UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología

TESIS DOCTORAL

Aspectos aritméticos y geométricos del problema decimoséptimo de Hilbert para gérmenes analíticos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Jesús María Ruiz Sancho

Madrid, 2015

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E   DE   M A D R I D

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Algebra y Fundamentos

Aspectos aritméticos y geométricos del problema decimoséptimo de Hilbert para gérmenes analíticos

Memoria presentada por JESÚS M. RUIZ SANCHO para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Madrid, Septiembre de 1982.

a mis padres

... el concepto de la nostalgia geomé
trica es muy hermoso y certero, muy
delicado y exacto. Todo tiende a la
geometría -se quiere, soñadoramente,
suponer-; lo que acontece es que la
geometría tiene las lindes mucho más
remotas que aquello a lo que hoy aún
sigue llamándose geometría.

CAMILO JOSE CELA

Sea mi primer agradecimiento para el profesor Tomás Recio, que ha dirigido este trabajo, y ha dirigido a su autor además. Con él, para su esposa Isabel, que tan grande comprensión ha tenido con mis a veces intempestivas apariciones.

Agradezco también profundamente a don Pedro Abellanas, director del Departamento de Algebra y Fundamentos, todo el apoyo y la ayuda que siempre me ha prestado. Y a mis compañeros, Mª Emilia Alonso, Carlos Andradas, Julio Castellanos, José Javier Etayo, José Manuel Gamboa e Ignacio Luengo, el tiempo que han dedicado a discutir conmigo uno u otro aspecto de esta memoria.

Asimismo, debo citar aquí la excelente labor mecanográfica pacientemente llevaba a cabo por la Srta. Soledad Estévez.

Finalmente, pero no con menor énfasis, quiero manifestar, aunque sé que para ello ninguna frase es suficiente, mi agradecimiento a Mª Paz, por su presencia constante durante la realización de mi trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

Notas para una historia del problema decimoséptimo.

En el verano de 1900, HILBERT fue invitado como conferenciante principal del segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París. En su conferencia 'Mathematische Probleme', [1900](*), enumeró veintitrés problemas concernientes desde los Fundamentos hasta el Cálculo de Variaciones. El *decimoséptimo* era el siguiente:

> H^{17}.- *Sea* $f \in \mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n)$ *una función racional con coeficientes reales definida no negativa (esto es,* $f(0) \geqslant 0$ *si* f *está definida en* $a \in \mathbb{R}^n$*). Entonces* f *es suma de cuadrados de funciones racionales.*

Cuando propuso su problema, HILBERT lo había estudiado ya y resuelto en el caso de formas. En [1888] prueba que *una cuártica en tres variables definida no negativa es suma de tres cuadrados de cuádricas*, y que *para cada par* $(m,d) \neq (3,4)$ *de enteros* $\geqslant 3$, *existe una forma de grado* d *en* m *variables, definida no negativa, que no es suma de cuadrados de formas.* Menciona también como conocido el hecho de que una forma homogénea en dos variables definida no negativa es suma de dos cuadrados de formas (de donde, en particular, resulta H^{17} *para una variable)* y el de que una cuádrica en m va-

(*) Las referencias de estas 'Notas...' se incluyen al final de las mismas. El orden elegido es el cronológico. Las publicaciones de un mismo autor, o grupo de autores, correspondientes al mismo año se distinguen mediante letras minúsculas: [1977] EFROYMSON (a).

riables es suma de m cuadrados de formas lineales. Estos resultados inducían a considerar funciones racionales, y en [1893] HILBERT (b) probaría H^{17} *para dos variables* (utilizando *funciones abelianas*). Por otra parte, el problema podía plantearse para cuerpos ordenados en general, y el mismo HILBERT establece H^{17} *para* $\mathbb{Q}$ *y una variable*, al estudiar las construcciones con regla y compás, en la primera edición, de [1899], de sus 'Grundlagen der Geometrie' (véase a este respecto la conferencia de PRESTEL en Río de Janeiro [1978]).

La primera prueba de H^{17} llegaría en [1927], año en que ARTIN la obtiene, no sólo para $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$, sino *para todo subcuerpo de* $\mathbb{R}$ *con un único orden*. Esta solución se basa en la *teoría de cuerpos formalmente reales*.

Más tarde, ya en [1955] A. ROBINSON y en [1957] KREISEL, independientemente, abordan el problema mediante métodos de la Lógica. El primero, *teoría de modelos*, y el segundo, *teoría de demostraciones*. Además, obtienen precisiones adicionales sobre el número de cuadrados.

Los resultados de A. ROBINSON y KREISEL son los primeros que contienen información de índole *cuantitativa*. Ya desde el principio, aunque el planteamiento de HILBERT se refería principalmente al aspecto *cualitativo*, se consideró el problema de determinar el mínimo número $p\mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n)$ de sumandos necesarios para expresar cualquier función racional definida no negativa como suma de cuadrados (si no existe, convenimos $p\mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n) = +\infty$). El teorema fundamental a este respecto es de PFISTER, que en [1967] prueba la cota $p\mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n) \leq 2^n$, mediante su *teoría de formas cuadráticas multiplicativas*.

Finalmente, junto a los tres aspectos anteriores (el cualitativo, el cuantitativo y las cuestiones de la Lógica), aparece un cuarto que vuelve en cierto sentido sobre los primeros resultados de HILBERT relativos a formas. Considérese un polinomio $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ definido no negativo. Entonces $\delta^2 f$ es suma de cuadrados *de polinomios* para cierto polinomio δ, y sabemos que en general el denominador δ es inevitable; notemos $\mathcal{D}(f)$ el conjunto de ceros de todos estos posibles denominadores. $\mathcal{D}(f)$ mide cuán lejos está f de ser una suma de cuadrados *de polinomios*, y el problema consiste en estimar $\mathcal{D}(f)$. El primer resultado importante, consecuencia del trabajo de STENGLE en [1974], es que $\mathcal{D}(f) = \emptyset$ si f es definida positiva (esto es, $f(a) > 0$ para cada $a \in \mathbb{R}^n$). El último que conocemos es de DELZELL, en [1980], que prueba: codim $\mathcal{D}(f) \geq 3$.

Los párrafos anteriores resumen ciertos puntos sobresalientes entre la gran cantidad de investigaciones motivadas por el problema decimoséptimo. Hasta aquí nos hemos limitado al, digamos, problema clásico: polinomios y funciones racionales. Por supuesto, las cuestiones que comentamos han sido consideradas también en otros contextos: funciones analíticas, funciones de Nash, gérmenes... Con la intención de ofrecer una visión más completa de su evolución histórica, dividimos a partir de aquí nuestra exposición en dos secciones: una primera (I) sobre el problema clásico, en la que detallamos el esquema esbozado anteriormente; y una segunda (II), en la que inclumos la formulación moderna del problema y las soluciones que se han obtenido para ella.

I. El problema clásico

1. Hasta la primera solución.- Los resultados inmediatos al planteamiento del problema se refirieron al cuerpo de los números racionales. Citemos sólo el de LANDAU en [1906]: *una forma no negativa en dos variables con coeficientes en* $\mathbb{Q}$ *es suma de ocho cuadrados de formas*. En particular, $p\mathbb{Q}(x_1) \leqslant 8$. En este mismo trabajo, LANDAU revisa la demostración dada por HILBERT de H^{17} para $\mathbb{R}$ y dos variables, y obtiene la cota $p\mathbb{R}(x_1,x_2) \leqslant 4$. Estas acotaciones de LANDAU no serían mejoradas hasta 1971.

Es en [1927] cuando ARTIN publica la primera prueba de H^{17} para cualquier número de variables, y *para subcuerpos* K *de* $\mathbb{R}$ *con un único orden*. Su demostración se apoya esencialmente en la teoría de cuerpos formalmente reales, previamente desarrollada por él mismo y SCHREIER, [1927]. Sin embargo, la solución de ARTIN nada dice en el sentido cuantitativo.

2. Los métodos de la lógica.- En [1955] A. ROBINSON utiliza la teoría de modelos para mejorar los resultados de ARTIN. Una consecuencia importante de sus argumentos es que producen los primeros resultados cuantitativos: *existe una cota del número de cuadrados que depende del número de variables y del grado, pero no de los coeficientes* del polinomio que se considere.

Casi simultáneamente, en [1956], KREISEL obtiene una cota mejor mediante la teoría de demostraciones. Después, KREISEL seguiría estudiando H^{17}, especialmente la cuestión de la continuidad y computabilidad de la solución. Sólo al cabo de veinte años, en [1980], DELZELL obtendría una solución *constructiva y continua respecto de los coeficientes* (Para la historia de este aspecto, véase el capítulo I de la disertación del citado DELZELL).

Por otra parte, del trabajo de A. ROBINSON se deduce H^{17} *para cuerpos con un único orden, densos en su cierre real.* Se plantea así el problema de caracterizar los cuerpos que cumplen H^{17}. En este sentido, en [1965], LANG intenta redemostrar la solución de ARTIN sin utilizar el teorema de Sturm, y enuncia como corolario H^{17} *para cuerpos con un único orden.* Sin embargo, en [1967] DUBOIS construye un contraejemplo para este corolario. Finalmente, McKENNA prueba que *un cuerpo que cumple* H^{17} *tiene un único orden y es denso en su cierre real.* La prueba de este resultado, que completa el de A. ROBINSON, aparece en [1975], en un volumen publicado como homenaje a la memoria del mismo A. ROBINSON, fallecido en 1974.

3. La cuestión cuantitativa.- Después de los resultados parciales de A. ROBINSON y KREISEL la evolución es la siguiente. En [1964] CASSELS prueba que $p\mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n) \geqslant n+1$. En 1966 AX obtiene la cota $p\mathbb{R}(x_1,x_2,x_3) \leqslant 8$, y conjetura que $p\mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 2^n$, pero este trabajo no se publica. Por fin, en [1967], PFISTER consigue probar la conjetura de AX, mediante su teoría de formas cuadráticas multiplicativas: *si* K *es un cuerpo realmente cerrado, entonces*

$pK(x_1,\ldots,x_n) \leq 2^n$. La igualdad sólo ha sido probada para dos variables, por CASSELS, ELLISON y PFISTER en [1971], utilizando la teoría de curvas elípticas. Este resultado cierra la cuestión iniciada por LANDAU en 1906 . La otra cota de LANDAU, $p\mathbb{Q}(x_1) \leq 8$, es mejorada definitivamente también en los setenta. En [1971], POURCHET prueba que $pK(x_1) = 5$ *si* K *es un cuerpo formalmente real de números algebraicos tal que existe un ideal primo diádico* p *con* $K_p : \mathbb{Q}_2$ *impar*. En particular, $p\mathbb{Q}(x_1) = 5$. Después, en [1974], HSIA y JOHNSON prueban que *si* K *no cumple dicha condición*, $pK(x_1) = 4$. Además, conjeturan $pK(x_1,\ldots,x_n) = 2^n+3$ ó 2^n+2 según K cumpla o no la condición en cuestión. Finalmente, citemos un resultado de LEWIS y SCHINZEL [1980], según el cual, *si* $f \in \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$ *y para cada* $a \in \mathbb{Q}^n$, $f(a)$ *es suma de dos cuadrados en* $\mathbb{Q}$, *entonces* f *es suma de dos cuadrados en* $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$.

4. <u>De nuevo formas</u>.- Después del trabajo de HILBERT en [1888], el primer ejemplo *explícito* de una séxtica en tres variables definida no negativa, que no fuera suma de cuadrados de formas, se debe a MOTZKIN, en [1967]. Más tarde, en [1969], R.M. ROBINSON obtiene otros ejemplos, mediante una notable simplificación de las ideas de HILBERT. En [1977], CHOI y LAM (a) abordan un estudio sistemático de los ejemplos *extremales* (imprecisamente, los que no son suma de otros ejemplos), contemplando el conjunto de las formas de grado d en m variables definidas no negativas como un cono convexo y cerrado en un espacio afín. En [1978] REZNICK produce *todos los ejemplos extremales con no más de cuatro monomios*. En [1979] STENGLE encuentra una

séxtica en tres variables, definida no negativa, ninguna de cuyas potencias impares es suma de cuadrados de formas; en este mismo artículo, STENGLE caracteriza las formas homogéneas $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ definidas no negativas como las que *satisfacen una ecuación de dependencia entera* $\phi(-f) = 0$, *donde* $\phi(t)$ *es un polinomio mónico de grado impar cuyos coeficientes son sumas de cuadrados de formas*. Por último, en [1980], CHOI, LAM y REZNICK prueban un elegante teorema: *una séxtica en tres variables, definida no negativa, con más de diez ceros proyectivos, es suma de tres cuadrados de cúbicas; una cuártica en cuatro variables, definida no negativa, con más de once ceros proyectivos, es suma de seis cuadrados de cuádricas*. Añadamos por otra parte que en [1976] BERG, CHRISTENSON y RESSEL demuestran, mediante técnicas de Análisis Funcional, que *un polinomio en* m *variables, definido no negativo, es límite de sumas de cuadrados de polinomios en* m *variables*.

5. Multiformes.- También en relación con los resultados de HILBERT sobre formas, en [1973] CALDERON prueba que *si* $q(x_1,\ldots,x_n;y_1,y_2)$ *es una forma cuadrática en* (y_1,y_2) *cuyos coeficientes son a su vez formas cuadráticas en* $(x_1,\ldots,x_n)$, *y* q *es definida no negativa (en* $\mathbb{R}^{n+2}$*), entonces* q *es suma de* $3n(n+1)/2$ *formas bilineales en* (y_1,y_2) *y* $(x_1,\ldots,x_n)$. En [1975] CHOI encuentra una forma definida no negativa $q(x_1,x_2,x_3;y_1,y_2,y_3)$ bicuadrática en (x_1,x_2,x_3) e (y_1,y_2,y_3), que no es suma de cuadrados de formas bilineales, ejemplo que precisa el teorema de CALDERON. En [1976], DJOKOVIC obtiene la generalización siguiente: *una forma*

q *en* $n+2$ *variables, cuadrática respecto de las* n *primeras, y definida no negativa, es suma de* $2n$ *cuadrados de formas.* Finalmente, en [1980] CHOI, LAM y REZNICK prueban que para multiformas el resultado de DJOKOVIC es el mejor posible.

6. Denominadores.- Por último, consideremos la cuestión de si un polinomio $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ definido no negativo es ó no suma de cuadrados de polinomios. Para $n = 1$, ARTIN demostró en [1927] que sí, pero para $n \geqslant 2$ no es cierto siempre. En cualquier caso, por H^{17}, existe $\delta \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ tal que $\delta^2 f$ es suma de cuadrados de polinomios; diremos que δ es un *denominador admisible*. El primer resultado al respecto se debe a STENGLE, que en [1974] prueba que hay un denominador admisible de la forma $\delta = f^{2m} + g_i^2 +\ldots+ g_r^2$, $g_1,\ldots,g_r \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, $m > 0$. En consecuencia, *si* f *es definido positivo, entonces es suma de cuadrados de funciones regulares (*)* (en otro contexto, HABICHT en [1940] había obtenido $(x_1^2 +\ldots+ x_n^2)^m$ como denominador admisible de un polinomio definido positivo). Más tarde, en [1977], SWAN plantearía explícitamente la cuestión de *si un polinomio definido no negativo es siempre suma de cuadrados de funciones regulares.* En [1977], CHOI y LAM (b) muestran que esto *sólo es cierto para* $n = 2$. En [1980], CHOI, LAM, REZNICK y ROSENBERG prueban que *si* $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ *es suma de dos cuadrados en* $\mathbb{R}(x_1,\ldots,x_n)$*, lo es también en* $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$. El último resultado que conocemos es un teorema de DELZELL, que en [1980] introduce el

(*) Una función regular es una función racional con denominador no nulo por doquier.

'bad set' de un polinomio definido no negativo como *el conjunto de ceros de todos sus denominadores admisibles,* y demuestra que *tiene siempre codimensión* ≥ 3. Por ejemplo, si $f \in \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$ es definido no negativo, entonces es suma de cuadrados de funciones regulares en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

II. La formulación moderna.

Para incluir todas las posibles aplicaciones, el problema decimoséptimo se plantea actualmente como sigue:

H^{17} cualitativo global (resp. local).- Sean K un cuerpo ordenado, X un espacio topológico (resp. un germen de espacio topológico) y A un anillo de funciones de X con valores en K(*). Si $f \in A$ es definida no negativa, esto es, ≥ 0 sobre X, ¿es entonces suma de cuadrados en A?.

H^{17} cuantitativo.- Dado un anillo A, calcular su *número de Pitágoras* pA, esto es, el mínimo entero $p \geq 1$ tal que toda suma de cuadrados de A es suma de p cuadrados (si el mínimo no existe, $pA = +\infty$).

El problema cuantitativo anterior es ciertamente muy general. De hecho, el teorema de LAGRANGE, de [1770], que establece que *todo entero positivo es una suma de cuatro cuadrados* (este resultado tal

(*) Los elementos de A pueden no estar definidos en todo X; piénsese, por ejemplo, en las funciones meromorfas.

vez se remonte a Diofanto) puede abreviarse $pZ \leqslant 4$. Ahora bien, si A es un anillo de funciones en el cual el problema cualitativo tiene solución afirmativa, entonces pA *es el mínimo entero* $p \geqslant 1$ *tal que toda función de* A *definida no negativa es suma de* p *cuadrados*. Aquí nos ceñiremos a situaciones próximas a ésta. Para una reseña histórica, y la correspondiente bibliográfica, sobre el estudio del número de Pitágoras de anillos más generales, remitimos a CHOI, DAI, LAM y REZNICK [1982].

1. Anillos de funciones polinómicas.- Sean X un conjunto algebraico irreducible sobre un cuerpo realmente cerrado K, K[X] su anillo de funciones polinómicas (que es íntegro) y K(X) su cuerpo de funciones racionales.

En [1956] A. ROBINSON resuelve cualitativamente H^{17} para K(X), empleando la teoría de modelos. en [1974] GONDARD y RIBENBOIM dan una nueva demostración y prueban además mediante un teorema de PFISTER [1970] la cota $pK(X) \leqslant 2^d$, $d = \dim X$. Para curvas ($\dim X = 1$) obtienen la igualdad: $pK(X) = 2$.

En [1981] los trabajos de DUBOIS, de DUBOIS y RECIO, y de SCHWARZ tratan el problema de caracterizar los subconjuntos M de X tales que las funciones racionales $\geqslant 0$ sobre M sean las sumas de cuadrados. Independientemente, prueban que dichos conjuntos están caracterizados por la propiedad de *ser densos en el conjunto de los puntos centrales de* X (un punto $x \in X$ es *central* si existe un orden en K(X) en el que son positivas todas las funciones f con $f(x) > 0$).

En [1982], CHOI, DAI, LAM y REZNICK obtienen resultados importantes para el *anillo* $K[X]$: $pK[X] = +\infty$ *si* $\dim X \geqslant 3$; $pK[K^2] = +\infty$. También prueban que *si* X *es una curva,* $pK[X]$ *es finito*, y lo calculan en algunos casos particulares.

2. Anillos de funciones de Nash.- Sean X una variedad algebraica (*) de dimensión d de $\mathbb{R}^n$, y $\mathbb{R}[X]$ su anillo de funciones polinómicas. Sea U un abierto semialgebraico conexo de X. Notamos $\mathcal{N}[U]$ al anillo de las funciones de Nash de U, esto es, de las funciones analíticas $f : U \to \mathbb{R}$ que son algebraicas sobre $\mathbb{R}[X]$. Como U es conexo, $\mathcal{N}[U]$ es íntegro, y notamos $\mathcal{N}(U)$ a su cuerpo de fracciones. Un *anillo semialgebraico* es un subanillo $A[U]$ de $\mathcal{N}[U]$ que contiene a $\mathbb{R}[X]$; el cuerpo de fracciones de $A[U]$ se nota $A(U)$.

En [1976] MOSTOWSKI da un ejemplo de dos conjuntos semialgebraicos cerrados y disjuntos F y F' de $\mathbb{R}^n$, tales que no existe un polinomio >0 sobre F y <0 sobre F'. A continuación establece su *lema de separación*, según el cual sí *existe una función de Nash con esa condición*. Utilizando este lema resuelve afirmativamente el problema H^{17} cualitativo para $A = \mathcal{N}(U)$ con $X = \mathbb{R}^n$.

En [1976] EFROYMSON publica demostraciones más simples de lo anterior para el caso en que U esté definido por *un sistema de desigualdades estrictas simultáneas*. En [1978] BOCHNAK generaliza el re

(*) Entendemos por *variedad algebraica,* un conjunto algebraico irreducible no singular.

sultado de EFROYMSON a ciertos anillos semialgebraicos. Por ejemplo, *si* $A[U]$ *contiene las raíces cuadradas de los* $f \in A[U]$ *definidos positivos en* U, *entonces se cumple* H^{17} *cualitativo para* $A(U)$. Todavía, $X = \mathbb{R}^n$.

Antes, en [1977], BOCHNAK y EFROYMSON (a), habían detectado varios errores en el trabajo de MOSTOWSKI, lo que invalidaba sus demostraciones, y convertían las de EFROYMSON en las únicas ciertas, de modo que sólo se tenían pruebas completas de los resultados anteriores para abiertos definidos por un sistema de desigualdades estrictas simultáneas. Destaquemos, sin embargo, que en [1977] EFROYMSON (b) prueba que *si* U *es un abierto semialgebraico arbitrario de* $\mathbb{R}^2$ *y* $f \in N[U]$ *es* ≥ 0 *sobre* U, *entonces* f *es suma de dos cuadrados en* $N[U]$. Finalmente, en [1980] BOCHNAK y EFROYMSON publican las pruebas definitivas de los resultados de MOSTOWSKI, generalizándolos de hecho a anillos semialgebraicos: resuelven afirmativamente el problema H^{17} *cualitativo para* $A(U)$, *siendo* $A[U]$ *un anillo semialgebraico* (ya sin la restricción $X = \mathbb{R}^n$) *que cumpla la 'fórmula de la sustitución'*. Entre sus resultados cuantitativos citemos los siguientes: $pN(S^1) = 2$; $pN(X) = 3$ ó 4 *si* X *es una superficie compacta;* $4 \leqslant pN(\mathbb{R}^3) \leqslant 8$. Este trabajo de BOCHNAK y EFROYMSON puede considerarse como la primera exposición sistemática sobre funciones de Nash en geometría algebraica real. Contiene además una exposición histórica breve a la que nos remitimos como complemento.

3. <u>Anillos de funciones analíticas</u>.- Sea X una variedad analítica conexa no singular. Notamos $\mathcal{O}[X]$ a su anillo de funciones analíticas, que es íntegro, y $\mathcal{O}(X)$ al de funciones meromorfas.

En [1975] BOCHNAK y RISLER establecen los primeros resultados en el caso analítico: *si X es una superficie compacta, o para compacta con $H^1(X,\mathbb{Z}/(2)) = \{0\}$, una función analítica $f : X \to \mathbb{R}$ no negativa por doquier, es suma de cuadrados de funciones analíticas. En el caso compacto bastan siete cuadrados; en el otro, con la condición adicional $H^2(X,\mathbb{Z}) = \{0\}$, bastan dos.*

En [1981] BOCHNAK, KUCHARZ y SHIOTA resuelven completamente el problema para superficies, probando el anterior resultado cualitativo para una superficie cualquiera. En el sentido cuantitativo demuestran que $p\mathcal{O}[X] = 3$ ó 2 *según X sea compacta o no.* Además obtienen una respuesta parcial en dimensión arbitraria: *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función analítica no negativa por doquier, cuyos ceros son aislados. Entonces f es suma de cuadrados de funciones meromorfas.*

4. <u>Anillos de series</u>.- Sean $\mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_n]]$, $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ los anillos de series formales, convergentes y de Nash (esto es, series formales algebraicas sobre $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$).

En [1972] RISLER resuelve el problema H^{17} cualitativo para el cuerpo de fracciones de $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ (este anillo se identifica con el de gérmenes de función analítica en $\mathbb{R}^n_0$). En 1973 MERRIEN lo hace para el cuerpo de fracciones de $\mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_n]]$ (utilizando *gérmenes de variedad formal* en el planteamiento). Ambas demostracio nes imitan el argumento dado por ARTIN en el caso clásico, y pueden adaptarse a $\mathbb{R}<x_1,\dots,x_n>$ (incluso son válidas para un cuerpo K realmente cerrado arbitrario). En [1979] ROBBIN, empleando resultados de Lógica, desarrolla, también inspirado en las ideas de ARTIN, una *técnica de especialización,* que engloba los resultados anteriores.

En [1975] BOCHNAK y RISLER demuestran que *si* $f \in \mathbb{R}\{x_1,x_2\}$ *es* $\geqslant 0$ *sobre* $\mathbb{R}^2_o$, entonces *es suma de dos cuadrados en* $\mathbb{R}\{x_1,x_2\}$, y en 1980 BOCHNAK y EFROYMSON dan un ejemplo de una serie $f \in \mathbb{R}\{x_1,x_2,x_3\}$ que es $\geqslant 0$ sobre $\mathbb{R}^3_o$ pero no suma de cuadrados en $\mathbb{R}\{x_1,x_2,x_3\}$.

Finalmente, citemos un resultado cuantitativo de CHOI, DAI, LAM y REZNICK en [1982]: $p\mathbb{R}<x_1,\dots,x_n> = p\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\} =$ $= p\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]] = +\infty$ *si* $n \geqslant 3$.

5. Los teoremas de los ceros.- Terminaremos esta reseña histórica con algunos comentarios sobre los teoremas de los ceros en geometría real. En general, el *problema de los ceros* para un anillo A de funciones reales o complejas de un espacio (o un germen) X, consiste en describir algebraicamente las funciones de A que se anulan sobre los ceros de un ideal dado I de A. Por supuesto, en primer lugar hay que citar el clásico Nullstellensatz de HILBERT para $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, en [1893] (a), y en segundo el de RÜCKERT para $A = \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$, en [1932].

En el caso real, la historia de este problema está estrecha mente vinculada a la del decimoséptimo. Se ha escrito que el propio HILBERT pensaba en resolver el problema de los ceros para $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ y presentía que el decimoséptimo era previo a esa solución. Si éste era el pensamiento de HILBERT, la historia, aunque al cabo de casi setenta años, lo ha confirmado plenamente. Habitualmente, el enunciado de un Nullstellensatz real es: un ideal I de A coincide con el de las funciones nulas sobre los ceros de I si y sólo si A/I es ordenable.

El primer teorema de los ceros real aparece en [1969], año en el que DUBOIS lo obtiene haciendo uso esencial de los resultados de ARTIN y LANG sobre H^{17}. Después, en [1970], RISLER refina el teorema de DUBOIS. Digamos también que en [1974] EFROYMSON publica una prueba sumamente elegante basada en el *principio de Tarski*.

Para gérmenes de función analítica es RISLER en [1972] quien resuelve el problema. En [1973] MERRIEN lo hace para series formales. Análogamente se puede probar para series de Nash. En [1975] LASSALLE expone un teorema que generaliza simultáneamente el teorema de los ceros de MERRIEN y la solución cualitativa de H^{17}, también de MERRIEN (II.4). Este resultado de LASSALLE es asimismo válido para series convergentes y de Nash.

En todos los casos anteriores es fundamental, de un modo u otro, resolver previamente el problema decimoséptimo. Quizá el trabajo de ROBBIN en [1979], citado en el número II.4 anterior, sea el que mejor ponga de manifiesto este hecho, pues su teoría de especialización permite deducir prácticamente todos los teoremas anteriores, e, incluso, los teoremas de los ceros algebraico y analítico en el caso complejo.

Por último, citemos los trabajos de BOCHNAK en [1973], sobre el problema de los ceros para funciones diferenciables, y de ADKINS y LEAHY en [1976] para funciones analíticas reales, que contienen interesantes soluciones parciales.

Referencias históricas

[1770] LAGRANGE, J.L.: Démonstration d'un théoreme d'arithmétique. Nouveaux Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belle-Lettres de Berlin.

[1888] HILBERT, D.: Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. Math. Ann. 32, pp. 342-350.

[1893] HILBERT, D.: (a) Über die vollen Invariantensysteme. Math. Ann. 42, pp. 313-373. (b) Über ternare definite Formen. Acta Math. 18, pp. 169-197.

[1899] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie. (Teübner)

[1900] HILBERT, D.: Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten, pp. 253-297. (También en Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems. Proc. Symp. in Pure Math. 28, A.M.S., 1976).

[1906] LANDAU, E.: Über die Darstellung definiter Funktionen in Quadraten. Math. Ann. 62, pp. 272-285.

[1927] ARTIN, E.; SCHREIER, O.: Algebraische Konstruktionen reeller Körper. Abhandl. Math. Sem. Hamburg. 5, pp. 85-99.

ARTIN, E.: Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abhandl. Math. Sem. Hamburg 5, pp. 100-115.

[1932] RÜCKERT, W.: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Ann. 107, pp. 259-281.

[1940] HABICHT, W.: Über die Losbarkeit gewissen algebraischer Gleichungssysteme. Comm. Math. Helv. 12, pp. 317-322.

[1955] ROBINSON, A.: On ordered fields and definite forms. Math. Ann. 130, pp. 257-271.

[1956] ROBINSON, A.: Further remarks on ordered fields and definite forms. Math. Ann. 130, pp. 405-409.

[1957] KREISEL, G.: Hilbert's 17^{th} Problem, I & II. Bull. A.M.S. 63, pp. 99-100.

[1964] CASSELS, J.W.S.: On the representation of rational functions as sums of squares. Acta Arith. 9, pp. 79-82.

[1965] LANG, S.: Algebra (Addison-Wesley, first edition).

[1967] DUBOIS, D.W.: Note on Artin's solutions of Hilbert's 17^{th} Problem. Bull. A.M.S. 76, pp. 540-541.

PFISTER, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Invent. Math. 4, pp. 229-237.

MOTZKIN, T.S.; The aritmetic-geometric inequality. En Inequalities, vol. I, pp. 205-224, Shisha, O. ed. New York, Academic Press.

[1969] DUBOIS, D.W.: A nullstellensatz for ordered fields. Arkiv for Mat. 8, pp. 111-114.

ROBINSON, R.M.: Some definite polynomials which are not sums of squares of real polynomials. Notices A.M.S. 16, p. 554.

[1970] PFISTER, A.: Sums of squares in real functions fields. Actes, Congres intern. math. 1, pp. 297-300.

RISLER, J.J.: Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles. C.R.Ac.S. Paris, t. 271 (A), pp. 1171-1173.

[1971] CASSELS, J.W.S.; ELLISON, W.J.; PFISTER, A.: On sums of squares and on elliptic curves over function fields. J. Number Th. 3, n° 2, pp. 125-149.

POURCHET, Y.: Sur la représentation en somme de carrées des polynomes a une indeterminée sur un corps de nombres algebriques. Acta Arith. 19, pp. 89-104.

[1972] RISLER, J.J.: Un théoreme des zéros en géométrie analytique réelle. C.R.Ac.S. Paris, t. 274 (A), pp. 1488-1490.

[1973] BOCHNAK, J.: Sur le théoreme des zéros "différentiable". Topology 12, pp. 417-424.

CALDERÓN, A.P.: A note on biquadratic forms. Linear Alg. and Appl. 7, pp. 175-177.

MERRIEN, J.: Un théoreme des zéros pour les idéaux des séries formelles a coefficients réels. C.R.Ac.S. París, t. 276 (A), pp. 1055-1058.

[1974] EFROYMSON, G.: Local reality on algebraic varieties. J. of Alg. 29, pp. 133-142.

GONDARD, D.; RIBENBOIM, P.: Fonctions définies positives sur les variétés réelles. Bull. Sc. Math. 2^{e} série, 98, pp. 39-47.

HSIA, J.S.; JOHNSON, R.P.: On the representation in sums of squares for definite functions in one variable over an algebraic number field. Amer. J. Math. 96 (3), pp. 448-453.

STENGLE, G.: A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. Math. Ann. 207, pp. 87-97.

[1975] BOCHNAK, J.; RISLER, J.J.: Le théoreme des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^{e} serie (8), pp. 343-364.

CHOI, M.D.: Positive Semidefinite Biquadratic Forms. Linear Alg. and App. 12, pp. 95-100.

LASSALLE, G.: Sur le théoreme des zéros differentiables. En Singularités d'applications differentiables. pp. 70-97. Lecture Notes, 535 (Springer).

McKENNA, K.: New facts about Hilbert's seventeenth problem. En Model Theory and Algebra. A Memorial tribute to Abraham Robinson, pp. 220-230. Lecture Notes, 498 (Springer).

[1976] ADKINS, W.A.; LEAHY, J.V.: A global real analytic Nullstellensatz. Duke Math. J. 43 (1), pp. 81-86.

BERG, C.; CHRISTENSON, J.P.R.; RESSEL, P.: Positive defite functions an abelian semigroups. Math. Ann. 223 (3), pp. 253-274.

DJOKOVIC, D.Z.: Hermitian Matrices over Polynomial Rings. J. of Alg. 43, pp. 359-374.

EFROYMSON, G.: Substitution in Nash functions. Pac. J. of Math. 63 (1), pp. 137-145.

MOSTOWSKI, T.: Some properties of the ring of Nash functions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, pp. 243-266.

[1977] BOCHNAK, J.: MR 54 # 12761.

CHOI, M.D.; LAM, T.Y.: (a) Extremal positive semidefinite forms. Math. Ann. 231, pp. 1-18. (b) An old question of Hilbert. Proceedings of Conference on Quadratic Forms (Queen's Papers, Kingston, Ontario).

EFROYMSON, G.: (a) Zbl. 335, 14001. (b) Sums of squares in planar Nash rings. Univ. New Mexico, report 331.

SWAN, R.G.: Topological extensions of projective modules. Trans. A.M.S. 230, pp. 201-234.

[1978] BOCHNAK, J.: Sur le 17ème probleme de Hilbert pour les fonctions de Nash. Proc. A.M.S. 71 (2), pp. 183-188.

PRESTEL, A.: Sums of squares over fields. Atas da 5ª Escola de Algebra (Soc. Brasileira de Matemática, Río de Janeiro).

REZNICK, B.: Extremal psd forms with few terms. Duke Math. J. 45 (2), pp. 363-374.

[1979] ROBBIN, J.W.: Evaluation fields for power series. I. The Nullstellensatz. II. The Reelnullstellensatz. J. of Alg. 57, pp. 196-222.

STENGLE, G.: Integral solution of Hilbert's seventeenth Problem. Math. Ann. 246, pp. 33-39.

[1980] BOCHNAK, J.; EFROYMSON, G.: Real Algebraic Geometry and the 17th Hilbert Problem. Math. Ann. 251, pp. 213-241.

CHOI, M.D.; LAM, T.Y., REZNICK, B.: Real zeros of positive definite forms, I. Math. Z. 171, pp. 1-26.

CHOI,; LAM, T.Y.; REZNICK, B.; ROSENBERG, A.: Sums of squares in some integral domains. J. of Alg. 65, pp. 234-256.

DELZELL, Ch.N.: A constructive, continuous solutions to Hilbert's 17th Problem in semi-algebraic geometry. Dissertation, Stanford Univ.

LEWIS, D.J.; SCHINZEL, A.: Quadratic Diophantine Equations with parameters. Acta Arith. 37, pp. 133-141.

[1981] BOCHNAK, J.; KUCHARZ, W.; SHIOTA, M.: On Equivalence of Ideals of Real Global Analytic Functions and the 17th Hilbert Problem. Invent. Math. 63, pp. 403-421.

DUBOIS, D.W.: Second note on Artin's solutions of Hilbert's 17th Problem. Order Spaces. Pac. J. of Math. 97 (2), pp. 357-371.

DUBOIS, D.W.; RECIO,T.: A note on Robinson's non-negativity criterion (por aparecer).

SCHWARTZ, N.: The strong topology on real algebraic varieties (por aparecer).

[1982] CHOI, M.D.; DAI, Z.D.; LAM, T.Y.; REZNICK, B.: The Pythagoras Number of Some Affine Algebras and Local Algebras (por aparecer).

Sumario de resultados.

Esta memoria trata del problema decimoséptimo de Hilbert para gérmenes analíticos, tal y como se ha formulado en la introducción histórica precedente. Está compuesta por tres capítulos, cuyo contenido describimos a continuación.

Capítulo 0. Consta de una única sección, (§0), que es esencialmente un resumen de definiciones y resultados básicos suficientemente conocidos de la Geometría Analítica. Demostramos, también, algunos otros nuevos que, aunque motivados por necesidades posteriores, creemos están mejor emplazados como preliminares.

Capítulo I. Está dedicado estrictamente al problema decimoséptimo. Obtenemos: la solución del problema cualitativo, (§§1 y 2), algunos resultados sobre el cuantitativo, (§3), y otros específicos del caso de curvas, (§4), y del de superficies, (§5).

El problema cualitativo.- Sea X_o un germen irreducible. Notamos $\mathcal{O}[X_o]$ a su anillo de funciones y $\mathcal{O}(X_o)$ a su cuerpo. Sea $\mathcal{S}[X_o]$ (resp. $\mathcal{S}(X_o)$) el conjunto de los $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que son suma de cuadrados en $\mathcal{O}[X_o]$ (resp. en $\mathcal{O}(X_o)$). Si $Z_o \subset X_o$, notamos $\mathcal{P}(Z_o)$ al conjunto de los $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que son ≥ 0 sobre Z_o. En fin, sean X_o^* el lugar de dimensión máxima de X_o y $\mathrm{reg}_* X_o$ el lugar regular de dimensión máxima. Con estas notaciones

Solución del problema cualitativo (2.1).- $\mathcal{P}(X_o^*) = \mathcal{S}(X_o)$

Deducimos esta solución, mediante la teoría de Artin-Schreier, del

Teorema de especialización (1.2).- *Sean* $f_1,\dots,f_r$ *funciones no nulas de* $\mathcal{O}[X_o]$. *Una condición necesaria y suficiente para que* $f_1,\dots,f_r$ *sean simultáneamente positivas en algún orden de* $\mathcal{O}[X_o]$ *es que el germen* $\{f_1>0,\dots,f_r>0\}\cap$ $\cap\, X_o^*$ *sea no vacío.*

La prueba que presentamos de este teorema utiliza el criterio de Serre, [49](*), y el teorema de aproximación de M. Artin, [3]. Necesitamos también demostrar un lema que tiene interés en sí mismo y refina un resultado de Risler, [48]:

Lema de extensión de órdenes (1.4.1).- *Todo orden de un álgebra analítica íntegra se extiende a su completado* $\hat{A}$.

Como consecuencia de la solución del problema cualitativo se tiene:

$$\mathcal{S}[X_o]\subset \mathcal{P}(X_o)\subset \mathcal{P}(X_o^*) = \mathcal{S}(X_o)$$

y los contenidos son, en general, estrictos. Para estudiar la inclusión $\mathcal{S}[X_o]\subset \mathcal{S}(X_o)$ introducimos, siguiendo a Delzell [16], el

Lugar de denominadores (2.3).- *Si* $f\in\mathcal{S}(X_o)$, $\mathcal{D}(f)$ *es el germen de ceros de todos los* $\delta\in\mathcal{O}[X_o]$ *tales que* $\delta^2 f\in\mathcal{S}[X_o]$.

Siempre es $\dim\mathcal{D}(f)<\dim X_o$, y $\mathcal{D}(f)=\emptyset$ si y sólo si $f\in\mathcal{S}[X_o]$. Obtenemos además la

---

(*) Las referencias, entre corchetes, de este sumario y de todo el resto de la memoria se incluyen al final de la misma.

Proposición (2.5).- *Supóngase que* X_o *tiene la siguiente propiedad: para cada ideal primo real* p *de altura 1 de* $\mathcal{O}[X_o]$, *el anillo local* $\mathcal{O}[X_o]_p$ *es regular. Entonces* $\mathrm{codim}_{X_o} \mathcal{D}(f) \geqslant 2$ *para cada* $f \in S(X_o)$.

La demostración requiere previamente la versión real de un importante teorema de Abhyankar sobre gérmenes complejos, [1]. Para superficies se tiene:

Proposición (2.6.c).- *Si* X_o *es un germen de superficie, existe un germen de curva* $c_o \subset X_o$ *tal que* $\mathcal{D}(f) \subset c_o$ *para cada* $f \in S(X_o)$.

El último resultado de la sección 2 es la

Proposición (2.10).- $\mathcal{P}(X_o) = \{f \in S(X_o) : \mathcal{D}(f) \subset \mathcal{V}(f)\}$.

Para obtenerla hay que establecer primero en el caso analítico los teoremas de Stengle, [50]. Una vez más, el criterio de Serre permite aplicar a este fin el método de Brumfiel [9].

El problema cuantitativo.- En el breve epígrafe 3, introducimos los

Números de Pitágoras de X_o (3.1).- $p[X_o] = p(\mathcal{O}[X_o])$, $p(X_o) = p(\mathcal{O}(X_o))$.

Los únicos resultados conocidos se referían al caso liso, $X_o = \mathbb{R}^n_o$. Aquí obtenemos mediante una aplicación conveniente del le ma de selección de una curva, y un teorema de Choi et al. [14], la

> Proposición (3.3).- *Si* dim $X_o \geq 4$ *(X_o no necesariamente regular), entonces* $p[X_o] = +\infty$.

Casi todo el resto de la sección 3 desarrolla una serie de lemas dirigidos al estudio de las sumas de dos cuadrados, que se aplicarán a la singularidad del icosaedro en el §5.

Termina el §3 con dos resultados sobre $p(\mathbb{R}^n_o)$, $n \geq 3$.

Gérmenes de curva.- Sea X_o un germen de curva irreducible singular de multiplicidad m y conductor c. En el §4 completamos en primer lugar la solución cualitativa:

> Proposición (4.2) y (4.3).- $P(X_o) \setminus S[X_o] \neq \emptyset$. *Si* X_o *es un retroceso, cada hiperplano transversal a* X_o *define una función* $h \in P(X_o) \setminus S[X_o]$.

En lo que al aspecto cuantitativo se refiere, desingularizando se ve que $p(X_o) = 1$, luego sólo consideraremos el número de Pitágoras $p[X_o]$. Mediante un argumento con formas cuadráticas probamos:

> Proposición (4.5).- $p[X_o]$ *es finito.*

El resto de la sección 4 trata de las curvas pitagóricas: X_o es pitagórica si $p[X_o] = 1$. Obtenemos un criterio para que X_o no lo sea (criterio de los dos enteros (4.8)) y ciertos ejemplos genéricos de curvas que sí lo son, (4.10.3). Deducimos:

<u>Proposición</u>.- (a) (4.11), (4.13) y (4.14). *Si* $m = 2$, *entonces* X_o *es plana y pitagórica. Si* X_o *es Gorenstein (en particular plana) y pitagórica, entonces* $m = 2$.

(b) (4.7) y (4.12). *Si* $m = c$ *ó* $m = c-2$, *entonces* X_o *es pitagórica. Para cualquier otro par admisible de multiplicidad y conductor, existen curvas pitagóricas y curvas no pitagóricas.*

(c) (4.15) *Si* X_o *es plana, entonces* $p[X_o] = 1$ *ó* 2 *según sea* $m \leqslant 2$ *ó* >2.

Finalmente, obtenemos la Tabla I de (4.16) que contiene <u>todas las curvas pitagóricas de multiplicidad $\leqslant 5$</u>. La larga demostración, (4.17) a (4.20), se basa en un análisis cuidadoso del semigrupo de valores.

<u>Gérmenes de superficie</u>.- Primeramente, (5.1), mejoramos en dimensión 2 el criterio del cambio de signo que caracteriza los ideales primos reales principales, probado antes en dimensión arbitraria, (1.8). Después consideramos las singularidades factoriales y racionales. Estas vienen clasificadas por el teorema de Brieskorn, [8], en el caso complejo, y el de Lipman, [35], en el caso real. En lo que a nuestro problema se refiere probamos la

<u>Proposición</u>.- (a) (5.3) *Sea* X_o *la singularidad del icosaedro. Entonces* $P(X_o) = S[X_o]$ *y* $p[X_o] = p(X_o) = 2$.

(b) *Si* X_o *es un germen de superficie singular, factorial y racional, distinta de la del icosaedro, entonces*

$P(X_o) \neq S[X_o]$.

El método empleado en (a) -complexificación y criterio del cambio de signo- puede parecer aplicable a una situación más general. Esto es, sin embargo, ficticio, pues:

Proposición (5.4).- *Si* X_o *es un germen de superficie singular cuyo complexificado es factorial, entonces, salvo un isomorfismo analítico real,* X_o *es la singularidad del icosaedro.*

La demostración se basa en el citado teorema de Brieskorn, en un viejo resultado de Kirby sobre puntos dobles, [31], y en la trivialidad del espacio de moduli real de $y^3+z^5 = 0$ (consecuencia de resultados de Zariski, [54]).

A continuación, contemplamos el aspecto topológico del criterio del cambio de signo, analizando las dos condiciones suficientes que conocemos para que se cumpla ($\mathrm{reg}_* X_o$ conexo en (1.8) y $X_o^* \setminus \{0\}$ conexo en (5.1)). Si X_o es un germen de superficie se tiene:

Proposición (5.7).- *Si* $\mathrm{reg}_* X_o$ *es conexo, entonces* X_o^* *es topológicamente trivial.*

Proposición (5.10).- *Si* X_o *es una singularidad aislada y* $X_o \setminus \{0\}$ *es conexo, entonces* X_o *es topológicamente trivial.*

Las demostraciones consisten en reconstruir simplicialmente el germen dado mediante el teorema de parametrización local. Incluimos también cuatro ejemplos interesantes al respecto.

Los dos últimos resultados de esta sección 5 son de índole cuantitativa:

Proposición.- (a) (5.12). *Si* X_o *es un germen de superficie irreducible, entonces* $p(X_o)$ *es finito.*

(b) (5.13.a) *Si* X_o *es un germen de superficie irreducible de* $\mathbb{R}^3_o$, *entonces* $p(X_o)$ *no excede al doble de la multiplicidad de* X_o.

Capítulo II. El problema de la separación, al que dedicamos la sección 7, es una de las cuestiones fundamentales de la Geometría Real. Por ejemplo, [6], su solución para conjuntos algebraicos y funciones de Nash ha permitido resolver el problema decimoséptimo para anillos semialgebraicos. Asimismo, en el contexto analítico local son imprescindibles diversas formas de separación para precisar y mejorar (§§6 y 8) los resultados cualitativos del capítulo I. Además, las técnicas de separación que desarrollamos nos sirven luego para resolver otros problemas no directamente ligados al decimoséptimo: descripción del lugar de dimensión máxima de un conjunto semianalítico o semialgebraico, (§9); lema de selección de una hipersuperficie y dimensión de Krull de un álgebra analítica real, (§10); teoría de órdenes centrales en cuerpos de funciones meromorfas (§11).

Gérmenes de dimensión pura.- En la sección 6 estudiamos la caracterización de los gérmenes irreducibles X_o para los cuales la solución cualitativa es $\mathcal{P}(X_o) = \mathcal{S}(X_o)$. Demostraremos:

Proposición (6.1).- $\mathcal{P}(X_o) = \mathcal{S}(X_o)$ *si y sólo si* X_o *es de dimensión pura.*

Una parte es evidente, a partir de (2.1), pero no así la otra. En este §6 introducimos, siguiendo a Stengle [50], la

Definición (6.3).- $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *es laxo si para cualesquiera* $f,g \in \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$ con $\mathcal{V}(g) \supset X_o \cap \{f > 0\}$ *se tiene* $\mathcal{V}(g) \supset X_o$.

Probamos entonces, (6.5), que $\mathcal{P}(X_o) = \mathcal{S}(X_o)$ si y sólo si X_o es laxo, lo que convierte (6.1) en un problema de separación que queda resuelto por la

Proposición (6.2) y (7.4).- *Un germen analítico es laxo si y sólo si es irreducible de dimensión pura.*

La prueba del anterior resultado depende esencialmente de los lemas de separación que exponemos a continuación.

Los lemas de separación.- El §7 contiene el

Primer lema de separación (7.2).- *Sea* Z_o *un germen semianalítico abierto de* $\mathbb{R}^n_o$ *y* $c_o \subset Z_o$ *una semirrama de curva analítica. Entonces existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *tal que* $c_o \subset \{h > 0\} \subset Z_o$.

La demostración se hace por inducción sobre el mínimo número de explosiones del origen necesarias para resolver la singularidad de c_o. En el caso regular se procede constructivamente, utilizando una desigualdad de Łojasiewicz, [37], para aproximar la distancia de c_o a $\mathbb{R}^n_o \setminus Z_o$.

Para aplicaciones posteriores, deducimos de (7.2):

<u>Lema de separación de curvas</u> (7.5).- *Sean* A_o *y* B_o *dos gérmenes cerrados semianalíticos de dimensión 1 de* $\mathbb{R}^n_o$ *con* $A_o \cap B_o = \{0\}$. *Entonces existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *que es* >0 *sobre* $A_o \setminus \{0\}$ *y* <0 *sobre* $B_o \setminus \{0\}$.

Por otra parte, este segundo resultado de separación está relacionado con una versión mejor de (7.2), que hemos podido establecer en el caso plano:

<u>Lema de separación fuerte</u> (7.7).- *Sea* Z_o *un germen semianalítico abierto de* $\mathbb{R}^2_o$ *y* $c_o \subset Z_o$ *una semirrama de curva analítica. Entonces existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *tal que* $c_o \subset \{h > 0\} \subset \{h \geqslant 0\} \setminus \{0\} \subset Z_o$.

Se deduce fácilmente de éste el lema (7.5), una vez que se define una proyección lineal conveniente, $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, mediante un argumento típico a base del teorema de Sard.

