

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA ACTUARIAL SOBRE PREVISIÓN  
SOCIAL Y SEGUROS DE VIDA ENFOCADO AL GRADO Y MASTER EN  
CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

**Autores:**

Gregoria Mateos-Aparicio Morales (Directora)

Ana Vicente Merino

Julio Hernández March

Adolfo Caballero Carbonell

Julio Moreno Lorente

Ubicado en el sitio Web: <http://www.ucm.es/info/sevipres/>  
donde se pueden ver aplicaciones interactivas

## **RESUMEN**

A través de este Proyecto se presenta una herramienta de carácter interactivo, que proporciona conocimientos teórico-prácticos de matemática actuarial aplicados a la Previsión Social y a los Seguros de Vida.

La metodología utilizada consiste en explicar conceptos fundamentales de la matemática actuarial, acompañándolos de aplicaciones prácticas en hojas de cálculo que facilitan su comprensión y que acercan su aprendizaje a situaciones que resultan cotidianas en el ámbito profesional.

Los casos prácticos que se plantean incorporan las bases técnicas más actuales, en concreto las tablas de mortalidad de la población española del bienio 2004-2005, así como las tablas de mortalidad y el tipo de interés técnico que están empleando actualmente las Aseguradoras. Además, se ha ajustado por interpolación una tabla de invalidez por edades para la población española, a partir de datos del Régimen General de la Seguridad Social para el periodo 1998-2002.

Al mismo tiempo, se plantean ejemplos prácticos que deben ser resueltos por el alumno y en los que, no obstante, se facilita la solución numérica. La formulación de los ejercicios prácticos en hoja de cálculo permite su extensión a un número infinito de situaciones.

En lo que respecta al contenido, en la primera parte se explica el significado de la planificación actuarial, la importancia del elemento demográfico y su medición a través de tablas de mortalidad y de invalidez; en la segunda parte se aborda la ecuación del seguro y su aplicación a las rentas actuariales y a los seguros, en tanto que en la tercera y última parte se desarrolla la planificación de un sistema de previsión social a través del método de las proyecciones. A esto hay que añadir dos anexos, uno con métodos de interpolación y ajuste de datos procedentes de una población y otro con los símbolos de conmutación propios de las tablas actuariales.

## **PALABRAS CLAVE**

Mortalidad, invalidez, supervivencia, demografía, pirámide poblacional, tabla dinámica, práctica aseguradora, métodos de interpolación y ajuste, método de aproximaciones sucesivas, método de las proyecciones, símbolos de conmutación, sistema de reparto, sistema de capitalización, funciones biométricas, rentas actuariales, seguros colectivos, Seguridad Social, tasa de dependencia, población pasiva, población activa.

# INDICE

## PARTE I. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA METODOLOGÍA ACTUARIAL

### 1. LA PLANIFICACIÓN ACTUARIAL

- 1.1. Concepto.
- 1.2. Elementos y funciones.
- 1.3. Etapas de la planificación.

### 2. EL ELEMENTO DEMOGRÁFICO

- 2.1. Representación en el tiempo. Stocks y flujos.
- 2.2. Análisis probabilístico de la mortalidad.
  - 2.2.1. Supervivencia y mortalidad.
  - 2.2.2. Probabilidades de vida y muerte sobre una cabeza.
  - 2.2.3. Funciones biométricas: ley de supervivencia.
  - 2.2.4. Probabilidad de supervivencia y mortalidad referentes a un grupo de dos cabezas.

### 3. TABLAS DE MORTALIDAD Y SUPERVIVENCIA

- 3.1. Concepto y tipología.
- 3.2. Tablas de mortalidad de asegurados.
- 3.3. Métodos de construcción de una tabla de mortalidad.
- 3.4. Ajuste de tablas de mortalidad.
  - 3.4.1. Ajuste gráfico.
  - 3.4.2. Ajuste analítico.
  - 3.4.3. Determinación práctica de una tabla de mortalidad. La tabla INE-2004.

### 4. TABLAS UTILIZADAS EN LA PRÁCTICA ASEGURADORA

- 4.1. Tablas para caso de fallecimiento.
- 4.2. Tablas para caso de supervivencia.
- 4.3. Las tablas PERM/F 2000.
  - 4.3.1. Elaboración.
  - 4.3.2. Composición y funcionamiento.
  - 4.3.3. Comparación entre las tablas PERM/F 2000C y las PERM/F 2000P y otras de supervivencia.
  - 4.3.4. Aplicación.

### 5. TABLAS DE INVALIDEZ

- 5.1. Modelos teóricos de invalidez.
- 5.2. Metodología aplicada al cálculo de las tasas de entrada en invalidez. Ajuste de una tabla por interpolación.

## **PARTE II. RENTAS ACTUARIALES Y SEGUROS**

### **6. ECUACIÓN DEL SEGURO**

### **7. RENTAS ACTUARIALES**

- 7.1. Génesis económica del concepto.
- 7.2. Cálculo de las distintas clases de rentas.
- 7.3. Rentas vitalicias.
  - 7.3.1. Renta postpagable:  $a_x$
  - 7.3.2. Renta prepagable:  $\ddot{a}_x$
  - 7.3.3. Relación entre las rentas vitalicias prepagables y postpagables.
- 7.4. Rentas temporales.
- 7.5. Rentas vitalicias diferidas en  $n$  periodos, para un individuo de edad  $x$ .
- 7.6. Relación entre las rentas diferidas, temporales y vitalicias para un individuo de edad  $x$ .
- 7.7. Valoración actuarial de la renta vitalicia reversible pagadera en tanto sobreviva, al menos, una de las cabezas.

### **8. OPERACIONES DE SEGURO: LOS SEGUROS DE PERSONAS**

- 8.1. Seguro de capital diferido para caso de vida:  ${}_nE_x$
- 8.2. Seguro vida entera:  $A_x$
- 8.3. Seguro temporal para caso de muerte:  ${}_nA_x$
- 8.4. Seguro vida entera de efecto diferido:  $n/A_x$
- 8.5. Relación entre el seguro vida entera, el seguro temporal y el seguro diferido.
- 8.6. Seguro mixto:  $A_{x:n}$

### **9. APLICACIONES: CASOS PRÁCTICOS**

- 9.1. Seguro temporal.
- 9.2. Seguro temporal con invalidez.
- 9.3. Seguro vida entera.
- 9.4. Seguro diferido.
- 9.5. Renta diferida
- 9.6. Seguro diferido con contraseguro de primas.

## **PARTE III. LA PLANIFICACIÓN A TRAVÉS DEL MÉTODO DE LAS PROYECCIONES**

### **10. FUNDAMENTO Y TÉCNICA DE LAS PROYECCIONES**

- 10.1. Análisis de la evolución de la población general.
- 10.2. Proyecciones económico-financieras.
  - 10.2.1. Descripción general de la metodología aplicable.
  - 10.2.2. Proyecciones demográficas y económicas de activos y pasivos del colectivo asegurado.
  - 10.2.3. Bases técnicas de un estudio actuarial.

10.2.4. Ejemplo de una proyección demográfica de un colectivo cerrado de individuos en edad de trabajar, siguiendo la distribución por edades de la población española de 2004 ([INE-2004](#)).

## **ANEXOS**

**I. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN Y AJUSTE**

**II. SÍMBOLOS DE CONMUTACIÓN**

**BIBLIOGRAFIA**

# PARTE I. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA METODOLOGÍA ACTUARIAL

## 1. LA PLANIFICACIÓN ACTUARIAL.

### 1.1. Concepto.

Es el instrumento que permite vigilar la solvencia de los sistemas de Previsión Social y de los Seguros en general, una vez determinadas las condiciones en las que se va a verificar el equilibrio financiero. Por ello, un primer objetivo dentro de la planificación actuarial es determinar la cuota o prima que verifique el equilibrio que, necesariamente ha de existir, entre recursos y gastos.

Cualquiera que sea el sistema financiero utilizado, toda determinación del tipo o cuota (que representa el precio) implica un “**reparto**” tanto en la Seguridad Social como en el seguro privado. Un reparto es un cociente cuyo numerador representa el valor de las obligaciones o prestaciones previstas y el denominador el valor de los recursos, que pueden estar en función de los salarios o ser iguales para todos los asegurados. El cociente, coste del sistema, es el tipo de cotización, cuota o prima:

$$\alpha = \text{tipo de cotización} = \frac{\text{valor de las prestaciones}}{\text{valor de los salarios}} \quad (1.1)$$

$$\text{Cuota} = \frac{\text{valor de las prestaciones}}{\text{numero de cotizantes o asegurados}} \quad (1.2)$$

La forma en que se calcula el valor de las prestaciones es lo que difiere de uno a otro de los sistemas financieros utilizados, así como el horizonte temporal al que está referido el equilibrio. Así, en un sistema de previsión social, tenemos tres posibilidades:

#### **En el sistema de reparto anual:**

El Valor de las prestaciones = Número de asegurados por cuantía de la pensión media.

#### **En el sistema de capitales de cobertura:**

El Valor de las prestaciones = Valor Actual Actuarial (VAA) de las nuevas pensiones

#### **En el sistema de capitalización:**

El Valor de las prestaciones = VAA de las prestaciones totales

Es decir, toda planificación actuarial tiene como primer objetivo determinar la cuota o prima (expresada en %), que aplicada a la base determina los recursos. Dichos recursos, junto a los rendimientos financieros de las reservas (si los hay), deben cubrir las prestaciones previstas durante el tiempo fijado para la duración del equilibrio. De este sencillo planteamiento se deduce la enorme trascendencia que tiene la dimensión del tiempo en toda planificación actuarial.

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio debe incorporar tanto la dimensión temporal como las reservas o fondos del sistema:

$$\text{Tipo de cotización} = \frac{\text{VAA de las prestaciones} - \text{Reservas o Fondos}}{\text{Valor actual de los salarios}}$$

Por otra parte, una buena planificación en un sistema de reparto exige comprobar el grado de coincidencia entre los valores previstos y los reales, empleando proyecciones y efectuando un balance actuarial. Paralelamente, una planificación eficaz en capitalización colectiva o individual supone verificar que la cuantía de las reservas o provisiones sea suficiente para:

- Pagar las pensiones hasta su extinción y sus pensiones derivadas
- Entregar el rescate de los activos

En este caso, siempre debe verificarse la siguiente ecuación:

VA de las cotizaciones del colectivo inicial + VA de las cotizaciones de los futuros asegurados + Reservas en el momento inicial = VA de las obligaciones del colectivo inicial (jubilación, invalidez y/o supervivencia) + VA de las obligaciones del colectivo de los futuros asegurados (jubilación, invalidez y/o supervivencia).

Como se ve el tiempo es una variable trascendental.

## 1.2. Elementos y funciones.

En la determinación del VAA de las prestaciones y del VA de los salarios intervienen los siguientes **elementos y funciones**:

**Elementos demográficos**: el censo de partida o información de los asegurados.

**Elementos biométricos**: la probabilidad de ocurrencia del hecho objeto del seguro, como el fallecimiento, la jubilación o la invalidez.

**Elementos financieros**: el tipo de interés técnico  $i$ .

**Elementos económicos**: los salarios y las cuantías de las prestaciones, así los como capitales asegurados.

**Funciones biométricas**: las probabilidades de transición,  $P_{xt}$ , calculadas en función de las distintas probabilidades independientes.

**Funciones financieras**: los factores de descuento  $v$  y  $v^n$  y los de capitalización  $(1+i)$  y  $(1+i)^n$ .

**Funciones financieras y actuariales**:  ${}_nE_x = v^n \cdot {}_n p_x$

**Función de rentas financieras**:  $a_{n|i}$

**Función de rentas actuariales**:  $a_x$  y  $a_{x:n}$

## 1.3. Etapas de la planificación.

Un proceso completo de **planificación** debe incorporar las siguientes etapas:

**1) Planificación a corto plazo** cuyo objetivo es determinar la cuota o prima que establece el equilibrio financiero sobre la base del sistema financiero y método de evaluación aceptado. Se materializa en un documento que se conoce con el nombre de nota técnica y consta, entre otros, de los siguientes apartados:

- Objeto de la nota
- Descripción de los riesgos y prestaciones
- Colectivo cubierto y su evolución
- Hipótesis de trabajo (que conforman la base técnica)
- Sistema financiero y método de evaluación
- Política de inversiones
- Estimaciones demográficas
- Valoraciones actuariales sobre cargas pasivas (actuales y futuras), derechos en formación (si los hay) y bases de cotización y salarios (que inciden tanto en el cálculo de los ingresos como en el de las prestaciones)
- Tipos de cotización necesarios para conseguir el equilibrio financiero
- Presupuestos anuales y plurianuales
- Análisis de flujos monetarios y sus previsiones: presupuestos de tesorería

**2) Planificación a medio plazo.** Es complementaria con la anterior, utilizando técnicas tales como:

- Análisis de sensibilidad.
- Métodos de simulación
- Árboles de decisión
- Balances actuariales

Lo que implica realizar:

- \* Una previsión inicial.
- \* Una segunda fase de seguimiento a través de indicadores de control.
- \* Un análisis de desviaciones y correcciones en su caso.

**3) Planificación a largo plazo.** Su objetivo es el mismo de las etapas anteriores:

- evaluación de cargas y provisiones a largo plazo.
- evaluación de salarios
- diseño de la financiación: sistema financiero y método de evaluación
- tipo de cotización necesario para el equilibrio financiero.

A largo plazo se suelen utilizar distintas técnicas basadas en:

- \* Modelos econométricos.

- \* Modelos actuariales, entre los más conocidos nos referiremos al de las **proyecciones**.
- \* Modelos mixtos.

Así como la realización de la nota técnica resulta inherente a todo seguro y sistema de previsión social, no siempre se efectúa una adecuada planificación a medio y largo plazo. Sin embargo, la evaluación actuarial a lo largo del tiempo resulta crucial para conseguir una gestión financiera eficaz. También hay que decir que la técnica de evaluación a implementar (balance actuarial, proyección, etc.) será diferente según el régimen financiero elegido (reparto, capitalización, etc.).

## 2. EL ELEMENTO DEMOGRÁFICO

La demografía es la rama de la ciencia que tiene como objeto el estudio de la población, su volumen, composición, estructura, etc.

La metodología del análisis demográfico tiene dos aspectos: el cuantitativo, que mide tanto el estado de la población y sus características, como su movimiento (los nacimientos, defunciones y migraciones) y el aspecto cualitativo, referido a las políticas demográficas, sanitarias, de previsión social, etc.

La palabra demografía apareció, por primera vez, en la obra de Achille Guillard titulada “*Éléments de statistique humaine ou démographie comparée*” en 1855. No obstante, las bases técnicas parten del siglo XVII, fundamentalmente con los trabajos del astrónomo Edmund Halley y de otros científicos que sintieron la necesidad de explicar los fenómenos de la población a través de las matemáticas y la estadística, reduciendo la realidad a elementos cuantificables.

La evolución de la población constituye desde hace muchos años una preocupación de los Estados. Ya en el siglo XVIII, la teoría mercantilista centra en el crecimiento de la población la base para lograr una mayor renta y bienestar general. Adam Smith parte de la armonía natural entre economía y demografía, haciendo depender el tamaño de una población tanto de su mano de obra como de la productividad de la tierra.

Thomas Maltus defendía la necesidad de poner freno al crecimiento de la población ya que, en otro caso, esta crecería en progresión geométrica mientras que los medios de subsistencia lo hacen en progresión aritmética. Para Marx, cada modo histórico de producción tiene su propia ley de población.

Los procesos demográficos determinan la estructura de una población y su evolución y están referidos a los nacimientos, defunciones y migraciones. Estos procesos están condicionados en parte por fenómenos sociales, culturales, económicos, políticos, religiosos, sanitarios, etc. Por tanto, la demografía estudia las características y evolución de un colectivo bajo determinados supuestos sociales.

Se entiende por **colectivo** un conjunto de elementos que poseen, al menos, una característica común. Según esto, para poder hablar de colectivo será imprescindible que exista cierta **homogeneidad** entre sus elementos, al menos en torno a esa característica común a que se ha aludido. En nuestro caso, el estudio se limitará al tratamiento de colectivos humanos, esto es,

de grupos de individuos sobre los que se construyan las hipótesis y se verifiquen las distintas fases del proceso estadístico.

Además, de todas las posibles subdivisiones que sobre tales colectivos pueden efectuarse, en función de la característica buscada como elemento diferencial, en principio sólo se considerará una, la que responde a un criterio de "**vida**". Esto es, el objetivo principal va a ser tratar colectivos humanos atendiendo al hecho de que sus componentes vivan o no en un determinado momento.

Podemos también preguntarnos si nuestro estudio se realiza tomando como variable el tiempo o al margen de éste; en otros términos, si se realiza un planteamiento estático o dinámico. Antes de nada, debemos decir que se puede considerar la variable tiempo en una doble acepción:

- a) Como **tiempo "físico"**. Es decir, como soporte de la existencia; así se habla de una fecha determinada, de un instante concreto, etc.
- b) Como **tiempo "biométrico"**. Esto es, como "medida de vida" de los elementos integrados en el colectivo. Por supuesto que esa "medida de vida" es la edad.

Lo que se ha llamado tiempo biométrico, la edad, será el elemento fundamental en todo lo que sigue; efectivamente, será ésta la característica diferencial para los distintos grupos humanos. Es claro que una edad  $x$  puede tenerla, en cierta fecha, un número dado de individuos pero esa misma edad  $x$  la habrán alcanzado, en un momento anterior, otro número de individuos y otros la alcanzarán en un instante futuro. De manera que se tiene que precisar en qué momento  $t$  del tiempo físico se sitúan los individuos con tiempo biométrico  $x$ .

## 2.1. Representación en el tiempo. Stocks y flujos.

El análisis demográfico requiere situar los datos en el tiempo. Si el fenómeno estudiado tiene comienzo en una fecha concreta, por ejemplo el 10 de noviembre de 2005, va cumpliendo períodos de duración a lo largo del tiempo. Así, el 10 de noviembre de 2006 dicho fenómeno cumple un año de duración y cinco cuatro años después, discurriendo a lo largo de lo que se denomina su línea de vida hasta que el fenómeno desaparece.

Si se observan algunos individuos, cada uno de ellos tiene su línea de vida, que comienza en su fecha de nacimiento y termina en la de su fallecimiento, habiendo transcurrido  $n$  años. Los nacidos en un mismo año de calendario se denominan **generación**.

En general se consideran individuos de edad  $x$  todos aquellos que, en un momento dado, han cumplido  $x$  períodos de edad y no han llegado a cumplir  $x+1$ . Asimismo, en un mismo año de calendario coincidirán personas de la misma edad pertenecientes a dos generaciones diferentes. Por ejemplo, los nacidos en 2005 cumplirán 1 año de edad a lo largo del 2006, mientras que los nacidos en el 2004 cumplirán 2 años de edad a lo largo del 2006. Pues bien, ambas generaciones habrán tenido 1 año de edad durante algún tiempo del 2006.

Una vez situada la vida en relación con el tiempo y la duración, se da paso a la determinación de lo que se denominan **magnitudes demográficas**. Las magnitudes demográficas se dividen **en stocks y flujos**, según estén referidas a un instante del tiempo o a un período, respectivamente. Un ejemplo de flujo sería el número de nacidos vivos en el año 2007. Un ejemplo de stock sería la población existente a 1 de enero de 2007.

Las relaciones entre este tipo de magnitudes dan lugar a lo que se denominan **tasas**. Una tasa es un cociente entre un flujo y un stock, o bien entre dos flujos; por tanto, tiene una dimensión temporal. Las tasas intentan dar una medida de la frecuencia con la que un determinado fenómeno se produce en una población. La medida será más ajustada cuanto más homogéneo sea el stock o flujo del denominador, dentro del cual se producen los sucesos que ocasionan el flujo del numerador.

La tasa bruta es el cociente cuyo denominador es el stock de la población total y cuyo numerador es el flujo total de sucesos. La tasa bruta de un fenómeno demográfico es un indicador sencillo de la intensidad con la que dicho fenómeno se produce pero depende, en gran medida, de la estructura por edad y sexo de la población. De ahí la necesidad de refinar la medición mediante el empleo de tasas específicas que refieren el fenómeno a una edad y/o generación concretas.

El objetivo de las tasas es doble, por una parte son descriptivas del fenómeno demográfico y por otra se utilizan para determinar probabilidades.

## 2.2. Análisis probabilístico de la mortalidad.

A partir de este momento nos situamos ya exclusivamente en el marco de un colectivo humano cuya característica diferencial es la **edad**; en este colectivo el fenómeno causante del riesgo será la **muerte**. En este sentido conviene recordar que la ciencia que estudia la supervivencia de los humanos es la Biometría, valiéndose del empleo de modelos estadísticos. Dos son las hipótesis fundamentales sobre las que se asienta la teoría de la supervivencia:

- a) **Hipótesis de independencia.** Dado un grupo demográfico de  $N$  cabezas, se supone que el fenómeno de la mortalidad es independiente, es decir, que no existe interacción entre las mismas, no teniéndose en cuenta la mortalidad por contagio ni la que se deriva de la acción voluntaria de cualquiera de ellas sobre las demás.
- b) **Hipótesis de homogeneidad.** Los individuos objeto de estudio forman un grupo homogéneo respecto al fenómeno de la mortalidad, que sólo viene determinado por la edad y el sexo.

### 2.2.1. Supervivencia y mortalidad.

Mediante estadísticas demográficas adecuadas, el objetivo es seguir la evolución a lo largo del tiempo de un grupo de  $l_0$  personas nacidas simultáneamente. Se trata de determinar cuantos de ellos sobreviven cada año, es decir, cuantos cumplen 1, 2, 3, 4 ...  $w$  años, siendo  $w$  el límite de la vida humana o edad máxima que puede alcanzar una persona. La observación estadística nos permitirá determinar  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_x, \dots, l_w$ , número de individuos, o cabezas como suele decirse, que cumplen 0, 1, 2, ...  $x$ , años de edad, verificándose  $l_w = 0$ .

Sea un colectivo de individuos que, en un momento  $t$ , tienen exactamente la edad  $x$  y que denominaremos  $l_x$ . Los individuos supervivientes de éstos nos permitirán determinar los números  $l_{x+1}, \dots, l_{x+n}, \dots, l_w$  que definirán una "tabla de supervivencia" procedente de una población.

El tratamiento probabilístico de  $l_x$  sugiere la conveniencia de considerar a esta función como modelo biométrico, siendo  $l_x$  un elemento básico para nuestro trabajo.

Por otra parte, si del colectivo inicial  $l_x$  sobreviven al cabo de un año  $l_{x+1}$  individuos, será porque se ha producido un número determinado de fallecimientos que representaremos por  $d_x$ , de tal forma que:

$$l_x = d_x + l_{x+1}$$

Esto es, los individuos con edad  $x$  o fallecen antes de cumplir la edad  $x + 1$ , este número de fallecimientos es  $d_x$ , o cumplen dicha edad, siendo este número de supervivientes  $l_{x+1}$ . Análogamente:

$$l_{x+1} = d_{x+1} + l_{x+2}$$

De modo que, el número de individuos vivos con edad  $x+1$  da origen al número de fallecidos con esa edad pero sin cumplir la  $x+2$  (esto es  $d_{x+1}$ ) y al número de individuos que cumplen la edad  $x+2$  (esto es  $l_{x+2}$ ). Y así sucesivamente podríamos ir estableciendo las relaciones entre los individuos de cada edad y los supervivientes a la siguiente edad, de tal forma que si se supone como edad límite para los miembros del colectivo  $w$  (lo que equivale a decir que  $l_w = 0$ ) podríamos decir que:

$$l_{w-1} = d_{w-1} + l_w = d_{w-1}$$

En resumen, pues, se tiene que:

$$\begin{aligned} d_x &= l_x - l_{x+1} \\ d_{x+1} &= l_{x+1} - l_{x+2} \\ d_{x+r} &= l_{x+r} - l_{x+r+1} \\ d_{w-1} &= l_{w-1} - l_w \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por supuesto, el fenómeno de la mortalidad provoca que el colectivo  $l_x$  se vea sometido a un proceso monótono de eliminación, ya que:

$$l_x \geq l_{x+1} \geq l_{x+2} \dots \geq l_{w-1} \geq l_w$$

Si sumamos ordenadamente en (2.1), y teniendo en cuenta que  $l_w = 0$

$$d_x + d_{x+1} + \dots + d_{w-1} = l_x$$

Es decir:

$$l_x = \sum_{h=0}^{h=w-1-x} d_{x+h}$$

Lo que corrobora la afirmación de que se toma el grupo  $l_x$  para analizarlo hasta su extinción. Este resultado, por lo demás, es completamente lógico ya que siendo la muerte el único riesgo al que se supone sometido a los individuos que constituyen  $l_x$ , y no admitiendo que se verifiquen nuevas incorporaciones a este grupo a partir del momento inicial de observación  $t_0$ , la suma total de fallecimientos a todas las edades, a partir de la  $x$  y hasta el límite  $w$ , es igual al número inicial de individuos vivos a la edad  $x$ .

En virtud de ello, las tablas de supervivencia, que en sentido estricto deben denominarse tablas de supervivencia y mortalidad, son fundamentales para determinar las consecuencias del riesgo.

### 2.2.2. Probabilidades de vida y muerte sobre una cabeza.

Supongamos un individuo de edad  $x$  perteneciente al colectivo  $l_x$ . Este individuo puede verse afectado única y exclusivamente por uno de estos dos sucesos:

- a) Fallecer antes de cumplir la edad  $x+1$ , entonces forma parte del colectivo  $d_x$ .

b) Sobrevivir y cumplir la edad  $x+1$ , entonces forma parte de  $l_{x+1}$ .

Pueden establecerse unas frecuencias resultantes de comparar el número de personas que alcanzan la edad  $x+1$ , con el de personas de edad  $x$ . Esta frecuencia con respecto al suceso "sobrevivir un año más una persona de edad  $x$ ", se presenta (con referencia a la observación estadística) como el cociente de dividir el número de casos favorables  $l_{x+1}$  entre el número de casos posibles  $l_x$ . Esto nos lleva a interpretar este cociente como la probabilidad de supervivencia al cabo de un año de una persona de edad  $x$ :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

De forma análoga se establecería la frecuencia que surge al comparar el número de personas que fallecen a la edad  $x$ , respecto de la frecuencia de los que tienen esa edad:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Llamaremos  $q_x$  a la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  fallezca y  $p_x$  a la de que sobreviva; con este planteamiento nos hallamos, evidentemente, ante un suceso dicotómico, expresado por un esquema binomial o de Bernouilli. Luego ambas probabilidades son complementarias y por consiguiente:

$$p_x + q_x = 1 \quad (2.2)$$

Análogamente representamos por:

${}_n p_x$  = probabilidad de que un individuo de edad  $x$  alcance la edad  $x+n$ .

${}_n q_x$  = probabilidad de que un individuo de edad  $x$  fallezca antes de cumplir la edad  $x+n$ , es decir, dentro de los  $n$  años.

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.3)$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad (2.4)$$

Es evidente que todo individuo del colectivo  $l_x$  se verá incluido en una —y sólo una— de estas categorías, de donde:

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1 \quad (2.5)$$

Pero  $l_x - l_{x+n}$  recoge la diferencia entre los individuos vivos a la edad  $x$  y los vivos a la edad  $x+n$ , luego será la suma de los fallecidos en ese período; en efecto:

$$l_x - l_{x+n} = d_x + d_{x+1} + \dots + d_{x+n-1} = \sum_{h=1}^n d_{x+h-1} \quad (2.6)$$

Según esto, también podríamos expresar  ${}_nq_x$  así:

$${}_nq_x = \sum_{h=1}^n \frac{d_{x+h-1}}{l_x} \quad (2.7)$$

En definitiva,  ${}_nq_x$  expresa la relación entre los fallecidos durante los n años y los vivos a la edad x.

