UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Teoría de Funciones

TESIS DOCTORAL

Algunas propiedades del espacio de Banach C(K,E)

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Pilar Cembranos Díaz

DIRECTOR:

Fernando Bombal Gordón

Madrid, 2015

Pilar Cembranos Díaz

ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPACIO DE BANACH C(K,E)

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1984

Colección Tesis Doctorales. Nº 125/84

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1984
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-19165-1984

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

"ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPACIO DE BANACH C(K,E)"

Pilar Cembranos Díaz

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

Dirigida por el Profesor Fernando Bombal Gordón

Madrid, Junio de 1982

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi sincero agradecimiento

- Al Profesor Fernando Bombal Gordón por haberme dirigido este trabajo,
- Al Profesor José Mendoza Casas por el continuo estímulo y ayuda de todo tipo que me ha prestado, y
- A los compañeros del Dto. de Teoría de Funciones, que me han animado y ayudado durante es tiempo.

INDICE

INTRODUCCION

Dedicamos esta memoria al estudio de algunas propiedades del espacio de Banach C(K,E), el espacio de las funciones continuas definidas en un compacto Hausdorff K con valores en un espacio de Banach E dotado de la norma del supremo (si E es el cuerpo escalar notamos por C(K) a este espacio).

El espacio de funciones continuas C(K) es uno de los primeros espacios de Banach que aparece como tal en la literatura. Su estudio ha impulsado y motivado gran parte del desarrollo de la teoría de los espacios de Banach. Recordemos por ejemplo, los trabajos pioneros de Hadamard que culminaron con el teorema de representación de Riesz del dual de C([0,1]).

En la famosa monografía de Banach del año 1932 (Théorie des opérations linéaries) se recogen y sistematizan gran parte de los resultados obtenidos sobre este espacio; y aparecen en embrión muchos problemas que han impulsado la investigación posterior.

Grothendieck, en el año 1953, publica un artículo [19] en el que pone de manifiesto la riqueza de propiedades de los espacios C(K). Como consecuencia de su profundo estudio sobre estos espacios, axiomatiza varias de sus propiedades: la propiedad de Dunford-Pettis, la propiedad recíproca de Dunford-Pettis y la propiedad de Dieudonné. Todas ellas son propiedades que se pueden definir en términos de los operadores definidos en el espacio, principalmente de los operadores débilmente compactos.

Unos años más tarde, alrededor del año 60, surge otro autor, Pelczynski, que junto con Bessaga, Szlenk y otros, consigue otro gran avance en el conocimiento de los espacios C(K). En 1962 axiomatiza otra de las propiedades de estos espacios, que se puede definir también en términos de los operadores definidos en el espacio: la propiedad V. Y tres años más tarde publica junto con Szlenk un artículo que contribuyó decisivamente a caracterizar cuándo un C(K) verifica que todos sus subespacios cerrados tienen la propiedad de Dunford-Pettis (es decir, cuándo un C(K) es hereditariamente Dunford-Pettis).

Poco después, siguiendo la tendencia natural de extender al caso vectorial los resultados obtenidos en el caso escalar, se comienza a estudiar el espacio C(K,E).

Podemos decir que los primeros pasos en esta dirección respecto al tipo de propiedades citadas, los dan Singer y Dinculeanu al obtener una representación integral de los operadores definidos en C(K,E) que generaliza el teorema de Riesz (*).

A partir de este resultado se hacen intentos, a finales de los años 60 y principio de los 70, de traducir las propiedades de los operadores (como "ser débilmente compacto", "ser incondicionalmente convergente",...) en propiedades de las medidas que los representan. Autores que han trabajado en ello han sido Batt y Berg, Dobrakov, Brooks, Dinculeanu y, recientemente, Fierro. Se consiguen condiciones necesarias y algunas suficientes, pero caracterizaciones generales sólo en casos muy particulares.

Uno de los problemas que más interés ha despertado en el estudio del espacio C(K,E) y de otros espacios de funciones vectoriales, responde al siguiente planteamiento:

(*) Pues C(K,E) tendrá alguna de esas propiedades según cómo sean los operadores definidos en él.

Si P es una de las propiedades citadas anteriormente, ¿es cierto que

(1) "C(K,E) tiene la propiedad P si y sólo si C(K) y E la tienen"?

En concreto, si se trata de una propiedad que poseen todos los C(K) ¿es cierto que

(2) "C(K,E) tiene la propiedad P si y sólo si E la tiene"?

Y, naturalmente, en el caso en que (1) ó (2) no sean ciertos en general, el problema que se plantea es el de determinar para qué clases de espacios (K y E) son ciertos.

En este sentido una de las propiedades más tratadas ha sido la propiedad de Dunford-Pettis. La dificultad de obtener respuestas generales se pone de manifiesto al comprobar que hasta el momento sólo se ha demostrado que espacios E muy concretos que poseen la propiedad de Dunford-Pettis verifican que C(K,E) también la tiene. Por ejemplo, Bourgain [7] ha probado muy recientemente con técnicas bastante sofisticadas, que $C(K,L^1(\mu))$ posee la propiedad de Dunford-Pettis.

La demostración de que una respuesta afirmativa a (2) para esta propiedad en general no es cierta, la ha dado hace pocos meses Talagrand en un artículo aún no publicado [39], en el que construye un espacio de Banach $\mathfrak{T}$ que tiene la propiedad de Dunford-Pettis y tal que $C([0,1],\mathfrak{T})$ no la tiene. Las buenas propiedades de este espacio $\mathfrak{T}$ que iremos viendo a lo largo de la memoria (ver Nota 10.10.) hacen difícil conjeturar qué condiciones se le han de imponer a K ó a E para que (2) tenga una respuesta afirmativa.

Un problema clásico en la teoría de espacios de Banach es el de determinar cuándo un espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a c_o ó a ℓ^1, y cuál es la "posición" de este subespacio. Desde hace algunos años se viene estudiando este tipo de problemas en espacios de funciones (ver [25,29,33,34]). En esta línea Pełczynski probó que todo espacio C(K) infinito-dimensional contiene un subespacio isomorfo a c_o, y hace muy poco E. y P. Saab han caracterizado cuándo C(K,E) contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1.

Una gran parte de los resultados de esta memoria se sitúan en la línea de dar respuestas a (1) y (2) cuando P es la propiedad de Dunford-Pettis, la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, la propiedad de Dieudonné, la propiedad V y "ser hereditariamente Dunford-Pettis".

Asimismo abordamos también el problema de determinar cuándo C(K,E) contiene algún subespacio isomorfo a ℓ^1 y cuando contiene a c_o como complementado.

A continuación pasamos a comentar brevemente el contenido de la presente memoria. La hemos dividido en quince secciones, distribuidas en seis capítulos y un apéndice.

En el capítulo I establecemos las notaciones y recogemos los resultados básicos de la teoría general de espacios de Banach y del espacio C(K,E) que utilizamos a lo largo de la memoria. Por razones de brevedad hemos recogido solamente los resultados fundamentales que necesitamos. Para mayor información pueden consultarse por ejemplo los libros de Dinculeanu, Dunford-Schwartz, Lindenstrauss-Tzafriri y Semadeni (ver bibliografía).

En el capítulo II estudiamos algunas cuestiones sobre la convergencia débil en $B(\Sigma,E)$; y demostramos que algunas propiedades de los operadores definidos en $C(K,E)$, como "ser incondicionalmente convergente", "transformar sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes" y "transformar sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes", se siguen conservando al extenderlos a $B(\Sigma,E)$. Esto nos proporcionará una herramienta muy útil para los capítulos III y IV.

En el capítulo III demostramos que (2) es válido para una clase amplia de compactos K, cuando P es cualquiera de las tres propiedades definidas por Grothendieck citadas al principio; y que el problema general se puede reducir a $K=[0,1]$. En concreto probamos que

"Si K es un compacto disperso entonces $C(K,E)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis, la propiedad recíproca de Dunford - Pettis o la propiedad de Dieudonné si y sólo si E la tiene".

Y que

"$C(K,E)$ tiene una de las tres propiedades anteriores para todo compacto K si y sólo si $C([0,1],E)$ la tiene".

También estudiamos algunas de las propiedades del espacio construido por Talagrand. Y, por último, probamos que si imponemos algunas condiciones restrictivas a E (tener base incondicional reductora, o tener E' y E'' la propiedad de Radon-Nikodym) $C(K,E)$ tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis y la propiedad de Dieudonné para todo compacto K.

En el capítulo IV tratamos el problema de determinar cuándo el espacio $C(K,E)$ es hereditariamente Dunford-Pettis y cuándo tiene la propiedad V. Propiedades que fueron estudiadas por Pelczynski en el caso escalar.

Damos una caracterización de cuándo C(K,E) es hereditariamente Dunford-Pettis; y comprobamos, a través de ella, que la mayoría de los espacios E hereditariamente Dunford-Pettis conocidos verifican que C(K,E) es hereditariamente Dunford-Pettis cuando C(K) lo es.

En cuanto a la propiedad V Pelczynski conjeturó en [28] que se verificaría que

C(K,E) tiene la propiedad V si y sólo si E la tiene.

Nosotros probamos que si E tiene base incondicional entonces la conjetura de Pełczynski es cierta. Y como consecuencia de ello podemos ampliar la clase de los espacios E conocidos hasta ahora que son débilmente secuencialmente completos y verifican que $L^1(\mu,E)$ también es débilmente secuencialmente completo (pues este problema está íntimamente ligado al de determinar cuándo C(K,E) tiene la propiedad V).

Al finalizar el capítulo hacemos notar que a partir de algunos resultados obtenidos anteriormente, los ejemplos de Hagler y de Bourgain y Delbaen permiten dar una respuesta negativa a una pregunta planteada por Pełczynski en [28].

En el capítulo V caracterizamos cuándo C(K,E) contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 y cuándo contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o. Respecto a esto último probamos en concreto que si K es infinito y E es de dimensión infinita entonces C(K,E) contiene siempre un subespacio complementado isomorfo a c_o (aún en el caso en que ni C(K) ni E lo contengan como complementado). Este resultado se separa sustancialmente de los obtenidos hasta ahora en esta línea para espacios de funciones vectoriales (ver [25,33,34]). Como consecuencia inmediata del resultado citado se obtiene un teorema probado recientemente por Khurana [24] que caracteriza cuándo C(K,E) es un espacio de Grothendieck.

En el capítulo VI estudiamos cuándo la suma directa en el sentido de c_0 y de ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ de una sucesión de espacios de Banach, posee alguna de las propiedades tratadas en los capítulos III y IV.

Digamos por último que los resultados y las técnicas desarrolladas a lo largo de la memoria nos permiten dar varios resultados sobre las propiedades de los operadores definidos en C(K,E). Estos resultados los recogemos en un apéndice. Se sitúan en la línea de extender al caso vectorial los teoremas de Grothendieck y Pełczynski sobre los operadores débilmente compactos definidos en C(K).

CAPITULO I

Este capítulo está dedicado a establecer las notaciones fundamentales que utilizaremos en esta memoria, y a recoger los resultados básicos de la teoría general de espacios de Banach y del espacio C(K,E) que necesitaremos mas adelante.

1. Notaciones y algunos resultados básicos de la teoría general de espacios de Banach.

A lo largo de la memoria E y F serán siempre espacios de Banach (que supondremos por comodidad reales) y K será un compacto Hausdorff. Supondremos, salvo indicación expresa, que E y F son espacios no triviales y que K es no vacío.

B(E) indica la bola unidad cerrada de E, y E' el dual topológico de E.

Si $A \subset E$, $[A]$ es el subespacio vectorial engendrado por A.

Denotamos por C(K,E) al espacio de Banach de las funciones continuas de K en E con la norma del supremo.

Si Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de un cierto conjunto Ω, $S(\Sigma,E)$ indica el espacio de las funciones Σ-simples definidas en Ω y con valores en E; $B(\Sigma,E)$ es el espacio de las funciones de Ω en E que se pueden aproximar uniformemente por funciones de $S(\Sigma,E)$. Ambos espacios, $S(\Sigma,E)$ y $B(\Sigma,E)$, los consideramos dotados de la norma del supremo. Es fácil comprobar que $B(\Sigma,E)$ con esta norma es un espacio de Banach; y, por la propia definición, es claro que $S(\Sigma,E)$ es denso en $B(\Sigma,E)$.

Si E es el cuerpo escalar $\mathbb{R}$ notamos simplemente por C(K), $S(\Sigma)$ y $B(\Sigma)$ a los espacios anteriores.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, $\underline{L^1(\mu,E)}$ es el espacio de Banach de las funciones de Ω en E que son integrables Bochner con la norma usual.

Como es habitual $\underline{c_o}$ y $\underline{\ell^p}$ (para $1 \leq p \leq \infty$) denotan los espacios de sucesiones clásicos.

Al espacio de las sucesiones convergentes a cero en E dotado de la norma del supremo lo designamos por $\underline{c_o(E)}$.

A continuación pasamos a definir y enumerar algunos resultados sobre series, operadores y bases de Schauder, que tratan de recoger lo fundamental de estos temas que utilizamos en la memoria; y pueden verse por ejemplo en [13, 22, 26 y 28].

<u>Series</u>: Se dice que una serie Σx_n de elementos de E es <u>incondicionalmente convergente</u> si toda subserie suya converge. Se dice que es <u>débilmente incondicionalmente convergente</u> si $\Sigma |\langle x_n, x' \rangle| < +\infty$ para cada $x' \in E'$.

Una serie Σx_n es débilmente incondicionalmente convergente en E si y sólo si el conjunto $\{ \sum_{n \in \sigma} x_n : \sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \}$ está acotado ($\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ indica el conjunto de todas las partes finitas de $\mathbb{N}$).

<u>Operadores</u>: Por un <u>operador</u> entre E y F entendemos una aplicación lineal y continua de E en F. Al conjunto de todos los operadores entre E y F lo designamos por <u>L(E,F)</u>. Si $T \in L(E,F)$ indicamos por T' a su traspuesto.

Un operador es <u>débilmente compacto</u> si transforma conjuntos acotados en conjuntos débilmente relativamente compactos.

Un operador es <u>incondicionalmente convergente</u> si transforma series débilmente incondicionalmente convergentes en series incondicionalmente convergentes. Ejemplos de operadores incondicionalmente con vergentes son los siguientes:

- los operadores débilmente compactos;
- los operadores que transforman sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma;
- los operadores que transforman sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.

Bases de Schauder: Una sucesión (e_n) en un espacio de Banach E se llama base de Schauder de E si para cada $x\in E$ existe una única sucesión de escalares (a_n) tal que $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$.

Una base de Schauder (e_n) de E se dice que es base incondicional si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge incondicionalmente para cada $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in E$.

Las bases incondicionales se pueden caracterizar de la siguiente manera:

"Una sucesión (e_n) es base incondicional de E si y sólo si verifica las tres condiciones siguientes:

i) $e_n \neq 0$ para todo $n\in \mathbb{N}$,

ii) $E=\overline{[(e_n)]}$,

iii) existe una constante $M>0$ tal que, para cada sucesión de escalares (a_n) y cada par de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, σ y σ' con $\sigma \subset \sigma'$

$$\left\| \sum_{n\in\sigma} a_n e_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n\in\sigma'} a_n e_n \right\| ".$$

Una sucesión (e_n) que es base de Schauder del espacio vectorial cerrado engendrado por ella, $\overline{[(e_n)]}$, se llama sucesión básica.

Dos bases de Schauder, (x_n) de E e (y_n) de F, se dice que son equivalentes si existen dos constantes positivas c y C tales que, para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada sucesión finita de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$

$$c\left\|\sum_{n=1}^{r} a_n x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{r} a_n y_n\right\| \leq C\left\|\sum_{n=1}^{r} a_n x_n\right\| .$$

Es claro que si (x_n) e (y_n) son equivalentes, la aplicación $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \longrightarrow y=\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ define un isomorfismo entre E y F.

Una base de Shauder (x_n) se llama <u>normalizada</u> si $\|x_n\|=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Si (x_n) es base de Schauder de E existe siempre una norma equivalente en E respecto de la cual (x_n) es una base de Schauder normalizada.

Si (x_n) es base de Schauder de E se definen las proyecciones $P_n:E\longrightarrow E$ por $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Se verifica que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|<+\infty$.

En el caso en que (x_n) sea base incondicional se pueden definir también las proyecciones $P_\sigma:E\longrightarrow E$ para cada subconjunto arbitrario σ de $\mathbb{N}$, por $P_\sigma(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i\in\sigma} a_i x_i$.

Si (x_n) es base de Schauder de E se definen los funcionales asociados $(x_n')\subset E'$ por $\langle x_m, x_n'\rangle=\delta_{nm}$ para todo $n,m\in\mathbb{N}$. Observemos que entonces $x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,x_n'\rangle x_n$ para todo $x\in E$.

Una base de Schauder se llama <u>reductora</u> si la sucesión de sus funcionales asociados $(x_n')\subset E'$ es base de Schauder de E'. El nombre de reductora se debe al siguiente resultado:

" (x_n) es base reductora de E si y sólo si, para cada $x'\in E'$, la norma de $x'|_{\overline{[(x_i)_{i=n}^{\infty}]}}$ (restricción de x' a $\overline{[(x_i)_{i=n}^{\infty}]}$) tiende a cero cuando $n\longrightarrow\infty$ ".

Por último hemos de recordar dos caracterizaciones importantes de Bessaga-Pelczynski y Rosenthal sobre los espacios de Banach que contienen a c_o ó a ℓ^1 (ver [26] págs. 98 y 99)

1.1. Teorema (Bessaga-Pelczynski): Un espacio de Banach E no contiene ningún subespacio isomorfo a c_o si y sólo si toda serie débilmente incondicionalmente convergente en E converge incondicionalmente.

1.2. Teorema (Rosenthal): Un espacio de Banach E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 si y sólo si toda sucesión acotada en E posee una subsucesión débilmente de Cauchy.

2. Representación de operadores definidos en C(K,E).

Sea K un compacto Hausdorff, Σ la σ-álgebra de Borel de K y E y F espacios de Banach. Al espacio de Banach de las medidas regulares contablemente aditivas y de variación acotada de Σ en E, dotado de la norma de la variación total, lo denotamos por rcabv(Σ,E); si E es $\mathbb{R}$ simplemente por rcabv(Σ).

Es bien conocido que la aplicación que a cada $\mu \in$rcabv(Σ,E') le hace corresponder el elemento $\tau_\mu \in C(K,E)'$ definido por

$\tau_\mu(\phi) = \int_K \phi \, d\mu$ para todo $\phi \in C(K,E)$, donde la integral está tomada en el sentido de [11], establece un isomorfismo isométrico entre el dual de C(K,E) y el espacio rcabv(Σ,E').

Si $m: \Sigma \longrightarrow L(E,F'')$ es una función de conjunto finitamente aditiva, para cada $A \in \Sigma$ se define la semivariación de A de la siguiente manera

$$\tilde{m}(A) = \sup \| \Sigma\, m(A_i)(x_i) \|$$

donde el supremo se toma entre todas las colecciones finitas de conjuntos disjuntos $A_i \in \Sigma$, $A_i \subset A$, y de elementos $x_i \in B(E)$.

Se dice que m tiene <u>semivariación finita</u> si $\tilde{m}(K) < +\infty$. Se dice que m tiene <u>semivariación continua en Σ</u> (o semivariación continua en $\emptyset$) si $\lim_n \tilde{m}(A_n) = 0$ para cada sucesión $(A_n) \subset \Sigma$ tal que $A_n \searrow \emptyset$ (es decir, para cada sucesión no creciente $(A_n) \subset \Sigma$ tal que $\bigcap_n A_n = \emptyset$).

Para cada $y' \in F'$ se define la función de conjunto finitamente aditiva $m_{y'} : \Sigma \longrightarrow E'$ por

$\langle x, m_{y'}(A) \rangle = \langle m(A)(x), y' \rangle$ para todo $x \in E$ y todo $A \in \Sigma$.

Se dice que m es <u>débilmente regular</u> si $m_{y'}$ es regular para todo $y' \in F'$.

El siguiente teorema de representación de operadores se debe a Singer y Dinculeanu (ver p.e. [3] y [11] pág. 182)

<u>2.1. Teorema</u> (Dinculeanu-Singer): Cada operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ determina una única función de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F'')$ tal que:

i) m es finitamente aditiva y $\tilde{m}(K) < +\infty$;

ii) m es débilmente regular;

iii) la aplicación $y' \longrightarrow m_{y'}$ de F' en $rcabv(\Sigma,E')$ es continua para las topologías $\sigma(F',F)$ de F' y $\sigma(C(K,E)',C(K,E))$ de $rcabv(\Sigma,E')$;

iv) $T(\phi) = \int_K \phi \, dm$ para todo $\phi \in C(K,E)$;

v) $\|T\| = \tilde{m}(K)$; y

vi) $T'(y') = m_{y'}$ para todo $y' \in F'$.

Recíprocamante, cada función de conjunto $m : \Sigma \longrightarrow L(E,F'')$ que verifica (i), (ii), y (iii) define por (iv) un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ que cumple (v) y (vi).

La integral de (iv) del teorema anterior está tomada en el sentido de [11]. En lo que sigue habrán de entenderse las integrales que aparezcan tomadas siempre en este sentido.

Dado un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ llamamos "medida asociada a T" a la función de conjunto m, cuya existencia y unicidad asegura el teorema anterior.

A menudo buenas propiedades del operador T se traducen en buenas propiedades de su medida asociada. Así, Dobrakov en [13, teorema 3] obtiene el siguiente resultado:

2.2. Teorema [13]: Si $T : C(K,E) \longrightarrow F$ es un operador incondicionalmente convergente, entonces su medida asociada m verifica:

i) $m(\Sigma) \subset L(E,F)$

ii) $m(A) : E \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente para cada $A \in \Sigma$

iii) $\lim_n \tilde{m}(A_n) = 0$ para cada sucesión $(A_n) \subset \Sigma$ tal que $A_n \searrow \emptyset$.

Teniendo en cuenta que, para cada $A \in \Sigma$,

$\tilde{m}(A) = \sup_{y' \in B(F')} |m_{y'}|(A)$ (donde $|m_{y'}|$ indica la variación de $m_{y'}$);

del teorema anterior, el teorema 4 de [3] y IV.13.22. de [14] se deduce que

2.3. Teorema: Si $T : C(K,E) \longrightarrow F$ es un operador incondicionalmente convergente, entonces su medida asociada m verifica:

i) $m(\Sigma) \subset L(E,F)$

ii) $m(A) : E \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente para todo $A \in \Sigma$

iii) existe una medida positiva $\lambda \in rcabv(\Sigma)$ tal que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \tilde{m}(A) = 0.$$

3. Compactos metrizables y compactos dispersos.

Una clase amplia de compactos con la que trabajaremos a lo largo de la memoria es la de los compactos dispersos, cuya definición y propiedades son las siguientes (ver [36] secciones 8.5 y 8.6)

3.1. Definición: Un compacto Hausdorff es disperso si todo subconjunto suyo no vacío tiene algún punto aislado.

3.2. Proposición:

a) Si K es la imagen por una aplicación continua de un compacto disperso, entonces K es disperso.

b) Si K es un compacto no disperso entonces existe una aplicación continua y sobre $\varphi: K \longrightarrow [0,1]$.

Ejemplos de compactos dispersos son todos los ordinales compactos (cuando consideramos los ordinales como espacios topológicos con la topología del orden). Pero no se reducen solamente a éstos ya que existen compactos dispersos que no son homeomorfos a ningún ordinal (ver 8.6.11.(C) de [36]). Sin embargo para el caso metrizable el teorema de Mazurkiewicz-Sierpinski (8.6.10. de [36]) y otros resultados conocidos, nos aseguran que la clase de los compactos dispersos y la clase de los ordinales compactos coinciden. En concreto se tiene el siguiente resultado

<u>3.3. Teorema</u>: Sea K un compacto Hausdorff. Entonces son equivalentes:

a) K es contable

b) K es disperso y metrizable

c) K es homeomorfo a un ordinal compacto contable.

Al abordar el estudio de los espacios C(K) y C(K,E) es natural comenzar por una clase sencilla de compactos K como es la de los compactos metrizables. Para estos compactos Miljutin (ver 21.5.10. de [36]) obtuvo el siguiente sorprendente resultado

<u>3.4. Teorema</u> (Miljutin): Si K es un compacto metrizable no contable, entonces C(K) es isomorfo a C([0,1]).

Los dos teoremas anteriores permiten dividir los espacios C(K) con K metrizable, en dos grandes bloques:

- los C(K) con K metrizable no contable
- los C(K) con K metrizable y contable

Los primeros, por el teorema de Miljutin, son todos isomorfos a C([0,1]); en cambio Bessaga y Pelczynski demostraron en [5] que los segundos se dividen en $\aleph_1$ clases isomorfas distintas.

Todo esto unido al hecho de que si $C(K_1)$ y $C(K_2)$ son isomorfos entonces $C(K_1,E)$ y $C(K_2,E)$ también lo son (ver 21.5.1. de [36]) nos proporciona el siguiente teorema

<u>3.5.Teorema</u>: Sea E un espacio de Banach y sea K un compacto metrizable. Entonces se verifica una de las dos condiciones excluyentes siguientes:

a) C(K,E) es isomorfo a C([0,1],E)

b) K es un compacto disperso.

CAPITULO II

La mayoría de las propiedades del espacio $C(K,E)$ que tratamos en este trabajo se pueden estudiar a través de los operadores definidos en él.

Comenzamos por ello comprobando que buenas propiedades de los operadores definidos en $C(K,E)$ se siguen conservando al extenderlos a $B(\Sigma,E)$. Esto nos proporcionará una herramienta de gran utilidad en los próximos capítulos.

Pero en primer lugar necesitamos conocer algunas cuestiones relacionadas con la convergencia débil en $C(K,E)$ y $B(\Sigma,E)$.

4. Convergencia débil en $C(K,E)$ y $B(\Sigma,E)$

Es conocido el siguiente teorema

4.1. Teorema [13]: Una sucesión acotada $(\phi_n)\subset C(K,E)$ converge a cero débilmente en $C(K,E)$ si y sólo si $(\phi_n(t))$ converge a cero débilmente en E para todo $t\in K$.

Una caracterización análoga a la anterior para el espacio $B(\Sigma,E)$ no es cierta, ni siquiera en el caso en que E sea el cuerpo escalar, como nos muestra el siguiente ejemplo:

Consideremos la sucesión $(x^n)=((x^n_m)_m)\subset \ell^\infty$ definida por

$$x^n_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m\geq n \\ 0 & \text{si } m<n \end{cases}$$

(Obsérvese que ℓ^∞ es $B(\Sigma)$ con Σ la σ-álgebra de las partes de $\mathbb{N}$)

Sea M el subespacio de ℓ^∞ formado por las sucesiones convergentes. Definimos $\tau : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\tau((x_m)) = \lim x_m$. Entonces $\tau \in M'$ y por el teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{\tau} \in (\ell^\infty)'$ tal que $\tilde{\tau}|_M = \tau$.

La sucesión acotada $(x^n) \subset M \subset \ell^\infty$ converge a cero puntualmente pero no converge a cero débilmente ya que $\langle x^n, \tilde{\tau} \rangle = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aunque no conocemos una buena caracterización de la convergencia débil en $B(\Sigma,E)$ vamos a ver que, bajo ciertas condiciones, podemos asegurar que la imagen por un operador, de una sucesión débilmente puntualmente convergente en $B(\Sigma,E)$ es débilmente convergente.

Sea K un compacto Hausdorff y Σ la σ-álgebra de Borel de K. Dado un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$, si su medida asociada "m" toma valores en $L(E,F)$, podemos extenderlo de forma natural a $B(\Sigma,E)$ por

$$\tilde{T}(\varphi) = \int_K \varphi \, dm \quad \text{para todo } \varphi \in B(\Sigma,E).$$

Como m tiene semivariación finita es claro que $\tilde{T} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ es continuo y además $\|\tilde{T}\| = \tilde{m}(K)$.