Como antes comentamos, los resultados y las ideas sobre separación pueden utilizarse para abordar problemas de índole diversa.

Así lo hemos hecho en los epígrafes 8 a 11 de la memoria, que reciben la denominación común de Aplicaciones.

Aplicaciones, I.- El §8 contiene las primeras aplicaciones de la separación. Se refieren directamente al problema decimoséptimo. Probamos:

Proposición (9.2) y (9.6).- *Sea* X_o *un germen irreducible. Entonces*

(a) *Si* Z_o *es un germen semianalítico de* X_o, $\mathcal{P}(Z_o) = \mathcal{S}(X_o)$ *si y sólo si* Z_o *está contenido y es denso en* X_o^*.

(b) *Si* X_o *no es de dimensión pura,* $\mathcal{S}(X_o) \setminus \mathcal{S}[X_o] \neq \emptyset$.

Obtenemos también:

Proposición (9.3).- *Sean* Y_o *otro germen irreducible de la misma dimensión que* X_o, *y* $\pi : Y_o \to X_o$ *un morfismo finito. Entonces* $\pi(Y_o^*) = X_o^*$ *si y sólo si* $\mathcal{S}(Y_o) \cap \mathcal{O}[X_o] = \mathcal{S}(X_o)$.

Aplicaciones, II.- En el §9 estudiamos un problema planteado en la 'Special Session on Ordered Fields and Real Algebraic Geometry' (A.M.S., Enero 1981), y lo resolvemos afirmativamente para superficies. Nuestro método se basa en un segundo lema de separación, (9.1), modificación de (7.2). Citemos dos resultados en concreto:

Proposición (9.5).- *Sea* X *un subconjunto semianalítico cerrado de dimensión 2 de un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Supóngase* *que el conjunto de los puntos* $x \in X$ *tales que* X_x *no tie ne dimensión pura es finito. Entonces existen dos funciones analíticas en* Ω, g *y* h, *con* $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ h \geq 0\}$.

Proposición (9.9).- *Sea* X *un conjunto semialgebraico de dimensión 2 de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces existen dos polinomios* $g, h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ *con* $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ h \geq 0\}$.

El problema abierto al que antes nos referíamos es: si X es un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^n$ y X_c el conjunto de sus puntos centrales, ¿existen polinomios $f_1,\ldots,f_r \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ con $X_c = \{f_1 \geq 0,\ldots,f_r \geq 0\}$? Cuando X es una superficie, la respuesta es afirmativa como corolario de (9.9), pudiendo además tomarse $r=3$, (9.10.b).

Aplicaciones, III.- En la sección 10 demostramos:

Proposición (10.2).- *Sea* A *un álgebra analítica real de di mensión* d. *Entonces* A *tiene cadenas de ideales primos* *reales* *de longitud* d.

La prueba de (10.2) depende del siguiente lema, que se deduce mediante las técnicas de separación:

Lema de selección de una hipersuperficie (10.1).- *Sea* $Z_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen semianalítico de dimensión* $d \geq 2$. *Exis te entonces un germen* *algebraico* $Y_o = V(h)$, $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, *tal que* $\dim Y_o \cap Z_o = d-1$.

Aplicaciones, IV.- El último epígrafe, §11, de la memoria, está dedicado al estudio del espacio de órdenes, Ω, de un germen irreducible X_o de dimensión ≥ 2 (esto es, de su cuerpo de funciones). Elaboramos para ello una teoría de órdenes centrales, análoga a la conocida en Geometría Algebraica Real, y que se sustantiva en la

Definición (11.3).- *Un orden* $\alpha \in \Omega$ *se llama central si existe una semirrama de curva analítica* $c_o^* \subset X_o$ *tal que si* $f \in \mathcal{O}[X_o]$ *es* >0 *sobre* c_o^*, *entonces* f *es positivo en* α. *Diremos que* α *está centrado en* c_o^*.

Resumimos a continuación los resultados básicos.

Proposición.- (a)(11.4) *Existe un orden centrado en una semirrama* c_o^* *si y sólo si* $c_o^* \subset X_o^*$. *Semirramas distintas definen órdenes centrales distintos.*

(b) (11.5) *Sea* Z_o *un germen semianalítico denso en* X_o^*. *El conjunto* Ω^{Z_o}, *de los órdenes centrados en semirramas de* Z_o, *es denso en* Ω. *Más aún, si* U *es un abierto de* Ω, *se tiene:* $\text{card}\, U \cap \Omega^{Z_o} \geq 2^{\aleph_o}$.

Para (a) es necesario el lema de separación de curvas (7.5). Para (b) utilizamos un lema de Bloom-Risler [4], relacionado con una de las desigualdades de Lojasiewicz.

Señalemos también que si $X_o = \mathbb{R}_o^n$ construimos una cantidad no numerable de órdenes no centrales, mediante un lema de separación formal en la línea de (7.5).

Con respecto al comportamiento funtorial se tiene:

Proposición.- (a) (11.8). *Existe un isomorfismo de retículos ordenados,* $\omega = c_\Omega : CA \to CR$, *donde* CA *es la colección de los conjuntos abiertos y cerrados de* Ω, *y* CR *la de los gérmenes semianalíticos regularmente cerrados de* X_o^*.

(b) (11.9) *Sean* Y_o *otro germen irreducible de igual dimensión que* X_o, Σ *su espacio de órdenes y* σ *el isomorfismo* c_Σ. *Un morfismo finito* $\pi : Y_o \to X_o$ *induce una aplicación contínua, abierta, propia y con fibras finitas,* $\pi_* : \Sigma \to \Omega$ *tal que*

$$\pi\sigma(K) = \omega\pi_*(K),$$

para cada conjunto abierto y cerrado K *de* Σ. *En particular,* π_* *es suprayectiva si y sólo si* $\pi(Y_o^*) = X_o^*$.

El anterior resultado se prueba utilizando el teorema de especialización (1.2), la densidad de los órdenes centrales (11.5), y el lema de separación de curvas (7.5). Se advierte que (a) es un fuerte refinamiento del teorema de especialización, mientras que (b) lo es de (9.3).

Finalmente, del resultado (10.2) sobre la dimensión deducimos la

Proposición (11.11).- $\mathcal{O}(X_o)$ *no tiene la propiedad de la aproximación fuerte.*

Este hecho es una traducción algebraica de una construcción de Łojasiewicz [37], que muestra cómo un germen semianalítico puede no ser expresable con un sistema de desigualdades simultáneas.

Con esta observación concluye la memoria.

CAPITULO 0: PRELIMINARES

Este capítulo contiene definiciones y resultados ya conocidos que se utilizarán en lo sucesivo. También se incluyen algunos nuevos, que en otro caso hubieran debido introducirse más tarde como lemas, y que tienen una ubicación más natural como preliminares.

§0. Algebras y gérmenes analíticos

(0.1) Algebras analíticas [52; chap. II, III].- (a) Para cada entero $n > 0$ se nota $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbb{R}\{x\}$ u $\mathcal{O}_n$ si no hay posibilidad de confusión, al anillo de series convergentes en las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Un elemento f de $\mathcal{O}_n$ se escribe de modo único en la forma $f = f_o + f_1 +\ldots+ f_r +\ldots$, donde cada f_r es un polinomio homogéneo de grado r; se llama orden de f y se abrevia $\omega(f)$, al número $r \geqslant 0$ tal que $f_r \neq 0$, poniendo $\omega(0) = +\infty$. El anillo $\mathcal{O}_n$ es local, y sus unidades son los elementos de orden 0; su cuerpo residual es $\mathbb{R}$. Se tiene $\mathbb{R} \subset \mathcal{O}_n$, y $\mathcal{O}_n$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Una serie $\Phi \in \mathcal{O}_n$ se llama regular de orden p en x_n si $\Phi(0,\ldots,0,x_n) = x_n^p\, g(x_n)$ con $g(0) \neq 0$ (notaciones evidentes). Un polinomio $t^p + a_1 t^{p-1} +\ldots+ a_p \in \mathcal{O}_n[t]$ que es una serie regular de orden p en t (esto es, $a_1(0) =\ldots= a_p(0) = 0$) se llama polinomio distinguido. Frecuentemente es útil el hecho de que mediante un cambio lineal de coordenadas, una serie $f \in \mathcal{O}_n$ siempre se puede suponer regular de orden $\omega(f)$ en x_n. Los dos resultados siguientes son fundamentales:

<u>Teorema de división de Weierstrass</u>.- *Sea* $\Phi \in \mathcal{O}_n$ *una serie regular de orden* p *en* x_n. *Para cada* $f \in \mathcal{O}_n$ *existen, y son únicos,* $Q \in \mathcal{O}_n$, $R \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]$ *con* $f = Q.\Phi + R$, grado$(R) < p$. *Además, si* Φ *es un polinomio distinguido en* x_n *y* $f \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]$, *también* $Q \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]$.

<u>Teorema de preparación de Weierstrass</u>.- *Sea* $\Phi \in \mathcal{O}_n$ *una serie de orden* p *en* x_n. *Existen, y son únicos, un polinomio distinguido de grado* p, $P \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]$, *y una unidad* $Q \in \mathcal{O}_n$, *tales que* $\Phi = Q.P$.

Mediante estos teoremas se demuestra que $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ es noetheriano, factorial y, de hecho, regular de dimensión (de Krull) n. También el

<u>Lema de normalización</u>.- *Sea* p *un ideal primo no nulo de altura* r *de* $\mathcal{O}_n$. *Después de un cambio lineal de coordenadas, la aplicación canónica* $\mathcal{O}_{n-r} \to \mathcal{O}_n/p$ *es inyectiva, y* $\mathcal{O}_n/p$ *es un módulo finitamente generado sobre* $\mathcal{O}_{n-r}$.

(b) Un álgebra analítica es un álgebra unitaria sobre $\mathbb{R}$ que es la imagen de algún $\mathcal{O}_n$ por un homomorfismo de álgebras unitarias sobre $\mathbb{R}$. Un homomorfismo de álgebras analíticas es un homomorfismo de álgebras unitarias sobre $\mathbb{R}$. Se tiene así <u>la categoría **A**($\mathbb{R}$) de álgebras y homomorfismos analíticos</u>.

Un álgebra analítica es un anillo local noetheriano, y su cuerpo residual es $\mathbb{R}$. Un homomorfismo analítico es local (transforma no unidades en no unidades). En fin, del lema de normalización se sigue la

Fórmula de la dimensión.- *Si* A *es un álgebra analítica íntegra e* I *un ideal de* A, *se verifica*: dim A = dim A/I + + ht I.

(c) Todo lo dicho en (a) y (b) es válido reemplazando $\mathbb{R}$ por el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y se obtiene la categoría $\mathbf{A}(\mathbb{C})$ de álgebras y homomorfismos analíticos sobre $\mathbb{C}$. Convenimos que en lo sucesivo, siempre que consideremos $\mathbb{C}$, se citará explícitamente y en otro caso se supondrá que el cuerpo base es $\mathbb{R}$, se haga o no mención expresa de ello.

(0.2) Conjuntos y gérmenes analíticos [42; chap. III, V].- (a) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función analítica en Ω es una aplicación $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite un desarrollo en serie convergente en cada punto de Ω. Un subconjunto analítico de Ω es un conjunto $X \subset \Omega$ tal que cada punto de Ω tiene un entorno abierto U de modo que $X \cap U$ es el conjunto de ceros de una cantidad finita de funciones analíticas en U.

Sea X un subconjunto analítico de Ω. Un punto $x \in X$ se llama regular de dimensión d si tiene un entorno U tal que $X \cap U$ es una subvariedad analítica de dimensión d de $\mathbb{R}^n$ (esto es, $X \cap U = \{f_1=\ldots=f_r = 0\}$, donde $f_1,\ldots,f_r$ son funciones analíticas en U con rango $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = n-d$). Se demuestra que todo punto $x \in X$ es límite de puntos regulares, y se llama dimensión de (X en)

x, $\dim_x X$, el máximo $d \geqslant 0$ tal que x es límite de puntos regulares de dimensión d. En fin: $\dim X = \text{máx}\{\dim_x X : x \in X\}$. Destaquemos que este concepto de dimensión coincide con el topológico (véase, por ejemplo, [24; chap. 1]). Diremos que X tiene <u>dimensión pura</u> si todos sus puntos tienen la misma dimensión. Utilizaremos las siguientes notaciones:

$\operatorname{reg} X$, para el conjunto de los puntos regulares,

$\operatorname{sing} X$, para el conjunto de los puntos singulares (esto es, no regulares),

$\operatorname{reg}_d X$, para el conjunto de los puntos regulares de dimensión d,

X^d, para el conjunto de los puntos de dimensión d, $= \overline{\operatorname{reg}_d X}$,

$\operatorname{reg}_* X$, para el conjunto de los puntos regulares de dimensión máxima,

X^*, para el conjunto de los puntos de dimensión máxima, $= \overline{\operatorname{reg}_* X}$.

(b) Sea x_o un punto de $\mathbb{R}^n$, por comodidad, el origen: $x_o = 0 \in \mathbb{R}^n$. Identificamos dos subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^n$ si $X \cap U = Y \cap U$ para algún entorno U de 0. Una clase de equivalencia para esta relación se llama germen de conjunto (en $x_o = 0$), y se nota X_o, donde X es un representante. Se definen de manera natural la unión, la intersección, la diferencia y el contenido para gérmenes; también las operaciones topológicas, y se verifican las propiedades habituales.

Un <u>germen analítico</u> es el germen de un subconjunto analítico de un entorno abierto de 0. Un germen analítico se llama irreducible si no es unión de gérmenes analíticos distintos de él mismo. Todo germen analítico tiene una descomposición, única salvo permutaciones, en componentes irreducibles, esto es, se puede escribir como unión finita irredundante de gérmenes irreducibles.

Si X_o es un germen analítico, ponemos $\dim X_o = \dim_o X$. Con esta definición, se tiene:

(1) $\dim X_o \cup Y_o = \max \{\dim X_o, \dim Y_o\}$

(2) Si X_o es irreducible, $Y_o \subset X_o$ y $\dim Y_o = \dim X_o$, entonces $Y_o = X_o$

Diremos que un germen analítico X_o tiene dimensión pura si la tiene X. Si X_o es un germen analítico, se definen los gérmenes (no necesariamente analíticos, pero véase (0.11)) $\operatorname{reg} X_o$, $\operatorname{sing} X_o$, $\operatorname{reg}_d X_o$, X_o^d, $\operatorname{reg}_* X_o$, X_o^*.

La versión geométrica (esto tiene un sentido funtorial que se describirá en (0.4)) del lema de normalización enunciado en (0.1.a) es el

Teorema de parametrización local.- *Sea* $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen irreducible de dimensión* d. *Después de un cambio lineal de coordenadas, y notando* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ *a la proyección sobre las* d *primeras, existen: un entorno abierto* U, *tan pequeño como queramos, de* $0 \in \mathbb{R}^n$; *un subconjunto analítico* X *de* U, *de dimensión* d, *cuyo germen en* 0 *es* X_o; *y una función analítica* δ *en* $W = \pi(U)$ *(el 'discriminante')* *de modo que:*

(3) $\emptyset \neq X \setminus \{\delta = 0\} \subset \mathrm{reg}_* X \subset \overline{X \setminus \{\delta = 0\}} = X^*$,

(4) $X \setminus \{\delta = 0\}$ *tiene una cantidad finita de componentes conexas, adherentes a* 0.

(5) Si C *es una componente conexa de* $X \setminus \{\delta = 0\}$, $\pi|C$ *es un homeomorfismo de* C *sobre una componente conexa de* $W \setminus \{\delta = 0\}$.

(6) $\pi|X : X \to W$ *es propia y tiene fibras finitas.*

(c) En el caso complejo, las funciones analíticas se denominan <u>holomorfas</u>, y para <u>conjuntos y gérmenes analíticos complejos</u> sirve todo lo dicho en (a) y (b), con la siguiente versión del último teorema de (b):

<u>Teorema de parametrización local de conjuntos analíticos complejos</u>.- *Sea* $X_0 \subset \mathbb{C}^n_0$ *un germen irreducible de dimensión* d. *Después de un cambio lineal de coordenadas, y notando* $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$ *a la proyección sobre las* d *primeras, existen: un entorno abierto* U*, tan pequeño como queramos, de* $0 \in \mathbb{C}^n$*; un subconjunto analítico* X *de* U*, de dimensión pura* d*, cuyo germen en* 0 *es* X_0*, y una función holomorfa* δ *en* $W = \pi(U)$ *(el 'discriminante') de modo que:*

(1) $X \setminus \{\delta = 0\} \subset \mathrm{reg}\, X$, $X \setminus \{\delta = 0\}$ *es conexo y denso en* X.

(2) $\pi|X \setminus \{\delta = 0\} : X \setminus \{\delta = 0\} \to W \setminus \{\delta = 0\}$ *es suprayectiva y homeomorfismo local.*

(3) $\pi|X : X \to W$ *es propia, suprayectiva y tiene fibras finitas.*

(0.3) Aplicaciones y morfismos analíticos [42; chap. III, V].- (a) Sea X un subconjunto analítico de un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Una función analítica en X es una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ tal que cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U en Ω de modo que $f|X \cap U$ es la restricción de una función analítica en U. Es fundamental el

Principio de identidad.- *Si* $\operatorname{reg} X$ *es conexo y una función analítica en* X *se anula sobre un abierto no vacío de* X*, entonces se anula sobre* X.

Si X_o es un germen analítico de $\mathbb{R}^n_o$, se tiene mediante representantes la noción de (germen de) función analítica en X_o, y el correspondiente

Principio de identidad para gérmenes.- *Sea* $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen irreducible. Si una función analítica sobre* X_o *se anula sobre un abierto no vacío de* X^*_o*, entonces se anula sobre* X_o.

Demostración.- Consideremos el germen $X_o \cap \{f = 0\}$ siendo f la función en cuestión. Por hipótesis, existe un abierto no vacío $W_o \subset X^*_o \cap \{f = 0\}$, luego (tomando representantes) hay puntos $x \in X^*$, tan cerca de 0 como queramos, con

$$X_x = W_x \subset X_x \cap \{f = 0\},$$

y se deduce:

$$\dim X_o = \dim X_x \leqslant \dim X_x \cap \{f = 0\} \leqslant \dim X_o \cap \{f = 0\},$$

luego necesariamente $\dim X_o \cap \{f = 0\} = \dim X_o$. Como X_o es irreducible, sólo puede ser $X_o \cap \{f = 0\} = X_o$, y f se anula sobre X_o.

(b) Llamaremos <u>conjunto analítico</u> a un subconjunto analítico de algún abierto de $\mathbb{R}^n$. Si X e Y son conjuntos analíticos, una <u>aplicación analítica</u> $\pi : Y \to X$ es una aplicación cuyas coordenadas son funciones analíticas en Y. Se tiene la noción correspondiente de morfismo de gérmenes analíticos, y en consecuencia, <u>la categoría $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ de gérmenes y morfismos analíticos</u>.

(c) Lo dicho en (a) y (b) se aplica al caso complejo, y se obtiene <u>la categoría $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ de gérmenes y morfismos analíticos complejos</u>.

En los párrafos anteriores hemos descrito las categorías en las que, casi totalmente, se desarrollará esta memoria. La relación entre ellas se establece mediante varios funtores cuyas definiciones detallamos a continuación.

(0.4) <u>El funtor $\mathbf{G} \to \mathbf{A}$</u>.- (a) [48; §4]. El anillo $\mathcal{O}_n$ se identifica con el de gérmenes de función analítica en $0 \in \mathbb{R}^n$ (haciendo corresponder a un germen de función su desarrollo en serie en 0). Si $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es un germen de conjunto, notamos $\mathcal{J}(X_o)$ al ideal de $\mathcal{O}_n$ de los gérmenes nulos sobre X_o, y si I es un ideal de $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{V}(I)$

será el germen de los ceros de I. Se verifican las propiedades conocidas, y se observa que un germen X_o es analítico si y sólo si $X_o = VJ(X_o)$, si y sólo si $X_o = V(I)$ para algún ideal I de $\mathcal{O}_n$. Si $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es un germen analítico el anillo $\mathcal{O}[X_o] = \mathcal{O}_n/J(X_o)$ se identifica al de funciones analíticas de X_o.

Definimos ahora $\mathbf{G}(\mathbb{R}) \to \mathbf{A}(\mathbb{R})$ poniendo: $X_o \longmapsto \mathcal{O}[X_o]$ si X_o es un germen analítico, y haciendo corresponder a un morfismo analítico $\pi : Y_o \to X_o$ el homomorfismo analítico

$$\pi^* : \mathcal{O}[X_o] \to \mathcal{O}[Y_o] : f \longmapsto f \circ \pi$$

Se obtiene así un funtor contravariante, que define una equivalencia funtorial entre $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ y la subcategoría completa de $\mathbf{A}(\mathbb{R})$ descrita por el

Teorema de los ceros de Risler.- *Un álgebra analítica* A *es isomorfa al álgebra de funciones de un germen analítico si y sólo si es real, esto es, las ecuaciones de la forma* $T_1^2 + \ldots + T_r^2 = 0$ *sólo tienen solución trivial en* A.

El concepto de realidad es esencial en geometría cuando el cuerpo base es $\mathbb{R}$. Introducimos ahora algunas definiciones al respecto. Un ideal $J \subset \mathcal{O}_n$ se llama real si el álgebra $\mathcal{O}_n/J$ es real; fácilmente se comprueba que los asociados primos de un ideal real son todos reales. El radical real de un ideal $I \subset \mathcal{O}_n$, que se nota $\sqrt[R]{I}$, es el mínimo ideal real que contiene a I, y es igual al ideal de los $f \in \mathcal{O}_n$ tales que $f^{2m} + g_1^2 + \ldots + g_r^2 \in I$ para cierto $m > 0$ y ciertos $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}_n$. El radical real de una intersección es la intersección de los radicales reales. Con esta terminología, se puede enunciar de modo equivalente el

<u>Teorema de los ceros de Risler</u>.- *Si* I *es un ideal de* $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathcal{J}\mathcal{V}(I) = \sqrt[R]{I}$.

Para probar su teorema, Risler utiliza la siguiente consecuencia del teorema de parametrización local:

<u>Criterio geométrico de realidad</u>.- *Un ideal primo* $p\subset\mathcal{O}_n$ *es real si y sólo si la dimensión de Krull de* $\mathcal{O}_n/p$ *coincide con la dimensión de* $\mathcal{V}(p)$.

(b) [42; chap. III]. En el caso complejo se definen análogamente los dos operadores $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, y el funtor $\mathbf{G}(\mathbb{C}) \to \mathbf{A}(\mathbb{C})$. Aquí, la caracterización de la imagen de este último es el

<u>Teorema de los ceros de Rückert</u>.- *Un álgebra analítica* A *sobre* $\mathbb{C}$ *es isomorfa al álgebra de funciones de un germen analítico si y sólo si es reducida (esto es, no tiene nilpotentes). Equivalentemente,* $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(I) = \sqrt{I}$ *para cada ideal* I *de* $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$.

(c) Sea X_o un germen analítico de $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$. Entonces:

(1) $\dim X_o = \dim \mathcal{O}[X_o]$.

(2) X_o es regular si y sólo si $\mathcal{O}[X_o]$ es regular.

(3) X_o es irreducible si y sólo si $\mathcal{O}[X_o]$ es íntegra, en

cuyo caso su cuerpo de fracciones se nota $\mathcal{O}(X_o)$, y se identifica con el <u>cuerpo de funciones meromorfas</u> de X_o.

(4) Los ideales de las componentes irreducibles de X_o son los asociados primos, todos minimales, del ideal de X_o.

(0.5) <u>Coherencia</u> [42; chap. IV].- Del teorema de parametrización local de conjuntos analíticos complejos se deducen las dos consecuencias importantes siguientes:

<u>2° teorema de coherencia de Oka</u>.- *Si* $f_1,\dots,f_r$ *son funciones holomorfas en un entorno abierto de* $0 \in \mathbb{C}^n$, $X = \{f_1 = 0,\dots,f_r = 0\}$, *e* $\mathcal{J}(X_o)$ *está generado por* $f_1,\dots,f_r$, *entonces para* $x \in X$ *suficientemente próximo a* 0, *también* $\mathcal{J}(X_x)$ *está generado por* $f_1,\dots,f_r$.

<u>Analiticidad del lugar singular</u>.- *El conjunto de puntos singulares de un conjunto analítico es analítico. Con más precisión, sean* $f_1,\dots,f_r$ *funciones holomorfas en un entorno abierto de* $0 \in \mathbb{C}^n$, tales que $X = \{f_1=\dots=f_r=0\}$, *e* $\mathcal{J}(X_o)$ *está generado por* $f_1,\dots,f_r$. *Si* X_o *es irreducible de dimensión* d, sing X_o *es el germen del conjunto*

$$\{x \in X : \text{rango } (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)) < n-d\}.$$

Por supuesto, estos dos resultados son falsos en el caso real (paraguas de Whitney).

(0.6) <u>El funtor de complexificación</u>. [42; chap. V].- En todo este párrafo, consideramos $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ como subespacio cerrado. Se prueba fácilmente que una función analítica $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, admite una extensión holomorfa $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$, esto es, una función holomorfa en un abierto $D \subset \mathbb{C}^n$, invariante para la conjugación usual, tal que $D \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ y $\tilde{f}|\Omega = f$. Mediante este resultado se construye un funtor $\mathbf{G}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(\mathbb{C})$ denominado de complexificación, de forma que resulta el cuadrado conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{G}(\mathbb{C}) \arrow[d] \\ \mathbf{A}(\mathbb{R}) \arrow[r, "-\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}"] & \mathbf{A}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Recordemos sus propiedades. Sea $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ un germen analítico, y $\tilde{X}_o$ su complexificado.

(1) $J_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_o) = J(X_o).\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$. En particular, si $f_1,\ldots,f_r$ generan $J(X_o)$, es $\tilde{X}_o = \{\tilde{f}_1 = 0,\ldots,\tilde{f}_r = 0\}$.

(2) $\tilde{X}_o \cap \mathbb{R}^n_o = X_o$, $J_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_o) = J_{\mathbb{C}}(X_o)$ (esto significa que $\tilde{X}_o$ es el mínimo germen analítico complejo que contiene a X_o).

(3) Si $X^1_o,\ldots,X^r_o$ son las componentes irreducibles de X_o, entonces $\tilde{X}^1_o,\ldots,\tilde{X}^r_o$ son las de $\tilde{X}_o$. En particular, X_o es irreducible si y sólo si lo es $\tilde{X}_o$; en otros términos, un ideal real I de $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ es primo si y sólo si genera un ideal primo en $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$.

(4) X_o es regular si y sólo si lo es $\tilde{X}_o$.

(5) $\dim \tilde{X}_o = \dim X_o$.

Es conveniente observar que si X es un representante de

X_o e Y uno de $\tilde{X}_o$, puede haber puntos $x \in X$ tan próximos a 0 como queramos, tales que $\tilde{X}_x \neq Y_x$ (de hecho lo contrario sería equivalente a la coherencia de X). Señalemos también:

(6) $X_o \not\subset \operatorname{sing} \tilde{X}_o$ (por (2), y ser $\operatorname{sing} \tilde{X}_o \subsetneq \tilde{X}_o$ analítico)

(7) Si X_o es irreducible, $\operatorname{sing} \tilde{X}_o \supset X_o \setminus \operatorname{reg}_* X_o$.

Veamos (7). Elegimos funciones analíticas $f_1,\dots,f_r$ en un entorno abierto Ω de 0 en $\mathbb{R}^n$, y extensiones holomorfas suyas $\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_r$, de modo que $f_1,\dots,f_r$ generen $\mathcal{J}(X_o)$ y $\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_r$ generen $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(\tilde{X}_o)$. Ponemos $X = \{f_1 = 0,\dots,f_r = 0\}$, $Y = \{\tilde{f}_1 = 0,\dots,\tilde{f}_r = 0\}$, y reduciendo Ω podemos suponer:

$\dim Y_x = \dim Y_o = d$, $x \in Y$ (pues $Y_o = \tilde{X}_o$ es irreducible)

$\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_r$ generan $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(Y_x)$ para cada $x \in Y$ (por ser Y coherente)

$$\operatorname{sing} Y = \{x \in Y : \operatorname{rango}\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(x)\right) < n-d\}$$

Para cada $x \in \Omega$ notamos $I_x \subset \mathcal{J}(X_x)$ al ideal generado por $f_1,\dots,f_r$ en $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}[\mathbb{R}^n_x]$. En esta situación, si $x \in X \cap \operatorname{reg} Y$ resulta:

$$\operatorname{ht} I_x = \operatorname{ht}(I_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \operatorname{ht} \mathcal{J}_{\mathbb{C}}(Y_x) = n - \dim Y_x = n-d$$

$$\operatorname{rango}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) = \operatorname{rango}\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(x)\right) = n-d \quad (\text{pues } x \notin \operatorname{sing} Y),$$

lo que significa que el anillo $\mathcal{O}_x/I_x$ es regular de dimensión d (teorema de la función inversa) y en consecuencia real. Por el teorema de los ceros de Risler, $\mathcal{J}(X_x) = \mathcal{J}\mathcal{V}(I_x) = \sqrt[R]{I_x} = I_x$, y $\mathcal{O}[X_x] = \mathcal{O}_x/I_x$. En suma, x es un punto regular de dimensión d.

Esto muestra que $X \smallsetminus \mathrm{reg}_* X \subset \mathrm{sing}\, Y$.

(0.7) <u>Morfismos analíticos finitos</u>.- Un morfismo analítico $\pi : Y_o \to X_o$ se denomina <u>finito</u> si cumple una de (y por tanto todas) las condiciones equivalentes siguientes:

(1) El anillo local $\mathcal{O}[Y_o]$ está finitamente generado como módulo sobre $\mathcal{O}[X_o]$.

(2) Existe un representante $\tilde{\pi} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ del complexificado del morfismo dado que es una aplicación analítica, propia y con fibras finitas (y podemos elegir $\tilde{Y}$ arbitrariamente pequeño) [42; p. 66, proposition 1].

Por ejemplo, el morfismo $\pi : X_o \to \mathbb{R}^d_o$ del teorema de parametrización local, (0.2.b), es finito.

<u>Imagen de un germen de conjunto por un morfismo finito</u>.- Sea $\pi : Y_o \to X_o$ un morfismo finito, y Z_o un germen de conjunto contenido en Y_o. Elegimos un representante $\pi : Y \to X$ que sea una aplicación propia, y tal que $\pi^{-1}(0) = \{0\}$ (esto es posible por (2), ya que $Y = \tilde{Y} \cap \mathbb{R}^n$ es cerrado en $\tilde{Y}$). Entonces si $Z \subset Y$ representa a Z_o, ponemos $\pi(Z_o) = \pi(Z)_o$.

Comprobar que esta definición es correcta se reduce a ver que si $Z' \subset Y$, $Z'_o = Z_o$, entonces $\pi(Z')_o = \pi(Z)_o$. Pero si, por ejemplo, $\pi(Z')_o \not\subset \pi(Z)_o$, existe una sucesión $\{x_p\}_{p\geq 1} \subset \pi(Z') \smallsetminus \pi(Z)$ que converge a 0. Sea $x_p = \pi(y_p)$, $y_p \in Z' \smallsetminus Z$, $p \geq 1$. Por ser π propia, $\{y_p\}_{p\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente a un punto de $\pi^{-1}(0)$, que sólo puede ser 0. En consecuencia, $Z'_o \smallsetminus Z_o \neq \emptyset$, lo que es absurdo.

En fin, señalemos que si $\pi : Y_o \to X_o$ es un morfismo finito, la condición $\dim X_o = \dim Y_o$ equivale a que $\pi^* : \mathcal{O}[X_o] \to \mathcal{O}[Y_o]$ sea inyectivo (pues por ser π finito, la extensión $\mathcal{O}[X_o] / \ker \pi^* \longrightarrow \mathcal{O}[Y_o]$ es entera).

(0.8) Normalidad.- Un germen analítico X_o, real o complejo, se denomina normal si su anillo de funciones $\mathcal{O}[X_o]$ es normal (esto es, íntegro e integramente cerrado). Un germen normal es, pues, irreducible. Además:

(1) Un germen $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es normal si y sólo si $\tilde{X}_o$ es normal [51; §8].

(2) Si X_o es normal, $X_o \setminus \mathrm{reg}_* X_o = \mathbb{R}^n_o \cap \mathrm{sing}\, \tilde{X}_o$.

Veamos (2). Como siempre se tiene $X_o \setminus \mathrm{reg}_* X_o \subset \mathbb{R}^n_o \cap \mathrm{sing}\, \tilde{X}_o$, (0.6.7), hay que comprobar que $\mathrm{reg}_* X_o \subset \mathrm{reg}\, \tilde{X}_o$. Para ello tomamos representantes X de X_o, Y de $\tilde{X}_o$. Por (1), $Y_o = \tilde{X}_o$ es normal, y por ser la normalidad una condición abierta en el caso complejo [42; p. 121, theorem 5], podemos suponer que Y_x es normal, y por tanto irreducible, de dimensión $d = \dim Y_o = \dim X_o$ para cada $x \in Y$. Entonces, si $x \in \mathrm{reg}_* X$, X_x es regular de dimensión d, y también lo es $\tilde{X}_x \subset Y_x$. Como Y_x es irreducible y los dos gérmenes tienen dimensión d, sólo puede ser $\tilde{X}_x = Y_x$, con lo que $x \in \mathrm{reg}\, Y$.

La observación (2) tiene que ver con la analiticidad del lugar singular. Trivialmente, se deduce de (2) que si X_o es normal de dimensión pura, entonces sing X_o es analítico. Sin embargo esto es también corolario de un teorema de Tognoli, 51; corollario 1, §8 , según el cual un germen normal de dimensión pura es <u>coherente</u>. En relación con este problema, considérese el siguiente ejemplo de Cartan, [53; §11]:

$$X_o : yz(x^2 - zy^2) + x^4 = 0$$

Se tiene:

$$\text{sing } X_o = \{x=0,\ z=0\} \cup \{x=0,\ y=0,\ z > 0\},$$

que no es analítico, aunque X_o es un germen de dimensión pura (figura 1).

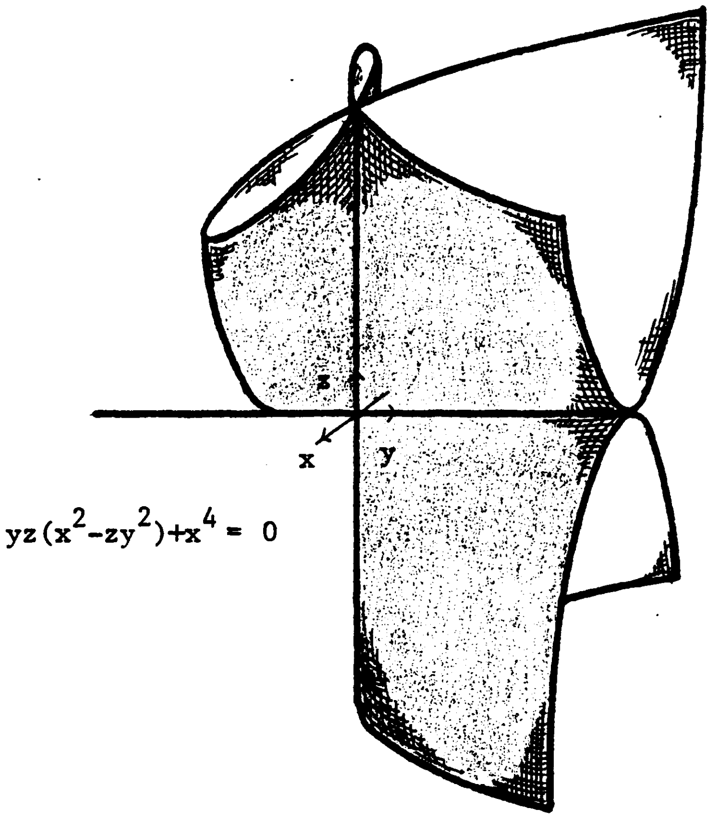


Figura 1

En el caso complejo, la normalidad está fuertemente relacionada con la regularidad en codimensión 1. En el caso real nos interesa la siguiente

<u>Proposición</u>.- *Sea* X_o *un germen irreducible de dimensión* d. *Se verifica:*

(3) Si p *es un ideal primo real de* $\mathcal{O}[X_o]$, *el anillo local* $\mathcal{O}[X_o]_p$ *es regular si y sólo si* $V(p) \not\subset \operatorname{sing} \tilde{X}_o$.

(4) $\dim \mathbb{R}^n_o \cap \operatorname{sing} \tilde{X}_o < d-r$ *si y sólo si para cada ideal primo real* $p \subset \mathcal{O}[X_o]$ *de altura* $\leqslant r$, *el anillo local* $\mathcal{O}[X_o]_p$ *es regular.*

<u>Demostración</u>.- (3) Pongamos $A = \mathcal{O}[X_o]$, $B = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathcal{O}[\tilde{X}_o]$. Si p es un ideal primo real de A, $p = JV(p)$ (teorema de los ceros) y $V(p)^{\sim} = V_{\mathbb{C}}(\tilde{p})$, donde $\tilde{p} = p.B$ es un ideal primo de B. Así, la condición $V(p) \not\subset \operatorname{sing} \tilde{X}_o$ equivale a $V_{\mathbb{C}}(\tilde{p}) \not\subset \operatorname{sing} \tilde{X}_o$, que, por el resultado en el caso complejo [1; §9] equivale a que $B_{\tilde{p}}$ sea regular. Ahora bien, la extensión $A_p \to B_{\tilde{p}}$ es plana ($B_{\tilde{p}}$ es un anillo de fracciones de $A_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$), y el ideal maximal de A_p genera el de $B_{\tilde{p}}$. Se deduce de [27; chap. 0, 17.3.3] que $B_{\tilde{p}}$ es regular si y sólo si lo es A_p.

(4) es consecuencia inmediata de (3), considerando un asociado primo p de altura mínima de $J(\mathbb{R}^n_o \cap \operatorname{sing} \tilde{X}_o)$, que será real.

Más adelante veremos que en (4) es posible sustituir $\leqslant r$ por $=r$, pero para ello necesitamos el resultado previo, (10.2), de que la dimensión de un álgebra analítica real se puede medir con cadenas de ideales primos reales. Para $r = 1$, la observación es por supuesto trivial, e introducimos una

Definición.- *Un germen irreducible* X_o *se llama* real R_1 *si para cada ideal primo real de altura 1,* p, *de* $\mathcal{O}[X_o]$, *el anillo local* $\mathcal{O}[X_o]_p$ *es regular.*

Esto es la contrapartida de la condición clásica R_1, y es estrictamente más fuerte que la regularidad en codimensión 1, como muestra el siguiente ejemplo. Considérese $X_o \subset \mathbb{R}^3_o$ dado por la ecuación $z(x+y)(x^2+y^2) = x^4$ (figura 2). Entonces X_o es de dimensión pura 2, $\operatorname{sing} X_o = \{0\}$, $\operatorname{sing} \tilde{X}_o = V_{\mathbb{C}}(x,y)$, y en consecuencia X_o es regular en codimensión 1, pero no es real R_1, pues

$$\dim \mathbb{R}^3_o \cap \operatorname{sing} \tilde{X}_o = 1$$

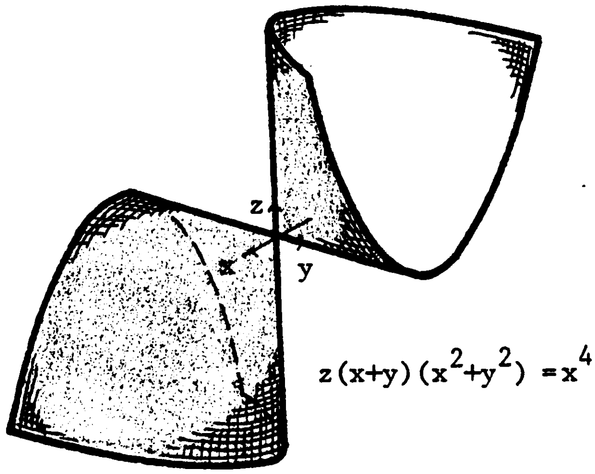


Figura 2

Concluimos este párrafo sobre normalidad con la siguiente

Proposición (Risler).- *Si* X_o *es un germen irreducible de dimensión* d, *existen un germen normal de dimensión* d, X^ν_o, *y un morfismo analítico birracional finito,* $\pi : X^\nu_o \to X_o$. *El par* (X^ν_o, π) *se denomina normalización de* X_o, *y es único salvo isomorfismo.*

Demostración.- Sea $A = \mathcal{O}[X_o]$, A^ν su cierre íntegro en su cuerpo de fracciones; A^ν es real, y un módulo finito sobre A. Se deduce que es un álgebra analítica real, y por el teorema de los ceros $A^\nu = \mathcal{O}[X_o^\nu]$ para cierto germen analítico X_o^ν. El morfismo analítico correspondiente a la inclusión $A \longrightarrow A^\nu$ da la normalización buscada.

(El término birracional aplicado a un morfismo analítico $\pi : Y_o \to X_o$ significa que X_o e Y_o son irreducibles, $\pi^* : \mathcal{O}[X_o] \to \mathcal{O}[Y_o]$ inyectivo, y el monomorfismo de cuerpos inducido por π^*, $\mathcal{O}(X_o) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_o)$, es un isomorfismo)..

(0.9) Gérmenes de curva irreducible.- Un germen de curva irreducible c_o es un germen analítico irreducible de dimensión 1. En consecuencia, su normalización c_o^ν es un germen regular (pues $\mathcal{O}[c_o^\nu]$ es un anillo normal de dimensión 1) y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}_o$. Se tiene entonces una normalización $(\mathbb{R}_o,\pi)$, y el morfismo $\pi : \mathbb{R}_o \to c_o$ se denomina parametrización primitiva de c_o; es única salvo isomorfismo. En términos de los anillos de funciones, una parametrización primitiva es un homomorfismo analítico birracional $\mathcal{O}[c_o] \to \mathbb{R}\{t\}$. En general, llamamos parametrización de c_o a cualquier homomorfismo no trivial $\mathcal{O}[c_o] \to \mathbb{R}\{t\}$.

Sea $X_o \subset \mathbb{R}_o^n$ un germen analítico. Si $c_o \subset X_o$ es un germen de curva irreducible, una parametrización de c_o determina un homomorfismo analítico $c : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ con $p = \ker c \supset J(X_o)$, y por tanto uno $\bar{c} : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$, con $c_o = V(p)$. Recíprocamente, un homomorfismo analítico $\bar{c} : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ determina un germen de curva irreducible contenido en X_o.

Desde el punto de vista topológico, un germen c_o de curva irreducible es simplemente $\mathbb{R}_o$. Llamaremos <u>semirrama</u> de c_o a cada una de las dos componentes conexas de $c_o \setminus \{0\}$, y si $\pi : \mathbb{R}_o \to c_o \subset \mathbb{R}^n_o : t \longmapsto x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ es una parametrización primitiva, entonces

$$t \longmapsto x(t), \quad t > 0 \quad y \quad t \longmapsto x(t),\ t < 0$$

parametrizan cada una de las semirramas.

En efecto, pues una parametrización primitiva es un homeomorfismo. Para verlo, obsérvese primero que la complexificación $\tilde{\pi} : \mathbb{C}_o \to \tilde{c}_o \subset \mathbb{C}^n_o$ es también primitiva, y así homeomorfismo, pues el resultado es conocido en el caso complejo, luego todo se reduce a que sea $\tilde{\pi}(\mathbb{R}_o) = c_o$, o equivalentemente, $\tilde{\pi}^{-1}(\mathbb{R}^n_o) \subset \mathbb{R}_o$. Esto último puede comprobarse mediante el siguiente argumento de Milnor, [38; §2]. Después de un cambio de variable en $\mathbb{R}_o$, π tendrá la forma

$$t \longmapsto x(t) = (0,\dots,0\ \pm t^p, x_r(t),\dots,x_n(t)),$$

donde $x_r(t),\dots,x_n(t) \in \mathbb{R}\{t\}$. Sea ahora $t \in \mathbb{C}$, suficientemente próximo a 0, con $\tilde{\pi}(t) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\pm t^p \in \mathbb{R}$, y $t = \zeta s$ donde $s = |t| \in \mathbb{R}$ y ζ es una raíz 2p-ésima de la unidad. Si $\zeta = +1$ ó -1, hemos terminado. Pero si así no fuera, por ser π primitiva, alguna de las series $x_j(t)$ tendría un término de grado $\not\equiv 0$ mod p, y por tanto, también lo tendría $x_j(\zeta s)$. Esto significaría, tomando $s = |t|$ suficientemente pequeño, que $x_j(\zeta s)$ no es un número real, y $x(t) = x(\zeta s) \notin \mathbb{R}^n$. En suma, $\tilde{\pi}^{-1}(\mathbb{R}^n_o) \subset \mathbb{R}_o$, como pretendíamos.

Si $c_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es un germen de curva irreducible y $c : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ una parametrización de c_o, entonces al menos una de las semirramas de c_o queda parametrizada por:

$$t \longmapsto x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)), \quad t > 0$$

donde $x_i(t) = c(x_i)$, $1 < i < n$. Dada la parametrización c, representaremos por c^*_o esa semirrama (lo que no se presta a confusiones, pues un germen de curva es siempre de dimensión pura), que puede denominarse 'semirrama positiva' de la parametrización c.

(0.10) <u>Desingularización de un germen de curva irreducible</u>.- Según se ha visto en el párrafo anterior, la normalización es de hecho una desingularización en el caso de curvas. Sin embargo, nos interesa describir un proceso para obtener la desingularización mediante transformaciones de un ambiente $\mathbb{R}^n_o$ en el que esté sumergida la curva. Introducimos primero la siguiente

<u>Definición</u>.- *Sean* $c_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen de curva irreducible y* $H \subset \mathbb{R}^n$ *un hiperplano que pasa por el origen. Se dice que* H *es transversal a* c_o *si existe una parametrización primitiva* $c : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ *de* c_o *tal que*

$$\omega(c(H)) = \min\,\{\omega(c(f)) : f(0) = 0\}.$$

Se comprueba fácilmente que los hiperplanos $H \subset \mathbb{R}^n$ transversales a c_o forman un abierto denso del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

Sea ahora $c_o \subset \mathbb{R}^n_o$ un germen de curva irreducible y supongamos que $x_1 = 0$ es transversal a c_o. Consideramos la dirección de la tangente a c_o, que será de la forma $(1,a_2,\ldots,a_n)$ por la condición de transversalidad, y llamamos explosión local del origen de $\mathbb{R}^n$ (en esa dirección), a la aplicación

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1',\ldots,x_n') \mapsto (x_1',x_2'x_1' + a_2x_1',\ldots,x_n'x_1' + a_nx_n')$$

Claramente, $\pi|\mathbb{R}^n \setminus \{x_1' = 0\}$ es un isomorfismo analítico sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0\}$. En lo que a c_o se refiere, $\pi^{-1}(c_o)$ es un germen analítico con dos componentes irreducibles, una de las cuales es evidentemente $\{x_1' = 0\}$, y la otra es un germen de curva irreducible que se llama transformada cuadrática estricta de c_o, y se notará c_o'. El morfismo analítico $c_o' \to c_o$ inducido por π se denomina transformación cuadrática estricta. Por último:

Teorema de desingularización.- *La normalización* $c_o^\nu \to c_o$ *se factoriza a través de una sucesión finita de transformaciones cuadráticas estrictas.*

Todo lo anterior es bien conocido en el caso complejo [10; chap. I], y en el caso real se deduce por complexificación [48; §6].

(0.11) Gérmenes semianalíticos [37].- (a) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto semianalítico de Ω es un conjunto $Z \subset \Omega$ tal que para cada punto $x \in \Omega$ existen funciones analíticas g_{ij}, f_i en un entorno abierto U de x de modo que:

$$Z \cap U = \bigcup_{i=1}^{p} \{g_{i1} > 0,\ldots,g_{iq} > 0,\ f_i = 0\}.$$

Por ejemplo, un subconjunto analítico de Ω es un subconjunto semianalítico <u>cerrado</u> de Ω. De la definición resulta que la unión, la intersección y la diferencia de dos subconjuntos semianalíticos de Ω son a su vez semianalíticos de Ω. Además, Łojasiewicz demuestra:

<u>Proposición</u>.- *La adherencia, el interior y la frontera de un subconjunto semianalítico de* Ω *son semianalíticos de* Ω *[37; p. 76, proposition 1].*

Sea Z un subconjunto semianalítico de Ω. Un punto $x \in Z$ se llama regular de dimensión d si tiene un entorno U tal que $Z \cap U$ es una subvariedad analítica de dimensión d de $\mathbb{R}^n$. Se tiene:

<u>Proposición</u>.- *El conjunto de los puntos regulares de dimensión* d *de* Z *es un subconjunto semianalítico de* Ω *[37; p. 77, théoreme 4].*

Se demuestra que todo punto $x \in \overline{Z}$ es límite de puntos regulares de Z, y se llama dimensión de (Z en) x, $\dim_x Z$, al máximo $d \geqslant 0$ tal que x es límite de puntos regulares de dimensión d. En fin: $\dim Z = \max\{\dim_x Z : x \in Z\}$. (Este concepto de dimensión coincide con el topológico). Con las mismas notaciones que para conjuntos analíticos, resulta del teorema último citado, que $\operatorname{reg} Z$, $\operatorname{sing} Z$, $\operatorname{reg}_d Z$, Z^d, $\operatorname{reg}_* Z$ y Z^* son semianalíticos de Ω.

