UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN
CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXPERIMENTALES

TESIS DOCTORAL

Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Jesús Macías Sánchez

DIRECTORES

Juan Miguel Belmonte Gómez
Mª Mercedes Martínez Aznar

Madrid, 2016

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXPERIMENTALES

DISEÑO Y ESTUDIO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS QUE FAVORECEN EL TRABAJO CON REGISTROS SEMIÓTICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Jesús Macías Sánchez

Bajo la dirección de los doctores:

Juan Miguel Belmonte Gómez. Profesor Titular del Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Mª Mercedes Martínez Aznar. Profesora Titular del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

Madrid, 2015

DISEÑO Y ESTUDIO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS QUE FAVORECEN EL TRABAJO CON REGISTROS SEMIÓTICOS

Tesis Doctoral presentada por:

Jesús Macías Sánchez

Directores:

Juan Miguel Belmonte Gómez. Profesor Titular del Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Mª Mercedes Martínez Aznar. Profesor Titular del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN
CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXPERIMENTALES

Madrid, 2015

No hay que confundir lo más importante con lo que simplemente es imprescindible.

José Ortega y Gasset

A mis padres y hermanas…

En este documento cuando se habla de “alumnos”, “profesores”, “padres”, etc. debe entenderse en sentido genérico como “alumnos y alumnas”, “profesores y profesoras”, “padres y madres”, ... salvo en aquellos casos en los que por el contexto se deduzca una referencia exclusivamente al sexo masculino.

AGRADECIMIENTOS

Quiero empezar dando las gracias a la Catedrática Mª del Carmen Chamorro Plaza, por abrirme las puertas a un nuevo y apasionante mundo, guiarme en él, por compartir conmigo sus amplios conocimiento en Didáctica de las Matemáticas y tenderme no una sino las dos manos siempre que ha sido necesario, tanto desde la perspectiva profesional cómo desde la meramente personal. Sin tí, el trabajo que se encuentra recogido en estas páginas no hubiese tomado forma, pues tu interés, tu gran capacidad de trabajo y el amor que demuestras hacia la educación y la profesión, han sido un pilar fundamental en la realización del mismo. Gracias por confiar en mí desde un primer momento y ser un ejemplo a seguir no solo profesionalmente hablando, sino también por tu gran calidad humana, tu nobleza, tu perseverancia y tu espíritu de lucha hasta en los momentos más difíciles.

Dar las gracias también al Doctor Juan Miguel Belmonte Gómez, director de esta tesis y principal responsable de que mi trabajo haya podido culminarse. Gracias por el conocimiento aportado y experiencia profesional que has compartido conmigo, pero sobre todo gracias por tu generosidad, la dedicación, interés, ilusión, entusiasmo, el tiempo dedicado cuando la más estricta realidad es que carecías de él, la total confianza demostrada y el gran esfuerzo realizado para que este barco que zarpó hace cuatro años no se quedara anclado en mitad del camino.

Gracias a la Doctora Mª Mercedes Martínez Aznar, codirectora de esta tesis, por facilitarme la realización del trabajo dentro del Departamento de Ciencias Experimentales, por las contribuciones realizadas y por los consejos tan idóneamente aportados en los momentos apropiados, siempre dispuesta a ayudar tanto desde lo profesional como desde lo personal.

Gracias a Paulina Olivares, María Gonzáles Cámara y Eduardo Bustamante Vargas, alumnos del Máster de Formación del Profesorado, que junto a Irene Rodríguez Mora, Juan Miguel Belmonte Alfaro, María Sánchez Arahuetes, Raquel Macías Sánchez y Javier Merino Silva, han conformado un gran equipo, el cuál me ha brindado su inestimable colaboración de manera totalmente desinteresada. Gracias por vuestro trabajo y dedicación.

Gracias al equipo directivo del Instituto Público “Pablo Neruda” de Leganés (Madrid), y en especial al Jefe de Estudios, Don Enrique Fernández González, y al Jefe de Departamento de Matemáticas, Don Javier Sanz, por permitirme desarrollar, en un ambiente cómodo y familiar, la aplicación de los dispositivos experimentales que forman parte de esta tesis durante los cursos 2011-2012 y 2012-2013. En particular, dar las gracias al Profesor Don Carlos Cerrolaza Gómez, por abrirme las puertas de sus aulas durante dos años consecutivos, colaborando desde el minuto cero en la consecución adecuada del trabajo planteado y en el desarrollo del mismo en las clases. Su profesionalidad, calidad como docente, interés por la educación y el entusiasmo demostrado hacia nuevos caminos que pueden abrirse en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas deben servir de ejemplo tanto a generaciones de futuros profesores como a muchos de aquellos que ya ejercen la profesión.

Gracias a todos y cada uno de los alumnos de 2º y de 3º ESO del Instituto Público “Pablo Neruda”, verdaderos protagonistas de esta investigación. Siempre recordaré cada minuto vivido entre vosotros cómo algo especial en mi vida. Gracias por vuestro cariño, vuestra implicación y por haberme hecho pasar unos días entrañables, divertidos, en los que fuimos capaces, entre todos, de demostrar cómo el aprendizaje puede tener lugar de una manera diferente.

Gracias a mi familia ICE, a todos sin excepción, que siempre me han estado cerca de una u otra forma; gracias Eva, Manuel, Anun y Mª Ángeles por vuestra amistad y estar ahí, haciendo más fáciles las cosas, desde aquel primer día que se cruzaron nuestros caminos y os tocó soportar a este becario.

No quiero pasar sin dar las gracias a una de las personas que ha conseguido hacerse un hueco importante en mi vida en los últimos años. Su apoyo incondicional, su preocupación e interés constante, la manera en que me arropa y me aconseja, su particular modo de ver la vida y el cariño que desprende por cada uno los poros de su piel, la convierten en una gran amiga. Gracias Blanca Arteaga. Me queda mucho que aprender de ti.

Gracias a Esther, Lourdes, Carlos y Alicia. Gracias por vuestro aliento, por mostrarme vuestro apoyo inconmensurable en cada uno de los baches encontrados en el camino o cuando han flaqueado las fuerzas, por no desaparecer en los momentos que, hasta día de hoy, han sido los más difíciles para mí; gracias por esperarme cuando mi ritmo de vida ha sido frenético y saber comprenderlo y por vuestra infinita paciencia. No existe tiempo ni palabras suficientes para describir lo agradecido que estoy de que forméis parte de mi vida. Gracias AMIGOS.

Y quiero dejar para el final los agradecimientos a las cuatro personas más importantes de mi vida, mis padres y mis hermanas. Gracias María y Raquel, por aguantar mis momentos de estrés, vuestra comprensión sin condiciones, por saber sacarme una sonrisa cuando ha sido necesario, por estar pendientes de mi y protegerme aun siendo yo el mayor, por quererme y sobre todo por estar siempre ahí, en la habitación de lado. Aunque no es necesario que os lo diga, quiero que quede aquí reflejado que os quiero con locura. Gracias Juli y Jesús, por vuestro cariño, vuestro amor, vuestros ánimos, vuestra confianza, por vuestra humildad, por ser cómo sois y enseñarme cuales son las cosas que verdaderamente importan en la vida. Gracias por el gran esfuerzo que habéis hecho durante estos 30 años para que yo hoy pueda estar dónde estoy, haya podido vivir como he vivido y sea la persona que soy. No hay nada el mundo que compense todo los que habéis dado y sacrificado por nosotros. OS QUIERO.

Gracias a todos, sé que me queda mucha gente por nombrar, familia y amigos, pero vosotros sabéis que os quiero aunque no estéis en estas líneas.

DISEÑO Y ESTUDIO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS QUE FAVORECEN EL TRABAJO CON REGISTROS SEMIÓTICOS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

¿Qué se encuentra detrás de los errores y dificultades que aparecen en los alumnos a la hora de comprender y estudiar matemáticas?¿Están únicamente relacionados con la complejidad cognitiva de los contenidos o tales dificultades también guardan relación con las posibles maneras de acceder a los diferentes objetos matemáticos?

La actividad matemática genera en muchos estudiantes dificultades de aprendizaje que no se manifiestan ni emergen en procesos cognitivos relacionados con otras áreas de conocimiento.

Trabajos e investigaciones en didáctica han evidenciado la importancia que tienen las representaciones, y los cambios de un registro de representación semiótico a otro, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (D'Amore, 1998, 2001, 2003, 2004, 2006; Duval, 1993, 1994, 1995, 1996, 2000, 2003, 2004, 2005, 2007, 2008, 2011, 2012; Godino, 2002, 2003, 2012, 2014; Kaput, 1989a, 1989b,1992, 1998; Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2008,2009, 2011, 2013, 2014a).

Si algo caracteriza a los procesos y actividades de nuestro área es que, a diferencia de lo que ocurre con los objetos de trabajo y estudio del resto de ciencias experimentales, la única manera de acceder a ellos es mediante sus diferentes representaciones semióticas, es decir, mediante las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (Duval, 1993, 2003, 2011, 2012). Esto es debido a que los objetos matemáticos no existen en la realidad: no son perceptibles ni manipulables de una manera directa.

El hecho de que los conceptos matemáticos sean solamente accesibles a través de sus representaciones semióticas conduce, de manera inmediata y necesaria, a prestarlas atención estudiando su diversidad, funcionamiento e implicación en el proceso de comprensión de las nociones por parte del alumno y preguntarse sobre la naturaleza de los procesos cognitivos que subyacen en una verdadera actividad matemática.

Si bien, los objetos matemáticos son solo accesibles a través de sus representaciones, nunca debe confundirse tal representación con el objeto representado. Esta paradoja[1] se encuentra en la raíz de las dificultades y bloqueos de un gran número de alumnos ya que, en la práctica, los estudiantes no son capaces de distinguir entre un objeto y su representación (Duval, 1993, 2003, 2011, 2012).

Uno de los fenómenos más importantes que concierne a la utilización de representaciones reside en la no existencia de una única representación que ostente un determinado objeto de conocimiento. Además, cada una de las representaciones que hacen referencia a dicho objeto, lo hace también a unas determinadas propiedades del mismo. La identificación de las diferentes representaciones que hacen referencia al mismo concepto matemático es un objetivo necesario para que el aprendizaje del alumno se desarrolle de manera significativa.

Una adecuada actividad matemática obliga a movilizar necesariamente la articulación y conversión entre los diversos registros de representación con los que podemos hacer referencia a los objetos matemáticos (Registro de la Lengua Natural, Registro Numérico, Registro Tabular, Registro Figural, Registro Geométrico, Registro Algebraico y Registro Gráfico). La utilización de varios sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales del alumno, especialmente en la cognición matemática, debiéndose centrar en las transformaciones que se pueden efectuar entre representaciones y dentro de cada una de ellas, y no tanto en las representaciones semióticas empleadas.

Algunas de las preguntas que cabría hacerse a continuación son:

- **CUESTIÓN 1: ¿Estos aspectos son considerados y, lo que es más importante, trabajados a lo largo de la enseñanza obligatoria?**

[1] Paradoja cognitiva del pensamiento matemático

- **CUESTIÓN 2: ¿Es correcto el tratamiento que hacen los libros de texto de las transformaciones entre los distintos registros semióticos?**

- **CUESTIÓN 3: ¿La relación que establecen los alumnos entre un objeto y su representación, o la conversión entre registros, son aspectos contemplados por las evaluaciones de diagnóstico con el fin de detectar las dificultades y bloqueos que producen y ponerles solución?**

y lo que es más importante,

- **CUESTIÓN 4: ¿Qué tipo de situaciones se pueden diseñar y plantear de manera que se favorezca el trabajo y conversión entre los diferentes registros de representación semiótico?**

Nuestro trabajo de tesis tiene por objeto dar respuesta a cada uno de estos cuatro interrogantes, centrándonos de manera prioritaria en la última cuestión, conscientes de que los profesores necesitan conocer cuáles son las mejores situaciones que propician los cambios en lo que a nuestro tema de estudio se refiere, así como las características que deben tener en un esfuerzo por diseñar sesiones de enseñanza de aplicabilidad en la escuela.

Consideramos este planteamiento novedoso, en la medida que pretende proporcionar una posible solución a la problemática planteada, mejorando el aprendizaje de los estudiantes.

Para sentar las bases de la investigación y conocer aquellos antecedentes en relación al tema que vamos a abordar, el capítulo 1 se constituye como una completa y exhaustiva revisión de las teorías y resultados provenientes de la psicología y la didáctica en relación a la semiótica, la representación y su relación con el quehacer matemático. La teoría de los Registros de Representación Semiótica nos ha permitido proferir una explicación coherente para ciertas dificultades y errores que los alumnos manifiestan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, completándola con los resultados obtenidos, en ese sentido, por otras teorías de la didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; Bosch, 2001; D'Amore, 2001, 2004, 2006; D'Amore, Radford y Bagni, 2007; Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2006b, 2008, 2009, 2011, 2013, 2014b Vergnaud, 1990, 1998) y la neurociencia (Amstrong, 2012; Ansari y Coch 2006; Dehaene, 2000, 2002a, 2002b, 2005; Howard-Jones, 2008, 2010; Pica, Dehaene, Izard y Spelke, 2008; Nieto, 2011).

Además, se presenta la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (Brousseau 1975, 1976a, 1976b, 1983, 1984, 1986, 1989, 1998, 2006a, 2006b, 2007) que será fundamental para el desarrollo de las Ingenierías didácticas o diseño experimental desarrolladas en el capítulo 4.

Para dar respuesta a las dos primeras cuestiones planteadas en los objetivos, abordamos en el capítulo 2 el estudio de los fenómenos de transposición didáctica, muy importantes en la enseñanza, analizando distintos niveles del saber.

Partimos del estudio y análisis del marco legislativo español en materia de educación desde la LOGSE (1990) hasta la LOMCE (2014), con el propósito de evaluar hasta qué punto se contemplan, en los Decretos de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria y Educación Secundaria, la importancia de la utilización de múltiples registros de representación semiótica en la conceptualización de los objetos de conocimientos matemáticos, así como poder valorar el grado consciencia didáctica que se tiene del papel que juega la conversión entre registros para que dicho aprendizaje tenga lugar de manera significativa, integra y global. Dicho estudio legislativo se ha completado con el análisis de varios libros de texto de diferentes editoriales, tanto de Primaria como de Secundaria, con el fin de determinar qué tipo de representaciones y coordinación entre ellas promueven las tareas escolares, ya que debido al rol adquirido por los manuales cómo elementos imprescindibles y necesarios en la práctica docente, serán las actividades que se desarrollen mayoritariamente en el día a día del aula (Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez Téllez, 2010; García y Llinares, 1995; García Moreno y Guillén, 2008; Parcerisa, 1996).

Ambos estudios nos han permitido identificar con bastante claridad los procedimientos en que se sustentan habitualmente las prácticas escolares en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de matemáticas, centrándose en trabajos mecánicos y algorítmicos marcados principalmente por las directrices de los manuales escolares, muy alejados de una verdadera construcción, comprensión y asimilación de conceptos.

Además, se ha podido comprobar cómo la articulación entre registros semióticos y la aparición de determinados fenómenos didácticos que de dicho proceso emanan debido a la falta de congruencia entre los elementos o unidades que caracterizan a cada uno de ellos, son pasados por alto, y por ello tampoco son tenidas en cuenta las dificultades y los errores que los alumnos manifiestan a la hora de tener que efectuar conversiones entre representaciones, debiéndose contemplar en cualquier proyecto de mejora de la enseñanza.

Siguiendo la línea de lo hasta aquí expuesto, el capítulo 3 se centra en el estudio de las Evaluaciones de Diagnóstico más relevantes a nivel internacional y nacional: PISA, TIMSS e INCE.

El estudio de las evaluaciones ha permitido elucidar cómo los ítems que las conforman no están diseñados para detectar las posibles dificultades y bloqueos que se producen en los estudiantes en materia de conversión y utilización de representaciones, y muchos menos se encuentran orientados hacia el análisis y mejora de la práctica escolar en este sentido, fuera de lo que cabría esperar de una verdadera evaluación de diagnóstico, pese a que todas ellas hacen referencia en sus respectivos marcos teóricos a aspectos relacionados con la utilización de las representaciones y la transformación de unas en otras.

Los aspectos tratados en los capítulos 1, 2 y 3 han contribuido de manera significativa y esclarecedora a determinar cuáles debían ser los elementos necesarios para desarrollar ingenierías didácticas eficaces que favorezcan el trabajo con registros semióticos y la práctica de la conversión, y así tenga lugar una conceptualización equilibrada, completa, global y epistemológicamente correcta de las nociones matemáticas puestas en juego a efectos de poder ser utilizadas en cualquier contexto o situación problemática.

Así, el capítulo 4 se centra en el diseño y desarrollo de ingenierías didácticas sustentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval. A partir de una más que posible y beneficiosa relación de simbiosis entre ambas teorías, se han planteado dos ingenierías didácticas que proponen tareas que ayudan al alumno a favorecer y efectuar conversiones entre los distintos registros de representación existentes partiendo de las premisas de la Teoría de Situaciones, por un lado, y a alcanzar una conceptualización y comprensión de las nociones matemáticas de una manera más integra y completa a través de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica y del papel que juegan las representaciones como variables didácticas, por otro, pues los registros constituyen el instrumento necesario para diseñar o analizar las situaciones que se plantean a los estudiantes en una perspectiva de adquisición de conocimientos.

La primera de ellas, se ha centrado en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras y la semejanza para 2º de la ESO, mientras que la segunda está enfocada hacia la aprehensión de la noción de función, sus propiedades y el concepto de función afín. Se han elegido estos dos tipos de contenidos por presentar necesidades semióticas distintas con el fin de poder dar ciertas garantías de que la metodología empleada, basada en la teoría de situaciones didácticas centrada en la atención a la coordinación entre registros, favorece muy positivamente el aprendizaje y la construcción de conocimiento en el alumnado. Por ello, los aspectos matemáticos, epistemológicos y didácticos de estos contenidos, han sido tomados en consideración en el diseño de las mismas.

El método de análisis de las ingenierías es una de las aportaciones de este trabajo de tesis. El análisis a priori y a posteriori de cada una de las sesiones, prestando especial atención al papel desempeñado por las variables didácticas que determinan y dan sentido a cada situación, nos parece esencial para asegurarnos de que se ha diseñado un medio didáctico capaz de producir las interacciones necesarias para que tenga lugar tanto la adquisición de habilidades y destrezas relacionadas con la utilización de los registros de representación y su conversión, cómo la construcción y adquisición de los conocimiento que subyacen en ellos.

Esto es posible gracias a los elementos teóricos de análisis proporcionados por la Teoría de Situaciones, que aporta herramientas capaces de realizar dicho desempeño. Además, la metodología de observación que se ha utilizado, basada en el uso de las grabaciones en video, literalmente transcritas, unido a las crónicas e informes elaborados por los observadores, nos permiten un estudio de características clínicas en un contexto totalmente escolar que tiene en cuenta la interacción social y la influencia de la institución en las que se desarrollan las situaciones, aspectos que quedan fuera del método de análisis clásico.

Este capítulo se completa con un pequeño estudio estadístico en términos de rendimiento, basado en calificaciones, centrado en:

- en un análisis pretest-postest de los resultados obtenidos por los estudiantes de 2º ESO antes y después de desarrollar la metodología planteada. En este análisis, en donde se ha considerado la calificación media obtenida hasta el momento como pre-test y la nota obtenida en el examen de la unidad cuyo contenido se ha desarrollado a través de la nueva metodología como post-test, no se observan grandes diferencias a nivel a global en el grupo experimental, pero si a nivel individual, siendo reseñable como este nuevo enfoque resulta beneficioso para aquellos alumnos cuyo rendimiento está por debajo del 5.
- en un análisis comparativo de los resultados obtenidos, en 2º ESO, por el grupo experimental que ha seguido la metodología en esta tesis planteada y el grupo de control que ha continuado con la metodología habitual del centro, ante un examen de características clásicas y poco competencial. A través de la calificación de los contenidos evaluados mediante el mismo modelo de examen, no se han detectado diferencias significativas a nivel global entre ambos grupos, lo que es indicativo de que la metodología aquí expuesta prepara a los alumnos frente a este tipo de pruebas satisfactoriamente.
- en un análisis comparativo de los resultados obtenidos, en 2º ESO, por el grupo experimental y el grupo de control, ante un examen

totalmente competencial y contextualizado. A través de la calificación de los contenidos evaluados mediante el mismo modelo de examen competencial, se han detectado diferencias significativas entre ambos grupos a favor y en beneficio del grupo experimental, lo que indica el amplio potencial a nivel formativo que presenta la metodología desarrollada.

- en un análisis pretest-postest de los resultados obtenidos por los estudiantes de 3º ESO antes y después de desarrollar la metodología planteada. En este estudio, que ha seguido las mismas pautas y parámetros establecidos en 2º ESO, se observan mejoras en el rendimiento de los alumnos en términos de calificaciones tanto a nivel global como a nivel individual.
- en un análisis comparativo de los resultados obtenidos, en 3º ESO, por el grupo experimental que ha seguido la metodología en esta tesis planteada y un grupo de control que ha continuado con la metodología llevada a cabo por el centro, ante un examen de características clásicas y no planteado de acuerdo a las competencias básicas propias de la etapa. A través de la calificación de los contenidos evaluados mediante el mismo modelo de examen, se han detectado diferencias significativas entre ambos grupos, viéndose un mejora sustancial en el rendimiento de los alumnos del grupo experimental.

A estos efectos y en combinación con los resultados obtenidos tanto del estudio de la transposición didáctica como de las observaciones de las ingenierías realizadas en el aula, se han elaborado una serie de conclusiones referidas a los objetivos iniciales planteados en la tesis así como a las hipótesis establecidas en cada uno de los capítulos, lo que facilita una radiografía del tratamiento que reciben las representaciones, su coordinación y las dificultades que en ello subyace, en la enseñanza de las matemáticas.

1. PARADIGMA DE REFERENCIA

Es indiscutible que todo estudio en Didáctica, y en Didáctica de las Matemáticas en concreto, precisa de un modelo de referencia que dé cuenta de la adquisición de conocimientos por parte del estudiante y de los procesos cognitivos que subyacen en dicho proceso.

Es imposible concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier área de conocimiento sin tener en cuenta las interacciones, interrelaciones y fenómenos que emergen entre sus tres agentes principales:

- El alumno, cuyo papel es aprender aquello que ha sido establecido por la comunidad educativa, en los currícula oficiales, según su edad, nivel y desarrollo madurativo y cognitivo.
- El saber o conjunto de conocimientos, en nuestro caso matemáticos, que deben ser transmitidos y aprehendidos por los alumnos para su aplicación futura tanto en la vida profesional o laboral cómo en situaciones cotidianas del día a día.
- El profesor, en posición asimétrica al alumno. Es el encargado de transmitir el saber y hacer funcionar el proyecto de enseñanza de la manera más adecuada posible para que el aprendizaje se de manera significativa.

En la fase primigenia del proceso de enseñanza, el profesor se encuentra en una situación privilegiada con respecto al saber de la que el alumno no goza, pues si bien es cierto que los estudiantes ya han establecido contacto con el conocimiento antes de la enseñanza, éste es poco apropiado y limitado. No obstante, al final del proceso el alumno es capaz de mantener por sí solo una relación adecuada con el saber pudiendo prescindir de la figura del profesor.

Estos tres polos que componen todo sistema didáctico se relacionan entre sí dando lugar a tres subsistemas, profesor-alumno, alumno-saber, y profesor-saber, cuyos objetos de estudio los representamos en el esquema clásico del triángulo didáctico:

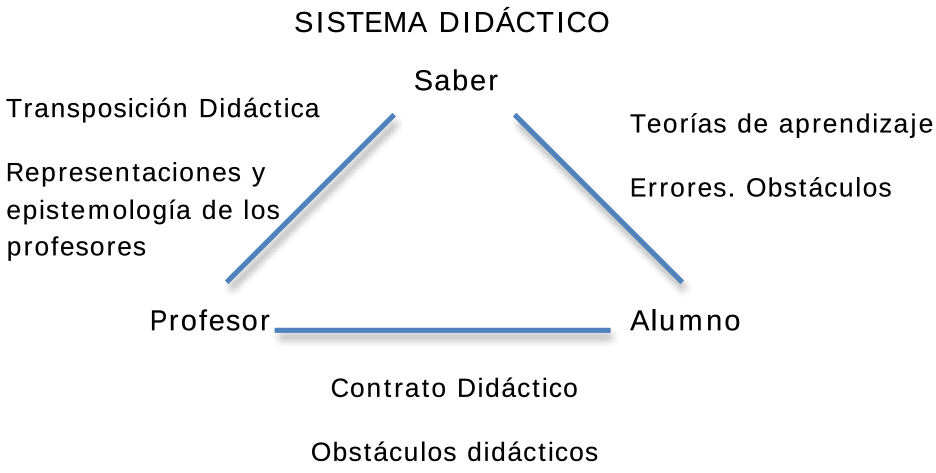


FIGURA 1.1. *Triángulo Didáctico.* (Chamorro, 2005a, p.42)

Para la realización de nuestra investigación nos enmarcamos dentro de la denominada Didáctica Fundamental, corriente francesa de origen sistémico. En particular, vamos a apoyarnos, de manera fundamental, en dos teorías que si bien por separado ya proporcionan grandes aportes metodológicos en lo que al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se refiere, en combinación se convierten en una fuerte herramienta para la transmisión y construcción del saber basado en un adecuado desarrollo cognitivo del estudiante.

Nos referimos a la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, de probada utilidad en el diseño de ingenierías didácticas, siguiendo rigurosamente la metodología que le es propia, y a la Teoría de los Registros de Representación Semióticos de Raymond Duval, que nos proporcionará las bases teóricas necesarias para el diseño de las secuencias didácticas entorno a la articulación de los múltiples sistemas de representación que se pueden emplear en matemáticas.

En lo que sigue, se presentan algunos estudios y conceptos que van a justificar y proporcionar un soporte teórico tanto del método de análisis que hemos seguido cómo de algunas de las decisiones que hemos considerado a la hora de diseñar las ingenierías didácticas que presentaremos más adelante.

En la primera parte abordamos la Teoría de Situaciones, dando cuenta de sus elementos, conceptos clave, características y particularidades. Seguidamente, y de manera más amplia, nos centramos en el mundo de la semiosis y la representación, y el papel que juegan dentro del universo matemático.

1.1. Teoría de Situaciones Didácticas

Cuando nos referimos a situaciones didácticas, hacemos alusión a todas aquellas tareas, actividades o prácticas educativas que se caracterizan por ser diseñadas y construidas intencionalmente por un determinado sujeto (profesor) con el fin de enseñar un concepto, noción u objeto de conocimiento a otro sujeto (alumno) (Brousseau 1998, 2000a, 2006a, 2006b, 2007).

Una situación es no didáctica si nadie la ha organizado para permitir un aprendizaje, por ejemplo, un problema que aparece de forma natural en el día a día en el desarrollo de nuestra vida cotidiana, familiar y profesional. En ella no hay profesor ni alumno y se ha generado de manera espontanea.

Una situación didáctica es aquella que se desarrolla habitualmente dentro del contexto escolar, donde se produce la interacción entre el profesor y uno o varios estudiantes, en torno a un saber que se pretende que el alumno adquiera. Se trata de situaciones que se diseñan y desarrollan con la clara intención de que se produzca un aprendizaje.

Bajo esta perspectiva, debemos tener en cuenta los dos posibles enfoques desde los cuales nos podemos aproximar a ellas: el clásico, tradicional, excesivamente guiado y cerrado, por un lado, y el enfoque planteado por Brousseau por otro (Brousseau 1975, 1976a, 1976b, 1983, 1984, 1986, 1989, 1998, 2006a, 2006b, 2007).

En el enfoque tradicional, las situaciones didácticas se cimentan en una concepción del aprendizaje en donde al alumno aprende lo que el profesor explica y no aprende nada de aquello que no explica. Tendríamos un sistema didáctico en el que el profesor se encarga de realizar un trasvase de conocimientos al estudiante, el cual los recibe, los acumula, y los reproduce tal cual le han sido administrados y transmitidos.

Dentro de este enfoque, totalmente empirista, no se contextualiza el conocimiento, se considera al alumno incapaz de construir conocimientos, el error está mal visto y no tiene lugar un aprendizaje significativo, sino más bien memorístico basada en la repetición.

Ahora bien, en el marco teórico planteado por Brousseau, se parte de la idea de la creación de conocimiento como resultado de la adaptación a un medio resistente con el que interactúa el alumno, concepto heredado de la teoría piagetiana del aprendizaje.

El propio Brousseau (1975) dice a este respecto que

> (...) un proceso de aprendizaje puede estar caracterizado de manera muy general (si no determinado), por una serie de situaciones identificables (naturales o didácticas) reproducibles, que acaban regularmente en la modificación de un conjunto de comportamientos del alumno, modificación característica de la adquisición de un conjunto de conocimientos determinados (Brousseau, 1975, p. 6).

Se trata de una teoría de enseñanza cuyas condiciones para la génesis del conocimiento, siguiendo a Chamorro (2005, p. 15-27) se sustentan en las cuatro hipótesis fundamentales sobre las que se apoya la teoría constructivista:

1. El aprendizaje se apoya en la acción.
2. La adquisición, organización e integración de los conocimientos del alumno pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, en el curso de los cuales los conocimientos anteriores se ponen en duda.
3. Se conoce en contra de los conocimientos anteriores.
4. Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social, pueden facilitar la adquisición de conocimientos.

Ello queda reflejado en palabras del propio Brousseau cuando nos dice que

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1998, p. 59).

Luego, dentro de este marco, una situación didáctica comprende el proceso en el cual el profesor facilita el medio didáctico en donde el estudiante crea y no redescubre el conocimiento, mediante la puesta en funcionamiento de mecanismos intelectuales y procesos cognitivos (formular, probar, construir modelos, etc.) similares a los que efectúa la comunidad científica.

En este modelo de aprendizaje, toda variación o modificación que sufra el medio, entendiendo por medio el conjunto de limitaciones que deben garantizar un funcionamiento adecuado y satisfactorio de la actividad del estudiante en relación con el proceso de aprendizaje, produce alteraciones en la manera de actuar del alumno, modificando su comportamiento con el fin de alcanzar un equilibrio interno.

Por tanto, el concepto medio engloba tanto al problema inicial con el que el alumno se encuentra, cómo al conjunto de relaciones y condiciones que varían a medida que el alumno alcanza y construye el conocimiento en el trascurso de la situación.

La noción de situación didáctica es más amplia que la idea de una simple actividad práctica, ya que pretende que el estudiante construya y adquiera un determinado conocimiento de manera significativa a través de la aparición de tal concepto como solución óptima del problema al que se enfrenta.

Para Brousseau (2006a) una situación permite coordinar sistemáticamente más condiciones y por tanto:

- Organizar las condiciones de comportamiento de los profesores, los alumnos y el medio en un sistema de manera más detallada que sólo con el uso de problemas.
- Modelizar la evolución de ese sistema (profesor-alumno-medio).
- Calcular el valor de las diferentes variables que proporcionan las condiciones óptimas de esta evolución, poniendo de manifiesto de manera objetiva los comportamientos más económicos, los más seguros y los mejores adaptados a las circunstancias y a los conocimientos de los sujetos.

- Examinar la consistencia lógica de estos modelos y su compatibilidad con los resultados ya establecidos, con ayuda de conceptos teóricos apropiados.
- Extraer generalizaciones frente a contingencias.
- Mejorar la calidad de la enseñanza.

Como se puede observar en lo tratado hasta el momento, tres son los elementos fundamentales que intervienen en la Teoría de Situaciones Didácticas, el estudiante, el profesor y el medio didáctico del cual ya hemos hablado.

"El aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro solo debe provocar" (Brousseau, 1994, p. 66). Estas palabras de Brousseau dejan entrever que dentro de su teoría, tanto los estudiantes como el profesor tienen funciones determinadas que deben cumplir para que se produzca el aprendizaje.

El profesor, en contradicción con la concepción tradicional fuertemente arraigada en nuestro sistema educativo, abandona el papel que le convierte en el eje y fuente fundamental en la transmisión del saber a las generaciones futuras, para convertirse en algo más importante, en guía en el aprendizaje del alumno, cumpliendo las siguientes funciones (Brousseau, 1994):

- Debe buscar una situación apropiada para que el alumno produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta.
- Debe preparar con cuidado el medio que conforma cada situación, previendo las acciones que cada alumno puede realizar, las retroacciones que ofrece el medio y las posibilidades de validación de las que disponen.
- Debe gestionar las variaciones y modificaciones que pueden efectuarse sobre el medio que conducirán a un cambio en la acción del alumno y por tanto a la construcción de un nuevo conocimiento.

- Debe evitar darle información directa o indirecta al alumno que le permita resolver el problema, y sobre todo debe evitar juzgar (positiva o negativamente) el trabajo del alumno.

- Una vez los alumnos han alcanzado el conocimiento que se pretendía, el docente debe dicho conocimiento y explicitar sus conexiones con el saber oficial.

Por su parte, el estudiante

- Debe entrar en el problema haciéndolo suyo con un objetivo claro y no impuesto: resolverlo.

- Debe realizar acciones sobre el medio aplicando los conocimientos de los que dispone, independientemente de que sean óptimos o no para solucionar la tarea.

- Debe validar su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Puede obtener dos posibles resultados: Un validación positiva lo que reforzará la acción realizada y los conocimientos puestos en juego, o una validación negativa produciendo un desequilibrio que conlleva la adaptación o modificación de la acción, produciendo nuevos conocimientos y teniendo que iniciar un nuevo ciclo acción-retroacción-validación.

En definitiva, desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones, por medio de las situaciones didácticas el profesor busca provocar en el estudiante los conflictos que lo lleven a la construcción del conocimiento.

1.1.1. Aprendizaje y gestión de variables didácticas

Según acabamos de ver, los elementos que configuran el medio cuya modificación y gestión forma parte de la elecciones y decisiones que debe tomar el profesor, juegan un papel fundamental en la significación de los conocimientos matemáticos que se espera que el alumno aprenda. Dichos elementos reciben el nombre de variables didácticas, definidas por Chevalier (1995) como sigue:

> Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.) (Briand et Chevalier, 1995, p. 68).

Una tarea difícil, generadora de conflictos al trabajar con esta teoría, es identificar que elementos constituyen una variable didáctica, pues no podemos considerar que toda característica de la situación lo sea. Únicamente serán variables didácticas aquellas que al actuar sobre ellas provoquen adaptaciones, cambios de estrategias y, en consecuencia, den lugar a un aprendizaje.

El profesor

> (...) puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes (Brousseau, 1998, p. 7).

