p.e., 2 + 2 = 6, 3 + 3 = 6) y los complementarios (p.e., 3 + 7 = 10, 6 + 4 = 10), aunque para una revisión completa sobre todas ellas remitimos al lector a la tesis doctoral realizada por Lozano (2001).

b) Hechos Derivados

Los hechos derivados se producen cuando el estudiante utiliza el conocimiento de algunos hechos numéricos para obtener la respuesta a combinaciones nuevas. Por tanto, estas estrategias no se recuperan directamente de la memoria. Debido a que están basadas en un conocimiento procedimental, implican un procesamiento consciente e imponen más demandas (p.e., Ashcraft y Stazyk, 1981; Lefevre *et al.*, 1988; Wdaman, Geary, Cormier y Little, 1989).

Se han observado un amplio rango de procedimientos (ver una revisión completa en Lozano, 2001). A modo de ejemplo, los alumnos resuelven combinaciones numéricas usando el conocimiento que tienen sobre los dobles, siempre y cuando uno de los sumandos no diste en más de dos unidades (p.e., 3 + 4 = 3 + 3 + 1 ó 3 + 5 = 3 + 3 + 2).

2.2. LAS ESTRATEGIAS INCORRECTAS

Las estrategias incorrectas no están vacías de conocimiento. Cuando estás aparecen deben ser consideradas como una fuente de información acerca de las concepciones erróneas que subyacen de cara a poder corregirlas.

Hay dos tipos de errores asociados a la adición: en los algoritmos y en los problemas verbales.

1) LOS ERRORES EN LOS ALGORITMOS.

Dado que el objetivo de este trabajo son los problemas verbales y no los algoritmos, vamos a tratar brevemente este conjunto de errores. Para solucionar correctamente un algoritmo, tenemos que considerar factores de tipo sintáctico y semántico (Brown y Burton, 1978; Brown y Van Lehn, 1982; Resnick, 1983):

a) Factores Sintácticos

Abarcan reglas que debemos seguir para resolver correctamente el algoritmo, tales como empezar el algoritmo por la columna de la derecha, combinar cada número con el de la columna correspondiente… Así, uno de los errores que los niños suelen cometer con más frecuencia es anotar el resultado completo de la columna que están operando, olvidando que sólo pueden consignar un solo número por columna hasta llegar a la última.

b) Factores Semánticos

Aluden a conceptos básicos matemáticos como el valor posicional (i.e., el valor que otorgamos a cada número dependiendo de la columna en la que esté situado) o el conocimiento del sistema de base. Uno de los errores más representativos sería el uso inadecuado de “las llevadas”.

2) LOS ERRORES EN LOS PROBLEMAS VERBALES

De acuerdo con Rodríguez (1992), podemos distinguir dos grandes categorías: los errores de ejecución y los errores de representación.

1. Los Errores de Ejecución

Se producen cuando el niño elige la operación aritmética apropiada pero la ejecuta de manera incorrecta (p.e., errores con respecto a “las llevadas”).

2. Los errores de representación

Surgen, como su nombre indica, a raíz de una representación inapropiada del problema. Pueden ser varios tipos:

- **Repetir una de las cantidades propuestas en el problema.**

Este error se ha observado en problemas de cambio, combinación y comparación. En los problemas de cambio, los niños no son capaces de representar el conjunto de partida y el de cambio por separado (Riley *et al.*, 1983). Por ejemplo, en el problema *"María tiene algunas galletas. Ana le da 5 galletas. Ahora María tiene 8 galletas. ¿Cuántas galletas tenía María al principio?"*, el niño no crea un conjunto de partida desconocido para María y, ante la segunda proposición, *"Ana le da 5 galletas"*, crea un conjunto con 5 galletas para María. La tercera proposición *"Ahora María tiene 8 galletas"* es asumida como un incremento al conjunto de 5 galletas que había hecho. Por tanto, al llegar a la pregunta *"¿Cuántas galletas tenía María al principio?",* responde 5, esto es, el número que, según el niño, representa al conjunto inicial (Bermejo y Rodríguez, 1990b).

En los problemas de combinación, por ejemplo "*María y Ana tienen juntas 9 galletas. María tiene 4 galletas. ¿Cuántas galletas tiene Ana?"*, De Corte y Verschaffel (1987) afirmaron que los errores se producían porque los niños interpretaban la proposición "*María y Ana tienen juntas 9 galletas"* como María tiene 9 galletas y Ana tienen 9 galletas, es decir, conciben erróneamente el 9 como una información relativa a la cantidad de cada persona.

En los de comparación, Bermejo y Rodríguez (1990b) comprobaron que en el problema “Javier tiene 6 globos. Mario tiene 9 globos más que Javier. ¿Cuántos globos tiene Mario”, un alto porcentaje de niños de 2º y 3º de Educación Primaria respondían a la pregunta diciendo “9”. Mayer (1986) señaló que los niños interpretaban la proposición de relación “Mario tiene 9 globos más que Javier” como una proposición de asignación “Mario tiene 9 globos”.

- **Inventar la respuesta**

Suele aparecer con cierta frecuencia cuando los niños no comprenden el problema, limitándose a pronunciar la primera cantidad que se les pasa por la cabeza sin ninguna reflexión.

- **Selección de una operación inadecuada**

Este tipo de error se muestra con más frecuencia en aquellos problemas en los que la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Se presenta en todas las categorías de problemas y tiene su origen en tres causas diferentes. La primera reside en la dificultad para entender el significado de la identificación del término “algunos” que representa a uno de los sumandos en el que hemos situado la incógnita, la segunda se refiere a que no aprecian la información temporal contenida en el texto y la última a que la proposición comparativa que determina uno de los sumandos resulta difícilmente comprensible para los niños (Bermejo y Rodríguez, 1990a; López, 2001). Por otro lado, De Corte y Verschaffel (1985) apuntaron a que este error se debía a que los niños procesan el texto de forma superficial, bien porque se centran en palabras claves que están asociadas a ciertas operaciones aritméticas (i.e. “entre los dos” asociada a la suma), en vez de intentar construir una representación mental del problema como un todo, bien a que no comprenden el problema y utilizan la operación que les resulta más fácil y conocida.

Como hemos visto a lo largo de esto este apartado, los niños han ido desarrollando una amplia variedad de estrategias para dar solución a situaciones que se les han ido planteando. La importancia de estos procedimientos es que han surgido como respuesta a problemas reales y, por tanto, se emplean de forma contextualizada. Si bien es cierto que con el paso del tiempo van evolucionando para dejar paso a otros más sofisticados hasta llegar a los algoritmos, debemos tener presente que éste no deja de ser un procedimiento más. En ocasiones, la enseñanza de las operaciones aritméticas es entendida por los niños como un conjunto de reglas que deben memorizar y aplicar, lo que les lleva a aprender trucos que les indican cuando es apropiado utilizar uno u otro. La situación ideal, desde nuestro punto de vista, sería que los algoritmos no supusieran una ruptura con el conocimiento del que los niños disponen, de modo que pudieran coexistir ambos en un comienzo y que fueran los alumnos quiénes fueran sustituyéndolos progresivamente, tal y como han hecho con estrategias previas que eran más costosas.

CAPÍTULO 2.

EL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS NO-RUTINARIOS

Las investigaciones centradas en la resolución de problemas escolares muestran que los problemas a los que los niños se enfrentan diariamente suelen ser estereotipados, es decir, describen situaciones en las que hay que relacionar a través de una operación aritmética las cantidades que figuran en el enunciado. Estos problemas serían los llamados problemas rutinarios a los que nos hemos referido en el capítulo anterior. Especialmente, suelen referirse a la última operación aritmética estudiada y acaban siendo una ocasión más para practicar este algoritmo, lejos de su objetivo real (p.e., Davis, 1989; De Corte y Verschaffel, 1985; Freudenthal, 1991; Greer, 1993; Kilpatrick, 1987; Nesher, 1980; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Reusser, 1988; Säljö, 1991; Schoenfeld, 1991; Treffers y De Moor, 1990; Verschaffel y De Corte, 1997).

Esta carencia es uno de los principales impulsos de la línea de investigación conocida con el nombre de *Matemáticas Realistas* y que ha cobrado una gran fuerza estos últimos diez años. El énfasis de este grupo de investigaciones es el estudio de los denominados problemas realistas o problemas no-rutinarios que, en breve, son problemas verbales que describen situaciones basadas en la vida real y en los que la aplicación de una operación aritmética no conduce sin más a la solución del problema. Éste sería el punto de partida de todos ellos. No obstante, denominar a estos problemas "realistas" en contraposición a los problemas aritméticos escolares nos ha parecido una nomenclatura poco adecuada, ya que ambos representan situaciones propias de la vida real. Por este motivo, hemos considerado más apropiado distinguir entre problemas **rutinarios**, que se resuelven aplicando la operación aritmética más evidente y son presentados frecuentemente en la escuela y problemas **no-rutinarios** que no pueden ser resueltos correctamente sin considerar las particularidades de cada situación (ver Mayer, 2003).

Además, una segunda puntualización es que bajo el título de problemas no-rutinarios se han formulado una gran diversidad de situaciones (ver también Palm, 2008). En efecto, una lectura detallada nos ha permitido diferenciar entre problemas irresolubles que describen situaciones absurdas como el conocido problema del pastor o del capitán (p.e., Baruk, 1985, 1992; Raddatz, 1983, 1984; Reusser, 1988, Selter, 1994), problemas que requieren tener en cuenta factores inusuales como el cansancio de un atleta durante una carrera (p.e., Caldwell, 1995; Greer, 1993; Reusser, 1995; Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel *et al.*, 1994, 1999) o los llamados problemas de división con resto en los que, como su nombre indica, hay que considerar factores relativos al resto para conseguir una respuesta apropiada (p.e., Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; Silver, 1986; Cai y Silver, 1995; Lago, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico, en revisión; Li y Silver, 2000; Rodríguez, Lago, Hernández, Jiménez, Guerrero y Caballero, en revisión; Silver, Mukhopadhyay y Gabriele, 1992; Silver, Shapiro y Deutsch, 1993). Esta primera distinción se correspondería tan solo con una clasificación general, ya que dentro de cada una de estas categorías deberían ser tenidos en cuenta otros aspectos adicionales como la operación aritmética, la estructura del problema o el tipo de información que ofrecen en el enunciado (p.e., datos irrelevantes, la solución del problema, sentencias ambiguas). No obstante, esta carencia no ha impedido que los resultados obtenidos en investigaciones coetáneas se hayan comparado entre sí, ni que se hayan realizado trabajos de réplica en otros países creando "nuevas versiones" de los originales, ni tampoco, finalmente, que se hayan empleado en el mismo estudio dos problemas que no comparten las mismas características y, por tanto, la misma dificultad.

¿Por qué estos factores no están siendo tenidos en cuenta en la investigación actual? El motivo principal es que se ha realizado una clasificación superficial e insuficiente basada *en la historia* que describen los problemas, lo que ha llevado incluso a que éstos se conozcan a título particular como el problema del capitán, el del autobús, el de la cuerda, el del corredor…(p.e., Beishuizen *et al*., 1997; Cooper y Harries, 2002; Davis, 1989; Gravemeijer, 1997; Greer, 1997; Hatano, 1997; Inoue, 2005; Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, Creer y De Corte, 2000; Wyndhamn y Säljö, 1997; Yoshida, Verschaffel y De Corte, 1997). La realidad es que se están obviando los aspectos relevantes inherentes al problema (i.e., la estructura del problema, la operación aritmética o el tipo de información que ofrecen en el enunciado). Precisamente, suplir esta carencia es el objetivo principal de esta investigación.

Dada la gran variabilidad de problemas que hemos encontrado en la revisión de la literatura, aunados bajo el nombre de problemas realistas o no-rutinarios, hemos optado por clasificar los resultados de esta línea de investigación en tres apartados diferenciados. El primero de ellos estará dedicado a los trabajos que han tenido por objeto el estudio de problemas absurdos. En segundo lugar, nos detendremos en las investigaciones que se han centrado en los problemas que describen situaciones cercanas a la vida real y, para finalizar, mostraremos los resultados obtenidos en los denominados problemas de división con resto.

1. LOS PROBLEMAS ABSURDOS EN LA VIDA REAL: LA EDAD DEL CAPITÁN

Los **problemas absurdos** están formados por enunciados semánticamente bien estructurados, incluyen varios datos numéricos y preguntan por la relación entre ellos. Su característica principal es que carecen de significado y son matemáticamente irresolubles.

Uno de los primeros ejemplos que encontramos en la literatura se debe a una carta recuperada por *Stella Baruk* en la que el novelista francés Flaubert escribía a su hermana Caroline y le pedía que resolviera el siguiente problema:

> *"Un barco navega por el océano con destino a Le Havre; transporta un cargamento de lana de 200 toneladas de peso bruto que ha cargado en Boston, tiene el palo mayor roto, el grumete pasea por el puente, el barco lleva 12 pasajeros a bordo, el viento sopla Este-Nordeste y son las 3 y cuarto en punto de una tarde del mes de mayo. ¿Cuál es la edad del capitán?"* (tomado de Baruk, 1992)
>
> *15 de marzo de 1843*

Según parece, la intención de Flaubert sólo era poner de manifiesto que el exceso de palabras superfluas lleva a confundir a los alumnos. Años después, Baruk haría famosa su propia versión del ya clásico *problema del capitán* en el estudio que dirigió desde el IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 1980) con niños de 1º a 4º.

PROBLEMAS IRRESOLUBLES

“Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Cuántos años tiene el capitán?”

“Hay 125 ovejas y 5 perros en un rebaño. ¿Cuántos años tiene el pastor?”

“Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho. ¿Cuántos años tiene el capitán?”

Los resultados de este trabajo fueron sorprendentes. Tan sólo el 12% de los niños de 1º y 2º (7-9 años) y el 62% de los alumnos de 3º y 4º (9-11 años) identificaron que el problema no tenía sentido y que, por tanto, la edad del capitán (o del pastor) no podía averiguarse con la información que tenían disponible. Si tenemos en cuenta que el problema era absurdo, el porcentaje de niños que optaban por resolverlo de forma aritmética resultaba inquietante. Años después, estos hallazgos fueron difundidos en el libro titulado *L‘âge du capitaine* (La edad del capitán), en el que la autora puso de manifiesto su *preocupación e indignación* por el hecho de que niños *completamente normales* mostraran una conducta tan irracional como sumar ovejas y cabras para hallar la edad de una persona (Baruk, 1985).

Los estudios del IREM traspasaron rápidamente las fronteras francesas creando una gran inquietud en la comunidad científica. Raddatz (1983) y Reusser (1988), incrédulos ante estos resultados, dirigieron sus propios trabajos de réplica en Alemania y Suiza.

Radattz amplió la muestra de estudio a 300 niños alemanes desde Educación Infantil hasta 5º y también las tareas de evaluación combinando problemas resolubles y problemas irresolubles.

EJEMPLO DE PROBLEMA IRRESOLUBLE

Katja invita a 8 niños a su fiesta de cumpleaños que será dentro de 4 días. ¿Cuántos años cumplirá Katja?

Los resultados confirmaron parcialmente los hallazgos del IREM. Por un lado, un elevado porcentaje de alumnos de todos los niveles educativos resolvió el problema errando en su respuesta. Sin embargo, en contra de lo esperado y de los datos de Baruk, el porcentaje de errores aumentaba considerablemente con la escolarización (ver Cuadro 2).

Cuadro 2. Porcentaje de errores encontrado el estudio de Raddatz (1983)

- **10%** en E.I.
- **30%** en 2º
- **60%** en 3º - 4º
- **45%** en 5º

En efecto, una de las principales conclusiones de Raddatz fue la decisiva influencia que tenía la cantidad de enseñanza formal recibida en la concepción de que la aritmética es un tipo de juego regido por reglas artificiales y sin conexión alguna con la realidad. Prueba de ello era que los niños pequeños parecían más centrados en el contexto que en la información numérica e insistían en que esos números no se podían "sumar".

Reusser, por su parte, elaboró dos estudios con niños de 1er a 5º curso, uno de ellos con 97 alumnos suizos de 1º y 2º y el otro con 101 alumnos de 4º y 5º. En el primer caso, los niños tenían que resolver una versión del ya mencionado problema del pastor. De nuevo, como sumar, restar o multiplicar no producía un número de años que fuera razonable, y dado que los niños esperaban que el problema pudiera resolverse, procedían a dividir porque sólo así podían obtener un número de años aceptable (p.e., "*125+5 son 130... es mucho, 125-5 son 120... es mucho también, 125/5 son 25... eso es, el pastor tiene 25 años*") (Reusser, 1988, p.325).

En el segundo estudio, a los niños se les presentó un problema diferente:

> Ayer salieron del puerto 33 barcos y llegaron 54. Ayer al mediodía había 40 barcos en el puerto. ¿Cuántos barcos había en el puerto ayer por la noche?

En este caso los resultados fueron aún más contundentes:

- 100 niños resolvieron numéricamente la tarea y sólo 1 anotó en el cuadernillo que el problema no tenía solución.
- Únicamente 28 niños pusieron en duda su resultado cuando, posteriormente, se les pidió que juzgaran si la solución anterior era correcta, pero sólo 5 de ellos afirmaron que su respuesta había sido incorrecta.

- Tan sólo 5 de los 101 niños comentaron que la formulación del problema tenía algo "difícil" o "extraño".

En la misma línea que ya apuntaba Raddatz, Reusser concluyó que el fracaso de los niños se debía al aprendizaje de que los problemas escolares de matemáticas no tienen necesariamente que tener sentido y esta idea se va fortaleciendo con la experiencia. Así, todos los problemas deben solucionarse numéricamente y lo más frecuente es que haya que hacerlo utilizando todos los números y aplicando la última operación aritmética que se haya aprendido.

En este punto conviene añadir una segunda explicación. Desde nuestro punto de vista, las dos versiones empleadas no parecen equiparables en grado de dificultad. Si bien es cierto que ambos son problemas irresolubles, el primero es absurdo, ya que averiguar la edad del capitán con tan solo la información relativa a su rebaño no tiene sentido, mientras que el de los barcos carece de información temporal relevante, pero los datos del problema pueden llevarnos a conjeturas erróneas. Sería, pues, más adecuado definir este problema como ambiguo. La elevada tasa de fracaso encontrada podría ser debido a que los niños dan por hecho la existencia de ciertos datos que lo hacen resoluble (i.e., *el problema podría resolverse si <u>todos</u> los barcos llegaron y salieron del puerto después del mediodía*).

En general, la idea de que el uso tradicional de las matemáticas en la escuela está provocando consecuencias negativas ha sido retomada posteriormente por Schoenfeld (1991) y Selter (1994). Schoenfeld (1991) realizó una revisión de los procedimientos de resolución del trabajo de Reusser. La característica más relevante que destacó fue la tendencia a usar todos los datos numéricos, independientemente de su relevancia, y seleccionar una operación aritmética en función de *palabras* y *expresiones claves*. Habitualmente, este procedimiento suele conducirles al éxito, sin embargo está exento de un razonamiento previo. En el contexto escolar, los alumnos no asumen que la solución del problema tiene que tener sentido en el mundo real, lo que les conduce a menudo a resolver problemas tan absurdos como el del capitán. Este fenómeno se conoce con el nombre de *ausencia de sentido común* (ver Gravemeijer, 1997).

Algunos años después, Selter (1994) contrastó los datos del trabajo de Baruk con las opiniones de los profesores de un centro de Educación Primaria. La impresión de los profesores fue de incredulidad acerca de que los niños tuvieran un nivel escolar normal y no creyeron posible que pudieran encontrar los mismos resultados 14 años después de este estudio. Por ese motivo, Selter realizó cuatro versiones del problema del capitán, dos de ellas resolubles y cuatro irresolubles, y las aplicó a los niños de 3er curso de ese mismo centro.

PROBLEMAS RUTINARIOS

1) Michael tiene 8 años. Su madre tiene 26 años *más que* Michael. ¿Cuántos años tiene ella?

2) Anke tiene 12 años. La madre de Anke es 3 *veces* mayor. ¿Cuántos años tiene la madre?

PROBLEMAS IRRESOLUBLES

1) Un pastor tiene 19 ovejas y 13 cabras. ¿Cuántos años tiene el pastor?

2) Un pastor de 27 años tiene 25 ovejas y 10 cabras. ¿Cuántos años tiene el pastor?

3) Hay 13 niños y 15 niñas sentados en la clase. ¿Cuántos años tiene el profesor?

4) Un apicultor tiene 5 colmenas con 80 abejas cada uno. ¿Cuántos años tiene el apicultor?

Antes de pasar a comentar los resultados de este trabajo, nos parece importante señalar algunas diferencias entre los dos bloques de problemas, resolubles e irresolubles, y entre los propios problemas irresolubles entre sí. En primer lugar, los problemas resolubles están formulados en términos de comparación, mientras que la estructura semántica de los no-rutinarios es de combinación, por lo que no parece adecuada la comparación entre ellos. Precisamente, como ya advertimos en el capítulo dedicado a los problemas rutinarios, la estructura semántica de los problemas de comparación es la más compleja, mientras que la de combinación no entraña dificultades especiales para los niños. No obstante, estos aspectos no han sido tenidos en cuenta por el autor en el análisis de datos. En segundo lugar, dentro del subgrupo de los problemas irresolubles, se incluye un problema cuya solución está ofrecida en el enunciado (i.e., un pastor de 27 años tiene 25 ovejas y 10 cabras. ¿Cuántos años tiene el pastor?) y, por tanto, éste ya no sería un problema sin solución o absurdo.

Volviendo al trabajo que nos ocupa, Selter encontró los mismos resultados que en el estudio francés. El análisis posterior de las entrevistas mostró que muchos de los procedimientos se correspondían con estrategias mecánicas, incluso cuando la edad del pastor aparecía explícitamente en el problema. Por ejemplo, uno de los niños sumó los tres datos numéricos del problema y otro sumó los dos primeros y restó el tercero. A este último el investigador le pidió que volviera a leer el problema para ver si podía detectar que el problema ofrecía la solución e inmediatamente cambió su respuesta y sumó los tres números. Además, muchas de estas estrategias incorrectas eran justificadas por los niños construyendo lo que Freudenthal (1991) denominó un *contexto mágico*, es decir, mediante una historia inventada que dotara de sentido su respuesta (ver ejemplos en el Cuadro 3).

Cuadro 3. Ejemplos de historias inventadas por los niños.

Problema del Pastor

- *Al pastor le han regalado una oveja o una cabra por cada cumpleaños.*
- *El pastor ha comprado un animal por cada año de su vida. Así siempre sabrá la edad que tiene*.

Problema del Profesor

- *Esta clase es especial porque hay justo tantos niños como años tiene el profesor.*

Problema del Apicultor

- *Normalmente una persona no puede tener 400 años pero este apicultor se llama Ming y nació en el planeta Mongur. ¿No lo viste en televisión ayer?*

Meses después, Selter repitió el estudio en ese mismo centro introduciendo algunas variaciones en el procedimiento (i.e., los números, las palabras y el contexto) con el fin de comprobar si alguno de esos cambios afectaba positivamente a las respuestas de los alumnos. Los resultaron confirmaron la consistencia de los datos obtenidos en el primero. Las respuestas correctas aumentaron únicamente cuando se avisó previamente a los niños de que algunos problemas podían resolverse y otros no.

Para concluir este apartado, nos gustaría ilustrar este fenómeno con una de las entrevistas aportada por Chavallard (citado en Baruk, 1985; Puchalska y Semanemi, 1987) en la que se resumen muchas de las tesis a las que hemos hecho referencia en este apartado.

E: Tú tienes 10 lápices rojos en el estuche de la izquierda y 10 lápices azules en el de la derecha. ¿Cuántos años tienes?

N: 20 años.

E: Pero tú sabes perfectamente que no tienes 20 años.

N: Sí, pero es culpa tuya… no me diste los números correctos.

E= entrevistador; N= Niño

2. LOS PROBLEMAS QUE DESCRIBEN SITUACIONES BASADAS EN LA VIDA REAL

Si los problemas anteriores tenían la característica de describir situaciones absurdas o irresolubles en la vida real, esta línea de investigación está centrada *en problemas que, para ser resueltos correctamente, es necesario tener en cuenta aspectos cotidianos.* Un ejemplo de ello es que cuando unimos varios tramos de cuerda mediante nudos perdemos algunos centímetros de longitud y, por eso, tenemos que contar con esto a la hora de comprar la cuerda, igualmente el cansancio de un corredor se va acumulando y eso le impide correr siempre a la misma velocidad, etcétera.

Esta idea quedaría recogida en el juego de palabras "*wor(l)d problems"* empleado por Greer (1993) que alude tanto a las características propias de los problemas verbales *(word problems)* como a la descripción de situaciones reales *(world problems)*.

Sin embargo, como mostraremos en los apartados dedicados a los estudios pioneros y los estudios de réplica, la única característica que se ha tenido en cuenta ha sido la descripción de situaciones reales, generando problemas muy diferentes entre sí en grado de dificultad. Pero ¿qué hay acerca de las características que los problemas verbales tienen? De momento, dejaremos esta cuestión en suspenso hasta presentar los dos estudios pioneros y la discutiremos a continuación.

2.1. LOS ESTUDIOS PIONEROS

Los primeros estudios fueron realizados por Greer (1993) en Irlanda y Verschaffel *et al.* (1994) en Bélgica, aunque posteriormente han sido replicados en otros países como Venezuela, Suiza, Japón, Alemania y Bélgica. Ambos trabajos surgieron a raíz de la recopilación de ejemplos de problemas aislados citados en la literatura y la creación de nuevas versiones para comprobar cómo los alumnos consideraban las distintas situaciones que éstos describen en sus soluciones.

Greer evaluó un total de 200 alumnos irlandeses de 13 y 14 años, utilizando 8 pares de problemas con estructuras multiplicativas (i.e., proporcionalidad y división), uno de ellos denominado estándar o rutinario (i.e., podía resolverse correctamente aplicando la operación aritmética más obvia) y otro paralelo no-rutinario (i.e., para resolverlo correctamente era necesario un "modelado realista" de la situación) (ver Tabla 2).

Los alumnos resolvieron un total de 8 problemas (4 rutinarios y 4 no-rutinarios), con la única instrucción de que hicieran todos los comentarios que consideraran oportunos acerca de la pregunta o de su propia respuesta.

Tal y como se esperaba, apenas se registraron errores en las versiones estándar. En los problemas no-rutinarios, sin embargo, la tasa de errores se incrementó notablemente en los problemas 2, 4, 5 y 6 (i.e., el *problema de la cuerda, el del corredor, el de la botella y el de los animales*), que fueron resueltos erróneamente asumiendo reglas de proporcionalidad directa (ver Tabla 3).

