À propos d'un théorème de de Felipe et Teissier sur la comparaison de deux hensélisés dans le cas non noethérien

M.-E. Alonso* Henri Lombardi † Stefan Neuwirth ‡

4 mai 2020

Table des matières

Introduction **1**

1 Le contexte **3**

2 Comparaison des premiers étages des deux hensélisés **7**

3 Une légère généralisation **9**

4 Annexe : une autre généralisation **11**

Références **12**

Résumé

This paper gives an elementary proof of a theorem by de Felipe and Teissier in the paper "Valuations and henselization" (arxiv.org/abs/1903.10793v1), to appear in Math. Annalen. The theorem compares two henselizations of a local domain dominated by a valuation domain. Our proofs are written in the constructive Bishop style.

MSC : 13B40, 13J15, 03F65

Introduction

Cet article est écrit dans le style des mathématiques constructives à la Bishop ([3, 4, 5, 7, 12, 13, 15]). Il peut être vu comme la continuation naturelle des articles [2, 8, 10, 11].

Le théorème auquel le titre réfère se trouve dans la prépublication [BT2019, DE FELIPE et TEISSIER, *Valuations and henselization*, 2012, `https://arxiv.org/abs/1903.10793v1`] écrit en prolongement de [9]. L'article a été accepté à Math. Annalen. Le théorème est le suivant.

*Universitad Complutense, Madrid, España. `M_Alonso@Mat.UCM.Es`

†Univ. de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France. `henri.lombardi@univ-fcomte.fr`

‡Univ. de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France. `stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr`

Theorem 1. *Let R be a local domain and let R^{h} be its henselization. If v is a valuation centered in R, then :*

1. *There exists a unique prime ideal $H(v)$ of R^{h} lying over the zero ideal of R such that v extends to a valuation v' centered in $R^{\mathrm{h}}/H(v)$ through the inclusion $R \subseteq R^{\mathrm{h}}/H(v)$. In addition, the ideal $H(v)$ is a minimal prime and the extension v' is unique.*
2. *With the notation of 1., the valuations v and v' have the same value group.*

La technique de démonstration dans [BT2019] est assez sophistiquée et utilise des méthodes topologiques[1]. Mais comme la construction du hensélisé d'un anneau local résiduellement discret et celle du hensélisé d'un domaine de valuation relèvent de méthodes constructives purement algébriques (voir [2] et [10]), on peut à priori espérer une démonstration constructive purement algébrique du résultat.

C'est ce que nous réalisons dans cet article.

Dans la section 1, nous donnons le contexte constructif du théorème. C'est évidemment le même que le contexte en mathématiques classiques mais nous donnons quelques précisions nécessaires pour que les résultats aient tous une signification algorithmique. Par exemple pour construire le hensélisé d'un anneau local, nous avons besoin que cet anneau soit local au sens constructif et que le corps résiduel possède un test d'égalité.

Nous indiquons sommairement dans cette section les théorèmes constructifs précédemment établis concernant le hensélisé d'un anneau local et le hensélisé d'un corps valué.

Nous notons que le hensélisé d'un corps valué est unique, donc le théorème 1 est en fait un théorème qui compare deux hensélisés. Celui de l'anneau local intègre de départ et celui de l'anneau de valuation qui domine cette annau local intègre. Le point *1* du théorème dit que le morphisme local naturel du premier hensélisé dans le second a pour noyau un idéal premier minimal. Le point *2* est selon nous un simple rappel de ce que lorsqu'on étend un anneau de valuation à son hénsélisé, le groupe de valeurs ne change pas (ni d'ailleurs le corps résiduel).

Pour démontrer le théorème 1, il suffit de le faire en remplaçant les hensélisés par des étages finis de leurs constructions simultanées, c'est ce que nous faisons dans les sections suivantes.

La section 2 traite le cas d'un anneau local intègre avec le théorème 11. Ce cas est à priori suffisant pour conclure mais cela fait appel à un théorème dont nous ne connaissons pas de démonstration simple : tout étage fini de la construction d'un hensélisé peut être réalisé en une seule étape. D'où la section 3.

La section 3 traite le cas d'un anneau local réduit minimalement valué avec le théorème 12. Ce cas permet de suivre la construction des hensélisés étage par étage. En outre la section 2 n'est plus vraiment nécessaire.

Enfin une annexe en section 4 traite pour le fun le cas d'un anneau local minimalement valué qui n'est pas supposé réduit avec le théorème 12. Ceci nous donne donc la généralisation suivante du théorème 1.

Theorem 2. *Let R be a local ring, V a valuation domain and $\varphi : R \to V$ a local morphism whose kernel is a minimal prime. Let R^{h} the henselization of R as a local ring and V^{H} the henselization of V as a valuation domain. Then the kernel of the canonical local morphism $\psi : R^{\mathrm{h}} \to V^{\mathrm{H}}$ is a minimal prime.*

1. Il y est question de suite pseudo convergentes dans une complétion ad hoc.

1 Le contexte

Nous fixons dans cette section la terminologie constructive usuelle et nous précisons le contexte qui permet la construction de hensélisés en mathématiques constructives.

On note $\mathbf{A}^\times$ le groupe des unités de l'anneau commutatif $\mathbf{A}$. Le radical de Jacobson $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ de $\mathbf{A}$ est l'idéal formé par les éléments x qui satisfont $1 + x\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}^\times$.

Un *corps discret* est un anneau non trivial dans lequel tout élément est nul ou inversible, ceci de manière explicite (il y a en particulier un test à 0).

Si $\mathbf{A}$ est non trivial et si tout élément de $\mathbf{A}$ est nul ou régulier on dit que $\mathbf{A}$ est un anneau *intègre*. Un anneau est dit *sans diviseur de zéro* lorsque $xy = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$. Cette notion est constructivement un peu plus faible que la notion d'anneau intègre. Un anneau non trivial sans diviseur de zéro est intègre si, et seulement si, il possède un test à zéro, c'est-à-dire si l'égalité est décidable. Un anneau sans diviseur de zéro est *réduit* : tout élément nilpotent est nul.

L'*anneau total de fractions* d'un anneau $\mathbf{A}$, noté $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$, est obtenu en forçant l'inversibilité des éléments réguliers. Si $\mathbf{A}$ est intègre, $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est un corps discret, appelé le *corps de fractions de* $\mathbf{A}$. Par ailleurs, tout sous-anneau d'un corps discret est intègre.

Un anneau est *normal* s'il satisfait l'axiome suivant [2] :

$$x^r = a_1 b x^{r-1} + a_2 b^2 x^{r-2} + \cdots + a_r b^r \Rightarrow \exists y \;\; x = by.$$

Un anneau normal intègre est appelé un anneau *intégralement clos*. Il est intégralement clos dans son corps de fraction : tout élément de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ entier sur $\mathbf{A}$ est dans $\mathbf{A}$ [3].

Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *zéro-dimensionnel* si pour tout x il existe un y et un entier $n \geqslant 0$ tels que $x^n(1 - xy) = 0$. Un anneau zéro-dimensionnel non trivial et sans diviseur de zéro est un corps discret.

Anneau local hensélien

Un *anneau local* $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif unitaire non trivial dans lequel est satisfait l'axiome

$$x + y \in \mathbf{A}^\times \Rightarrow x \in \mathbf{A}^\times \text{ ou } y \in \mathbf{A}^\times.$$

Ici le «ou» a son sens constructif explicite. Un morphisme d'anneaux $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre anneaux locaux est appelé un *morphisme local* s'il réfléchit les unités, c'est-à-dire si $\varphi(x) \in \mathbf{B}^\times$ implique $x \in \mathbf{A}^\times$.

Pour un anneau local, on note souvent $\mathfrak{m}_\mathbf{A} = \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$; c'est un idéal premier maximal [4].

Un anneau local $\mathbf{A}$ possède un *corps résiduel* $\kappa_\mathbf{A} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}_\mathbf{A}$ [5]. Le morphisme naturel $\mathbf{A} \to \kappa_\mathbf{A}$ est local. Un quotient d'un anneau local est un anneau local de même corps résiduel et le morphisme canonique sur le quotient est un morphisme local.

Un anneau local est dit *résiduellement discret* si son corps résiduel est discret. Cela revient à dire que pour tout $x \in \mathbf{A}$, on a « $x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ ou $x \in \mathbf{A}^\times$ » de manière explicite.

Un anneau est *connexe* si tout idempotent est égal à 0 ou 1. Les anneaux intègres et les anneaux locaux sont connexes. Un anneau est local zéro-dimensionnel si, et seulement si, tout élément est inversible ou nilpotent. Un anneau non trivial zéro-dimensionnel réduit et connexe est un corps discret.

2. Tout idéal principal est intégralement clos.

3. En mathématiques classiques un anneau est normal si, et seulement si, tout localisé en un idéal premier est intégralement clos.

4. Mais cela ne peut pas être pris comme définition constructive du radical de Jacobson.

5. En mathématiques constructives on appelle *corps de Heyting*, ou plus simplement *corps* un anneau local dont le radical de Jacobson est nul.

Définition 3. Soit $(\mathbf{A}, \mathfrak{m}_\mathbf{A})$ un anneau local. Nous disons que $\mathbf{A}$ est *hensélien* si tout polynôme unitaire $f(X) = X^n + \cdots + a_1X + a_0 \in A[X]$ avec $a_1 \in \mathbf{A}^\times$ et $a_0 \in \mathfrak{m}_\mathbf{A}$ a une racine dans $\mathfrak{m}_\mathbf{A}$.

Un polynôme tel que $f(X)$ dans la définition ci-dessus est appelé un *polynôme de Nagata*. Plus généralement nous appellerons *code de Hensel* un couple (f, a) où $f \in \mathbf{A}[X]$, $a \in \mathbf{A}$, $f(a) \in \mathfrak{m}_\mathbf{A}$ et $f'(a) \in \mathbf{A}^\times$. Ainsi $(f, 0)$ est un code de Hensel si f est un polynôme de Nagata. Dans un anneau local hensélien, si (f, a) est un code de Hensel, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{A}$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $\alpha - a \in \mathfrak{m}_\mathbf{A}$.

Par définition, un *hensélisé* de $(\mathbf{A}, \mathfrak{m}_\mathbf{A})$ est donné par un anneau local hensélien $(\mathbf{A}^\mathrm{h}, \mathfrak{m}_{\mathbf{A}^\mathrm{h}})$ et un morphisme local $\varphi^\mathrm{h} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^\mathrm{h}$ qui factorise de manière unique tout morphisme local de $\mathbf{A}$ vers un anneau local hensélien. S'il existe, le hensélisé est unique à isomorphisme local unique près.

Lorsqu'un anneau local $\mathbf{A}$ est résiduellement discret[6], il possède en mathématiques constructives[7] un hensélisé qui peut être construit par étapes. Une étape élémentaire consiste à ajouter un zéro à la Hensel de manière optimale (c'est-à-dire que l'extension doit satisfaire la propriété universelle adéquate).

Définition 4. Soit $f(X) = X^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme de Nagata. Nous notons $\mathbf{A}_f$ l'anneau défini de la manière suivante : soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f(X)\rangle$ (où x est la classe de X) et soit $U_f \subseteq \mathbf{B}$ le monoïde de $\mathbf{B}$ défini par

$$U_f = \big\{g(x) \in \mathbf{B}\ ;\ g(X) \in \mathbf{A}[X],\ \overline{g(0)} \in (\kappa_\mathbf{A})^\times\big\}.$$

Alors $\mathbf{A}_f = U_f^{-1}\mathbf{B}$.

Théorème 5 ([2])**.** *Soit $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ un anneau local résiduellement discret et $f(X) \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme de Nagata.*

1. *L'anneau $\mathbf{A}_f$ est un anneau local résiduellement discret.*
2. *Son idéal maximal est $\mathfrak{m} \cdot \mathbf{A}_f$.*
3. *Son corps résiduel est (canoniqueent isomorphe à) $\kappa_\mathbf{A}$.*
4. *L'anneau $\mathbf{A}_f$ est une algèbre fidèlement plate sur $\mathbf{A}$. En particulier on peut identifier $\mathbf{A}$ avec son image dans $\mathbf{A}_f$, et écrire $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}_f$.*
5. *Si $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ est un morphisme local d'anneaux locaux résiduellement discrets et si $\varphi(f)$ a un zéro dans $\mathfrak{m}_\mathbf{C}$, il existe un unique morphisme local $\mathbf{A}_f \to \mathbf{C}$ qui factorise φ.*

Le hensélisé $\mathbf{A}^\mathrm{h}$ est construit comme colimite filtrée de la famille des extensions du type $(\dots((\mathbf{A}_{f_1})_{f_2})\dots)_{f_m}$ pour des polynômes de Nagata f_j successifs. Cette colimite est bien définie en raison de la propriété universelle rappelée dans le point 5.

Définition 6. Soit $(\mathbf{A}, \mathfrak{m}_\mathbf{A})$ un anneau local résiduellement discret. Un polynôme $t \in \mathbf{A}[X]$ est dit *spécial* s'il est de la forme $X^d - X^{d-1} + t_{d-2}X^{d-2} + \cdots + t_1X + t_0$ avec les $t_i \in \mathfrak{m}_\mathbf{A}$. Le zéro α de t dans $\mathbf{A}^\mathrm{h}$ codé à la Hensel par $(t, 1)$ est appelé le *zéro spécial* de t. Le polynôme $g(X) = t(X + 1)$ est un polynôme de Nagata.