Debido a la condición (vi) del teorema 2.1. el operador $\tilde{T}$ así definido no es más que la restricción a $B(\Sigma,E)$ de T" (el operador bitraspuesto de T).

<u>4.2. Teorema</u>: Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable. Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador incondicionalmente convergente y sea $\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma,E)} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ su extensión a $B(\Sigma,E)$. Entonces si (φ_n) es una sucesión acotada en $B(\Sigma,E)$ que converge a cero débilmente puntualmente, $(T(\varphi_n))$ converge a cero débilmente en F.

Demostración: Por 2.3. la medida "m" asociada a T verifica:

i) $m(\Sigma) \subset L(E,F)$

ii) existe una medida positiva $\lambda \in rcabv(\Sigma)$ tal que $\lim_{\lambda(A)\to 0} \tilde{m}(A) = 0$.

Sea M una cota de (φ_n), sea $y' \in B(F')$ y sea $\varepsilon > 0$. Por (ii) existe $\delta > 0$ tal que

(1) $$\tilde{m}(A) < \frac{\varepsilon}{3M} \qquad \forall A \in \Sigma \text{ con } \lambda(A) < \delta .$$

Como (φ_n) converge a cero débilmente puntualmente y E' es separable, por una versión débil del teorema de Egoroff (ver [40] V. Proposición 1), existe $A_o \in \Sigma$ tal que $\lambda(A_o) < \delta$ y tal que

(2) (φ_n) converge a cero débilmente uniformemente en A_o^c.

Por otra parte $m_{y'} : \Sigma \longrightarrow E'$ es absolutamente continua respecto de λ y como E' tiene la propiedad de Radon-Nikodym existe $f \in L^1(\lambda, E')$ tal que

$$m_{y'}(A) = \int_A f \, d\lambda \qquad \forall A \in \Sigma ,$$

y por ello

$$\int_K \varphi \, dm_{y'} = \int_K \langle \varphi, f \rangle \, d\lambda \qquad \forall \varphi \in B(\Sigma, E).$$

Sea $g = \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i} x_i' \in S(\Sigma, E)$ tal que

$$\int_K \| f(t) - g(t) \| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{3M} .$$

Por (2) existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \varphi_n(t), x_i' \rangle| < \frac{\varepsilon}{3r\lambda(K)} \qquad \forall t \in A_o^c, \quad 1 \le i \le r, \quad \forall n \ge n_o .$$

Con lo cual si $n \ge n_o$ se tiene

$$|\langle \tilde{T}(\varphi_n),y'\rangle| = \left|\int_K \varphi_n \, dm_{y'}\right| \leq \left|\int_{A_0} \varphi_n \, dm_{y'}\right| + \left|\int_{A_0^c} \varphi_n \, dm_{y'}\right| \leq$$

$$\leq M\,|m_{y'}|(A_0) + \left|\int_{A_0^c} \langle \varphi_n(t),f(t)\rangle \, d\lambda\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_{A_0^c} \langle \varphi_n(t),g(t)\rangle \, d\lambda\right| +$$

$$+ \left|\int_{A_0^c} \langle \varphi_n(t),\, f(t)-g(t)\rangle \, d\lambda\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{r} \int_{A_i\cap A_0^c} |\langle \varphi_n(t),x_i'\rangle| \, d\lambda + M\,\|f-g\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon}{3r\,\lambda(K)}\,\lambda(A_i\cap A_0^c) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon .$$

5. Propiedades de la extensión de operadores definidos en C(K,E)

Como hemos dicho en la sección anterior, si K es un compacto Hausdorff y Σ es la σ-álgebra de Borel de K, todo operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ cuya medida asociada m verifique que $m(\Sigma) \subset L(E,F)$, se puede extender de forma natural a $B(\Sigma,E)$ por

$$\tilde{T}(\varphi) = \int_K \varphi \, dm \qquad \forall \varphi \in B(\Sigma,E).$$

Uno puede preguntarse si las propiedades del operador T las tiene también su extensión $\tilde{T}$. En esta línea Batt y Berg demostraron en [3, teorema 6] lo siguiente

5.1. Teorema [3] : Un operador $T: C(K,E) \longrightarrow F$ es débilmente compacto si y sólo si su extensión $\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma,E)} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ es débilmente compacto.

Nosotros vamos a ver que en el caso en que K sea metrizable hay también otras propiedades de T que se mantienen al extenderlo a $B(\Sigma,E)$.

Para ello utilizaremos el teorema de extensión de Borsuk-Dugundji [36, 21.1.4.]

5.2. Teorema (Borsuk-Dugundji): Sea K_0 un subconjunto cerrado no vacío de un compacto metrizable K y sea E un espacio de Banach. Entonces existe un operador extensión $S : C(K_0,E) \longrightarrow C(K,E)$ con $\|S\| = 1$ tal que

a) $S(\phi)(t) = \phi(t)$ para todo $t \in K_0$ y todo $\phi \in C(K_0,E)$

b) Para cada $\phi \in C(K_0,E)$ los valores que toma $S(\phi)$ pertenecen a la envoltura convexa de $\phi(K_0)$.

5.3. Lema: Sea λ una medida finita y positiva del espacio rcabv(Σ), sea $\varphi \in S(\Sigma,E)$ y sea $\delta > 0$. Entonces existe un compacto $K_0 \subset K$ tal que $\lambda(K \setminus K_0) < \delta$ y $\varphi|_{K_0}$ (la restricción de φ a K_0) es continua.

Demostración: Sea $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i} x_i$ con $(A_i)_{i=1}^{r} \subset \Sigma$ disjuntos y $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = K$.

Por ser λ regular y acotada, para cada $1 \le i \le r$ existe un compacto $K_i \subset A_i$ tal que $\lambda(A_i \setminus K_i) < \delta/r$. Llamemos K_0 a la unión $\bigcup_{i=1}^{r} K_i$. K_0 es un subconjunto compacto de K,

$$\lambda(K\setminus K_o) = \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{r} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{r} K_i\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{r}(A_i\setminus K_i)\Big) = \sum_{i=1}^{r}\lambda(A_i\setminus K_i) < \delta,$$

y $\varphi|_{K_o}$ es continua pues K_o es unión finita de compactos disjuntos en cada uno de los cuales $\varphi|_{K_o}$ es constante.

5.4. Teorema: Sea K un compacto metrizable. Entonces un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente si y sólo si su extensión $\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma,E)} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente.

Demostración: Una implicación es clara.

Supongamos que $T : C(K,E) \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente; entonces, por 2.3., su medida asociada "m" toma valores en $L(E,F)$ y existe una medida finita y positiva $\lambda \in rcabv(\Sigma)$ tal que

(1) $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} \tilde{m}(A) = 0$

Supongamos que $\tilde{T} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ no es incondicionalmente convergente; entonces, teniendo en cuenta que $S(\Sigma,E)$ es denso en $B(\Sigma,E)$ existe una serie débilmente incondicionalmente convergente en $S(\Sigma,E)$ tal que su imagen no converge incondicionalmente, o lo que es equivalente según la caracterización dada en la pág. 2, existe $\varepsilon > 0$ y existe una sucesión $(\varphi_n) \subset S(\Sigma,E)$ tal que

(2) $\sum \varphi_n$ es débilmente incondicionalmente convergente en $B(\Sigma,E)$, y

(3) $\|\tilde{T}(\varphi_n)\| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Al ser $\sum \varphi_n$ débilmente incondicionalmente convergente existe $M > 0$ tal que

(4) $\|\sum\limits_{n\in\sigma} \varphi_n\| \leq M$ para todo $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.

Por (1) existe $\delta > 0$ $(\delta < \lambda(K))$ tal que

(5) $\tilde{m}(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ para todo $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) < \delta$

Utilizando ahora el lema anterior tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un compacto $K_n \subset K$ tal que

$$\lambda(K \setminus K_n) < \frac{\delta}{2^n} \quad \text{y} \quad \varphi_n|_{K_n} \quad \text{es continua}$$

Sea $K_o = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$; entonces

i) K_o es un compacto contenido en K

ii) $\lambda(K \setminus K_o) = \lambda(K \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(K \setminus K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(K \setminus K_n) <$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \delta$$

con lo cual $\lambda(K_o) = \lambda(K \setminus (K \setminus K_o)) = \lambda(K) - \lambda(K \setminus K_o) > \lambda(K) - \delta > 0$ y por tanto $K_o \neq \emptyset$.

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la aplicación $\phi_n = \varphi_n|_{K_o} \in C(K_o, E)$ ya que $K_o \subset K_n$ y $\varphi_n|_{K_n}$ es continua.

iv) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ es débilmente incondicionalmente convergente en $C(K_o, E)$ pues si $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$

$$\left\| \sum_{n \in \sigma} \phi_n \right\| = \sup_{t \in K_o} \left\| \sum_{n \in \sigma} \phi_n(t) \right\| = \sup_{t \in K_o} \left\| \sum_{n \in \sigma} \varphi_n(t) \right\| \leq \left\| \sum_{n \in \sigma} \varphi_n \right\| \leq M.$$

Como K es metrizable y K_o es no vacío el teorema de Borsuk-Dugundji (5.2.) nos asegura la existencia de un operador extensión de norma 1, $S : C(K_o, E) \longrightarrow C(K, E)$, tal que $S(\phi)|_{K_o} = \phi$ para cada $\phi \in C(K_o, E)$.

Por ser T incondicionalmente convergente, $T \circ S : C(K_o, E) \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente.

Sin embargo la imagen por $T\circ S$ de la serie $\Sigma \phi_n$ no converge ya que, para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\|T\circ S(\phi_n)\| = \|T(S(\phi_n))\| = \left\|\int_K S(\phi_n)\, dm\right\| = \left\|\int_{K_o} \varphi_n\, dm + \int_{K_o^c} S(\phi_n)\, dm\right\|$$

$$\geqslant \left\|\int_{K_o} \varphi_n\, dm\right\| - \left\|\int_{K_o^c} S(\phi_n)\, dm\right\| \geqslant$$

$$\geqslant \left\|\int_K \varphi_n\, dm\right\| - \left\|\int_{K_o^c} \varphi_n\, dm\right\| - \left\|\int_{K_o^c} S(\phi_n)\, dm\right\|$$

Ahora bien, por (3) $\left\|\int_K \varphi_n\, dm\right\| = \|\tilde{T}(\varphi_n)\| > \varepsilon$;

por (4), (5) y (ii)

$$\left\|\int_{K_o^c} \varphi_n\, dm\right\| \leqslant \|\varphi_n\|\, \tilde{m}(K_o^c) < \varepsilon/4$$

y $$\left\|\int_{K_o^c} S(\phi_n)\, dm\right\| \leqslant \|S(\phi_n)\|\, \tilde{m}(K_o^c) \leqslant \|\varphi_n\|\, \tilde{m}(K_o^c) < \varepsilon/4.$$

Por tanto, para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\|T\circ S(\phi_n)\| \geqslant \left\|\int_K \varphi_n\, dm\right\| - \left\|\int_{K_o^c} \varphi_n\, dm\right\| - \left\|\int_{K_o^c} S(\phi_n)\, dm\right\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

y esto contradice que $T\circ S$ sea incondicionalmente convergente.

Por tanto $\tilde{T} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente.

<u>5.5. Teorema</u>: Sea K un compacto metrizable. Entonces un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes si y sólo si su extensión $\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma,E)} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.

Demostración: Una implicación es evidente.

Supongamos que $T : C(K,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente de Cauchy en débilmente convergentes; entonces T es incondicionalmente convergente y, por 2.3., su medida asociada "m" toma valores en L(E,F) y existe una medida finita y positiva $\lambda \in rcabv(\Sigma)$ tal que

(1) $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} \tilde{m}(A) = 0$

Sea (φ_n) una sucesión contenida en la bola unidad de $S(\Sigma,E)$ que es débilmente de Cauchy; y supongamos que $(\tilde{T}(\varphi_n))$ no converge débilmente en F.

Como $(\tilde{T}(\varphi_n))$ es débilmente de Cauchy en F, existe $y''\in F''$ tal que $(\tilde{T}(\varphi_n))$ converge a y'' $\sigma(F'',F')$; tenemos así que $y''\in F''\setminus F$.

El teorema de compleción de Grothendieck nos dice que una forma lineal definida en el dual de un Banach es débil* continua si y sólo si su restricción a la bola unidad cerrada es débil* continua (ver p.e. 3.11.4. de [21]).

Por tanto, como $y'':F'\longrightarrow \mathbb{R}$ no es $\sigma(F',F)$-continua, existe una red $(y'_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subset B(F')$ que converge a cero $\sigma(F',F)$, y existe $\varepsilon>0$ tal que

(2) $|\langle y'_\alpha , y''\rangle| > \varepsilon \quad \forall\alpha\in\Gamma.$

Por (1) existe $\delta>0$ ($\delta<\lambda(K)$) tal que

(3) $\tilde{m}(A) < \varepsilon/8$ para todo $A\in\Sigma$ con $\lambda(A)<\delta$.

Utilizando el lema 5.3. y de forma análoga a como hicimos en la demostración anterior tenemos que existe un compacto $K_o\subset K$ que verifica

i) K_o es no vacío y $\lambda(K_o^c) < \delta$

ii) para cada $n\in\mathbb{N}$ la aplicación $\phi_n = \varphi_n|_{K_o} : K_o \longrightarrow E$

es continua.

Como (φ_n) es puntualmente débilmente de Cauchy, lo mismo le ocurre a la sucesión (ϕ_n); y de 4.1 se deduce que (ϕ_n) es débilmente de Cauchy en $C(K_o,E)$.

El teorema 5.2. nos asegura la existencia de un operador extensión $S : C(K_o,E) \longrightarrow C(K,E)$, que es una isometría sobre su imagen. Con lo cual $(T\circ S(\phi_n))$ converge débilmente en F a un cierto $y\in F$.

Ahora bien, como $(y'_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ converge a cero $\sigma(F',F)$, existe $\alpha_o\in\Gamma$ tal que

$$|\langle y,y'_\alpha\rangle| < \varepsilon/6 \qquad \forall\, \alpha \geq \alpha_o$$

Sea $\alpha\geq\alpha_o$, entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \tilde{T}(\varphi_n) - y'', y'_\alpha\rangle| < \varepsilon/6$$

y $$|\langle T\circ S(\phi_n) - y, y'_\alpha\rangle| < \varepsilon/6$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle y'',y'_\alpha\rangle| &\leq |\langle y'' - \tilde{T}(\varphi_n), y'_\alpha\rangle| + |\langle \tilde{T}(\varphi_n) - T\circ S(\phi_n), y'_\alpha\rangle| + \\ &+ |\langle T\circ S(\phi_n) - y, y'_\alpha\rangle| + |\langle y,y'_\alpha\rangle| < \\ &< 3\frac{\varepsilon}{6} + \|y'_\alpha\| \|\tilde{T}(\varphi_n) - T\circ S(\phi_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \int_K \varphi_n \, dm - \int_K S(\phi_n)\, dm \right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \int_{K_o^c} (\varphi_n - S(\phi_n))\, dm \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\tilde{m}(K_o^c) < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{8} = 3\frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

es decir, $|\langle y'',y'_\alpha\rangle| < 3\frac{\varepsilon}{4} \quad \forall\,\alpha \geq \alpha_o$; pero esto contradice (2). Luego $(\tilde{T}(\varphi_n))$ converge débilmente en F.

Por tanto, teniendo en cuenta que $S(\Sigma,E)$ es denso en $B(\Sigma,E)$, $\tilde{T} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente de Cauchy en débilmente convergentes.

5.6. Teorema: Sea K un compacto metrizable. Entonces un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma si y sólo si su extensión $\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma,E)} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Demostración: Una implicación es obvia.

Supongamos que $T : C(K,E) \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes; entonces T es incondicionalmente convergente y, por 2.3., su medida asociada "m" toma valores en L(E,F) y existe una medida finita y positiva $\lambda \in rcabv(\Sigma)$ tal que

(1) $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} \tilde{m}(A) = 0$

Sea (φ_n) una sucesión contenida en la bola unidad de $S(\Sigma,E)$ que converge a cero débilmente. Si suponemos que $(\tilde{T}(\varphi_n))$ no converge a cero en norma, entonces existe $\varepsilon > 0$ y existe una subsucesión de (φ_n) (que notamos igual) tal que

(2) $\|\tilde{T}(\varphi_n)\| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por (1) existe $\delta > 0$ $(\delta < \lambda(K))$ tal que

(3) $\tilde{m}(A) < \varepsilon/6$ para todo $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) < \delta$

Por el lema 5.3. y razonando análogamente a como hicimos en la demostración de 5.4., tenemos que existe un compacto $K_o \subset K$ tal que

i) K_o es no vacío y $\lambda(K_o^c) < \delta$

ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $\phi_n = \varphi_n|_{K_o} : K_o \longrightarrow E$ es continua.

Como (φ_n) converge a cero débilmente puntualmente, de 4.1. se deduce que (ϕ_n) converge a cero débilmente en $C(K_o,E)$.

Sea $S : C(K_o,E) \longrightarrow C(K,E)$ un operador extensión que es una isometría sobre su imagen, cuya existencia tenemos asegurada por

5.2.. Entonces $(T\circ S(\phi_n))$ converge a cero en norma. Por tanto existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| T\circ S(\phi_n)\| < \varepsilon/3 \qquad \forall n \geq n_o$$

Con lo cual, para cada $n \geq n_o$

$$\| \tilde{T}(\varphi_n)\| \leq \| \tilde{T}(\varphi_n) - T\circ S(\phi_n)\| + \| T\circ S(\phi_n)\| <$$

$$< \left\| \int_K \varphi_n \, dm - \int_K S(\phi_n)\, dm \right\| + \frac{\varepsilon}{3} =$$

$$= \left\| \int_{K_o^c} (\varphi_n - S(\phi_n))\, dm \right\| + \frac{\varepsilon}{3} \leq$$

$$\leq 2\tilde{m}(K_o^c) + \frac{\varepsilon}{3} < 2\,\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = 2\,\frac{\varepsilon}{3}$$

pero esto contradice (2).

Luego $(\tilde{T}(\varphi_n))$ converge a cero en norma y por tanto, gracias a la densidad de $S(\Sigma,E)$ en $B(\Sigma,E)$, $\tilde{T}$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes.

CAPITULO III

Dedicamos este capítulo al estudio en el caso vectorial de tres propiedades que tienen todos los espacios C(K) y que fueron axiomatizadas por Grothendieck en 1953 [19].

Todas ellas son propiedades que se pueden definir en términos de los operadores definidos en el espacio y que se mantienen por isomorfismos topológicos y por "paso" a subespacios complementados.

A partir del artículo de Grothendieck [19] se planteó la cuestión de cuándo el espacio C(K,E) tiene dichas propiedades. Una condición evidentemente necesaria es que E las tenga; pero ¿es suficiente? En este sentido la propiedad más estudiada ha sido la propiedad de Dunford-Pettis.

La dificultad de obtener una respuesta satisfactoria en el caso general se pone de manifiesto al comprobar que hasta el momento sólo se ha probado que algunos espacios E muy concretos que tienen la propiedad de Dunford-Pettis verifican que C(K,E) la tiene. En particular, Bourgain en un reciente artículo [7] demuestra con técnicas bastante sofisticadas que el espacio $C(K,L^1(\mu))$ y todos sus duales tienen la propiedad de Dunford-Pettis.

La demostración de que una respuesta afirmativa en general no es posible la ha dado hace pocos meses Talagrand en un artículo aún no publicado [39], en el que construye un espacio de Banach $\mathcal{E}$ que tiene la propiedad de Dunford-Pettis y tal que $C([0,1],\mathcal{E})$ no la tiene. Las buenas propiedades del espacio $\mathcal{E}$, que veremos a lo largo de este capítulo y del siguiente (ver nota 10.10.), hacen difícil conjeturar qué condiciones se han de imponer al espacio E para obtener una caracterización de cuándo C(K,E) tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Nosotros vamos a ver aquí que para una clase amplia de compactos K la cuestión planteada se resuelve satisfactoriamente, y que si se resuelve para $K = [0,1]$ está resuelta en general.

Veremos también que para la propiedad recíproca de Dunford-Pettis y la propiedad de Dieudonné, si imponemos a E ciertas condiciones, podemos asegurar que C(K,E) tiene dichas propiedades.

6. La propiedad de Dunford-Pettis en C(K,E)

6.1. Definición: Un espacio de Banach E tiene la propiedad de Dunford-Pettis (P.D.P.) si los operadores débilmente compactos de E en otro espacio de Banach cualquiera F transforman sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Ejemplos de espacios de Banach que tienen la P.D.P. son:

- C(K) para todo compacto K.
- $L^1(\mu)$ para toda medida finita μ.
- Los espacios de Schur (o que tienen la propiedad de Schur), que son aquéllos en que las sucesiones débilmente convergentes son convergentes en norma.
- Entre los reflexivos sólo los de dimensión finita.

Algunas propiedades de los espacios que tienen la P.D.P. son las siguientes (ver [19]):

6.2. Proposición:

a) Si E tiene la P.D.P. todo subespacio complementado de E también la tiene.

b) Si E' tiene la P.D.P. entonces E también la tiene.

c) El producto de dos espacios que tienen la P.D.P. tiene la P.D.P.

6.3. Proposición: Un espacio de Banach tiene la P.D.P. si y sólo si para cada par de sucesiones, $(x_n) \subset E$ y $(x'_n) \subset E'$, que convergen a cero débilmente se tiene que $\langle x_n, x'_n \rangle \longrightarrow 0$.

En general no es cierto que C(K,E) tenga la P.D.P. cuando E la tiene (ver [39] y 6.9. de esta memoria). Sin embargo vamos a ver que para una clase amplia de compactos sí lo es. También probaremos que el problema de determinar cuándo C(K,E) tiene la P.D.P. para todos los compactos K se reduce realmente a determinar cuándo C([0,1],E) tiene esta propiedad.

En primer lugar vamos a recoger en un lema una técnica bien conocida (ver [14,19,3]) que permite reducir muchos problemas de C(K,E) al caso en que K es metrizable.

6.4. Lema: Sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión acotada. Entonces existe un cociente metrizable de K, $\tilde{K}$, y existe una sucesión $(\tilde{\phi}_n) \subset C(\tilde{K},E)$ tal que, si $\pi : K \longrightarrow \tilde{K}$ es la proyección canónica,

$$\tilde{\phi}_n(\pi(t)) = \phi_n(t) \quad \text{para todo } t \in K \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Sea $\tilde{K}$ el conjunto de las clases de equivalencia de K respecto de la relación:

$$tRs \quad \text{si y sólo si} \quad \phi_n(t) = \phi_n(s) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\pi : K \longrightarrow \tilde{K}$ la aplicación que a cada $t \in K$ le hace corresponder su clase de equivalencia.

Si consideramos en $\tilde{K}$ la métrica definida por

$$d(\pi(t),\pi(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \| \phi_n(t) - \phi_n(s) \| \quad \text{para todo} \quad \pi(t),\ \pi(s) \in \tilde{K},$$

tenemos que la aplicación $\pi : K \longrightarrow \tilde{K}$ es continua (gracias a la continuidad de las aplicaciones ϕ_n); y por tanto que $\tilde{K}$ es un compacto metrizable.

Además si, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\tilde{\phi}_n : \tilde{K} \longrightarrow E$ por

$$\tilde{\phi}_n(\pi(t)) = \phi_n(t) \quad \text{para todo } \pi(t) \in \tilde{K}$$

obtenemos que $(\tilde{\phi}_n)$ está contenida en $C(\tilde{K},E)$.

6.5. Teorema: Si K es un compacto disperso entonces C(K,E) tiene la P.D.P. si y sólo si E la tiene.

Demostración:

$\Rightarrow$) es evidente por ser E isomorfo a un subespacio complementado de C(K,E).

$\Leftarrow$) Supongamos en primer lugar que K es metrizable.

Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador débilmente compacto; entonces T es incondicionalmente convergente y, por 2.2., su medida asociada "m" toma valores en L(E,F) y

$$\lim_n \tilde{m}(A_n) = 0 \quad \text{para cada sucesión } (A_n) \subset \Sigma \text{ tal que } A_n \searrow \emptyset.$$

Sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión que converge a cero débilmente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n = \sum_{j=1}^{r_n} \chi_{B_j^n} x_j^n \in S(\Sigma,E)$ con $(B_j^n)_{j=1}^{r_n}$ disjuntos, tal que

$$\| \phi_n - \varphi_n \| < 1/n$$

Es claro que (φ_n) converge débilmente a cero en $B(\Sigma,E)$.

Como K es un compacto disperso y metrizable, K es contable (3.3.) Sea $K = \{ t_n : n \in \mathbb{N} \}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n = \{ t_i : i \geq n \} = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{t_i\}$ pertenece a Σ ; además $A_n \searrow \emptyset$, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{m}(A_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq k$.

Definimos $\hat{T} : E^k \longrightarrow F$

$$(x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow T''\Big(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\{t_i\}} x_i \Big) = \sum_{i=1}^{k} m(\{t_i\})(x_i)$$

$\hat{T}$ es un operador débilmente compacto ya que $\hat{T}(B(E^k))$ está contenido en $T''(B(C(K,E)''))$ que es un conjunto débilmente relativamente compacto en F.

Como E^k tiene la P.D.P. (por 6.2.(c)) y $(\varphi_n(t_i))_{n=1}^{\infty}$ converge a cero débilmente en E para $1 \leq i \leq k$ se tiene que

$$\| \hat{T}(\varphi_n(t_1), \ldots, \varphi_n(t_k)) \| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

y, por tanto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| \hat{T}(\varphi_n(t_1), \ldots, \varphi_n(t_k)) \| = \Big\| \sum_{i=1}^{k} m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i)) \Big\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\|T\|}{n_2} < \varepsilon$,

entonces para cada $n \geq \max(n_1, n_2)$

$$\|T(\phi_n)\| \leq \|T''(\phi_n - \varphi_n)\| + \|T''(\varphi_n)\| \leq \|T\| \, \|\phi_n - \varphi_n\| + \|T''(\varphi_n)\| <$$

$$< \varepsilon + \Big\| T''\Big(\sum_{j=1}^{r_n} \chi_{B_j^n} x_j^n \Big) \Big\| = \varepsilon + \Big\| \sum_{j=1}^{r_n} m(B_j^n)(x_j^n) \Big\| \leq$$

$$< \varepsilon + \Big\| \sum_{j=1}^{r_n} m(B_j^n \cap A_{k+1})(x_j^n) \Big\| + \Big\| \sum_{j=1}^{r_n} m(B_j^n \cap A_{k+1}^c)(x_j^n) \Big\| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \|\varphi_n\| \tilde{m}(A_{k+1}) + \|\sum_{i=1}^{k} m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i))\| <$$

$$< \varepsilon + \|\varphi_n\| \varepsilon + \varepsilon \leq (2 + \sup_n \|\varphi_n\|) \varepsilon$$

Por tanto $\|T(\phi_n)\| \longrightarrow 0$ y así C(K,E) tiene la P.D.P.

Sea ahora K un compacto disperso cualquiera.

Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador débilmente compacto y sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión que converge a cero débilmente. Por el lema anterior, existe un cociente metrizable de K, $\tilde{K}$, y existe $(\tilde{\phi}_n) \subset C(\tilde{K},E)$ tal que

$$\tilde{\phi}_n(\pi(t)) = \phi_n(t) \qquad \forall t \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $\pi : K \longrightarrow \tilde{K}$ es la proyección canónica.

Como $\|\tilde{\phi}_n\| = \|\phi_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como para cada $t \in K$ la sucesión $(\tilde{\phi}_n(\pi(t)) = (\phi_n(t))$ converge a cero débilmente en E; por 4.1, tenemos que $(\tilde{\phi}_n)$ converge a cero débilmente en $C(\tilde{K},E)$.