Tabla 2

Problemas empleados en el estudio de Greer (1993)

	TIPOS DE PROBLEMA
GLOBOS	Un abuelo le da a sus 4 nietos una caja de 18 globos para que ellos la repartan de manera que tengan todos la misma cantidad. ¿Cuántos globos conseguirá cada nieto?
CUERDA	Un hombre desea tener una cuerda suficientemente larga como para extenderla entre dos palos que están separados por 12 metros, pero sólo tiene piezas de cuerda de 1.5 metros. ¿Cuántas de esas piezas necesitará atar para extenderla entre los dos palos? (Greer, 1993)
HUEVOS / AUTOBÚS **	1128 huevos van a ser embalados en cajas. Cada caja puede tener 36 huevos. ¿Cuántas cajas necesitarán? 1128 soldados deben ser transportados a su lugar de entrenamiento. En cada autobús de la armada caben 36 soldados. ¿Cuántos autobuses necesitarán? (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983)
CORREDOR	El mejor tiempo de un atleta en correr una milla es 4 minutos y 7 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 3 millas? (Greer, 1993)
GRIFO	Se está llenando una botella desde un grifo a razón constante. Si el nivel del agua es de 2.4 cm. después de 10 segundos ¿qué nivel alcanzará después de 30 segundos? (Se acompaña del dibujo de una BOTELLA CÓNICA)
ANIMALES	Una chica está escribiendo nombres de animales que empiezan por la letra C. En un minuto escribe 9 nombres. ¿Cuántos escribirá en los próximos 3 minutos?
FELICITACIÓN	Una tienda vende 312 felicitaciones de Navidad en diciembre. ¿Cuántas piensas que venderá durante los meses de enero, febrero y marzo?
CARTA	Enviar una carta a John en primera clase cuesta 64p. La carta de Mary pesa exactamente dos veces más. ¿Cuánto costará enviarla en primera clase? (Se acompaña de la tarifa de precios que varían de forma NO PROPORCIONAL en función del peso)

***Emplea dos versiones de este tipo de problema*

Tabla 3

Porcentaje de respuestas correctas y justificaciones. Greer (1993)

	% DE R.R.	EXPLICACIONES
GLOBOS	83%	- Muy pocos estudiantes deciden partir globos por la mitad - Hay una gran variedad de respuestas acerca de que hacer con los dos globos que sobran
CUERDA	8%	- La respuesta mayoritaria es 8 piezas de cuerda sin ningún otro comentario adicional
HUEVOS / **AUTOBÚS** **	55% 61%	- En general, lo hicieron peor los estudiantes que usaron la calculadora porque intentaron recordar reglas acerca de cómo redondear los decimales sin tener en cuenta la situación.
CORREDOR	6%	- La mayoría de los estudiantes ofreció respuestas erróneas de proporcionalidad. - Múltiples errores adicionales de cálculo, al interpretar los minutos y los segundos correctamente.
GRIFO	6%	- Respuesta directa de proporcionalidad
ANIMALES	6%	- Respuesta directa de proporcionalidad
FELICITACIÓN	99%	- Los estudiantes ofrecieron respuestas basadas en la estimación (ya que lo lógico era que las ventas descendieran) o una respuesta numérica acompañada de una explicación acerca de que la respuesta no podía ser proporcional.
CARTA	90%	- El 82% asumió que la carta de John pesaba exactamente 250, respondiendo que el precio sería ₤1,20 -El 8% restante asumió que la carta de John pesaba entre 200-250gr y que, por tanto, el precio podía estar entre ₤1,08 y ₤1,20

Greer concluyó que, en la mayoría de los casos, los estudiantes resolvían los problemas de acuerdo con procedimientos inapropiados y asumían que eso era lo correcto. Sin embargo, también fueron capaces de aplicar procedimientos adecuados en algunos problemas (como en el problema de los globos o en el de la felicitación navideña). Parece, por tanto, que los niños no discriminaban cuando era apropiado recurrir a procedimientos estereotipados para resolver el problema y cuando no. En palabras de Greer, parece que sólo algunos contextos o situaciones provocaban en los alumnos la sensación de que la respuesta numérica *per se* era incorrecta y, por tanto, que no podía considerarse como una solución al problema.

Por su parte, Verschaffel *et al.* (1994) presentaron a un total de 75 alumnos belgas de 5º curso (10-11 años) una prueba de aplicación colectiva formada por 10 pares de problemas, uno de ellos estándar y el otro no-rutinario (ver Tabla 4). Los problemas se resolvieron en dos sesiones durante el mismo día.

Las posibles soluciones a los problemas no-rutinarios se dividieron previamente en 5 categorías:

1) *Respuesta Realista* (*RR*): alude a ciertas consideraciones específicas del problema (p.e., una respuesta realista al problema de los tableros sería "Steve puede obtener 2 tablones de un metro de cada tablón de 2,5 metros. Por lo tanto, 2x4 = 8 tablones").

2) *Respuesta No-Realista* (*RNR*) o respuesta esperada: basada en cálculos matemáticos estereotipados (p.e., 2,5 x 4 = 10 tablones).

3) *Error Técnico* (*ET*): errores de ejecución en los cálculos (p.e., 2,5x4=12).

4) *Otras Respuestas* (*OR*): por ejemplo, la aplicación de una operación aritmética inapropiada.

5) *Sin Respuesta* (*NR*)

De manera adicional, si cualquiera de las respuestas numéricas de los niños, correctas o incorrectas, era acompañada de un comentario realista se marcaba con el signo positivo (+), pero si el comentario era meramente descriptivo de la operación o no se había comentado nada se marcaba con el signo negativo (-). En el análisis final de los datos las respuestas quedaron agrupadas en dos categorías:

1) *Respuestas Realistas*: formadas por las RR (+), RR (-) y cualquiera de las cuatro categorías restantes acompañadas de una explicación adecuada al contexto (RNR+, ET+, OR+ y NR+). Por ejemplo, en el problema del agua "¿Cuál será la temperatura de agua de un recipiente si ponemos un litro de agua a 80º y un litro de agua a 40º dentro de él?" se consideraría realista la respuesta "*No lo sé exactamente. Debería ser alguna cantidad entre 40 y 80 grados*" (para consultar ejemplos adicionales ver Cuadro I, en el Anexo 1, p. 191).

2) *Respuestas No-Realistas*: en las que se incluyen todas las opciones de respuesta incorrectas que no iban acompañadas de ningún comentario (RNR-, ET-, OR- y NR-). Siguiendo con el ejemplo anterior, estarían dentro de este grupo las respuestas "*80 más 40 es igual a 120º*" (ver Cuadro I, en el Anexo 1, p. 191).

Tabla 4

Problemas empleados en el estudio de Verschaffel, De Corte y Lasure (1994)

	TIPOS DE PROBLEMA
AMIGOS	Carl tiene 5 amigos y Georges tiene 6 amigos. Carl y Georges deciden dar una fiesta juntos. Ellos invitan a todos sus amigos. ¿Cuántos amigos hay en la fiesta? (Nelissen, 1987)
TABLEROS	Steve ha comprado cuatro tableros de 2.5 metros cada uno. ¿Cuántos pedazos de un metro puede obtener de esos tableros? (Kaelen, 1992)
AGUA	¿Cuál será la temperatura de agua de un recipiente si ponemos un litro de agua a 80º y un litro de agua a 40º dentro de él? (Nesher, 1980)
AUTOBÚS	1128 soldados deben ser transportados a su lugar de entrenamiento. En cada autobús de la armada caben 36 soldados. ¿Cuántos autobuses necesitarán? (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983)
CORREDOR	El mejor tiempo de un atleta en correr una milla es 4 minutos y 7 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 3 millas? (Greer, 1993)
ESCUELA	Bruce y Alice van a la misma escuela. Bruce vive a 17 Km. de la escuela y Alice a 8 km. ¿A cuánta distancia viven Bruce y Alice la una de la otra?
GLOBOS	Un abuelo le da a sus 4 nietos una caja de 18 globos para que ellos la repartan de manera que tengan todos la misma cantidad. ¿Cuántos globos conseguirá cada nieto?
EDAD	Rob nació en 1978. Ahora estamos en 1993. ¿Cuántos años tiene?
CUERDA	Un hombre desea tener una cuerda suficientemente larga como para extenderla entre dos palos que están separados por 12 metros, pero sólo tiene piezas de cuerda de 1.5 metros. ¿Cuántas de esas piezas necesitará atar para extenderla entre los dos palos? (Greer, 1993)
GRIFO	Se está llenando una botella desde un grifo a razón constante. Si el nivel del agua es de 2.4 cm después de 10 segundos ¿qué nivel alcanzará después de 30 segundos? (Se acompaña del dibujo de una botella cónica)

Los resultados globales confirmaron la enorme dificultad que supone a los niños *modelar* o *contextualizar* los problemas no-rutinarios. Prueba de ello es que el 84% de los estudiantes resolvieron correctamente los problemas rutinarios o estándar y tan sólo el 17% lo hizo en el caso de los no-rutinarios.

En definitiva, estos dos primeros estudios cuentan con el interés de haber mostrado las diferencias de en la tasa de éxito entre los problemas no-rutinarios, que han sido atribuidas a las distintas situaciones que describen cada uno de ellos.

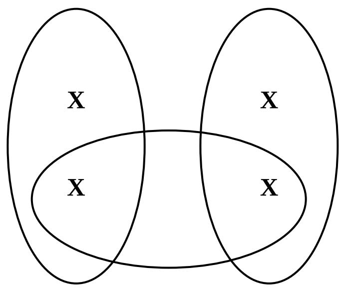
Desde nuestro punto de vista, estas conclusiones son limitadas. Como adelantábamos en la introducción, los problemas no-rutinarios -*wor(l)d problems-* no son sólo problemas que describen situaciones acerca del mundo, **son problemas aritméticos** y, como tales, tienen características propias que afectan por sí mismas al grado de dificultad (principalmente, la estructura semántica o la operación aritmética). Una clasificación superficial, basada únicamente en las situaciones que se plantean, nos llevaría a pensar que el problema de los amigos, el problema de la cuerda y el problema del autobús son ejemplos prototípicos de problemas no-rutinarios. Sin embargo, los datos de ambos estudios no avalan esta idea.

En efecto, un análisis más detallado de estos resultados nos ha permitido comprobar la influencia que tiene la operación aritmética subyacente en el grado de dificultad, agrupando dichos problemas en tres grandes bloques:

1) PROBLEMAS CON ESTRUCTURA ADITIVA

Estos problemas comparten la característica de crear la *falsa ilusión* de que hay que "juntar todo", debido a que su estructura matemática es aditiva (p.e., el problema de los amigos o el problema del agua). El porcentaje de éxito está comprendido entre el 15-20% (ver Tabla 5, p. 64).

Para ilustrar el modelo que rige estos problemas nos remontamos a una reflexión realizada por Wittgestein (1956, p. 14) que resulta muy acertada cuando la aplicamos a los problemas de estructura aditiva de Verschaffel *et al.* (1994). En concreto, este filósofo contemporáneo afirmaba que tanto la suma de 2+2 como de 2+2+2 puede tener el mismo resultado numérico, esto es 4, si los conjuntos se combinan entre sí.



Si volvemos ahora al denominado problema de los amigos (i.e., Carl tiene 5 amigos y Georges tiene 6 amigos. Carl y Georges deciden dar una fiesta juntos. Ellos invitan a todos sus amigos. ¿Cuántos amigos hay en la fiesta?), la suma de los 6 amigos de Carl y los 5 amigos de Georges (i.e., 6+5) puede darnos como resultado cualquier número entre 6 y 11 (sin contar a Carl y Georges), ya que ambos pueden tener 5 amigos comunes.

2) PROBLEMAS CON ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

El punto común de todos ellos (i.e., el problema del corredor, el de la escuela, el de la cuerda y el de la botella) es que su estructura multiplicativa induce a creer que la situación descrita se ajusta a las reglas de la proporcionalidad directa.

Los problemas escolares suelen describir situaciones estandarizadas que se ajustan a esas normas. Sin embargo, esto no sucede en las situaciones cotidianas. En efecto, la velocidad de un atleta durante una carrera no es constante, las distancias entre varios lugares no son lineales, la edad de una persona cambia durante el año (e, incluso, puede haber fallecido), para atar cuerdas es necesario hacer nudos y se pierde longitud y, por último, la forma cónica de una botella hace que su volumen no aumente por igual. La tasa de éxito suele ser inferior al 10% porque los alumnos suelen obviar estas consideraciones (ver Tabla 5, p. 64).

Aunque no de manera exhaustiva, algunos estudios previos ya habían puesto de relieve la falta de realismo en las respuestas escolares con problemas aislados de falsa proporcionalidad. Por ejemplo, Säljö (1991) indicó que para resolver el problema que aparece a continuación…

> Si 17 hombres construyen 2 casas en 9 días. ¿Cuántos días necesitarán 20 hombres para construir 5 casas?

…debemos considerar *aspectos encubiertos.* Así, no es lo mismo la productividad de un hombre trabajando en un grupo de 17 o de 20 personas, ni construir dos casas en vez de cinco, ni tampoco la productividad de los hombres que integran un grupo de trabajo. Más allá de todo eso, si optamos por resolver el problema aritméticamente asumiendo la proporcionalidad (i.e., 19 días y 3 horas) la respuesta implicaría que cada hombre tendría que hacer una jornada de trabajo de casi 24 horas al día.

El efecto de la ilusión de proporcionalidad es aún más claro en el siguiente ejemplo aportado por Lamon (1993):

> Si una orquesta puede tocar una sinfonía en 1 hora, dos orquestas lo harán en __ h.)

La respuesta mayoritaria fue que *dos orquestas lo harían en ½ h.*

3) PROBLEMAS DE DIVISIÓN CON RESTO

Son problemas cuya resolución no termina con la ejecución del algoritmo de división, ya que son necesarias consideraciones adicionales relativas al resto:

- En el caso del problema de los globos tenemos que considerar que el resto no es divisible, dada la naturaleza del material que estamos repartiendo.
- En el problema del autobús es necesario no perder de vista el resto de la división (i.e., el número de soldados que quedan fuera del autobús) para ajustar adecuadamente el cociente (i.e., solicitar un autobús más para que todos los soldados puedan trasladarse).

Teniendo en cuenta que los problemas de división con resto han sido objeto de una línea de investigación específica, dedicaremos un apartado posterior a su análisis.

Tabla 5

Porcentajes de éxito para cada problema agrupados según la operación aritmética implicada en los estudios pioneros

TIPOS DE PROBLEMAS	GREER (1993)	VERSCHAFFEL *ET AL.* (1994)
CUERDA	8%	0%
CORREDOR	6%	3%
ESCUELA	--	3%
EDAD	--	3%
BOTELLA	6%	3%
TABLONES	--	14%
AGUA	--	17%
AMIGOS	--	20%
AUTOBÚS	61%	49%
GLOBOS	83%	59%

En conclusión, el interés principal de ambos trabajos radicó en la creación de distintas situaciones que fueran cercanas a las que se producen en el mundo real. No obstante, como acabamos de comentar, las diferencias en el grado de dificultad que tienen algunos problemas, podrían explicarse atendiendo a otros factores relacionados con la propia estructura del problema. Así, si volvemos por un momento al problema de los globos y sustituimos los globos por amigos, es poco probable que la tasa de éxito varíe simplemente por haber modificado la historia del problema, ya que su estructura sigue siendo la misma. Por tanto, aunque admitimos que ciertas situaciones pueden ser más cercanas para los niños, el planteamiento que nosotros proponemos es que no podemos considerar que sea la única variable que explique su dificultad.

2.2. LOS TRABAJOS DE RÉPLICA

Al igual que sucedió tras la difusión de los datos del IREM (1980) sobre el denominado problema del capitán, y a los que hicimos mención en el apartado dedicado a los problemas absurdos o irresolubles, los hallazgos de Greer (1993) y Verschaffel *et al.* (1994) despertaron la curiosidad de muchos investigadores. De nuevo, parecía poco razonable que los niños no fueran capaces de aplicar los conocimientos que utilizan normalmente en situaciones de la vida real para resolver problemas verbales. En diversos países, como Suiza, Venezuela o Japón, no tardaron en realizarse estudios similares con el objetivo de contrastar si este fenómeno se producía sistemáticamente. Unido a esta meta inicial, y tras confirmar que los resultados encontrados eran prácticamente idénticos en estudiantes con sistemas educativos diferentes, la atención se centró en introducir diversas modificaciones en la tarea, con el objetivo de promover que las particularidades de cada situación fueran más evidentes para los niños. Por lo tanto, los esfuerzos de los investigadores se destinaron a profundizar en los motivos que conducen a los niños a realizar este tipo de conducta.

En primer lugar, teniendo en cuenta que los estudios de réplica no aportan modificaciones relevantes con respecto a los trabajos de Greer (1993) y Verschaffel *et al.* (1994), y con el objetivo de no ser reiterativos describiendo una y otra vez las mismas tareas y procedimientos, remitimos al lector al apartado dedicado a los trabajos pioneros para una descripción detallada de los problemas (i.e., problema de los amigos, el de la cuerda, el del corredor…). Asimismo, los resultados obtenidos en cada uno de ellos pueden consultarse en la Tabla 6 (p. 68).

No obstante, las investigaciones de Caldwell (1995) e Hidalgo (1997) aportaron nuevos datos a las originales y, por ello, les dedicaremos un mayor espacio.

Caldwell (1995) aplicó entrevistas individuales a los alumnos que habían resuelto inicialmente los problemas de forma no-realista. Con esto, pretendía averiguar si los niños disponían o no de los conocimientos necesarios sobre el mundo real que les permitieran resolver adecuadamente los problemas y, en caso afirmativo, conocer el motivo por el cuál no los usaron. Curiosamente, los niños indicaban que su respuesta a los problemas hubiese sido diferente si estas situaciones se hubiesen presentado en la vida real, en vez de plantearlas como una tarea escolar "*Conozco esas "cosas", pero yo nunca pensaría incluirlas en un problema de matemáticas. Las matemáticas nunca tienen que ver con "cosas" como ésas. Tratan acerca de cómo hacer sumas bien y esas "cosas" no son necesarias para hacer bien las sumas"* (Caldwell, 1995, p. 39). En resumen, el resultado de las entrevistas sugirió que los niños disponían de dichos conocimientos, pero no lo consideraban útiles para resolver los problemas escolares.

Por su parte, Hidalgo (1997) destacó tres posibles razones que explicaban las respuestas no realistas de los niños:

1) En la misma línea que Caldwell (1995), consideró la presencia de ciertas creencias erróneas sobre la resolución de los problemas aritméticos escolares
2) La falta de familiaridad con el contexto que describía el problema: algunos alumnos no conocían ciertos fenómenos descritos o tenían ideas erróneas

sobre cómo se comportan en la vida real (especialmente, en *el problema del grifo*).

3) La falta de habilidad en los heurísticos y destrezas metacognitivas: muchos alumnos leían rápidamente el problema con el objetivo único de decidir la operación aritmética adecuada y no realizaban ningún análisis profundo previo, ni interpretación alguna de los datos al finalizar los cálculos.

Tabla 6

Porcentajes de éxito correspondientes a los estudios de réplica.

	Greer (1993)	Verschaffel et al. (1994)	Caldwell (1995)	Hidalgo (1997)	Reusser y Stebler(1997)	Yoshida et al. (1997)	Verschaffel et al. (1999)
AMIGOS	--	20	5	23	11	13	14
TABLONES	--	14	--	16	14	0	17
AGUA	--	17	--	11	21	11	--
CORREDOR	6	3	0	0	5	7	1
ESCUELA	--	3	--	1	5	2	9
EDAD	--	3	--	0	2	0	--
CUERDA	8	0	1	0	6	2	5
BOTELLA	2	4	--	0	0	4	5
AUTOBÚS	55	49	65	11	49	62	64
GLOBOS	85	59	81	55	75	52	--

Tomado de Verschaffel *et al*. (2000, p. 25)

En segundo lugar, otras investigaciones, tras replicar el estudio de Verschaffel *et al.* (1994), se centraron en comprobar la influencia de otros aspectos más formales intrínsecos a la propia tarea. Siguiendo a Caldwell (1995) y a Hidalgo (1997), si las dificultades de los niños provenían de las creencias erróneas sobre cómo se deben resolver los problemas verbales y que les llevan a aplicar procedimientos estereotipados, el objetivo debería ir encaminado a tratar de evitar que se activen esas creencias. Así, los esfuerzos de estos autores han ido encaminados a modificar la forma en la que los problemas son presentados (p.e., introduciendo cuestionarios o señales de alerta) o la forma de trabajo destinada a encontrar la solución (p.e., grupos de iguales, discusión en clase, andamiaje).

Un ejemplo de ello es el trabajo de Reusser y Stebler (1997), quienes llevaron a cabo un total de tres estudios sucesivos para profundizar en todas estas cuestiones.

En concreto, en el primer estudio participaron 67 niños suizos de 4º y 5º de E.P. que habían realizado previamente la réplica del trabajo realizado por Verschaffel *et al.* (1994) y cuyos resultados pueden consultarse en la Tabla 6 (p. 68). Una vez transcurridas seis semanas, llevaron a cabo una segunda evaluación introduciendo dos variaciones:

1. *El formato de presentación de los problemas.* Introdujeron un pequeño cuestionario en el que preguntaban a los alumnos si consideraban que los problemas eran resolubles o no y se evaluaban posibles dificultades de comprensión. La hipótesis era que el cuestionario haría más probable que se activaran un mayor número de respuestas realistas.

2. *El modo en el que se permitió trabajar a los alumnos*. Así, la mitad resolvieron los problemas de forma individual, mientras que la otra mitad pudo trabajar en grupos de parejas. Esta condición pretendía comprobar si el trabajo cooperativo favorecía la discusión y uso de procedimientos de resolución correctos.

Los resultados de ambas modificaciones no fueron concluyentes. La mayoría de los alumnos anotaron en el cuestionario que no habían encontrado dificultad en resolver los problemas y que no se habían llegado a plantear si eran o no resolubles. Además, aunque el número de aciertos se incrementó ligeramente en relación con los datos del estudio de réplica (i.e., el 10,5% en el grupo de alumnos que trabajó individualmente y el 11,8% en el que lo hizo de forma cooperativa), Reusser y Stebler (1997) asumieron, por un lado, que la mejora no podía atribuirse al cuestionario, sino a un ligero efecto de entrenamiento al ser la segunda ocasión en la que resolvían la misma tarea y, por otro, que las diferencias entre ambos grupos no eran significativas, por lo que la discusión entre grupos de iguales tampoco afectó positivamente.

El segundo estudio consistió en un procedimiento de intervención que estuvo orientado a "*sembrar la duda"* en los alumnos acerca de sus procedimientos de resolución (ver Cuadro 4).

Las respuestas realistas obtenidas después de la intervención supusieron un aumento superior al 40%. En concreto, en el problema de los amigos las respuestas realistas aumentaron de 1 a 9 (de las 21 respuestas totales recogidas) y en el del corredor de 3 a 11 (de 18). Las entrevistas realizadas a los niños confirmaron la existencia de creencias erróneas acerca de cómo deben resolverse los problemas aritméticos: “nos dimos cuenta, pero en nuestros libros de matemáticas no hay problemas como estos”, “si es un problema aritmético hay que darle una solución”, etcétera (Reusser y Stebler, 1997, p. 317). Por tanto, los procedimientos basados en la entrevista individual (ver Caldwell, 1994; Hidalgo, 1997) o colectiva (Reusser y Stebler, 1997) han confirmado que las dificultades de los niños provienen de las creencias que han extraído de la experiencia repetida con problemas estereotipados. No obstante, retomaremos esta idea más adelante y ofreceremos datos adicionales acerca de las características de los problemas verbales que los niños resuelven en la escuela.

Cuadro 4. Procedimiento de intervención en el estudio de Reusser y Stebler (1997)

Problema de los Amigos

- ¿Quién ha resuelto este problema sumando 6+5 = 11 ó 6+5+2 (incluyendo a Carl y Georges) = 13? La mayoría de los alumnos levantaron la mano.
- ¿Estáis seguros de que realmente es así? Tratad de poneros en el lugar de Carl y Georges. Suponed que vuestro amigo invita 6 amigos a su fiesta de cumpleaños y tú invitas a 6. Escribid una lista con los nombres. Ahora tenéis 5 minutos más para intentar resolver el problema.

Problema del Corredor

- Ponte en el lugar de John e imagina que corres 100 metros en 17 segundos. ¿Cuánto tardarías en correr un Km.?
- ¿Estáis seguros de que 2 minutos y 60 segundos es la solución correcta?

Por último, una vez confirmada la importancia de las creencias erróneas que tienen los alumnos, Reusser y Stebler (1997) se plantearon en su tercer estudio comprobar la posible influencia que pudiera tener el nivel educativo de la escuela. En esta ocasión, participaron 439 estudiantes de 13 años procedentes de tres centros con diferentes niveles: básico (*Realschule*), medio (*Sekundarschule*) y avanzado (*Gymnasium*). A todos los alumnos se les evaluó mediante tres versiones de los problemas propuestos por Verschaffel *et al*. (1994):

- Condición 1 y 1A: la primera de ellas se corresponde con la versión original, mientras que en la segunda se incluyó una frase de alerta específica en cuatro problemas.

> -**Problema del corredor y Problema de la cuerda***:*
> *"piénsalo detenidamente antes de pasar al siguiente problema"*
> **-Problema de la escuela:**
> *"haz un esquema antes de responder"*
> ***-Problema del grifo:***
> *"mira cuidadosamente el dibujo"*

- Condición 2: introdujeron de nuevo el cuestionario, que habían empleado en el primer estudio, destinado a evaluar el grado de dificultad de la tarea.
- Condición 3: al comienzo de la tarea, incluyeron una señal de alerta genérica y al final de cada problema el cuestionario al que nos acabamos de referir.

> *"Ten cuidado. Algunos problemas no son tan sencillos como parecen. De hecho, es cuestionable que algunos de los problemas se puedan resolver"*.

Los resultados de este último estudio mostraron que la media de éxito fue sensiblemente superior en todos los problemas alcanzando el 44,3%. No obstante, el análisis de varianza mostró que sólo fueron significativas la variable Tipo de Escuela (24,9% vs. 48% vs. 56,2%) y la diferencia de medias entre la Condición 1 y la 1A en la que se había añadido señales de advertencia específicas en cuatro problemas (M=1,28 vs. M=1,70, respectivamente).

Tabla 7

Porcentajes globales en el tercer estudio de Reusser y Stebler (1997)

TIPOS DE PROBLEMAS	RESULTADOS GLOBALES
CUERDA	34,7%
CORREDOR	40,04%
ESCUELA	34%
EDAD	23,8%
BOTELLA	30,2%
TABLONES	29,6%
AGUA	59,6%
AMIGOS	38,8%
AUTOBÚS	77,6%
GLOBOS	74,4%

En conclusión, los resultados de Reusser y Stebler indicaron que ciertas variaciones en la tarea, como la inclusión de señales de alerta específicas, la discusión mediada en clase y el nivel del centro educativo de procedencia de los alumnos, afectaron positivamente a los procedimientos de resolución de los alumnos. Aunque éstos resultados apuntaron a la fuerte influencia de factores de tipo educativo, como la figura del mediador y el nivel del centro de procedencia, desconocemos las diferencias en la forma de trabajar las matemáticas de los tres tipos de escuela, por lo que no podemos ofrecer datos adicionales.

Retomando dos de las variables estudiadas por Reusser y Stebler (1997), el efecto de presentación de la tarea y el nivel educativo de los alumnos, Yoshida *et al.* (1997) propusieron un nuevo trabajo con 91 alumnos japoneses de 5º de E.P. Para ello crearon dos condiciones experimentales: en la primera realizaron el estudio de réplica (cuyos resultados pueden consultarse en la Tabla 6, p. 68) y en la segunda incluyeron una señal de alerta genérica:

> "e*l test contiene algunos problemas que son difíciles o imposibles de resolver porque el enunciado es complejo o no es suficientemente claro. Cuando encuentres algo complejo o que no esté claro, escríbelo y explica porque crees que no serás capaz de resolver el problema"* (p. 334).

Los resultados obtenidos con los estudiantes japoneses fueron idénticos a los encontrados años antes en Bélgica (Verschaffel *et al.*, 1994), a pesar de que estos alumnos suelen puntuar más alto en las evaluaciones de cálculo y resolución de problemas verbales rutinarios (ver p.e., De Corte, Greer y Verschaffel, 1996; Robitaille y Travers, 1992; Stevenson Chen, y Lee, 1993; Stevenson y Stigler, 1992). Asimismo, la introducción de una señal de alerta produjo un aumento de las respuestas correctas de tan sólo el 5% y no significativo, en la misma línea que habían hallado Reusser y Stebler en su tercer estudio (1997). En definitiva, esta investigación viene a confirmar que la simple advertencia acerca de la complejidad de los problemas y la competencia de cálculo *per se* no resultan suficientes para que los alumnos activen y apliquen correctamente sus conocimientos acerca del mundo real.

Finalmente, Verschaffel *et al.* (1999) realizaron un último estudio, con 64 niños belgas de la misma edad de 5º de E.P., llevado a cabo en dos fases: la condición de réplica (ver Tabla 6, p. 68) y el estudio de intervención. Centrándonos en este último, seleccionaron a 30 de los estudiantes que habían resuelto la tarea de forma incorrecta y les pidieron que leyeran de nuevo cada uno de los problemas y su propia respuesta. Una vez hecho esto, el primer andamiaje (A1) consistió en provocar el conflicto cognitivo, confrontando su solución con la de un supuesto compañero que había respondido al mismo problema de una forma realista. El segundo andamiaje (A2) intentaba *modelar* una respuesta correcta realista (ver Cuadro 5).