El siguiente esquema recoge la manera en que la gestión de las variables didácticas se relaciona con la situación de aprendizaje:

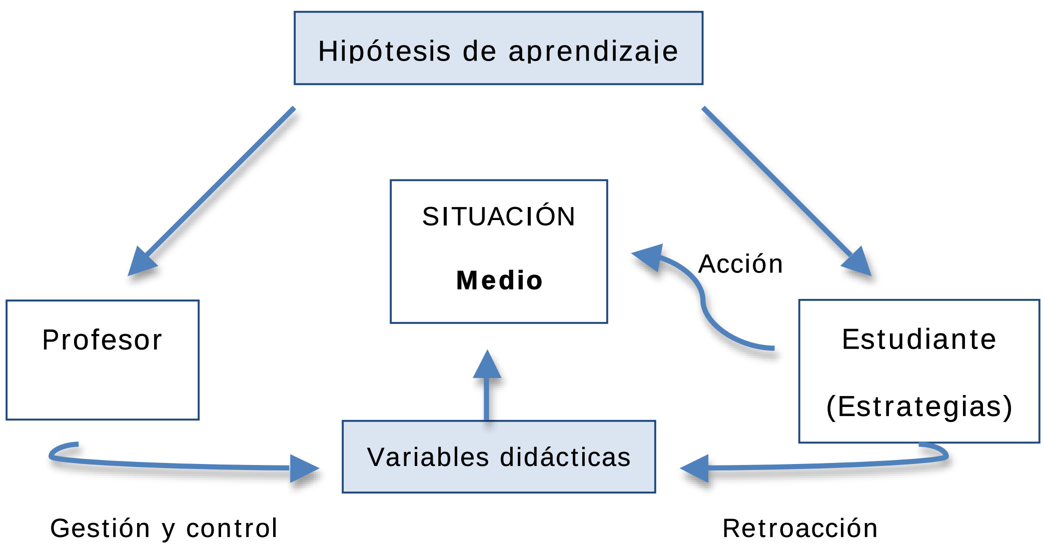


FIGURA 1.1.1.1. *Esquema situación de enseñanza constructivista.* (Chamorro, 2005a, p. 31)

Los conocimientos puestos en juego en una situación van a depender de las variables didácticas. Así, para una misma situación, pueden aparecer estrategias y concepciones diferentes según los valores de ciertas variables. Una variable se dice pertinente si para diferentes valores convierte en óptimas soluciones, concepciones o estrategias cualitativamente diferentes. Si éstas pueden ser fijadas por el profesor en el diseño de la situación, se habla de variables didácticas.

1.1.2. Situación a-didáctica

Las situaciones didácticas de la teoría de Brousseau vienen definidas como un juego en el que hay un jugador (el estudiante) y un contrincante o sistema antagonista. La primera estrategia que el jugador pone en práctica con la intención manifiesta de resolver el problema que se le plantea se conoce cómo estrategia de base, la cual está asociada a unos conocimientos previos que posee el alumno, los cuales le proporcionan las herramientas necesarias para comprender el juego y decidir formar parte de él. Esta estrategia no coincide con lo que se quiere enseñar, ya que el aprendizaje va a consistir, y va a mostrarse, a través del cambio de estrategia, lo que implica la modificación de los conocimientos que pone en funcionamiento y la aparición de un conocimiento concreto como resultado del cambio. El profesor conseguirá dicho propósito mediante la modificación de las variables didácticas que conforman la situación y forman parte del medio.

Las situaciones de este tipo reciben el nombre de situaciones a-didácticas, y vienen caracterizadas por la producción del conocimiento de manera independiente al docente y por el hecho de que las acciones del estudiante tienen un carácter de necesidad en relación con el saber en juego (Brousseau, 1998).

Es evidente que no toda situación didáctica es a-didáctica. Desde el punto de vista del alumno, la situación es a-didáctica sólo si él tiene conciencia de implicarse, debiendo ser el responsable de la resolución del problema que le presenta la situación, y siendo él al que le corresponde encontrar una solución. Se requiere, pues, que el alumno acepte el problema como su problema, que lo asuma dentro de sus tareas, cometido que le corresponde realizar al profesor y que recibe el nombre de devolución.

Para que una situación sea a-didáctica son indispensables las siguientes condiciones (Chamorro, 2005):

- El alumno debe poder entrever una respuesta al problema planteado.
- El procedimiento de base debe mostrarse rápidamente como insuficiente.
- Debe existir un medio de validación de las estrategias.
- Debe existir incertidumbre, por parte de alumno, en las decisiones a tomar.
- El medio debe permitir retroacciones.
- El juego debe ser repetible.
- El conocimiento buscado debe aparecer como el necesario para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima.

Estas siete condiciones deben ser verificadas, en lo que Brousseau denomina *análisis a priori,* como paso previo a la puesta en marcha de las situaciones diseñadas.

1.1.3. Los distintos tipos de situaciones

Para Brousseau (1998, 2006b, 2007), no todas las situaciones didácticas son iguales y por ello establece la siguiente clasificación con la intención de poder modelizar y catalogar todas las posibilidades existentes:

- Situación de acción: El alumno actúa sobre el medio, produciéndose diversos intercambios de información entre él y la situación, lo que le permite tomar decisiones, construir una representación de la situación que le sirva de modelo y emplear una estrategia base asociada a una serie de conocimientos específicos. La eficacia de cada estrategia depende de las condiciones y características concretas y delimitadas de la situación, pudiendo resultar óptima en algunos casos e ineficaz en otros.

- Situaciones de formulación: El alumno se comunica con uno o varios interlocutores intercambiando información sobre lo que ha descubierto o encontrado. En este tipo de situaciones el medio está organizado de tal manera que las restricciones impuestas obligan al estudiante a utilizar sus conocimientos para producir formulaciones que pueden ir acompañadas o no de un código o lenguaje en forma de mensaje, pudiendo tratarse únicamente de un intercambio de ideas o juicios. La falta de idoneidad de los mensajes intercambiados pone en duda el procedimiento empleado para su obtención, de forma que la sanción en forma de fracaso reenvía a la revisión de la acción.Las condiciones para que una situación de formulación se desarrolle satisfactoriamente y funcione son, según Chamorro (2005, p. 48):
    - Que haya necesidad de comunicación entre alumnos cooperantes.
    - Que las posiciones de los alumnos sean asimétricas en lo que se refiere a los medios de acción sobre el medio o las informaciones.
    - Que permita retroacciones: con el medio, para la acción, con el receptor del mensaje.
- Situaciones de validación: En esta situación el alumno debe transmitir la estrategia seguida y que ha funcionado en el momento de la acción o la pertinente formulación y los resultados satisfactorios obtenidos con el propósito de que un interlocutor someta dichas declaraciones a juicio. El profesor debe organizar el medio de forma que su papel sea exclusivamente el de organizador de la acción pedagógica, de modo que su situación de privilegio con respecto al saber sólo se manifieste como gestor y responsable del buen funcionamiento del medio y la situación que en el se desarrolla, y no a través de la corrección tradicional. No obstante, no existe garantía a priori de que la fase de validación conduzca al estudiante hacia conclusiones acertadas para él. Por este motivo, la situación de validación busca que sean los propios alumnos los que entren a valorar la idoneidad de lo realizado,

entablando un proceso de pruebas. Según Chamorro (2005, p. 49-50), para que se consiga un medio a-didáctico en una situación de validación se requiere:

- Que haya necesidad de comunicación entre alumnos oponentes (proponente y oponente).
- Que las posiciones de los alumnos sean simétricas en relación con los medios de acción sobre el medio y las informaciones.
- Que el medio permita retroacciones a través de la acción (mensajes), y con el juicio del interlocutor.

- Situación de institucionalización: Cuando la estrategia empleada por el estudiante le permite encontrar la solución al problema al que se ha enfrentado (estrategia óptima), desconoce que los conocimientos implícitos en dicha estrategia, personales y contextualizados, constituyen un saber matemático, impersonal y descontextualizado, que puede ser reutilizado con éxito en otras situaciones. Por lo tanto, una vez finalizada la situación a-didáctica, el profesor debe explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por el propio estudiante gracias a la situación y el saber que desea enseñar. A este proceso, que corre a cargo del profesor, se le llama institucionalización.

1.1.4. La ingeniería didáctica y la situación fundamental

Es labor del profesor garantizar que el medio de aprendizaje, y por lo tanto la situación construida, va a funcionar en lo que a la construcción del saber por parte del alumno se refiere. Para ello, debe realizar un análisis a priori que lo corrobore.

El diseño de situaciones didácticas, que permitan enseñar determinados conceptos a un grupo de alumnos, siguiendo las indicaciones, condiciones y organización de todos los aspectos que constituyen la Teoría de Situaciones de Brousseau, recibe el nombre de ingeniería didáctica.

La ingeniería didáctica permite construir lo que se denomina génesis artificial del saber, buscando que los estudiantes construyan con sentido un determinado concepto matemático de acuerdo a una serie de pautas didácticas.

La idea de ingeniería didáctica se encuentra íntimamente ligada a la formación de conceptos a través de aquella situación mediante la cual cada sujeto encuentra el conocimiento dejando una huella que perdura en el tiempo, siempre bajo la premisa de posibilitar una evolución a efectos de permitir nuevos aprendizajes, es decir, a la idea de situación fundamental. Para Brousseau (1986), todo saber matemático, existe una familia de situaciones susceptibles de darle un sentido correcto.

La noción de situación fundamental designa un grupo concreto y determinado de situaciones en las que la noción a enseñar juega para el alumno el papel de respuesta adaptativa óptima.

Una situación fundamental debe permitir un origen significativo del saber, de manera que el alumno fabrique, de forma bastante rápida, una concepción correcta del conocimiento.

Brousseau (1986) establece unas pautas para diseñar situaciones fundamentales:

1. Enunciar un problema cuya solución requiera el empleo por parte del alumno de ese único conocimiento, si es posible sin que intervengan otros conocimientos.

2. Hacer aparecer las variables de esta situación cuyo cambio provoca modificaciones cualitativas de las estrategias óptimas, lo que indica una modificación de la significación del conocimiento buscado. Hacer aparecer aquellas que cambian el estatuto cognitivo:

    - en tanto que medio de control de la acción
    - en tanto que medio de comunicación
    - en tanto que medio de prueba
    - en tanto que algoritmo de referencia

3. Asegurarse de que la situación así obtenida permite engendrar, por este sistema de variables, todos los problemas culturalmente conocidos en los que este conocimiento interviene.

Localizada una situación fundamental que hace funcionar una noción, hay que buscar las variables didácticas que permiten, para ciertos valores, elaborar estrategias eficaces con los conocimientos que dispone ya el alumno. Después, sin modificación de las reglas de juego, con otros valores, la tarea va a presentar una importante complejidad, lo que exigirá la elaboración de nuevas estrategias, que llevarán aparejadas la construcción de nuevos conocimientos. Los nuevos valores de las variables son escogidos de manera que se consiga una relación maximal de eficacia del nuevo conocimiento en relación con los otros posibles. Este cambio en los valores de las variables didácticas que provoca los efectos descritos, recibe el nombre de salto de información.

1.1.5. El contrato didáctico

Al conjunto de reglas que rigen el juego en una situación didáctica, o dicho de otro modo, al conjunto de comportamientos propios y característicos del profesor que son esperados por el alumno, y al conjunto de comportamientos específicos del estudiante que son esperados por el profesor, se le denomina contrato didáctico.

> El contrato didáctico es un modelo teórico del conjunto de relaciones que determinan explícitamente, una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente, lo que cada oponente, enseñante y enseñado, tiene la responsabilidad de gestionar y de lo que será responsable, de una forma u otra, delante del otro. Este sistema de obligaciones reciprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte del contrato que es específico del contenido: el conocimiento buscado (Brousseau, 1986, p. 299).

Es más que evidente que el contrato didáctico clásico, mediante el cual se establece que es el profesor el que instruye y determina lo que es correcto y lo que no y el alumno el que copia la información para aprenderla, se encuentra en contradicción con el aprendizaje a-didáctico en que se fundamenta la teoría de Brousseau. Por ello, la parte del contrato didáctico que interesa a la Didáctica de las Matemáticas es la relacionada con la significación que para el alumno tiene un problema, así como el conocimiento que se persigue alcanzar a través de él.

Lógicamente, el contrato didáctico distribuye papeles diferentes a profesor y alumnos en relación con el saber, pues el profesor no solo sabe más, sino que además sabe de forma diferente que el alumno, sabe la relación que guardan unos objetos de conocimiento con otros, lo que es adecuado enseñar y lo que no es pertinente.

Desde una perspectiva teórica, el profesor debe hacer saber al alumno lo que desea que haga, de modo que este entre por si solo en el juego a partir de la manifestación de la consigna directa y clara de una situación concreta del conocimiento que se pretende que adquiera.

La dificultad proviene cuando el estudiante no acepta la responsabilidad de resolver el problema que plantea la situación, no existe devolución por su parte. Este hecho da lugar a una de las paradojas que se dan dentro de la relación didáctica: es necesario que el alumno realice determinadas acciones para obtener algo, pero el profesor no puede decirle ni indicarle como llegar a obtenerlo.

Ello implica la aparición de una segunda paradoja: el profesor persigue que el estudiante alcance el éxito en el aprendizaje obteniendo respuestas apropiadas a las situaciones planteadas, pero para ello no dispone de los medios cognitivos suficientes para lograrlo, pues el objeto de la enseñanza es que pueda disponer de ellos.

A este respecto, Brousseau (1984) nos dice:

> El contrato didáctico es a menudo insostenible. En cierta medida pone al profesor delante de una verdadera paradoja. Todo lo que él hace para que el alumno produzca los comportamientos que él espera, tiende a privar a éste de las condiciones necesarias para la comprensión y el aprendizaje de la noción buscada: si el maestro dice lo que quiere, no puede ya obtenerlo.
>
> Pero el alumno está también ante una paradoja: si acepta, que según el contrato, el maestro le enseñe los resultados, y no los establezca por si mismo, entonces no aprende matemáticas, no se las apropia, (luego si acepta este contrato de enseñanza, rechaza aprender). Aprender implica, para él, rechazar el contrato, pero también tomar a su cargo el problema (Brousseau, 1984, p. 9).

Como cabría esperar, alumnos y profesores adoptan determinadas estrategias y conductas, sustentadas en el contrato didáctico, con el fin de solventar las mencionadas contradicciones: los estudiantes demandan que las cuestiones que les haga el profesor sean tales que ellos dispongan previamente de las respuestas o las herramientas necesarias para encontrarlas; mientras, el profesor, en su afán de poner en manifiesto el éxito en el aprendizaje de los estudiantes, se deja persuadir por estos, de modo que obtiene las respuestas correctas a sus preguntas, teniendo la falsa sensación de que los alumnos aprenden, pero con el tiempo descubre que en realidad no han alcanzado el conocimiento esperado.

Estos comportamientos, cuando son llevados al extremo, dan lugar a una serie de fenómenos catalogados como efectos del contrato y que se resumen en la siguiente tabla:

TABLA 1.1.5.1. *Fenómenos relacionados con el disfuncionamiento del contrato didáctico.*

Efecto	Características
Topaze	Se produce cuando el profesor toma a su cargo y bajo su responsabilidad lo fundamental del trabajo. Si el alumno fracasa, el profesor proporciona información adicional para que el estudiante encuentre la respuesta la cual estará desprovista de significado, pues el problema se ha reducido produciéndose un pedida de su sentido.
Jourdain	Es una degeneración del Efecto Topaze. El profesor, para evitar el debate con el alumno sobre el conocimiento, y constatar eventualmente el fracaso de éste, admite y reconoce el indicio de un conocimiento sabio en los comportamientos o respuestas del alumno, aunque éstas hayan sido motivadas por causas y significaciones banales. (Brousseau, 1984, p. 11)
Analogía	Consiste en la sustitución del estudio de un concepto complejo y abstracto por el de otro análogo mas sencillo y concreto.
Desplazamiento Metacognitivo	Consiste en tomar como objeto de estudio un método satisfactorio para resolver un problema, perdiéndose de vista la situación inicial y el conocimiento que se pretendía enseñar.

Fuente: elaboración propia a partir de Brousseau, 1994

De lo visto hasta el momento, es fácil deducir que dentro de los contratos didácticos los hay buenos y favorables al aprendizaje y no tan buenos que distan bastante de la búsqueda de un desarrollo cognitivo adecuado basado en un aprendizaje significativo. El profesor es el encargado de realizar una vigilancia y gestión adecuada del contrato didáctico, alejándose de la concepción clásica en la que la responsabilidad de que el estudiante aprenda recae sobre él.

Desde el punto de vista constructivista, y de la teoría de situaciones en concreto, es necesario romper el contrato para que sea el alumno quien se haga cargo de su propio aprendizaje, construya el conocimiento y se posicione adecuadamente en la búsqueda de significaciones.

Por último, el contrato didáctico no necesariamente tiene que ser el mismo a lo largo de una situación didáctica, sino puede variar, evolucionar o dar lugar a uno completamente nuevo, permitiendo al alumno indagar sobre el sentido de las nuevas reglas y su significado.

1.2. Semiótica, representación y matemáticas.

Durante mucho tiempo, hasta la década de los 70, la enseñanza de las matemáticas se fundamentaba en principios generales derivados de la investigación psicológica, cuyo foco de atención eran únicamente los estudiantes, sin que se tomase en consideración la naturaleza de las matemáticas y su contenido, cuestiones estas que pasaban inadvertidas.

Debido a la generalidad de los objetos matemáticos, se podría catalogar la actividad matemática como una actividad fundamentalmente simbólica (D'Amore, 1998, 2001, 2003, 2004, 2006; Duval, 1993, 1994, 1995, 1996, 2000, 2003, 2004, 2005, 2007, 2008, 2011, 2012; Godino, 2002, 2003, 2012, 2014; Kaput, 1989a, 1989b,1992, 1998; Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2008, 2009, 2011, 2013, 2014a). El papel que juegan los símbolos y signos en el desarrollo del pensamiento matemático es determinante, y por ello, la semiótica y todos aquellos aspectos que forman parte de dicho campo, se han incorporado como ámbito de estudio en el área de la educación matemática, suscitando un interés creciente en los últimos años por considerarse que la consecución de un conocimiento profundo y la presencia de múltiples dificultades que experimentan los estudiantes, guardan una estrecha relación con las diferentes maneras de representar las ideas matemáticas. Destacan, entre otros, los trabajos de autores como Janvier (1987), Goldin y Janvier (1998), Hiebert y Carpenter (1992), Kaput (1987,1992, 1998), Duval (1993, 1994, 1995, 1996, 2000, 2003, 2005, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d), D'Amore (1998, 2001, 2003, 2004, 2006), Radford (1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2006b, 2009).

El aprendizaje de las matemáticas, introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico, pero sobre todo representativo: enunciados dados en las lenguas vernáculas, organizaciones visuales, gráficas, geométricas, icónicas, etc. son algunos de los medios más empleados en la formación, comunicación y transferencia del conocimiento matemático.

El uso del concepto de representación para caracterizar y definir los estados mentales y las actividades de los individuos es un factor destacable en el desarrollo reciente de la psicología cognitiva, pues dicha noción y los conceptos ligados o vinculados a ella, parecen resultar claves para entender, estudiar e interpretar el modo en que los sujetos conocen, aprenden y comprenden.

La psicología cognitiva sostiene que la mente humana emplea, trabaja y opera en base a un conjunto de representaciones mentales, algunas de las cuales constituyen un verdadero isomorfismo con elementos externos. Este conjunto de representaciones, que se aglutinan en nuestra mente, pueden agruparse en las siguientes tipologías:

- Representaciones que se forman en la mente sin haber recibido ningún estímulo del exterior y sin la necesidad de percibir ni interactuar con un referente externo. Son representaciones propiamente internas, intrínsecas y particulares de cada individuo.

- Representaciones que se forman en la mente a partir de la percepción y codificación de estímulos o referentes externos. En la formación de las mismas influyen las representaciones propiamente internas.

- Las representaciones consideradas como externas, producto de la descodificación y de la combinación de representaciones propiamente internas con representaciones activadas por estímulos exteriores.

La psicología cognitiva ha estudiado como la manipulación y coordinación de diversas representaciones constituye el pilar básico de la cognición, considerando la existencia, en la mente de cada sujeto, de un nivel neurobiológico (Nivel 1) del cual emergen los símbolos (Nivel 2), que nos permiten a su vez representar y manifestar algo (Nivel 3) (Font, 2000).

La función que desempeñan las imágenes, los dibujos, los símbolos, etc., en el tipo de comprensión que tiene lugar en el estudiante en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, ha sido objeto de estudio tanto desde el campo de la didáctica de las matemáticas como desde el campo de la psicología en las últimas décadas, pues las representaciones están estrechamente ligadas a los procesos cognitivos movilizados por los contenidos matemáticos, producto de la naturaleza abstracta de los mismos.

Muchas de estas investigaciones se han centrado, y se centran, en analizar y estudiar en cómo el incremento del número de conexiones que se pueden establecer entre diferentes sistemas de representación, está fuertemente relacionado y favorece la comprensión que tiene lugar en el estudiante en relación a los conceptos puestos en juego, siendo está más sólida y completa.

La terminología que habitualmente se emplea en este tipo de investigación, proviene, por un lado, de la lingüística, en donde las representaciones son consideradas como los significantes que ocupan el lugar de los significados, y por otro lado, de la semiótica, para la cual cuando un sujeto interpreta, emplea o comprende algún tipo de representación, se pone en funcionamiento una función que hace corresponder una expresión con un contenido, la función semiótica.

El matemático y psicólogo Skemp, en su obra *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (1980), sostiene que en los procesos de formación de los conceptos, los símbolos, término que emplea como sinónimo de representación, están conectados a una idea que es el significado que evocan, y juegan una parte esencial y fundamental en la integración del conocimiento existente, asimilación de las nuevas nociones, y en la reflexión sobre los propios esquemas conceptuales.

Distingue dos formas básicas para los símbolos matemáticos: símbolos visuales, donde incluye figuras geométricas, gráficas y figuras, y símbolos verbales como la lengua natural, el lenguaje algebraico, etc.

Skemp diferencia diez funciones que desempeñan los símbolos o representaciones. Posteriormente Castro y Castro (1997) las resumen y agrupan en siete. Estas diez funciones son:

- C*omunicación:* el hecho de que los objetos matemáticos sean puramente mentales, ya que no existen en la realidad, hace necesario el empleo de medios visibles, símbolos o representaciones que permitan el acceso a los mismos. Cuando hacemos uso de un determinado símbolo, lo que queremos no es llamar la atención sobre la representación misma sino sobre la idea ligada a ella.

- *Registro de conocimiento: e*ntre las características de las ideas está ser invisibles y perecederas. Por ellos se hace necesario un registro de las mismas que asegure la comunicación, a través de símbolos visuales y verbales.

- *La comunicación de nuevos conceptos*: los nuevos conceptos, de un orden superior a aquellos que el sujeto ya poseía, sólo pueden transmitirse a través de un conjunto adecuado de ejemplos, que en el caso de los conceptos matemáticos requiere la utilización de la representación.

- *Confección de clasificaciones múltiples correctas:* Un mismo objeto puede clasificarse de diversos modos y múltiples formas. Por la asignación de un símbolo somos capaces de concentrar nuestra atención sobre propiedades diferentes del mismo objeto. Cuanto mayor sea el número de símbolos que se puedan vincular a un objeto, mayor será el número de clasificaciones en que pueda intervenir y formar parte.

- *Explicación*: utilización de los símbolos cuya finalidad es la de capacitar a alguien para que pueda comprender algo que antes no había entendido.
- *Hacer posible la actividad reflexiva.* Esta actividad permite a los sujetos ser conscientes de sus propios conceptos, nociones y esquemas, así como percibir las relaciones y estructuras que se han formado en sus mentes, permitiéndoles manipularlas y trabajar con ellas de diversas maneras.
- *Ayuda a mostrar las estructuras.* Por la reflexión, los sujetos son conscientes de sus ideas y de la relación existente entre ellas, pero solo a través de las representaciones serán capaces de mostrar las estructuras conceptuales que han generado. La selección correcta de símbolos puede ser de gran ayuda para evocar los conceptos correctos, o un obstáculo si no se eligen adecuadamente.
- *Automatizar manipulaciones rutinarias.* El progreso, avance y desarrollo en matemáticas requiere que los procesos básicos y elementales se hagan de manera automática, de manera que se libere la atención del sujeto, pudiendo concentrarse en nuevas ideas. Esto se lleva a cabo separando el concepto del símbolo y llegando a manipular éste de acuerdo a prácticas adecuadamente formadas.
- *Recuperar información y comprensión:* empleo de los símbolos para recuperar conceptos y esquemas mentales de nuestra memoria.
- *Actividad mental creativa.* El uso de símbolos asociados a un concepto posibilita el control voluntario, la comunicación y el registro de conocimiento.

Para Tall y Vinner (1981), cuando percibimos, ya sea a través de la vista al observar algún sistema de representación, del oído cuando se menciona algún concepto o propiedad, o incluso a través del tacto cuando manipulamos material que nos facilite o permita la aprehensión de una noción matemática, no se evoca en nuestra mente una definición, sino que lo que se manifiesta es aquello que ellos denominan *concept image*:

> El concept image es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria. Aparecen en una fase posterior. Por ejemplo, cuando escuchamos la palabra "mesa", una figura de una cierta mesa puede evocarse en nuestra mente....Cuando escuchas la palabra "función", por otra parte, puedes evocar la expresión "$y = f(x)$", puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como $y= x^2$ o $y = \text{sen } x$, $y = \ln x$, etc. (Vinner,1991, p. 68).

Según Tall y Vinner, el *concepto-imagen* prefija y condiciona la manera en que entendemos un concepto matemático. Además, consideran que evolucionan con el tiempo, apoyándose en la Teoría de la Representación de Bruner para sostener dicha hipótesis.

Jerome Bruner (1979), en su interés por el estudio de las etapas progresivas y evolutivas del desarrollo intelectual en relación con la manera en que cada sujeto representa sus experiencias y realidad que le rodea, establece tres modos de representación mediante los cuales el ser humano exterioriza sus modelos mentales:

> Un sistema de representación es un conjunto de reglas mediante las cuales se puede conservar aquello experimentado en diferentes acontecimientos... En cierto sentido, es algo así como un "medium". Podemos representar algunos sucesos por (1) las acciones que requiere, (2) mediante una imagen , o (3) mediante palabras u otros símbolos . Habría una gran variedad de subtipos en cada uno de estos tres medios: el enactivo, el icónico y el simbólico. El desarrollo supone un dominio progresivo de estas tres formas de representación y de su traducción parcial de un sistema a otro (Bruner, 1979, p. 122-123).

Dichos sistemas de representación son el reflejo del desarrollo cognitivo de cada individuo, están íntimamente relacionados entre sí y pueden actuar en paralelo:

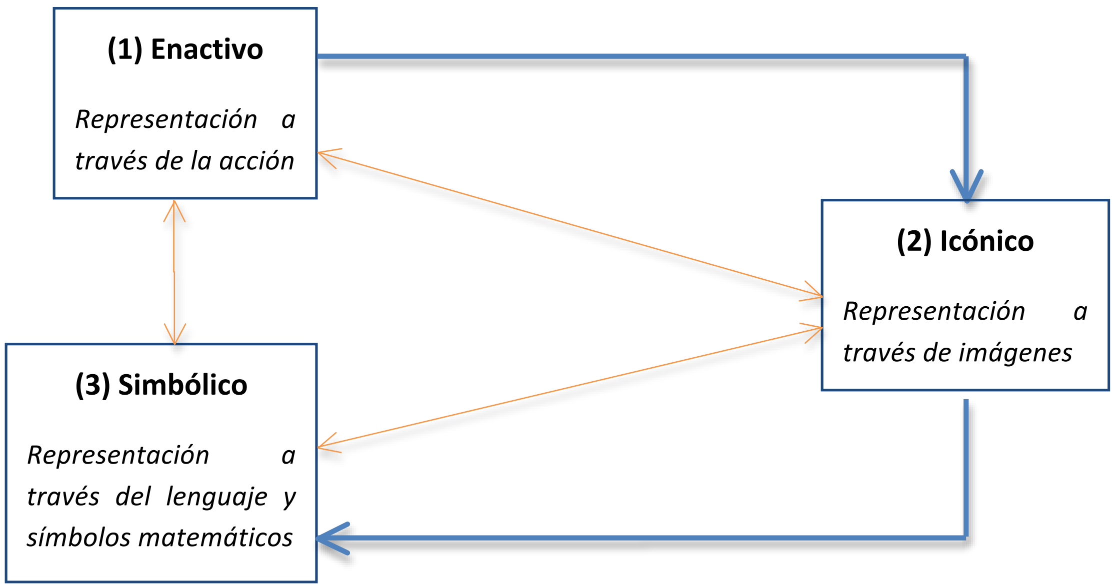


FIGURA 1.2.1. *Sistemas de representación y desarrollo cognitivo de Bruner*

La *representación enactiva* es, desde un punto de vista ontogenético, la primera forma de representación, manifestándose a lo largo de los primero años de vida. Es una manera de representar basada en el conocimiento de los objetos o acontecimientos por medio de la acción que los evocan.

La *representación icónica* supone un grado mayor de autonomía del pensamiento rigiéndose por principios de organización perceptiva, pues consiste en representar el mundo mediante imágenes o esquemas figurativos que guardan cierta similitud con el objeto representado pero independientes de la acción.

La *representación simbólica* es, para Bruner, el modo de representación más abstracto, manifestándose fundamentalmente de forma verbal a partir de palabras y símbolos cuya referencia o relación con el objeto representado es casi inexistente. Por ejemplo, el número seis se representaría icónicamente, con seis bolas, seis rayas, etc., mientras que simbólicamente basta con un 6.

A partir de los modelos de representación establecidos por Bruner, Tall (1994) amplia dicha clasificación, profundizando, así, en el papel que juega la visualización y simbolización en el desarrollo de los procesos cognitivos que tienen lugar en la aprehensión de las nociones matemáticas.

Para ello, considera que el sistema de representación simbólico puede dividirse en tres subcategorías, las cuales resaltan las características, propiedades y formas de tratamiento de los objetos matemáticos: categoría verbal, categoría proceptual y la categoría lógica.

De este modo, la clasificación queda de la siguiente manera:

- *Representación enactiva*: el objeto se manifiesta a través de modelos de acción y los resultados se validan por experiencias físicas.
- *Representación icónica*: el objeto se representa en dibujos, gráficas o figuras, se razona sobre los dibujos y figuras y se valida por visualizaciones.
- *Representación verbal*: el objeto se describe usando palabras, se razona considerando expresiones verbales y se valida por pruebas euclidianas.
- *Representación proceptual*: el objeto se representa en procesos, se razona sobre manipulaciones y cálculos numéricos, y la validación es por comprobación.
- *Representación lógica*: característica del pensamiento matemático avanzado. El objeto se define, las relaciones son deducidas o construidas lógicamente y la validación corresponde a la demostración formal.

Así, Tall (1996) sostiene que en la evolución de los *conceptos-imagen* estos sistemas de representación juegan un papel fundamental, apoyándose entre sí para producir estructuras y conexiones cada vez más completas y abstractas en el aprendizaje de las matemáticas.

Por su parte, Dufour-Janvier, Bednarz y Belanger (1987), proponen e identifican varias razones por las que es preciso emplear registros de representación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

- *Las representaciones son una parte inherente de las matemáticas.* No se puede pretender estudiar matemáticas sin hacer uso de representaciones. Para el matemático, estas representaciones son herramientas que posibilitan el tratamiento de los conceptos y se espera que el alumno perciba estas representaciones como las herramientas matemáticas que él será capaz de utilizar de manera apropiada en una situación dada.

  Además, según estos autores, ciertas representaciones están tan estrechamente asociadas a un concepto que es difícil ver cómo el concepto puede ser concebido sin ellas. Como veremos más adelante, esta es la causa de muchas de las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

- *Son múltiples las representaciones que guardan relación un concepto*. Existen varias representaciones diferentes que abarcan el mismo concepto o la misma estructura matemática. En la presentación de éstos, es de esperar que los alumnos sean capaces de comprender las propiedades que se manifiestan a través de las diversas representaciones, pudiendo, finalmente, extraer el conocimiento previsto.

- *Las representaciones se utilizan a nivel local para paliar ciertas dificultades*. Cuando se le proporciona una determinada tarea a un sujeto, el hecho de disponer de varias representaciones permite que este sea capaz de encontrar entre ellas una representación que le permita llevar a cabo la tarea. Igualmente, en el transcurso del aprendizaje de un concepto, un recurso es emplear representaciones que den sentido a lo que se estudia. Por ello, es necesario prestar atención, por un momento, a las dificultades que pueden aparecer en las relaciones que se quieren establecer .

- *Las representaciones tienen la intención de hacer las matemáticas más atractivas e interesantes*. Dichos autores se dan cuenta de que hay numerosas representaciones con las que los estudiantes se encuentran, y que la utilización de las mismas son muy diversas. También toman nota de que algunas de estas representaciones tienen como principal objetivo ser más accesibles a los estudiantes, mientras que otras se centran en el objeto matemático en sí.

Dichos autores se dan cuenta de que hay numerosas representaciones con las que los estudiantes se encuentran, y que la utilización de las mismas son muy diversas.

También toman nota de que algunas de estas representaciones tienen como principal objetivo ser lo más accesible a los estudiantes, mientras que otras se centran en el objeto matemático en sí.

Dentro de la línea del Pensamiento Matemático Avanzado, Dreyfus (1991) sostiene que "por una parte es frecuente que abstraigamos un concepto a partir de algunas representaciones; por otra, las representaciones son siempre manifestaciones de un concepto más abstracto" (Dreyfus, 1991, p. 38), considerando que entre el proceso de abstracción y el proceso de representación existe una relación de complementariedad, estableciéndose una relación de similitud entre esta y la relación existente entre las representaciones internas mediante los cuales el sujeto interactúa con las representaciones externas del conocimiento.

En este sentido, para Dreyfus (1991), dicha complementariedad debe estar al servicio de la Didáctica de las Matemáticas, distinguiendo las siguientes etapas en el aprendizaje matemático, considerando como motor principal las posibles transformaciones que se pueden dar entre sistemas de representación:

1. *Utilizar una única representación*: consiste en trabajar y operar con una única representación que haga referencia al concepto a aprender.
2. *Utilizar paralelamente varias representaciones*: consiste en trabajar y operar con dos o más representaciones que hagan referencia al concepto a aprender.
3. *Relacionar representaciones paralelas*: consiste en establecer conexiones entre los distintos sistemas de representación de modo

que se favorezca la transición hacia la abstracción en la siguiente etapa.

4. *Integrar las representaciones y pasar de una a otra con facilidad*: consiste en realizar una síntesis de los vínculos, relaciones características y propiedades comunes a todas las representaciones de manera que se logra alcanzar el concepto abstracto.

Sfard (1991), en sus estudios, de fuerte influencia piagetiana, sobre los problemas de comprensión en matemáticas, pone en evidencia la existencia de una naturaleza dual de los objetos matemáticos, guardando relación tanto con la imagen mental que tiene un estudiante de un concepto, como con la representación que se hace de él.