6. Rappelons qu'en mathématiques classiques tout anneau local est résiduellement discret.

7. Donc en mathématiques classiques tout anneau local possède un hensélisé, «construit» de la même manière que ce que l'on fait en mathématiques constructives, mais en utilisant le principe du tiers exclu pour décider l'égalité dans le corps résiduel.

Dans [2, Lemma 5.3] il est démontré que le polynôme de Nagata f du théorème 5, ou tout autre polynôme de $f \in \mathbf{A}[X]$ vérifiant $f(0) \in \mathfrak{m}_{\mathbf{A}}$ et $f'(0) \in \mathbf{A}^\times$, peut être remplacé par un polynôme de Nagata de la forme $g(X) = t(X+1)$ où $t(X)$ est un polynôme spécial, avec $\mathbf{A}_f$ canoniquement isomorphe à $\mathbf{A}_g$.

Lemme 7. *Si* $\mathbf{A}$ *est normal, il en va de même pour* $\mathbf{A}_f$*. Si* $\mathbf{A}$ *est réduit, il en va de même pour* $\mathbf{A}_f$*.*

Démonstration. Les démonstrations dans [14] sont constructives pour l'essentiel. Pour plus de précisions voir [6]. □

Par contre, lorsque $\mathbf{A}$ est seulement supposé intègre, $\mathbf{A}_f$ est en général seulement réduit.

Corps valué hensélien

Un sous-anneau $\mathbf{V}$ d'un corps discret $\mathbf{K}$ est appelé un *anneau de valuation de* $\mathbf{K}$ si pour tout $x \in \mathbf{K}^\times$, on a $x \in \mathbf{V}$ ou $x^{-1} \in \mathbf{V}$ de manière explicite. Alors le corps $\mathbf{K}$ est le corps de fractions de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}$ est local et intégralement clos.

Un *corps valué (discret)* est un couple $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ où $\mathbf{K}$ est un corps discret et $\mathbf{V}$ un anneau de valuation de $\mathbf{K}$. Dans la suite, *on suppose toujours que* $\mathbf{V}$ *est résiduellement discret*. Cela revient à dire que l'on a un test de divisibilité entre éléments de $\mathbf{V}$. Le groupe $\Gamma = \mathbf{K}^\times/\mathbf{V}^\times$ est alors un groupe totalement ordonné discret dont les éléments $\geqslant 0$ sont les (classes des) éléments de $\mathbf{V} \setminus \{ 0 \}$. On définit la *valuation* $v : \mathbf{K} \to \Gamma_\infty = \Gamma \cup \{ \infty \}$ du corps valué comme étant égale au morphisme canonique de $\mathbf{K}^\times$ sur Γ que l'on prolonge à $\mathbf{K}$ en posant $v(0) = \infty$. On a alors $\mathbf{V} = \{ x \in \mathbf{K} \,;\, v(x) \geqslant 0 \}$ et $\mathfrak{m}_{\mathbf{V}} = \{ x \in \mathbf{K} \,;\, v(x) > 0 \}$.

Un anneau intègre est appelé un *domaine de valuation* si c'est un anneau de valuation de son corps de fractions.

On peut aussi définir un anneau de valuation intègre comme un triplet $(\mathbf{V}, \Gamma, v)$ où $\mathbf{V}$ est un anneau intègre, Γ est un groupe totalement ordonné discret et $v : \mathbf{V} \to \Gamma_\infty$ est une *valuation*, c'est-à-dire une application vérifiant

— $v(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{V}$,
— $v(ab) = v(a) + v(b)$,
— $v(a+b) \geqslant \min(v(a), v(b))$, et
— $x = 0 \Leftrightarrow v(x) = \infty$.

Si $\mathbf{K}$ est le corps de fractions de $\mathbf{V}$, la valuation s'étend de manière unique à $\mathbf{K}$ et le groupe $\mathbf{K}^\times/\mathbf{V}^\times$ s'identifie via v à un sous-groupe de Γ.

Une *extension* du corps valué $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ est un corps valué $(\mathbf{L}, \mathbf{W})$ où $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{K} \cap \mathbf{W}$ [8]. Le groupe $\mathbf{K}^\times/\mathbf{V}^\times$ s'identifie alors à un sous-groupe de $\mathbf{L}^\times/\mathbf{W}^\times$ et le corps résiduel $\mathbf{V}/\mathfrak{m}_{\mathbf{V}}$ à un sous-corps de $\mathbf{W}/\mathfrak{m}_{\mathbf{W}}$. Et la valuation $v_{\mathbf{K}}$ se prolonge en la valuation $v_{\mathbf{L}}$.

Un corps valué $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ est dit *hensélien* si $\mathbf{V}$ est hensélien en tant qu'anneau local.

Par définition, un *hensélisé* de $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ est donné par une extension $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}}, \mathbf{V}^{\mathrm{H}})$ qui est un corps valué hensélien tel que pour toute autre extension hensélienne $(\mathbf{L}, \mathbf{W})$, il existe un unique morphisme de $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}}, \mathbf{V}^{\mathrm{H}})$ vers $(\mathbf{L}, \mathbf{W})$. À priori, s'il existe, le hensélisé est unique à isomorphisme unique près. En outre, vu la propriété universelle du hensélisé d'un anneau local résiduellement discret, on a un unique morphisme local du hensélisé $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$ vers le hensélisé $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$.

8. On devrait plutôt considérer un morphisme $\varphi : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ avec $\mathbf{V} = \mathbf{K} \cap \varphi^{-1}(\mathbf{W})$. On est alors dans la situation voulue à un isomorphisme unique près.

L'article [10] donne une démonstration constructive de l'existence du hensélisé d'un corps valué.

Celui-ci est construit par étapes. Une étape élémentaire consiste à ajouter un zéro à la Hensel de manière optimale (c'est-à-dire que l'extension doit satisfaire la propriété universelle adéquate).

Avant même d'avoir construit $\mathbf{K}^{\mathrm{H}}$, si β est le zéro à la Hensel d'un polynôme de Nagata f, on peut construire $\mathbf{K}[\beta]$ en utilisant la méthode généralisée du polygone de Newton. Si l'on note $\mathbf{K}[x] = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$ il s'agit en particulier de prolonger la valuation v à $\mathbf{K}[x]$ (les éléments y pour lesquels $v(y) = \infty$ sont annulés de force). En particulier, $\mathbf{K}[\beta]$ est un corps discret quotient de $\mathbf{K}[x]$, mais en l'absence d'algorithme de factorisation des polynômes sur $\mathbf{K}$ on ne sait pas déterminer le degré de $\mathbf{K}[\beta]$ sur $\mathbf{K}$. Cette situation est analogue à celle de la construction d'une clôture réelle d'un corps ordonné discret [9].