Cuadro 5. Estudio de intervención realizado por Verschaffel, De Corte y Lasure (1999)

Problema de los Amigos

- A1: Uno de tus compañeros dice que es imposible resolver ese problema. ¿Es correcto?
- A2: ¿Puedes decirme el nombre de un buen amigo de clase? Imagina que tú y "…" dais una fiesta juntos y que ambos invitáis a vuestros mejores amigos. Imagina que tus 5 mejores amigos van y los 6 mejores amigos de … van también. ¿Estás seguro de que habrá 11 invitados en la fiesta?

Problema de los Tablones

- A1: Uno de tus compañeros respondió "4x2 = 8; Steve puede obtener 8 tablones.
- A2: ¿Puedes dibujar los tableros? ¿Puedes ahora dibujar qué ocurrirá con los tableros siguiendo la historia? ¿Puedes ver en tu dibujo cuántos tableros de un metro podrá Steve obtener de los 4 tableros?

El efecto de ambos andamiajes resultó significativo. El primero produjo un aumento del porcentaje de respuestas correctas del 23% a 39% y, tras el segundo, el porcentaje alcanzó el 57%. En definitiva, al igual que Reusser y Stebler (1997) habían mostrado en el segundo estudio, la figura de un mediador en el proceso de resolución aumentaba casi un 40% las respuestas realistas de los alumnos.

En conclusión, todos estos trabajos confirman sistemáticamente el hecho de que los alumnos poseen los conocimientos necesarios para resolver este tipo de problemas, pero no consideran que sea adecuado aplicarlos en un contexto escolar. En el siguiente apartado, tendremos ocasión de profundizar acerca de las tareas escolares habituales e intentaremos explicar el origen de las creencias erróneas que llevan a los alumnos a no dotar de sentido sus respuestas.

2.3. ¿DÓNDE SE ENCUENTRA EL ORIGEN DEL FRACASO EN LOS PROBLEMAS NO-RUTINARIOS? EL CONTRATO DIDÁCTICO IMPLÍCITO

Son muchos los indicios que a lo largo de los distintos trabajos nos llevan a concluir que el fallo de los estudiantes a la hora de realizar *consideraciones realistas* puede tener su origen en las prácticas habituales escolares, más que en la incapacidad de los estudiantes de considerar los aspectos realistas de los problemas. En efecto, en el aula de matemáticas se desarrollan de forma *implícita* un conjunto de normas, reglas y creencias que afectan por igual a los alumnos y a los profesores y que se conocen con el nombre de *contrato didáctico* (p.e., Brousseau, 1984; Sarrazo, 1996).

La revisión exhaustiva de la literatura nos ha permitido extraer algunas de las características de los problemas escolares que estarían originando este conjunto de creencias incorrectas que llevan a los alumnos a proceder de un modo estereotipado:

- Son problemas que se solucionan con una o varias operaciones aritméticas simples (p.e., De Corte y Verschaffel, 1985, Greer, 1997; Hernández, 2004; Reusser, 1988; Reusser y Stebler, 1997; Stigler *et al.*, 1986; Verschaffel *et al.*, 1994).
- Suelen presentarse en los libros de texto agrupados en función del algoritmo que están estudiando (p.e., Säljö y Wyndhamn, 1987; Schoenfeld, 1991; Sowder, 1988; Stern, 1992; Stigler *et al.*, 1986).
- La operación aritmética puede ser fácilmente detectada por medio de estrategias de resolución superficiales como *las palabras claves* (ver p.e., Hegarty *et al.*, 1995; Nesher y Teubal, 1975; Verschaffel *et al.,* 1992). En

breve, este procedimiento consiste en que los niños seleccionan palabras aisladas en el texto (p.e., ganar, gastar, juntos…) y las asocian directamente con una operación aritmética, sin necesidad de comprender el enunciado (p.e., Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Fuson, 1992; Orrantia, 2003; Orrantia, González y Vicente, 2005; Verschaffel y de Corte, 1997). Otras estrategias pueden estar aún más descontextualizadas. Así, como apuntaba Sowder (1988), algunos estudiantes se guían únicamente por los números que aparecen en el problema (p.e., si los números son 78 y 54 lo más probable es que la operación sea una suma o multiplicación, pero si son 78 y 3 la operación más probable será la división) y otros simplemente seleccionan los números y se dejan guiar por la operación más reciente que han estudiado o aquélla en la que se sienten más competentes (p.e., Reusser, 1988; Reusser y Stebler, 1997).

- Incluyen exclusivamente la información numérica que es necesaria para resolver el problema (p.e., De Corte y Verschaffel, 1985; Hernández, 2004; Littlefield y Rieser, 1993; Orrantia *et al.*, 2005; Puchalska y Semadeni, 1987; Stigler *et al.*, 1986). Los problemas que omiten datos o incluyen información extra no suelen estar presentes en el contexto escolar y, cuando aparecen, este hecho suele estar especificado en el propio enunciado.
- Los contextos que describen suelen ser típicos y en algunos casos irreales (i.e., describen situaciones que serían imposibles en la vida real), lo que contribuye a que los niños no les presten atención (Cooper, 1992, 1994). A modo de ejemplo, en algunos problemas el protagonistas compra 12 balones, en otros se incluyen vehículos que se mueven siempre a velocidades constantes, el resultado que se obtiene tras hallar el peso de un animal puede

ser totalmente desproporcionado al habitual y así podríamos continuar aludiendo a otras muchas situaciones.

En efecto, la falta de diversificación en las tareas escolares ha contribuido a que los alumnos construyan una serie de creencias erróneas, que si bien les permiten resolver correctamente los problemas estándar, les llevan a excluir su conocimiento del mundo real cuando tienen que resolver los problemas no-rutinarios (Reusser y Stebler, 1997). Algunas de estas creencias son:

- Todos los problemas presentados en la escuela son resolubles y tienen sentido (p.e., Baruk, 1989; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1989a).
- No es cuestionable si un problema escolar se puede resolver o no.
- No es necesario comprender los problemas para resolverlos (p.e., Raddatz, 1983; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1992; Stern, 1992).
- Todos los problemas disponen de la información suficiente para resolverlos y, viceversa, todos los datos numéricos deben utilizarse.
- Todos los problemas requieren un cálculo exacto (p.e., Cooper, 1992, 1994; Sowder, 1992; Treffers y De Moor, 1990).
- Solo hay una respuesta, numérica y precisa, para cada problema.

Asimismo, los alumnos construyen modelos basados en conocimientos erróneos que aplican cuando tienen que resolver los problemas. En el caso de las estructuras aditivas, tienden a creer que la acción de "juntar todo" es sinónimo de adición (como ocurre en el problema del pastor o en el del agua, p. 64) y también que las estructuras multiplicativas son proporcionales (véase, por ejemplo, el problema de la cuerda, de la escuela, del corredor, p. 64). Cuando la historia del problema viola estas expectativas, la mayoría de los alumnos responde erróneamente.

No obstante, el concepto de *contrato didáctico* alude expresamente al conjunto de creencias y normas implícitas que estarían afectando por igual a los alumnos y a los profesores. ¿Sería, pues, razonable asumir que las personas de edad adulta y profesionales de la enseñanza cometieran los mismos errores que los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria?

Esta interesante cuestión ha sido objeto del trabajo realizado por Verschaffel, De Corte y Borghart (1997). En este estudio, evaluaron a 332 alumnos universitarios de Formación de Profesorado empleando 7 de los problemas no-rutinarios del cuestionario original de 1994 y sus respectivas versiones estándar, en dos condiciones diferentes.

En la primera, solicitaron a los estudiantes de magisterio que *resolvieran* estos problemas y que *predijeran* los posibles errores que esperaban encontrar en alumnos de 5º curso. En realidad, el objetivo era evaluar, de forma encubierta, las soluciones espontáneas. De acuerdo con el procedimiento seguido en Verschaffel *et al*., (1994, p. 57), las respuestas fueron categorizadas en Realistas (*RR*) y No-Realistas (*RNR*).

En la segunda condición, la tarea consistía en *corregir y valorar* (con una puntuación de 0, ½ ó 1) las respuestas que habían ofrecido dichos estudiantes de 5º curso. En cada problema, incluyeron cuatro soluciones que procedían, supuestamente, de los alumnos: Respuesta Realista, Respuesta no Realista, Error Técnico y Otras Respuestas.

Como esperaban, los estudiantes de magisterio demostraron una fuerte tendencia a excluir el conocimiento del mundo real en sus repuestas. Tan sólo el 48% de las mismas pudieron ser consideradas realistas, un porcentaje bajo si tenemos en cuenta que el porcentaje de éxito de los estudiantes de 5º curso se situaba en el 17% (para consultar la tasa de éxito en cada problema ver Tabla 8). Esta misma disposición se vio reflejada también en sus correcciones. El 47% de las respuestas realistas fueron evaluadas con la puntuación máxima "1", el 6% recibió "½" y el 47% restante "0". En el extremo contrario, el 56% de las respuestas no-realistas fueron puntuadas con "1", el 26% con "½" y el 18% con "0".

Tabla 8

Porcentaje de Respuestas Realistas en el estudio de Verschaffel, De Corte y Borghart (1997)

TIPOS DE PROBLEMAS	VERSCHAFFEL ET AL. (1994)**	VERSCHAFFEL ET AL. (1997)
CUERDA	0%	37%
CORREDOR	3%	31%
ESCUELA	3%	48%
EDAD	3%	--
BOTELLA	3%	39%
TABLONES	13%	64%
AGUA	17%	--
AMIGOS	20%	29%
AUTOBÚS	49%	90%
GLOBOS	59%	--

*** Los datos de Verschaffel et al. (1994) se corresponden con un estudio anterior realizado con niños de 5º curso (ver p. 64).*

Ahora bien, ¿fueron consistentes las respuestas que los profesores generaron en la primera evaluación y las correcciones que realizaron posteriormente? En general, se encontró una fuerte relación entre sus respuestas espontáneas y las evaluaciones llevadas a cabo en la segunda prueba, pero conviene resaltar algunos datos especialmente interesantes:

- Los profesores que habían resuelto de una manera *No-Realista* los problemas, evaluaron el 89% de las respuestas no-realistas de los alumnos con la puntuación máxima y el 83% de las respuestas realistas como incorrectas. De hecho, en un mismo problema la consistencia de las evaluaciones fue muy alta, es decir, la combinación de una valoración positiva a la respuesta no-realista y una negativa a la respuesta realista sucedió en el 79% de los casos, lo que demuestra la solidez de su sistema de creencias. Si tomamos este último dato, se puede concluir que la mayoría de los profesores no fueron capaces de detectar los matices subyacentes a una respuesta realista.

- Sin embargo, los profesores que habían resuelto los problemas de forma *Realista*, fueron más versátiles en sus correcciones. Así, el 85% de ellos fue congruente y consideró correctas las respuestas realistas de los alumnos. Sin embargo, lo más interesante es que tan sólo el 33% valoró como incorrectas las soluciones no-realistas alternativas al mismo problema, el 42% le dio una puntuación intermedia (i.e., ½.) y el 10% lo hizo positivamente. En otras palabras, aunque los profesores valoraron con la puntuación máxima las respuestas realistas de los niños, la mayoría (52%) no penalizaron la respuesta no-realista porque consideraron que **esos problemas eran inadecuados** para alumnos de 5º curso. Desde su punto de vista, el objetivo prioritario de los problemas en la escuela elemental no es otro que los alumnos encuentren la operación aritmética adecuada para resolverlo y las soluciones de estos niños eran aritméticamente correctas.

En conclusión, este estudio reflejó que los alumnos y los profesores comparten el mismo sistema de creencias que les lleva a excluir su conocimiento del mundo real. Estas creencias están influyendo en la forma en la que los profesores enseñan y evalúan las tareas matemáticas y, consecuentemente, en el modo en que los alumnos aprenden.

3. Los Problemas de División con Resto: El Problema del Autobús

Los **problemas de división con resto** (DWR) son un claro ejemplo de que una misma expresión simbólica (p.e., 50/4) puede representar distintos problemas verbales y tener soluciones diferentes según la historia que se desarrolla en el problema. De hecho, una de las peculiaridades de este conjunto de problemas es, precisamente, que el problema no se acaba con la elección y ejecución de la operación. Por eso, aunque los alumnos no suelen tener dificultades para establecer que se trata de un problema de división, ni tampoco para ejecutar correctamente dicho algoritmo, responden incorrectamente debido a que no son capaces de interpretar la información numérica en función del mundo real.

Se pueden diferenciar cuatro tipos de problemas de división con resto (ver ejemplos en Tabla 9):

a) Resto no Divisible (RND): la respuesta correcta debe ser un número entero debido a la naturaleza no divisible de las cantidades, que no permiten su división en partes inferiores a la unidad.

b) Resto Divisible (RD): en contraposición al anterior, una vez finalizada la división, la naturaleza de las cantidades permite la extracción de decimales.

c) Respuesta Resto (RR): como su nombre indica, el problema alude al resto de la división, esto es, a la cantidad sobrante y no al cociente de la misma.

d) Reajustar Cociente Incrementándolo Parcialmente (RCIP): la peculiaridad de estos problemas proviene de que una vez finalizada la división, es necesario reajustar el cociente incrementándolo, para poder dar cabida al resto.

Tabla 9

Tipos De Problemas De División Con Resto

	TIPO DE PROBLEMA	OPERACIÓN	SOLUCIÓN
RND	Ana tiene 50 galletas y quiere repartirlas en 4 cajas. ¿Cuántas galletas enteras pondrá en cada caja?	50/4	*12 galletas,* ya que las galletas que sobran –el resto- no le permiten llenar una caja entera
RD	Ana tiene 50 galletas y quiere repartirlas en 4 cajas. Si le dejamos partir las galletas ¿cuántas galletas pondrá en cada caja?	50/4	*12 galletas y medida* en cada caja.
RR	Ana tiene 50 galletas y quiere repartirlas en 4 cajas. Si quiere poner el mismo número de galletas en cada caja ¿cuántas galletas le sobrarán?	50/4	*2 galletas,* ya que la pregunta hace referencia a las galletas que sobran.
RCIP	Ana tiene 50 galletas y quiere repartirlas en 4 cajas. Para guardar todas las galletas enteras sin que le sobre ninguna, ¿cuántas galletas pondrá en cada caja?	50/4	Como no puede sobrar ninguna galleta ▪ *12 galletas en dos cajas y 13 en las otras dos* ▪ *12 galletas en 3 cajas y 14 galletas en la otra.*

Algunos de los datos iniciales sobre los problemas de división con resto provienen de las Evaluaciones Nacionales realizadas en Estados Unidos. En concreto, la Tercera Evaluación Nacional sobre el Progreso Educativo incluyó el ya mencionado *problema del autobús* (NAEP, 1983; Carpenter *et al*, 1983):

> *Un autobús del ejército tiene 36 plazas. Si van a trasladar 1128 soldados ¿cuántos autobuses se necesitan*?

Aproximadamente el 70% de los estudiantes de 13 años seleccionó y realizó correctamente los cálculos de la división. Sin embargo, tan sólo el 23% de los niños respondió que el número total de autobuses necesarios para trasladar a todos los soldados eran 32, ajustando adecuadamente el cociente para que todos los soldados pudieran ser transportados. El 19% respondió que precisaban 31 autobuses (dejando fuera 12 soldados) y el 29% restante anotó como solución 31,33 autobuses.

Asimismo, el *Test de Matemáticas del Programa de Evaluación de California* (CAP, 1983) llevado a cabo con alumnos de la misma edad (Silver, 1986) encontró resultados muy similares (i.e., tan sólo el 33% de las respuestas fueron correctas). En ambos trabajos, la conclusión principal fue que el fallo de los estudiantes se producía en la interpretación de la respuesta.

Por tanto, desde esta perspectiva, cuando nos referimos a 'fallo en la interpretación de la respuesta' estamos haciendo alusión al hecho de que los alumnos ofrecen una respuesta que es aritméticamente correcta, pero que no tiene sentido en el mundo real, bien porque los alumnos no han sido capaces de interpretar su respuesta, bien porque lo han hecho de manera incorrecta (p.e., Cai y Silver, 1995; English, 1998; English y Halford, 1995; Gravemeijer, 1997; Greer, 1993; Li y Silver, 2000; Silver *et al.*, 1992, 1993; Verschaffel y De Corte, 1995, 1997). En esta línea, destacan especialmente los trabajos realizados por Edward Silver y colaboradores, que estuvieron orientados inicialmente a analizar las interpretaciones de los alumnos de los distintos tipos del resto RND, RR y RCIP (p.e., Silver, 1988; Silver *et al.*, 1992) y, en una etapa posterior, trasladaron el énfasis a los problemas de reajustar cociente (RCIP) debido a su mayor dificultad (Cai y Silver, 1994; Silver *et al.*, 1993). Sin embargo, haremos alusión también a los estudios que han estado preocupados por otros factores inherentes a los propios problemas como son el contexto de presentación de los mismos (p.e., DeCurcio y Franco, 1997), el tipo de información que incluyen (p.e., Cooper, 1998) y la estructura semántica o el modelo de la división empleado (p.e., Lago *et al*., en revisión; Rodríguez *et al*., en revisión).

Los primeros estudios que estudiaron los distintos tipos de resto pusieron de relieve que las interpretaciones asociadas a cada uno de ellos no implicaban el mismo grado de dificultad para los alumnos. Silver *et al.* (1988, 1992) se embarcaron en una evaluación a gran escala empleando un único problema con distintas cuestiones relacionadas. En todas ellas, era necesario aplicar la misma operación aritmética (i.e., 730÷50), pero los problemas tenían soluciones distintas porque implicaban distintas consideraciones del resto (i.e., RND, RR y RCIP).

PROBLEMAS DE DIVISIÓN CON RESTO

El profesor de ciencias de la escuela Marie Curie ha recibido 730 ranas. Las ranas se guardarán en tanques. Si cada tanque contiene 50 ranas.

A. **RND**: ¿Cuántos tanques pueden ser llenados completamente con ranas?

B. **RR**: Si todos los tanques usados están llenos de ranas, ¿cuántas ranas quedarán fuera?

C. **RCIP** ¿Cuántos tanques se necesitan para guardar todas las ranas?

PROBLEMAS DISTRACTORES AJENOS A LA DIVISIÓN

X. Si la longitud promedio de las ranas es de 50 mm., ¿cuántos centímetros tendrán aproximadamente 6 ranas?

Y. Las tapaderas de cuatro tanques llenos no se pusieron y escaparon algunas ranas. Ahora hay 186 ranas en esos tanques. ¿Cuántas escaparon?

Los resultados indicaron que los problemas DWR resultaban más sencillos cuando la pregunta se refería al resto (55%). A continuación y en orden de dificultad creciente, se situaron los problemas en los que se preguntaba únicamente por el cociente (48%) y, finalmente, los problemas que requerían el incremento del cociente en función del resto (43%). No obstante, la mayor o menor dificultad de cada tipo de resto variaba dependiendo de cuál fuese el orden de presentación, de modo que el rendimiento en cualquiera de ellos mejoraba significativamente cuando era precedido por los otros dos (ver Tabla 10). De ahí que Silver *et al.* concluyeran que la experiencia con otros problemas *similares* hacía que se incrementase la atención y la sensibilidad a la historia del problema.

A pesar de los resultados obtenidos, a nuestro juicio, las conclusiones de este trabajo son limitadas porque proceden de la aplicación de un único problema con diferentes cuestiones relacionadas (i.e., que aluden a los diferentes significados del resto) en un formato de elección múltiple, en el que no se pide a los niños explícitamente que interpreten su respuesta (Rodríguez *et al.*, en revisión). Por tanto, una vez que los niños habían seleccionado la opción correcta en los primeros problemas, tenían menos opciones disponibles para los restantes y podrían llegar a tener disponible la solución, aún cuando no hubieran comprendido el problema.

Tabla 10

Mejoras en el rendimiento en función de la posición ocupada

	1ª POSICIÓN	3ª POSICIÓN
RR	47%	68%
RND	34%	64%
RCIP	32%	47%

Tras estos primeros trabajos, las investigaciones pasaron a analizar diversos factores relacionados con los problemas RCIP debido a su mayor dificultad. En concreto, Silver *et al.* (1993) indicaron que el tamaño del resto no parecía ser un factor decisivo para mejorar la interpretación de las soluciones aritméticas de estos problemas.

> La pequeña liga de Clearview va a participar en un juego de Piratas. Hay 540 (532 ó 554) personas, incluyendo jugadores, entrenadores y padres. El viaje lo realizarán en autobús. Si en cada uno pueden ir 40 personas. ¿Cuántos autobuses serán necesarios?

Lo más interesante de este trabajo es que solicitaron a los niños que interpretaran su respuesta en un formato abierto de respuesta. Observaron que sólo se mostraban capaces de hacerlo correctamente un tercio de los participantes, ya que el 9% hacían interpretaciones inadecuadas y más de la mitad las omitían. El tamaño de resto sólo influyó en la dificultad de los cálculos (i.e., siendo más sencilla la situación "½", es decir, cuando el resultado de efectuar los cálculos completos de la división daba como solución 13,5 autobuses), pero no en la mayor o menor dificultad de interpretación. Los datos confirmaron, de nuevo, que la mayor barrera para los escolares no derivaba de los cálculos, sino de la dificultad para *dotar de significado* las soluciones numéricas.

Asimismo, la consistencia de estos resultados se ha demostrado incluso en estudiantes asiáticos, a pesar de que señalamos en un apartado previo que éstos suelen destacar en tareas de cálculo y resolución de problemas rutinarios (p.e., De Corte *et al.*, 1996; Robitaille y Travers, 1992; Stevenson *et al.*, 1993; Stevenson y Stigler, 1992). En concreto, Cai y Silver (1994) evaluaron a 186 alumnos chinos de 5º y 6º curso de E.P. en dos tareas: una prueba de cálculo numérico y otra que contenía una versión similar al problema del autobús.

La tasa de éxito en la tarea de cálculo fue superior a la hallada un año antes por Silver *et al.* (1993) en alumnos americanos (i.e., 80% vs. 60%, respectivamente); sin embargo, tan solo el 20% de los alumnos japoneses resolvió con éxito el problema del autobús, lo que no difería sustancialmente de los resultados que se habían obtenido años antes en la Tercera Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP, 1983).

Sin embargo, no todos los autores han estado de acuerdo en aceptar que el fracaso de los estudiantes proviene únicamente del fallo en la interpretación de la respuesta. Así, DeFranco y Curcio (1997) intentaron verificar si la integración de los problemas en un contexto más realista y distinto del meramente escolar ayudaría a que los niños pudieran resolver adecuadamente estos problemas. Con este objetivo, evaluaron a 20 niños de 6º curso de E.P. empleando dos versiones diferentes del problema del autobús, una presentada en un contexto restrictivo (o escolar) y otra integrando el problema en una situación que los niños debía resolver participando activamente.

En el denominado contexto restrictivo, los alumnos eran entrevistados individualmente y se les pedía que resolvieran el siguiente problema:

> 328 jubilados van a salir de viaje. Si en cada autobús pueden sentarse 40 personas. ¿Cuántos autobuses serán necesarios para que todos los jubilados puedan salir de viaje?

En la segunda parte del estudio, que se corresponde con un contexto más realista, los niños tenían que solicitar un medio de transporte para asistir a una fiesta con sus compañeros llamando a la compañía de transporte. Los alumnos tenían disponibles, en una hoja impresa, los datos principales del acontecimiento y el problema que tenían que resolver:

DATOS

Día de la fiesta: Viernes, 15 de abril

Hora: 4-6 p.m.

Lugar: Restaurante Ricardo

Números de niños que asistirán a la fiesta: 32

PROBLEMA

32 niños irán al restaurante, por lo tanto necesitamos un transporte. Tenemos que solicitar minibuses. Cada minibús tiene 5 asientos y está prohibido que vayan más de 5 niños en cada uno. ¿Cuántos minibuses necesitamos?

Una vez que lo sepas debes llamar al 998-2323 para solicitarlos.

Tan sólo dos niños respondieron correctamente a la versión escolar del problema del autobús. De los dieciocho restantes, diecisiete hicieron interpretaciones incorrectas del resto, bien porque no lo consideraron en la respuesta, bien porque redondearon hacia abajo el resultado decimal. Sin embargo, en el contexto alternativo realista, dieciséis niños realizaron la llamada y resolvieron la situación. En concreto, trece solicitaron directamente 7 minibuses y los otros tres reclamaron 6 añadiendo que necesitarían otro medio alternativo, un coche o un vehículo pequeño, porque dos compañeros se quedaban fuera.

En suma, este trabajo puso de manifiesto que los niños son capaces de aplicar sus conocimientos del mundo real cuando los problemas de división con resto se plantean en un contexto realista, lejos del contexto restrictivo de la clase de matemáticas. No obstante, debemos señalar que los resultados de este trabajo pueden estar sesgados por el hecho de que la complejidad de cómputo del problema en cada uno de los entornos fue muy diferente (i.e., $32 \div 5$ vs. $328 \div 40$, respectivamente). De acuerdo con Silver *et al.* (1993) es posible que surjan interacciones entre la complejidad de los cálculos y el razonamiento, en el sentido de que la simplicidad de cómputo puede favorecer la tendencia a interpretar las respuestas numéricas (ver también Li y Silver, 2000).

Un segundo trabajo, que alude a la importancia que tienen las situaciones descritas en los problemas, proviene de una interesante reflexión crítica realizada por Barry Cooper (1998) sobre la versión inglesa del problema del autobús, que fue empleada en el Test Nacional Piloto sobre Matemáticas en Gran Bretaña (SEAC, 1992), y que es conocida como el problema del ascensor:

Esta es la señal que hay en el ascensor de unas oficinas: “Este ascensor puede transportar a 14 personas”. Por la mañana, 269 personas desean utilizarlo para subir. ¿Cuántas veces debe el ascensor subir y bajar?

Si tomamos como modelo el problema del autobús, parece razonable que la respuesta “19 ó 19.2 veces” no pueda ser aceptada como correcta, por el mismo motivo que no podíamos considerar válida la respuesta 31 ó 31,33 autobuses. Por tanto, la ‘interpretación adecuada’ de la respuesta numérica debería ser 20 veces. Sin embargo, aunque aparentemente ambos problemas responderían a la misma estructura, nos gustaría reflejar algunas de las reflexiones que compartimos con Cooper (1998). Si el objetivo de los problemas no-rutinarios es favorecer que los alumnos puedan razonar ante los problemas verbales empleando su conocimiento más general, podemos aducir que la respuesta *supuestamente correcta* (i.e., 20 veces) implicaría que el ascensor subió y bajó siempre lleno excepto en el último viaje.

No obstante, no tenemos ninguna garantía de esto y no es sencillo que en un bloque de oficinas esto suceda así. Lo más lógico sería pensar que el ascensor no siempre acogió al número máximo de personas en todos los trayectos e, incluso, que algunas de esas personas pudieron ocupar más espacio del esperado (p.e., si alguna de ellas usaba una silla de ruedas). Por último, existe también la posibilidad de que algunas personas decidieran no esperar y subir por las escaleras. Según Cooper, la versión inglesa del problema del autobús, tiene un formato abierto y múltiples respuestas podrían considerarse correctas. La respuesta ’20 veces’, aunque da cuenta del resto de la división, sería igualmente inapropiada porque no contemplaría muchas de las alusiones que acabamos de mencionar y que son las que realmente se producen en una situación real.

A nuestro juicio, este planteamiento es sumamente interesante porque demuestra cuán diferentes pueden ser dos problemas no-rutinarios incluso cuando comparten la misma estructura y operación aritmética, simplemente porque el tipo de información que se incluye en el problema ha cambiado. En este caso, como hemos comentado, múltiples respuestas podrían considerarse correctas. Es más, el incremento del cociente no sería la respuesta realista al problema.