Las dos perspectivas que propone Sfard son:

- *Concepción operacional*: el concepto, noción o entidad matemática es considerada como una estructura dinámica y secuencial, producto de un proceso o que se identifica con el proceso en sí mismo. Se desarrolla en la primera fase de formación del concepto, y aunque necesaria, no es suficiente para su aprendizaje. Se apoya en representaciones.

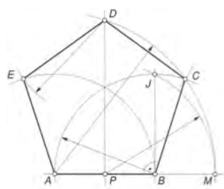
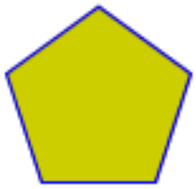
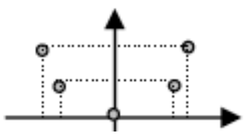
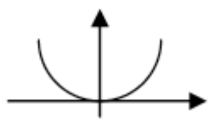
- *Concepción estructural*: el concepto, noción o entidad matemática es considerada como una estructura estática, integrada, que evoluciona de la concepción operacional y facilita el aprendizaje. Se apoya en imágenes mentales.

Sfard afirma que en

> el proceso de formación de un concepto, la concepción operacional con frecuencia es la primera que se desarrolla. Fuera de ella, la concepción estructural la iría envolviendo gradualmente. ... ciertas partes de la matemática las podemos observar con cierto grado de jerarquización, lo que es concebido de una forma puramente operacional en un nivel, se podría concebir estructuralmente en un nivel más alto (Sfard, 1989, p. 38).

En la siguiente tabla se muestra un ejemplo de las concepciones estructural y operacional de dos objetos matemáticos concretos:

TABLA 1.2.1. *Concepciones estructural y operacional*

Objeto	**Concepción operacional**	**Concepción estructural**
Pentágono regular	• Se traza el lado dado AB y se halla su mediatriz, obteniendo el punto P. Se levanta una perpendicular en B, y haciendo centro en dicho punto, con radio BA, se traza un arco que determina el punto J al cortar a la perpendicular trazada antes. • Con radio PJ y centro en P se traza un arco que corta en el punto M a la prolongación de AB. Con centro en A y radio AM se traza un arco que determina D sobre la mediatriz. • Por último, trazamos arcos con centros en D, A y B y radio igual al lado AB. Estos arcos, al cortarse entre sí, determinan los puntos C y E, vértices del polígono. Uniendo los puntos C, D y E con los extremos A y B se obtiene el **pentágono regular.** 	• Polígono de 5 lados de igual medida y ángulos congruentes entre si. • Visión global 
$f(x) = 5x^2$	• Proceso de elevar al cuadrado un número y multiplicarlo por cinco para obtener los valores de la variable dependiente. • Gráfica: punteo, identificando la correspondencia entre los valores de la variable independiente y la dependiente en unos ejes cartesianos. 	• Función cuadrática. Parábola, cóncava hacia arriba. • Visión global 

Fuente: Elaboración propia

El siguiente esquema recoge las principales características asociadas a los dos tipos de concepciones en relación con las representaciones y las imágenes mentales:

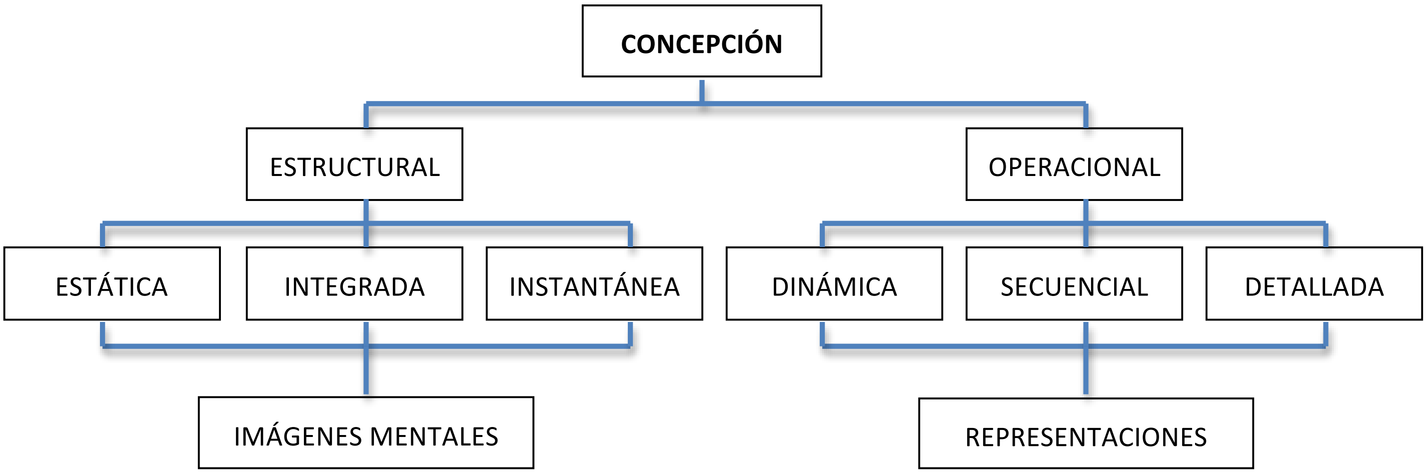


FIGURA 1.2.2. *Relación de la representación y la imagen mental.* (Sfrad, 1991, p.8)

Para Sfard (1991), la concepción operacional ocurre en un determinado contexto y por lo tanto solo existe una representación del concepto involucrado, mientras que en la concepción estructural se tiene la posibilidad de emplear y alternar diferentes representaciones en función del contexto en que nos encontremos.

Del mismo modo, sostiene que el paso de la concepción operacional a la estructural no puede darse sin la intervención de un mecanismo que consta de tres fases ya estudiadas por Piaget: interiorización, condensación y cosificación.

En la *interiorización*, el sujeto se familiariza con un determinado objeto a través del proceso vinculado a él, generando una representación interna, de tal manera que podrá evocarlo, simbolizarlo y describirlo.

A partir de la experiencia con diferentes tipos de representaciones mentales del proceso, se llega a la fase de *condensación* donde más que pensar en la secuencia de operaciones que tienen lugar en el proceso, se piensa en el producto final, manifestando ya, cierta agilidad para coordinar, relacionar y alternar diferentes representaciones del objeto.

Y por último, tiene lugar la *cosificación*, que en palabras de la propia Sfard, supone

> (...) un salto cuántico instantáneo: un proceso se solidifica en un objeto, en una estructura interna estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser unificadas semánticamente por este constructo, abstracto, puramente imaginario. La nueva entidad es rápidamente separada del proceso del cual es producto y comienza a dibujar su significado a partir del hecho de su existencia como un miembro de una cierta categoría. [...]Nuevos objetos matemáticos pueden ahora ser construidos a partir del presente... (Sfard, 1991, p. 19-20).

Sfard considera que los símbolos, los diagramas, las figuras, el lenguaje, etc., no tienen una función pura simplemente representacional, sino que forman parte de los objetos de pensamiento, siendo un componente más de los mismos.

Si nos centramos en los trabajos de Kaput (1987a, 1992, 1998), el cerebro humano, aunque muy limitado en su capacidad de procesamiento y memoria, es muy efectivo en el manejo de ideas y procesos muy complejos de carácter concreto y, aún es más notable y destacable, en los abstractos. Kaput sostiene que este potencial parece basarse en la interacción y relación entre dos fuentes de organización de la experiencia: las estructuras propias e innatas que forman parte de nuestro conocimiento a largo plazo, y nuestra capacidad de utilizar medios físicos de organización de la experiencia, que en el caso de la experiencia matemática, se basa en la utilización de lo que denomina, en un principio, sistemas de notación y posteriormente, sistemas de representación.

Kaput asegura que para dar sentido a las interacciones que tienen lugar entre los procesos que involucran a las estructuras mentales (*mundo de las operaciones mentales,* que siempre es hipotético) y a los procesos en los que intervienen los objetos físicos (*mundo de las operaciones físicas*, frecuentemente observable), es necesario emplear un lenguaje, pues, después de todo, el proceso de dar sentido a nuestra experiencia, requiere del uso de diferentes registros para su expresión, así como la necesidad de establecer interacciones entre ellos.

Para Kaput, la raíz de muchos de los fenómenos que acontecen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, están relacionados de manera directa con la representación y la simbolización, ya que forman parte del corazón del contenido matemático y de los procesos cognitivos que tiene lugar en su enseñanza y estudio, siendo evidente que la idea de representación es perpetua a las propias matemáticas (Kaput, 1987a)

> (...) la matemática estudia la representación de una estructura por otra, y gran parte del trabajo actual en matemática consiste en determinar, exactamente, qué estructura se preserva en cada representación. Cada representación es formalmente independiente de los símbolos externos utilizados, debido a que la propia estructura se trata como una abstracción o idealización (Kaput, 1987a, p. 20).

Los sistemas simbólicos y de representación en matemáticas son el producto de siglos de selección y evolución a lo largo de la historia de las matemáticas. Así, por ejemplo, el sistema decimal de numeración, sistema de representación que evoca la noción de número, es el resultado de una larga evolución histórica desde el uso de los palitos, cortes, guijarros, conchas, incisiones o muescas sobre un palo (registro icónico) que empleaba nuestros antecesores prehistóricos, y que aún siguen utilizando algunas tribus aisladas de la Amazonía.

Cuando nos encontramos ante un concepto matemático se empieza inicialmente a jugar con la imaginación, creando una aproximación del mismo, es decir una construcción interna, propia e individual, diferente para cada persona, y que constituye el primer paso para la construcción del concepto con la simbología correspondiente, dando lugar, finalmente, a una representación que hará más tangible y manejable la idea inicial.

Frecuentemente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, especialmente con nociones abstractas, existiendo una correspondencia, a menudo implícita, entre el objeto representante y el representado, pero esta correspondencia se da en un sentido más amplio que la simple referencia, ya que podemos afirmar que los sistemas de símbolos y los registros de representación permiten y ayudan a generalizar ideas, a utilizar dichas ideas en múltiples y diferentes situaciones, y a abrir la puerta a la transferencia del aprendizaje y la comprensión.

Steinbring (1991) señala cómo desde un punto de vista epistemológico, surge una compleja estructura sistémica relacional del conocimiento en el proceso real de la enseñanza y el aprendizaje de nuevos conocimientos, estableciendo conexión entre representaciones, y es lo que denomina triángulo epistemológico constituido por el objeto, el signo y el concepto:

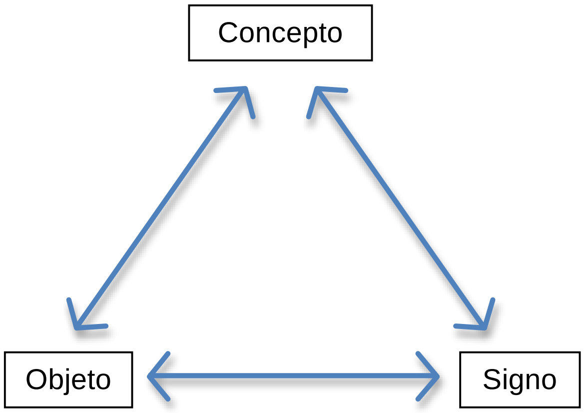


FIGURA 1.2.3. *Triángulo epistemológico de Steinbring*

Steinbring sostiene que cuando se hace uso de dicho triángulo en matemáticas, con el fin de analizar la estructura de los conceptos matemáticos, existe una diferencia importante con respecto a otras áreas de conocimiento, y es que la relación entre signo y objeto es variable: no hay una conexión predefinida entre un cierto signo y un objeto fijo, pues diferentes signos y representaciones en matemáticas pueden referirse a objetos de conocimiento muy diferentes:

> El signo en sí mismo no tiene significado matemático, sólo en su intención en algún contexto; y los elementos del nivel objeto sólo proporcionan significado matemático en la intención de mostrar una estructura relacional oculta en la situación de referencia. Es este significado de intención lo que dota a los signos matemáticos, así como a los aspectos de la situación de referencia, la capacidad de convertirse en elementos productivos en el triángulo epistemológico (Steinbring, 1991, p. 85).

En este sentido, y al igual que Kaput, Duval (1993, 1995) también afirma la existencia de dos mundos que interactúan, el de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas, distinguiendo entre lo que llama objetos matemáticos y sus representaciones, de modo que estas últimas tienen un papel indispensable en la aprehensión del objeto o concepto matemático.

Duval remarca la existencia de múltiples y diversos sistemas semióticos que hacen referencia a un mismo concepto matemático, cada uno de los cuales tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento.

Según el autor, poder movilizar y coordinar varios registros en el desarrollo de una misma tarea y en el aprendizaje de un concepto, o bien poder elegir un registro en vez de otro, es esencial en la actividad matemática.

En definitiva, podemos concluir que las representaciones son parte esencial de la estructura conceptual necesaria del análisis de los procesos de comprensión, aprendizaje y asignación de significados por parte de los estudiantes en la enseñanza de las matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998).

1.2.1. Conceptualización de Semiótica

Para empezar, es necesario ocuparse del concepto de semiótica. Según el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, la semiótica es la *Teoría general de los signos*, y se podría definir como el campo de estudio de los signos, ya sean de naturaleza lingüística o no lingüística, verbal o no verbal, así como de su estructura y la relación existente entre el significante y el significado de un determinado concepto.

Siguiendo a Radford (1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2006b, 2008, 2009, 2013), el campo de la semiótica, ofrece y proporciona nociones y herramientas que permiten dar cuenta de la complejidad discursiva, así como entender el papel cognitivo que desempeñan los signos y representaciones a través de los cuales piensan y actúan los sujetos en un contexto cultural, de manera que está muy bien situada para analizar y estudiar las interacciones entre aquellos.

1.2.1.1. La semiología Saussureana

El suizo Ferdinand de Saussure es considerado el padre de la semiología, disciplina que definió como "una ciencia que estudia la vida de los signos en el seno de la vida social" (Saussure, 1973, p. 12).

La presencia de sus ideas y de su pensamiento ha influido en el campo de la semiótica bajo diversos aspectos, dando lugar, a lo largo del siglo XX, a la aparición de múltiples estudios e investigaciones sobre los signos, la representación y la semiótica en general.

Saussure considera que el papel que juegan los signos va mucho más allá de la simple nomenclatura, y de la simple sustitución de unos elementos por otros. Para él, el signo está compuesto de dos elementos, de una díada, íntimamente relacionados entre sí y que se asocian en nuestra mente: el concepto (signifié, significado) y la representación sensorial (signifiant, significante). Además, el signo tiene significado cuando está relacionado con otros signos (Saussure, 1973).

Cierto es que Saussure desarrolló dicho campo a partir del estudio de la lengua y de la distinción que hace entre el lenguaje (de orden social) y la palabra (de orden subjetivo), pero al tratar de describir su estructura y descubrir su naturaleza, advirtió la existencia de otros sistemas de transmisión y comunicación, por lo que llegó a la conclusión de que debería crearse una ciencia que estudiase todos los posibles sistemas comunicativos sociales.

1.2.1.2. El enfoque semiótico de Peirce

El matemático y filósofo Charles Sanders Peirce, concibió la semiótica como la doctrina formal de los signos (Peirce, 1978), y a diferencia del punto de vista adoptado por Saussure, centrado en el significado de los signos en el contexto social, Peirce se situó bajo la perspectiva de cómo cada sujeto hace uso de los signos para construir ideas y conceptos nuevos.

La teoría del signo elaborada por Saussure no es tan sólida y completa como la de Peirce, que trabajó con mayor profundidad. Según Peirce, toda realidad puede ser comprendida a partir de tres categorías que permiten unificar aquello que es complejo y múltiple (Peirce, 1978, p. 1.354):

- *Firstness*: es todo cuanto tiene posibilidad de ser, sea real o imaginario. Es más una cualidad que no guarda ni establece una conexión con los demás aspectos o realidades que hay a su alrededor. Es, por ejemplo, cuando ojeamos un libro de texto y percibimos la presencia de gráficas, expresiones algebraicas, tablas, etc. sin que las asociemos a ningún concepto o noción matemática determinada.

- *Secondness*: se corresponde con lo que percibimos en el *Firstness*, pero siendo conscientes del objeto, realidad, noción o conocimiento que evoca. En el caso del ejemplo anterior, la gráfica que habíamos observado en el manual escolar, no es una simple gráfica, sino que hace referencia a una función lineal que pasas por el origen y tiene pendiente dos, por ejemplo.

- *Thirdness*: se puede definir como las leyes que rigen el funcionamiento de los fenómenos semióticos. Tres son los procesos que definen el *Thirdness*: *mediación*, en el sentido de que las entidades que forman parte de esta categoría son imprescindibles en la interrelación que se da entre los elementos que forman parte del *Firstness* y el *Secondness*; *transformación*, en tanto que su papel o función es la de interpretar o traducir una entidad semiótica en otra; *evolución*, pues dicho proceso da lugar a nuevas entidades del *Firstness*.

En este sentido Peirce (1978, p. 1.541, 1.891, 2.228, 2.230, 2.274, 2.303) definió el signo como algo que ocupa el lugar de otro elemento y que tiene algún significado para alguien, de modo que todo proceso de comprensión y aprendizaje implica una relación en la que se articulan e interaccionan tres elementos, aplicando la tríada mencionada en el párrafo anterior:

- *El representamen*: es el signo en sí mismo, que no debemos confundir con el objeto al que representa. Se trata de una realidad teórica o mental que no está vinculada a ningún otro elemento, por lo que se corresponde con el *Firstness*.
- *El objeto*: es el elemento, noción o concepto al que alude el representamen y se corresponde con el *Secondness*.
- *El interpretante*: es el producto del representamen en la mente de cada sujeto, es decir, es la idea del signo acerca del objeto. Este interpretante no debe ser confundido con el intérprete, que es el individuo que recibe el mensaje, ya que el interpretante es también un signo, pero es un signo más elaborado que el que le dio origen y que a su vez puede ser signo de otro objeto con otro interpretante, dando lugar a una semiosis infinita. Se corresponde con el *Thirdness*.

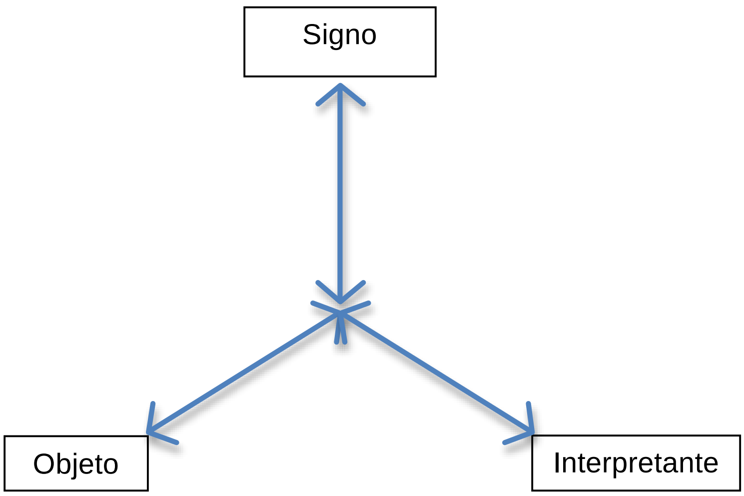


FIGURA 1.2.1.2.1. *Relación de Pierce*

En su conceptualización de la semiótica, Peirce (1978: 2.243-2.253) clasifica los signos en base a las relaciones internas que pueden tener lugar entre los elementos o partes de los mimos, dando lugar a tres tricotomías: relación del signo consigo mismo, con el objeto al cual alude y con el interpretante:

TABLA 1.2.1.2.1. *Tricotomía de Peirce*

Relación del signo consigo mismo	Relación del signo con el objeto al que alude	Relación del signo con el interpretante
Cualisigno: el representamen es una cualidad	*Icono*: el signo mantiene con su objeto una relación de similitud o semejanza.	*Remático o inmediato*: se establece una relación de hecho e inmediata. El interpretante nos da poca información del objeto
Sinsigno: el representamen es un objeto en concreto	*Índice*: son signos cuya relación con sus objetos consiste en una correspondencia física real con el referente	*Dicente o dinámico*: indica relación de posibilidad. El interpretante proporciona varias características del objeto.
Legisigno: el representamen es un acuerdo social establecido como norma	*Símbolo*: el signo no tiene ninguna relación directa con el objeto, sino que esta relación se da por acuerdo social	*De razón*: se establece una relación argumentativa.

Fuente: Elaboración propia a partir de Peirce, 1978

Según la concepción de semiótica de Peirce, presentada como una semiótica cognoscitiva, se llega a la comprensión y a la significación a través de la percepción, ocupándose y prestando atención tanto a signos verbales como no verbales, gráficos, escritos, etc.

1.2.1.3. Piaget y la Función Semiótica

Jean Piaget, en sus trabajos sobre la formación del símbolo y el papel que juega en el desarrollo cognitivo del niño, defiende que cuando los niños pueden recordar hechos y objetos pueden comenzar a formar y utilizar representaciones de cosas que no están en el entorno presente:

> La representación nace, pues de la unión de “significantes” que permiten evocar los objetos ausentes por medio de un juego de significaciones que los relaciona con los elementos presentes. Esta conexión específica entre “significantes” y “significados” constituye lo característico de una función nueva que sobrepasa a la actividad “sensorio-motora” y que se puede denominar de manera amplia “función simbólica” (Piaget, 1968, p. 377-378).

Para Piaget, existen dos tipos de imágenes que permiten al niño evocar aquello que no encuentra en su radio perceptivo:

- *Imágenes reproductoras*: permiten representar aquellos objetos o sucesos conocidos por el sujeto. Se dividen en:
    - *Estáticas*: representan un objeto inmóvil (un cuadrado, un heptágono, etc.)
    - *Cinéticas*: representan un movimiento (una rotación, un desplazamiento en alguna dirección, etc.)
    - *De transformación*: representan cambio de forma y posición (desarrollo de un cubo, división de una circunferencia en sectores, etc.)
- *Imágenes anticipadoras*: permiten representar objetos o sucesos que no han sido percibidos con anterioridad. Se dividen en:
    - *Cinéticos*: representan un movimiento nunca percibido.
    - *De transformación*: representan un cambio nuevo (imaginar el resultado de plegar un folio cuatro veces)

Hacia el año y medio o dos, es decir, al finalizar el periodo que denomina sensomotor, los niños comienzan a poder asociar y representar un “significado” cualquiera (objeto, concepto, acontecimiento, etc.) a través de un “significante” (imagen, lenguaje, gesto simbólico, etc.). Ésta función será fundamental para la evolución de posteriores conductas, así como para la adquisición del lenguaje.

Piaget defiende que, antes del segundo año, no tiene lugar en el niño una conducta o acción que implique la evocación de un objeto ausente, ya que los mecanismos senso-motores ignoran la representación. A partir del segundo año de vida, el niño comienza a diferenciar entre significado y significante, mostrando claramente la adquisición de *la función semiótica o simbólica*, la cual le permite representar lo real a través de "significantes" distintos y que un “significante” pueda referirse a varios “significados”. Para Piaget, la función semiótica es herramienta esencial para la constitución de la representación conceptual, ya que es aquella que permite representar algo por medio de un significante diferenciado, y que engendra dos clases de instrumentos: los *símbolos*, significantes motivados, construidos por el sujeto, y que guardan alguna semejanza con sus significados; y los *signos*, arbitrarios o convencionales, necesariamente colectivos, recibidos por el canal de la imitación.

En la etapa de las operaciones concretas los niños pueden pensar operacionalmente, es decir, pueden utilizar símbolos para llevar a cabo operaciones.

En la etapa de las operaciones formales los alumnos, ya adolescentes, son capaces de manejar abstracciones y aparece en ellos una nueva flexibilidad y complejidad de pensamiento, siendo capaces de razonar a partir de principios conocidos, construyendo ellos mismos nuevas ideas o preguntas, consideran distintos puntos de vistas según criterios variables, y de pensar sobre el proceso de pensamiento, cuestionando y analizando con mayor profundidad. De manera que, en esta etapa y haciendo referencia al asunto que nos concierne, pensar sobre ideas matemáticas nos lleva a representarlas interna o externamente, y esta representación tiene que ser tal que permita a la mente operar sobre y con ellas (Papalia, 2005).

Luego, atendiendo a las principales ideas piagetianas, y siguiendo a Chamorro (2005a, 2005b), las operaciones de simbolización constituyen un puente entre las formas elementales de expresión y las formas más evolucionadas del pensamiento matemático, de manera que existe una formalización gradual que caracteriza el paso de un nivel a otro de evolución. El comienzo de la simbolización se liga, al principio, a operaciones concretas aunque acompañadas de ciertas formas del lenguaje (de 2 a 7 años); se da a continuación, un cierto paso hacia la formalización con la coordinación entre acciones y operaciones concretas, y se va abstrayendo un cierto tipo de simbolización relacionada con los objetos dados (8 a 11 años); es a partir de los 12 años cuando esa simbolización se libera de las interferencias de los objetos. El simbolismo se hace más complejo y equilibrado con interdependencia de la formalización señalada.

1.2.1.4. Semiótica y noética de Duval

Duval (1993, 1995, 1996, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2011, 2012), llama semiosis a la actividad ligada a la producción de representaciones la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas, y noesis a la actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto.

Para Duval, un sistema semiótico, es decir un sistema de signos, y un sistema de representación son cosas diferentes, de modo que para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, debe poder permitir las tres acciones siguientes (Duval, 1993, 1995):

1. *Identificación*: consiste en el reconocimiento de las representaciones que se presentan ante el sujeto, lo que Implica una selección de rasgos en el contenido a representar.

2. *Tratamiento:* consiste en la transformación de una representación en otra del mismo sistema.

3. *Conversión:* consiste en la transformación de una representación en una representación de otro sistema semiótico.

El tratamiento y la conversión serán tratados con más detenimiento más adelante.

En palabras del propio Duval, “no hay noesis sin semiosis. Es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis” (Duval, 1993, p. 14)

Luego, la adquisición conceptual de un objeto, en su caso matemático, solo puede darse mediante la adquisición de una representación. La noética está basada en dos características y hechos fundamentales, que son:

- El uso de más de una representación es propio del pensamiento humano.
- La creación y desarrollo de registros de representación nuevos, es signo de progreso cognitivo.

Estas consideraciones señalan que la línea entre la semiosis y la noesis es mucho más estrecha y mucho mas profunda de lo que se puede pensar en un principio, y que existe un fuerte enlace entre ambas en lo que al funcionamiento cognitivo del pensamiento se refiere, ya que no solo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica forma parte de las características necesarias para garantizar el primer paso hacia la noética.

1.2.2. El concepto de representación

El término *representación* es frecuentemente empleado en dos áreas bien diferenciadas pero a la vez conectadas como son la Psicología y la Didáctica de la Matemática, para describir, por un lado, las formas de expresión empleadas por los sujetos, y por otro, la actividad cognitiva y comprensión que subyacen en el uso y manipulación de las mismas.

Una representación es una construcción que hace referencia a un objeto o realidad determinada, así como a algunas de sus características y propiedades, permitiendo a los sujetos interaccionar y operar con ellos sin necesidad de su presencia física.

El concepto de representación, siguiendo a Kaput (1987a, 1992, 1998), incluye dos realidades diferenciadas entre las cuales existe una correspondencia de la cual se derivan diversas dificultades en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas: el mundo que representa y el mundo representado:

> El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados (Kaput, 1989, p. 23).

Por lo tanto, para dicho autor, cualquier especificación particular de una representación debe describir las siguientes cinco entidades: el mundo representado, el mundo que representa, qué aspectos del mundo representado se representan, qué aspectos del mundo que representa son representados y la relación entre los dos mundos (Kaput, 1987a).

Mientras que, para Piaget,

> (...) lo característico de la representación es rebasar lo inmediato, aumentando las dimensiones en el espacio y en el tiempo del campo de la adaptación, o sea evocar lo que sobrepasa al terreno perceptivo y motor. Quien dice representación, dice por consiguiente reunión de un significante que permite la evocación de un significado procurado por el pensamiento (Piaget, 1968, p. 371).

En matemáticas, las representaciones han sido entendidas en sentido amplio como todos aquellos instrumentos (gráficos, figuras, tablas, esquemas, signos, etc.) que hacen presentes los conceptos y nociones, de modo que los sujetos puedan interactuar con ellos, permitiéndoles asignar significados y comprender las estructuras matemáticas de manera significativa, de donde emana su interés didáctico.

De acuerdo con Goldín y Janvier (1998), el término representación y la expresión sistema de representación, en conexión con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tienen las siguientes interpretaciones:

1. Una situación física, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concreción de ideas matemáticas.
2. Una materialización lingüística, o un sistema lingüístico mediante el que se plantea un problema o se discute un contenido matemático,

con énfasis en las características sintácticas y en la estructura semántica.

3. Un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que puede representar situaciones mediante símbolos o mediante un sistema de símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas, incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.
4. Una configuración cognitiva interna, individual, o un sistema complejo de tales configuraciones, inferida a partir de la conducta o la introspección, que describe algunos aspectos de los procesos del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

Como podemos observar, la noción de representación es bastante compleja y encierra múltiples significados, desde el simple instrumento que sustituye a un elemento, ya sea objeto concreto, concepto o noción abstracta, hasta aquel que hace referencia a esquemas mentales con los que los sujetos trabajan y piensan matemáticas.

Lo que es claro, siguiendo a Radford (1998), es que aunque el concepto de representación resulta conflictivo, se ha utilizado en la investigación en Didáctica de la Matemática de manera productiva, ya que, debido a su uso obligado, producto de que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción, en ellas subyacen la conceptualización y comprensión de las ideas matemáticas.

1.2.2.1. Tipos de representaciones

De manera general, las representaciones pueden clasificarse en dos grandes categorías. La primera de ellas es la concerniente a las representaciones que cada sujeto construye en su mente de forma particular y por lo tanto son intrínsecas a él; mientras que a la segunda pertenecen todas aquellas representaciones que son extrínsecas al individuo y que posibilitan la interacción, percepción y manipulación de las primeras. Ambas tienen carácter sistémico y se influyen mutuamente en la actividad cognitiva.

Siguiendo el trabajo de Hiebert y Carpenter (1992), podemos diferenciar entre representaciones internas, es decir, aquellas que erige la mente, pertenecen al campo de lo cognitivo y a través de las cuales cada individuo da sentido a los fenómenos explicando los conceptos matemáticos, y las representaciones externas, aquellas que aparecen cuando queremos comunicar las ideas matemáticas:

> Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (…) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que se permita a la mente operar sobre ellas (Hiebert y Carpenter, 1992, P. 66).

Las representaciones externas serían todos aquellos objetos de conocimiento, diagramas, tablas, símbolos, gráficos, etc. que nos permiten acceder a los objetos y conceptos matemáticos para, así, poder trabajar con ellos.

El trabajo de Hiebert y Carpenter se centra en dos supuestos extraídos del trabajo desarrollado por la ciencia cognitiva.

Por un lado, asumen la relación existente entre las representaciones externas e internas, creyendo razonable suponer que la naturaleza de las representaciones internas se ve influida y limitada por la situación externa que se representa.

Lo importante aquí, según dichos autores, es que, al examinar y preguntarnos sobre la representación y su uso en las matemáticas, debemos tener en cuenta tanto las representaciones externas como las internas, ya que la representación externa con la que el estudiante interactúa dará lugar a diferentes formas en que el alumno represente la relación u objeto internamente. Por el contrario, la forma en que un estudiante genera una representación externa, revela como ha representado la información internamente.

Por otro lado, asumen que las representaciones internas pueden estar relacionadas o conectadas entre sí de manera útil. Estudian la construcción del conocimiento matemático dentro del marco teórico de las redes formadas por representaciones internas generadas por la manipulación de representaciones externas. Este aspecto es muy importante para el trabajo didáctico que seguirá.

Estos autores proponen que cuando la relación entre las representaciones internas de las ideas se construye, produce redes de conocimiento. Actualmente no es posible especificar la naturaleza exacta de las redes, pero creen que es útil pensar en dichas redes en términos de dos metáforas:

- Las redes pueden estructurarse como jerarquías verticales en las que existen unas representaciones por encima de otras.
- Una red puede ser estructurada como una tela de araña, en donde los nodos pueden ser considerados como los objetos de información que representan, y las discusiones entre ellos como las conexiones o relaciones. Todos los nodos de la red están conectados en última instancia, por lo que es posible viajar entre ellos al seguir las conexiones establecidas. Algunos nodos, sin embargo, se conectan más directamente que otros. Las redes pueden ser muy simples, asemejándose a cadenas lineales, o pueden ser muy complejas, con muchas conexiones que emanan de cada nodo.

Estos aspectos y la relación entre las representaciones internas y externas son considerados de gran importancia en la comprensión del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y deben ser explotadas para obtener mejores resultados de aprendizaje.

Los distintos sujetos presentan comprensiones diferentes sobre un mismo concepto o estructura matemática, debido a que sus representaciones mentales tienen contenidos diferentes. La relación entre las representaciones internas y las externas es clave en el sentido de los fenómenos de comprensión.

De acuerdo con Martí y Pozo (2000), uno de los retos más importantes y significativos dentro del ámbito de la enseñanza, es la comprensión y uso de diferentes sistemas externos de representación, que clasifican de la siguiente manera:

- Representaciones externas permanentes: son representaciones directamente perceptibles y que perduran en el tiempo haciendo uso de un soporte material. Es el caso de dibujos, gráficas, tablas, la lengua natural escrita, etc. Estas, a su vez, se dividen en analógicas (ilustraciones, imágenes), códigos arbitrarios (números, lenguaje algebraico y sistemas de escritura) y analógicos de relación o parámetro (gráficas cartesianas, diagramas).

- Representaciones externas no permanentes: son representaciones perceptibles pero que no perduran en el tiempo. Este es el caso del lenguaje oral y el lenguaje de signos.

Además, Martí y Pozo (2000) señalan algunas particularidades propias de los sistemas externos de representación:

- *Los sistemas externos de representación existen como objetos independientes de su creador*: existen sin la necesidad de la presencia de aquel que las construyo o generó.

- *Las representaciones externas, al ser, además de representaciones, marcas gráficas que exigen un soporte material determinado, poseen cierta permanencia*; este hecho permite la manipulación, transmisión y acceso.

- *Las representaciones externas presentan independencia temporal, pero no espacial*.

- *Constituyen sistemas organizados*.

Las representaciones internas y externas están estrechamente relacionadas, de manera que cuando un estudiante utiliza una representación externa que hace referencia a un determinado objeto matemático, está poniendo de manifiesto cómo ha construido o está construyendo esa idea en su mente, de manera que un análisis de los mismos nos permitirá vislumbrar los procesos del pensamiento que han tenido lugar en el alumno y el modo en que da sentido a los objetos matemáticos.

A este respecto, Duval (1993) nos dice que

> (...) desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como interiorización de las representaciones externas; la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto. De manera recíproca, las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás (Duval, 1993, p. 174).

Luego, en función del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante trabaje e interactúe en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un determinado concepto matemático, se elaborarán distintas representaciones internas del mismo.

Para caracterizar y clasificar las representaciones, Duval recurre a las siguientes dos oposiciones: consciente/no consciente e interna/externa (Duval 1995, 1996).