Sea $\Phi : C(\tilde{K},E) \longrightarrow C(K,E)$ la aplicación definida por

$$\Phi(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi} \circ \pi \qquad \forall \tilde{\phi} \in C(\tilde{K},E)$$

Φ es claramente lineal y continua; además

$$\Phi(\tilde{\phi}_n) = \phi_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos el operador $T_o = T \circ \Phi : C(\tilde{K},E) \longrightarrow F$. T_o es débilmente compacto por serlo T. Como $(\tilde{\phi}_n)$ converge a cero débilmente y $C(\tilde{K},E)$ tiene la P.D.P. (pues $\tilde{K}$ es disperso por 3.2.(a), y metrizable), la sucesión $(T_o(\tilde{\phi}_n))$ converge a cero en norma. Pero $T_o(\tilde{\phi}_n) = T(\Phi(\tilde{\phi}_n)) = T(\phi_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $\|T(\phi_n)\| \longrightarrow 0$.

Luego C(K,E) tiene la P.D.P.

<u>6.6. Proposición</u>: C(K,E) tiene la P.D.P. para todo compacto K si y

sólo si $C([0,1],E)$ la tiene.

Demostración:

$\Rightarrow$) Evidente.

$\Leftarrow$) Si $C([0,1],E)$ tiene la P.D.P. entonces E también la tiene por ser isomorfo a un subespacio complementado de $C([0,1],E)$. Así, por el teorema anterior $C(K,E)$ tiene la P.D.P. si K es disperso; y por tanto, según 3.5., $C(K,E)$ tiene la P.D.P. para todo compacto metrizable K. Procediendo ahora de forma análoga a como hicimos en la segunda parte de la demostración anterior, podemos deducir que $C(K,E)$ tiene la P.D.P. para todo compacto K.

Existe otro espacio, aparte de $C([0,1],E)$, al que podemos reducir el problema que nos ocupa. Este otro espacio es $B(\Sigma_o,E)$ (donde Σ_o es la σ-álgebra de Borel de $[0,1]$).

De IV.6.18. de [14] y 21.5.1. de [36] se deduce que

6.7. Teorema: Si Σ_o es la σ-álgebra de Borel de $[0,1]$, existe un compacto K_o tal que, para cualquiera que sea el espacio de Banach E, $B(\Sigma_o,E)$ es isomorfo a $C(K_o,E)$.

Y así podemos obtener el siguiente resultado

6.8. Proposición: $C(K,E)$ tiene la P.D.P. para todo compacto K si y sólo si $B(\Sigma_o,E)$ la tiene.

Demostración:

$\Rightarrow$) Es consecuencia inmediata del teorema anterior.

$\Leftarrow$) Por 6.6. basta probar que $C([0,1],E)$ tiene la P.D.P. si $B(\Sigma_o,E)$ la tiene. Sea $T : C([0,1],E) \longrightarrow F$ un operador débilmente compacto entonces, por 5.1., $\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma_o,E)} : B(\Sigma_o,E) \longrightarrow F$ es débilmente compacto. Si $B(\Sigma_o,E)$ tiene la P.D.P. $\tilde{T}$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes y por tanto también T (pues $\tilde{T}|_{C([0,1],E)} = T$).

A continuación pasamos a definir el espacio de Banach construido por Talagrand [39] que, como anunciamos, es un espacio que tiene la P.D.P. tal que $C([0,1],E)$ no la tiene.

6.9. Ejemplo de Talagrand

Sea $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$, para cada $\varphi \in T$ se define $|\varphi| = n$ si $\varphi \in \{0,1\}^n$.
Dados $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in T$ y $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in T$ se dice que

$$\varphi \leq \psi \quad \text{si} \quad |\varphi| \leq |\psi| \quad \text{y} \quad \varphi_i = \psi_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

Para cada $x = (x_\varphi)_{\varphi \in T} \in \mathbb{R}^T$ se define

$$\|x\| = \sup_n \Big(\sum_{|\varphi| = n} (\sup_{\psi \geq \varphi} |x_\psi|)^2 \Big)^{1/2}$$

El subespacio de $\mathbb{R}^T$ formado por los $x \in \mathbb{R}^T$ con $\|x\| < +\infty$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|$, que contiene a

$$\mathbb{R}^{(T)} = \{ (x_\varphi)_{\varphi \in T} \in \mathbb{R}^T : x_\varphi = 0 \text{ para casi todo } \varphi \in T \}.$$

Se designa por $\mathcal{E}$ a la adherencia de $\mathbb{R}^{(T)}$ en este espacio.

Talagrand demuestra las siguientes propiedades del espacio $\mathcal{E}$:

a) Cada sucesión de $\mathcal{E}$ que converge a cero débilmente pero no en norma posee una subsucesión equivalente a la base canónica de c_o.

b) $\mathcal{E}$ tiene la P.D.P.

c) $\mathcal{E}'$ es separable y tiene la propiedad de Schur.

d) $C([0,1],\mathcal{E})$ no tiene la P.D.P.

Nosotros probaremos que además

e) $\mathcal{T}$ tiene base de Schauder incondicional (que es reductora).

f) $\mathcal{T}'$ tiene base de Schauder incondicional.

Demostración de (e) y (f):

Para cada $\varphi \in T$ sea $e_\varphi = (x_\psi)_{\psi \in T} \in \mathcal{T}$ definido por

$$x_\psi = 1 \text{ si } \psi = \varphi \quad \text{y} \quad x_\psi = 0 \text{ si } \psi \neq \varphi$$

Consideremos la sucesión $(e_\varphi)_{\varphi\in T} \subset \mathcal{T}$ ordenada de forma natural, es decir, $e_{(0,0)}, e_{(0,1)}, e_{(1,0)}, e_{(1,1)}, e_{(0,0,0)}, e_{(0,0,1)}, \ldots$

Se tiene entonces que

- $(e_\varphi)_{\varphi\in T}$ es una base de Schuder incondicional de $\mathcal{T}$.

En efecto: Es claro que cada elemento $x = (x_\varphi)_{\varphi\in T} \in \mathbb{R}^{(T)}$ se puede expresar de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{n_o} \sum_{|\varphi|=n} x_\varphi e_\varphi$$

donde n_o es el mayor natural tal que $x_\varphi \neq 0$ para algún $\varphi \in T$ con $|\varphi| = n_o$; por lo tanto $\mathcal{T} = \overline{[(e_\varphi)_{\varphi\in T}]}$. Además $\|e_\varphi\| = 1$ para todo $\varphi \in T$.

Para probar que forman una base incondicional sólo queda comprobar que, para cada par de subconjuntos finitos σ y σ' de T, $\sigma \subset \sigma'$, se tiene

$$\|\sum_{\varphi\in\sigma} x_\varphi e_\varphi\| \leq \|\sum_{\varphi\in\sigma'} x_\varphi e_\varphi\|$$

para cualquier sucesión finita de escalares $(x_\varphi)_{\varphi\in\sigma'}$.

Sea $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma \subset \sigma' \subset \bigcup_{n=1}^{n_o} \{0,1\}^n$ y sea $(x_\varphi)_{\varphi\in\sigma'}$ una sucesión finita de escalares. Consideremos

$$\tilde{x}_\varphi = x_\varphi \text{ si } \varphi \in \sigma \quad \text{y} \quad \tilde{x}_\varphi = 0 \text{ si } \varphi \notin \sigma$$

Sea $n_1 \in \{1,2,\dots,n_0\}$ tal que

$$\sum_{|\varphi|=n_1} (\max_{\psi\geq\varphi} |\tilde{x}_\psi|)^2 = \max_{1\leq n\leq n_0} \Big(\sum_{|\varphi|=n} (\max_{\psi\geq\varphi} |\tilde{x}_\psi|)^2 \Big)$$

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2^{n_1}}$ son los 2^{n_1} elementos de T con $|\varphi|=n_1$, sean $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2^{n_1}}$ elementos de $\bigcup_{n=1}^{n_0} \{0,1\}^n$ tales que

$$\varphi_i \leq \psi_i \quad \text{y} \quad |\tilde{x}_{\psi_i}| = \max_{\psi\geq\varphi_i} |\tilde{x}_\psi| \quad \text{para } 1\leq i\leq 2^{n_1},$$

entonces

$$\Big\| \sum_{\varphi\in\sigma} x_\varphi e_\varphi \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{|\varphi|=n} \tilde{x}_\varphi e_\varphi \Big\| = \max_{1\leq n\leq n_0} \Big(\sum_{|\varphi|=n} (\max_{\psi\geq\varphi} |\tilde{x}_\psi|)^2 \Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{|\varphi|=n_1} (\max_{\psi\geq\varphi} |\tilde{x}_\psi|)^2 \Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{2^{n_1}} |\tilde{x}_{\psi_i}|^2 \Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{2^{n_1}} (\max_{\psi\geq\varphi_i} |x_\psi|)^2 \Big)^{1/2} = \Big(\sum_{|\varphi|=n_1} (\max_{\psi\geq\varphi} |x_\psi|)^2 \Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big\| \sum_{\varphi\in\sigma'} x_\varphi e_\varphi \Big\|$$

Luego $(e_\varphi)_{\varphi\in T}$ es una base incondicional de $\mathfrak{T}$.

Se sabe que si un espacio de Banach tiene base incondicional y dual separable, entonces su dual también tiene base incondicional (que está formada precisamente por los funcionales asociados a la base del espacio) (ver 1.c.12. de [26]).

Por lo tanto, como $\mathfrak{T}'$ es separable,

- $\mathfrak{T}'$ tiene base de Schauder incondicional.

6.10. Nota: Es interesante observar que aunque para el compacto $K=[0,1]$ $C(K,\mathfrak{T})$ no tiene la P.D.P., para el resto de los compactos metrizables (es decir, los contables) $C(K,\mathfrak{T})$ sí la tiene. Más aún, existen compactos no metrizables (los dispersos) tales que C(K,$\mathbb{K}$) tiene la P.D.P.

7. La propiedad recíproca de Dunford-Pettis en C(K,E)

7.1. Definición: Un espacio de Banach E tiene la propiedad recíproca de Dunford-Pettis (R.P.D.P.) si todo operador de E en otro espacio de Banach cualquiera F que transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma, es débilmente compacto.

Ejemplos de espacios que tienen la R.P.D.P. son:

- C(K) para todo compacto K.
- Los espacios reflexivos.
- Entre los espacios de Schur sólo los de dimensión finita.
- Los espacios que no contienen ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

Estos últimos tienen la R.P.D.P. como consecuencia inmediata de la caracterización de Rosenthal dada en 1.2.

Observemos que:

- No todo espacio que tiene la P.D.P. tiene la R.P.D.P. (ejemplo: ℓ^1).
- No todo espacio que tiene la R.P.D.P. tiene la P.D.P. (ejemplo: los espacios reflexivos de dimensión infinita).

Algunas propiedades de estabilidad de la R.P.D.P. son (ver [19]):

7.2. Proposición:

a) Si E tiene la R.P.D.P. todo subespacio complementado de E también la tiene.

b) Si E tiene la R.P.D.P. todo cociente separado de E también la tiene.

c) El producto de dos espacios que tienen la R.P.D.P. tiene la R.P.D.P.

Probamos en esta sección que si imponemos a E ó a K algunas restricciones es cierto el siguiente resultado:

" Si E tiene la R.P.D.P. entonces C(K,E) también la tiene".

7.3. Lema: Sea K un compacto disperso metrizable y sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador cuya medida asociada "m" verifica:

i) $m(\Sigma) \subset L(E,F)$

ii) $m(A) : E \longrightarrow F$ es débilmente compacto para todo $A \in \Sigma$

iii) $\tilde{m}$ es continua en $\emptyset$.

Entonces T es débilmente compacto.

Demostración: Como K es compacto y metrizable, K es contable (3.3.) Sea $K = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n = \sum_{j=1}^{r_n} \chi_{B_j^n} x_j^n \in S(\Sigma,E)$ con $(B_j^n)_{j=1}^{r_n}$ disjuntos, tal que $\|\phi_n - \varphi_n\| < 1/n$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ la sucesión $(m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i)))_{n=1}^{\infty} \subset F$ posee una subsucesión débilmente convergente ya que $m(\{t_i\})$ es un operador débilmente compacto y $(\varphi_n(t_i))_{n=1}^{\infty}$ está acotada en E. Así, por un proceso de diagonalización usual, podemos extraer una subsucesión de (φ_n) (que seguimos notando igual) tal que

$(m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i)))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente en F a un cierto y_i

para cada $i \in \mathbb{N}$.

- La serie $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ converge en F.

En efecto: Supongamos que no converge, entonces existe $\varepsilon>0$ y existe una sucesión $(\sigma_j)\subset \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ con $\max \sigma_j < \min \sigma_{j+1}$ para todo j, tal que

$$\Big\| \sum_{i\in\sigma_j} y_i \Big\| > \varepsilon \qquad \forall j\in\mathbb{N};$$

por tanto, para cada $j\in\mathbb{N}$, existe $y_j'\in B(F')$ tal que

$$\Big| \Big\langle \sum_{i\in\sigma_j} y_i , y_j' \Big\rangle \Big| > \varepsilon$$

Como, para cada $j\in\mathbb{N}$, $\sum_{i\in\sigma_j} y_i$ es el límite débil de $\left(\sum_{i\in\sigma_j} m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i))\right)_{n=1}^{\infty}$, existe $n_j\in\mathbb{N}$ tal que

$$\Big| \Big\langle \sum_{i\in\sigma_j} m(\{t_i\})(\varphi_{n_j}(t_i)), y_j' \Big\rangle \Big| > \varepsilon$$

Y así
$$\Big\| \sum_{i\in\sigma_j} m(\{t_i\})(\varphi_{n_j}(t_i)) \Big\| > \varepsilon \qquad \forall j\in\mathbb{N}.$$

Si consideramos los conjuntos $A_j = \bigcup_{k=j}^{\infty}\{i: i\in\sigma_k\} \in \Sigma$ para todo $j\in\mathbb{N}$, tenemos que $A_j \searrow \emptyset$, y sin embargo no existe el $\lim_j \tilde{m}(A_j)$ ya que, para todo $j\in\mathbb{N}$

$$\tilde{m}(A_j) - \tilde{m}(A_{j+1}) \geq \tilde{m}(A_j \setminus A_{j+1}) = \tilde{m}(\sigma_j) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sup\|\varphi_n\|} \Big\| \sum_{i\in\sigma_j} m(\{t_i\})(\varphi_{n_j}(t_i)) \Big\| > \frac{\varepsilon}{\sup\|\varphi_n\|}$$

Pero esto contradice que $\tilde{m}$ sea continua en $\emptyset$.

Luego $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ converge en F. Sea $y=\sum_{i=1}^{\infty} y_i$

- $(T(\phi_n))$ converge débilmente a y.

En efecto: dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

1) $\Big\| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} y_i \Big\| < \varepsilon$

y 2) $\tilde{m}(A_n) < \varepsilon/\sup\|\varphi_n\| \quad \forall n \geq n_o$, donde $A_n = \{t_i : i \geq n\}$

Sea $y' \in B(F')$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

3) $\left| \langle \sum_{i=1}^{n_o} m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i)) - \sum_{i=1}^{n_o} y_i , y' \rangle \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq k$

y 4) $\frac{\|T\|}{k} < \varepsilon$

entonces, para cada $n \geq k$, se tiene

$$|\langle T(\phi_n) - y, y'\rangle| \leq |\langle T''(\phi_n - \varphi_n), y'\rangle| + |\langle T''(\varphi_n) - y, y'\rangle| \leq$$

$$\leq \|T''\| \, \|\phi_n - \varphi_n\| + \left|\langle T''\left(\sum_{j=1}^{r_n} \chi_{B_j^n} x_j^n\right) - \sum_{i=1}^{\infty} y_i , y'\rangle\right| <$$

$$< \varepsilon + \left|\langle \sum_{j=1}^{r_n} m(B_j^n)(x_j^n) - \sum_{i=1}^{\infty} y_i , y'\rangle\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \left|\langle \sum_{j=1}^{r_n} m(B_j^n \cap A_{n_o+1})(x_j^n) , y'\rangle\right| + \left|\langle \sum_{i=n_o+1}^{\infty} y_i , y'\rangle\right| +$$

$$+ \left|\langle \sum_{j=1}^{r_n} m(B_j^n \cap A_{n_o+1}^c)(x_j^n) - \sum_{i=1}^{n_o} y_i , y'\rangle\right| <$$

$$< \varepsilon + \|\varphi_n\| \, \tilde{m}(A_{n_o+1}) + \varepsilon +$$

$$+ \left|\langle \sum_{i=1}^{n_o} m(\{t_i\})(\varphi_n(t_i)) - \sum_{i=1}^{n_o} y_i , y'\rangle\right| < 4\varepsilon$$

Por tanto T es débilmente compacto.

<u>7.4. Observación</u>: Batt y Berg [3] probaron que, para cualquiera que sean K, E y F todo operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ débilmente compacto verifica (i), (ii) y (iii) del lema anterior.

Si E' y E" tienen la propiedad de Radon-Nikodym el recíproco es cierto para cualquier compacto K y cualquier espacio de Banach F (ver [9]). En cambio en general el recíproco no es cierto. C. Fierro [15,16] ha probado que si E' ó E" no tienen la propiedad de Radon-Nikodym entonces existe siempre un compacto K, un espacio de Banach F y un operador $T : C(K,E) \longrightarrow F$ que verifica (i), (ii) y (iii) del lema y que no es débilmente compacto.

7.5. Teorema: Si K es un compacto disperso entonces C(K,E) tiene la R.P.D.P. si y sólo si E la tiene.

Demostración:

$\Rightarrow$) Es evidente ya que E es isomorfo a un subespacio complementado de C(K,E).

$\Leftarrow$) Supongamos en primer lugar que K es metrizable.

Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador que transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma; entonces T es incondicionalmente convergente y, por 2.2., su medida asociada "m" toma valores en L(E,F) y $\tilde{m}$ es continua en $\emptyset$.

Como para cada $A \in \Sigma$ la aplicación $\tau_A : E \longrightarrow B(\Sigma,E)$ definida por $\tau_A(x) = \chi_A x$ es lineal y continua, de 5.6. se deduce que el operador $m(A) = T \circ \tau_A : E \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma; y como E tiene la R.P.D.P. el operador $m(A) : E \longrightarrow F$ es débilmente compacto.

Así, por el lema anterior, tenemos que T es débilmente compacto.

Supongamos ahora que K es un compacto disperso cualquiera.

Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador que transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma, y sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión acotada. Por el lema 6.4. existe un cociente metrizable de K, $\tilde{K}$, y existe $(\tilde{\phi}_n) \subset C(K,E)$ tal que

$$\tilde{\phi}_n(\pi(t)) = \phi_n(t) \quad \forall t \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $\pi : K \longrightarrow \tilde{K}$ es la proyección canónica;

además, por 3.2.(a), $\tilde{K}$ es también disperso.

Si consideramos la aplicación $\Phi: C(\tilde{K},E) \longrightarrow C(K,E)$ que a cada $\tilde{\phi} \in C(\tilde{K},E)$ le hace corresponder $\tilde{\phi}\circ\pi \in C(K,E)$, entonces el operador $T_o = T\circ\Phi: C(\tilde{K},E) \longrightarrow F$ es débilmente compacto ya que $C(\tilde{K},E)$ tiene la R.P.D.P.

Como $(\tilde{\phi}_n)$ está acotada en $C(\tilde{K},E)$ y $T(\phi_n) = T_o(\tilde{\phi}_n)$ para todo n, la sucesión $(T(\phi_n))$ posee una subsucesión débilmente convergente en F.

Por tanto T es débilmente compacto y C(K,E) tiene la R.P.D.P.

<u>7.6. Proposición</u>: C(K,E) tiene la R.P.D.P. para todo compacto K si y sólo si C([0,1],E) la tiene.

<u>Demostración</u>:

$\Rightarrow$) Evidente.

$\Leftarrow$) Si C([0,1],E) tiene la R.P.D.P. entonces E la tiene y, por el teorema anterior, también C(K,E) para todo compacto disperso K. Con lo cual, según 3.5., C(K,E) tiene la R.P.D.P. para todo compacto metrizable K. Procediendo ahora de forma análoga a como hicimos en la segunda parte de la demostración anterior, podemos concluir que C(K,E) tiene la R.P.D.P. para todo compacto K.

<u>7.7. Proposición</u>: Si Σ_o es la σ-álgebra de Borel de [0,1] entonces C(K,E) tiene la R.P.D.P. para todo compacto K si y sólo si $B(\Sigma_o,E)$ la tiene.

<u>Demostración</u>: Es análoga a la de 6.8. teniendo en cuenta 7.6. y 5.6. en lugar de 6.6. y 5.1.

Los dos resultados siguientes son una consecuencia inmediata de dos teoremas que veremos en la próxima sección (8.8. y 8.10.)

7.8. Proposición: Si E tiene base incondicional reductora entonces C(K,E) tiene la R.P.D.P. para cualquiera que sea el compacto K.

7.9. Proposición: Si E es un espacio de Banach tal que E' y E" tienen la propiedad de Radon-Nikodym, entonces C(K,E) tiene la R.P.D.P. para todo compacto K.

7.10. Nota: Es interesante hacer notar que mientras que el ejemplo de Talagrand $\mathfrak{T}$ (6.9.) tiene tanto la P.D.P. como la R.P.D.P. (pues $\mathfrak{T}$ tiene base incondicional reductora), el espacio $C([0,1],\mathfrak{T})$ tiene esta última propiedad pero no la primera.

Esto nos proporciona también un ejemplo de un espacio no reflexivo que tiene la R.P.D.P. y no la P.D.P.

8. La propiedad de Dieudonné en C(K,E)

8.1. Definición: Un espacio de Banach E tiene la propiedad de Dieudonné (P.D.) si todo operador de E en otro espacio de Banach cualquiera F que transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes, es débilmente compacto.

Ejemplos de espacios que tienen la P.D. son:

- C(K) para todo compacto K
- Los espacios reflexivos
- Entre los espacios débilmente secuencialmente completos sólo los reflexivos

- Los espacios que no contienen ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 (éstos tienen la P.D. como consecuencia de la caracterización de Rosenthal 1.2.)

Propiedades de estabilidad de la P.D. son (ver [19]):

<u>8.2. Proposición</u>:

a) Si E tiene la P.D. todo subespacio complementado de E también la tiene.

b) El producto de dos espacios que tienen la P.D. tiene la P.D.

<u>8.3. Nota</u>: Una consecuencia inmediata de las definiciones es que todo espacio que tiene la P.D. tiene también la R.P.D.P.

De nuevo hemos de decir que no se conocen caracterizaciones de cuándo C(K,E) tiene la P.D. en el caso general.

Los tres resultados que damos a continuación son análogos a los obtenidos para la R.P.D.P.

<u>8.4. Teorema</u>: Si K es un compacto disperso entonces C(K,E) tiene la P.D. si y sólo si E la tiene.

<u>Demostración</u>: Es análoga a la de 7.5.

<u>8.5. Proposición</u>: C(K,E) tiene la P.D. para todo compacto K si y sólo si C([0,1],E) la tiene.

<u>Demostración</u>: Es análoga a la de 7.6.

<u>8.6. Proposición</u>: Si Σ_0 es la σ-álgebra de Borel de [0,1] entonces C(K,E) tiene la P.D. para todo compacto K si y sólo si $B(\Sigma_0,E)$ la

tiene.

Demostración: Basta proceder como en 6.8. teniendo en cuenta 8.5. y 5.5. en lugar de 6.6. y 5.1.

Veremos ahora que si E es un espacio separable nos basta estudiar los operadores que "llegan" a c_o para decidir si E tiene o no la P.D.. Y pasaremos después a demostrar que si imponemos a E ciertas condiciones, el espacio C(K,E) tiene la P.D. para todo compacto K.

8.7. Proposición: Si E es un espacio de Banach separable son equivalentes:

a) E tiene la P.D.

b) Todo operador $T : E \longrightarrow c_o$ que transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes es débilmente compacto.

Demostración:

(a) $\Longrightarrow$ (b): Es trivial.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sea H el subespacio de E" formado por los $x'' \in E''$ que son $\sigma(E'',E')$-límite de alguna sucesión débilmente de Cauchy en E.

Grothendieck caracterizó en [19] los espacios E que tienen la P.D. como aquéllos en los que los discos acotados y $\sigma(E',H)$-compactos del dual son débilmente compactos.

Sea por tanto $A \subset E'$ un disco acotado y $\sigma(E',H)$-compacto. Hemos de probar que A es débilmente compacto.

Sea $(x'_n) \subset A$; como E es separable y A es acotado en E', por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, existe una subsucesión de (x'_n) (que notamos igual) que es $\sigma(E',E)$-convergente a un cierto $x' \in E'$. La aplicación identidad

$$I : (A, \sigma(E',H)|_A) \longrightarrow (A, \sigma(E',E)|_A)$$

es un homeomorfismo ya que la topología $\sigma(E',E)$ es más débil que la topología $\sigma(E',H)$ y A es un conjunto $\sigma(E',H)$-compacto. Por tanto $x' = \lim_n x'_n$ para la topología $\sigma(E',H)$.

Definimos $T : E \longrightarrow c_o$ por $T(x) = (\langle x, x'_n - x' \rangle)_n$ para todo $x \in E$. T es claramente lineal y continuo. Además, T transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes. En efecto: sea $(x_i) \subset B(E)$ una sucesión débilmente de Cauchy, entonces existe $x'' \in H$ tal que $x_i \longrightarrow x''$ $\sigma(E'',E')$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$a_n = \lim_i \langle x_i, x'_n - x' \rangle = \langle x'', x'_n - x' \rangle ;$$

como $x'_n \longrightarrow x'$ $\sigma(E',H)$, $\lim_n a_n = \lim_n \langle x'', x'_n - x' \rangle = 0$. Luego $y = (a_n) \in c_o$ y $(T(x_i))_i$ converge débilmente a y.

Por tanto T es débilmente compacto y, por el teorema de Gantmacher (ver IV.4.8. de [14]), su traspuesto $T' : \ell^1 \longrightarrow E'$ también lo es. Si (e_n) es la base canónica de ℓ^1

$$T'(e_n) = e_n \circ T = x'_n - x' \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

con lo cual $(x'_n - x')_n$ posee una subsucesión $\sigma(E',E'')$-convergente (y ha de ser necesariamente a cero). Se tiene por tanto que A es $\sigma(E',E'')$-secuencialmente compacto. Y, gracias al teorema de Eberlein-Smulian, A es $\sigma(E',E'')$-compacto.

<u>8.8. Teorema</u>: Si E tiene base incondicional reductora, entonces C(K,E) tiene la P.D. para todo compacto K.

Para su demostración vamos a necesitar dos lemas. Pero antes observemos que si (e_n) es una base incondicional normalizada reductora de E, y si

$$C = \sup \{ \|P_\sigma\| : \sigma \subset \mathbb{N} \}$$

entonces

a) $C \geq 1$.

b) Si $x''\in E''$ se tiene que $x''=\lim_m \sum_{n=1}^{m} \langle e'_n, x''\rangle e''_n$ para $\sigma(E'',E')$.

c) Para cada $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ la aplicación bitraspuesta de P_σ, P''_σ, verifica que $\|P''_\sigma\| = \|P_\sigma\| \leq C$, y que

$$P''_\sigma(x'') = \sum_{n\in\sigma} \langle e'_n, x''\rangle e''_n \qquad \forall x''\in E''.$$

<u>Lema 1</u>: Sea E un espacio de Banach con base incondicional reductora, sea $I=[0,1]$ y sea Σ_0 la σ-álgebra de Borel de I. Si (A_n) es una sucesión de abiertos disjuntos de I y $(x''_n)\subset B(E'')$, entonces el elemento τ de $C(I,E)''$ definido por

$$\langle \mu, \tau\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mu(A_n), x''_n\rangle \qquad \forall \mu\in rcabv(\Sigma_0, E')$$

es límite débil* de una sucesión débilmente de Cauchy de $C(I,E)$.