Dans la proposition suivante, on utilise une *clôture algébrique hypothétique* $\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}$ de $\mathbf{K}$, et une *extension hypothétique* $(\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}, \mathbf{V}^{\mathrm{alg}})$ du corps valué $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$. Cela n'affecte pas le caractère constructif de la construction de $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}}, \mathbf{V}^{\mathrm{H}})$, comme expliqué dans [10]. Précisément, on peut considérer $(\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}, \mathbf{V}^{\mathrm{alg}})$ comme une *structure algébrique dynamique* qui ne s'effondre pas (voir [8]), ce qui autorise à «faire comme si» $(\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}, \mathbf{V}^{\mathrm{alg}})$ était un structure algébrique usuelle pour conduire les calculs qui aboutissent à la construction du hensélisé.

On dit qu'un élément $\alpha \in \mathbf{K}^{\mathrm{alg}}$ possède une *description immédiate* s'il s'écrit sous la forme $a(1+\mu)$ où $a \in \mathbf{K}$ et $\mu \in \mathfrak{m}_{\mathbf{V}^{\mathrm{alg}}}$.

Proposition 8 (Lemme de Hensel, version polygone de Newton, [10])**.** *Soit $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ un corps valué et $p \in \mathbf{V}[X]$ un polynôme : $p(X) = \sum_{i=0,\dots,d} p_i X^i$. Supposons que le polygone de Newton de p admette une «pente isolée» de $(k, v(p_k))$ à $(k+1, v(p_{k+1}))$.*

1. *Alors l'unique zéro α de $p(X)$ dans $\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}$ tel que $v(\alpha) = v(p_k) - v(p_{k+1})$ admet la description immédiate suivante :*
$$\alpha = -\frac{p_k}{p_{k+1}}\,(1+\mu) \qquad \text{avec } \ \mu \in \mathfrak{m}_{\mathbf{V}^{\mathrm{alg}}}$$
2. *En outre $\nu = 1+\mu$ est un zéro à la Hensel codé par $(q, 1)$ où $q \in \mathbf{V}[Y]$ est donné par*
$$q(Y) = \frac{p_{k+1}^k}{p_k^{k+1}}\, p\Big(-\frac{p_k}{p_{k+1}} Y\Big)$$
(ν est l'unique zéro de q dans $(\mathbf{V}^{\mathrm{alg}})^\times$).
3. *Si on pose $\sum_{i=0,\dots,d} r_i X^i := r(X) := q(1+X)$, on a $v(r_0) > 0$ et $v(r_1) = 0$.*
Si $r_0 = 0$ alors $\mu = 0$. Si $r_0 \neq 0$ on pose $s(X) := (1/r_0) r(-r_0 X/r_1)$ et $t(X) = X^d s(1/X)$ et on obtient que $t(X)$ est un polynôme spécial dans $\mathbf{V}[X]$, de sorte que tous les zéros de $t(X)$, sauf le zéro spécial, qui correspond au zéro α de $p(X)$, sont dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{V}^{\mathrm{alg}}}$. En résumé, un zéro α correspondant à une pente isolée d'un polygone de Newton peut toujours être explicité soit comme un élément de $\mathbf{K}$, soit sous une forme $(a\beta + b)/(c\beta + d)$ où β est le zéro spécial d'un polynôme spécial t, avec $a, b, c, d \in \mathbf{V}$, $(c\beta + d) \neq 0$ et $(ad - bc) \neq 0$.

Corolaire 9. *Pour tout zéro à la Hensel α, on a $\mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K}[\beta]$ où β est le zéro spécial d'un polynôme spécial.*

9. Par exemple on peut calculer de manière sûre dans $\mathbf{K}[\sqrt{2}]$ même si on ne sait pas si 2 admet une racine carrée dans le corps ordonné discret $\mathbf{K}$.

En effet, un zéro à la Hensel α codé par $(r,a) \in (\mathbf{V}[X],\mathbf{V})$ correspond à une pente isolée, de $(0,v(p_0))$ à $(1,v(p_1))$, du polygone de Newton du polynôme de Nagata $p(X) = r(X+a)$. Le fait que la valuation de $\mathbf{K}$ s'étend de manière unique en une valuation de $\mathbf{K}[\alpha]$, et que le groupe de valeurs et le corps résiduel ne changent pas, est également démontré dans l'article.

Précisément, vu la proposition 8, la possibilité de calculer explicitement dans $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}},\mathbf{V}^{\mathrm{H}})$ est ramenée à la proposition suivante.

Proposition 10. *Soit $t(X)$ un polynôme spécial, β son zéro spécial dans $\mathbf{K}^{\mathrm{H}}$, et $q(X) \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme arbitraire, alors une description immédiate de $q(\beta)$ peut être obtenue par des calculs uniformes dans $(\mathbf{K},\mathbf{V})$.*

En conséquence la structure de $\mathbf{K}[\beta]$ comme corps valué est complètement déterminée, à un isomorphisme unique près. Cette unicité forte permet donc de construire le hensélisé $\mathbf{K}^{\mathrm{H}}$ comme colimite filtrée des extensions $\mathbf{K}[\beta_1,\ldots,\beta_m]$ construites en ajoutant des zéros spéciaux de polynômes spéciaux successifs.

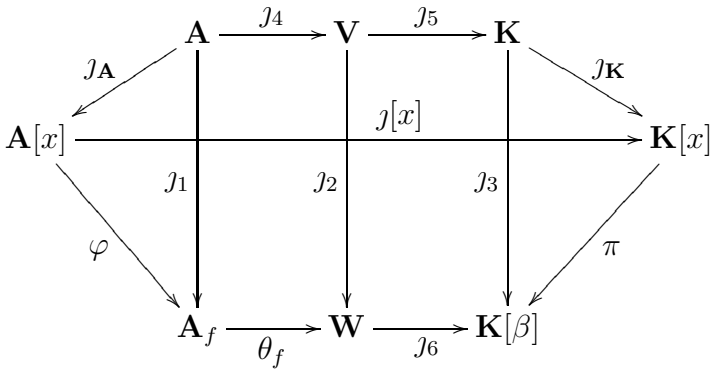
2 Comparaison des premiers étages de construction des deux hensélisés

On considère dans cette section la situation suivante.