La oposición entre consciente y no consciente es la oposición entre lo que aparece y es perceptible por un sujeto, y por tanto presenta un carácter intencional que es esencial desde un punto de vista cognitivo, y lo que escapa por completo a la percepción del individuo. La oposición entre interna y externa es la oposición entre aquello que no es observable ni puede ser expuesto públicamente y lo que si lo es.

Las representaciones externas son, por naturaleza, representaciones semióticas generadas por un sistema semiótico, es decir, por un sistema de signos, y son accesibles a todos aquellos sujetos que sean capaces de interpretar el sistema semiótico empleado.

Las representaciones internas, por su parte, son las representaciones que pertenecen a un único sujeto y no son compartidas con ningún otro a través de la producción de una representación externa.

Los cruces de estas dos oposiciones permiten distinguir tres grandes tipos de representaciones para Duval (1995):

TABLA 1.2.2.1.1. *Tipos de representaciones según Duval*

	Interna	Externa
Consciente	***Mental*** Función de objetivación	***Semiótica*** Triple función: objetivación, expresión y tratamiento intencional
No consciente	***Computacional*** Función de tratamiento automático o cuasi-instantáneo	

Fuente: elaboración propia a partir de Duval, 1995

Las representaciones *semióticas* son representaciones conscientes y externas a la vez, permitiendo observar un objeto a través de la percepción de un conjunto de estímulos (caracteres, puntos, trazos, etc.) que tiene valor de significantes.

Por lo general, para Duval existen dos clases principales de representaciones semióticas en función de si conservan o no algunas de las propiedades del objeto al cual representan: *analógicas* (figuras, imágenes, etc.) y *no analógicas* (la lengua natural, el lenguaje algébrico, etc.). El principal interés de esta distinción, en base a un criterio cuestionable de similitud, es llamar la atención sobre la diversidad y la heterogeneidad de los registros de representación.

Duval asegura que los diferentes registros de representación no sólo difieren en la naturaleza de sus significados, sino también en el sistema de reglas que permiten su asociación y en el número de relaciones que se pueden establecer en dicha asociación. Estas dos últimas diferencias son más importantes que la similitud, porque son la base de la flexibilidad y el poder de una gran variedad de registros, ya que no sólo permiten realizar tratamientos equivalentes de menor complejidad y que requieren menos esfuerzo si se realiza un cambio de registro adecuado, sino que también permiten superar las limitaciones inherentes a cada registro en el desempeño de una actividad compleja.

Siguiendo con la clasificación de Duval, las representaciones *mentales* son todas aquellas que permiten visualizar un objeto en ausencia de elementos perceptibles. Por lo general se identifican con las imágenes mentales particulares de cada sujeto correspondiente a la percepción. Para Duval, estas representaciones, cubren un área más amplia que la referencia a conceptos e ideas, haciendo referencia también a las creencias y proyecciones más difusas que reflejan el conocimiento, así como a los valores que comparte un individuo con su entorno o con un grupo particular.

Uno de los grandes problemas de la psicología, según Duval, concierne a la naturaleza de la relación existente entre las representaciones mentales (internas) y las representaciones semióticas (externas), ya que generalmente se reduce el uso de representaciones semióticas a la función de expresión y se subordina al funcionamiento de las representaciones mentales, siendo en realidad una relación más compleja, en la que no existe una correspondencia estricta y directa entre ambas representaciones.

Para tal afirmación, Duval se apoya en los siguientes argumentos (Duval, 1995):

- En primer lugar, puede haber una gran diferencia entre las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que produce y construye para expresar las primeras.

- Las representaciones mentales requieren la interiorización de diferentes registros de representación semiótica, es decir, que la formación de nuevas representaciones mentales va acompañada por la producción y adquisición de representación semiótica.

- Las representaciones semióticas presentan un mayor grado de libertad que las representaciones mentales, pues las primeras pueden comunicar varios contenidos al mismo tiempo mientras que las segundas solo pueden referirse a un único contenido.

Finalmente, las representaciones *computacionales* son todas aquellas cuyos significantes, de naturaleza homogénea, no requieren de la vista del objeto, y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes a otros. Estas representaciones traducen la información externa a un sistema bajo una forma que hace que sea accesible y recuperable.

A pesar de la existencia de varios tipos de representaciones y de investigaciones que las estudian y cuestionan, su relevancia en la descripción y explicación de procesos cognitivos es descuidada a menudo.

1.2.3. Teoría de referencia: Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Una característica propia y específica de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para asimilarlos y aprehenderlos en toda su complejidad, lo que implica, desde una perspectiva cognitiva, que para la total comprensión de las nociones matemáticas es preciso emplear y coordinar más de un sistema de representación, como han puesto de manifiesto distintos investigadores (D'Amore, 1998, 2001, 2003, 2004, 2006; Duval, 1993, 1994, 1995, 1996, 2000, 2003, 2005, 2012; Godino, 2002, 2003; Janvier, 1987; Kaput, 1989a, 1989b,1992, 1998; Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006ª, 2013).

Los signos y representaciones en matemáticas no tienen como función primordial la de comunicar o evocar algún objeto ausente, sino que el papel fundamental, y verdaderamente importante, lo constituyen las transformaciones de unas representaciones en otras, ya que permiten obtener nuevas informaciones y extraer nuevos conocimientos de los objetos, ideas y conceptos representados (Duval 2006a).

Cuando un alumno se enfrenta a una determinada tarea matemática y desde el mismo momento en que lee un enunciado, va a ser necesario, para su resolución, el pasar de una representación a otra e incluso trabajar simultáneamente con más de un registro, como es el caso de la geometría, donde es necesario movilizar conjuntamente dos registros de representación (Duval, 1993, 1995 1996, 2003, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d; Duval y Godin, 2005).

A este respecto, y desde un punto de vista didáctico, surgen las siguientes cuestiones: ¿Qué papel juegan las distintas representaciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?¿Cómo se aprende a cambiar de registro? ¿Qué tipo de transformaciones se pueden efectuar y que suponen cognitivamente?, pero sobre todo y fundamentalmente, ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone?

Estas preguntas son consideradas por Raymond Duval, pionero en el tratamiento de estas cuestiones, como el núcleo del aprendizaje y comprensión de las matemáticas, además de ser el origen de dificultades y bloqueos del alumno.

Duval entiende por representación semiótica "la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (Duval, 1995, p. 175).

Puesto que cada representación es incompleta con respecto al concepto que representa, pues hace referencia a unas determinadas propiedades del objeto, y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado, se hace necesaria la interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático que se pretende adquirir.

Así, por ejemplo, para referirnos al objeto circunferencia podemos utilizar los siguientes registros representación:

- *Registro de la Lengua Natural (RLN):* El registro de la lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones nominales, permitiendo introducir la terminología que se requiere para su articulación:

  Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistante de otro fijo, llamado centro; esta distancia se denomina radio.

- *Registro Figural-Icónico (RFI):* Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados:

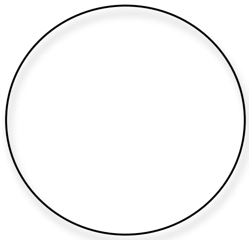


FIGURA 1.2.3.1. *Representación figural de la circunferencia*

- *Registro Numérico (RN):* Las representaciones de tipo numérico ofrecen gran nivel de concreción, resultado de las posibilidades de manipulación que brinda el sistema decimal de numeración, lo que permite apreciar características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así cómo vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas y geométricas:

Datos Circunferencia: C[1] (2,1) y P[2] (0,5)

Datos circunferencia: C (5,9) y r[3]=3

También permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades como pueden ser la distributiva, conmutativa, etc., necesarias para la resolución de diversas tareas.

- *Registro Tabular (RT):* Los datos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas que responden a un ordenamiento lógico. Permite visualizar la información de manera global, establecer relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ella se recogen, así como descubrir propiedades y características del objeto de conocimiento representado:

[1] C: Centro de la circunferencia
[2] P: Punto por el que pasa la circunferencia
[3] r: Radio de la circunferencia

__TABLA 1.2.3.1.__ La circunferencia a través del registro tabular

Centro		Radio	Ecuación
X	Y		
0	3	2	
0	-3	2	
4	0	2	
-4	0	2	

- Registro Algebraico (RA): Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa, como puede ser longitud del radio, centro, posición en el plano, etc., en el caso de la circunferencia:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

- Registro Geométrico (RGe): El registro geométrico admite operaciones de reconfiguración y manipulación que facilitan la comprensión y el establecimiento de conexiones entre diferentes objetos. A través de la representación geométrica es posible apreciar características de la circunferencia desde la perspectiva de su construcción:

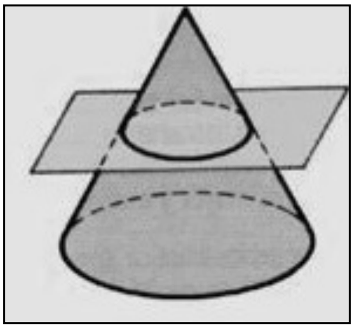


__FIGURA 1.2.3.2.__ Representación geométrica de la circunferencia

- Registro Gráfico (RGr): El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, etc; La representación gráfica-cartesiana hace patentes diversos elementos (puntos de corte con los ejes, ejes de simetría, posición en el plano, curvatura, etc.) que permiten apreciar el papel de los parámetros:

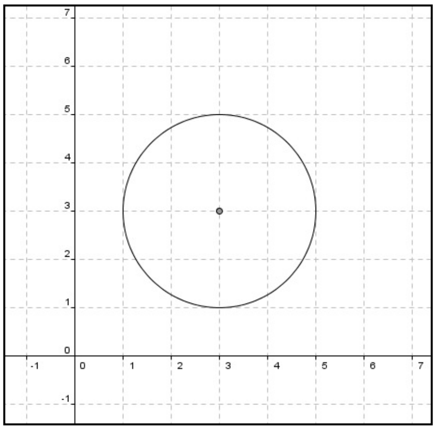


FIGURA 1.2.3.3. *Representación cartesiana de la circunferencia*

¿Qué tienen de particular cada una de estas representaciones? pues cada una de las representaciones que hacen referencia a la circunferencia, lo hacen también a unas determinadas propiedades de la misma, es decir, cada registro de representación resalta unas características y propiedades determinadas del objeto matemático, obteniendo como resultado una configuración del concepto en toda su extensión y profundidad.

Lo que sigue son algunas de las diferentes representaciones que hacen referencia al concepto de número cuatro, representaciones sin las cuales no podríamos evocar la noción de número y que nos permiten hacer distintas operaciones de naturaleza matemática: comparar, emparejar, repartir, unir, etc.:

4	**IV**	**oooo**
cuatro	**48/12**	**2+2**

Que el alumno identifique, tanto en este ejemplo como en el ejemplo de la circunferencia, estas representaciones como correspondientes al mismo objeto matemático es un objetivo de aprendizaje que debemos perseguir.

Duval clasifica los diferentes registros que pueden ser movilizados en procesos matemáticos de la manera siguiente:

TABLA 1.2.3.2. *Clasificación de registros según Duval*

	Representación discursiva	**Representación no discursiva**
Registros multifuncionales	• Lenguaje natural • Teoremas, definiciones, descripciones,... • Razonamiento: argumentaciones, conjeturas, deducciones,...	• Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D) • Aprehensión operativa y perceptiva[4] • Construcción con instrumentos • Modelización de estructuras
Registros monofuncionales	• Sistemas de notación: numérica (decimal, exponencial, fraccionaria,...), algebraica, simbólica, funcional,... • Cálculo literal, algebraico, numérico, ...	• Gráficos cartesianos • Cambio de sistemas de coordenadas • Interpolación • extrapolación

Fuente: elaboración propia a partir de Chamorro, 2007

En primer lugar, distingue entre representaciones discursivas, es decir, aquellas que hacen uso de la lengua y que permiten enunciar teoremas, definiciones, proposiciones, razonar, inferir, etc. y las representaciones no discursivas que permiten trabajar visualmente, reconfigurar, organizar y mostrar formas y figuras.

Distingue, también, entre registros monofuncionales, es decir, aquellos en los que la mayoría de procesos son algoritmos debido a su

[4] De acuerdo con el modelo de Duval, pueden distinguirse tres tipos de aprehensiones:
- Aprehensión perceptiva: Se caracteriza por la identificación simple de una identificación.
- Aprehensión discursiva: Se trata de la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas).
- Aprehensión operativa: Se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Puede ser de *cambio figural* o de *reconfiguración*.

carácter técnico y formal, y registros multifuncionales que no pueden algoritmizarse y son utilizados en diversos contextos sociales y culturales.

Toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro para su comprensión. Es por ello que los objetos matemáticos no deben ser confundidos nunca con su representación. Esto da lugar a lo que Duval denomina la paradoja de la comprensión en matemáticas, y que es donde la mayoría de los alumnos encuentran problemas.

Cuando un estudiante entra en contacto con un objeto matemático, en realidad lo está haciendo con una de sus representaciones semióticas en particular, ya que no puede tener acceso directo a él, y solamente a través de tales representaciones es aprehensible un objeto matemático. Esto pone de manifiesto el por qué el tratamiento y el avance del conocimiento matemático conduce al estudio y desarrollo de los sistemas de representación.

Para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y se sea capaz de, primero, reconocer el mismo objeto de conocimiento a través de representaciones cuyos contenidos no tienen relación entre sí, y, segundo, reconocer dos objetos a través de dos representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque dependen del mismo sistema de representación, es esencial poder movilizar diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, lenguaje funcional, lenguaje algebraico, gráfico, figuras, etc.) y desarrollar la coordinación entre ellos. (Duval ,2006b)

Por este motivo, para Duval, la transformación de registros y la capacidad de pasar de un registro de representación a otro ocupa un lugar importante y determinante en el aprendizaje de las matemáticas.

Duval sostiene que existen tres tipos de actividades cognitivas relacionadas con las representaciones semióticas que son fundamentales para que tenga lugar una adecuada comprensión (Duval 1993, 1996, 2006b):

- *Formación de representaciones:* consiste en la selección de un conjunto de signos, caracteres, rasgos o parámetros propios de un sistema semiótico (unidades significantes) de acuerdo con las posibilidades de representación del registro, de modo que representen las características principales de un objeto. Formamos representaciones cada vez que construimos un esquema, una imagen, una gráfica, etc.

- *Tratamientos*: transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada o formulada; es decir, no se cambia de sistemas de signos en la cual está expresada la representación de partida. Se trata de una operación intrínseca del registro. Los tratamientos que se utilizan en una actividad matemática son distintos en función del sistema de representación semiótico usado. Pongamos un ejemplo:

$$\frac{15}{210}=\frac{15}{30}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0.5=0.5\times 10^{-1}$$

son representaciones distintas (escritura fraccionaria, escritura decimal y escritura exponencial) de un número dentro del mismo registro semiótico, el lenguaje aritmético.

En un ejercicio geométrico como puede ser, *Calcula el área de la parte coloreada del siguiente cuadrado:*

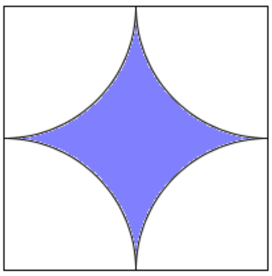


FIGURA 1.2.3.4. *Área de la parte coloreada*

requiere de manipulaciones, operaciones de reconfiguración, en definitiva, de transformaciones visuales dentro del mismo registro para su resolución:

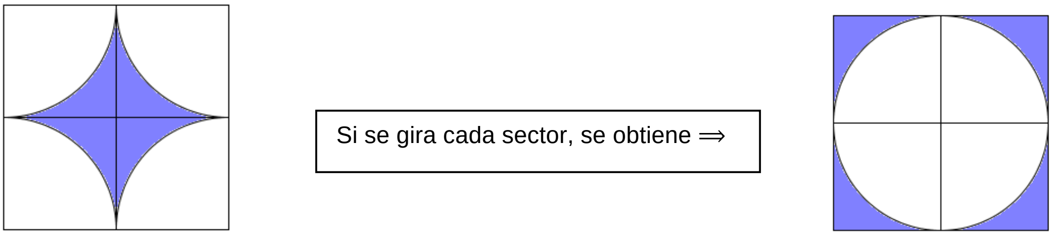


FIGURA 1.2.3.5. *Tratamiento dentro del registro geométrico*

Luego, el área pedida es:

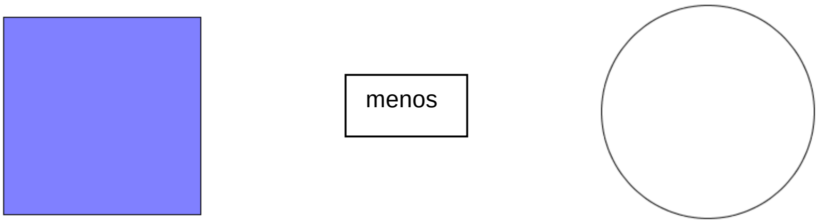


FIGURA 1.2.3.6. *Figuras que forman la configuración inicial*

A la vista de estos ejemplos, se llega a la conclusión de que los tratamientos que se utilizan en una actividad matemática son distintos en función del sistema de representación semiótico usado.

Según Duval (Duval, 1994, 2003, 2005, 2006b), cuando el razonamiento requiere de la ayuda del lenguaje natural, el uso de figuras geométricas dadas o construidas mediante instrumentos con el fin de manipularlas o reconfigurarlas, es decir, cuando un tratamiento necesita ser guiado por un registro multifuncional, genera la aparición de errores y dificultades en el estudiante.

- *Conversiones:* transformación de una representación en una representación de otro registro semiótico. Ambas representaciones hacen referencia al mismo objeto matemático pero ponen de manifiesto distintas propiedades y características del mismo. Pongamos un ejemplo:

  Un tren AVE acaba de salir de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí con una velocidad de 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías salió de nuestra ciudad hace dos horas y media y lleva una velocidad de 50 km/h. Suponiendo que circulen por vías paralelas ¿Cuándo de cruzarán y a qué distancia de nuestra ciudad lo harán?

En un problema como este pueden efectuarse las siguientes conversiones entre registros:

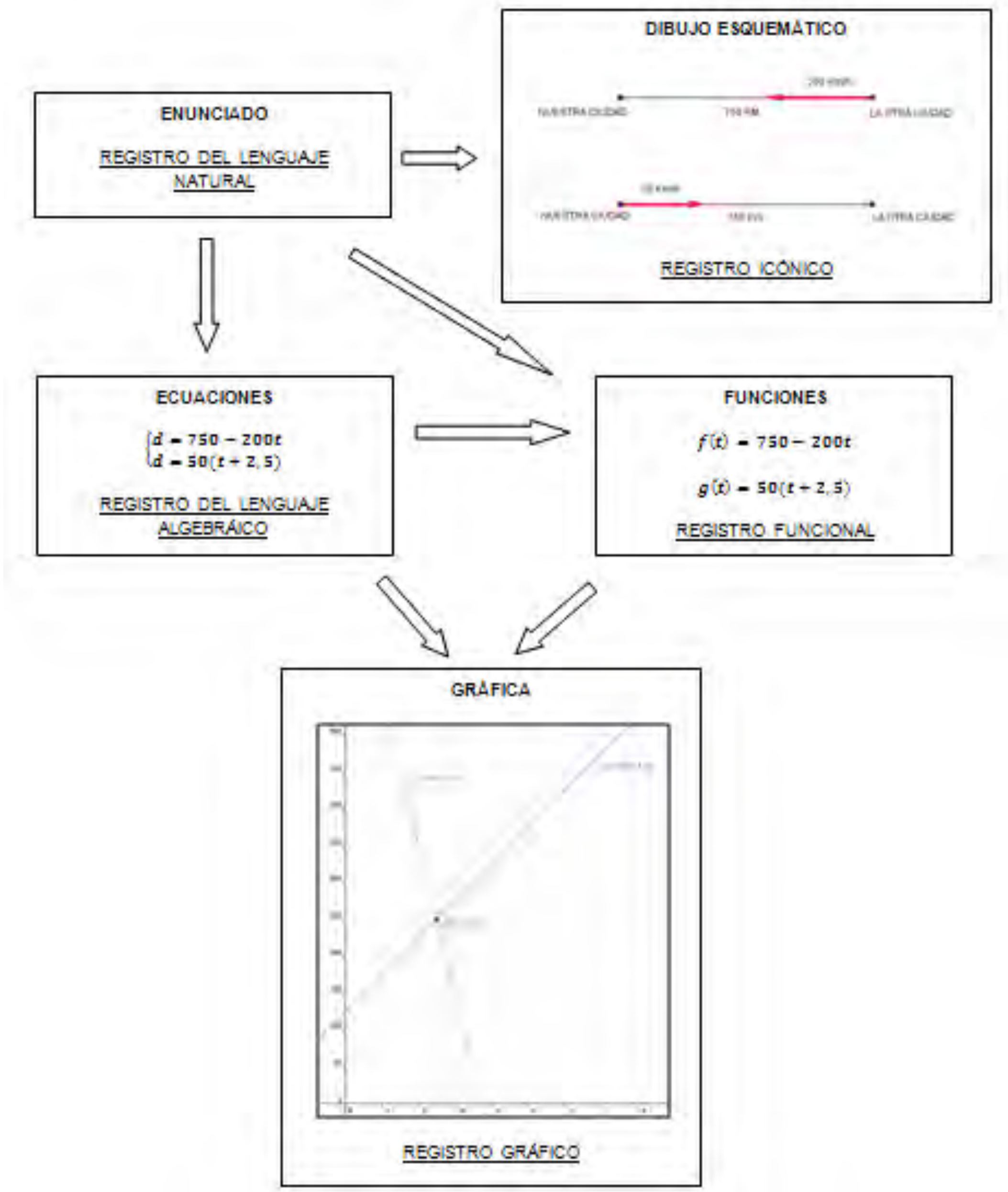


FIGURA 1.2.3.7. *Esquema cambios de conversión*

Cada registro de representación resalta características y propiedades diferentes de un objeto matemático. La manera como se representa en matemáticas permite manipular y procesar cada una de esas representaciones, de forma tal que los distintos modos de representación expresen, a su vez, las propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos, al mismo tiempo que facilitan el empleo de determinados tratamientos.

Desde el punto de vista cognitivo, la conversión de representaciones es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, y no debe identificarse con otros dos procesos próximos a ella: la *interpretación*, que no implica una conversión entre representaciones, sino que está más bien fundamentada en la analogía y cambio de marco teórico, y la *codificación*, la cual consiste en la transformación término a término de una representación a otra sin tener en cuenta el contenido del concepto representado (una codificación es una conversión, pero no toda conversión es una codificación).

Tres son los principales motivos que explican y fundamentan la necesidad de utilizar varios y diversos registros de representación en el desarrollo del pensamiento matemático (Duval, 1993, 1995):

- Economía del tratamiento: hay determinadas características y propiedades de un objeto matemático o noción que unos registros de representación ponen de manifiesto con más claridad que otros, además de permitir efectuar tratamientos de una manera más fácil y potente.
- Complementariedad de los sistemas: este aspecto está relacionado con las posibilidades propias del registro semiótico, esto es, cada una de las representaciones es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa, de modo que no son las mismas características de un contenido las que se representan en cada registro de representación empleado.
- Formación de conceptos: relacionado con el punto anterior, para tener un conocimiento completo de las nociones y objetos matemáticos es necesario manejar y coordinar distintos registros de representación, los cuales se complementan. La comprensión y formación de nociones se apoya en la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación; esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la naturalidad de la actividad cognitiva de conversión.

La conversión entre registros no se da de manera inmediata y espontanea, pues requiere poner en correspondencia las representaciones que intervienen, la de partida y la de llegada. La no congruencia entre representaciones, es decir, cuando no se da la condición de correspondencia semántica entre las unidades significantes de cada registro, genera importantes dificultades a tener en cuenta, y Duval lo señala como causa fundamental de errores profundos en los alumnos, lo que la convierte en el mayor problema para la coordinación y conversión entre registros.

Según Duval (1995, 1996), dos representaciones son congruentes cuando se cumplen los tres requisitos siguientes:

- Tiene una semántica de los elementos significantes: es decir, a cada una de las unidades significantes simples de cada una de las dos representaciones comparadas se le puede asignar un único significado definido dentro del registro semiótico en el cual se expresa.
- Presentan univocidad semántica terminal: o sea, a cada unidad significante elemental del registro en el cual está expresada la representación inicial, sólo le corresponde una única unidad significante elemental en el registro semiótico en el cual está expresada la representación final. En otras palabras, existe una relación uno a uno entre los elementos que componen la representación inicial y aquellos que componen la representación final.
- Las unidades significantes correspondientes a cada una de las dos representaciones comparadas están organizadas de tal manera que las unidades en correspondencia semántica (con el mismo significado) son aprehendidas según el mismo orden en las dos representaciones. Es decir, este criterio exige correspondencia en el orden de arreglo de las unidades que componen cada una de las representaciones. Este criterio es muy importante cuando se comparan frases y fórmulas literales.

Álgunos estudios (Bagni, 2004; Duval, 2006; Hitt, 1996, 2001, Ismenia, 1998) han demostrado que para los alumnos presenta mayor dificultad el paso de una representación gráfica a una algebraica, el paso del lenguaje natural al registro gráfico y el paso del registro del lenguaje natural al registro algebraico. Ello es debido a que los estudiantes no son capaces de establecer conexiones entre los datos que proporcionan cada sistema de representación, porque suponen un salto semiótico importante.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos de no congruencia que se dan en las conversiones mencionadas en el párrafo anterior según el estudio de Chamorro (2007):

- Conversión entre el registro del lenguaje natural y el registro algebraico.

  Esta conversión proporciona numerosos ejemplos de no congruencia, lo que se suele explicar por la falta de correspondencia entre las unidades significantes de cada registro. Así, el paso de la expresión en lengua natural al lenguaje algebraico, como en el ejemplo que sigue[5]

  La suma de los productos de un entero por dos números enteros

$$\boxed{a \cdot b + a \cdot c}$$

  obtiene un bajo porcentaje de aciertos entre los alumnos de primero y segundo de E.S.O (Chamorro, 2007).

- Conversión entre el registro de la lengua natural y el registro gráfico.

  Este tipo de conversión ofrece buenos ejemplos de no congruencia, lo que viene acompañado de índices de fracaso más elevados.

Por ejemplo, según algunos estudios realizados, el paso de la expresión

El conjunto de puntos cuya abscisa y ordenada tiene igual signo

a la gráfica correspondiente

[5] Véanse las experiencias llevadas a cabo por Duval en Semiosis Et Pensée Humanine, 55.

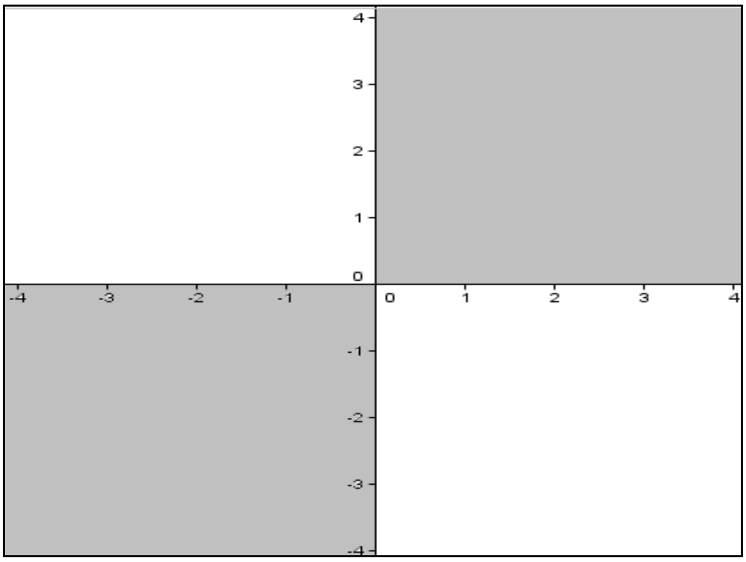


FIGURA 1.2.3.8. *Representación ejes cartesianos*

alcanza un porcentaje de acierto, entre los estudiantes, próximo al 60%, debido a que tal conversión es congruente; sin embargo, el paso de la gráfica a la expresión en lenguaje algebraico $x \cdot y > 0$ y posterior conversión al lenguaje natural obtiene una tasa de éxito del 25%, como consecuencia de la no existencia de correspondencia funcional y por tanto tratarse de una conversión no congruente (Chamorro, 2007).

- Conversión entre el registro gráfico cartesiano y el registro algebraico.

La regla cartesiana para construir una gráfica a partir de una ecuación o inecuación consiste en asociar a cada par ordenado de números un punto situado en un plano coordenado. Así, según Duval, el trazado de gráficas de funciones lineales, por parte del alumno, parece no presentar dificultades notables. No obstante, si se invierte la dirección del cambio de registro, desaparece la operatividad y eficacia de la regla, ya que se pierde la correspondencia entre las unidades significantes de cada registro:

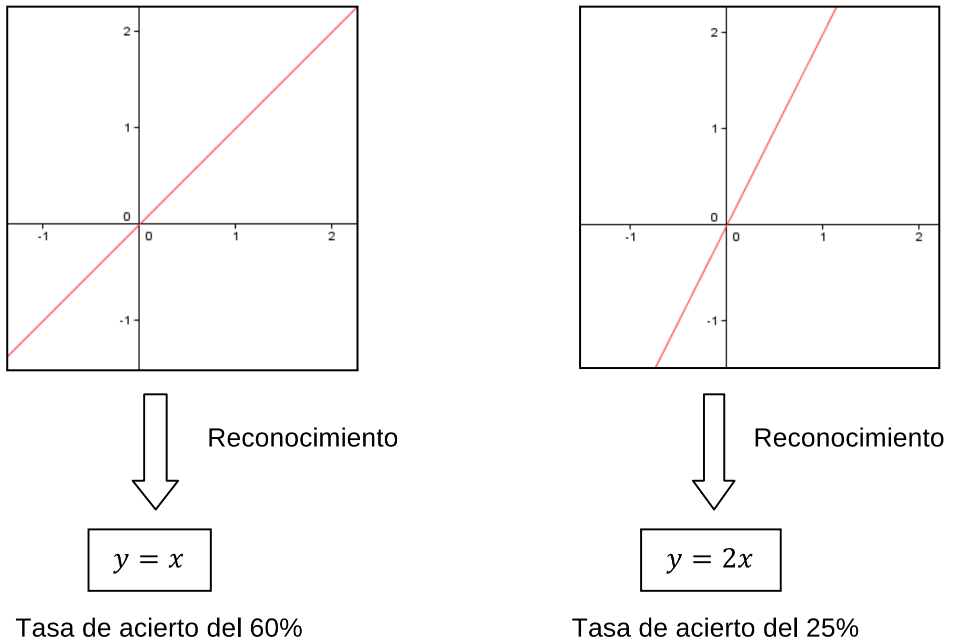


FIGURA 1.2.3.9. *Tasa de acierto en la conversión del gráfico al algebraico*

Duval afirma que

> La conversión no es en sí misma fuente de incomprensiones, pero el hecho de que éstas se produzcan dependen de dos fenómenos. Por una parte, la variabilidad del carácter congruente o no congruente de la conversión entre dos representaciones del mismo objeto. Por otra, la dirección del conversión (Duval, 2006b, p. 121).

Para Duval, lo verdaderamente importante en la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, intentando evitar así, el establecimiento y creación de obstáculos en el progreso de la comprensión y el aprendizaje del alumno.

1.2.4. Trabajos en Didáctica de las Matemáticas sobre la representación

Han sido diversos los investigadores que como Duval han realizado estudios en lo concerniente a los registros de representación y el papel que juegan los cambios y conversiones entre los diferentes sistemas de representación en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Todas ellas parecen coincidir en la existencia de una estrecha relación entre la comprensión que los estudiantes poseen de un determinado objeto matemático y el número de conexiones que son capaces de establecer entre los diferentes tipos de representación.

A continuación, se presentan algunos los enfoques e investigaciones que han adquirido una mayor relevancia en la relación entre el aprendizaje y funcionamiento cognitivo de los sujetos y la coordinación y manejo de diversos registros de representación.

1.2.4.1. El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, marco teórico desarrollado por el profesor e investigador en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada Juan Díaz Godino junto a diversos colaboradores, asigna un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos que se ponen en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2002, 2003, 2012, 2014; Godino, Batanero y Font, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009).

Dicho enfoque analiza los procesos de instrucción matemática desde un punto de vista ontológico y semiótico de la cognición matemática, a partir un triple perspectiva (epistemológica, cognitiva e instruccional), con el fin de estudiar los patrones de interacción didáctica y así poder identificar los posibles conflictos semióticos que aparecen en los alumnos (Godino, 2002, 2003, 2014; Godino, Batanero y Font, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006), entendiendo por conflicto semiótico

> (...) la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas (Godino, 2002, p. 252).

Los tres constructos teóricos entorno a los cuales se configura la EOS para llevar acabo el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son (Godino, 2002, 2003, 2014):

- *La teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos:*

  Este marco teórico toma como punto de partida la idea de objeto matemático como emergente de un sistema de prácticas, y la relatividad del conocimiento respecto de las personas y las instituciones, formuladas, ambas ideas, en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard.

  Dicha emergencia implica considerar dos niveles de objetos que surgen de la actividad matemática: primero están aquellos objetos que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, etc.) y en un segundo lugar están aquellos objetos que surgen de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior.

  Ello otorga un papel esencial a la actividad y práctica matemática, a las acciones que los sujetos desempeñan a la hora de enfrentarse a ciertas tareas problemáticas y a los tipos de significados que surgen en el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, en función de que se den en un contexto personal (tres tipos de significados: global, declarado y logrado) o en un contexto institucional (cuatro tipos de significados: referencial, pretendido, implementado y evaluado), entendiendo por institución aquel colectivo involucrado en una misma clase de situaciones problemáticas.

- *Teoría de las configuraciones didácticas*:

  Esta teoría modeliza la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso multidimensional, identificando en un proceso de instrucción matemática seis componentes o dimensiones que interactúan entre sí, cada una de las cuales se puede modelizar como un proceso estocástico (Godino, 2002, 2003, 2014):

  - *Dimensión epistémica* (significados institucionales): distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementado (problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentos).

- *Dimensión docente* (funciones del profesor)*:* distribución de las funciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
- *Dimensión discente* (funciones de los alumnos): distribución de las funciones o roles desempeñados por los estudiantes.
- *Dimensión cognitiva* (significados personales): cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.
- *Dimensión emocional* (sentimientos y afectos): distribución temporal de los estados emocionales de los alumnos en relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio.
- *Dimensión mediacional* (recursos materiales): distribución de los recursos tecnológicos utilizados (manipulativos, libros, apuntes, software, etc.).

• *La relación entre objetos. Funciones semióticas*:

Se trata del aspecto de la EOS que guarda mayor relación con la presente investigación.