Si extrapolamos esta reflexión al estudio general de los problemas no-rutinarios, las discrepancias entre los problemas se verían incrementadas aún más, ya que los problemas que habitualmente se están utilizando no comparten ni la operación aritmética, ni la estructura, ni la información disponible en el problema.

Por último, los trabajos realizados por Rodríguez *et al*. (en revisión) y Lago *et al*. (en revisión) han intentado determinar si las dificultades de los niños provenían de una representación inicial inadecuada del problema o de la interpretación de la respuesta final obtenida en los cálculos, tal y como Silver y colaboradores habían sugerido. Además, han estudiado variables que son intrínsecas a la formulación de los problemas y que han probado afectar a su nivel de dificultad, como son la Estructura Semántica y el Modelo de la división.

En concreto, en el estudio de Rodríguez *et al.* plantearon a alumnos de 1º de E.S.O. problemas de división de Grupos Iguales y Comparación con cuatro tipos de resto: Resto Divisible (RD), Resto No Divisible (RND), Respuesta Resto (RR) y Reajustar Cociente Incrementándolo Parcialmente (RCIP). Los resultados mostraron, en primer lugar, que la dificultad de los problemas se vio afectada por la Estructura Semántica, siendo más sencillos los problemas de Grupos Iguales que los de Comparación (i.e., 68% vs. 48%, respectivamente). Asimismo, a pesar de que Silver y colaboradores habían concluido que las dificultades de los alumnos no provenían de la elección de la operación de la división, en este estudio se comprobó que los alumnos tendían a aplicar correctamente dicho procedimiento en el 95% de las ocasiones en las que tenían éxito en los problemas de Grupos Iguales, mientras que tan sólo lo hacían en el 68,8% de los ensayos correctos en los problemas de Comparación.

En segundo lugar, la dificultad de los problemas se vio también influida por el tipo de resto implicado. Así, los problemas RCIP fueron significativamente más complejos (i.e., 27%) que los problemas RD, RR y RND (i.e., 65% vs. 65% vs. 75%, respectivamente). Este resultado estaría indicando que los problemas RD, RR y RND son percibidos por los alumnos como problemas rutinarios (ver también Lago, Rodríguez, Hernández y Jiménez, 2005), en contra del orden de dificultad propuesto por Silver *et al*. (1988, 1992).

En el trabajo realizado por Lago *et al.* estudiaron los cuatro tipos de resto que se habían empleado en el estudio anterior (i.e., RCIP, RR, RD y RND) en problemas de Grupos Iguales formulados en términos Partitivos y de Medida. Sorprendentemente, teniendo en cuenta que los participantes de este trabajo eran alumnos de 1º de ESO, el éxito fue significativamente mayor en los problemas Partitivos que en los de Medida (i.e., 78,5% vs. 50%). En concreto, en los problemas de Medida encontraron dificultades en el uso de los decimales en los problemas RND, RCIP y RR.

Con respecto a los tipos de resto, los resultados concuerdan con los obtenidos por Lago *et al*. (2005) y Rodríguez *et al.* (en revisión). Así, los problemas RCIP fueron significativamente más complejos (i.e., 66,8%) que los problemas RD, RR y RND (i.e., 81,5% vs. 85,5% vs. 81,5%). Las conclusiones que se desprenden de este trabajo estarían apoyando que, efectivamente, las dificultades de los niños provienen de los problemas RCIP, por lo que no podemos hablar de dificultades generales en los problemas de división con resto.

Las conclusiones de estos dos trabajos estarían apoyando que las dificultades de los niños en los problemas de división con resto provenían de una representación inicial inadecuada y no de la dificultad para interpretar la respuesta obtenida tras los cálculos. Esta afirmación se apoya en que: (1) en ambos estudios, prácticamente todos los niños justificaban su respuesta; (2) el decremento del éxito, en el primer estudio, en los problemas de comparación y, en el segundo, en los problemas de grupos iguales de medida, indicaba que los errores de los alumnos procedían de que no eran capaces de representar adecuadamente la relación entre las cantidades; (3) la diferencia de éxito encontrada entre los problemas de división según el tipo de resto implicado, ya que los problemas RD, RND y RR eran más sencillos que los RCIP.

En suma, estas investigaciones han puesto de manifiesto que la dificultad de los problemas de división con resto estaría mediatizada por la Estructura Semántica del problema y el Modelo de la división subyacente.

4. ALGUNAS CRÍTICAS Y CONCLUSIONES GENERALES AL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS NO-RUTINARIOS

A modo de recapitulación, nos gustaría incidir en la consistencia de los resultados obtenidos desde que se publicara el ya clásico trabajo de Baruk (1988). A pesar de sus polémicos resultados y de la gran cantidad de investigación que la difusión de su libro *L'âge du capitaine* (*La edad del capitán*) suscitó, los resultados de las investigaciones posteriores han venido confirmando igualmente el fracaso de los niños cuando tienen que resolver problemas no-rutinarios aplicando sus conocimientos sobre las situaciones cotidianas. No obstante, el avance que esta línea de investigación ha tenido nos ha permitido superar la sensación inicial de desconcierto que supuso para la comunidad científica pensar que la causa podría tener su origen en la perdida del *sentido común* por parte de los alumnos.

Hoy en día sabemos que el origen de esta dificultad parece provenir de nuestro propio sistema de enseñanza. Algunas investigaciones, variando el contexto en el que se presentan los problemas (i.e., discusión en clase, andamiaje…) o, incluso, introduciendo la metodología de recogida de datos basada en la entrevista individual han conseguido que alumnos que en una fase previa habían errado en hallar la solución a los problemas se dieran cuenta de que su respuesta era inadecuada e incorrecta. Las explicaciones que los propios niños ofrecían en las entrevistas indicaban que los problemas "realistas" y los "escolares" no estaban regidos por las mismas reglas. Por tanto, la respuesta en uno y otro caso serían distintas (p.e., Caldwell, 1995; Reusser y Stebler, 1997).

Estas concepciones están fuertemente arraigadas en un sistema de creencias sobre las características de los problemas verbales y las directrices que deben seguirse para resolverlos con éxito. Sin embargo, estos procedimientos resultan inadecuados e incluso denotan una conducta “irracional“ cuando se aplican a situaciones que son altamente significativas, como son los problemas no-rutinarios. Por último, es interesante señalar la consistencia de los resultados en las distintas culturas.

A pesar de todos estos avances en la investigación, en páginas precedentes hemos venido adelantando que hay algunos aspectos cruciales que no están siendo considerados adecuadamente:

1) *Los problemas no-rutinarios son problemas verbales aritméticos.*

   Los estudios de Greer (1993) y Verschaffel *et al.* (1994) y las sucesivas réplicas realizadas posteriormente han enfatizado la creación de nuevas situaciones, basadas en el mundo real que son atípicas en el contexto escolar. No obstante, dichos problemas no solamente están difiriendo entre sí en función de esa variable. De hecho, uno de los objetivos del marco teórico que hemos elaborado ha tenido por objeto mostrar las diferencias entre los distintos problemas no-rutinarios. Así, la operación aritmética implicada constituye una variable que hemos utilizado para clasificar los problemas según su estructura aditiva o multiplicativa y hemos aludido a que entre unos y otros puede haber distinto grado de dificultad. Igualmente, la estructura semántica ha probado afectar enormemente a los niveles de ejecución en los problemas de División con Resto. Consideramos que este tipo de variables deben ser estudiadas sistemáticamente en los problemas no-rutinarios.

2) *El tipo de información que incluyen y las situaciones que describen tienen diferentes demandas.*

   El tipo de información que los problemas incluyen en el enunciado (i.e., si son absurdos o irresolubles, ambiguos, están resueltos en el propio enunciado, contienen datos superfluos…) es otra variable que tampoco ha sido considerada suficientemente. A modo de ejemplo, el conocido problema del pastor y el de los amigos podrían considerarse problemas aditivos que comparten la misma estructura semántica de combinación. No obstante, difieren drásticamente en el tipo de información que ofrecen en su enunciado. Tanto es así, que el primero de ellos entraría en el grupo de los problemas irresolubles porque la información incluida en el enunciado no es relevante y no permite alcanzar una solución, mientras que para el segundo son admisibles múltiples soluciones al no conocer exactamente el número de amigos que pueden tener Carl y Georges (incluidos ellos mismos en la categoría de amigos). La elección de un procedimiento correcto estaría, pues, mediatizado por la información que nos han proporcionado en el enunciado y esta variable debe considerarse junto con los aspectos más matemáticos.

3) *La descripción de situaciones en los problemas no-rutinarios que pueden no ser conocidas por los alumnos o de las que pueden tener conocimientos erróneos.*

   Parece razonable pensar que los alumnos de 10 años o más saben que un autobús no puede partirse en dos o que unir mediante nudos varios trozos de cuerda disminuye su longitud, pero es posible que algunos alumnos no conozcan qué factores están implicados en el aumento del volumen de los líquidos (i.e., el problema del grifo) o que tengan ideas erróneas que les lleven a pensar que la temperatura del agua aumenta si mezclamos dos recipientes de agua caliente (i.e., el problema del agua). Si vamos a utilizar distintas situaciones para medir si el razonamiento de los niños es adecuado a cada una de ellas, tendremos que estar seguros de que éstas sean cercanas y conocidas para los alumnos.

4) *La metodología de recogida de los datos.*

Todos los estudios han empleado cuestionarios de aplicación colectiva, aún cuando ellos mismos han reconocido expresamente que se producen *falsos negativos*. En efecto, muchos de los niños que no habían resuelto alguno de estos problemas explicaban en entrevistas posteriores que su dificultad provenía de que no habían sido capaces de encontrar una respuesta numérica adecuada cuando operaban y ellos suponían que esto era lo que debían hacer. La entrevista colectiva no nos aporta datos explicativos acerca del fracaso de los estudiantes. Por tanto, parece claro que la metodología más apropiada debe estar basada en la entrevista individual.

5) *El contexto de evaluación.*

Con contexto de evaluación nos referimos al modo en el que presentamos la tarea a los niños. Como ya hemos comentado, algunos contextos pueden considerarse restrictivos, ya que los niños los asocian con las tareas escolares. A nuestro juicio, la aplicación de "cuestionarios" es un ejemplo de ello y tenemos más que suficientes pruebas de cómo los niños activan estrategias mecánicas y llegan a hallar una solución incluso para las situaciones más disparatadas. De hecho, ni la inclusión de señales genéricas de alerta o escalas tipos likert, ambas orientadas a prevenir a los alumnos acerca de la posible dificultad de los problemas, han afectado positivamente a los alumnos.

Han sido los estudios de intervención en los que se han incluido entrevistas, discusión colectiva en clase o andamiaje los que han conseguido mejores resultados. Si nos fijamos detenidamente en éstos últimos, la característica que comparten es que los alumnos deben razonar sobre procedimientos (i.e., los suyos propios o los de un supuesto compañero). Por ese motivo consideramos que es adecuado introducir nuevos contextos de evaluación alternativos.

6) El estudio de dos grupos de edad para ver las diferencias evolutivas entre ellos.

Si realizamos una revisión de los trabajos descritos, comprobaremos que la mayoría de ellos se ha centrado en evaluar grupos de alumnos del mismo nivel escolar. Los datos evolutivos con los que contamos provienen de los estudios con problemas absurdos y resultan contradictorios entre ellos (i.e., Baruk, 1985; Radattz, 1983). Por tanto, consideramos que sería interesante contrastar las posibles diferencias evolutivas, de tipo cuantitativo y cualitativo, que podría haber entre dos grupos de edad.

II. MARCO EXPERIMENTAL

1. OBJETIVOS Y PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS

El objetivo prioritario de esta investigación era profundizar en el estudio de los problemas no-rutinarios, intentando superar algunos de los inconvenientes que hemos ido recogiendo a lo largo de este trabajo. Para ello, hemos adoptado algunas decisiones previas que se han visto plasmadas en los siguientes objetivos específicos e hipótesis de trabajo:

1) *Estudiar la influencia del factor Estructura Semántica en los problemas no-rutinarios*.

Los estudios sobre los problemas verbales han revelado que ciertos factores como la operación aritmética implicada, la posición que ocupa la incógnita y la formulación verbal afectaban al grado de dificultad de los mismos. Ante la imposibilidad de incluir todas estas variables, ya que, entre otras cosas, alargarían en exceso las tareas que deberían ejecutar los alumnos, en la presente investigación hemos planteado problemas verbales no-rutinarios que comparten la misma operación aritmética (i.e., adición) y el lugar en el que hemos ubicado la incógnita (i.e., en el resultado), pero varían en su Estructura Semántica (i.e., *Cambio* o *Comparación*).

Consideramos que la Estructura Semántica influirá sobre los niveles de ejecución de los alumnos, así como en las justificaciones que acompañen a sus respuestas numéricas. En concreto, los problemas de *Cambio* resultarán más fáciles de resolver, puesto que las situaciones dinámicas que describen facilitan que los niños relacionen e interpreten adecuadamente la relación entre las dos cantidades del enunciado. Sin embargo, los problemas de *Comparación* serán más difíciles uno de los conjuntos se define en función de otro mediante sentencias relacionales complejas a partir de relaciones estáticas.

2) *Plantear distintos tipos de problemas no-rutinarios que describan escenarios cercanos a los niños*.

Uno de los objetivos principales de los estudios anteriores radicaba en comprobar si los niños eran capaces de razonar ciertas situaciones basadas en el mundo real. Sin embargo, algunas de las historias que describían los problemas creemos que eran poco familiares para los niños e, incluso, ésos podían tener conocimientos erróneos sobre ellas (p.e., ¿cómo se ve afectada la temperatura total de los líquidos cuando se mezclan dos recipientes de agua caliente?). Los problemas que hemos propuesto en este trabajo se caracterizan por describir situaciones cotidianas, pero que violan algunas creencias erróneas asentadas en los niños sobre determinados conceptos matemáticos. En concreto, según el Tipo de Información ofrecida en el Enunciado, hemos formulado los siguientes problemas:

- Irresolubles: en contra de la creencia de que *todos los problemas son resolubles o que* en *todos se encuentra la información suficiente para resolverlos.*
- Soluciones Múltiples: atenta a la convicción de que *hay una única solución numérica precisa.*

- La Solución no requiere Cálculo: contraria a la consideración de que *siempre se ha de aplicar una operación aritmética para resolver un problema.*
- Datos Irrelevantes: opuesta a la idea de que *todos los datos numéricos deben utilizarse para solucionar el problema*.

A la hora de hacer predicciones sobre el grado de dificultad de cada Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado, existen ciertas limitaciones, porque no contamos con estudios previos que hayan formulado sistemáticamente problemas que violen las creencias de los niños. No obstante, algunas de estas ideas erróneas posiblemente estarán más arraigadas que otras. Si tenemos en cuenta que la mayoría de los problemas que se emplean en el contexto escolar se suelen caracterizar por tener una solución numérica correcta, que se obtiene una vez que se ha seleccionado y ejecutado la operación aritmética correspondiente, la dificultad de los problemas que se plantean en este estudio se verá afectada en mayor o menor medida dependiendo del grado en que éstos se alejen de esas expectativas. De esta forma, los problemas *Irresolubles* serán los más complejos, ya que a los niños les resultará totalmente inadmisible que un problema no tenga solución. A continuación y en orden de dificultad decreciente, estarán los problemas que tienen *Soluciones Múltiples*. En este caso, aunque hay varias soluciones posibles, es probable que los alumnos sólo admitirán como válida una de ellas. Seguidamente, se sitúan aquéllos problemas en los que la *Solución no requiere Cálculo* porque ésta se encuentra en el propio enunciado. Por último, los problemas que incluyen *Datos Irrelevantes* tienen una solución precisa y permiten ejecutar cálculos aritméticos, por lo que serán los más sencillos, a pesar de que los alumnos no puedan emplear todos los datos numéricos.

3) *Evaluar los problemas no-rutinarios en contextos de resolución diferentes*.

Los problemas fueron presentados en dos contextos de evaluación diferentes: *Resolver Problemas* y *Detectar el Error*. En el primero, los alumnos debían hallar por sí mismos la respuesta, mientras que en el segundo la tarea consistía en corregir los problemas resueltos por otros "supuestos" compañeros. Este contexto de evaluación ha sido empleado con cierta frecuencia, por ejemplo, en los trabajos que se han realizado sobre la habilidad de contar. Las conclusiones de estos estudios han apuntado que las demandas de ejecución impuestas por las tareas en las que los niños han de contar una colección de objetos podrían estar encubriendo su conocimiento real, siendo su nivel de competencia superior cuando tienen que detectar los errores cometidos por una marioneta (p.e., Bermejo y Lago, 1991; Gelman y Meck, 1983, 1986; Lago, 1992; Sophian, 1988).

De acuerdo con esto, es más probable que en el contexto de *Resolver Problemas* los niños acaben guiándose por aspectos superficiales del texto tales como la búsqueda de palabras "clave", el tamaño de las cantidades para decidir la operación aritmética adecuada y que adjudiquen menos recursos cognitivos a la comprensión del enunciado. Sin embargo, en el contexto de *Detectar el Error* se está ahorrando a los niños el laborioso esfuerzo que suponen, entre otras cosas, los cálculos numéricos, pudiendo centrar ahora más su atención en todos aquellos aspectos relacionados con las propias demandas de los problemas. Todo ello redundará en una mejor ejecución al darse cuenta, por ejemplo, de que el problema Irresoluble no tiene solución porque, si se desconoce la cantidad inicial de dinero que María tenía, no es posible averiguar el dinero que le queda tras prestarle 7 euros a su amiga Alicia.

4) *Analizar las diferencias evolutivas en relación con el rendimiento en problemas no-rutinarios.*

En este trabajo se han incluido dos Grupos de edad para observar los posibles cambios asociados con el nivel de escolarización. La mayoría de las investigaciones previas que han empleado problemas no-rutinarios han descartado como objetivo estudiar estas posibles diferencias evolutivas, ya que se han centrado únicamente en evaluar a alumnos de un único nivel escolar. Aún así, los porcentajes de éxito encontrados han sido muy bajos tanto en los alumnos de Primaria como en los de Secundaria e, incluso, cuando se han aplicado a estudiantes universitarios. Por ese motivo, suponemos que una mayor destreza en matemáticas no estará relacionada con el hecho de que puedan aplicarla correctamente para hallar una solución realista a los problemas y de ahí que esperemos un rendimiento similar en los niños de 2º y 3º de E.P.

No obstante, los trabajos evolutivos que se realizaron empleando exclusivamente problemas absurdos (como el del pastor o el del capitán) indicaron que los niños cometían distintos tipos de errores a medida que aumentaba la escolarización, tendiendo a resolver los problemas, si cabe, de forma más descontextualizada (por ejemplo, aplicando la última operación aritmética estudiada o analizando el tamaño de las cantidades incluidas en el enunciado). Partiendo de estos resultados, también esperamos que los errores que se producirán en los dos Grupos de edad serán cualitativamente diferentes.

5) *Evaluar a los niños de forma individual para evitar los falsos negativos que han resultado difícilmente explicables en otros estudios.*

Como hemos indicado anteriormente, las pruebas de aplicación colectiva no permiten conocer la causa por la que algunos estudiantes optan por no dar respuesta a algunos problemas, ni tampoco los orígenes de sus errores. La metodología de recogida de datos, basada en la entrevista individual, nos permitirá acceder a las justificaciones que sustentan las respuestas de los alumnos, así como todos aquellos comentarios que consideren oportunos acerca de los problemas.

2. MÉTODO

PARTICIPANTES

Formaron parte de este trabajo un total de 44 alumnos procedentes de un colegio público de la zona sur de Madrid, divididos en dos grupos de edad: 22 alumnos de 2º de E.P. con un rango de edad comprendido entre los 7;3 y los 8;1 años (M: 7;7 años) y 22 alumnos de 3º de E.P. con un rango de edad entre los 8;2 y los 9;1 años (M: 8;6 años).

Las razones por las que se han seleccionado los cursos de 2º y 3º de E.P., y no cursos del mismo ciclo como cabría esperar, fueron las siguientes:

a) En primer lugar, que la recogida de los datos se realizó a principios de curso. Dado que uno de los objetivos de este trabajo consistía en evaluar las ideas erróneas que los alumnos tienen sobre la resolución de problemas aritméticos y puesto que éstas parecen surgir con la educación formal, probablemente los alumnos de 1º de E.P. no habrían tenido ocasión de desarrollar aún este tipo de creencias.

b) En segundo lugar, al emplear en el estudio problemas con dos Estructuras Semánticas, una fácil (i.e., *Cambio*) y otra difícil (i.e., *Comparación*), posiblemente en 1º de E.P. hubiésemos encontrado un efecto suelo en los problemas más complejos de Comparación.

MATERIAL Y PROCEDIMIENTO

Todos los alumnos fueron evaluados en dos contextos diferentes "Resolver Problemas" y "Detectar el Error", con un lapso de tiempo de un mes entre las evaluaciones para evitar problemas de aprendizaje.

1) En el contexto de <u>Resolver Problemas</u> los niños debían realizar dos tareas:

    a.- Establecer si los problemas les parecían fáciles o difíciles

    b.- Resolver los problemas.

2) En el contexto de <u>Detectar el Error</u> se presentaban los problemas de la fase anterior, resueltos "supuestamente" por un compañero de otra clase, siendo el objetivo que los corrigiesen. Cada uno de los problemas estaba acompañado de una **solución errónea**, que consistía en la Respuesta Esperada, esto es, sumar todas las cantidades que aparecían en el enunciado sin tener en cuenta la situación descrita en el problema.

En ambos contextos, los problemas diferían en el Tipo de Información ofrecida en el Enunciado:

a) *Irresolubles*: estos problemas incluían dos cantidades numéricas, pero no se podían resolver porque se omitía información necesaria para hallar la solución. A diferencia de los denominados problemas absurdos (como el problema del Pastor o el del Capitán), éstos tienen sentido en la vida real. Por ejemplo, en el problema "María ha ido al circo con sus amigas. María tiene 13 euros y su amiga Alicia le deja 7 euros para pagar la entrada. ¿Cuánto dinero le queda a Alicia?", se desconoce la cantidad de dinero que Alicia tenía inicialmente, por lo que no era posible conocer el dinero que le quedaba.

b) *Soluciones múltiples*: las soluciones correctas podían ser diversas, ya que una de las cantidades no estaba definida claramente. Así, en el problema "Ana ha comprado una bolsa de 14 chicles de varios sabores. Como sus preferidos son los de menta y le han puesto pocos, Ana compra también 8 chicles de menta. ¿Cuántos chicles de menta tiene ahora Ana?", se sabe que en la bolsa hay una pequeña cantidad de chicles que son de menta (i.e., pocos), pero no el número exacto, por lo que el alumno podía ofrecer distintas respuestas dependiendo de la cuantía que asignara al termino "pocos".

c) *La Solución no requiere Cálculo*, ya que venía ofrecida en el propio texto junto con otro dato no relevante para resolver el problema. Así, en el problema "Un pastor tiene 17 ovejas en su granja. Como quiere ampliar la granja compra 8 cabras. ¿Cuántas ovejas tiene ahora el pastor en la granja?" la respuesta era 17 ovejas, puesto que los animales que compró eran cabras.

d) *Datos Irrelevantes*. En el enunciado se incluía un tercer dato que no era necesario para resolver el problema. En el ejemplo, "Sonia tiene 14 caramelos de fresa. Ángeles tiene 4 caramelos de limón y 7 caramelos de fresa más que Sonia. ¿Cuántos caramelos de fresa tiene Ángeles?", los caramelos de limón no aportaban información relevante, por lo que no debían ser considerados en los cálculos para obtener la solución.

Estos cuatro tipos de problemas, de acuerdo con los objetivos que hemos planteado, fueron formulados empleando dos Estructuras Semánticas distintas: *Cambio* y *Comparación*. Además, para aumentar la fiabilidad de las pruebas estadísticas, se incluyeron dos ensayos de cada tipo de problema, por lo que cada contexto de evaluación estuvo compuesto finalmente por un total de 16 problemas no-rutinarios y 4 problemas distractores.

En cuanto al tamaño de las cantidades, para evitar posibles dificultades derivadas del propio cálculo, en todos los problemas el primer sumando oscilaba entre 10 y 19, mientras que el segundo entre 5 y 9. Además, como los dos ensayos de cada problema se administraban en sesiones diferentes, se utilizaron las mismas cantidades alternándolas según la Estructura Semántica. Por ejemplo, si en el problema *Irresoluble* de *Cambio*, las cantidades eran 13 y 7, en el segundo ensayo se empleaban las mismas cantidades en el mismo Tipo de problema formulado en términos de *Comparación* y viceversa. De esta forma, si se encontraban diferencias en la variable Estructura Semántica, éstas no se podrían atribuir a una mayor o menor dificultad con las cantidades.

Por último, dada la extensión del instrumento de evaluación y que la recogida de los datos se hacía de manera individual, los niños fueron entrevistados en cuatro ocasiones. En concreto, la aplicación de la prueba en cada contexto (i.e., *Resolver Problemas* / *Detectar el Error*) se dividió en dos sesiones. Así, se confeccionaron cuatro cuadernillos compuestos por un total de 8 problemas no-rutinarios y 2 distractores en cada uno (ver Tablas 11 y 12, pp. 119-120). Además, el orden de aparición de los problemas se asignó previamente de manera aleatoria y se mantuvo constante en cada una de las cuatro sesiones: 1) Cambio - Irresoluble, 2) Comparación – Solución no requiere Cálculo, 3) Cambio - Soluciones Múltiples, 4) Comparación - Datos Irrelevantes, 5) Cambio - Solución no requiere Cálculo, 6) Comparación - Soluciones Múltiples, 7) Cambio - Datos Irrelevantes y 8) Comparación - Irresoluble. Finalmente, entre las diversas aplicaciones dejábamos transcurrir una semana para evitar que advirtieran que en la segunda ocasión los problemas describían situaciones similares.

ANÁLISIS Y CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS

Para la categorización de las respuestas, hemos tenido en cuenta principalmente dos aspectos: (1) la operación aritmética que emplearon para hallar la solución al problema y (2) las justificaciones que ofrecieron para fundamentar su respuesta. Siguiendo la categorización realizada por Verschaffel *et al.* (1994) hemos diferenciado **cinco grandes grupos de respuesta**, incorporando dos modificaciones importantes. Brevemente, estos autores clasificaron las soluciones de los niños en Respuestas Realistas (i.e., apropiadas al problema), Respuestas Esperadas (i.e., aplicar la operación aritmética que subyace a la estructura del problema), Error Técnico (i.e., errores en los cálculos de la Respuesta Esperada), Otras Respuestas (i.e., emplear una o varias operaciones aritméticas que no se corresponden con la estructura del problema) y Ausencia de respuesta. Adicionalmente, si cualquiera de estas respuestas era acompañada de un comentario realista al problema, se consideraban correctas, esto es, se incluían dentro de la categoría de Respuestas Realistas (para una ampliación sobre cada uno de estos tipos de respuesta ver p. 57).

A diferencia de estos autores, hemos omitido la respuesta “Error Técnico” debido a que las cantidades seleccionadas no hacían prever la aparición de errores de ejecución en los cálculos, ni su análisis constituía uno de los objetivos de este estudio. No obstante, estas respuestas fueron recogidas dentro de las Respuestas Esperadas. Además, incorporamos la categoría de Respuestas Realistas-Incorrectas. Como se acaba de indicar, en el estudio de Verschaffel *et al*. cualquier respuesta seguida de algún tipo de comentario realista fue finalmente considerada como correcta. Sin embargo, como veremos seguidamente, la incorporación de esta nueva categoría se debió a que muchos de los comentarios realistas que los alumnos aportaron no iban precedidos de soluciones correctas y difirieron sustancialmente del resto de las categorías incorrectas (i.e., Respuestas Esperadas y Otras Respuestas Incorrectas).