<u>Demostración</u>: Sea (e_n) una base incondicional normalizada reductora de E y sea

$$C=\sup\{\|P_\sigma\|: \sigma\subset\mathbb{N}\}$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ existe una sucesión creciente de compactos $(K^n_m)_m$ tal que $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K^n_m$. Para cada $n,m\in\mathbb{N}$ sea $f^n_m\in C(I)$ tal que

$$f^n_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in K^n_m \\ 0 & \text{si } t\in A^c_n \end{cases} \qquad \text{y} \quad 0\leq f^n_m(t)\leq 1 \qquad \forall t\in I.$$

Construimos la siguiente sucesión en $C(I,E)$:

$$\phi_1 = f^1_1(.)\langle e'_1, x''_1\rangle e_1$$

$$\phi_2 = f^1_2(.)\sum_{j=1}^{2}\langle e'_j, x''_1\rangle e_j + f^2_1(.)\langle e'_1, x''_2\rangle e_1$$

$\vdots$

$$\phi_k = f_k^1(.)\sum_{j=1}^{k}\langle e_j', x_1''\rangle e_j + f_{k-1}^2(.)\sum_{j=1}^{k-1}\langle e_j', x_2''\rangle e_j + \dots + f_1^k(.)\langle e_1', x_k''\rangle e_1$$

$\vdots$

La sucesión (ϕ_k) está acotada en C(I,E) ya que

$$\|\phi_k\| = \sup_{t\in I}\|\phi_k(t)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\sigma\subset\mathbb{N}}\|P_\sigma''(x_n'')\| \leq C .$$

Por la definición de (ϕ_k) se tiene que

(i) Si $t\in A_n$ $\qquad \phi_{n+k}(t) = f_{k+1}^n(t)\sum_{j=1}^{k+1}\langle e_j', x_n''\rangle e_j \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$

(ii) Si $t\in K_{m_0}^n$ $\qquad \phi_{n+k}(t) = \sum_{j=1}^{k+1}\langle e_j', x_n''\rangle e_j \qquad \forall k\geq m_0.$

Veamos que (ϕ_k) es débilmente de Cauchy en C(I,E). Para ello, según 4.1., bastará probar que puntualmente lo es: Sea $t\in I$,

- si $t\in A^c$ entonces $\lim_k \phi_k(t)=0$ en E pues $\phi_k(t)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$;

- si $t\in A$ existe $n\in\mathbb{N}$ y existe $m_0\in\mathbb{N}$ tales que $t\in K_{m_0}^n$. Entonces teniendo en cuenta (ii) y que la serie $\sum_{j=1}^{\infty}\langle e_j', x_n''\rangle e_j$ es débilmente incondicionalmente convergente en E por ser (e_j) base incondicional, podemos concluir que $(\phi_k(t))$ es débilmente de Cauchy en E.

Veamos que $\tau = \lim_k \phi_k$ para $\sigma(C(I,E)'', C(I,E)')$:

Sea $\mu\in rcabv(\Sigma_0, E')$ y sea $\varepsilon>0$. Como $|\mu|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}|\mu|(A_n) < +\infty$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|\mu|\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|\mu|(A_n) < \frac{\varepsilon}{8C} \leq \frac{\varepsilon}{8} .$$

Para cada $1\leq n\leq n_0$ $\lim_m|\mu|(A_n\setminus K_m^n) = 0$ y por tanto existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|\mu|(A_n \setminus K^n_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{4Cn_0} \qquad \text{para} \quad 1 \leq n \leq n_0 .$$

Para $1 \leq n \leq n_0$ $\lim_k \left| \langle \mu(K^n_{m_0}) , x''_n - \sum_{j=1}^{k} \langle e'_j, x''_n \rangle e''_j \rangle \right| = 0$ (debido a la observación (b) hecha anteriormente), y por ello existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \langle \mu(K^n_{m_0}) , x''_n - \sum_{j=1}^{j_0+h} \langle e'_j, x''_n \rangle e''_j \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{4n_0} \qquad \forall h \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq n \leq n_0 .$$

Y así si $k \geq n_0 + m_0 + j_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle \mu, \tau - \phi_k \rangle| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mu(A_n), x''_n \rangle - \int_I \phi_k(t)\, d\mu \right| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} \left| \langle \mu(A_n), x''_n \rangle - \int_{A_n} \phi_k(t)\, d\mu \right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\langle \mu(A_n), x''_n \rangle| + \\
&+ \left| \int_{\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n} \phi_k(t)\, d\mu \right| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} \left| \langle \mu(K^n_{m_0}), x''_n \rangle - \int_{K^n_{m_0}} \phi_k(t)\, d\mu \right| + \sum_{n=1}^{n_0} |\langle \mu(A_n \setminus K^n_{m_0}), x''_n \rangle| + \\
&+ \sum_{n=1}^{n_0} \left| \int_{A_n \setminus K^n_{m_0}} \phi_k(t)\, d\mu \right| + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} \left| \langle \mu(K^n_{m_0}), x''_n \rangle - \langle \mu(K^n_{m_0}), \sum_{j=1}^{k-n+1} \langle e'_j, x''_n \rangle e''_j \rangle \right| + \\
&+ \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{4n_0} + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{4Cn_0} \cdot C + \frac{\varepsilon}{4} = \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left| \langle \mu(K^n_{m_0}), \ x''_n - \sum_{j=1}^{k-n+1} \langle e'_j, x''_n \rangle e''_j \rangle \right| + \frac{3\varepsilon}{4} < \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{4n_0} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ya que si $1 \leq n \leq n_0$ entonces $k-n+1 \geq k-n_0+1 \geq m_0+j_0$.

Lema 2: Sea E un espacio de Banach con base incondicional reductora, sea $I=[0,1]$ sea Σ_0 la σ-álgebra de Borel de I y sea H el subespacio de C(I,E)" formado por los elementos de C(I,E)" que son límite débil* de una sucesión débilmente de Cauchy de C(I,E). Entonces si $(\mu_n) \subset$ rcabv(Σ_o,E') es una sucesión que converge a cero σ(C(I,E)',H), el conjunto $\{|\mu_n| : n\in\mathbb{N}\} \subset$ rcabv(Σ_o) es uniformemente contablemente aditivo.

<u>Demostración</u>: Como $H \supset C(I,E)$ la sucesión (μ_n) está acotada en rcabv(Σ_o,E'). Si suponemos que $\{|\mu_n| : n\in\mathbb{N}\}$ no es uniformemente contablemente aditivo (por VI.2.13. de [11]) existe $\varepsilon>0$, existe una sucesión de abiertos disjuntos $(A_n) \subset I$ y existe una subsucesión de (μ_n) (que seguimos notando igual) tales que

(1) $$|\mu_n|(A_n) > \varepsilon \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Por el lema de Rosenthal (ver I.4.1. de [11]) existe una sucesión estrictamente creciente $(n_i) \subset \mathbb{N}$ tal que

(2) $$|\mu_{n_i}|\Big(\bigcup_{j\neq i} A_{n_j}\Big) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall i\in\mathbb{N}.$$

Es fácil ver que si $\mu \in$ rcabv(Σ_o,E') y A es un abierto de I entonces

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{\Big|\int_A g\, d\mu\Big| : g=\sum_{i=1}^{r} \chi_{B_i} x_i \in S(\Sigma_o,E) \text{ con } (B_i)_{i=1}^{r} \text{ abiertos disjuntos de I tales que } \bigcup_{i=1}^{r} B_i \subset A, \text{ y } (x_i)_{i=1}^{r} \subset B(E)\Big\},$$

por ello para cada $i\in\mathbb{N}$ existe $g_i=\sum_{k=1}^{r_i} \chi_{B_k^i} x_k^i \in S(\Sigma_o,E)$ tal que $(B_k^i)_{k=1}^{r_i}$ son abiertos disjuntos de I con $\bigcup_{k=1}^{r_i} B_k^i \subset A_{n_i}$, $(x_k^i) \subset B(E)$ y

$$|\mu_{n_i}|(A_{n_i}) < \Big|\int_{A_{n_i}} g_i \, d\mu_{n_i}\Big| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto tenemos que

(3) $$\left| \int_{A_{n_i}} g_i \, d\mu_{n_i} \right| > \frac{2\varepsilon}{3} \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definimos $\tau \in C(I,E)''$ de la siguiente manera

$$\langle \mu , \tau \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_{n_i}} g_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r_i} \langle x_k^i , \mu(B_k^i) \rangle \qquad \forall \mu \in \mathrm{rcabv}(\Sigma_0, E').$$

Entonces, según el lema 1, $\tau \in H$.

Pero para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|\langle \mu_{n_i} , \tau \rangle| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_{n_j}} g_j \, d\mu_{n_i} \right| \geq$$

$$\geq \left| \int_{A_{n_i}} g_i \, d\mu_{n_i} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \int_{A_{n_j}} g_j \, d\mu_{n_i} \right| \geq$$

$$\geq \frac{2\varepsilon}{3} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} |\mu_{n_i}|(A_{n_j}) = \frac{2\varepsilon}{3} - |\mu_{n_i}| \left(\bigcup_{j \neq i} A_{n_j} \right) > \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}$$

y esto contradice que $\mu_n \longrightarrow 0 \ \sigma(C(I,E)',H)$.

. . . .

<u>Demostración de 8.8.</u>: Sea (e_n) una base incondicional normalizada reductora de E, y sea

$$C = \sup \{ \|P_\sigma\| : \sigma \subset \mathbb{N} \}.$$

Para demostrar que C(K,E) tiene la P.D. para todo compacto K basta comprobar, según 8.5., que C([0,1],E) la tiene.

Sean I, Σ_0 y H como en el lema 2. Para probar que C(I,E) tiene la P.D., puesto que es un espacio separable, es suficiente demostrar que toda sucesión acotada en C(I,E)' que converge a cero $\sigma(C(I,E)',H)$ converge también $\sigma(C(I,E)',C(I,E)'')$ (ver nota 1, p. 161, de [19]).

Sea (μ_n) una sucesión contenida en la bola unidad de C(I,E)' que converge a cero $\sigma(C(I,E)',H)$.

Sea $\lambda(.) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_n|(.)}{1+|\mu_n|(I)}$, $\lambda\in rcabv(\Sigma_0)$ y es no negativa.

Como E' tiene la propiedad de Radon-Nikodym por ser un dual separable, y μ_n es absolutamente continua respecto de λ para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $(\tilde{\phi}_n)\subset L^1(\lambda,E')$ tal que

$$\mu_n(.) = \int_{(.)} \tilde{\phi}_n \, d\lambda \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sea, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\bar{\phi}_n\in S(\Sigma_0,E')$ tal que $\| \tilde{\phi}_n - \bar{\phi}_n \|_1 < 1/2n$.

Como (e_j') es base de Schauder de E' se puede comprobar fácilmente que si $\bar{\phi}\in S(\Sigma_0,E')$, dado $\varepsilon>0$ existe $\phi\in S(\Sigma_0,E')$ con $\phi(I)\subset[(e_j')_1^s]$ para algún $s\in\mathbb{N}$, tal que $\|\phi - \bar{\phi}\|_1<\varepsilon$. Por tanto, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $s_n\in\mathbb{N}$ y existe $\phi_n\in S(\Sigma_0,E')$ tales que

$$\phi_n(I)\subset[(e_j')_{j=1}^{s_n}] \qquad \text{y} \qquad \|\bar{\phi}_n - \phi_n\|_1< 1/2n.$$

Con lo cual $\|\tilde{\phi}_n - \phi_n\|_1 < 1/n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y como $(\tilde{\phi}_n)$ converge a cero $\sigma(C(I,E)',H)$ tenemos que (ϕ_n) converge a cero $\sigma(C(I,E)',H)$.

Para probar que $\mu_n \longrightarrow 0$ $\sigma(C(I,E)',C(I,E)'')$ bastará probar que $\phi_n \longrightarrow 0$ $\sigma(L^1(\lambda,E'),L^1(\lambda,E')')$.

Supongamos que (ϕ_n) no converge a cero $\sigma(L^1(\lambda,E'),L^1(\lambda,E')')$ entonces, teniendo en cuenta que $L^1(\lambda,E')'$ es isométricamente isomorfo a $L(L^1(\lambda),E'')$ (ver p.e. VIII.2.2. de [11]), existe $\tau\in L(L^1(\lambda),E'') \simeq L^1(\lambda,E')'$, existe $\varepsilon>0$ y existe una subsucesión de (ϕ_n) (que seguimos notando igual) tales que

(1) $$|\langle \phi_n, \tau\rangle| > \varepsilon \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Para cada $j\in\mathbb{N}$ la aplicación $\langle e_j', \tau(.)\rangle : L^1(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continua, y por tanto pertenece a $L^1(\lambda)'\simeq L^\infty(\lambda)$. Sea $g_j\in L^\infty(\lambda)$

tal que

$$\langle e'_j, \tau(f)\rangle = \int_I f(t)g_j(t)\, d\lambda \qquad \forall f\in L^1(\lambda),$$

es claro que $\|g_j\|_\infty \leq \|\tau\|$.

Si $\phi=\sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i} x'_i \in S(\Sigma_0,E')$ y $\phi(I)\subset [(e'_j)_{j=1}^{s}]$ entonces

$$\langle \phi, \tau\rangle = \int_I \langle \phi(t), \sum_{j=1}^{s} g_j(t)e''_j\rangle\, d\lambda$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle \phi, \tau\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i} x'_i, \tau\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle x'_i, \tau(\chi_{A_i})\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle \sum_{j=1}^{s} \langle x'_i, e''_j\rangle e'_j, \tau(\chi_{A_i})\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \langle x'_i, e''_j\rangle \langle e'_j, \tau(\chi_{A_i})\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} \langle x'_i, e''_j\rangle \int_I \chi_{A_i}(t) g_j(t)\, d\lambda = \\
&= \sum_{j=1}^{s} \int_I \langle \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i}(t) x'_i, g_j(t)e''_j\rangle\, d\lambda = \\
&= \sum_{j=1}^{s} \int_I \langle \phi(t), g_j(t)e''_j\rangle\, d\lambda = \int_I \langle \phi(t), \sum_{j=1}^{s} g_j(t)e''_j\rangle\, d\lambda .
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$(2) \qquad |\langle \phi_n, \tau\rangle| = \left|\int_I \langle \phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} g_j(t)e''_j\rangle\, d\lambda\right| > \varepsilon \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Sea $\sigma\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ y consideremos la aplicación

$$P''_\sigma\circ \tau \;:\; L^1(\lambda) \xrightarrow{\tau} E'' \xrightarrow{P''_\sigma} [(e''_j)_{j\in\sigma}] \subset E''$$

$P''_\sigma \circ \tau \in L(L^1(\lambda), [(e''_j)_{j\in\sigma}]) \simeq (L^1(\lambda, [(e'_j)_{j\in\sigma}]))' \simeq L^\infty(\lambda, [(e''_j)_{j\in\sigma}])$

La aplicación $\sum_{j\in\sigma} g_j(.)e''_j \in L^\infty(\lambda, [(e''_j)_{j\in\sigma}])$ verifica que

$$\langle \phi, P''_\sigma \circ \tau \rangle = \int_I \langle \phi(t), \sum_{j\in\sigma} g_j(t)e''_j \rangle \, d\lambda \qquad \forall \phi \in L^1(\lambda, [(e'_j)_{j\in\sigma}])$$

En efecto: Sea $\phi \in S(\Sigma_o, [(e'_j)_{j\in\sigma}])$, $\phi = \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i} x'_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \phi, P''_\sigma \circ \tau \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} \chi_{A_i} x'_i, P''_\sigma \circ \tau \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle x'_i, P''_\sigma \circ \tau(\chi_{A_i}) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle x'_i, \sum_{j\in\sigma} \langle e'_j, \tau(\chi_{A_i}) \rangle e''_j \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle x'_i, \sum_{j\in\sigma} \left(\int_I \chi_{A_i}(t) g_j(t) \, d\lambda \right) e''_j \rangle = \\
&= \sum_{j\in\sigma} \sum_{i=1}^{r} \int_I \left(\chi_{A_i}(t) g_j(t) \langle x'_i, e''_j \rangle \right) d\lambda = \\
&= \sum_{j\in\sigma} \sum_{i=1}^{r} \int_I \langle \chi_{A_i}(t) x'_i, g_j(t) e''_j \rangle \, d\lambda = \\
&= \sum_{j\in\sigma} \int_I \langle \phi(t), g_j(t) e''_j \rangle \, d\lambda = \int_I \langle \phi(t), \sum_{j\in\sigma} g_j(t) e''_j \rangle \, d\lambda .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3) \qquad \| \sum_{j\in\sigma} g_j(.)e''_j \|_\infty = \| P''_\sigma \circ \tau \| \leq \| P''_\sigma \| \, \|\tau\| \leq C \, \|\tau\|.$$

Como $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ es numerable podemos suponer (cambiando las funciones en conjuntos de medida λ-nula si es preciso) que, para cada $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$

$$\| \sum_{j\in\sigma} g_j(.)e''_j \|_\infty = \sup_{t\in I} \| \sum_{j\in\sigma} g_j(t)e''_j \|$$

En particular, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\| g_j(.)e''_j \|_\infty = \sup_{t\in I} \| g_j(t)e''_j \| = \sup_{t\in I} |g_j(t)| \, \|e''_j\| = \sup_{t\in I} |g_j(t)| \leq C \, \|\tau\|.$$

Luego $g_j \in B(\Sigma_o)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea, para cada $j \in \mathbb{N}$, $h_j \in S(\Sigma_o)$ tal que

(4) $$\| g_j - h_j \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2^{j+3}}$$

Por el lema 2 el conjunto $\{ |\mu_n| : n \in \mathbb{N} \}$ es uniformemente contablemente aditivo, y por tanto

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \int_A \| \tilde{\phi}_n(t) \| \, d\lambda = 0 \text{ uniformemente en } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\| \tilde{\phi}_n - \phi_n \|_1 < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene también que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \int_A \| \phi_n(t) \| \, d\lambda = 0 \text{ uniformemente en } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto existe $\delta > 0$ tal que

(5) $$\int_A \| \phi_n \| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{4(\varepsilon + C\|z\|)} \qquad \forall A \in \Sigma_o \text{ con } \lambda(A) < \delta$$

y podemos suponer $\delta < \lambda(I)$.

Por el lema 5.3. para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un compacto $K_n \subset I$ tal que

$$\lambda(I \setminus K_n) < \frac{\delta}{2^n} \qquad \text{y} \qquad h_n\big|_{K_n} \text{ es continua.}$$

Sea $K_o = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, entonces $\lambda(I \setminus K_o) < \delta$ y, por ser $\delta < \lambda(I)$, $K_o \neq \emptyset$.
Llamemos $\tilde{f}_n = h_n\big|_{K_o} \in C(K_o)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La serie $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j(.)e_j$ es débilmente incondicionalmente convergente en $C(K_o,E)$. En efecto: Si $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, teniendo en cuenta (3) y (4),

$$\Big\| \sum_{j\in\sigma} \tilde{f}_j(.)e_j \Big\| = \sup_{t\in K_o} \Big\| \sum_{j\in\sigma} \tilde{f}_j(t)e_j \Big\| = \sup_{t\in K_o} \Big\| \sum_{j\in\sigma} h_j(t)e_j \Big\| =$$

$$= \sup_{t\in K_0} \Big\| \sum_{j\in\sigma} h_j(t)e_j'' \Big\| \leq \sup_{t\in I} \Big\| \sum_{j\in\sigma} h_j(t)e_j'' \Big\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in I} \sum_{j\in\sigma} |h_j(t)-g_j(t)| \, \|e_j''\| + \sup_{t\in I} \Big\| \sum_{j\in\sigma} g_j(t)e_j'' \Big\| \leq$$

$$\leq \sum_{j\in\sigma} \frac{\varepsilon}{2^{j+3}} + C\|\tau\| < \varepsilon + C\|\tau\|.$$

Hemos probado también que

$$(6) \qquad \sup_{t\in I} \Big\| \sum_{j\in\sigma} h_j(t)e_j'' \Big\| < \varepsilon + C\|\tau\| \qquad \forall\sigma\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N}).$$

Como I es metrizable y K_o es no vacío el teorema de Borsuk-Dugundji (5.2.) nos dice que existe un operador extensión

$$S : C(K_o,E) \longrightarrow C(I,E)$$

con $\|S\| = 1$ tal que

a) $S(\phi)(t) = \phi(t) \quad \forall t\in K_o, \quad \forall\phi\in C(K_o,E)$

b) Para cada $\phi\in C(K_o,E)$ los valores que toma $S(\phi)$ pertenecen a la envoltura convexa de $\phi(K_o)$.

Llamemos $f_j = S(\tilde{f}_j(.)e_j) \quad \forall j\in\mathbb{N}$. Por (b) $f_j(I)\subset[\{e_j\}]$. Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j(.)e_j$ es débilmente incondicionalmente convergente en $C(K_o,E)$ se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(.)$ es débilmente incondicionalmente convergente en $C(I,E)$, y por tanto existe $\rho\in C(I,E)''$ tal que

$$\rho = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(.) \quad \text{para } \sigma(C(I,E)'',C(I,E)').$$

Puesto que $f_j(I)\subset[\{e_j\}] \ \forall j\in\mathbb{N}$, para cada $\phi\in L^1(\lambda,E')$ tal que $\phi(I)\subset[(e_j')_{j=1}^{r}]$, se tiene

$$\langle\phi,\rho\rangle = \lim_m \langle\phi, \sum_{j=1}^{m} f_j\rangle = \lim_m \int_I \langle \sum_{j=1}^{m} f_j(t), \phi(t)\rangle \, d\lambda =$$

$$= \int_I \langle \sum_{j=1}^{r} f_j(t), \phi(t)\rangle \, d\lambda.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (2) (4) (5) y (6), y que $\|\phi_n\|_1 \leq \|\phi_n - \tilde{\phi}_n\|_1 + \|\tilde{\phi}_n\|_1 \leq 1/n + 1 \leq 2$; para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\varepsilon < |<\phi_n, \tau>| = \left| \int_I <\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} g_j(t) e_j''> d\lambda \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_I <\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} (g_j(t) - h_j(t)) e_j''> d\lambda \right| + \left| \int_I <\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} h_j(t) e_j''> d\lambda \right|$$

$$\leq \left(\sup_{t\in I} \sum_{j=1}^{s_n} |g_j(t) - h_j(t)| \, \|e_j''\| \right) \|\phi_n\|_1 +$$

$$+ \int_{I\setminus K_0} |<\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} h_j(t) e_j''>| \, d\lambda + \left| \int_{K_0} <\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} h_j(t) e_j''> d\lambda \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} + (\varepsilon + C\|\tau\|) \frac{\varepsilon}{4(\varepsilon + C\|\tau\|)} + \left| \int_{K_0} <\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} h_j(t) e_j''> d\lambda \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \left| \int_{K_0} <\phi_n(t), \sum_{j=1}^{s_n} \tilde{f}_j(t) e_j''> d\lambda \right| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{K_0} < \sum_{j=1}^{s_n} \tilde{f}_j(t) e_j, \phi_n(t)> d\lambda \right| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{K_0} < \sum_{j=1}^{s_n} f_j(t), \phi_n(t)> d\lambda \right|$$

Luego

$$\left| \int_{K_0} < \sum_{j=1}^{s_n} f_j(t), \phi_n(t)> d\lambda \right| > \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|<\phi_n, \rho>| = \left| \int_I < \sum_{j=1}^{s_n} f_j(t), \phi_n(t)> d\lambda \right| \geq$$

$$\geq \left| \int_{K_0} < \sum_{j=1}^{s_n} f_j(t), \phi_n(t)> d\lambda \right| - \int_{I\setminus K_0} \|\phi_n(t)\| \, \left\| \sum_{j=1}^{s_n} f_j(t) \right\| d\lambda$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{2} - \left(\sup_{t\in I} \left\| \sum_{j=1}^{s_n} f_j(t) \right\| \right) \int_{I\setminus K_0} \|\phi_n(t)\| \, d\lambda =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} - \left\| S\left(\sum_{j=1}^{s_n} \tilde{f}_j(\cdot)e_j\right)\right\| \int_{I\setminus K_0} \|\phi_n(t)\|\, d\lambda \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{2} - \|S\| \left\|\sum_{j=1}^{s_n} \tilde{f}_j(\cdot)e_j\right\| \frac{\varepsilon}{4(\varepsilon+c\|\tau\|)} \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Es decir $|\langle\phi_n, \rho\rangle| > \frac{\varepsilon}{4}$ $\forall n\in\mathbb{N}$; pero $\rho\in H$ y esto contradice que $\phi_n \longrightarrow 0$ $\sigma(C(I,E)',H)$.

8.9. Nota: El ejemplo de Talagrand $\mathfrak{T}$ (6.9.) tiene base incondicional reductora y por ello $C(K,\mathfrak{T})$ tiene la P.D. cualquiera que sea el compacto K.

8.10. Proposición: Si E' y E" tienen la propiedad de Radon-Nikodym entonces C(K,E) tiene la P.D. para todo compacto K.

Demostración: Como E' tiene la propiedad de Radon-Nikodym E no posee ningún subespacio isomorfo a ℓ^1 ([11] pág. 219) y por tanto E tiene la P.D.

Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador que transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes, entonces T es incondicionalmente convergente y, por 2.2., su medida asociada "m" verifica:

i) $m(\Sigma) \subset L(E,F)$

ii) $\tilde{m}$ es continua en $\emptyset$

Debido al teorema 5.5. y a que $m(A)= \tilde{T}\cdot \tau_A$ (donde $\tau_A : E \longrightarrow B(\Sigma,E)$ es el operador definido por $\tau_A(x)= \chi_A x$) también se tiene que

iii) $m(A): E \longrightarrow F$ transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes, para todo $A\in\Sigma$

y como E tiene la P.D.

iv) $m(A): E \longrightarrow F$ es débilmente compacto para todo $A \in \Sigma$.

Las condiciones (i),(ii) y (iv) caracterizan los operadores débilmente compactos definidos en C(K,E) cuando E' y E" tienen la propiedad de Radon-Nikodym (teorema 4.1. de [9]). Por tanto T es débilmente compacto y C(K,E) tiene la P.D.

8.11. Nota: Como los espacios que tienen la P.D. tienen también la R.P.D.P. una consecuencia inmediata de 8.8. y 8.10. son los resultados 7.8. y 7.9. enunciados en la sección anterior.

8.12. Nota: Por último hemos de decir que si hubiera buenas caracterizaciones de los conjuntcs débilmente compactos de C(K,E)' esto contribuiría en gran manera a resolver cuándo el espacio C(K,E) tiene alguna de las propiedades estudiadas en este capítulo. Sin embargo hasta el momento no se conocen criterios generales manejables, y como afirman algunos autores (por ejemplo Diestel en [10]) pueden no existir. Solamente en el caso en que E' y E" tienen la propiedad de Radon-Nikodym se ha probado que los conjuntos débilmente compactos de C(K,E)' se pueden caracterizar por la versión vectorial natural de la caracterización en el caso escalar (de ahí que hayamos podido dar una demostración bastante sencilla de la proposición 8.10.). Pero esta caracterización no se puede ampliar a otros casos ya que Fierro ha probado en [15,16] que es necesario que E' y E" tengan la propiedad de Radon-Nikodym para que sea válida la caracterización mencionada.

CAPITULO IV

Continuamos con nuestro estudio sobre el espacio C(K,E).