También tiene interés establecer la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en el transcurso del año n, esto es, a la edad x+n-1. Representamos esta probabilidad por  ${}_{n-1}/q_x$  y la definiremos como el cociente entre los fallecidos en ese año, o sea, con la edad x+n-1, pero sin haber cumplido la x+n, y los individuos vivos a la edad x. Es decir:

$${}_{n-1}/q_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta que  $d_{x+n-1} = l_{x+n-1} - l_{x+n}$

$${}_{n-1}/q_x = \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} = {}_{n-1}p_x - {}_n p_x \quad (2.9)$$

A partir de (2.8) podríamos llegar a la siguiente expresión de (2.7):

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{\sum_{h=1}^n d_{x+h-1}}{l_x} = \frac{d_x + d_{x+1} + \dots + d_{x+n-1}}{l_x} = \\ &= \frac{d_x}{l_x} + \frac{d_{x+1}}{l_x} + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} = q_{x+1}/q_x + \dots + {}_{n-1}/q_x \end{aligned}$$

Lo que permite afirmar que

$${}_nq_x = \sum_{h=1}^n {}_{h-1}/q_x \quad (2.10)$$

Es claro que para n=1,

$${}_{n-1}/q_x = {}_0/q_x = q_x$$

La expresión (2.10) permite afirmar que la probabilidad de fallecer durante los n años es igual a la suma de las probabilidades respectivas de fallecer en cada uno de ellos.

La expresión (2.3) aplicada a otras edades base permite escribir, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
p_{x+1} &= \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \\
p_{x+2} &= \frac{l_{x+3}}{l_{x+1}} \\
&\dots\dots\dots \\
p_{x+n} &= \frac{l_{x+n-1}}{l_{x+n}}
\end{aligned}$$

Es fácil interpretar estas relaciones. Por ejemplo,  $p_{x+n}$  expresaría la probabilidad de que un individuo de edad  $x+n$  sobreviviera a la edad  $x+n+1$ . A las relaciones de este tipo las denominaremos "tantos de supervivencia para la edad  $x+n$ ". Adviértase que el conocimiento de estos tantos "ex post", procede de la información estadística de que dispongamos, mientras que el conocimiento de las probabilidades, teniendo en cuenta el carácter del modelo que corresponde a  $l_x$ , será "ex ante".

Pues bien, a la vista de lo que antecede podemos expresar  ${}_n p_x$  así:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \dots\dots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = p_x p_{x+1} p_{x+2} \dots p_{x+n-1} \tag{2.11}$$

Esto, por otra parte, es lógico, puesto que, en virtud del postulado de independencia, adoptado con anterioridad, y habiendo sido considerados los tantos como probabilidades referidas a cada año,  ${}_n p_x$  podría ser considerada como probabilidad de un hecho compuesto; y, siendo los hechos simples estocásticamente independientes, esa probabilidad compuesta será igual al producto de las probabilidades de los hechos simples, tal y como pone de manifiesto la expresión (2.11).

De la misma forma que hemos establecido los tantos anuales de supervivencia, podemos establecer los tantos anuales de mortalidad:

$$q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} \tag{2.12}$$

Puede advertirse que:

$q_{x+n}$  = tanto anual de mortalidad a la edad  $x+n$ .

$d_{x+n}$  = número de fallecidos durante el año  $n+1$ , ó sea con la edad  $x+n$ , pero sin alcanzar la edad  $x+n+1$ .

$l_{x+n}$  = número de individuos vivos con edad  $x+n$ . Esta relación evidencia que el tanto anual de mortalidad a la edad  $x+n$ , conocida también como "ex post", es igual al cociente entre el número de fallecidos con edad  $x+n$  y el número de vivos a tal edad.

### 2.2.3. Funciones biométricas: ley de supervivencia.

Se puede considerar un grupo de cabezas nacidas simultáneamente como  $l_0$  pruebas de un suceso que presenta dos modalidades diferentes: la cabeza alcanza la edad  $x$ , acontecimiento

de probabilidad  ${}_x p_0$ , o fallece antes de  $x$  años, acontecimiento de probabilidad  ${}_x q_0 = 1 - {}_x p_0$ .

El valor medio o valor probable del número de cabezas, de entre las  $l_0$ , que alcanzan la edad  $x$ , se obtendrá por tratarse del problema de pruebas repetidas, multiplicando el número de pruebas por la probabilidad correspondiente, es decir, será:

$$l_x = l_0 \cdot {}_x p_0 \quad (2.13)$$

El conocimiento de los valores:

$$l_0, l_1, l_2, \dots, l_w$$

ha permitido calcular las probabilidades de supervivencia y ahora, a partir de la expresión (2.13), es posible estimar los valores  $l_x$ , dadas dichas probabilidades.

El mismo razonamiento podría haberse efectuado, para un grupo de  $l_x$  personas, respecto al suceso alcanzar la edad  $x+t$ , acontecimiento de probabilidad  ${}_t p_x$ , o respecto al suceso fallecer antes de  $t$  años, cuya probabilidad es  ${}_t q_x$ . Siendo  $l_x$  el número de pruebas o número total de personas del grupo de referencia, la variable aleatoria número de personas de edad  $x$  que alcanzan la edad  $x+t$  puede tomar los valores

$$0, 1, 2, 3, \dots, l_x$$

y su valor probable es, como antes, el producto del número de pruebas por la probabilidad, esto es

$$l_{x+t} = l_x \cdot {}_t p_x = l_0 \cdot {}_x p_0 \cdot {}_t p_x$$

igualdad de la que se deduce el valor de la probabilidad:

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_0 \cdot {}_x p_0} \quad \text{o bien} \quad {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

#### 2.2.4. Probabilidades de supervivencia y mortalidad referentes a un grupo de dos cabezas.

Puede ocurrir que el fenómeno de la supervivencia afecte a dos cabezas y las operaciones de seguro impliquen a ambas. Previamente a realizar valoraciones hay que definir las correspondientes probabilidades.

En el supuesto de que las probabilidades de vida y muerte de dos cabezas de edades  $x$  e  $y$  sean independientes, podemos establecer ahora, basándonos en los principios de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta, las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que **ambas** sobrevivan al cabo de  $n$  años:

$${}_n P_{xy} = {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

y en particular, para  $n = 1$

$$P_{xy} = P_x P_y$$

b) Probabilidad de que **ninguna** de las dos viva más de n años:

$${}_n q_{xy} = {}_n q_x \cdot {}_n q_y = (1 - {}_n P_x)(1 - {}_n P_y)$$

para n = 1:

$$q_{xy} = q_x \cdot q_y$$

c) Probabilidad de que no vivan **las dos** más de n años.

Este suceso se presenta bajo las siguientes modalidades:

	Probabilidad
I. La cabeza x muere antes de los n años y sobrevive la y.....	${}_n q_x \cdot {}_n P_y$
II. La cabeza y muere antes de los n años y sobrevive la x.....	${}_n P_x \cdot {}_n q_y$
III. Ninguna de las dos vive más de n años.....	${}_n q_{xy} = {}_n q_x \cdot {}_n q_y$

Por tanto la probabilidad de que no vivan las dos más de n años es:

$$\begin{aligned} {}_n q_{xy} &= {}_n q_x \cdot {}_n P_y + {}_n P_x \cdot {}_n q_y + {}_n q_x \cdot {}_n q_y = (1 - {}_n P_x) {}_n P_y + {}_n P_x (1 - {}_n P_y) + (1 - {}_n P_x)(1 - {}_n P_y) = \\ &= (1 - {}_n P_x) ({}_n P_y + 1 - {}_n P_y) + {}_n P_x (1 - {}_n P_y) = 1 - {}_n P_x + {}_n P_x - {}_n P_x \cdot {}_n P_y = 1 - {}_n P_x \cdot {}_n P_y = \\ &= 1 - {}_n P_{xy} \end{aligned}$$

A este resultado podía haberse llegado directamente sin más que observar que el suceso en cuestión es el contrario del que ambas vivan más de n años, con lo cual

$${}_n q_{xy} = 1 - {}_n P_{xy}$$

Cuando n = 1

$$q_{xy} = 1 - P_{xy}$$

d) La probabilidad de que al cabo de n años viva alguna de las dos cabezas, es la probabilidad del suceso contrario al que no vivan ninguna de las dos; por lo tanto:

$${}_n P_{xy} = 1 - {}_n q_{xy} = 1 - (1 - {}_n P_x)(1 - {}_n P_y) = {}_n P_x + {}_n P_y - {}_n P_{xy}$$

y para n = 1

$$P_{xy} = P_x + P_y - P_{xy}$$

Esta probabilidad  ${}_n P_{xy}$  también puede enunciarse como la probabilidad de que al cabo de  $n$  años viva por lo menos una de las dos cabezas.

e) Probabilidad de que al cabo de  $n$  años viva solamente una cualquiera de las dos cabezas.

El suceso presenta dos modalidades:

- Que viva "x" y haya muerto "y", cuya probabilidad es:  ${}_n P_x \cdot {}_n q_y$
- Que viva "y" y haya muerto "x", cuya probabilidad es:  ${}_n P_y \cdot {}_n q_x$

La probabilidad buscada es, pues,

$${}_n P^1_{xy} = {}_n P_x \cdot {}_n q_y + {}_n P_y \cdot {}_n q_x = {}_n P_x (1 - {}_n P_y) + {}_n P_y (1 - {}_n P_x) = {}_n P_x + {}_n P_y - 2 {}_n P_x P_y$$

es decir:

$${}_n P^1_{xy} = {}_n P_x + {}_n P_y - 2 {}_n P_{xy}$$

Resulta, pues, que las probabilidades de supervivencia y mortalidad de un grupo de dos cabezas pueden ser expresadas en función de las de una sola cabeza.

### 3. TABLAS DE MORTALIDAD Y SUPERVIVENCIA

#### 3.1. Concepto y tipología.

La evolución de una población, que permita ver su volumen y estructura por edades a lo largo del tiempo, depende de una serie de factores entre los que hay que destacar la fecundidad, la mortalidad y los fenómenos migratorios.

Cuando se proyecta una población se exige estudiar el comportamiento futuro de esos fenómenos, centrándonos en la mortalidad. El mejor instrumento para medir este fenómeno en una población es la tabla de mortalidad, que consiste en la serie cronológica que expresa la reducción progresiva de un grupo inicial de individuos, de la misma edad, por efecto de su fallecimiento. La existencia de tablas de mortalidad se basa en la Ciencia Actuarial, en cuanto que modeliza la ocurrencia de un suceso: en este caso, el fallecimiento de un individuo de edad  $x$ .

Los estudios de mortalidad, que permiten analizar la evolución futura de una población mediante la realización de proyecciones, están adquiriendo cada vez más importancia. Un estudio de este tipo consta de varias etapas. En primer lugar, hay que efectuar una valoración detallada de la mortalidad experimentada por la población objeto de análisis. Al hacerlo hay que prestar especial atención a la evolución reciente (en los decenios precedentes a la fecha del análisis). En segundo lugar, se plantean una serie de hipótesis sobre el comportamiento esperado de las variables en el futuro. A continuación, se aplica el modelo matemático que mejor se ajuste a los elementos que configuran la tabla de mortalidad. Finalmente, se completa la tabla con el resto de los elementos que la componen, desagregando por edad y sexo.

Las probabilidades básicas de muerte y supervivencia se calculan, fácilmente, a partir de la ley de mortalidad y de las correspondientes expresiones analíticas de la función de supervivencia. El tipo de función que se elija depende de los datos observados, así como de las hipótesis que se formulen.

Se pretende encontrar una “ley universal de mortalidad” que sea válida para cualquier población, pero eso es prácticamente imposible. Sin embargo, para determinadas poblaciones y ciertos tramos de edad, es posible encontrar el ajuste a alguna ley teórica (la más típica es la ley de Makeham). En la práctica, no se considera una única función para todas las edades, sino que se buscan las funciones que se adapten a intervalos delimitados oportunamente, como puedan ser el tramo de las edades infantiles o el de las extremas.

Aunque genéricamente se habla de tablas de mortalidad, en realidad habría que diferenciar entre:

Una **tabla de mortalidad**, que es una colección de valores del número de fallecimientos que, a cada edad, se han verificado entre un grupo de  $L$  individuos con una edad inicial preestablecida, de ordinario la edad 0.

Una **tabla de supervivencia** que es la colección de valores del número de supervivientes, a cada edad, entre un grupo de  $L$  individuos de la misma edad.

Como es lógico, de una tabla de supervivencia se obtiene inmediatamente una de mortalidad, ya que el número de fallecimientos de personas de  $x$  años de edad viene dado a partir de los supervivientes a las edades  $x$  y  $x+1$ , mediante la diferencia:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Con lo cual:  $d_0 = L - l_1$  ,,  $d_1 = l_1 - l_2$  ,,  $d_2 = l_2 - l_3$ , ... (3.1)

Siendo además:  $L = d_0 + d_1 + d_2 + \dots$

Puede obtenerse ahora

$$l_1 = L - d_0$$
 ,,  $l_2 = l_1 - d_1$  ,,  $l_3 = l_2 - d_2$  ,, ... (3.2)

Igualdades que permiten construir la tabla de supervivencia a partir de la de mortalidad.

Ambas clases de tablas se conocen con el nombre de **tablas demográficas**.

En las tablas suelen presentarse los valores de  $q_x$ , tanto anual de mortalidad, y  $p_x$ , tanto anual de supervivencia.

Ahora bien, los distintos grupos de personas observados estadísticamente para obtener las frecuencias  $d_x/l_x$  han de ser evidentemente homogéneos, es decir, de las mismas características respecto a una serie de causas que influyen en la mortalidad:

- a) Las estadísticas demográficas han puesto de manifiesto que la mortalidad varía con el sexo, lo cual ha conducido al establecimiento de tablas distintas para hombres y para mujeres.
- b) La profesión y el clima, entre otras, son circunstancias que ejercen influencia sobre la mortalidad. Sin embargo, sobre este punto no hay estadísticas abundantes y de garantía. Esto se debe a que las compañías de seguros son casi las únicas entidades que tienen interés en un estudio profundo de la mortalidad aunque, por razón de la composición de su clientela, no tiene para ellas gran importancia la cuestión de la profesión y el clima. En

efecto, la profesión puede variar en el transcurso del contrato de seguro. En cuanto al clima, la compañía inicia sus operaciones en su propio país y, eventualmente, las extiende luego a otros países con análogas condiciones de vida; lo que hace innecesario la utilización de tablas diferentes. En consecuencia, la solución implementada por las aseguradoras consiste en insertar cláusulas restrictivas en el contrato, excluyendo profesiones particularmente peligrosas y climas reputados universalmente de malsanos.

Por otro lado, las tablas de mortalidad resultan una herramienta esencial para dos tipos de investigadores. En primer lugar para los actuarios, que las utilizan en el ejercicio de su profesión, ya sea en el cálculo de primas y provisiones matemáticas en los seguros de vida, en la confección de bases técnicas, en los planes y fondos de pensiones y en general en todos los estudios sobre previsión social. En segundo lugar, para los demógrafos, quienes las emplean para conocer la estructura de una población en un momento dado, para comparar unas poblaciones con otras o para efectuar proyecciones.

Asimismo, la elaboración de tablas de mortalidad compete a distintas instituciones. Entre otros: organismos públicos (el INE, en el caso español, la ONU, a nivel internacional), compañías de seguros y reaseguros, Universidades y colegios profesionales (Instituto de Actuarios Españoles, en nuestro país).

Las tablas de mortalidad se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios. Entre otros:

**a) De generación o de momento.**

Una tabla de mortalidad de generación surge a partir del análisis longitudinal de una generación concreta. Se parte del volumen de personas que compone inicialmente la cohorte, registrando los fallecimientos que se van produciendo y la edad a la que tienen lugar, hasta su extinción. Esto supone tener que esperar más de un siglo para su elaboración. Sólo algunos países como Francia, Suecia o Inglaterra y Gales disponen de este tipo de tablas.

Las tablas de momento son una aplicación del análisis transversal al estudio de la mortalidad. El procedimiento consiste en observar los fallecimientos de una población producidos a lo largo de varios años (2 ó 4 generalmente) y aplicar, las probabilidades de muerte resultantes, a una generación ficticia. Esta generación tendría, a cada edad, el comportamiento observado en la población real de partida que, no obstante, está formada por un gran número de cohortes.

Las tablas de momento son las más utilizadas ya que, por un lado, no requieren tanto tiempo para su elaboración como las longitudinales y, por otro, incorporan información actualizada sobre las condiciones de mortalidad de cualquier edad.

**b) Directa o derivada.**

La diferencia entre una y otra estriba en el tipo de herramientas estadísticas utilizadas en la elaboración de la tabla. En el primer caso se efectúa un empleo directo de los datos que se han recogido y ordenado, a través de la estadística descriptiva. En el segundo caso se emplean, además, técnicas estadísticas sofisticadas como ajuste de curvas, regresiones, modelos de supervivencia, etc.

**c) Abierta o cerrada.**

Una tabla de mortalidad abierta permite que se incorporen individuos al grupo inicial; no así en caso de ser cerrada.

**d) De único o múltiples decrementos.**

En el primer caso, el fallecimiento es el único motivo de salida, mientras que en el segundo puede haber otros motivos, como por ejemplo la invalidez.

**e) Para la población en general y para asegurados.**

Se ha comprobado, empíricamente, que la mortalidad de un grupo de personas que ha contratado un seguro es diferente a la de la población en general. Entre otras causas porque, si el seguro es de fallecimiento (un seguro temporal o un seguro vida entera), las compañías exigen un examen previo. En el caso de un seguro de supervivencia (una renta o un seguro diferido) es el propio asegurado quien juzga su estado de salud.

**f) Estática o dinámica.**

En una tabla estática, la probabilidad de supervivencia de un individuo no depende del tiempo físico (véase el epígrafe 2.1). Esto supone atribuir, a un individuo de 35 años de edad, la misma probabilidad de supervivencia en el siglo XIX o en la actualidad. En cambio, en una tabla dinámica la probabilidad de fallecimiento de un individuo, a una edad concreta, será tanto menor cuanto más moderna sea la generación a la que pertenece. De esta forma, se incorpora la posibilidad de que se pueda alargar la vida de una persona con el paso del tiempo (lo que la hace aproximarse a lo que ocurre en la realidad, gracias a las mejoras en las condiciones socioeconómicas, biológicas o médico-sanitarias de las sociedades).

**3.2. Tablas de mortalidad de asegurados.**

Siendo iguales todas las demás circunstancias, se ha comprobado que la mortalidad de un grupo de personas, que han contratado un seguro, es diferente de la de otro grupo cualquiera de la misma edad que no lo han contratado.

La razón de ello estriba en el hecho de que si el seguro suscrito es de muerte (la compañía paga la suma asegurada en caso de muerte del asegurado), el asegurado sufre antes de contratar el seguro un examen médico previo que garantiza a la compañía su estado normal de salud. Por lo tanto, la prima a pagar será menor porque el riesgo de fallecimiento es menor.

Si el seguro es de vida (la compañía paga la suma o sumas aseguradas si el contratante vive), el asegurado se juzga a sí mismo en condiciones de perfecta salud, ya que de otro modo no le interesaría el seguro. La prima a pagar será mayor porque el riesgo de supervivencia que tiene que cubrir la aseguradora es mayor.

Para todas las edades, los tantos de mortalidad de seguros de muerte son mayores que los de la tabla de vida. Dado que la diferencia es considerable, las compañías utilizan tablas diferentes para el cálculo de las primas, según que el seguro sea de muerte o de vida. También suelen aplicar distintas tarifas según que se el asegurado sea un hombre o una mujer. Como por lo general esta vive más que aquel, la prima que paga es menor si el seguro es de fallecimiento y mayor si es de supervivencia.

Para los seguros en caso de muerte, la visita médica previa es un obstáculo desde el punto de vista comercial, pese a lo cual la compañía no puede prescindir de ella, so pena de asegurar los peores riesgos.

Este hecho ha conducido a muchas compañías a construir tablas de mortalidad mediante observaciones estadísticas sobre su clientela, teniendo en cuenta no sólo la edad del

asegurado, sino también el tiempo transcurrido desde que suscribió el seguro; este tipo de tablas recibe el nombre de tablas seleccionadas.

Por otra parte, en algunos países existe un desarrollo bastante acusado de la longevidad. Las tasas de mortalidad se van reduciendo cada año, siendo previsible que esta tendencia se mantenga en el futuro (es el caso de España). En este contexto, la utilización de tablas estáticas puede originar problemas en las reservas técnicas, provocando diferenciales elevados en los primeros años, y reducidos o negativos en los últimos. En esta situación, sólo la utilización de tablas dinámicas puede garantizar el cumplimiento de los compromisos aceptados por la aseguradora.

### 3.3. Métodos de construcción de una tabla de mortalidad.

a) La construcción de una tabla de mortalidad puede efectuarse mediante **estadísticas mortuorias**, registrando a lo largo de un período de  $n$  años el número de fallecimientos ocurridos de personas de edad comprendida entre 0 y 1 año.

$$d_0^1, d_0^2, \dots, d_0^n \quad (3.3)$$

El de fallecimientos ocurridos de personas de edad comprendida entre 1 y 2 años:

$$d_1^1, d_1^2, \dots, d_1^n \quad (3.4)$$

Y así sucesivamente.

Reduciendo los  $n$  datos obtenidos para los fallecimientos entre 0 y 1 años a uno solo, que es la media aritmética de las observaciones (3.3); los datos referentes a los fallecimientos entre 1 y 2 años de edad, respecto a otro que sea la media aritmética de las observaciones (3.4), etc., se obtienen los números  $d_0, d_1, d_2, \dots$ .

Y a partir de éstos:

$$L = d_0 + d_1 + d_2 + \dots$$

Obteniéndose luego los valores  $l_1, l_2, l_3, \dots$

Este procedimiento fue seguido por el astrónomo Edmund Halley (1656-1742) a través de observaciones efectuadas en Breslau, publicando su tabla -la primera de esta clase- en 1693.

Este método tiene dos inconvenientes. Por un lado, supone una mortalidad constante en los distintos años 1, 2, ...,  $n$  que ha durado la observación; hipótesis falsa, pues los progresos de la medicina y de la higiene reducen la mortalidad. Por otro lado, no se tienen en cuenta los movimientos migratorios de la población, que es un factor de la máxima importancia.

b) También se han construido tablas de mortalidad a partir de los **censos de población**, registrando los números  $l_0, l_1, l_2, \dots$ , de personas con edades comprendidas entre 0 y 1 años, 1 y 2 años, etc., existentes en el momento de confeccionar el censo.

Admitiendo, como antes, una mortalidad constante a lo largo del tiempo, puede suponerse que las  $l_1$  personas registradas como vivas, con edades comprendidas entre 1 y 2 años, son las supervivientes de las  $l_0$  existentes en el período anterior; las  $l_2$  con edades comprendidas entre 2 y 3 años, son las supervivientes del grupo  $l_1$ , etc. De este modo se obtienen el número de fallecidos a cada edad  $y$ , por tanto:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

El método tiene, como es evidente, los mismos inconvenientes que el anterior.

c) Método de las **Compañías de Seguros**, para construcción de tablas de supervivencia a partir de observaciones efectuadas sobre su clientela.

Durante un período de tiempo largo, llamado período estadístico, que comprende 15 ó 20 años se tienen en cuenta, para cada edad  $x$ , no sólo los individuos que se aseguran, sino también los que con esa edad  $x$  están ya asegurados y los que, por muerte o por cualquier otra causa, cesan en el seguro.

De la ficha de datos que tiene la compañía para cada asegurado con edad comprendida entre  $x$  y  $x+1$  años, ésta puede deducir los siguientes valores:

- El número de ingresados al principio del periodo:  $S_x$ .
- El número de ingresados a lo largo del periodo:  $n_x$ .
- El número de existentes al final del periodo:  $e_x$ .
- El número de fallecidos durante el periodo:  $d_x$ .
- El número de eliminados por causas distintas a las de muerte:  $w_x$ .

Representando ahora con  $a$ , la edad entera más pequeña de todos los asegurados tomados en consideración, y con  $l_x$  el número de asegurados que alcanzan la edad  $x$  durante el período estadístico, será  $l_a = 0$ , pues la edad  $a$  la tienen, solamente, los asegurados insertos en la compañía durante el período y, siendo la más pequeña, no la alcanza ninguno durante el citado período.

El número  $l_x$  de asegurados, que durante el período estadístico alcanzan la edad  $x$ , se obtendrá aumentando a los  $l_{x-1}$  (que alcanzaron la edad  $x-1$ ) los  $S_{x-1}$  que ingresaron al principio del período y los  $n_{x-1}$  que lo hicieron durante el mismo, deduciendo los  $d_{x-1}$  fallecidos, los  $w_{x-1}$  eliminados por otras causas, y los  $e_{x-1}$  que alcanzan la edad  $x-1$ , precisamente al final del período de observación.

Será, pues:

$$l_x = l_{x-1} + S_{x-1} + n_{x-1} - (d_{x-1} + w_{x-1} + e_{x-1})$$

Dando, en esta igualdad, a  $x$  el valor  $a+1$  y teniendo en cuenta que  $l_a = 0$ , resulta:

$$l_{a+1} = S_a + n_a - (d_a + w_a + e_a)$$

Dando, luego, los valores sucesivos  $a+2, a+3, \dots, x$ , resulta del mismo modo:

$$l_{a+2} = l_{a+1} + S_{a+1} + n_{a+1} - (d_{a+1} + w_{a+1} + e_{a+1})$$

$$l_{a+3} = l_{a+2} + S_{a+2} + n_{a+2} - (d_{a+2} + w_{a+2} + e_{a+2})$$

.....

$$l_x = l_{x-1} + S_{x-1} + n_{x-1} - (d_{x-1} + w_{x-1} + e_{x-1})$$

Sumando, ahora, miembro a miembro todas estas igualdades, y simplificando:

$$l_x = \sum_{t=a}^{x-1} S_t + \sum_{t=a}^{x-1} n_t - \left( \sum_{t=a}^{x-1} d_t + \sum_{t=a}^{x-1} w_t + \sum_{t=a}^{x-1} e_t \right)$$

Conocido  $l_x$ , el tanto de mortalidad para la edad  $x$  es:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (3.5)$$

### 3.4. Ajuste de tablas de mortalidad.

#### 3.4.1. Ajuste gráfico

Considerando el cociente (3.5) como una expresión empírica de la probabilidad de muerte entre las edades  $x$  y  $x+1$ , el tanto de mortalidad así obtenido es llamado "tanto bruto" y es preciso estudiar la cuestión de cómo pueden corregirse los valores obtenidos para eliminar los errores accidentales cometidos en la recogida de los datos estadísticos.

Los valores de los tantos brutos pueden representarse en un gráfico de coordenadas cartesianas, en el que se tomen como abscisas las sucesivas edades y como ordenadas los valores hallados para los tantos de mortalidad  $q_x$ .

La sucesión de puntos obtenida es irregular, esto es, no es posible unirlos trazando una curva que no presente muchos puntos de inflexión.

Esta cuestión, que se presenta asimismo en otras observaciones estadísticas referidas a fenómenos de naturaleza muy diversa, se resuelve admitiendo la hipótesis de que las irregularidades observadas en los valores de la función son debidas a la existencia inevitable de errores accidentales en las observaciones y que su efecto se corrige tomando, como valores definitivos de la función, no los observados, sino los correspondientes a una cierta curva  $C$  próxima a los valores experimentales. Esta curva recibe el nombre de curva ajustada a los valores brutos resultantes, directamente, de la observación o experiencia efectuada.