Para ilustrar cada una de las categorías de respuesta, se tomará como referencia el problema con *Soluciones Múltiples* formulado en términos de *Cambio* "*Ana ha comprado una bolsa de 14 chicles de varios sabores. Como sus preferidos son los de menta y le han puesto pocos, Ana compró además 8 chicles de menta. ¿Cuántos chicles de menta tiene ahora Ana?"* y en términos de *Comparación* "*Alejandro ha comprado una caja de 16 rotuladores de varios colores. Luís ha comprado una caja igual, pero de regalo le han dado 7 rotuladores más que a Alejandro, todos de color amarillo. ¿Cuántos rotuladores amarillos tiene Luís?".*

1) RESPUESTAS REALISTAS CORRECTAS

En esta categoría se han recogido todas las respuestas que fueron correctas, tanto por la elección correcta del algoritmo, en el caso que fuera necesario operar (i.e., en los problemas con *Soluciones Múltiples* y los que tienen *Datos Irrelevantes*), como por la justificación de la respuesta final, que necesariamente tenía que estar sustentada por la compresión adecuada de la Estructura Semántica del problema y del Tipo de Información ofrecida en el Enunciado. Por ejemplo, en el problema de los "*Chicles*" (ver Tabla 11, p. 119), pertenecen a esta categoría respuestas las siguientes:

- "*Ha comprado 8 más de menta y tenían 14 chicles de varios sabores. Entonces, 8 que ha comprado más 1 de menta que tenía en la bolsa de los 14 de varios sabores, son 9. Tiene que haber al menos uno de menta, pero si hay más se suman a 9*".

2) RESPUESTAS REALISTAS INCORRECTAS

Esta categoría comprendía los **comentarios realistas** asociados a una respuesta numérica incorrecta debido a una comprensión inadecuada de la Estructura Semántica o una comprensión parcialmente incompleta del Tipo de Información ofrecida en el Enunciado. Estas respuestas no han podido ser Respuestas Realistas porque la solución final no era correcta, aunque sí parecía conveniente diferenciarlas de las categorías de Respuestas Esperadas y Otras Respuestas Incorrectas, ya que a diferencias de éstas se han considerado **parcialmente** aspectos realistas de la situación.

- "*La solución es 8 chicles de menta porque antes tenía 14 y no le han puesto los que quería, entonces ha comprado 8 y ya está*". Esta solución se codificó como incorrecta porque el niño sólo ha tenido en cuenta los 8 chicles de menta que compra, descartando que previamente tenía una bolsa con chicles de varios sabores y que algunos eran de menta.

3) RESPUESTAS ESPERADAS

Esta respuesta siempre consistió en sumar todas las cantidades numéricas. Por tanto, en los problemas con *Soluciones Múltiples* y en los que la *Solución no requiere Cálculo* los alumnos optaron por adicionar las dos cantidades, mientras que en los que incluían *Datos Irrelevantes* procedieron a sumar los tres datos del enunciado (i.e., los dos relevantes y el irrelevante).

- "*Sumar 14 más 8 porque si Ana compra 14 chicles y luego compra otros 8, entonces es sumar. 22 chicles de menta*".

4) OTRAS RESPUESTAS INCORRECTAS

En esta categoría se consignaron las soluciones que estaban basadas en procedimientos algorítmicos ajenos a la adición (i.e., sustracción, multiplicación, división y distintas combinaciones de las cuatro operaciones aritméticas básicas). En todos los casos, el procedimiento de resolución llevaba aparejadas justificaciones basadas en la lectura superficial del texto o la alusión a palabras "clave".

- "*Primero tenemos que restar 14 menos 8, para ver cuántos chicles de menta tenía en la bolsa, porque sólo sabemos que le han puesto poquitos. Son 6. Ahora sumamos los 6 de menta que tiene más los 8 que hemos comprado y son 14 chicles de menta*".

5) AUSENCIA DE RESPUESTA

En este caso, el alumno no fue capaz de elaborar ninguna solución numérica, ni de explicar de dónde procedía su dificultad para resolver el problema.

Tabla 11

Ejemplos de los problemas presentados en ambos Contextos de Evaluación

	CAMBIO	COMPARACIÓN
IRRESOLUBLES	Problema del circo María ha ido al circo con sus amigas. María tiene 13 euros y su amiga Alicia le deja 7 euros para pagar la entrada. ¿Cuánto dinero le queda a Alicia?	Problema de los juguetes Juan ha hecho una lista con los juguetes que le gustaría recibir por su cumpleaños. En la lista hay un camión que cuesta 17 euros y un patinete que cuesta 7 euros más que el camión. ¿Cuánto dinero tiene Juan?
SOLUCIONES MÚLTIPLES	Problema de los chicles Ana ha comprado una bolsa de 14 chicles de varios sabores. Como sus preferidos son los de menta y le han puesto pocos, Ana compra también 8 chicles de menta. ¿Cuántos chicles de menta tiene ahora Ana?	Problema de los rotuladores Alejandro ha comprado una caja de 16 rotuladores de varios colores. Luís ha comprado una caja igual, pero de regalo le dan 7 rotuladores más que a Alejandro, todos de color amarillo. ¿Cuántos rotuladores amarillos tiene Luís?
LA SOLUCIÓN NO REQUIERE CÁLCULO	Problema de la granja Un pastor tiene 17 ovejas en su granja. Como quiere ampliar la granja compra 8 cabras. ¿Cuántas ovejas tiene ahora el pastor en la granja?	Problema del Scalestrix Pedro y Luís están jugando con un scalestrix. Pedro tiene 16 camiones y Luís tiene 6 camiones más que Pedro. ¿Cuántos camiones tiene Pedro?
DATOS IRRELEVANTES	Problema de las pinturas Laura ha comprado una caja de 12 pinturas para clase de Plástica. Su amiga Silvia le regala otra caja que contiene 3 bolígrafos y 9 pinturas. ¿Cuántas pinturas tiene ahora Laura?	Problema de los caramelos Sonia tiene 14 caramelos de fresa. Ángeles tiene 4 caramelos de limón y 7 caramelos de fresa más que Sonia. ¿Cuántos caramelos de fresa tiene Ángeles?

Tabla 12

Ejemplos de los problemas presentados en el contexto de Detectar el Error

Consigna: ¿Recuerdas los problemas que hemos estado resolviendo? Ahora lo que tenemos que hacer es corregir las soluciones que compañeros de otra clase nos dieron a los mismos problemas

	CAMBIO	COMPARACIÓN
IRRESOLUBLES	María ha ido al circo con sus amigas. María tiene 13 euros y su amiga Alicia le deja 7 euros para pagar la entrada. ¿Cuánto dinero le queda a Alicia? 13+ 7 = 20	Juan ha hecho una lista con los juguetes que le gustaría recibir por su cumpleaños. En la lista hay un camión que cuesta 17 euros y un patinete que cuesta 7 euros más que el camión. ¿Cuánto dinero tiene Juan? 17+7 = 24
SOLUCIONES MÚLTIPLES	Ana ha comprado una bolsa de 14 chicles de varios sabores. Como sus preferidos son los de menta y le han puesto pocos, Ana compra también 8 chicles de menta. ¿Cuántos chicles de menta tiene ahora Ana? 14+ 8 = 22	Alejandro ha comprado una caja de 16 rotuladores de varios colores. Luís ha comprado una caja igual, pero de regalo le dan 7 rotuladores más que a Alejandro, todos de color amarillo. ¿Cuántos rotuladores amarillos tiene Luís? 16+7 = 23
LA SOLUCIÓN NO REQUIERE CÁLCULO	Un pastor tiene 17 ovejas en su granja. Como quiere ampliar la granja compra 8 cabras. ¿Cuántas ovejas tiene ahora el pastor en la granja? 17+8 = 25	Pedro y Luís están jugando con un Scalestrix. Pedro tiene 16 camiones y Luís tiene 6 camiones más que Pedro. ¿Cuántos camiones tiene Pedro? 16+6 = 22
DATOS IRRELEVANTES	Laura ha comprado una caja de 12 pinturas para clase de Plástica. Su amiga Silvia le regala otra caja que contiene 3 bolígrafos y 9 pinturas. ¿Cuántas pinturas tiene ahora Laura? 12+3+9 = 24	Sonia tiene 14 caramelos de fresa. Ángeles tiene 4 caramelos de limón y 7 caramelos de fresa más que Sonia. ¿Cuántos caramelos de fresa tiene Ángeles? 14+4+7 = 25

.

3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En orden a perfilar con mayor claridad el alcance de nuestros resultados, vamos a proceder a dividir la exposición en dos partes: 1) el análisis cuantitativo de los datos y 2) el análisis cualitativo de los tipos de respuesta que ofrecieron los niños.

3.1. ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS DATOS

De acuerdo con los objetivos de este trabajo, realizamos un ANOVA mixto 2 (Grupo: *2º* vs. *3º de E.P.*) x 2 (Contexto de Evaluación: *Resolver Problemas* vs. *Detectar el Error*) x 3 (Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado: *Soluciones Múltiples* vs. *Datos Irrelevantes* vs. *la Solución no requiere Cálculo*) x 2 (Estructura Semántica: *Cambio* vs. *Comparación*) con medidas repetidas en los tres últimos factores, mediante el programa estadístico SPSS.13.

Antes de proseguir con los resultados, abrimos un paréntesis para comentar que los problemas *Irresolubles* tuvieron que ser omitidos del ANOVA, ya que los alumnos de 2º curso habían tenido una experiencia previa con un problema similar al propuesto en nuestro estudio. No obstante, cuando analicemos el factor Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado presentaremos algunos resultados correspondientes a los niños de 3º de E.P.

Tabla 13

Medias y desviaciones típicas, entre paréntesis, del ANOVA

	2º de E.P.				3º de E.P.			
	Resolver Problemas		Detectar el Error		Resolver Problemas		Detectar el Error	
	Cambio	Comparación	Cambio	Comparación	Cambio	Comparación	Cambio	Comparación
Soluciones Múltiples	0.273 (0.150)	0.364 (0.174)	0.636 (0.185)	0.364 (0.162)	0.727 (0.150)	0.682 (0.174)	0.727 (0.185)	0.636 (0.162)
Datos Irrelevantes	0.818 (0.177)	0.545 (0.178)	1.000 (0.208)	0.545 (0.176)	0.909 (0.177)	0.773 (0.178)	1.091 (0.208)	0.818 (0.176)
La Solución no requiere Cálculo	0.864 (0.193)	0.500 (0.166)	0.682 (0.202)	0.591 (0.171)	0.909 (0.193)	0.773 (0.166)	1.045 (0.202)	0.909 (0.171)

Puntuación máxima posible: 2

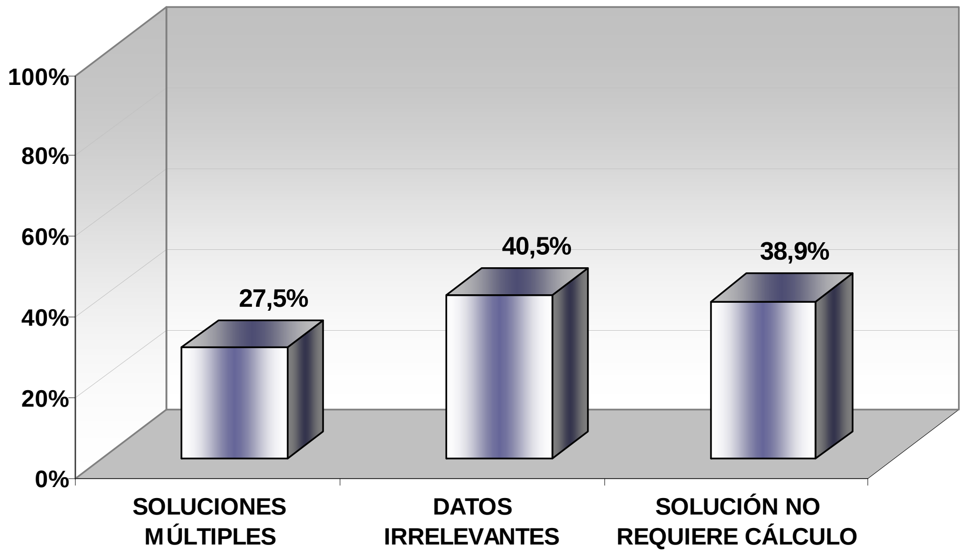
Los resultados mostraron que fueron significativos los efectos principales de los factores Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado ($F_{2,84} = 5{,}230$, $p < 0.01$, $\eta_p^2 = 0.111$) y Estructura Semántica ($F_{1,42} = 8{,}075$, $p < 0.01$, $\eta_p^2 = 0.161$), pero no el factor Contexto de Evaluación ni el Grupo. Ninguna de las interacciones alcanzó la significatividad (ver Tabla 13).

Con respecto al factor **Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado**, la media de problemas que resolvieron correctamente fue la siguiente: *Soluciones Múltiples* (M=0.55, SD=0.79), *Datos Irrelevantes* (M=0.81, SD=0.86) y la *Solución no requiere Cálculo* (M=0.78, SD=0.86). El análisis de las comparaciones múltiples mostró que fueron significativos los contrastes entre los problemas con *Soluciones Múltiples* y los que incluyeron *Datos Irrelevantes* ($p<0.01$) y entre los problemas con *Soluciones Múltiples* y aquéllos en los que la *Solución no requiere Cálculo* ($p<0.05$), lo que confirmó parcialmente la hipótesis de que los problemas no-rutinarios tienen niveles de dificultad diferentes en función del Tipo de Información ofrecida en el Enunciado (ver Gráfico 1).

El hecho de que los problemas con *Soluciones Múltiples* fuesen los más complejos, en comparación con los otros dos, estaría confirmando la dificultad que suponía para los alumnos admitir que podía haber más de una solución correcta en un mismo problema. Así, el elevado número de Respuestas Realistas Incorrectas que se registró en esta situación fue provocada mayoritariamente por el esfuerzo de hallar una solución precisa distinta a la “esperada” (i.e., adicionar las dos cantidades). Retomaremos esta explicación más adelante, en el apartado sobre el análisis de los tipos de respuestas que ofrecieron los participantes.

Gráfico 1

Porcentaje de éxito en función del Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado

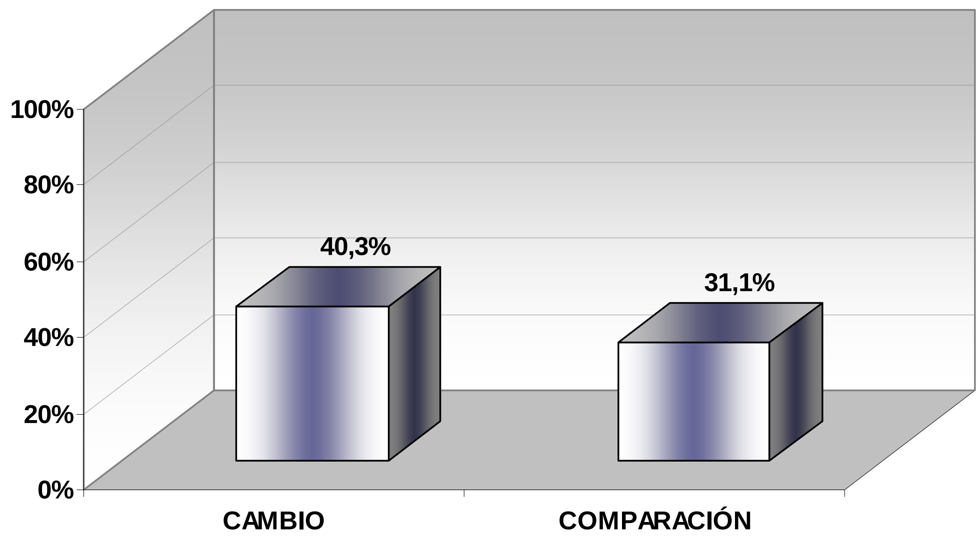


Contrariamente a lo esperado, la tasa de éxito en los problemas en los que la *Solución no requiere Cálculo* o en los que se incluían *Datos Irrelevantes* fue la misma, a pesar de las diferencias ya comentadas entre ellos. Brevemente, esto se explica porque los alumnos que tuvieron éxito en ambos problemas se centraron en **descartar** la información del texto que les parecía no significativa. Por ejemplo, en el problema de las "*Pinturas*" con *Datos Irrelevantes* (y que puede consultarse en la Tabla 11, p. 119), los alumnos argumentaban: "*sólo tenemos que sumar las pinturas porque los bolígrafos no son pinturas*" y en el problema de la "*Granja"* cuya *Solución no requiere Cálculo* afirmaban: "*son las mismas ovejas porque lo que ha comprado son cabras, no ovejas, y las cabras no son ovejas*". Por tanto, la creencia consistente en que «para obtener la solución a un problema es necesario operar» no afectó de forma diferencial a los problemas de *Datos Irrelevantes* y *la Solución no requiere Cálculo*. No obstante, esta creencia fue la más robusta y, como veremos en el análisis cualitativo, estuvo en la base de las respuestas incorrectas de **todos** los tipos de problema propuestos en este estudio.

Con respecto al factor **Estructura Semántica**, tal y como esperábamos, los problemas de *Cambio* resultaron globalmente más sencillos que los de *Comparación* (M=0.81, SD=0.87 vs. M=0.63, SD=0.81, respectivamente) (ver Gráfico 2). Como hemos mencionado reiteradamente, los resultados obtenidos en las investigaciones con problemas rutinarios aditivos habían señalado que la estructura semántica constituía una de las variables más relevantes a la hora de clasificarlos según su grado de dificultad (p.e., Bermejo *et al.*, 1994, 1997; Bermejo, Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2002; Carpenter y Moser, 1982, 1983; Carpenter *et al.*, 1999, Heller y Greeno, 1978; Kintsch y Greeno, 1985; Lago *et al.*, 1999; Nesher y Greeno, 1981; Riley *et al.*, 1983; Vergnaud, 1982). En el presente trabajo, se ha confirmado la hipótesis de que el grado de éxito en los problemas

Gráfico 2

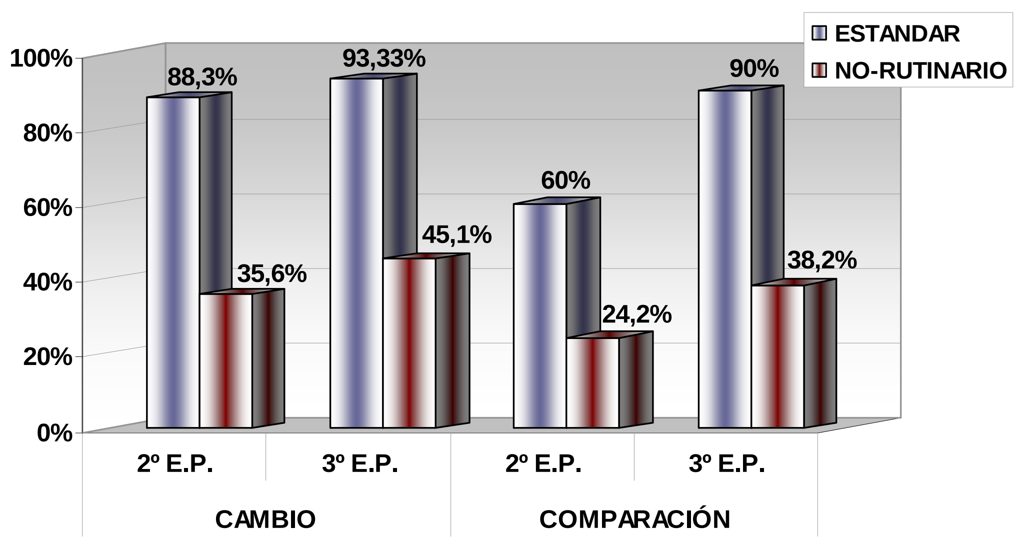
Porcentaje de éxito en función de la Estructura Semántica del problema



no-rutinarios también se ve afectado, como en los rutinarios, por la estructura semántica subyacente. No obstante, debemos aclarar que la tasa media de éxito que se obtuvo en ambas estructuras resultó claramente inferior a la hallada en otros estudios con problemas rutinarios de C*ambio* y *Comparación*. Por ejemplo, Bermejo y Rodríguez (1990a) observaron que el 88,34% de los niños de 2º y el 93,33% de los niños de 3º de E.P. resolvieron correctamente las situaciones de Cambio con la incógnita en el resultado. Sin embargo, en esta ocasión tan sólo lo hicieron correctamente el 35,6% de los niños de 2º y el 45,1% de los 3º de E.P., es decir, el porcentaje de éxito se redujo a menos de la mitad. En la estructura de Comparación, el 60% de los niños de 2º y el 90% de los niños de 3º tuvieron éxito en los problemas rutinarios, mientras que en este estudio únicamente lo consiguieron el 24,25% y el 38,25%, respectivamente (ver Gráfico 3).

Gráfico 3

Diferencias en el porcentaje de éxito entre los problemas rutinarios (o estándar) y no-rutinarios



En resumen, cabe señalar que la Estructura Semántica influyó visiblemente en la dificultad de los problemas, pero en el caso de los no-rutinarios no fue el único factor responsable, ya que el rendimiento de los alumnos se vio afectado también por el Tipo de Información ofrecida en el Enunciado.

El factor **Contexto de Evaluación** no resultó significativo ($F_{1,42}$=3,107), es decir, en la tarea de *Detectar el Error* (M=0.74, SD=0.86) los niños no tuvieron mejor rendimiento que en la de *Resolver Problemas* (M=0.68, SD=0.81).

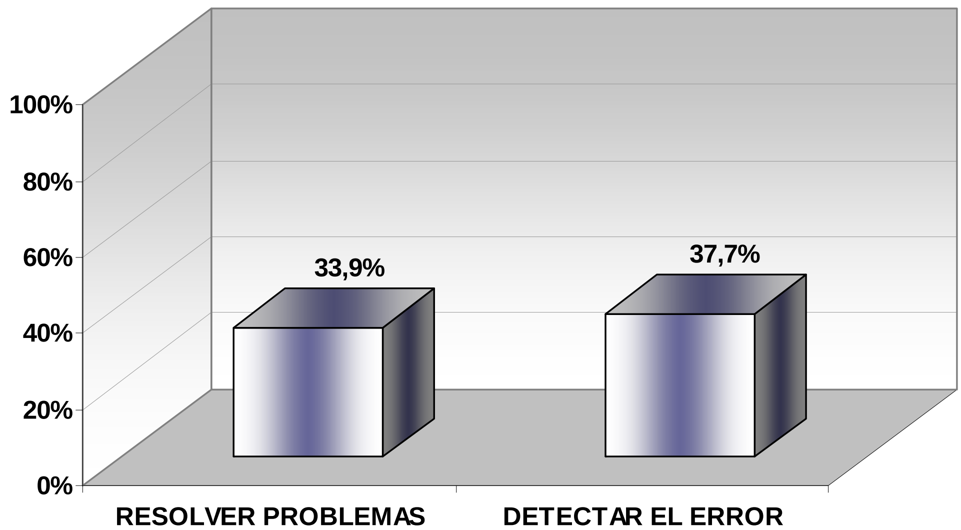
Así, en el Contexto de *Resolver Problemas,* **el 33,9% de las respuestas pudieron considerarse apropiadas**, porcentaje superior al encontrado en otras investigaciones con problemas no-rutinarios en las que se situaba en torno al 11-19% (p.e., Caldwell, 1995; Hidalgo, 1997; Reusser y Stebler, 1997; Yoshida *et al.*, 1997; Verschaffel *et al.*, 1994, 1999). A pesar de ello, un elevado porcentaje de alumnos tampoco fue capaz de ajustarse a las demandas de los problemas, independientemente de la Estructura Semántica o del Tipo de Información ofrecida en el Enunciado. Así, **un 30% de los niños** de ambos grupos **no resolvió correctamente ninguno de los 12 problemas**, resultado que se encuentra próximo al de Verschaffel *et al*. (1994) con alumnos de 5º curso de E.P. (i.e., 23%).

Asimismo, vale la pena destacar que los niños no parecían ser conscientes de las dificultades que suponían para ellos estos problemas. Esto es, aunque el 66% de las respuestas fueron incorrectas, **la mayoría de los problemas fueron percibidos como sencillos** (i.e., 81,82%). En un trabajo previo, Reusser y Stebler (1997) habían solicitado a alumnos de 4º y 5º curso que rellenasen un cuestionario sobre la dificultad que habían percibido en los problemas no-rutinarios que acababan de resolver. Aunque el porcentaje de soluciones correctas se situó en torno al 20%, la mayoría de los alumnos afirmó no haber encontrado ninguna dificultad de comprensión, ni tampoco nada extraño en la formulación de los problemas.

En el contexto de *Detectar el Error*, el porcentaje de respuestas realistas fue similar al de *Resolver Problemas* (ver Gráfico 4). Este resultado coincide con el hallado por Verschaffel *et al.* (1997) en un estudio en el que participaron alumnos universitarios de Formación de Profesorado cuya tarea consistía en resolver y corregir problemas no-rutinarios realizados por niños de 5º curso. El porcentaje de respuestas correctas en la tarea de resolver problemas alcanzó el 48% y en la tarea de "corregir problemas" el 47% de las Respuestas Realistas fueron evaluadas como correctas.

Gráfico 4

Porcentaje de éxito en función del Contexto de Evaluación

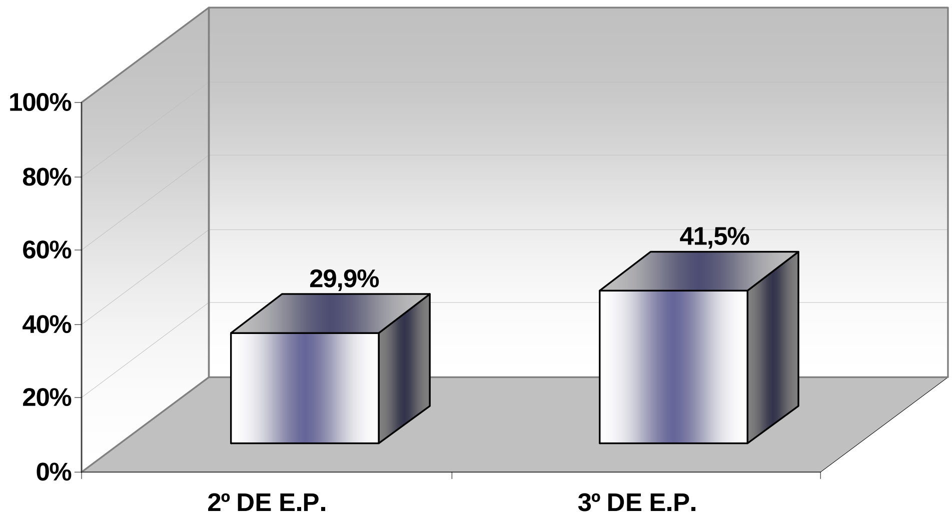


La similitud encontrada entre los niveles de rendimiento en ambos contextos estaría indicando que ciertas creencias incorrectas sobre la resolución de problemas (i.e., hay una única solución numérica precisa, siempre se ha de aplicar una operación aritmética y todas las cantidades deben emplearse para hallar la solución) están fuertemente arraigadas en el pensamiento infantil, imponiéndose en el proceso de resolución con independencia de las demandas de la tarea, es decir, Resolver Problemas o Detectar el Error.

Por último, y de acuerdo con nuestra predicción, el factor **Grupo** (2º vs. 3º de E.P) no alcanzó la significatividad ($F_{1,42}$=1,533). Como puede observarse en el Gráfico 5, los porcentajes de éxito fueron similares en ambos casos (M=0.60, SD=0.78 vs. M=0.83, SD=0.89, respectivamente). Así, conforme a nuestra hipótesis e independientemente del nivel escolar: (1) los niños optaron por resolver los problemas sin tener en cuenta la situación que describían y (2) una mayor expe-

Gráfico 5

Porcentaje de éxito en función del Grupo



riencia con situaciones matemáticas que abarcaban las cuatro operaciones aritméticas básicas no ayudó a que el rendimiento de los alumnos de *3º de E.P*. fuera significativamente superior al de *2º*.

Esta conducta resultaba previsible si consideramos la naturaleza de las tareas escolares. En general, los problemas están actuando como algoritmos encubiertos, ya que la función del estudiante suele residir en "descubrir" la operación aritmética que subyace. Sin embargo, la inclusión de problemas en el aula debería estar orientada a desarrollar habilidades de alto orden que les ayuden a resolver problemas reales (p.e., Burkhardt, 1994). De acuerdo con Palm (2006), aunque no es posible simular en el contexto escolar todas las variables que se encuentran presentes en la vida real, al menos los problemas escolares deberían propiciar entornos para la reflexión y el razonamiento, con el objetivo de que los alumnos no terminen siendo "expertos" en aplicar algoritmos.