- $\mathbf{A}$ est intègre local résiduellement discret avec $\mathbf{K}$ pour corps de fractions, $\mathbf{K}$ est un corps discret ;
- $\mathbf{V}$ est un anneau de valuation de $\mathbf{K}$, il est résiduellement discret, il contient $\mathbf{A}$ et il domine $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^\times = \mathbf{A} \cap \mathbf{V}^\times$ et $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cap \mathfrak{m}_{\mathbf{V}}$;
- $(\mathbf{K}^{\mathrm{alg}},\mathbf{V}^{\mathrm{alg}})$ est une extension hypothétique du corps valué $(\mathbf{K},\mathbf{V})$ avec $\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}$ une clôture algébrique hypothétique de $\mathbf{K}$, et l'on considère la sous-extension $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}},\mathbf{V}^{\mathrm{H}})$ obtenue en ajoutant des zéros à la Hensel successifs ;
- $t(X) \in \mathbf{A}[X]$ est un polynôme spécial ;
- $f(X) := t(X+1)$ est un polynôme de Nagata ;
- α est le zéro de f dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}_f}$;
- β est l'unique zéro de $f(X)$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{V}^{\mathrm{H}}}$, les autres zéros de $f(X)$ dans $\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}$ sont dans $-1+\mathfrak{m}_{\mathbf{V}^{\mathrm{alg}}} \subseteq (\mathbf{V}^{\mathrm{alg}})^\times$;
- $\mathbf{L} := \mathbf{K}[\beta]$ et $(\mathbf{L},\mathbf{W})$ est l'extension de $(\mathbf{K},\mathbf{V})$ construite dans la proposition 8, on a $\mathbf{W} = \mathbf{L} \cap \mathbf{V}^{\mathrm{alg}}$;
- $\theta_f : \mathbf{A}_f \to \mathbf{W}$ est le morphisme local qui factorise le morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, on a $\theta_f(\alpha) = \beta$.

On note que les structures $\mathbf{A}_f$, $\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$, $\mathbf{W}$ et $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$ sont effectivement construites, tandis que les structures hypothétiques qui permettent de faciliter les démonstrations sont des structures algébriques dynamiques qui ne s'effondrent pas (voir par exemple dans [8] les théorèmes 1.1 et 4.3 et la remarque 4.6).

Dans le diagramme ci-dessous, tous les objets sont construits, les $\jmath$ sont des morphismes injectifs, et π est surjectif. On a aussi $\mathbf{K}[x] = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$, $\mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$, $\alpha = \varphi(x)$ et $\beta = \pi(x)$. On rappelle que $\mathbf{A}_f = U_f^{-1}\mathbf{A}[x]$



Dans la suite, nous regardons $\jmath_6$ comme un morphisme d'inclusion et nous écrivons $\jmath_6(\varepsilon) = \varepsilon$ pour $\varepsilon \in \mathbf{W}$.

Voici une version finitiste du théorème 1 de de Felipe et Teissier cité dans l'introduction. Rappelons qu'un idéal premier est dit *minimal* si l'anneau local correspondant est zéro-dimensionnel. Dans le cas d'un anneau non trivial réduit, cela signifie que le localisé est un corps discret.

Théorème 11. *Le noyau de θ_f est un idéal premier minimal de $\mathbf{A}_f$.*

Démonstration. Le noyau $\mathfrak{p}_f := \operatorname{Ker}\theta_f$ est un idéal premier détachable parce que $\mathbf{W}$ est un anneau intègre, donc qui possède un test à 0. Notons $S_f = \mathbf{A}_f \setminus \mathfrak{p}_f$. Comme $\mathbf{A}_f$ est réduit, l'idéal premier $\mathfrak{p}_f$ est minimal si, et seulement si, le localisé $S_f^{-1}\mathbf{A}_f$ est un corps discret. Ce qui signifie que pour tout $\gamma \in \mathbf{A}_f$, ou bien $\gamma \in S_f$, ou bien il existe un $\zeta \in S_f$ tel que $\zeta\,\gamma = 0$ dans $\mathbf{A}_f$. Il suffit de le vérifier pour les $\gamma \in \mathbf{A}_f$ qui sont de la forme $\varphi(q(x)) = q(\alpha)$ avec $q \in \mathbf{A}[X]$ car $\mathbf{A}_f$ est un localisé de $\mathbf{A}[x]$. Enfin, pour $\gamma = q(\alpha)$ on a

$$\theta_f(\gamma) = \pi(q(x)) = q(\beta) =: \delta$$

(notez que $\mathbf{A}[x] \subseteq \mathbf{K}[x]$).
Notons $\xi_1, \ldots, \xi_n = \beta$ les zéros de f dans $\mathbf{K}^{\text{alg}}$. Les valuations des ξ_i sont $w_1 = \cdots = w_{n-1} = 0 < w_n = v(f(0))$. Notons $y = q(x) \in \mathbf{A}[x] \subseteq \mathbf{K}[x]$.
Rappelons comment se passe le test à 0 pour l'élément $\pi(y) = \delta$ de $\mathbf{K}[\beta]$. On calcule le polynôme caractéristique $g(T) = \chi_y(T)$ de y dans la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A}[x]$ (qui est un module libre de rang n sur $\mathbf{A}$). Par Cayley-Hamilton on a $g(y) = 0$, donc $g(\delta) = g(q(\beta)) = \pi(g(y)) = 0$ et $g(\gamma) = g(q(\alpha)) = \varphi(g(y)) = 0$.
Si $g(0) \neq 0$, alors y est inversible dans $\mathbf{K}[x]$, donc $\delta = \theta_f(\gamma)$ est inversible dans $\mathbf{K}[\beta]$ et non nul dans $\mathbf{W}$, i.e. $\gamma \in S_f$.
Si $g(0) = 0$, alors $g(T) = T^k h(T)$ avec $h(0) \neq 0$ et $0 < k \leqslant n$. Donc $\gamma^k h(\gamma) = 0$ dans $\mathbf{A}_f$, d'où $\gamma h(\gamma) = 0$ car $\mathbf{A}_f$ est réduit. On a aussi $\delta^k h(\delta) = 0$ dans $\mathbf{W}$. Comme c'est un anneau intègre, $\delta = 0$ ou $h(\delta) = 0$. Cette disjonction est obtenue constructivement selon l'algorithme qui va suivre.
Si $h(\delta) = 0$, on ne peut pas avoir $\delta = 0$ car sinon $h(0) = h(\delta) = 0$; donc $\delta \neq 0$ et $\gamma \in S_f$.
Si $\delta = 0$, i.e. $\gamma \in \mathfrak{p}_f$, comme $h(0) \neq 0$ on a $h(\delta) \neq 0$, et donc $\zeta = h(\gamma) \in S_f$. On obtient $\zeta\,\gamma = 0$ dans $\mathbf{A}_f$ avec $\zeta \in S_f$.
En résumé, on a obtenu exactement ce qu'on voulait : $\mathfrak{p}_f$ est un idéal premier minimal.
Pour que la démonstration constructive soit complète, rappelons comment on teste si $\delta = 0$ dans $\mathbf{K}[\beta]$. Il reste à traiter le cas où $g(0) = 0$
Le polygone de Newton de g nous fournit dans le désordre les valuations $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_n = \infty$ des $q(\xi_i)$ dans $(\mathbf{K}^{\text{alg}}, \mathbf{V}^{\text{alg}})$. Pour savoir quelle valeur v_i correspond à $\xi_n = \beta$, on considère l'élément $xq(x) = xy$ de $\mathbf{K}[x]$, on calcule son polynôme caractéristique $g_1(T) = \chi_{xy}(T)$ et on calcule le polygone de Newton de g_1. Ce dernier nous