En el caso de los tantos de mortalidad, el ajuste es indispensable no sólo por la corrección de errores, sino también por la dificultad e inconvenientes que tendría el uso de tantos de mortalidad que variasen irregularmente de una edad a otra. En efecto, las irregularidades observadas a cada edad se trasladarían, inevitablemente, a las primas calculadas en cada seguro.

El ajuste gráfico consiste, pues, en definitiva en representar los valores experimentales:

$$q_0^1, q_1^1, q_2^1, \dots, q_x^1, \dots$$

De los tantos de mortalidad para las diferentes edades  $y$ , seguidamente, trazar una curva continua que pase por las proximidades de los puntos así obtenidos. Acto seguido se toman como valores ajustados de los distintos tantos las ordenadas correspondientes a los puntos de la curva.

Como es natural, este procedimiento de ajuste permite una gran arbitrariedad en el trazado de la curva ajustada; de ahí que se haya recurrido a otros procedimientos que estudiamos a continuación.

### 3.4.2. Ajuste analítico.

Los métodos de ajuste analítico persiguen la determinación de una expresión analítica adecuada para la función de supervivencia  $l(x)$ .

En el año 1700, De Moivre propuso una función lineal decreciente de la forma

$$l(x) = 86 - x$$

considerando 86 años como edad extrema de la vida.

Gompertz (1825) considera que el tanto instantáneo de mortalidad  $m(x)$  sufre, en el intervalo infinitesimal  $(x, x+dx)$ , un incremento proporcional a  $m(x)$  por causa de la progresiva debilitación del organismo con el tiempo.

$$dm(x) = m(x)dx$$

Llegando a una expresión del tipo:

$$l(x) = K g^{c^x}$$

Makeham (1860) utiliza también la misma hipótesis de Gompertz en lo referente al incremento del tanto anual de mortalidad. Además, añade la consideración de un incremento constante proporcional a  $d_x$  debido simplemente al azar. Así, pues:

$$dm(x) = m(x)dx + bdx$$

De manera que la ley de supervivencia de Makeham toma la forma:

$$l(x) = K s^x g^{c^x}$$

La ley de Makeham ha sido y es la más utilizada para la representación analítica de la supervivencia. Las constantes que figuran en ella se determinan a partir de los valores experimentales de  $l(x)$ , operación que recibe el nombre de ajuste de la ley de Makeham, operación en la que no entremos por la naturaleza de esta obra.

A partir del conocimiento numérico de  $l(x)$  pueden calcularse fácilmente los valores  $p_x$  y  $q_x$  que completan la tabla de mortalidad.

Las ventajas del ajuste analítico sobre los otros métodos estriban en que la forma de la función adoptada viene determinada, como en caso de las leyes de Gompertz y Makeham, por la condición de satisfacer determinadas hipótesis sobre la mortalidad, circunstancia que no se da en otros métodos de ajuste.

### 3.4.3. Determinación práctica de una tabla de mortalidad. La tabla INE-2004.

El análisis teórico de la supervivencia parte de la evolución de una generación, según el número de fallecidos a cada edad, a lo largo de las líneas de vida según el esquema que se expone:

$L$  = número de nacimientos en el año  $t$ .

$d_0$  = número de fallecidos de esa generación con edades comprendidas entre 0 y 1 años (0 años cumplidos y no llegar al año cumplido).

$d_1$  = número de fallecidos de esa generación con 1 año cumplido y sin llegar a 2 años.

$d_x$  = número de fallecidos con edad  $x$ .

A partir de lo anterior, es evidente lo siguiente:  $L = \sum_{x=0}^{\omega} d_x$   $\omega$  edad límite

Una vez conocido el número de fallecidos a cada edad se puede conocer la probabilidad  $q_x$  de fallecer a la edad  $x$  de esa generación:

$$q_0 = \frac{d_0}{L}$$

$$q_1 = \frac{d_1}{L - d_0}$$

.....

$$q_x = \frac{d_x}{L - d_0 - d_1 - \dots - d_{x-1}}$$

.....

$$q_{\omega} = 1$$

A partir de aquí, la probabilidad  $p_x$  de sobrevivir un año a la edad  $x$  será:

$$p_x = 1 - q_x$$

Otro elemento de una tabla de mortalidad lo constituye el número de supervivientes a la edad  $x$ , que se representa por  $l_x$ . En la tabla de mortalidad, una vez estimado el valor definitivo de los  $q_x$ , se construye la evolución de una generación ficticia que normalmente empieza con 100.000 habitantes:

$$l_0 = 100.000$$

$$l_1 = \frac{L - d_0}{L} \cdot 100.000 = (1 - q_0) \cdot 100.000$$

$$l_2 = \frac{L - d_0 - d_1}{L} \cdot 100.000 = (1 - q_0)(1 - q_1) \cdot 100.000$$

$$l_x = \frac{L - d_0 - d_1 - \dots - d_{x-1}}{L} \cdot 100.000 = \left( \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i) \right) \cdot 100.000$$

$$l_{\omega} = \frac{L - \sum_x d_x}{L} \cdot 100.000 = 0$$

Suele ser usual que con la tabla de mortalidad aparezcan tabuladas, además de las series  $q_x$ ,  $l_x$  y  $p_x$  que acabamos de ver, la esperanza de vida a la edad  $x$ ,  $e_x$ :

$$e_0 = \sum_{x=0}^{\omega} \left( x + \frac{1}{2} \right) d(x, x+1) = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} d(x, x+1) + \sum_{x=0}^{\omega} x d(x, x+1) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{\omega} x \left( \frac{l_x - l_{x+1}}{100.000} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{\omega} \frac{l_x}{100.000}$$

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{j=x+1}^{\omega} l_j$$

En ocasiones se utiliza la variable **calendario de la mortalidad**, que se define como la probabilidad de vivir hasta la edad  $x$  y morir antes de cumplir la  $x+1$ ,  $d(x, x+1)$ :

$$d(x, x+1) = \frac{d_x}{L} = p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_{x-1} \cdot q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{100.000}$$

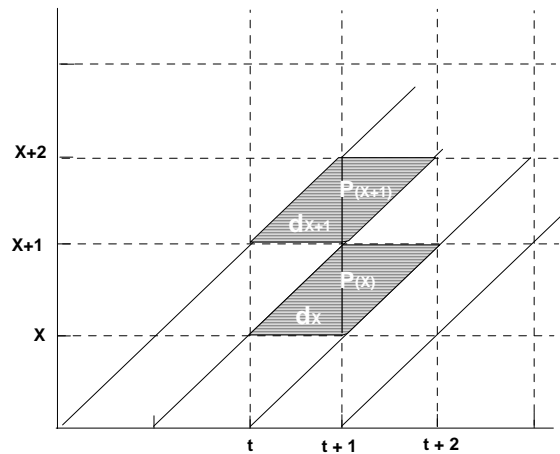
Según esto, se cumple que:

$$\sum_x d(x, x+1) = \frac{\sum_x d_x}{L} = \frac{L}{L} = 1$$

Que representa la probabilidad de morir a alguna edad.

Aunque el esquema anterior sigue la evolución de un conjunto de personas desde una edad concreta hasta su extinción, pocas son las tablas que se elaboran aplicando un análisis longitudinal (como se ha señalado en el epígrafe 3.1). Esta circunstancia, no obstante, no invalida el procedimiento expuesto. En la práctica se utilizan los fallecimientos ocurridos durante 2 años consecutivos (excepcionalmente en 4 años), en una población determinada, para generar una generación ficticia que conforma la tabla de mortalidad. El procedimiento sigue alguno de estos dos esquemas:

a) Caso en que se dispone del número de fallecidos, por edad y generación, en dos años consecutivos y también de la población por edades al final del primer año. La representación gráfica de este supuesto es:



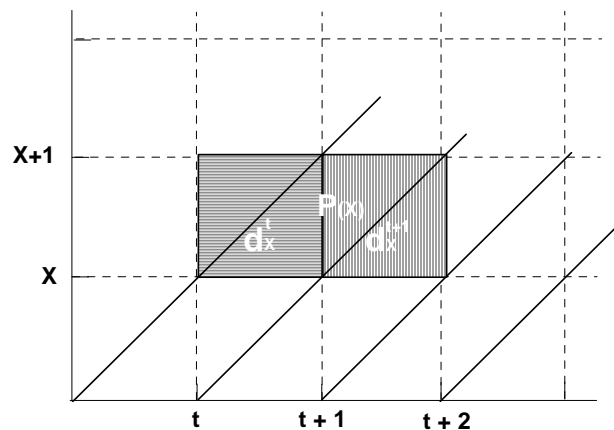
Donde una estimación de  $q_x$  a partir de una generación  $g$  concreta es:

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{P(x) + \frac{d_x}{2}}$$

Siendo  $P(x)$  la población de edad  $x$  de dicha generación  $g$  al final del año  $t$ .

b) Si sólo se conocen los fallecidos por edad, y no su generación, en dos años consecutivos

el esquema gráfico sería:



En este caso la estimación de  $q_x$  es:

$$\hat{q}_x = \frac{\frac{1}{2} (d_x^t + d_x^{t+1})}{P(x) + \frac{1}{2} \cdot d_x^t}$$

Es decir, hay que observar el número de fallecidos a cada edad durante dos años consecutivos. Si, en el momento del fallecimiento, además se conoce su generación se utiliza la fórmula propuesta en a). Si, como es muy frecuente, se conoce la edad al fallecimiento pero no la generación, se utiliza la fórmula propuesta en el punto b). Las cifras así obtenidas pueden presentar una serie de perturbaciones debido a que los datos sobre fallecidos clasificados por edades en algunos casos son de escasa magnitud y representan situaciones excepcionales de un año concreto.

Las fórmulas anteriormente expuestas sirven para todas las edades excepto para  $q_0$  y  $q_1$  y para las edades más avanzadas próximas a la edad límite de la tabla.

La hipótesis de que los fallecimientos se distribuyen de manera uniforme a lo largo del año natural, no es aplicable en el caso de menores de un año donde la muerte es más frecuente en las primeras semanas de vida, en estos casos se utiliza:

$$\hat{q}_0 = \frac{\alpha_0 d_0^t + \beta_0 d_0^{t+1}}{P(0) + \alpha_0 d_0^t}$$

Con:

$$\alpha_0 + \beta_0 = 1$$

Siendo  $\alpha_0$  la proporción de fallecidos, en el año  $t$ , con menos de un año de edad entre los nacidos en ese mismo año y  $\beta_0$  lo mismo referido al año  $t+1$ . Una formulación análoga se emplea para estimar  $q_1$ .

Las edades próximas al final de la tabla presentan también dificultades, debido a que las frecuencias observadas provienen de un colectivo poco numeroso. Generalmente, la estimación de las  $q_x$  correspondientes se efectúa a partir de ajustes de parábolas de tercer

grado, cuyos parámetros se obtienen de las observaciones para las edades más avanzadas, bajo el condicionante de que para la última edad considerada,  $w$ , sea  $q_w$  igual a 1.

Normalmente las frecuencias  $\hat{q}_x$  no presentan continuidad. Si se hace su gráfica aparecerán saltos de una edad a otra, de manera que si bien su perfil es similar al de una curva monótona creciente que toma valores entre 0 y 1, la realidad es que en muchos casos  $\hat{q}_x > \hat{q}_{x+1}$ .

Por tanto, como ya se comentó con anterioridad, las frecuencias observadas necesitan de un suavizado. Para ello existen distintos métodos. Uno de ellos consiste en ajustar la familia de curvas de Gompertz-Makeham a los valores  $\hat{q}_x$  obtenidos directamente de las observaciones.

Para ello, en primer lugar se divide el total de edades en tres tramos o más, en razón de su mejor ajuste a una curva teórica, y posteriormente se ajusta la curva del tipo:

$$\hat{q}_x = P^r(x) + \exp \{P^s(x)\}$$

Donde  $P^r(x)$  es un polinomio en  $x$  de grado  $r$ , y  $P^s(x)$  es asimismo un polinomio en  $x$  de grado  $s$ . Esta curva tiene  $r+1+s+1$  parámetros a estimar.

Otra posibilidad es ajustar curvas del tipo:

Más concretamente, un tipo de ajuste que suele dar resultados positivos es aplicar:

$$\hat{q}_x = \frac{P^r(x) + \exp \{P^s(x)\}}{1 + (P^r(x) + \exp \{P^s(x)\})}$$

$$\hat{q}_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \exp \{ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 \}$$

$$\hat{q}_x = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \exp \{ \alpha_4 + \alpha_5 x \}}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \exp \{ \alpha_4 + \alpha_5 x \}}$$

Para la probabilidad de muerte de varones y mujeres respectivamente.

Como ilustración, la hoja [INE-2004](#) del fichero del mismo nombre recoge la tabla de mortalidad elaborada por el INE, a partir de los datos de la población española, en el bienio 2004-2005. La tabla incorpora símbolos de conmutación y algunas operaciones de seguro cuyo significado se verá en los capítulos 7 y 8, así como en el anexo II.

## 4. TABLAS UTILIZADAS EN LA PRÁCTICA ASEGURADORA

Como ya se ha comentado en el epígrafe 3, un criterio fundamental que se sigue en el ámbito asegurador, consiste en distinguir las tablas de mortalidad atendiendo a la naturaleza del riesgo que cubren. En virtud de ello, se habla de tablas de mortalidad para caso de fallecimiento o para caso de supervivencia. Veamos, a continuación, las tablas de mortalidad más ampliamente utilizadas por las aseguradoras españolas, en la actualidad o en el pasado reciente. Están recogidas en el fichero [Tablas](#).

### 4.1. Tablas para caso de fallecimiento.

Dentro de este grupo encontramos las tablas de experiencia suiza GKM/F-80 y GKM/F-95. Las letras, con las que se identifican, corresponden a la expresión “GruppenKapitalversicherung – Männer / Frauen” (procedente del alemán) e informa de que son de aplicación a seguros de grupo, según que sean hombres o mujeres, respectivamente<sup>1</sup>. Los dígitos aluden al año en que estuvieron completadas.

Las tablas GKM/F-80, utilizadas hasta la entrada en vigor de las GKM/F-95, se constituyeron recogiendo la experiencia de 1.900.000 hombres y 260.000 mujeres durante el periodo 1971-75. La edad límite de la tabla fue 117 años en ambos sexos. En la tabla GKM-80 se puede observar el comportamiento habitual de la  $q_x$ , que crece con la edad. Así, el gráfico 1 (hoja [gkm80-95](#)) muestra un crecimiento, especialmente intenso, a partir de los 65 años. Aunque la gráfica parece indicar que la  $q_x$  apenas varía antes de esa edad, al observar el intervalo 15-50 (gráfico 2 de la misma hoja) se puede apreciar que la  $q_x$  tiene un suave crecimiento lineal entre los 15 y los 33 años, aproximadamente, y exponencial desde entonces.

Por su parte, las tablas GKM/F-95 utilizaron los datos aportados por 3.800.000 hombres y 1.540.000 mujeres en el periodo 1986-90. La edad límite de la tabla fue 120 años en los hombres y 126 en las mujeres. En la tabla GKM-95 se aprecia un comportamiento excepcional en la  $q_x$ : el riesgo de muerte crece en el tramo 15-17, desciende en el intervalo 18-29 y crece de ahí en adelante (véase gráfico 3 de la hoja [gkm80-95](#)). Este comportamiento se explica por la mayor mortalidad, debida a los accidentes, que afecta a los hombres observados entre el final de la adolescencia y el comienzo de la etapa adulta.

En virtud de ello, al comparar ambas tablas masculinas se observa que, en el tramo 15-33, el riesgo de muerte es mayor en la GKM-95 que en la GKM-80 (véase gráfico 4 de la hoja [gkm80-95](#)). En el tramo 34-∞ la situación es la contraria, reflejando el hecho de que, en el periodo 1986-90, las personas vivían más que quince años antes. Las diferencias son especialmente ostensibles a partir de los 80 años (véase gráfico 5 de la misma hoja), indicando que es en estas edades donde las ganancias de vida han sido mayores.

En el caso femenino se observa que, tanto en la GKF-80 como en la GKF-95, la  $q_x$  crece suavemente hasta los 45 años y exponencialmente a partir de entonces (véase gráfico 6 de la hoja [gkf80-95](#)). También se aprecia que la probabilidad de fallecimiento siempre es menor en la GKF-95 que en la GKF-80. La diferencia se hace más evidente a partir de los 90 años (véase gráfica 7 de la misma hoja).

---

<sup>1</sup> No obstante en nuestro país se aplicaron, tanto en seguros colectivos, como en seguros individuales.

Asimismo, al comparar las tablas GKM-95 y GKF-95 (en los gráficos 8 y 9 de la hoja [gkm-f95](#)) se puede observar que la  $q_x$  de la tabla de hombres siempre está por encima de la de mujeres.

#### **4.2. Tablas para caso de supervivencia.**

Las tablas GRM/F-80 (“GruppenRentenversicherung – Männer / Frauen”), también de origen suizo, se elaboraron a partir de la observación de 450.000 hombres y 160.000 mujeres en el periodo 1971-75. La edad límite de la tabla fue 117 años en ambos sexos. El empleo de estas tablas, en la actividad aseguradora española, se ha extendido a lo largo de dos décadas: las de los años 80 y 90. En las tablas masculinas, el riesgo de fallecimiento crece levemente en el intervalo 15-40 y, de forma acentuada, a partir de entonces. En cambio, en las femeninas, el crecimiento exponencial empieza más tarde, a los 51-52 años (véase gráfico 10 de la hoja [grm-f80](#)).

Por otro lado, al comparar la tabla de fallecimiento con la de supervivencia (por ejemplo en el caso masculino), se observa cómo la probabilidad de morir, a una edad dada, es siempre mayor en la GKM-80 que en la GRM-80, tal y como se dijo antes (ver gráficos 11 y 12 de la hoja [grm-gkm80](#)). Las diferencias se hacen apreciables a partir de los 45 años, resultando mayores en el tramo 75-105.

Lo lógico hubiera sido que las tablas GRM/F-80 hubieran sido sustituidas por las GRM/F-95, como ocurrió en las de fallecimiento. En la práctica esto no sucedió porque, debido a un cambio en la legislación suiza relativa a planes y fondos de pensiones, las rentas diferidas aplicables a los asegurados con edades comprendidas en el tramo 15-65, se reemplazaron por una capitalización pura hasta la edad de jubilación, momento en que la prestación se recibía en forma de renta. De manera que, en el colectivo de pensionistas que sirvió de base para construir las tablas, sólo había datos de fallecimiento a partir de los 65 años. En realidad, los datos utilizados en el tramo 15-64 en la GRM/F-95 fueron, en gran medida, los de la tabla GKM/F-95 (ver gráfico 13 de la hoja [gkm-grm95](#), para el caso masculino). Esta situación redujo el empleo de las tablas GRM/F-95 en nuestro país durante bastante tiempo, aunque en la actualidad las compañías las están empleando para calcular seguros diferidos.

Por otro lado, el artículo 34.1 del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, aprobado por Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, estableció los requisitos a cumplir por las tablas de supervivencia y mortalidad, a utilizar por las entidades aseguradoras. Entre otros exigió:

- Que dichas tablas estuvieran basadas en experiencia nacional o extranjera, ajustada a tratamientos estadístico-actuariales.
- Que el final del periodo de observación considerado para la elaboración de la tabla no fuera anterior, en más de 20 años, a la fecha de cálculo de los correspondientes compromisos.

Asimismo, la disposición transitoria segunda número 5 del citado reglamento estableció que, hasta no disponer de unas tablas nuevas de final de periodo de observación más reciente, se podrían utilizar las tablas GRM/F-80 para la cobertura de garantías de supervivencia, si bien corregidas con dos años menos de edad actuarial.

Esta situación transitoria se prolongó hasta el 15 de octubre del 2000, fecha en la que entró en vigor una resolución de la Dirección General de Seguros, aprobando las tablas PRM/F-2000

que daban cumplimiento a lo indicado en el artículo 34 del Reglamento. En la actualidad, las aseguradoras están utilizando estas tablas para calcular rentas, preferentemente.

### 4.3. Las tablas PERM/F-2000<sup>2</sup>.

#### 4.3.1. Elaboración.

Para su elaboración se formó una Comisión Técnica con expertos de la Dirección General de Seguros, el Instituto de Actuarios Españoles, UNESPA, Investigación Corporativa entre Entidades Aseguradoras (ICEA), la Dirección General de Ordenación de la Seguridad Social y el Instituto Nacional de Estadística. En febrero del 2000, UNESPA solicitó la colaboración de Swiss Re en el desarrollo de la tabla. Los técnicos de Swiss Re recibieron apoyo de expertos de la propia patronal y de otras reaseguradoras, como Munchener, Bayerische y Nacional de Reaseguros.

Las tablas PERM/F-2000 se conocen también como Tablas Generacionales Españolas de Supervivencia Masculina / Femenina. Esta última denominación denota su carácter dinámico, lo que permite que la probabilidad de fallecimiento dependa, no sólo de la edad y el sexo de la persona, sino también del año de nacimiento. El resultado es el cálculo de una tabla distinta para cada generación<sup>3</sup>.

El elemento fundamental de la tabla es la probabilidad de fallecimiento a una edad concreta  $x$ , en un año determinado  $t$ , denotada por  $q_{x,t}$  y cuyo cálculo se efectúa como sigue:

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} \cdot e^{-\lambda_x(t-t_0)} \quad (4.1)$$

El factor  $q_{x,t_0}$  representa *la mortalidad de base* (o probabilidad de fallecer en el año  $t_0$ ), mientras que la exponencial es el *factor de proyección* de la mortalidad, que permite anticipar una menor mortalidad futura, a través del *factor de mejora o tendencia*  $\lambda_x$ .

Como año al que referenciar la mortalidad de base se tomó el 2000 ( $t_0$  o año base). La mortalidad de base se estimó, entonces, a partir de la de la población española del año 1990 (elaborada por el INE), a la cual se le aplicaron, primero, unos factores de selección<sup>4</sup> y, segundo, unos factores de proyección durante 10 años (hasta el año 2000). Finalmente se establecieron unos márgenes de seguridad, también a partir de la experiencia suiza.

Como método para proyectar la mortalidad, sobre la existente en el año base, se escogió el exponencial, con un porcentaje fijo de mejora anual  $\lambda_x$ , variable en función de la edad del individuo en dicho año (2000). Estos factores de mejora se determinaron a partir de las tendencias observadas en las tablas de mortalidad del INE, en el periodo 1960-90, y después de aplicar sucesivos recargos de seguridad.

---

<sup>2</sup> Son tablas de supervivencia pero, por su especial importancia, se ha considerado oportuno abordarlas en un apartado específico.

<sup>3</sup> No debe confundirse este significado de tabla generacional con el que se utilizó al clasificar las tablas en el epígrafe 3.1. A tal efecto hay que decir que las tablas PERM/F-2000 son tablas de momento.

<sup>4</sup> Dichos factores de selección se emplearon en Suiza y se calcularon comparando la mortalidad de los seguros de grupo, en los años 1981-84, con la de la población en general en el periodo 1978-83. Se utilizaron en el caso español, en virtud de la similitud observada en la mortalidad de las poblaciones suiza y española.

Conceptualmente, el cálculo de la probabilidad de fallecimiento, a una edad concreta “x” y en un año “t” determinado, se efectúa proyectando, al año “t”, la probabilidad de fallecimiento que tendría una persona que cumpliera la edad “x” en el año 2000.

### 4.3.2. Composición y funcionamiento.

El resultado final fue la obtención de las tablas PERM/F-2000C, aplicables a las pólizas que estuvieran en la cartera de las compañías el 15 de octubre del 2000<sup>5</sup>, así como de las tablas PERM/F-2000P, con objeto de cubrir los riesgos derivados de la nueva contratación.

La información, referente a ambas tablas, se recoge en el fichero “[TABLAS PERM-F2000](#)”, que incluye otras hojas que se mencionan a continuación.

Empezaremos analizando las tablas PERM/F-2000C, que se recogen en la hoja [PERM-F2000C](#). A las tablas originales, facilitadas por la Dirección General de Seguros en Resolución de 3 de octubre de 2000, se ha añadido la segunda columna para facilitar su comprensión. Como se puede observar, constan de 6 columnas.

En la primera aparece el año de nacimiento, que empieza en el 2000 y termina en el año 1887. La segunda columna recoge la edad que tendría, en el 2000, un individuo nacido en cualquiera de esos años.

Las columnas tercera y cuarta, una para hombres y otra para mujeres, figuran bajo el encabezamiento *mortalidad base*  $q_x$ , e informan sobre el factor  $q_{x,t_0}$  de (4.1). Según esto, un hombre nacido en el año 2000 tiene una probabilidad de fallecer, en ese mismo año, de un 6,487 por mil. Si el hombre ha nacido en 1999, la probabilidad de que fallezca en el 2000 es 0,638 por mil. De igual forma, la probabilidad de que un hombre, con 2 años de edad, fallezca en el año 2000 es de 0,339 por mil. En el caso de un hombre nacido en 1960, la probabilidad de que fallezca con 40 años de edad es de 1,667 por mil. Por lo tanto, la combinación de la segunda y tercera columnas conforman una tabla de mortalidad, cuyo año de referencia  $t_0$  es el 2000. Obsérvese (gráfico 14) que la tendencia observada en dicha mortalidad base no siempre es la misma: desciende hasta los 10 años de edad, crece en el tramo 11-24, se producen continuos cambios en el periodo 25-37 (gráfico 15) y crece, de manera continuada, desde entonces. En el caso femenino, el comportamiento de la mortalidad de base es parecido, describiendo un crecimiento más lineal que el masculino y situándose, siempre, por debajo de éste. La magnitud de estas diferencias varía con la edad. Así, a los 10 años de edad la  $q_x$  masculina es 2,22 veces la femenina (0,185 frente a 0,083 por mil), a los 30 años el ratio es 3,89 (1,429 frente a 0,367), a los 60 años 2,68 (9,184 frente a 3,424) y a los 90 1,19 (145,575 frente a 121,868). (Se propone la elaboración de una gráfica que informe de las diferencias por edad).

Las dos últimas columnas contienen el *factor de mejora*  $\lambda_x$ , para cada sexo. Para los hombres, el factor de mejora de la mortalidad en el tramo 2000-1970 es nulo. En virtud de ello, se cumplirá lo siguiente:

$$q_{x,t} = q_{x,2000} \quad ; \text{ para } 0 \leq x \leq 30 \text{ y para cualquier } t \quad (4.2)$$

Esto significa que la probabilidad de fallecimiento de un hombre, a una edad concreta de 30 años o menos, será la que le correspondería a un hombre que tuviera dicha edad en el año 2000, con independencia del año t en que se efectúe el cálculo. Es decir, la tabla no contempla

<sup>5</sup> Fijando además, dicha resolución, la obligación de haber adaptado las provisiones matemáticas correspondientes a fecha 1 de enero de 2014.

mejoras futuras sobre la mortalidad del año 2000, para un hombre de 30 años de edad o menos. Ello se debe al fuerte incremento de la probabilidad de muerte, para las edades 15-40, que se observó en la tabla de mortalidad del INE de 1990 y que, como se ha indicado, se utilizó para el cálculo de  $\lambda_x$ . A partir de los 31 años de edad, el factor de mejora va creciendo paulatinamente hasta alcanzar un máximo de 0,013 en el tramo de edades 60-74 (véase gráfico 16). Ello supone que, por cada año que exceda al 2000, la ganancia de vida es de 0,013, de manera que cuanto mayor sea la distancia entre el año de cálculo “ $t$ ” y el año 2000, menor será la probabilidad  $q_{x,t}$ . Veamos un ejemplo. La probabilidad de que un hombre fallezca a la edad de 65 años en el año 2010 sería (en tanto por mil):

$$q_{65,2010} = q_{65,2000} \cdot e^{-\lambda_{65}(2010-2000)} = 14,533 \cdot e^{-0,013(10)} = 14,533 \cdot 0,8781 = 12,7614$$

La misma probabilidad pero calculada, ahora, en el 2040 y en el 2070 darían:

$$q_{65,2040} = q_{65,2000} \cdot e^{-\lambda_{65}(2040-2000)} = 14,533 \cdot e^{-0,013(40)} = 14,533 \cdot 0,5945 = 8,6401$$

$$q_{65,2070} = q_{65,2000} \cdot e^{-\lambda_{65}(2070-2000)} = 14,533 \cdot e^{-0,013(70)} = 14,533 \cdot 0,4025 = 5,8499$$

Con ello se observa el aspecto esencial de una tabla dinámica: para una edad concreta, la probabilidad de fallecimiento disminuye cuanto más moderna es la generación. No obstante, la reducción es cada vez menor. El elemento que explica esta tendencia es la exponencial, también llamada factor de proyección, que es una función decreciente y convexa respecto de  $z$  y  $t$ , siendo  $z$  la diferencia  $t-2000$  (véase gráfico 17 de la hoja [expo](#)):

$$\frac{\partial(e^{-\lambda_x z})}{\partial z} = \frac{-\lambda_x}{e^{\lambda_x z}} < 0; \quad \frac{\partial^2(e^{-\lambda_x z})}{\partial z^2} = \frac{\lambda_x^2}{e^{\lambda_x z}} > 0; \quad \text{para } z = t - 2000 \quad (4.3)$$

Desde 1925, el factor de mejora desciende hasta hacerse nulo, a partir del año de nacimiento de 1899 y anteriores.