Señalemos por último que si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación analítica, y $f(Z)$ es semianalítico (en algún abierto de $\mathbb{R}^m$ que lo contenga), entonces:

(1) $\dim f(Z) \leqslant \dim Z$ (es una consecuencia del teorema de Sard)

(2) Si $f|Z$ tiene fibras finitas, $\dim f(Z) = \dim Z$ (es una consecuencia del teorema clásico del rango).

(b) Un <u>germen semianalítico</u> de $\mathbb{R}^n_o$ es un germen que admite por representante un subconjunto semianalítico de un entorno abierto de 0. Si $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es un germen analítico, un germen semianalítico de X_o es simplemente uno de $\mathbb{R}^n_o$ contenido en X_o.

Obsérvese que si Z_o es un germen semianalítico de uno analítico $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$, su adherencia en X_o es su adherencia en $\mathbb{R}^n_o$, y por tanto es semianalítico, y su interior en X_o es $X_o \setminus \overline{X_o \setminus Z_o}$, luego también semianalítico.

Sea Z_o un germen semianalítico de uno analítico X_o. Entonces:

(1) Si Z_o es cerrado en X_o, $Z_o = \bigcup_{i=1}^{p} \{f_{i1} \geqslant 0, \ldots, f_{iq} \geqslant 0\}$

(2) Si Z_o es abierto en X_o, $Z_o = \bigcup_{i=1}^{p} \{f_{i1} > 0, \ldots, f_{iq} > 0\} \cap$ $\cap X_o$

(3) Si Z_o es regularmente cerrado (*) en X_o,

$$Z_o = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\{f_{i1} > 0, \ldots, f_{iq} > 0\} \cap X_o}$$

(*) Un subconjunto Z de un espacio topológico X se llama regularmente cerrado cuando coincide con la adherencia de su interior.

(La fórmula (2) resulta aplicando (1) a $X_o \setminus Z_o$; la (3), aplicando (1) al interior de Z_o en X_o. Por último, si Z_o es cerrado en X_o, lo es en $\mathbb{R}^n_o$, y (1) se debe a Łojasiewicz, [37; p. 98, théoreme 3]).

La dimensión de un germen semianalítico $Z_o \subset \mathbb{R}^n_o$, $\dim Z_o$, es la dimensión en 0 de un representante. Se verifica:

(4) $\dim Z_o \cup Z'_o = \text{máx} \{\dim Z_o, \dim Z'_o\}$

(5) $\dim Z_o = \dim \overline{Z}_o$

En fin, si $Z_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es un germen semianalítico, el mínimo germen analítico que contiene a Z_o es $X_o = \mathcal{VJ}(Z_o)$, y

(6) $\dim Z_o = \dim X_o$.

En efecto, sea $Z_o = \bigcup_{i=1}^{p} Z^i_o$, $Z^i_o = \{g_{i1} > 0,\ldots,g_{iq} > 0,$ $f_i = 0\}$. Se tiene: $X_o = \bigcup_{i=1}^{p} X^i_o$, $X^i_o = \mathcal{VJ}(Z^i_o)$, luego basta considerar el caso en que Z_o sea de la forma $\{g_1 > 0,\ldots,g_q > 0, f=0\}$. Sea entonces Y_o una componente irreducible de X_o de dimensión máxima $d = \dim X_o$, e Y^1_o la unión de las restantes. Si $Z_o \cap \text{reg}_* Y_o = \emptyset$, $Z_o \cap Y_o \subset Y_o \cap \text{sing}\, \tilde{Y}_o \subsetneq Y_o$, (0.6.7) y se deduce

$$Z_o \subset (Y_o \cap \text{sing}\, \tilde{Y}_o) \cup Y^1_o \quad X_o$$

contra la definición de X_o. Así pues, $Z_o \cap \text{reg}_* Y_o \neq \emptyset$, pero $Y_o \subset \{f = 0\}$, luego

$$\emptyset \neq Z_o \cap \text{reg}_* Y_o = \{g_1 > 0,\ldots,g_q > 0\} \cap \text{reg}_* Y_o,$$

de donde: $\dim Z_o > \dim(\{g_1 > 0,\ldots,g_q > 0\} \cap \text{reg}_* Y_o) = d$, pues este último germen es abierto y no vacío en $\text{reg}_* Y_o$. En suma, $\dim Z_o = d$.

(0.12) Gérmenes subanalíticos.- La deficiencia fundamental de los conjuntos semianalíticos es que no forman una clase cerrada para la imagen por aplicaciones analíticas propias (de hecho, la imagen por una aplicación analítica propia de una variedad analítica compacta puede no ser semianalítica, [29; example 2]. Esta deficiencia da origen a la teoría de conjuntos subanalíticos, desarrollada independientemente, primero por Hironaka, [29], y luego por Hardt, [28]. Nosotros no vamos a utilizar conjuntos o gérmenes subanalíticos en esta memoria, pero sí necesitaremos dos condiciones suficientes para que un conjunto subanalítico sea semianalítico.

Proposición.- *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^m$ *y* $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación analítica. Si* Z *es un subconjunto semianalítico de* Ω *de dimensión* ≤ 1*, entonces* $\pi(Z)$ *es semianalítico* [*37; p. 127, théoreme 1*].

Proposición.- *Sea* $\pi : Y_o \to X_o$ *un morfismo analítico finito. Si* Z_o *es un germen semianalítico de* Y_o*,* $\pi(Z_o)$ *es un germen semianalítico de* X_o.

Demostración.- Como cualquier aplicación conserva las uniones, basta probarlo cuando $Z_o = \{g_1 > 0,\dots,g_r > 0,\ f = 0\}$. Sea entonces $Y_o^1 = (Y_o \times \mathbb{R}_o) \cap \{f = 0,\ g_1 - t^2 = 0,\dots,g_r - t^2 = 0\}$. Claramente, se obtiene un morfismo finito $\pi^1 : Y_o^1 \to X_o$, componiendo la restricción de la proyección canónica $Y_o \times \mathbb{R}_o \to Y_o$ con π. En esta situación:

$$\pi^1(Y_o^1 \setminus \{t = 0\}) = \pi(Z_o)$$

En fin, $\pi^1(Y_o^1 \setminus \{t = 0\})$ es semianalítico en virtud de un teorema de Galbiati [25; théoreme (1.1)].

CAPITULO I: EL PROBLEMA DECIMOSEPTIMO

En este capítulo se prueban un teorema de especialización, un criterio del cambio de signo y un criterio de no negatividad. Se introduce el concepto de lugar de denominadores y se acota su codimensión. Se consideran los números de Pitágoras de un germen irreducible. Para gérmenes de curva se completa la solución del problema cualitativo y se trata el de caracterizar las curvas pitagóricas. De los gérmenes de superficie, se consideran primero las singularidades racionales, se estudia luego el tipo topológico en relación con el criterio del cambio de signo, y, finalmente, se obtiene un resultado cuantitativo.

§1. El teorema de especialización para gérmenes analíticos

La solución del problema decimoséptimo dada por E. Artin, 2 , se basa en la teoría de Artin-Schreier de cuerpos formalmente reales y en un "teorema de especialización" para funciones racionales. Para estudiar el caso de gérmenes de funciones analíticas sobre un germen irreducible aplicamos también la citada teoría de Artin-Schreier, y nuestra referencia es [30; chap. VI], pero el teorema de especialización debe probarse en este nuevo contexto: éste es el objeto primero de este epígrafe.

(1.1) Algebras analíticas ordenadas.- Un orden en un álgebra analítica íntegra es un orden total en su cuerpo de fracciones. Un álgebra analítica ordenada es una íntegra dotada de un orden.

Por ejemplo, el álgebra analítica $\mathbb{R}\{t\}$ puede ser dotada de dos órdenes distintos, caracterizados por el signo de t. En lo sucesivo, nosotros supondremos siempre que se trata del determinado por $t > 0$, cuyos elementos positivos son las series $a_{n_o} t^{n_o} + \ldots$, con $a_{n_o} > 0$.

En general, un álgebra analítica íntegra admite un orden si y sólo si es real [30; p. 274, corollary 2].

(1.2) <u>Proposición (teorema de especialización)</u>.- *Sean* X_o *un germen irreducible, y* $f_1,\ldots,f_r$ *elementos de* $\mathcal{O}[X_o]$. *Son equivalentes:*

(α) Existe un orden en $\mathcal{O}[X_o]$ *en el que* $f_1,\ldots,f_r$ *son positivos*

(β) $\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^* \neq \emptyset$

(γ) $\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap \mathrm{reg}_* X_o \neq \emptyset$

(δ) Existe una semirrama de curva irreducible contenida en $\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^*$.

(ε) Existe una semirrama de curva irreducible contenida en $\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap \mathrm{reg}_* X_o$.

Dividiremos la demostración en dos partes.

(1.3) <u>(ε) ⇒ (δ) ⇒ (β) ⇒ (γ) ⇒ (α)</u>.- Las dos primeras implicaciones son triviales. La tercera es consecuencia de ser $\mathrm{reg}_* X_o$ denso en X_o. En fin, para la cuarta utilizaremos el

<u>Criterio de Serre</u> [49].- *Sean* K *un cuerpo conmutativo y* S

un subcuerpo multiplicativamente cerrado de K. *Es condición necesaria y suficiente para que exista un orden en* K *en el que lós elementos de* S *sean positivos, que las ecuaciones de la forma:* $s_1T_1^2 + \ldots + s_pT_p^2$, $s_1,\ldots,s_p \in S$, *sólo tengan en* K *la solución trivial.*

En nuestro caso, consideramos el sistema S generado por $f_1,\ldots,f_r$, y hay que probar que si $g_1,\ldots,g_p \in \mathcal{O}[X_o]$, $s_1,\ldots,s_p \in S$ y $0 = s_1g_1^2 + \ldots + s_pg_p^2$, entonces $g_1,\ldots,g_p$ se anulan sobre todo X_o. Pero claramente: $\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^* \subset \subset \{s_1 > 0,\ldots,s_p > 0\}$, de donde:

$$\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^* \subset \{g_i = 0\}, \qquad i=1,\ldots,p,$$

luego si se cumple (γ), por el principio de identidad $g_i = 0$ sobre X_o.

La implicación que falta, (α) $\Longrightarrow$ (ε), se deducirá de la siguiente versión paramétrica:

(1.4) <u>Proposición</u>.- *Sean* A *un álgebra analítica ordenada y* $f_1,\ldots,f_r$ *elementos positivos de* A. *Existe un homomorfismo analítico* $c : A \to \mathbb{R}\{t\}$ *tal que* $c(f_1),\ldots,c(f_r)$ *son positivos en* $\mathbb{R}\{t\}$.

<u>Demostración</u>.- El argumento que se utiliza en el caso formal puede imitarse aquí. Vamos sin embargo a dar una prueba diferente, basada en el

Teorema de aproximación de M. Artin [3].- *Pongamos* $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_p)$, *y sean* $f_1(x,y),\dots$ $\dots,f_r(x,y) \in \mathbb{R}\{x,y\}$ *con* $f_1(0,0) = 0,\dots,f_r(x,y) = 0$. *Sean* $y_1(x),\dots,y_p(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ *series formales solución del sistema* $f_1(x,y) = 0,\dots,f_r(x,y) = 0$. *Entonces para cada* $s \geqslant 0$ *existen* $y_1^s(x),\dots,y_p^s(x) \in \mathbb{R}\{x\}$, *series congergentes solución del mismo sistema, y tales que* $y_i(x) \equiv$ $\equiv y_i^s(x) \bmod (x_1,\dots,x_n)^{s+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

De este teorema resulta una demostración fácil de que el completado $\hat{A}$ de un álgebra analítica A es íntegro si y sólo si lo es A [52; p. 62, corollaire 4.4]. También, de que $\hat{A}$ es real si y sólo si lo es A (Risler lo prueba mediante su teorema de los ceros [48; proposition 6.3]). Esto último puede precisarse como sigue:

(1.4.1) Lema.- *Sea* A *un álgebra analítica ordenada. Existe un orden en* $\hat{A}$ *(esto es, en su cuerpo de fracciones) que extiende el dado en* A.

Deducimos ahora fácilmente (1.4). Por (1.4.1) y ser cierto el resultado en el caso formal [34; proposition 1], existe un homomorfismo de álgebras $\hat{c} : \hat{A} \to \mathbb{R}[[t]]$, tal que $\hat{c}(f_1),\dots,\hat{c}(f_r)$ son positivos en $\mathbb{R}[[t]]$ para el orden correspondiente a $t > 0$ (está definido como el de $\mathbb{R}\{t\}$). Por otra parte, la topología (t)-ádica coincide con la asociada a este orden, luego existe $s \geqslant 0$ tal que si $h \equiv \hat{c}(f_i) \bmod t^{s+1}$, entonces h es positivo $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Ahora, utilizando el teorema de aproximación, se define un homomorfismo $c : A \to \mathbb{R}\{t\}$ con $c \equiv \hat{c} \mod t^{s+1}$ [3; theorem (1.5a)]. Claramente, c es el homomorfismo analítico buscado.

Para terminar, la

Demostración de (1.4.1).- En primer lugar, $\hat{A}$ es íntegra por serlo A, y se trata de ver que el cuerpo de fracciones K de $\hat{A}$ admite un orden en el que son positivos todos los elementos positivos de A. Estos últimos forman un sistema multiplicativamente cerrado S de K, y en virtud del criterio de Serre, bastará comprobar que si $s_1,\dots,s_r \in S$, la ecuación $s_1T_1^2 +\dots+ s_rT_r^2 = 0$ sólo tiene la solución trivial en $\hat{A}$.

Podemos poner $A = \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}/I$, $\hat{A} = \mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]/\hat{I}$, donde $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ es el anillo de series formales e $\hat{I} = I.\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$; sean además $f_1,\dots,f_m \in \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$ generadores de I y $h_1,\dots,h_r \in \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$ con $s_1 = h_1 + I,\dots$ $\dots,s_r = h_r + I$. En esta situación, decir que $s_1T_1^2 +\dots+ s_rT_r^2 = 0$ tiene solución no trivial en $\hat{A}$ significa que

$$F(x,y) = h_1T_1^2 +\dots+ h_rT_r^2 + Y_1f_1 +\dots+ Y_mf_m = 0,$$

$$y = (T_1,\dots,T_r, Y_1,\dots,Y_m)$$

tiene una solución $y(x) = (T(x),Y(x)) \in \mathbb{R}[[x]]^{r+m}$ con un $T_i(x) \notin \hat{I}$. Por el teorema de aproximación, para cada $s \geqslant 0$ existe $y^s(x) = (T^s(x),Y^s(x)) \in \mathbb{R}\{x\}^{r+m}$ que es solución de $F = 0$, y tal que $T_i(x) \equiv T_i^s(x) \mod (x_1,\dots,x_n)^s$. Pero $s_1,\dots,s_r$ son positivos en A, y la ecuación $s_1T_1^2 +\dots+ s_rT_r^2 = 0$ no puede tener solución no trivial en A, con lo que $T_i^s(x) \in I$. Se deduce:

$$T_i(x) \in \bigcap_{s \geq 0} ((x_1,\dots,x_n)^s + \hat{I}) = \hat{I}$$

(la igualdad por el teorema de Krull), lo que es absurdo.

(1.5) Fin de la demostración de (1.2): (α) $\Rightarrow$ (ε).- Aplicando el teorema de parametrización local, (0.2.b), existe $\delta \in \mathcal{O}[X_o] \setminus \{0\}$ tal que $X_o \setminus \mathcal{V}(\delta) \subset \mathrm{reg}_* X_o$. Por (1.4), existe un homomorfismo analítico $c : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ con $c(f_1) > 0,\dots,c(f_r) > 0$, $c(\delta^2) > 0$ en $\mathbb{R}\{t\}$. Consideramos la semirrama positiva c_o^* de la parametrización c, y entonces las desigualdades $c(f_1) > 0,\dots,c(f_r) > 0$ significan:

$$c_o^* \subset \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}$$

De la otra condición resulta que $\mathcal{V}(\delta) \cap c_o^* = \{0\}$, y como $c_o^* \subset X_o$, se tiene:

$$c_o^* \subset X_o \setminus \mathcal{V}(\delta) \subset \mathrm{reg}_* X_o,$$

lo que completa la prueba.

Las proposiciones (1.2) y (1.4) generalizan dos resultados importantes, que deducimos a continuación como corolarios.

(1.6) Corolario (lema de selección de una curva de Bruhat-Cartan-Wallace) [38; §3].- *Sea* $Z_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen semianalítico no vacío. Existe una semirrama de curva irreducible contenida en* Z_o.

Demostración.- Basta considerar el caso $Z_o = \{f_1 > 0,\dots$ $\dots,f_r > 0, g = 0\}$. Sea entonces Y_o el mínimo germen analítico que contiene a Z_o. Como $\dim Y_o = \dim Z_o$, existe una componente irreducible X_o de Y_o de dimensión máxima, con:

$$\emptyset \neq Z_o \cap X_o^* = \{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^*$$

Esto es la condición (β) de (1.2), luego se deduce (δ), y por tanto el corolario.

(1.7) Corolario (teorema de los ceros de Risler).- *Si* p *es un ideal primo real de* $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$, *se tiene:* $p = JV(p)$.

Demostración.- Sea $f \in \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\} \setminus p$. Como p es primo y real, $A = \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}/p$ puede dotarse de un orden, en el que f^2 será positivo. Por (1.4) existe un homomorfismo $c : A \to \mathbb{R}\{t\}$ tal que $c(f^2) > 0$, o sea, $c(f) \neq 0$. Esto significa que f no tiene ningún cero en: $t \mapsto x(t)$, $t > 0$ suficientemente pequeño, donde

$$x(t) = (c(x_1+p),\ldots,c(x_n+p))$$

Como el germen de: $t \mapsto x(t)$, $t > 0$, está contenido en $V(p)$, f no se anula sobre $V(p)$, esto es, $f \notin JV(p)$. Queda probada así la inclusión no trivial $p \supset JV(p)$.

Para demostrar su teorema de los ceros, Risler considera primero, [48; §4 (A)], el caso de un ideal primo principal de $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$, y establece la versión analítica del criterio del cambio de signo de Dubois-Efroymson, [18]. El argumento de Risler puede utilizarse en un contexto más general como sigue:

(1.8) Proposición (criterio del cambio de signo).- *Sea* X_o *un germen irreducible tal que* $\mathrm{reg}_* X_o$ *es conexo. Si* $f \in \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ *genera un ideal primo* $\neq \{0\}$ *en* $O[X_o]$, *son equivalentes:*

(α) f *genera un ideal real en* $\mathcal{O}[X_o]$

(β) f *cambia de signo sobre* X_o^*

<u>Demostración</u>.- <u>(α) ⟹ (β)</u>. Supóngase que $I = f.\mathcal{O}[X_o]$ es un ideal real. Si f no cambia de signo en X_o^*, por ejemplo, es siempre ≥ 0, entonces, (1.2), f es positivo en cada orden de $\mathcal{O}[X_o]$, y por tanto, [30; p. 288, theorem 10], f es una suma de cuadrados en $\mathcal{O}(X_o)$: $\delta^2 f = g_1^2 + \ldots + g_r^2$, $\delta, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}[X_o] \setminus \{0\}$. Como I es real, $g_1, \ldots, g_r \in I$, esto es: $g_i = h_i f$, $1 \leq i \leq r$, y resulta: $\delta^2 = (h_1^2 + \ldots + h_r^2) f$ (pues $\mathcal{O}[X_o]$ es íntegro y podemos simplificar $f \neq 0$). De nuevo por ser I real, $\delta \in I$, o sea: $\delta = \eta f$. Se sigue:

$$\eta^2 f = h_1^2 + \ldots + h_r^2$$

Como se ve el argumento es siempre iterable, y en particular: $\delta \in \bigcap_{s \geq o} f^s . \mathcal{O}[X_o]$. Se deduce (teorema de Krull), que $\delta = 0$. En suma, se obtiene una contradicción, luego f debe cambiar de signo sobre X_o^*.

<u>(β) ⟹ (α)</u>: Sea $p = J(X_o) + f.\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$, con lo que $p/J(X_o) = f.\mathcal{O}[X_o]$, y p es un ideal primo. Claramente, (α) equivale a que p sea real. Pero por el criterio geométrico de realidad, (0.4), esto equivale a su vez a la igualdad:

$$\dim X_o \cap V(f) = \dim V(p) = \dim \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}/p =$$

$$= \dim \mathcal{O}[X_o] / f.\mathcal{O}[X_o] = d-1,$$

poniendo $d = \dim X_o$. Así pues, debemos probar que $X_o \cap V(f)$ tie ne dimensión d-1.

Observamos en primer lugar que, por cambiar f de signo sobre X_o^*, el germen $\mathrm{reg}_* X_o \setminus V(f)$ no es conexo. En efecto, si lo fuera, f no cambiaría de signo sobre dicho germen, ni, por continuidad, sobre su adherencia. Pero por el principio de identidad, $\mathrm{reg}_* X_o \setminus V(f)$ es denso en X_o^*, luego f no cambiaría de signo sobre X_o^*.

Finalmente, veamos que $\dim X_o \cap V(f) = d-1$. La desigualdad $\dim X_o \cap V(f) \leqslant d-1$ resulta de ser X_o irreducible y no anularse f sobre todo X_o. Por tanto, se trata de ver que tan cerca como queramos del origen hay puntos de dimensión $\geqslant d-1$ de $X \cap \{f = 0\}$. Ahora bien, que $\mathrm{reg}_* X_o$ sea conexo significa que cada entorno U de 0 contiene un representante M de $\mathrm{reg}_* X_o$ que es una variedad analítica conexa de dimensión d, y hemos observado antes que, para U suficientemente pequeño, $M \setminus \{f = 0\}$ no es conexo. En suma, lo que queremos resulta del

<u>Teorema de Mazurkiewicz</u>.- *Si* M *es una variedad topológica (*) conexa de dimensión* d *y* A *un subespacio que la desconecta, entonces* $\dim A \geqslant d-1$.

(Este teorema aparece en [24; p. 80, 1.8.19] cuando M es una región del espacio euclídeo, pero exactamente el argumento allí utilizado sirve para este caso más general).

(*) Suponemos implícitamente que M es metrizable y separable.

En la demostración precedente juegan su papel aspectos puramente topológicos. Más adelante, §5, los estudiaremos con más detalle para gérmenes de superficie analítica, para los cuales es posible obtener un mejor criterio del cambio de signo, (5.1).

§2. <u>El problema decimoséptimo para gérmenes analíticos: aspecto cualitativo</u>.

A partir de ahora emplearemos continuamente las siguientes

<u>Notaciones</u>.- Sean X_o un germen irreducible, $\mathcal{O}[X_o]$ su anillo de funciones y $\mathcal{O}(X_o)$ su cuerpo. Consideramos los subconjuntos de $\mathcal{O}[X_o]$ siguientes:

$S[X_o]$, el formado por los $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que son suma de cuadrados en $\mathcal{O}[X_o]$

$S(X_o)$, el formado por los $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que son suma de cuadrados en $\mathcal{O}(X_o)$.

Además, si Z_o es un germen de conjunto de X_o, notaremos

$P(Z_o)$, al conjunto de los $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que son no negativos sobre Z_o.

El primer resultado que relaciona funciones no negativas y sumas de cuadrados es la contrapartida en este contexto analítico local del teorema clásico de E. Artin, [2]:

(2.1) <u>Proposición</u>.- *Sea* X_o *un germen irreducible. Entonces*

$$P(X_o^*) = S(X_o).$$

<u>Demostración</u>.- Un germen de función $f \in \mathcal{O}[X_o]$ está en $\mathcal{P}(X_o^*)$ si y sólo si $\{f \geq 0\} \supset X_o^*$, esto es: $\{-f > 0\} \cap X_o^* = \emptyset$. Esto equivale, por (1.2), a que f sea positivo en cada orden de $\mathcal{O}(X_o)$, y por la teoría de Artin-Schreier [30; p. 288, theorem 10], a que f sea una suma de cuadrados en $\mathcal{O}(X_o)$.

(2.2) <u>Observaciones</u>.- La anterior solución de H^{17}, a diferencia de la clásica, se formula con funciones no negativas en X_o^*, y no en todo el germen, resultando los contenidos

$$\mathcal{S}(X_o) = \mathcal{P}(X_o^*) \supset \mathcal{P}(X_o) \supset \mathcal{S}[X_o]$$

(a) $\mathcal{P}(X_o^*) = \mathcal{P}(X_o)$ si X_o tiene dimensión pura. El recíproco también es cierto, pero su demostración requerirá un análisis cuidadoso, (§§6 y 7).

(b) Si $f \in \mathcal{P}(X_o^*)$ es una unidad de $\mathcal{O}[X_o]$, entonces $f \in \mathcal{S}[X_o]$ (es, de hecho, un cuadrado en $\mathcal{O}[X_o]$). En efecto, si $X_o \subset \mathbb{R}_o^n$, $\mathcal{O}[X_o] = \mathcal{O}_n/\mathcal{J}(X_o)$ y $f = F+\mathcal{J}(X_o)$ es ≥ 0 sobre X_o^*, se tiene en particular $f(0) \geq 0$. Pero si f es una unidad en $\mathcal{O}[X_o]$, debe ser $f(0) > 0$. Así $F(0) > 0$ y existe $\sqrt{F} \in \mathcal{O}_n$. En suma, $f = (\sqrt{F} + \mathcal{J}(X_o))^2$.

(c) $\mathcal{P}(\mathbb{R}_o) = \mathcal{S}[\mathbb{R}_o]$. En efecto, si $f \in \mathbb{R}\{t\}$ es ≥ 0 sobre $\mathbb{R}_o$, y escribimos $f = t^n u(t)$, $u(0) \neq 0$, sólo puede ser n par y $u(0) > 0$, con lo que $\sqrt{f} = t^{n/2}\sqrt{u} \in \mathbb{R}\{t\}$.

(d) $\mathcal{P}(\mathbb{R}_o^2) = \mathcal{S}[\mathbb{R}_o^2]$. Este es un resultado conjunto de Bochnak y Risler [7; lemme 7.(a)].

(e) $\mathcal{P}(\mathbb{R}_o^n) \neq \mathcal{S}[\mathbb{R}_o^n]$ si $n \geq 3$. En 40 Motzkin prueba que el polinomio $h(X,Y,1) \in \mathbb{R}[X,Y]$, donde $h(x_1,x_2,x_3) = x_3^6 + x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2 x_3^2$, es no negativo sobre $\mathbb{R}^2$, pero no una suma de cuadrados en $\mathbb{R}[X,Y]$. Se deduce fácilmente de esto que el germen en el origen de h está en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_o)$ y no en $\mathcal{S}[\mathbb{R}^n_o]$ (véase [6; counterexample 9.1]).

Para estudiar el residuo $\mathcal{P}(X_o^*) \setminus \mathcal{S}[X_o]$ introducimos siguiendo a Delzell, [16; chap. V, A], las siguientes

(2.3) <u>Definiciones</u>.- *Sean* X_o *un germen irreducible y* $f \in \mathcal{P}(X_o^*)$. *Se llama:*

(α) *Ideal de denominadores de* f, *al ideal* $\Delta(f) \subsetneq \mathcal{O}[X_o]$ *de los elementos* $\delta \in \mathcal{O}[X_o]$ *tales que* $\delta^2 f \in \mathcal{S}[X_o]$.

(β) *Lugar de denominadores de* f, *al germen* $\mathcal{D}(f) = \mathcal{V}(\Delta(f))$.

(2.4) <u>Observaciones</u>.- En las hipótesis de (2.3).

(a) Como $f \in \mathcal{P}(X_o^*) = \mathcal{S}(X_o)$, existe $\delta \in \mathcal{O}[X_o]$, $\delta \neq 0$, tal que $\delta^2 f \in \mathcal{S}[X_o]$. En consecuencia, y por ser X_o irreducible, el ideal $\Delta(f)$ tiene altura $\geqslant 1$, y el germen $\mathcal{D}(f)$ dimensión $\leqslant \dim X_o - 1$.

(b) Existe $\delta \in \Delta(f)$ tal que $\mathcal{D}(f) = \mathcal{V}(\delta)$ (tómese $\delta = \delta_1^2 + \ldots + \delta_r^2$ siendo $\delta_1, \ldots, \delta_r$ generadores de $\Delta(f)$). Por tanto, como $\delta^2 f \in \mathcal{S}[X_o] \subset \mathcal{P}(X_o)$:

$$\{f < 0\} \subset \{\delta = 0\} = \mathcal{D}(f)$$

(c) Si $\mathcal{D}(f) = \emptyset$, entonces $f \in \mathcal{S}[X_o]$. En efecto,

$\mathcal{D}(f) = \mathcal{V}(\delta)$ con $\delta^2 f \in \mathcal{S}[X_o]$, luego si $\mathcal{D}(f) = \emptyset$, es $\delta(0) \neq 0$. Se sigue que δ es una unidad de $\mathcal{O}[X_o]$, y que $f \in \mathcal{S}[X_o]$.

A continuación, un resultado típico sobre codimensión:

(2.5) <u>Proposición</u>.- *Sea* X_o *un germen real* R_1, *(0.8). Entonces, para cada* $f \in \mathcal{P}(X_o^*)$,

$$\dim \mathcal{D}(f) \leqslant \dim X_o - 2$$

<u>Demostración</u>.- Supongamos lo contrario. Entonces por (2.4.a), $\dim \mathcal{D}(f) = d-1$, poniendo $d = \dim X_o$. Esto significa que el ideal de ceros de $\mathcal{D}(f)$ tiene altura 1 en $\mathcal{O}[X_o]$. Sea $p \subset \mathcal{O}[X_o]$ uno de sus asociados primos de altura 1, que será real, (0.4.a). Como X_o es real R_1, $\mathcal{O}[X_o]_p$ es un anillo de valoración discreta. Admitamos ahora un

<u>Lema</u>.- *Sea* A *un anillo de valoración discreta, cuyo cuerpo residual es real. Si* $f \in A$ *es una suma de* r *cuadrados en el cuerpo de fracciones de* A, *entonces* f *es una suma de* r *cuadrados en* A.

Aplicando este lema con $A = \mathcal{O}[X_o]_p$, deducimos que para cierto $\delta \in \mathcal{O}[X_o] \setminus p$ es $\delta^2 f \in \mathcal{S}[X_o]$. Pero de esto último se sigue $\delta \in \Delta(f) \subset p$, lo que es absurdo. Por tanto, $\dim \mathcal{D}(f) < d-1$.

<u>Demostración del lema</u>.- Sean K el cuerpo de fracciones y $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ la valoración de A. Supóngase $f = f_1^2 + \ldots + f_r^2$, $f_1, \ldots, f_r \in K \setminus \{0\}$. Como el cuerpo residual es real, se verifica

$$\nu(f) = 2\min\{\nu(f_1), \ldots, \nu(f_r)\}$$

En efecto, pongamos $\nu_i = \nu(f_i)$ y por ejemplo $\nu_1 = \min\{\nu_1,\ldots,\nu_r\}$. Hay que ver que $\nu(f) = 2\nu_1$. Ahora bien, eligiendo un elemento $t \in A$ con $\nu(t) = 1$, se tendrá:

$$f_1 = t^{\nu_1}g_1, \quad \nu(g_1) = 0; \qquad \nu(f_i/t^{\nu_1}) = \nu_i-\nu_1 \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

y en consecuencia:

$$f = t^{2\nu_1}(g_1^2 +\ldots+ g_r^2), \quad \nu(g_1^2 +\ldots+ g_r^2) \geqslant 0$$

donde $g_i = f_i/t^{\nu_1}$ para $i=2,\ldots,r$. Se trata de ver que $\nu(g_1^2 +\ldots+ g_r^2) = 0$. Pero si fuera $\nu(g_1^2 +\ldots+ g_r^2) > 0$, entonces $g_1^2 +\ldots+ g_r^2 \in tA$ y como este ideal es real (por serlo el cuerpo residual) deduciríamos $g_1 \in tA$, y $\nu(g_1) > 0$. Probada así la fórmula que queríamos, resulta $\nu(f_1) \geqslant 0,\ldots,\nu(f_r) \geqslant 0$, y $f_1,\ldots,f_r \in A$.

(Este lema está por otra parte relacionado con algunos resultados de Choi et al. [15; §4], sobre representación de elementos de un anillo mediante formas cuadráticas regulares).

(2.6) Ejemplos.- (a) No parece posible mejorar la proposición anterior sin imponer fuertes restricciones a X_o. Por ejemplo, el germen de superficie X_o de ecuación $x^2 + y^2 + z^3 = 0$. Se trata de un germen irreducible cuyo anillo de funciones es factorial, y por tanto real R_1, y la función $-z = (x^2 + y^2)/z^2$ es $\geqslant 0$ sobre X_o^*; sin embargo, $\mathcal{D}(-z) = \{0\}$, luego $\dim \mathcal{D}(-z) = \dim X_o - 2$. (Este es un caso particular de un ejemplo que veremos más tarde, (5.5), dentro de la discusión que para superficies haremos en el §5).

(b) Si se omite la condición real R_1 en el enunciado de (2.5) la conclusión es falsa, aún si la singularidad es aislada. Considérese el germen $X_o \subset \mathbb{R}^3_o$ de ecuación $z(x+y)(x^2+y^2) = x^4$ (figura 2, (0.8)). Entonces $z(x+y) = x^4/(x^2+y^2)$ es $\geqslant 0$ sobre X^*_o, y $\mathcal{D}(z(x+y)) = \mathcal{V}(x,y)$.

En efecto, si no, dicho lugar de denominadores se reduciría al origen, y en un entorno se tendría: $\delta^2.z(x+y) = \sum_{i=1}^{r} f_i^2 +$ $+ g.z(x+y)(x^2+y^2)$, donde $\mathcal{V}(\delta) \cap X_o = \{0\}$. Tomando representantes y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño será

$$\delta(x,0,\varepsilon)^2\varepsilon x = \sum_{i=1}^{r} f_i(x,0,\varepsilon)^2 + g(x,0,\varepsilon)\varepsilon x^3,$$

con $\delta(0,0,\varepsilon) \neq 0$. Esto último implica que el orden de $\delta(x,0,\varepsilon)^2\varepsilon x - g(x,0,\varepsilon)\varepsilon x^3$ es exactamente 1, mientras que el orden de $\sum_{i=1}^{r} f_i(x,0,\varepsilon)^2$ tiene que ser par, lo que es una contradicción.

(c) De hecho, el lugar de denominadores del ejemplo anterior es el máximo posible, pues coincide con $\mathbb{R}^3_o \cap \operatorname{sing} \tilde{X}_o$, y mediante el argumento utilizado en (2.5) se obtiene facilmente:

'Si $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ es un germen de superficie irreducible, $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n_o \cap \operatorname{sing} \tilde{X}_o$ para cada $f \in S(X_o)$'

En lo que sigue, probaremos dos generalizaciones del teorema de los ceros, inspiradas en los resultados de Stengle, [50], y Recio, [47]. Para ello necesitamos un formalismo algebraico:

(2.7) <u>Radicales estricto y no estricto</u>.- Sea $f = (f_1,\ldots,f_r) \in$ $\in \mathbb{R}\{x\}^r$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Notamos S al semianillo generado por

$f_1,\dots,f_r$ y las sumas de cuadrados de elementos de $\mathbb{R}\{x\}$, y T al sistema multiplicativamente cerrado generado por $f_1,\dots,f_r$. Sea I un ideal de $\mathbb{R}\{x\}$.

Definiciones.- *(α) Se llama radical f no estricto de* I *y se nota* $\rho_f(I)$ *al ideal de los elementos* $h \in \mathbb{R}\{x\}$ *tales que* $h^{2m} + a \in I$ *con* $m > 0$, $a \in S$.

(β) Se llama radical f estricto de I *y se nota* $\rho_f^+(I)$ *al ideal de los* $h \in \mathbb{R}\{x\}$ *tales que* $ah^{2m} + b \in I$ *con* $m > 0$, $a \in T$, $b \in S$.

(La demostración de que se trata efectivamente de ideales es algo artificiosa, [50; lemma 1]. Se comprueba fácilmente que $\rho_f(I)$ es su propio radical f no estricto y $\rho_f^+(I)$ su propio radical f estricto; además, si $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$, se verifica:

$$\rho_f(I) = \rho_f(I_1) \cap \dots \cap \rho_f(I_s);$$
$$\rho_f^+(I) = \rho_f^+(I_1) \cap \dots \cap \rho_f^+(I_s)$$

Podemos así enunciar:

(2.8) Proposición (teorema de los ceros).- *Sean* I *un ideal de* $\mathbb{R}\{x\}$, $f_1,\dots,f_r \in \mathbb{R}\{x\}$ *y* $f = (f_1,\dots,f_r)$. *Entonces:*

(α) $\mathcal{J}(V(I) \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}) = \rho_f(I)$

(β) $\mathcal{J}(V(I) \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}) = \rho_f^+(I)$.

Demostración.- (α) Claramente, $\rho_f(I) \subset \mathcal{J}(V(I) \cap \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\})$. Recíprocamente, obsérvese en primer lugar que por las propiedades del radical no estricto, basta considerar el caso en que $I = p$ es primo y coincide con su radical f no estricto. Pero entonces $X_o = V(p)$ es un germen irreducible con $O[X_o] = \mathbb{R}\{x\}/p$. También se ve que podemos suponer $f_1 \notin p ,\dots, f_r \notin p$. Afirmamos entonces que el sistema multiplicativamente cerrado $T+p \subset O[X_o]$ cumple el criterio de Serre, (1.3). En efecto, sean $t_1,\dots,t_p \in T$, $g_1,\dots,g_p \in \mathbb{R}\{x\}$, tales que $t_1g_1^2 +\dots+ t_pg_p^2 = 0$ en $O[X_o]$. Esto significa

$$t_1g_1^2 +\dots+ t_pg_p^2 \in p,$$

y multiplicando por t_1 resulta, de ser $p = \rho_f(p)$, que $t_1g_1 \in p$. Ahora bien, p es primo y $f_1,\dots,f_r$ no están en p, luego $t_1 \notin p$ y $g_1 \in p$. Análogamente, $g_2,\dots,g_p \in p$, y así $g_1 = 0,\dots,g_p = 0$ en $O[X_o]$.

Ahora, por el criterio de Serre, $O[X_o]$ admite un orden en el que $f_1,\dots,f_r$ son positivos, luego $\mathrm{reg}_* X_o \cap \{f_1 > 0,\dots$ $\dots,f_r > 0\} \neq \emptyset$, (1.2). En fin, si g se anula sobre $X_o \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}$, g se anula sobre $\mathrm{reg}_* X_o \cap \{f_1 > 0,\dots$ $\dots,f_r > 0\}$, y por el principio de identidad, g se anula sobre X_o. Esto muestra que $J(V(p) \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}) \subset p$.

(β) El contenido $\rho_f^+(I) \subset J(V(I) \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\})$ es evidente. Recíprocamente, si g se anula sobre $V(I) \cap \{f_1 > 0,\dots$ $\dots,f_r > 0\}$, entonces $f_1 \dots f_r g$ lo hace sobre $V(I) \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}$, y por (α), $f_1 \dots f_r g \in \rho_f(I)$, esto es:

$$(f_1 \dots f_r g)^{2m} + a \in I, \quad m > 0, \quad a \in S.$$

Como $(f_1 \dots f_r)^{2m} \in T$, se concluye que $g \in \rho_f^+(I)$.

Mediante el anterior resultado se obtiene:

(2.9) Proposición (criterio de no negatividad).- *Sea* I *un ideal de* $\mathbb{R}\{x\}$. *Un elemento* $g \in \mathbb{R}\{x\}$ *es no negativo sobre* $V(I) \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}$ *si y sólo si existen elementos* $a,b \in S$, $m > 0$, *tales que:*

$$g^{2m+1} + ag \equiv b \quad \text{mod } I$$

Demostración.- Que es una condición suficiente es evidente. Sea pues $g \geq 0$ sobre $V(I) \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}$. Considerando una nueva indeterminada t, se tiene:

$$g \in \mathcal{J}(V(t^2+g,\ I) \cap \{f_1 \geq 0,\dots,f_r \geq 0\}),$$

y por (2.9.α), podemos escribir:

$$g^{2m} + A(x,t) = B(x,t)\ (t^2+g) + C(x,t),$$

donde

$$A(x,t) = \sum_\alpha A_\alpha(x,t)^2 f_\alpha, \quad B(x,t) = \sum_\beta B_\beta(x,t)^2 f_\beta,$$
$$f_\alpha, f_\beta \in T, \quad C(x,t) \in I.\mathbb{R}\{x,t\}$$

Ahora, observando que un elemento $H(x,t) \in \mathbb{R}\{x,t\}$ tiene una representación única de la forma $H(x,t) = H_o(x,t^2) + tH_1(x,t^2)$, obtenemos:

$$g^{2m} + A_o(x,t^2) = B_o(x,t^2)\ (t^2+g) + C_o(x,t^2),$$

donde

$$A_o(x,t^2) = \sum_\alpha (A_{\alpha o}(x,t^2)^2 + t^2 A_{\alpha 1}(x,t^2)^2) f_\alpha,$$
$$C_o(x,t^2) \in I.\mathbb{R}\{x,t\}.$$

Se deduce

$$g^{2m} + A_o(x,t) = B_o(x,t)(t+g) + C_o(x,t)$$

(pues esta igualdad es válida para $t > 0$). Haciendo $t = -g$ resulta:

$$g^{2m} + A_o(x,-g) = C_o(x,-g)$$

Pero $C_o(x,-g) \in I$, pues $C_o(x,t^2) \in I.\mathbb{R}\{x,t\}$, y de la expresión de $A_o(x,t^2)$ se sigue:

$$A_o(x,-g) = \sum_\alpha (A_\alpha(x,-g)^2 - gA_{\alpha 1}(x,-g)^2)f_\alpha$$

En fin:

$$g^{2m+1} + (\sum_\alpha A_\alpha(x,-g)^2 f_\alpha)g \equiv \sum_\alpha g^2 A_{\alpha 1}(x,-g)^2 f_\alpha \quad \text{mod } I.$$

Terminamos este epígrafe con la siguiente aplicación del criterio precedente:

(2.10) Proposición.- *Sea* X_o *un germen irreducible. Entonces:*

$$\mathcal{P}(X_o) = \{f \in S(X_o) : \mathcal{D}(f) \subset \mathcal{V}(f)\}$$

Demostración.- Si $f \in \mathcal{P}(X_o)$, por el criterio de no negatividad con $f_1 = 1,\dots,f_r = 1$, resulta $(f^{2m} + \sum_\alpha a_\alpha^2)f = \sum_\beta b_\beta^2$, luego $\delta = f^{2m} + \sum_\alpha a_\alpha^2 \in \Delta(f)$ y así:

$$\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{V}(\delta) \subset \mathcal{V}(f).$$

Recíprocamente, si $f \in S(X_o)$ y $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{V}(f)$, como siempre es $\{f < 0\} \subset \mathcal{D}(f)$, se concluye $\{f < 0\} = \{f < 0\} \cap \mathcal{V}(f) = \emptyset$, y $f \in \mathcal{P}(X_o)$.

§3. El problema decimoséptimo para gérmenes analíticos: aspecto cuantitativo.

En su ámbito más general el problema cuantitativo se formula mediante

(3.1) El número de Pitágoras de un anillo conmutativo [14; §2].- Sea A un anillo conmutativo. Se llama número de Pitágoras de A, y se representa por $p(A)$, al mínimo entero $p > 0$ tal que una suma de cuadrados de A puede expresarse como una suma de p cuadrados (si este mínimo no existe, $p(A) = +\infty$).

Por ejemplo, el resultado fundamental de Pfister sobre funciones racionales, [44], se abrevia: $p(\mathbb{R}(X_1,\dots,X_n)) \leqslant 2^n$. Destaquemos dos observaciones inmediatas:

Lema.- *(1) Si* $A \to B$ *es un homomorfismo suprayectivo de anillos, entonces* $p(A) \geqslant p(B)$.

(2) Si S *es un sistema multiplicativamente cerrado de un anillo* A, *entonces* $p(A) \geqslant p(S^{-1}A)$. *En particular, si* A *es íntegro y* K *su cuerpo de fracciones,* $p(A) \geqslant p(K)$.

En nuestro contexto introducimos la siguiente

Definición.- *Sea* X_o *un germen irreducible. Ponemos:*

$$p[X_o] = p(\mathcal{O}[X_o]) \; ; \qquad p(X_o) = p(\mathcal{O}(X_o)).$$

(3.2) El caso regular.- Si X_o es liso, esto es $X_o = \mathbb{R}^n_o$, $n = \dim X_o$, se tiene:

(a) $p[\mathbb{R}_o] = p(\mathbb{R}_o) = 1$. (Basta verlo para el anillo, y esto se hizo en (2.2.c)).

(b) $p[\mathbb{R}_o^2] = p(\mathbb{R}_o^2) = 2$. Por un resultado de Bochnak y Risler, [7; lemme 7(a)], es $p[\mathbb{R}_o^2] \leqslant 2$. Veamos pues que $p(\mathbb{R}_o^2) > 1$. Afirmamos que $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}\{x,y\}$ no es un cuadrado en el cuerpo de fracciones. En efecto, si lo fuera:

$$\delta^2.(x^2+y^2) = f^2, \qquad \delta, f \in \mathbb{R}\{x,y\} \setminus \{0\}$$

Entonces $x+iy$, $x-iy$ dividen a f^2 en $\mathbb{C}\{x,y\}$, luego como son irreducibles, dividen a f, esto es: $f = h.(x+iy)(x-iy) = h.(x^2+y^2)$, $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Ahora bien, f y x^2+y^2 tienen coeficientes reales, luego $h \in \mathbb{R}\{x,y\}$. Esto significa

$$\delta^2 = h^2.(x^2+y^2), \qquad f = h.(x^2+y^2)$$

Repitiendo el argumento, existe $g \in \mathbb{R}\{x,y\}$ con $\delta = g.(x^2+y^2)$ y por tanto

$$g^2(x^2+y^2) = h^2, \qquad f = h.(x^2+y^2), \qquad \omega(f) \geqslant 2$$

Se ve así que aplicando lo anterior s veces obtendríamos $\omega(f) \geqslant 2s$, y en fin $f = 0$, lo que es absurdo.

(c) $p[\mathbb{R}_o^n] = +\infty$, si $n \geqslant 3$. Este es un teorema de Choi et al. [14; theorem (6.6)]. No se conoce $p(\mathbb{R}_o^n)$, y en [14; §9, problem 6] se conjetura $p(\mathbb{R}_o^n) = 2^{n-1}$.

Podemos precisar (3.2.c) como sigue:

(3.3) <u>Proposición</u>.- *Si* X_o *es un germen irreducible de dimensión* $d \geqslant 4$, $p[X_o] = +\infty$.

Demostración.- Sea $\tilde{X}_o$ el complexificado de X_o. Como $X_o \setminus \operatorname{sing} \tilde{X}_o \neq \emptyset$, por el lema de selección existe un germen de curva irreducible $c_o \subset X_o$, una de cuyas semirramas c_o^* está contenida en $X_o \setminus \operatorname{sing} \tilde{X}_o$. Considérese el ideal primo real $p = V(c_o)$. Se tiene $V(p) \not\subset \operatorname{sing} \tilde{X}_o$, luego, (0.8.3), $\mathcal{O}[X_o]_p$ es regular. Pero como c_o es una curva de X_o, p es un ideal primo real de altura d-1 de $\mathcal{O}X_o$. Se deduce que $\mathcal{O}[X_o]_p$ es un anillo local regular de dimensión $d-1 \geq 3$, cuyo cuerpo residual $(\mathcal{O}[X_o]/p)_{(o)}$ es real. Por [14; theorem (6.6)], $p(\mathcal{O}[X_o]_p) = +\infty$, y por (3.1.2), $p[X_o] = +\infty$.

Para el estudio de las sumas de cuadrados, y, especialmente, de las sumas de dos cuadrados en $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$ son útiles los siguientes lemas.

(3.4) Lema.- *Si* $f \in S(\mathbb{R}^n_o)$ *entonces,* $f = g^2 h_1, \dots, f_r$, *donde* $h_1,\dots,h_r \in S(\mathbb{R}^n_o)$ *y son elementos irreducibles distintos.*

Demostración.- Basta ver que si h es un factor irreducible de f con exponente impar, entonces h ó $-h$ está en $S(\mathbb{R}^n_o) = P(\mathbb{R}^n_o)$, o equivalentemente, que h no cambia de signo en $\mathbb{R}^n_o$. Supongamos pues que sí lo hace, y sea

$$f = a^2 hh', \quad h,h' \in \mathbb{R}\{x\} = \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\},$$

h y h' primos entre sí. Cambiando a, se tendrá:

$$a^2 hh' = a_1^2 + \dots + a_s^2, \quad a_i \in \mathbb{R}\{x\}.$$

Si h cambia de signo, $h.\mathbb{R}\{x\}$ es real (criterio del cambio de signo, (1.8)), luego

$$a_i = b_i h, \quad b_i \in \mathbb{R}\{x\},$$

de donde

$$a^2h' = (b_1^2 +\ldots+ b_s^2)h,$$

y por ser h y h' primos entre sí, h divide a a^2, y de nuevo por ser real

$$a = b.h, \qquad b \in \mathbb{R}\{x\}.$$

En suma:

$$b^2hh' = b_1^2 +\ldots+ b_s^2, \qquad f \in h^3.\mathbb{R}\{x\}$$

y repitiendo el proceso, concluiríamos que $f \in h^p.\mathbb{R}\{x\}$ para cualquier p, lo que es absurdo.

(3.5) <u>Lema</u>.- *Si* $h \in \mathcal{O}[\mathbb{R}_o^n]$ *es irreducible, son equivalentes:*

(α) h *ó* $-h$ *es suma de dos cuadrados en* $\mathcal{O}[\mathbb{R}_o^n]$

(β) h *es reducible en* $\mathcal{O}[\mathbb{C}_o^n]$.