donne dans le désordre les valeurs des $\xi_i q(\xi_i)$. Si $q(\beta) = 0$, ce sont les mêmes valeurs $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_n = \infty$ parce que $\infty + w_n = \infty$. Et si $q(\beta) \neq 0$, une et une seule des v_i finies change, en augmentant de w_n. □

La démonstration du théorème 1 de l'introduction peut être considérée comme terminée car on sait que toute extension $\mathbf{K}[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ obtenue en ajoutant des zéros à la Hensel successifs peut être obtenue en une seule étape. Ce résultat ne semble pas avoir de démonstration élémentaire constructive. Il résulte par exemple du lemme de Hensel multivarié dont une démonstration constructive est donnée dans [1].

Dans la section suivante, nous donnons une légère généralisation du théorème 11 qui règle la question sans faire appel au résultat difficile précédent.

3 Une légère généralisation

Nous remplaçons l'anneau local intègre résiduellement discret dominé par un anneau de valuation, de la section précédente, par un anneau local résiduellement discret réduit *minimalement valué*.

Cela signifie que nous donnons un groupe totalement ordonné discret Γ, un anneau commutatif réduit $\mathbf{A}$ et une *valuation minimale* $v : \mathbf{A} \to \Gamma_\infty$, c'est-à-dire une application qui satisfait les axiomes suivants (les variables sont dans $\mathbf{A}$).

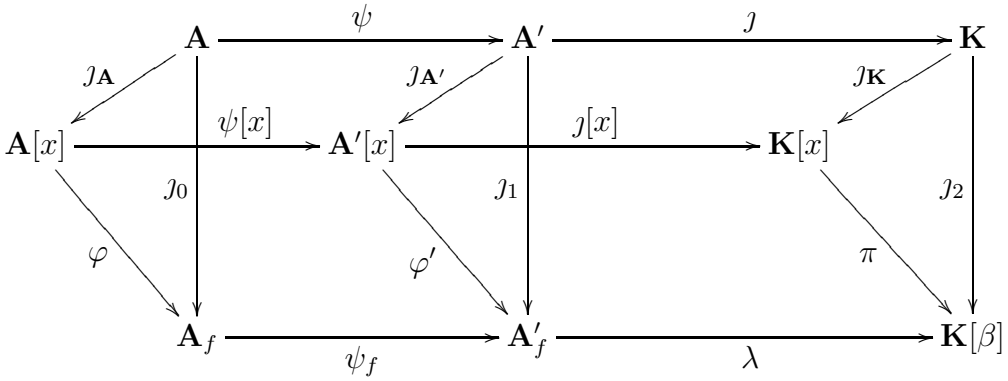
1. $v(a) \geqslant 0$.
2. $v(ab) = v(a) + v(b)$.
3. $v(a) = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbf{A}^\times$ et $v(a) > 0 \Leftrightarrow a \in \operatorname{Rad} \mathbf{A}$.
4. $v(a+b) \geqslant \min(v(a), v(b))$.
5. $v(a) < \infty$ ou $\exists b\,(v(b) < \infty$ et $ba = 0)$ (minimalité).

Dans ces conditions, on a :

— $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret,
— le sous-ensemble $\mathfrak{p} := \{\, a \in \mathbf{A} \,;\, v(a) = \infty \,\}$ est un idéal premier minimal détachable,
— v définit sur le corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{A}' := \mathbf{A}/\mathfrak{p}$ une valuation dont l'anneau $\mathbf{V} := \{\, x \in \mathbf{K} \,;\, v(x) \geqslant 0 \,\}$ domine $\mathbf{A}'$; on note θ le morphisme naturel composé $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' \to \mathbf{K}$.

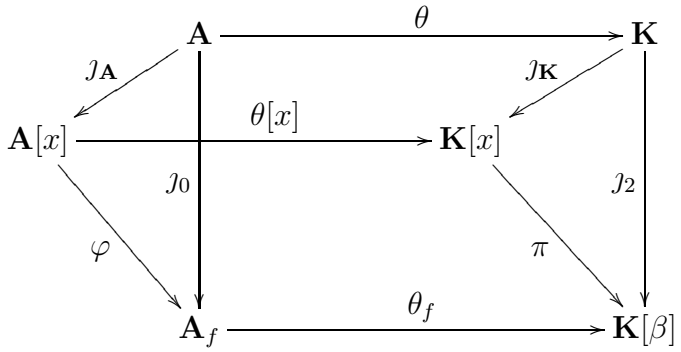
On considère alors la situation suivante.

— $(\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}, v)$ est une extension hypothétique du corps valué $(\mathbf{K}, v)$ avec $\mathbf{K}^{\mathrm{alg}}$ une clôture algébrique hypothétique de $\mathbf{K}$, et l'on considère la sous-extension $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}}, v)$ obtenue en ajoutant des zéros à la Hensel successifs ;
— $t \in \mathbf{A}[X]$ est un polynôme spécial ; $f(X) = t(X+1)$ est un polynôme de Nagata ;
— α est le zéro de f dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}_f} \subseteq \mathfrak{m}_{\mathbf{A}^{\mathrm{h}}}$;
— β est le zéro de f dans $\mathfrak{m}_{\mathbf{V}^{\mathrm{H}}}$, les autres zéros de f sont dans $(\mathbf{V}^{\mathrm{alg}})^\times$;
— $(\mathbf{K}[\beta], v)$ est l'extension de $(\mathbf{K}, v)$ construite dans la proposition 8 ;
— $\theta_f : \mathbf{A}_f \to \mathbf{K}[\beta]$ est l'unique morphisme de $\mathbf{A}$-algèbres tel que $\theta_f \circ \varphi = \pi \circ \theta[x]$, en particulier $\theta_f(\alpha) = \beta$.