En las mujeres, a diferencia de los hombres, las mayores ganancias de mortalidad se producen en el tramo de edades 0-10, con un factor de mejora de 0,04 por cada año que excede al 2000. Desde entonces se va reduciendo hasta valer cero en el año de nacimiento de 1901 y anteriores.

### 4.3.3. Comparación entre las tablas PERM/F-2000C, las PERM/F2000P y otras de supervivencia.

Por su parte, las tablas PERM/F-2000P se recogen en la hoja de cálculo [PERM-F2000P](#). En la hoja [P-C](#) se puede observar que la mortalidad base es mayor en las tablas C que en las P, tanto en hombres como en mujeres y con independencia de la edad. Lo contrario ocurre con el factor de mejora, que siempre es mayor en las tablas P que en las C.

Con objeto de conocer el comportamiento de las tablas P, se propone al alumno completar la tabla 1, observando las siguientes tendencias:

- Para una generación dada, un incremento de la probabilidad de fallecimiento conforme aumenta la edad.

- Para una edad dada, la reducción que se produce en el riesgo de fallecimiento cuanto más moderna es la generación.
- Las reducciones son mayores en las mujeres que en los hombres.
- Para una generación concreta, la probabilidad de fallecer a una edad dada es mayor en el hombre que en la mujer.

Las dos últimas circunstancias revelan el hecho de que la mujer vive más que el hombre y que la diferencia va a seguir ampliándose en el futuro.

**Tabla 1: Probabilidades de fallecimiento a edades concretas en tres generaciones, por sexo.**

Edad	Hombres: PERM-2000P			Mujeres: PERF-2000P		
	1950	1960	1970	1950	1960	1970
40	1,7149			0,6773		
50		2,8240			0,9501	
60			5,2413			1,4473
70						

Por otro lado, la tabla 2 incorpora las probabilidades de fallecimiento de las tablas GRM/F-80, para las cuatro edades analizadas.

**Tabla 2: Probabilidades de fallecimiento a edades concretas en tablas GRM/F-80, por sexo.**

Edad	Hombres	Mujeres
	GRM-80	GRF-80
40	2,011	1,672
50	4,946	2,213
60	10,757	4,444
70	25,647	15,002

Estas probabilidades son aplicables a cualquier generación, dada la naturaleza estática de dichas tablas. Al confrontarlas, por sexo, con las de las tablas dinámicas se aprecia que las diferencias son mayores cuanto más moderna es la generación con la que se comparan.

#### 4.3.4. Aplicación.

Hay dos formas diferentes de utilizar las tablas. La primera consiste en elaborar la tabla de la generación de un año “g” concreto. Para ello hay que ir dando valores a “x” y a “t” en (4.1), a partir de lo siguiente:

$$x = 0..w \qquad t = g + x \qquad (4.4)$$

Las hojas “[tabla generación hombres](#)” y “[tabla generación mujeres](#)” incorporan las tablas P, para una generación “g”, pudiendo variar dicha generación. Veamos, por ejemplo, la masculina para la generación del 2030. La tabla generacional, propiamente dicha, comienza en las tres últimas columnas: la columna “x” contiene la edad, que va desde los 0 a los 115 años; a continuación figura la columna  $q_{x,t}$  y, finalmente, la columna  $l_x$ . Las 5 columnas anteriores sirven para confeccionar la columna  $q_{x,t}$ . Esta se determina de la siguiente forma:

1. La segunda columna aporta la probabilidad de fallecimiento de una persona con “x” años de edad en el 2000. Es lo que se ha denotado con  $q_{x,t_0}$  en (4.1).
2. La tercera columna contiene el factor de mejora  $\lambda_x$  que le corresponde.
3. La cuarta columna recoge el año “t” para el que se va a calcular la probabilidad de fallecimiento  $q_x$ . Dicho año “t” será el resultado de sumarle la edad “x” a la generación “g”. Nótese, a este respecto, que cada edad “x” de la tabla corresponde a un año de calendario concreto y esta columna lo que hace es recoger dicho año.
4. La quinta columna recoge el factor de proyección de la mortalidad de (4.1), donde  $t_0$  es el año 2000.
5. Finalmente, la columna  $q_{x,t}$  de (4.1) se determina aplicando el factor de proyección a la mortalidad de la tabla base.

Obsérvese que la  $q_{x,t}$  se sitúa por debajo de la  $q_{x,t_0}$ , para aquellas edades en las que el factor de mejora es mayor que cero. Esto ocurre para  $x \leq 100$ , indicando que, para cualquiera de esas edades, la mortalidad estimada de la generación del 2030 será menor que la mortalidad base del 2000. Para las edades restantes, no hay ganancia de mortalidad en la generación del 2030, respecto a la de la tabla del 2000.

Por su parte la hoja “[tabla generación mujeres](#)” recoge la de las nacidas en 1970. Se puede observar que en los 29 primeros años, la  $q_{x,t}$  de esta generación es superior a la de la tabla del 2000, cuyo año de cálculo es siempre más moderno. Para la edad 30, el año de cálculo de la  $q_x$  es el mismo en ambas tablas: el 2000. De ahí que la  $q_x$  sea la misma: 0,325. A partir de entonces, el año de cálculo es más moderno en la tabla de la generación de 1970, que en la tabla base del 2000, lo que explica que la  $q_{x,t}$  de esta última sea mayor.

Una vez que se dispone de las columnas x,  $q_{x,t}$  y  $l_x$ , el resto de los elementos de la tabla para la generación “g” se confeccionan según se ha indicado en los epígrafes 2.2.2, 2.2.3. y 3.4.3.

Otra manera de emplear la tabla consiste en calcular una tabla para un año “t” concreto. Esta tabla sería análoga a la tabla base del año 2000, ya que se construye a partir del comportamiento de muchas generaciones. Así, la hoja “[tabla año hombres](#)” recoge, para el año 2030, la tabla PERM-2000P. En ella, la  $q_{x,t}$  viene referida, para cada edad, al año  $t = 2030$ . Al variar x se obtiene la probabilidad de fallecer, a cada edad, de diferentes generaciones. Su cálculo es el resultado de aplicar, a la  $q_x$  de la tabla del año 2000, el factor

de proyección que se genera a partir del factor de mejora  $\lambda_x$  y de la diferencia  $t-t_0$  que es fija ( $2030-2000 = 30$ ). Comparar con la hoja "[tabla año mujeres](#)".

## 5. TABLAS DE INVALIDEZ

La invalidez en España es una de las contingencias cubiertas, tanto en los programas de Seguridad Social, como en las distintas formas de previsión social y en los seguros privados.

La mayoría de las coberturas del riesgo de invalidez, tanto en los seguros privados como en los diversos regímenes de previsión complementaria, tienen definida la calificación de invalidez en los mismos términos que el Sistema de Seguridad Social. Incluso llega a ser previa la calificación de esta institución para el reconocimiento de este tipo de prestación. Por lo tanto, el análisis de esta contingencia en el sistema de la Seguridad Social constituye el punto de partida para el estudio del riesgo de invalidez en cualquier colectivo

A continuación, se hace una presentación teórica del modelo de invalidez y, después, una aplicación práctica sobre la base de los datos del Régimen General del Sistema de Seguridad Social.

### 5.1. Modelos teóricos de Invalidez.

Para modelizar el comportamiento de la invalidez, a través de las denominadas “tablas biométricas de invalidez”, se necesitan conocer aspectos tales como el orden de entrada en invalidez, la mortalidad de inválidos, el orden de eliminación de inválidos, etc. Para ello habrá que hacer referencia a lo siguiente:

- Colectivo asegurado
- Periodo de observación
- Fuentes estadísticas utilizadas
- Funciones biométricas utilizadas
- Determinación de los expuestos al riesgo
- Ley de supervivencia
- Elección de la función de ajuste
- Cálculo de los parámetros
- Corrección de ajustes

Para realizar las valoraciones actuariales de la contingencia de invalidez se utilizan, no sólo los valores financieros, sino también las correspondientes probabilidades de acaecimiento del hecho objeto de observación, en este caso la invalidez. Este cálculo de las probabilidades va ligado a las nociones fundamentales de orden y efectivos.

Denominaremos:

- **Orden** a un grupo de personas de la misma edad cuyo número varía bajo la acción de una sola causa de salida o de varias, a lo largo del tiempo. Si se trata de una sola

causa, el orden es simple; si se tienen en cuenta varias causas, el orden es compuesto.

- **Efectivo** a un grupo de personas de la misma edad, cuyo número varía a través del tiempo bajo la acción de una o varias causas de salida y entrada.

En el estudio de las prestaciones de invalidez se emplearán los siguientes principios básicos:

Al calcular el valor actual de las prestaciones por invalidez será preciso que el orden  $l_x$  de supervivientes permita distinguir los activos de los inválidos, es decir, las personas capaces de trabajar de las que no lo son. Con el paso del tiempo, cada uno de estos grupos evoluciona bajo los efectos de la mortalidad (la de los activos puede ser diferente a la de los inválidos) y por el paso del estado de actividad al de invalidez o del estado de invalidez al de actividad. A cada uno de estos sucesos se asociará una probabilidad.

Podemos llamar “modelo matemático para activos e inválidos” al esquema que permite representar la evolución, en el tiempo, de un grupo de personas distinguiendo las que son activas de las que no lo son. Si no se tiene en cuenta la “reactividad”, es decir el paso de inválido a activo nuevamente, se simplifican los cálculos y se habla de un **modelo práctico**. Por el contrario el **modelo racional** tiene en cuenta la reactividad.

Nuestras investigaciones se centran en un modelo práctico, puesto que la experiencia sobre el colectivo objeto de estudio ha demostrado que es mínima la posibilidad de que un trabajador, que pasa a la situación de invalidez, vuelva a la de actividad. En efecto, a pesar de estar regulada esta situación no es usual proceder a revisiones periódicas de la invalidez. Ello, unido a la precaria situación del mercado laboral para las edades más probables de invalidez, explica que el fenómeno de la reactivación no se verifique.

Para ello lo primero es realizar una serie de definiciones y notaciones. Considerando un orden simple  $l_x$  de supervivientes del que sólo se sale por una causa, la muerte, se puede descomponer  $l_x$  en dos partes:

- Un orden compuesto de los activos sobre los que se trata:
  - dos causas de salida, la muerte y la invalidez.
- Un efectivo de inválidos sobre los que se trata.
  - una causa de salida, la muerte.
  - una causa de entrada, la invalidez

En estas condiciones se dice que la descomposición de  $l_x$  sigue el modelo práctico, es decir, no tiene en cuenta la reactividad (o vuelta a la situación de actividad).

El número de personas que intervienen en el modelo práctico depende de las tres probabilidades independientes siguientes:

- $q_x$  para el fallecimiento de un activo
- $i_x$  para la invalidez de un activo
- $Q_x^i$  para el fallecimiento de un inválido

El paso de  $l_x$  a  $l_{x+1}$  según el modelo práctico se explica eliminando los individuos válidos que pasan a invalidez o fallecen en el periodo de observación:

$$l_{x+1} = l_x (1 - q_x) \cdot (1 - i_x)$$

En el caso de una aplicación del modelo racional, que supone tener en cuenta el paso de la situación de invalidez a validez o actividad, el orden simple  $l_x$  de supervivientes se descompone en dos partes:

- Un efectivo de activos afectados por:
  - dos causas de salida: la muerte y la invalidez
  - una causa de entrada: la reactividad.
- Un efectivo de inválidos afectados por:
  - dos causas de salida: la muerte y la reactividad.
  - una causa de entrada: la invalidez.

Este planteamiento no es objeto de estudio por el momento, centrándose el desarrollo posterior en el denominado modelo práctico.

## 5.2. Metodología aplicada al cálculo de las tasas de entrada en invalidez. Ajuste de una tabla por interpolación.

Se va a buscar una curva para ajustar a los datos de invalidez. Los cálculos se recogen en el archivo de Excel '[INTERPOLACIÓN invalidez total.xls](#)'. Disponemos de una serie temporal, de 1998-2002, del número de invalideces recogidas por tramo de edad. Pretendemos encontrar la curva de regresión que mejor se ajuste a los datos de partida. Para ello vamos a utilizar previamente el método de los **mínimos cuadrados**. Podemos encontrar en el anexo I, al final de este documento, la formalización de estos métodos de interpolación y ajuste.

Este método aplicado a una función cualquiera, no necesariamente lineal, pretendería encontrar una curva  $g(x)$  tal que se minimizara la suma de los residuos al cuadrado:

$$\min_g \sum_{ij} (y_{ij} - g(x_i))^2$$

Donde el subíndice 'i' hace referencia a la edad y el 'j', a la observación correspondiente a la serie temporal. Un resultado conocido es que el mínimo se obtiene cuando  $g(x_i)$  se toma como la media de la distribución condicionada :  $\text{media}(y | x=x_i)$ .

Con este objetivo, en la hoja '*medias*' se han obtenido las medias de tasas de invalidez desde 1998 a 2002 para cada edad, tomando las marcas de clase de cada intervalo.

De esta forma, hemos obtenido una tabla donde tenemos 12 puntos (x,y) recogiendo la relación entre edad y tasa de invalidez total. Se trata ahora de buscar un polinomio de interpolación que pase por los citados puntos. El capítulo correspondiente a interpolación y ajuste se demuestra que siempre existe tal polinomio, que será de grado 11 y por tanto dependerá de 12 parámetros, y los distintos métodos para obtenerlos. En principio el más directo partiría de considerar el sistema resultante en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{12}^{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_{11} \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y = X \cdot A$$

Y obtendríamos el vector de parámetros:

$$A = X^{-1} \cdot Y$$

Pero al utilizar la hoja de cálculo para obtener la inversa de una matriz de 12x12 y cuyos elementos tienen muchos dígitos, tendríamos muchos errores de redondeo. El resultado obtenido por este método se recoge en la hoja ‘*matriz inversa*’.

En consecuencia, hemos escogido un método menos directo pero que soslaya los errores de redondeo. Se ha utilizado el método de aproximaciones sucesivas que, además aporta la ventaja que no hay que recalcular todos los coeficientes del polinomio si se añade una nueva observación. Básicamente se trata de obtener el polinomio de interpolación para el primer par de datos, a partir de éste buscaríamos el que se ajuste a los dos primeros pares, y así sucesivamente por recurrencia. Una vez obtenido  $P_{k-1}(x)$ , hallaríamos  $a_k$  utilizando la fórmula de recurrencia:

$$a_k = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{i=1}^{k-1} (x_i - x_k)}$$

En la página ‘*polinomio*’ se recogen los cálculos para la obtención del polinomio de interpolación por el método de aproximaciones sucesivas. En B18:B29 tenemos los 12 parámetros buscados. En C18:C29 obtenemos los valores que nos daría los polinomios de grado 0, 1, ... hasta el definitivo de grado 11 para una edad variable que podemos elegir introduciéndola en la celda D17. Vemos que si introducimos, por ejemplo, 42.5 (el sexto dato) sólo tendríamos un ajuste perfecto para los polinomios de grado igual o superior a 5. Si el dato que introducimos en esa celda es el último (72.5 años), el único polinomio que daría el ajuste correcto sería el definitivo (cuyos valores se recogen en la celda C29).

Por último, en la página ‘*interpolación*’ se da la tabla con las tasas obtenidas de invalidez total desde los 16 a los 80 años. Como era previsible, la función no es satisfactoria en los extremos, quedándonos con los datos centrales, en el tramo de edad 22-70 años, el relevante para el tema que nos ocupa de la invalidez.

## PARTE II. RENTAS ACTUARIALES Y SEGUROS

### 6. ECUACIÓN DEL SEGURO

Las Instituciones de seguros realizan sus actividades principalmente sobre grupos para poder compensar con una prima comparativamente pequeña las enormes sumas de dinero que se derivan de los siniestros acaecidos como consecuencia de las pólizas emitidas. En el caso del seguro de vida, el ente asegurador no se preocupa por cuándo pueda morir una u otra persona,

pero sí está fundamentalmente interesado en el número de personas que pueden morir cada año, teniendo en cuenta un gran grupo. Conociendo este punto, dentro de unos límites razonables, la institución aseguradora de vida ajusta sus cargos por primas de tal modo que reciba dinero suficiente para poder sostener la actividad y pagar todas las reclamaciones.

La equivalencia entre los ingresos en forma de primas y lo que se paga por concepto de pérdidas (prestaciones), constituye la ecuación del seguro. Ciertamente, una compañía de seguros no puede mantener su solvencia a menos que ingrese, en forma de primas, fondos bastantes para hacer frente a todos los siniestros (pagos). En los seguros, como en las demás transacciones comerciales, es imposible obtener algo a cambio de nada.

Los factores que entran en el cómputo de una prima se pueden enunciar así: 1) coste actuarial o coste de las pérdidas; 2) coste del mantenimiento de la actividad o negocio; 3) coste del capital y 4) coste de las contribuciones para constituir una reserva para catástrofes.

De ellos, el coste actuarial es el elemento esencial del seguro y requiere valorar las prestaciones futuras que puedan producirse en el transcurso del contrato, tanto por parte de la compañía de seguros (el pago de un capital o de una renta en casos de vida o muerte), como del tomador de la póliza (el pago de la prima periódica si permanece con vida).

La aleatoriedad puede consistir en el pago de la prestación (que sólo tendrá lugar si ocurren ciertos sucesos) o bien en la cuantía y/o vencimiento, tanto de aquella, como de los pagos en forma de prima o cuota que realizará el asegurado.

En este sentido, definiremos el fenómeno actuarial como un fenómeno estocástico cuyos sucesos tienen consecuencias financieras.

En el fenómeno actuarial existen pues dos componentes claramente definidas:

- 1) Una **componente aleatoria**, puesto que se trata de sucesos que responden a un fenómeno de esta naturaleza, ciertamente el riesgo posee este carácter.
- 2) Una **componente financiera**, puesto que se trata de valorar las consecuencias económicas de hechos que afectan directa o indirectamente al patrimonio de los individuos en cuanto tales y en cuanto integrados en un colectivo.

Se va a enfocar la realización de operaciones actuariales, las cuales poseerán ese doble carácter aleatorio-financiero a que acabamos de hacer alusión. Vamos a ocuparnos de los casos más simples y generales: concretamente, nos referimos al problema de la constitución de rentas y al de establecimiento de seguros para los casos de vida o muerte de un individuo. Puede advertirse la importancia que posee para estos fines el conocimiento más acabado de las leyes que rigen el fenómeno de la supervivencia, así como, según se verá, la valoración de las obligaciones que en la operación actuarial se contraen.

Según esto, veamos cual es el fundamento de la operación actuarial y cómo se establece ésta de una forma genérica, sin olvidar que en el razonamiento subyacen implícitas varias hipótesis:

- 1) Que nos referimos exclusivamente a sucesos que encuentran su encuadre en el fenómeno de la supervivencia.

- 2) Que el riesgo único que se considera es el de muerte.
- 3) Que suponemos a este riesgo presente en todo momento y con análoga intensidad.

## 7. RENTAS ACTUARIALES

Se entiende por renta, en sentido financiero, a un conjunto de capitales con distintos vencimientos (momentos de su disponibilidad), concepto que se puede extender al campo actuarial apareciendo así el concepto de renta vitalicia, por ejemplo, como sucesión de sumas exigibles o pagaderas en determinados vencimientos, sólo si determinada cabeza sobrevive a cada vencimiento.

A continuación, se van a estudiar rentas actuariales, tanto en lo que respecta a su formulación actuarial, como a su significado económico.

### 7.1. Génesis económica del concepto.

En esta operación, un individuo desea percibir de forma periódica (anualmente, si no se dice otra cosa), una unidad monetaria por un plazo de tiempo estipulado. En consecuencia, en la determinación del valor total de esa cantidad intervendrán los dos factores reseñados.

- a) El **factor financiero**, mediante la valoración de los capitales unitarios en un momento dado que será, precisamente, el actual. A partir de este momento, el individuo se considera, a todos los efectos, integrado en el colectivo.
- b) El **factor aleatorio**, recogido mediante las probabilidades de supervivencia a cada edad. Naturalmente, no será igual la cantidad que puedan percibir individuos de distintas edades ni tampoco, en general, las que perciban individuos de igual edad pero situados en distintos momentos del tiempo (si bien, por razones de falta de adecuada información estadística, este segundo aspecto no es recogido en la práctica).

La especificación de ambos factores se efectúa en las bases técnicas, mediante:

- Los factores de descuento, o bien el tanto de la ley exponencial de descuento.
- Las probabilidades atribuidas a los diversos sucesos a los que queda unida la variable aleatoria.

En el caso de las prestaciones relacionadas con la vida de las personas, las probabilidades no son nunca estimadas singularmente, sino que vienen deducidas de una tabla de supervivencia. Por lo tanto, las bases técnicas de una valoración actuarial son, en la práctica, el tipo de interés y la tabla de supervivencia, que se puedan llamar, respectivamente, base financiera y base demográfica.

### 7.2. Cálculo de las distintas clases de rentas.

Según lo ya advertido nos referiremos sólo a rentas constantes y dentro de éstas a las unitarias (el razonamiento sería análogo para el caso de rentas crecientes).

a) **Tipos de rentas:** pueden tener la misma clasificación que las rentas ciertas, según los diferentes criterios estudiados en la matemática financiera. En lo que respecta a la duración:

- Vitalicias: Cuando el plazo de duración de la renta se considera indefinido; esto es, cuando se supone que el individuo va a percibir la renta mientras viva.
- Temporales: Cuando el plazo de duración de la renta alcanza un número dado de años ( $n$  por ejemplo).
- Diferidas: Cuando el origen de la renta se halle desplazado respecto del momento en que se ha convenido. Como es lógico, las rentas diferidas pueden ser vitalicias y temporales.

b) **Determinación de las rentas:**

Por lo que respecta al período, lo más normal son las rentas anuales y las fraccionadas (de frecuencia 2-4-6-12) semestrales, trimestrales, mensuales, etc., aunque pueden aparecer las plurianuales y continuas.

Atendiendo al vencimiento de los términos de la renta, consideraremos a ésta como prepagable o postpagable según que sea al principio o al final de cada período. Nuestro interés se centra en el cálculo del valor actual, puesto que es en el momento presente cuando debe verificarse el principio de equilibrio financiero (aquel por el que el valor actual de las prestaciones futuras del asegurador y del tomador se igualan).

### 7.3. Rentas vitalicias.

#### 7.3.1. Renta postpagable $a_x$

Se trata de calcular el valor actual de la renta que un individuo de edad  $x$  percibirá mientras viva, supuesto que el término de la renta corresponda a un capital de cuantía unitaria. Teniendo en cuenta el valor financiero de una renta, debemos afectar a los términos de ésta el carácter aleatorio que el fenómeno actuarial posee. Y así, el valor en el origen de la unidad monetaria que el individuo percibirá al final del primer período, vendrá multiplicado por el correspondiente factor de descuento y por la probabilidad de que el individuo sobreviva al final de dicho período (téngase presente que el individuo percibe la renta mientras vive). Análogamente, la unidad monetaria que el individuo percibirá al finalizar el  $k$ -ésimo período, en origen deberá valorarse mediante el factor de descuento multiplicado por la probabilidad de supervivencia al final del  $k$ -ésimo (o comienzo del  $k+1$ ) período. Adviértase que no existe heterogeneidad entre los elementos que intervienen, puesto que si el factor de descuento permite actualizar las cuantías de los capitales, la probabilidad de supervivencia es en sí misma un valor actual (la probabilidad, en sentido estricto, supone una estimación "a priori" de algo que ocurrirá después y, además, ese "a priori" se verifica en el momento presente, pues es en éste en el que nos planteamos la necesidad del cálculo actuarial de la renta).

El factor de descuento para el capital disponible al final del  $k$ -ésimo período es  $V^k=(1+i)^{-k}$  y la probabilidad de supervivencia al final de ese  $k$ -ésimo período será  ${}_kP_x$ , puesto que es la probabilidad de que un individuo de edad " $x$ " alcance la edad " $x+k$ ". Según esto tendremos,  $l_w = 0$ , siendo  $w$  la edad límite del colectivo:

$$\begin{aligned}
a_x &= vP_x + v^2{}_2P_x + v^3{}_3P_x + \dots + v^{w-x-1}{}_{w-x}P_x + v^{w-x}{}_{w-x-1}P_x = \\
&= v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + v^{\omega-x-1}\frac{l_{\omega-1}}{l_x} + v^{\omega-x}\frac{l_{\omega}}{l_x}
\end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por  $v^x$ :

$$a_x = \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \dots + v^{\omega-1} l_{\omega-1} + v^{\omega} l_{\omega}}{v^x l_x}$$

Por convenio representamos estos productos por los símbolos:

$$\begin{aligned}
v^x l_x &= D_x \\
v^{x+1} l_{x+1} &= D_{x+1} \\
\dots & \\
v^{x+h} l_{x+h} &= D_{x+h} \\
\dots & \\
v^w l_w &= D_w
\end{aligned}$$

Y queda:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{\omega-1} + D_{\omega}}{D_x}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_w &= N_x \\
D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_w &= N_{x+1} \\
\dots & \\
a_x &= \frac{N_{x+1}}{D_x}
\end{aligned}$$

Expresiones que se encuentran tabuladas en la mayoría de las tablas actuariales, a partir de los modelos demográficos de determinadas poblaciones. En este punto se trata de familiarizarse con los conceptos de rentas actuariales y símbolos de conmutación, ya que en la práctica todos estos valores se encuentran informatizados y su aplicación es inmediata como se verá posteriormente.