3.2. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS DATOS

En este apartado se procederá a describir los **Tipos de Respuestas**, correctas e incorrectas, que ofrecieron los niños en el Contexto de *Resolver Problemas*, así como las correcciones que realizaron posteriormente en el Contexto de *Detectar el Error* (ver Tablas I, II y III, en el Anexo 2, pp. 195-197). Estableciendo como punto de partida la clasificación realizada por Verschaffel *et al.* (1994), hemos diferenciado entre distintos tipos Respuestas Realistas y No-Realistas obteniendo cinco grandes grupos de respuestas:

1.- Respuestas Realistas Correctas.
2.- Respuestas Realistas Incorrectas.

Respuestas Realistas

3.- Respuestas Esperadas.
4.- Otras Respuestas Incorrectas.
5.- Ausencia de Respuesta.

Respuestas No-Realistas

Expondremos, en primer lugar, para cada una de las variables estudiadas los datos procedentes del análisis de las Respuestas Realistas (correctas e incorrectas), ya que son las que han tenido un interés primordial en nuestro estudio y, posteriormente, nos haremos eco de las No-Realistas (i.e., Respuestas Esperadas y Otras Respuestas Incorrectas). La categoría Ausencia de Respuesta fue prácticamente inexistente (≈0,05%) y, por ese motivo, no va a ser tenida en cuenta en el análisis.

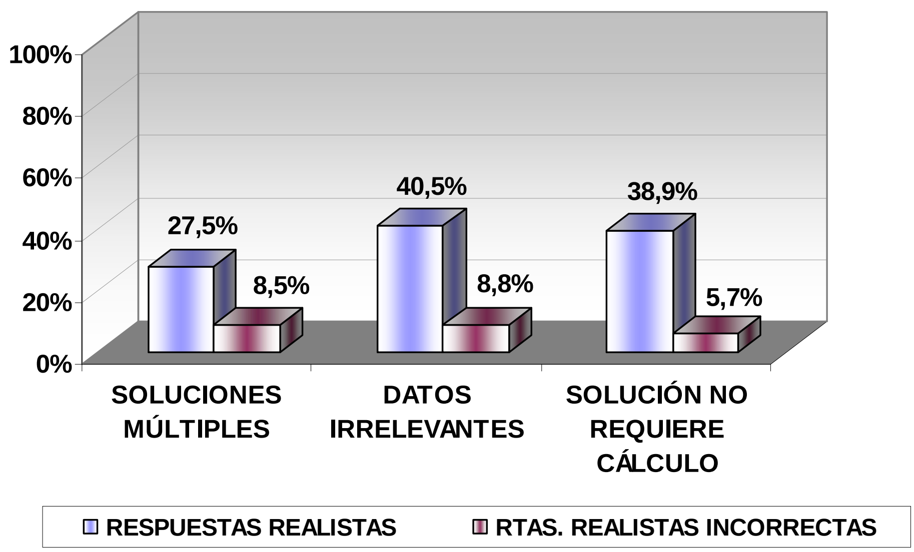
1) EL TIPO DE PROBLEMA SEGÚN LA INFORMACIÓN OFRECIDA EN EL ENUNCIADO

- Respuestas Realistas.

Tomando como punto de partida el Tipo Problema según la Información ofrecida en el Enunciado, se observa que el porcentaje de **Respuestas Realistas Correctas** fue similar en los problemas de *Datos Irrelevantes* y aquéllos cuya *Solución no requiere Cálculo* y descendió en *Soluciones Múltiples* (ver Gráfico 6 y Tabla IV, en el Anexo 2, p. 198). En concreto, como indicábamos en el análisis cuantitativo de los datos, los problemas con *Soluciones Múltiples* fueron los más complejos para los niños. Estas situaciones violaban la creencia de que "todo problema tiene una única solución numérica precisa" y por eso las Respuestas Realistas correctas debían aludir al hecho de que era posible obtener **más de una**

Gráfico 6

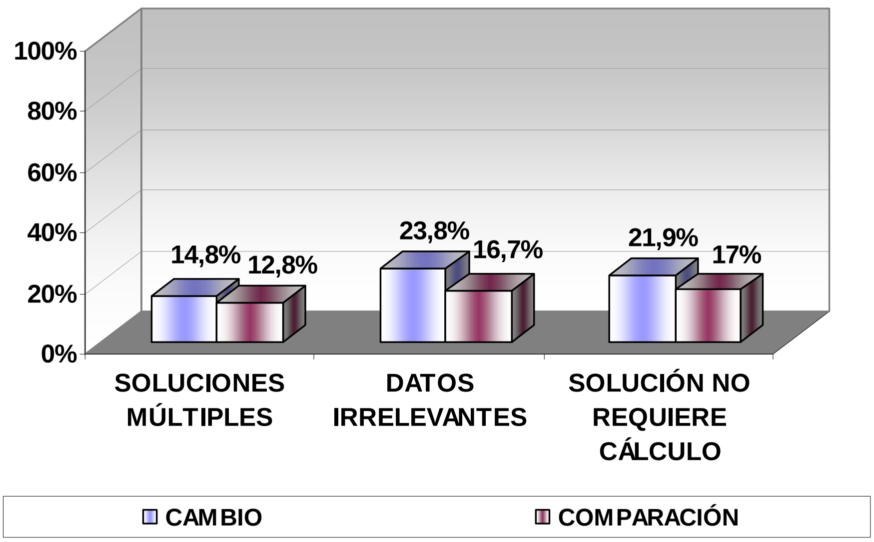
Porcentaje de Respuestas Realistas, correctas e incorrectas, en cada Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado



solución válida. Por ejemplo, en el problema de los "*Chicles*" (ver Tabla 11, p. 119), Daniel (8;1 años) indicó acertadamente que podrían ser 9 o más: "*porque si ha comprado 8 de menta y tenía 14 de varios sabores, en los de varios sabores tiene que haber uno de menta y serían 9, pero si hubiera más chicles se sumarían a 9*". Además, la complejidad inherente a estos problemas provocó que fuera ésta la única situación en la que no se produjeron diferencias sustanciales en el rendimiento de los alumnos atendiendo a la Estructura Semántica del problema. En otras palabras, el rendimiento fue bajo independientemente de que los problemas fueran de *Cambio* o de *Comparación* (ver Gráfico 7).

Gráfico 7

Porcentaje de Respuestas Realistas correctas en cada Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado dependiendo de la Estructura Semántica del problema



Abrimos aquí un paréntesis para referirnos a los problemas *Irresolubles* que habían sido eliminados del análisis cuantitativo debido a que el grupo de 2º de E.P. había tenido una experiencia previa con un problema similar. Por ese motivo, nos referimos únicamente al grupo de 3º. Esperábamos que esta situación fuera la más compleja debido a que en el contexto escolar cuando los alumnos no son capaces de hallar la solución a un problema se considera que han fracasado. De acuerdo con nuestra previsión, estos problemas fueron los más difíciles (i.e., sólo el 20,65% de las respuestas totales fueron realistas). Los estudiantes se encontraban con grandes dificultades al no disponer de toda la información relevante para obtener la solución numérica.

Como se mencionaba al inicio de este apartado, los problemas cuya *Solución no requiere Cálculo y* aquéllos con *Datos Irrelevantes* tenían un nivel de dificultad similar (ver también Gráfico 6, p. 132). Sin embargo, esperábamos que los primeros fueran más complejos, puesto que a priori a los niños podría resultarles más difícil admitir que un problema puede tener la solución en el enunciado que descartar un dato numérico sin ninguna utilidad en la resolución del problema. En ambos casos, las **Respuestas Realistas Correctas** estuvieron centradas en la detección de la información que no resultaba significativa para hallar la solución. Así, en el problema de las "*Pinturas"* con *Datos Irrelevantes*, que puede consultarse en la Tabla 11 (p. 119), David (9;1 años) respondió que la solución eran 21 pinturas porque *"importan las 12 que tiene ahora Laura y las 9 que le han regalado, pero los 3 bolígrafos no son pinturas*". Del mismo modo, Alexis (8;2 años) justificó el hecho de no poder incluir los 3 bolígrafos debido a que "*no se pueden mezclar las cosas… los árboles, las manzanas…*". En los problemas cuya *Solución no requiere Cálculo*, los niños emplearon un argumento similar afirmando en el problema de la "*Granja*", por ejemplo, que las cabras no pertenecían a la misma categoría que las ovejas (ver también Tabla 11, p. 119): "*Son 17 ovejas porque lo que ha comprado son 8 cabras, no ovejas, y las ovejas no son cabras, así que sigue teniendo 17, las mismas que tenía*".

En otro orden de cosas, algunos *comentarios realistas* de los niños estuvieron acompañados de soluciones incorrectas compatibles con sus creencias. Fueron categorizadas como **Respuestas Realistas Incorrectas** y se manifestaron en los problemas cuya *Solución no requiere Cálculo* y con *Soluciones Múltiples* (ver también Gráfico 6, p. 132).

En concreto, en estos últimos, el intento por parte de los niños de buscar una única solución al problema se tradujo en tres tipos de Respuestas Realistas Incorrectas:

a) <u>Consideraban inicialmente la información ambigua que aparecía en el problema, pero no la incorporaban en los cálculos</u>. Por ejemplo, Rubén (7;8 años) mencionaba explícitamente que el número de chicles de menta de la primera bolsa no estaba claramente determinado y finalmente lo omitía: "*No lo podemos saber porque no han puesto cuántos <u>pocos</u> había en la bolsa. Si tenía pocos y luego tiene 8, pues tiene 8 chicles de menta en total*". En otros casos, realizaban incluso una elaboración de la historia descrita en el problema para dotar de sentido sus respuestas, como es el caso de Jorge (8;3 años) que explicaba que "*los pocos chicles que tenía en la bolsa de varios sabores <u>se los come</u> y ya no cuentan, por eso pide los 8 chicles de menta*" o el de Laura (7;7 años) que afirmaba que "si *antes no le <u>habían puesto los que quería</u>, entonces no tenía ninguno, así que compra 8 chicles de menta y ya está*". Este tipo de explicaciones también han sido halladas en otros estudios previos. Por ejemplo, algunos niños habían argumentado en el problema clásico del capitán (i.e., *Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Cuántos años tiene el capitán?*) que éste había comprado una oveja o una cabra en cada cumpleaños y, por eso, se podía saber la edad que tenía (Freudenthal, 1991; Selter, 1994); en el problema del autobús (i.e., *Un autobús del ejército tiene 36 plazas. Si van a trasladar 1128 soldados ¿cuántos autobuses se necesitan*?) algunos alumnos aludían a que la parte decimal que obtenían en los cálculos de la división (31,33 autobuses) representaba el número de asientos adicionales que eran necesarios (Hatano, 1997) y, finalmente, en el problema del aeropuerto (i.e., Necesitas llegar al aeropuerto JFK a las 7 de la tarde a recoger a un amigo. A las 4 de la tarde sales para el aeropuerto que está a 180 millas de tu casa. En una hora has recorrido 60 millas. Tu amigo te llama y te pregunta si llegarás a tiempo. ¿Qué le contestarías?), algunos respondían afirmativamente aludiendo a que era domingo y no había problemas de tráfico (Inoue, 2005).

b) <u>Reconvertían o transformaban la información ambigua en cantidades numéricas precisas que les permitían operar</u>. Continuando con el problema de los "*Chicles*", algunos alumnos interpretaban que sólo podía haber un chicle de cada sabor, a pesar de que en el texto aparecía explícitamente el término "pocos chicles de menta", de modo que su respuesta final era 9 chicles de menta (p.e., "*si antes tenía chicles de varios sabores, en esa bolsa sólo podía tener uno de menta, así que lo sumamos a los 8 que compra*"). Otros respondían que había 16 chicles de menta, debido a que "*si compra otros 8, es que antes tenía 8 de menta en la bolsa de varios sabores*". Este último ejemplo resulta llamativo, puesto que se produjo una compleja transformación de la expresión "<u>compra</u>

también 8 chicles de menta" por compra "otros 8" y fue empleada para justificar la cantidad desconocida.

c) Trataban de cuantificaban aritméticamente la información ambigua. Tomando como ejemplo el problema de los "*Rotuladores*" (ver Tabla 11, p. 119), la respuesta ofrecida por Celia (8;2 años) resulta ilustrativa: "*podemos sumar 16 más 7 para saber el número de rotuladores de varios colores. Pero no son todos de color amarillo. Hay 7 que sí y en la otra caja ya no lo sé. No sé resolver el problema. Yo diría que tengo que hacer otra cuenta para averiguarlo, pero no sé cuál*". En otras palabras, Celia aludía explícitamente a que la cantidad exacta de rotuladores amarillos de la caja de Luís era desconocida, aunque finalmente no halló el modo de poder averiguarla aritméticamente.

En los problemas en los que la *Solución no requiere Cálculo* las **Respuestas Realistas Incorrectas** se producían porque los alumnos optaron por operar, a pesar de haber detectado la propia solución en el enunciado. Por ejemplo, en el problema del "S*calestrix*" (ver Tabla 11, p. 119), Rubén (7;4 años) respondía: "t*iene 23 camiones porque tiene 7 más que Pedro, pero ¿esos son los de Luís o lo de Pedro? No… son los de Luís. Pedro tiene 16, pero la solución es 23*"

Finalmente, en los problemas con *Datos Irrelevantes,* las **Respuestas Realistas Incorrectas** parecían circunscribirse a la representación inadecuada de la estructura de *Comparación (*como posteriormente mostraremos en el análisis del factor Estructura Semántica), ya que en las ocasiones en las que consideraron que debían emplear todas las cantidades numéricas, conforme a sus creencias, las respuestas se clasificaron como No-Realistas (i.e., Respuestas Esperadas).

En resumen, los resultados del análisis de las Respuestas Realistas correctas e incorrectas, en función del **Tipo de Información ofrecida en el Enunciado**, estarían apoyando el planteamiento de aquellos autores que atribuyen el fracaso de los alumnos a que actúan según **las normas que imperan en el aula** (p.e., Brousseau, 1984; Sarrazo, 1996; Reusser, 1998; Reusser y Stebler, 1997; Schoenfeld, 1991, 1992; Staub y Reusser, 1995; Wyndhamn y Säljö, 1997). Son precisamente esas normas las que, desde nuestro punto de vista, impiden que los niños pongan en marcha su conocimiento del mundo real, tal y como proponían algunos autores (p.e., Caldwell, 1995; Greer, 1993; Hidalgo, 1997; Verschaffel et al., 1994, 1999). Esta conclusión se ha visto sustentada principalmente en tres datos:

1. La dificultad de los problemas dependía más de las creencias que éstos contravenían que de la historia misma que describían. En otras palabras, las creencias incorrectas que provienen de las normas implícitas que rigen el *contrato didáctico* en el aula han sido las responsables de la dificultad que los alumnos han encontrado a la hora de resolver los problemas. Además, los resultados de este estudio estarían aportando evidencia empírica favorable a que no todas las creencias están igualmente asentadas en el pensamiento infantil, siendo más difíciles de superar aquéllas relacionadas con la necesidad de hallar una solución precisa, esto es, la posibilidad de que no haya una solución al problema o más de una resulta inverosímil para los niños.

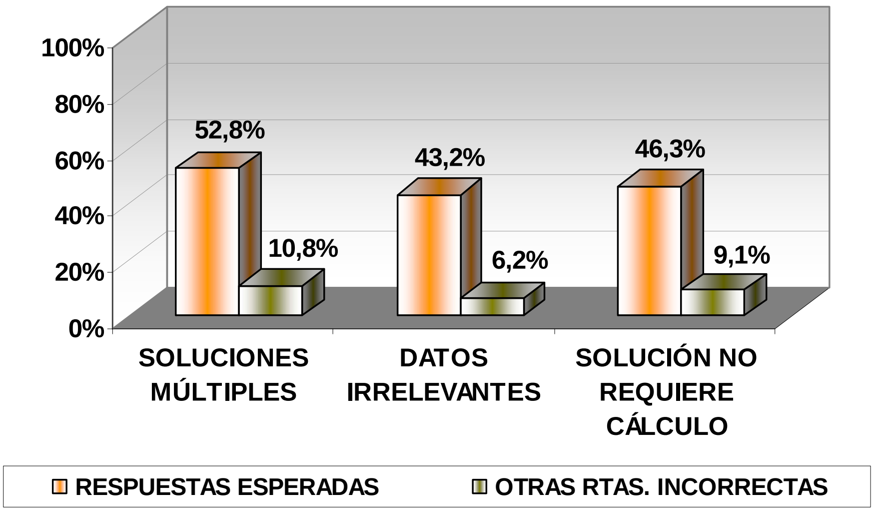
2. Algunas de las respuestas correctas de los niños mostraban claramente que la dificultad no se debía a la incapacidad para realizar consideraciones realistas, sino a la tendencia a seguir fielmente el modo de proceder habitual en el aula cuando la tarea es resolver un problema. Así, Nerea (8;1 años), a pesar de dar una respuesta apropiada en el problema de los "*Chicles*", expresaba sus dudas e incertidumbre sobre el hecho de que una cantidad no estuviera cuantificada: "*No lo entiendo. No entiendo qué es lo que tiene de varios colores y no sé cuántos tendrá amarillos. Bueno, en la caja suele venir uno, si hay uno son 8 amarillos, si hay dos son 9*". Manish (7;6 años) incluso llegó a plantear dudas sobre la "honradez" de los problemas tras resolver correctamente el problema de la "*Granja": "sigue teniendo las mismas ovejas que al principio porque sólo compra cabras, no ovejas. Es un problema con truco, tenía cebo para picar. ¿Quieres que te ponga uno a ti? Había 18 pájaros negros y 21 blancos. Se escapan 3 de los negros. ¿Cuántos pájaros blancos tiene?"*.
3. Muchos comentarios realistas a los problemas fueron finalmente respuestas incorrectas. En estos casos, tampoco se pueden atribuir los errores al hecho de que no fueran capaces de considerar los aspectos realistas de los problemas, sino a que los niños actuaban finalmente conforme a lo que creían que se esperaba de ellos.

- Respuestas No-Realistas.

Por lo que se refiere a las Respuestas Esperadas y Otras Respuestas Incorrectas (ver Gráfico 8 y Tabla IV, en el Anexo 2, p. 198), los errores también fueron debidos a las creencias incorrectas de los niños. Numerosos autores han señalado que los errores que los niños tendían a cometer en los problemas rutinarios se debían a que seleccionaban todas las cantidades y aplicaban una operación aritmética, siguiendo el modo de proceder habitual en el aula (p.e., De Corte y Verschaffel, 1985, Greer, 1997; Hegarty *et al.*, 1995; Reusser, 1988; Reusser y Stebler, 1997; Stigler *et al.,* 1986; Orrantia, 2003; Orrantia *et al.*, 2005; Verschaffel *et al.*, 1992, 1994). Estos mismos datos se encontraron en los problemas no-rutinarios de este estudio, apoyados ahora en argumentos tales como: "*hay que sumar los 14 chicles que tenía con los 8 que ha comprado y te da 22 chicles de menta*".

Gráfico 8

Porcentaje de Respuestas No-Realistas en cada Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado



2) LA ESTRUCTURA SEMÁNTICA DEL PROBLEMA

Siguiendo con el análisis cualitativo de los datos, hemos encontrado diferencias igualmente relevantes en el comportamiento de los alumnos en función de la **Estructura Semántica** de los problemas.

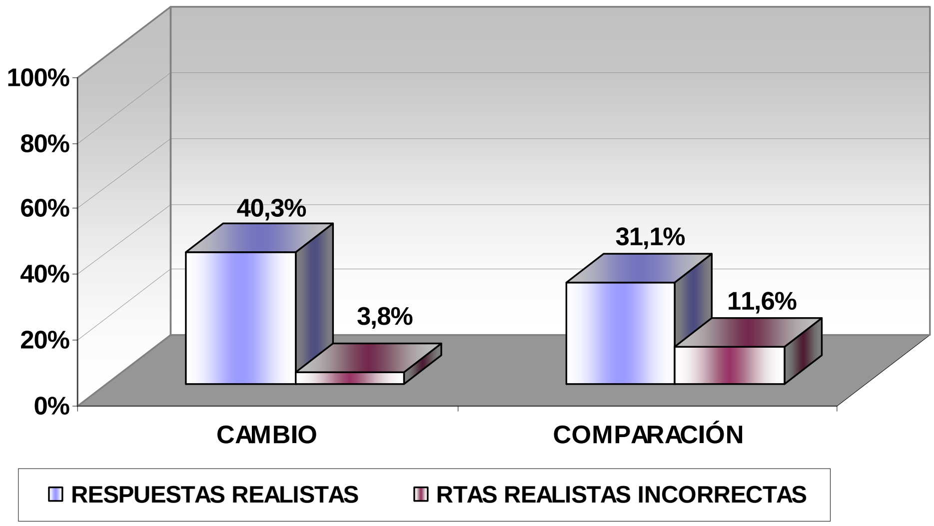
- Respuestas Realistas

Los resultados mostraron, en primer lugar, que los niños ofrecían un mayor número de **Respuestas Realistas Correctas** en los problemas de *Cambio* que en los de *Comparación* (ver Gráfico 9 y Tabla V en el Anexo 2, p. 198). Por ejemplo, en el problema de los "*Chicles"*, formulado con una estructura de *Cambio* (ver Tabla 11, p. 119), Hanan (7;6 años) justificó su respuesta de la siguiente manera: "*Ana ha comprado una bolsa de varios sabores y no sé de qué son esos sabores. Después <u>ha comprado</u> 8 porque le han entrado pocos de menta. De menta tiene 8 y <u>le sumamos los pocos</u> que le habían entrado en la otra bolsa, que pueden ser 3 ó 4*". En el problema de los "*Rotuladores"* de *Comparación* Laura (7;7 años) respondió: "*le regalan 7 <u>rotuladores más que a Alejandro</u>, todos de color amarillo y <u>en la caja que tenía igual que</u> Alejandro puede que tuviera uno o dos. Si tuviera 1 tendríamos 8, si tuviera 2 tendríamos 9 y si tuviera 3… 10*". En ambas respuestas, se puede apreciar que los niños han comprendido adecuadamente la estructura del problema.

Los estudios sobre los problemas rutinarios habían encontrado sistemáticamente que los alumnos representaban mejor las estructuras dinámicas (i.e., cambio) que las estáticas (i.e., combinación y comparación) y, dentro de estas últimas, los problemas de comparación resultaban especialmente difíciles al tener que definir uno de los conjuntos en función del otro mediante la comparación "más que" (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990a; Bermejo *et al*., 1994, 2002; Briars y Larkin, 1984; Carpenter *et at.*, 1999; Cummis *et al*., 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; Lago *et al.,* 1999). Los resultados de este estudio estarían corroborando que los alumnos tenían las mismas dificultades cuando se enfrentaban a problemas no-rutinarios, por lo que insistimos en la importancia de controlar este factor en estudios futuros.

Gráfico 9

Porcentaje de Respuestas Realistas, correctas e incorrectas, en función de la Estructura Semántica del problema



En segundo lugar, la Estructura Semántica fue el factor que afectó en mayor medida a las **Respuestas Realistas Incorrectas** de los niños, ya que la mayoría se ubicaron en los problemas de *Comparación* (ver también Gráfico 9). Es decir, algunos alumnos comprendían las demandas propias de cada tipo de problema, pero fallaban al representar las relaciones establecidas entre las cantidades, tal y como se ha indicado previamente. Por ejemplo, en el problema de los "*Caramelos"* con *Datos Irrelevantes* (ver Tabla 11, p. 119) los niños respondían que Ángeles tenía 7 caramelos de fresa porque interpretaron la proposición de relación "más que" como una de asignación, es decir, convirtieron la expresión "Ángeles tiene 7 caramelos de fresa *más que* Sonia" en "Ángeles tiene 7 caramelos de fresa". Este error había sido descrito reiteradamente en las investigaciones sobre los problemas rutinarios de Comparación (ver, por ejemplo, Bermejo y Rodríguez, 1990a; Mayer, 1982), pero en este trabajo se ha clasificado dentro de las Respuestas Realistas Incorrectas porque fueron capaces de descartar la información irrelevante, esto es, los caramelos de limón (p.e., "*son 7 caramelos de fresa, porque el problema me pregunta por los caramelos de fresa, no por los de limón de Ángeles y <u>Ángeles tiene 7 caramelos de fresa</u>*").

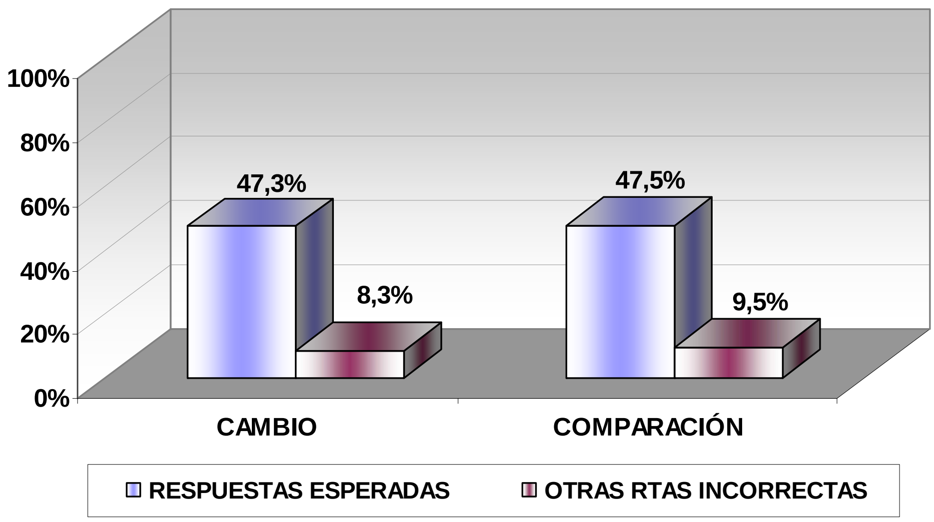
- Respuestas No-Realistas

La Estructura Semántica del problema no afectó al número global de Respuestas No-Realistas (ver Gráfico 10 y Tabla V en el Anexo 2, p. 198). En el caso de las **Respuestas Esperadas**, los alumnos tendían a resolver erróneamente los problemas empleando la estrategia de la palabra "clave". Es decir, en los problemas de *Cambio*, la presencia de palabras como "comprar", "regalar" o "ampliar" les indicaban que se producía un aumento en la cantidad inicial y, por eso, los niños optaban por sumar, tal y como afirmaba Jessica (8;8 años): "*si Ana compra 14 chicles y luego <u>compra</u> otros 8, entonces es un problema de sumar*". Del mismo modo, ocurría en los problemas de *Comparación* con el término "más que", lo que se aprecia en la respuesta de Samantha (9;1 años): "*si Luís tiene 7 rotuladores <u>más que</u> Alejandro, hay que sumar los 17 que tiene Alejandro y los 7 más que tiene Luís*". A pesar de la mayor dificultad de los problemas de

Comparación, los niños se decantaban, tanto en estos problemas como en los de *Cambio*, por la operación de adición debido a que las palabras "clave" que figuraban en el problema se correspondían con esta operación. Un dato interesante fue que algunos alumnos llegaron a convertir el problema de *Comparación* en uno de Combinación, es decir, crearon dos o más conjuntos y finalmente los adicionaron (p.e., "*Alejandro tiene 16 rotuladores y Luís tiene 16 rotuladores más 7 de regalo, por lo que tienen 39 rotuladores entre los dos*"). De esta manera, transformaron un problema complejo de *Comparación* con estructura estática en uno de Combinación de estructura estática, pero más sencillo de resolver.