Además de Grothendieck otro autor cuya aportación al conocimiento de la estructura de los espacios C(K) ha sido clave fué Pelczynski. En 1962 axiomatizó otra de las propiedades de estos espacios: la propiedad V. Y tres años mas tarde publicó junto con Szlenk un artículo [30] que contribuyó decisivamente a caracterizar cuándo todos los subespacios cerrados de un C(K) tienen la P.D.P.

Estudiamos en este capítulo cuándo C(K,E) es hereditariamente Dunford-Pettis y cuándo tiene la propiedad V.

9. C(K,E) hereditariamente Dunford-Pettis

En [19] Grothendieck probó que todo subespacio cerrado de c_o tiene la P.D.P. Esto planteó la cuestión de estudiar qué otros espacios tienen esta buena propiedad. Siguiendo a Diestel [10] damos la siguiente definición

9.1. Definición: Un espacio de Banach es hereditariamente Dunford - Pettis (hereditariamente D.P.) si todos sus subespacios cerrados tienen la P.D.P.

Aparte de c_o otros ejemplos claros de espacios hereditariamente D.P. son los espacios de Schur.

Hay que destacar que "ser hereditariamente D.P." es la única propiedad de las estudiadas en los capítulos III y IV que no la poseen todos los C(K). Diestel en [10, pág. 27] recoge una caracterización de los C(K) que son hereditariamente D.P.. Se debe fundamentalmente a Pelczynski y Szlenk [30]. Antes de enunciarla necesitamos dar una definición:

Si K es un compacto y designamos por K' al conjunto de sus puntos de acumulación, para cada número ordinal α, se define el conjunto α-derivado de K por inducción transfinita:

$$K^{(0)} = K, \quad K^{(1)} = K', \quad K^{(\alpha+1)} = \left(K^{(\alpha)}\right)' \quad \text{y} \quad K^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} K^{(\alpha)}$$

si λ es un ordinal no compacto. En concreto si ω es el primer ordinal infinito

$$K^{(\omega)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K^{(n)}.$$

9.2. Teorema [10]: C(K) es hereditariamente D.P. si y sólo si K es disperso y su conjunto ω-derivado es vacío.

Vamos a utilizar un par de resultados conocidos para obtener una caracterización de los espacios hereditariamente D.P. que nos será muy útil en lo que sigue, y que nos permitirá asegurar que el ejemplo de Talagrand (6.9.), entre otros, es un espacio hereditariamente D.P.

9.3. Teorema [10] (Principio de selección de Bessaga-Pelczynski):

Si (x_n) es una sucesión en un espacio de Banach que converge a cero débilmente pero no en norma, entonces (x_n) posee una subsucesión (y_n) que es base de Schauder de $\overline{[(y_n)]}$.

9.4. Teorema [10]: Si (x_n) es una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, que converge a cero débilmente y tal que ninguna subsucesión suya es equivalente a la base canónica de c_o, entonces existe una subsucesión (y_n) de (x_n) tal que $\overline{[(y_n)]}$ no tiene la P.D.P.

9.5. Proposición: Un espacio de Banach E es hereditariamente D.P. si y sólo si toda sucesión que converge a cero débilmente en E pero no en norma posee una subsucesión equivalente a la base canónica de c_o.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $(x_n) \subset E$ una sucesión que converge a cero débilmente pero no en norma, entonces existe una subsucesión (y_n) de (x_n) tal que

$$0 < \delta = \inf_n \|y_n\| \leq \sup_n \|y_n\| = N < +\infty$$

La sucesión $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)$ converge a cero débilmente pero no en norma. Por el principio de selección de Bessaga-Pelczynski podemos extraer una subsucesión (z_n) de $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)$ que es una sucesión básica. Como E es hereditariamente D.P., por 9.4., (z_n) posee una subsucesión, (ω_n), que es equivalente a la base canónica de c_o; es decir, existen dos constantes positivas m y M tales que

$$(1) \qquad m \max_{1\leq n\leq r} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n \omega_n \right\| \leq M \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$

Puesto que (ω_n) es una subsucesión de $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \geq n$, tal que $\omega_n = \dfrac{y_{k_n}}{\|y_{k_n}\|}$

Así, para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$, se tiene

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_{k_n} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n \|y_{k_n}\| \left(\frac{y_{k_n}}{\|y_{k_n}\|}\right) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{r} (a_n \|y_{k_n}\|)\, \omega_n \right\|$$

Con lo cual, teniendo en cuenta (1),

$$m\cdot\delta\cdot\max_{1\leq n\leq r}|a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_{k_n} \right\| \leq MN \max_{1\leq n\leq r}|a_n|$$

Por tanto (y_{k_n}) es equivalente a la base canónica de c_0.

$\Leftarrow$) Sea F un subespacio vectorial cerrado de E. Sean $(x_n)\subset F$ y $(x'_n)\subset F'$ dos sucesiones que convergen a cero débilmente.

Si (x_n) converge a cero en norma es claro que $\langle x_n, x'_n\rangle \longrightarrow 0$. En caso contrario existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que es equivalente a la base canónica de c_0; entonces $\overline{[(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}]}$ es isomorfo a c_0 y, por tanto, $\overline{[(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}]}'$ es isomorfo a ℓ^1.
La sucesión (x_{n_k}) converge a cero débilmente en $\overline{[(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}]}$ y la sucesión $\left(x'_{n_k}\big|_{\overline{[(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}]}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero débilmente en $\overline{[(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}]}'$; como c_0 tiene la P.D.P. se tiene, por 6.3., que $\langle x_{n_k}, x'_{n_k}\rangle \longrightarrow 0$ cuando $k\longrightarrow\infty$.

Así, de 6.3. se sigue que F tiene la P.D.P. y por tanto E es hereditariamente D.P.

9.6. Nota: Obsérvese que debido a la proposición anterior el ejemplo de Talagrand (6.9.) es un espacio hereditariamente D.P. (ver 6.9.(a) ó [39, teorema 1]). También se deduce de esta proposición que el famoso ejemplo construido por Hagler [20] es hereditariamente D.P. (ver [20] teorema 1.(a)).

Nos preguntamos ahora qué espacios C(K,E) son hereditariamente D.P.. Veamos en primer lugar que podemos reducir el problema a estudiar cuándo $c_o(E)$ lo es.

Pero antes recordemos algunos resultados que necesitaremos utilizar:

9.7. Nota: Considerando los ordinales como espacios topológicos con la topología del orden se tiene:

a) Cada ordinal compacto infinito es homeomorfo a un ordinal de la forma $\omega^{\alpha}\cdot m+1$ con $m<\omega$ (8.6.5. de [36]).

b) Si un ordinal γ es de la forma $\gamma=\omega^{\alpha}\cdot m+1$ entonces $\gamma^{(\alpha)}$ consta exactamente de m puntos y $\gamma^{(\alpha+1)}=\emptyset$ (8.6.6. de [36]).

c) Si γ_1 y γ_2 son dos ordinales compactos tales que $\omega\leq\gamma_1<\omega_1$ y $\gamma_1\leq\gamma_2<\gamma_1^{\omega}$ (donde ω_1 es el primer ordinal no contable), y si E es un espacio de Banach; entonces $C(\gamma_1,E)$ es isomorfo a $C(\gamma_2,E)$ (lema 2 de [5]).

9.8. Teorema: C(K,E) es hereditariamente D.P. si y sólo si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

a) K es finito y E es hereditariamente D.P.

b) C(K) y $c_o(E)$ son hereditariamente D.P.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si C(K,E) es hereditariamente D.P., tanto C(K) como E lo son también por ser isomorfos a subespacios complementados de C(K,E) Si K es infinito entonces existe una sucesión infinita de abiertos disjuntos de K no vacíos (G_n). Sea $t_n\in G_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por el teorema de Urysohn, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $f_n\in B(C(K))$ tal que

$$f_n(t_n)=1 \quad y \quad f_n(G_n^c)=\{0\}.$$

Entonces la aplicación $S: c_o(E)\longrightarrow C(K,E)$ definida por

$$S((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n \qquad \forall (x_n)\in c_o(E)$$

es una isometría sobre su imagen, y por tanto $c_0(E)$ es hereditariamente D.P.

$\Leftarrow$) Si K es finito y E es hereditariamente D.P. es claro, por la proposición 9.5., que C(K,E) también lo es.

Si K es infinito y C(K) es hereditariamente D.P. entonces, por 9.2., K es disperso y $K^{(\omega)}=\emptyset$. Sea $(\phi_n)\subset C(K,E)$ una sucesión que converge a cero débilmente con $\inf_n \|\phi_n\| > 0$; entonces, por 6.4., existe un cociente metrizable de K, $\tilde{K}$, y existe $(\tilde{\phi}_n)\subset C(\tilde{K},E)$ tal que

$$(1) \qquad \tilde{\phi}_n(\pi(t)) = \phi_n(t) \qquad \forall t\in K, \quad \forall n\in \mathbb{N}$$

donde $\pi: K \longrightarrow \tilde{K}$ es la proyección canónica.

En general si K_1 y K_2 son dos compactos y $\varphi: K_1 \longrightarrow K_2$ es una aplicación continua y sobre, entonces $K_2^{(\omega)} \subset \varphi(K_1^{(\omega)})$ (ver 8.5.10. C de [36]).

En nuestro caso, como $K^{(\omega)}=\emptyset$, tenemos que $\tilde{K}^{(\omega)}=\emptyset$.

Por otra parte como $\tilde{K}$ es disperso y metrizable (por 3.2.(a)), de 3.3. se deduce que $\tilde{K}$ es homeomorfo a un ordinal compacto contable γ.

A) Si $\tilde{K}$ es finito entonces $C(\tilde{K},E)$ es claramente hereditariamente D.P.; y como por (1) y 4.1., la sucesión $(\tilde{\phi}_n)$ converge a cero débilmente pero no en norma, de 9.5. se sigue que $(\tilde{\phi}_n)$ posee una subsucesión $(\tilde{\phi}_{n_k})$ equivalente a la base canónica de c_0. Entonces, por (1) la sucesión (ϕ_{n_k}) es equivalente a la base canónica de c_0.

B) Si $\tilde{K}$ es infinito entonces γ también lo es y así, por el apartado (a) de la nota anterior, γ es homeomorfo a un ordinal de la forma $\omega^{\alpha}m+1=\beta$. Por el apartado (b) de la nota sabemos que $\beta^{(\alpha)}\neq\phi$ y $\beta^{(\alpha+1)}=\phi$ y por ello, como $\gamma^{(\omega)}=\phi$, tenemos que $\alpha<\omega$. Por tanto

$\omega+1 \leq \beta = \omega^{\alpha} m+1 < (\omega+1)^{\omega}$. Aplicando el resultado (c) de 9.7. concluimos que $C(\omega+1,E)$ es isomorfo a $C(\beta,E)$. Pero β es homeomorfo a $\tilde{K}$ y $C(\omega+1,E)$ es isomorfo a $c_o(E)$ (ver 21.5.9. de [36]), por lo tanto $C(\tilde{K},E)$ es isomorfo a $c_o(E)$. Como por hipótesis $c_o(E)$ es hereditariamente D.P., $C(\tilde{K},E)$ también lo es. Haciendo ahora el mismo razonamiento que en el caso (A) deducimos que existe una subsucesión de (ϕ_n) que es equivalente a la base canónica de c_o.

Y así queda demostrado que $C(K,E)$ es hereditariamente D.P.

Una vez reducido el problema a $c_o(E)$ veamos cuándo este espacio es hereditariamente D.P.

<u>9.9. Teorema</u>: Sea E un espacio hereditariamente D.P. que verifica

(*) Existe $M>0$ tal que toda sucesión $(x_n) \subset E$ que converge a cero débilmente pero no en norma posee una subsucesión (y_n) equivalente a la base canónica de c_o tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_n \right\| \leq M \max_{1\leq n\leq r} |a_n| \sup_n \|y_n\|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

Entonces $c_o(E)$ es hereditariamente D.P.

<u>Nota</u>: observemos que, por la proposición 9.5., si E es hereditariamente D.P. toda sucesión que converge a cero débilmente en E pero no en norma posee una subsucesión equivalente a la base canónica de c_o; por ello la condición (*) lo único que pide es que se puedan elegir las subsucesiones equivalentes a la base canónica de c_o con cierta "regularidad".

<u>Demostración del teorema</u>: Antes de comenzar recordemos que el dual

de $c_o(E)$ se puede identificar de forma canónica con el espacio $\ell^1(E')$ de las sucesiones $(x'_n) \subset E'$ absolutamente sumables, dotado de la norma $\|(x'_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|$.

Llamemos $c_{oo}(E)$ al subespacio de $c_o(E)$ formado por las sucesiones casi nulas (es decir, que tienen sólo un número finito de términos distintos de cero). Es claro que $c_{oo}(E)$ es denso en $c_o(E)$.

Hemos de probar que toda sucesión $(x^n) = ((x_i^n)_{i=1}^{\infty}) \subset c_o(E)$ convergente a cero débilmente pero no en norma posee una subsucesión equivalente a la base canónica de c_o.

Haremos la demostración en varios pasos.

1) Podemos suponer $(x^n) \subset c_{oo}(E)$.

En efecto: Sea $(x^n) \subset c_o(E)$ una sucesión que converge a cero débilmente pero no en norma. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y^n \in c_{oo}(E)$ tal que $\| x^n - y^n \| < 1/2^n$; entonces $(y^n) \subset c_{oo}(E)$ converge a cero débilmente pero no en norma. Si (y^n) posee una subsucesión (y^{n_k}) equivalente a la base canónica de c_o, es decir, si existen dos constantes positivas c y C tales que

$$c \max_{1 \leq k \leq r} |a_k| \leq \left\| \sum_{k=1}^{r} a_k y^{n_k} \right\| \leq C \max_{1 \leq k \leq r} |a_k|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{r}$;

entonces $(x^{n_k})_{k \geq k_o}$ (donde $k_o \in \mathbb{N}$ es tal que $\sum_{k=k_o}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k}} < c/2$) es equivalente a la base canónica de c_o ya que, si $r \in \mathbb{N}$ y $(a_k)_{k=k_o}^{k_o+r}$ es una sucesión finita de escalares, se tiene

$$\frac{c}{2} \max_{k_o \leq k \leq k_o+r} |a_k| = c \max_{k_o \leq k \leq k_o+r} |a_k| - \frac{c}{2} \max_{k_o \leq k \leq k_o+r} |a_k| \leq$$

$$\leq c \max_{k_o \leq k \leq k_o+r} |a_k| - \max_{k_o \leq k \leq k_o+r} |a_k| \left(\sum_{k=k_o}^{k_o+r} \|x^{n_k} - y^{n_k}\| \right) \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=k_0}^{k_0+r} a_k y^{n_k} \right\| - \left\| \sum_{k=k_0}^{k_0+r} a_k (x^{n_k} - y^{n_k}) \right\| \leq \left\| \sum_{k=k_0}^{k_0+r} a_k x^{n_k} \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=k_0}^{k_0+r} a_k (x^{n_k} - y^{n_k}) \right\| + \left\| \sum_{k=k_0}^{k_0+r} a_k y^{n_k} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \max_{k_0 \leq k \leq k_0+r} |a_k| + C \max_{k_0 \leq k \leq k_0+r} |a_k| = \left(\frac{\varepsilon}{2} + C \right) \max_{k_0 \leq k \leq k_0+r} |a_k|$$

es decir,

$$\frac{\varepsilon}{2} \max_{k_0 \leq k \leq k_0+r} |a_k| \leq \left\| \sum_{k=k_0}^{k_0+r} a_k x^{n_k} \right\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + C \right) \max_{k_0 \leq k \leq k_0+r} |a_k|$$

2) Sea $(x^n) \subset c_{oo}(E)$ una sucesión que converge a cero débilmente pero no en norma, con $\|x^n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que existen $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$, $i_1 \leq i_2$, tales que $x_i^n = 0$ si $i \notin \{i_1, \ldots, i_2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces (x^n) posee una subsucesión (y^n) equivalente a la base canónica de c_o tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_n \right\| \leq (M+1) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

En efecto: Como (x^n) converge a cero débilmente pero no en norma, existe $i_o \in \{i_1, \ldots, i_2\}$ tal que $(x_{i_o}^n) \subset E$ converge a cero débilmente pero no en norma (podemos suponer $i_o = i_1$); entonces existe una subsucesión $(x_{i_1}^{\sigma_1(n)})_{n=1}^{\infty}$ de $(x_{i_1}^n)$ y existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta \max_{1 \leq n \leq r} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n x_{i_1}^{\sigma_1(n)} \right\| \leq M \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$

La sucesión $(x_{i_1+1}^{\sigma_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ o bien posee una subsucesión que converge a cero en norma y entonces podemos extraer una subsucesión suya,

$(x^{\sigma_2(n)}_{i_1+1})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\| x^{\sigma_2(n)}_{i_1+1} \| < \frac{1}{2^n} \quad \forall n\in\mathbb{N};$$

o bien posee una subsucesión $(x^{\sigma_2(n)}_{i_1+1})_{n\in\mathbb{N}}$ equivalente a la base canónica de c_0 tal que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n x^{\sigma_2(n)}_{i_1+1} \Big\| \leq M \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

En cualquiera de los dos casos tenemos que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n x^{\sigma_2(n)}_{i_1+1} \Big\| \leq (M+1) \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

De igual modo podemos extraer una subsucesión $(x^{\sigma_3(n)}_{i_1+2})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x^{\sigma_2(n)}_{i_1+2})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n x^{\sigma_3(n)}_{i_1+2} \Big\| \leq (M+1) \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

Y repitiendo el proceso $i_2-i_1=s$ veces obtenemos que la sucesión $(y^n)_{n\in\mathbb{N}} = (x^{\sigma_{s+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica lo siguiente:

para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n y^n \Big\| = \max_{i_1\leq i\leq i_2} \Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_i^n \Big\| \geq \Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_{i_1}^n \Big\| \geq \delta \max_{1\leq n\leq r} |a_n| \; ; \text{ y}$$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n y^n \Big\| = \max_{i_1\leq i\leq i_2} \Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n y_i^n \Big\| \leq (M+1) \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$ (ya que $(y_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x^{\sigma_{h+1}(n)}_{i_1+h})_{n\in\mathbb{N}}$ si $i = i_1+h$ y $0\leq h\leq s$).

Por tanto (y^n) es la subsucesión de (x^n) buscada.

Para cada $m\in\mathbb{N}$ definimos $P_m : c_o(E) \longrightarrow c_o(E)$ por

$$P_m(x_1,x_2,\dots) = (x_1,x_2,\dots,x_m,0,0,\dots) \qquad \forall x=(x_i)\in c_o(E);$$

es claro que P_m es lineal, continua y de norma 1.

3) Sea $(x^n)\subset c_{oo}(E)$ una sucesión que converge a cero débilmente pero no en norma, con $0<\delta\leqslant\|x^n\|\leqslant 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$; entonces se pueden dar dos situaciones:

A) que exista una subsucesión (y^n) de (x^n) y exista $m\in\mathbb{N}$ tal que $P_m(y^n)=y^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. En este caso, por 2), (y^n) tiene una subsucesión equivalente a la base canónica de c_o; o bien

B) que se de la situación contraria. Entonces podemos extraer una subsucesión (y^n) de (x^n) tal que, si r_n es el menor natural que verifica $P_{r_n}(y^n)=y^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, la sucesión $(r_n)\subset\mathbb{N}$ es estrictamente creciente.

Y ahora pueden ocurrir dos cosas:

B1) que para todo $i\in\mathbb{N}$ $(y_i^n)_n\subset E$ converja a cero en norma; o bien

B2) que exista $i_o\in\mathbb{N}$ tal que $(y_{i_o}^n)_n\subset E$ no converge a cero en norma.

En ambos casos vamos a construir una subsucesión de (y^n) equivalente a la base canónica de c_o y con ello habremos acabado la demostración del teorema.

Caso B1)

Sea $z^1=y^1$ y sea $s_1=r_1$. Como $(P_{s_1}(y^n))_n$ converge a cero en norma, existe $n_1\in\mathbb{N}$, $n_1>1$, tal que $\|P_{s_1}(y^{n_1})\|<\frac{\delta}{2^2}$. Sea $z^2=y^{n_1}$ y sea $s_2=r_{n_1}$. Como $(P_{s_2}(y^n))_n$ converge a cero en norma, existe $n_2\in\mathbb{N}$,

$n_2 > n_1$, tal que

$$\| P_{s_2}(y^{n_2}) \| < \frac{\delta}{2^3}$$

Sea $z^3 = y^{n_2}$ y sea $s_3 = r_{n_2}$

Reiterando el proceso obtenemos una sucesión (z^k) que es subsucesión de (y^n) tal que

i) $z^k = P_{s_k}(z^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $(s_k) \subset \mathbb{N}$ es estrictamente creciente (pues estamos en el caso B)

ii) $\| P_{s_{k-1}}(z^k) \| < \frac{\delta}{2^k} \quad \forall k > 1$

iii) $\delta < \| z^k \| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

y, como consecuencia de (i),(ii) y (iii), también se tiene

iv) $\| (P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(z^k) \| = \max\limits_{s_{k-1} < i \leq s_k} \| z_i^k \| = \max\limits_{1 \leq i \leq s_k} \| z_i^k \| = \| z^k \|$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces la sucesión (z^k) es equivalente a la base canónica de c_o. En efecto, sea $r \in \mathbb{N}$ y sea $(a_k)_{k=1}^r$ una sucesión finita de escalares, entonces (considerando $s_o = 0$ y $P_o \equiv 0$)

$$\left\| \sum_{k=1}^r a_k z^k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^r a_k \left((P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(z^k) + P_{s_{k-1}}(z^k) \right) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^r (P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(a_k z^k) \right\| + \left\| \sum_{k=2}^r a_k P_{s_{k-1}}(z^k) \right\| =$$

$$= \max_{1 \leq k \leq r} \| (P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(a_k z^k) \| + \left\| \sum_{k=2}^r a_k P_{s_{k-1}}(z^k) \right\| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq r} |a_k| \max_{1 \leq k \leq r} \| z^k \| + \max_{1 \leq k \leq r} |a_k| \left(\sum_{k=2}^r \| P_{s_{k-1}}(z^k) \| \right) \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq r} |a_k| \left(1 + \sum_{k=2}^r \frac{\delta}{2^k} \right) \leq \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \max_{1 \leq k \leq r} |a_k|$$

y por otra parte

$$\Big\| \sum_{k=1}^{r} a_k z^k \Big\| = \Big\| \sum_{k=1}^{r} a_k \Big((P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(z^k) + P_{s_{k-1}}(z^k) \Big) \Big\| \geq$$

$$\geq \Big\| \sum_{k=1}^{r} a_k \Big((P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(z^k) \Big) \Big\| - \Big\| \sum_{k=2}^{r} a_k P_{s_{k-1}}(z^k) \Big\| =$$

$$= \max_{1\leq k\leq r} \|(P_{s_k} - P_{s_{k-1}})(a_k z^k)\| - \Big\| \sum_{k=2}^{r} a_k P_{s_{k-1}}(z^k) \Big\| \geq$$

$$\geq \delta \max_{1\leq k\leq r} |a_k| - \max_{1\leq k\leq r} |a_k| \Big(\sum_{k=2}^{r} \|P_{s_{k-1}}(z^k)\| \Big) \geq$$

$$\geq \delta \max_{1\leq k\leq r} |a_k| - \max_{1\leq k\leq r} |a_k| \Big(\sum_{k=2}^{r} \frac{\delta}{2^k} \Big) \geq (\delta - \frac{\delta}{2}) \max_{1\leq k\leq r} |a_k| =$$

$$= \frac{\delta}{2} \max_{1\leq k\leq r} |a_k|$$

con lo cual

$$\frac{\delta}{2} \max_{1\leq k\leq r} |a_k| \leq \Big\| \sum_{k=1}^{r} a_k z^k \Big\| \leq (1 + \frac{\delta}{2}) \max_{1\leq k\leq r} |a_k|$$

Caso B2)

Como $(y_{i_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero débilmente en E pero no en norma, $(P_{i_0}(y^n))_{n\in\mathbb{N}} \subset c_{oo}(E)$ converge a cero débilmente pero no en norma; y, aplicando 2), tenemos que existe una subsucesión (z^n) de (y^n) tal que $(P_{i_0}(z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de c_o. Más aún, existe $c>0$ tal que

(a) $$c \max_{1\leq n\leq r} |a_n| \leq \Big\| \sum_{n=1}^{r} a_n P_{i_0}(z^n) \Big\| \leq (M+1) \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^r$.

Además, por estar en el caso B), podemos suponer $P_{i_0}(z^1) \neq z^1$. Sea s_1

el menor natural tal que $P_{s_1}(z^1) = z^1$, entonces $s_1 > i_o$. La sucesión $((P_{s_1} - P_{i_o})(z^n))_n$ posee una subsucesión $((P_{s_1} - P_{i_o})(z^{\sigma_1(n)}))_n$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n (P_{s_1} - P_{i_o})(z^{\sigma_1(n)}) \right\| \leq (M+1) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$,

ya que: si $((P_{s_1} - P_{i_o})(z^n))_n$ no converge a cero en norma podemos aplicar 2); y si $((P_{s_1} - P_{i_o})(z^n))_n$ converge a cero en norma, entonces existe una subsucesión suya $((P_{s_1} - P_{i_o})(z^{\sigma_1(n)}))_n$ tal que

$$\|(P_{s_1} - P_{i_o})(z^{\sigma_1(n)})\| < \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos suponer $\sigma_1(1) > 1$. Sea s_2 el menor natural tal que $P_{s_2}(z^{\sigma_1(1)}) = z^{\sigma_1(1)}$; por estar en el caso B, $s_2 > s_1$. De igual forma que antes podemos extraer una subsucesión $(z^{\sigma_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(z^{\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n (P_{s_2} - P_{s_1})(z^{\sigma_2(n)}) \right\| \leq (M+1) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

Sea s_3 el menor natural tal que $P_{s_3}(z^{\sigma_2(2)}) = z^{\sigma_2(2)}$; entonces $s_3 > s_2$ por estar en el caso B y ser $\sigma_2(2) > \sigma_1(1)$. Reiterando el proceso anterior podemos obtener una familia de subsucesiones de (z^n), $\{(z^{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$, tal que:

i) $(z^{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(z^{\sigma_{k-1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

ii) s_{k+1} es el menor natural tal que $P_{s_{k+1}}(z^{\sigma_k(k)}) = z^{\sigma_k(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, y la sucesión (s_k) es estrictamente creciente.

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n (P_{s_{k+1}} - P_{s_k})(z^{\sigma_{k+1}(n)}) \right\| \leq (M+1) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{r}$.

Llamemos $\omega^n = z^{\sigma_n(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s_0 = i_0$. La sucesión $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de c_0. En efecto: sea $r \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n=1}^{r}$ una sucesión finita de escalares, como

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right\| = \max \left\{ \left\| P_{i_0} \left(\sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right) \right\| , \max_{0 \leq k \leq r} \left\| (P_{s_{k+1}} - P_{s_k}) \left(\sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right) \right\| \right\},$$

por (a) tenemos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right\| \geq \left\| P_{i_0} \left(\sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n P_{i_0}(\omega^n) \right\| \geq c \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

y que

$$\left\| P_{i_0} \left(\sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n P_{i_0}(\omega^n) \right\| \leq (M+1) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

Por (i), (ii) y (iii) tenemos que para $0 \leq k \leq r$

$$\left\| (P_{s_{k+1}} - P_{s_k}) \left(\sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right) \right\| =$$

$$= \left\| a_k (P_{s_{k+1}} - P_{s_k})(\omega^k) + \sum_{n=k+1}^{r} a_n (P_{s_{k+1}} - P_{s_k})(\omega^n) \right\| \leq$$

$$\leq |a_k| \left\| (P_{s_{k+1}} - P_{s_k})(\omega^k) \right\| + \left\| \sum_{n=k+1}^{r} a_n (P_{s_{k+1}} - P_{s_k})(\omega^n) \right\| \leq$$

$$\leq |a_k| \, \|\omega^k\| + (M+1) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n| \leq (M+2) \max_{1 \leq n \leq r} |a_n|$$

Por tanto

$$c \max_{1\leq n\leq r} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{r} a_n \omega^n \right\| \leq (M+2) \max_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

Luego (ω^n) es equivalente a la base canónica de c_o.