### 7.3.2. Renta prepagables $\ddot{a}_x$

Todo el razonamiento efectuado anteriormente es aplicable aquí, sin excepción alguna. Únicamente debe tenerse en cuenta que los vencimientos de la renta tendrán lugar ahora al comienzo de cada período. Según esto:

$$\ddot{a}_x = 1 + v P_x + v^2 {}_2P_x + \dots + v^{\omega-x} {}_{\omega-x}P_x$$

Desarrollando las probabilidades y multiplicando y dividiendo por  $v^x$  quedará:

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + \dots + v^{\omega-x} l_{\omega-x}}{v^x l_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \dots + D_{\omega}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

### 7.3.3. Relación entre las rentas vitalicias prepagables y postpagables.

Comparando las expresiones anteriores resulta:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

Ejemplo (todos los ejemplos numéricos de los epígrafes 7 y 8 están basados en la tabla que aparece en el fichero [INE-2004](#); el tipo de interés utilizado siempre va a ser del 2%, que es el que el sector asegurador está empleando actualmente): Si una persona de 60 años desea percibir una renta de 50.000 € anuales, por anticipado hasta su muerte ¿cuál será su valor actuarial actual? Se trata de una renta actuarial prepagable, inmediata y de duración indefinida para una cabeza de edad  $x = 60$  años.

$$V_0 = 50000 \cdot \ddot{a}_{60} = 50000 \frac{N_{60}}{D_{60}} = 936114,27 \text{ €}$$

### 7.4. Rentas temporales.

Se trata ahora de calcular el valor actual de una renta unitaria postpagable que percibirá un individuo de edad  $x$  durante  $n$  años. Aplicamos el mismo razonamiento anterior:

$$\begin{aligned} {}_n a_x &= a_{x:n} = v P_x + v^2 {}_2P_x + \dots + v^n {}_n P_x = \\ &= \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \dots + v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n}}{D_x} = \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

pues:

$$\begin{aligned} D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \dots + D_w &= N_x \\ D_{x+1} + \dots + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \dots + D_w &= N_{x+1} \\ D_{x+n} + D_{x+n+1} + \dots + D_w &= N_{x+n} \\ D_{x+n+1} + \dots + D_w &= N_{x+n+1} \\ D_{x+1} + \dots + D_{x+n} &= N_{x+1} - N_{x+n+1} \end{aligned}$$

Si la renta es prepagable,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:n} &= 1 + vP_x + v^2 {}_2P_x + \dots + v^{n-1} {}_{n-1}P_x = \\ &= \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + \dots + v^{x+n-1} l_{x+n-1}}{v^x l_x} = \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

La relación entre las rentas temporales postpagables y prepagables es:

$$a_{x:n-1} + 1 = \ddot{a}_{x:n}$$

Ejemplo: ¿Cuál es el valor actuarial actual de una persona de 45 años que quiere percibir una renta prepagable de 20.000 € anuales durante 20 años. (Tabla [INE-2004](#); tipo de interés  $i = 2\%$  anual)?

$$V_0 = 20000 \cdot \ddot{a}_{45:20} = 20000 \frac{N_{45} - N_{65}}{D_{45}} = 323461,67 \text{ €}$$

### 7.5. Rentas vitalicias diferidas en $n$ periodos para un individuo de edad $x$

Es usual representar la renta vitalicia diferida en  $n$  periodos para un individuo de edad  $x$  por  $n/a_x$ . Se trata de calcular el valor actual de una renta vitalicia postpagable, pero diferida en  $n$  periodos, de tal forma que siendo el origen el momento actual, los términos de la renta tienen su vencimiento una vez transcurridos dichos  $n$  periodos.

Suponiendo que la renta es postpagable:

$$n/a_x = v^n {}_n p_x a_{x+n} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} a_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

En el caso que la renta fuera prepagable:

$$n/\ddot{a}_x = v^n {}_n p_x \ddot{a}_{x+n} = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

Ejemplo: Si una persona de 40 años quiere percibir una renta postpagable de 10.000 € anuales pagaderos, desde que cumpla 65 años hasta su muerte, se trataría de una renta postpagable diferida en 25 años de duración indefinida y su valor actuarial actual sería (tabla [INE-2004](#); tipo de interés  $i = 2\%$  anual):

$$V_0 = 10000 \cdot {}_{25}/a_{40} = 10000 \frac{N_{66}}{D_{40}} = 82666,18 \text{ €}$$

## 7.6. Relación entre las rentas diferidas, temporales y vitalicias para un individuo de edad “x”

Supongamos una renta postpagable; las tres posibilidades que hemos indicado reflejan que el individuo podría contratar una renta temporal por n períodos, una renta vitalicia o una renta vitalicia diferida en n períodos. En el primer caso, la renta se percibe de forma inmediata durante n períodos, en el segundo durante toda la vida y, en el tercero, una vez han transcurrido n períodos y hasta el fallecimiento.

Examinando las expresiones anteriores se sigue que:

$${}_n|na_x + n/a_x = a_x$$

Análogamente para las prepagables:

$${}_n|\ddot{n}a_x + n/\ddot{a}_x = \ddot{a}_x$$

Con esto concluimos el examen del cálculo actuarial de las rentas, prescindiendo del caso de las rentas variables y de lo que sucedería cuando se introdujeran hipótesis particulares (por ejemplo que el tipo de interés fuera nulo). Baste con estas consideraciones generales para la caracterización de la operación actuarial del establecimiento de una renta. E insistimos que, sea cual fuere el tipo de renta, en su valor actual debe verse una doble significación: de una parte, lo que para el individuo representa la valoración de las obligaciones contraídas con él por el prestatario, y de otra, la valoración para el individuo referido al colectivo de su contraprestación, es decir, de la prima única que debería aportar para percibir la renta estipulada.

Podría presentarse la situación de que el término de la renta a su vez estuviera fraccionado en una determinada frecuencia (mensual, semestral), en cuyo caso algunos de los conceptos anteriores tendrían la siguiente expresión:

El valor actual actuarial de la renta vitalicia postpagable y fraccionada en m-ésimas partes es:

$$a_x^m \simeq a_x + \frac{m-1}{2m} \quad \ddot{a}_x^m \simeq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

Ejemplo: ¿Cuál es el valor actuarial actual de una renta que desea percibir una persona de 60 años de edad y de cuantía 500 € pagaderos mensualmente ( $m = 12$ ), y por anticipado hasta su muerte (Según tabla [INE-2004](#); tipo de interés  $i = 2\%$  anual)? Se trata de calcular el valor de:

$$V_0 = 500 \cdot \ddot{a}_{60}^{12} \simeq 500 \left( \ddot{a}_{60} - \frac{11}{24} \right) = 9131,98 \text{ €}$$

## 7.7. Valoración actuarial de la renta vitalicia reversible pagadera en tanto sobreviva, al menos, una de las cabezas.

A partir de la probabilidad de supervivencia de un grupo de dos cabezas se trataría de calcular valores actuariales de operaciones que afectan conjuntamente a dos cabezas de edades x e y.

El caso más usual es:

Valor actuarial de una renta vitalicia “reversible” pagadera en tanto, al menos sobreviva uno de los entes:

$$a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x + \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_y - \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_{xy} = a_x + a_y - a_{xy}$$

Es el caso usual de una renta que se pagaría a una persona superviviente de edad  $y$  al fallecimiento de un titular de edad  $x$  (se utiliza para la valoración de las pensiones de viudedad).

## 8. OPERACIONES DE SEGURO. LOS SEGUROS DE PERSONAS.

Abordamos aquí la problemática de la elaboración de los seguros de personas, o sobre la vida humana para diversos casos concretos y la determinación de sus valores en el momento del establecimiento del seguro, o lo que es lo mismo, del valor en origen de la contraprestación que, como se sabe, recibe el nombre de **prima única**. Se van a analizar diferentes supuestos (los más elementales), siempre bajo la premisa de que la prestación se realizará bajo la forma de entrega de un capital, por parte del ente asegurador, al beneficiario del contrato de seguro una vez haya acaecido el hecho objeto del seguro.

Es decir, en los seguros sobre la vida humana, el asegurador se obliga a indemnizar al beneficiario del seguro la cantidad establecida en el contrato cuando ocurran determinadas circunstancias sobre la vida o la muerte de una persona, que es el asegurado, siempre y cuando se haya pagado una prima por parte del contratante del seguro.

Suelen ser frecuentes los casos en que contratante y asegurado, asegurado y beneficiario, etc., son una misma persona pero también puede ocurrir que contratante, asegurado y beneficiarios sean personas distintas.

Los seguros sobre la vida humana se clasifican en tres clases:

- **Seguros en caso de vida**, cuando el capital asegurado es pagado por el asegurador si el asegurado vive en una época determinada.
- **Seguros en caso de muerte**, cuando el capital asegurado se hace efectivo si fallece el asegurado.
- **Seguro mixto** se conoce cuando participa de ambas modalidades.

### Seguros en caso de vida.

- Seguros de **renta vitalicia**. Es cuando el asegurador se obliga a pagar periódicamente, por ejemplo cada año, una cierta cantidad si el asegurado vive en la época establecida para los pagos.

- Seguros **de capital diferido**. Cuando el asegurador se obliga a pagar el capital asegurado al cabo de un cierto número de años, si el asegurado vive en ese momento. Si el asegurado muere antes de ese plazo, el asegurador no está obligado a pagar ninguna cantidad.

### Seguros en caso de muerte.

Podrían considerarse los siguientes:

- **Seguro de muerte a vida entera**. El asegurador paga la cantidad asegurada en el momento del fallecimiento.
- **Seguro temporal de muerte**. El asegurador paga la cantidad asegurada, si el asegurado fallece en el plazo de  $n$  años (por ejemplo), desde que se contrata el seguro.
- **Seguro diferido de muerte**. El asegurador está obligado a pagar el capital contratado, si el asegurado fallece después de  $h$  años de firmar la póliza, y a partir de este momento, en cualquier momento.
- **Seguro diferido y temporal de muerte**. Suponiendo que el diferimiento es de  $h$  períodos y la duración es de  $n$  períodos a partir del diferimiento, el asegurador está obligado a pagar el capital si el fallecimiento tiene lugar dentro de los  $n$  períodos es decir, entre el período  $h$  y  $h+n$  desde la firma del contrato.

### Seguros mixtos.

Esta clase de seguros participa de las modalidades anteriores, caso de vida y de muerte. Pueden aparecer tantos como combinaciones puedan diseñarse. Entre los más comunes están:

- Seguro mixto simple. El asegurador está obligado a pagar, si es contratado a  $n$  años, tanto si el asegurado vive al cabo de los  $n$  años como si muere dentro de los  $n$  años.
- Seguro mixto de capital duplicado. El asegurador está obligado a pagar el capital asegurado al cabo de un cierto número de años  $n$  si el asegurado vive entonces y en todo caso a su muerte cualquiera que sea la época en que tenga lugar. En este tipo de seguro, si el asegurado muere después de esos  $n$  períodos, el asegurador paga el capital dos veces.

#### 8.1 Seguro de capital diferido para caso de vida: ${}_nE_x$

Sea un individuo de edad  $x$ . Este seguro consiste en que si el individuo sobrevive a la edad  $x+n$  percibirá una cantidad determinada “a priori”. En términos unitarios, expresaremos la prima única de este seguro por  ${}_nE_x$ . De acuerdo con lo dicho:

$${}_n E_x = v^n {}_n p_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad (8.1)$$

Efectivamente, la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  sobreviva a la edad  $x+n$  es  ${}_n p_x$ , y el valor actual de la unidad monetaria disponible en esa fecha es  $v^n$ .

**Ejemplo:** Supongamos que una persona de 20 años de edad desea percibir 30000 € si se encuentra con vida dentro de 5 años y quiere conocer la prima que tendría que pagar hoy. Los cálculos, a partir de la tabla INE-2004 y tipo de interés técnico del 2%, serían:

$$\Pi = 30000 \cdot {}_5 E_{20} = 30000 \cdot \frac{D_{25}}{D_{20}} = 27106,91 \text{ €}$$

## 8.2. Seguro vida entera: $A_x$

Sea un individuo de edad  $x$ . Se trata de que este individuo pacta un seguro consistente en que, a su muerte, sus beneficiarios percibirán la cantidad acordada. En términos unitarios, expresaremos la prima única de este grupo de seguro por  $A_x$ . Según lo expuesto, en cuanto tenga lugar el fallecimiento del individuo, sea a la edad que fuere, sus beneficiarios percibirán el importe del seguro. En consecuencia, la valoración que se efectúa parte de la base de que el individuo puede fallecer en cualquier momento, desde la edad  $x$  hasta la máxima  $w$ . De aquí que debemos operar con las probabilidades de fallecimiento. Ahora bien, ¿cómo estableceremos la valoración financiera de los fallecimientos? Porque, por ejemplo, la probabilidad de que un individuo no alcance la edad  $x+1$  habiendo alcanzado la edad  $x$  será  $q_x$ .

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Ahora bien, para valorar estos  $d_x$  fallecimientos ¿los consideraremos acaecidos al final del año o al principio de éste? Es evidente que ambas hipótesis son igualmente erróneas; por ello se adopta el convenio de suponer que los fallecimientos se distribuyen uniformemente a lo largo del año, con lo que su valoración financiera tiene lugar exactamente en la mitad del mismo. Así, la valoración de los capitales que hubieran percibido los beneficiarios de los  $d_x$  fallecidos durante el primer año, será en origen:

$$d_x \cdot v^{1/2}$$

El valor de los capitales percibidos por los beneficiarios de los  $d_{x+1}$  fallecidos en el segundo año será:

$$d_{x+1} \cdot v^{1+1/2} \text{ y así sucesivamente,}$$

De acuerdo con lo anterior,

$$A_x = v^{1/2} q_x + v^{1+1/2} {}_1 / q_x + v^{2+1/2} {}_2 / q_x + \dots + v^{\omega-1-x+1/2} {}_{\omega-1-x} / q_x =$$

$$= v^{1/2} \frac{d_x}{l_x} + v^{1+1/2} \frac{d_{x+1}}{l_x} + \dots + v^{\omega-1-x+1/2} \frac{d_{\omega-1}}{l_x}$$

Si multiplicamos y dividimos por  $v^x$  tenemos:

$$A_x = \frac{v^{x+\frac{1}{2}} d_x + v^{x+\frac{1}{2}+1} d_{x+1} + v^{x+\frac{1}{2}+2} d_{x+2} + \dots + v^{\omega-1+\frac{1}{2}} d_{\omega-1}}{v^x l_x}$$

Si la expresión  $v^{t+\frac{1}{2}} d_t = C_t$ , entonces:

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \dots + C_{\omega-1}}{D_x}$$

Si:

$$\begin{aligned} C_x + C_{x+1} + \dots + C_{\omega-1} &= M_x \\ C_{x+1} + \dots + C_{\omega-1} &= M_{x+1} \\ \dots & \\ C_{x+n} + \dots + C_{\omega-1} &= M_{x+n} \end{aligned}$$

Resulta:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

**Ejemplo:** ¿Cuál será la prima única  $\pi$  a pagar para cubrir un seguro vida entera de 50000 € sobre una cabeza de 45 años, si el tipo de interés técnico utilizado es del 2% y el modelo demográfico INE-2004 (según tabla [INE-2004](#))?

$$\Pi = 50000 \cdot A_{45} = 50000 \frac{M_{45}}{D_{45}} = 25518,75\text{€}$$

### 8.3. Seguro temporal para caso de muerte: ${}_nA_x$

Se puede representar por:

$$\begin{aligned} {}_nA_x &= A_{\overline{xn}|} \\ {}_nA_x &= A'_{x:n} \end{aligned}$$

Se trata de un supuesto análogo al anterior, en cuanto a la condición básica para que los beneficiarios puedan percibir la cantidad estipulada: el asegurado debe fallecer. Pero, mientras que en el caso anterior los beneficiarios percibían la cantidad una vez falleciera el asegurado, cualquiera que fuera el momento en que esto ocurriera, ahora el hecho debe acaecer dentro de un plazo prefijado de  $n$  años. Si transcurrido este plazo el individuo asegurado no ha fallecido, el seguro queda extinguido.

La prima única, en términos unitarios de este seguro, será la siguiente:

$$\begin{aligned}
 A'_{\overline{xn}|} &= v^{\frac{1}{2}} q_x + v^{1+\frac{1}{2}} {}_1/q_x + \dots + v^{n-1+\frac{1}{2}} {}_{n-1}/q_x = \\
 &= v^{\frac{1}{2}} \frac{d_x}{l_x} + v^{1+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+1}}{l_x} + \dots + v^{n-1+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+n-1}}{l_x} = \\
 &= \frac{v^{x+\frac{1}{2}} d_x + v^{x+1+\frac{1}{2}} d_{x+1} + \dots + v^{x+n-1+\frac{1}{2}} d_{x+n-1}}{v^x l_x} = \\
 &= \frac{C_x + C_{x+1} + \dots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

ya que:

$$\begin{aligned}
 C_x + C_{x+1} + \dots + C_{\omega-1} &= M_x \\
 C_{x+n} + C_{x+n+1} + \dots + C_{\omega-1} &= M_{x+n} \\
 C_x + C_{x+1} + \dots + C_{x+n-1} &= M_x - M_{x+n}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Sea una persona de 35 años de edad que contrata un seguro temporal durante 20 años, de forma que si fallece a lo largo de este tiempo sus beneficiarios cobrarían 100.000 €. El cálculo de la prima única obedece a la siguiente expresión (según tabla [INE-2004](#);  $i = 2\%$ ):

$$\Pi = 100000 \cdot A'_{\overline{35:20}|} = 100000 \frac{M_{35} - M_{55}}{D_{35}} = 3353,99 \text{ €}$$

#### 8.4. Seguro vida entera de efecto diferido: $n/A_x$

Se trata ahora de un individuo de edad  $x$  que en el momento presente concierta un seguro vida entera, de forma que durante un plazo de  $n$  años el seguro no tiene efecto. Por consiguiente, el origen del seguro se halla desplazado  $n$  años respecto al momento inicial. Expresando la prima única en términos unitarios por  $n/A_x$ , tendremos:

$$n/A_x = v^n {}_n p_x A_{x+n} = {}_n E_x A_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

Así pues, el seguro a vida entera diferido en  $n$  períodos resulta ser igual a un seguro de capital diferido para caso de vida de  $n$  períodos —los de diferimiento en nuestro caso— multiplicado por un seguro a vida entera a la edad  $x+n$ . Esto es completamente lógico, habida cuenta de que para que el seguro tenga efecto deben transcurrir  $n$  años entre el momento actual y el origen del seguro.  ${}_n E_x$  recoge la valoración en el momento actual de la probabilidad de supervivencia del individuo a la edad  $x+n$  y  $A_{x+n}$  representa el seguro a vida entera que comienza a surtir sus efectos, con vistas a los beneficiarios, a partir del momento en que el asegurado alcanza la edad  $x+n$ .

**Ejemplo:** Imaginemos un asegurado de 25 años de edad que contrata la recepción, por parte de sus beneficiarios, de un capital de fallecimiento de 50000 € si el deceso se produce una vez haya cumplido los 30 años. La prima única del seguro se calcularía del siguiente modo (según tabla [INE-2004](#);  $i = 2\%$ ):

$$\Pi = 50000 \cdot {}_5/A_{25} = 50000 \frac{M_{30}}{D_{25}} = 17471,99 \text{ €}$$

### 8.5. Relación entre el seguro vida entera, el seguro temporal y el seguro diferido.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores de dichos seguros, es evidente que:

$$A_x = A'_{x:n} + {}_n/A_x$$

### 8.6. Seguro mixto: $A_{x:n}$

Cabe que un individuo de edad  $x$  planea concertar un seguro tal que, si al cabo de  $n$  años sobrevive, perciba él o sus beneficiarios la cantidad estipulada, pero también que si durante esos  $n$  años fallece sean sus beneficiarios quienes la perciban. Esto es, la cantidad asegurada será percibida tanto si el individuo sobrevive como si no. En el primer sentido, tendríamos un seguro de capital diferido para caso de vida  ${}_nE_x$ , en el segundo un seguro temporal para caso de muerte  $A'_{x:n}$ . Ello justifica que a este seguro que recoge ambas posibilidades le denominamos mixto. Representando por  $A_{x:n}$  su prima única en términos unitarios tendremos:

$$A_{x:n} = {}_nE_x + A'_{x:n}$$

**Ejemplo:** Un individuo de 40 años de edad concierta la siguiente operación de seguros. En el momento en que se produzca el fallecimiento, si éste ocurre durante un período de 10 años a partir de la firma, sus beneficiarios percibirán 100.000 €. Si alcanza con vida la edad de 50 años desea percibir 20000 €. La prima única del seguro se obtendría de la siguiente forma (según tabla [INE-2004](#);  $i = 2\%$ ):

$$\begin{aligned} \Pi &= 100000 \cdot A'_{40:10} + 20000 \cdot {}_{10}E_{40} = \\ &= 100000 \cdot \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{40}} + 20000 \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}} = 1786,01 + 16079,46 = 17865,46 \text{ €} \end{aligned}$$

## 9. APLICACIONES: CASOS PRÁCTICOS.

En lo que sigue, se van a exponer algunos ejemplos de cálculo de primas puras en distintas modalidades de seguros, ya explicadas anteriormente y que se aplicarán al colectivo ficticio de trabajadores de VIAJES NORTE (VN, en lo que sigue), considerando que todos son hombres en los seguros aplicables con tablas masculinas y mujeres al efectuar seguros con tablas femeninas. Además de mostrar la utilidad de la hoja de cálculo, se trata de comparar los resultados obtenidos, según el sexo de los asegurados y la tabla de mortalidad utilizada. Los tres primeros casos, que corresponden a seguros de fallecimiento e invalidez, están recogidos

en el fichero [VIAJES\\_NORTE\\_FALL](#). Los tres últimos ejemplos incluyen seguros de supervivencia y están recogidos en [VIAJES\\_NORTE\\_SUPERV](#). Además, ambos ficheros incluyen la hoja  $Q_x$ , que contiene la probabilidad de fallecimiento a cada edad, de las tablas de mortalidad GKF-95, GKM-95, GRF-80, GRM-80, GKF-80 y GKM-80. VIAJES NORTE FALL incorpora, en la hoja GKM-95, los distintos elementos actuariales que definen la tabla GKM-95 completa, para un tipo de interés técnico dado (el 2% utilizado en la práctica aseguradora en el año 2009). Para completar cualquiera de las otras tablas, basta con sustituir la columna  $q_x$  de la hoja GKM-95 por la de la tabla correspondiente.

En cualquiera de los dos ficheros, la hoja “**alumno**” contiene la plantilla ficticia de trabajadores de VN. En la primera columna aparecen los trabajadores numerados del 1 al 20; en la segunda columna figuran clasificados en tres categorías laborales (del 1 al 3), en función de la cuantía de la prestación asegurada (30.000, 24.000 ó 12.000 euros, respectivamente); finalmente, en la tercera columna se recoge la fecha de nacimiento de cada uno de ellos. Esta plantilla de VN se utiliza en todos los casos, tanto para hombres como para mujeres.

### 9.1. Seguro temporal.

Características:

- Fecha de contrato del seguro: 1-1-2009.
- Garantías: prestación en caso de fallecimiento.
- Tabla de mortalidad: GKM-95 y GKF-95.
- El tipo de interés técnico utilizado ha sido el 2%.
- Duración del seguro: hasta la edad de jubilación, establecida en 65 años ( $n = 65-x$ ).
- Forma de pago: se consideran, tanto prima única, como prima anual.
- Formulación de la prima anual:

$$P_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:n} = A'_{x:n} \quad (9.1)$$

Los cálculos se recogen en la hoja [TEMP-M](#), para el caso masculino, y [TEMP-F](#), para el caso femenino. El contenido de las columnas y los comandos de Excel utilizados son los siguientes:

- Columna E: se asigna la cuantía de la prestación a cada asegurado, en función de su grupo laboral. Se utiliza la función lógica de condición.
- Columna F: se obtiene la edad natural del trabajador, redondeando por defecto el cociente que resulta de dividir, el número de días que ha vivido, entre 365,25. Se utiliza la función “*redondear.menos*”.
- Columna G: se obtiene la edad actuarial del trabajador, que es la que se utilizará en los cálculos. Para ello, se aplica la función “*redondear*”, a la edad entera más próxima al cociente anterior.
- Columna H: se calcula el seguro, mediante la siguiente expresión:

$$A'_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad (9.2)$$

El comando que utiliza el programa es la función “BUSCARV” (buscar valor) en una tabla. La tabla no es otra que la actuarial y viene indicada, en la hoja, por el rango O\$14:AF\$119. Primero busca el minuendo del numerador (el valor indicado por la edad actuarial, en la columna 8 de la tabla), le resta el sustraendo (el valor indicado por la casilla R8, en la columna 8 de la tabla) y la diferencia se divide entre  $D_x$  (el valor indicado por la edad actuarial, en la columna 4 de la tabla).

- Columna I: recoge el valor actual de la prestación asegurada, que es el resultado de multiplicar el valor actual del seguro  $A'_{x:n}$  por la cuantía de la prestación, y corresponde a la prima única de la operación. La prima única total, que cubriría la prestación de todo el colectivo, se recoge en las celdas I28 y L8.
- Columna J: contiene el valor actual de una renta anual, inmediata, temporal y prepagable. Este cálculo se recoge en la columna número 15 de la tabla (columna AC de la hoja de cálculo), a través de la siguiente expresión:

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (9.3)$$

A través de la función “BUSCARV” se obtiene el valor de la renta correspondiente a la edad actuarial.

La columna K recoge el valor de la prima anual, como resultado de dividir la prima única entre el valor actual de la renta. Para cada individuo la prima anual permanece constante, en tanto sobreviva, hasta cumplir los 65 años. La prima total a pagar en el primer año, por el colectivo, se recoge en las celdas K28 y L9.

Al comparar las hojas [TEMP-M](#) y [TEMP-F](#) se puede observar que la prima anual total a pagar, en el caso de que el colectivo hubiera estado formado sólo por hombres, es más del doble de la que pagaría el colectivo de mujeres.

**Ejercicio propuesto:** calcular, para este colectivo y haciendo la distinción por sexo, la prima única y anual a pagar en caso de que el seguro de fallecimiento se contrate por un plazo de 5 años. Los cambios afectan, tanto a la duración del seguro, como a la del pago de primas anuales. Se adjunta, como ayuda, la tabla 1 con el resultado para el trabajador ficticio nº 1, tanto para el caso en que se considere que es hombre como en el que se simule que es mujer:

**Tabla 1: Primas anual y única, por sexo, de un seguro temporal del trabajador nº 1.**

SEXO	FNAC	PRESTACION	EDAD NAT.	EDAD ACT.	$A'_{x:5}$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:5}$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	27/1/47	12.000	61	62	0,076677	920	4,667117	197
MUJER	27/1/47	12.000	61	62	0,029523	354	4,755170	75

## 9.2. Seguro temporal con invalidez.

Características:

- Fecha de contrato del seguro: 1-1-2009.
- Garantías: prestación en caso de fallecimiento o invalidez.

- Tablas utilizadas:
  - Para hombres: GKM-95 para mortalidad y la tabla interpolada (única para ambos sexos), para invalidez.
  - Para mujeres: GKF-95 para mortalidad y la tabla interpolada (única para ambos sexos), para invalidez.
- El tipo de interés técnico utilizado ha sido el 2%.
- Duración del seguro: hasta la jubilación del trabajador, cifrada en 65 años ( $n = 65 - x$ ).
- Se calculan, tanto la prima única, como la prima anual.
- Formulación de la prima anual:

$$P_{x:n}^* \cdot \ddot{a}_{x:n}^* = A_{x:n}^{*'} \quad (9.4)$$

En este caso, el elemento que ha dado origen al resto ha sido:

$p_x^*$  = probabilidad de que una persona de edad  $x$  viva a la edad  $x+1$  en estado de validez. Esto es tanto como decir que dicha persona no fallezca ni se invalide en dicho periodo. Llamando  $i_x$  a la probabilidad de invalidez a la edad  $x$ , se calcula así:

$$p_x^* = (1 - q_x) \cdot (1 - i_x) = 1 - q_x - i_x + q_x \cdot i_x \quad (9.5)$$

Los cálculos se recogen en la hoja [TEMPINV-M](#), para el caso masculino y en la [TEMPINV-F](#), para el femenino. El contenido de las columnas y los comandos de Excel correspondientes son análogos al caso 9.1.