La función semiótica es la función del signo, la cual permite poner en relieve los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y la comprensión de un objeto por parte de un sujeto, en donde en diversas ocasiones pueden aparecer diversos conflictos. Font, Godino y D'Amore (2007) describen la idea de función semiótica como correspondencia entre un antecedente y un consecuente.

La Teoría de las Funciones Semióticas distingue seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos.

Las funciones semióticas, en el modelo semiótico que propone la EOS para describir la cognición matemática, pueden clasificarse en tres tipos: Referenciales (un objeto se pone en lugar de otro), operacionales (un objeto uso a otros como instrumento) y componencial (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos).

Tanto los conceptos como las situaciones-problemas vienen expresados por el lenguaje, mediante el que se describen sus propiedades características. Palabras, símbolos, gráficos, e incluso objetos físicos, desempeñan frecuentemente el papel de "sistemas de representación", esto es, reemplazan otra cosa o uno de sus aspectos. Este es el uso referencial del lenguaje. Pero en nuestra modelización, este papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: los mismos objetos abstractos- en consonancia con la semiótica de Peirce- las situaciones-problemas, acciones, argumentos, pueden ser también signos de otras entidades (Godino, 2003, p. 32-33).

Con esto, Godino nos indica cómo las funciones semióticas tienen en cuenta la naturaleza esencial y fundamentalmente relacional de las matemáticas, generalizando y ampliando los límites de la noción de representación, convirtiéndose así en instrumentos que facilitan y permiten el estudio de la relación entre el uso y manipulación de diferente sistemas de representación y el pensamiento y proceso cognitivo que lo acompaña, característico de la práctica matemática.

En la EOS la comprensión no es únicamente entendida como proceso mental, sino que adquiere un sentido más amplio, englobando también a la competencia que tienen los estudiantes para resolver y enfrentarse a tareas matemáticas, de modo que desde el mismo momento en que un alumno es capaz de emplear de manera competente un determinado objeto o noción matemática en prácticas diferentes, el estudiante habrá comprendido e interiorizado dicho conocimiento.

Y en esta comprensión, las representaciones juegan una función fundamental, existiendo una relación de reciprocidad entre ambos conceptos, pues, por un lado, el tipo de representación que se emplee dará lugar a una determinada comprensión en el alumno, y por otro, el tipo de comprensión propio del alumno va a condicionar el tipo de representación a utilizar (Contreras y Ordoñez, 2006; Font, 2000).

1.2.4.2. Representaciones en la Teoría de los campos conceptuales

La teoría cognitivista de los Campos Conceptuales desarrollada por Gérard Vergnaud, pretende proporcionar un marco coherente para el estudio del desarrollo del aprendizaje y el funcionamiento cognitivo del sujeto. Su principal finalidad es la de permitir comprender las filiaciones y rupturas entre conocimientos que tienen lugar en el individuo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por este motivo es de interés para la didáctica.

No se trata de una teoría específica de las matemáticas, pero fue elaborada primeramente para dar cuenta de procesos de conceptualización de estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del álgebra (Vergnaud ,1990), estudiando las dificultades de los estudiantes en esas áreas, pareciéndole evidente que los conflictos que presentan y se manifiestan no son los mismos en un campo conceptual que en otro.

La Teoría de los Campos Conceptuales tiene una clara inspiración piagetiana, considerando como pilares fundamentales elementos esenciales de las teorías de Piaget, tales como las nociones de esquema, invariante operatorio e invariante relacional, admitiendo que el conocimiento matemático deriva de la adaptación del individuo, mediante los procesos de asimilación y acomodación inherentes a la equilibración.

Del mismo modo, Vergnaud reconoce la influencia de Vygotsky en el desarrollo de su teoría, como se manifiesta en la importancia concedida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización que tiene lugar en el proceso de asimilación de un campo conceptual por los estudiantes(Vergnaud, 1998).

Según Vergnaud (1990), un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño. En este sentido, podemos distinguir dos clases de situaciones (Vergnaud, 1990):

- Clases de situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.

- Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión, de exploración, de intentos etc., que le conducen al éxito o al fracaso.

El concepto de *esquema es* interesante en ambas situaciones, pero no funciona del mismo modo en ambos casos.

Un *esquema* es una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. El funcionamiento cognitivo del sujeto ante una situación reposa sobre un repertorio de *esquemas* disponibles formados con anterioridad, pero también de representaciones, con lo que el lenguaje y los sistemas de signos y representación juegan un papel fundamental en la acomodación (Vergnaud, 1998).

Así, en la primera clase de situaciones se van a observar conductas automatizadas, organizadas por un esquema único; y en las segundas, se va a observar el boceto sucesivo de varios esquemas que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados y recombinados (este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos y de la representación).

A los conocimientos contenidos en los esquemas se les designa como *concepto-en-acto* y *teorema-en-acto*:

> Un concepto-en-acto es una categoría conceptual (objeto, predicado, condición,...) a menudo implícita en la acción, que se tiene por pertinente, y que permite tratar una o varias informaciones, así como situarlas en el lugar correspondiente en una relación prestándose a razonamiento[...]El teorema-en-acto es una proposición tenida por verdadera en la realidad, a menudo implícita en la acción, que permite el razonamiento y la acción. Es un objeto de pensamiento que puede hacerse explícito a través de una forma lingüística, y que es susceptible de ser verdadero o falso. Un teorema-en-acto puede ser falso y ser considerado como verdadero (Vergnaud, 1990, p. 151).

También reciben el nombre de invariantes operatorios y pueden ser de tres tipos: proposiciones, función proposicional o argumentos.

Todo esto conduce a Vergnaud a considerar que un concepto es una tripleta formada por:

$$C(S,I,L)$$

S: es el con junto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencias).

I: es conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado)

L: es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

Es decir, es el conjunto formado por el lenguaje natural, gráficos, diagramas, dibujos, trazos etc. que se emplean para indicar esos invariantes, y que, consecuentemente, representan las situaciones que dan sentido al concepto, manifestando, a su vez, los procedimientos que conciernen al proceso de entendimiento y solución del problema.

En el estudio del desarrollo y el funcionamiento de un concepto, en el curso del aprendizaje o durante su utilización, se hace necesario considerar estos tres planos a la vez.

Vergnaud emplea el término representación, dentro de esta tripleta, no solo como si fuese un sistema simbólico o de signos que significan algo para cada individuo, sino que también son aquellos elementos que nos permiten y nos ofrecen la posibilidad de “prever acciones futuras con el fin de llegar a algún resultado positivo o evitar algún efecto negativo, funcionando como sustitutas de la realidad y por lo tanto están constituidas de teoremas-en-acto” (vergnaud, 1990, p. 160).

Así, un campo conceptual, según Vergnaud, está constituido:

- Desde un punto de vista práctico, por el conjunto de las situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y representaciones simbólicas que están en estrecha conexión. La ventaja de esta aproximación, mediante las situaciones, es la de permitir generar una clasificación que reposa sobre el análisis de las tareas cognitivas y en los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas.
- Desde el punto de vista teórico, por el conjunto de conceptos y teoremas que contribuyen al dominio de esta situaciones, aunque sea de forma implícita.

Algunos de los campos conceptuales mencionado por Vergnaud son el de las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, el de las magnitudes espaciales, longitud, superficie y volumen y el de la lógica de clase.

En definitiva, para Vergnaud, la construcción del conocimiento se basa en la construcción de diversas y múltiples representaciones mentales que son homomórficas a la realidad en algunos aspectos y que nacen de la relación entre las situaciones y los esquemas, considerándolas, por un lado, pragmáticas y operacionales, y por otro, discursivas, simbólicas y teóricas (Vergnaud, 1990, 1998).

1.2.4.3. Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) y los objetos Ostensivos y No-Ostensivos

La Teoría Antropológica de la Didáctica considera la actividad matemática como una actividad humana más, y se refiere a los conceptos matemáticos u organizaciones matemáticas empleando el término praxeología matemática, el cual hace referencia a los dos bloques que la componen, uno práctico u otro teórico, dándoles la misma importancia:

- Bloque práctico o *"saber hacer"*: este bloque se compone a su vez de *Tipos de Tareas* y *Técnicas*. Toda tarea se realiza por la puesta en marcha de una técnica, la cuál, a su vez, tiene que estar justificada por una *Tecnología*.

- Bloque teórico. “saber”: este bloque comprende la Tecnología (Técnica+ Logos) y la Teoría. La Tecnología, que justifica el uso de una determinada Técnica, debe estar justificada a su vez por una Teoría.

Esta teoría defiende el planteamiento de cuestiones suficientemente ricas (cuestiones generatrices) de manera que el saber aparece en el proceso de intentar responder dichas cuestiones, las cuales tienen que cumplir varios requisitos: que la respuesta no sea inmediata y que nos permita iniciar el estudio.

Para realizar las tareas *t* del tipo *T*, es necesario emplear una *técnica* τ basada en cierta *tecnología* θ, que justifica, aclara y permite reproducir la técnica τ. Esta tecnología, a su vez, se sostiene en una *teoría* Θ. Se obtiene así una cuádrupla que se llama *praxeología* $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

$[T/\tau]$ representa la *praxis* (lo que hay que hacer y cómo hacerlo) o la *práctica* (si nos centramos más en la tarea *T*) o el *saber-hacer* (si miramos mas por el lado de τ), mientras que $[\theta/\Theta]$ configura el *logos* (como pensar el hacer y como pensar este pensamiento sobre el hacer), que también se designa como el *saber* (si miramos hacia θ) o la *teoría* (si miramos más por el lado de Θ).

Yves Chevallard, conocido internacionalmente por su teoría de la Transposición Didáctica es el precursor y padre de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), ha llevado a cabo, junto a Marianna Bosch, trabajos y estudios, dentro del enfoque antropológico, sobre la manipulación simbólica de lo que él denomina *ostensivos* (Chevallard, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; Bosch, 2001). La terminología adoptada, la cual hace referencia a la idea de ostensión, parece reenviar específicamente a lo relacionado con la vista y lo perceptible, pero el significado que le da Chevallard va más allá de su acepción común, incluyendo en ella un aspecto propio de los objetos ostensivos que es el hecho de poder ser manipulados por el sujeto.

La TAD, al igual que otras teorías, sostiene que la actividad matemática se realiza mediante el uso de múltiples registros (lo escrito, lo verbal, lo grafico, lo gestual, etc.) y que la utilización y coordinación de los mismos lleva ligada y entraña diferentes dificultades.

La diferencia de la conceptualización que hace la TAD con respecto a otras teorías se sitúa en dos hechos (Bosch, 2001):

- La no diferenciación entre registros desde el punto de vista funcional, de manera que todos son igual de importantes.
- La importancia dada al valor instrumental y por tanto manipulativo que asignamos a los objetos de representación, frente a su valor semiótico.

La TAD establece que existen dos tipos de objetos en la actividad matemática (Chevallard, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; Bosch, 2001):

- Ostensivos: son los objetos que se ven, se tocan, se oyen y por lo tanto que se pueden manipular. Los objetos ostensivos tiene dos tipos de *valencias*:
  - Valencia Semiótica: hace referencia a la consideración de que los objetos Ostensivos son los signos de los No-Ostensivos, aunque consideran que lo representado no es solamente una idea o noción sino que representa a toda una praxeología que hay detrás.
  - Valencia Instrumental: ligada a la capacidad de los ostensivos para poder ser manipulados técnica, tecnológica y teóricamente.
- No- Ostensivos: son los objetos que existen institucionalmente y no son perceptibles: ideas, nociones, conceptos, etc. Los conceptos matemáticos son considerados objetos no ostensivos por Chevallard, los cuales solamente se hacen presentes y manipulables a través de objetos ostensivos asociados a dichas nociones.

Ambos objetos coexisten en lo que la TAD llama *Dialéctica de lo Ostensivo y de lo No-Ostensivo* que consiste en el hecho de que los objetos

No- Ostensivos surgen de la manipulación de los ostensivos, pero a la vez esa manipulación, para poder llevarla a cabo, requiere el uso de No-Ostensivos.

En un principio se podría pensar que lo ostensivo se correspondería con el nivel del *saber hacer* y lo no ostensivo con el *saber*, pero tanto lo ostensivo como lo no ostensivo afecta y forma parte de todos los elementos de una organización matemática.

Con lo cual, para la TAD, los objetos ostensivos y no ostensivos viven juntos en el seno de la práctica matemática, y por tanto en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la misma, determinándose recíprocamente.

1.2.4.4. Radford y la teoría cultural de la objetivación o de la semiótica cultural

El profesor e investigador Luis Radford de la Universidad Laurentian (Canadá), ha trabajado sobre la enseñanza y desarrollo del pensamiento matemático, basando su investigación en la aparición, consolidación y evolución de los procesos de generalización y abstracción en los estudiantes dentro de la teoría cultural de la objetivación (Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2006b, 2008, 2009, 2011, 2013, 2014b).

En palabras del propio Radford (2006b), *se trata de una teoría que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento.* La teoría de la objetivación parte de una posición no mentalista del pensamiento, es decir, que considera el pensamiento no solo como un proceso de actividad mental de naturaleza semiótica, sino sobre todo, lo considera, una práctica social, siendo una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos (Radford, 2004c, 2006b, 2014b).

En esta mediación juega un papel importante la dimensión semiótica (Radford 1998, 2004c, 2006a, 2006b), la cual va mucho más allá de la simple visión instrumental de los objetos, instrumentos y sistemas de signos (el conjunto de estos elementos recibe el nombre de artefactos en la teoría de la semiótica cultural) y de desempeñar un papel de representación del conocimiento.

La mediación semiótica parte de un posicionamiento del individuo como sujeto que piensa y actúa en un marco cultural determinado y por lo tanto la base de la cognición se encuentra en la praxis social y la actividad humana. Dicha actividad, se caracteriza entre otros aspectos, por el objetivo que se persigue, que sirve de estímulo y orienta la actividad, y por los medios para alcanzar dichos objetivos, es decir, objetos, elementos, símbolos, signos, representaciones, lenguaje, etc. cuyo valor no reside en la posibilidad de volver la actividad más fácil sino en convertirse en parte consubstancial de la misma (Radford 1998, 2004c), siendo parte constitutiva de la misma, es decir, que se desarrolla la actividad cognitiva con y a través de los artefactos culturales, siendo parte fundamental en los procesos de reflexión y comprensión, repercutiendo en nuestro funcionamiento cognitivo:

> Una aproximación antropológica no puede evitar tomar en cuenta el hecho de que el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo, está subsumido por prototipos culturales de uso de signos y artefactos. (...) Lo que es relevante en este contexto es que el uso de signos y artefactos alteran la manera en que los objetos conceptuales nos son dados a través de nuestros sentidos (...) Resumiendo, desde un punto de vista de una epistemología antropológica, la manera en que me parece que puede resolverse el misterio de los objetos matemáticos es considerando dichos objetos como patrones fijados de actividad humana; incrustados en el dominio continuamente sujeto a cambio de la práctica social reflexiva mediatizada (Radford, 2004c, p. 160).

Desde el punto de vista cognitivo, la semiótica desempeña un papel de objetivación del saber, es decir, que realiza una acción de convergencia entre el signo, sistema de representación, etc. y el pensamiento y el encuentro entre lo subjetivo y la objetividad cultural.

Radford denomina “Sistemas Semióticos Culturales a la superestructura simbólica que, juntamente con la dimensión histórico-económica, da cierta forma y organización a la actividad de los individuos” (Radford, 2006b, p. 114). Dichos sistemas semióticos incluyen tanto significados culturales y patrones sociales de construcción y producción de significados, como concepciones entorno a los objetos, signos y representaciones matemáticas: naturaleza, relación con el mundo concreto, propiedades, etc.

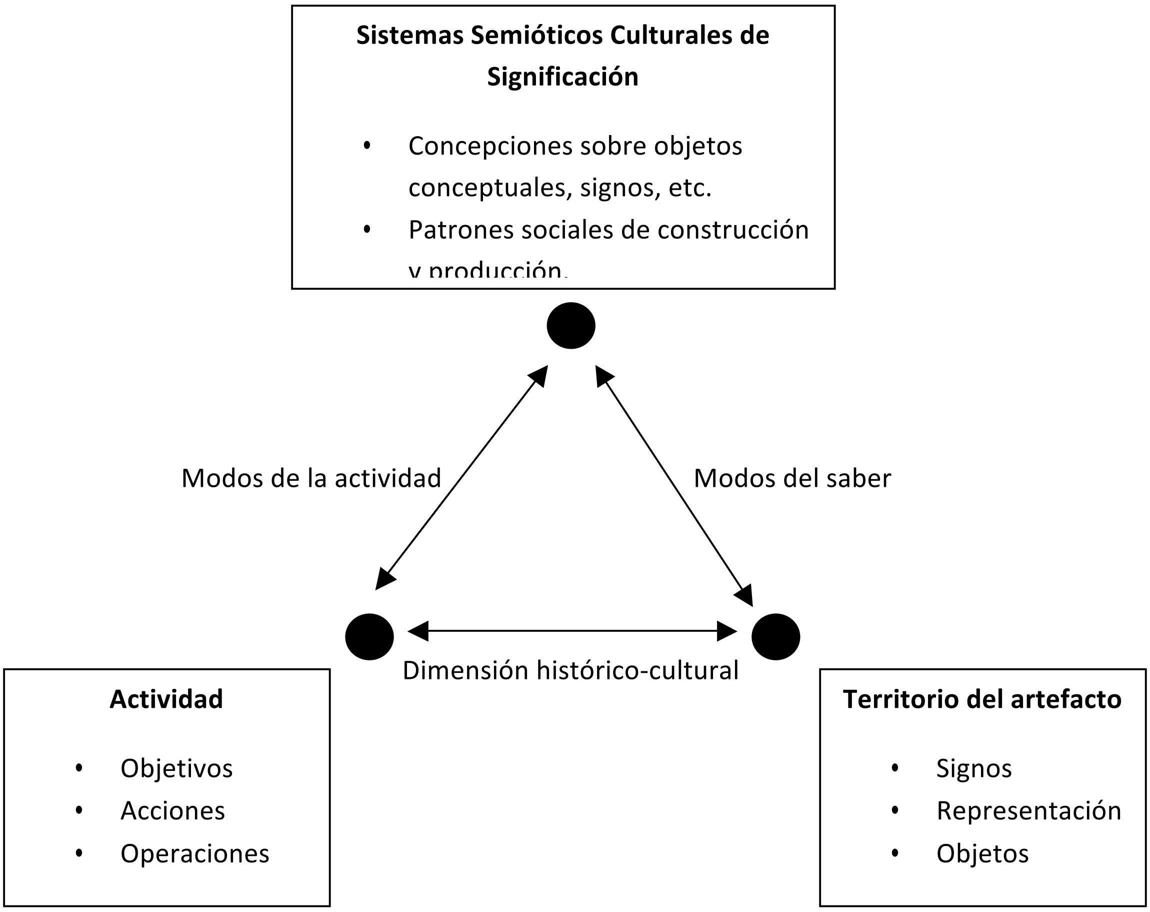


FIGURA 1.2.4.4.1. *Triángulo teoría cultural de la objetivación de Radford*. (Radford, 2006b, p. 114)

El triángulo anterior muestra la interacción entre los Sistemas Semióticos Culturales, la actividad y el territorio del artefacto, mostrando la complejidad que envuelve a la actividad y la naturaleza diversa de la misma. Los Sistemas Semióticos Culturales, por un lado, dan lugar a los modos de actividad, es decir, a las maneras particulares en que pueden realizarse las actividades en un marco histórico-cultural concreto, y por otro, a los modos de saber que permiten la identificación y reconocimiento de las diferentes situaciones y problemas, delimitando las estrategias, argumentos, métodos, técnicas, etc. que habrá que aplicar a la hora de reflexionar y enfrentarse a dichos problemas.

Para la teoría de la objetivación, la enseñanza y el aprendizaje no residen en desarrollar, elaborar o reconstruir un conocimiento, sino que se trata de dar sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su entorno cultural.

Muchos de los estudios de Radford están centrados en el desarrollo del pensamiento algebraico desde una perspectiva cultural semiótica, y la génesis de generalizaciones algebraicas desde una dimensión multisemiótica de la actividad algebraica de los estudiantes (Radford, 2004b, 2006a, 2006b; Radford y Bardini, 2007).

En esta línea, con la intención de ayudar a entender la problemática que surge en torno al desarrollo conceptual y la relación con el contexto cultural, en los últimos años se ha centrado en la relación y vínculo que se puede establecer entre el cerebro y el pensamiento aritmético y algebraico, apoyándose en las investigaciones actuales en el campo de la neurociencia (Radford y André, 2009).

Según Radford (2009), el estudio de las áreas cerebrales que se activan en la realización de las tareas matemáticas y en la comprensión y coordinación de los diferentes formatos semióticos, puede ser de gran utilidad para detectar las dificultades que se manifiestan en los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

1.2.4.5. Bruno D’Amore y las representaciones semióticas

Bruno D’Amore, profesor de didáctica de la matemática y responsable científico del Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Bolonia, ha trabajado sobre las diferentes interpretaciones de los términos “concepto” y “objeto” en Matemáticas, sobre la conceptualización y las interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y la relación que guardan con los registros de representación semióticos y la noética (D’Amore, 2001, 2004, 2006; D’Amore, Radford y Bagni, 2007), siguiendo y apoyándose, para ellos, tanto en los enfoques sociocultural, antropológico y ontesemiótico, como en las investigaciones y trabajos de Duval.

Para D’Amore, las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión de una representación a otra, dan lugar a bloqueos debido a que el paso de un sistema de representación de un objeto matemático a otro, por medio de dichas transformaciones, por una parte conserva el significado del objeto pero en ocasiones puede cambiar su sentido (D’Amore, 2001, 2004, 2006).

Sostiene que la importancia de las representaciones se debe principalmente a dos motivos (D’Amore, 2003, 2004, 2006):

- Todo concepto matemático remite a no-objetos; por lo que la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras en matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos.

- Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de objetos para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos.

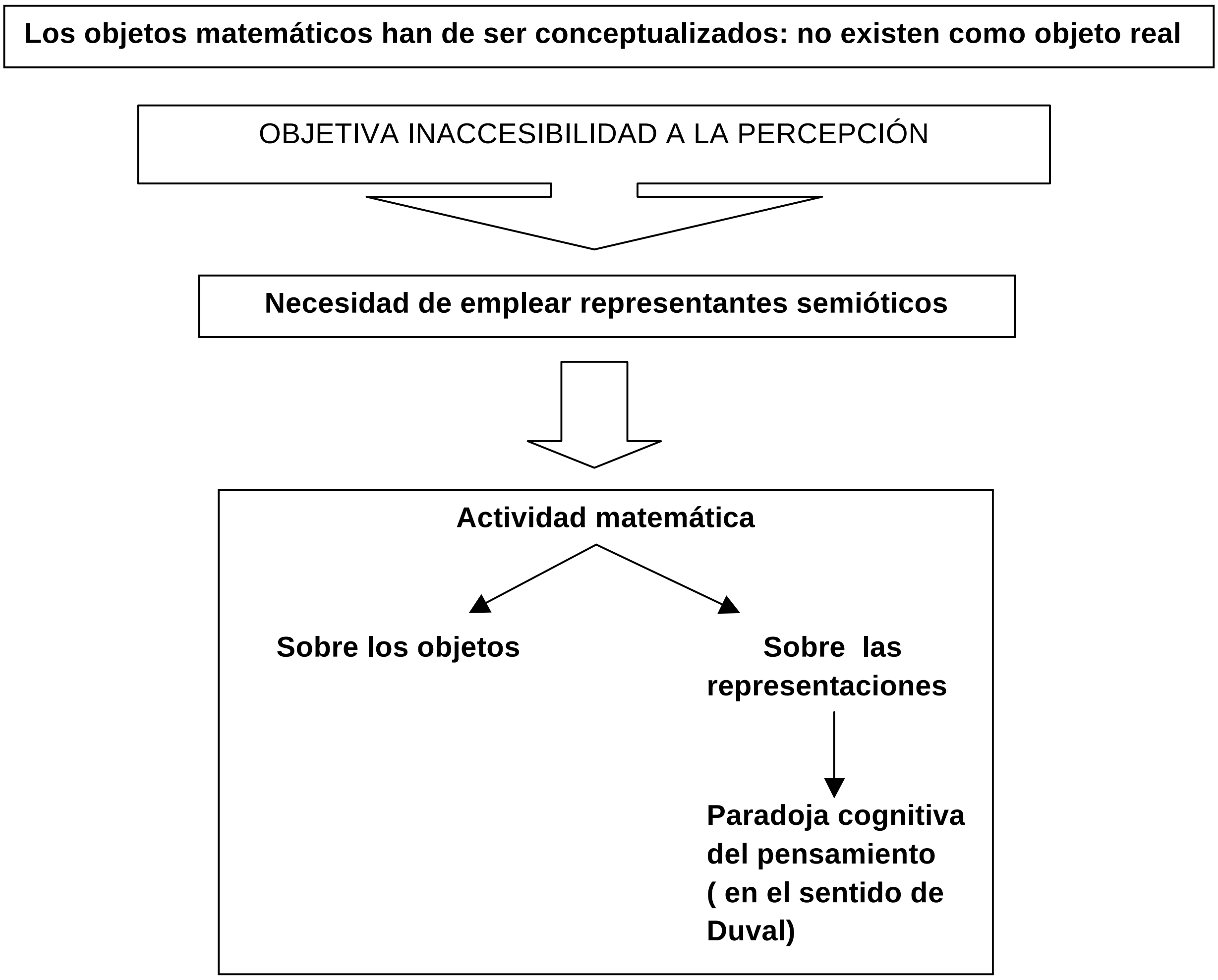


FIGURA 1.2.4.5.1. *Conceptualización matemática de D'Amore*.
(D'Amore, 2004, p. 94)

Luego, el conocimiento que se adquiere puede verse como el resultado de la experiencia vivida por cada sujeto que aprende, en la cual se da una interacción entre éste y el contexto que le rodea y que se organiza alrededor de los sistemas semióticos de representación. En palabras del propio D'Amore,

> (...) el conocimiento es la intervención y el uso de los signos. Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los objetos de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento (D'Amore, 2004, p. 93).

En una de sus investigaciones, D'Amore (1998) propuso a estudiantes que pertenecían a cursos escolares distintos, diferentes registros de representación semióticos, con la intención y propósito de que reconocieran que se trataba del mismo mensaje, de la misma información y que hacían referencia al mismo objeto.

Dicha investigación arrojó resultados relevantes referidos a las dificultades que tienen los alumnos a la hora de trabajar con distintos registros de representación, resumiéndose en:

- Dificultades para llegar a partir de una representación al contenido representado.
- Dificultades para verificar que entre dos representaciones dadas en un mismo registro semiótico se ha llevado a cabo simplemente una transformación de representación de tipo tratamiento
- Dificultades para verificar que entre dos representaciones semióticas dadas en registros semióticos diferentes se ha llevado a cabo una transformación de tipo conversión.

Estos resultados conducen a D'Amore a asegurar que la falta de devolución que manifiestan los estudiantes, es decir, la falta de implicación en la construcción del conocimiento dentro del contexto escolar, se encuentra estrechamente ligada a la incapacidad de representar y efectuar transformaciones tanto de tipo tratamiento como de conversión, imprescindibles en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Además, considera que la característica concreta de un registro semiótico depende fundamentalmente del objeto que se quiere representar; de modo que para comprender la información puesta en relieve se necesita tener un conocimiento preliminar acerca del objeto.

1.2.4.6. Los aportes de la Neurociencia

En los últimos años se han obtenido sorprendentes resultados desde el campo de la neurociencia, relacionados con el modo en que el cerebro procesa los conocimientos. La relación entre neurociencia y educación se ha puesto de relieve en múltiples y recientes publicaciones (Amstrong, 2012; Ansari y Coch 2006; Howard-Jones, 2008, 2010; Nieto, 2011) con explicaciones teóricas que vinculan ambos campos y reflexiones sobre la forma en pueden o no pueden ser integrados.

Además de estas consideraciones teóricas, los investigadores han empezado a colaborar a través de ambas disciplinas, y neurociencia y educación se están convirtiendo en un campo de investigación interdisciplinar con puntos de convergencia beneficiosos para ambas.

Dentro de la neurociencia, nos centramos en la neurociencia cognitiva, subcampo más cercano a la investigación educativa, ya que estudia y se concentra en los mecanismos neurales que subyacen en la conducta humana y la cognición. El papel que juega la cognición como puente entre la neurociencia y la educación, o entre el cerebro y el comportamiento, hecho que se ha destacado desde hace mucho tiempo, es esencial.

La neurociencia cognitiva utiliza mediciones de la actividad cerebral, como la tomografía axial computarizada, la Imagen por Resonancia Magnética Funcional (FMRI) o la Electroencefalografía (EEG) para entender el funcionamiento cognitivo e interpretar la actividad cerebral en el contexto de las teorías psicológicas, y por lo tanto, en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje, que también es guiado por las teorías psicológicas.

Los resultados sobre la actividad cerebral obtenidos con técnicas propias de la neurociencia cognitiva generan resultados que no pueden conseguirse a partir de los datos que se obtienen por la simple observación de comportamientos ante la realización de alguna actividad o tarea. Dicho de otra manera, la neuroimagen proporciona un nivel de medición y análisis que no facilitan los estudios de observación del comportamiento, permitiendo a los investigadores educativos establecer otro nivel de explicación y exploración a la hora de dar respuesta a las preguntas relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza, basadas en datos reales y puros, provenientes de los resultados obtenidos de acuerdo con el funcionamiento del cerebro.

La importancia que tienen las matemáticas para desenvolverse con éxito en la sociedad actual, junto con la necesidad de mejorar la educación matemática, ha dado lugar a una creciente y productiva actividad investigadora entre el campo de la didáctica de las matemáticas y la neurociencia cognitiva, de modo que el dominio del aprendizaje en matemáticas se ha convertido en un área ideal para explorar posibilidades para el nuevo campo de investigación interdisciplinario de la neurociencia y la educación.

El interés que esta reciente corriente de investigación ha generado en investigadores en didáctica de las matemáticas viene justificada por la necesidad de esclarecer lo máximo posible los problemas relacionados con la naturaleza del pensamiento matemático y los procesos que tienen lugar en los estudiantes en la enseñanza-aprendizaje de dicha disciplina.

Diversas investigaciones, como las llevadas a cabo por Pierre Pica en la tribu Mundurukú del Amazonas, han sacado a la luz la existencia de ciertas facultades matemáticas que se encuentran genéticamente ancladas en nuestro cerebro, de modo que existen ciertos tipos de representaciones “primitivas” que sirven de soporte y actúan como sustrato en la aparición progresiva de la representación simbólica en el desarrollo del niño, jugando un papel importante en la comprensión y evolución conceptual (Pica, Dehaene, Izard y Spelke, 2008). A este respecto, dicha investigación prueba la hipótesis de la presencia de un instinto geométrico basado en una organización cerebral innata que permite representar y percibir el entorno que nos rodea de una manera determinada, pues tanto los adultos como los niños de la tribu emplean conceptos geométricos básicos (puntos, líneas, paralelas, perpendiculares, etc.) cuando se les presentan diversas imágenes o cuando tienen que localizar objetos sobre planos.

Cada vez somos más conscientes de la existencia de formas sensoriales del pensamiento, especialmente de tipo visual, que se encuentran en el centro de nuestro pensamiento y en el desarrollo y puesta en funcionamiento de buena parte de nuestras ideas. Actualmente se considera que la mayoría de las actividades mentales tienen relación con los procesos de formación de imágenes. El pensamiento no solo es verbal, no solo se manifiesta a través de la formulación de proposiciones, sino que, sin ninguna duda, producimos otros tipos de pensamientos, cuanto menos el pensamiento a través de imágenes, ligado a la percepción, y por lo tanto al pensamiento visual. Por ello, la neurociencia ha puesto énfasis en la imagen visual y utilización de representaciones en su interés por comprender cómo el cerebro humano logra extraer selectivamente los elementos pertinentes y codifica y descodifica la información.

Stanislas Dehaene, matemático e investigador del Institut National de la Santé et de la Recherche Medicale en París y miembro del Collège de France, ha realizado diversas investigaciones en el campo de la cognición neuropsicológica, centrándose en el estudio de los procesos que tienen lugar en el cerebro humano en relación con las representaciones utilizadas en uno de los conceptos elementales de la matemática, como son los números (Dehaene, 2000, 2002a, 2002b, 2005).

Las experiencias realizadas, centradas en la resolución de problemas matemáticos fundamentalmente de carácter numérico, han permitido observar qué regiones cerebrales son las que se activan en función de las estrategias seguidas por los participantes a la hora de resolverlos.

Cuando se pide a los sujetos que resuelvan los problemas planteados mediante el empleo de cálculos exactos se observaba una mayor activación en las áreas del cerebro involucradas en el lenguaje (hemisferio izquierdo), mientras que cuando se les pide que utilicen estrategias basadas en el cálculo aproximado, lo que conlleva en ocasiones la utilización de representaciones u otros recursos, se activaba más el lóbulo parietal de los dos hemisferios.

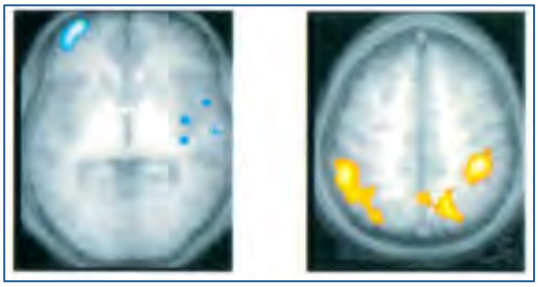


FIGURA 1.2.4.6.1. *Imagen lóbulos parietales.* (Dehaene, 2005, p. 74)

Actualmente, se cree que las tareas complejas del procesamiento matemático y las tareas basadas en la utilización y coordinación de varios registros de representación, requieren la interacción simultánea de varios lóbulos del cerebro: La simple resolución de un problema sencillo requiere de habilidades verbales, espaciales, conceptuales, representativas, aritméticas, razonamiento, etc. La actividad matemática, según la teoría del localizacionismo cerebral, se manifiesta en dos regiones concretas del cerebro: el lóbulo frontal y el lóbulo parietal. Dentro del lóbulo parietal, se registra mayor actividad matemática en la región denominada surco intraparietal y en la región inferior, esta última encargada del control del pensamiento matemático y la capacidad cognitiva visual-espacial.