9.10. Proposición: Sea E un espacio hereditariamente D.P., entonces la condición (*) del teorema anterior es necesaria para que $c_o(E)$ sea hereditariamente D.P.

Demostración: Sea E un espacio hereditariamente D.P. y supongamos que no verifica (*) del teorema anterior; entonces, teniendo en cuenta 9.5., para cada $n\in\mathbb{N}$ existe una sucesión $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que

1) $\|x_i^n\| = 1 \quad \forall i\in\mathbb{N}$

2) $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de c_o

3) para cada subsucesión $(x_{i_k}^n)_k$ de $(x_i^n)_i$ existe una sucesión finita de escalares $(a_k)_{k=1}^r$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} a_k x_{i_k}^n \right\| > n \max_{1\leq k\leq r} |a_k| .$$

Para cada $j\in\mathbb{N}$ sea $y^j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^j, 0, 0, \dots) \in c_o(E)$. La sucesión $(y^j)_j \subset c_o(E)$ está acotada por 1. Si llamamos $\pi_n(y)$ a la coordenada n-ésima de $y\in c_o(E)$, como $\pi_n(y^j) = x_j^n$ para todo $j\geq n$ y como, por 2, $(x_j^n)_{j\geq n}$ converge a cero débilmente en E, tenemos que $(\pi_n(y^j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a cero débilmente en E para cada $n\in\mathbb{N}$. Por tanto (y^j) es una sucesión que converge a cero débilmente en $c_o(E)$ con $\|y^j\|=1$ para todo $j\in\mathbb{N}$.

Pero (y^j) no posee subsucesiones equivalentes a la base canónica de c_0 ya que si $(y^{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de (y^j), para cada $n\in\mathbb{N}$ $(\pi_n(y^{j_k}))_{k\geq n} = (x^n_{j_k})_{k\geq n}$ es una subsucesión de $(x^n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y, por 3, existe una sucesión finita de escalares $(a_k)_{k=n}^{n+h_n}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+h_n} a_k x^n_{j_k} \right\| \geq n \max_{n\leq k\leq n+h_n} |a_k| \ ;$$

con lo cual

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+h_n} a_k y^{j_k} \right\| \geq \left\| \pi_n\left(\sum_{k=n}^{n+h_n} a_k y^{j_k} \right) \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{n+h_n} a_k x^n_{j_k} \right\| \geq n \max_{n\leq k\leq n+h_n} |a_k| .$$

Luego no existe ninguna constante $M > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} a_k y^{j_k} \right\| \leq M \max_{1\leq k\leq r} |a_k|$$

para todo $r\in\mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{r}$;

y por ello $(y^{j_k})_k$ no es equivalente a la base canónica de c_0. Puesto que (y^j) no tiene ninguna subsucesión equivalente a la base canónica de c_0, de 9.5. se deduce que $c_0(E)$ no es hereditariamente D.P.

Reuniendo ahora los tres últimos resultados y la caracterización 9.2. podemos decir que

9.11. Corolario: $C(K,E)$ es hereditariamente D.P. si y sólo si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

a) K es finito y E es hereditariamente D.P.; ó

b) K es disperso con $K^{(\omega)} = \emptyset$ y E es un espacio hereditariamente D.P. que verifica la condición (*) del teorema 9.9.

Y también

9.12. Corolario: Si E es un espacio de Banach son equivalentes:

a) C(K,E) es hereditariamente D.P. para algún compacto infinito K.

b) C(K,E) es hereditariamente D.P. para todo compacto K tal que C(K) es hereditariamente D.P.

c) C(K,E) es hereditariamente D.P. para todo compacto disperso K con $K^{(\omega)} = \emptyset$.

d) $c_0(E)$ es hereditariamente D.P.

e) E es hereditariamente D.P. y verifica (*) del teorema 9.9.

9.13. Nota: Los resultados anteriores nos permiten dar una serie de ejemplos de espacios E tales que C(K,E) es hereditariamente D.P. cuando C(K) lo es. Realmente podemos asegurar que la mayoría de los espacios hereditariamente D.P. conocidos tienen esta buena propiedad; en concreto los espacios de Schur, c_0, los ejemplos de Talagrand y Hagler (ver 6.9., [39] y [20]) y los C(K) hereditariamente D.P.. Por el corolario anterior basta ver que estos espacios verifican la condición (*) del teorema 9.9.. Esto, en el caso de los espacios de Schur es evidente, en el de c_0 se comprueba fácilmente, en el ejemplo de Talagrand se deduce del teorema 1 de [39] y en el de Hagler de la proposición 5 de [20]. Probarlo para el caso de los C(K) nos llevará el resto de la sección.

9.14. Proposición: Si K es un compacto disperso con $K^{(\omega)} = \emptyset$ y $\mathbb{N}^*$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$, entonces $K \times \mathbb{N}^*$ es un compacto disperso con $(K \times \mathbb{N}^*)^{(\omega)} = \emptyset$.

Demostración:

1) $K \times \mathbb{N}^*$ es disperso.

En efecto: sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y sea $A \subset K \times \mathbb{N}^*$ un subconjunto no vacío. Hemos de probar que A tiene algún punto aislado.

Como $K\times\mathbb{N}^* = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K\times\{n\}\right) \cup (K\times\{\infty\})$ tenemos que

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(K\times\{n\})\cap A\right) \cup \left((K\times\{\infty\})\cap A\right)$$

a) Si existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $(K\times\{n_0\})\cap A \neq \emptyset$, al ser $K\times\{n_0\}$ homeomorfo a K y K un compacto disperso, existe un punto (t,n_0) de $(K\times\{n_0\})\cap A$ que es un punto aislado de $(K\times\{n_0\})\cap A$; es decir, existe un entorno V de t en K tal que

$$(V\times\{n_0\}) \cap [(K\times\{n_0\})\cap A] = \{(t,n_0)\}.$$

Entonces (t,n_0) es un punto aislado de A ya que $V\times\{n_0\}$ es un entorno de (t,n_0) en $K\times\mathbb{N}^*$ y

$$(V\times\{n_0\})\cap A = (V\times\{n_0\}) \cap [(K\times\{n_0\})\cap A] = \{(t,n_0)\}.$$

b) Si $(K\times\{n\})\cap A = \emptyset$ para todo $n\in\mathbb{N}$, como $A\neq\emptyset$ y

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(K\times\{n\})\cap A\right) \cup \left((K\times\{\infty\})\cap A\right),$$

tenemos que $K\times\{\infty\}\cap A \neq \emptyset$. En este caso también existe un punto $(t,\infty)\in(K\times\{\infty\})\cap A$ que es un punto aislado de $(K\times\{\infty\})\cap A$ pues $K\times\{\infty\}$ es homeomorfo a K y K es un compacto disperso. Por tanto existe un entorno V de t en K tal que

$$(V\times\{\infty\}) \cap [(K\times\{\infty\})\cap A] = \{(t,\infty)\}.$$

Entonces (t,∞) es un punto aislado de A ya que $V\times\mathbb{N}^*$ es un entorno de (t,∞) en $K\times\mathbb{N}^*$ y

$$(V\times\mathbb{N}^*)\cap A = (V\times\mathbb{N}^*) \cap [(K\times\{\infty\})\cap A] = (V\times\{\infty\}) \cap [(K\times\{\infty\})\cap A] =$$

$$= \{(t,\infty)\}.$$

2) $(K\times\mathbb{N}^*)^{(\omega)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(K\times\mathbb{N}^*)^{(n)} = \emptyset.$

En efecto: Probemos en primer lugar, por inducción, que

$$(K\times \mathbb{N}^*)^{(n)} \subset (K^{(n)}\times \mathbb{N})\cup(K^{(n-1)}\times\{\infty\}) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

i) Sea n=1 y sea $(t,\alpha)\in(K\times\mathbb{N}^*)'$. Si $\alpha=n_0$ para algún $n_0\in\mathbb{N}$, entonces $(t,\alpha)=(t,n_0)\in K'\times\mathbb{N}$ ya que, dado un entorno V de t en K, $V\times\{n_0\}$ es un entorno de (t,n_0) en $K\times\mathbb{N}^*$ y, por tanto, existe un punto $(t',n_0)\in\big(V\times\{n_0\}\setminus\{(t,n_0)\}\big)\cap(K\times\mathbb{N}^*)$; con lo cual $t'\in(V\setminus\{t\})\cap K$, y ello nos dice que $t\in K'$. Si $\alpha=\infty$ entonces $(t,\alpha)\in K\times\{\infty\}$. Por tanto, como por definición $K^{(0)}=K$, se tiene que

$$(K\times\mathbb{N}^*)'\subset(K'\times\mathbb{N})\cup(K^{(0)}\times\{\infty\}).$$

ii) Supongamos que $(K\times\mathbb{N}^*)^{(n)}\subset(K^{(n)}\times\mathbb{N})\cup(K^{(n-1)}\times\{\infty\})$ y sea $(t,\alpha)\in(K\times\mathbb{N}^*)^{(n+1)}=\big((K\times\mathbb{N}^*)^{(n)}\big)'$.

Si $\alpha=n_0$ para algún $n_0\in\mathbb{N}$ entonces $(t,\alpha)=(t,n_0)\in K^{(n+1)}\times\mathbb{N}$ ya que, dado un entorno V de t en K, $V\times\{n_0\}$ es un entorno de (t,n_0) en $K\times\mathbb{N}^*$ y por ello existe un punto

$$(t',n_0)\in\big(V\times\{n_0\}\setminus\{(t,n_0)\}\big)\cap(K\times\mathbb{N}^*)^{(n)}\subset$$
$$\subset\big(V\times\{n_0\}\setminus\{(t,n_0)\}\big)\cap\big[(K^{(n)}\times\mathbb{N})\cup(K^{(n-1)}\times\{\infty\})\big]=$$
$$=\big(V\times\{n_0\}\setminus\{(t,n_0)\}\big)\cap(K^{(n)}\times\mathbb{N}),$$

por tanto $t'\in(V\setminus\{t\})\cap K^{(n)}$. Con lo cual $t\in K^{(n+1)}$.

Si $\alpha=\infty$, como $(K\times\mathbb{N}^*)^{(n)}$ es un cerrado y está contenido en $(K^{(n)}\times\mathbb{N})\cup(K^{(n-1)}\times\{\infty\})$, entonces o bien $t\in K^{(n)}$, o bien $t\in K^{(n-1)}\setminus K^{(n)}$. En el primer caso tenemos que $(t,\alpha)=(t,\infty)\in K^{(n)}\times\{\infty\}$. Veamos que el segundo caso no se puede dar: supongamos que $t\in K^{(n-1)}\setminus K^{(n)}$. Como $K^{(n)}$ es un cerrado en K y $t\notin K^{(n)}$, $W=K\setminus K^{(n)}$ es un entorno de t en K.

Sea V un entorno cualquiera de t en K, entonces $(V\cap W)\times\mathbb{N}^*$ es un entorno de (t,∞) en $K\times\mathbb{N}^*$, y así

$$\left[((V\cap W)\times\mathbb{N}^*)\setminus\{(t,\infty)\}\right]\cap(K\times\mathbb{N}^*)^{(n)}\neq\emptyset.$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción tenemos

$$\emptyset\neq\left[((V\cap W)\times\mathbb{N}^*)\setminus\{(t,\infty)\}\right]\cap\left[(K^{(n)}\times\mathbb{N})\cup(K^{(n-1)}\times\{\infty\})\right]=$$

$$=\left[\left(((V\cap W)\times\mathbb{N}^*)\setminus\{(t,\infty)\}\right)\cap(K^{(n)}\times\mathbb{N})\right]\cup$$

$$\cup\left[\left(((V\cap W)\times\mathbb{N}^*)\setminus\{(t,\infty)\}\right)\cap(K^{(n-1)}\times\{\infty\})\right]=$$

$$=\left[(V\cap W\setminus\{t\})\cap K^{(n-1)}\right]\times\{\infty\}\qquad\text{ya que } W\cap K^{(n)}=\emptyset,$$

luego $(V\cap W\setminus\{t\})\cap K^{(n-1)}\neq\emptyset$ y por tanto $t\in K^{(n)}$ (contradicción).

Queda probado entonces que

$$(K\times\mathbb{N}^*)^{(n)}\subset(K^{(n)}\times\mathbb{N})\cup(K^{(n-1)}\times\{\infty\})\qquad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Si suponemos que $K^{(\omega)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}K^{(n)}=\emptyset$ entonces, al ser $(K^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos encajados con intersección vacía, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $K^{(n_0)}=\emptyset$. Entonces

$$(K\times\mathbb{N}^*)^{(n_0+1)}\subset\left(K^{(n_0+1)}\times\mathbb{N}\right)\cup\left(K^{(n_0)}\times\{\infty\}\right)=\emptyset$$

y por tanto $(K\times\mathbb{N}^*)^{(\omega)}=\emptyset$.

9.15. Proposición: Si C(K) es hereditariamente D.P. entonces C(K) verifica la condición (*) del teorema 9.9.

Demostración: Si C(K) es hereditariamente D.P. entonces, por 9.2., K es disperso y $K^{(\omega)} = \emptyset$; y, por la proposición anterior, $\mathbb{N}^* \times K$ es un compacto disperso con $(\mathbb{N}^* \times K)^{(\omega)} = \emptyset$. Aplicando de nuevo 9.2. tenemos que $C(\mathbb{N}^* \times K)$ es hereditariamente D.P.. Como $C(\mathbb{N}^* \times K)$ es isomorfo a $C(\mathbb{N}^*, C(K))$, el corolario 9.12. nos dice que $C(K)$ verifica $(*)$ del teorema 9.9.

A partir de las proposiciones anteriores podemos obtener el siguiente resultado de topología:

9.16. Corolario: El producto de dos compactos dispersos cuyo conjunto ω-derivado es vacío es un compacto disperso con conjunto ω-derivado vacío.

Demostración: Sean K_1 y K_2 dos compactos dispersos con $K_1^{(\omega)} = K_2^{(\omega)} = \emptyset$. Por 9.2. y la proposición anterior $C(K_1)$ y $C(K_2)$ son espacios hereditariamente D.P. que verifican $(*)$ del teorema 9.9.. Teniendo en cuenta que $C(K_1 \times K_2)$ es isomorfo a $C(K_1, C(K_2))$ y aplicando el corolario 9.12., obtenemos que $C(K_1 \times K_2)$ es hereditariamente D.P. y utilizando de nuevo 9.2. deducimos que $K_1 \times K_2$ es un compacto disperso con $(K_1 \times K_2)^{(\omega)} = \emptyset$.

10. La propiedad V en C(K,E)

10.1. Definición: Un espacio de Banach E tiene la propiedad V si los operadores incondicionalmente convergentes de E en otro espacio de Banach cualquiera F son débilmente compactos.

La propiedad V fué introducida por Pelczynski en [28].

Espacios de Banach que tienen la propiedad V son:

- C(K) para todo compacto K (ver [28]).
- Los espacios reflexivos.
- Entre los espacios de Schur sólo los de dimensión finita.

Pelczynski demostró cuáles son, entre los espacios que tienen base incondicional, los que poseen la propiedad V.

<u>10.2. Proposición [28]</u>: Si E tiene base incondicional entonces E tiene la propiedad V si y sólo si E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

Como consecuencia de este resultado se tiene que el ejemplo de Talagrand (6.9.) tiene la propiedad V.

Vamos a ver que otros espacios importantes, como el ejemplo de Hagler [20], poseen dicha propiedad. Se deduce de la siguiente proposición:

<u>10.3. Proposición</u>: Si E es hereditariamente D.P. y no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces E tiene la propiedad V.

<u>Demostración</u>: Sea $T: E \longrightarrow F$ un operador incondicionalmente convergente. Sea (x_n) una sucesión acotada en E. Como E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, el teorema de Rosenthal 1.2. nos dice que (x_n) posee una subsucesión (y_n) débilmente de Cauchy. Si suponemos que $(T(y_n))$ no converge en norma, entonces existe $\varepsilon > 0$ y existen dos sucesiones estrictamente crecientes (p_n) y (q_n) en $\mathbb{N}$, con $p_n < q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$(1) \qquad \| T(y_{p_n}) - T(y_{q_n}) \| > \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, la sucesión $(y_{p_n} - y_{q_n})_n \subset E$ converge a cero débilmente pero no en norma (pues $\inf_n \| y_{p_n} - y_{q_n} \| > \frac{\varepsilon}{\|T\|}$). Por 9.5. existe una subsucesión $(y_{p_{n_k}} - y_{q_{n_k}})_k$ de $(y_{p_n} - y_{q_n})_n$ que es equivalente a la base canónica de c_0; y por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{p_{n_k}} - y_{q_{n_k}})$ es una serie débilmente incondicionalmente convergente en E. Como T es incondicionalmente convergente, $\sum_{k=1}^{\infty} T(y_{p_{n_k}} - y_{q_{n_k}})$ converge en F, y por ello

$$\lim_k \| T(y_{p_{n_k}} - y_{q_{n_k}}) \| = 0.$$

Pero ésto contradice (1). Luego $(T(y_n))$ converge en norma y por tanto T es débilmente compacto (más aún, en realidad T es un operador compacto).

Propiedades de estabilidad de la propiedad V son (ver [28]):

10.4. Proposición:

a) Si E tiene la propiedad V entonces todo subespacio complementado de E también la tiene.

b) Si E tiene la propiedad V entonces todo cociente separado de E también la tiene.

c) El producto de dos espacios que tienen la propiedad V tiene la propiedad V.

Pelczynski probó el siguiente resultado interesante sobre los espacios que poseen la propiedad V.

10.5. Proposición [28]: Si E tiene la propiedad V entonces E' es débilmente secuencialmente completo.

Pasamos ahora a estudiar cuándo C(K,E) tiene la propiedad V. En [28] Pelczynski conjeturó que se verificaría que

"C(K,E) tiene la propiedad V si y sólo si E la tiene";

y demostró que si E es un espacio reflexivo entonces C(K,E) tiene la propiedad V.

Todavía no se sabe si la conjetura de Pelczynski es cierta o no. Este problema está íntimamente ligado a otro problema importante: el de caracterizar cuándo $L^1(\mu,E)$ es débilmente secuencialmente completo. La relación entre estas dos cuestiones se debe a 10.5. y a que $L^1(\mu,E')$ es isomorfo a un subespacio de C(K,E)' para algún compacto K. Hasta la fecha sólo se ha probado que si E es un espacio reflexivo o un espacio $L^1(\lambda)$ entonces $L^1(\mu,E)$ es débilmente secuencialmente completo (ver [32]).

10.6. Teorema: Si K es un compacto disperso entonces C(K,E) tiene la propiedad V si y sólo si E la tiene.

Demostración: Es análoga a la de 7.5.

10.7. Proposición: C(K,E) tiene la propiedad V para todo compacto K si y sólo si C([0,1],E) la tiene.

Demostración: Es análoga a la de 7.6.

10.8. Proposición: Si Σ_0 es la σ-álgebra de Borel de [0,1] entonces C(K,E) tiene la propiedad V para todo compacto K si y sólo si $B(\Sigma_0,E)$ la tiene.

Demostración: Basta proceder como en 6.8. teniendo en cuenta 10.7. y 5.4. en lugar de 6.6. y 5.1.

Probamos en el siguiente teorema que para una clase amplia de espacios que tienen la propiedad V, la conjetura de Pelczynski es cierta.

10.9. Teorema: Sea E un espacio de Banach con base incondicional. Entonces C(K,E) tiene la propiedad V si y sólo si E la tiene.

Demostración:

$\Rightarrow$) Es evidente por ser E isomorfo a un subespacio complementado de C(K,E).

$\Leftarrow$) Sea (e_n) una base incondicional normalizada de E. Si E tiene la propiedad V entonces, por 10.2., E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1. Ahora bien, toda base incondicional de un espacio de Banach que no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1, es una base reductora (ver 1.c.9. de [26]). Por tanto (e_n) es reductora.

Sean $\{P_\sigma : \sigma \subset \mathbb{N}\}$ las proyecciones asociadas a (e_n) y sea

$$C = \sup_{\sigma \subset \mathbb{N}} \|P_\sigma\|$$

Para probar que C(K,E) tiene la propiedad V para todo compacto K basta comprobar, según 10.7., que C([0,1],E) tiene la propiedad V. Supongamos por tanto que $K=[0,1]$.

Sea $T : C(K,E) \longrightarrow F$ un operador incondicionalmente convergente. Vamos a probar que T transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.

Sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión débilmente de Cauchy en C(K,E). Entonces (ϕ_n) está acotada; sea $M = \sup_n \|\phi_n\|$

Definamos $f_k(t) = \lim_n \langle \phi_n(t), e'_k \rangle$ para cada $t \in K$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, la aplicación f_k es medible por ser límite puntual de funciones continuas; además

$$|f_k(t)| \leq \sup_n |\langle \phi_n(t), e'_k \rangle| \leq \sup_n \|\phi_n\| = M \qquad \forall t \in K.$$

Por tanto $f_k \in B(\Sigma)$ (donde Σ es la σ-álgebra de Borel de K).

Sea $\varphi_k = f_k(.)e_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. La función $\varphi_k \in B(\Sigma,E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

1) La serie $\Sigma \varphi_k$ es débilmente incondicionalmente convergente en $B(\Sigma,E)$.

En efecto: Hemos de probar que el conjunto $\{\sum_{k\in\sigma} \varphi_k : \sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ está acotado en $B(\Sigma,E)$.

Sea $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ y sea $r = \max\{n : n \in \sigma\}$. Si $t \in K$, por la definición de $f_k(t)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \phi_{n_0}(t), e'_k \rangle - f_k(t)| < \frac{1}{r} \qquad \text{para cada } k \in \sigma ;$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k\in\sigma} \varphi_k(t)\| &= \|\sum_{k\in\sigma} f_k(t)e_k\| \leq \|\sum_{k\in\sigma} f_k(t)e_k - \sum_{k\in\sigma} \langle \phi_{n_0}(t), e'_k \rangle e_k\| + \\
&+ \|\sum_{k\in\sigma} \langle \phi_{n_0}(t), e'_k \rangle e_k\| \leq \\
&\leq \sum_{k\in\sigma} |f_k(t) - \langle \phi_{n_0}(t), e'_k \rangle| \, \|e_k\| + \|P_\sigma(\phi_{n_0}(t))\| \leq \\
&\leq 1 + CM.
\end{aligned}$$

Luego $\|\sum_{k\in\sigma} \varphi_k\| \leq 1 + CM$ para todo $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.

Como T es incondicionalmente convergente, por 5.4., su extensión

$$\tilde{T} = T''|_{B(\Sigma,E)} : B(\Sigma,E) \longrightarrow F$$

es también incondicionalmente convergente y así, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(\varphi_k)$ converge incondicionalmente en F. Sea $y = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(\varphi_k)$.

Vamos a probar que $(T(\phi_n))$ converge débilmente a y. Pero antes necesitamos demostrar que:

2) La sucesión $\left(\tilde{T}(\phi_n - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero débilmente en F.

En efecto: Por 4.2. es suficiente probar que $\left(\phi_n - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero débilmente puntualmente. Sea $t \in K$, sea $x' \in E'$ y sea $\varepsilon > 0$; como (e_n') es base de Schauder de E', existe $y' \in E'$ tal que

$$y' = \sum_{i=1}^{r} a_i e_i' \qquad \text{y} \quad \|x'-y'\| < \frac{\varepsilon}{2(1+M+CM)} .$$

Por la definición de $f_k(t)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq r$ y

$$|\langle \phi_n(t), e_k' \rangle - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{2r|a_k|} \qquad \forall n \geq n_0 \quad \text{y para } 1 \leq k \leq r,$$

entonces para cada $n \geq n_0$ se tiene

$$\left|\langle \phi_n(t) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) , x' \rangle\right| \leq$$

$$\leq \left|\langle \phi_n(t) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) , x'-y' \rangle\right| + \left|\langle \phi_n(t) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) , y' \rangle\right| \leq$$

$$\leq \left(\|\phi_n(t)\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\right\| \right) \|x'-y'\| +$$

$$+ \left|\langle \phi_n(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t) e_k , \sum_{i=1}^{r} a_i e_i' \rangle\right| \leq$$

$$\leq (M+1+CM) \|x'-y'\| + \sum_{k=1}^{r} |a_k| \, |\langle \phi_n(t), e_k' \rangle - f_k(t)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{r} |a_k| \frac{\varepsilon}{2r|a_k|} = \varepsilon .$$

3) $(T(\phi_n))$ converge débilmente a y.

En efecto: Sea $y' \in F'$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\left(\tilde{T}(\phi_n - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero débilmente en F y $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(\varphi_k) = y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \tilde{T}(\phi_n - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k), y' \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\text{y} \qquad \| y - \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(\varphi_k) \| < \frac{\varepsilon}{2\|y'\|} \qquad \forall n \geq n_0 .$$

Entonces para cada $n \geq n_0$ se tiene

$$|\langle T(\phi_n) - y, y' \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle T(\phi_n) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(\varphi_k), y' \rangle| + |\langle \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(\varphi_k) - y, y' \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle \tilde{T}(\phi_n - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k), y' \rangle| + \|y'\| \, \| \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(\varphi_k) - y \| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Hemos demostrado que T transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes y como, según 8.8., el espacio $C([0,1],E)$ tiene la P.D., podemos concluir que T es débilmente compacto. Por tanto $C([0,1],E)$ tiene la propiedad V.

<u>10.10. Nota</u>: Obsérvese que como el ejemplo de Talagrand $\mathfrak{T}$ (6.9.) tiene la propiedad V y posee base incondicional entonces $C(K,\mathfrak{T})$ tiene la propiedad V para todo compacto K.

Como resumen de las propiedades de $C(K,\mathfrak{T})$ que hemos ido estudiando podemos decir que:

- $C([0,1],\mathfrak{T})$ no tiene la P.D.P. y $C(K,\mathfrak{T})$ tiene la P.D.P. para todo compacto K disperso.

- $C(K,\mathfrak{T})$ tiene la R.P.D.P. para todo compacto K.
- $C(K,\mathfrak{T})$ tiene la P.D. para todo compacto K.
- $C(K,\mathfrak{T})$ tiene la propiedad V para todo compacto K.
- $C(K,\mathfrak{T})$ es hereditariamente D.P. para todo compacto K tal que $C(K)$ es hereditariamente D.P.

Una consecuencia importante del teorema anterior es la que enunciamos a continuación. Nos permitirá ampliar la clase de los espacios débilmente secuencialmente completos E conocidos hasta ahora para los que $L^1(\mu,E)$ es débilmente secuencialmente completo.

<u>10.11. Corolario</u>: Sea E un espacio de Banach con base incondicional reductora y sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y positiva. Entonces $L^1(\mu,E')$ es débilmente secuencialmente completo.

<u>Demostración</u>: Por los teoremas de Stone y Kakutani (ver [12] teoremas III.18.1. y III.18.2. y remark 1 de la pág. 371) existe un compacto K y una medida de Borel regular finita y positiva λ tal que $L^1(\mu,E')$ es isométrico a $L^1(\lambda,E')$. Ahora bien, el espacio $L^1(\lambda,E')$ es isomorfo a un subespacio vectorial cerrado de $C(K,E)'$; y $C(K,E)'$ es débilmente secuencialmente completo gracias al teorema anterior y a 10.5.. Por tanto $L^1(\lambda,E')$ es débilmente secuencialmente completo. Y como $L^1(\lambda,E')$ es isomorfo a $L^1(\mu,E')$ tenemos que $L^1(\mu,E')$ es débilmente secuencialmente completo.