<u>Demostración</u>.- Ponemos $x = (x_1,\ldots,x_n)$. <u>(α) ⟹ (β)</u>: Si $h = f^2+g^2$ en $\mathbb{R}\{x\}$, se tiene $h = (f+ig)(f-ig)$ en $\mathbb{C}\{x\}$, luego h es reducible en $\mathbb{C}\{x\}$.

<u>(β) ⟹ (α)</u>: Sea $f+ig$ un factor irreducible de h en $\mathbb{C}\{x\}$, $f,g \in \mathbb{R}\{x\}$. Entonces el conjugado $f-ig$ es otro factor irreducible de h, y resulta

$$h = u.(f+ig)(f-ig) = u(f^2+g^2)$$

donde $u \in \mathbb{C}\{x\}$. Pero como h y f^2+g^2 tienen coeficientes reales, debe ser $u \in \mathbb{R}\{x\}$, y entonces, por ser h irreducible en $\mathbb{R}\{x\}$, u es una unidad. Se sabe que una unidad de $\mathbb{R}\{x\}$ es un cuadrado o lo es su opuesto, y queda probado (α).

(3.6) Proposición.- *Sea* $f \in S(\mathbb{R}^n_o)$ *y* $f = g^2 h_1, \dots, h_r$ *la descomposición de (3.4). Entonces, son equivalentes:*

(α) f *es suma de dos cuadrados en* $\mathcal{O}[\mathbb{R}^n_o]$

(β) Cada h_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *en suma de dos cuadrados en* $\mathcal{O}[\mathbb{R}^n_o]$.

Demostración.- Ponemos $x = (x_1, \dots, x_n)$. (α) ⟹ (β): En virtud de (3.5), basta ver que $h_1, \dots, h_r$ son reducibles en $\mathbb{C}\{x\}$, y esto se deducirá si probamos que para cada factor $h \in \mathbb{R}\{x\}$ de f, que es irreducible en $\mathbb{C}\{x\}$, se tiene

$$f = f_1 . h^2, \qquad f_1 \in \mathbb{R}\{x\},$$

y f_1 es suma de dos cuadrados en $\mathbb{R}\{x\}$. Ahora bien, por hipótesis:

$$f = a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib), \quad a,b \in \mathbb{R}\{x\}$$

y puesto que $h \in \mathbb{R}\{x\}$ es irreducible en $\mathbb{C}\{x\}$ y divide a f, dividirá también a uno de esos factores, por ejemplo al primero:

$$a+ib = (c+id)h, \qquad c,d \in \mathbb{R}\{x\}$$

Pero entonces $a-ib = (c-id)h$, y se sigue

$$f = (c+id)(c-id)h^2 = (c^2+d^2)h^2,$$

como afirmábamos.

(β) ⟹ (α): Es consecuencia de que el producto de dos sumas de dos cuadrados es a su vez una suma de dos cuadrados (por la identidad clásica:

$$(T_1^2 + T_2^2)(T_3^2 + T_4^2) = (T_1T_3 - T_2T_4)^2 + (T_1T_4 + T_2T_3)^2).$$

(3.7) Observaciones.- (a) Los lemas (3.4) y (3.5), y la proposición (3.6) son válidos en hipótesis más generales. Por el uso que luego haremos de ello (véase §5), señalemos que las mismas demostraciones sirven cuando en lugar de $\mathbb{R}^n_o$ se considera un germen irreducible que cumple el criterio del cambio de signo, y cuyo anillo de funciones, así como el de su complexificado, es factorial.

(b) En [15] se desarrollan de un modo más sistemático resultados del tipo de (3.4), (3.5) y (3.6). La situación que en dicho artículo se considera es más general, y el método anterior no se aplica directamente en ella.

Terminamos este epígrafe con unas observaciones sobre $p(\mathbb{R}^n_o)$.

(3.8) Proposición.- *Para cada entero* $n \geqslant 3$ *se verifica:*

$$p(\mathbb{R}^n_o) \geqslant p(\mathbb{R}(x_1,\dots,x_{n-1})) \geqslant n+1.$$

Demostración.- Sea m el número de Pitágoras del cuerpo $\mathbb{R}(x_1,\dots,x_{n-1})$. Entonces existe un polinomio $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_{n-1}]$ que es suma de cuadrados en $\mathbb{R}(x_1,\dots,x_{n-1})$, pero no de $m-1$. Sea $H \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ el homogeneizado de h, esto es, el polinomio homogéneo de $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ de grado mínimo tal que

$$H(x_1,\dots,x_{n-1},1) = h(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Entonces H es suma de cuadrados en el cuerpo de fracciones de $\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$, pero no de $m-1$. En efecto, lo primero es inmediato. En cuanto a lo segundo, escribamos:

$$\delta^2 H = f_1^2 + \dots + f_{m-1}^2, \quad \delta, f_1,\dots,f_{m-1} \in \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}, \quad \delta \neq 0$$

Ahora bien, como H es homogéneo, tomando las formas iniciales de $\delta, f_1, \ldots, f_{m-1}$ podemos suponer $\delta, f_1, \ldots, f_{m-1} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Además, si $\delta(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = 0$, es $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, y dividiendo por $x_n - 1$ podemos suponer también $\delta(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \neq 0$. Por último, haciendo $x_n = 1$, resulta que h es suma de $m-1$ cuadrados en $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, contra la elección de h. Esto significa que $p(\mathbb{R}^n_o) > m-1$, y se tiene la primera desigualdad.

La segunda se prueba por inducción. Para $n=3$, es un teorema de Cassels, Ellison y Pfister, [12]. El paso inductivo es otro teorema de Cassels según el cual, $p(K) + 1 \leqslant p(K(t))$ si K es un cuerpo real y t una indeterminada [11; theorem 2].

(3.9) <u>Proposición</u>.- *Sea* $n \geqslant 3$. *Para cada entero* $q \geqslant 0$ *las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(α) $p(\mathbb{R}^n_o) > 2^q$.

(β) Existe un elemento irreducible en $S(\mathbb{R}^n_o)$ *que no es suma de* 2^q *cuadrados en* $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n_o)$.

<u>Demostración</u>.- <u>(α) ⟹ (β)</u>: Supongamos que no se cumple (β) y sea $f \in S(\mathbb{R}^n_o)$. Por (3.4), $f = g^2 h_1, \ldots, h_r$, donde $h_1, \ldots, h_r$ son elementos irreducibles de $S(\mathbb{R}^n_o)$ y se escriben pues como suma de 2^q cuadrados. Entonces, por un teorema de Pfister, [43; Satz 2], que establece que el producto de dos sumas de 2^q cuadrados es a su vez una suma de 2^q cuadrados, deducimos que f es suma de 2^q cuadrados (en el cuerpo $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n_o)$). Se tendría $p(\mathbb{R}^n_o) \leqslant 2^q$, contra (α).

(β) $\Longrightarrow$ (α): Es trivial.

(3.10) Observación y ejemplos.- Combinando los dos resultados anteriores, resulta que si $n \geq 3$, $q \geq 1$ y $n \geq 2^q$, existe un elemento irreducible $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_o)$ que no es suma de 2^q cuadrados en $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n_o)$. De hecho la demostración es constructiva, y el elemento en cuestión es:

- $h(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 - 3x_1^2x_2^2x_3^2 + x_3^6$, para $n=3$ (es el resultado de Cassels et al. citado antes)
- $h(x_1,x_2,x_3) + x_{n-3}^2 +\ldots+ x_n^2$, para $n > 3$.

§4. El problema decimoséptimo para gérmenes de curva.

En este epígrafe estudiamos los problemas generales considerados en los anteriores §§2 y 3, ahora para gérmenes de curva. Utilizaremos esencialmente

(4.1) El semigrupo de valores. [10; chap. V, 1].- Sea X_o un germen de curva irreducible. Notemos $A = \mathcal{O}[X_o]$, $K = \mathcal{O}(X_o)$ y A^ν la clausura entera de A en K. Como observamos en (0.9), A^ν es un anillo local regular de dimensión 1, luego es un anillo de valoración discreta: sea $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ esa valoración. Se llama semigrupo de valores de X_o a $\Gamma = \nu(A \setminus \{0\}) \subset \mathbb{N}$ (convenimos que $0 \in \mathbb{N}$). Se llama multiplicidad de X_o al mínimo entero $m > 0$ de Γ. Se deduce fácilmente de ser A^ν un módulo finito sobre A que $\mathbb{N} \setminus \Gamma$ es finito, y se llama (grado del) conductor de X_o al mínimo entero $c > 0$ tal que $c + \mathbb{N} \subset \Gamma$.

Es conveniente describir Γ mediante parametrizaciones. Sean $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ y $\tau : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ una parametrización primitiva de X_o; pongamos $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, donde $x_1(t) = \tau(x_1),\ldots,x_n(t) = \tau(x_n)$. Entonces $\mathcal{O}[X_o] = \mathcal{O}_n/\ker\tau$ se identifica con su imagen, que es el subanillo de $\mathbb{R}\{t\}$ formado por las series: $f(x(t))$, $f \in \mathcal{O}_n$, y Γ es el conjunto de los órdenes de estas series. Se observa además que si el orden de $f(x(t))$ no es cero, esto es, $f(0) = 0$, se tiene:

$$\omega(f(x(t))) \geqslant \min\{\omega(x_1(t)),\ldots,\omega(x_n(t))\},$$

luego la multiplicidad de X_o es:

$$m = \min\{\omega(x_1(t)),\ldots,\omega(x_n(t))\}.$$

Sea, por ejemplo, $m = \omega(x_1(t))$. Entonces $x_1(t) = t^m u(t)$, $u(0) \neq 0$. Cambiando x_1 por $-x_1$ si es preciso, $u(0) > 0$, y existe $v \in \mathbb{R}\{t\}$ con $u = v^m$, luego $x_1(t) = (tv(t))^m$. Ahora $s = tv(t)$ define un isomorfismo $\mathbb{R}\{t\} \to \mathbb{R}\{s\}$ que compuesto con τ proporciona una nueva parametrización primitiva $\sigma : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{s\}$ tal que $\sigma(x_1) = x_1(s) = s^m$.

Respecto al conductor, se verifica $t^c.\mathbb{R}\{t\} \subset \operatorname{im}\tau$, esto es, cualquier serie $f \in \mathbb{R}\{t\}$ de orden $\geqslant c$ está en $\operatorname{im}\tau$. Además, c es mínimo para esta condición.

En fin, observemos que si $f \in \mathcal{O}_n$ y $\tau(f) = f(x(t))$ tiene orden p, después de un cambio de parámetro podemos suponer $f(x(t)) = t^p$ ó $-t^p$.

En todo lo que sigue 'curva' significa 'germen de una curva irreducible'. Nuestro primer resultado tiene carácter cualitativo.

(4.2) <u>Proposición</u>.- *Si* X_o *es una curva singular,* $S(X_o) \neq S[X_o]$.

<u>Demostración</u>.- Sea $\tau : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ una parametrización primitiva. Como X_o es singular, el conductor c es >1, y $c-1 \notin \Gamma$, luego ninguna serie de $\operatorname{im} \tau$ tiene orden $c-1$. Ahora bien, $t^{2c-2} \in \operatorname{im} \tau$, pues $2c-2 > c + (c-2) \geqslant c$, luego existe $f \in \mathcal{O}_n$ con

$$f(x(t)) = t^{2c-2} = (t^{c-1})^2$$

Como: $t \mapsto x(t)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}_o$ sobre X_o, es claro que f es $\geqslant 0$ sobre todo X_o y por (2.1), $f \in S(X_o)$. Sin embargo, si $f \in S[X_o]$ sería:

$$t^{2c-2} = f_1(x(t))^2 + \ldots + f_r(x(t))^2$$

y en consecuencia:

$$c-1 = \min\{\omega(f_1(x(t))), \ldots, \omega(f_r(x(t)))\},$$

con lo que el orden de algún $f_i(x(t)) \in \operatorname{im} \tau$ sería $c-1$, y $c-1 \in \Gamma$, lo que es absurdo.

En ciertas condiciones es posible interpretar geométricamente la proposición anterior:

(4.3) <u>Proposición</u>.- *Si* $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *es un retroceso, cualquier hiperplano* $H \subset \mathbb{R}^n$ *transversal a* X_o *define una función* $h \in S(X_o) \setminus S[X_o]$.

<u>Demostración</u>.- Que X_o tenga un retroceso significa que su

proyección sobre la tangente no es su prayectiva, y esto equivale a que la multiplicidad m de X_o sea par. En efecto, consideremos una parametrización $\tau : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ con

$$m = \omega(x_1(t)).$$

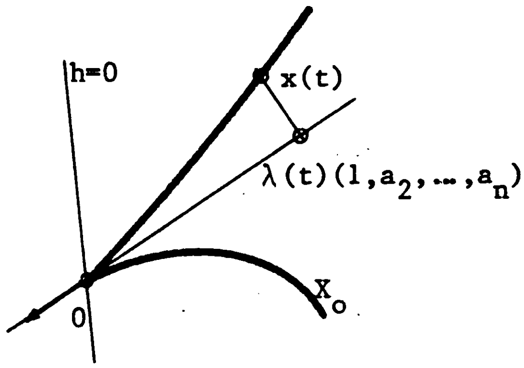


Figura 3

Entonces la dirección de la tangente a X_o es $(1,a_2,\ldots,a_n)$, donde $a_i = \lim\limits_{t\to o} \frac{x_i(t)}{x_1(t)}$, $i=2,\ldots,n$ Se comprueba inmediatamente que la proyección sobre la tangente viene dada por:

$$x(t) \mapsto \lambda(t)(1,a_2,\ldots,a_n), \quad \lambda(t) = \frac{x_1(t)+a_2x_2(t)+\ldots+a_nx_n(t)}{1+a_2^2+\ldots+a_n^2}$$

Así, X_o es un retroceso si y sólo si $\lambda(t)$ no cambia de signo para $|t|$ pequeño. Pero

$$\lim_{t\to o} \frac{\lambda(t)}{x_1(t)} = \frac{1}{1+a_2^2+\ldots+a_n^2}\left(1 + a_2 \lim_{t\to o} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + a_n \lim_{t\to o} \frac{x_n(t)}{x_1(t)}\right) = 1,$$

luego X_o es un retroceso si y sólo si $x_1(t)$ no cambia de signo para $|t|$ pequeño. Esto equivale en fin a que el orden de $x_1(t)$, que es la multiplicidad de X_o, sea par.

Sea ahora $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano transversal a X_o. Por definición, resulta que si $h=0$ es una ecuación lineal de H, la serie $h(x(t))$ tendrá orden mínimo, es decir, igual a m, luego:

$h(x(t)) = t^m u(t)$, $u(0) \neq 0$, y, tal vez sustituyendo h por $-h$, $u(0) > 0$. Como m es par, resulta que h es ≥ 0 sobre X_o, y por (2.1) $h \in S(X_o)$. Ahora bien, si $h \in S\ X_o$, se tendría:

$$h(x(t)) = h_1(x(t))^2 + \ldots + h_r(x(t))^2,$$

con lo que:

$$m = \omega(h(x(t))) = \text{mín}\ \{2\omega(h_1(x(t))), \ldots, 2\omega(h_r(x(t)))\} \geq 2m,$$

que es absurdo.

(4.4) <u>Observación</u>.- En (4.2) se construye un elemento $f \in S(X_o) \smallsetminus S[X_o]$ con $\nu(f) = 2c-2$ (notamos ν la valoración de A^ν, como en (4.1)), y de hecho éste es el máximo posible con esta condición. Con precisión, si $f \in S(X_o)$ y $\nu(f) \geq 2c-1$, entonces $f \in S[X_o]$. En efecto, si $\tau : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ es una parametrización primitiva, $f(x(t))$ es ≥ 0 sobre $\mathbb{R}_o$, luego $f(x(t)) = g(t)^2$, $g \in \mathbb{R}\{t\}$. Pero:

$$\omega(g) = \frac{1}{2}\ \omega(f(x(t))) \geq \frac{1}{2}\ (2c-1) \geq c - \frac{1}{2},$$

luego $\omega(g) \geq c$ y por tanto $g \in \operatorname{im} \tau$, con lo que $f \in S[X_o]$. Es más, vemos que f es un cuadrado en $\mathcal{O}[X_o]$.

La observación última está ya relacionada con la cuestión cuantitativa. Digamos en primer lugar que en el caso de curvas, el número de Pitágoras del cuerpo es siempre 1 (ya que la desingularización es birracional, y $p(\mathbb{R}_o) = 1$). Así pues, en lo sucesivo, llamaremos simplemente número de Pitágoras de una curva X_o al de su anillo de funciones.

(4.5) <u>Proposición</u>.- *El número de Pitágoras de una curva es finito.*

<u>Demostración</u>.- Mediante el lema de normalización, (0.1), se tiene una extensión entera $\mathbb{R}\{t\} \to \mathcal{O}[X_o]$, y $\mathcal{O}[X_o]$ es un módulo finitamente generado sobre $\mathbb{R}\{t\}$, digamos por $h_1,\ldots,h_n$. Afirmamos que $p[X_o] \leqslant n$.

Sea $f \in S[X_o]$. Entonces $f = \sum_{i=1}^{r} (f_{i1} h_1 +\ldots+ f_{in} h_n)^2$, $f_{ij} \in \mathbb{R}\{t\}$ y consideramos la forma cuadrática

$$q(T) = \sum_{i=1}^{r} (f_{i1} T_1 +\ldots+ f_{in} T_n)^2$$

sobre el cuerpo de fracciones K de $\mathbb{R}\{t\}$. Diagonalizando, [45; p. 24, (1.3)]:

$$q(T) = \sum_{j=1}^{n} a_j L_j(T_1,\ldots,T_n)^2$$

donde $a_1,\ldots,a_n \in K$ y $L_1,\ldots,L_n$ son formas lineales independientes sobre K. Ahora obsérvese que q es definida no negativa en K, pues es suma de cuadrados. En consecuencia, cada $a_1,\ldots,a_n$ es una suma de cuadrados en K, luego un cuadrado, por ser $p(K) = p(\mathbb{R}_o) = 1$. Se deduce, multiplicando por una potencia par suficientemente grande de t:

$$t^{2s} q(T) = \sum_{j=1}^{n} b_j^2 H_j(T_1,\ldots,T_n)^2$$

donde $b_j \in \mathbb{R}\{t\}$ y H_j tiene sus coeficientes en $\mathbb{R}\{t\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Haciendo $t = 0$ si $s > 0$, se deduce que t divide a $b_j H_j(T) \in \mathbb{R}\{t\}[T_1,\ldots,T_n]$, esto es:

$$b_j H_j(T) = b_j' H_j'(T) t, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

luego:

$$t^{2(s-1)}q(T) = \sum_{j=1}^{n} b_j'^2 \; H_j'(T_1,\ldots,T_n)^2$$

Repitiendo el argumento, se puede suponer $s = 0$, o sea:

$$q(T) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(T_1,\ldots,T_n)^2, \quad Q_j \in \mathbb{R}\{t\}\,[T_1,\ldots,T_n]$$

Finalmente, la sustitución $T_1 = h_1,\ldots,T_n = h_n$ proporciona

$$f = q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(h_1,\ldots,h_n)^2,$$

y f es suma de n cuadrados.

En el resto de este epígrafe, trataremos el problema de caracterizar las curvas cuyo número de Pitágoras es 1, que llamaremos <u>curvas pitagóricas</u>. El siguiente resultado acota los elementos por cuya causa una curva puede no ser pitagórica:

(4.6) <u>Proposición</u>.- *Sean* X_o *una curva y* ν *la valoración correspondiente de* $\mathcal{O}(X_o)$. *Si* $f \in \mathcal{S}[X_o]$ *y* $\nu(f) \geq 2c-5$, *entonces* f *es un cuadrado en* $\mathcal{O}[X_o]$.

<u>Demostración</u>.- Sea $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ una parametrización primitiva. Si $f \in \mathcal{S}[X_o]$, después de un cambio de parámetro podemos suponer:

$$f(x(t)) = t^{2p} + \sum_{i=1}^{r} g_i(x(t))^2, \quad \omega(g_i(x(t)) \geq p \quad (i=1,\ldots,r)$$

con $t^p \in \operatorname{im} \tau$. Ahora, como $p[\mathbb{R}_o] = 1$, existe $h \in \mathbb{R}\{t\}$ con

$$f(x(t)) = h(t)^2, \quad \omega(h) = p \in \Gamma$$

Se observa que $2p = \nu(f) \geq 2c-5$, luego $p \geq c-5/2$, o sea: $p \geq c-2$. Si $p \geq c$, $h \in \operatorname{im} \tau$ y hemos terminado. Si $p < c$, como $c-1 \notin \Gamma$, sólo puede ser $p = c-2$. Se deduce

$$g_i(x(t)) = e_i t^{c-2} + t^c u_i(t),$$

pues si hubiera término en $c-1$, la serie, $g_i(x(t))-e_i t^{c-2} \in \operatorname{im} \tau$ tendría orden $c-1$, lo que es imposible. Sea, en fin,

$$h(t) = at^{c-2} + bt^{c-1} + t^c v(t)$$

Operando resulta:

$$t^{2p} + \sum_{i=1}^{p} g_i(x(t))^2 = (1 + \sum_{i=1}^{r} e_i^2)t^{2c-4} + t^{2c-2}\, w(t),$$

$$h(t)^2 = a^2 t^{2c-4} + 2abt^{2c-3} + t^{2c-2}\, w_1(t),$$

donde $w, w_1 \in \mathbb{R}\{t\}$. Como los segundos miembros deben ser iguales, y $a \neq 0$ pues $\omega(h) = c-2$, se concluye $b=0$, y por tanto

$$h(t) = at^{c-2} + t^c v(t) \in \operatorname{im} \tau$$

En suma, también en el caso $p=c-2$, f es un cuadrado en $\mathcal{O}[X_o]$.

(4.7) <u>Corolario</u>.- *Sea* X_o *una curva con* $m = c-2$ *ó* $m = c$. *Entonces* X_o *es pitagórica.*

<u>Demostración</u>.- Si $f \in \mathcal{S}[X_o]$ es una unidad, siempre es un cuadrado. Si no es una unidad, se tiene $f = h_1^2 +\ldots+ h_r^2$, donde $h_1,\ldots,h_r$ no son unidades, luego

$$\nu(f) \geqslant \text{mín}\,\{2\omega(h_1),\ldots,2\nu(h_r)\} \geqslant 2m$$

Pero para la curva del enunciado es $c-2 \leqslant m$, luego:

$$\nu(f) \geqslant 2m \geqslant 2c-4 \geqslant 2c-5,$$

y por (4.6), f es un cuadrado en $\mathcal{O}[X_o]$. Así, $p[X_o] = 1$.

A continuación establecemos una obstrucción a que el número de Pitágoras sea 1, que será muy útil después:

(4.8) <u>Lema (criterio de los dos enteros)</u>.- *Sean* X_o *una curva y* Γ *su semigrupo de valores.*

(α) Si existen dos enteros positivos p,r *tales que* $p \in \Gamma$, $p+r \in \Gamma$, $p+2r \notin \Gamma$, *entonces* $p[X_o] > 1$.

(β) Si existen dos enteros consecutivos $<c$ *en* Γ, *entonces* $p[X_o] > 1$.

<u>Demostración</u>.- (α) Con una parametrización primitiva adecuada $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ e identificando $\mathcal{O}[X_o]$ con su imagen A podemos suponer:

$$t^p \in A, \quad h = t^{p+r} u(t) \in A, \quad u(0) = 1$$

Consideramos $f = t^{2p} + h^2 \in \mathcal{S}[X_o]$ y afirmamos que f no es un cuadrado en A. Esto se comprueba calculando su raíz cuadrada, que existe en $\mathbb{R}\{t\}$:

$$\sqrt{f} = \sqrt{(t^{2p} + h^2)} = \sqrt{(t^{2p} + t^{2p+2r} u^2)} =$$

$$= t^p \sqrt{(1 + t^{2r} u^2)} = t^p \sqrt{(1 + t^{2r} + at^{2r+1} + \ldots)},$$

pues $u(0) = 1$. Ahora calculamos la raíz mediante el desarrollo

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x + \ldots ,$$

y resulta: $\sqrt{f} = t^p(1 + \frac{1}{2} t^{2r} + \ldots) = t^p + \frac{1}{2} t^{p+2r} + \ldots$ Se deduce:

$$\sqrt{f} - t^p = \frac{1}{2} t^{p+2r} + \ldots \notin A,$$

pues $p+2r \notin \Gamma$, y en suma, $\sqrt{f} \notin A$.

El argumento precedente muestra que la cota $2c-5$ de (4.6) no puede, en general, mejorarse. Por ejemplo, considérese la curva plana $X_o : x^4 - y^3 = 0$, cuyo semigrupo de valores es $\Gamma = \{3,4,6,n > 6\}$. Via la parametrización $x = t^3$, $y = t^4$, el elemento $t^6 + t^8 \in S[X_o]$, no es un cuadrado en $\mathcal{O}[X_o]$ y su orden es $6 = 2c-6$.

Contrariamente al anterior, nuestro siguiente lema dará una condición suficiente para que una curva sea pitagórica. Para su demostración, destaquemos primero unas

(4.9) <u>Fórmulas</u>.- *Sean* $f \in \mathbb{R}\{t\}$, $F = f^2$. *Entonces:*

$$P(k) : F^{(2k)} = \sum_{i=o}^{k} A(i,k)\, f^{(k-i)} f^{(k+i)}$$

$$I(k) : F^{(2k+1)} = \sum_{i=o}^{k} B(i,k)\, f^{(k-i)} f^{(k+i+1)}, \qquad (k \geqslant 0)$$

donde los $A(i,k)$, $B(i,k)$ *son enteros positivos que no dependen de* f.

(La deducción por inducción, primero de la derivada par $P(k)$ y luego de la impar $I(k)$, es un ejercicio sencillo).

(4.10) <u>Lema</u>.- *Sea* X_o *una curva de multiplicidad* m. *Si todos los enteros de su semigrupo de valores que preceden al conductor son múltiplos de* m, *entonces* X_o *es pitagórica.*

<u>Demostración</u>.- Consideramos una parametrización primitiva $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ tal que $t^m \in A = \operatorname{im} \tau$, e identificamos $\mathcal{O}[X_o]$ con su imagen A. De la condición impuesta sobre el semigrupo de

valores Γ y estar t^m en A, se deduce

$$A = \{h \in \mathbb{R}\{t\} : h^{(s)}(0) = 0 \quad (s \notin \Gamma)\}$$

Sea ahora $H \in S[X_o]$, esto es:

$$H = f_1^2 + \ldots + f_r^2, \qquad f_1, \ldots, f_r \in A$$

Entonces H tiene raíz cuadrada en $\mathbb{R}\{t\}$:

$$H = f_1^2 + \ldots + f_r^2 = h^2, \qquad h \in \mathbb{R}\{t\},$$

y se trata de probar que $h \in A$. Se tiene $\omega(h) = \text{mín}\,\{\omega(f_1), \ldots$ $\ldots, \omega(f_r)\}$, por ejemplo $\omega(h) = \omega(f_1)$, y si este orden es mayor o igual que el conductor c, automáticamente $h \in A$. En consecuencia, sea $\omega(h) < c$. Como $\omega(h) = \omega(f_1) \in \Gamma$, será un múltiplo de m. Así

$$\omega(f_1) = \omega(h) = \lambda m, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_o$$

siendo λ_o la parte entera de c/m. Los enteros positivos que no están en Γ son los de la forma $qm+r$, con $0 \leqslant q \leqslant \lambda_o$, $1 \leqslant r < m$, $qm+r < c$, luego debemos probar:

$$h^{(qm+r)}(0) = 0, \qquad \lambda \leqslant q \leqslant \lambda_o, \quad 1 \leqslant r < m, \quad qm+r < c$$

Se procede por inducción. Sea $qm+r$ en esas condiciones y supongamos $f^{(s)}(0) = 0$ para $s < qm+r$, $s \notin \Gamma$. Debemos distinguir dos casos:

<u>Caso 1°: $(q+\lambda)m+r$ es par</u>. Aplicamos la fórmula (4.9) de la derivada par, P(k), con $k = \frac{(q+\lambda)m+r}{2}$ para calcular la derivada 2k-ésima de $f_1^2 + \ldots + f_r^2 = h^2$ en $t = 0$, y obtenemos:

$$(4.10.1) \qquad \sum_{i=o}^{k} A(i,k) \sum_{j=1}^{r} f_j^{(k-i)} f_j^{(k+i)} = \sum_{i=o}^{k} A(i,k) h^{(k-i)} h^{(k+i)}$$

(en $t = 0$)

Se observa que: $k \leqslant qm + \frac{r}{2} < qm+r$, luego todos los sumandos del primer miembro (por ser $f_1,\ldots,f_r$ elementos de A de orden $\geqslant \lambda m$) y todos los del segundo (hipótesis de inducción) se anulan, salvo tal vez cuando

$$k-i = q'm, \qquad \lambda \leqslant q' \leqslant q,$$

Ahora bien, si eso es así:

$$k+i = k + (k-q'm) = 2k - q'm = (q+\lambda-q')m+r \leqslant qm+r,$$

y obsérvese que $k+i = (q+\lambda-q')m+r$ no es múltiplo de m. En consecuencia, en el primer miembro estos sumandos también son cero, y lo son en el segundo si $k+i < qm+r$. Sólo queda, pues, el sumando del segundo miembro correspondiente a $k+i = (q+\lambda-q')m = qm+r$, esto es: $q' = \lambda$, $k-i = \lambda m$. En suma:

$$0 = A(i,k)h^{(\lambda m)}(0)h^{(qm+r)}(0)$$

Como $A(i,k) \neq 0$ y $h^{(\lambda m)}(0) \neq 0$ (recuérdese que λm es el orden de h), resulta $h^{(qm+r)}(0) = 0$, y el caso 1° queda probado.

<u>Caso 2°: $(q+\lambda)m+r$ es impar</u>. Aplicamos la fórmula (4.9) de la derivada impar, $I(k)$, con $k = \frac{(q+\lambda)m+r-1}{2}$ para calcular la derivada $(2k+1)$-ésima de $f_1^2 + \ldots + f_r^2 = h^2$ en $t = 0$

$$(4.10.2) \qquad \sum_{i=o}^{k} B(i,k) \sum_{j=1}^{r} f_j^{(k-i)} f_j^{(k+i+1)} = \sum_{i=o}^{k} B(i,k) h^{(k-i)} h^{(k+i+1)}$$

(en $t = 0$)

Como en el caso anterior, $k \leqslant qm + \frac{r-1}{2} < qm+r$, y en principio, los sumandos que no se anulan cumplen: $k-i = q'm$, $\lambda \leqslant q' \leqslant q$. Esto supuesto:

$$k+i+1 = k + (k-q'm)+1 = 2k-q'm+1 = (q+\lambda-q')m+r \leqslant qm+r,$$

con lo que el primer miembro es nulo, y en el segundo sólo queda el sumando correspondiente a $k+i+1 = qm+r$, para el que $k-i = \lambda m$. Así obtenemos

$$0 = B(i,k)\, h^{(\lambda m)}(0)\, h^{(qm+r)}(0),$$

y resulta $h^{(qm+r)}(0) = 0$. Esto completa el caso 2° y con él, el lema.

(4.10.3) Observación.- Una curva cuyo semigrupo de valores cumpla la condición de este lema, es isomorfa a: $y = t^m$; $x_i = t^{c+i}$, $c+i \not\equiv 0 \pmod m$, $0 \leq i < m$ (pues vía parametrización, el anillo de las dos curvas se identifica con el mismo subanillo A de $\mathbb{R}\{t\}$).

(4.11) Corolario.- *Una curva de multiplicidad 2 es pitagórica.*

Mediante los resultados anteriores obtenemos la

(4.12) CARACTERIZACION DE LAS CURVAS PITAGORICAS POR LA MULTIPLICIDAD Y EL CONDUCTOR

Considérese dos enteros m, c con $1 \leq m \leq c$, $c \not\equiv 1 \pmod m$ y sea $\mathbf{M}(m,c)$ la colección de todas las curvas con multiplicidad y conductor m y c, respectivamente (la condición $c \not\equiv 1 \pmod m$ significa $\mathbf{M}(m,c) \neq \emptyset$). Entonces:

I. *Si* $m=1$ *ó* $m=2$ *ó* $m=c-2$ *ó* $m=c$, *todas las curvas de* $\mathbf{M}(m,c)$ *son pitagóricas.*

II. *En otro caso, es decir, si* $2 < m < c-2$, *en* $\mathbf{M}(m,c)$ *hay curvas pitagóricas y curvas no pitagóricas.*

Demostración.- I. no es más que (3.3.a) + (4.7) + (4.11).

II. Obsérvese primero que la curva cuya parametrización se da en (4.10.3) tiene multiplicidad m, conductor c, y número de Pitágoras 1. Ahora, para encontrar una curva en $\mathbf{M}(m,c)$ con número de Pitágoras >1, basta, aplicando el criterio de los dos enteros, con que $c-3$ y $c-2$ estén en el semigrupo de valores. Tómese, pues, la curva dada por:

$$y = t^m; \quad z = t^{c-3}; \quad u = t^{c-2}; \quad x_i = t^{c+i}, \quad c+i \not\equiv 0, \; c-3, \; c-2 \pmod{m} \quad 0 \leqslant i < m.$$

También se puede obtener la caracterización para curvas Gorenstein (esto es, curvas cuyo anillo de funciones sea Gorenstein), entre las que están las intersecciones completas y las planas:

(4.13) Proposición.- *Una curva Gorenstein es pitagórica si y sólo si su multiplicidad es* $\leqslant 2$.

Demostración.- Sea X_o una curva Gorenstein. Se sabe, [33], que su semigrupo de valores Γ es simétrico, esto es, $c-1-p \in \Gamma$ para cada $p \notin \Gamma$. Así, si X_o tiene multiplicidad >2, $2 \notin \Gamma$ y $1 \notin \Gamma$, luego Γ contiene los dos enteros consecutivos $c-3$ y $c-2$, y por el criterio de los dos enteros, es $p\,X_o > 1$. Si la multiplicidad es 2, $p[X_o] = 1$ por (4.11).

(4.14) Observaciones.- (a) Una curva plana X_o es Gorenstein. En efecto, su ideal $J(X_o) \subset \mathbb{R}\{x,y\}$ es primo de altura 1, luego principal, con lo que el anillo de funciones es $\mathcal{O}[X_o] = \mathbb{R}\{x,y\}/(f)$. Por

[4; (6.4)] este anillo es Gorenstein.

(b) Una curva X_o de multiplicidad 2 es plana. En efecto, sea $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ una parametrización primitiva tal que $t^2 \in \operatorname{im} \tau = A$. Entonces $\mathcal{O}[X_o]$ se identifica al anillo

$$A = \{h \in \mathbb{R}\{t\} : h^{(s)}(0) = 0, \quad s = 2k+1, \quad 0 \leqslant s < c\}$$

donde c, el conductor de X_o, es necesariamente un número par. Por la misma razón, el anillo A es el de la curva plana: $x = t^2$, $y = t^{c+1}$, y se sigue nuestra afirmación.

El número de Pitágoras de las curvas planas queda descrito totalmente como sigue:

(4.15) Proposición.- *El número de Pitágoras de una curva plana es* 1 *ó* 2, *según sea su multiplicidad* $\leqslant 2$ *ó* $\geqslant 3$.

Demostración.- A la vista de (4.14.a) y (4.13), sólo hay que probar que si X_o es una curva plana, es $p[X_o] \leqslant 2$. Pero si $X_o \subset \mathbb{R}^2_o$, se tiene un homomorfismo suprayectivo $\mathbb{R}\{x,y\} \to \mathcal{O}[X_o]$, luego $p[X_o] \leqslant p[\mathbb{R}^2_o] = 2$, por (3.3.b).

En lo que sigue, consideramos curvas de bajas multiplicidades, empezando una clasificación con la

(4.16) Tabla I: CURVAS PITAGORICAS DE MULTIPLICIDAD $\leqslant 5$

La siguiente lista contiene, salvo isomorfismo analítico, todas las curvas pitagóricas de multiplicidad $m \leqslant 5$.

de multiplicidad 1 ó 2 (todas)

$$I_1 : x=t \ ; \qquad I_2(n): \begin{cases} x=t^2 \\ y=t^{2n+1} \end{cases} \quad (n \geqslant 1)$$

de multiplicidad 3

$$I_3(n): \begin{cases} x=t^3 \\ y=t^{3n+1} \\ z=t^{3n+2} \end{cases} ; \qquad II_3(n): \begin{cases} x=t^3 \\ y=t^{3n+2} \\ z=t^{3n+4} \end{cases} \quad (n \geqslant 1)$$

de multiplicidad 4

$$I_4(n): \begin{cases} x=t^4 \\ y=t^{4n+1} \\ z=t^{4n+2} \\ u=t^{4n+3} \end{cases} ; \qquad II_4(n): \begin{cases} x=t^4 \\ y=t^{4n+2} \\ z=t^{4n+3} \\ u=t^{4n+5} \end{cases} ; \qquad III_4(n): \begin{cases} x=t^4 \\ y=t^{4n+3} \\ z=t^{4n+5} \\ u=t^{4n+6} \end{cases}$$

$$IV_4(n,p): \begin{cases} x=t^4 \\ y=t^{4n+2}+\varepsilon t^{4p-1} \\ z=t^{4p+1} \\ u=t^{4p+3} \end{cases} ; \qquad V_4(n,p): \begin{cases} x=t^4 \\ y=t^{4n+2}+\varepsilon t^{4p+1} \\ z=t^{4p+3} \\ u=t^{4p+5} \end{cases}$$

$$(p > n \geqslant 1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R})$$

de multiplicidad 5

$$I_5(n): \begin{cases} x=t^5 \\ y=t^{5n+1} \\ z=t^{5n+2} \\ u=t^{5n+3} \\ v=t^{5n+4} \end{cases} ; \qquad II_5(n): \begin{cases} x=t^5 \\ y=t^{5n+2} \\ z=t^{5n+3} \\ u=t^{5n+4} \\ v=t^{5n+6} \end{cases} ; \qquad III_5(n): \begin{cases} x=t^5 \\ y=t^{5n+3} \\ z=t^{5n+4} \\ u=t^{5n+6} \\ v=t^{5n+7} \end{cases} ;$$

$$IV_5(n): \begin{cases} x=t^5 \\ y=t^{5n+4} \\ z=t^{5n+6} \\ u=t^{5n+7} \\ v=t^{5n+8} \end{cases} ; \qquad V_5(n): \begin{cases} x=t^5 \\ y=t^{5n+2}+\varepsilon t^{5n+3} \\ z=t^{5n+4} \\ u=t^{5n+6} \\ v=t^{5n+8} \end{cases} ;$$

$$VI_5(n): \begin{cases} x=t^5 \\ y=t^{5n+3}+\varepsilon t^{5n+4} \\ z=t^{5n+6} \\ u=t^{5n+7} \\ v=t^{5n+9} \end{cases} \qquad (n \geqslant 1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R})$$

Desarrollamos a continuación la demostración en varias etapas. Para multiplicidad $\leqslant 2$, no hay que añadir nada a (4.11). Así pues, en primer lugar:

(4.17) <u>$m = 3$</u>. El semigrupo de valores de una curva del tipo $I_3(n)$ (resp. $II_3(n)$) es $\Gamma = \{0,3,\ldots,3n, r > 3n\}$ (resp. $\Gamma = \{0,3,\ldots$ $\ldots,3n,3n+2, r > 3n+2\}$), luego por (4.10) dicha curva es pitagórica.

Recíprocamente, sea Γ el semigrupo de valores de una curva pitagórica X_o de multiplicidad 3. Afirmamos que entonces Γ es de una de las dos formas anteriores. En efecto, si no, tómese un entero $p \in \Gamma$, $p \not\equiv 0 \pmod 3$, $p < c$:

- si $p = 3q+1$, por el criterio de los dos enteros ($p-1$ y p) resultaría $p[X_o] > 1$,
- si $p = 3q+2$, por el mismo criterio (p y $p+1$ ahora), se tendría $p[X_o] > 1$.

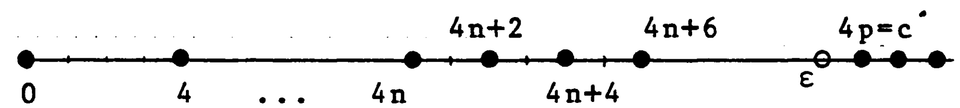
Determinado así Γ, en un caso X_o es isomorfa a $I_3(n)$ y en el otro a $II_3(n)$, en virtud de (4.10.3).

(4.18) <u>$m = 4$: las curvas de la tabla son pitagóricas</u>.

Para los tres primeros tipos I_4, II_4, III_4 ya se ha observado antes, (4.10.3). Veamos aquí los otros dos.

(4.18.1) <u>Tipo $IV_4(n,p)$</u>. El conductor es $c = 4p$ y el semigrupo de valores puede representarse gráficamente por:

Γ :



La parametrización identifica el anillo de funciones de la curva con el subanillo A de $\mathbb{R}\{t\}$ formado por las series $h \in \mathbb{R}\{t\}$ tales que

$$(*)\quad \begin{aligned} &h^{(s)}(0) = 0, \quad \text{si} \quad s \notin \Gamma, \quad 0 \leqslant s < 4p-1 \\ &h^{(4p-1)}(0) = \delta h^{(4n+2)}(0), \quad \delta = \frac{(4p-1)!}{(4n+2)!}\varepsilon \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es que si $f_1^2 + \ldots + f_r^2 = h^2$ con $f_1,\ldots,f_r \in A$, $h \in \mathbb{R}\{t\}$, entonces $h \in A$. Para ello, comprobaremos que si $f_1,\ldots,f_r$ cumplen (*), también lo hace h. Ahora bien, por el argumento de (4.10), es claro que se tiene la primera condición de (*), luego nos limitaremos a comprobar la segunda. Sea por ejemplo $\omega(h) = \omega(f_1) = \min\{\omega(f_1),\ldots,\omega(f_r)\}$. Si $\omega(h) > 4n+2$, entonces $f_j^{(4n+2)}(0) = 0$ y $f_j^{(4p-1)}(0) = 0$ para $j=1,\ldots,r$, con lo que de nuevo es aplicable (4.10) para deducir $h^{(4p-1)}(0) = 0$. Quedan dos posibilidades.

<u>Caso 1°: $\omega(h) = 4n+2$</u>. Utilizamos la fórmula de la derivada impar, (4.10.2), con $k = 2(n+p)$. Observamos que como $n < p$, $k = 2n+2p < n+3p < 4p$, luego $k < 4p-1$, y por tanto el sumando i-ésimo se anula a menos que: $k-i = 2q \geqslant 4n+2$, en cuyo caso

$$k+i+1 = k + (k-2q)+1 = 2(k-q)+1 = 4p + (4n-2q)+1 \leqslant 4p-1.$$

Pero $k+i+1$ es impar, luego sólo queda el sumando $k+i+1 = 4p-1$, para el cual $k-i = 4n+2$, y obtenemos la ecuación (simplificando $B(i,k) \neq 0$):

$$\sum_{j=1}^{r} f_j^{(4n+2)}(0) f_j^{(4p-1)}(0) = h^{(4n+2)}(0) h^{(4p-1)}(0)$$

Ahora, como $f_1,\ldots,f_r \in A$, verifican (*) y queda:

$$\delta \sum_{j=1}^{r} f_j^{(4n+2)}(0)^2 = h^{(4n+2)}(0)h^{(4p-1)}(0)$$

En fin, como $\omega(h) = 4n+2$, la ecuación $f_1^2 +\ldots+ f_r^2 = h^2$ proporciona:

$$\sum_{j=1}^{r} f_j^{(4n+2)}(0)^2 = h^{(4n+2)}(0)^2,$$

y de las dos últimas igualdades, ya que $h^{(4n+2)}(0) \neq 0$, se deduce:

$$\delta h^{(4n+2)}(0) = h^{(4p-1)}(0)$$

<u>Caso 2°: $\omega(h) < 4n+2$</u>. Entonces necesariamente $\omega(h) = 4\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$.

Aplicamos la fórmula de la derivada par, (4.10.1), con $k = 2(n+\lambda)+1$. Se tiene la acotación $k \leqslant 4n+1$, luego el sumando i-ésimo se anula a menos que $k-i = 4q$, $\lambda \leqslant q \leqslant n$, con lo que:

$$k+i = k+(k-4q) = 2k-4q = 4(n+\lambda-q) + 2 \leqslant 4n+2,$$

y como $k+i$ no es múltiplo de 4, se anula también salvo si $k+i = 4n+2$, en cuyo caso $k-i = 4\lambda$ y resulta en suma la ecuación (simplificando $A(i,k) \neq 0$):

$$\text{(1)} \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(4\lambda)}(0)f_j^{(4n+2)}(0) = h^{(4\lambda)}(0)h^{(4n+2)}(0)$$

Ahora aplicamos la fórmula de la derivada impar, (4.10.2), con $k = 2(p+\lambda)-1$. Se verifica $k < 4p-1$, y si el sumando i-ésimo no se anula se tiene $k-i = 2q \geqslant 4\lambda$, con lo que:

$$k+i+1 = k+(k-2q)+1 = 2k-2q-1 = 4p+(4\lambda-2q)-1 \leqslant 4n-1,$$

y así $k+i+1$ es impar, luego para no anularse el correspondiente sumando, debe cumplirse: $k+i+1 = 4n-1$, $k-i = 4\lambda$. Obtenemos (simplificando $B(i,k) \neq 0$)

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(4\lambda)}(0) f_j^{(4p-1)}(0) = h^{(4\lambda)}(0) h^{(4p-1)}(0)$$

En fin, de las dos fórmulas (1) y (2) que acabamos de obtener y teniendo en cuenta que $f_1,\ldots,f_r$ cumplen (*) se deduce:

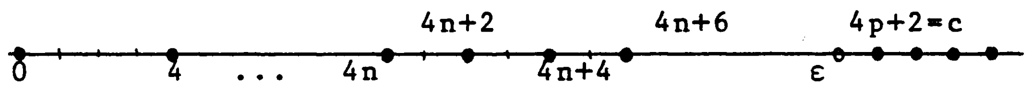
$$h^{(4\lambda)}(0)h^{(4p-1)}(0) = \delta \sum_{j=1}^{r} f_j^{(4\lambda)}(0) f_j^{(4n+2)}(0) =$$

$$= \delta h^{(4\lambda)}(0) h^{(4n+2)}(0),$$

y dividiendo por $h^{(4\lambda)}(0) \neq 0$ resulta lo que queríamos.

Queda así probado que $IV_4(n)$ tiene número de Pitágoras 1.

(4.18.2) <u>Tipo $V_4(n,p)$</u>. El conductor es $c = 4p+2$ y el semigrupo de valores:

Γ :


La prueba es análoga a la de (4.18.1). Esta vez el anillo A está formado por las series $h \in \mathbb{R}\{t\}$ tales que:

$$(**) \quad \begin{cases} h^{(s)}(0) = 0 & \text{si} \quad s \notin \Gamma, \quad 0 \leq s < 4p+1 \\ h^{(4p+1)}(0) = \delta h^{(4n+2)}(0), & \delta = \frac{(4p+1)!}{(4n+2)!}\,\varepsilon \end{cases}$$

Sea $f_1^2 + \ldots + f_r^2 = h^2$, $f_1,\ldots,f_r \in A$, $h \in \mathbb{R}\{t\}$. Hay que comprobar que h cumple (**). Supóngase $\omega(h) = \omega(f_1)$. La primera condición, y la segunda cuando $\omega(h) > 4n+2$, se deducen del argumento de (4.10). Así pues, hay que ver que se tiene la segunda igualdad de (**) en los dos casos siguientes:

<u>Caso 1°: $\omega(h) = 4n+2$</u>. Consideramos la fórmula (4.10.2) con

$k = 2(n+p)+1$. Como $k < 4p+1$, el sumando i-ésimo es cero, salvo tal vez si $k-i = 2q \geqslant 4n+2$, y entonces:

$$k+i+1 = k+(k-2q)+1 = 2(k-q)+1 = 4p+(4n+2-2q)+1 \leqslant 4p+1,$$

y sólo queda el sumando con $k+i+1 = 4p+1$, $k-i = 4n+2$, de donde la ecuación

$$\sum_{j=1}^{r} f_j^{(4n+2)}(0)f_j^{(4p+1)}(0) = h^{(4n+2)}(0)h^{(4p+1)}(0)$$

que permite terminar exactamente como en el caso 1° de (4.18.1).

<u>Caso 2°: $\omega(h) < 4n+2$</u>. Tendrá que ser $\omega(h) = 4\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$.

Como en el caso 2° de (4.18.1), empezamos aplicando la fórmula (4.10.1) con $k = 2(n+\lambda)+1$, y obtenemos la misma igualdad (1) que allí. Ahora, se considera la fórmula (4.10.2) con $k = 2(p+\lambda)$, y del modo habitual, veamos qué sumandos no se anulan. De la acotación $k < 4p+1$ se sigue que deberán cumplir: $k-i = 2q \geqslant 4\lambda$. Entonces,

$$k+i+1 = k+(k-2q)+1 = 2(k-q)+1 = 4p+(4\lambda-2q)+1 \leqslant 4p+1,$$

y sólo puede ser $k+i+1 = 4p+1$, $k-i = 4\lambda$. Esto proporciona la ecuación:

$$(2)' \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(4\lambda)}(0)f_j^{(4p+1)}(0) = h^{(4\lambda)}(0)h^{(4p+1)}(0)$$

La prueba termina como la del caso 2° de (4.18.1), una vez que disponemos de las igualdades (1) y (2)'.