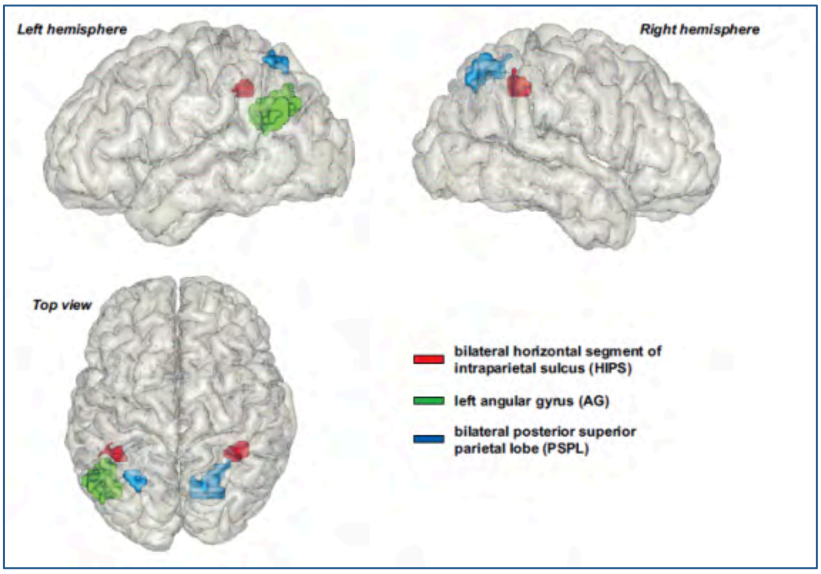


FIGURA 1.2.4.6.2. *Imagen cerebral.* (Dehaene, 2005, p. 75)

Así, por ejemplo, los estudios de Dehaene han revelado cómo el simple procesamiento de información numérica requiere la activación de tres regiones diferenciadas del lóbulo parietal:

1. El giro angular izquierdo (AG), el cual interviene en los cálculos exactos y está relacionado con el sistema verbal en el que los números se representan mediante palabras.
2. La región superior posterior parietal (PSPL), relacionada con la atención y con el sistema visual en que los números se representan según una asociación de números arábigos conocidos.
3. El segmento horizontal del surco intraparietal (HIPS), el cual interviene en mayor medida cuando se hace una comparación o se estima un resultado, pues dicho proceso no precisa convertir los números en palabras, siendo independientes del lenguaje.

Estas investigaciones desarrolladas por Dehaene basadas en técnicas de resonancia magnética y EEG cerebral, han puesto de manifiesto cómo el cerebro humano emplea dos formatos para representar los números: el formato simbólico que permite la manipulación y el desarrollo de algoritmos numéricos apoyándose, para ello en las facultades del lenguaje, y el formato visual-espacial, relacionada con las habilidades protonuméricas que se han observado en recién nacidos y que constituyen esa semilla a partir de la cual emerge el formato simbólico y se desarrollan progresivamente los conceptos más complejos y abstractos.

Dehaene (Dehaene, 2000, 2005) defiende la idea de que ciertas facultades numéricas son innatas en el cerebro humano, producto de un proceso evolutivo de adaptación por selección natural, de modo que existen ciertas representaciones mentales, instintivas y automáticas, que actúan como punto de partida en la construcción progresiva de los conceptos más abstractos. Si se desarrollan y potencian dichas representaciones, se fortalecerán los cimientos sobre los cuales los alumnos irán erigiendo las nociones más complejas.

Cuando nos encontramos ante un concepto matemático, comienzan a activarse en nuestro cerebro aquellas representaciones que Deheane cataloga de inconscientes e inherentes al ser humano, de modo que empezamos a crear una aproximación del mismo, es decir una construcción interna, propia e individual, diferente para cada persona, y que constituye el primer paso para la construcción del concepto con la simbología correspondiente, dando lugar, finalmente, a una representación que hará más tangible y manejable la idea inicial.

Los estudios de Dehaene, al igual que los realizados por Radford (Radford y André, 2009), apoyan la idea de que ciertas áreas cerebrales se activan en la realización de tareas matemáticas y en la comprensión y coordinación de los diferentes formatos semióticos de representación, lo que resulta de gran utilidad para detectar las dificultades que se manifiestan en los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Este hecho podría tener como consecuencia ciertas implicaciones pedagógicas relacionadas de manera directa con el tipo de enseñanza matemática que reciben los estudiantes, pues en muchas ocasiones ésta se encuentra muy alejada de aquellas prácticas que permitirían tomar contacto con ese sustrato, que se vería activado y potenciado si los conocimientos matemáticos se acompañasen y fundamentasen con recursos gráficos, geométricos, figurales, etc., ya que aunque inconscientemente se pueden activar un gran número de tipos de representaciones, la mayor parte de las manipulaciones que se pueden efectuar con ellas parecen imposibles de realizar por el sujeto hasta que es consciente de las mismas.

Los procesos educativos y las prácticas docentes del futuro, deberían tener en cuenta y sustentar en cierta medida la enseñanza-aprendizaje de las distintas disciplinas en las investigaciones relacionadas con las neurociencias. En concreto, en la enseñanza de las Matemáticas, el enfoque denominado carácter multimodal de los conceptos, (Gallese y Lakoff, 2005, citado por Radford et *al*., 2009) expresa que la actividad de pensar no solo es soportada por el lenguaje y los símbolos, sino que es inherente a la percepción sensorial y por tanto a la utilización de múltiples representaciones.

Mediante estudios computacionales de imagen mental, se ha observado cómo, en función de las características de los materiales didácticos y las metodologías empleadas, la activación neuronal varía. A través de la manipulación de materiales, el empleo de diferentes sistemas de representación y el establecimientos de relaciones entre ellos, se estimulan y activan varias áreas de nuestro cerebro, generando una gran actividad cerebral que facilita la comprensión, mientras que cuando la enseñanza se basa en la memorización sin sentido de algoritmos y el trabajo mecanizado la actividad neuronal es mucho más pobre.

Stavy y Babai (2009), en sus investigaciones sobre la activación cerebral en la realización de actividades de naturaleza geométrica, observaron como los participantes que resolvían tareas a partir del razonamiento intuitivo inducido por el uso de materiales manipulables, imágenes, diagramas, etc., ponían en funcionamiento tanto las áreas cerebrales encargadas del pensamiento visual, espacial, simbólico, holístico y global (hemisferio derecho) como las áreas relacionadas con la lógica, lo verbal y lo teórico (hemisferio izquierdo) , mientras que aquellos que no hacían uso de estos recursos limitaban su actividad a estas segundas.

Kaufmann, Vogel, Starke, Kremser y Schoke (2008), realizaron estudios de comparación en la resolución de tareas de carácter numérico en niños y adultos. Sus resultados mostraron como a nivel conductual no existían diferencias significativas entre ambos grupos.; sin embargo a nivel neuronal los niños activaban regiones cerebrales cuya función guarda relación con la utilización de representaciones (palitos, empleo de los dedos, etc.) para comparar magnitudes numéricas, lo que en el grupo de los adultos no ocurría.

Lee, Lim, Yeong, Ng, Venkatraman y Chee (2007) examinaron los correlatos neurales en la resolución de problemas algebraicos mediante dos métodos que se enseñan en las escuelas de Singapur, es decir, el método de diagrama, donde los estudiantes tienen que dibujar un diagrama de relaciones para representar el problema, y el método simbólico, donde los estudiantes transforman el problema dado en el registro de la lengua natural en una ecuación simbólica. Los resultados revelaron que, mientras el rendimiento de comportamiento en ambas condiciones era equivalente, el uso del método simbólico mostraron más activación en los lóbulos parietal superior y los precuneus, lo que indica que la utilización del registro algebraico y su coordinación con el registro de la lengua natural tal vez requiere más demandas de atención.

De manera simplificada, y a raíz de lo visto, podemos decir que existen dos modalidades pensamiento, verbal y no verbal, representadas por los hemisferios cerebrales izquierdo y derecho respectivamente.

Los sistemas educativos de la mayoría de las sociedades occidentales tienden a estimular el desarrollo del hemisferio izquierdo, cuando la realidad es que el aprendizaje en cualquier área de contenido va a ser más efectivo a medida en que se activen y estimulen ambos hemisferios. En el caso concreto de las matemáticas, la presentación diversificada de los contenidos a través de una metodología basada en la utilización y coordinación de varios sistemas de representación favorecía la efectividad del proceso de enseñanza-aprendizaje, pues la instrucción aumenta en la medida en que el contenido se presente no solo en la modalidad verbal tradicional, sino también en la modalidad no verbal o figural (gráficas, diagramas, dibujos, etc.) lo cual contribuirá a estimular el hemisferio derecho.

Esto ilustra como la neuroimagen puede utilizarse para comprender mejor los diferentes procesos neurocognitivos que emergen en función del tipo de metodología e instrucción que se lleve a cabo, así como ofrecer explicaciones novedosas que permiten profundizar en el conocimiento acerca de las condiciones bajo las cuales el aprendizaje puede ser más efectivo, teniendo implicaciones para la teoría y la práctica educativa.

1.2.4.7. Tecnología, Representación y Enseñanza de las Matemáticas

La tecnología y la informática han experimentado un crecimiento y un desarrollo exponencial a partir de la segunda mitad del siglo XX, lo que se ha traducido en una parcial innovación metodológica en el área educativa a lo largo de la década de los 90, afectando particularmente al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, tanto en los centros educativos como en el campo de la investigación.

El empleo de la tecnología dentro del aula de matemáticas tiene una razón de ser que repercute de manera directa en el aprendizaje del estudiante, pudiendo incidir de manera directa sobre aspectos como los que se recogen en la siguiente tabla:

TABLA 1.2.4.7.1. *Implicaciones del empleo de las TIC*

Aspectos	**Implicaciones del empleo de las TIC**
Aspectos Epistemológicos	Motivan y suscitan una transformación epistemológica de la experiencia matemática, ya que el proceso de cosificación de los objetos matemáticos que el estudiante puede activar mediante el empleo de las TIC, promueven una forma de actividad matemática más directa que la que era posible anteriormente (Moreno, 2002).
Aspectos Interdisciplinares	Implica una transformación de los problemas y situaciones a tratar, permitiendo abordar situaciones que no son factibles de realizar con lápiz y papel.
Desarrollo de Procesos Cognitivos	Implica el desarrollo de procesos cognitivos como la visualización, la identificación, la comparación, la clasificación, el análisis, etc.
Desarrollo de Estrategias Didácticas	Permiten impulsar, mejorar, amplificar y perfeccionar metodologías y estrategias didácticas que favorecen la motivación, el aprendizaje cooperativo, la interacción alumno-profesor y alumno-alumno, así como favorecer la relación alumno-objeto de conocimiento.
Aspectos experimentales-argumentativos	Favorecen la exploración y la experimentación, permitiendo establecer conjeturas, realizar inferencias y generar argumentos válidos.

Aspectos organizativos-analíticos	*Permiten la recolección, grabación, organización y análisis de datos, aumentando la capacidad de hacer cálculos y ofreciendo herramientas convenientes, precisas y dinámicas que dibujan, grafican y calculan. Con estas ayudas, los estudiantes pueden extender el rango y la calidad de sus investigaciones matemáticas y enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas* (NCTM, 2000).

Fuente: Elaboración propia.

El desafío de la aplicación de las herramientas tecnológicas en el campo de la enseñanza, desde el uso de calculadoras gráficas hasta softwares educativos, no se encuentra en el hecho de que el ordenador actúe o sustituya al docente, sino en determinar si éstas son capaces de crear las condiciones de apoyo para la construcción del conocimiento por parte del estudiante y cómo.

La introducción de los entornos de aprendizaje informáticos en el sistema didáctico modifica algunas de las restricciones que emergen a la hora de estudiar matemáticas, sobre todo porque permite el acceso a la realización efectiva de tareas cuyas características las harían inaccesibles si no se emplearan dichos dispositivos.

Según los estándares de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM),

> Las tecnologías electrónicas, tales como calculadoras y computadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y "hacer" matemáticas... Los escolares pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología... En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología se debe utilizar frecuentemente y responsablemente, con el objeto de enriquecer el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos. La existencia, versatilidad y poder de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los escolares, así como la mejor forma de aprenderlas. En las aulas de matemáticas contempladas en los Principios y

Estándares, cada estudiante tiene acceso a la tecnología con el fin de facilitar su aprendizaje matemático, guiado por un docente experimentado (NCTM, 2000).

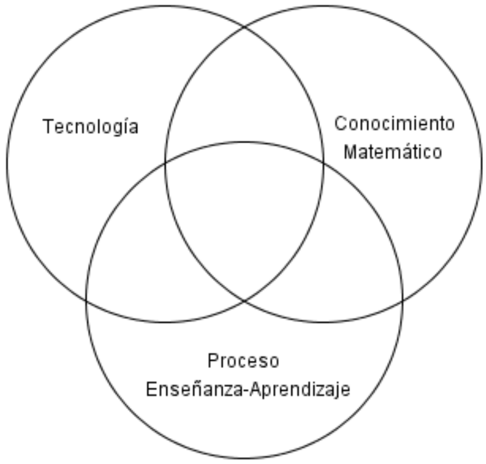


FIGURA 1.2.4.7.1. *Relación entre Tecnología, Conocimiento y Proceso de enseñanza-aprendizaje*

En lo que a nuestro tema de investigación se refiere, el empleo de las TIC puede jugar un papel importante en el diseño de actividades en las que los alumnos manejen múltiples representaciones, que ayudan a crear experiencias matemáticas significativas para el aprendizaje de los conocimientos que se pretende que el estudiante adquiera.

La integración e incorporación de las TIC en tareas que tienen como finalidad la construcción del conocimiento matemático en el ámbito escolar, implica, de manera inmediata y obligada, la necesidad de adaptar el saber matemático al medio tecnológico. Desde esta perspectiva, la interacción entre el contenido matemático y el estudiante se va a producir a través del sistema tecnológico empleado, de modo que dicha tecnología se transformará en un instrumento que formará parte de su actividad matemática, permitiendo generar significados.

La influencia de las TIC y de los entornos informáticos sobre las matemáticas y su enseñanza, los planes de estudio y la formación de profesores, han sido tratados por diversos didactas como Artigue (2002, 2007), Trouche (2003, 2004), Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001, 2003) y Rabardel (1999a, 1999b), por lo que a continuación pasamos a introducir algunos de los estudios más relevantes en este tema.

1.2.4.7.1. De la Transposición Didáctica de Chevallard a la Transposición Informática de Balacheff

La producción y transmisión de objetos de enseñanza es el resultado de un proceso complejo de adaptación del saber de referencia a las limitaciones de enseñanza y aprendizaje propias de los sistemas didácticos. Este proceso es el denominado por Chevallard (1997) como *Transposición Didáctica*.

Se designa con el término *Transposición Didáctica* al conjunto de transformaciones que sufre un saber a efectos de ser enseñado, esto es, el paso del saber-sabio al saber-enseñado. La Didáctica de las Matemáticas debe desempeñar aquí un importante papel: el de la vigilancia epistemológica para que no se produzca una banalización del saber en dicho proceso de transformación, garantizando cierta legitimidad matemática, de modo que el saber a enseñar se sitúe lo suficientemente próximo al saber sabio y a la vez sea accesible a los estudiantes.

Cuando el profesor se dispone a transmitir un determinado saber, su punto de referencia o partida es el denominado saber-sabio, elaborado por los matemáticos profesionales e investigadores (*génesis natural histórica*), que se caracteriza por ser descontextualizado (desaparece toda referencia al contexto de descubrimiento), despersonalizado (desaparece toda referencia a los motivos personales que llevaron a su estudio), destemporalizado, sincrético y no enseñable directamente, aunque si es utilizable por el resto de miembros de la comunidad científica e investigadora. Por esta razón, el saber sabio no puede ser directamente enseñado a los estudiantes, por lo que es necesario realizar una serie de transformaciones y modificaciones para que pueda ser transmitido en los centros escolares y en niveles educativos determinados.

El profesor debe situar a los estudiantes frente a tareas cuya resolución requiera la construcción del conocimiento que se desea transmitir, de modo que se vuelve a producir una contextualización y personalización de dicho conocimiento, en esta ocasión por parte del alumno.

Una vez alcanzado tal objetivo, para que la resolución y conocimiento construidos pasen a formar parte del saber oficial, debe tener lugar un proceso de institucionalización, lo que precisa y requiere que se produzca una nueva despersonalización y descontextualización.

Todo este proceso desarrollado por el enseñante, similar al llevado a cabo por el investigador, recibe el nombre de *génesis artificial del saber.*

Ahora bien, el profesor no inicia la transposición didáctica, sino que este proceso comienza mucho antes, pudiendo distinguir varias fases como veremos a continuación.

La noosfera, es decir, el conjunto formado por los agentes educativos, autoridades políticas y sociales, asociaciones de padres, etc. juega un papel importante en este proceso de transposición, seleccionando y determinando los objetos de enseñanza dentro del saber sabio de referencia, así como estableciendo ciertas limitaciones y parámetros para que la enseñanza sea compatible con sus condiciones y entorno. Al saber producto de esta fase del proceso, que se corresponde con la elaboración de los programas y leyes educativas, se le denomina *Saber a Enseñar*.

La siguiente transformación se encuentra estrechamente ligada a los libros de textos, constituyendo el denominado S*aber Escolar*, debido a que los enseñantes hacen referencia a los contenidos que van a impartir teniendo más presentes los manuales escolares que los programas que conforman el *Saber a Enseñar*. El *Saber Escolar* va a ser el útil de referencia para el alumno.

A partir del saber a enseñar el docente debe gestionar numerosas variables didácticas que van a transformarlo para su aplicación e intervención en el aula, transformándolo en *Saber Enseñado*.

Es un hecho que no existe una correspondencia plena entre el *Saber Enseñado* y el saber aprendido por el alumno, teniendo lugar la última transformación de la transposición didáctica: del *Saber Enseñado* al *Saber del Alumno*. El alumno debe redescontextualizar y redespersonalizar el saber, que es lo que garantizará su identificación con el *Saber Sabio* del que partió, y sobre el que la sociedad puede ejercer cierto control.

En el siguiente esquema se resume todo el proceso que sufre el saber durante la Transposición Didáctica, y que será tenido en cuenta en la presente investigación:

FIGURA 1.2.4.7.1.1. *Esquema transposición didáctica*

En las últimas décadas, el desarrollo de las tecnologías informáticas, su introducción en la escuela y en los centros de formación, han dado lugar a nuevos fenómenos del mismo orden que los de la Transposición Didáctica (Balacheff 1994a, 1994b, 1994c; Trouche, 2003, 2004; Gueudet y Trouche, 2011), pues la introducción de las TIC ha traído consigo numerosas transformaciones en el tratamiento y presentación del conocimiento matemático, enriqueciendo su aprendizaje e implicando una adaptación del saber matemático al medio tecnológico. Las limitaciones de la Transposición Didáctica además se combinan con las de la modelización y la implementación informáticas: limitaciones de la modelización computable y limitaciones de software y hardware de los equipos.

Lo que suele ocurrir en el campo de la informática no es una transliteración simple, los ambientes informáticos de aprendizaje son el resultado de una construcción que, a su vez, es el resultado de nuevas transformaciones de objetos de enseñanza. A este proceso, aquí descrito, se le denomina Transposición Informática.

Esta nueva situación ha hecho indispensable la extensión de la Transposición Didáctica a los marcos y contextos informáticos y tecnológicos, dando lugar a la mencionada Transposición Informática, término empleado por Balacheff para describir

> (...) el trabajo sobre el conocimiento que permite una representación simbólica y la aplicación de esta representación empleando un dispositivo informático, mostrando el objeto de conocimiento a manipular, permitiendo una contextualización del conocimiento que puede tener consecuencias importantes sobre los resultados de aprendizaje (Balacheff, 1994b, p. 45).

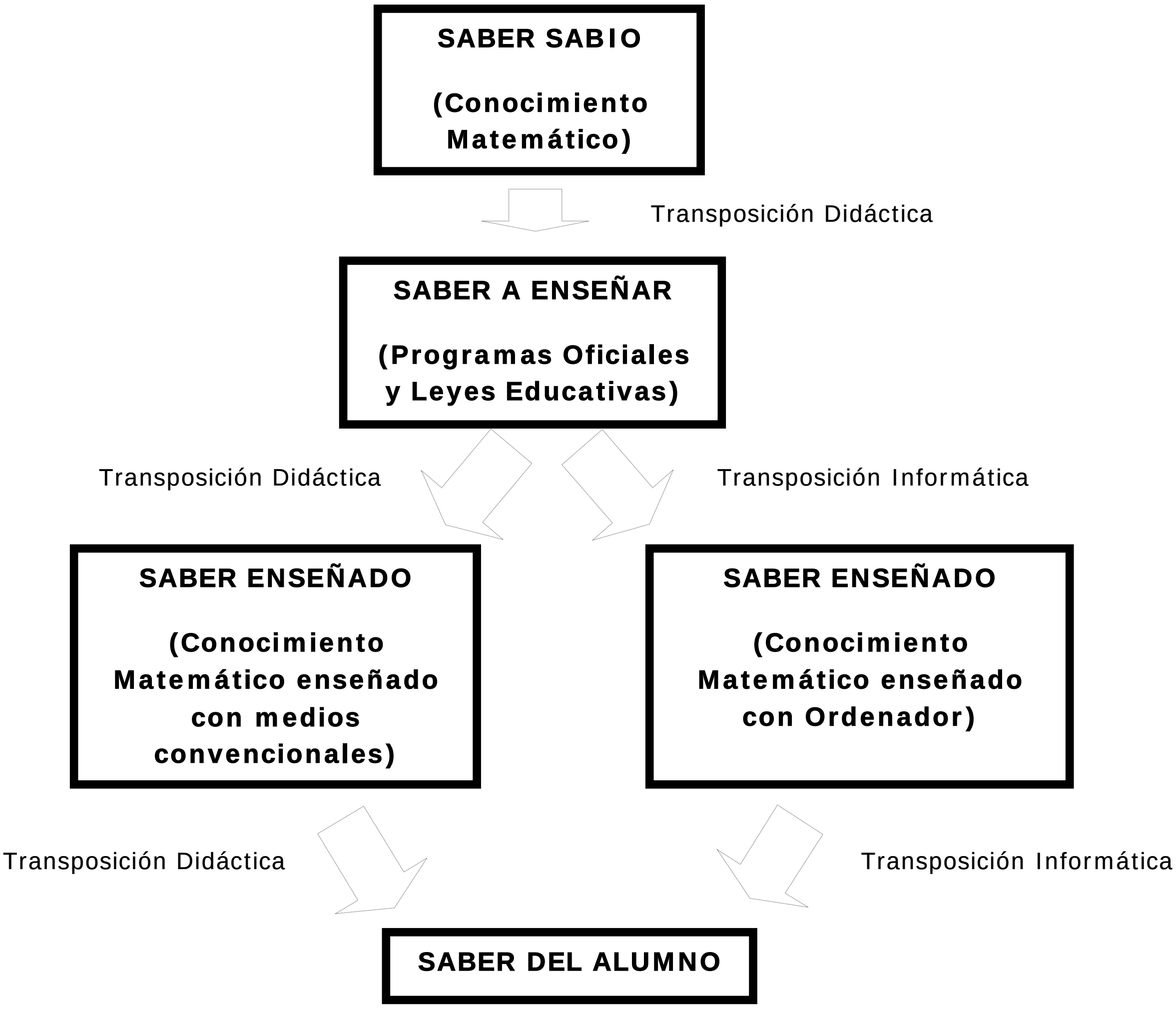


FIGURA 1.2.4.7.1.2. *Esquema transposición didáctica e informática*

Las exigencias propias de un modelo computacional dependen de su capacidad de permitir la implementación de un modelo simbólico, de forma que el reto está en diseñar el instrumento adecuado para sacar el mayor provecho didáctico, resultando de utilidad en la caracterización, tratamiento, representación y transmisión de conocimiento.

Autores como Trouche (2003, 2004) y Kaput (1992), sostienen que el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite una forma de actividad mucho más directa, de modo que esta forma de abordar las cuestiones matemáticas abre nuevos caminos y aporta nuevas posibilidades con respecto a las metodologías ya existentes.

Por dispositivos informáticos se entiende el conjunto formado por el hardware y software que permiten el manejo del ordenador. Tales dispositivos se encuentran divididos, según la Transposición Informática, en tres áreas que es conveniente distinguir (Balacheff, 1994a, 1994b):

- El *universo interno de la máquina* (Calculadoras, ordenadores, pizarras digitales, etc.): se refiere a la naturaleza del procesador, capacidad de la memoria, estructura de la pantalla, etc., es decir, son los diversos componentes electrónicos cuya articulación y aplicación permiten el funcionamiento del dispositivo informático. Los representantes operacionales de mayor relevancia de este universo son los lenguajes de programación, los cuales presentan dos limitaciones o restricciones básicas, en el sentido de que el progreso tecnológico no se libera totalmente de ellas, en cuanto a su representación e implementación:

    - *Granularidad y compilación:* la granularidad es un concepto del campo de la Inteligencia Artificial (IA), relacionado con modelos de resolución de problemas. La compilación es otro concepto de IA, estrechamente ligado al de granularidad.

      El fenómeno de la granularidad y la compilación se combinan para limitar, de forma significativa, la posibilidad de analizar los procesos de computación, y son una fuente de problemas complejos para el desarrollo de entornos que tienen la capacidad de explicar o dar respuesta a una demanda o necesidad del alumno, o para apoyar una intervención en el aprendizaje.

    - *Representación de datos:* La elección de la representación implica una estructura de datos que determina los límites del tratamiento.

- La *interface*: es el lugar de comunicación entre el usuario y el dispositivo informático, permitiendo la manipulación directa y visualización (de representaciones gráficas, funciones, figuras geométricas, etc.) del conocimiento y de las entidades abstractas, poniendo de manifiesto los comportamientos indicativos de sus propiedades, dando una referencia concreta de los conceptos involucrados.

- El *universo externo*, es el contexto o medio en el que el dispositivo lleva a cabo un conjunto de interacciones que involucran a otros dispositivos materiales y a los actores sociales (docentes y estudiantes) dentro de las limitaciones del sistema de enseñanza.

Los programas elegidos, como pueden ser *Cabri*, *Derive*, *Geogebra*, *Cinderella*, *Logo*, etc., permiten trabajar actividades relacionadas con el currículo, planteando tareas que deben ser revisadas desde la Transposición Informática que supone el transmitir conocimiento matemático con las TIC, ya que la transmisión de conocimiento de manera significativa es la esencia de la interacción con las mismas (Balacheff, 2000).

Dicha interacción puede darse en actividades de cuatro tipos, las cuales guardan una estrecha relación con la coordinación y utilización de registros semióticos: *experimentación, visualización, modelación* y *argumentación*. La importancia que le hemos otorgado se debe a que dichas actividades, al ser tratadas a través de la tecnología, permiten al estudiante construir conocimiento de manera efectiva y significativa.

La *experimentación*, dentro de un ambiente tecnológico, permite al alumno descubrir y justificar resultados matemáticos, por un lado, y reconocer patrones y comportamientos, por otro. Ello implica la manipulación de diferentes representaciones que hacen referencia al mismo objeto matemático, la coordinación de los mismos y el paso de un registro semiótico a otro, de modo que el estudiante puede deducir, analizar, conjeturar y obtener información relevante de gráficas, tablas, diagramas, etc., generando argumentaciones discursivas o no discursivas, tanto monofuncionales como multifuncionales siguiendo la terminología de Duval (1993), sobre un determinado concepto matemático.

La *visualización* permite al estudiante comprender y asimilar conceptos mediante la construcción de estructuras internas, y llevar esa comprensión al medio externo por medio de la argumentación visual o discursiva, a través de la articulación de un conjunto de representaciones de un mismo objeto.

La introducción de una actividad visual a través de medios tecnológicos ayuda al estudiante a desarrollar su habilidad de interpretar y comprender información a partir de registros no discursivos, así como conceptualizar, transformar, generar, comunicar y relacionar información mediante la generación de imágenes mentales y su posterior transformación a representaciones externas.

En cuanto a la *modelación*, la realidad es preexistente al conocimiento, por lo que el conocimiento es una representación de la realidad. En el proceso de modelación de dicha realidad se estimula la construcción y empleo de múltiples registros de representación, de modo que se coordinan símbolos, figuras, construcciones geométricas, gráficas, tablas, etc., suscribiendo en sí mismos el modelo que permitirá al estudiante interpretar, estudiar y comprender las propiedades y características de los objetos y conceptos modelizados.

El caso concreto del empleo de las tecnologías para efectuar dicha modelación, favorece la aparición y manifestación de ideas, propiedades y aspectos que desde un tratamiento formal y tradicional del conocimiento matemático, en el paso de lo más concreto a lo más abstracto, se pasaría por alto.

La construcción de conocimiento a través de la *argumentación* se amplifica cuando existe una interacción entre el estudiante y dicho objeto de conocimiento a través de un medio tecnológico, pues las TIC juegan un importante papel en la creación de escenarios donde el alumno puede articular múltiples representaciones, ya sean discursivas o visuales, generando nuevas significaciones.

1.2.4.7.2. La aproximación instrumental

Como resultado de la combinación del trabajo teórico y experimental en las investigaciones relacionadas con el empleo de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas y las posibilidades que ofrece la evolución de dichas herramientas, surge un nuevo enfoque de la mano de investigadores franceses (Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche, 2001, 2003; Artigue, 2002, 2007; Rabardel 1999a, 1999b), denominado Aproximación Instrumental, que permite considerar y explicar la interacción estudiante-instrumento tecnológico en los procesos de aprendizaje, tratando de entender cómo un *artefacto* tecnológico se incorpora a la enseñanza-aprendizaje del conocimiento matemático de un estudiante, transformándose en un *instrumento* que media en su actividad (Artigue, 2007).

La Aproximación Instrumental establece la distinción entre artefacto e instrumento en función de la concepción, objetiva o subjetiva, y uso que se haga de la herramienta tecnológica, de manera que entiende por artefacto aquel objeto que permite realizar un cierto tipo de tarea, mientras que el instrumento es la construcción mental que el usuario se ha formado del artefacto empleado una vez ha sido incorporado e integrado en su actividad matemática.

Por ejemplo, cuando un estudiante utiliza un software informático para representar gráficamente unos datos estadísticos, el ordenador está actuando como artefacto ya que se está utilizando únicamente como herramienta que permite graficar datos. En el momento en que el estudiante analiza, interpreta, relaciona esos datos representados, realiza conversiones entre distintos registros de representación semiótica a partir de las gráficas obtenidas, etc., el artefacto se transforma en instrumento ya que da forma a la actividad y pensamiento matemático del usuario, permitiendo dar respuesta a una determinada actividad matemática.

Para el desarrollo de dicha aproximación, es fundamental tomar en consideración la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), que proporciona un marco conceptual capaz de hacer frente a las necesidades teóricas que dicha aproximación experimenta, ofreciendo un análisis sistémico relacionado con el papel que juegan en las prácticas humanas el tipo de tarea utilizada, la técnica empleada para resolver dichas tareas, la tecnología que justifica las técnicas y la teoría en la que se apoya la tecnología, así como el análisis del desarrollo conceptual que emerge y de las herramientas utilizadas. Por otra parte, la Ergonomía

Cognitiva de Rabardel (1999a), proporciona herramientas apropiadas para el estudio del papel que juegan las tecnologías en el proceso de aprendizaje. Rabardel (1999a, 1999b), distingue, para analizar las limitaciones generales de una herramienta, tres tipos de limitaciones: las limitaciones de condiciones de existencia, en relación con las propiedades del artefacto como objeto físico o cognitivo, limitaciones de finalizado, en relación con los objetos sobre los que puede actuar, y que permite las transformaciones y, finalmente, las limitaciones de preestructuración de la acción.

Situado en el marco teórico de Vergnaud, Rabardel (1999a) define la conceptualización como un instrumento de construcción que realiza cada sujeto a partir de un artefacto dado:

> Hemos tratado de mostrar que los instrumentos tienen un carácter mixto, en el sentido de que son a la vez artefacto y esquema o patrón de utilización. Desde esta perspectiva, el proceso de conceptualización no consiste en proporcionar un artefacto a los usuarios: los instrumentos no vienen dados, sino que se construyen mediante un proceso complejo. Lo que se da, son los artefactos y los patrones sociales de uso en el contexto socio-cultural del sujeto. Los instrumentos son las propuestas que los individuos desarrollan o no. Es en la aplicación de los sistemas en donde se rebela el potencial de los artefactos, en donde se experimentará con los nuevos desarrollos, validándolos o no, y en donde se asignará a los artefactos una serie de funciones, de forma transitoria o permanente, de acuerdo a la diversidad de situaciones y proyectos que cada individuo quiera desarrollar por sí mismo. Los instrumentos son utilizados de esta forma particular en lo que llamamos la génesis instrumental. Este es un proceso dialéctico de transformación de los artefactos y esquemas sociales, a través de la cual tiene lugar el desarrollo del individuo y sus recursos (Rabardel, 1999a, p. 41).

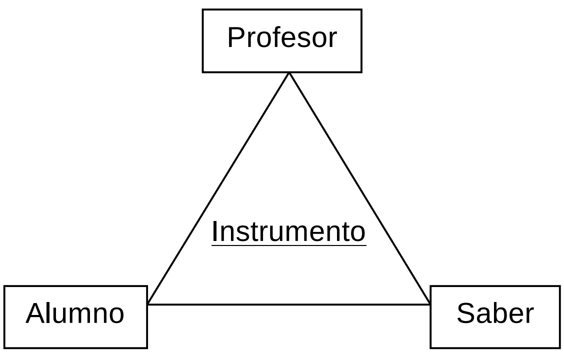


FIGURA 1.2.4.7.2.1. *Triángulo de Rabardel*. (Rabardel, 1999a, p. 41)

Comprender la génesis instrumental requiere introducir múltiples articulaciones:

- La articulación entre las pautas o esquemas, que son preconstruidos en el artefacto por sus diseñadores y construidos definitivamente en el entorno socio-cultural, y los esquemas individuales, los propios de cada sujeto.

- La articulación entre dos tipos de patrones de utilización: los patrones de uso orientados a las tareas que corresponden a las acciones y actividades específicas relacionadas directamente con el artefacto (Rabardel, 1999a, 1999b) y los esquemas de acción instrumental, cuyo significado viene dado por el acto global diseñado para realizar transformaciones en el objeto de la actividad.

- La articulación entre los dos componentes de la doble génesis instrumental: un componente de instrumentalización (relativo al artefacto, al descubrimiento, a la selección de las instrucciones y a la personalización de los objetos) y un componente de la instrumentación, relativo al surgimiento y evolución de los esquemas y patrones para la realización de un tipo de tarea o tipo de conjunto tareas.

- La articulación entre lo que el instrumento permite hacer, es decir, el potencial, y las limitaciones del mismo.

- La articulación entre los diferentes artefactos, o entre diferentes niveles de los artefactos, que el sujeto dispone para realizar un determinada acción o tarea.

La Ergonomía Cognitiva estudia la importancia dada al hecho de que las herramientas empleadas en la actividad matemática, modelan y determinan no solo los procesos de aprendizaje, sino también el conocimiento y saber qué se genera a través de ellas, tanto desde un punto de vista pragmático, pues dichos artefactos, instrumentos u objetos tecnológicos son los que permiten actuar sobre la realidad y transformarla, como desde una perspectiva epistémica, interviniendo en nuestra comprensión del mundo, sin olvidar el enfoque heurístico.

Cabe destacar, que en los últimos años, la importancia de las cuestiones instrumentales en la comunidad didáctica, y debido en cierta parte al rol que juegan las mediaciones semióticas y la coordinación de los diferentes registros de representación en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, se ha visto acrecentado considerablemente.