<u>10.12. Nota</u>: Terminamos esta sección haciendo notar que se puede responder negativamente a una cuestión planteada por Pelczynski en [28]; utilizando para ello ejemplos de espacios de Banach construídos por Bourgain y Delbaen y por Hagler.

Pełczynski probó que la definición de la propiedad V dada en 10.1. es equivalente a la siguiente:

Definición 1: Un espacio de Banach E tiene la propiedad V si cada subconjunto A de E' que verifica:

(1) $\lim_{n} \sup_{x' \in A} |\langle x_n, x' \rangle| = 0$ para cada serie Σx_n débilmente incondicionalmente convergente en E,

es débilmente compacto.

Esto le motivó a definir la propiedad V^*

Definición 2: Un espacio de Banach E tiene la propiedad V^* si cada subconjunto A de E que verifica:

(2) $\lim_{n} \sup_{x \in A} |\langle x, x'_n \rangle| = 0$ para cada serie $\Sigma x'_n$ débilmente incondicionalmente convergente en E',

es débilmente compacto.

Una consecuencia inmediata de las definiciones es que "Si E tiene la propiedad V entonces E' tiene la propiedad V^* y si E' tiene la propiedad V entonces E tiene la propiedad V^*".

Pełczynski se preguntó si se darían los recíprocos. La respuesta en ambos casos es negativa:

El hecho de que E' tenga la propiedad V^* no implica que E tenga la propiedad V.

Bourgain y Delbaen (ver [6] pág. 25) han construído una familia de espacios de Banach tal que cada elemento $\mathcal{F}$ de la familia verifica:

i) $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{L}^{\infty}$-espacio separable de dimensión infinita.

ii) $\mathcal{X}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

iii) $\mathcal{X}$ es un espacio de Schur.

iv) $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ son débilmente secuencialmente completos.

Cada uno de estos espacios proporciona un contraejemplo ya que:

- $\mathcal{X}'$ tiene la propiedad V^* (el bidual de un $\mathcal{L}^\infty$-espacio es isomorfo a un subespacio complementado de un $C(K)$ ([6] pág. 11), por tanto $\mathcal{X}''$ tiene la propiedad V y por ello $\mathcal{X}'$ tiene la propiedad V^*).
- $\mathcal{X}$ no tiene la propiedad V (por la definición 10.1. y la caracterización de Bessaga-Pełczynski de los espacios que contienen algún subespacio isomorfo a c_0 (1.1.) es claro que un espacio que tiene la propiedad V o bien es reflexivo o bien contiene un subespacio isomorfo a c_0. $\mathcal{X}$ no es reflexivo pues es un espacio de Schur infinitodimensional; y $\mathcal{X}$ no contiene subespacios isomorfos a c_0 ya que es débilmente secuencialmente completo. Por tanto $\mathcal{X}$ no tiene la propiedad V).

<u>El hecho de que E tenga la propiedad V^* no implica que E' tenga la propiedad V</u>.

El dual del famoso ejemplo construído por Hagler en [20] nos sirve de contraejemplo.

En efecto: Si llamamos $\mathcal{H}$ al espacio construído por Hagler, $\mathcal{H}$ tiene entre otras las siguientes propiedades:

i) Toda sucesión en $\mathcal{H}$ que converge a cero débilmente pero no en norma posee una subsucesión equivalente a la base canónica de c_0.

ii) $\mathcal{H}$ no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

iii) $\mathcal{H}''$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $\ell^1(\Gamma)$ con Γ no contable.

Así podemos concluir:

- $\mathcal{H}'$ tiene la propiedad V^*. (Por (i) y 9.5. tenemos que $\mathcal{H}$ es hereditariamente D.P.; y como $\mathcal{H}$ no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1, por 10.3., $\mathcal{H}$ tiene la propiedad V. Por tanto $\mathcal{H}'$ tiene la propiedad V^*).
- $\mathcal{H}''$ no tiene la propiedad V (Si $\mathcal{H}''$ tuviera la propiedad V entonces, por (iii), $\ell^1(\Gamma)$ que es un espacio de Schur, también la tendría. Pero los espacios de Schur tienen la propiedad V si y sólo si son de dimensión finita).

CAPITULO V

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de espacios de Banach es la caracterización de cuándo un espacio de Banach E contiene un subespacio isomorfo a c_0, isomorfo a ℓ^1, o reflexivo infinito-dimensional. Sustanciales avances en esta dirección lo constituyen los bellos resultados de Bessaga-Pelczynski y Rosenthal citados en la sección 1.

Desde hace algún tiempo se viene estudiando en la literatura algunas variantes de este problema fundamental. Específicamente, se trata de determinar cuándo un cierto espacio de funciones vectoriales contiene un subespacio isomorfo a c_0 ó ℓ^1, y también determinar la "posición" de este subespacio. En esta línea Kwapien [25] probó que si E no contiene a c_0 entonces $L^p(\mu,E)$, para $1\leq p<\infty$, tampoco lo contiene. La filosofía del resultado es la siguiente: puesto que $L^p(\mu)$ no contiene a c_0 cuando $1\leq p<\infty$, si $L^p(\mu,E)$ contiene a c_0 es "porque" E contiene a c_0. Planteamientos análogos llevaron a Pisier [33] a demostrar que si E no contiene a ℓ^1 entonces $L^p(\mu,E)$ tampoco, si $1<p<\infty$. Y también, muy recientemente, a E. y P. Saab a probar que si E no contiene a ℓ^1 como complementado entonces C(K,E) tampoco contiene a ℓ^1 como complementado.

Nosotros estudiaremos en este capítulo cuándo C(K,E) contiene a ℓ^1 y cuándo contiene a c_0 como complementado. Obtenemos un resultado que se separa sustancialmente de la línea de los citados anteriormente ya que probamos que, salvo en situaciones triviales, C(K,E) siempre contiene a c_0 como complementado (aún en el caso en que ni C(K) ni E lo contengan como complementado).

11. Cuándo C(K,E) contiene a ℓ^1

Estudiaremos primero cuándo C(K) contiene a ℓ^1 y pasaremos luego a estudiar el caso vectorial. Para ello nos será de gran utilidad un resultado reciente de Pethe y Thakare que caracteriza cuándo el dual de un espacio de Banach es un espacio de Schur.

11.1. Teorema [31]: E' es un espacio de Schur si y sólo si E tiene la P.D.P. y E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

11.2. Proposición: C(K) contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 si y sólo si K es un compacto no disperso.

Demostración:

$\Leftarrow$) Si K es un compacto no disperso, por 3.2.(b), existe una aplicación $\varphi: K \longrightarrow [0,1]$ continua y sobre. Por ello la aplicación $\Phi : C([0,1]) \longrightarrow C(K)$ definida por $\Phi(f) = f \circ \varphi$ para todo $f \in C([0,1])$, es una isometría sobre su imagen; y como C([0,1]) contiene una copia de todo espacio de Banach separable (teorema de Banach-Mazur), en particular C([0,1]) contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, y por tanto C(K) contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.

$\Rightarrow$) Si K es un compacto disperso entonces C(K)' es isomorfo a $\ell^1(\Gamma)$ para algún conjunto Γ (ver 27.1.5.(D) de [36]), y por tanto C(K)' es un espacio de Schur. Como C(K) tiene la P.D.P., del teorema 11.1. se sigue que C(K) no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

11.3. Proposición: Son equivalentes:

a) C(K,E) no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

b) C(K) y E no contienen ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

c) K es disperso y E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1.

Demostración: Por la proposición anterior es clara la equivalencia entre (b) y (c).

a $\Rightarrow$ b) Como C(K) y E son isomorfos a subespacios de C(K,E), si C(K,E) no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1 entonces C(K) y E tampoco.

c $\Rightarrow$ a) Sea K disperso y E un espacio que no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1. Por el teorema de Rosenthal 1.2. hemos de probar que toda sucesión acotada en C(K,E) posee una subsucesión débilmente de Cauchy.

Sea $(\phi_n) \subset C(K,E)$ una sucesión acotada. Por el lema 6.4. existe un cociente metrizable de K, $\tilde{K}$, y existe $(\tilde{\phi}_n) \subset C(\tilde{K},E)$ tal que

$$\tilde{\phi}_n(\pi(t)) = \phi_n(t) \qquad \forall t \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $\pi : K \longrightarrow \tilde{K}$ es la proyección canónica.

De 3.2.(a) y 3.3. se sigue que $\tilde{K}$ es contable. Sea, por tanto, $\tilde{K} = \{ \pi(t_n) : n \in \mathbb{N} \}$. Como E no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1, por el teorema de Rosenthal, para cada $m \in \mathbb{N}$ la sucesión $\left(\tilde{\phi}_n(\pi(t_m))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión débilmente de Cauchy en E. Así, por un proceso usual de diagonalización, podemos extraer una subsucesión $(\tilde{\phi}_{n_k})$ de $(\tilde{\phi}_n)$ tal que

$$\left(\tilde{\phi}_{n_k}(\pi(t_m))\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{es débilmente de Cauchy} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Entonces de 4.1. se deduce que $(\tilde{\phi}_{n_k})$ es débilmente de Cauchy en $C(\tilde{K},E)$.

Si consideramos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : C(\tilde{K},E) &\longrightarrow C(K,E) \\ \tilde{\phi} &\longrightarrow \tilde{\phi}\circ\pi \end{aligned}$$

que es lineal y continua, tenemos que (ϕ_{n_k}) es débilmente de Cauchy en C(K,E) pues $\Phi(\tilde{\phi}_n) = \phi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto C(K,E) no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.

Como consecuencia inmediata de los teoremas 11.1. y 6.5. y de la proposición anterior podemos enunciar el siguiente resultado

11.4. Corolario: Son equivalentes:

a) C(K,E)' es un espacio de Schur.

b) C(K)' y E' son espacios de Schur.

c) K es disperso y E es un espacio que tiene la P.D.P. y que no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.

12. Cuándo C(K,E) contiene a c_0 como complementado

En [29] Pelczynski probó que todo espacio C(K) infinito-dimensional contiene un subespacio isomorfo a c_0 (1). La pregunta ahora es ¿en qué casos este subespacio isomorfo a c_0 es complementado en C(K)?.

Dedicamos esta sección a responder a esta pregunta tanto en el caso escalar como en el vectorial. Para ello necesitamos primero recordar la definición de los espacios de Grothendieck. Estos espacios fueron introducidos por Grothendieck en [19] y son aquéllos en los

(1) Aunque Pelczynski probó esto antes de definir la propiedad V, realmente es una consecuencia inmediata de que C(K) posea la propiedad V y la P.D.P.. En efecto, si C(K) no contuviera un subespacio isomorfo a c_0, la identidad sería un operador incondicionalmente convergente y, por tanto, compacto; luego dim (C(K)) $< \infty$.

que las sucesiones débil* convergentes del dual son débilmente convergentes. Una caracterización de dichos espacios dada por el mismo Grothendieck es la siguiente:

" E es un espacio de Grothendieck si y sólo si todo operador de E en c_o es débilmente compacto ".

A partir de esto es claro que un espacio de Grothendieck no contiene subespacios complementados isomorfos a c_o.

Vamos a dar una caracterización de cuándo C(K) es un espacio de Grothendieck en términos de los subespacios complementados de C(K), que nos permitirá resolver en el caso escalar el problema que nos ocupa en esta sección. Será una consecuencia inmediata de la proposición siguiente:

<u>12.1. Proposición</u>: Si E tiene la propiedad V entonces E es un espacio de Grothendieck si y sólo si E no contiene ningún subespacio complementado isomorfo a c_o.

En la demostración utilizaremos el siguiente resultado de Bessaga-Pelczynski:

<u>12.2. Teorema [4]</u>: Un operador $T: E \longrightarrow F$ es incondicionalmente convergente si y sólo si no existe ningún subespacio E_1 de E isomorfo a c_o tal que $T|_{E_1}$ es un isomorfismo sobre su imagen.

<u>Demostración de 12.1.</u>: Una implicación es evidente.

Supongamos que E no es un espacio de Grothendieck, entonces existe un operador $T: E \longrightarrow c_o$ que no es débilmente compacto, y como E tiene la propiedad V, T no es incondicionalmente convergente. Así, por el teorema anterior, existe un subespacio E_1 de E isomorfo a c_o

tal que $T|_{E_1}$ es un isomorfismo sobre $T(E_1) \subset c_0$. Ahora bien, los subespacios de c_0 isomorfos a c_0 son complementados (ver [37]); por tanto $T(E_1)$ es complementado en c_0. Sea $P_1 : c_0 \longrightarrow T(E_1)$ una proyección. Entonces la aplicación $P = \left(T|_{E_1}\right)^{-1} \circ P_1 \circ T$ es una proyección continua de E sobre E_1; con lo cual E_1 es complementado en E.

<u>12.3. Corolario</u>: C(K) es un espacio de Grothendieck si y sólo si C(K) no contiene ningún subespacio complementado isomorfo a c_0.

<u>Demostración</u>: Se sigue inmediatamente de la proposición 12.1. teniendo en cuenta que C(K) tiene la propiedad V para todo compacto K.

<u>12.4. Teorema</u>: Si K es un compacto infinito y E es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces C(K,E) contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0.

<u>Demostración</u>: Por ser E de dimensión infinita existe una sucesión $(x'_n) \subset E'$ con $\|x'_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que (x'_n) es $\sigma(E',E)$-convergente a cero (ver [23] y [27]). Sea $(x_n) \subset E$ tal que $\langle x_n, x'_n \rangle = 1$ y $\|x_n\| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (dicha sucesión existe pues como $\|x'_n\| = 1$ existe $y_n \in B(E)$ tal que $|\langle y_n, x'_n \rangle| \geq 1/2$. Si $\lambda_n \in \mathbb{R}$ es tal que $\langle \lambda_n y_n, x'_n \rangle = 1 = \lambda_n \langle y_n, x'_n \rangle$ entonces $|\lambda_n| \leq 2$ y así, tomando $x_n = \lambda_n y_n$ se verifica lo que queremos).

Como K es un compacto infinito existe una sucesión infinita, (G_n), de abiertos disjuntos no vacíos de K. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n \in G_n$.

Definimos $T: C(K,E) \longrightarrow c_0$ por $T(\phi) = (\langle \phi(t_n), x'_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $\phi \in C(K,E)$. T está bien definido ya que si $\phi \in C(K,E)$, $\phi(K)$ es un compacto en E; como $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto equicontinuo de

E' y $x'_n \longrightarrow 0$ $\sigma(E',E)$, por el II teorema de Ascoli tenemos que $x'_n \longrightarrow 0$ uniformemente en $\phi(K)$; con lo cual $T(\phi) \in c_o$. Además T es claramente lineal y continua. En cambio T no es incondicionalmente convergente. En efecto: por el teorema de Urysohn, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $f_n \in C(K)$ tal que

$$f_n(t_n) = 1, \quad f_n(G_n^c) = \{0\} \quad \text{y} \quad \|f_n\| = 1;$$

entonces para cada $\sigma \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ se tiene

$$\Big\|\sum_{n\in\sigma} f_n x_n\Big\| = \sup_{t\in K} \Big\|\sum_{n\in\sigma} f_n(t)x_n\Big\| = \sup_{t\in \bigcup_{n\in\sigma} G_n} \|f_n(t)x_n\| \leq 2;$$

por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$ es débilmente incondicionalmente convergente en $C(K,E)$. Sin embargo $\sum_{n=1}^{\infty} T(f_n x_n)$ no converge en c_o ya que $T(f_n x_n) = e_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (siendo (e_n) la base canónica de c_o).

Procediendo ahora de igual manera a como hicimos en la demostración de 12.1. deducimos que $C(K,E)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o.

12.5. Corolario: $C(K,E)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o si y sólo si se verifica alguna de las tres condiciones siguientes:

a) E es de dimensión finita y $C(K)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o.

b) K es finito y E contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o.

c) K es infinito y E es de dimensión infinita.

Demostración: Se sigue inmediatamente del teorema anterior.

Como consecuencia inmediata del teorema 12.4. obtenemos una caracterización de cuándo $C(K,E)$ es un espacio de Grothendieck que, de diferente manera, ha obtenido recientemente Khurana en [24].

12.6. Corolario [24]: $C(K,E)$ es un espacio de Grothendieck si y sólo si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

a) K es finito y E es un espacio de Grothendieck.

b) E es finito-dimensional y $C(K)$ es un espacio de Grothendieck.

Demostración: Si se cumple (a) ó (b), $C(K,E)$ es isomorfo a E^n ó a $C(K)^n$, respectivamente, para algún $n \in \mathbb{N}$, y por tanto es un espacio de Grothendieck. El recíproco se deduce del teorema 12.4. y del hecho de que un espacio de Grothendieck no posee subespacios complementados isomorfos a c_o.

Hasta el momento no se conocen caracterizaciones de cuándo $C(K)$ es un espacio de Grothendieck en términos de las propiedades topológicas del compacto K. Diversos autores (ver [1], [19] y [35]) han dado condiciones suficientes en K para que $C(K)$ sea un espacio de Grothendieck. Nosotros, a partir del resultado anterior, podemos decir que

12.7. Corolario: Si $C(K)$ es un espacio de Grothendieck entonces K no es homeomorfo al producto de dos compactos infinitos.

Demostración: Si K es homeomorfo al producto de dos compactos infinitos, $K_1 \times K_2$, entonces $C(K)$ es isomorfo a $C(K_1 \times K_2)$; y como $C(K_1 \times K_2)$ es isomorfo a $C(K_1, C(K_2))$, del corolario 12.6. se deduce que $C(K)$ no es un espacio de Grothendieck.

12.8. Nota: Se sabe que si K es un compacto extremadamente disconexo, o básicamente disconexo, o un F-espacio entonces C(K) es un espacio de Grothendieck ([1], [19] y [35]). Por ello de 12.7. se deducen algunos resultados de topología conocidos (ver 24.2.12. de [36]):

- El producto de dos compactos infinitos extremadamente disconexos no es extremadamente disconexo.
- El producto de dos compactos infinitos básicamente disconexos no es básicamente disconexo.
- El producto de dos compactos infinitos que son F-espacios no es un F-espacio.

CAPITULO VI

Si (E_n) es una sucesión de espacios de Banach se define la suma directa de estos espacios en el sentido de c_o, que notamos por $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_n\right)_o$, como el espacio de Banach de las sucesiones $x=(x_n)$, con $x_n \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_n \|x_n\| = 0$; dotado de la norma $\|x\| = \sup_n \|x_n\|$.

Se define también la suma directa en el sentido de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, que designamos por $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_n\right)_p$, como el espacio de Banach de las sucesiones $x=(x_n)$, con $x_n \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty$; con la norma $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}$.

Los espacios $(\Sigma \oplus E_n)_o$ y $(\Sigma \oplus E_n)_p$, $1 \leq p < \infty$, han jugado un papel importante en los últimos años. Por una parte constituyen la base del famoso "método de descomposición" de Pelczynski (ver [29] y [26] pág. 54), y por otra han servido para dar interesantes contraejemplos (ver [29], [26] pág. 72, y [38]).

Dedicamos este capítulo a estudiar cuándo los espacios $(\Sigma \oplus E_n)_o$ y $(\Sigma \oplus E_n)_p$, $1 \leq p < \infty$, poseen alguna de las propiedades tratadas en los capítulos III y IV.

13. Propiedades del espacio $(\Sigma \oplus E_n)_o$

A lo largo de esta sección y de la siguiente (E_n) será siempre una sucesión de espacios de Banach.

Para cada $m\in\mathbb{N}$ definimos la aplicación

$$P_m : \left(\Sigma \oplus E_n\right)_o \longrightarrow \left(\Sigma \oplus E_n\right)_o$$
$$(x_1, x_2, \ldots) \longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots)$$

Es claro que P_m es una proyección continua de norma 1, y que $P_m\left(\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o\right)$ es isomorfo a $\prod_{n=1}^{m} E_n$.

Designamos por $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_{oo}$ al subespacio denso de $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o$ formado por todas las sucesiones $x=(x_n)\in\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o$ que poseen sólo un número finito de términos distintos de cero.

Es fácil comprobar que podemos identificar de forma canónica el dual de $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o$ con el espacio $\left(\Sigma \oplus E_n'\right)_1$.

<u>13.1. Proposición</u>: $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o$ tiene la P.D.P. si y sólo si E_n tiene la P.D.P. para todo $n\in\mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>:

$\Rightarrow$) Es evidente pues cada E_n es isomorfo a un subespacio complementado de $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o$.

$\Leftarrow$) Supongamos que E_n tiene la P.D.P. para todo $n\in\mathbb{N}$.

Sea $T: \left(\Sigma \oplus E_n\right)_o \longrightarrow F$ un operador débilmente compacto. Como, para cada $m\in\mathbb{N}$, $P_m\left(\left(\Sigma \oplus E_n\right)_o\right)$ es isomorfo a $\prod_{n=1}^{m} E_n$ y como, por 6.2.(c), $\prod_{n=1}^{m} E_n$ tiene la P.D.P.; el operador $T\circ P_m$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Sea $(x^k)\subset\left(\Sigma \oplus E_n\right)_{oo}$ una sucesión que converge a cero débilmente. Vamos a demostrar que existe una subsucesión $(x^{k_i})_i$ de $(x^k)_k$

tal que $(T(x^{k_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge a cero en norma:

A) Si existe $m\in\mathbb{N}$ y existe una subsucesión $(x^{k_i})_i$ de (x^k) tal que $P_m(x^{k_i}) = x^{k_i}$ para todo $i\in\mathbb{N}$, entonces $(T(x^{k_i}))_i = (T\cdot P_m(x^{k_i}))_i$ converge a cero en norma.

B) En caso contrario construiremos por inducción la subsucesión. Para i=1 sea $x^{k_1} = x^1$; sea r_1 el menor natural tal que $P_{r_1}(x^{k_1}) = x^{k_1}$. Para i=2, como $(TP_{r_1}(x^k))_k$ converge a cero en norma y como no estamos en el caso A), existe $k_2\in\mathbb{N}$, $k_2>k_1$, tal que

$$\| T(P_{r_1}(x^{k_2}))\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P_{r_1}(x^{k_2}) \neq x^{k_2} ;$$

sea r_2 el menor natural tal que $P_{r_2}(x^{k_2}) = x^{k_2}$.
Para i=3 existe $k_3\in\mathbb{N}$, $k_3>k_2$, tal que

$$\|T(P_{r_2} - P_{r_1})(x^{k_3})\| < \frac{1}{3} \ , \ \|TP_{r_2}(x^{k_3})\| < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad T(P_{r_2}(x^{k_3})) \neq x^{k_3} ;$$

sea r_3 el menor natural tal que $P_{r_3}(x^{k_3}) = x^{k_3}$.

Y reiterando el proceso obtenemos una subsucesión $(x^{k_i})_i$ de (x^k) y una sucesión estrictamente creciente $(r_i)\subset\mathbb{N}$ tales que

(1) Para cada $i\in\mathbb{N}$, r_i es el menor natural tal que $P_{r_i}(x^{k_i}) = x^{k_i}$;

y, considerando $r_0=0$ y $P_{r_0}\equiv 0$,

(2) $\|T(P_{r_{i-1}} - P_{r_{i-j}})(x^{k_i})\| < \frac{1}{i}$ para $2\leq j\leq i$ y $\forall i\geq 2$.

La serie $\sum_{i=1}^{\infty}(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(x^{k_i})$ es débilmente incondicionalmente convergente en $(\Sigma\oplus E_n)_0$. En efecto, sea $x' = (x'_n)\in(\Sigma\oplus E'_n)_1$ entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \langle (P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(x^{k_i}), x' \rangle \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{n=r_{i-1}+1}^{r_i} \langle x_n^{k_i}, x_n' \rangle \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=r_{i-1}+1}^{r_i} |\langle x_n^{k_i}, x_n' \rangle| \leq \left(\sup_i \|x^{k_i}\|\right) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=r_{i-1}+1}^{r_i} \|x_n'\| =$$

$$= \left(\sup_i \|x^{k_i}\|\right) \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| = \left(\sup_i \|x^{k_i}\|\right) \|x'\| < +\infty .$$

Ahora bien, T es incondicionalmente convergente por ser débil - mente compacto, y por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(x^{k_i})$ converge en F; con lo cual

$$\lim_i \left\| T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(x^{k_i}) \right\| = 0 .$$

Veamos que $\| T(x^{k_i}) \| \longrightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{i_0} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \| T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(x^{k_i}) \| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall i \geq i_0 .$$

Como $(TP_{r_{i_0}}(x^{k_i}))_{i=1}^{\infty}$ converge a cero en norma, existe $\vartheta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| TP_{r_{i_0}}(x^{k_i}) \| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall i \geq \vartheta .$$

Entonces, para cada $i > \max\{ i_0, \vartheta \}$, se tiene

$$\| T(x^{k_i}) \| = \| TP_{r_i}(x^{k_i}) \| \leq \| T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(x^{k_i}) \| +$$

$$+ \| T(P_{r_{i-1}} - P_{r_{i_0}})(x^{k_i}) \| + \| TP_{r_{i_0}}(x^{k_i}) \| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon .$$

Hemos demostrado que toda sucesión que converge a cero débilmente en $\left(\Sigma \oplus E_n \right)_{\infty}$ posee una subsucesión cuya imagen converge a cero en norma. Por tanto, $T \big|_{(\Sigma \oplus E_n)_{\infty}}$ transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma; y, como $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_{\infty}$ es denso en $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_0$, lo mismo le ocurre al operador $T:\left(\Sigma \oplus E_n\right)_0 \longrightarrow F$.

Luego $\left(\Sigma \oplus E_n\right)_0$ tiene la P.D.P.

El siguiente lema nos permitirá obtener el resto de los resultados de la sección con gran facilidad.

13.2. Lema: Sea $T: \left(\Sigma \oplus E_n\right)_0 \longrightarrow F$ un operador incondicionalmente convergente tal que, para cada $m\in\mathbb{N}$, $T\circ P_m$ es débilmente compacto. Entonces T es débilmente compacto.

Demostración: Sea $(x^k) \subset \left(\Sigma \oplus E_n\right)_{\infty}$ una sucesión acotada. Como, para cada $m\in\mathbb{N}$, $(T\circ P_m(x^k))_k$ posee una subsucesión débilmente convergente, por un proceso usual de diagonalización, podemos extraer una subsucesión (z^k) de (x^k) tal que

$$(TP_m(z^k))_{k=1}^{\infty} \text{ converge débilmente } \quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

A) Si existe $m\in\mathbb{N}$ y existe una subsucesión (z^{k_i}) de (z^k) tal que $P_m(z^{k_i}) = z^{k_i}$ para todo $i\in\mathbb{N}$, entonces $(T(z^{k_i}))_i = (TP_m(z^{k_i}))_i$ converge débilmente en F.

B) En caso contrario existe una subsucesión de (z^k) (que seguimos notando igual) tal que, si para cada $k\in\mathbb{N}$ r_k es el menor natural que verifica $P_{r_k}(z^k) = z^k$, entonces $(r_k) \subset \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.

Consideremos $r_0=0$ y $P_{r_0} \equiv 0$. Para cada $i\in\mathbb{N}$ sea y_i el límite débil de la sucesión $(T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k))_{k=1}^{\infty}$. Entonces se verifica que

1) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ converge en F.