Gráfico 10

Porcentaje de Respuestas No-Realistas en función de la Estructura Semántica del problema



Los errores consistentes en **Otras Respuestas Incorrectas** se basaban en algoritmos ajenos a la adición (ver también Gráfico 10). En concreto, los alumnos se decantaban mayoritariamente por la multiplicación en ambas Estructuras Semánticas (i.e., 3,8% de los ensayos en ambas estructuras), aduciendo los mismos motivos que habían empleado cuando justificaban la operación de adición.

Sin embargo, algunas respuestas incorrectas basadas en otros procedimientos algorítmicos estuvieron más presentes en una estructura que en otra. En los problemas de *Cambio* podemos destacar que algunos niños hallaron la solución aplicando la combinación de las operaciones de adición y substracción independientemente de que los problemas contuvieran dos o tres cantidades (i.e., 4% de los ensayos). Así, argumentaban que primero debían sumar los números que aludían a los mismos objetos y después restar los que se referían a entidades diferentes. Siguiendo con el problema de los "*Chicles*", Inés (8;1 años) afirmó: "*primero tenemos que restar 14 chicles de varios sabores menos 8, que son los poquitos que tiene de menta. Ahora sabemos que tenía 6 chicles de menta y podemos sumarlos con los 8 chicles de menta que ha comprado*". En los problemas de *Comparación* aparecieron las respuestas basadas en la operación de restar (i.e., 6% de los ensayos). Hacían referencia a que si el segundo poseedor tenía "más que el otro", entonces el primero debía tener menos y, por eso, había que restar. Por ejemplo, Paula Andrea (8;4 años) decía en el problema del "*Scalestrix*": "*Si Luís tiene 6 camiones más que Pedro, Pedro tiene que tener 6 menos de 16"*. Este mismo tipo de argumento acompañó a las respuestas basadas en la división, pero por su escasa incidencia en este estudio no vamos a extendernos en ellas (i.e., ≈1%).

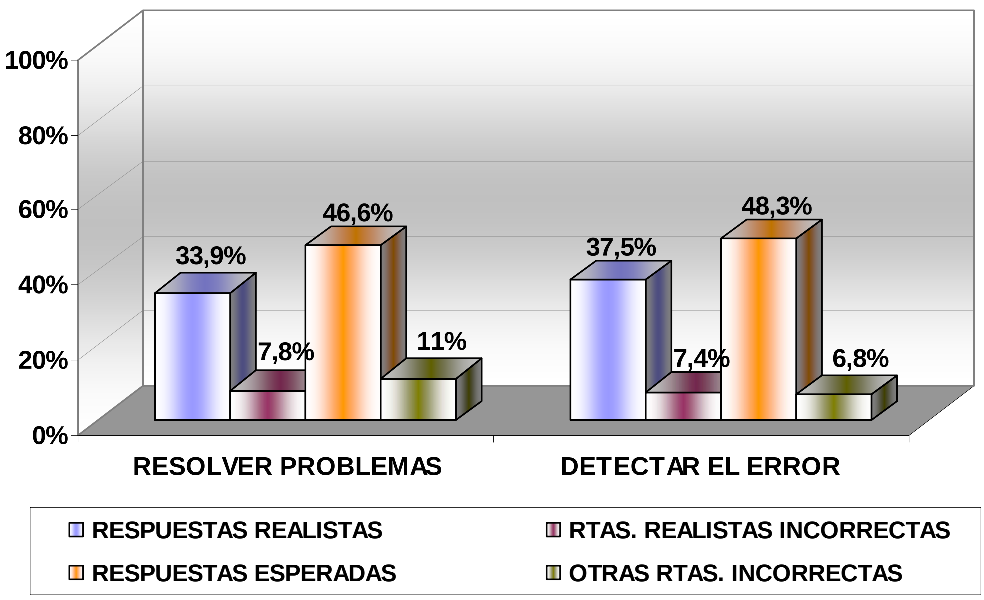
En resumen, los resultados de este trabajo han mostrado, por un lado, que el número de Respuestas Realistas de los alumnos fue mayor en los problemas de *Cambio* que en los de *Comparación* y, por otro, que las Respuestas Realistas Incorrectas se localizaron preferentemente en los problemas de *Comparación* debido a que eran más difíciles de representar. En efecto, los alumnos que fueron capaces de realizar *consideraciones realistas* se encontraron con una barrera adicional al tener que relacionar dos cantidades disjuntas mediante la comparación "más que". Este resultado estaría confirmando, una vez más, que las dificultades de los estudiantes no pueden ser atribuidas únicamente a la ausencia de realismo en sus respuestas, sino que debemos considerar diversos factores explicativos como, la Estructura Semántica subyacente, que puede incrementar aún más la dificultad.

3) EL CONTEXTO DE EVALUACIÓN.

Con respecto al Contexto de Evaluación, la ejecución de los alumnos fue similar tanto si tenían que *Resolver Problemas* como si la tarea consistía en *Detectar el Error* (ver Gráfico 11 y Tabla VI en el Anexo 2, p. 199). Así, a pesar de que las demandas cognitivas en el contexto de *Detectar el Error* eran menores porque no tenían que efectuar cálculos aritméticos, no se apreció un aumento global del número de Respuestas Realistas. Tampoco se vio afectado el número de Respuestas No-Realistas (ver también Gráfico 11).

Gráfico 11

Porcentaje de Respuestas Realistas y Respuestas No-Realistas en función del Contexto de Evaluación empleado



En otro orden de cosas, una cuestión especialmente relevante consistía en analizar si los alumnos que habían realizado *consideraciones realistas* al resolver los problemas evaluaban de forma negativa los errores cometidos por otros niños en los mismos problemas o si, por el contrario, tal y como habían apuntado Verschaffel *et al*. (1997), muchos de ellos admitirían dicha respuesta como correcta basándose en que los cálculos aritméticos eran acertados (ver Tabla 14).

Tabla 14

Relación entre los Tipos de Respuesta ofrecidas en la tarea de *Resolver Problemas* y las correcciones realizadas a los mismos problemas en la Tarea de *Detectar el Error*.

		DETECTAR EL ERROR			
		Respuesta Realista	**Rta. Realista Incorrecta**	**Respuesta Esperada**	**Otra Rta. Incorrecta**
RESOLVER PROBLEMAS	**Respuesta Realista**	**75,42%**	5,60%	17,88%	1,1%
	Rta. Realista Incorrecta	38,10%	28,57%	19,05%	14,28%
	Respuesta Esperada	15,63%	5,28%	**74,39%**	4,7%
	Otra Rta. Incorrecta	12,07%	6,9%	51,72%	29,31%

Los resultados de este estudio indicaron que los alumnos que habían ofrecido **Respuestas Realistas Correctas** fueron consistentes y rechazaron el error cometido por su compañero (i.e., la Respuesta Esperada) en el mismo problema, ofreciendo en su lugar una Respuesta Realista (i.e., 75,42% de los ensayos). Asimismo, congruentemente con su actuación, los niños que habían resuelto los problemas ofreciendo una **Respuesta Esperada** tendieron a evaluar de forma positiva a sus compañeros (i.e., 74,4% de los ensayos). Si comparamos este dato con el estudio de Verschaffel *et al.* (1997), los alumnos universitarios de Formación de Profesorado que habían resuelto los problemas de forma no-realista evaluaron positivamente el 89% de las respuestas no-realistas de los niños referidas a los mismos problemas, pero sorprendentemente los profesores que habían resuelto los problemas de forma realista valoraban como incorrectos únicamente el 33% de los errores de los niños, indicando que las soluciones eran aritméticamente correctas.

En resumen, los resultados del estudio de Verschaffel y colaboradores habían mostrado que los futuros profesores valoraban positivamente las respuestas No-Realistas, independientemente de cuál hubiera sido su respuesta a estos problemas. Por el contrario, en el presente estudio, los niños que habían realizado consideraciones realistas no admitían los errores de sus compañeros en la tarea de *Detectar el Error*. En otras palabras, una vez que habían realizado el proceso de reflexión sobre las demandas del problema y habían construido una representación adecuada que finalmente les conducía a la solución correcta, mantuvieron su criterio cuando la situación que se les proponía era corregir el mismo problema realizado por un compañero. Desde nuestro punto de vista, la falta de correspondencia entre nuestros datos y los obtenidos por Verschaffel *et al.* (1997) podría atribuirse, entre otras cosas, a que en este estudio se planteaba una situación simétrica (niño-niño), mientras que en el de Verschaffel *et al.* la situación era simétrica (profesor-niño). Posiblemente, en este último caso, los profesores que habían resuelto correctamente los problemas decidían ser condescendientes con los errores de los alumnos, ya que podían considerar las tareas poco adecuadas para alumnos de 5º o valorar positivamente las respuestas porque, conforme a lo esperado, hallaban la solución aplicando una aplicando una operación aritmética. Más allá de estas discrepancias, resulta inquietante comprobar que los profesores subestimaban lo que los alumnos podían aprender, otorgando una mayor importancia a las actividades más mecánicas y memorísticas que a los procesos de pensamiento y, si esto es así, estarían muy lejos de introducir cambios en las tareas escolares y, en definitiva, de introducir cambios significativos en la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, los niños de este estudio eran capaces de dejar a un lado el *contrato didáctico* tras haber construido un procedimiento de resolución alternativo. Prueba de ello es que no admitían las respuestas esperadas de sus compañeros por no ajustarse debidamente a las demandas de los problemas.

4) EL GRUPO

- Respuestas Realistas

A pesar de que el número de **Respuestas Realistas Correctas** fue algo superior en los alumnos de *3º* que en los de *2º de E. P.*, estas diferencias no alcanzaron la significatividad estadística, por lo que no nos extenderemos en su análisis. Las creencias incorrectas sobre la resolución de problemas verbales afectaron por igual a ambos niveles escolares (ver Gráfico 12 y Tabla VII en el Anexo 2, p. 199).

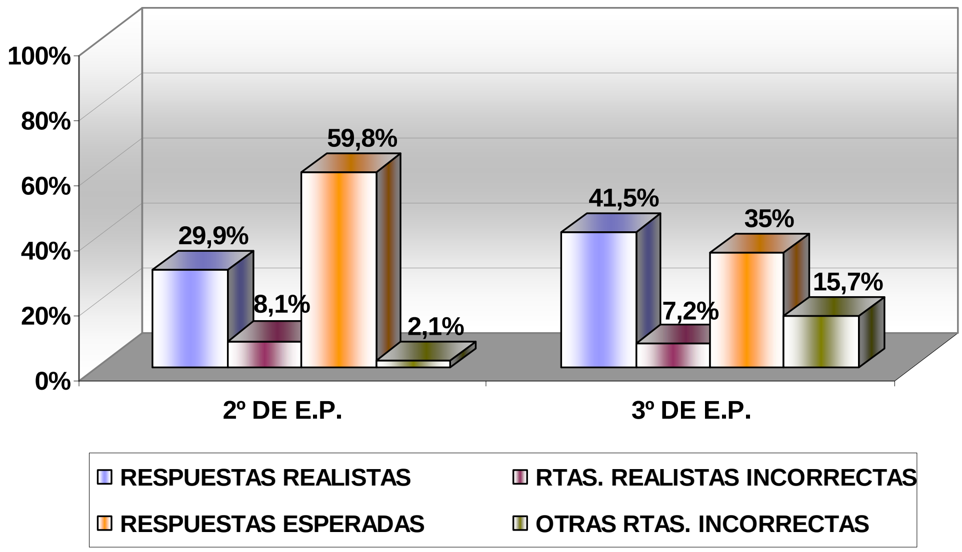
- Respuestas No-Realistas

Se han detectado algunas diferencias en el análisis de los errores que los niños cometieron en función de su nivel escolar (ver también Gráfico 12 y Tabla VII en el Anexo 2, p. 199). En concreto, el 59,8% de las respuestas de los alumnos de 2º de E.P. fueron clasificadas como **Respuestas Esperadas**, pero en el caso de los niños de *3º de E.P.* las Respuestas No-Realistas no procedían mayoritariamente de que aplicasen el algoritmo de adición (i.e., 35%).

En efecto, en este curso el 15,7% de las soluciones totales fueron clasificadas como **Otras Respuestas Incorrectas** que provenían de la aplicación de la multiplicación (6,65%) y, en ocasiones, de la substracción (3,8%), la división (0.6%) o la combinación de dos o más operaciones aritméticas (4,6%). Por ejemplo, en el problema de la "*Granja*", Paula (8;6 años) argumentó que "*si el pastor tenía 17 ovejas y <u>compra</u> cabras, para saber las ovejas que tiene ahora tenemos que multiplicar <u>las ovejas por las cabras</u> y el <u>resultado son ovejas</u>*).

Gráfico 12

Porcentaje de Respuestas Realistas y Respuestas NO-Realistas en función del Grupo



De manera similar, diversos autores habían señalado que los niños tendían a seleccionar la última operación aritmética aprendida o aquélla con la que se sentían más competentes (p.e., Davis, 1989; De Corte y Verschaffel, 1985; Freudenthal, 1991; Greer, 1993; Kilpatrick, 1987; Nesher, 1980; Nunes *et al.*, 1993; Reusser, 1988; Reusser y Stebler, 1997; Säljö, 1991; Schoenfeld, 1991; Silver *et al.*, 1993; Treffers y De Moor, 1990; Verschaffel y De Corte, 1997). Esto podría explicar el hecho de que en el presente estudio los niños de *3º de E.P* eligieran la operación de multiplicar, recientemente aprendida o que algunos decidieran resolver los problemas aplicando la división.

Para terminar, nos gustaría reseñar de nuevo que en la enseñanza de las matemáticas se insiste en la necesidad de que los niños resuelvan problemas verbales porque constituyen contextos significativos en el mundo real (p.e., Becker y Selter, 1996; Burkhardt, 1994; Ellerton y Clarkson, 1996; Lago y Rodríguez, 1999; Niss, 1996). Los resultados de este estudio, no obstante, estarían apuntando que las características de los problemas verbales empleados en el aula (i.e., siempre se resuelven con una operación aritmética, todos los datos que se incluyen se emplean en los cálculos, las historias que describen o el contexto en el que se enmarcan los hechos es irrelevante e, incluso, irreal…), podrían estar haciendo que los niños los perciban como "algoritmos encubiertos" (lo importante es ser capaz de detectar la operación subyacente y realizar bien los cálculos) y opten por resolverlos sin prestar atención a las demandas de los problemas. Una simple afirmación seguida de un interrogante, como en el problema del capitán, sirve para confirmarlo (p.e., Baruk, 1985, 1992; Raddatz, 1983, 1984; Reusser, 1988, Selter, 1994). En este trabajo, a pesar de que el porcentaje de éxito ha sido más elevado que el de otros trabajos, se ha confirmado igualmente la tendencia de los niños a ofrecer Respuestas No-Realistas.

III. CONCLUSIONES

Esta tesis tenía como objetivo principal profundizar en el estudio de los problemas no-rutinarios, tomando en consideración diversos factores que no habían sido estudiados previamente.

Distintas investigaciones habían confirmado el fracaso de los niños cuando tenían que resolver problemas no-rutinarios, pero las dificultades encontradas eran mayores en unos problemas que en otros (i.e., especialmente en los problemas de falsa proporcionalidad como el problema del corredor o el de la cuerda). Desde nuestro punto de vista, esas diferencias en el rendimiento parecían estar relacionadas con el hecho de que **los problemas no-rutinarios planteados en esos estudios diferían entre sí en aspectos importantes tales como la estructura semántica subyacente**. Esta reflexión fue la que nos impulsó a tener en cuenta esta variable en el presente trabajo.

A todo lo anterior se añade, por un lado, que **los autores tampoco habían alcanzado un consenso general para explicar el origen del fracaso de los estudiantes**. Así, algunos apuntaban que los alumnos no eran capaces de considerar los aspectos "realistas" de los problemas, esto es, ofrecían respuestas que no se ajustaban al mundo real (p.e., Caldwell, 1995; Greer, 1993; Hidalgo, 1997; Verschaffel *et al*., 1994, 1999), mientras que otros enfatizaban la influencia negativa de las creencias implícitas que se desarrollan a raíz del denominado *contrato didáctico* (p.e., Brousseau, 1984; Reusser, 1998; Reusser y Stebler, 1997; Sarrazo, 1996; Schoenfeld, 1991, 1992; Staub y Reusser, 1995; Wyndhamn y Säljö, 1997). Con el fin de corroborar cuál de estas dos aproximaciones se hallaba en la base de las respuestas de los alumnos, se optó por estudiar la influencia de algunas creencias incorrectas: (a) todo problema tiene solución, (b) sólo hay una única solución posible, (c) todos los datos que se incluyen en el problema deben ser empleados en los cálculos y (d) es necesario realizar una operación aritmética para hallar la solución.

Por otro lado, **las sucesivas aproximaciones que se habían realizado para intentar hacer más accesibles a los alumnos los *aspectos realistas* de los problemas** habían fracasado sistemáticamente. Por ejemplo, la inclusión de señales de alerta genéricas que advertían sobre la aparente sencillez de los problemas no alcanzaba los resultados esperados y tan sólo la discusión mediada en clase los mejoraba relativamente. Por ese motivo, considerábamos que en nuestro estudio sería relevante incluir un contexto de evaluación alternativo (i.e., *Detectar el Error*), que impone menores demandas cognitivas, con el fin de evaluar si esto favorecía que la atención de los niños se centrara exclusivamente en la información de los problemas.

Por último, **los trabajos previos no se habían planteado como objetivo estudiar las posibles diferencias evolutivas** asociadas con el nivel de escolarización. A pesar de que nuestra hipótesis era que no íbamos a encontrar diferencias globales en el rendimiento de los alumnos, no podíamos obviar el hecho de que las explicaciones que sustentasen las respuestas de los niños podían variar notablemente dependiendo del nivel escolar, proporcionando indicios sustanciales sobre los errores.

En lo que sigue revisaremos los datos más relevantes hallados en este estudio y haremos algunas propuestas de cara a futuras investigaciones.

En primer lugar, los datos derivados del análisis del **Tipo de Información ofrecida en el Enunciado**, llevarían a apoyar la propuesta de que el fracaso de los niños estaría provocado por sus creencias incorrectas y no por el hecho de no ser capaces de considerar los aspectos realistas. Así, el número de Respuestas Realistas Correctas se encontraba íntimamente relacionado con el tipo de creencia que contravenían los problemas, siendo más complejas las situaciones que podían resolverse mediante una solución numérica precisa (i.e., problemas *Irresolubles* y con *Soluciones Múltiples*) y más sencillas aquéllas en las que los estudiantes tenían que detectar cierta información no-significativa (i.e., la *Solución no requiere Cálculo* y *Datos Irrelevantes*). Adicionalmente, la capacidad de realizar *consideraciones realistas* sobre la historia o las demandas de los problemas no siempre les condujo al éxito deseado, puesto que algunos estudiantes actuaban finalmente de acuerdo con las normas implícitas que imperan en el aula. En suma, las creencias que han surgido a raíz del *contrato didáctico* explicaban de forma diferencial las dificultades de los alumnos para realizar consideraciones realistas acordes con el mundo real.

En este punto, resulta conveniente realizar algunas consideraciones sobre algunos de los resultados de investigaciones anteriores que se han visto corroborados en este trabajo. La primera de ellas iría encaminada a explicar las respuestas de los niños que calculaban la edad del pastor sumando ovejas y cabras. Aunque al comienzo de este trabajo mostráramos cierta sorpresa e incredulidad ante una conducta tan irracional, en realidad lo que sucedía es que los niños estaban dejándose guiar por esas normas y reglas implícitas de forma automática. Prueba de ello es que los que llegaban a ser *parcialmente* conscientes de su error y no variaban su respuesta, adaptaban la propia historia del problema a su solución (i.e., "*el pastor ha comprado un animal en cada cumpleaños y así siempre sabrá la edad que tiene*"). En el presente trabajo, los niños que no eran capaces de dar un valor numérico a la información ambigua, también reconstruían el problema para que su respuesta final tuviera sentido (i.e., "*los pocos chicles que tenía en la bolsa de varios sabores* <u>*se los come*</u> *y ya no cuentan")*. En otras palabras, los niños no cambian su forma de proceder cuando resuelven los problemas no-rutinarios porque creen que están actuando correctamente y estas creencias resultan tan robustas que, en ocasiones, llegan a culpar al entrevistador de su propio error como indicaba Chavallard (i.e., yo no tengo 20 años pero "*es culpa tuya, no me diste los números correctos*") o como ha sucedido en este trabajo ("*es un problema con truco, tiene cebo para picar*"), simplemente porque no se ajustaban a sus expectativas.

Aunque retomaremos con posterioridad esto último, nos gustaría matizar que en todo proceso de comunicación están presentes igualmente reglas implícitas que nos llevan a ofrecer respuestas que serían inadecuadas, debido a que presuponemos la *honestidad* y las *intenciones* de nuestro interlocutor. Por ejemplo, ante la pregunta "*¿tiene hora?*", una respuesta afirmativa o negativa sería tan poco realista y tendría tan poco sentido como las expuestas por los niños cuando resuelven problemas no-rutinarios, ya que a pesar de ser lingüísticamente correcta (igual que las respuestas de los niños lo son aritméticamente), lo que realmente se espera con esa pregunta es conocer la hora exacta. Es más, una respuesta en términos de "sí tengo hora o no tengo hora" produciría la misma sensación de sorpresa e incredulidad en el oyente que la que el lector ha podido sentir en algunos momentos en este trabajo con las respuestas de algunos niños. Al igual que sucede en el contexto escolar, las personas nos regimos por normas y no llegamos a cuestionarnos si tienen sentido. ¿Cuántas veces hemos escuchado en los informativos que la media de hijos de una familia española es de 1,2 hijos sin preguntarnos si ese dato tiene sentido en la vida real? Sin embargo, nos ha asombrado el hecho de que los niños considerasen que eran necesarios 31,33 autobuses para trasportar a 1128 soldados. Los niños confían en que su profesor no les pida que resuelvan un problema irresoluble, como el del capitán o el del pastor, si sabe de antemano que no hay una solución posible y lo mismo sucedería con los restantes problemas que violan el *contrato didáctico* y que hemos estudiado en este trabajo.

A pesar de que estas normas trasciendan al contexto puramente escolar, desde el punto de vista educativo resulta inaceptable que los estudiantes se constriñan reiteradamente a unas reglas que carecen de toda lógica en el mundo real. Si a los alumnos les basta una simple afirmación seguida de una pregunta para aplicar un algoritmo ¿qué función están desempeñando los problemas en la escuela? Asimismo, si los alumnos que tienen más conocimientos los emplean de forma descontextualizada e irracional, ¿para que dotarles de más conocimientos? Lógicamente, no podemos permitir que los alumnos no sean capaces de utilizar las herramientas de las que disponen de una manera lógica y reflexiva.

Teniendo en cuenta todo esto, parece lógico que la solución debe partir de re-negociar el *contrato didáctico*. No podemos modificar las creencias de los alumnos si los profesores comparten y transmiten estas concepciones o si los libros de texto incluyen tareas rutinarias.

Este planteamiento sintoniza con los llamamientos que, sensibles a la importancia de los procesos cognitivos de alto orden en la educación matemática, abogan por la ampliación y diversificación de las tareas escolares. Las investigaciones que han tenido por objeto tareas no habituales ni estructuradas (p.e., Ellerton, 1986; Ellerton y Clarkson, 1996; English, 1998; Greer, 1997; Jiménez, Hernández, Lago y Rodríguez, 2005; Lago *et al.*, 1999), así como las que se han centrado en contextos no-estadarizados como los basados en el aprendizaje cooperativo (p.e., Serrano y Calvo, 1944; Serrano y González-Herrero, 1996; Serrano, González-Herrero y Martínez-Artero, 1997) han demostrado que favorecen la reflexión de los niños y ayudan a formar alumnos autónomos. Nuestra propuesta apostaría por incluir en la enseñanza de las matemáticas los problemas no-rutinarios, con el objetivo de que los niños se vean forzados a plantearse la relevancia / irrelevancia de la información disponible, la idoneidad de una solución o la posibilidad de que un problema puede no tener solución. Estas actividades podrían constituir un marco sencillo y eficaz en el que potenciar la reflexión en los alumnos.

Adicionalmente, otra de las aplicaciones que podrían derivarse de los estudios sobre los problemas no-rutinarios es que permiten profundizar en las creencias incorrectas que tienen los niños sobre las matemáticas. Se han realizado estudios encaminados a medir las concepciones incorrectas de los alumnos sobre las matemáticas, empleando para ello cuestionarios en los que se pregunta a los niños si comparten una serie de afirmaciones (p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 2000; Bobbitt y Nicholls, 1993; Chen, 2005; Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti y Perlwitz, 1991; De Corte, Op't Eynde y Verschaffel, 2002; Dossey, Mullis, Lindquist y Chambers, 1988; Kloosterman y Stage, 1992; Loef y Carey, 1997; Schoenfeld, 1988, 1989b). Desde nuestro punto de vista, estas situaciones no serían las más idóneas, puesto que los niños podrían no ser conscientes de sus creencias o mostrar cierta resistencia a manifestarlas directamente. Sin embargo, en los problemas no-rutinarios las estamos midiendo indirectamente, pero contextualizadas en una tarea aritmética concreta.

Una posible limitación que podría tener este trabajo, se refiere a la necesidad de proceder a una nueva formulación de los problemas cuya *Solución no* *requiere Cálculo*, ya que el hecho de que incluyeran información no-significativa, como los de *Datos Irrelevantes*, no ha permitido discriminar convenientemente la implicación real de la creencia de que "todo problema debe resolverse aplicando una operación aritmética". Además, aunque los problemas *Irresolubles* fueron eliminados del análisis por las razones ya comentadas, los datos de los alumnos de 3º estarían sugiriendo que éstas serían las situaciones de máxima dificultad junto con los problemas de *Soluciones Múltiples*, por lo que sería interesante contrastar si la creencia más robusta es "no poder obtener una solución precisa", independientemente de que no haya una solución posible o que puedan existir varias soluciones.

Otro de los resultados más destacados de este estudio fue que la **Estructura Semántica** subyacente a los problemas afectaba a su nivel de dificultad. El porcentaje de Respuestas Realistas Correctas fue significativamente mayor en los problemas de *Cambio*, lo que implica que la mayor sencillez de las relaciones dinámicas que se describen en estos problemas facilita que los estudiantes prestaran una mayor atención a las demandas de los problemas. Además, la mayoría de las Respuestas Realistas Incorrectas se localizaron en los problemas de *Comparación*, lo que a su vez estaría indicando que, a pesar de que los niños habían abordado de forma realista este tipo de problemas, fallaban al no ser capaces de representar la relación de comparación entre los dos conjuntos. Los estudios previos sobre los problemas rutinarios habían puesto de manifiesto que los problemas de comparación, que incluyen relaciones estáticas, eran especialmente complejos para los niños. Los estudios sobre los problemas no-rutinarios no pueden dejar al margen las dificultades relacionadas con la representación de las distintas estructuras semánticas para explicar el rendimiento de los alumnos en los problemas.

En otro orden de cosas, nos gustaría resaltar las implicaciones educativas que se desprenden de la consistencia alcanzada por los niños en ambos **Contextos de Evaluación**. Así, los que habían ofrecido Respuestas Realistas cuando resolvían los problemas no se dejaban guiar por el error que incluíamos en la tarea de *Detectar el Error* y no admitían como válida la solución que, en principio, se ajustaba a sus creencias. En concreto, es sumamente sorprendente que los estudiantes que habían reflexionado sobre los problemas cuando habían tenido que resolverlos, ya no admitieran las respuestas de sus compañeros que se ajustaban a la forma de proceder en la escuela. Esto indicaría que las concepciones de los niños son sensibles al cambio tras experimentar simplemente con tareas que no son resolubles de forma estereotipada. Salvando las dificultades previas que los niños se encuentran cuando tienen que resolver problemas no-rutinarios, los que llegan a alcanzar el éxito no vuelven al modelo anterior. En otras palabras, los niños recuperan "el sentido común" cuando rompemos las "reglas de juego". En futuros estudios sería interesante analizar simultáneamente varios tipos de errores, incluyendo entre ellos la respuesta realista al problema, lo que permitiría corroborar si los niños que habían resuelto los problemas de forma no-realista, al menos, podrían reconocer la respuesta correcta cuando se les presenta como una posible solución alternativa. Asimismo, brindaríamos una oportunidad a los niños que no se atrevieron por si mismos a ofrecer una respuesta similar por el temor a no actuar conforme al *contrato didáctico*.