**Comparaciones:** en los hombres, la prima única cuesta 106.239 €, en comparación con los 51.123 € que cuesta sin invalidez. En las mujeres, la diferencia es todavía mayor, 81.932 € frente a 22.050 €. Además, hay que observar que las diferencias son mayores en las personas de más edad, lo cual se debe a que, en las edades cercanas a la jubilación, es donde el riesgo de invalidez es mayor.

**Ejercicios propuestos.** Calcular este seguro, para cada sexo, aplicando las tasas de invalidez, por edad, de la tabla EVK-80AIH, para hombres, y EVK-80AIM, para mujeres. Comparar los resultados obtenidos con los del caso anterior. Se adjuntan los resultados del trabajador ficticio nº. 5, para cada sexo, en la tabla nº. 2:

**Tabla 2: Primas anual y única, por sexo, de un seguro temporal con invalidez del trabajador nº 5.**

SEXO	FNAC	PRESTA- CION	EDAD NAT.	EDAD ACT.	$A_{x:65-x}^{*}$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:65-x}^*$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	26/7/53	24.000	55	55	0,314294	7.543	8,099623	931
MUJER	26/7/53	24.000	55	55	0,143811	3.451	8,451130	408

### 9.3. Seguro vida entera.

- Características:
- Fecha de contrato del seguro: 1-1-2009.
- Garantías: prestación de fallecimiento.
- Tablas: GKM-95 y GKF-95.
- El tipo de interés técnico utilizado ha sido el 2%.
- Duración del seguro: hasta que ocurra el fallecimiento del asegurado.
- Prima anual, pagadera hasta los 65 años ( $n = 65-x$ ).
- Formulación:

$$P_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:n} = A_x \quad (9.6)$$

Los cálculos se recogen en la hoja [VENT-M](#) y [VENT-F](#). El cambio fundamental, respecto a los casos anteriores, radica en la formulación del seguro que se ha efectuado a partir de lo siguiente:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad (9.7)$$

**Comparación:** En relación con el caso 1 (seguro temporal), se aprecia que las primas son más caras, dado que el riesgo es mayor. En efecto, en un seguro vida entera el capital asegurado se va a pagar (de ahí que se le considere como un seguro de ahorro), la duda está en saber cuando. El riesgo, para la aseguradora, es que el deceso se produzca al comienzo del pago de primas, sin que haya dado tiempo para que la capitalización de las mismas cubra la suma asegurada. También resulta llamativo que, aun cuando la prima única sea mayor en los hombres que en las mujeres, la diferencia sea mucho menor que en el caso 9.1.

**Ejercicio propuesto:** efectuar el cálculo anterior, utilizando las tablas GKM-80 y GKF-80, para hombres y mujeres, respectivamente. Comparar los resultados. Como apoyo al alumno se adjunta la tabla 3 con los datos del trabajador ficticio nº 8:

**Tabla 3: Primas anual y única, por sexo, de un seguro vida entera del trabajador nº 8, utilizando las tablas GKM-80 y GKF-80.**

SEXO	FNAC	PRESTACION	EDAD NAT.	EDAD ACT.	$A_x$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:65-x}$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	11/8/61	30.000	47	47	0,591550	17.746	14,347396	1.237
MUJER	11/8/61	30.000	47	47	0,523748	15.712	14,806911	1.061

#### 9.4. Seguro diferido.

Características:

- Fecha de contrato del seguro: 1-1-2009.
- Garantías: prestación, en forma de capital, en caso de llegar con vida a los 65 años.
- Tablas: PERM-2000P y PERF-2000P.
- El tipo de interés técnico utilizado ha sido el 2%.
- Duración del seguro: hasta los 65 años ( $n = 65-x$ ) o, antes, si fallece.
- Forma de pago: se consideran tanto la prima única como la prima anual pagadera hasta el momento en que se extinga el seguro.
- Formulación de la prima anual:

$$P_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:n} = {}_nE_x \quad (9.8)$$

Los cálculos se recogen, junto con los de los tres seguros restantes, en la hoja “[VIAJES\\_NORTE\\_SUPERV](#)”. Los de esta modalidad aparecen en las hojas [DIF-M](#) y [DIF-F](#), según se trate de hombres o mujeres, respectivamente.

**Comparación:** Las primas en el caso femenino son superiores a las del caso masculino, debido a que las mujeres viven más que los hombres.

**Ejercicio propuesto:** efectúese el cálculo anterior, utilizando las tablas GRM-80 y GRF-80, por un lado, y las tablas PERM-2000C y PERF-2000C, por el otro. Compárense los resultados. Como apoyo se adjuntan las tablas 4 y 5.

**Tabla 4: Primas anual y única, por sexo, de un seguro diferido del trabajador nº 6, utilizando las tablas GRM-80 y GRF-80.**

SEXO	FNAC	PRESTACION	EDAD NAT.	EDAD ACT.	${}_{65-x}E_x$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:65-x}$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	12/12/54	12.000	54	54	0,717360	8.608	9,576156	899
MUJER	12/12/54	12.000	54	54	0,766710	9.201	9,821553	937

**Tabla 5: Primas anual y única, por sexo, de un seguro diferido del trabajador nº 3, utilizando las tablas PERM-2000C y PERF-2000C.**

SEXO	FNAC	PRESTACION	EDAD NAT.	EDAD ACT.	${}_{65-x}E_x$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:65-x}$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	26/6/51	30.000	57	58	0,817018	24.511	6,449650	3.800
MUJER	26/6/51	30.000	57	58	0,852235	25.567	6,549962	3.903

### 9.5. Renta diferida.

Características:

- Fecha de contrato del seguro: 1-1-2009.
- Garantías: prestación, en forma de renta vitalicia, en caso de llegar con vida a los 65 años.
- Tablas: PERM-2000P y PERF-2000P.
- El tipo de interés técnico utilizado ha sido el 2%.
- Duración del seguro: hasta que ocurra el fallecimiento del asegurado. Si se produce antes de llegar a los 65 años, el asegurado no recibe prestación alguna.
- Forma de pago: se computan tanto la prima única como la prima anual pagadera hasta los 65 años.
- El importe anual de la renta es 30.000, 24.000 ó 12.000 euros, según el grupo al que pertenezca el partícipe. Se percibe por meses vencidos.
- Formulación de la prima anual:

$$P_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:n} = R \cdot {}_{65-x} / a_{65}^{12} \quad (9.9)$$

Los cálculos se recogen en las hojas [RENTA-M](#) y [RENTA-F](#). De nuevo, se puede observar que las primas que pagan las mujeres son superiores a las de sus homólogos masculinos.

**Ejercicio propuesto:** repetir los cálculos pero, ahora, considerando una renta temporal, pagadera por meses vencidos desde los 65 hasta los 85 años. Comparar los resultados con el caso anterior, teniendo como apoyo la tabla 6.

**Tabla 6: Primas anual y única, por sexo, de una renta diferida temporal del trabajador nº 9, utilizando las tablas PERM-2000P y PERF-2000P.**

SEXO	FNAC	PRESTACION	EDAD NAT.	EDAD ACT.	${}_{65-x} / a_{x:20}^{12}$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:65-x}$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	2/10/63	24.000	45	45	8,288968	198.935	16,188569	12.289
MUJER	2/10/63	24.000	45	45	9,836771	236.083	16,513632	14.296

## 9.6. Seguro diferido con contraseguro de primas.

Características:

- Fecha de contrato del seguro: 1-1-2009.
- Garantías: en caso de llegar con vida a los 65 años, se garantiza el cobro de un capital C mientras que, en caso de fallecimiento, los beneficiarios perciben las primas pagadas.
- Tablas: PERM-2000P y PERF-2000P.
- El tipo de interés técnico utilizado ha sido el 2%.
- Duración del seguro: hasta que el asegurado cumple los 65 años ( $n = 65-x$ ) o antes, en caso de fallecimiento.
- Forma de pago: se computan tanto la prima única, como la prima anual, pagadera hasta los 65 años.
- Formulación:

Para la prima única: 
$$\pi_{x:n} = C \cdot {}_nE_x + \pi_{x:n} \cdot A'_{x:n} \quad (9.10)$$

Para la prima anual: 
$$P_{x:n} \ddot{a}_{x:n} = C \cdot {}_nE_x + P_{x:n} \cdot (IA)'_{x:n} \quad (9.11)$$

Siendo  $(IA)'_{x:n}$  un seguro de capital variable en progresión aritmética de razón la unidad.

Los cálculos se recogen en las hojas [DIFCON-M](#) y [DIFCON-F](#). Al igual que en casos anteriores, las primas que pagan las mujeres son superiores a las de sus homólogos masculinos. No obstante, en este caso las diferencias son menores debido a que se trata de un seguro mixto, ya que se cobra una prestación en caso de supervivencia y otra en caso de muerte.

**Ejercicio propuesto:** repetir el seguro pero, ahora, considerando un tipo de interés técnico un punto superior (3%), observando los cambios que se producen en las primas. Utilícese como apoyo la tabla 7, para el trabajador nº 12, según sea hombre o mujer:

**Tabla 7: Primas anual y única, por sexo, de un seguro diferido con contraseguro de primas, del trabajador nº 12, utilizando las tablas PERM-2000P y PERF-2000P.**

SEXO	FNAC	${}_{65-x}E_x$	$A'_{x:t-x}$	PRIMA UNICA	$\ddot{a}_{x:65-x}$	$(IA)'_{x:t-x}$	PRIMA ANUAL
HOMBRE	16/4/67	0,456428	0,064644	11.711	16,475775	0,931977	705
MUJER	16/4/67	0,489324	0,022181	12.010	16,782828	0,325234	714

## **PARTE III: LA PLANIFICACIÓN A TRAVÉS DEL MÉTODO DE LAS PROYECCIONES**

### **10. FUNDAMENTO Y TÉCNICA DE LAS PROYECCIONES**

Uno de los aspectos fundamentales a considerar en la evolución de un sistema de previsión social a largo plazo, es el del mantenimiento de su equilibrio económico-financiero, para lo cual es necesario conocer en un momento determinado cuál va a ser su comportamiento futuro. Ello supone efectuar las previsiones correspondientes, tanto en el aspecto demográfico como económico, mediante las correspondientes técnicas de proyección.

Los estudios demográficos de la población general de un país tienen como uno de sus objetivos principales el efectuar previsiones. La posibilidad de anticiparse a lo que será la evolución demográfica con una probabilidad elevada es una herramienta fundamental para otras ciencias, permitiendo actuaciones previas en materias sociales, económicas, etc. El punto de partida de todo estudio demográfico consiste en conocer la distribución por edades y sexo de la población a analizar. A continuación, se debe evaluar la mortalidad del colectivo, incluyendo una valoración sobre la evolución futura de este fenómeno. Además, la población que va a nacer cada año se calcula aplicando las tasas de fecundidad por edad a la población femenina. Finalmente, un fenómeno adicional a tener en cuenta son las migraciones e inmigraciones que puedan ocurrir en el país a lo largo del tiempo.

En muchos casos y como simplificación de la realidad, se supone que la mortalidad y la fecundidad son constantes, lo que significa emplear la misma tabla de mortalidad y tasas de natalidad año tras año. Una población con tasas de mortalidad y fecundidad constantes converge a una población estable. Esto supone que, a partir de un número determinado de años, la estructura por edades de la población se mantiene constante y el volumen total crece a una tasa constante.

Un paso más avanzado es efectuar proyecciones demográficas bajo la hipótesis de tasas de fecundidad y mortalidad variables. Este planteamiento resulta generalmente complicado y se necesita un conocimiento amplio del pasado para, a partir del mismo y del establecimiento de determinados supuestos, estimar las tendencias y cambios de coyuntura futuros. La extrapolación de las tendencias futuras de la mortalidad y de la natalidad puede efectuarse de manera individual para cada edad o bien extrapolar determinadas estadísticas, como el número medio de hijos por mujer y la esperanza de vida al nacer, para posteriormente reconstruir tablas tipo de mortalidad y fecundidad.

Está claro que existen fenómenos imprevisibles que influyen de manera muy importante en la evolución demográfica como las guerras, cambios bruscos de la natalidad (“baby-boom”), variaciones importantes en las migraciones, etc. No obstante, estos fenómenos tienen incidencia a largo plazo, de manera que las proyecciones demográficas suelen tener un alto grado de fiabilidad a corto y medio plazo. En efecto, cuando las proyecciones se realizan a largo plazo, se establecen varias hipótesis de partida sobre la evolución probable de la natalidad y, en algunos casos, también de la mortalidad. Las diferentes proyecciones obtenidas no suelen tener diferencias significativas a diez años, y sólo pueden adquirir alguna diferencia importante a largo plazo, entendiéndose como tal más de 40 años.

La pirámide de edades de la población de partida para efectuar una proyección, es un reflejo de los fenómenos acaecidos en el pasado y tiene acumulada lo que podría denominarse una inercia que condiciona, en gran medida, su evolución futura. Además, los fenómenos demográficos natalidad y mortalidad varían en el tiempo pero, salvo excepciones, lo hacen de una manera lenta.

Las proyecciones basadas en la evolución de las pirámides de edades, que son las más precisas ya que se ajustan a la realidad, han demostrado que no son ciertas las previsiones que consideraban un crecimiento exponencial indefinido de la población. Generalmente, las poblaciones han variado desde una situación de alta fecundidad y elevada mortalidad a situaciones de baja fecundidad y disminución de la mortalidad. Actualmente, en muchos países se ha llegado o se están alcanzando unas tasas de fecundidad inferiores a las necesarias para garantizar la renovación generacional. A largo plazo, un mantenimiento de la fecundidad por debajo del nivel de reemplazo generacional conduce a una disminución de la población, lo que representa un escenario desfavorable, al igual que el resultante de un crecimiento exponencial de la población.

La otra variable fundamental, **la mortalidad**, marca la esperanza de vida. Esta variable, efectivamente, tiene un límite. En los últimos años se ha prolongado la vida tanto para los hombres como para las mujeres, pero lo que no parece que se ha desplazado es el límite de la vida que podemos situar en los 100 años. La disminución de la mortalidad compensa el descenso de la fecundidad respecto al volumen total de una población, pero conduce a un fenómeno social muy importante como es el envejecimiento de la misma.

En los años próximos, la proporción de personas mayores va a verse incrementada, primero, por la disminución de la mortalidad y, segundo, porque alcanzarán edades avanzadas generaciones muy numerosas, las denominadas del “baby-boom”. Esto, unido al descenso de la fecundidad, traerá como consecuencia una reducción de las generaciones jóvenes.

### **10.1. Análisis de la evolución de la población general.**

El estudio de la población general determina el marco a partir del cual se desenvuelve la población afectada por un sistema de previsión social, sobre todo cuando su cobertura es toda la población de un país. Por consiguiente, las características y evolución de la población general van a condicionar la evolución del propio sistema. Para determinar el punto de conexión entre una población y otra, hay que considerar que el colectivo de beneficiarios del sistema se divide básicamente en dos grupos: la de los que aportan al sistema en la época de activo y la de los que perciben prestaciones en situación de pasivo. En función de esta situación, podemos clasificar la población general en tres grandes grupos relacionados con la vida laboral:

- Grupo de 0 a 19 años, que incluye a personas en época de inactividad (considerando los 19 años como edad límite de esta época).
- Grupo de 20 a 64 constituido por las personas que se encuentran en época de actividad.
- Grupo de 65 ó más años que engloba al colectivo pasivo.

Esta estructura de la población presenta una evolución en el tiempo cuyo análisis conviene realizar, tanto retrospectivamente para conocer su desarrollo en los últimos años, como prospectivamente para efectuar las correspondientes previsiones. Supongamos, a modo de ejemplo, una población cuya estructura fuera la que se indica en la tabla siguiente:

GRUPOS DE EDAD

Años	0-19	20-64	≥ 65	Total
1960	35,4	56,4	8,2	100,0
1970	35,7	54,5	9,8	100,0
1981	34,4	54,4	11,2	100,0
1991	28,0	58,2	13,8	100,0
1995	24,0	60,7	15,3	100,0
2000	20,8	62,4	16,9	100,0
2005	19,1	63,5	17,4	100,0
2010	18,1	63,8	18,1	100,0
2015	17,0	63,7	19,3	100,0
2020	15,9	63,5	20,6	100,0

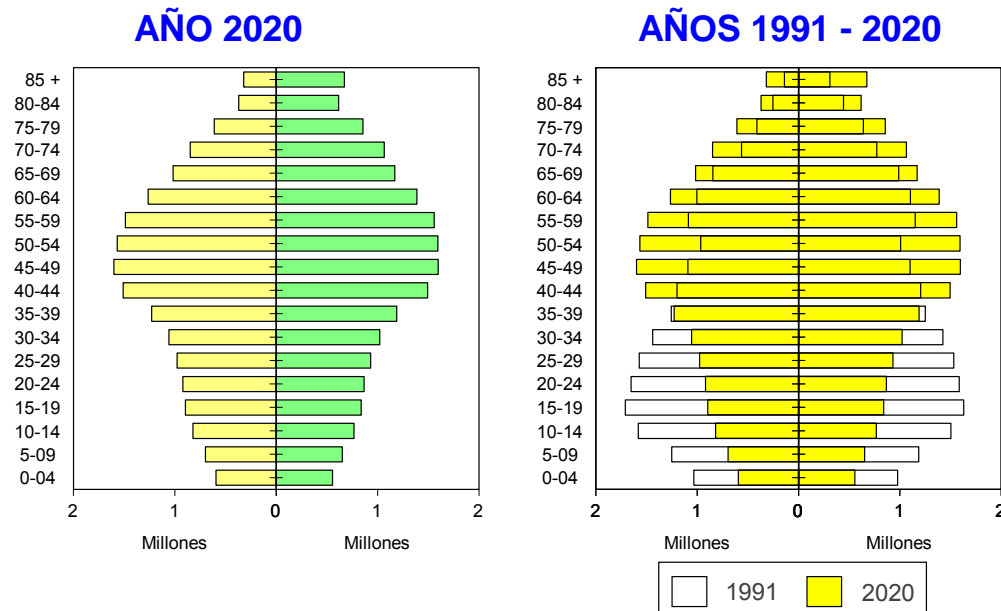
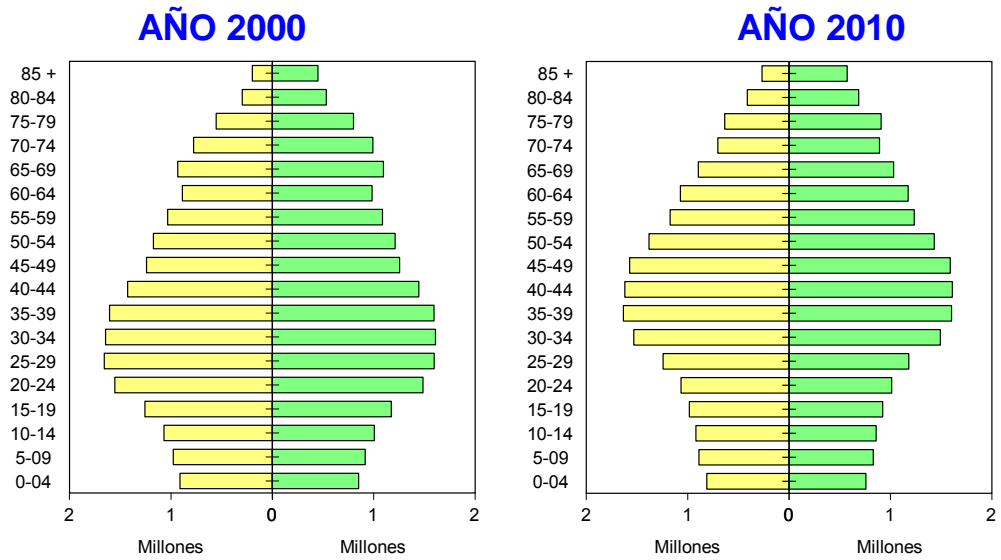
En esta estructura de población se observa un envejecimiento progresivo debido al descenso continuado del número de nacimientos y a una disminución de la mortalidad. Este efecto se deriva, por una parte, de la evolución en el tramo de edad de 0-19, en el que hay una participación cada vez menor, al descender de un 35,7 por ciento en 1970 a un 28,0 por ciento en 1991. Según las cifras de la proyección se alcanzaría un 15,9 por ciento en el 2020. El grupo de edades comprendido entre 20 y 64 años, que es el que generará las cotizaciones, es de un 60,7 por ciento en 1995 y alcanzará el 63,5 por ciento en el año 2020.

En estos grupos de edades se pueden producir fenómenos puntuales, como es el del incremento de la mortalidad en el colectivo de edades jóvenes, debido a fenómenos adicionales de mortalidad como son la drogadicción o los accidentes de tráfico, que se observan en muchos países.

La población de 65 ó más años, que puede considerarse la generadora de pasivos, tiene una participación creciente en la estructura, que oscila del 8,2 por ciento en 1960 a un 13,8 por ciento en 1991, y alcanza para el último año de la proyección el 20,6 por ciento.

Una forma de observar los efectos anteriores consiste en representar las pirámides poblacionales por grupos quinquenales de edad, que recogen los cambios de estructura de la población (véanse al respecto los gráficos siguientes):

## POBLACION CENSAL CLASIFICADA POR SEXO Y EDAD



A este respecto se observa un estrechamiento en la base de las pirámides y una acumulación de generaciones cada vez más voluminosas en edades altas. La repercusión que tiene esta variación en la estructura de la población general sobre un sistema de previsión social

generalizado es importante. En este sentido, se pueden analizar determinadas tasas de dependencia, entre las que se puede destacar la que refleja la evolución en el tiempo de la relación entre la población en edad de trabajar y la de 65 o más años [esta relación vendría dada por el cociente: población del tramo (20-64)/población del tramo  $\geq 65$ ]. La cuantificación de dicha tasa en la población que hemos tomado de ejemplo presenta los siguientes resultados:

Año censal	Tasa de dependencia	Año de proyección	Tasa de dependencia
1960	6,84	1995	3,97
1970	5,58	2000	3,69
1981	4,84	2005	3,65
1991	4,21	2010	3,52
		2015	3,30
		2020	3,08

Estos datos muestran como esta población ha visto, en un periodo de sesenta años, reducir la tasa de dependencia a menos de la mitad, estimando que haya apenas 3 cotizantes por cada jubilado. Asimismo, estas cifras referidas a la población general tendrían su repercusión sobre la población objeto de estudio con las siguientes matizaciones:

- Sobre la población pasiva, con un modelo de Seguridad Social consolidado tanto, en cuanto a una cobertura máxima en su acción protectora, como en su campo de aplicación, la evolución de la población cubierta por el sistema de la Seguridad Social mayor de 65 años tendría que ser casi paralela a la de la población general dada la alta correlación que existe entre una y otra. Por tanto, los resultados obtenidos para las proyecciones concretas de la población de Seguridad Social habría que contrastarlos y validarlos en función de este último criterio.
- La población de 20 a 64 años se utiliza como marco de referencia, puesto que a partir de ella se determinan la población activa y la población ocupada. En efecto, las distintas hipótesis de evolución que se establezcan sobre las tasas de actividad y ocupación proporcionarán el número de personas que contribuirán a la financiación del sistema en los años de la proyección.

## 10.2. Proyecciones económico-financieras.

En este apartado se presenta la secuencia completa de una proyección económico-financiera de un sistema de Protección Social, lo que supone, determinar la metodología, hipótesis de trabajo y bases técnicas generalmente utilizadas.

### 10.2.1. Descripción general de la metodología aplicable.

Un estudio económico-actuarial sobre el comportamiento futuro de un sistema de pensiones de un sistema de protección social, referido a un periodo a largo plazo de 40 ó 50 años, suele efectuarse sobre la base de un modelo mixto de proyecciones demográficas y financieras de cada uno de los colectivos afectados.

La extensión y profundidad que requiere todo estudio sobre el equilibrio actuarial de un colectivo hace necesario, una vez definidas las contingencias objeto de protección, considerar en el tiempo los análisis siguientes:

- Un **análisis demográfico** en el que, partiendo de la descripción estadística proporcionada por los censos de activos y pasivos, se pasa a la ordenación y clasificación de estos datos en los subcolectivos que comprende, para que sirvan de base a las valoraciones económico-actuariales. A continuación, se efectúa un tratamiento demográfico por edades en el que se estudia la evolución, como colectivos separados, del número de pensiones de pasivos supervivientes procedentes de los existentes al principio del período y del número de los que se incorporarán posteriormente en cada período, según las particularidades que existen para cada tipo de prestación. Igualmente se considera el censo de activos por edades y su evolución.
- Un **análisis económico** que permita efectuar las valoraciones económico-actuariales de los colectivos de activos y pasivos de forma separada. Para los primeros se calcula el volumen total de cotizaciones, mientras que para los segundos se evalúa el coste de las pensiones: primero, de las existentes y las de sus supervivientes y luego el de las nuevas incorporaciones. Este cálculo debe efectuarse por clases de pensiones y en función de las hipótesis correspondientes a las variables que las condicionan.
- **La justificación de las bases técnico-actuariales** aplicables a todo tipo de previsión social para señalar las que afectan al colectivo protegido.

Para realizar las **valoraciones económico-actuariales**, en **primer lugar**, se recoge la situación actual del colectivo de pensionistas existente en el momento origen del estudio para, mediante un proceso de sistematización y análisis, conocer la situación demográfica y económica, su estructura y posibilitar el tratamiento actuarial como colectivo cerrado.

En **segundo lugar** se efectúa el tratamiento del colectivo de activos del que se deducen las nuevas altas de pensiones causadas a partir del momento actual y para el período de estudio, tanto en su aspecto demográfico como económico, así como el número de afiliados que actuarán como financiadores en su época de actividad. Teniendo en cuenta que el factor "edad" es uno de los determinantes de la pensión, debe partirse de un "estado de activos", clasificado por edades, compuesto por los potenciales beneficiarios de pensiones y que, en la actualidad, abarca a los actuales afiliados susceptibles de ser beneficiarios de prestaciones.

Los datos de base mencionados son los imprescindibles para examinar el comportamiento de los fenómenos estadísticos, económicos y actuariales, en las vertientes cuantitativa y cualitativa de una proyección económico-financiera. Las proyecciones elaboradas a partir de dicha información se tratan en términos de **aleatoriedad**.

Utilizando las probabilidades de muerte y supervivencia, de invalidez y de jubilación, se determinan las **probabilidades de transición** que se obtienen a partir de las tablas correspondientes y del comportamiento de cada colectivo. Además, para estimar la evolución del colectivo se emplea el método de las componentes.

Por ello, en el tratamiento demográfico es necesario realizar, previamente, el siguiente trabajo técnico:

- **Elaboración de tablas continuas de mortalidad**, por edad y sexo acordes con la mortalidad registrada en el colectivo de asegurados para cada tipo de subcolectivo.
- **Elaboración de tablas de probabilidades de acceso a invalidez permanente por edades.**
- **Determinación de la probabilidad de entrada en jubilación a cada edad.**

Los resultados obtenidos en la proyección demográfica se pueden contrastar con diversos ajustes estadísticos, de los que se obtienen sus correspondientes tablas de análisis de la varianza para la elección del ajuste que se considere válido. Los ajustes se efectúan mediante regresiones múltiples sobre distintos colectivos de la población general, así como de otras variables, en función de las características de cada tipo de pensión que se estudia.

En un horizonte temporal de proyección suficientemente amplio, suelen considerarse dos intervalos, uno a corto o medio plazo, en el que como se ha indicado las proyecciones demográficas son altamente fiables, y otro a largo plazo en el que deben interrelacionarse las proyecciones demográficas con otros métodos estadísticos.