1.2.4.7.3. Una nueva forma de representar: el trabajo con las TIC

El papel de las representaciones externas en el aprendizaje de matemáticas se ha visto afectado por la incorporación de los conocimientos e instrumentos informáticos, dando lugar a nuevos problemas, así como facilitando, si el uso que se hace de los mismos es adecuado, la coordinación entre registros de representación a través del empleo de las TIC.

Desde un punto de vista didáctico, y siguiendo a Balacheff (1994a, 1994b, 1994c), alguna de las preguntas que nos debemos hacer y que deben responderse desde el campo de la didáctica son: en la representación del mundo y su funcionamiento, que proporciona el empleo de sistemas informáticos, *¿qué relación mantiene esta representación y su aplicación con el mundo representado? ¿Qué consecuencias puede tener esta representación sobre la naturaleza del aprendizaje que resultara de la interacción con este sistema?* Dichas cuestiones sugieren que no sólo el comportamiento de la máquina debe ser considerado, sino también cómo se producen las representaciones particulares con las que se trabajan.

La utilización de la informática supone una simbiosis de nuestra inteligencia y capacidad cognitiva y una herramienta externa, dando lugar a un aprendizaje más dinámico e interactivo, permitiendo una rápida visualización de las situaciones problemáticas: la posibilidad de visualizar gráficamente conceptos teóricos, así como la de modificar las diferentes variables que intervienen en la resolución de problemas, favorece el aprendizaje de los estudiantes.

El siguiente esquema recoge las transformaciones cognitivas que se producen al hacer uso de las TIC con respecto a los registros de representación:

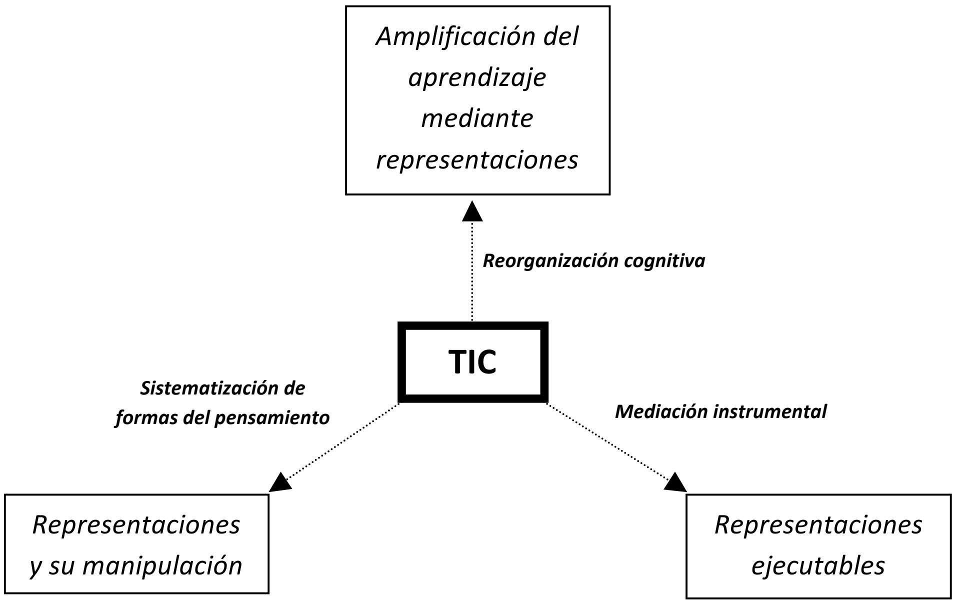


FIGURA 1.2.4.7.3.1. *Transformaciones cognitivas en el uso de las TIC.* (Balachef, 1994a, p. 11)

La expresión computacional de los objetos de enseñanza mediante los dispositivos informáticos empleados en el proceso de aprendizaje no es el resultado de un proceso simple de conversión de un sistema de representación a otro, sino que tiene lugar un verdadero trabajo de modelado de procesos y por lo tanto de teorización sobre los objetos de aprendizaje y sus condiciones de existencia, lo que nos lleva, según Balacheff a no poder separar la Transposición Didáctica de la Transposición Informática, de modo que su estudio conjunto, el examen de sus relaciones y sus características, es parte fundamental en la cooperación entre la tecnología y la didáctica.

No es lo mismo trabajar y representar un concepto matemático con pizarra y tiza o lápiz y papel que tratarlo mediante un ordenador o similar, ya que este medio impone restricciones que exigen determinadas transformaciones del saber a fin de facilitar la puesta en práctica de la representación adoptada.

Balacheff (1994a, 1994b 1994c), Trouche (2003, 2004), Kaput (1992) y Rabardel (1999a, 1999b), han señalado que la mayor repercusión e impacto que ha dado lugar el empleo de la tecnología en el campo de la educación es de carácter epistemológico, pues su uso ha dado lugar a una nueva realidad de los conocimientos u objetos matemáticos, ya que los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material que favorece, centrándonos en nuestra investigación, el tratamiento, la conversión, y por tanto la coordinación, de múltiples registros de representación, favoreciendo de manera significativa el aprendizaje por parte del estudiante.

2. ANÁLISIS DEL MARCO CURRICULAR: Legislación Educativa y manuales escolares

2.1. Introducción

El objetivo general de este apartado es estudiar y evaluar la importancia y relevancia que se les concede a los registros de representación semiótica y su coordinación en la enseñanza obligatoria, centrándonos, más concretamente, en la Educación Secundaria, por ser la etapa escolar en la que los alumnos van a manejar y enfrentarse a conceptos y nociones más complejas y abstractas, y por tanto donde la representación mediante los registros semióticos se incrementa significativamente.

Para ello, pretendemos:

- Analizar el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria de la LOE y la LOMCE, para evaluar qué experiencia previa en lo referente a la utilización de diversos registros de representación han vivenciado y recibido los estudiantes antes de pasar a la siguiente etapa educativa, ya que si bien, va a ser en Secundaria donde mayor uso van a hacer de las representaciones, durante Primaria deberían empezar a trabajar con ellas de manera necesaria para la conceptualización adecuada de los primeros conceptos.
- Estudiar el curriculum español de ESO en relación con el tema abordado, ya que en ellos se recogen los objetivos, competencias, contenidos, criterios de evaluación y orientaciones metodológicas para lograr que los estudiantes adquieran los elementos básicos de las áreas de conocimiento que en el se recogen.

Nos vamos a centrar en el estudio del currículum de la LOGSE, LOCE, LOE y LOMCE a nivel Nacional, porque es a partir del cual se desarrolla el curriculum de las Comunidades Autónomas. La razón por la cual se van a estudiar estas cuatro leyes educativas es que es a partir de la LOGSE cuando aparece la Educación Secundaria

Obligatoria como tal, etapa escolar que despierta mayor interés en esta investigación.

- Analizar varios manuales escolares con el fin de estudiar hasta qué punto los libros de texto toman en consideración la conversión entre registros y la coordinación entre ellos.

  El análisis de los textos escolares es considerado en Didáctica de las Matemáticas una vía útil para detectar e identificar posibles fenómenos didácticos ligados a la transposición didáctica y que pueden dar origen a problemas de aprendizaje en los estudiantes. Esto es debido a que, en muchas ocasiones, las transposiciones didácticas habituales son generadores potenciales de conflictos e inconsistencias a la hora de presentar los contenidos matemáticos.

  Por ello, la pertinencia de tal estudio está justificada, ya que, además, los libros de texto siguen siendo el principal instrumento de trabajo utilizado por el profesorado a la hora de enseñar matemáticas en el aula.

2.2. Hipótesis

Algunas de las hipótesis iniciales que podemos intuir antes de comenzar la investigación, basándonos, para su formulación, en nuestra experiencia como alumnos y en la formación recibida previamente en el Máster en Formación del Profesorado y en el Máster en Estudios Avanzados en Pedagogía, son las siguientes:

- **HIPOTESIS 1: La noción de cambio de registros semióticos goza de invisibilidad didáctica, no se contempla en el currículo ni entra en el tiempo didáctico.**

- **HIPOTESIS 2: Los manuales escolares en lugar de intentar proponer actividades donde estén realmente presentes múltiples representaciones que ejerciten la movilización cognitiva y la coordinación de diferentes sistemas semióticos por parte del alumno, persigue, principalmente, proporcionar al alumno herramientas que les conduzcan a la solución de los**

problemas planteados de manera rápida, dando prioridad al aprendizaje de procesos algoritmizados, generando de este modo, bloqueos y dificultades al obviar los saltos cognitivos que tienen lugar en el paso de unas representaciones a otras.

- **HIPOTESIS 3: Los registros de representación semióticos y la conversión entre ellos no son trabajados de manera consciente en la Enseñanza Obligatoria. No es satisfactorio ni suficiente el uso que se hace de ellos, pues se generan obstáculos didácticos importantes.**

Dichas hipótesis se intentaran comprobar y corroborar a lo largo de la presente estudio, pudiendo surgir nuevas a lo largo de todo el proceso de investigación, debido al carácter cualitativo de la misma.

2.3. Desarrollo del estudio y resultados

Las diferentes partes de las que consta nuestro estudio, así como los resultados más significativos obtenidos en cada una de las fases, son recogidas en el presente apartado.

Primeramente, hemos realizado un estudio de la Legislación Educativa Española, efectuando un análisis de su contenido en relación con nuestro tema de investigación, centrándonos, en primer lugar, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Matemáticas de Educación Primaria de la LOE (MEC, 2006a, 2007) y la LOMCE (MEC, 2014a) para posteriormente abordar los Decretos de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria de la LOGSE (MEC, 2001), LOCE (MEC, 2004b), LOE (MEC, 2006b) y LOMCE (MEC, 2014) por los motivos señalados con anterioridad.

La siguiente fase ha consistido en el estudio de manuales escolares de matemáticas, habiendo realizado un análisis de 18 libros de texto de Educación Primaria, tres por cada uno de los seis cursos que conforman la EP, y, finalizando con la evaluación y valoración de 15 textos escolares de Secundaria, tres por cada uno de los 5 cursos que hay en la ESO (1º, 2º, 3º, 4ºA y 4ºB) según está establecido en la LOE, pues la LOMCE no entrará en vigor en los cursos impares hasta el año lectivo 2015-2016 y en los pares hasta el 2016-2017, con la nueva organización en 6 cursos.

En lo que sigue, se presentan y exponen los aspectos más relevantes y notables, así como ciertas concreciones pedagógicas y didácticas, de los recursos y materiales curriculares analizados.

2.3.1. Los registros de representación semiótica en la legislación educativa española

El valor intrínseco de los currícula escolares en el mundo educativo viene dado por el hecho de que en ellos se recogen los objetivos, las competencias básicas, los contenidos objeto de aprendizaje, los criterios de evaluación y orientaciones metodológicas y pedagógicas para lograr que los estudiantes adquieran unos elementos básicos de cultura (Rico, 1997). Así pues, son inevitables y necesarios en el proceso educativo.

Uno de los hechos de mayor alcance en los últimos años dentro de la Didáctica, y más concretamente de la Didáctica de las Matemáticas, ha sido la incorporación del análisis de los currícula escolares en su ámbito de estudio, lo que ha permitido establecer nuevas formas de plantear, abordar fenómenos escolares y abrir nuevas vías de investigación con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de una determinada materia o área de conocimiento.

Debido a ello, y centrándonos en nuestro tema de estudio, se ha comenzado a tener en cuenta de manera explícita, a nivel de investigación en didáctica, la importancia de las representaciones en las discusiones y elaboración del Currículum de matemáticas. Rico destaca la importancia de las representaciones como un organizador del currículo, considerándolas como

> (...) el modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico. Mediante las representaciones las personas organizan su información sobre un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones escolares convencionales (Rico, 1997, p. 53)

Como se ha indicado, nuestro estudio aborda la manera en que se consideran y trabajan los registros de representación semiótica, la coordinación y conversión entre ellos, a lo largo de la enseñanza obligatoria, de modo que el análisis del marco curricular se hace imprescindible con el fin de determinar si dichos aspectos, los cuales juegan un papel fundamental en la comprensión de las nociones matemáticas, son contemplados en los decretos de enseñanzas mínimas de nuestra legislación educativa.

Seguidamente, y con la intención manifestada en el párrafo anterior, vamos a analizar el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria de la LOE y LOMCE y los Decretos de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria Obligatoria de la LOGSE, LOCE, LOE y LOMCE.

2.3.1.1. Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria

2.3.1.1.1. Análisis de la LOE

Antes de centrarnos en el estudio del Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria Obligatoria, se ha creído conveniente analizar cuáles pueden ser los registros de representación que los alumnos han podido comenzar a manejar durante la Educación Primaria, así como las posibles conversiones entre registros que se podrían y deberían haber introducido al alumno. Para ello vamos a analizar el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006a; MEC, 2007).

En dicho Decreto se dispone que la Educación Primaria comprende seis cursos organizados en tres ciclos de dos cursos cada uno, debiéndose incorporar los alumnos al primer curso el año natural en el que cumplan seis años.

Los contenidos, en el área de Matemáticas, se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: *Números y Operaciones*, *La Medida: estimación y cálculo de magnitudes*, *Geometría* y *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*.

Estos cuatro bloques de contenidos son los que van a desarrollarse a lo largo de los tres ciclos que componen la Educación Primaria con mayor o menor grado de complejidad en función del ciclo y curso en el que el alumno se encuentre.

A continuación, vamos a analizar por ciclos cuales son los registros de representación que podrían manejar los alumnos, las posibles conversiones que podrían efectuar, así como los contenidos y criterios de evaluación que hacen referencia a alguna de ellas:

TABLA 2.3.1.1.1. *Conversión entre registros en el primer ciclo de primaria*

Primer ciclo					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Números y operaciones	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN → RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	13	*Representación de cantidades en contextos familiares.* (RN → RFI)	1
La medida: estimación y cálculo de magnitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN	12	*Utilización del lenguaje adecuado para interpretar y describir mediciones espaciales sencillas.* (RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe	12	*Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios: puntos, líneas abiertas y cerradas; rectas y curvas.* (RGe → RLN) *Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios y elaboración de los mismos.* (RFI → RLN)	2
Tratamiento de la información, azar y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN → RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN	10	*Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.* (RGr → RLN) *La representación gráfica: diagramas de barras.* (RN → RGr) *Interpretar y producir información que utiliza una forma gráfica de representación.* (RGr → RLN)	2

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

Del estudio anterior se desprenden algunas observaciones. Una primera observación, que va a ser común al resto de ciclos, es el predominio de los tratamientos de carácter algorítmico frente al trabajo y manejo de posibles conversiones entre registros. Es importante resaltar que para lograr que los alumnos adquieran conocimientos de manera significativa no podemos basar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la transmisión de estrategias de cálculo prefijadas ni en métodos mecánicos, esto es, algoritmizados, sino que se precisa, entre otras condiciones, que el alumno establezca relaciones básicas entre las distintas representaciones que hacen referencia a una misma noción.

Si comparamos las conversiones que, según los contenidos del ciclo marcados en el currículo, el estudiante va a hacer, entre las cuales predominan aquellas en las que uno de los registros de representación que interviene es la lengua natural, con las posibles conversiones que el estudiante podría trabajar durante este primer ciclo, se observa que son escasas (13 frente a 1), por lo que podríamos destacar ya un fenómeno didáctico: la actividad reductora del ejercicio de la representación.

Del mismo modo, si estudiamos los criterios de evaluación que hacen referencia a alguna de las conversiones que se podrían efectuar, tenemos exclusivamente:

- Criterio de Evaluación número 9: "Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficos de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos" (MEC, 2007). **(RGr → RLN)**

Luego, en este primer ciclo las conversiones entre registros de representación quedan relegadas a un segundo plano, pasando inadvertidas al no contemplarse suficientemente en la legislación.

TABLA 2.3.1.1.2. *Conversión entre registros en el segundo ciclo de primaria*

<table>
<tr><th colspan="6">Segundo ciclo</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Bloque</th><th rowspan="2">Registro de representación que podrían utilizar</th><th colspan="2">Conversiones que podrían efectuar</th><th colspan="2">Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones</th></tr>
<tr><th>Tipos</th><th>Nº</th><th>Contenido y tipo de conversión</th><th>Nº</th></tr>
<tr><td>Números y operaciones</td><td>Registro de la Lengua Natural
Registro Numérico
Registro Figural-Icónico
Registro Gráfico
Registro Tabular</td><td>RLN ↔ RN
RN ↔ RFI
RFI→ RGr
RN ↔ RGr
RLN ↔ RFI
RFI→ RT
RLN ↔ RT
RT ↔ RGr</td><td>14</td><td>Necesidad de los números para contar, ordenar, operar, medir y codificar información.(RLN→RN; RFI → RN)

Comparación entre fracciones sencillas mediante ordenación y representación gráfica. (RN → RGr)</td><td>3</td></tr>
<tr><td>La medida: estimación y cálculo de magnitudes</td><td>Registro de la Lengua Natural
Registro Numérico
Registro Figural-Icónico
Registro Gráfico
Registro Tabular</td><td>RLN ↔ RN
RN ↔ RFI
RLN ↔ RFI
RLN ↔ RT
RFI → RT
RGr → RT
RGr ↔ RN</td><td>12</td><td>Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. Utilización del vocabulario adecuado.
(RFI → RLN; RN → RLN)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Geometría</td><td>Registro de la Lengua Natural
Registro Numérico
Registro Geométrico
Registro Figural-Icónico
Registro Tabular</td><td>RLN ↔ RGe
RGe ↔ RFI
RLN ↔ RFI
RN ↔ RGe
RN ↔ RFI
RT ↔ RGe</td><td>12</td><td>Representación elemental planos y maquetas. (RLN → RFI)

Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico. (RFI → RLN)

Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico.
(RGe → RLN)

Utilización de recursos informáticos para manipular, comprender, describir, crear y transformar formas planas y espaciales.
(RGe → RLN; RFI → RLN)

Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos. (RLN → RGe; RN → RGe)

Aproximación a la lectura e interpretación de mapas y planos sencillos. (RFI → RLN)</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Tratamiento de la información, azar y probabilidad</td><td>Registro de la Lengua Natural
Registro Numérico
Registro Figural-Icónico
Registro Gráfico
Registro Tabular</td><td>RLN ↔ RGr
RLN ↔ RT
RT → RGr
RN ↔ RT
RN → RGr
RFI → RT
RFI → RN
RFI → RLN</td><td>11</td><td>Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento y análisis de datos. (RN→RT)

Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. (RT → RLN)
Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. (RGr → RLN)

La representación gráfica: diagramas de barras y pictogramas. (RN → RGr)</td><td>4</td></tr>
</table>

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

En este ciclo aumentan tanto el número de conversiones que los alumnos pueden realizar como el número de conversiones que se contemplan en los contenidos en relación con el ciclo anterior. Aun así, el número de transformaciones que la ley parece considerar para cada uno de los bloques de contenidos sigue siendo reducido en comparación con las que realmente se podrían trabajar con los estudiantes, existiendo un predominio de las conversiones en las que interviene el registro discursivo de la lengua natural y el registro numérico.

También cabe señalar cómo todas las conversiones a las que se hace referencia en este ciclo van en un único sentido, no teniendo lugar, en ningún caso, una conversión de representaciones en el sentido inverso, lo que permitiría al alumno no solo adquirir un mejor manejo de las conversiones para una determinada noción sino una comprensión mayor de dicho contenido, interiorizándolo y aprendiéndolo de manera más significativa y completa al asegurarse la reversibilidad.

Si analizamos qué conversiones se contemplan en los criterios de evaluación de este segundo ciclo, tenemos:

- Criterio de Evaluación número 1: "Utilizar en contextos cotidianos la lectura y la escritura de números naturales, interpretando el valor posicional de cada una de ellas y comparando y ordenando números por el valor posicional y en la recta numérica" (MEC, 2007). **(RN→ RGr; RN →RFI)**

- Criterio de Evaluación número 2: "Reconocer fracciones como partes de la unidad o de colecciones, comparar fracciones sencillas y representarlas mediante gráficos simples o en la recta numérica" (MEC, 2007). **(RN → RFI; RN → RGr)**

- Criterio de Evaluación número 6: "Obtener información puntual y describir una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de una pista.), tomando como referencia objetos familiares y utilizar las nociones básicas de movimientos geométricos, para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas" (MEC, 2007). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 8: “Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado de forma de tabla o gráfica… Es asimismo motivo de evaluación la capacidad para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares” (MEC, 2007). **(RLN → RT; RT → RGr; RGr → RLN; RLN → RN)**

- Criterio de Evaluación número 9: “Leer, interpretar y describir verbalmente datos obtenidos directamente de tablas, pictogramas y diagramas de barras de fenómenos o situaciones familiares” (MEC, 2007). **(RT → RLN; RGr → RLN; RFI → RLN)**

Tal y como pasaba con los contenidos, existe un predominio de conversiones en las que interviene el lenguaje natural.

Llama la atención cómo en los criterios que hacen referencia a los números fraccionarios se tiene en cuenta la conversión del registro numérico al registro figural pero en ningún momento se hace alusión a la conversión en el sentido contrario, lo que permitiría al estudiante construir su conocimiento de manera funcional y significativa.

Igualmente, en lo relativo al registro geométrico, únicamente se toman en cuenta conversiones en las que las construcciones y representaciones propias de este registro intervengan en la descripción de planos.

Finalmente, en el bloque de estadística es en el que más conversiones se tienen en cuenta, lo que parece indicar que, basándonos en el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas, en dicho bloque parece llevarse a cabo un trabajo adecuado en cuanto a conversión de registros semióticos se refiere.

Por tanto, aunque en este ciclo aumentan las conversiones que los estudiantes pueden manejar, únicamente parecen trabajarse aquellas que son estrictamente necesarias para que los alumnos accedan a una determinada noción o conocimiento, pasando por alto todas aquellas que favorecerían un aprendizaje más significativo.

TABLA 2.3.1.1.3. *Conversión entre registros en el tercer ciclo de primaria*

Tercer ciclo					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Números y operaciones	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Geométrico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	14	*Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica.* (RN → RGr)	1
La medida: estimación y cálculo de magnitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN RGe → RN	13	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. Utilización del vocabulario adecuado.* (RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Algebraico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe RLN ↔ RA RN ↔ RA RT ↔ RA RA ↔ RFI	20	*Sistema de coordenadas cartesianas: ejes y centro de coordenadas. Representación y lectura de puntos.* (RGr → RLN; RN → R RGr; RGe → RLN; RLN → R. RGe) *Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros.* (RGr → RLN; RGe → RLN) *La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.* (RLN → RFI; RLN → RGr; RGe → RLN) *Representación de formas geométricas.* (RLN → RGe; RFI → RGe) *Resolución de problemas geométricos explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.* (R. RGe → RLN; RN → RLN)	7
Tratamiento de la información, azar y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Algebraico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN ↔ RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN RN ↔ RA RA ↔ RT	15	*Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores.* (RN → RGr) *Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico para la representación de datos.* (RGr → RLN; R.FI → RLN) *Elaboración y presentación de gráficos y tablas.* (RN→ RGr; RN → RT)	4

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

En este tercer ciclo, el número de registros que los alumnos podrían manipular en cada uno de los bloques de contenidos es mayor que en el ciclo anterior, por lo que las conversiones que sería posible que llevasen a cabo también aumenta. Sin embargo, a excepción del bloque correspondiente a geometría en el que, debido a que en este ciclo se comienza a estudiar el sistema de coordenadas cartesiano, se contemplan nuevas conversiones (R. gráfico → R. lengua natural; R. numérico→ R. gráfico), el resto permanecen prácticamente igual que en el ciclo anterior.

Por otro lado, los criterios de evaluación que hacen referencia a la valoración de alguna conversión entre registros, disminuye considerablemente con respecto al segundo ciclo:

- Criterio de Evaluación número 7: "Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares" (MEC, 2007). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**
- Criterio de Evaluación número 8: "Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas y tablas numéricas de un conjunto de datos relativos a contextos familiares. También se valorará el grado de comprensión de la información así expresada, mediante la comunicación oral y escrita del razonamiento seguido" (MEC, 2007). **(RT→ RLN; RGr →RLN)**

2.3.1.1.2. Análisis de la LOMCE

Al igual que en la LOE, la LOMCE organiza esta etapa educativa en seis cursos. No obstante, a diferencia de su predecesora, desparece la organización de estos en ciclos.

Con la intención de facilitar la concreción curricular, los contenidos se han organizado en cinco grandes bloques, por lo que se añade uno en comparación con la LOE: *Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, Números, Medida, Geometría y Estadística y probabilidad*.

En lo que sigue, vamos a analizar, por curso, cuales son los registros de representación que podrían manejar los alumnos, las posibles conversiones que podrían efectuar, así como los contenidos y criterios de evaluación que hacen referencia a alguna de ellas:

TABLA 2.3.1.2.1. *Conversión entre registros en primero de primaria*

1º EP					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Procesos, métodos y actitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN → RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RN ↔ RGe RT ↔ RGe	21	*Hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.* (RLN → RN; RLN →RFI; RLN →RT)	3
Números	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN → RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	13	*Nombre y grafía de los números hasta el noventa y nueve.* (RLN ↔ RN)	2
Medidas	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN	12	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en cualquiera de los procedimientos utilizados.*(RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe	12		0
Estadística y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN → RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN	10	*La representación gráfica: diagramas de barras.* (RN → RGr) *Lectura e interpretación de datos e informes.* (RN → RLN)	2

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

Una primera observación general, nos permite asegurar que el cambio legislativo no ha dado lugar a una mejora en lo que a coordinación de registros de representación se refiere en comparación con la anterior Ley, pues parece apostarse por un trabajo más mecánico y algorítmico de los contenidos, desapareciendo toda aquella terminología que hacía referencia a lo manipulativo y representativo.

Llama la atención como en el bloque de *Geometría* las conversiones entre registros destacan por su ausencia.

El mayor número de conversiones que encontramos en 1º EP se encuentran dentro del nuevo bloque de *Procesos, métodos y actitudes.* No obstante, se trata de conversiones en un único sentido, tomando como punto de partida el Registro de la Lengua Natural.

Si nos centramos en los criterios de evaluación que hacen referencia a alguna de las conversiones que se podrían efectuar, observamos una leve mejora con respecto a la LOE, pues pasamos de un único criterio a cuatro:

- Criterio de Evaluación número 1.3: "Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (MEC, 2014a). **(RN → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 1.5: "Elaborar y presentar pequeños informes sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación" (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 2.1: "Leer, escribir y ordenar los números naturales hasta el 99, utilizándolos en la interpretación y la resolución de problemas en contextos reales" (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 5.1: "Hacer interpretaciones sobre fenómenos muy cercanos de los datos presentados en gráficas de barras y cuadros de doble entrada" (MEC, 2014a). **(RGr → RLN; RT → RLN)**

TABLA 2.3.1.2.2. *Conversión entre registros en segundo de primaria*

2º EP					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Procesos, métodos y actitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN → RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RN ↔ RGe RT ↔ RGe	21	*Hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.* (RLN → RN; RLN →RFI; RLN →RT)	3
Números	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN → RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	13	*Los números en situaciones reales: lectura, escritura, ordenación, comparación, representación en la recta numérica, descomposición, redondeo...)* (RLN ↔ RN; RN → RFI; RN → RGe)	4
Medidas	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN	12	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en cualquiera de los procedimientos utilizados.*(RFI → RLN; RN → RLN) *Lectura en relojes analógicos y digitales.*(RFI → RLN; RN → RLN)	4
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe	12		0
Estadística y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN → RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN	10	*Representación de datos.* (RN → RGr) *Lectura de gráficas y cuadros de doble entrada.* (RT → RLN; RGr→ RLN)	3

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

En segundo curso aumentan levemente el número de contenidos que hacen referencia a una coordinación entre representaciones en el bloque de Números, Medida y Estadística y probabilidad.

Los contenidos de geometría siguen sin hacer referencia, ya sea explicita o implícitamente, al paso o transformación de un sistema de representación a otro, cuando la realidad es que podrían trabajarse hasta doce conversiones en alumnos de estas edades.

Si analizamos qué conversiones se contemplan en los criterios de evaluación de este segundo curso, tenemos:

- Criterio de Evaluación número 1.3: “Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (MEC, 2014a). **(RN → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 1.5: “Elaborar y presentar pequeños informes sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 2.1: “Leer, escribir y ordenar los números naturales hasta el 999, utilizándolos en la interpretación y la resolución de problemas en contextos reales” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 3.2*:* “Interpretar textos numéricos sencillos relacionados con la medida para resolver problemas utilizando medidas de longitud, masa/peso, capacidad y tiempo en contextos reales” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 5.1: “Hacer interpretaciones de los datos presentados en gráficas de barras y cuadros de doble entrada, formulando preguntas y resolviendo sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficas y cuadros de doble entrada” (MEC, 2014a). **(RGr → RLN; RT → RLN)**

TABLA 2.3.1.2.3. *Conversión entre registros en tercero de primaria*

3ºEP					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Procesos, métodos y actitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro geométrico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RN ↔ RGe RT ↔ RGe	22	*Hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.* (RLN → RN; RLN →RFI; RLN →RT)	3
Números	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	14	*Nombre y grafía de los números hasta de seis cifras.*(RLN↔RN)	2
Medidas	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN	12	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en cualquiera de los procedimientos utilizados.*(RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe	12	*Elaboración y utilización de códigos diversos para describir la situación de un objeto en el espacio en situaciones cercanas al alumnado.* (RFI → RLN) *Lectura e interpretación de mapas y planos sencillos.* (RFI → RLN) *Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico.* (RGe → RLN) *Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos.* (RLN → RGe; RN → RGe)	4
Estadística y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN ↔ RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN	11	*Recogida y representación de datos en tablas y gráficas.* (RN → RGr) *Lectura de gráficas y tablas.* (RT → RLN; RGr→ RLN)	3

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

En este curso aumentan tanto el número de conversiones que los alumnos pueden realizar como el número de conversiones que se contemplan en los contenidos en relación con los cursos anteriores. Aun así, el número de transformaciones que la ley parece considerar para cada uno de los bloques de contenidos sigue siendo inferior a las posibles conversiones que se puede trabajar con los estudiantes, existiendo un predominio de las conversiones en las que interviene el registro discursivo de la lengua natural y el registro numérico.

Resulta llamativo que no se recoja dentro del bloque de Números la utilización del registro figural y la representación en recta numérica a la hora de presentar y transmitir a los alumnos dos conceptos nuevos para ellos como son los números decimales y las fracciones. La utilización de estas representaciones y la coordinación con el registro de la Lengua Natural y el Numérico se hacen de vital importancia para que tenga lugar una comprensión adecuada de estos nuevos conocimiento. También cabe destacar que salvo una conversión que se da en ambos sentidos, todas las demás van en sentido único, lo que da lugar a una perdida de información y por tanto se priva al alumno de una completa comprensión de los conceptos puestos en juego.

Por primera vez aparecen contenidos dentro del bloque de geometría relacionados con la conversión de representaciones, lo que supone un gran salto con respecto a los dos anteriores cursos donde ya se debería haber empezado a ejercitar.

Si analizamos qué conversiones se contemplan en los criterios de evaluación de este curso, tenemos:

- Criterio de Evaluación número 1.3: “Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (MEC, 2014a). **(RN → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 1.5: “Elaborar y presentar pequeños informes sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 2.1: “Leer, escribir y ordenar los números naturales hasta el 999.999, utilizándolos en la interpretación y la resolución de problemas en contextos reales” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 4.1: “Describir una representación espacial (croquis, callejeros, planos sencillos...), interpretar y elaborar informaciones referidas a situaciones y movimientos (seguir un recorrido dado, indicar una dirección) y valorar expresiones artísticas, utilizando como elementos de referencia las nociones geométricas básicas” (MEC, 2014a). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 4.2: “Reconocer y describir figuras planas del espacio, a través de la manipulación y la observación, y realizar clasificaciones según diferentes criterios” (MEC, 2014a). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 5.1: “Recoger datos utilizando técnicas de recuento, ordenando los datos atendiendo a criterios de clasificación y expresando el resultado en forma de tabla o gráfica” (MEC, 2014a). **(RN → RGr; RN → RT)**

TABLA 2.3.1.2.4. *Conversión entre registros en cuarto de primaria*

		4ºEP			
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Procesos, métodos y actitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro geométrico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RN ↔ RGe RT ↔ RGe	22	*Hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.* (RLN → RN; RLN →RFI; RLN →RT)	3
Números	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	14	*Nombre y grafía de los números hasta de seis cifras.*(RLN↔RN)	2
Medidas	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN	12	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en cualquiera de los procedimientos utilizados.*(RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe	12	*Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico.* (RFI → RLN) *Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico.* (RGe → RLN) *Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos.* (RLN → RGe; RN → RGe)	4
Estadística y probabiidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN ↔ RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN	11	*Lectura e interpretación de tablas de datos.* (RT → RLN) *Representación en diagramas de barras y pictogramas.* (RN → RGr)	2

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

La evolución, en lo que a nuestro tema de estudio se refiere, entre 3º y 4º EP es prácticamente nula. Se mantienen las mismas conversiones en todos los bloques de contenidos.

En el caso concreto del bloque de Números sigue sin aparecer la utilización del registro Figural y Geométrico en relación, ya no solo a los números decimales y fracciones, sino también en el trabajo con potencias y la descomposición del número.

Lo mismo ocurre con los criterios de evaluación, apareciendo únicamente dos nuevos con respecto a lo contemplado en 3º EP:

- Criterio de Evaluación número 2.1: “Leer, escribir y ordenar fracciones y números decimales, utilizándolos en la interpretación y la resolución de problemas en contextos reales” (MEC, 2014a). **(RN → RLN; RLN → RN)**

- Criterio de Evaluación número 4.2: “Reconocer y describir formas y cuerpos geométricos del espacio (cubos, prismas, cilindros, esferas), a través de la manipulación y la observación, y realizar clasificaciones según diferentes criterios” (MEC, 2014a). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

TABLA 2.3.1.2.5. *Conversión entre registros en quinto de primaria*

5º EP					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Procesos, métodos y actitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Geométrico Registro Algebraico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe RLN ↔ RA RN ↔ RA RT ↔ RA RA ↔ RFI	32	*Hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.* (RLN → RN; RLN →RFI; RLN →RT)	3
Números	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Geométrico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	14	*Nombre y grafía de los números de más de seis cifras.*(RLN↔RN) *Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo. Fracciones propias e impropias. Número mixto. Representación gráfica.* (RN ↔ RFI)	4
Medida	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN RGe → RN	13	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. Utilización del vocabulario adecuado.* (RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Algebraico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe RLN ↔ RA RN ↔ RA RT ↔ RA RA ↔ RFI	20	*Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos.*(RGr → RLN; RGe → RLN) *La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.* (RLN → RFI; RLN → RGr; RGe → RLN)	4
Estadística y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Algebraico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN ↔ RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN RN ↔ RA RA ↔ RT	15	*Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores.* (RN → RGr) *Interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras y sectoriales.* (RGr → RLN; R.FI → RLN) *Construcción de tablas de frecuencias.*(RN→ RGr; RN → RT)	4

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

En 5º EP, el número de representaciones que los alumnos podrían emplear en cada uno de los bloques de contenidos es mucho mayor que en los anteriores cursos, debido al nivel de desarrollo cognitivo, por lo que las conversiones que sería posible que llevasen a cabo también aumenta. Sin embargo permanecen prácticamente igual que en el curso anterior o incluso disminuyen.