(4.19) <u>$m=4$: si X_o es pitagórica, es isomorfa a una curva de la tabla.</u>

Si el semigrupo Γ de X_o no tiene la propiedad de (4.10), o sea, si X_o no es de uno de los tipos I_4, II_4, III_4, existe un entero $q \in \Gamma$, $q \not\equiv 0$ (mod. 4), $q < c$: elegimos el mínimo q con esta condición. Dos casos se excluyen fácilmente:

• si $q \equiv 1$ (mod. 4), entonces por el criterio de los dos enteros para $q-1$ y q, sería $p[X_o] > 1$.

• si $q \equiv 3$ (mod. 4), entonces, como $q+1 < c$, de nuevo por el criterio de los dos enteros, para q y $q+1$, sería $p[X_o] > 1$.

En consecuencia, $q \equiv 2$ (mod. 4), esto es: $q = 4n+2$. Se observa ahora que el conductor c debe ser múltiplo de 2 (pues $c-1 \notin \Gamma$), y por tanto: $c = 4p$ ó $c = 4p+2$. Veremos que X_o es isomorfa a $IV_4(n,p)$ si sucede la primero y a $V_4(n,p)$ si lo segundo.

Considérese una parametrización primitiva $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ tal que $t^4 \in A = \text{im}\,\tau$. Existe en A un elemento de orden q que tiene la forma:

$$f = t^q + a_1 t^{q+1} + a_3 t^{q+3} + \ldots + a_e t^{q+e},$$

con $q+e+1 = c$, (basta tomar uno cualquiera g de orden q e ir eliminando las potencias pares de t a base de restar $t^{4\lambda}, t^{4\lambda} g \in A$, $\lambda \geqslant n$). Se verifica:

(4.19.1) $\qquad a_i = 0, \quad$ si $\quad 1 \leqslant i < e.$

En efecto, excluyendo el caso $a_1 = \ldots = a_e = 0$, sea i mínimo con $a_i \neq 0$, y veamos que necesariamente $i=e$. Aunque el método es el mismo, conviene distinguir ahora entre $i=1$ e $i \geqslant 3$.

<u>Caso i=1</u>. Si $i < e$, esto es, $3 \leqslant e$, resulta $q+3 \in \Gamma$, y ponemos

$$f = t^q + at^{q+1} + bt^{q+3} + t^{q+5}v, \quad a \neq 0$$

Como $p[X_o] = 1$ y $q-2 = 4n \in \Gamma$, $h = \sqrt{((t^{q-2} + f)^2+f^2)} \in A$. Operando:

$$h = t^{q-2} \sqrt{((1+t^2+at^3+bt^5+t^7v)^2 + (t^2+at^3+bt^5+t^7v)^2)} =$$

$$= t^{q-2} \sqrt{(1+2t^2+2at^3+2t^4+2(b+2a)t^5 + t^6 w)}$$

Por tanto:

$$h = t^{q-2} \sqrt{1+x}, \qquad x = 2t^2+2at^3+2t^4+2(b+2a)t^5 + t^6w$$

Utilizando ahora el desarrollo

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{8}\, x - \frac{1}{8}\, x^2 + \ldots$$

vamos a calcular los têrminos de grado $q-2$, q, $q+3$, $q+5$ de h, es decir, los de grado 0, 2, 3 y 5 de $\sqrt{1+x}$. Para cada $\ell \geqslant 1$ se tiene:

$$x^{\ell} = \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_5=\ell} \frac{\ell!}{\lambda_1!\ldots\lambda_5!} (2t^2)^{\lambda_1}(2at^3)^{\lambda_2}(2t^4)^{\lambda_3}. \\ .(2(b+2a)t^5)^{\lambda_4}(t^6w)^{\lambda_5}$$

y el grado en t de un sumando arbitrario es $\mu \geqslant 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 + 6\lambda_5$. En consecuencia:

(1) <u>$\mu=2$</u>, si $\ell = \lambda_1 = 1$, y se tiene el têrmino t^2

(2) <u>$\mu=3$</u>, si $\ell = \lambda_2 = 1$, y se tiene el têrmino at^3

(3) <u>$\mu=5$</u>, si $\ell = \lambda_4 = 1$; $\ell = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, y se tiene el têrmino $(a+b)t^5$.

Por tanto:

$$h = t^{q-2}\sqrt{1+x} = t^{q-2}(1+t^2+at^3+Bt^4+(a+b)t^5+\dots) =$$

$$= t^{q-2}+t^q+at^{q+1}+Bt^{q+2}+(a+b).t^{q+3}+\dots$$

Como $h \in A$, también en A está la serie:

$$h-t^{q-2} - Bt^{q+2} - f = at^{q+3}+\dots, \quad a \neq 0$$

luego debe ser $q+3 \in \Gamma$. Esta contradicción prueba que $e=1$.

Caso $i \geqslant 3$. Si $i < e$, esto es, $i+2 \leqslant e$, resulta $q+i+2 \notin \Gamma$ y será:

$$f = t^q+at^{q+i}+bt^{q+i+2}+t^{q+s}v, \quad s = i+3, \quad a \neq 0$$

Como $p\,X_o = 1$, el elemento $h = \sqrt{((t^{q-2}+f)^2+f^2)}$ está en A, y operando:

$$h = t^{q-2}\sqrt{((1+t^2+at^{i+2}+bt^{i+4}+t^{s+2}v)^2 +}$$

$$+ (t^2+at^{i+2}+bt^{i+4}+t^{s+2}v)^2) = t^{q-2}\sqrt{(1+2t^2+2t^4+2at^{i+2} +}$$

$$+ 2(b+2a)t^{i+4} + t^{i+5}w).$$

Así:

$$h = t^{q-2}\sqrt{1+x}, \quad x = 2t^2+2t^4+2at^{i+2}+2(b+2a)t^{i+4}+t^{i+5}w$$

Igual que en el caso anterior, estudiamos el desarrollo de $\sqrt{1+x}$. En primer lugar:

$$x^\ell = \sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_5=\ell} \frac{\ell!}{\lambda_1!\dots\lambda_5!}(2t^2)^{\lambda_1}(2t^4)^{\lambda_2}(2at^{i+2})^{\lambda_3}(2(b+2a)t^{i+4})^{\lambda_4}(t^{i+5}w)^{\lambda_5}$$

y el grado en t de un sumando arbitrario es: $\mu \geqslant 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + (i+2)\lambda_3 + (i+4)\lambda_4 + (i+5)\lambda_5$. Nótese entonces que

(1) Si $\mu < i+2$, necesariamente es μ par. Por ejemplo, $\underline{\mu = 2}$ para $\ell_1 = \lambda_1 = 1$, y se tiene el término t^2.

(2) $\underline{\mu = i+2}$, si $\ell = \lambda_3 = 1$ (pues $i+2$ es impar), y resulta el término at^{i+2}.

(3) $\underline{\mu = i+4}$, si $\ell = \lambda_4 = 1$; $\ell = 2, \lambda_1 = \lambda_3 = 1$, y se tiene el término $(a+b)t^{i+4}$.

De este modo:

$$\sqrt{1+x} = 1+t^2 + P(t) + at^{i+2} + (a+b)t^{i+4} + \ldots,$$

donde $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ es un polinomio cuyos monomios son todos de grado par $\geqslant 4$:

$$P(t) = \sum_{o<\ell} A_\ell t^{4\ell} + \sum_{o<\ell} B_\ell t^{4\ell+2}, \quad A_\ell, B_\ell \in \mathbb{R}$$

Reuniendo toda esta información, escribimos:

$$h = t^{q-2}\sqrt{1+x} = t^{q-2} + t^{q-2}P(t) + t^q + at^{q+i} + (a+b)^{q+i+2} + \ldots =$$

$$= t^{q-2} + \sum_{o<\ell} A_\ell t^{q-2+4\ell} + \sum_{o<\ell} B_\ell t^{q+4\ell} + t^q + at^{q+i} + (a+b)t^{q+i+2} + \ldots =$$

$$= (t^{4n} + \sum_{o<\ell} A_\ell t^{4(n+\ell)}) + \sum_{o<\ell} B_\ell t^{q+4\ell} + t^q + at^{q+i} +$$
$$+ (a+b)t^{q+i+2} + \ldots$$

Ahora bien, todos los sumandos del paréntesis tienen grado múltiplo de cuatro, luego su suma está en A, y por tanto también está en A la serie:

$$g = \sum_{o<\ell} B_\ell t^{q+4\ell} + t^q + at^{q+i} + (a+b)t^{q+i+2} + \ldots$$

En fin, en A estará el elemento:

$$g-f - \sum_{o<\ell} B_\ell t^{4\ell} f = (at^{q+i+2} + \ldots) + (-\sum_{o<\ell} aB_\ell t^{q+i+4\ell} + \ldots)$$

Como el segundo paréntesis tiene orden $\geqslant q+i+4$, y $a \neq 0$, concluimos que A contiene una serie de orden $q+i+2$, y en consecuencia,

$q+i+2 \in \Gamma$. Esta es la contradicción buscada, y queda probado que $e = i$.

Una vez demostrado (4.19.1), sabemos que A contiene las series siguientes:

- $t^4, \quad t^{4n+2} + \varepsilon t^{4p-1}, \quad$ si $\quad c = 4p$
- $t^4, \quad t^{4n+2} + \varepsilon t^{4p+1}, \quad$ si $\quad c = 4p+2$

Se deduce que para cada $s \in \Gamma$, $s < c$, $s \neq 4n+2$, A contiene el monomio t^s, y en suma, que A es el subanillo de $\mathbb{R}\{t\}$ correspondiente

- a $IV_4(n,p)$, si $c = 4p$ (véase (4.18.1), (*))
- a $V_4(n,p)$, si $c = 4p+2$ (véase (4.18.2), (**))

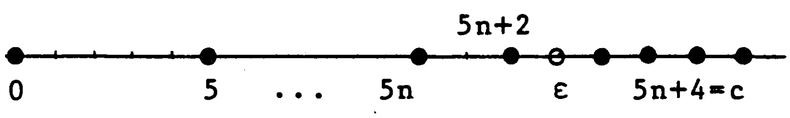
De este modo hemos terminado la demostración de (4.19).

(4.20) <u>m=5: las curvas de la tabla son pitagóricas</u>

Para los cuatro primeros tipos ya se ha observado antes, (4.10.3). A continuación lo probaremos para los otros dos:

(4.20.1) <u>Tipo $V_5(n)$</u>. El conductor es $c = 5n+4$, y el semigrupo

Γ :



El método es el de (4.18). La parametrización identifica el anillo de funciones de la curva con el subanillo A de $\mathbb{R}\{t\}$ formado por las series $h \in \mathbb{R}\{t\}$ tales que:

$$(*)\quad \begin{aligned} &h^{(s)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad s \notin \Gamma, \quad 0 \leqslant s < 5n+2 \\ &h^{(5n+3)}(0) = \delta h^{(5n+2)}(0), \quad \delta = (5n+3)\varepsilon \end{aligned}$$

Hay que probar que si $f_1^2 + \ldots + f_r^2 = h^2$, $f_1, \ldots, f_r \in A$, $h \in \mathbb{R}\{t\}$, entonces $h \in A$. Sea por ejemplo $\omega(h) = \omega(f_1)$. Si $\omega(h) \geqslant 5n+2$, entonces $\omega(h^2) \geqslant 2(5n+2) = 2c-4$, y por (4.6), $h \in A$. Supondremos, pues, $\omega(h) < 5n+2$, con lo que $\omega(h) = 5\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$. Mediante el argumento de (4.10) se comprueba la primera parte de (*), así que veamos la segunda. Distinguiremos dos casos:

<u>Caso 1°: $n+\lambda$ es par</u>. Entonces $5(n+\lambda)+2$ es par, y aplicamos (4.10.1) tomando $k = \frac{5(n+\lambda)+2}{2}$. Como $k \leqslant 5n+1 < 5n+2$, el sumando i-ésimo es cero salvo si $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, pero en esa hipótesis $k+i = k+(k-5q) = 5(n+\lambda-q)+2 \leqslant 5n+2$, y $k+i$ no es múltiplo de 5, luego sólo queda el sumando $k+i = 5n+2$, $k-i = 5\lambda$, y obtenemos la igualdad:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(5\lambda)}(0) f_j^{(5n+2)}(0) = h^{(5\lambda)}(0) h^{(5n+2)}(0)$$

A continuación, con el mismo k, consideramos la fórmula (4.10.2). Para que el sumando i-ésimo no se anule: $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y entonces: $k+i+1 = 5(n+\lambda-q)+3 \leqslant 5n+3$, luego sólo queda el sumando $k+i+1 = 5n+3$, $k-i = 5\lambda$, lo que da:

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(5\lambda)}(0) f_j^{(5n+3)}(0) = h^{(5\lambda)}(0) h^{(5n+3)}(0)$$

Finalmente, de (1) y (2), de verificar $f_1, \ldots, f_r$ (*), y de ser $h^{(5\lambda)}(0) \neq 0$, se concluye que $h^{(5n+3)}(0) = \delta h^{(5n+2)}(0)$, como se pretendía.

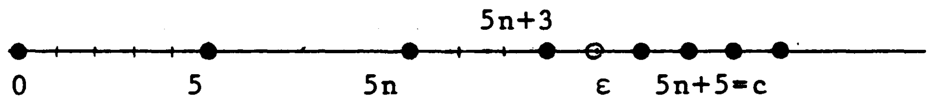
<u>Caso 2°: $n+\lambda$ es impar</u>. Aplicamos primero (4.10.2) con $k = \frac{5(n+\lambda)+1}{2}$ y buscamos los sumandos no nulos. Ya que $k \leqslant 5n + \frac{1}{2} < 5n$, corresponderán a $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y entonces: $k+i+1 = k+(k-5q)+1 = 5(n+\lambda-q)+2 \leqslant 5n+2$, con lo que sólo puede ser $k+i+1 = 5n+2$, $k-i = 5\lambda$, resultando la igualdad (1) del caso 1°.

Ahora, consideramos (4.10.1) con $k = \frac{5(n+\lambda)+3}{2}$. Es $k \leqslant 5n + \frac{3}{2} < 5n+2$, y un sumando no nulo cumple: $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y $k+i = k+(k-5q) = 5(n+\lambda-q)+3 \leqslant 5n+3$, luego $k+i = 5n+3$, $k-i = 5\lambda$, obteniéndose la igualdad (2) del caso 1°.

Ya conocidas (1) y (2), se termina igual que antes.

(4.20.2) <u>Tipo $VI_5(n)$</u>. El conductor es $c = 5n+5$, y el semigrupo

Γ :



La prueba es análoga: el anillo A está formado por los $h \in \mathbb{R}\{t\}$ tales que:

$$(**)\quad \begin{aligned} & h^{(s)}(0) = 0 \quad \text{si} \quad s \notin \Gamma, \quad 0 \leqslant s < 5n+3 \\ & h^{(5n+4)}(0) = \delta h^{(5n+3)}(0), \quad \delta = (5n+4)\varepsilon \end{aligned}$$

Sean $f_1,\dots,f_r \in A$, $h \in \mathbb{R}\{t\}$ con $f_1^2 + \dots + f_r^2 = h^2$, $\omega(h) = \omega(f_1)$. Si $\omega(h) \geqslant 5n+3$, es $\omega(h^2) \geqslant 2(5n+3) = 2c-4$, y por (4.6) $h \in A$. Así pues, supongamos $\omega(h) < 5n+3$, luego $\omega(h) = 5\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$. La primera parte de (**) se deduce para h por el argumento de (4.10). Para la segunda:

<u>Caso 1°: $n+\lambda$ es par</u>. Aplicamos la fórmula (4.10.2) con $k = \frac{5(n+\lambda)+2}{2}$. Como $k \leqslant 5n+1$, para que el sumando i-ésimo no se

anule: $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y entonces $k+i+1 = k+(k-2q)+1 =$ $= 5(n+\lambda-q)+3 \leqslant 5n+3$, y sólo puede ser $k+i+1 = 5n+3$, $k-i = 5\lambda$, obteniéndose la igualdad:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(5\lambda)}(0) f_j^{(5n+3)}(0) = h^{(5\lambda)}(0) h^{(5n+3)}(0)$$

Ahora utilizamos (4.10.1) con $k = \frac{5(n+\lambda)+4}{2}$. Como $k \leqslant 5n+2$, si el sumando i-ésimo es $\neq 0$, resulta $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y se deduce $k+i = k+(k-5q) = 5(n+\lambda-q)+4 \leqslant 5n+4$, con lo que necesariamente $k+i = 5n+4$, $k-i = 5\lambda$, y queda

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{r} f_j^{(5\lambda)}(0) f_j^{(5n+4)}(0) = h^{(5\lambda)}(0) h^{(5n+4)}(0)$$

Se termina como siempre.

<u>Caso 2°: $n+\lambda$ impar</u>. Sea $k = \frac{5(n+\lambda)+3}{2}$. Aplicamos (4.10.1) con este k. Como $k \leqslant 5n + \frac{3}{2} < 5n+3$, para que el sumando i-ésimo no sea nulo, será $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y $k+i = k+(k-5q) =$ $= 5(n+\lambda-q)+3 \leqslant 5n+3$. Sólo puede ser $k+i = 5n+3$, $k-i = 5\lambda$, y se obtiene la fórmula (1) del caso 1°.

Ahora, con este mismo k, consideramos (4.10.2). Buscando los sumandos no nulos resulta $k-i = 5q$, $q \geqslant \lambda$, y $k+i+1 =$ $= k+(k-5\lambda)+1 = 5(n+\lambda-q)+4 \leqslant 5n+4$, lo que proporciona $k+i+1 = 5n+4$, $k-i = 5\lambda$, de donde la igualdad (2) del caso 1°.

Ya deducidas (1) y (2), el resto es automático.

De este modo se completa la demostración de (4.20).

(4.21) <u>m=5: si X_o es pitagórica, es isomorfa a una curva de la tabla</u>

Si el semigrupo Γ de X_o no tiene la propiedad de (4.10), esto es, si X_o no es del tipo I_5, II_5, III_5 ni IV_5, existe un entero $q \in \Gamma$, $q \not\equiv 0$ (mod. 5), $q < c$: elegimos el mínimo q con esa condición. Pueden darse tres posibilidades:

<u>Caso 1°: $q \equiv 1$ ó 4 (mod. 5)</u>. Entonces $q-1$, q ó q, $q+1$ son dos enteros consecutivos menores que el conductor que están en Γ, y $p[X_o] > 1$. Esto excluye este caso.

<u>Caso 2°: $q \equiv 2$ (mod. 5)</u>. Será $q = 5n+2$, $n \geq 1$. Si $5n+4 \notin \Gamma$, por el criterio de los dos enteros (con $p=5n$, $r = 2$) sería $p[X_o] > 1$. Se deduce $5n+4 \in \Gamma$. Si $5n+4 < c$, también $5n < c$ y Γ contendría dos enteros consecutivos y $<c$, luego $p[X_o] > 1$. En consecuencia, $5n+4 = c$. Considerando ahora una parametrización $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ con $t^5 \in \operatorname{im}\tau = A$, existe un elemento

$$t^{5n+2} + \varepsilon t^{5n+3} \in A$$

que determina totalmente A por las condiciones (*) de (4.20.1). En suma, X_o es isomorfa a $V_5(n)$.

<u>Caso 3°: $q \equiv 3$ (mod. 5)</u>. Entonces $q = 5n+3$, $n \geq 1$. Si $5n+6 \notin \Gamma$, por el criterio de los dos enteros (con $p = 5n$, $r = 3$), $p[X_o] > 1$, luego $5n+6 \in \Gamma$. Si $5n+6 < c$, Γ contiene a los dos enteros $5n+5$ y $5n+6$, menores que c, con lo que de nuevo $p[X_o] > 1$. Se sigue $c \leq 5n+6$, de donde $c \leq 5n+5$. Ahora bien, $c > q$, o sea que $c > q+1 = 5n+4$. Se concluye $c = 5n+5$. Considerando una parametrización $\tau : \mathcal{O}[X_o] \to \mathbb{R}\{t\}$ con $t^5 \in \operatorname{im}\tau = A$, existe un elemento

$$t^{5n+3} + \varepsilon t^{5n+4} \in A,$$

que determina A por las condiciones (**) de (4.20.2), y en consecuencia, X_o es isomorfa a $VI_5(n)$.

(4.21) Comentario.- El desarrollo anterior, (4.17),...,(4.21) para construir la Tabla I es en cierto sentido algorítmico, y puede aplicarse a multiplicidades más altas, aunque los cálculos se hacen muy engorrosos. Como tal vez el cúmulo inevitable de digresiones oscurece el método seguido en los párrafos anteriores, hagamos aquí un resumen para multiplicidad $m=6$.

En primer lugar, se determinan las formas posibles del semigrupo de valores Γ mediante el criterio de los dos enteros (4.8). Para $m=6$, además de los cinco posibles semigrupos $\Gamma_I,\dots,\Gamma_V$ sujetos a la condición del lema (4.10), y caracterizados por sus conductores $c = 6n,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4,\ 6n+5,\ (n \geqslant 1)$, se obtienen los diez de la figura 4.

Determinados los Γ, se examina el elemento de orden más pequeño no múltiplo de la multiplicidad, en este caso 6, que hay en el anillo de funciones, para identificar ese anillo con un subanillo A de $\mathbb{R}\{t\}$ de descripción manejable (como (*) ó (**) en (3.20)). Después hay que comprobar (por inducción y derivación) que el anillo A obtenido tiene efectivamente número de Pitágoras 1. Plausiblemente, este análisis produciría la tabla II.

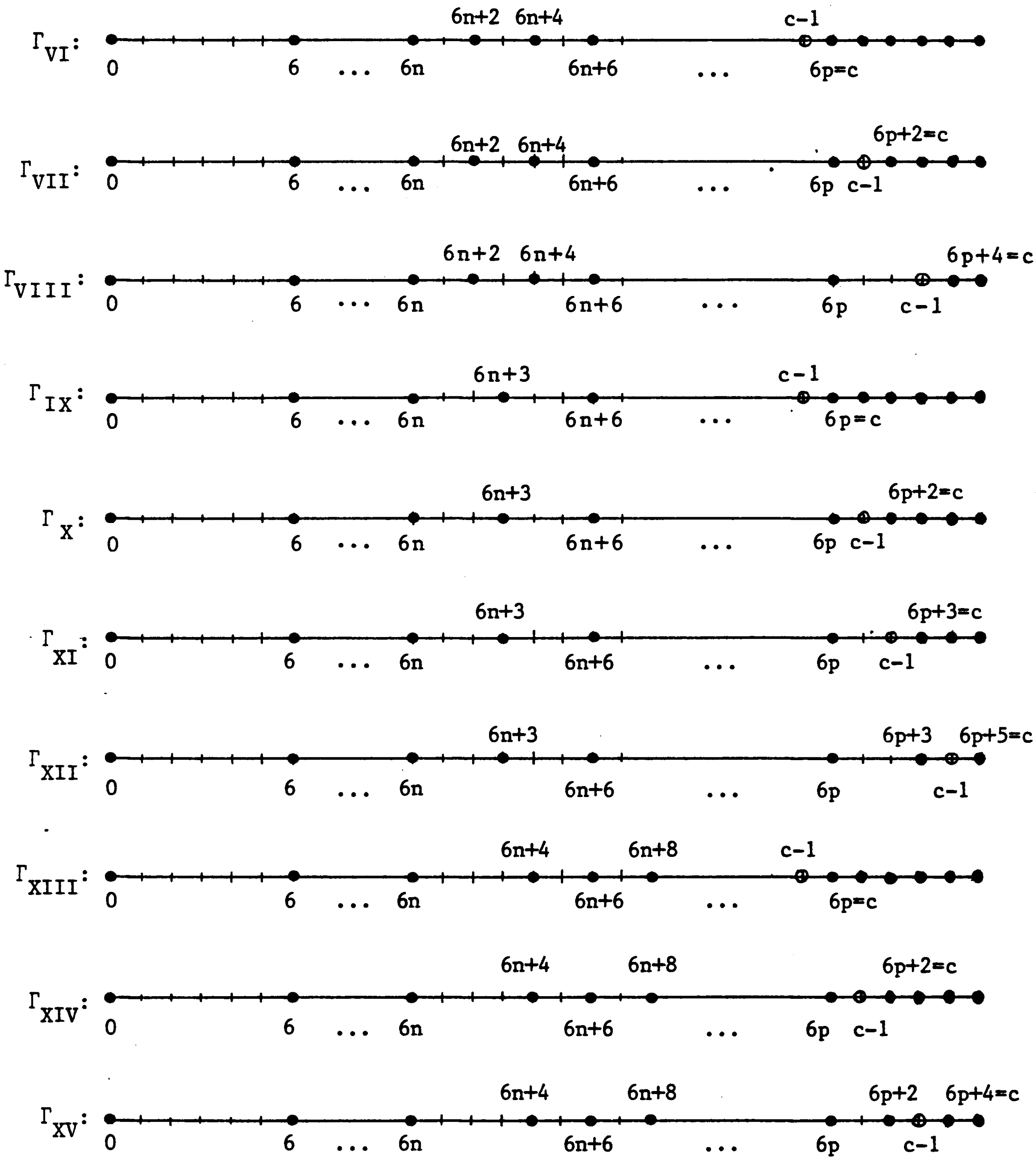

Γ_{VI}: 0 6 ... 6n 6n+2 6n+4 6n+6 ... c-1 6p=c
Γ_{VII}: 0 6 ... 6n 6n+2 6n+4 6n+6 ... 6p c-1 6p+2=c
Γ_{VIII}: 0 6 ... 6n 6n+2 6n+4 6n+6 ... 6p c-1 6p+4=c
Γ_{IX}: 0 6 ... 6n 6n+3 6n+6 ... c-1 6p=c
Γ_{X}: 0 6 ... 6n 6n+3 6n+6 ... 6p c-1 6p+2=c
Γ_{XI}: 0 6 ... 6n 6n+3 6n+6 ... 6p c-1 6p+3=c
Γ_{XII}: 0 6 ... 6n 6n+3 6n+6 ... 6p 6p+3 c-1 6p+5=c
Γ_{XIII}: 0 6 ... 6n 6n+4 6n+6 6n+8 ... c-1 6p=c
Γ_{XIV}: 0 6 ... 6n 6n+4 6n+6 6n+8 ... 6p c-1 6p+2=c
Γ_{XV}: 0 6 ... 6n 6n+4 6n+6 6n+8 ... 6p 6p+2 c-1 6p+4=c

Figura 4

Tabla II: CURVAS PITAGORICAS DE MULTIPLICIDAD 6

$$I_6(n):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+1}\\ z=t^{6n+2}\\ u=t^{6n+3}\\ v=t^{6n+4}\\ w=t^{6n+5}\end{cases};\quad II_6(n):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+2}\\ z=t^{6n+3}\\ u=t^{6n+4}\\ v=t^{6n+5}\\ w=t^{6n+7}\end{cases};\quad III_6(n):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+3}\\ z=t^{6n+4}\\ u=t^{6n+5}\\ v=t^{6n+7}\\ w=t^{6n+8}\end{cases};$$

$$IV_6(n):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+4}\\ z=t^{6n+5}\\ u=t^{6n+7}\\ v=t^{6n+8}\\ w=t^{6n+9}\end{cases};\quad V_6(n):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+5}\\ z=t^{6n+7}\\ u=t^{6n+8}\\ v=t^{6n+9}\\ w=t^{6n+10}\end{cases};\quad VI_6(n,p):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+2}+\varepsilon t^{6p-1}\\ z=t^{6n+4}+\delta t^{6p-1}\\ u=t^{6p+1}\\ v=t^{6p+3}\\ w=t^{6p+5}\end{cases};$$

$$VII_6(n,p):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+2}+\varepsilon t^{6p+1}.\\ z=t^{6n+4}+\delta t^{6p+1}\\ u=t^{6p+3}\\ v=t^{6p+5}\\ w=t^{6p+7}\end{cases};\quad VIII_6(n,p):\begin{cases}x=t^6\\ y=t^{6n+2}+\varepsilon t^{6p+3}\\ z=t^{6n+4}+\delta t^{6p+3}\\ u=t^{6p+5}\\ v=t^{6p+7}\\ w=t^{6p+9}\end{cases}$$

$$IX_6(n,p):\begin{cases}x=t^{6}\\ y=t^{6n+3}+\varepsilon t^{6p-2}+\delta t^{6p-1}\\ z=t^{6p+1}\\ u=t^{6p+2}\\ v=t^{6p+4}\\ w=t^{6p+5}\end{cases}\quad ;\quad X_6(n,p):\begin{cases}x=t^{6}\\ y=t^{6n+3}+\varepsilon t^{6p+1}\\ z=t^{6p+2}\\ u=t^{6p+4}\\ v=t^{6p+5}\\ w=t^{6p+7}\end{cases}$$

$$XI_6(n,p):\begin{cases}x=t^{6}\\ y=t^{6n+3}+\varepsilon t^{6p+1}+\delta t^{6p+2}\\ z=t^{6p+4}\\ u=t^{6p+5}\\ v=t^{6p+7}\\ w=t^{6p+8}\end{cases}\quad ;\quad XII_6(n,p):\begin{cases}x=t^{6}\\ y=t^{6n+3}+\varepsilon t^{6p+4}\\ z=t^{6p+5}\\ u=t^{6p+7}\\ v=t^{6p+8}\\ w=t^{6p+10}\end{cases}$$

$$XIII_6(n,p):\begin{cases}x=t^{6}\\ y=t^{6n+4}+\varepsilon t^{6p-1}\\ z=t^{6n+8}+\varepsilon t^{6p-1}\\ u=t^{6p+1}\\ v=t^{6p+3}\\ w=t^{6p+5}\end{cases}$$

$$XIV_6(n,p):\begin{cases} x=t^6 \\ y=t^{6n+4}+\varepsilon t^{6p+1} \\ z=t^{6n+8}+\delta t^{6p+1} \\ u=t^{6p+3} \\ v=t^{6p+5} \\ w=t^{6p+7} \end{cases} \quad ; \quad XV_6(n,p):\begin{cases} x=t^6 \\ y=t^{6n+4}+\varepsilon t^{6p+3} \\ z=t^{6n+8}+\delta t^{6p+3} \\ u=t^{6p+5} \\ v=t^{6p+7} \\ w=t^{6p+9} \end{cases}$$

$(p > n \geqslant 1)$

$(\varepsilon,\delta \in \mathbb{R})$

(4.23) <u>Curvas pitagóricas y curvas de Arf</u>.- La dimensión de inmersión de una curva X_o se define como $e = \dim_R m/m^2$, donde m es el ideal maximal de $\mathcal{O}[X_o]$. Equivalentemente, e es el mínimo entero >0 tal que X_o está contenida, salvo isomorfismo, en $\mathbb{R}^e_o$. Se demuestra, [36; corollary 1.10], que e no excede a la multiplicidad, y nuestros resultados anteriores sugieren que

• Si X_o es pitagórica, su dimensión de inmersión y su multiplicidad coinciden.

De hecho, sugieren que coinciden no sólo para X_o, sino para sus sucesivas transformaciones cuadráticas. Esta es una de las caracterizaciones de las curvas de Arf, [36; theorem 2.2], y se tiene la siguiente conjetura más fuerte:

• Si X_o es pitagórica, entonces es de Arf.

Observamos sin embargo, que una curva de Arf puede no ser pitagórica. Por ejemplo, considérese la parametrizada por: $x = t^3$, $y = t^8$, $z = t^{10}$.

Señalemos por último otra cuestión interesante relacionada:

• Si X_o es pitagórica, su transformada cuadrática también lo es.

(Esta última conjetura junto con la primera, implicaría la segunda. La tabla I en (4.16), permite comprobar las tres cuando la multiplicidad de X_o es $\leqslant 5$).

(4.24) <u>Caracterización de las curvas pitagóricas por el semigrupo de valores</u>.- Señalemos en primer lugar que el número de Pitágoras no es un invariante del semigrupo. Considérense por ejemplo las curvas

$$X_o : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6+t^7 \\ z = t^{15} \end{cases} \qquad X_o' : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 \\ z = t^{13} \\ u = t^{13} \end{cases}$$

cuyos semigrupos son iguales (e iguales a $\Gamma = \{0,4,6,10,12,n > 12\}$) y sin embargo es $p[X_o] > 1$, $p[X_o'] = 1$ (basta buscarlas en la tabla I para $m = 4$; X_o no está pues su dimensión de inmersión es $3 < 4$). Esto plantea un problema de clasificación como sigue.

Sea Γ un semigrupo numérico (esto es, un subsemigrupo de $\mathbb{N}$ con complementario $\mathbb{N} \setminus \Gamma$ finito), y notemos $\mathbf{M}(\Gamma)$ a la colección de todas las curvas cuyo semigrupo de valores es Γ. Entonces hay semigrupos Γ tales que:

(A) cada curva de $\mathbf{M}(\Gamma)$ es pitagórica.

(B) en $\mathbf{M}(\Gamma)$ hay curvas pitagóricas y curvas no pitagóricas.

(C) ninguna curva de $\mathbf{M}(\Gamma)$ es pitagórica.

Como se observa inmediatamente, una parte de nuestros resultados son soluciones parciales a esta clasificación. El criterio de los dos enteros, (4.8), por ejemplo, da una condición para que un grupo sea del tipo (C). Otro lema, (4.10), describe un tipo de semigrupos que pertenece a la clase (A), aunque se advierte que son semigrupos cuyo espacio de moduli, 21 , es trivial.

Finalmente, señalemos que ninguna de las clases (A), (B), (C) es vacía, y que en todas ellas hay algún semigrupo cuyo espacio de moduli no es trivial (sólo falta un ejemplo de esto para (A): considérese el semigrupo $\Gamma = \{0,4,6,8,n > 8\}$ cuyo espacio de moduli está cubierto por el tipo $IV_4(1,2)$).

§5. El problema decimoséptimo para gérmenes de superficie.

Estudiamos en este epígrafe algunas cuestiones topológicas relacionadas con el aspecto cualitativo del problema decimoséptimo y con el criterio del cambio de signo.

(5.1) Proposición (criterio del cambio de signo para superficies).-
Sea $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen de superficie irreducible tal que* $X^*_o \setminus \{0\}$ *es conexo. Si* $f \in \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}$ *genera un ideal primo* $\neq\{0\}$ *en* $\mathcal{O}[X_o]$*. Son equivalentes:*

(α) f *genera un ideal real en* $\mathcal{O}[X_o]$.

(β) f *cambia de signo sobre* X^*_o.

Demostración.- Es análoga a la de (1.8). Solamente hay que comprobar que donde allí utilizábamos la hipótesis '$\mathrm{reg}_* X_o$ conexo' basta ahora con '$X^*_o \setminus \{0\}$ conexo'. En efecto, se trataba de probar que si f cambia de signo sobre X^*_o,

$$\dim X_o \cap V(f) = \dim X_o - 1 = 1$$

(pues ahora $\dim X_o = 2$). Pero si fuera $\dim X_o \cap V(f) = 0$, entonces

$$X^*_o \setminus V(f) = X^*_o \setminus \{0\},$$

que es conexo por hipótesis, y por tanto f no cambiaría de signo sobre $X^*_o \setminus \{0\}$, ni, en consecuencia, sobre X^*_o.

(5.2) Superficies con singularidad racional.- Vamos a considerar aquí unas superficies especiales que pueden conserarse 'las singularidades menos singulares'. Recordemos en primer lugar una

<u>Definición</u> [35; §1].- *Un anillo local normal* A *de dimensión 2 se llama de singularidad racional si existe una desingularización* $f : X \to \operatorname{Spec} A$ *con* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Las singularidades racionales tienen una relación profunda con el problema de la factorialidad. Destaquemos aquí dos importantes resultados que utilizaremos después:

<u>Teorema (Brieskorn)</u> [8; Satz 3.3].- *La única, salvo isomorfismo, álgebra analítica sobre* $\mathbb{C}$, *factorial no regular de dimensión 2 es* $\mathbb{C}\{x,y,z\} / (x^2+y^3+z^5)$.

<u>Teorema (Lipman)</u> [35; example (25.4)].- *Las únicas, salvo isomorfismo, álgebras analíticas sobre* $\mathbb{R}$ *factoriales de singularidad racional y dimensión 2 no regulares, son:*

$$E_8 : \mathbb{R}\{x,y,z\} / (x^2+y^3+z^5)$$

$$F_4 : \mathbb{R}\{x,y,z\} / (x^2+y^3+z^4)$$

$$B_n : \mathbb{R}\{x,y,z\} / (x^2+y^2+z^{2n+1}), \qquad n \geqslant 1$$

$$B_n : \mathbb{R}\{x,y,z\} / (x^2+y^2+z^{2n}), \qquad n \geqslant 1$$

Se observa que la última de las anteriores álgebras no es real, pues $x^2 + y^2 + z^{2n} = 0$ se reduce en $\mathbb{R}^n$ al origen. Por ello, fijaremos nuestra atención en las otras tres.

La primera de ellas, llamada 'singularidad del icosaedro', ha sido objeto de atención permanente desde que fue estudiada por Klein en 1884, [32]. El resultado de Brieskorn citado más arriba es un ejemplo de su peculiaridad. En lo que a nuestro problema se refiere tenemos:

(5.3) Proposición.- *Sea* $X_o \subset \mathbb{R}^3_o$ *el germen de ecuación* $x^2+y^3+z^5=0$. *Se verifica:*

(α) Si f *es* ≥ 0 *sobre* X_o*, entonces* f *es suma de dos cuadrados en* $\mathcal{O}[X_o]$.

(β) $\mathcal{S}[X_o] = \mathcal{S}(X_o)$; $p[X_o] = p(X_o) = 2$.

Demostración.- La superficie X_o es de dimensión pura, tiene el origen como singularidad aislada, y es topológicamente trivial (figura 5). En consecuencia, $X_o^* \setminus \{0\} = X_o \setminus \{0\}$ es conexo, y se cumple el criterio del cambio de signo. Sabemos además, que $\mathcal{O}[X_o]$ es factorial, así como el anillo de funciones $\mathcal{O}[\tilde{X}_o] = \mathbb{C}\{x,y,z\}/(x^2+y^3+z^5)$ del complexificado $\tilde{X}_o \subset \mathbb{C}^3_o$.

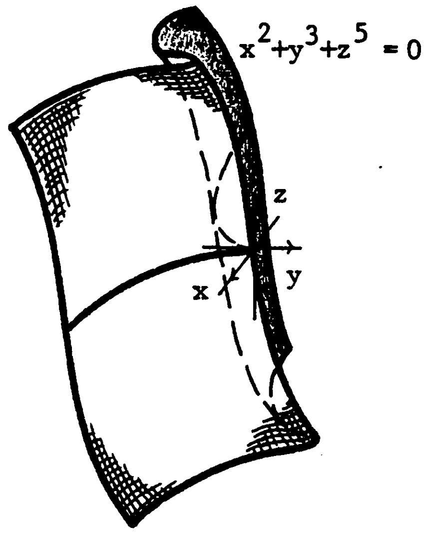


Figura 5

(α): En virtud de (3.7.a), (3.4), (3.5) y (3.6), se trata de ver que si $h \in \mathbb{R}\{x,y,z\}$ es ≥ 0 sobre X_o e irreducible en $\mathcal{O}[X_o]$, entonces es reducible en $\mathcal{O}[\tilde{X}_o]$. Notemos $p = (h, x^2+y^3+z^5)\mathbb{R}\{x,y,z\}$, $\tilde{p} = p\mathbb{C}\{x,y,z\}$, de modo que: $\mathbb{R}\{x,y,z\}/p = \mathcal{O}[X_o]/(h)$, $\mathbb{C}\{x,y,z\}/\tilde{p} = \mathcal{O}[\tilde{X}_o]/(h)$, y se deduce que p es un ideal primo de altura 2 de $\mathbb{R}\{x,y,z\}$. Ahora, decir que h es reducible en $\mathcal{O}[\tilde{X}_o]$ equivale a que $\tilde{p}$ no sea un ideal primo, y esto, por un resultado de Risler, [48; proposition 6.2], a que

p no sea real. Finalmente, p es real si y sólo si h genera un ideal real en $\mathcal{O}[X_o]$, si y sólo si h cambia de signo sobre X_o (criterio del cambio de signo), lo que por hipótesis no ocurre.

<u>(β)</u>: Una vez probado (α), sólo resta la desigualdad $p(X_o) > 1$. Pero x^2+y^2 no es un cuadrado en $\mathcal{O}(X_o)$, aplicando la misma demostración que en el caso regular, (3.2.b) (véase también (5.12)).

Observemos que la igualdad $\mathcal{S}[X_o] = \mathcal{S}(X_o)$ contrasta con el resultado (4.2) para curvas, que, así, no puede extenderse a dimensión 2.

El método anterior es el utilizado por Bochnak y Risler en el caso regular, [7]. De hecho, puede pensarse en formularlo para una superficie irreducible, que cumpla el criterio del cambio de signo y sea factorial, así como su complexificado. Sin embargo, esto no sería ninguna generalización, pues se tiene:

(5.4) <u>Proposición</u>.- *Sea* X_o *un germen de superficie analítica real no regular, cuyo complexificado es factorial. Entonces, salvo isomorfismo analítico,* X_o *es* $x^2+y^3+z^5 = 0$.

<u>Demostración</u>.- Sea $\tilde{X}_o$ la complexificación de X_o. Por el teorema de Brieskorn enunciado en (5.2), $\tilde{X}_o$ es isomorfo a $V_{\mathbb{C}}(x^2+y^3+z^5) \subset \mathbb{C}^3_o$. En particular, la dimensión de inmersión es 3, esto es, podemos suponer $X_o \subset \mathbb{R}^3_o$, [51; §2]. Como X_o es irreducible, su ideal en $\mathbb{R}\{x,y,z\}$ es primo de altura 1, y estará generado por un elemento irreducible $F \in \mathbb{R}\{x,y,z\}$. Se sigue que

$F.\mathbb{C}\{x,y,z\}$ es el ideal de $\tilde{X}_o$, y como $\tilde{X}_o$ tiene multiplicidad 2 (pues es isomorfo a $x^2+y^3+z^5 = 0$), F es una serie de orden 2. Ahora, mediante un cambio lineal de coordenadas en $\mathbb{R}^3$, podemos hacer que F sea regular de orden 2 en x:

$$F = x^2 + a(y,z)x + b(y,z), \quad a,b \in \mathbb{R}\{y,z\}, \quad a(0,0) = b(0,0) = 0,$$

y con otro cambio $(x' = x+a/2, \quad y' = y, \quad z' = z)$, podemos suponer:

$$F = x^2 + f(y,z), \qquad f \in \mathbb{R}\{y,z\}, \qquad f(0,0) = 0.$$

Se tiene pues una ecuación $x^2 + f(y,z) \in \mathbb{C}\{x,y,z\}$ de $\tilde{X}_o$, que equivale a $x^2+y^3+z^5$. Por un teorema de Kirby, [31; theorem 2], existe un isomorfismo analítico <u>complejo</u> $\phi : \mathbb{C}^2_o \to \mathbb{C}^2_o$ tal que $\phi^*(f) = u(y,z)(y^3+z^5)$, $u(0,0) \neq 0$. Se deduce que $f \in \mathbb{R}\{y,z\}$ genera un ideal primo en $\mathbb{C}\{y,z\}$, luego uno primo real en $\mathbb{R}\{y,z\}$ (por [48; proposition 6.2]). En consecuencia $c_o = V(f) \subset \mathbb{R}^2_o$ es un germen de curva irreducible cuyo complexificado $\tilde{c}_o = V_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{C}^2_o$ es isomorfo a $V_{\mathbb{C}}(y^3+z^5) \subset \mathbb{C}^2_o$. En particular, el semigrupo de valores de $\tilde{c}_o$ es $\tilde{\Gamma} = \{0,3,5,6,8,n > 8\}$. Si ahora calculamos el semigrupo de valores Γ de c_o mediante una parametrización primitiva: $t \mapsto (y(t),z(t))$, $y(t),z(t) \in \mathbb{R}\{t\}$, obtenemos el mismo $\tilde{\Gamma}$. En efecto, claramente $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$, y recíprocamente, si $p \in \tilde{\Gamma}$, como $t \mapsto (y(t),z(t))$ es también primitiva para $\tilde{c}_o$, existe $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$ con

$$\omega(h(y(t),z(t))) = p$$

Pero escribiendo $h = h_1 + ih_2$, $h_1,h_2 \in \mathbb{R}\{x,y\}$, resulta:

$$h(y(t),z(t)) = h_1(y(t),z(t)) + ih_2(y(t),z(t))$$

y como h_1 y h_2 tienen coeficientes reales, al menos una de las series $h_1(y(t),z(t))$, $h_2(y(t),z(t))$ tiene que tener orden p, con lo que $p \in \Gamma$. Queda probado el otro contenido, y por tanto $\Gamma = \tilde{\Gamma}$(*). En suma, el semigrupo de valores de $c_o = V(f) \subset \mathbb{R}^2_o$ es $\Gamma = \{0,3,5,6,8,n > 8\}$. Precisamos para continuar el siguiente resultado:

Lema.- *El espacio de moduli del semigrupo* $\{0,3,5,6,8, n > 8\}$ *es trivial, tanto en caso complejo como en el real.*

(En el caso complejo es un resultado bien conocido, que puede verse en el curso de Zariski [54; chap V, §2], contenido en otros resultados más generales. La demostración que allí aparece se adapta sin variación alguna al caso real).

Por el lema, existe un isomorfismo analítico $\phi : \mathbb{R}^2_o \to \mathbb{R}^2_o$ tal que $\phi(c_o) = V(y^3+z^5)$. En términos de ecuaciones, existe una unidad $u \in \mathbb{R}\{y,z\}$ con:

$$\phi^*(f) = u(y,z)(y^3+z^5)$$

Entonces el cambio $\psi = Id \times \phi : \mathbb{R}^3_o \to \mathbb{R}^3_o$ transforma X_o en:

$$x^2 + u(y,z)(y^3+z^5) = 0.$$

Haciendo $x' = x$, $y' = -y$, $z' = -z$ si $u(0,0) < 0$, podemos suponer $u(0,0) > 0$, y existe una unidad $v \in \mathbb{R}\{y,z\}$ con $v^2 = 1/u$. De este modo:

(*) Este argumento es independiente de que la curva sea plana.

$$x^2+u(y,z)(y^3+z^5) = u(y,z)(\frac{x^2}{u(y,z)} + y^3+z^5) =$$
$$= u(y,z)(x^2v(y,z)^2 + y^3+z^5).$$

Por fin, el cambio $x_1 = xv(y,z)$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ produce la superficie: $x_1^2 + y_1^3 + z_1^5 = 0$, lo que concluye la prueba.

A continuación consideramos los restantes anillos reales del teorema de Lipman.

(5.5) <u>Proposición</u>.- *Sea* $X_o \subset \mathbb{R}^3_o$ *uno de los gérmenes* $x^2+y^3+z^4 = 0$, $x^2+y^2+z^{2n+1} = 0$, $n \geq 1$. *Entonces* $S[X_o] \neq S(X_o)$.

<u>Demostración</u>.- (a) Sea $X_o = V(x^2+y^3+z^4)$. Entonces $-y = \frac{x^2+z^4}{y^2} \in S(X_o) \setminus S[X_o]$, pues si $-y$ fuera una suma de cuadrados en $O[X_o]$, lo sería en el anillo de la curva

$$X_o \cap \{z = 0\} : x^2+y^3 = 0$$

y esto no es así por (4.3).

(b) Si $X_o = V(x^2+y^2+z^{2n+1})$, $-z = \frac{x^2+y^2}{z^{2n}} \in S(X_o) \setminus S[X_o]$. En efecto, pues $-z$ no es suma de cuadrados en el anillo de la curva:

$$X_o \cap \{y = 0\} : x^2 + z^{2n+1} = 0,$$

en virtud de (4.3).

(5.6) <u>Observación</u>.- Las superficies X_o de (5.5) son topológicamente triviales, de singularidad aislada, factoriales, y su complexificado es normal (pero no factorial):

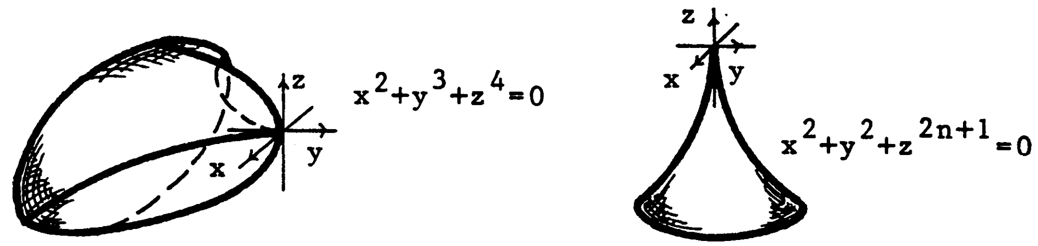


Figura 6

Son pues, en cierto sentido, 'muy regulares', y sin embargo ya se tiene para ellas $S[X_o] \neq S(X_o)$. Esto induce a creer que la superficie $X_o : x^2+y^3+z^5 = 0$ tenga una peculiaridad más; la de ser la única factorial no regular tal que $S[X_o] = S(X_o)$.

En todo lo que antecede se aprecia el interés de disponer de un criterio de cambio de signo, y por otra parte, que la validez o no de un principio así tiene un carácter marcadamente topológico: reg X_o^* conexo, en (1.8); $X_o^* \setminus \{0\}$ conexo, en (5.1). Vamos ahora a estudiar estas condiciones topológicas, y después veremos varios ejemplos y contraejemplos notables al respecto.