En efecto, supongamos que no es así, entonces existe $\varepsilon > 0$ y existen dos sucesiones (p_j) y (q_j) en $\mathbb{N}$, con $p_j < q_j < p_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tales que

$$\Big\| \sum_{i=p_j}^{q_j} y_i \Big\| > \varepsilon \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $y'_j \in B(F')$ tal que

$$\Big| \Big\langle \sum_{i=p_j}^{q_j} y_i \, , y'_j \Big\rangle \Big| > \varepsilon$$

Ahora bien, como para cada $j \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=p_j}^{q_j} y_i$ es el límite débil de la sucesión $\Big(\sum_{i=p_j}^{q_j} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k) \Big)_{k \in \mathbb{N}}$, existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big| \Big\langle \sum_{i=p_j}^{q_j} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_j}) \, , y'_j \Big\rangle \Big| > \varepsilon$$

y por tanto

$$\text{(a)} \qquad \Big\| \sum_{i=p_j}^{q_j} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_j}) \Big\| > \varepsilon \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Pero la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} (P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_j})$ es débilmente incondicionalmente convergente en $(\Sigma \oplus E_n)_0$ ya que si $x' = (x'_n) \in (\Sigma \oplus E'_n)_1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} \big| \langle (P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_j}) \, , x' \rangle \big| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} \Big| \sum_{n=r_{i-1}+1}^{r_i} \langle z_n^{k_j} , x'_n \rangle \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} \sum_{n=r_{i-1}+1}^{r_i} \| x'_n \| \Big) \sup_j \| z^{k_j} \| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \| x'_n \| \Big) \sup_j \| z^{k_j} \| < +\infty \, ;$$

y como T es incondicionalmente convergente, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_j})$ converge incondicionalmente en F. Y tenemos una contradicción con (a).

Por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ converge en F. Sea $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.

2) $(T(z^k))_k$ converge débilmente a y.

En efecto, sea $y' \in F'$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea

$$M_i = \sup_k |\langle T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k), y'\rangle| < +\infty$$

y sea $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_i < \frac{1}{2^i} + |\langle T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_i}), y'\rangle|$$

Por el mismo razonamiento que hicimos en 1) la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_i})$ es débilmente incondicionalmente convergente en $(\Sigma \oplus E_n)_0$ y, por tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_i})$ converge en F. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |\langle y_i, y'\rangle| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{y}$$

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} |\langle T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_i}), y'\rangle| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Como $(TP_{r_{i_0}}(z^k))_{k=1}^{\infty}$ converge débilmente a $\sum_{i=1}^{i_0} y_i$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle TP_{r_{i_0}}(z^k) - \sum_{i=1}^{i_0} y_i , y'\rangle| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall k \geq \nu .$$

Ahora, teniendo en cuenta que $z^k = \sum_{i=1}^{k} (P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k)$ para todo k,

$$|\langle T(z^k) - y , y'\rangle| = |\langle \sum_{i=1}^{k} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k) - \sum_{i=1}^{\infty} y_i , y'\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle \sum_{i=1}^{i_0} T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k) - \sum_{i=1}^{i_0} y_i , y'\rangle| + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |\langle y_i, y'\rangle| +$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^{k} |\langle T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^k) , y' \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle TP_{r_{i_0}}(z^k) - \sum_{i=1}^{i_0} y_i , y' \rangle| + \frac{\epsilon}{4} + \sum_{i=i_0+1}^{k} M_i \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \sum_{i=i_0+1}^{k} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{k} |\langle T(P_{r_i} - P_{r_{i-1}})(z^{k_i}) , y' \rangle| < \epsilon$$

para todo $k > \max(\nu, i_o)$.

Luego hemos demostrado que $T|_{(\Sigma \oplus E_n)_{oo}}$ es débilmente compacto. Como $(\Sigma \oplus E_n)_{oo}$ es denso en $(\Sigma \oplus E_n)_o$, tenemos que $T: (\Sigma \oplus E_n)_o \longrightarrow F$ es débilmente compacto.

13.3. Proposición: $(\Sigma \oplus E_n)_o$ tiene la R.P.D.P. si y sólo si E_n tiene la R.P.D.P. para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Es evidente por ser cada E_n isomorfo a un subespacio complementado de $(\Sigma \oplus E_n)_o$.

$\Leftarrow$) Sea $T: (\Sigma \oplus E_n)_o \longrightarrow F$ un operador que transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma. Como, para cada $m \in \mathbb{N}$, $P_m((\Sigma \oplus E_n)_o)$ es isomorfo a $\prod_{n=1}^{m} E_n$, si E_n tiene la R.P.D.P. para todo $n \in \mathbb{N}$, de 7.2.(c) se deduce que $T \cdot P_m$ es un operador débilmente compacto. Ahora, por el lema anterior, podemos concluir que $(\Sigma \oplus E_n)_o$ tiene la R.P.D.P.

13.4. Proposición: $(\Sigma \oplus E_n)_o$ tiene la P.D. si y sólo si E_n tiene la P.D. para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Es análoga a la demostración anterior teniendo en cuenta que los operadores que transforman sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes, son incondicionalmente convergentes.

13.5. Proposición: $(\Sigma \oplus E_n)_0$ tiene la propiedad V si y sólo si E_n tiene la propiedad V para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Es análoga a la de 13.3.

13.6. Proposición: $(\Sigma \oplus E_n)_0$ es un espacio hereditariamente D.P. si y sólo si E_n es hereditariamente D.P. para todo $n \in \mathbb{N}$ y existe $M > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada sucesión $(x_n^k)_k \subset E_n$ que converge a cero débilmente pero no en norma, existe una subsucesión $(y_n^k)_k$ de $(x_n^k)_k$ que es equivalente a la base canónica de c_0 y que verifica

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} a_k y_n^k \right\| \leq M \max_{1 \leq k \leq r} |a_k| \sup_k \|y_n^k\|$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{r}$

Demostración: Basta proceder como en 9.9. y 9.10.

14. Propiedades de los espacios $(\Sigma \oplus E_n)_p$

Si $1 \leq p < \infty$, para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la aplicación $\pi_m : (\Sigma \oplus E_n)_p \longrightarrow E_m$ por $\pi_m(x) = x_m$ para todo $x=(x_n) \in (\Sigma \oplus E_n)_p$. Es claro que π_m es una aplicación lineal, continua y de norma 1.

Los resultados que enunciamos a continuación tienen una prueba análoga a la del caso escalar, por ello omitimos su demostración.

14.1. Proposición: Una sucesión $(x^k) \subset (\Sigma \oplus E_n)_1$ converge a cero débilmente si y sólo si verifican las tres condiciones siguientes:

i) (x^k) está acotada.

ii) $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ converge a cero débilmente en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \|x_n^k\| < \varepsilon .$$

14.2. Proposición: Sea $1 < p < \infty$ y sea $A \subset (\Sigma \oplus E_n)_p$, entonces A es débilmente relativamente compacto si y sólo si

i) A está acotado; y

ii) $\pi_n(A)$ es débilmente relativamente compacto en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pasamos ahora a estudiar las propiedades de $(\Sigma \oplus E_n)_p$. Por sus diferentes comportamientos tratamos primero el caso en que $p=1$, y luego el de $1 < p < \infty$.

14.3. Proposición: Sea (E_n) una sucesión de espacios de Banach distintos de cero. Entonces

a) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ tiene la P.D.P. si y sólo si E_n tiene la P.D.P. para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ no tiene la R.P.D.P.

c) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ no tiene la P.D.

d) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ no tiene la propiedad V.

Demostración: Por ser todos los E_n distintos de cero, el espacio

$(\Sigma \oplus E_n)_1$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1, y como ℓ^1 no posee ni la R.P.D.P., ni la P.D., ni la propiedad V, es claro que se verifica b), c) y d).

a) Una implicación es evidente. Supongamos que E_n tiene la P.D.P. para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea $T: (\Sigma \oplus E_n)_1 \longrightarrow F$ un operador débilmente compacto y sea $(x^k) \subset (\Sigma \oplus E_n)_1$ una sucesión que converge a cero débilmente. Dado $\varepsilon>0$, por 14.1., existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \|x_n^k\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|} \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Si para cada $m\in\mathbb{N}$ consideramos la aplicación

$$i_m : E_m \longrightarrow (\Sigma \oplus E_n)_1$$
$$x_m \longrightarrow (0,\dots,0,\overset{m}{x_m},0,\dots)$$

tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} i_n(x_n)$ para todo $x=(x_n) \in (\Sigma \oplus E_n)_1$, y que los operadores $T\circ i_n : E_n \longrightarrow F$ son débilmente compactos. Como, para $1\leq n<n_\varepsilon$, la sucesión $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ converge a cero débilmente en E_n y E_n tiene la P.D.P., existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|T\circ i_n(x_n^k)\| < \frac{\varepsilon}{2\, n_\varepsilon \|T\|} \qquad \forall k\geq k_0 \quad \text{y para } 1\leq n< n_\varepsilon .$$

Así, si $k\geq k_0$

$$\|T(x^k)\| = \left\|T\left(\sum_{n=1}^{\infty} i_n(x_n^k)\right)\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} T\circ i_n(x_n^k)\right\| + \left\|\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} T\circ i_n(x_n^k)\right\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \|T\circ i_n(x_n^k)\| + \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \|T\|\,\|x_n^k\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Por tanto T transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma; con lo cual $(\Sigma \oplus E_n)_1$ tiene la P.D.P.

14.4. Proposición: Sea (E_n) una sucesión de espacios de Banach distintos de cero y sea $1 < p < \infty$. Entonces

a) $(\Sigma \oplus E_n)_p$ no tiene la P.D.P.

b) $(\Sigma \oplus E_n)_p$ tiene la R.P.D.P. si y sólo si E_n tiene la R.P.D.P. para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) $(\Sigma \oplus E_n)_p$ tiene la P.D. si y sólo si E_n tiene la P.D. para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) $(\Sigma \oplus E_n)_p$ tiene la propiedad V si y sólo si E_n tiene la propiedad V para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Por ser todos los E_n distintos de cero, $(\Sigma \oplus E_n)_p$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^p, y como ℓ^p no tiene la P.D.P. es claro que se verifica a).

b), c) y d) son consecuencia inmediata de

1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ E_n es isomorfo a un subespacio complementado de $(\Sigma \oplus E_n)_p$; y

2) Si para cada $m \in \mathbb{N}$ $i_m : E_m \longrightarrow (\Sigma \oplus E_n)_p$ es la aplicación definida por $i_m(x_m) = (0, \ldots, 0, \overset{m}{x_m}, 0, \ldots)$ para todo $x_m \in E_m$, entonces un operador $T : (\Sigma \oplus E_n)_p \longrightarrow F$ es débilmente compacto si y sólo si $T \circ i_n$ es débilmente compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

La demostración de 1) es trivial. Vamos a probar 2): Si T es débilmente compacto, como cada i_n es una aplicación lineal y continua, $T \circ i_n$ es débilmente compacto. Recíprocamente, supongamos que $T \circ i_n$ es débilmente compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. La aplicación

$$\Phi : (\Sigma \oplus E_n)'_p \longrightarrow (\Sigma \oplus E'_n)_q \qquad \text{(donde } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1\text{)}$$

$$x' \longrightarrow (x' \circ i_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

es un isomorfismo isométrico entre el dual de $(\Sigma \oplus E_n)_p$ y $(\Sigma \oplus E_n')_q$, por tanto, T'(B(F')) es un conjunto débilmente relativamente compacto en $(\Sigma \oplus E_n)_p'$ si y sólo si $A = \Phi T'(B(F'))$ es débilmente relativamente compacto en $(\Sigma \oplus E_n')_q$. Ahora bien, A es un conjunto acotado y, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\pi_m(A) = \{\pi_m(\Phi T'(y')) : y' \in B(F')\} = \{\pi_m((y' \cdot T \cdot i_n)_{n \in \mathbb{N}}) : y' \in B(F')\} =$$

$$= \{y' \cdot T \cdot i_m : y' \in B(F')\} = \{(T \cdot i_m)'(y') : y' \in B(F')\} =$$

$$= (T \cdot i_m)'(B(F'))$$

es un conjunto débilmente relativamente compacto en E_m' ya que el operador $(T \cdot i_m)'$ es débilmente compacto. Así, de 14.2. se deduce que T'(B(F')) es débilmente relativamente compacto y por tanto T es un operador débilmente compacto.

APENDICE

15. Propiedades de los operadores definidos en C(K,E)

Los resultados y las técnicas que hemos ido desarrollando a lo largo de la memoria nos permiten obtener algunos resultados sobre las propiedades de los operadores definidos en C(K,E).

En 1953 Grothendieck [19] probó que si F es débilmente secuencialmente completo entonces todo operador $T : C(K) \longrightarrow F$ es débilmente compacto. Años más tarde Pełczynski [29] consiguió rebajar la hipótesis sobre F imponiendo simplemente que F no contuviera subespacios isomorfos a c_0. A partir de entonces se ha tratado de extender este resultado al caso vectorial. Autores que han trabajado en ello han sido el mismo Pełczynski, Batt y Berg, Gamlen y Fierro entre otros (ver [29,3,18,15]). Los resultados que han obtenido pueden resumirse de la forma siguiente:

"Si E es reflexivo y F no contiene subespacios isomorfos a c_0, ó si E no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1 y F es débilmente secuencialmente completo, entonces todo operador

$$T : C(K,E) \longrightarrow F$$

es débilmente compacto".

Al tratar de extender al caso vectorial el resultado de Grothendieck y Pełczynski caben dos planteamiento diferentes; uno en la línea de los resultados que acabamos de citar:

Si F no contiene subespacios isomorfos a c_0 y todo operador de E en F es débilmente compacto ¿será cierto que todos los operadores de C(K,E) en F son débilmente compactos?,

y otro respecto a las condiciones que han de cumplir E, F y K para que todo operador de C(K,E) en F sea débilmente compacto:

Una condición necesaria para que los operadores de C(K,E) en F sean todos débilmente compactos es que todo operador de C(K) en F y de E en F también lo sea, pero ¿es suficiente?; y si no es así, ¿en qué casos es suficiente?

Vamos a ver en esta sección que el primer planteamiento es válido para una clase amplia de compactos.

En cuanto al segundo podemos decir que:

A la vista de 12.4. la respuesta a la primera pregunta es negativa pues si C(K) y E son espacios de Grothendieck infinito-dimensionales, entonces todo operador de C(K) en c_o y de E en c_o es débilmente compacto; sin embargo, como C(K,E) contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o, no todo operador de C(K,E) en c_o es débilmente compacto.

En cambio en algunos casos veremos que la condición del segundo planteamiento sí es suficiente; y que el problema general se puede reducir al compacto [0,1].

Comencemos por enunciar dos resultados importantes y conocidos que vamos a utilizar.

15.1. Teorema [29]: Si K es infinito entonces C(K) contiene un subespacio isomorfo a c_o.

15.2. Teorema [37]: Si E es un espacio de Banach separable y E_1 es un subespacio de E isomorfo a c_o entonces E_1 es complementado en E.

Como consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores y del hecho de que C(K) es separable si y sólo si K es metrizable, se tiene

<u>15.3. Corolario</u>: Si K es infinito y metrizable entonces C(K) contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o.

Pasemos ahora a demostrar los resultados anunciados.

<u>15.4. Proposición</u>: Si K es un compacto contable entonces son equivalentes:

a) Todo operador de C(K,E) en F es débilmente compacto.

b) Todo operador de C(K) en F y de E en F es débilmente compacto.

<u>Demostración</u>: Una implicación es evidente.

Supongamos que todo operador de C(K) en F y de E en F es débilmente compacto.

Si K es finito es claro que todos los operadores de C(K,E) en F son débilmente compactos.

Si K es infinito entonces, por 3.3. y 15.3., C(K) contiene un subespacio complementado isomorfo a c_o y, por tanto, F no puede contener subespacios isomorfos a c_o. Así, si $T : C(K,E) \longrightarrow F$ es un operador, por 1.1., T es incondicionalmente convergente. Por ello, de 2.2., de la hipótesis y de 7.4., se deduce que T es débilmente compacto (pues según 3.3. K es disperso y metrizable).

<u>15.5. Proposición</u>: Si K es un compacto disperso y F no contiene subespacios isomorfos a c_o, entonces son equivalentes:

a) Todo operador de C(K,E) en F es débilmente compacto.

b) Todo operador de E en F es débilmente compacto.

Demostración: Una implicación es trivial. La otra se demuestra análogamente a 7.5. teniendo en cuenta que como F no contiene subespacios isomorfos a c_0, por 1.1., los operadores de C(K,E) en F son todos incondicionalmente convergentes.

15.6. Proposición: Si todo operador de C([0,1],E) en F es débilmente compacto entonces todo operador de C(K,E) en F es débilmente compacto, para todo compacto K.

Demostración: Si todo operador de C([0,1],E) en F es débilmente compacto entonces todo operador de C([0,1]) en F y de E en F también lo es. Por 15.3. F no puede contener subespacios isomorfos a c_0. Así, por el resultado de Pełczynski citado en la página 109, todo operador de C(K) en F es débilmente compacto, para todo compacto K. De 15.4. y 3.5. deducimos que si K es metrizable todo operador de C(K,E) en F es débilmente compacto. Procediendo ahora de forma análoga a como hicimos en la segunda parte de la demostración de 7.5., concluimos que todos los operadores de C(K,E) en F son débilmente compactos, para cualquiera que sea el compacto K.

El planteamiento hecho para los operadores débilmente compactos lo podemos hacer también para otro tipo de operadores. Concretamente trataremos aquí los operadores de Dunford-Pettis (que son aquellos que transforman sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma; también se les llama operadores completamente continuos), y los operadores incondicionalmente convergentes. Para los primeros obtendremos resultados análogos a los de los operadores débilmente compactos; en cuanto a los segundos, daremos una caracterización completa de cuándo todos los operadores de C(K,E) en F son incondicionalmente convergentes.

15.7. Nota: Existen espacios E y F tales que todo operador de $C([0,1])$ en F y de E en F es Dunford-Pettis y sin embargo no todo operador de $C([0,1],E)$ en F lo es. En efecto: Como $C([0,1])$ y el ejemplo de Talagrand (6.9.) son espacios que tienen la P.D.P., los operadores definidos en $C([0,1])$ y en $\mathcal{C}$ con valores en un espacio reflexivo son todos de Dunford-Pettis. Por otra parte, Talagrand en [39] construyó un operador débilmente compacto $T : C([0,1],\mathcal{C}) \longrightarrow c_o$ que no es de Dunford-Pettis. Pero un importante resultado de Johnson y Figiel afirma que todo operador débilmente compacto se factoriza a través de un espacio reflexivo (ver p.e. [11] pág. 260); luego existe un espacio reflexivo R y existen dos operadores, $\tilde{T} : C([0,1],\mathcal{C}) \longrightarrow R$ y $S : R \longrightarrow c_o$, tales que $T = S{\cdot}\tilde{T}$. Con lo cual $\tilde{T} : C([0,1],\mathcal{C}) \longrightarrow R$ es un operador que no es de Dunford-Pettis, mientras que todos los operadores de $C([0,1])$ en R y de $\mathcal{C}$ en R sí lo son.

15.8. Proposición: Si K es un compacto contable entonces son equivalentes:

a) Todo operador de $C(K,E)$ en F es de Dunford-Pettis.

b) Todo operador de $C(K)$ en F y de E en F es de Dunford-Pettis.

Demostración: Una implicación es evidente. Supongamos que todo operador de $C(K)$ en F y de E en F es de Dunford-Pettis, entonces de igual forma que en 15.4. deducimos que todos los operadores de $C(K,E)$ en F son incondicionalmente convergentes. Ahora basta proceder como en la primera parte de la demostración de 6.5. (pues por 3.3. K es disperso y metrizable), teniendo en cuenta que todos los operadores de E^k en F son de Dunford-Pettis para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

15.9. Proposición: Si K es un compacto disperso y F no contiene subespacios isomorfos a c_o, entonces son equivalentes:

a) Todo operador de C(K,E) en F es de Dunford-Pettis.

b) Todo operador de E en F es de Dunford-Pettis.

Demostración: Es análoga a la de 6.5. teniendo en cuenta que como F no contiene subespacios isomorfos a c_o, por 1.1., los operadores de C(K,E) en F son todos incondicionalmente convergentes; y que si todo operador de E en F es de Dunford-Pettis entonces todo operador de E^k en F también lo es, para cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$.

15.10. Proposición: Si todo operador de C([0,1],E) en F es de Dunford -Pettis entonces todo operador de C(K,E) en F es de Dunford-Pettis, para todo compacto K.

Demostración: Si todo operador de C([0,1],E) en F es de Dunford-Pettis entonces todo operador de C([0,1]) en F y de E en F también lo es. Por 15.3. F no puede contener subespacios isomorfos a c_o. Así, por el resultado de Pełczynski citado en la página 109 y por el hecho de que todos los espacios C(K) tienen la P.D.P., todo operador de C(K) en F es de Dunford-Pettis, para todo compacto K. Utilizando 15.9. y 3.5. deducimos que si K es metrizable entonces todo operador de C(K,E) en F es de Dunford-Pettis; y procediendo como en la segunda parte de la demostración de 6.5. llegamos a la tesis.

15.11. Proposición: Todo operador de C(K,E) en F es incondicionalmente convergente si y sólo si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

a) K es finito y todo operador de E en F es incondicionalmente convergente.

b) E es de dimensión finita y todo operador de $C(K)$ en F es incondicionalmente convergente.

c) K es infinito, E es de dimensión infinita y F no contiene subespacios isomorfos a c_o.

<u>Demostración</u>:

$\Leftarrow$) es trivial teniendo en cuenta que si F no contiene subespacios isomorfos a c_o entonces, por 1.1., todo operador de $C(K,E)$ en F es incondicionalmente convergente.

$\Rightarrow$) Supongamos que todo operador de $C(K,E)$ en F es incondicionalmente convergente, entonces todo operador de $C(K)$ en F y de E en F también lo es. Si K es infinito y E es de dimensión infinita entonces, por 12.4., $C(K,E)$ contiene un subespacio complementado H isomorfo a c_o. Sea $P : C(K,E) \longrightarrow H$ una proyección. Si F contuviera un subespacio F_1 isomorfo a c_o, entonces el operador

$$T = \varphi \circ P : C(K,E) \longrightarrow F$$

donde $\varphi : H \longrightarrow F_1$ es un isomorfismo, no sería incondicionalmente convergente.

<u>15.12. Observación</u>: A partir de la proposición anterior podemos decir que, al igual que ocurre con los operadores débilmente compactos y de Dunford-Pettis, existen compactos K y espacios de Banach E y F tales que todo operador de $C(K)$ en F y de E en F es incondicionalmente convergente y sin embargo no todo operador de $C(K,E)$ en F lo es. Por ejemplo basta que $C(K)$ y E sean espacios de Grothendieck infinito-dimensionales y que F sea isomorfo a c_o para que esto ocurra.

Abreviaturas de las propiedades estudiadas

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDO, T., Convergent sequences of finitely additive measures, Pac. J. Math. 11, 395-404 (1961).

[2] ANDREWS, K., Dunford-Pettis sets in the space of Bochner integrable functions, Math. Ann. 241, 35-42 (1979).

[3] BATT, J. y E.J. BERG, Linear bounded transformations on the space of continuous functions, J. Functional Analisis 4, 215-239 (1969).

[4] BESSAGA, C. y A. PELCZYNSKI, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math. 17, 151-168 (1958).

[5] BESSAGA, C. y A. PELCZYNSKI, Spaces of continuous functions IV (On isomorphical classification of spaces of continuous functions), Studia Math. 19, 53-62 (1960).

[6] BOURGAIN, J., New Classes of $\mathcal{L}^p$-spaces, Lectures Notes in Mathematics 886, Springer-Verlag 1981.

[7] BOURGAIN, J., On the Dunford-Pettis property, Proc. Amer. Math. Soc. 81, 265-272 (1981).

[8] BROOKS, J.K. y N. DINCULEANU, Weak compactness in spaces of Bochner integrable functions and applications, Adv. in Math. 24, 172-188 (1977).

[9] BROOKS, J.K. y P.W. LEWIS, Linear operators and vector measures, Trans. Amer. Math. Soc. 193, 139-162 (1974).

[10] DIESTEL, J., A survey of results related to the Dunford - Pettis property, Proceedings of the conference on Integra-

tion, Topology, and Geometry in Linear Spaces, Contemporary Mathematics, Volume 2, Amer. Math. Soc. 1980.

[11] DIESTEL, J. y J.J. UHL, Jr., Vector measures, American Mathematical Society's Mathematical Surveys, Volume 15, Providence, R.I. 1977.

[12] DINCULEANU, N., Vector measures, Pergamon Press, Berlin, 1967.

[13] DOBRAKOV, I., On representation of linear operator on $C_o(T,X)$, Czech. Math. Journ. 20, 13-30 (1971).

[14] DUNFORD, N. y J.T. SCHWARTZ, Linear operators I, Pure and Appl. Math., Volume 7, Interscience, New York, 1958.

[15] FIERRO, C., Compacidad débil en espacios de funciones y medidas vectoriales, Tesis Doctoral, Madrid 1980.

[16] FIERRO, C., On weakly compact and unconditionally converging operators in spaces of vector-valued continuous functions (por aparecer).

[17] FLORET, K., Weakly compact sets, Lectures Notes in Mathematics 801, Springer-Verlag 1980.

[18] GAMLEN, J.L.B., On a theorem of A. Pelczynski, Proc. Amer. Math. Soc. 44, 283-285 (1974).

[19] GROTHENDIECK, A., Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), Canad. J. Math. 5, 129-173 (1953).

[20] HAGLER, J., A counterexample to several questions about Banach spaces, Studia Math. 55, 289-308 (1977).

[21] HORVATH, J., Topological Vector Spaces and Distributions I,

Addison-Wesley, 1966.

[22] JAMESON, G.J.O., Topology and Normed Spaces, Chapman and Hall, London 1974.

[23] JOSEFSON, B., Weak* sequential convergence in the dual of a Banach spaces does not imply norm convergence, Ark. Math. 13, 78-89 (1975).

[24] KHURANA, S.S., Grothendieck spaces, Illinois J. Math. 22, 79-80 (1978).

[25] KWAPIEN, S., Sur les espaces de Banach contenant c_o, Studia Math. 52, 187-188 (1974).

[26] LINDENSTRAUSS, J. y L. TZAFRIRI, Clasical Banach Spaces I, Springer-Verlag 1977.

[27] NISSENZWEIG, A., w* Sequential convergence, Israel J. Math. 22, 266-272 (1975).

[28] PELCZYNSKI, A., Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact, Bull. Acad. Polon. Sci. 10, 641-648 (1962).

[29] PELCZYNSKI, A., Projections in certain Banach spaces, Studia Math. 19, 209-228 (1960).

[30] PELCZYNSKI, A. y W. SZLENK, An example of a non-shrinking basis, Revue Roum. Math. Pures et Appli. 10, 961-966 (1965).

[31] PETHE, P. y N. THAKARE, A note on the Dunford-Pettis property and the Schur property, Indiana J. Math. 27, 91-92 (1978).

[32] PHILLIPS, R.S., On weakly compact subsets of a Banach space, Amer. J. Math. 65, 108-156 (1943).

[33] PISIER, G., Une propriété de stabilité de la classe des espaces ne contenant pas ℓ^1, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 286, 747-749 (1978).

[34] SAAB, E. y P. SAAB, A stability property of a class of Banach spaces not containing a complemented copy of ℓ^1, Proc. Amer. Math. Soc. 84, 44-46 (1982).

[35] SEEVER, G.L., Measures on F-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 133, 267-280 (1968).

[36] SEMADENI, Z., Banach spaces of continuous functions, Warsaw PWN 1971.

[37] SOBCZYK, A., Projections of the space (m) on its subspace (c_o), Bull. Amer. Math. Soc. 47, 938-947 (1941).

[38] STEGALL, C., Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property, Notices Amer. Math. Soc. 19, A-799 (1972).

[39] TALAGRAND, M., La propriété de Dunford-Pettis dans C(K,E), (por aparecer).

[40] MARIA GONZALEZ, J.L. de, Extensiones al teorema de Egoroff, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid (1981).