La partie droite du diagramme ci-dessus correspond à la situation examinée dans la section précédente, en y remplaçant $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}'$.

La situation est plus simple avec le diagramme ci-dessous, extrait du précédent.



On a $\mathbf{K}[x] = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$, $\mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$, $\alpha = \varphi(x)$, $\beta = \pi(x)$ et $\theta_f(\alpha) = \beta$.

Théorème 12. *Le noyau de θ_f est un idéal premier minimal de $\mathbf{A}_f$.*

Démonstration. Le noyau $\mathfrak{p}_f := \operatorname{Ker}\theta_f$ est un idéal premier détachable parce que $\mathbf{K}[\beta]$ est un corps discret. Notons

$$S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p} = \{\, c \in \mathbf{A} \,;\, \theta(c) \neq 0 \,\} \quad \text{et} \quad S_f = \mathbf{A}_f \setminus \mathfrak{p}_f = \{\, \gamma \in \mathbf{A}_f \,;\, \theta_f(\gamma) \neq 0 \,\}.$$

Comme $\mathbf{A}$ est réduit, le fait que l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est minimal signifie que pour tout $a \in \mathbf{A}$, $a \in S$ ou il existe un $b \in S$ tel que $ba = 0$. De même, comme $\mathbf{A}_f$ est réduit, l'idéal premier $\mathfrak{p}_f$ est minimal si, et seulement si, pour tout $\gamma \in \mathbf{A}_f$, ou bien $\gamma \in S_f$, ou bien il existe un $\zeta \in S_f$ tel que $\zeta\,\gamma = 0$. Pour démontrer cette disjonction, il suffit de le faire pour les $\gamma \in \mathbf{A}_f$ qui sont de la forme $\varphi(q(x)) = q(\alpha)$ avec $q \in \mathbf{A}[X]$ car $\mathbf{A}_f$ est un localisé de $\mathbf{A}[x]$. Notons $q_1 = \theta[X](q)$. On a alors

$$\theta_f(\gamma) = \theta_f(q(\alpha)) = \pi(q_1(x)) = q_1(\beta) =: \delta$$

Notons $y = q(x) \in \mathbf{A}[x]$ et $z = \theta[x](y) = q_1(x) \in \mathbf{K}[x]$. On calcule le polynôme caractéristique $g(T) = \chi_y(T)$ de y dans la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A}[x]$ (qui est un module libre de rang n sur $\mathbf{A}$). Le même calcul pour $z \in \mathbf{K}[x]$ donne le polynôme caractéristique $g_1(T) = \chi_z(T) \in \mathbf{K}[T]$ avec $g_1 = \theta[T](g)$:

$$g(T) = T^n + \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} a_j T^j, \quad g_1(T) = T^n + \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} \theta(a_j) T^j.$$

On a $g(y) = 0$ dans $\mathbf{A}[x]$ et $g_1(z) = 0$ dans $\mathbf{K}[x]$, donc $g(\gamma) = 0$ dans $\mathbf{A}_f$ et $g_1(\delta) = 0$ dans $\mathbf{K}[\beta]$. On a $g_1(0) = 0$ ou $g_1(0) \neq 0$ car $\mathbf{K}$ est discret ; et $\delta = 0$ ou $\delta \neq 0$ car $\mathbf{K}[\beta]$ est discret.

Supposons d'abord que $g_1(0) \neq 0$, alors $\delta \neq 0$ car $\delta = 0$ implique $g_1(0) = 0$. Donc $\gamma \in S_f$.
Dans le cas contraire, on écrit $g_1(T) = T^k h_1(T)$ avec $h_1(0) \neq 0$ dans $\mathbf{K}$ et $0 < k \leqslant n$. On écrit $g(T) = a(T) + T^k h(T)$ avec $\deg_T(a) < k$. On a $\theta[T](a) = 0$ et $\theta[T](h) = h_1$. On a donc $\theta(a_j) = 0$ pour $0 \leqslant j < k$. Comme $\theta(a_j) \neq 0$ est impossible, il existe $b_j \in S$ tel que $b_j a_j = 0$ dans $\mathbf{A}$. Soit b le produit des b_j pour $0 \leqslant j < k$. On a $b \in S$, $ba(T) = 0$ et $bg(T) = T^k bh(T)$. Comme $\delta^k h_1(\delta) = g_1(\delta) = 0$, on a $\delta = 0$ ou $h_1(\delta) = 0$.
Si $h_1(\delta) = 0$, on ne peut pas avoir $\delta = 0$ car sinon $h_1(0) = h_1(\delta) = 0$. Donc $\delta \neq 0$, i.e. $\gamma \in S_f$.
Si $\delta = 0$, on a $\theta_f(h(\gamma)) = h_1(\delta) = h_1(0) \neq 0$, et donc $\zeta = h(\gamma) \in S_f$. Puisque $bg(\alpha) = 0$ et $bg = bT^k h$ on obtient $b\gamma^k \zeta = 0$ dans $\mathbf{A}_f$ avec $b\zeta \in S_f$. Enfin, comme $\mathbf{A}_f$ est réduit, on a $b\zeta\, \gamma = 0$ dans $\mathbf{A}_f$.
En résumé, on a obtenu exactement ce qu'on voulait : $\mathfrak{p}_f$ est un idéal premier minimal. □

Conclusion

En utilisant de manière répétée le théorème 12 et en démarrant avec la situation de la section 2, on obtient à tous les étages finis de la construction simultanée de $\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ et $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$ le résultat donné par le théorème 1 de de Felipe et Teissier.

4 Annexe : une autre généralisation

Théorème 13. *Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 12, mais sans supposer* $\mathbf{A}$ *réduit, on a la même conclusion.*

Démonstration. Le noyau $\mathfrak{p}_f := \operatorname{Ker} \theta_f$ est un idéal premier détachable parce que $\mathbf{K}[\beta]$ est un corps discret. Notons

$$S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p} = \{\, c \in \mathbf{A} \,;\, \theta(c) \neq 0 \,\} \quad \text{et} \quad S_f = \mathbf{A}_f \setminus \mathfrak{p}_f = \{\, \gamma \in \mathbf{A}_f \,;\, \theta_f(\gamma) \neq 0 \,\}.$$