(5.7) <u>Proposición</u>.- *Sea* X_o *un germen de superficie irreducible. Si* $\mathrm{reg}_* X_o$ *es conexo, entonces el germen* X_o^* *es topológicamente trivial (esto es, homeomorfo a* $\mathbb{R}_o^2$*).*

<u>Demostración</u>.- Supongamos $X_o \subset \mathbb{R}_o^n$, y apliquemos el teorema de parametrización local (0.2.b). Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ la proyección sobre las dos primeras coordenadas. Existen: un entorno abierto U de $0 \in \mathbb{R}^n$; un subconjunto analítico X de U, cuyo germen en el origen es X_o, y una función analítica δ en $W = \pi(U) \subset \mathbb{R}^2$ de modo que:

(i) $\emptyset \neq X \setminus \{\delta = 0\} \subset \mathrm{reg}_* X \subset \overline{X \setminus \{\delta = 0\}} = X^*$

(ii) $X \setminus \{\delta = 0\}$ tiene una cantidad finita de componentes conexas, adherentes al origen.

(iii) Si C es una componente conexa de $X \setminus \{\delta = 0\}$, $\pi | C$ es un homeomorfismo de C sobre una componente conexa de $W \setminus \{\delta = 0\}$.

(iv) $\pi | X : X \to W$ es propia y tiene fibras finitas.

Consideremos primero el caso sencillo en que δ sólo se anula en el origen. Entonces X_o es de dimensión pura y singularidad aislada, y la parametrización anterior describe X_o como una colección finita de discos abiertos con un único punto común: el origen. Es claro pues que para que $\mathrm{reg}_* X_o$ sea conexo sólo puede haber un disco, con lo que $X_o = X_o^*$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_o$.

Excluyendo ya el caso anterior, podemos elegir U suficientemente pequeño para que $\{\delta = 0\} \subset W$ sea de la forma $c_1^* \cup \ldots \cup c_r^* \cup \{0\}$, donde cada c_i^*, $1 \leqslant i \leqslant r$, es una semirrama lisa, y $c_i^* \cap c_j^* = \emptyset$ si $i \neq j$ (figura 7). Lo mismo se puede suponer para $\{\delta = 0\} \cap X$, pues su germen en el origen tiene dimensión 1, y tendre

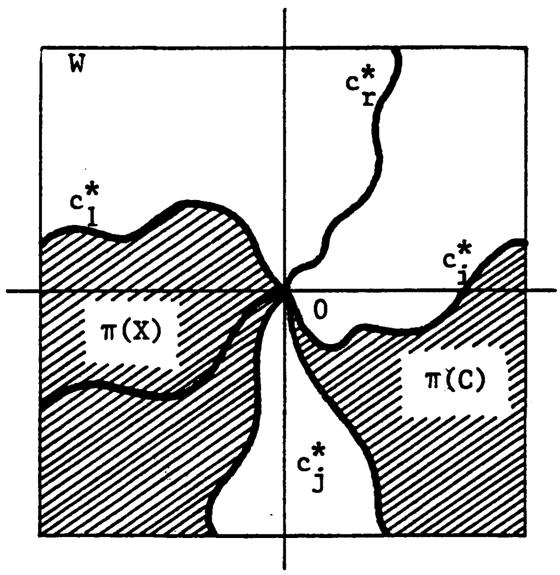


Figura 7

mos $\{\delta = 0\} \cap X = \bigcup_{i,j} c^*_{ij} \cup \{0\}$, con $\pi^{-1}(c^*_i) \cap X = \bigcup_j c^*_{ij}$. A partir de ahora lo que haremos será reconstruir el tipo topológico de X^*.

En primer lugar, sea C una componente conexa de $X \smallsetminus \{\delta = 0\}$. Como $\pi|X$ es cerrada, $\pi(\overline{C}) = \overline{\pi(C)}$, y afirmamos que $\pi|\overline{C} : \overline{C} \to \overline{\pi(C)}$ es homeomorfismo. En efecto, basta ver que $\pi|\overline{C}$ es inyectiva, puesto que sabemos es propia. Consideremos entonces un punto $a \in \pi(\overline{C})$ y sea $\{x_1,\ldots,x_s\} = \pi^{-1}(a) \cap \overline{C}$. Si $a \in \pi(C)$, necesariamente $s = 1$, luego supongamos $a \in \overline{\pi(C)} \smallsetminus \pi(C) \subset \{\delta = 0\}$, y, por ejemplo, $a \in c^*_1$. Elijamos entornos abiertos disjuntos $U_1,\ldots,U_s$ de $x_1,\ldots,x_s$ en $\overline{C}$. Se deduce que $\pi(U_1 \cup \ldots \cup U_s)$ es un entorno de a en $\overline{\pi(C)}$, pues si no lo fuera, existiría una sucesión $\{y_p\}_{p \geq 1} \subset \overline{C} \smallsetminus \pi^{-1}\pi(U_1 \cup \ldots \cup U_s)$ convergente al punto a, y por ser $\pi|\overline{C}$ propia, contendría una subsucesión convergente a algún x_i, lo que no puede ser ya que $\{y_p\}_{p \geq 1} \subset \overline{C} \smallsetminus U_i$. Así, existe un entorno abierto U' de a en $\overline{\pi(C)}$, contenido en $\pi(U_1 \cup \ldots \cup U_s)$, y <u>tal que $U' \smallsetminus c^*_1$ es conexo</u> (porque $\pi(C)$ es una componente conexa de $W \smallsetminus \{\delta = 0\}$, véase la figura 8). En esta situación

$$\{\pi(C \cap \pi^{-1}(U') \cap U_i) : 1 \leq i \leq s\}$$

es un recubrimiento de $U' \smallsetminus c^*_1 \subset C$ por conjuntos disjuntos, abiertos en C ya que $\pi|C$ es homeomorfismo. Como $U' \smallsetminus c^*_1$ es conexo, se concluye $s = 1$, y, en suma, que $\pi|\overline{C}$ es inyectiva.

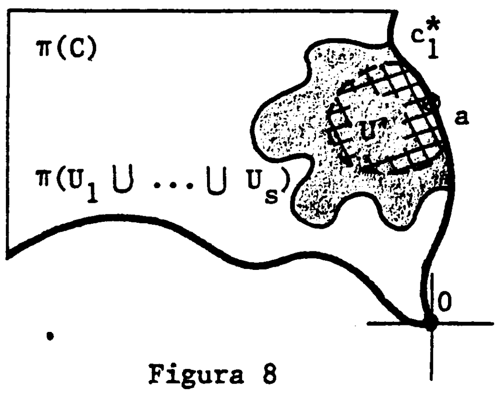


Figura 8

Por otra parte, X^* es la unión de las adherencias de las componentes conexas $C_1,\ldots,C_r$ de $X \setminus \{\delta = 0\}$, luego X^* se obtiene a partir de la suma topológica $\overline{C}_1 + \ldots + \overline{C}_r$, identificando el origen a un mismo punto, y de modo conveniente las fronteras. Obsérvese además que por lo anterior, cada $\overline{C}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, es homeomorfo a su proyección $\pi(\overline{C}_i) = \overline{\pi(C_i)}$, que es evidentemente homeomorfa a un simple de dimensión 2.

Para describir la identificación de las fronteras, consideremos de nuevo una de las componentes C. Se tiene $\pi(\overline{C}) = \overline{\pi(C)} =$ $= \pi(C) \cup c^*_{i_1} \cup c^*_{i_2}$ con $i_1 < i_2$, y como $\pi|\overline{C}$ es inyectiva, sólo hay dos índices j_1, j_2 tales que $c^*_{i_1 j_1}$ y $c^*_{i_1 j_2}$ sean adherentes a $\overline{C}$ fuera del origen. Se deduce:

$$\overline{C} = C \cup c^*_{i_1 j_1} \cup c^*_{i_2 j_2},$$

y diremos que $c^*_{i_1 j_1}$, $c^*_{i_2 j_2}$ son los dos lados de C. De este modo, la identificación entre las fronteras de las componentes es una identificación entre sus lados, con la condición de que cada lado se identifica siempre con algún otro.

Esta condición se justifica como sigue. Supóngase que c^* es un lado de C, que no se identifica con ningún otro. Podemos elegir un punto $a \in c^*$ tal que X_a sea coherente (pues por un teorema de Fensch, precisado por Galbiati en [26; corollaire 3.10], el lugar de los puntos de no coherencia tiene codimensión $\geqslant 2$, luego en nuestro caso, dimensión cero), y en consecuencia de dimensión pura, y que no sea adherente a ninguna otra componente. Entonces $X_a =$ $= X^*_a = \overline{C}_a = C_a \cup c^*_a$. Consideramos ahora la restricción de π a un entorno abierto de a, $U' \subset U$ tal que

$$X \cap U = \overline{C} \cap U = (C \cup c^*) \cap U,$$

y el germen de $\pi(X \cap U)$ en $b = \pi(a)$ es entonces $\pi(C)_b \cup \pi(c^*)_b$ (figura 9). Así podemos elegir una recta $r \subset \mathbb{R}^2$, transversal a $\pi(c^*)_b$ que pase por b, y con una de sus semirrectas contenida en $\pi(C)$, la otra en su complementario. En esta situación, $\pi^{-1}(r) \cap X$ es un subconjunto analítico de X, luego $(\pi^{-1}(r) \cap X)_a \subset \overline{C}_a$ contiene a

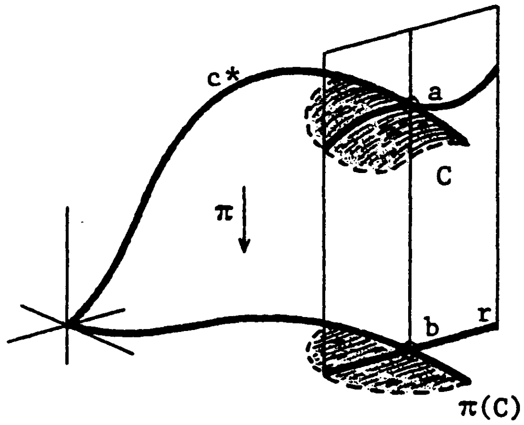


Figura 9

un germen de curva irreducible c'_a. La proyección de ese germen tiene que estar contenida en $r_b \cap \pi(C)$, lo que significa que las dos semirramas de c'_a tienen la misma imagen por π, contra ser $\pi|\overline{C}$ inyectiva. Esta contradicción muestra que c^* tiene necesariamente que identificarse con algún otro lado, como pretendíamos.

De este modo, podemos reconstruir X^* a partir de una colección finita de simples de dimensión 2, con un vértice distinguido en cada uno de ellos, identificando todos esos vértices a un punto 0, y los lados que contienen a esos vértices entre sí, con la condición de que <u>todos esos lados se identifican a algún otro</u>.

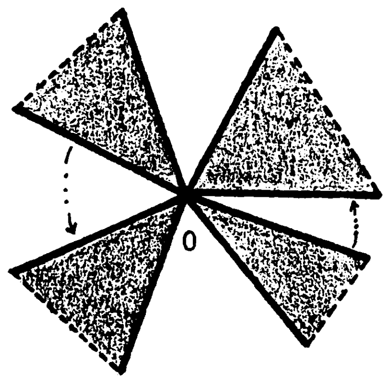


Figura 10

Ahora, hacemos primero las identificaciones de los pares de lados de simples distintos, lo que produce nuevos simples con medianas que pueden identificarse a otros lados. Después de esto, la situación es que tenemos una cantidad finita de simples unidos por un vértice 0, cuyos lados se identifican:

(a) o con el otro lado del mismo simple,

(b) o con una línea interior de otro simple.

Además, se pueden identificar entre sí algunas lineas interiores de simples.

Se observa que, salvo las del tipo (a), estas identificaciones producen líneas de puntos singulares de X. Afirmamos ahora que de hecho, sólo puede haber un simple S. En efecto, si hubiera otro S', podríamos elegir dos puntos regulares de X*, $a \in S$, $a' \in S'$, y como $\mathrm{reg}_* X$ es conexo, un camino $\sigma \subset \mathrm{reg}_* X$ que los conecte. Esto es imposible, pues cualquier camino que conecte a y a' contendrá algún punto $b \in \overline{S} \cap \overline{S'}$, que necesariamente será singular por lo anterior.

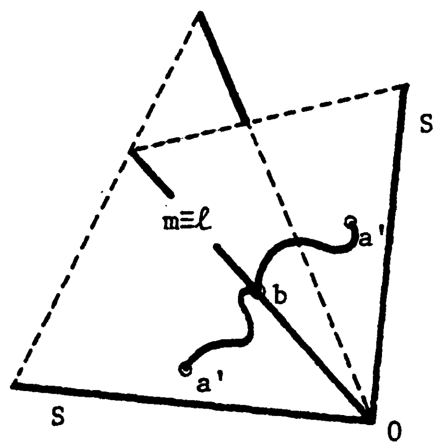


Figura 11

Por otra parte, si hubiera que hacer en S otra identificación que la de sus lados $\ell \equiv \ell'$, S contendría líneas de puntos singulares, y como antes, esas líneas desconectarían $\text{reg}_* X$. En conclusión, X^*_o es homeomorfo a un simple de dimensión 2, con los lados identificados, es decir, es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_o$.

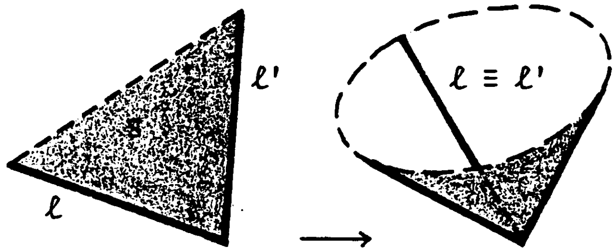


Figura 12

(5.8) <u>Corolario</u>.- *Sea* X_o *un germen de superficie irreducible cuyo lugar singular es analítico. Si* $\text{reg}_* X_o$ *es conexo,* X_o *es una singularidad aislada.*

<u>Demostración</u>.- En primer lugar, como X_o es una superficie, $\text{sing}\ X_o \subset X^*_o$. Ahora, por (5.7), X^*_o es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_o$. Si $\text{sing}\ X_o$ no se reduce a $\{0\}$, al ser por hipótesis analítico, contiene un germen de curva irreducible $c_o \subset X^*_o$, y al ser $\text{reg}_* X_o$ conexo, también lo será $X^*_o \setminus c_o$. Pero el homeomorfismo $X^*_o \to R^2_o$ descrito en (5.7) transforma c_o en dos líneas, una por cada semirrama de c^*_o, que se unen por el origen, y necesariamente desconectan $\mathbb{R}^2_o$. En suma, $\text{sing}\ X_o = \{0\}$.

(5.9) <u>Corolario</u>.- *Sea* X_o *un germen de superficie. Si* $\text{reg}\ X_o$ *es conexo, entonces* X_o *es irreducible y homeomorfo a* $\mathbb{R}^2_o$.

<u>Demostración</u>.- Es claro que X_o tiene dimensión pura. Por otra parte, si Y_o es una componente irreducible de X_o, Y_o tie-

ne interior no vacío en reg X_o, luego por el principio de identidad, ya que reg X_o es conexo, $Y_o \supset$ reg X_o. Como $\overline{\text{reg } X_o} = X_o$, se concluye $Y_o = X_o$ y X_o es irreducible. Podemos pues aplicar (5.7), y $X_o = X_o^*$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_o$.

(5.10) Corolario.- *Sea* X_o *un germen de superficie. Si* $X_o \setminus \{0\}$ *es conexo,* X_o *es de dimensión pura. Si además es una singularidad aislada,* X_o *es homeomorfo a* $\mathbb{R}^2_o$.

Demostración.- Si X_o no es de dimensión pura, existe una semirrama $c_o^* \subset X_o \setminus X_o^*$, y como $\dim(X_o \setminus X_o^*) = 1$, c_o^* es abierto y cerrado en $X_o \setminus \{0\}$, contra ser $X_o \setminus \{0\}$ conexo. Probado esto, si además sing $X_o = \{0\}$, reg $X_o = X_o \setminus \{0\}$ es conexo, y por (5.9), X_o es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_o$.

(5.11) Ejemplos.- En los resultados anteriores se consideran varias propiedades topológicas, algunas de las cuales son suficientes para el criterio del cambio de signo, (1.8) y (5.1). Reunimos aquí cuatro ejemplos al respecto.

A. El cono no cumple el criterio del cambio de signo.

Sea X_o el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Entonces $f = z$, que cambia de signo sobre X_o, genera un ideal primo en $\mathcal{O}[X_o]$ que no es real. Claramente, $X_o \setminus \{0\}$ no es conexo.

B. Una superficie que cumple el criterio del cambio de signo y no es de dimensión pura.

La superficie $X_o : z(x^2+y^2)-x^3 = 0$, es irreducible de singularidad aislada, $X_o^* \setminus \{0\}$ es conexo, luego cumple el criterio del cambio de signo, pero no es de dimensión pura.

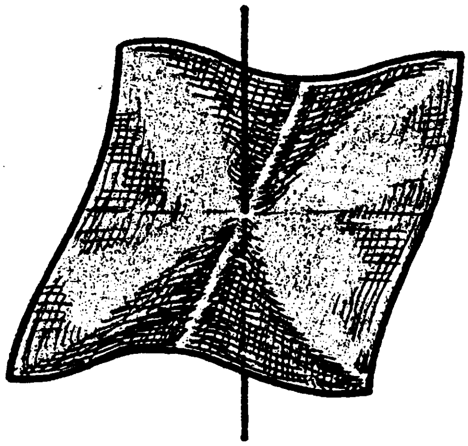


Figura 13

C. Una superficie de dimensión pura, que cumple el criterio del cambio de signo, y no es topológicamente trivial.

La superficie $X_o : (x^2-y^2)z^2+y^3 = 0$, es irreducible de dimensión pura; $X_o \setminus \{0\}$ es conexo, luego cumple el criterio del cambio de signo, pero reg X_o tiene 6 componentes conexas, y X_o no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_o$.

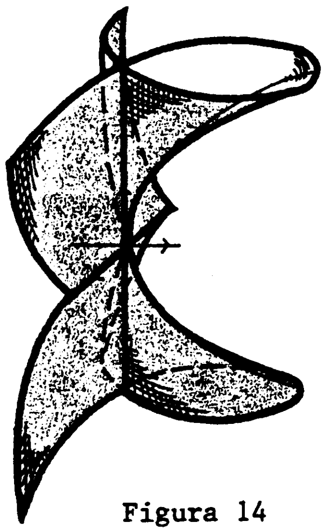


Figura 14

D. Una superficie topológicamente trivial de singularidad aislada, que cumple el criterio del cambio de signo pero no es factorial

La superficie

$X_o : x^2-y^2+z^3 = 0$, es homeomorfa a $\mathbb{R}^2_o$, luego cumple el criterio del cambio de signo; es normal, luego de singularidad aislada, pero no es factorial.

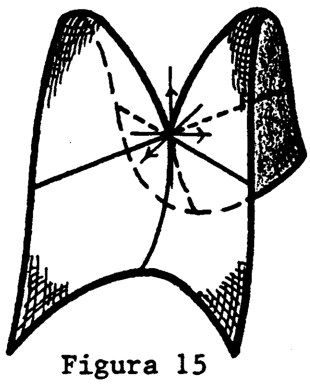


Figura 15

Terminamos este epígrafe con algunas observaciones sobre la cuestión cuantitativa.

(5.12) Proposición.- *Si* X_o *es un germen de superficie irreducible,* $2 \leqslant p(X_o) < +\infty$.

Demostración.- Mediante el lema de normalización, (0.1), se obtiene una extensión algebraica finita $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2_o) \to \mathcal{O}(X_o)$. Si $p(X_o)$ fuera 1, por el teorema de descenso de Diller-Dress, [17; Korollar 1] sería $p(\mathbb{R}^2_o) = 1$, y sabemos que no es así, (3.2.b). Esto prueba la primera desigualdad. La otra resulta de un teorema de ascenso de Pfister (*), pues se tiene:

$$p(X_o) \leqslant [\mathcal{O}(X_o) : \mathcal{O}(\mathbb{R}^2_o)]\,p(\mathbb{R}^2_o) = 2[\mathcal{O}(X_o) : \mathcal{O}(\mathbb{R}^2_o)]$$

(*) Este resultado, no publicado, establece: $p(K) \leqslant [K : L]p(L)$ si K es una extensión algebraica finita de L de característica cero. Para probarlo, se elige un elemento primitivo χ de K sobre L, y pongamos $m=[K:L], p = p(L)$. Ahora, dada una suma de cuadrados de K : $\sum_{i=1}^{r} (a_{i1}+a_{i2}\chi+\ldots+a_{im}\chi^{m-1})^2$, $a_{ij} \in L$, se diagonaliza la forma cuadrática sobre $L : q(T_1,\ldots,T_m) =$ $= \sum_{i=1}^{r} (a_{i1}T_1 +\ldots+ a_{im}T_m)^2$, y en la diagonalización se sustituye T_1 por 1, T_2 por $\chi,\ldots,T_m$ por χ^{m-1}.

(5.13) Observaciones.- (a) De hecho, la demostración anterior especifica una cota. Por ejemplo, si X_o es un germen de superficie irreducible de $\mathbb{R}^3_o$, entonces su multiplicidad $m(X_o)$ es el mínimo grado de una extensión $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2_o) \to \mathcal{O}(X_o)$, y resulta:

$$p(X_o) \leqslant 2m(X_o)$$

(b) La desigualdad de (a) puede ser estricta: existen gérmenes de superficie irreducible no regular, $X_o \subset \mathbb{R}^3_o$, con $p(X_o) = 2$. Considérese por ejemplo el cono $X_o : x^2+y^2-z^2 = 0$. Se tiene $m(X_o) = 2$, y la cota anterior sería $p(X_o) \leqslant 4$. Sin embargo, el homomorfismo canónico $\mathbb{R}\{x,y\} \to \mathbb{R}\{x,y\}/(x^2+y^2-z^2)$ induce la extensión de cuerpos:

$$\mathcal{O}(X_o) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2_o)\,[\sqrt{x^2+y^2}].$$

En consecuencia, por un teorema de Elman y Lam [22; proposition 3.2], se deduce $p(X_o) < 2$, y por tanto $p(X_o) = 2$.

CAPITULO II: LEMAS DE SEPARACION

El núcleo de este capítulo está formado por los lemas de separación, que tienen después diversas aplicaciones: al problema decimoséptimo para gérmenes de dimensión pura; a la variación de las sumas de cuadrados mediante un morfismo finito; a la existencia de gérmenes de función analítica no negativos que no son suma de cuadrados de otros gérmenes de función analítica; al estudio del lugar de dimensión máxima de un conjunto semianalítico o semialgebraico; al cálculo de la dimensión mediante cadenas de ideales primos reales; a la construcción de órdenes en el cuerpo de gérmenes de función meromorfa de un germen irreducible.

§6. Gérmenes de dimensión pura y problema decimoséptimo.

Como ya dijimos antes, la solución (2.1) del problema decimoséptimo se aparta de la tradicional, en cuanto que las sumas de cuadrados resultan ser las funciones no negativas en el lugar de máxima dimensión, y no simplemente en el germen dado. Trivialmente, para gérmenes de dimensión pura esta diferencia desaparece, y es natural preguntarse si esto los caracteriza. La respuesta, afirmativa, se formula a continuación:

(6.1) Proposición.- *Sea* X_o *un germen irreducible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(α) X_o *es de dimensión pura.*

(β) H^{17} : $P(X_o) = S(X_o)$

La demostración de este hecho requiere cierto trabajo previo, y no podrá completarse hasta el siguiente §7, una vez dispongamos de un lema de separación adecuado, (7.2). Dedicaremos pues este breve epígrafe a reformular (6.1) como un problema de separación, mediante una descripción algebraica de los gérmenes de dimensión pura, (6.2), y la introducción del concepto de germen laxo, (6.3), en relación con H^{17}, (6.5).

(6.2) <u>Proposición</u>.- *Sean* X_o *un germen irreducible y* $p = J(X_o)$. *Son equivalentes:*

(α) X_o *es de dimensión pura*

(β) Para cada $r > 0$ *y cada* $f = (f_1,\dots,f_r) \in \mathbb{R}\{x\}^r$, $\rho_f^+(p) = p$ *ó* $\mathbb{R}\{x\}$.

<u>Demostración</u>.- <u>(α) ⇒ (β)</u>: Sean $r > 0$, $f \in \mathbb{R}\{x\}^r$ y $\delta \in \rho_f^+(p) \setminus p$. Se deduce del teorema de los ceros (2.7.β), que

$$V(\delta) \supset \operatorname{reg} X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}$$

Pero como X_o tiene dimensión pura, $\operatorname{reg} X_o = \operatorname{reg}_* X_o$ y como $\delta \notin p$, $X_o^* \cap V(\delta)$ tiene interior vacío en X_o (principio de identidad). Se sigue de esto:

$$\operatorname{reg} X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} = \emptyset,$$

y por tanto, $X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} = \emptyset$. En conclusión, de nuevo por el teorema de los ceros:

$$\rho_f^+(p) = J(X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}) = J(\emptyset) = \mathbb{R}\{x\}.$$

<u>$(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$</u>: Si X_o no es de dimensión pura, al aplicar el teorema de parametrización local, el lugar del discriminante $V(\delta)\cap X_o$ tiene interior no vacío en X_o (pues contiene todos los puntos regulares de dimensión $<\dim X_o$). Esto se escribe:

$$\emptyset \neq X_o \setminus \overline{X_o \setminus V(\delta)} \subset V(\delta),$$

Ahora bien, para ciertos $f_{ij} \in \mathbb{R}\{x\}$ debe ser:

$$\emptyset \neq X_o \setminus \overline{X_o \setminus V(\delta)} = \bigcup_{i=1}^{s} X_o \cap \{f_{i1} > 0,\ldots,f_{ir} > 0\},$$

y si, por ejemplo, el primer germen de esta unión es no vacío, ponemos $f = (f_{11},\ldots,f_{1r}) \in \mathbb{R}\{x\}^r$, con lo que:

$$\emptyset \neq X_o \cap \{f_{11} > 0,\ldots,f_{1r} > 0\} \subset V(\delta),$$

y por el teorema de los ceros una vez más:

$$\delta \in J(X_o \cap \{f_{11} > 0,\ldots,f_{1r} > 0\}) = \rho_f^+(p)$$

Como $\delta \notin p$, y $\emptyset \neq X_o \cap \{f_{11} > 0,\ldots,f_{1r} > 0\}$, es $\rho_f^+(p) \neq p$ y $\neq \mathbb{R}\{x\}$, luego no se cumple (β).

El resultado precedente tomando $r = 1$ en (β), sugiere la siguiente

(6.3) <u>Definición</u>.- *Un germen analítico* X_o *se llama laxo si dado* $f \in \mathbb{R}\{x\}$ *con* $X_o \cap \{f > 0\} \neq \emptyset$, *cada germen de función analítica que se anula sobre* $X_o \cap \{f > 0\}$ *se anula sobre todo* X_o.

(6.4) <u>Observaciones</u>.- (a) La anterior definición es la contrapartida analítica local del concepto de 'locally slack system' introducido en el caso algebraico por G. Stengle ([50], y véase también [20]).

(b) Un germen irreducible de dimensión pura es laxo, (6.2), y recíprocamente. Una parte de este recíproco es inmediata: si X_o es reducible, $X_o = Y_o \cup Z_o$, $Y_o \neq X_o$, $Z_o \neq X_o$, tomando dos ecuaciones $f, g \in \mathbb{R}\{x\}$ de Y_o y Z_o (esto es, $Y_o = \{f = 0\}$, $Z_o = \{g = 0\}$), se tiene:

$$X_o \cap \{f^2 > 0\} = X_o \setminus Y_o \subset Z_o$$

y g se anula sobre $X_o \cap \{f^2 > 0\}$ que es no vacío, pero no se anula sobre Y_o, ni, por tanto, sobre X_o. La parte difícil, que un germen laxo es de dimensión pura, es esencialmente una cuestión de separación, como se verá cuando se pruebe en el próximo epígrafe, (7.4). De ella se deduce (6.1) en virtud de nuestra siguiente

(6.5) Proposición.- *Sea* X_o *un germen irreducible. Son equivalentes:*

(α) X_o *es laxo,*

(β) X_o *cumple* H^{17} : $P(X_o) = S(X_o)$

Demostración.- (α) ⟹ (β): El contenido $P(X_o) \subset S(X_o)$ se tiene siempre. Para el otro, sea $f \notin P(X_o)$, esto es: $X_o \cap \{f < 0\} \neq \emptyset$. Hay que ver que f no es una suma de cuadrados en $\mathcal{O}(X_o)$ ó, equivalentemente, (1.2), que $X_o^* \cap \{f < 0\} \neq \emptyset$. Ahora bien, si fuera $X_o^* \cap \{f < 0\} = \emptyset$, aplicando el teorema de parametrización local, el discriminante δ se anularía sobre $X_o \cap \{f < 0\}$, pero no sobre X_o. Esto es imposible por ser X_o laxo.

(β) ⟹ (α): Sea $f \in \mathbb{R}\{x\}$ con $X_o \cap \{f > 0\} \neq \emptyset$. Esto significa que $-f$ no está en $P(X_o)$, y por (β), $-f \notin S(X_o)$. Se deduce, (2.1), $X_o^* \cap \{-f < 0\} \neq \emptyset$, y por el principio de identidad, un germen $g \in \mathbb{R}\{x\}$ que se anule sobre $X_o \cap \{f > 0\} \supset X_o^* \cap \{-f < 0\}$ se anulará sobre todo X_o.

§7. Lemas de separación.

Para estudiar la relación entre gérmenes laxos y gérmenes de dimensión pura, el punto crucial es saber si un germen $X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \neq \emptyset$ contiene siempre otro $X_o \cap \{f > 0\} \neq \emptyset$ (si se intenta probar que un germen irreducible que no tiene dimensión pura, no es laxo, se observa que 'sólo' se necesita eso). Dedicamos este número a dicha cuestión, aunque luego la técnica que utilicemos tendrá otras consecuencias interesantes (§§8 al 11).

En primer lugar, necesitamos una

(7.1) Proposición.- *Sea* $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen de curva analítica irreducible. Si* Z_o *es un germen semianalítico abierto de* X_o, *existe un polinomio* $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *tal que* $Z_o = X_o \cap$ $\cap \{f > 0\}$.

Demostración.- En primer lugar, $Z_o = \bigcup_{i=1}^{s} \{f_{i1} > 0,\dots$ $\dots,f_{ir} > 0\} \cap X_o$, y la propia prueba mostrará que basta considerar el caso $Z_o = \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \cap X_o$. Si $f_i(0) \neq 0$, f_i tiene signo constante en un entorno del origen, y $\{f_i > 0\} \cap X_o = \emptyset$ ó X_o. Así, excluyendo casos triviales, supondremos $f_1(0) = \dots = f_r(0) = 0$. Como X_o es irreducible, $X_o \cap V(f_i) = \{0\}$, y $\{f_i > 0\} \cap X_o$ tiene que ser una de las semirramas abiertas de X_o, o bien ambas (pues por ser las semirramas conexas, y no anularse f_i en ellas, su signo es constante en cada una). Resulta pues que el mismo Z_o es una de las semirramas o la unión de las dos, y se tendrá

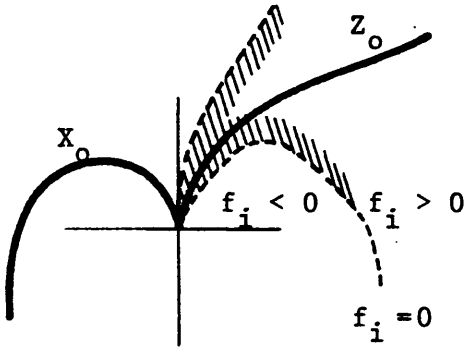


Figura 16

$Z_o = X_o \cap \{f_i > 0\}$ para cierto $i=1,\ldots,r$. Elijamos ahora una parametrización: $t \mapsto x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ de X_o y sea ν el orden de la serie $f_i(x(t)) \in \mathbb{R}\{t\}$. Si $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ y el orden de $f-f_i$ es suficientemente grande, se tiene $f(x(t)) \equiv f_i(x(t))$ mod $t^{\nu+1}$. En esta situación, si t es pequeño, las desigualdades $f(x(t)) > 0$ y $f_i(x(t)) > 0$ son equivalentes, luego $Z_o = X_o \cap \{f > 0\}$.

El resultado fundamental es el siguiente:

(7.2) <u>Proposición (lema de separación)</u>.- *Sean* Z *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *cuyo germen en el origen* Z_o *es semianalítico abierto,* $A_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen semianalítico de dimensión 1, y* c_o *un germen de curva irreducible una de cuyas semirramas* c^*_o *está contenida en* $Z_o \setminus A_o$. *Entonces, dado un entorno* U *de* $0 \in \mathbb{R}^n$, *existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, *tal que:*

$$c^*_o \subset \{h < 0\} \subset \{h \leq 0\} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n_o \setminus A_o; \quad \{h < 0\} \subset Z \cap U$$

<u>Demostración</u>.- Se procede por inducción sobre el número mínimo e de explosiones necesarias para resolver el germen c_o, (0.10).

Caso I : $e = o$. Entonces el germen c_o es regular y podemos elegir, salvo un cambio lineal de coordenadas, una parametrización $c : \mathbb{R}\{x\} \to \mathbb{R}\{t\}$ de la forma:

$$c(x_1) = t, \quad c(x_i) = f_i(t), \quad 1 < i \leqslant n.$$

Supongamos, por ejemplo:

$$c^* = \{(x_1, f_2(x_1), \ldots, f_n(x_1)) : -\delta < x_1 < 0\} \subset Z \cap U_1 \setminus A$$

donde A es un conjunto semianalítico de un policilindro de radio η, $U_1 \subset U$, que representa a A_o (si la semirrama correspondiera a $x_1 > 0$, el argumento sería análogo). Afirmamos que, después de sucesivas reducciones de δ y U_1, existen un entero impar $p \geqslant 1$ y una constante $a > 0$ tales que:

$$(7.2.1) \qquad c^* \subset \{x \in U_1 : ax^p + (x_2 - f_2(x_1))^2 + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - f_n(x_1))^2 < 0\} \subset Z \setminus A$$

Para verlo, considérese la equivalencia analítica $\phi : \Omega \to U_1$ dada por:

$$x \mapsto (x_1, x_2 + f_2(x_1), \ldots, x_n + f_n(x_1)),$$

y sea $B \subset \Omega$ un policilindro compacto de centro el origen. Entonces $K = \overline{B \setminus \phi^{-1}(Z \setminus A)}$ es semianalítico compacto en R^n, y existe una función semianalítica que aproxima la distancia a K. Con precisión, según un resultado de Łojasiewicz [37; p. 137, lemme] existe una función continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (cuya gráfica es) semianalítica y tal que:

$$\frac{1}{4}\, d(x,K) \leqslant g(x) \leqslant 4d(x,K), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Admitimos ahora un

(7.2.2) <u>Lema</u>.- *Sea* $\bar{g} : (-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua semianalítica, con* $\bar{g}(0) = 0$ *y* $\bar{g}(t) > 0$ *para* $t < 0$. *Entonces, reduciendo* ε*, existen un impar* $q \geqslant 1$ *y una constante* $b > 0$ *de modo que*

$$-bt^q < \bar{g}(t), \qquad (-\varepsilon < t < 0)$$

Aplicamos (7.2.1) a la función continua $\bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t,0)$ que es semianalítica, pues su grafo $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no es sino $\text{grafo}(g) \cap \{x_2 = \ldots = x_n = 0\}$, y se cumple:

$$\bar{g}(t) = g(t,0) \geqslant \frac{1}{4} d((t,0),K) > 0$$

para $t < 0$. Dados pues los q y b del lema, reduciendo Ω se tiene:

$$\{(x_1,0) \in \Omega : x_1 < 0\} \subset \{x \in \Omega: x_2^2 + \ldots + x_n^2 < -\frac{b^3}{16} x_1^{3q}\} \subset$$

$$\subset \{x \in \Omega: d((x_1,0),x)^2 < (\frac{b}{4} x_1^q)^2\} \cap \{x_1 < 0\} \subset$$

$$\subset \{x \in \Omega: d((x_1,0),x) < \frac{1}{4} \bar{g}(x_1)\} \subset$$

$$\subset \{x \in \Omega: d((x_1,0),x) < d((x_1,0),K)\} \subset \phi^{-1}(Z \setminus A)$$

Ahora, tomando $a = b^3/16$, $p = 3q$ y aplicando ϕ resulta (7.2.1).

Debemos todavía modificar la serie convergente

$$f(x) = ax_1^p + (x_2 - f_2(x_1))^2 + \ldots + (x_n - f_n(x_1))^2 \in \mathbb{R}\{x\}$$

para obtener un polinomio, y poder olvidar la restricción '$x \in U_1$'. Para ello consideramos los desarrollos:

$$f_i(x_1) = h_i(x_1) + x_1^{2p+1} u_i(x_1), \qquad g_i \in \mathbb{R}\, x_1, \ldots, x_n$$

y podemos además suponer:

$$|u_i(x_1)| < M, \qquad |f_i(x_1)| < \eta/2,$$

si $|x_1| < \delta$, para cierto $M > 1$. Elegimos ahora un $\varepsilon > 0$ sujeto a las acotaciones

$$\varepsilon < \frac{1}{2M^2}, \frac{\eta}{2(2+\sqrt{a})}, \frac{1}{2[1+2(n-1)\sqrt{a} + (n-1)/a]}$$

y ponemos:

$$(7.2.3) \qquad h(x) = a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} + \sum_{i=2}^{n} (x_i-h_i(x_1))^2 \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$$

(véase la figura 17). Este polinomio es la solución.

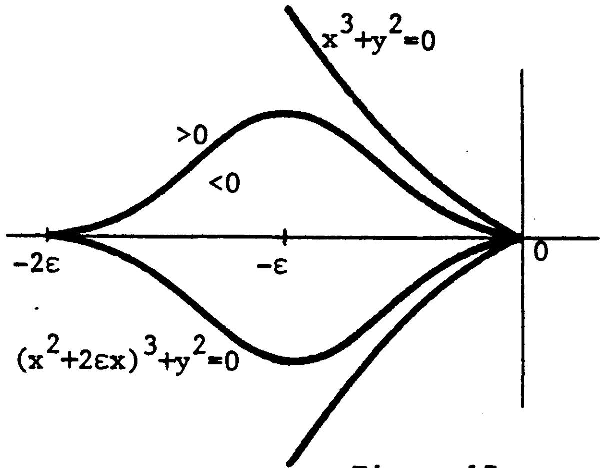


Figura 17

En efecto, será suficiente probar los contenidos siguientes:

(i) $c^* \cap W \subset \{h < 0\}$ para cierto entorno W del origen, y

(ii) $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\} \setminus \{0\} \subset \{x \in U_1 : f(x) < 0\}$.

Para el primer contenido, obsérvese que se tiene:

$$h(c(x_1)) = a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} + \sum_{i=2}^{n} (f_i(x_1)-h_i(x_1))^2 =$$

$$= a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} + (\sum_{i=2}^{n} u_i(x_1)^2)x_1^{4p+2},$$

y para $x_1 < 0$, $|x_1|$ suficientemente pequeño, $h(c(x_1))$ tiene el signo del término de menor grado, $a(2\varepsilon)^{p+2}\ x_1^{p+2}$, que es negativo por ser p impar.

Veamos en fin (ii). Sea $x \in R^n$ con $h(x) \leqslant 0$, $x \neq 0$. Entonces

$$a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} \leqslant -\sum_{i=2}^{n} (x_i-h_i(x_1))^2 \leqslant 0$$

y así

$$0 \geqslant x_1^2 + \varepsilon x_1 = (x_1+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2,$$

de donde $-\varepsilon \leqslant |x_1+\varepsilon| \leqslant\varepsilon$; en conclusión: $-2\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant 0$, $-\eta < x_1 < 0$.

Además,

$$(x_i-h_i(x_1))^2 \leqslant -a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} \leqslant a(\varepsilon^2-(x_1+\varepsilon)^2) \leqslant a\varepsilon^2$$

Se deduce

$$|x_i-h_i(x_1)| \leqslant \sqrt{a}\ \varepsilon,$$

y de esto:

$$|x_i| \leqslant |h_i(x_1)| + \sqrt{a}\ \varepsilon \leqslant |f_i(x_1)| + |x_1^{2p+1}u_i(x_1)| + \sqrt{a}\ \varepsilon <$$

$$< \eta/2 + (2\varepsilon)^{2p+1}M + \sqrt{a}\ \varepsilon < \eta/2 + (2+\sqrt{a})\varepsilon < \eta$$

En suma, $x \in U_1$, y para terminar hay que probar la desigualdad

$$(x_2-f_2(x_1))^2 +\ldots+ (x_n-f_n(x_1))^2 < -ax_1^p$$

Pero:

$$\sum_{i=2}^{n} (x_i-f_i(x_1))^2 = \sum_{i=2}^{n} (x_i-h_i(x_1) + x_1^{2p+1}u_i(x_1))^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=2}^{n} (x_i-h_i(x_1))^2 + 2\sum_{i=2}^{n} |x_i-h_i(x_1)|.|x_1^{2p+1}u_i(x_1)| +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} x_1^{4p+2}u_i(x_1)^2 \leqslant -a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} +$$

$$+ 2\sqrt{a}\varepsilon \left(\sum_{i=2}^{n} |x_1u_i(x_1)|\right)x_1^{2p} + \left(\sum_{i=2}^{n}|x_1u_i(x_1)|^2\right)x_1^{4p} \leqslant$$

$$\leqslant -ax_1^p[(x_1+2\varepsilon)^p(x_1^2+2\varepsilon x_1)^2 + 2(n-1)|x_1|^p/\sqrt{a} + (n-1)|x_1|^{3p}/a] \leqslant$$

$$\leqslant -ax_1^p[1 + 2(n-1)/\sqrt{a} + (n-1)/a\ 2\varepsilon] < -ax_1^p,$$

a menos que $x_1 = 0$. Pero si $x_1 = 0$, de $h(x) \leqslant 0$ resulta $x_2^2 +\ldots+ x_n^2 \leqslant 0$ y sólo puede ser $x_2 =\ldots= x_n = 0$, lo que se excluyó desde el principio.

De este modo se completa la prueba del caso $e = 0$.

Caso II: $e > 0$ y el enunciado se cumple para curvas que se resuelven con e-1 explosiones. Elegimos coordenadas en $\mathbb{R}^n$ de modo que x_1 sea transversal a c_o, y si $(1,a_1,\ldots,a_n)$ es la dirección de la tangente a c_o consideramos la explosión local $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2'x_1' + a_2x_1' \\ \vdots \\ x_n = x_n'x_1' + a_nx_1' \end{cases}$$

Sean c_o' la transformada estricta de c_o, $c_o'^* = \pi^{-1}(c_o^*)$, $Z' = \pi^{-1}(Z) \setminus \{x_1' = 0\}$. Por hipótesis de inducción, existe un polinomio $h' \in \mathbb{R}[x_1',\ldots,x_n']$ tal que

$$c_o'^* \subset \{h' < 0\}; \qquad \{h' < 0\} \subset Z' \cap \pi^{-1}(U).$$

Ahora, existe $s \geqslant 0$ par, tal que

$$h = x_1^s h'(x_1, \frac{x_2}{x_1} - a_2, \ldots, \frac{x_n}{x_1} - a_n) \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n],$$

y se verifica: $\{h < 0\} = \pi(\{h' < 0\})$, con lo que:

$$c_o^* \subset \{h < 0\}; \qquad \{h < 0\} \subset Z \cap U.$$

La condición relativa a A_o se obtiene como sigue. Evidentemente, basta ver que se puede tomar h de modo que además de lo anterior, $\{h = 0\} \cap A_o \setminus \{0\} = \emptyset$. Pero $A_o \setminus \{0\}$ será una unión de semirramas $c_o^1, \ldots, c_o^s$ y elegimos las coordenadas de modo que x_1 sea transversal a todas. Entonces para cada $i=1,\ldots,s$, se tiene una semirrama $c_{a_i}^i$ en un punto $a_i \in \pi^{-1}(0)$, con $\pi(c_{a_i}^i) = c_o^i$, y se toma h' tal que $\{h' = 0\} \cap c_{a_i}^i = \emptyset$. Como por la transversalidad, $\{x_1 = 0\} \cap c_o^i = \emptyset$, se concluye $\{h = 0\} \cap c_o^i = \emptyset$, $i=1,\ldots,s$, lo que completa la prueba.

Finalmente, sólo resta la

<u>Demostración de (7.2.2)</u>.- Ponemos $T = \text{grafo}\ (\bar{g}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por ser $\bar{g}$ semianalítica y continua, T_o es un germen semianalítico cerrado de dimensión pura 1, luego es una unión de semirramas de gérmenes de curva irreducible. Ahora bien, como T es un grafo, T_o debe ser unión de exactamente dos semirramas, una de las cuales será $T_o \cap \{t < 0\}$. En suma:

$$T_o \cap \{t < 0\} = \{f = 0,\ g > 0\}$$

donde $f \in \mathbb{R}\{t,y\}$ es analíticamente irreducible. Se deduce $f(0,y) \neq 0$ (pues en otro caso t dividiría a f con lo que $\{t = 0\} = \{f = 0\}$ y $T_o \cap \{t < 0\} = \emptyset$). Así, por el teorema de preparación de Weierstrass podemos tomar:

$$f(t,y) = y^s+a_1(t)y^{s-1} +\ldots+ a_s(t)$$

Observamos ahora que para $|t|$ pequeño,

$$|\bar{g}(t)^{s-1}+a_1(t)\bar{g}(t)^{s-2}+\ldots+a_{s-1}(t)| < 1,$$

y si además $t < 0$, es

$$(t,\bar{g}(t)) \in T \cap \{t < 0\} \subset \{f = 0\},$$

de donde:

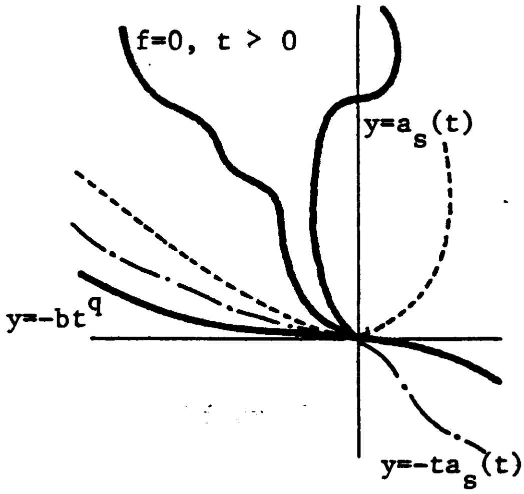


Figura 18

$$|a_s(t)| = |\bar{g}(t)^s+a_1(t)\bar{g}(t)^{s-1}+\ldots+a_{s-1}(t)| =$$
$$= |\bar{g}(t)||\bar{g}(t)^{s-1}+a_1(t)\bar{g}(t)^{s-2}+\ldots+a_{s-1}(t)| < \bar{g}(t).$$

La función analítica a_s tendrá signo constante en $t < 0$, $|t|$ suficientemente pequeño, luego afectada de un signo σ conveniente será

$$0 < \sigma a_s(t) < \bar{g}(t) \quad \text{si} \quad -\varepsilon < t < 0,$$

para ε adecuado. En consecuencia, el desarrollo en serie de σa_s debe ser: $-t^\mu u(t)$, $u(0) > 0$. Basta en suma tomar $b = \min\{u(t) : t \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$ y $q = \mu$ ó $\mu+1$ según sea μ impar o par.

(7.3) <u>Observaciones</u>.- (a) El exponente p y el coeficiente a que aparecen en la primera parte de la demostración de (7.2) (Caso I: $e = 0$) pueden estimarse del siguiente modo. Para cada entero impar $q \geqslant 1$ sea

$$A(q) = \liminf_{t\to o,\, t< o} \frac{d(c(t),\mathbb{R}^n \setminus Z)}{-t^q} \in [0,+\infty]$$

Entonces

$$p \geqslant \text{mín}\,\{q : A(q) > 0\}, \qquad 0 < a < \frac{1}{4}A(p)$$

(b). <u>Contraejemplo a un posible lema de selección regular</u>. La prueba de (7.2) plantea la posibilidad de elegir una semirrama de curva analítica lisa en el lema de selección de Bruhat-Cartan-Wallace. Esto no es posible en general, como muestra, ya para el caso plano, el siguiente argumento.

Sean $t \mapsto (t^p, g(t))$, $t \mapsto (t^p, f(t))$ dos gérmenes de curva analítica plana, tales que: $0 < g(t) < f(t)$, $t > 0$, y sea A el conjunto semianalítico

$$\{(t^p, y) : g(t) \leqslant y \leqslant f(t)\}$$

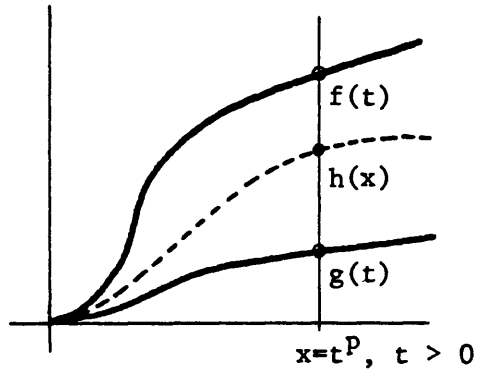


Figura 19

encerrado por ambas curvas (figura 19). Supóngase que existe una función analítica $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo grafo para $x > 0$ esté contenido en A. Entonces:

$$g(\sqrt[p]{x}) \leqslant h(x) \leqslant f(\sqrt[p]{x})$$

para $x > 0$, esto es:

$$g(t) \leqslant h(t^p) \leqslant f(t)$$

para $t > 0$. Si desarrollamos en serie:

$$f(t) = t^\alpha u(t),\ u(0) > 0; \quad g(t) = t^\beta v(t), \quad v(0) > 0;$$

$$h(t) = t^\gamma w(t), \quad w(0) > 0$$

Entonces como para $t > 0$:

$$0 \leqslant f(t) - h(t^p) = t^\alpha u(t) - t^{p\gamma} w(t^p)$$

sólo puede ser: $p\gamma \geqslant \alpha$. Igualmente, de $0 \leqslant h(t^p) - g(t)$ para $t > 0$ resulta $\beta \geqslant p\gamma$. La acotación $\beta \geqslant p\gamma \geqslant \alpha$ significa que no siempre existe h. (Nótese que esto proporciona una posible variación del final de la demostración del lema (7.2.2)).