Para finalizar, tomando en consideración los datos procedentes del análisis de factor **Grupo**, sería conveniente ampliar los niveles escolares de estudio, incluyendo niños de 1º de Educación Primaria y de Educación Infantil con el fin de estudiar en qué momento surgen las creencias incorrectas e, incluso, niveles educativos superiores para averiguar si se modifican.

IV. BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, M. y Navarro, J. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de Psicología General y Aplicada, 53*(1), 63-83.

Aguilar, M., Alcalde, C., Marchena, E. y Navarro, J. (1998). *Las dificultades en la resolución de problemas aritméticos al iniciarse el segundo ciclo de la Educación Primaria*. Comunicación presentada al II Congreso Iberoamericano de Psicología, Madrid.

Ashcraft, M. H. (1990). Strategic processing in children's mental arithmetic: a review and proposal. En D. F. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of Cognitive Development* (pp. 185-211). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ashcraft, M. H. y Fierman, B. A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology, 33*, 216-234.

Ashcraft, M. H. y Stazyk, E. H. (1981). Mental addition: A test of three verification models. *Memory & Cognition, 9,* 185-196

Ashcraft, M. H., Donley, R. D., Halas, M. A. y Vakali, M. (1992). Working memory, automaticity, and problem difficulty. En J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skill* (pp. 301-329). Amsterdam, North Holland: Elsevier Science Publishers

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategy for single digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education 2,* 141-157.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathematiques*. París: Seuil.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. París: Seuil.

Becker, J. y Selter, C. (1996). Elementary schools practices. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of mathematical education* (pp. 511-564). Dordrecht: Kluwer Academia Publishers.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M. y Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning & Instruction*, *7*, 87-106.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje, 44*, 109-121.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1990). Developmental processes and stages in the acquisition of cardinality. In*ternational Journal of Behavioural Development, 13*(2), 231-250.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. In*fancia y Aprendizaje, 39-40,* 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Fundamentos cognitivos de la adición. *Psiquis, 3,* 21-30.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987c). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. *Enseñanza de las ciencias, número extra,* 332-333.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas, 8*, 23-41.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). La operación de sumar. En V. Bermejo (Ed.), *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1992). Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de solución. In*vestigaciones Psicológicas II,* 21-45.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva, 6,* 159-174.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada, 51*(3-4), 533-552.;

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Cañizares, V., Dopico, C y Moran, M. T. (1997). Desarrollo del conocimiento de la adición y la substracción en niños de Educación Primaria. En J. A. Beltrán, V. Santiuste, P. Fernández y A. Tocino (Eds.), *Nuevas perspectivas en la intervención psicopedagógica: Primeros aspectos cognitivos, motivacionales y contextuales* (pp. 351-355). Madrid: Universidad Complutense.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, M. J. (2002). *El PEI. Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Editorial Complutense.

Bertelli, R., Joanni, E. y Martlew, M. (1998). Relationship between children's counting ability and their ability to reason about number. *European Journal of Psychology of Education, 13*, 371–383

Blöte, A. W., Klein, A. S. y Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning & Instruction, 10*, 221-247.

Bobbit, S. y Nicholls, J. (1993). Elementary school pupils' beliefs about practices for motivating pupils in mathematics. *British Journal of Educational Psychology, 63*, 414-430.

Bransford, J. D., Sherwood, R. D., Hasselbring, T. S., Kinzer, C. K. & Williams, S. M. (1990). Anchored instruction: Why we need it and how technology can help. In D. Nix & R. Spiro (Eds.), *Cognition, education, and multimedia: Exploring ideas in high technology* (pp. 115-141). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brousseau, G. (1984). The IREM's role in helping elementary-school teachers. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education. The mathematical education of primary-school teachers, vol. 3* (pp. 235-251). París: UNESCO.

Brown, J. S. y Burton, R. B. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive science, 2*, 155-192.

Brown, J. S. y Van Lehn, K. (1982). Towards a generative theory of “Bugs”. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.117-135). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Burkhardt, H. (1994). Mathematical applications in school curriculum. En T. Husén y T. N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopaedia of education 2nd ed.* (pp. 3621-3624). Oxford, New York: Pergamon Press

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de Educación Infantil.* Tesis doctoral, Madrid: Universidad Complutense.

Cai, J. y Silver, E. A. (1995). Solution processes an interpretations of solutions in solving a division with remainder story problems: Do Chinese and U.S. students have similar difficulties? *Journal for research in Mathematics Education, 26*, 491-497.

Caldwell, L. (1995). *Contextual considerations in the solution of children’s multiplication and division word problems.* Tesis doctoral no publicada, Belfast, Northern Ireland: Queen’s University,.

Callejo, M. L. y Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la Educación Secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 173-194.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.17-40). Hillsdale, NJ: L.E.A

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual Knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1981). Problem structure and first grade children's' initial solutions processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 27-39.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

Carpenter, T. P. y Peterson, P. L. (1988). Learning mathematics thought instruction (special issue). *Educational Psychologist*, 2.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 427-440.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. (1999). *Children's Mathematics: cognitively guided instruction*. Heinemann: Portsmouth.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 45-61). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C.P. y Loef, M. (1989). Using knowledge of mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26*, 499--531.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 55-72.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W. y Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher, 76*, 652-659.

Chen, S. (2005). *The relationship between mathematical beliefs and performance: A study of students and their teachers in Beijing and New York*. Tesis doctoral, Columbia, Estados Unidos: Columbia University.

Christou, C., y Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (4), 436-442.

Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematics learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 362-385.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, S., Trigantti, B. y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), 3-29.

Cooney, J. B., Swanson, H. L. y Ladd, S. F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill. Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition & Instruction, 5*, 323-345.

Cooper, B. (1992). Testing National Curriculum Mathematics: Some critical comments on the treatment of 'real' contexts for mathematics. *The Curriculum Journal, 3*, 231-243.

Cooper, B. (1994). Authentic testing in mathematics? The boundary between everyday and mathematical knowledge in National Curriculum testing in English schools. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice, 1*(2), 143-166.

Cooper, B. y Harries, T. (2002). Children's responses to contrasting "realistic" mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 1-23.

Cooper, B. y Harries, T. (2005). Making sense of realistic word problems: portraying working class 'failure' in a division with remainder problem. *International Journal of Research and Methods in Education, 28*(2), 147-169.

Davis, R. B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior*, *8*, 143-160.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 4*, 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive Processes in Mathematics* (pp. 42 - 59). New York: Oxford University Press.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning & Instruction*, *3*, 219-242.

De Corte, E., Greer, B. y Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D.C. Berliner y R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology*. (pp. 491-549). New York: Macmillan.

De Corte, E., Op't Eynde, P. y Verschaffel, L. (2002). Knowing what to believe: The relevance of mathematical beliefs for mathematics education. En B. K. Hofer y P. R. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology; The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 297-320). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*, 460-470.

Deboys, M. y Pitt, E. (1995). *Lines of Development in Primary Mathematics*. Belfast: Blackstaff Press Ltd.

Dossey, J. A., Mulis, I. V. S., Lindquist, M. M. y Chambers, D. L. (1988). *The mathematics report card: Are we measuring up? Trends and achievement based on the 1986 National Assessment*. Princeton: Educational Testing Service.

Ellerton, N. y Clarkson, P. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of mathematical education* (pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 83-106.

English, L. D. y Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fennema E., Carpenter T. P. y Peterson P. L. (1989). Learning mathematics with understanding: Cognitively Guided Instruction. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (pp. 195-221). Greewich, CT: JAI Press.

Fennema, E., Carpenter, T. P. y Lamon, S. J. (1991). *Integrating Research on teaching and Learning Mathematics*. New York: State University of New York Press.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Nueva York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York: MacMillan.

Ginsburg, H. P. y Russell, R. L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of Society for Research in Child Development, 46*, (6, serial N.193).

Ginsburg, H. P., Posner, J. K. y Russell, R. L. (1981). The development of mental additions as a function of schooling and culture. *Journal of Cross-Cultural Psychology, 12*, 163-178.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary on solving word problems: A case study of modelling? *Learning & Instruction, 7*(4), 389-397.

Greer, B. (1993). The mathematical modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 12*(3), 239-250.

Greer, B. (1997). Modeling reality in mathematics classrooms: the case of Word problems. *Learning & Instruction, 7*(4), 293-307.

Hatano, G. (1997). Cost and benefit of modeling activity. Commentary. *Learning & Instruction, 7*(4), 383–387.

Hegarty, M., Mayer, R. E. y Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*, 18-32.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1978). *Semantic processing of arithmetic word problem solving*. Comunicación presentada en el Congreso anual de la Midwestern Psychological Association, Chicago, Estados Unidos.

Hernández, M. L. (2004). Libros de texto, algoritmos y problemas verbales: ¿cuál es el resultado de mezclar estos ingredientes? *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 35*, 66-73.

Hidalgo, M. C. (1997). *L'activation des connaissances à propos du monde réel dans la résolution de problèmes verbaux en arithmétique*. Tesis doctoral no publicada, Québec, Canada: Université Laval.

Hudson, T. (1980). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Inoue, N. (2005). The realistic reasons behind unrealistic solutions: the role of interpretive activity in word problem solving. *Learning & Instruction, 15,* 69-83.

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Grenoble (1980). *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public, 323*, 235-243.

Jiménez, L., Hernández, M. L., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (2005). *La influencia del contexto de resolución y el efecto de la tarea en problemas con estructura multiplicativa*. Comunicación presentada en las IV Jornadas de Desarrollo Humano y Educación, Alcalá de Henares, Madrid.

Kaelen, Y. (1992). *Beroepsgericht toetsen rekenen/wiskunde. Handleiding bij een experimentele instap-toets rekenen/wiskunde voor het CBB* [Manual for an experimental entrance text about mathematics for centres of basic adult education]. Amersfoort, The Netherlands: Landelijk Studie en Ontwikkelingscentrum Volkswasseneneducatie.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and mathematics education* (pp. 123-127). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Kintsch, W. y Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*(1), 109-129.

Kloosterman, P. y Stage, F. K. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 92*(3), 109--115.

Kloosterman, P. y Stage, F. K. (1992). Measuring Beliefs about mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 92(*3), 109-115.

Koshmider, J. W. y Ashcraft, M. H. (1991). The development of children's multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 51*, 53-89

Lago, M. O. (1992). *Análisis estructural de la adquisición y desarrollo de la habilidad de contar.* Tesis doctoral, Madrid: Universidad Complutense.

Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1999). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard. (Eds.), *Psicología de la Instrucción (Vol. II), Áreas curriculares* (pp. 75-95). Madrid: Síntesis.

Lago, M. O., Rodríguez, P. y Caballero, S. (1999). *La resolución de problemas verbales de multiplicación y división en niños de educación infantil*. Comunicación presentada en el III Congreso Internacional de Psicología y Educación, Santiago de Compostela (Galicia).

Lago, M. O., Rodríguez, P., Hernández, M. L. y Jiménez, L. (2005). *Secondary pupils' understanding of DWR problems: Are semantic structure and model of the division important?* Poster presentado en la 9TH European Conference of Psychology. Granada, España.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Zamora, A. y Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división. *Anuario de Psicología, 30*(3), 71-89.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 41–61.

LeFevre, J., Bisanz, J., y Mrkonjic, L. (1988). Cognitive arithmetic: Evidence for obligatory activation of arithmetic facts. *Memory & Cognition, 16*, 45-53.

LeFevre, J., Sadesky, G. S. y Bisanz, J. (1996). Selection of procedures in mental addition: Reassessing the problem size effect in adults. *Journal of Experimental Psychology, Learning, Memory, and Cognition, 22,* 216-230.

Lewis, A. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychologv, 81*, 521- 531.

Li, Y. y Silver, E. A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*, 233-246.

Lindvall, C. M. e Ibarra C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 50-62.

Littlefield, J. y Rieser, J. J. (1993). Semantic features of similarity and children's strategies for. identification of relevant information in Mathematical Story Problems. *Cognition & Instruction, 11*(2), 133-188.

Loef, M. y Carey, D. A. (1997). Young Children's Perceptions of Mathematics in Problem-Solving Environments. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 8-25.

López, A. (2001). *Desarrollo de las operaciones de sumar y restar en la comprensión de los problemas verbales*. Tesis doctoral, Madrid: Universidad Complutense.

Lozano, M. J. (2001). *Desarrollo evolutivo de las estrategias de calculo mental en la Educación Primaria.* Tesis doctoral, Madrid: Universidad Complutense.

Mayer, R. (1982). Different Problem-Solving Strategies for Algebra Word and Equation Problem. *Journal of Experimental Psychology, 5*, 448-462.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Mayer, R. (2003). Mathematical problem solving. En J. Royer (Ed.), *Mathematical Cognition* (pp. 69-92). Greenwich, Connecticut: Simon and Schuster McMillan.

Morales, R. V., Shute, V. J. y Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition & Instruction, 2*, 41-57.

National Assessment of Educational Progress (1983). *The Third National Mathematics Assessment: Results, trends and issues*. Denver, C.O.: Author

Nelissen, J. M. C. (1987). *Kinderen leren wiskunde. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs* [Children learn mathematics. A study concerning construction and reflection in elementary school education]. Gorinchem: De Ruiter.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 41-8.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. P. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 25-38). Hislldale, N.J.: Erlbaum.

Nesher, P. (1992). Solving Multiplication Word Problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 189- 219). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. y Teubal, E. (1975). Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 41-51.

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*, 373-394.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of mathematical education* (pp. 11-48). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nunes, T., Schliemann, A. y Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje, 26*(4), 451-468.

Orrantia, J., González, L. B. y Vicente, S. (2005). Estudios del conocimiento numérico: Aprendizaje y enseñanza. Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y aprendizaje, 28*(4), 429-451.

Palm, T. (2006). Word problems as a simulations of real-world situation: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics, 26*(1), 42-47.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense-making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Pepper, K. L. y Hunting, R.P. (1998). Preschooler's counting and sharing. *Journal for Research in Mathematic Education, 29*(2), 164-183.

Puchalska, E. y Semanemi, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetical problems with missing, surplus or contradictory data. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 9-16

Raddatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Zeitschrift für Mathematik-Didaktik, 4*, 205-217.

Raddatz, H. (1984). Schwierigkeiten der Anwendung arithmetischen Wissens am Beispiel des Sachrechnens. En J. H. Lorenz (Eds.), *Lernschwierigkeiten - Forschung und Praxis* (pp. 17-29). Köln: Aulis.

Renkl, A. (1999). *The gap between school and everyday knowledge in mathematics*. Comunicación presentada a la 8th European Conference for Research on Learning and Instruction, Göteborg, Sweden.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. In*structional Science, 17*, 309-338.

Reusser, K. (1995). Lehr-Lernkultur im Wandel: Zur Neuorientierung in der kognitiven Lernforschung. En R. Dubs y R. Dörig (Eds.), Dialog Wissenschaft und Praxis*. Berufsbildungstage St. Gallen* (pp. 164-190). St. Gallen: Institut für Wirtschaftspädagogik IWP.

Reusser, K. y Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning & Instruction, 7*, 309-328.

Riley, M. S y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition & Instruction 5*(1)*,* 49-101.

Riley, M. S. (1981). *Conceptual and procedural knowledge in development.* Tesis doctoral no publicada, Pensilvania, Estados Unidos: University of Pittsburgh.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Robitaille, D. y Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics. Teaching and Learning* (pp. 687-709). New York: McMillan.

Rodríguez, P. (1992). *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa.* Tesis doctoral, Madrid: Universidad Complutense.

Rodríguez, P., Lago, M. O., Hernández, M. L., Jiménez, L., Guerrero, S. y Caballero, S. (en revisión). How do types of division situations affect to division with remainder problems? Some Spanish evidence. *European Journal of Educational Psychology*.

Säljö, R. (1991). Learning and Mediation: Fitting reality into a table. *Learning and Instruction, 1*(3), 261-272.

Säljö, R. y Wyndhamn, J. (1987) The formal setting as context for cognitive activities. An empirical study of arithmetic operations under conflicting premises for communication. *European Journal of Psychology of Education, 2*(3), 233-245.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics classes. *Educational Psychologist, 23*, 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1989a). Teaching mathematical thinking and problem solving. En L. Resnick (Ed.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research* (pp. 83-103). ASCD Yearbook.

Schoenfeld, A. H. (1989b). Explorations of students' mathematical beliefs and behaviour. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Selter, C. (1994). How old is the captain? *Strategies, 5*(1), 34-37.

Serrano, J. M. y Calvo, M. T. (1994). *Aprendizaje cooperativo: técnicas y análisis dimensional.* Murcia: Caja Murcia.

Serrano, J. M. y González-Tejero, M. E. (1996). *Cooperar para aprender. ¿Cómo implementar el aprendizaje cooperativo en el aula?* Barcelona: PPU.

Serrano, J. M., González-Tejero, M. E. y Martínez-Artero, M. C. (1997). *Aprendizaje cooperativo en Matemáticas: un método de aprendizaje cooperativo individualizado por la enseñanza de las matemáticas.* Murcia: Publicaciones Universitarias.

Siegler, R. S. y Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. En H. Reese y L. Lipsitt (Eds.), *Advances in child development and behaviour* (pp. 241-311). N. J.: Academic press.

Siegler, R. S. y Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General, 127*, 377-397

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silver, E. A. (1988). Solving story problems involving division with remainders: the importance of semantic processing and referential mapping. En M. J. Behr, C. B. Lacampagne y M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127-133). Dekalb, H.: Northern Illinois University.

Silver, E. A., Mukhopadhyay, S. y Gabriele, A. J. (1992). Referential mappings and the solution of division story problems involving remainders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *14*, 29-39.

Silver, E. A., Shapiro, L. J. y Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problem involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 117-135.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En J. Sowder (ed.), *Handbook of. research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: MacMillan.

Squire, S. y Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology, 81*, 1-43.

Staub, F. y Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. En Weaver, C. A., Mannes, S. y Fletcher, C. R. (Eds.), Discourse Comprehension. Essays in Honor of Walter Kintsch, Hillsdale, NJ; Lawrence Erlbaum Asociates, Inc.

Stern, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben "gelöst"? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. *Der Mathematikunterricht, 28*(5), 7-29.

Stevenson, H. W. y Stigler, J. W. (1992). *The Learning Gap: Why Our Schools are Failing and What We Can Learn from Japanese and Chinese Education*. New York: Summit Books.

Stevenson, H. W., Chen, C. y Lee, S. Y. (1993). Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children: Ten years later. *Science, 259*, 53-58.

Stigler, J. W., Fuson, K. C., Han, M. y Kim, M. S. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 3*, 153-171.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. *Mathematics in School, 28*(5), 2-4.

Thorndike, E. (1922). *The Psychology of Arithmetic*. New York: Macmillan.

Treffers, A. y De Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool. Dee12: Basisvaardigheden en cijferen* [Specimen of a national program for primary mathematics teaching. Part 2: Basic mental skills and written algorithms]. Tilburg, The Netherlands: Zwijsen

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1995). Teaching realistic mathematical modelling in the elementary school. A teaching experiment with fifth graders. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference Vol. 3* (pp. 105-112). Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Teaching realistic mahematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal of Research in Mathematics Education, 28*(5), 557-601.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning & Instruction, 4*, 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1999). Children's conceptions about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. En W. Schnotz, S. Vosniadou y M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 175-189). Oxford: Elsevier.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 85-94.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lamote, C. y Dherdt, N. (1998). The acquisition and use of an adaptive strategy for estimating numerosity. *European Journal of Psychology of Education, 13*, 347-370.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning & Instruction, 4*, 339-59.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Widaman, K. F., Geary, D. C., Cormier, P. y Little, T. D. (1989). A componential model for mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 15*, 898-919.

Wittgenstein, L. (1956). *Remarks on the Foundations of Mathematics [RFM]*. Oxford: Blackwell.

Wolters, M. A. D. (1983). The part-whole schema and arithmetical. problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 127-138.

Wyndhamn, J. y Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning & Instruction, 7*, 361-382.

Yoshida, H., Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning & Instruction, 7*, 329-338.

ANEXOS

ANEXO 1. ANEXO DE CUADROS

Cuadro I

Ejemplos de los Tipos de Respuestas Realistas y No-Realistas en el estudio de Verschaffel et al., 1994

Problema de los Amigos
Carl tiene 5 amigos y Georges tiene 6 amigos. Carl y Georges deciden dar una fiesta juntos. Ellos invitan a todos sus amigos. ¿Cuántos amigos hay en la fiesta?
No realista 6+5=11. Habrá 11 amigos en la fiesta
Realista No se puede conocer cuantos amigos habrá en la fiesta.
Problema del Tablero
Steve ha comprado cuatro tableros de 2.5 metros cada uno. ¿Cuántos pedazos de un metro puede obtener de esos tableros?
No realista. 4 x 2,5 = 10 metros dividido entre un metro = 10 tablones. Steve podrá tener 10 tablones de un metro.
Realista (1) Steve puede obtener 2 tablones de un metro de cada tablón de 2.5 metros. Por lo tanto, 2 x 4 = 8 tablones.
(2) 10 tablones. Steve puede obtener 2 tablones de un metro de cada tablón de 2.5 metros y pegar de dos en dos las otras cuatro piezas de 0.5 metros
Problema del Agua
¿Cuál será la temperatura de agua de un recipiente si ponemos un litro de agua a 80º y un litro de agua a 40º dentro de él?
No realista (1) 80+40 = 120 grados
(2) 80+40= 120 y 120/2 = 60 grados
Realista No lo sé exactamente. Debería ser alguna cantidad entre 40 y 80 grados
Problema del Autobús
1128 soldados deben ser transportados a su lugar de entrenamiento. En cada autobús de la armada caben 36 soldados. ¿Cuántos autobuses necesitarán?
No realista (1) 450/36 = 12.5 autobuses necesitarán;
(2) 12 autobuses
Realista 450/36 = 12.5 autobuses necesitarán. Necesitarán 13 autobuses.

Problema del Corredor
El mejor tiempo de un atleta en correr una milla es 4 minutos y 7 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 3 millas? No realista 17x10 = 170 sg. Su mejor tiempo será 170 segundos Realista (1) Es imposible de saber (2) Más de 170 segundos.
Problema de la Escuela
Bruce y Alice van a la misma escuela. Bruce vive a 17 km de la escuela y Alice a 8 km. ¿A cuánta distancia viven Bruce y Alice la una de la otra? No realista (1) 17-8 = 9. Viven a 9 kilómetros el uno del otro. (2) 17+8 =25. Viven a 9 kilómetros el uno del otro. Realista (1) No puedes averiguar a cuánto viven el uno del otro. (2) La respuesta debería estar entre 9 y 25.
Problema de los Globos
Un abuelo le da a sus 4 nietos una caja de 18 globos para que ellos la repartan de manera que tengan todos la misma cantidad. ¿Cuántos globos conseguirá cada nieto? No realista 18/4 = 4.5 globos para cada niño Realista 18/4 = 4.5. Así que serán 4 globos para cada niño y sobran dos.
Problema de la Edad
Rob nació en 1978. Ahora estamos en 1993. ¿Cuántos años tiene? No realista 1978+15 = 1993. 15 años Realista (1) 14 ó 15 (2) No podemos saberlo con precisión.
Problema de la Cuerda
Un hombre desea tener una cuerda suficientemente larga como para extenderla entre dos palos que están separados por 12 metros, pero sólo tiene piezas de cuerda de 1.5 metros. ¿Cuántas de esas piezas necesitará atar para extenderla entre los dos palos? No realista 12/1.5 = 8. 8 piezas de un metro y medio Realista (1) Es imposible saber cuántas piezas se necesitaría. (2) Más de 8 piezas

Problema de la Botella
Se está llenando una botella desde un grifo a razón constante. Si la profundidad de agua es de 2.4 cm después de 10 segundos ¿cuánta profundidad tendrá después de 30 segundos? (botella de forma cónica)
No realista 3x4 = 12. El nivel del agua será de 12 cm.
Realista (1) Es imposible dar una respuesta precisa
(2) Más de 12 cm.
(3) No lo sé exactamente. Posiblemente 14 ó 15.

ANEXO 2. ANEXO DE TABLAS

Tabla I

Tipos de Respuestas, correctas e incorrectas, obtenidas en el presente estudio.

	2º DE E.P.						3º DE E.P.					
	CAMBIO			COMPARACIÓN			CAMBIO			COMPARACIÓN		
	SM	DI	NC	SM	DI	NC	SM	DI	NC	SM	DI	NC
Respuesta Realista:	20	20	34	16	24	24	32	44	43	29	35	36
R. Realista Incorrecta:	13	--	2	8	14	6	4	1	--	5	16	12
Respuesta Esperada:	51	47	52	61	50	55	35	34	31	39	21	25
Otras Respuestas:	4	1	--	3	--	3	16	9	14	15	14	15
Ausencia de Respuesta:	--	--	--	--	--	--	1	--	--	--	3	--

Tabla II

Tipos de Respuestas, correctas e incorrectas, en el Contexto de *Resolver Problemas*.

	2º DE E.P.						3º DE E.P.					
	CAMBIO			COMPARACIÓN			CAMBIO			COMPARACIÓN		
	SM	DI	NC	SM	DI	NC	SM	DI	NC	SM	DI	NC
Respuesta Realista:	6	18	19	8	12	11	16	20	20	15	17	17
R. Realista Incorrecta:	9	--	--	4	5	1	2	--	--	3	10	8
Respuesta Esperada:	27	25	25	30	27	31	15	17	14	18	8	9
Otras Respuestas:	2	1	--	2	--	1	10	7	10	8	7	10
Ausencia de Respuesta:	--	--	--	--	--	--	1	--	--	--	2	--

Tabla III

Tipos de Respuestas, correctas e incorrectas, en el Contexto de *Detectar el Error*

	2º DE E.P.						3º DE E.P.					
	CAMBIO			COMPARACIÓN			CAMBIO			COMPARACIÓN		
	SM	DI	NC	SM	DI	NC	SM	DI	NC	SM	DI	NC
Respuesta Realista:	14	22	15	8	12	13	16	24	23	14	18	19
R. Realista Incorrecta:	4	--	2	4	9	5	2	1	--	2	6	4
Respuesta Esperada:	24	22	27	31	23	24	20	17	17	21	13	16
Otras Respuestas:	2	--	--	1	--	2	6	2	4	7	7	5
Ausencia de Respuesta:	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Tabla IV

Tipos de Respuestas ofrecidas en función del Tipo de Problema según la Información ofrecida en el Enunciado

	SOLUCIONES MÚLTIPLES	DATOS IRRELEVANTES	LA SOLUCIÓN NO REQUIERE CÁLCULO
Respuesta Realista:	97	143	137
R. Realista Incorrecta:	30	31	20
Respuesta Esperada:	186	152	163
Otras Respuestas:	38	24	32
Ausencia de Respuesta:	1	2	0

Tabla V

Tipos de Respuestas ofrecidas en función de la Estructura Semántica del problema

	CAMBIO	COMPARACIÓN
Respuesta Realista:	213	164
R. Realista Incorrecta:	20	61
Respuesta Esperada:	250	251
Otras Respuestas:	44	50
Ausencia de Respuesta:	1	2

Tabla VI

Tipos de Respuestas ofrecidas en función del Contexto de Evaluación

	RESOLVER PROBLEMAS	DETECTAR EL ERROR
Respuesta Realista:	**179**	**198**
R. Realista Incorrecta:	**42**	**39**
Respuesta Esperada:	**246**	**255**
Otras Respuestas:	**58**	**36**
Ausencia de Respuesta:	**3**	**0**

Tabla VII

Tipos de Respuestas ofrecidas en función del Grupo

	2º DE E.P.	3º DE E.P.
Respuesta Realista:	**158**	**219**
R. Realista Incorrecta:	**43**	**38**
Respuesta Esperada:	**316**	**185**
Otras Respuestas:	**11**	**83**
Ausencia de Respuesta:	**0**	**3**