Le fait que l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est minimal signifie que pour tout $a \in \mathbf{A}$, $a \in S$ ou il existe un $b \in S$ tel que ba est nilpotent. De même, l'idéal premier $\mathfrak{p}_f$ est minimal si, et seulement si, pour tout $\gamma \in \mathbf{A}_f$, ou bien $\gamma \in S_f$, ou bien il existe un $\zeta \in S_f$ tel que $\zeta\, \gamma$ est nilpotent. Pour démontrer cette disjonction, il suffit de le faire pour les $\gamma \in \mathbf{A}_f$ qui sont de la forme $\varphi(q(x)) = q(\alpha)$ avec $q \in \mathbf{A}[X]$ car $\mathbf{A}_f$ est un localisé de $\mathbf{A}[x]$. Notons $q_1 = \theta[X](q)$. On a alors

$$\theta_f(\gamma) = \theta_f(q(\alpha)) = \pi(q_1(x)) = q_1(\beta) =: \delta$$

Notons $y = q(x) \in \mathbf{A}[x]$ et $z = \theta[x](y) = q_1(x) \in \mathbf{K}[x]$. On calcule le polynôme caractéristique $g(T) = \chi_y(T)$ de y dans la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A}[x]$ (qui est un module libre de rang n sur $\mathbf{A}$). Le même calcul pour $z \in \mathbf{K}[x]$ donne le polynôme caractéristique $g_1(T) = \chi_z(T) \in \mathbf{K}[T]$ avec $g_1 = \theta[T](g)$:

$$g(T) = T^n + \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} a_j T^j, \quad g_1(T) = T^n + \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} \theta(a_j) T^j.$$

On a $g(y) = 0$ dans $\mathbf{A}[x]$ et $g_1(z) = 0$ dans $\mathbf{K}[x]$, donc $g(\gamma) = 0$ dans $\mathbf{A}_f$ et $g_1(\delta) = 0$ dans $\mathbf{K}[\beta]$. On a $g_1(0) = 0$ ou $g_1(0) \neq 0$ car $\mathbf{K}$ est discret ; et $\delta = 0$ ou $\delta \neq 0$ car $\mathbf{K}[\beta]$ est discret.
Supposons d'abord que $g_1(0) \neq 0$, alors $\delta \neq 0$ car $\delta = 0$ implique $g_1(0) = 0$. Donc $\gamma \in S_f$.
Dans le cas contraire, on écrit $g_1(T) = T^k h_1(T)$ avec $h_1(0) \neq 0$ dans $\mathbf{K}$ et $0 < k \leqslant n$. On écrit $g(T) = a(T) + T^k h(T)$ avec $\deg_T(a) < k$. On a $\theta[T](a) = 0$ et $\theta[T](h) = h_1$. On a donc $\theta(a_j) = 0$ pour $0 \leqslant j < k$, et $\theta[T](h) = h_1$. Comme $\theta(a_j) \neq 0$ est impossible, il existe

$b_j \in S$ tel que $b_j a_j$ est nilpotent dans $\mathbf{A}$. Soit b le produit des b_j pour $0 \leqslant j < k$. On a $b \in S$, et, pour un entier N assez grand, $ba(T)^N = 0$.
Comme $\delta^k h_1(\delta) = g_1(\delta) = 0$, on a $\delta = 0$ ou $h_1(\delta) = 0$.
Si $h_1(\delta) = 0$, on ne peut pas avoir $\delta = 0$ car sinon $h_1(0) = h_1(\delta) = 0$. Donc $\delta \neq 0$, i.e. $\gamma \in S_f$.
Si $\delta = 0$, on a $\theta_f(h(\gamma)) = h_1(\delta) = h_1(0) \neq 0$, et donc $\zeta = h(\gamma) \in S_f$. Puisque $bg(\alpha) = 0$ et $bg(T) = ba(T) + bT^k h$ on obtient $ba(\gamma) + b\zeta\,\gamma^k = 0$ dans $\mathbf{A}_f$. D'où, puisque $ba(T)^N = 0$,

$$0 = (-ba(\gamma))^N = b^N \zeta^N \gamma^{Nk} = 0$$

avec $b^N \zeta^N \in S_f$.
En résumé, on a obtenu exactement ce qu'on voulait : $\mathfrak{p}_f$ est un idéal premier minimal. □

Références

[1] M. E. Alonso, T. Coquand et H. Lombardi : Revisiting Zariski main theorem from a constructive point of view. *J. Algebra*, 406:46–68, 2014. 9

[2] María E. Alonso, Henri Lombardi et Hervé Perdry : Elementary constructive theory of Henselian local rings. *MLQ Math. Log. Q.*, 54(3):253–271, 2008. 1, 2, 4, 5

[3] Errett Bishop : *Foundations of constructive analysis.* McGraw-Hill, New York, 1967. 1

[4] Errett Bishop et Douglas Bridges : *Constructive analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 279. Springer-Verlag, Berlin, 1985. 1

[5] Douglas Bridges et Fred Richman : *Varieties of constructive mathematics.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 97. Cambridge university press, Cambridge, 1987. 1

[6] Thierry Coquand et Henri Lombardi : Some remarks about normal rings. *In Concepts of proof in mathematics, philosophy, and computer science*, volume 6 de *Ontos Math. Log.*, pages 141–149. De Gruyter, Berlin, 2016. 5

[7] Thierry Coquand, Henri Lombardi, Claude Quitté et Claire Tête : Résolutions libres finies. Méthodes constructives. Preprint disponible en `https://arxiv.org/abs/1811.01873`, 2019. 1

[8] Michel Coste, Henri Lombardi et Marie-Françoise Roy : Dynamical method in algebra : effective Nullstellensätze. *Ann. Pure Appl. Logic*, 111(3):203–256, 2001. 1, 6, 7

[9] F. J. Herrera Govantes, M. A. Olalla Acosta, M. Spivakovsky et B. Teissier : Extending a valuation centred in a local domain to the formal completion. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 105(3):571–621, 2012. 1

[10] F.-V. Kuhlmann et Henri Lombardi : Construction of the Henselization of a valued field. (Construction du hensélisé d'un corps valué.). *J. Algebra*, 228(2):624–632, 2000. 1, 2, 6

[11] Franz-Viktor Kuhlmann, Henri Lombardi et Hervé Perdry : Dynamic computations inside the algebraic closure of a valued field., 2003. 1

[12] Henri Lombardi et Claude Quitté : *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini. Cours et exercices.* Paris : Calvage & Mounet, 2011. Traduction en anglais (version révisée et étendue par les auteurs) par Tania K. Roblot : Commutative algebra : constructive methods. Finite projective modules. Springer, Dordrecht, 2015. 1

[13] Ray Mines, Fred Richman et Wim Ruitenburg : *A course in constructive algebra.* Universitext. Springer, New York, 1988. 1

[14] M. Raynaud : *Anneaux locaux henséliens.* Lecture Notes in Mathematics. 169. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1970. 5

[15] Ihsen Yengui : *Constructive commutative algebra : projective modules over polynomial rings and dynamical Gröbner bases.* Lecture Notes in Mathematics, 2138. Springer, Cham, 2015. 1