Citemos aquí un ejemplo de Brumfiel y su comentario [9; p. 182]. Considérese la curva: $y^6 - 2xy^3 + x^2 - x^3 = 0$, que es analíticamente irreducible en el origen. Se puede parametrizar por:

$$x = t^6$$
$$y = t^2(1+t^3)^{1/3}$$

y está en la situación anteriormente analizada, con $p = 6$, $f(t) = t^2(1+t^3)^{1/3}$, $g(t) = t^2(1-t^3)^{1/3}$ (figura 20). En este ejemplo, no existe h, pues las desigualdades $\beta \geqslant p\gamma \geqslant \alpha$ serían:

$$2 \geqslant 6\gamma \geqslant 2$$

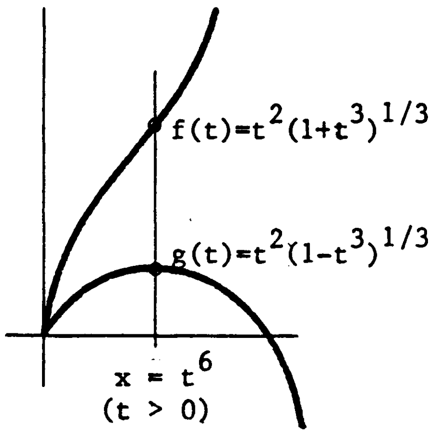


Figura 20

Así pues no sólo, como dice el propio Brumfiel [loc. cit.], no existen grafos de la forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P,Q \in \mathbb{R}[x]$, entre ambas semirramas de la curva, sino que tampoco los hay para $P,Q \in \mathbb{R}\{x\}$. En términos del orden, esto significa que el cuerpo de fracciones de $\mathbb{R}\{x\}$ no es denso en su cierre real.

(c) Si queremos obtener un lema de separación más general, en el sentido de sustituir la semirrama c_o^* por un germen de mayor dimensión, es necesaria alguna restricción. Considérese una situación como la de la figura 21. Los cerrados semianalíticos A y B sólo se cortan en el origen, pero no existe $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$, >0 sobre $A_o \setminus \{0\}$, $\leqslant 0$ sobre B_o. En efecto, en primer lugar, f se anularía en el germen $\{x > 0, y > 0\} \setminus A_o$ (pues cambiaría de signo en él). Se deduce que f no sería irreducible, pues $V(f)$ tendría al menos dos tangentes en el origen. Se sigue que existe una componente irreducible c_o de $V(f)$, una de cuyas semirramas $c_o^* \subset \mathbb{R}^2_o \setminus A_o \cup \mathring{B}_o$ determina un cambio de signo de f y la otra c_o^{**} está contenida en $\mathring{B}_o$. Pero entonces c_o^{**} también debe determinar un cambio de signo de f, y por tanto f no puede tener signo constante en B_o.

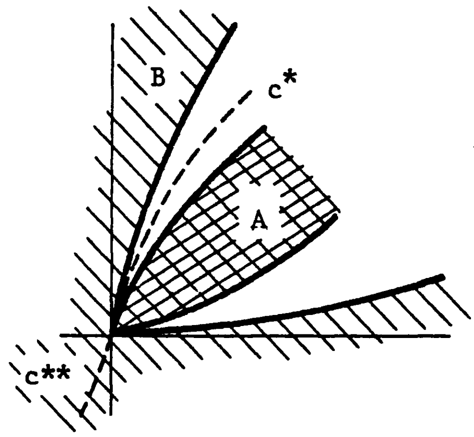


Figura 21

Si ahora contemplamos $\mathbb{R}^2_o \subset \mathbb{R}^n_o$ ($n \geqslant 2$, cualquiera), y ponemos $Z_o = \mathbb{R}^n_o \setminus B_o$, $Y_o = A_o \setminus \{0\}$, resulta de lo anterior que no existe $h \in \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ tal que:

$$Y_o \subset \{h > 0\} \subset Z_o.$$

lo que muestra que (7.2) no es válido si sustituimos c_o^* por un germen semianalítico Y_o arbitrario de dimensión >1.

Antes de discutir otros problemas de separación, y disponiendo ya del lema (7.2), podemos resolver la cuestión central del §6 anterior:

(7.4) <u>Proposición</u>.- *Un germen laxo es irreducible de dimensión pura.*

<u>Demostración</u>.- Sea X_o un germen laxo. Ya vimos, (6.4.b), que debe ser irreducible, y según (6.2) se trata ahora de comprobar que si $f_1,\dots,f_r \in \mathbb{R}\{x\}$ y $X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \neq \emptyset$, entonces

$$J(X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}) = J(X_o)$$

Pero por el lema de selección, existe una semirrama de curva irreducible $c_o^* \subset X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}$, y por el de separación, encontramos $f \in \mathbb{R}\{x\}$ con $c_o^* \subset \{f > 0\} \subset \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}$. Se deduce $\emptyset \neq X_o \cap \{f > 0\} \subset X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\}$, luego por ser X_o laxo: $J(X_o) = J(X_o \cap \{f > 0\}) \supset J(X_o \cap \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\})$ y como el otro contenido siempre se tiene, se sigue la igualdad deseada.

Mediante (7.2) se obtiene:

(7.5) <u>Proposición (lema de separación de curvas)</u>.- *Sean* A_o, B_o *dos gérmenes semianalíticos cerrados de dimensión 1 de* $\mathbb{R}^n_o$, *tales que* $A_o \cap B_o = \{0\}$. *Entonces existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *que es* >0 *sobre* $A_o \setminus \{0\}$ *y* <0 *sobre* $B_o \setminus \{0\}$.

<u>Demostración</u>.- El germen $B_o \setminus \{0\}$ no es sino una unión de semirramas abiertas $c_o^1,\dots,c_o^s$ de germen de curva irreducible. En virtud de (7.2) existen polinomios $h_i \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ tales que: $c_o^i \subset \{h_i < 0\} \subset \{h_i \leqslant 0\} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n_o \setminus (A_o \cup B_o \setminus c_o^i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Entonces $h = h_1 \dots h_s \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ es el polinomio buscado.

Obsérvese que de (7.5) se deduce que en (7.1) la conclusión subsiste aunque el germen de curva analítica X_o no sea irreducible.

El resultado último (7.5) está relacionado con una forma de separación que pudiéramos denominar 'fuerte'. Esta separación fuerte consistiría en, dados un germen semianalítico abierto $Z_o \subset \mathbb{R}^n_o$ y una semirrama $c^*_o \subset Z_o$ de un germen de curva irreducible, encontrar un germen de función analítica, a ser posible un polinomio, $h \in \mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$ tal que $c^*_o \subset \{h < 0\} \subset \{h \leq 0\} \setminus \{0\} \subset Z_o$. Como se ve, (7.2) resuelve esto cuando $\dim (\mathbb{R}^n_o \setminus Z_o) = 1$. Veamos a continuación otros dos casos en los que la separación fuerte es posible:

(7.6) <u>Proposición (separación fuerte de una semirrama de germen de curva lisa)</u>.- *Sean* Z *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *cuyo germen en el origen,* Z_o*, es semianalítico abierto, y* c_o *un germen de curva lisa, una de cuyas semirramas* c^*_o *está contenida en* Z_o*. Entonces, dado un entorno* U *de* $0 \in \mathbb{R}^n$*, existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ *tal que:* $c^*_o \subset \{h < 0\}$; $\{h \leq 0\} \setminus \{0\} \subset Z \cap U$.

<u>Demostración</u>.- El polinomio h es el dado en (7.2.3) al probar (7.2) en el caso en que $e = 0$, esto es, en el caso en que c_o es lisa.

(7.7) <u>Proposición (separación fuerte en el plano)</u>.- *Sean* Z_o *un germen semianalítico abierto de* $\mathbb{R}^2_o$ *y* c_o *un germen de curva irreducible, una de cuyas semirramas,* c^*_o*, está contenida en* Z_o*. Entonces existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x,y]$*, analíti* *camente irreducible en el origen, tal que:*

$$c_o^* \subset \{h < 0\} \subset \{h \leq 0\} \setminus \{0\} \subset Z_o.$$

Demostración.- En primer lugar, observamos que el único caso relevante es el representado en la figura 22. En efecto, como Z_o es abierto, se tendrá $Z_o = \bigcup_{i=1}^{s} \{f_{i1} > 0, \ldots, f_{ir} > 0\}$ y $c_o^* \subset \{f_{i1} > 0, \ldots, f_{ir} > 0\}$ para algún $i=1,\ldots,r$. Ahora considérese el germen $X_o = V(f_{i1} \ldots f_{ir})$ y su complemento $A_o = \mathbb{R}_o^2 \setminus X_o$. Este último tendrá una cantidad finita de componentes conexas, y c_o^* estará contenida en una de ellas, Z_o^*; como además los signos de $f_{i1},\ldots,f_{ir}$ son constantes en Z_o^* resulta $Z_o^* \subset \{f_{i1} > 0, \ldots$ $\ldots, f_{ir} > 0\} \subset Z_o$. Hasta aquí se ve que podemos sustituir Z_o por Z_o^* y se trata de describir Z_o^*. Caso de que $\dim X_o = 0$, la proposición es trivial, luego supongamos $\dim X_o = 1$. Entonces Z_o^* no es sino la región plana limitada por dos semirramas de la curva X_o, y Z_o^* tiene el aspecto de la figura 22.

Precisamos lo anterior como sigue. Se eligen las coordenadas x,y de modo que se tengan parametrizaciones:

$t \mapsto (t^p, u(t))$

$t \mapsto (t^p, v(t))$

$t \mapsto (t^p, w(t))$

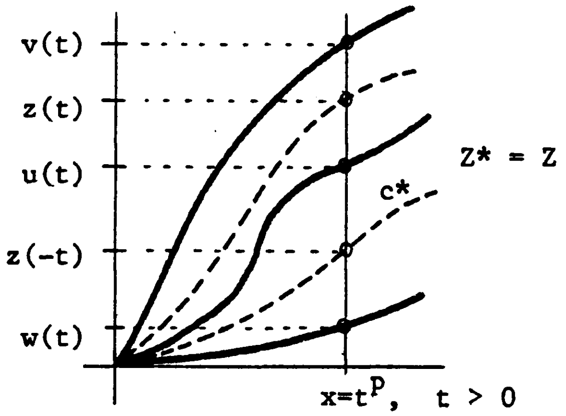


Figura 22

tales que:

$$w(t) < u(t) < v(t), \quad t > 0; \quad c^* = \{(t^p, u(t)) : t > 0\};$$

$$Z_o = \{(t^p, y) : w(t) < y < v(t),\ t > 0\},$$

(para t suficientemente pequeño). Además, como sólo nos interesan las parametrizaciones para $t > 0$, haciendo la sustitución $t = t^2$, podemos suponer que u, v y w sólo contienen potencias pares de t.

Ahora construimos un polinomio $z(t) \in \mathbb{R}[t]$ tal que para $t > 0$ suficientemente pequeño se tiene: $w(t) < z(-t) < u(t) < z(t) < v(t)$. Para ello ponemos $u = \sum_{o<n} a_n t^n$, $u_s = a_o + a_1 t + \ldots + a_s t^s$ $(s > 0)$ y de la desigualdad $w(t) < u(t) < v(t)$ resulta que para s grande, que elegimos par, será:

$$u_s - w = at^{\alpha} + \ldots, \quad v - u_s = bt^{\beta} + \ldots; \quad a > 0, \quad b > 0, \quad s \geqslant \alpha, \quad s \geqslant \beta.$$

Pongamos entonces $z(t) = u_s(t) + t^{s+1}$, y se deduce (recuérdese que u sólo contiene potencias pares de t):

$$\text{(i)} \quad z(-t) - w(t) = z(-t) - u_s(t) + u_s(t) - w(t) = -t^{s+1} + (at^{\alpha} + \ldots) = at^{\alpha} + \ldots$$

pues $s+1 > s \geqslant \alpha$,

$$\text{(ii)} \quad u(t) - z(-t) = u(t) - (u_s(-t) - t^{s+1}) = t^{s+1} + \ldots$$

$$\text{(iii)} \quad z(t) - u(t) = u_s(t) + t^{s+1} - u(t) = t^{s+1} + \ldots$$

pues $s+1$ es impar y la serie $u_s(t) - u(t)$ tiene orden par $>s$.

$$\text{(iv)} \quad v(t) - z(t) = v(t) - u_s(t) + u_s(t) - z(t) = (bt^{\beta} + \ldots) - t^{s+1} = bt^{\beta} + \ldots$$

pues $s+1 > s \geqslant \beta$. Claramente, por (i)-(iv), z cumple las condiciones deseadas.

El polinomio $z \in \mathbb{R}[t]$ define una parametrización $\phi : \mathbb{R}\{x,y\} \to \mathbb{R}\{t\}$ mediante la sustitución $x = t^p$, $y = z(t)$, y el ideal, $\ker\phi$, del germen de curva correspondiente estará generado por un elemento irreducible $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$. Como f genera un ideal real, cambia de signo en todo entorno del origen (criterio del cambio de signo), luego las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^2_o \setminus V(f)$ son $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$. Por la construcción, una de ellas, por ejemplo $\{f < 0\}$, contiene la semirrama c_o^*, y la otra contiene las otras dos. En conclusión:

$$f(t^p,v(t)) > 0, \quad f(t^p,u(t)) < 0, \quad f(t^p,w(t)) > 0$$

para $t > 0$ suficientemente pequeño.

Admitamos ahora momentáneamente el siguiente hecho:

(7.7.1) <u>Lema</u>.- *Si* $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$ *es irreducible y real, y del modo habitual ponemos* $f = \sum_{o\leq n} a_n t^n$, $f_s = \sum_{o\leq n\leq s} a_n t^n$ *para* $s \geq 0$, *entonces existe* $s_o \geq 0$ *tal que si* $s \geq s_o$, f_s *es irreducible y real.*

Aplicando este lema en nuestro caso, podemos tomar $s \geq s_o$ de manera que además: $f_s(t^p,v(t)) > 0$, $f_s(t^p,u(t)) < 0$, $f_s(t^p,w(t)) > 0$. En estas condiciones, el polinomio $h \in \mathbb{R}[x,y]$ buscado en $h = f_s$. En efecto, obviamente $c_o^* \subset \{f_s < 0\}$, ya que $f_s(t^p,u(t)) < 0$. Por otra parte, $V(f_s)$ es un germen de curva irreducible, y en virtud de los cambios de signo de f_s, una de sus semirramas debe estar contenida en

$$\{(t^p,y) : u(t) < y < v(t),\ t > 0\}$$

y la otra en:

$$\{(t^p,y) : w(t) < y < u(t),\ t > 0\},$$

de donde se deduce que una de las dos componentes conexas de $\mathbb{R}_o^2 \setminus V(f_s)$ contiene al germen $\mathbb{R}_o^2 \setminus Z_o \cup \{0\}$. De nuevo por el criterio del cambio de signo, esas dos componentes son $\{f_s > 0\}$ y $\{f_s < 0\}$, y la segunda no puede contener a $\mathbb{R}_o^2 \setminus Z_o$ pues no contiene a la semirrama $t \mapsto (t^p, v(t))$. En conclusión, $\{f_s > 0\} \supset \mathbb{R}_o^2 \setminus Z_o \cup \{0\}$, y se sigue $\{f_s \leqslant 0\} \setminus \{0\} \subset Z_o$. Esto completa la prueba, a falta de la

<u>Demostración de (7.7.1)</u>.- El resultado es conocido en el caso complejo, en el cual basta observar que la irreducibilidad de f depende de una cantidad finita de puntos de su diagrama de Newton, y eligiendo s_o suficientemente grande el diagrama correspondiente a f_s contendrá todos esos puntos (para más detalle, véase [10; chap. III, §4]). En nuestro caso, como f es real, f es también irreducible en $\mathbb{C}\{x,y\}$, y por lo anterior f_s es irreducible en $\mathbb{C}\{x,y\}$, luego irreducible y real en $\mathbb{R}\{x,y\}$.

Para terminar este §7, veamos a continuación cómo se puede obtener fácilmente mediante la separación fuerte en el plano, un lema de separación de curvas, de hecho más estricto que (7.5):

(7.8) <u>Proposición (separación fuerte de curvas)</u>.- *Sean* $A_o^1, \dots, A_o^s$ *gérmenes semianalíticos cerrados de dimensión 1 de* $\mathbb{R}_o^n$, *con* $A_o^i \cap A_o^j = \{0\}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$. *Existen entonces polinomios* $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ *tales que:*

$$A_o^i \setminus \{0\} \subset \{h_i < 0\} \subset \{h_i > 0\}, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant s$$

Demostración.- El caso general se reduce fácilmente al de que cada A_o^i sea una semirrama cerrada de un germen c_o^i de curva irreducible, y entonces la situación queda ilustrada por la figura 23. Se procede por inducción sobre n. Para $n = 2$ es una consecuencia fácil de (7.7), y el caso $n > 2$ se seguirá si encontramos una proyección lineal $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ tal que los $\pi(A_o^i)$ sean semirramas cerradas, y $\pi(A_o^i) \cap \pi(A_o^j) = \{0\}$ $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$. Ahora bien, para cualquier $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\pi(A_o^i)$ es un germen semianalítico de dimensión $\leqslant 1$, y será una semirrama cerrada cuando π sea transversal a c_o^i. Teniendo en cuenta esto, la existencia de π, y por tanto la proposición (7.8), resulta del siguiente

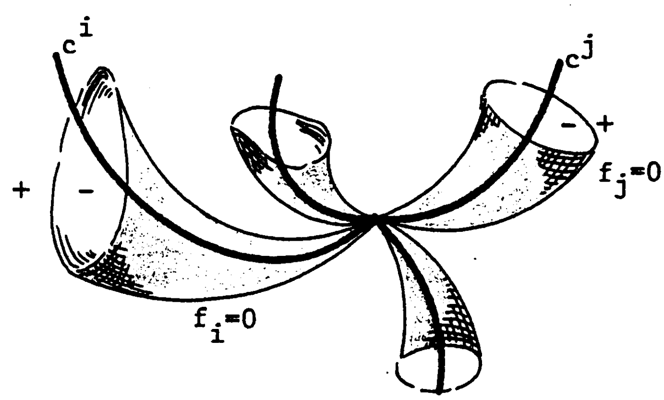


Figura 23

(7.8.1) Lema.- *Sean* A_o *y* B_o *dos semirramas de curva irreducible de* $\mathbb{R}^n_o$*,* $n > 2$. *Entonces existe* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ *tal que* $\pi(A_o) \cap \pi(B_o) = \{0\}$. *Además, puede elegirse como* π *una proyección ortogonal en cualquier dirección de un conjunto residual de* $\mathbb{P}^{n-1}$.

Demostración.- Elegimos representantes A, B de A_o, B_o en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, de modo que $A^* = A \setminus \{0\}$, $B^* = B \setminus \{0\}$ sean dos curvas analíticas lisas conexas que no se cortan. Elegimos también una sucesión convergente al origen, $\{y_s : s \geq 1\}$, de puntos de B^*. Convenimos en notar $\pi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ a la proyección ortogonal correspondiente a una dirección $a \in \mathbb{P}^{n-1}$.

Considérese para cada $s \geq 1$ la aplicación analítica $\phi_s : A^* \to \mathbb{P}^{n-1}$ dada por $x \mapsto [x-y_s] \in \mathbb{P}^{n-1}$, (figura 24). En virtud del teorema de Sard, $\phi_s(A^*)$ tiene medida nula, ya que

$$\dim \mathbb{P}^{n-1} = n-1 > 1 = \dim A^*.$$

Además, por serlo A^*, $\phi_s(A^*)$ es unión numerable de compactos, que serán diseminados por tener medida nula. Se deduce que:

$$F = \bigcup_{s\geq 1} \phi_s(A^*)$$

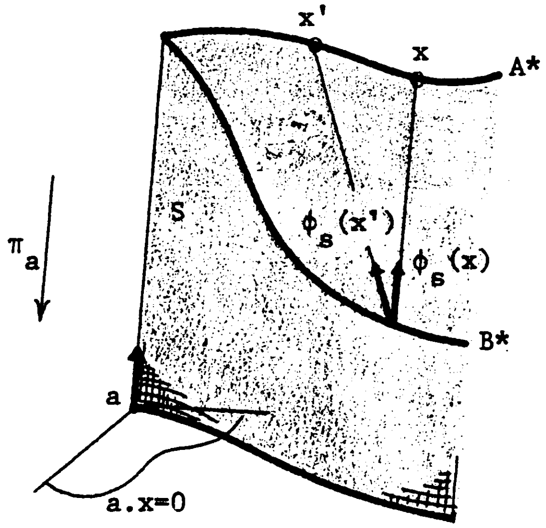


Figura 24

es unión numerable de cerrados diseminados, y su complementario $M = \mathbb{P}^{n-1} \setminus F$ es residual. Veamos en fin que si $a \in M$, podemos tomar $\pi = \pi_a$. En efecto, si $\pi_a(A_o^*) \cap \pi_a(B_o^*) \neq \emptyset$, sería $\pi_a(A_o^*) = \pi_a(B_o^*)$, luego $B_o^* \subset \pi_a^{-1}\, \pi_a(A_o^*)$. Podemos elegir como representante de este último germen el conjunto:

$$S = \{x + \bar{a}t : x \in A^*, \quad t \neq 0\}$$

(donde $\bar{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiene la dirección de a), y deducimos $B^* \cap W \subset S$ para cierto entorno W del origen. Ahora, como

$\lim_s y_s = 0$, se tendrá $y_s \in S$ para cierto $s \geq 1$, o sea:

$$y_s = x + \bar{a}t, \quad x \in A^*, \quad t \neq 0.$$

Esto último significa: $a = [x-y_s] = \phi_s(x) \in \phi_s(A^*)$.

§8. Aplicaciones, I: Funciones no negativas sobre gérmenes semianalíticos, sumas de cuadrados y lugar de denominadores

En este primer epígrafe de aplicaciones volvemos sobre algunas cuestiones relativas al problema decimoséptimo ya tratadas anteriormente.

(8.1) Proposición.- *Sea X_o un germen analítico. Si Z_o y Z_o' son gérmenes semianalíticos de X_o, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(α) $P(Z_o) \subset P(Z_o')$

(β) $Z_o \cap Z_o'$ es denso en Z_o'.

Demostración.- Si $Z_o \cap Z_o'$ no es denso en Z_o', existe una semirrama de curva irreducible $c_o^* \subset Z_o' \setminus \overline{Z}_o$ (lema de selección). Ahora, por el lema de separación (7.2), existe $h \in \mathbb{R}\{x\}$ con $c_o^* \subset \{h < 0\} \subset \mathbb{R}_o^n \setminus \overline{Z}_o$. Se concluye que h es ≥ 0 sobre Z_o, pero no sobre Z_o'. El recíproco es inmediato.

(8.2) Corolario.- *Sean X_o un germen irreducible y Z_o un germen semianalítico de X_o. Se verifica:*

(α) $P(Z_o) \subset S(X_o)$ si y sólo si $Z_o \cap X_o^*$ es denso en X_o^*.

(β) $P(Z_o) \supset S(S_o)$ si y sólo si $X_o^* \supset Z_o$.

Demostración.- Basta aplicar (8.1), recordando que $P(X_o) = P(X_o^*)$ (primera solución al problema decimoséptimo: (2.1)). Nótese además, para (β), que como X_o^* es cerrado, la condición '$Z_o \cap X_o^*$ denso en Z_o' equivale a '$X_o^* \supset Z_o$'.

Respecto a morfismos finitos, tenemos:

(8.3) Corolario.- *Sea* $\pi : Y_o \to X_o$ *un morfismo finito de gérmenes analíticos irreducibles de igual dimensión. Entonces* $S(X_o) \subset S(Y_o) \cap O[X_o]$, *y la igualdad se da si y sólo si* $\pi(Y_o^*) = X_o^*$.

Demostración.- Claramente, se verifica:

$$S(X_o) = P(X_o^*) \subset P(\pi(Y_o^*)) = P(Y_o^*) \cap O[X_o] = S(Y_o) \cap O[X_o],$$

con lo que se tiene el contenido $S(X_o) \subset S(Y_o) \cap O[X_o]$, y se ve que la igualdad es equivalente a $P(\pi(Y_o^*)) \subset P(X_o^*)$. La proposición se sigue ahora de (8.1).

(8.4) Observaciones.- (a) Los resultados anteriores son del mismo tipo que los que se prueban en el caso algebraico (véase [6] ó [20]), y la idea de las demostraciones similar. Sin embargo, no parece posible evitar para gérmenes analíticos el uso del lema de separación, mientras que para variedades algebraicas es innecesaria tal complicación.

(b) De (8.3) resulta que si $\pi : Y_o \to X_o$ es un morfismo analítico finito y birracional de gérmenes irreducibles (por ejemplo, un morfismo de normalización), entonces $\pi(Y_o^*) = X_o^*$. Nótese que en el caso complejo un morfismo finito y birracional es suprayectivo, mientras que en el caso real todo lo que se puede esperar es la anterior igualdad: Tómese como X_o el paraguas de Whitney y $\pi : Y_o \to X_o$ su normalización. Entonces Y_o tiene dimensión pura, y $\pi(Y_o) = X_o^* \subsetneq X_o$.

(c) El corolario (8.3) está relacionado con el morfismo π_* que π induce entre los espacios de órdenes de $\mathcal{O}(Y_o)$ y de $\mathcal{O}(X_o)$. Más adelante, §11, estudiaremos con detalle esta cuestión, y daremos otra caracterización, (11.9), de la 'condición de suprayectividad' $\pi(Y_o^*) = \pi(X_o^*)$.

Finalmente, obtenemos otra medida de $\mathcal{P}(X_o^*) = \mathcal{S}(X_o)$.

(8.5) <u>Proposición</u>.- *Sea* X_o *un germen irreducible de dimensión* d, *cuyo lugar de dimensión* $e < d$ *es no vacío. Entonces existen elementos* $f \in \mathcal{S}(X_o)$ *tales que* $\dim \mathcal{D}(f) \geqslant e$.

<u>Demostración</u>.- El germen $\text{reg}_e\, X_o$ es semianalítico, y no vacío por hipótesis (pues $\overline{\text{reg}_e\, X_o}$ es el lugar de dimensión e de X_o), luego en virtud del lema de selección, contiene una semirrama c_o^* de curva irreducible. Ahora, como $\text{reg}_e\, X_o$ no corta a X_o^*, por el lema de separación existe $f \in \mathbb{R}\{x\}$ con $c_o^* \subset \{f < 0\} \subset \mathbb{R}_o^n \setminus X_o^*$. Se deduce que f es >0 sobre X_o^*, luego está en $\mathcal{S}(X_o)$; pero por otra parte $\mathcal{D}(f) \supset \{f < 0\}$ y resulta:

$$\dim \mathcal{D}(f) \geqslant \dim \{f < 0\} \geqslant \dim (\{f < 0\} \cap \text{reg}_e\, X_o) = e,$$

pues $\{f < 0\} \cap \text{reg}_e\, X_o$ es un abierto no vacío de $\text{reg}_e\, X_o$.

La proposición anterior proporciona el siguiente resultado cualitativo:

(8.6) Corolario.- *Si* X_o *es un germen irreducible que no tiene dimensión pura, entonces* $S(X_o) \neq S[X_o]$.

§9. Aplicaciones, II: Descripción del lugar de máxima dimensión de una superficie mediante desigualdades simultáneas

En esta sección estudiamos el problema de describir el lugar de dimensión máxima de un germen semianalítico, de un conjunto semianalítico o de un conjunto semialgebraico, mediante un solo sistema de desigualdades simultáneas. Conseguimos soluciones para superficies: corolario (9.4) y proposiciones (9.5), (9.9). Nuestro método se basa en la siguiente modificación del lema de separación (7.2):

(9.1) Lema.- *Sean* Y *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$, *cuyo germen en el origen,* Y_o, *es semianalítico cerrado, y* $B_o \subset \mathbb{R}^n_o \setminus Y_o$ *un germen semianalítico de dimensión 1. Entonces, dados un entorno* W *de* $0 \in \mathbb{R}^n$ *y una cantidad finita de puntos* $a_1, \ldots, a_r$ *distintos del origen, existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *tal que:*

$$B_o \subset \{h < 0\}; \quad \{h < 0\} \subset W \setminus Y; \quad h(a_i) > 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Demostración.- Distinguiremos primero un caso particular:

Caso I: B_o es una semirrama abierta de un germen de curva irreducible c_o. Se procede por inducción sobre el número e de ex plosiones necesarias para resolver la singularidad de c_o, y de hecho probaremos el enunciado con la condición adicional

$$\{h \leqslant 0\} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n_o \setminus A_o,$$

siendo A_o un germen semianalítico de dimensión 1, con $B_o \subset \mathbb{R}^n_o \setminus A_o$.

Si $e = 0$, el germen c_o es liso, y basta aplicar la separación fuerte (7.6) con $Z = \mathbb{R}^n \setminus Y \cup A$ (eligiendo un representante A de A_o), $U = W \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Supuesto ahora demostrado para $e-1$ explosiones, podemos elegir coordenadas en $\mathbb{R}^n$ como en la prueba del caso II de (7.2), con la condición adicional de que los puntos $\{a_1, \ldots, a_r\}$ no estén en $\{x_1 = 0\}$, y se concluye como en dicha prueba.

<u>Caso general</u>. El germen B_o es una unión de semirramas abiertas de germen de curva irreducible. Supongamos que $c^1_o, \ldots, c^s_o$ son esas semirramas, y se tendrá:

$$c^i_o \subset \mathbb{R}^n_o \setminus Y_o \cup \bigcup_{j \neq i} c^i_o.$$

Mediante el caso I, con $A_o = \bigcup_{j \neq i} c^i_o$, se obtiene un polinomio $h_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que:

$$c^i_o \subset \{h_i < 0\} \subset \{h_i \leqslant 0\} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n_o \setminus \bigcup_{j \neq i} c^i_o;$$

$$\{h_i < 0\} \subset W \setminus Y; \qquad h_i(a_j) > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Hecho esto para $i=1, \ldots, s$, el polinomio $h = h_1 \ldots h_s \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_s]$ es la solución. En efecto, claramente $B_o = \bigcup_{i=1}^{s} c^i_o \subset \{h < 0\}$; $h(a_j) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant r$, y por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^n$ y $h(x) < 0$, entonces $h_i(x) < 0$ para algún i, con lo que $x \in W \setminus Y$.

(9.2) Observaciones.- El lema anterior pone una vez más de manifiesto la influencia de la elección de coordenadas para explotar el origen al resolver el germen de curva en consideración. Aunque no las utilizaremos en lo sucesivo, puede ser interesante señalar las dos posibles generalizaciones de (9.1) siguientes: el mismo enunciado, sustituyendo $h(a_j) > 0$, $1 \leq i \leq r$ por la condición $h|K > 0$ donde

(a) K es un conjunto numerable que no contiene al origen, ó

(b) K es un compacto que no contiene al origen.

La elección adecuada de coordenadas es posible: en (a), porque el conjunto de hiperplanos que no contienen ningún punto entre una cantidad numerable es residual; en (b), porque el conjunto de hiperplanos que no cortan a un compacto es abierto y no vacío.

(9.3) Sea X un conjunto semianalítico de un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Como es habitual, notamos X^* al conjunto de los puntos $x \in X$ de dimensión máxima. Se verifica:

(i) $(\overline{X})^* = \overline{X^*}$ (ii) $(\overline{X})^* \cap X = X^*$

(Es inmediato observando que $(\overline{X})^* = \{x \in \overline{X} : \dim X_x = \dim X\}$).

Deducimos ahora fácilmente de (9.1);

(9.4) Corolario.- *Sea* $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ *un germen semianalítico de dimensión 2 (en particular, un germen de superficie analítica). Entonces existe un polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ *tal que* $X^*_o = X_o \cap \{h \geq 0\}$.

Demostración.- En virtud de (9.3), sustituyendo X_o por $\overline{X}_o$ podemos suponer X_o cerrado, con lo que X_o^* es también cerrado, y por el lema (9.1) aplicado a $X_o \setminus X_o^*$, que tiene dimensión 1, existe un polinomio $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ tal que $X_o \setminus X_o^* \subset \{h < 0\}$ y $X_o^* \subset \{h \geq 0\}$. Así: $X_o^* = X_o \cap \{h \geq 0\}$.

En el caso analítico global se tiene lo siguiente:

(9.5) Proposición.- *Sea* X *un conjunto semianalítico cerrado de dimensión 2 (en particular, una superficie analítica) de un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Supóngase que el conjunto* Σ *de los puntos* $x \in X$ *para los cuales el germen* X_x *no es de dimensión pura, es un conjunto finito. Entonces existen dos funciones* g *y* h, *analíticas en* Ω, *tales que* $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ h \geq 0\}$.

Demostración.- $B = X \setminus X^*$ es un conjunto semianalítico de dimensión ≤ 1 de Ω, y es claro que $\Sigma = X^* \cap \overline{B} = \overline{B} \setminus B$. Por la hipótesis, $\Sigma = \{a_1,\dots,a_r\}$. Mediante (9.1) para cada germen B_{a_i}, con $Y = X^*$ (que es cerrado por serlo X), encontramos polinomios $h_i \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ tales que:

$$B_{a_i} \subset \{h_i < 0\}; \quad h_i | X^* \geq 0; \quad h_i(a_j) > 0, \quad j \neq i$$

Sea ahora $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ el producto de los $h_1,\dots,h_r$, y considérese el conjunto

$$F = B \setminus \{h < 0\} \subset \Omega$$

Como F es cerrado en B, se tiene: $\overline{F} \subset F \cup (\overline{B}\ \ B) = F \cup \{a_1,\dots,a_r\}$, y afirmamos que, por la construcción, ningún

a_i es adherente a F. En efecto, supóngase por ejemplo que a_1 es el límite de una sucesión $\{z_p\}_{p\geq 1}$ de puntos de F. Puesto que $h_j(a_1) > 0$ si $j \neq 1$, podemos suponer $h_j(z_p) > 0$ si $j \neq 1$, $p \geq 1$. Ahora bien, puesto que $z_p \in F$ es $h(z_p) \geq 0$, luego se sigue $h_1(z_p) \geq 0$ para cada $p \geq 1$. Esto contradice el contenido $B_{a_1} \subset \{h_1 < 0\}$. En suma, F es cerrado en Ω, y no corta a X^*. Necesitamos en este momento el siguiente lema (véase [46; p. 13]):

(9.5.1) <u>Lema</u>.- *Si* C_1 *y* C_2 *son dos cerrados disjuntos de un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$*, existe una función analítica* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *que es* >0 *sobre* C_1 *y* <0 *sobre* C_2.

En nuestra situación tomando $C_1 = X^*$, $C_2 = F$, resulta en fin: $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ h \geq 0\}$.

Veamos a continuación algunos casos particulares de (9.5).

(9.6) <u>Corolario</u>.- *Sea* X *una superficie analítica de un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Si el conjunto de puntos de no coherencia de* X *es finito (en particular, si* X *tiene una cantidad finita de puntos singulares de dimensión 2), existen dos funciones* g *y* h*, analíticas en* Ω*, tales que:* $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ h \geq 0\}$.

(9.7) <u>Corolario</u>.- *Sea* X *un conjunto semianalítico de dimensión 2 (en particular, una superficie analítica) de un abierto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Si uno de los conjuntos* X^* *ó* $X \setminus X^*$ *es acotado, existen dos funciones* g *y* h*, analíticas en* Ω*, tales que* $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ h \geq 0\}$.

Demostración.- Probaremos que en ambos casos el conjunto Σ de los puntos $x \in \overline{X}$, cuyo germen $\overline{X}_x$ no es de dimensión pura, es finito, y el resultado se seguirá de (9.5). Obsérvese en primer lugar que $\dim \Sigma \leqslant 0$, pues $\Sigma = \overline{B} \setminus B$, y el semianalítico $B = \overline{X} \setminus (\overline{X})^*$ tiene dimensión $\leqslant 1$. En consecuencia, Σ es discreto, y bastará ver que es acotado. Ahora bien:

$$\Sigma \subset (\overline{X})^* = \overline{X^*},$$

y si X^* está acotado, lo está $\overline{X^*}$ y por tanto Σ, luego este caso está resuelto. Por otra parte:

$$\Sigma \subset \overline{B} \subset \overline{\overline{X} \setminus (\overline{X})^*} = \overline{\overline{X} \setminus \overline{X^*}} \subset \overline{X \setminus X^*}$$

y si $X \setminus X^*$ está acotado, lo está $\overline{X \setminus X^*}$ y por tanto Σ, lo que prueba el otro caso.

Obtendremos finalmente la solución global en el caso semialgebraico. Para ello emplearemos algunos resultados de Łojasiewicz que recordamos brevemente.

(9.8) Conjuntos localmente semialgebraicos del espacio proyectivo [37; p. 114 y siguientes].- Un conjunto E del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ se llama localmente semialgebraico si cada punto $x \in \mathbb{P}^n$ tiene un entorno abierto Ω tal que $E \cap \Omega$ es semialgebraico en una carta afín de $\mathbb{P}^n$ que lo contenga.

La unión, la intersección y la diferencia de dos conjuntos localmente semialgebraicos son conjuntos localmente semialgebraicos. También lo es la adherencia (en $\mathbb{P}^n$) de un conjunto localmente semialgebraico. Respecto de la dimensión, siendo una cuestión local, nada hay que decir. Destaquemos por último un resultado importante.

Teorema.- *Sean* U *una carta afín de* $\mathbb{P}^n$ *y* $E \subset U$. *Entonces,* E *es semialgebraico en* U *si y sólo si es localmente semialgebraico en* $\mathbb{P}^n$.

Veamos ya ahora la solución que antes anunciábamos:

(9.9) Proposición.- *Sea* X *un conjunto semialgebraico de dimensión 2 de* $\mathbb{R}^n$ *(en particular, una superficie algebraica). Entonces existen dos polinomios* $g,h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *tales que:* $X^* = X \cap \{g \geqslant 0,\ h \geqslant 0\}$.

Demostración.- Como (9.3) es válido para conjuntos semialgebraicos, supondremos que X es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Consideramos $\mathbb{R}^n = U \subset \mathbb{P}^n$, tomando coordenadas homogéneas $(u_0,u_1,\dots,u_n)$ en $\mathbb{P}^n$ y afines $x_1 = \frac{u_1}{u_0},\dots, x_n = \frac{u_n}{u_0}$ en $U = \mathbb{P}^n \setminus H$, $H = \{u_0 = 0\}$. En lo sucesivo todas las adherencias son en $\mathbb{P}^n$.

En virtud del teorema (9.8), los conjuntos X, X^* son localmente algebraicos en $\mathbb{P}^n$, y por tanto, también lo son $B = X \setminus X^*$ y $\overline{B}$; nótese además que $\dim \overline{B} = \dim B = 1$. Se deduce que $\overline{\overline{B} \setminus B}$ es localmente algebraico de dimensión cero, esto es, discreto. Como es compacto (un cerrado de $\mathbb{P}^n$), debe ser finito, luego coincide con $\overline{B} \setminus B$. Será:

$$\overline{B} \setminus B = \{a_1,\dots,a_s\}.$$

Ahora, las coordenadas pueden elegirse de modo que estos s puntos no estén en $H' = \{u_1 = 0\}$, y se tenga:

$$\dim H' \cap X < \dim X, \quad \dim H' \cap B < \dim B,$$

(esto último significa que $H' \cap B$ es finito). Por último, notaremos U' a la carta afín correspondiente a H' : $U' = \mathbb{P}^n \setminus H'$, con coordenadas $y_1 = \frac{u_o}{u_1}$, $y_2 = \frac{u_2}{u_1}, \ldots, y_n = \frac{u_n}{u_1}$. Procederemos en varias etapas.

I). Pongamos $B' = (\overline{X} \setminus \overline{X}^*) \cap U'$. Existe un polinomio $h' \in \mathbb{R}[y_1,\ldots,y_n]$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{s} B'_{a_i} \subset \{h' < 0\}; \qquad h'|U' \cap \overline{X^*} > 0$$

Para verlo, aplicaremos el lema (9.1) en la carta afín U'. Esto es posible porque $B' \cap \overline{X^*} = \emptyset$, y como $B' \subset \overline{B}$, es $\dim B' \leqslant 1$. Así, por (9.1), existen polinomios $h_1,\ldots,h_s \in \mathbb{R}[y_1,\ldots,y_n]$ que cumplen:

$$B'_{a_i} \subset \{h_i < 0\}, \quad h_i|U' \cap \overline{X^*} \geqslant 0; \quad h_i(a_j) > 0, \quad j \neq i$$

Entonces $h' = h_1 \ldots h_s$ es el polinomio buscado. En efecto, $B'_{a_i} \subset \{h' < 0\}$, pues $B'_{a_i} \subset \{h_i < 0\}$, y si $j \neq i$, como $h_j(a_i) > 0$, es $B'_{a_i} \subset \{h_j > 0\}$. Por otra parte, la condición $h'|U' \cap \overline{X^*} \geqslant 0$ es evidente.

II). Sea $H \in \mathbb{R}[u_o,u_1,\ldots,u_n]$ el polinomio homogéneo correspondiente a h', esto es: $h' = H(y_1,1,y_2,\ldots,y_n)$, y pongamos

$$h = x_1^d H(1,x_1,\ldots,x_n), \qquad d = \text{grado } (H).$$

Entonces $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ es $\geqslant 0$ sobre X^*.

En efecto, si no, $X^* \cap \{h < 0\} \neq \emptyset$. Ahora bien, se tomó H' de modo que $\dim H' \cap X < \dim X$, luego $H' \cap X$ tiene interior vacío en X^*. Se deduce que el conjunto $X^* \cap \{h < 0\}$ tiene algún punto $x = (x_1,\dots,x_n) \notin H'$. Así, puesto que $x_1 \neq 0$:

$$0 > h(x) = x_1^{2d}\, H(\frac{1}{x_1}, 1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}) = x_1^{2d} h'(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1})$$

y como $(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1})$ son las coordenadas de $x \in U'$ en esta carta afín, resulta: $h'(x) < 0$, siendo x un punto de $U' \cap \overline{X^*}$. Esto es contrario a la elección de h'.

III). El conjunto semialgebraico $K = X \setminus X^* \cup \{h < 0\} \subset U$ es compacto.

El conjunto $\overline{B} = \overline{X \setminus X^*}$ es un compacto que contiene a K, por lo que será suficiente ver que K es cerrado en $\overline{B}$. Además, $K = B \setminus \{h < 0\}$, y es pues cerrado en B. En suma, ya que $\overline{B} \setminus B = \{a_1,\dots,a_s\}$, hay que comprobar que $a_1,\dots,a_s$ no son adherentes a K. Supongamos pues por ejemplo que $a_1 \in \overline{K}$. Entonces a_1 es el límite de una sucesión $\{z_p\}_{p\geq 1}$ de puntos de K, que podemos suponer también de U', pues $a_1 \in U'$. Que $z_p \in K \cap U'$ significa: $z_p \in B \cap U' \subset B'$ (pues $X \setminus X^* \subset \overline{X} \setminus \overline{X^*}$) y $h'(z_p) \geqslant 0$ (esto último por el argumento utilizado en II). Recuérdese ahora que por construcción, $h = h_1 \dots h_r$ con $h_i(a_1) > 0$, si $i \neq 1$, por lo que para p suficientemente grande se tendrá $h_i(z_p) > 0$ si $i \neq 1$, y por fuerza $h_1(z_p) \geqslant 0$. Pero esto contradice otra de las condiciones sobre $_1$, según la cual $B'_{a_1} \subset \{h_1 < 0\}$.

IV) Los conjuntos semialgebraicos K, X^* de $\mathbb{R}^n$ son cerrados isjuntos, y el primero de ellos compacto. Entonces, aplicamos el si uiente

(9.9.1) <u>Lema de separación de Mostowski</u>.- *Si* C_1 *y* C_2 *son dos cerrados semialgebraicos de* $\mathbb{R}^n$ *y uno de ellos es compacto, existe un polinomio* $g \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ *que es* >0 *sobre* C_1 *y* <0 *sobre* C_2.

Como decimos, con $C_1 = X^*$ y $C_2 = K$ obtenemos el polinomio g, y se concluye por fin: $X^* = X \cap \{g \geq 0,\ \ h \geq 0\}$.

(9.10) <u>Observaciones</u>.- (a) El lema de separación (9.9.1) aparece mencionado por primera vez en [39; p. 258]. Como no se incluye prueba, ni hemos encontrado ninguna en otro lugar de la literatura, damos aquí la

<u>Demostración de (9.9.1)</u>.- Si, por ejemplo, C_2 es compacto, existen una cantidad finita de puntos $a_1,\dots,a_s \in C_2$ y números $0 < \varepsilon_i < \eta_i$, $1 \leq i \leq s$ tales que:

$$C_2 \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i}(a_i) \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_{\eta_i}(a_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus C_1$$

(notamos $B_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$ a la bola abierta de centro a y radio δ). Construiremos el polinomio buscado $g \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ por recurrencia sobre s. Si $s = 1$, es inmediato tomando $g_1 = \|x-a_1\|^2 - \eta_1^2$. Supongamos pues $C_2' = C_2 \cap \bigcup_{i=1}^{s-1} \overline{B_{\varepsilon_i}(a_i)} \not\subset B_{\eta_n}(a_n)$, y que se tiene un olinomio G que es >0 sobre C_1 y <0 sobre C_2'. Consideramos $_n = \|x-a_n\|^2 - \eta_n^2$, y afirmamos que existen un entero $p \geq 0$ y una onstante $A > 0$ tales que

$$g = g_n(x) + A(1 + \|x-a_n\|^2)^p G(x) \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

s >0 sobre C_1 y <0 sobre C_2. En efecto, claramente se cumplirá lo primero, así que veamos cómo elegir p y A para lo segundo. Como $C_2 \subset B_{\varepsilon_n}(a_n) \cup C_2'$, impondremos dos condiciones:

(i) Si $x \in B_{\varepsilon_n}(a_n)$, notando B al máximo de $|G|$ sobre $\overline{B_{\varepsilon_n}(a_n)}$, se tiene $g(x) \leqslant \varepsilon_n^2 - \eta_n^2 + AB(1 + \varepsilon_n^2)^p$. Así, para que $g(x) < 0$, hay que elegir p y A de modo que: $A < \alpha/(1 + \varepsilon_n^2)^p$, donde $\alpha = (\eta_n^2 - \varepsilon_n^2)/B > 0$ ($\alpha = +\infty$ si $B = 0$).

(ii) Si $x \in C_2'$, notando A', B' y δ a los máximos de $|g_n|$, $|G|$ y $1 + \|x-a_n\|^2$ en C_2', se tiene: $g(x) \leqslant A' + AB'\delta^p$. En consecuencia, como $B' < 0$, para que $g(x) < 0$, hay que elegir p y A de modo que: $\beta/\delta^p < A$, donde $\beta = -A'/B' \geqslant 0$.

Resulta de (i) y (ii) que la elección siempre es posible si $\delta/(1 + \varepsilon_n^2) > 1$, pues en este caso para p grande $\beta/\alpha < (\delta/(1 + \varepsilon_n^2))^p$, de donde $\beta/\delta^p < \alpha/(1 + \varepsilon_n^2)^p$ y se puede escoger A. Para terminar obsérvese solamente que si $\delta/(1 + \varepsilon_n^2) \leqslant 1$, entonces $\max\{\|x-a_n\| : x \in C_2'\} \leqslant \varepsilon_n$, luego $C_2' \subset B_{\varepsilon_n}(a_n)$ y toda la cuestión es trivial.

(b). La proposición (9.9) resuelve afirmativamente, al menos para superficies, un problema planteado en 20 : Si X es una superficie algebraica de $\mathbb{R}^n$, existen tres polinomios $f,g,h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ tales que $X^* = \{f \geqslant 0,\ g \geqslant 0,\ h \geqslant 0\}$.

En efecto, se eligen g y h mediante (9.9), y si f es una ecuación de X (esto es, $X = \{f = 0\}$), se verifica $* = \{-f^2 \geqslant 0,\ g \geqslant 0,\ h \geqslant 0\}$.

§10. Aplicaciones, III: Selección de hipersuperficies y dimensión de Krull de un álgebra analítica real.

Probaremos en este epígrafe la versión analítica del resultado algebraico según el cual la dimensión de Krull del anillo de coordenadas de una variedad algebraica real se puede calcular mediante cadenas de ideales primos reales. Este resultado se encuentra probado en la literatura de muchas diferentes maneras (véanse [9], [13], y también [19], que contiene un teorema más general). Para establecerlo en el caso analítico utilizaremos la siguiente generalización del lema de selección de una curva:

(10.1) Proposición (lema de selección de una hipersuperficie).- *Sea* X_o *un germen analítico de dimensión* $d \geq 2$. *Si* Z_o *es un germen abierto semianalítico de* X_o^*, *existe un germen algebraico* $Y_o \subset X_o$ *(esto es,* $Y_o = V(h) \cap X_o$ *para cierto polinomio* $h \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$*) tal que* $\dim Y_o \cap Z_o = d-1$.