Para el primer intervalo, el resultado se obtiene para cada uno de los dos colectivos descritos. Se trata de proyecciones demográficas y económicas procedentes de un análisis detallado de todas las variables. La proyección demográfica se efectúa en función, por un lado, de las probabilidades de mortalidad, invalidez y jubilación obtenidas de la experiencia propia y, por otro, de la aplicación y conocimiento de los factores de normativa interna que influirán en la evolución de las variables del sistema en el futuro. Ello conduce al cálculo de lo que se ha denominado probabilidades de transición, base técnica en la que se apoyan las proyecciones. En realidad, ello supone trasladar un vector inicial del tiempo  $t-1$  al  $t$ , a partir de datos que pueden estar agrupados en dos tipos esenciales de variables: exógenas y endógenas.

Para el segundo intervalo temporal se aplican, generalmente, métodos de ajuste estadístico como forma más adecuada para llegar al final del horizonte propuesto.

### **10.2.2. Proyecciones demográficas y económicas de activos y pasivos del colectivo asegurado.**

Una vez conocidos los métodos principales para realizar una proyección demográfica, se descende al caso concreto de su aplicación a un colectivo de pasivos y activos de un colectivo asegurado.

Las proyecciones del colectivo de pasivos deben efectuarse considerando, en primer lugar, el número de pensionistas distribuidos por edades y clase de prestación (jubilación, invalidez, viudedad, orfandad o de otro tipo) existentes al comienzo de la proyección. Este es un colectivo que se trata como cerrado, en el que solamente se producen salidas por

fallecimiento, pérdida de la condición de pensionista (según legislación) o por alcanzar determinada edad (como, por ejemplo, en el caso de las pensiones de orfandad).

En cuanto a la cuantía de la prestación de este colectivo, se parte de la que tiene reconocida en el momento inicial de la proyección. A los pensionistas que van quedando cada año hay que asociarles los correspondientes importes de pensión, que se determinarán considerando los dos factores siguientes:

- A los que se mantienen como pensionistas al pasar de un año al siguiente, el importe de su pensión se verá modificado en función de la revalorización aplicada en el año.
- A los que causan baja durante el año (fundamentalmente por fallecimiento) se les pagará la cuantía de la pensión, revalorizada, durante los meses en que hayan permanecido vivos. A estos efectos, se suele aplicar la hipótesis de distribución uniforme que implica, a efectos de valoración, considerar que todas las bajas se producen a mitad de año.

Con la proyección en cada año del número de pensionistas y la pensión media correspondiente a cada clase de pensión, se obtiene el gasto del año para dicho colectivo, considerando únicamente un gasto de medio año para las pensiones que causan baja.

Además, al colectivo de pensionistas existentes en el momento inicial, hay que añadir el número de **nuevas pensiones** que se van produciendo cada año y sus correspondientes pensiones medias de entrada. A efectos de determinar dicho número se parte del colectivo de activos distribuidos por edades, y cuya proyección en el futuro nos permitirá conocer, por un lado, el número de cotizantes que habrá en el sistema en cada uno de los años de la proyección y, por otro, el número de activos que salen del colectivo, cuya estimación obedece a lo siguiente:

- **Salidas por invalidez:** es necesario aplicar las tasas de invalidez por edades al colectivo de activos para determinar el número de inválidos de cada año.
- **Salidas por fallecimiento:** en este caso se aplicarán las tablas de mortalidad por edades que, aplicadas al colectivo total, proporcionarán los cotizantes supervivientes en el año siguiente, y aplicadas al colectivo de casados proporcionará el número de pensiones por fallecimiento (supervivencia) que se empezarán a pagar.
- **Salidas por jubilación:** estas salidas habrán de considerarse diferenciadamente según que el sistema determine la jubilación a una edad determinada, o bien exista la posibilidad de jubilarse a distintas edades. En el primer caso, las salidas por jubilación se producirán a medida que se cumpla la correspondiente edad. En el segundo caso, habrá que obtener previamente las probabilidades de jubilarse a cada edad, y aplicarlas a la distribución por edades del colectivo de activos.

Una vez determinado el número de nuevas pensiones que se produce cada año, hay que asociarles sus correspondientes **pensiones medias** para determinar el gasto correspondiente a esas nuevas pensiones en cada uno de los años en que se producen.

A su vez, hay que proyectar el número y la pensión media de las nuevas altas de un año, para obtener las cuantías correspondientes a cada uno de los años posteriores a aquel en que se han generado.

El año en que se producen las altas se las asigna el gasto correspondiente a la mitad del año, aplicando la hipótesis de distribución uniforme. A partir de años sucesivos el número descenderá por fallecimiento y las pensiones de los que sobreviven se revalorizarán según las políticas concretas que se apliquen.

Por tanto, y en resumen, la **proyección del volumen de gasto** que se producirá en cada año será el correspondiente a la proyección del número de pensiones, de las existentes en el momento inicial, con su correspondiente pensión media, más el que se produzca por las altas de cada año y sus correspondientes proyecciones.

El **volumen total de recursos** vendrá determinado por la proyección del número de cotizantes con sus correspondientes salarios (que determinan las bases de cotización) y a través de los que se obtienen, por aplicación del tipo de cotización que corresponde, las cuotas que se piensan recaudar en cada ejercicio.

Situados en un contexto general de equilibrio de ingresos y gastos, la fórmula que corresponde a la cobertura de las prestaciones podría ser la siguiente:

$$\alpha_i \sum_{x=16}^{65} L_{xi} S_{xi} + O_{Ri} = \sum_{j=1}^5 \sum_{x=h}^w N_{jxi} P_{jxi} + \sum_{x=16}^{65} L_{xi} (IT)_{xi} + G_{Di}$$

Siendo:

$\alpha_i$  = tipo de cotización del año i.

$L_{xi}$  = número de cotizantes de edad x en el año i.

$S_{xi}$  = base de cotización de los cotizantes de edad x en el año i.

$O_{ri}$  = recursos diversos del año i.

$N_{jxi}$  = número de pensiones de clase j, edad x en el año i y  $j=1 \dots 5$ , en función de que el sistema contemplara cinco clases distintas de pensiones existentes.

$P_{jxi}$  = Pensión media de clase j y edad x en el año i.

$(IT)_{xi}$  = otras prestaciones económicas a la edad x en el año i.

$G_{Di}$  = gastos diversos en el año i.

La técnica para determinar la evolución a medio y largo plazo de ingresos y gastos a través de las proyecciones demográficas y económicas de cada uno de los colectivos, tanto de activos como de pasivos, se simplifica en un esquema general que para el caso de la evolución del número de beneficiarios en cada período puede resumirse en el siguiente cuadro:

## PROYECCIÓN DEMOGRÁFICA DE UN COLECTIVO

Generación	AÑOS								
	1	2	3	...	...	s	s+1	...	n
<b>1</b>	$N_{11}$	$N_{12}$	$N_{13}$			$N_{1s}$	$N_{1s+1}$		$N_{1n}$
<b>2</b>		$N_{22}$	$N_{23}$			$N_{2s}$	$N_{2s+1}$		$N_{2n}$
<b>3</b>			$N_{33}$			$N_{3s}$	$N_{3s+1}$		$N_{3n}$
<b>s</b>						$N_{ss}$	$N_{ss+1}$		$N_{sn}$
<b>s+1</b>							$N_{s+1 s+1}$		$N_{s+1n}$
<b>n</b>									$N_{nn}$
<b>Sumas</b>	$N_{11}$	$\sum_{i=1}^2 N_{i2}$	$\sum_{i=1}^3 N_{i3}$			$\sum_{i=1}^s N_{is}$	$\sum_{i=1}^{s+1} N_{is+1}$		$\sum_{i=1}^n N_{in}$

Siendo:

$N_{in}$  = número de personas que ingresaron en el colectivo en el año  $i$ , y sobreviven en el año  $n$ .

$N_{in+1} = N_{in} \cdot p_x$  y  $p_x$  = probabilidad de transición de un individuo de pasar de la edad  $x$  a la  $x+1$ .

La probabilidad de transición se define, en cada caso, como la probabilidad de permanecer en activo, de invalidarse, de jubilarse, de sobrevivir, etc.

En relación con el estudio concreto de las pensiones dentro de la formulación general anterior, el modelo que se suele utilizar para obtener la proyección del número de pensionistas procedentes del colectivo de activos, incorpora a la probabilidad de supervivencia en estado de activo  $P_x^a$ ; la probabilidad de invalidarse  $i_x$ , así como sus complementarias, y la probabilidad de jubilarse, en su caso, a cada una de las edades  $j_x$  en razón de los requisitos exigidos por cada norma concreta. Las fórmulas de recurrencia, entonces, serían:

$$\forall n \quad l_{x+n}^a = l_x^a n p_x^a \prod_{h=x+5}^{x+5+n-1} (1 - i_h) \prod_{h=x+15}^{x+15+n-1} (1 - j_h)$$

Siendo  $x$  = edad de entrada como cotizante.

$n$  = tiempo de permanencia.

$x+n$  = edad de cese como cotizante.

$i_h$  = probabilidad de invalidarse a edad  $h$

$j_h$  = probabilidad de jubilarse a edad  $h$

Expresión que permitiría obtener la evolución de:

- los cotizantes a cada edad  $x$ .
- los fallecidos a la edad  $x$ .
- los inválidos a la edad  $x$ .

- los jubilados a la edad  $x$ .

La aplicación de las probabilidades de transición en el tiempo da origen, sucesivamente, a los siguientes colectivos:

- El colectivo de nuevos pensionistas que se producen en cada período, que determinarán, junto con la proyección de los pasivos existentes al comienzo del período estudiado, el colectivo total causante del gasto en los próximos  $n$  años.
- El colectivo de cotizantes propiamente dicho que, junto con las nuevas incorporaciones, forman el potencial conjunto sobre el que recaerá la financiación.

### **10.2.3. Bases técnicas de un estudio actuarial.**

Para el desarrollo de la metodología descrita en el apartado anterior, se utilizan las siguientes bases de datos e hipótesis sobre el comportamiento de las distintas variables exógenas y endógenas.

#### **a) Bases de datos utilizadas y tablas de supervivencia, mortalidad, invalidez y jubilación.**

Para realizar la proyección económico-actuarial de las pensiones, se parte de la siguiente información estadística obtenida tras el oportuno tratamiento informático de las bases de datos preexistentes del sistema de pensiones.

- \* Distribución, por edades, del número y cuantía de pensiones en vigor, por clases de pensión, para su tratamiento como colectivo cerrado.
- \* Distribución, por edades, del número y cuantía de nuevas altas por clases de pensión, esto es:
  - Pensiones de invalidez y su distribución por edades y grados.
  - Pensiones de jubilación según edad y clasificación de jubilación anticipada según situación de procedencia (con coeficiente reductor, bonificación de edad, jubilación especial a los 64 años, etc.).
  - Pensiones de supervivencia, según situación de activo o pasivo del causante en el momento del fallecimiento.
- \* Distribución, por edades, del número de cotizantes con derecho a pensión.

A estas bases de datos del sistema se aplican las siguientes probabilidades:

- Tablas continuas de mortalidad por edades.
- Tasas de invalidez por grados y edades.
- Tasas de jubilación según edad. Si existe la posibilidad de jubilarse a diferentes edades cumpliendo determinados requisitos.
- Probabilidades de transición de permanencia en activo.

## b) Hipótesis de trabajo.

El estudio se realiza siempre bajo determinados supuestos, de variaciones o no del marco jurídico vigente en el punto de partida, y se considera el comportamiento histórico de la población del sistema de previsión social en un conjunto de aspectos tales como: distribuciones de edades de jubilación e invalidez, grados de invalidez, convenios colectivos, movimientos de la población activa, tanto internos (antigüedad, ascensos, etc.) como externos (nivel de paro), no retorno a la actividad laboral una vez causada la pensión, etc.

Un ejemplo de las hipótesis aplicables puede ser el que se recoge en los cuadros siguientes para cada una de las variables, que tendrían que reflejar las hipótesis de evolución de las mismas para los distintos años de la proyección.

### Evolución de las magnitudes macroeconómicas

Años de proyección
PIB (precios constantes)
PIB (precios corrientes)
Deflactor del PIB
IPC
SMI (Salario Mínimo Interprofesional)
Población activa
Tasa actividad (s/población 20-64)
Población cotizante
Sueldos y salarios por persona

### Evolución de la población objeto de estudio

Población
Estructura de población
0-19 años
20-64 años
65+ años
TOTAL
Variación interanual

Población
0-19 años
20-64 años
65+ años
TOTAL

### Evolución de otras magnitudes

Bases mínimas de cotización
Bases máximas de cotización
Bases medias de cotización
Revalorización de pensiones
Pensión máxima

#### 10.2.4. Ejemplo de una proyección demográfica de un colectivo cerrado de individuos en edad de trabajar, siguiendo la distribución por edades de la población española de 2004 (INE-2004).

La hoja “[Proyección](#)” del fichero [INE-2004](#) contiene la proyección demográfica de un colectivo cerrado de 100000 activos con edades comprendidas entre los 22 y los 65 años, que va disminuyendo por las personas que fallecen, se invalidan o se jubilan.

El número de efectivos a cada edad, al comienzo de la proyección, se recoge en la columna censo y resulta proporcional a la distribución que presentaba la población española en la tabla de mortalidad del 2004-2005, para ambos sexos. A continuación, figuran la probabilidad de fallecimiento  $q_x$  tomada de esa misma tabla de mortalidad y la de invalidez  $i_x$ , procedente de la tabla de invalidez interpolada ([INTERPOLACIÓN\\_invalidez\\_total](#)). Con estas dos probabilidades se calcula la probabilidad de supervivencia, según la cual, un activo de edad  $x$  mantendrá dicha condición un año después si no fallece o se invalida:

$$p_x^* = (1 - q_x) \cdot (1 - i_x) = 1 - q_x - i_x + q_x \cdot i_x$$

Al aplicar dicha formulación al censo de personas existentes en el momento inicial se obtiene el número de personas válidas a la edad  $x+1$  un año después (columna  $i$ ). En esta columna no habrá efectivos de 22 años, dado que se considera que el grupo es cerrado. Asimismo, a lo largo del año 1 habrán desaparecido las personas que se han invalidado (columna BA), han

fallecido (columna CS) o se han jubilado (las que tenían 65 en el censo inicial). La repetición de este proceso a lo largo del tiempo permite predecir el volumen de activos que habrá al final de cada año, así como las salidas que se irán produciendo por invalidez, fallecimiento o jubilación (véase hoja de [gráficos](#)). A este respecto se puede observar como el número de activos desciende de forma lineal en el tiempo (gráfico 1), en tanto que el de fallecidos e inválidos se mantiene constante durante los 20 primeros años (incluso crece levemente el número de inválidos) para disminuir a partir de entonces (gráfico 2). Por lo que respecta a la probabilidad media de invalidez y fallecimiento hay que decir que crece de forma continuada, de forma más intensa en aquella, para disminuir bruscamente en los últimos años (gráfico 3). En el caso de la invalidez, la reducción se explica por el comportamiento de las tasas correspondientes de la tabla interpolada, que pasan de un 16'7 por mil para una persona de 61 años a un 12'47 por mil para otra de 64 años. Por otra parte, el descenso en el riesgo de muerte obedece a que el número de efectivos fallecidos engloba, tanto a los activos que mueren como a los que se invalidan y después fallecen. Por consiguiente, su cálculo se ve influido por el acusado descenso que sigue la tasa de invalidez para los últimos años de la tabla, según se ha señalado. En lo que se refiere a la probabilidad de supervivencia a los 65 años desde la edad  $x$ , se puede observar como crece a medida que lo hace  $x$ , indicando que cuanto más edad se tenga mayor es la probabilidad de jubilarse (gráfico 4). Por último, la probabilidad de seguir formando parte del colectivo de activos decrece a cada edad, excepto en los tramos 26-28 y 62-64 donde la reducción en la probabilidad de invalidarse hace crecer la probabilidad de supervivencia.

## ANEXOS

### I: MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN Y AJUSTE

#### I.1. INTRODUCCIÓN.

Es frecuente la necesidad de buscar funciones apropiadas a partir de datos que proceden de una población en la que se ha realizado un registro de informaciones o estudio estadístico, para que cumplan determinadas condiciones que nos interesen, como que sean continuas, derivables, etc. Con este objetivo trataremos de plantear distintos procedimientos para realizar la búsqueda de estas funciones, bien buscando una función que pase exactamente por una serie de puntos (función de interpolación) o bien que esa función elegida por nosotros se adapte lo mejor posible a una serie o a una nube de puntos (función de ajuste o regresión).

La finalidad del cálculo de las funciones de interpolación se centra en la necesidad de obtener valores intermedios (INTERPOLACIÓN) o de valores fuera del intervalo para el que se dispone de datos (EXTRAPOLACIÓN).

#### I.2. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN.

Un problema clásico de la matemática, se plantea al querer calcular el valor de una función en un punto cuando no se conoce la función o incluso cuando la función no existe, conociéndose únicamente una serie de puntos. La resolución aproximada del problema consiste en encontrar una función fácil de construir y de evaluar, que coincide con la función objeto del problema con los datos de que se dispone. Se dice que la función así construida **interpola** a la función dada con respecto a los datos.

Se trata de determinar fundamentalmente dos cosas:

1. Los datos que se desea que sean comunes a la función desconocida y a la **función interpoladora**.
2. Que tipo de función se va a utilizar como **función interpoladora** o **función de interpolación**.

##### I.2.1. Interpolación polinómica.

Se puede plantear como ejemplo lo siguiente: Sea **f** una función de una variable cuyo valor se conoce en  $n + 1$  puntos:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , llamaremos:

$$f(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

y se desea calcular su valor aproximado para una valor cualquiera de  $x$ .

La literatura matemática clásica, utiliza una función interpoladora de tipo polinómico de grado no mayor que  $n$ , siendo  $n$  el número de puntos conocidos menos uno.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

### I.2.1.1. Método matricial.

Así, dada una función  $f(x)$ , de la que se conocen los valores que toma en  $n+1$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :  $[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]$ . Se trata de buscar un polinomio  $P_n(x)$  de grado  $n$  que pase por los puntos  $P_n(x_i, f(x_i))$  de forma que:

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n(x_1) = f(x_1), \dots, P_n(x_n) = f(x_n)$$

las condiciones impuestas determinan que los coeficientes deben verificar:

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = f(x_i) \text{ para } i = 0, 1, \dots, n$$

la existencia y unicidad del sistema depende del determinante de Vandermonde siguiente:

$$|\Delta_n| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

que desarrollándolo, obtenemos:

$$|\Delta_n| = (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \dots = \prod_{\substack{i=1 \\ j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j)$$

si los  $x_i$  son distintos, se tendrá  $|\Delta_n| \neq 0$  con lo que el sistema tendrá solución única.

Expresándolo en forma matricial:

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_n)^t \quad \text{e} \quad Y = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$\Delta_n \cdot A = Y, \text{ por tanto, despejando } A = \Delta_n^{-1} \cdot Y$$

### Ejemplo:

Construir el polinomio interpolador que pase por los puntos:

$$\{(1, 1'5)(2, 3'9)(3, 9)(4, 15)\}$$

construyendo la matriz:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

y el vector de ordenadas:  $\mathbf{Y} = (1'5, 3'9, 9, 15)^t$

se comprueba que:

$$|\Delta_n| = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} = 12$$

siendo su inversa:

$$\Delta_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -4'333 & 9'5 & -7 & 1'833 \\ 1'5 & -4 & 3'5 & -1 \\ -0'167 & 0'5 & -0'5 & 0'167 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\mathbf{A} = \Delta_n^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -4'333 & 9'5 & -7 & 1'833 \\ 1'5 & -4 & 3'5 & -1 \\ -0'167 & 0'5 & -0'5 & 0'167 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1'5 \\ 3'9 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3'6 \\ -4'95 \\ 3'15 \\ -0'3 \end{pmatrix}$$

obteniéndose el polinomio interpolador:

$$\boxed{P(x) = -0'3x^3 + 3'15x^2 - 4'95x + 3'6}$$

Ahora bien, para obtener los polinomios de interpolación existen otros métodos, como los siguientes:

- Polinomios de **Lagrange**
- Polinomios de **Interpolación parabólica progresiva.**
- Polinomios de **Newton.**
- Polinomios de **Gauss.**

### I.2.1.2. Métodos de Interpolación parabólica progresiva:

El método de Interpolación parabólica progresiva es recurrente y se basa en la idea de utilizar la interpolación introduciendo progresivamente dos, tres, cuatro puntos, etc. Esto es:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})$$

donde:

$$a_n = \frac{P_n(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})}$$

#### Ejemplo:

Construir el polinomio interpolador por el método de Interpolación parabólica progresiva, que pase por los puntos:

$$\{(1, 1'5)(2, 3'9)(3, 9)(4, 15)\}$$

Se construyen los polinomios introduciendo progresivamente los puntos, de la siguiente manera:

- En primer lugar se calcula la recta que pasa por los puntos:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\} = \{(1, 1'5), (2, 3'9)\}$$

$$P_1(x) = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + y_0$$

$$P_1(x) = \frac{(3'9 - 1'5)}{(2 - 1)}(x - 1) + 1'5$$

$$P_1(x) = 2'4x - 0'9$$

- A continuación se construye una parábola cuadrática que pase por los puntos:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \{(1, 1'5), (2, 3'9), (3, 9)\}$$

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

siendo:

$$a_2 = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{9 - 6'3}{(3 - 1)(3 - 2)} = 1'35$$

y sustituyendo:

$$P_2(x) = (2'4x - 0'9) + 1'35(x-1)(x-2)$$

$$P_2(x) = 1'35x^2 - 1'65x + 1'8$$

– Y finalmente la parábola cúbica que pasa por los cuatro puntos:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\} = \{(1, 1'5), (2, 3'9), (3, 9), (4, 15)\}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

siendo:

$$a_3 = \frac{y_3 - P_2(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{15 - 16'8}{(4-1)(4-2)(4-3)} = -0'3$$

sustituyendo:

$$P_3(x) = (1'35x^2 - 1'65x + 1'8) - 0'3(x-1)(x-2)(x-3)$$

obteniéndose el polinomio interpolador para los cuatro puntos:

$$P_3(x) = -0'3x^3 + 3'15x^2 - 4'95x + 3'6$$

### I.2.1.3. Polinomios de Lagrange.

Se trata de construir un polinomio de grado n, que se anule en los puntos (que pase por los puntos):  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  salvo en uno  $(x_j)$  en el que valdrá 1.

Dicho polinomio será de la forma:  $P_n(x) = a \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x-x_i)$  siendo “a” un número real cualquiera.

Para  $x = x_k$  se tendrá  $P(x_k) = 1$ , lo que determina el valor de “a”, por tanto:

$$a = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}$$

Así, el polinomio que buscamos será de la forma:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

y para que el polinomio interpolador de grado  $n$ , que buscamos, tome los valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , es suficiente con que se verifique:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)$$

si los valores  $y_k$  proceden de una función  $f$ , en los puntos  $x_k$ , se tendrá:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$$

llamándose dicha expresión **fórmula de Lagrange** del polinomio de interpolación y a las  $l_k$  **polinomios de Lagrange**:

### Ejemplo:

Construir el polinomio interpolador por el método de **Lagrange**, que pase por los puntos:

$$\{(1,1'5)(2,3'9)(3,9)(4,15)\}$$

siendo el polinomio interpolador:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) = f(x_n) l_n(x_n)$$

Así mismo:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

y

$$l_n(x_n) = \frac{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} = 1$$

por tanto:

$$P_n(x) = f(x_n)$$

Por ello, introduciendo los datos:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) = (-0'167x^3 - 1'5x^2 - 4'333x - 4) \end{aligned}$$

$$l_1(\mathbf{x}) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 - 8x^2 + 19x - 12) = (0'5x^3 - 4x^2 + 9'5x - 6)$$

$$l_2(\mathbf{x}) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) = (-0'5x^3 + 3'5x^2 - 7x + 4)$$

$$l_3(\mathbf{x}) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$= \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (0'167x^3 - x^2 + 1'833x + 1)$$

Se obtienen finalmente el polinomio interpolador:

$$P_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$= 1'5 l_0(x) + 3'9 l_1(x) + 9 l_2(x) + 15 l_3(x)$$

$$P_3(x) = -0'3x^3 + 3'15x^2 - 4'95x + 3'6$$

#### I.2.1.4. Fórmula de Newton para el polinomio de interpolación.

Sea  $P_n(x)$  el polinomio que interpola a  $f(x)$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , y  $P_{n-1}(x)$  el polinomio que interpola a  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . La diferencia entre ambos es un polinomio de grado no mayor que  $n$ , que se anula para  $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , ya que en dichos puntos  $P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ , y en consecuencia:

$$Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) = A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) = A_n \prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i)$$

obteniéndose:

$$A_n = \frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i)}$$

dando a  $x$  el valor  $x_n$ , por ser  $P_n(x_n) = f(x_n)$ , se tiene:

$$A_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)} \quad \text{siendo } n \geq 1$$

como  $P_0(x) = f(x_0)$  se puede llamar  $A_0 = f(x_0)$ , construyéndose a partir de la fórmula anterior  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Obtenemos, por tanto, la expresión del polinomio de interpolación siguiente:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

Por convenio se llama **diferencia dividida** a la expresión:

$$A_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

siendo:

$$A_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

ó

$$A_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_n]}{(x_0 - x_n)}$$

La **Fórmula de Newton**, por tanto, sería:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = \sum_{i=0}^n A_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

que recibe el nombre de fórmula de Newton del polinomio de interpolación.

El cálculo de las **diferencias divididas** se realizaría así:

siendo:

$$f[x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{f[x_n, x_0, \dots, x_{n-2}] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{(x_n - x_{n-1})}$$

por simetría:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{(x_n - x_{n-1})}$$

Por tanto, tendríamos las diferencias divididas siguientes:

$i$	$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	$x_0$	$f[x_0]$			
1	$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
2	$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
3	$x_3$	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$		
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

**Ejemplo:**

Construir el polinomio interpolador por el método de **Newton**, que pase por los puntos:

$$\{(1, 1'5)(2, 3'9)(3, 9)(4, 15)\}$$

siendo el polinomio interpolador:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

que en nuestro caso será:

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Obtenemos las diferencias divididas  $f[x_0, \dots, x_i]$ :

$i$	$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	1	1'5			
1	2	3'9	$\frac{3'9 - 1'5}{2 - 1} = 2'4$	$\frac{5'1 - 2'4}{3 - 1} = 1'35$	
2	3	9	$\frac{9 - 3'9}{3 - 2} = 5'1$	$\frac{6 - 5'1}{4 - 2} = 0'45$	$\frac{0'45 - 1'35}{4 - 1} = -0'3$
3	4	15	$\frac{15 - 9}{4 - 3} = 6$		

Por tanto, el polinomio interpolador sería:

$$P_3(x) = 1'5 + 2'4(x-1) + 1'35(x-1)(x-2) - 0'3(x-1)(x-2)(x-3)$$

Finalmente:

$$P_3(x) = -0'3x^3 + 3'15x^2 - 4'95x + 3'6$$

### I.2.1.5. Fórmula de Gauss para el polinomio de interpolación usando diferencias finitas:

Para definir **las diferencias finitas**, consideramos una función  $f(x)$  de una sucesión de valores de  $x$  equidistantes entre sí, esto es:  $x_0, x_1, \dots, x_n$  donde  $h = x_i - x_{i-1} > 0$ .

siendo:  $x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots$

Se llama diferencia progresiva de  $f(x)$  en  $x_k$  a:

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= \Delta f(x_k) = f(x_k + h) - f(x_k) \quad \text{o} \\ &= f(x_{k+1}) - f(x_k) \end{aligned}$$

la segunda diferencia progresiva, será:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta f(x_k)) &= \Delta^2 f(x_k) \\ &= \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k \end{aligned}$$

en general:

$$\Delta^{n+1} f_k = \Delta^n f_{k+1} - \Delta^n f_k$$

que se llama diferencia progresiva de orden  $n$

Así, se puede construir una tabla con las diferencias progresivas de órdenes sucesivos de la forma siguiente:

$x_0$	$f_0$				
		$\Delta f_0 = f_1 - f_0$			
$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$		
		$\Delta f_1 = f_2 - f_1$		$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$	
$x_2$	$f_2$		$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$		$\Delta^4 f_0 = \Delta^3 f_1 - \Delta^3 f_0$
		$\Delta f_2$		$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$	
$x_3$	$f_3$		$\Delta^2 f_2$		.
		$\Delta f_3$		.	.
$x_4$	$f_4$		.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

El polinomio de interpolación usando diferencias finitas sería:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i f_0}{i! \cdot h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

que reciben el nombre de **fórmulas de Newton progresivas**.