Demostración.- Procederemos en dos etapas, resolviendo primero un

Caso particular: $X_o = \mathbb{R}^d_o$. Se utiliza inducción sobre el mínimo entero $e \geq 0$ tal que existe un germen de curva $c_o \subset \mathbb{R}^d_o$ cuya singularidad se resuelve con e explosiones, y con una de sus semirramas c_o^* contenida en Z_o (este mínimo existe en virtud del lema de selección).

Supongamos $e = 0$. Entonces c_o es lisa, y por el lema de eparación fuerte (7.6), existe un polinomio

$$h = a(x_1^2+2\varepsilon x_1)^{p+2} + \sum_{i=2}^{n} (x_i-h_i(x_1))^2 \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

tal que $V(h) \setminus \{0\} \subset Z_o$ y $c_o^* \subset \{h < 0\}$. Se trata pues de probar que $\dim V(h) = d$. Ahora bien, en cada entorno W del origen en $\mathbb{R}^d$ hay puntos $\neq 0$ en los que h es positiva (evidente) y hay puntos $\neq 0$ en los que h es negativa (por contener $\{h < 0\}$ la semirrama c_o^*). Como $d \geq 2$, $W \setminus \{0\}$ es conexo y en W habrá puntos en los que h se anula. Sea $x \in W \setminus \{0\}$ un cero de h, con $|x_1| < \varepsilon$. Escribiendo

$$h = a\ (x_1+\varepsilon)^2-\varepsilon^2\ {}^{p+2} + \sum_{i=2}^{n} (x_i-h_i(x_1))^2$$

se aprecia que para que $h(x) = 0$ debe ser $x_i \neq h_i(x_1)$ para algún $i=2,\dots,n$, y derivando:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = 2(x_i-h_i(x_1))h_i'(x_1)$$

Ahora observamos que si fuera $x_1 = 0$, de $h(x) = 0$ resultaría $\sum_{i=2}^{n} x_i^2 = 0$, esto es $x = 0$, y estamos suponiendo $x \neq 0$. Así $x_1 \neq 0$, y, si x está suficientemente cerca del origen, $h_i'(x_1) \neq 0$, con lo que $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Esto muestra que x es un punto regular de dimensión $d-1$ de $\{h = 0\}$. En suma, $\dim V(h) = d-1$ como se pretendía.

Probado ya para $e = 0$, sea $e > 0$ y cierto el resultado para menos de e explosiones. Como en ocasiones anteriores, consideramos coordenadas en $\mathbb{R}^n$ de modo que $x_1 = 0$ sea transversal a c_o y la explosión $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_1'x_2' + a_2x_1' \\ \vdots \\ x_n = x_1'x_n' + a_nx_1' \end{cases}$$

donde $(1,a_2,\ldots,a_n)$ es la dirección de la tangente a c_o. Sea c_o' la transformada estricta de c_o, que se resolverá con e-1 explosiones, y una de cuyas semirramas estará contenida en el semianalítico abierto $Z' = \pi^{-1}(Z) \cap \{x_1' \neq 0\}$ (Z es un representante adecuado de Z_o). Por la hipótesis de inducción para Z_o', existe un polinomio $h' \in \mathbb{R}[x_1',\ldots,x_n']$ tal que si $Y_o' = V(h')$, es $\dim Y_o' \cap Z_o' = d-1$. Elegimos ahora $s \geqslant 0$ tal que $h = x_1^s h'(x_1, \frac{x_2}{x_1} - a_2, \ldots, \frac{x_n}{x_1} - a_n) \in$ $\in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ y se tiene: $\dim Y_o \cap Z_o = d-1$, donde $Y_o = V(h)$, ya que $Z \cap \{h = 0,\ x_1 \neq 0\} = \pi(Z' \cap \{h' = 0\})$.

<u>Caso general: $X_o \subset \mathbb{R}^n_o$ tiene dimensión $d < n$</u>. Claramente podemos limitarnos a que X_o sea irreducible. Entonces, aplicando el teorema de parametrización local (pues un cambio lineal no afecta al enunciado), sean $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ la proyección sobre las d primeras coordenadas, U, X, δ, $W = \pi(U)$ y W^* como en dicho teorema, (0.2.b). Nos interesa aquí destacar solamente:

(i) $\pi|X : X \to W$ es propia y $\pi^{-1}(0) \cap X = \{0\}$.

(ii) $X \setminus \{\delta = 0\}$ es denso en X^*

(iii) $\pi|X \setminus \{\delta = 0\} : X \setminus \{\delta = 0\} \to W^* \setminus \{\delta = 0\}$ es homeomorfismo local.

Ahora, por (ii), el germen semianalítico $Z_o \setminus V(\delta)$ es no vacío, y elegimos un conjunto semianalítico $Z^* \subset X \setminus \{\delta = 0\}$ de U que lo represente; claramente, $\dim Z^*_o = d$.

Por (0.7), (0.12) el germen $\pi(Z^*_o)$ es semianalítico de dimensión d, y coincide con $\pi(Z^*)_o$. Se deduce que el interior del germen $\pi(Z^*)_o$ es no vacío, y podemos pues aplicar el caso particular que establecimos anteriormente. Resulta que existe un polinomio $h \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$ tal que $\dim V(h) \cap \pi(Z^*)_o = d-1$. En fin, si ponemos $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$, se tiene $\dim Y_o \cap Z_o = d-1$. En efecto, como $h \neq 0$, $\dim Y_o \cap Z_o < d$. Por otra parte, π induce un homeomorfismo local de $Y \cap Z^*$ sobre $\{h = 0\} \cap \pi(Z^*)$, con lo que $\dim Y_o \cap Z_o \geqslant \dim Y_o \cap Z_o \setminus V(\delta) = \dim Y_o \cap Z^*_o = d-1$.

Una vez demostrado el lema anterior, obtenemos

(10.2) <u>Proposición</u>.- *Sea* A *un álgebra analítica real de dimensión* d. *Entonces existen cadenas de ideales primos reales de* A $p_o \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_d$, *de longitud* d.

<u>Demostración</u>.- Sea p_o un ideal primo con $\dim A/p_o = \dim A$: Como A es real, el ideal p_o es también real, y $A/p_o = \mathcal{O}[X_o]$ para algún germen analítico irreducible X_o de dimensión $=\dim A/p_o = \dim A = d$. En virtud de (10.1), existe un germen analítico $Y_o \subset X_o$ de dimensión $d-1$. Eligiendo una componente irreducible de Y_o, obtenemos un ideal primo real $p_1 \supset p_o$, (pues $V(p_1) \subset Y_o \subset X_o = V(p_o)$) de altura 1 en A/p_o. Repitiendo el argumento con A/p_1, etc., se obtiene la cadena de ideales primos reales buscada.

Finalmente, resolvemos una cuestión comentada en los prelimi nares, (0.8).

(10.3) Corolario.- *Sean* X_o *un germen irreducible de dimensión* d, *y* $\tilde{X}_o$ *su complexificación. Son equivalentes:*

(α) $\dim \mathbb{R}^n_o \cap \operatorname{sing} \tilde{X}_o < d-r$.

(β) Para cada ideal primo real p *de* $\mathcal{O}[X_o]$ *de altura* r, *el anillo local* $\mathcal{O}[X_o]_p$ *es regular.*

Demostración.- Sabemos que (α) equivale a (β) formulado para cada ideal primo real de altura $\leqslant r$, (0.8.4), lo que trivialmente implica (β). Recíprocamente, si p es un ideal primo real de $\mathcal{O}[X_o]$ de altura e $\leqslant$ r, aplicando (10.2) a $\mathcal{O}[X_o]/p$, encontramos un ideal primo real de $\mathcal{O}[X_o]$, $p' \supset p$ de altura exactamente r. Entonces, si se cumple (β), $\mathcal{O}[X_o]_{p'}$ es regular, y volviendo a localizar por $\mathcal{O}[X_o]_{p'}$, resulta que $\mathcal{O}[X_o]_p$ es regular.

§11. Aplicaciones, IV: El espacio de órdenes de un germen analítico irreducible.

Estudiamos en esta sección algunas propiedades especiales de os órdenes del cuerpo de funciones de un germen analítico. En el ca o de curvas, la descripción es fácil, pues se tiene la siguiente

(11.1) Proposición.- *El cuerpo de funciones* $\mathcal{O}(X_o)$ *de un germen de curva tiene exactamente dos órdenes. Estos dos órdenes pueden describirse intrínsecamente como sigue: sean* c^1_o *y* c^2_o *las dos semirramas abiertas de* X_o. *Uno de los órdenes es*

'$f \in \mathcal{O}(X_o)$ *es positivo si* $\{f > 0\} \supset c_o^1$'

y el otro

'$f \in \mathcal{O}(X_o)$ *es positivo si* $\{f > 0\} \supset c_o^2$'

Demostración.- Como sabemos, la normalización de X_o muestra que $\mathcal{O}(X_o)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones de $\mathbb{R}\{t\}$, y sabemos que este cuerpo tiene dos órdenes, determinados por las condiciones $t > 0$ y $t < 0$ (nótese que éste es un caso particular de la propia proposición). Por otra parte, es claro que las dos condiciones del enunciado definen dos órdenes, que son distintos en virtud del lema de separación de curvas (7.5).

Así pues, para curvas la situación es muy sencilla. Pero cuando la dimensión es $\geqslant 2$, cambia totalmente. Para formular adecuadamente nuestros resultados, recordemos primero algunas generalidades sobre:

(11.2) El espacio de órdenes de un cuerpo real [45; §6].- Si K es un cuerpo real, el conjunto Ω de todos sus órdenes se dota de la topología de Harrison, definida por la sub-base de Harrison.

$$H(f) = \{\alpha \in \Omega : f \in \alpha\}, \quad f \in A \setminus \{0\}$$

donde A es cualquier subanillo de K, cuyo cuerpo de fracciones sea el propio K. A esta sub-base, corresponde la base de Harrison

$$H(f_1,\dots,f_r) = \{\alpha \in \Omega : f_1 \in \alpha,\dots,f_r \in \alpha\}$$

on $f_1,\dots,f_r \in A \setminus \{0\}$. Claramente,

$$\Omega \setminus H(f_1,\dots,f_r) = H(-f_1) \cup \dots \cup H(-f_r),$$

on lo que los abiertos de esta base son también cerrados (en particular, Ω es un espacio totalmente disconexo).

Se puede definir una inmersión cerrada $\Omega \to \{-1,+1\}^K$, donde en el segundo espacio se considera la topología producto de la discreta. En consecuencia Ω es un espacio compacto y Hausdorff, de cardinal $\leqslant 2^{\text{card}.K}$.

En lo sucesivo, consideramos un germen analítico irreducible X_o de dimensión $d \geqslant 2$, y el espacio de órdenes Ω de su cuerpo de funciones (esto es, con las notaciones de (11.2), $K = \mathcal{O}(X_o)$, $A = \mathcal{O}[X_o]$).

(11.3) <u>Definición</u>.- *Un orden* $\alpha \in \Omega$ *se llama central si existe una semirrama* $c_o^* \subset X_o$ *de un germen de curva irreducible tal que si* $f \in \mathcal{O}[X_o]$ *es* >0 *sobre* c_o^**, entonces* f *es positivo en* α*. Diremos en este caso que* α *está centrado en* c_o^*.

Dos órdenes centrados en semirramas distintas son distintos a su vez, pues por el lema de separación de curvas (7.5) existe una función $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que es >0 sobre una de las semirramas (luego positiva en el orden correspondiente) y <0 sobre la otra (luego negativa en el otro orden). Respecto a la existencia de órdenes centrados en una semirrama dada, tenemos:

(11.4) <u>Proposición</u>.- *Sea* c_o^* *una semirrama abierta de curva irreducible. Es condición necesaria y suficiente para que exista un orden centrado en* c_o^**, que* c_o^* *esté contenida en* X_o^*.

Demostración.- Condición necesaria: Supongamos que $\alpha \in \Omega$ está centrado en c_o^*. Si $c_o^* \not\subset X_o^*$, tiene que ser $c_o^* \subset X_o \setminus X_o^*$ y por el lema de separación (7.2) existe $f \in \mathcal{O}[X_o]$, > 0 sobre c_o^* y <0 sobre X_o^*. Se deduce de lo primero que $f \in \alpha$, y de lo segundo, que $-f \in \mathcal{S}(X_o)$ (por (2.1)). Pero $\mathcal{S}(X_o) \subset \alpha$, y se tiene una contradicción.

Condición suficiente: Si $c_o^* \subset X_o^*$, aplicaremos el criterio de Serre al conjunto S de los elementos $f \in \mathcal{O}[X_o]$ que son >0 sobre c_o^*. Hay que ver que si $f_1,\dots,f_r \in S$ y

$$0 = g_1^2 f_1 + \dots + g_r^2 f_r,$$

entonces $g_1 = \dots = g_r = 0$. Pero, por el mismo criterio de Serre, esto equivale a que exista un orden en $\mathcal{O}[X_o]$ en el que $f_1,\dots,f_r$ son positivos. Ahora bien, $c_o^* \subset \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \cap X_o^*$, luego $\{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \cap X_o^* \neq \emptyset$ y de (1.2) deducimos que $f_1,\dots,f_r$ son simultáneamente positivos en algún orden, como se quería.

En lo que sigue, si Z_o es un germen semianalítico de X_o^*, notaremos Ω^{Z_o} a la colección de órdenes de Ω centrados en semirramas contenidas en Z_o.

(11.5) Proposición (densidad de los órdenes centrales).- *Si Z_o es un germen semianalítico denso en X_o^*, el conjunto Ω^{Z_o} es denso en Ω. Más aún, si U es un abierto no vacío de Ω, se tiene*

$$\text{card. } U \cap \Omega^{Z_o} \geq 2^{\aleph_o}$$

Demostración.- En primer lugar, podemos suponer que Z_o es abierto en X_o. En efecto, basta sustituirlo por $(\mathrm{reg}_* Z_o) \cap \cap (\mathrm{reg}_* X_o)$. Que este germen es abierto en X_o es inmediato, pues su dimensión es $= \dim Z_o = \dim \overline{Z}_o = \dim X_o^* = d$. Además, es denso en X_o^*. Para comprobarlo escribimos

$$X_o^* = \overline{Z}_o = \overline{\mathrm{reg}\ Z_o} = \overline{\mathrm{reg}_* Z_o} \cup \overline{\mathrm{reg}\ Z_o \setminus \mathrm{reg}_* Z_o},$$

y se observa que $X_o^* \setminus \overline{\mathrm{reg}_* Z_o} \subset \overline{\mathrm{reg}\ Z_o \setminus \mathrm{reg}_* Z_o}$. Si el primero de estos gérmenes no es vacío, su dimensión es d, mientras que la del segundo es $< \dim Z_o \leqslant d$. En consecuencia, $\mathrm{reg}_* Z_o$ es denso en X_o^*; y como $\mathrm{reg}_* X_o$ es abierto, $(\mathrm{reg}_* Z_o) \cap (\mathrm{reg}_* X_o)$ es denso en $\mathrm{reg}_* X_o$. Finalmente, de ser este último germen denso en X_o^* se sigue nuestra afirmación.

Ya supuesto Z_o abierto, sea U un abierto no vacío de Ω. Claramente, es suficiente considerar el caso $U = H(f_1,\dots,f_r)$, $f_1,\dots,f_r \in \mathcal{O}[X_o]$. Entonces por el teorema de especialización (1.2), es $\{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \cap X_o^* \neq \emptyset$, y como Z_o es denso, el germen abierto

$$W_o = \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0\} \cap Z_o \subset X_o$$

es no vacío. Ahora, por (1.4), encontramos una parametrización $c : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ cuya semirrama positiva c_o^* está contenida en W_o. Para continuar necesitamos el siguiente

Lema.- *Existe un entero* $s \geqslant 0$ *tal que si* $c' : \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}\{t\}$ *tiene un contacto de orden* s *con* c *(esto es,* $c' \equiv c \bmod t^{s+1}$*), entonces* $c_o'^* \subset W_o$.

(La demostración de este lema se basa en un argumento típico que utiliza una desigualdad de Łojasiewicz, como puede verse en [5; 2.17]). En nuestro caso el lema muestra que hay una cantidad $\geq 2^{\aleph_o}$ de semirramas distintas contenidas en W_o. Entonces un orden α centrado en una de esas semirramas c_o^*

• está en U, pues como $c_o^* \subset \{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\}$, $f_1, \ldots, f_r \in \alpha$, y

• está en Ω^{Z_o}, pues $c_o^* \subset Z_o$.

Se concluye $\text{card.}\, U \cap \Omega^{Z_o} \geq 2^{\aleph_o}$, ya que a semirramas distintas corresponden distintos órdenes.

(11.6) <u>Observaciones</u>.- (a) La proposición anterior implica en particular que Ω no tiene puntos aislados. Además, resultan las siguientes acotaciones:

$$2^{\aleph_o} \leq \text{card.}\Omega \leq 2^{2^{\aleph_o}}$$

(la primera, consecuencia inmediata de (11.5); la segunda, porque, según se citó en (11.2), $\text{card.}\Omega \leq 2^{\text{card.}\mathcal{O}(X_o)}$).

(b) El resultado de densidad anterior precisa notablemente (2.1), y se aplica en especial cuando $Z_o = X_o^* \setminus Y_o$ siendo Y_o un germen analítico contenido en, y distinto de, X_o. Más especialmente aún, cuando $Y_o = \emptyset$.

(c) Una cuestión interesante es si el recíproco de (11.5) es también cierto, esto es: si Ω^{Z_o} es denso en Ω, ¿es Z_o denso en X_o^*?. Pensamos que la respuesta es afirmativa, y una posible prueba sería la siguiente: Si Z_o no es denso en X_o^*, el germen semianalítico abierto $X_o^* \setminus \overline{Z_o}$ es no vacío, y contendrá una semirrama de curva irreducible. Entonces, por el lema de separación fuerte, existe un elemento f tal que

$$X_o^* \setminus \overline{Z}_o \supset X_o^* \cap \{f \geq 0\} \setminus \{0\} \supset X_o^* \cap \{f > 0\} \neq \emptyset$$

Ahora bien, Ω^{Z_o} es denso en Ω, y $H(f) \neq \emptyset$ (por (2.1)), luego existe un orden $\alpha \in H(f)$ centrado en una semirrama $c_o^* \subset Z_o$. Como $\{f < 0\} \supset Z_o \setminus \{0\}$, tendría que ser $-f \in \alpha$, y esto es una contradicción. Por supuesto, la dificultad estriba en que no hemos podido demostrar el lema de separación fuerte en toda su generalidad.

(11.7) Existencia de órdenes no centrales.- Podemos construir explícitamente órdenes de Ω que no sean centrales. El método se basa en la siguiente observación

Lema.- *Sea* $f \in \mathbb{R}[[x_1]]$ *una serie* $\neq 0$ *no convergente sin término independiente. El homomorfismo* $\phi : \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\} \to \mathbb{R}[[x_1,\dots,x_{n-1}]]$ *dado por:* $x_i \mapsto x_i$, $i \neq n$; $x_n \mapsto f$, *es inyectivo* $(n \geq 2)$.

Por inducción sobre n. Si $n=2$, como $\phi(x_1) \neq 0$, si ϕ no es inyectivo, existe $P \in \ker \phi$ con $P(0,x_2) \neq 0$, y por el teorema de preparación, podemos suponer que P es un polinomio en x_2. Se sigue que f es algebraica sobre $\mathbb{R}\{x_1\}$, que es algebraicamente cerrado en $\mathbb{R}[[x_1]]$ [41; p. 188, theorem 44.1], luego f debe ser convergente, contra la elección hecha. Supongamos ahora $n > 2$ y cierto el lema para $n-1$ variables. Si $\ker \phi \neq \{0\}$, existe $P \in \ker \phi$ con $P(x_1,0,x_3,\dots,x_n) \neq 0$ (pues $\phi(x_2) \neq 0$), y entonces $P(x_1,0,x_3,\dots,f(x_1)) = 0$, contra la hipótesis de inducción.

Utilizaremos a continuación el homomorfismo ϕ.

Caso I. Ordenes formalmente centrales en el plano.

Fijamos en $\mathbb{R}[[x]]$ el orden $x > 0$, y consideramos la restricción α de ese orden a $\mathbb{R}\{x,y\}$, vía ϕ; α puede considerarse como un orden centrado en la semirrama formal $y = f(x)$.

Afirmamos que α no es un orden central, en el sentido de (11.3). La prueba consiste en un 'lema de separación formal', que en este caso es sencillo porque una de las semirramas es lisa. Con precisión, hay que probar que si $c_o^* \subset \mathbb{R}_o^2$ es una semirrama de curva irreducible, existe un elemento $h \in \mathbb{R}\{x,y\}$ (de nuevo, como en (7.1), (7.2), (7.5), etc., h será incluso un polinomio) tal que $c_o^* \subset \{h < 0\}$ y $h \in \alpha$. Esto equivale, eligiendo una parametrización $x \mapsto (x^p, g(x))$, $x > 0$, de c_o^*, a que:

$$h(x^p, g(x)) < 0, \qquad h(x, f(x)) > 0 \qquad \text{en} \quad \mathbb{R}[[x]]$$

Ahora bien, como f no es convergente y g sí, $f(x^p) \neq$ $\neq g(x)$ y se tendrá

$$f(x) = f_1(x) + \delta x^s + \ldots, \qquad \delta \neq 0; \quad g(x) = f_1(x^p) + \eta x^r + \ldots,$$

con $f_1 \in \mathbb{R}[x]$ de grado máximo (eventualmente $f_1 = 0$). Incluimos el caso $g(x) = f_1(x^p)$, admitiendo $r = +\infty$. El polinomio h buscado será

$$H = f_1(x) + cx^s - y,$$

o su opuesto, con una constante $c \in \mathbb{R}$ adecuada. En efecto, se tiene:

$$H_g = H(x^p, g(x)) = f_1(x^p)+cx^{ps} - g(x) = cx^{ps} - \eta x^r - \ldots,$$

$$H_f = H(x, f(x)) = f_1(x)+cx^s - f(x) = (c-\delta)x^s - \ldots,$$

y se trata de que estas dos series tengan distinto signo en $\mathbb{R}[[x]]$. Entonces

(a) si $r < ps$, es $\eta \neq 0$, luego:

$$\text{signo } H_g = \text{signo } (-\eta), \quad \text{signo } H_f = \text{signo } (c-\delta),$$

y basta tomar c tal que $-\eta(c-\delta) < 0$.

(b) si $r = ps$, es $\eta \neq \delta$, y

$$\text{signo } H_g = \text{signo } (c-\eta), \quad \text{signo } H_f = \text{signo } (c-\delta),$$

lo que proporciona la condición $(c-\eta)(c-\delta) < 0$, (posible pues $\eta \neq \delta$).

(c) Si $r > ps$, es

$$\text{signo } H_g = \text{signo } c, \quad \text{signo } H_f = \text{signo } (c-\delta)$$

y ahora se elige c para que $c(c-\delta) < 0$.

Caso II. Ordenes no centrales en $\mathbb{R}^n_o$, $n > 2$

La construcción es por inducción. Supongamos dado un orden α' en $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$, que no sea central e induzca en $\mathbb{R}\{x_1\}$ el orden $x_1 > 0$. Por (1.4.1), α' se extiende al anillo $\mathbb{R}[[x_1,\ldots,x_{n-1}]]$, y esta extensión, vía ϕ, induce un orden α en $\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Este orden α no es central (para la definición (11.3)). En efecto, es claro que α extiende α', luego si α está centrado en una semirrama $c^*_o \subset \mathbb{R}^n_o$, su proyección sobre las n-1 primeras coordenadas se reduce al origen (pues en otro caso, α' estaría centrado en esa proyección), esto es, c_o^* tendrá que ser $x_1 = \ldots =$ $= x_{n-1} = 0$, $x_n > 0$, ó $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n < 0$. Veamos que esto tampoco es posible. Para $s \geqslant 0$ grande se tendrá $x_1 - f^{2s} > 0$, y tomando $h = x_1 - x_n^{2s}$ resulta

(a) $h(0,x_n) = -x_n^{2s}$ que es <0 sobre c_o^*

(b) $h(x_1,f) = x_1 - f^{2s} > 0$, luego $f \in \alpha$,

lo que prueba nuestra afirmación.

Corolario.- *Sea* Ω *el espacio de órdenes de* $\mathbb{R}_o^n$, $n \geqslant 2$, *y* Ω^* *el subespacio formado por los órdenes centrales. Entonces* $\operatorname{card}(\Omega \setminus \Omega^*) \geqslant 2^{\aleph_o}$.

Es consecuencia de todo lo anterior, pues la construcción expuesta depende esencialmente de f. Para comprobarlo, si $g \in \mathbb{R}[[x_1]] \setminus \mathbb{R}\{x_1\}$, $g > f$, basta tomar un polinomio $h \in \mathbb{R}[x_1]$ con $f < h < g$, y entonces $x_2 - h(x_1)$ es positivo vía f, pero negativo vía g.

(11.8) El isomorfismo c_Ω.- Existe una relación natural entre la topología del espacio de órdenes y la del propio germen considerado. Los órdenes centrales son necesarios para describir esta relación fácilmente, pues proporcionan una forma efectiva de definir órdenes, frente al caracter puramente existencial de nuestro primer resultado (2.1).

Notaremos CA y CR, respectivamente, a la colección de los subconjuntos cerrados y abiertos de Ω, y a la colección de los gérmenes semianalíticos regularmente cerrados de X_o^*. Con las operaciones de unión e intersección, y la relación de contenido, CA y CR son dos retículos ordenados, y queremos definir un isomorfismo $\omega = c_\Omega : CA \to CR$. Para ello se precisa el siguiente

Lema.- *Si* $f_1,\ldots,f_r \in O[X_o]$, *ponemos* $C(f_1,\ldots,f_r) = \overline{\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^*}$. *Si* $g_{ij} \in O[X_o] \setminus \{0\}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$, *el contenido* $H(f_1,\ldots,f_r) \subset \bigcup_{i=1}^{p} H(g_{i1},\ldots,g_{iq})$ *es equivalente al contenido* $C(f_1,\ldots,f_r) \subset \bigcup_{i=1}^{p} C(g_{i1},\ldots,g_{iq})$.

Demostración.- En primer lugar, $H(f_1,\ldots,f_r) \subset \bigcup_{i=1}^{p} H(g_{i1},\ldots,g_{iq})$ es equivalente a:

$$(*) \qquad \emptyset = H(f_1,\ldots,f_r) \setminus \bigcup_{i=1}^{p} H(g_{i1},\ldots,g_{iq}) = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} H(f_1,\ldots,f_r,-g_{ij}).$$

Por otra parte, el contenido $C(f_1,\ldots,f_r) \subset \bigcup_{i=1}^{p} C(g_{i1},\ldots,g_{iq})$ equivale a:

$$\{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^* \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{p} \{g_{i1} > 0,\ldots,g_{iq} > 0\} \cap X_o^*}$$

(pues el segundo conjunto es cerrado) y éste a la igualdad

$$(**) \qquad \emptyset = \{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^* \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \{g_{i1} \geqslant 0,\ldots,g_{iq} \geqslant 0\}.$$

En efecto, una implicación es evidente, pues $\{g_{i1} \geqslant 0,\ldots,g_{iq} \geqslant 0\} \supset \overline{\{g_{i1} > 0,\ldots,g_{iq} > 0\} \cap X_o^*}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Recíprocamente, supóngase que

$$\emptyset \neq W_o = \{f_1 > 0,\ldots,f_r > 0\} \cap X_o^* \setminus$$

$$\overline{\setminus \bigcup_{i=1}^{p} \{g_{i1} > 0,\dots,g_{iq} > 0\} \cap X_o^*},$$

y sin embargo, se tiene (**). Entonces:

$$W_o \subset \bigcup_{i=1}^{p} \{g_{i1} \geqslant 0,\dots,g_{iq} \geqslant 0\} \setminus \bigcup_{i=1}^{p} \{g_{i1} > 0,\dots,g_{iq} > 0\} \subset$$

$$\subset \{\Pi g_{ij} = 0\}$$

Pero W_o es un abierto no vacío de X_o^*, luego Πg_{ij} se anula so-bre X_o, y alguno de los g_{ij} se anulará, contra la hipótesis.

Ahora, de modo puramente conjuntista, (**) se transforma en:

$$(**)' \qquad \emptyset = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0, -g_{ij} > 0\},$$

y se trata pues de probar que (*) y (**)' son equivalentes (nótese que esto es una generalización de (1.2)).

Si no se cumple (*), el conjunto $U = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} H(f_1,\dots,f_r, -g_{ij})$ es abierto en Ω, y por (11.5) existe un orden $\alpha \in U$ centrado en una semirrama $c_o^* \subset X_o^* \setminus \{\Pi f_\ell g_{ij} = 0\}$. Afirmamos que $c_o^* \subset Z_o = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0, -g_{ij} > 0\}$. Así es. Para cada $i=1,\dots,p$, el orden α está en cierto $H(f_1,\dots,f_r, -g_{ij})$, y por estar el orden en cuestión centrado en c_o^*, debe ser: $c_o^* \subset \{f_1 \geqslant 0,\dots,f_r \geqslant 0, -g_{ij} \leqslant 0\}$. Como $\Pi f_e g_{ij}$ no se anula sobre c_o^*, concluimos $c_o^* \subset \{f_1 > 0,\dots,f_r > 0, -g_{ij} < 0\}$. Esto prueba que $Z_o \neq \emptyset$, y no se cumple (**)'.

Si por el contrario no se verifica (**)', esto es, $Z_o \neq \emptyset$, basta tomar un orden α centrado en una semirrama $c_o^* \subset Z_o$, y $\alpha \in U$. Esto concluye la prueba.

Mediante el lema anterior definimos $CA \overset{\omega}{\rightarrow} CR$ como sigue. Si K es un cerrado de Ω, es compacto, y si además es abierto, K será unión de una cantidad finita de abiertos de la base de Harrison: $K = \bigcup_{i=1}^{r} H(f_{i1},\ldots,f_{is})$, $f_{ij} \in \mathcal{O}[X_o] \setminus \{0\}$. Entonces

$$K \overset{\omega}{\rightarrow} C_K = \bigcup_{i=1}^{r} C(f_{i1},\ldots,f_{is}).$$

Claramente C_K es regularmente cerrado pues su interior contiene al germen abierto $\bigcup_{i=1}^{r} \{f_{i1} > 0,\ldots,f_{is} > 0\} \cap X_o^*$, que es denso en C_K. A la inversa, si C_o es un germen semianalítico regularmente cerrado de X_o^* se escribe en la forma

$$C_o = \bigcup_{i=1}^{s} \overline{\{f_{i1} > 0,\ldots,f_{ir} > 0\} \cap X_o^*},$$

luego $C_o = C_K$, con $K = \bigcup_{i=1}^{s} H(f_{i1},\ldots,f_{ir})$.

Lo que el lema anterior prueba es que la construcción de C_K no depende de la elección de los f_{ij}. También prueba que el contenido $K \subset K'$ equivale al de sus imágenes: $C_K \subset C_{K'}$. En fin, es evidente que ω conserva las uniones y las intersecciones, luego $CA \overset{\omega}{\rightarrow} CR$ es ciertamente un isomorfismo.

Nuestro siguiente objetivo es describir mediante órdenes la imagen por un morfismo finito del lugar de dimensión máxima, lo que precisará notablemente nuestro anterior resultado, (9.4). Recordemos a este fin el siguiente

<u>Teorema</u> [23; §4] .- *Sea* $j : K \rightarrow L$ *una extensión algebraica finita de cuerpos reales y* $j^* : \Sigma \rightarrow \Omega$ *la correspondiente aplicación del espacio de órdenes del segundo en el del*

primero $(j^*(\alpha) = \alpha|K,\ \alpha \in \Sigma)$. *Entonces* j^* *es abierta, propia y tiene fibras finitas.*

En nuestro contexto tenemos:

(11.9) Proposición.- *Sea* $\pi : Y_o \to X_o$ *un morfismo finito de gérmenes analíticos irreducibles de la misma dimensión.* π *induce una aplicación abierta, propia y con fibras finitas del espacio de órdenes de* Y_o, Σ, *en el de* X_o, Ω, *que notaremos* $\pi_* : \Sigma \to \Omega$. *Además, si notamos* $\sigma = c_\Sigma$ *y* $\omega = c_\Omega$, *se verifica:*

$$\pi\sigma(K) = \omega\pi_*(K),$$

para cada subconjunto abierto y cerrado K *de* Σ. *En particular,* π_* *es suprayectiva si y sólo si* $\pi(Y_o^*) = X_o^*$.

Demostración.- Si $\pi : Y_o \to X_o$ es finito, el homomorfismo $\pi^* : \mathcal{O}[X_o] \to \mathcal{O}[Y_o]$ induce una extensión algebraica finita $\mathcal{O}(X_o) \to \mathcal{O}(Y_o)$ y ésta la aplicación $\pi_* : \Sigma \to \Omega$, que es abierta, propia y tiene fibras finitas, en virtud del teorema antes citado. Sea ahora K un subconjunto abierto y cerrado de Σ. Como cualquier aplicación conserva las uniones, para computar la fórmula del enunciado es suficiente considerar el caso:

$$K = H(g_1,\dots,g_r),\quad g_i \in \mathcal{O}[Y_o];\quad \pi_*(K) = \bigcup_{i=1}^{p} H(f_{i1},\dots,f_{iq}),$$

$$f_{ij} \in \mathcal{O}\, X_o\ ,$$

Elegimos ahora un representante $\pi : Y \to X$ del morfismo dado, de modo que $g_1,\dots,g_r$ definan funciones analíticas en Y, así como los f_{ij} en X, y $\pi\sigma(K)$ sea semianalítico en X, (0.12). Se trata de probar que:

$$Z_o = \overline{\pi(\{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y^*)_o} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\{f_{i1} > 0,\ldots,f_{iq} > 0\} \cap X_o^*} = E_o$$

<u>1^er^. contenido</u>: Como Z_o es cerrado, basta ver que contiene cada germen $\{f_{i1} > 0,\ldots,f_{iq} > 0\} \cap X_o^*$. Si así no fuera, elegiríamos una semirrama

$$c_o^* \subset \{f_{i1} > 0,\ldots,f_{iq} > 0\} \cap X_o^* \setminus Z_o,$$

y un orden $\alpha \in \Omega$ centrado en ella. Entonces $\alpha \in H(f_{i1},\ldots,f_{ir}) \subset \subset \pi_*(K)$, y existe un orden $\beta \in K = H(g_1,\ldots,g_r)$ que extiende α. Pero por otra parte, mediante el lema de separación (7.2), encontramos un elemento $h \in \mathcal{O}[X_o]$ tal que

$$c_o^* \subset \{h > 0\} \cap X_o^* \subset X_o^* \setminus Z_o,$$

y así $h \in \alpha \subset \beta$. Sin embargo, h como elemento de $\mathcal{O}[Y_o]$ es ≤ 0 sobre el germen $\{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y^*$, esto es: $\{h > 0,\ g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y^* = \emptyset$, luego por (2.1) no puede existir ningún orden en Σ para el que $h, g_1,\ldots,g_r$ sean simultáneamente positivos. Esto es una contradicción, y queda probado el primer contenido.

<u>2° contenido</u>: Veamos que se verifica:

$$W_o = \pi(\{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y^*)_o \subset$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{p} \{f_{i1} \geq 0,\ldots,f_{iq} \geq 0\} = F_o$$

En efecto, si no, $\{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y_o^* \not\subset \pi^{-1}(F_o)$, y existe una semirrama

$$c_o^* \subset \{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y_o^* \setminus \pi^{-1}(F_o);$$

como π tiene fibras finitas, $\pi(c_o^*) \subset X_o^* \setminus F_o$ es también una semirrama de curva irreducible. Sea ahora $\beta \in \Sigma$ un orden centrado en c_o^*, $\alpha = \pi_*\beta$ su restricción, que estará centrada en $\pi(c_o^*)$. Así, como

$$\pi(c_o^*) \subset X_o^* \setminus F_o = \bigcap_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} \{f_{ij} < 0\} \cap X_o^*,$$

para cada $i=1,\ldots,r$ existe $j=1,\ldots,s$ tal que $-f_{ij} \in \alpha$, lo que significa que α no está en $\bigcup_{i=1}^{q} H(f_{i1},\ldots,f_{iq}) = \pi_*(K)$, luego $\beta \notin K$. Sin embargo, β está centrado en $c_o^* \subset \{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\}$, por lo que $g_1,\ldots,g_r \in \alpha$. Este absurdo muestra que, efectivamente, $W_o \subset F_o$.

Supongamos ahora que W_o no está contenido en Eo. Se tendrá:

$$\emptyset \neq W_o \setminus E_o \subset F_o \setminus E_o \subset \{\Pi f_{ij} = 0\}$$

Por el principio de identidad, $\dim \{\Pi f_{ij} = 0\} < \dim X_o = d$, y por ser π finito, $\dim W_o = \dim \{g_1 > 0,\ldots,g_r > 0\} \cap Y_o^* = \dim Y_o^* = d$. Como E_o es cerrado, $W_o \setminus E_o$ es abierto en W_o, y tiene la misma dimensión, resultando:

$$d = \dim W_o \setminus E_o \leqslant \dim \{\Pi f_{ij} = 0\} < d$$

Esto significa que necesariamente $W_o \subset E_o$, y por tanto $Z_o = \overline{W_o} \subset E_o$.

La afirmación final del enunciado es ahora inmediata, pues

π_* es suprayectiva si y sólo si $\Omega = \text{im}\ \pi_*$, si y sólo si (utilizando la fórmula ya establecida):

$$X_o^* = \omega(\Omega) = \omega(\text{im}\ \pi_*) = \pi\sigma(\Sigma) = \pi(Y_o^*).$$

Terminaremos esta sección estudiando una propiedad especial del espacio de órdenes Ω, y su significado geométrico, en relación con unas observaciones y un ejemplo de Łojasiewicz.

(11.10) <u>La propiedad de la aproximación fuerte</u> [45; §6, §9].- Se dice que un cuerpo real K, o que su espacio de órdenes Ω, tiene la propiedad de la aproximación fuerte si para cada par de elementos $f,g \in K$ existe un tercero $h \in K$ con $H(f,g) = H(h)$.

Para aplicarlos en nuestro caso, citemos aquí:

<u>Criterio de las valoraciones</u> [45; p. 140].- *Si* K *tiene la propiedad de la aproximación fuerte, entonces para cada valoración discreta* $v : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, *cuyo cuerpo residual* κ_v *sea real, dicho cuerpo residual tiene un único orden.*

<u>Criterio topológico</u> [45; p. 140].- *Si la sub-base de Harrison es de hecho una base,* Ω *tiene la propiedad de la aproximación fuerte.*

(11.11) <u>Proposición</u>.- *El espacio de órdenes de un germen analítico irreducible de dimensión* ≥ 2 *no tiene la propiedad de la aproximación fuerte.*

Demostración.- Sean X_o el germen en cuestión y Ω su espacio de órdenes. Sustituyendo X_o por su normalizado, que es birracional, podemos suponer simplemente que $\mathcal{O}[X_o]$ es normal. Elegimos entonces un ideal primo real $p \subset \mathcal{O}[X_o]$ de altura 1, (10.2), y $V = \mathcal{O}[X_o]_p$ es un anillo local regular de dimensión 1, luego un anillo de valoración discreta, cuyo cuerpo residual se calcula fácilmente:

$$\kappa_V = V/p.V = \mathcal{O}[X_o]_p/p.\mathcal{O}[X_o]_p = (\mathcal{O}[X_o]/p)_{(o)} = \mathcal{O}(Y_o)$$

siendo $Y_o = V(p)$. Pero Y_o es un germen irreducible de dimensión $\dim X_o - 1 \geqslant 1$, luego su cuerpo de funciones $\mathcal{O}(Y_o)$ es real y tiene más de un orden (si es una curva, dos; en otro caso, infinitos). Esto significa, por el criterio de las valoraciones enunciado en (11.10), que $\mathcal{O}(X_o)$ no tiene la propiedad de la aproximación fuerte.

(11.12) Ejemplo y observación.- Para señalar el interés geométrico de (11.11), citemos textualmente, [37; p. 66]:

'Observons qu'il n'est pas toujours posible de donner localement un ensemble semi-analytique par un système d'inégalités simultanées larges ou strictes (par conséquent, il en est de même quant a un système d'inégalités en alternative)'.

Y Łojasiewicz propone el siguiente conjunto:

$E = \{x < 0\} \cup \{y < 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

La cuestión que al respecto queremos destacar es que la existencia de un ejemplo de esta índole es una consecuencia formal de (11.11):

'Si X_o es un germen analítico irreducible de dimensión $\geqslant 2$, existen funciones $f,g \in \mathcal{O}[X_o]$ tales que el germen semianalítico $\{f \leqslant 0\} \cup \{g \leqslant 0\}$ no se puede describir mediante una colección de desigualdades (estrictas o no) simultáneas'.

En efecto, supóngase lo contrario y sean $f,g \in \mathcal{O}[X_o]$. Entonces, para ciertos $h_1,\dots,h_r$

$$\{f \leqslant 0\} \cup \{g \leqslant 0\} = \{h_1 < 0,\dots,h_s < 0, h_{s+1} \leqslant 0,\dots,h_r \leqslant 0\},$$

y se deduce:

$$\{f > 0,\ g > 0\} \supset \{h_1 > 0\} \cup \dots \cup \{h_r > 0\},$$

$$\{f > 0,\ g > 0, -h_1 > 0,\dots,-h_r > 0\} = \emptyset$$

Por el isomorfismo $\omega = c_\Omega$, obtenemos:

$$H(f,g) \supset H(h_1) \cup \dots \cup H(h_r), \qquad H(f,g,-h_1,\dots,-h_r) = \emptyset,$$

luego en suma: $H(f,g) = H(h_1) \cup \dots \cup H(h_r)$. De esto resulta, por inducción, que la sub-base de Harrison es de hecho una base, y por el criterio topológico enunciado en (11.10), $\mathcal{O}(X_o)$ debería tener la propiedad de la aproximación fuerte. Esta contradicción con (11.11) muestra que existe el ejemplo que pretendíamos.

REFERENCIAS

[1] Abhyankar, S.: Concepts of order and rank on a complex space, and a condition for normality. Math. Ann. 141, pp. 171-192 (1960).

[2] Artin, E.: Uber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Hamb. Abh. 5, pp. 100-115 (1927) (Collected Papers, pp. 273-288).

[3] Artin, M.: On the Solutions of Analytic Equations. Invent. Math. 5, pp. 277-291 (1968).

[4] Bass, H.: On the ubiquity of Gorenstein rings. Math. Zeitschr. 82, pp. 8-28 (1963).

[5] Bloom, T.; Risler, J.-J.: Familles de courbes sur les germs d'espaces analytiques. Bull. Soc. Math. France 105, pp. 261-280 (1977).

[6] Bochnak, J.; Efroymson, G.: Real Algebraic Geometry and the 17^{th} Hilbert Problem. Math. Ann. 251. pp. 213-241 (1980).

[7] Bochnak, J.; Risler, J.J.: Le théoreme des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e serie, 8, pp. 343-364 (1975).

[8] Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flachen. Invent. Math. 4, pp. 336-358 (1968).

[9] Brumfiel, G.W.: Partially Ordered Rings and Semi-Algebraic Geometry: London Math. Soc. Lecture Note 37, Cambridge Univ. Press (1979).

[10] Campillo, A.: Algebroid Curves in Positive Characteristic. Lecture Notes, 813. Springer (1980).

[11] Cassels, J.W.S.: On the representation of rational functions as sums of squares. Acta Arith. IX, pp. 79-82 (1964).

[12] Cassels, J.W.S.; Ellison, W.J.; Pfister, A.: On Sums of Squa res and on Elliptic Curves over Function Fields. J. Num ber Th. 3, n° 2, pp. 125-149 (1971).

[13] Coste-Roy, M.-F.: Spectre réel d'un anneau et topos étale réel. These, Univ. Paris XIII (1980).

[14] Choi, M.D.; Dai. Z.D.; Lam, T.Y.; Reznick, B.: The Pythagoras Number of Some Affine Algebras and Local Algebras (por aparecer).

[15] Choi, M.D.; Lam, T.Y.; Reznick, B.; Rosenberg, A.: Sums of Squares in Some Integral Domains. J. of Algebra 65, pp. 234-256 (1980).

16] Delzell, Ch.N.: A constructive, continuous solution to Hilbert's 17^{th} problem and other results in semialgebraic geometry. Dissertation. Stanford Univ. (1980).

[17] Diller, J.; Dress, A.: Zur Galoistheorie pythagoräischer Körper. Arch. der Math. 16, pp. 148-152 (1965).

[18] Dubois, D.W.; Efroymson, G.: Algebraic theory of real varieties, I. Studies and Essays presented to Yu-Why Chen on his Sixtieth Birthday, pp. 107-137 (1970).

19] Dubois, D.W.; Efroymson, G.: A dimension theorem. Canad. J. Math. 26, pp. 108-114 (1974).

20] Dubois, D.W.; Recio, T.: A note on Robinson's non-negativity criterion. (por aparecer).

[21] Ebey, S.: The classification of singular points of algebraic curves. Trans. A.M.S. 118, pp. 454-471 (1965).

[22] Elman, R.; Lam, T.Y.: Quadratic Forms Under Algebraic Extensions. Math. Ann. 219, pp. 21-42 (1976).

[23] Elman, R.; Lam, T.Y.; Wadsworth, A.R.: Orderings under field extensions. J. Reine Angew. Math. 306, pp. 7-27 (1979).

[24] Engelking, R.: Dimension Theory. North Holland (1978).

[25] Galbiati, M.: Sur l'image d'un morphisme analytique réel propre. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, p. 311-319 (1976).

[26] Galbiati, M.: Stratifications et ensemble de non-cohérence d'un espace analytique réel. Invent. Math. 34, pp. 113-128 (1976).

[27] Grothendieck, A.: Élements de Géométrie Algébrique. IV (Premiere partie). Publ. Math. I.H.E.S. 20 (1964).

[28] Hardt, R.M.: Stratification of Real Analytic Mappings and Images. Invent. Math. 28, pp. 193-208 (1975).

[29] Hironaka, H.: Subanalytic sets. Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, pp. 453-493 (1973).

[30] Jacobson, N.: Lectures in Abstract Algebra, III. GTM, 32. Springer (1975).

[31] Kirby, D.: The structure of an isolated multiple point of a surface, I. Proc. London Math. Soc. (3) 6, pp. 597-609. (1956).

[32] Klein, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung von fünften Grade. Teubner (1884).

[33] Kunz, E.: The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein sing. Proc. A.M.S. 25, pp. 748-751 (1970).

[34] Lassalle, G.: Sur le théoreme des zéros differentiables. En Singularités d'applications differentiables, pp. 70-97. Lecture Notes, 535. Springer (1975).

[35] Lipman, J.: Rational singularities, with applications to alge braic surfaces and unique factorization. Publ. Math. I.H.E.S. 36, pp. 195-279 (1969).

[36] Lipman, J.: Stable ideals and Arf rings. Amer. J. Math. 93, pp. 649-685 (1971).

[37] Łojasiewicz, S.: Ensembles semi-analytiques. Lecture Note (1965) at I.H.E.S., Bures-sur-Yvette; reproduit n° A66.765, École Polytechnique, Paris.

[38] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Study, 61. Princeton Univ. Press (1968).

39] Mostowski, T.: Some properties of the ring of Nash functions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, pp. 243-266 (1976).

[40] Motzkin, T.S.: The arithmetic-geometric inequality. En Inequalities, vol. I, pp. 205-224. Shisha, O. ed. New York: Academic Press (1967).

[41] Nagata, M.: Local rings. Interscience Publishers (1962).

[42] Narasimhan, R.: Introduction to the theory of analytic spaces. Lecture Notes, 25. Springer (1966).

[43] Pfister, A.: Zur Darstellung von -1 als summe von Quadraten in einem Körper. J. London Math. Soc. 40, pp. 159-165 (1965).

44] Pfister, A.: Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Invent. Math. 4, pp. 229-237 (1967).

45] Prestel, A.: Lectures on formally real fields. IMPA Lecture Note 22, Río de Janeiro (1975).

[46] Recio, T.: Conjuntos preanalíticos, prenáshicos y prealgebraicos. Tesis. Univ. Compl. Madrid (1974).

[47] Recio, T.: Another Nullstellensatz in semialgebraic geometry. Simp. Geometria Algebrica, Bressanone (1979).

[48] Risler, J.-J.: Le théoreme des zéros en géometries algebrique et analytique réelles. Bull. Soc. Math. France 104, pp. 113-127 (1976).

[49] Serre, J.P.: Extensions de corps ordonnés. C.R.Ac.S. 229, pp. 576-577 (1949).

[50] Stengle, G.: A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. Math. Ann. 207, pp. 87-97 (1974).

[51] Tognoli, A.: Proprietá globali degli spazi analitici reali. Ann. Mat. Pura e Appl. (4) 75, pp. 143-218 (1967).

[52] Tougeron, J.C.: Idéaux de fonctions différentiables. Ergebnisse der Mathematik, 71. Springer (1972).

[53] Whitney, H.; Bruhat, F.: Quelques proprietés fondamentales des ensembles analytiques-réels. Comm. Math. Helv. 33, pp. 132-160 (1959).

[54] Zariski, O.: Modules de branches planes. Cours a l'École Polytechnique Centre de Mathématiques. Paris (1973).