### Ejemplo:

Construir el polinomio interpolador por el método de **Newton con diferencias progresivas** de  $f(x)$ , que pase por los puntos:  $\{(1,1'5)(2,3'9)(3,9)(4,15)\}$ , siendo el polinomio interpolador:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i f_0}{i! \cdot h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

en el problema,  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1$  siendo el polinomio de interpolación:

$$P_3(x) = \frac{f_0}{0! \cdot 1^0} + \frac{\Delta f_0}{1! \cdot 1^1} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2! \cdot 1^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3! \cdot 1^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Calculando las diferencias progresivas:

i	$x_i$	$f_i$	$\Delta f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	1	$f_0 = 1'5$			
			$\Delta f_0 = 2'4$		
1	2	3'9		$\Delta^2 f_0 = 2'7$	
			5'1		$\Delta^3 f_0 = -1'8$
2	3	9		0'9	
			6		
3	4	15			

sustituyendo tenemos:

$$P_3(x) = \frac{1'5}{0! \cdot 1^0} + \frac{2'4}{1! \cdot 1^1}(x-1) + \frac{2'7}{2! \cdot 1^2}(x-1)(x-2) - \frac{1'8}{3! \cdot 1^3}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= 1'5 + 2'4(x-1) + 1'35(x-1)(x-2) - 0'3(x-1)(x-2)(x-3)$$

y operando se obtiene el polinomio:

$$P_3(x) = -0'3x^3 + 3'15x^2 - 4'95x + 3'6$$

### I.3. MÉTODOS DE AJUSTE.

Es el conjunto de métodos que permiten ajustar los datos de forma que se puedan realizar cálculos estimativos posteriores. Lo más frecuente, es que no sea posible encontrar una función sencilla que pase por todos los puntos que representan a los datos y sea capaz de representar adecuadamente el perfil deseado. En estos casos, se recurre a los MÉTODOS DE AJUSTE, que pretenden obtener una función que cumpla los requerimientos de suavidad (continuidad y derivabilidad) y que se parezca lo más posible a los datos, aunque no pase exactamente por ellos.

Los métodos para la búsqueda de estas funciones de ajuste, se pueden clasificar en:

- Métodos gráficos.
- Métodos paramétricos.
- Métodos no paramétricos.

Describimos brevemente cada uno de ellos.

#### Métodos gráficos:

Se basan en la descripción de la gráfica que muestre valores de una variable dependiente en función de los valores de una variable independiente, por ejemplo, las tasas o probabilidades (variable dependiente) en función de la edad, la fecha, etc. (variable independiente).

Estas gráficas, permiten una fácil comparación entre diferentes estudios, sobre un mismo fenómeno, en distintas situaciones (países, épocas, etc.).

### **Métodos paramétricos:**

Los valores de la variable dependiente, como tasas o probabilidades, se especifican mediante una función, con un número de parámetros finito, que depende de la variable independiente, como la edad, fecha, etc..

El ajuste de dicha función a los datos, se suele realizar utilizando los métodos clásicos, si se desea que la función pase por unos puntos dados, o métodos de ajuste, si se desea aproximar una determinada función a una serie de puntos, que nos permiten, en ambos casos, estimar los parámetros.

### **Métodos no-paramétricos:**

No proponen ningún modelo de función para describir el comportamiento de los datos. Las tasas o probabilidades se obtienen mediante métodos de suavizado recurrentes, que utilizan los datos conocidos en edades adyacentes.

Veamos, a continuación, algunos de los métodos de ajuste paramétricos de los datos empíricos.

#### **I.3.1. Métodos de ajuste paramétricos.**

Son métodos alternativos a los métodos de interpolación. Distinguiremos entre los **métodos de regresión**, en los que se tratará de adaptar una función a una masa de datos empíricos (nube de puntos) y los **métodos de ajuste**, en los que se adaptará una función a un conjunto limitado de puntos empíricos observados o bien procedentes de funciones biométricas:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$ , obligando a que la función represente suficientemente los datos, suavizando los puntos. Es decir, se tratará de describir la evolución de los datos con ciertas funciones, que utilicen hipótesis referentes al comportamiento de los datos.

##### **I.3.1.1 Regresión y ajuste lineales:**

- **Regresión lineal** por el método de los mínimos cuadrados.

Dado un conjunto de pares de puntos:  $(x_i, y_j)$ ,  $i=1,2, \dots m$   $j=1,2, \dots n$ . Los valores de ajuste teóricos calculados, según el modelo lineal, serían:  $\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i$

La discrepancia o diferencia “vertical” entre los valores “y” empíricos y los teóricos sería:

$$d_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_j = y_{ij} - (\alpha + \beta x_i), \quad i = 1, 2, \dots m \quad j = 1, 2, \dots n$$

Y la función como suma de las diferencias o discrepancias al cuadrado sería:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [y_{ij} - (\alpha + \beta x_i)]^2$$

que se minimiza respecto de  $\alpha$  y  $\beta$ , para que las diferencias sean lo menores posibles, obteniéndose estimadores mínimo cuadráticos de  $\alpha$  y  $\beta$  :

$$b = \beta^* = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad \text{y} \quad a = \alpha^* = \bar{y} - b\bar{x}$$

siendo:

$$S_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}) \quad \text{la covarianza muestral}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{la varianza muestral de la variable independiente } x$$

$\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son las medias muestrales.

así la recta de regresión será:

$$\hat{y}_i = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x_i - \bar{x})$$

Para dar una medida de la discrepancia global entre los datos empíricos y los datos teóricos, se utiliza la **varianza residual** (VR), como media de las discrepancias al cuadrado:

$$VR = \frac{1}{N} \phi(a,b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [y_{ij} - (a + bx_i)]^2$$

para evitar su dependencia de la escala de medida, se mejora utilizando una medida relativa, que sería adimensional:

$$\frac{\text{Varianza residual}}{\text{Varianza de la } y} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^2}{S_y^2} = 1 - R^2$$

o bien:

$$\text{Coeficiente de determinación} = R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^2}{S_y^2}$$

medida que oscila entre 0 y 1, siendo mejor el ajuste cuando más se aproxime a 1 el coeficiente  $R^2$ .

- **Ajuste lineal** por el método de los mínimos cuadrados.

Dado un conjunto de pares de puntos:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , donde a cada valor de la variable  $x$  le corresponde un solo valor de la variable  $y$ . Los valores teóricos calculados, según el modelo lineal, serían:  $\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i$

La discrepancia o diferencia “vertical” entre los valores “y” empíricos y los valores teóricos  $\hat{y}_i$  según el ajuste, sería:

$$d_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\alpha + \beta x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Y la función como suma de las diferencias o discrepancias al cuadrado sería:

$$\phi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\alpha + \beta x_i)]^2$$

que se minimiza respecto de  $\alpha$  y  $\beta$ , obteniéndose los estimadores:

$$b = \beta^* = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad \text{y} \quad a = \alpha^* = \bar{y} - b\bar{x}$$

siendo:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \text{la covarianza muestral}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{la varianza muestral de la variable independiente } x$$

$\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son las medias muestrales.

así la recta de regresión será:

$$\hat{y}_i = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x_i - \bar{x})$$

Para dar una medida de la discrepancia global entre los datos empíricos y los datos teóricos, se utiliza la **varianza residual** (VR), como en el caso anterior, como media de las discrepancias al cuadrado:

$$VR = \frac{1}{n} \phi(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2$$

De la misma forma, para evitar su dependencia de las escalas de medida, utilizamos una medida relativa, que sería adimensional, esto es:

$$\frac{\text{Varianza residual}}{\text{Varianza de la } y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2}{S_y^2} = 1 - R^2$$

o bien:

$$\text{Coeficiente de determinación} = R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2}{S_y^2}$$

medida que oscila entre 0 y 1, siendo mejor el ajuste cuando más se aproxime a 1 el valor de  $R^2$

En los métodos que estamos describiendo, nos referimos a **métodos de ajuste** sobre colectivos de puntos cuando para cada valor de la variable  $x$  solo exista un valor de la variable  $y$ , frente a los **métodos de regresión** sobre conjuntos de puntos (nubes de puntos) donde para cada valor de la variable  $x$  existen varios valores de la variable  $y$ .

### I.3.1.2 Ajustes no lineales.

Veamos **ajustes no-lineales** por el método de los mínimos cuadrados. Dependiendo de la función que se desea ajustar, tendremos:

- **Función exponencial.**

Utilizando una función del tipo:

$$\hat{y}_i = a \cdot b^{x_i}$$

Que se puede linealizar utilizando logaritmos (por ejemplo logaritmos neperianos)

$$\ln \hat{y}_i = \ln a + x_i \ln b$$

llamando:

$$y'_i = \ln y_i, \quad \hat{y}'_i = \ln \hat{y}_i, \quad a' = \ln a, \quad b' = \ln b$$

se tiene:

$$\hat{y}'_i = a' + b'x_i$$

que se puede tratar como un ajuste lineal por el método de los mínimos cuadrados, obteniéndose  $a'$  y  $b'$ , a partir de las que se calculan:

$$a = e^{a'} \quad y \quad b = e^{b'}$$

- **Función potencial.**

Utilizando una función del tipo:

$$\hat{y}_i = a \cdot x_i^b$$

que se linealiza utilizando logaritmos neperianos

$$\ln \hat{y}_i = \ln a + b \ln x_i$$

llamando:

$$y'_i = \ln y_i, \quad \hat{y}'_i = \ln \hat{y}_i, \quad a' = \ln a, \quad x'_i = \ln x_i$$

obteniéndose:

$$\hat{y}'_i = a' + bx'_i$$

que se puede tratar como un ajuste lineal por el método de los mínimos cuadrados, obteniéndose:  $a'$ , de la cual se calcula:

siendo

$$b = \frac{S_{x'y'}}{S_{x'}^2} \quad \text{y} \quad a' = \bar{y}' - b\bar{x}'$$

y finalmente

$$a = e^{a'} \quad \text{y} \quad b = e^{b'}$$

### Ejemplo:

Construir una función del tipo:  $\hat{y}_i = a \cdot x_i^b$ , que se ajuste por el método de mínimos cuadrados a los puntos:  $\{(1,1'5)(2,3'9)(3,9)(4,15)\}$

$$y'_i = \ln y_i, \quad \hat{y}'_i = \ln \hat{y}_i, \quad a' = \ln a, \quad x'_i = \ln x_i$$

A partir de los datos tenemos:

i	$x_i$	$y_i$	$x'_i = \ln x_i$	$y'_i = \ln y_i$
1	1	1'5	0	0'40547
2	2	3'9	0'69315	1'36098
3	3	9	1'09861	2'19722
4	4	15	1'38629	2'70805

$$\bar{x} = 2'5, \quad \bar{y} = 7'35, \quad \bar{x}' = 0'79451, \quad \bar{y}' = 1'66793$$

Se obtiene:

$$b = \frac{S_{x'y'}}{S_{x'}^2} = \frac{0'45266}{0'27105} = 1'67002 \quad \text{y} \quad a' = \bar{y}' - b\bar{x}' = 1'66793 - 1'67002 \cdot 0'79451 = 0'34108$$

deshaciendo el cambio

$$a = e^{a'} = e^{0'34108} = 1'40647$$

siendo la función de ajuste potencial:

$$\hat{y}_i = 1'40647 \cdot x_i^{1'67002}$$

- **Funciones polinómicas de grado superior a la unidad.**

Se trata de ajustar la función polinómica:  $\hat{y}_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n$  por el método de los mínimos cuadrados, de forma similar al ajuste de la función lineal, utilizando para mayor comodidad la notación matricial.

Siendo:

$$\mathbf{A} = (a_0, a_1, a_2 \dots a_n)^t \quad ; \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots y_n)^t$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

se tiene la solución matricial para los coeficientes del polinomio:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^t \mathbf{Y})$$

**Ejemplo:**

Construir una función polinómica que se ajuste por el método de mínimos cuadrados a los puntos:  $\{(1,1'5)(2,3'9)(3,9)(4,15)\}$

$$\mathbf{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^t \quad ; \quad \mathbf{Y} = (1'5, 3'9, 9, 15)^t$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

siendo la solución matricial:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^t \mathbf{Y}) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1'5 \\ 3'9 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} \right)$$

finalmente:

$$\mathbf{A} = (3'6 \quad -4'95 \quad 3'15 \quad -0'3)^t$$

siendo el polinomio de ajuste:

$$P_3(x) = -0'3x^3 + 3'15x^2 - 4'95x + 3'6$$

### I.3.1.3 Ajustes por el método de las suma (King y Hardy).

Este procedimiento permite ajustar cierto tipo de funciones no lineales al conjunto de puntos:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Se utiliza para ello la estructura en progresión geométrica que se puede obtener al aplicar la función de ajuste a la variable  $x$  y sumar las variables dependientes estimadas. Es un método que se utiliza para ajustar fundamentalmente funciones biométricas y que permite combinarlo con los métodos de ajuste por mínimos cuadrados.

Sin embargo, el procedimiento para agrupar los datos que van a participar en las sumas no es único. La elección del tipo de función a ajustar condiciona el número de agrupamientos en sumas o la utilización de métodos por mínimos cuadrados en las fases posteriores.

- **Primera Ley de Makehám.**

Se trata de ajustar la función:

$$\hat{y}_i = A + BC^{x_i}$$

a un conjunto de datos:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  en los que supondremos que los datos de la variable  $x$  están igualmente espaciados:  $x_{i+1} = x_i + k$ .

El método comienza por dividir los  $n$  datos en tres grupos (al menos) de  $h$  datos consecutivos (si el número no es múltiplo de tres, se eliminarían uno o dos datos del inicio o del final). Llamaremos  $S_i$  a la suma de las  $h$  datos de la variable  $y$  del grupo  $i$ -ésimo, así:

$$\hat{S}_i = \left( \sum_j \hat{y}_j \right)_i = \left( \sum_j \left( A + BC^{x_j + hk(i-1)} \right) \right)_i = \left( hA + B \sum_j C^{x_j + hk(i-1)} \right)_i$$

siendo para el primer grupo ( $i = 1$ ):

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^h C^{x_j} \right)_1 &= C^{x_1} + C^{x_1+k} + \dots + C^{x_1+(h-1)k} \\ &= C^{x_1} (1 + C^k + \dots + C^{(h-1)k}) \\ &= C^{x_1} \left( \frac{C^{(h-1)k} C^k - 1}{C^k - 1} \right) \\ &= C^{x_1} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \end{aligned}$$

y para el resto de las sumas:

$$\left( \sum_{j=1}^h C^{x_j+hk} \right)_2 = C^{x_1+hk} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right)$$

$$\left( \sum_{j=1}^h C^{x_j+2hk} \right)_3 = C^{x_1+2hk} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right)$$

obteniendo las diferencias primeras de las sumas:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{S}_1 &= \hat{S}_2 - \hat{S}_1 = \left( hA + BC^{x_1+hk} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \right) - \left( hA + BC^{x_1} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \right) \\ &= BC^{x_1} \left( (C^{hk} - 1) \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \right) \\ &= BC^{x_1} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{C^k - 1} \\ \Delta \hat{S}_2 &= \hat{S}_3 - \hat{S}_2 = \left( hA + BC^{x_1+2hk} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \right) - \left( hA + BC^{x_1+hk} \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \right) \\ &= BC^{x_1+hk} \left( (C^{hk} - 1) \left( \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1} \right) \right) \\ &= BC^{x_1+hk} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{C^k - 1} \end{aligned}$$

dividiendo las diferencias primeras:

$$\frac{\Delta \hat{S}_2}{\Delta \hat{S}_1} = \frac{BC^{x_1+hk} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{C^k - 1}}{BC^{x_1} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{C^k - 1}} = C^{hk}$$

y despejando la constante C:

$$C = \sqrt[hk]{\frac{\Delta \hat{S}_2}{\Delta \hat{S}_1}}$$

siendo “h” el número de elementos de la suma y “k” la amplitud o distancia entre los datos.

Utilizando los datos empíricos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , se calculan las sumas:

$$S_i = \left( \sum_j y_j \right)_i$$

$$S_1 = \sum_{j=1}^h y_j, \quad S_2 = \sum_{j=h+1}^{2h} y_j, \quad S_3 = \sum_{j=2h+1}^n y_j$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1, \quad \Delta S_2 = S_3 - S_2$$

y finalmente:

$$C = \sqrt[hk]{\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}}$$

Conocido C, se puede obtener B:

$$\Delta S_1 = BC^{x_1} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{(C^k - 1)}$$

despejando:

$$B_1 = \frac{\Delta S_1}{C^{x_1} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{(C^k - 1)}}$$

también se puede utilizar  $\Delta S_2$ , de tal forma:

$$B_2 = \frac{\Delta S_2}{C^{x_1+hk} \frac{(C^{hk} - 1)^2}{(C^k - 1)}}$$

o haciendo el promedio entre ambos, para suavizar la posible diferencia entre los dos valores  $B_1$  y  $B_2$  de la B.

$$B = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

Finalmente se calcula la tercera constante A.

$$A = \frac{S_1 - BC^{x_1} \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}}{h}$$

También es posible calcular A y B utilizando el método de ajuste lineal por mínimos cuadrados, a partir de la expresión

$$\hat{y}_j = A + Bz_j$$

obteniéndose  $z_j = C^{x_j}$ , una vez conocido C

$$B = \frac{S_{zy}}{S_x^2} \quad \text{y} \quad A = \bar{y} - B\bar{z}$$

siendo:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y}) \quad \text{la covarianza muestral}$$

$$S_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \quad \text{la varianza muestral de la variable independiente } z$$

$\bar{z}$  e  $\bar{y}$  son las medias muestrales.

**Ejemplo:**

Dado el conjunto de datos:  $\{(1,2)(2,6)(3,16)(4,29)(5,95)(6,250)\}$  se desea ajustarlos con la primera ley de Makehám.

La expresión algebraica de la primera de ley de Makehám es de la forma  $y_i = A + BC^{x_i}$ , siendo necesario calcular los tres parámetros A, B y C que la caracterizan.

Planteando una tabla con los datos y utilizando el método de las sumas, se utilizan tres grupos de datos, con dos datos cada uno ( $h = 2$ ), siendo los valores de la  $x$  consecutivos ( $k = 1$ ). Así:

i	$x_i$	$y_i$	$S_i$	$\Delta S_i$	
1	1	2			
2	2	6	$S_1 = 8$		
3	3	16		$\Delta S_1 = 37$	
4	4	29	$S_2 = 45$		$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = 8'108108$
5	5	95		$\Delta S_2 = 300$	
6	6	250	$S_3 = 345$		

siendo:

$$C = \sqrt[hk]{\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}} = \sqrt[2 \cdot 1]{8'108108} = \sqrt{8'108108} = 2'847474$$

A continuación calculamos el parámetro B, del que tendremos dos valores:

$$B_1 = \frac{\Delta S_1}{C^{x_1} (C^{hk} - 1)^2 / (C^k - 1)}$$

$$= \frac{37}{2'847474^1 (2'847474^{2 \cdot 1} - 1)^2 / (2'847474^1 - 1)} = 0'475130$$

$$B_2 = \frac{\Delta S_2}{C^{x_1+hk} (C^{hk} - 1)^2 / (C^k - 1)}$$

$$= \frac{305}{2'847474^{1+2.1} (2'847474^{2.1} - 1)^2 / (2'847474^1 - 1)} = 0'483049$$

obteniéndose B como el promedio entre ambos valores

$$B = \frac{B_1 + B_2}{2} = \frac{0'475130 + 0'483049}{2} = 0'479090$$

de forma similar se obtiene A del que se dispondrá de tres valores:

$$A_1 = \frac{S_1 - BC^{x_1} \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}}{h}$$

$$= \frac{8 - 0'479090 \cdot 2'847474^1 \frac{2'847474^{2.1} - 1}{2'847474^1 - 1}}{2} = 1'375645$$

$$A_2 = \frac{S_2 - BC^{x_1+hk} \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}}{h}$$

$$= \frac{45 - 0'479090 \cdot 2'847474^{1+2.1} \frac{2'847474^{2.1} - 1}{2'847474^1 - 1}}{2} = 1'221446$$

$$A_3 = \frac{S_3 - BC^{x_1+2hk} \frac{C^{hk} - 1}{C^k - 1}}{h}$$

$$= \frac{345 - 0'479090 \cdot 2'847474^{1+2.2.1} \frac{2'847474^{2.1} - 1}{2'847474^1 - 1}}{2} = -0'028815$$

aceptaremos como valor de A el promedio de los tres valores obtenidos, así

$$A = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} = \frac{1'375645 + 1'221446 - 0'028815}{3} = 0'856092$$

la primera ley de Makehám ajustada a los datos iniciales será.

$$y_i = 0'856092 + 0'479089 \cdot 2'847474^{x_i}$$

## ANEXO II: SÍMBOLOS DE CONMUTACIÓN

En las tablas actuariales, que se utilizan en seguros, es habitual encontrar una serie de columnas encabezadas con letras mayúsculas. Cada una de ellas representa un símbolo de conmutación, que como se ha visto no es más que una función matemática que combina alguno de los elementos de la tabla con factores financieros. Su objeto es facilitar la comprensión y el cálculo de las operaciones actuariales.

Los principales símbolos de conmutación que pueden obtenerse, a cada edad, en una tabla actuarial son los siguientes:

$$V = \frac{1}{1+i}; \text{ donde } i \text{ representa el interés técnico.}$$

$$D_x = V^x \cdot l_x; \quad N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}; \quad S_x = \sum_{t=0}^{w-x} N_{x+t};$$

$$C_x = V^{x+1/2} \cdot d_x; \quad M_x = \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+t}; \quad R_x = \sum_{t=0}^{w-x} M_{x+t};$$

$$\bar{C}_x = V^{x+1} \cdot d_x; \quad \bar{M}_x = \sum_{t=0}^{w-x} \bar{C}_{x+t}; \quad \bar{R}_x = \sum_{t=0}^{w-x} \bar{M}_{x+t};$$

Según que la prestación sea pagadera a mitad o final del periodo, en lo que se refiere a las dos últimas filas.

Asimismo, se adjuntan algunas operaciones de seguros y rentas expresadas mediante símbolos de conmutación:

$${}_{t-x}E_x = \frac{D_t}{D_x} \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x^m = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \quad a_x^m = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{x:t-x} = \frac{N_x - N_t}{D_x} \quad a_{x:t-x} = \frac{N_{x+1} - N_t}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:t-x}^m = \ddot{a}_x^m - {}_{t-x}E_x \cdot \ddot{a}_t^m \quad a_{x:t-x}^m = a_x^m - {}_{t-x}E_x \cdot a_t^m$$

$$(IA)'_{x:t-x} = \frac{R_x - R_t - (t-x) \cdot M_t}{D_x} \quad A'_{x:1} = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}$$

## BIBLIOGRAFIA

**Aparicio del Prado, C.; Payá Albert, R.** “*Análisis Matemático I*”. Universidad de Granada. 1991

**Arnaiz Vellando, G.** “*Introducción a la Estadística Teórica*”. Lex Nova. 1986

**Ayuso, M.; Corrales, H.; Guillén, M.; Pérez Marín, A.M.; Rojo J.L.** “*Estadística Actuarial Vida*”. Ediciones Universidad de Barcelona. 2001.

**Bowers, N.L.; Gerber, H.U.; Hickman, J.C.; Jones, D.A.; Nesbitt, C.J.** “*Actuarial mathematics*”. 2nd ed, Society of Actuaries, Schaumburg. 1997.

**Conte, S.D.; Boor, C.** “*Análisis Numérico*”. McGraw Hill. 1974

**Fernández Viñas, J.A.** “*Lecciones de Análisis Matemático*”. Editorial Tecnos. 1976

**Fröberg, C.E.** “*Introducción to Numerical Analysis*”. Addison Wesley

**Gerber, H.U.** “*Life insurance mathematics*”. 3<sup>rd</sup> ed, Springer; Swiss Association of Actuaries, Berlin; Zurich. 1997.

**Gil Fana, J.A.; Heras Martínez, A; Vilar Zanón, J.L.** “*Matemática de los seguros de vida*”. Madrid: Mapfre. 1999.

**Greene, W.H.** “*Análisis econométrico*”. McMillan P.C. 1998

**Gujarati, D.N.** “*Econometría*”. McGraw-Hill. 1992

**Haberman, S; Booth, P; Chadburn, R.; Cooper, D; James, D.** “*Modern actuarial theory and practice*”. Chapman & Hall, London. 1998.

**Hernández March, J.** “Nociones básicas sobre tablas de mortalidad”. *Revista Española de Seguros*, núms.113-114, págs. 149-164, 2003.

**Isaacson, E.; Sëller, H.** “*Análisis of Numerical Methods*”. John Wiley. 1966

**Leguina, J.:** “*Fundamentos de Demografía*”. Siglo Veintiuno de España Editores, S.A. Madrid, 1992

**Levi, E.:** “*Curso de Matemática Financiera y Actuarial; Volumen II*”. Editorial Bosch. Barcelona, 1973.

**López Cachero, M.; López de la Manzanara Barbero, J.** “*Estadística para actuarios*”. Madrid: Mapfre. 1996.

**Mateos Cruz, A.** “Tablas Actuariales”. *Actuarios*, núm.19, 2001

**Mateos-Aparicio Morales, G.:** “*Métodos Estadísticos para Actuarios*”. Editorial Complutense, 1995.

**Nieto de Alba, U.; Vegas Asensio, J.:** “*Matemática Actuarial*”. Editorial Mapfre. Madrid, 1993.

**Palacios, H.E.:** “*Introducción al Cálculo Actuarial*”. Editorial Mapfre. Madrid, 1996.

**Peña Sánchez de Rivera, D.** “*Estadística Modelos y métodos: 2. Modelos lineales y series temporales*” Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial. 1987

**Sánchez López, J.M.:** “Construcción de Tablas de Mortalidad”. *Revista Española de Seguros*, núm.106, págs. 297-305, 2001.

**Scheid, F.** “*Análisis numérico*”. McGraw-Hill. 1985

**Spivak, M.** “*Calculus (Calculo infinitesimal)*”. Editorial Reverté. 1994

**UNESPA:** “Resolución de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones por la que se Hacen Públicas las Tablas PERM/F-2000”. Circular núm. 06/2000. Madrid, 2000.

**Veres Ferrer, E.:** “Obtención de Tablas de Mortalidad por Comparación con las de Otros Ámbitos en Periodos Pasados”. *Estudios de Economía Aplicada*, núm. 15, págs. 187-196, 2000

**Vicente Merino, A.; Hernández March, J.; Albarrán Lozano, I.; Ramírez Pérez, C.:** “Proyección y Estudio de una Población. El Papel de la Mortalidad”. Documento de Trabajo nº. 2002-03. Universidad Complutense de Madrid, 2002

**Vinuesa, J.(editor), Zamora, F., Génova, R., Serrano, P. y Recaño, J.:** “Demografía, Análisis y Proyecciones”. Editorial Síntesis. Madrid, 1994