Por otro lado, los criterios de evaluación que hacen referencia a la valoración de alguna conversión entre registros, permanece prácticamente invariable:

- Criterio de Evaluación número 1.3: "Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (MEC, 2014a). **(RN → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 1.5: "Elaborar y presentar pequeños informes sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación" (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 2.1: "Leer, escribir y ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números (naturales, enteros, fracciones y decimales hasta las décimas)" (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**
- Criterio de Evaluación número 3.2: "Interpretar textos numéricos relacionados con la medida" (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 4.5: "Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares" (MEC, 2014a). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 5.1: "Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato" (MEC, 2014a). **(RGr → RLN; RGr → RN)**

TABLA 2.3.1.2.6. *Conversión entre registros en sexto de primaria*

6º EP					
Bloque	**Registro de representación que podrían utilizar**	**Conversiones que podrían efectuar**		**Contenido que hacen referencia a alguna de las conversiones**	
		Tipos	**Nº**	**Contenido y tipo de conversión**	**Nº**
Procesos, métodos y actitudes	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Geométrico Registro Algebraico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe RLN ↔ RA RN ↔ RA RT ↔ RA RA ↔ RFI	32	*Hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.* (RLN → RN; RLN →RFI; RLN →RT)	3
Números	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Geométrico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RFI→ RGr RN ↔ RGr RLN ↔ RFI RFI→ RT RLN ↔ RT RT ↔ RGr	14	*Nombre y grafía de los números de más de seis cifras.*(RLN↔RN) *Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo. Fracciones propias e impropias. Número mixto. Representación gráfica.* (RN ↔ RFI)	4
Medida	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RN RN ↔ RFI RLN ↔ RFI RLN ↔ RT RFI → RT RGr → RT RGr ↔ RN RGe → RN	13	*Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. Utilización del vocabulario adecuado.* (RFI → RLN; RN → RLN)	2
Geometría	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Algebraico Registro Geométrico Registro Figural-Icónico Registro Tabular	RLN ↔ RGe RGe ↔ RFI RLN ↔ RFI RN ↔ RGe RN ↔ RFI RT ↔ RGe RLN ↔ RA RN ↔ RA RT ↔ RA RA ↔ RFI	20	*Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos.*(RGr → RLN; RGe → RLN) *La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.* (RLN → RFI; RLN → RGr; RGe → RLN)	4
Estadística y probabilidad	Registro de la Lengua Natural Registro Numérico Registro Algebraico Registro Figural-Icónico Registro Gráfico Registro Tabular	RLN ↔ RGr RLN ↔ RT RT → RGr RN ↔ RT RN → RGr RFI → RT RFI → RN RFI → RLN RN ↔ RA RA ↔ RT	15	*Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores.* (RN → RGr) *Interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras y sectoriales.* (RGr → RLN; R.FI → RLN) *Construcción de tablas de frecuencias.*(RN→ RGr; RN → RT)	4

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

Si vamos comparando las transformaciones entre registros bloque a bloque entre 5º y 6º, podemos observar que las diferencias son prácticamente nulas, tanto en número como en registros semióticos involucrados. Al igual ocurre con los criterios de evaluación:

- Criterio de Evaluación número 1.3: “Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (MEC, 2014a). **(RN → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 1.5: “Elaborar y presentar pequeños informes sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 2.1: “Leer, escribir y ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números (romanos, naturales, enteros, fracciones y decimales hasta las centésimas)” (MEC, 2014a). **(RN → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 4.2: “Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares” (MEC, 2014a). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 4.3: “Reconocer, describir los elementos básicos, clasificar según diversos criterios y reproducir cuerpos geométricos aplicando los conocimientos a la comprensión e interpretación del entorno” (MEC, 2014a). **(RFI → RLN; RGe → RLN)**

- Criterio de Evaluación número 5.1: “Recoger y registrar una información cuantificable, utilizando algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagrama de barras” (MEC, 2014a). **(RLN → RGr; RN → RGr)**

- Criterio de Evaluación número 5.2: “Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato” (MEC, 2014a). **(RGr → RLN; RGr → RN)**

2.3.1.1.3. Conclusiones

Así, podemos concluir que si bien, durante la primaria el uso de representaciones matemáticas se incrementa considerablemente con respecto a la educación infantil, periodo en donde los niños tienen contacto con nociones matemáticas a través de juegos y materiales concretos empezando a interactuar con algunos símbolos (números y figuras), estas representaciones parecen emplearse y enseñarse

...como si fueran un fin en sí mismas. Las representaciones deben ser tratadas como elementos esenciales para apoyar la comprensión de los estudiantes de los conceptos y relaciones matemáticas; en comunicar acercamientos, argumentos e ideas matemáticas a uno mismo y a los demás; en reconocer conexiones entre conceptos matemáticos relacionados (NCTM, 2000)*;*

y sin embargo la manera en que se contemplan y trabajan en primaria tanto los registros de representación como las conversiones entre ellos, no es adecuada ni suficiente.

Desde esta perspectiva, y particularizando en el tratamiento que hacen los dos últimos currícula escolares de primaria a este respecto, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Si bien, durante la Educación Primaria parece que existe cierta introducción al uso y manipulación de más de un registro de representación para un determinado concepto, podemos decir que es limitado y bastante pobre con respecto a las posibilidades existentes en dicha etapa educativa. Las conversiones que se han localizado en el estudio del Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria, más que favorecer la comprensión de los objetos matemáticos y las propiedades que los caracterizan, parecen perseguir que el alumno resuelva las tareas planteadas con éxito, pasando por alto la complejidad existente en la relación entre representaciones no existiendo conciencia didáctica.
- La mayor parte de las nociones parecen introducirse y presentarse a los estudiantes, según lo recogido en la legislación, a través de un

único registro de representación, lo que, además de dar lugar a la confusión por la identificación del objeto de conocimiento con la representación utilizada, supone una pérdida de información significativa, pues para configurar un concepto en toda su extensión y profundidad, de manera que se evidencien todas sus propiedades y características, se hace imprescindible trabajar con varias de las representaciones que hacen referencia al concepto objeto de aprendizaje.

- Destaca cómo el registro de la lengua natural predomina de manera absoluta, debido a que es considerado tradicionalmente como la fuente universal de conocimiento, desempeñando dos funciones básicas que se encuentran interrelacionadas: la de comunicar y la de representar.

Hay que tener en cuenta que una de las causas importantes que se encuentra relacionada directamente con el deficiente rendimiento académico de muchos de los estudiantes en la escolaridad obligatoria, radica en el insuficiente desarrollo de su capacidad para la comprensión lectora, además de presentar grandes deficiencias a la hora de tener que justificar y argumentar resultados haciendo uso de la lengua escrita.

En los últimos años, investigaciones en neurociencia, cuyos propósitos han sido los de aportar datos y resultados que permitan mejorar el diagnóstico y la intervención educativa en la lectura, han señalado dos posibles causas relacionadas con las dificultades en la comprensión lectora: la falta de desarrollo y progreso de habilidades y técnicas propias de la lectura y la comprensión, por un lado, y la posible desorganización, o déficit funcional, de los circuitos neuronales vinculados en los procesos del lenguaje, por otro.

Cuando leemos un texto, no somos conscientes de la dificultad y complejidad de las operaciones que se realizan en nuestro sistema visual. En una fracción de segundo nuestro cerebro reconoce las palabras y accede a su sentido. Esta operación es más compleja de lo que parece, pues tiene lugar un proceso de reconocimiento y selección de las características visuales que son relevantes para la lectura y las que no lo son. Aprender a leer consiste en poner en conexión dos sistemas cerebrales presentes en el niño: el sistema visual de reconocimiento de las formas y las áreas del lenguaje (Dehaene, 2007).

El binomio formado por neurociencia y educación, persigue la comprensión de los procesos mentales que suceden en nuestro cerebro, con el fin de poder mejorar las estrategias, modelos, métodos y técnicas de identificación e intervención educativa, de manera que el proceso de enseñanza-aprendizaje esté acorde con el desarrollo de los sujetos. De esta forma, a través del estímulo de determinadas regiones cerebrales se puede llevar a cabo un aprendizaje de forma más natural, integrando y procesando el conocimiento en el cerebro de manera tal, que dicha información sea considerada relevante, utilizable y aplicable.

Así, estudios como los desarrollados por Dehaene (2003) en el campo de la neuroimagen, han evidenciado que la región cerebral que parece asumir la función de reconocer las palabras, antes de que se vea estimulada y activada por estas, muestra, primeramente, una clara preferencia por dibujos e imágenes.

No cabe duda que la lengua natural juega un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero en el caso concreto de la enseñanza de las matemáticas, el empleo de símbolos, tablas, gráficas, figuras, construcciones geométricas, etc., favorece las operaciones cognitivas, afianzando los conocimientos que se pretende que el estudiante adquiera.

Todo esto nos lleva a afirmar que un empleo tan predominante de dicho registro sin generar la necesidad de coordinarlo con los anteriormente mencionados resulta inadecuado, pues la comprensión de un enunciado es condición necesaria, aunque no suficiente, en la resolución de las diversas tareas que se les plantea a los estudiantes.

- Los sistemas de representación están estrechamente ligados al proceso de enseñanza-aprendizaje de las nociones matemáticas, y sin embargo la manera en que parecen considerarse en el Decreto de Enseñanzas Mínimas analizado, no parecen ayudar ni favorecer la adquisición y enriquecimiento representaciones internas propias de cada alumno, así como el potenciar la reconstrucción, reconfiguración conexión y coordinación entre ellas de modo que puedan relacionar los significados y objetos matemáticos correspondientes de manera significativa.
- La forma en que son contemplados los registros de representación semiótica y sus posibles conversiones es escasa e insuficiente, lo que puede dar lugar a futuras limitaciones por parte del alumno en el aprendizaje de los sucesivos conocimientos.

Por tanto, la preparación que recibe el alumno durante la Educación Primaria en lo que a coordinación entre registros de representación se refiere, que sería esencial para un adecuado funcionamiento cognitivo del estudiante durante la Educación Secundaria, es prácticamente inexistente según el análisis realizado.

2.3.1.2. Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria LOGSE, LOCE, LOE y LOMCE

La principal finalidad del estudio de estas cuatro leyes educativas es conocer hasta qué punto la coordinación y conversión entre registros de representación semiótica se ha contemplado en la legislación educativa española desde la aparición de la Educación Secundaria Obligatoria, etapa educativa que nos interesa en esta investigación.

A continuación presentamos un breve análisis descriptivo de los aspectos que hacen referencia a los registros de representación y la conversión entre ellos en cada uno de las tres leyes educativas seleccionadas.

El análisis se realizará en torno a las siguientes consideraciones:

1. Con respecto a los contenidos:

    - Se estudiaran los aspectos que se menciona a continuación por cursos y dentro de cada uno de los bloques (*Números*, *Álgebra*, *Geometría*, *Funciones y Gráficas* y *Probabilidad y Estadística*) que conforman el curso:

        - Cambio de registro como contenido dentro del bloque
        - Registros de representación que se podrían utilizar
        - Registros de representación que aparecen
        - Conversión entre registros implícitos en los contenidos
        - Conversión entre registros pedidos de manera explícita

2. Con respecto a los criterios de evaluación:

    - Conversiones que se contemplan en los criterios de evaluación en cada uno de los cursos.

A continuación se recogen los aspectos y resultados más relevantes del estudio realizado.

2.3.1.2.1. Análisis de los contenidos

El currículum, como eje fundamental en torno al cual giran los procesos Educativos, ha dado lugar a que los elementos que los componen, entre los cuales se encuentran los contenidos, hayan sido objeto y centro de atención de gran cantidad de investigaciones.

La elección de los contenidos que forman parte de un Diseño Curricular no debe surgir de la nada; y mucho menos en el caso de la enseñanza obligatoria, sino que debe partir de una práctica pedagógica que anhela transformar, innovar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de una determinada materia.

Cada una de estas materias o áreas de conocimiento aparece organizada en bloques de contenidos de modo que da coherencia al área como cuerpo organizado de conocimientos. En el caso del curriculum de

Secundaria, cinco son los bloques de contenido en los que se organiza la materia: *Números*, *Álgebra*, *Geometría*, *Funciones y Gráficas* y *Probabilidad y Estadística*.

Con la intención de valorar el grado de importancia y relevancia que se otorga a los registros de representación semiótica y a la coordinación entre ellos en los diseños curriculares, hemos llevado a cabo un análisis de los contenidos que conforman el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Matemáticas de la LOGSE, LOE, LOCE y LOMCE, presentando los resultados obtenidos a continuación:

TABLA 2.3.1.2.1.1. *Conversión entre registros en el bloque de Números 1º ESO*

1º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Números	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGr	• RLN • RN • RGr	• RLN • RN	• RLN • RN
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RLN - RN	• RLN - RN	• RLN - RN	• RLN - RN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RN - RGr	• RN - RGr	________	________

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.2. *Conversión entre registros en el bloque de Álgebra 1º ESO*

		1º ESO		
		Contenidos		
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Álgebra	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	_______	_______	• RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	_______	_______	• RN $\rightarrow$ RA	• RN $\rightarrow$ RA
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	_______	_______	• RN $\leftrightarrow$ RA	• RN $\leftrightarrow$ RA

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.3. *Conversión entre registros en el bloque de Geometría 1º ESO*

	1º ESO			
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Geometría	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RGe → RN • RLN → RGe	• RGe → RN • RLN →RGe	• RGe → RN • RLN →RGe	• RGe → RN • RLN →RGe
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.4. *Conversión entre registros en el bloque de Funciones y Gráficas 1º ESO*

	1º ESO			
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Funciones y gráficas	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RT → RLN • RGr → RLN	• RT → RLN • RGr → RLN	• RT → RLN • RGr → RLN	• RT → RLN • RGr → RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RT → RGr	• RT → RGr	• RT → RGr	• RT → RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.5. *Conversión entre registros en el bloque de Probabilidad y Estadística 1º ESO*

1º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Prob / Estad	X/X	X/X	X/✓	X/✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	———	———	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	———	———	• RN → RT • RT→ RGr	• RN → RT • RT→ RGr
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	———	———	———

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.6. *Conversión entre registros en el bloque de Números 2º ESO*

	2º ESO			
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Números	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN	• RLN • RN	• RLN • RN • RT	• RLN • RN • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN	• RLN→ RN • RT→ RLN	• RLN→RN • RT→ RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	______	______	______	______

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.7. *Conversión entre registros en el bloque de Álgebra 2º ESO*

2º ESO				
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Álgebra	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN → RA • RA → RN	• RN → RA • RA → RN	• RN → RA • RA → RN	• RN → RA • RA → RN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	———	———	———

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.8. *Conversión entre registros en el bloque de Geometría 2º ESO*

2º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Geometría	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RGe → RN • RLN → RN • RFI → RLN	• RGe → RN • RLN →RGe • RFI → RLN	• RGe → RN • RLN →RGe	• RGe → RN • RLN →RGe
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RLN → RGe	• RLN →RGe	• RLN →RN	• RLN →RN

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.9. *Conversión entre registros en el bloque de Funciones y Gráficas 2º ESO*

2º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	LOCE	LOE	LOMCE
Bloque: Funciones y gráficas	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RT → RLN • RGr → RLN	• RT → RLN • RGr → RLN	• RGr → RLN	• RGr → RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RT → RGr	• RT → RGr	• RT → RGr • RLN→ RGr • RA → RGr	• RT → RGr • RLN→ RGr • RA → RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.10. *Conversión entre registros en el bloque de Probabilidad y Estadística 2º ESO*

	2º ESO			
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Prob / Estad	X/✓	X/✓	X/✓	X/✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	———	———	———

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.11. *Conversión entre registros en el bloque de Números 3º ESO*

3º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Números	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGr	• RLN • RN • RGr - - - - - - - - • RLN • RN • RGr	• RLN • RN • RGr	• RLN • RN • RGr - - - - - - - - • RLN • RN • RGr
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN - - - - - - - - • RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN - - - - - - - - • RLN ↔ RN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RN → RGr	• RN → RGr - - - - - - - - • RN → RGr	• RN → RGr	• RN → RGr - - - - - - - - • RN → RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.12. *Conversión entre registros en el bloque de Álgebra 3º ESO*

3º ESO				
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Álgebra	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA • RGr • RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA	• RLN • RN • RA • RLN • RN • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN → RA • RA → RLN	• RN → RA • RA → RLN • RLN → RGr • RA → RGr • RN → RA • RA → RLN	• RN → RA • RA → RLN	• RN → RA • RA → RLN • RN → RA • RA → RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	——— ———	———	• RLN → RA • RLN → RA

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.13. *Conversión entre registros en el bloque de Geometría 3º ESO*

3º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	LOCE	LOE	LOMCE
Bloque: Geometría	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe - - - - - • RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe - - - - - • RLN • RN • RGe
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RGe → RN • RLN → RN • RLN → RGe	• RGe → RN • RLN →RN • RLN →RGe - - - - - • RGe → RN • RLN →RN • RLN →RGe	• RGe → RN • RLN →RGe • RLN → RN	• RGe → RN • RLN →RGe • RLN → RN - - - - - • RGe → RN • RLN →RGe • RLN → RN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	_______	_______ - - - - - _______	_______	_______ - - - - - _______

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.14. *Conversión entre registros en el bloque de Funciones y Gráficas 3º ESO*

3º ESO				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Funciones y gráficas	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA - - - - - • RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA - - - - - • RLN • RN • RGR • RT • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RT → RLN • RGr → RLN • RLN→ RA	• RT → RLN • RGr →RLN • RLN→ RA - - - - - • RT → RLN • RGr →RLN • RLN→ RA	• RT → RGr • RGr →RLN • RLN↔RA • RLN→ RT • RA → RGr	• RT → RGr • RGr →RLN • RLN↔RA • RLN→ RT • RA → RGr - - - - - • RT → RGr • RGr →RLN • RLN↔RA • RLN→ RT • RA → RGr
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RT ↔ RGr • RLN→ RT • RA → RT • RLN→ RGr • RA → RGr	• RT → RGr • RLN→ RGr • RA → RGr - - - - - • RT ↔ RGr • RLN→ RT • RA → RT • RLN→ RGr • RA → RGr	———	• RT → RGr • RLN→ RGr • RA → RGr - - - - - • RT → RGr • RLN→ RGr • RA → RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.16. *Conversión entre registros en el bloque de Probabilidad y Estadística 3º ESO*

3º ESO				
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Prob / Estad	✓/✓	✓/✓	✓/✓	✓/✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT - - - - - - - • RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT - - - - - - - • RLN • RN • RGR • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN - - - - - - - • RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN - - - - - - - • RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	——— - - - - - - - ———	———	——— - - - - - - - ———

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.16. *Conversión entre registros en el bloque de Números 4º ESO (A y B)*

4º ESO (A y B)				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Números	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGr	• RLN • RN • RGr	• RLN • RN • RGr • RA	• RLN • RN • RGr • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN	• RLN ↔ RN • RN → RA • RA → RGr • RGr ↔ RN	• RLN ↔ RN • RN → RA • RA → RGr • RGr ↔ RN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RN → RGr	• RN → RGr	• RN → RGr	• RN → RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.17. *Conversión entre registros en el bloque de Álgebra 4º ESO (A y B)*

	4º ESO (A y B)			
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Álgebra	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RA • RGr	• RLN • RN • RA • RGr	• RLN • RN • RA • RGr	• RLN • RN • RA • RGr
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN → RA • RA ↔ RLN • RGr → RLN	• RN → RA • RA ↔ RLN • RGr →RLN	• RN → RA • RA ↔ RLN • RGr →RLN	• RN → RA • RA ↔ RLN • RGr →RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RA → RGr	• RA → RGr	• RA → RGr	• RA → RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.18. *Conversión entre registros en el bloque de Geometría 4º ESO (A y B)*

4º ESO (A y B)				
Contenidos				
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Geometría	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGe • RA • RGr	• RLN • RN • RGe • RA • RGr	• RLN • RN • RGe	• RLN • RN • RGe
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RGe → RN • RLN → RN • RN → RGr • RLN → RGe	• RGe → RN • RLN → RN • RN → RGr • RLN →RGe	• RGe → RN • RLN →RGe	• RGe → RN • RLN →RGe
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RLN → RA	• RLN → RA	_______	_______

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.19. *Conversión entre registros en el bloque de Funciones y Gráficas 4º ESO (A y B)*

	4º ESO (A y B)			
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Funciones y gráficas	✓	✓	✓	✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RT → RGr • RLN → RA • RLN→RT • RA→ RT • RA → RGr • RLN→RGr	• RT → RGr • RLN → RA • RLN→RT • RA→ RT • RA → RGr • RLN→RGr	• RT → RGr • RLN → RA • RLN→RT • RA→ RT • RA → RGr • RLN→RGr	• RT → RGr • RLN → RA • RLN→RT • RA→ RT • RA → RGr • RLN→RGr
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	• RGr → RLN	• RGr →RLN	• RGr →RLN	• RGr →RLN

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.20. *Conversión entre registros en el bloque de Probabilidad y Estadística 4º ESO (A)*

4º ESO (A)				
	Contenidos			
	LOGSE	**LOCE**	**LOE**	**LOMCE**
Bloque: Prob / Estad	✓/✓	✓/✓	✓/✓	✓/✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN ⇔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN ⇔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN → RT • RT→ RGr • RGr→RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	———	• RLN→ RGr	• RLN→ RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

TABLA 2.3.1.2.1.21. *Conversión entre registros en el bloque de Probabilidad y Estadística 4º ESO (B)*

4º ESO (B)				
Contenidos				
	LOGSE	LOCE	LOE	LOMCE
Bloque: Prob / Estad	✓/✓	✓/✓	✓/✓	✓/✓
Se contempla el concepto de registro de representación y sus conversiones	X	X	X	X
Registros de representación que podrían manejar	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT	• RLN • RN • RFI • RGr • RA • RGe • RT
Registros de representación que aparecen	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT • RA	• RLN • RN • RGR • RT	• RLN • RN • RGR • RT
Conversión entre registros implícitos en los contenidos	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN • RLN→RA • RN→RA	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN • RLN→RA • RN→RA	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN	• RN ↔ RT • RT→ RGr • RGr→RLN
Conversión entre registros pedidos de manera explícita	———	———	• RLN→ RGr	• RLN→ RGr

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular.

Fuente: elaboración propia

En primer lugar, es necesario destacar que el número de registros de representación semiótica que el alumno puede y debe manejar en esta etapa educativa ha aumentado considerablemente con respecto al periodo anterior, debido a que, por la fase del desarrollo evolutivo y cognitivo en la que se encuentra, el número de nociones y conceptos matemáticos con los que se va encontrar son más diversos, complejos y abstractos.

En consecuencia, el número de conversiones con los que se pueden topar los alumnos y que sería necesario que se tuvieran en cuenta dentro del aula con el fin de que los estudiantes interioricen y comprendan los objetos matemáticos tratados, también aumenta de manera significativa.

De los diversos y múltiples registros de representación que podemos vincular a los conceptos y procedimientos matemáticos, así como a sus características y propiedades más relevantes, siete son las que consideramos que el alumno debe conocer, emplear y coordinar en la Educación Secundaria Obligatoria: *el registro de la lengua natural, el registro figural, el numérico, el algebraico, el gráfico, el tabular y el geométrico.*

Si echamos un primer vistazo al análisis realizado, llama claramente la atención cómo la noción de registros de representación, la coordinación entre los mismos y todos los aspectos que este proceso encierra desde el punto de vista de la comprensión de los objetos matemáticos, no están contemplados como contenido en ninguna de las tres leyes; sin embargo, es curioso como la conversión se encuentra implícita en muchos de los bloques de contenido, especialmente en los que se hace referencia a las gráficas y funciones, y a probabilidad y estadística, y en algunos casos incluso, dicha conversión se contempla de manera explícita.

De manera general, podemos decir que las transformaciones de registros de representación semiótica que tienen prioridad y mayor relevancia dentro de los bloques que conforman la asignatura en cada uno de los cursos, son los tratamientos, quedando relegada e incluso olvidada la conversión entre registros.

El hecho de que, salvo en contadas ocasiones, la coordinación y cambio de un registro a otro aparezca de manera implícita en los contenidos, pone de manifiesto la insuficiente importancia y relevancia que se le da en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pasando por alto las dificultades y bloqueos que los estudiantes pueden encontrar, producto de los fenómenos derivados de la paradoja cognitiva del pensamiento matemático y de la falta de congruencia entre las representaciones que tiene que manejar.

Otro aspecto a tener en cuenta es que, de manera casi general, tanto en las conversiones que aparecen de manera implícita como las contempladas de manera explícita, solo tienen lugar en uno de los sentidos, con lo que realmente no se persigue la coordinación entre registros.

Del mismo modo que ocurría en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria, el registro discursivo de la lengua natural es el que interviene de forma mayoritaria en la mayoría de las conversiones detectadas en el curriculum, mientras que los registros de carácter no discursivo intervienen en menor medida.

También cabe resaltar que en los aspectos analizados existe una correspondencia casi total entre la LOGSE y LOCE, mientras que la LOE y LOMCE, similares entre sí, parecen diferir un poco más con respecto a las otras dos, siendo más completa en lo que a registros de representación se refiere.

2.3.1.2.2. Criterios de evaluación

Al igual que ocurre con los contenidos, los criterios de evaluación también han sido motivo de estudio e investigación como elemento constitutivo y relevante del curriculum educativo del que forma parte.

Por ello, pasamos a estudiar los criterios de evaluación de las tres leyes educativas con el objetivo de analizar hasta que punto se contempla en ellos la coordinación entre registros semióticos y si existe cierta concordancia con lo analizado en los contenidos a este respecto. Para ello, vamos a emplear una tabla de doble entrada de manera que la conversión vendrá dada por el cruce fila-columna, determinando, así, el sentido de la conversión. Existen 42 posibles conversiones entre registros, los cuales pueden darse en todos los niveles de secundaria con mayor o menor complejidad. Los resultados que este estudio arroja son los siguientes:

TABLA 2.3.1.2.2.1. *Conversión entre registros de representación semióticos contemplados en los criterios de evaluación de 1º ESO*

	RLN	RN	RA	RFI	RGr	RGe	RT	Ley
RLN		X	X	X	X	✓	X	LOGSE
		X	X	X	X	✓	X	LOCE
		X	✓	X	X	✓	X	LOE
		X	✓	X	X	✓	X	LOMCE
RN	X		X	X	X	X	✓	LOGSE
	X		X	X	X	X	✓	LOCE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOMCE
RA	X	X		X	X	X	X	LOGSE
	X	X		X	X	X	X	LOCE
	X	X		X	X	X	X	LOE
	X	X		X	X	X	X	LOMCE
RFI	✓	X	X		X	X	X	LOGSE
	✓	X	X		X	X	X	LOCE
	✓	X	X		X	X	X	LOE
	✓	X	X		X	X	X	LOMCE
RGr	✓	X	X	X		X	X	LOGSE
	✓	X	X	X		X	X	LOCE
	✓	X	X	X		X	X	LOE
	✓	X	X	X		X	X	LOMCE
RGe	X	X	X	X	X		X	LOGSE
	X	X	X	X	X		X	LOCE
	✓	X	X	X	X		X	LOE
	✓	X	X	X	X		X	LOMCE
RT	X	X	X	✓	✓	X		LOGSE
	X	X	X	✓	✓	X		LOCE
	✓	X	X	X	✓	X		LOE
	✓	X	X	X	✓	X		LOMCE

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular. X: no se contempla la conversión. ✓ **se contempla la conversión.**

Fuente: elaboración propia

Tanto en la LOGSE como en la LOCE se contemplan 6 conversiones en los criterios de evaluación, lo que supone el 14,3% del total La LOE y la LOMCE tiene en cuenta diez conversiones a la hora de evaluar, lo que representa 23,8% del total.

De entre todas las conversiones que se recogen, únicamente dos se contemplaban de manera explícita en los bloques de contenido de Primero de ESO, la conversión del registro de la lengua natural al registro algebraico y la conversión del registro tabular al gráfico. El resto se corresponden con las que aparecían de manera implícita.

Cabe destacar cómo las conversiones en las que interviene el registro de la lengua natural son las más consideradas, debido, en parte, a la importancia que se le da a la descripción y justificación de los conceptos y procesos que forman parte de la labor matemática.

TABLA 2.3.1.2.2.2. *Conversión entre registros de representación semióticos contemplados en los criterios de evaluación de 2º ESO*

	RLN	RN	RA	RFI	RGr	RGe	RT	LEY
RLN		✓	✓	✓	X	✓	X	LOGSE
		✓	✓	✓	X	✓	X	LOCE
		✓	✓	X	X	✓	X	LOE
		✓	✓	X	X	✓	X	LOMCE
RN	X		X	X	X	X	✓	LOGSE
	X		X	X	X	X	✓	LOCE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOMCE
RA	X	✓		X	X	X	X	LOGSE
	X	✓		X	X	X	X	LOCE
	X	✓		X	X	X	X	LOE
	X	✓		X	X	X	X	LOMCE
RFI	✓	X	X		X	X	X	LOGSE
	✓	X	X		X	X	X	LOCE
	✓	X	X		X	X	X	LOE
	✓	X	X		X	X	X	LOMCE
RGr	✓	X	X	X		X	X	LOGSE
	✓	X	X	X		X	X	LOCE
	✓	X	✓	X		X	✓	LOE
	✓	X	✓	X		X	✓	LOMCE
RGe	✓	X	X	X	X		X	LOGSE
	✓	X	X	X	X		X	LOCE
	✓	X	X	X	X		X	LOE
	✓	X	X	X	X		X	LOMCE
RT	X	X	X	✓	✓	X		LOGSE
	X	X	X	✓	✓	X		LOCE
	✓	X	X	✓	✓	X		LOE
	✓	X	X	✓	✓	X		LOMCE

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular. X: no se contempla la conversión. ✓ **se contempla la conversión.**

Fuente: elaboración propia

Tanto en la LOGSE como en la LOCE se contemplan 11 conversiones en los criterios de evaluación, lo que supone el 26,2% del total frente al 35,7% de la LOE y LOMCE, que consideran 15 conversiones entre sus criterios. En esta ocasión, tres son las conversiones que coinciden de entre las que se van a considerar en la evaluación y las que se explicitaban en los contenidos: conversión entre el registro de la lengua natural y el geométrico, la conversión entre el registro de la lengua natural y el numérico (resolución de problemas) y la conversión entre el registro tabular y el gráfico. Nuevamente, el registro de la lengua natural es el que cobra mayor protagonismo.

TABLA 2.3.1.2.2.3. *Conversión entre registros de representación semióticos contemplados en los criterios de evaluación de 3º ESO*

	RLN	RN	RA	RFI	RGr	RGe	RT	LEY
RLN		✓	✓	✓	✓	✓	X	LOGSE
		✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	X X	LOCE
		✓	✓	X	X	✓	X	LOE
		✓ ✓	✓ ✓	X X	X X	✓ ✓	X X	LOMCE
RN	X		✓	✓	X	X	✓	LOGSE
	X X		✓ ✓	X X	X X	X X	✓ ✓	LOCE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOE
	✓ ✓		✓ ✓	X X	X X	X X	✓ ✓	LOMCE
RA	X	✓		X	✓	X	X	LOGSE
	X X	✓ ✓		X X	✓ ✓	X X	X X	LOCE
	X	✓		X	X	X	✓	LOE
	X X	✓ ✓		X X	X X	X X	✓ ✓	LOMCE
RFI	✓	X	X		X	X	X	LOGSE
	✓ ✓	X X	X X		X X	X X	X X	LOCE
	✓	X	X		X	X	X	LOE
	✓ ✓	X X	X X		X X	X X	X X	LOMCE
RGr	✓	X	X	X		X	X	LOGSE
	✓ ✓	X X	X X	X X		X X	X X	LOCE
	✓	X	✓	X		X	✓	LOE
	✓ ✓	X X	✓ ✓	X X		X X	✓ ✓	LOMCE
RGe	✓	X	X	X	X		X	LOGSE
	✓ ✓	X X	X X	X X	X X		X X	LOCE
	✓	X	X	X	X		X	LOE
	✓ ✓	X X	X X	X X	X X		X X	LOMCE
RT	X	X	✓	✓	✓	X		LOGSE
	X X	X X	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	X X		LOCE
	✓	X	X	✓	✓	X		LOE
	✓ ✓	X X	X X	✓ ✓	✓ ✓	X X		LOMCE

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular. X: no se contempla la conversión. ✓ **se contempla la conversión.**

Fuente: elaboración propia

En esta ocasión la LOGSE, LOE y la LOMCE presentan el mismo porcentaje en lo que a conversiones entre registros contemplados en los criterios de evaluación (16 conversiones, 38,1%); mientras que la LOCE presenta un porcentaje de 35,7 % (15 conversiones).

Reiteradamente, vuelve a existir un predominio absoluto de las conversiones en las que el registro de la lengua natural forma parte. También podemos observar que las conversiones en las que interviene el registro tabular también son numerosos, debido, en gran parte, a su utilización como herramienta de paso entre la representación algebraica de una función y la representación gráfica, no considerándose un registro de representación en si mismo.

Esta vez, las conversiones entre el registro algebraico y el gráfico, el registro de la lengua natural y el algebraico, algebraico y tabular y la conversión, en ambos sentidos, entre el registro gráfico y tabular, son los que coinciden entre los explicitados en los contenidos y los criterios de evaluación, de modo que los demás se corresponden con los que se encuentran implícitos o ni siquiera eran contemplados.

TABLA 2.3.1.2.2.4. *Conversión entre registros de representación semióticos contemplados en los criterios de evaluación de 4º ESO (A)*

	RLN	RN	RA	RFI	RGr	RGe	RT	LEY
RLN		✓	✓	✓	✓	✓	X	LOGSE
		✓	✓	✓	✓	✓	X	LOCE
		✓	✓	✓	X	✓	X	LOE
		✓	✓	✓	X	✓	X	LOMCE
RN	X		✓	✓	X	X	✓	LOGSE
	X		✓	✓	X	X	✓	LOCE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOMCE
RA	X	✓		X	✓	X	X	LOGSE
	X	✓		X	✓	X	X	LOCE
	X	✓		X	X	X	X	LOE
	X	✓		X	X	X	X	LOMCE
RFI	✓	X	X		X	X	X	LOGSE
	✓	X	X		X	X	X	LOCE
	✓	X	X		X	X	X	LOE
	✓	X	X		X	X	X	LOMCE
RGr	✓	X	X	X		X	X	LOGSE
	✓	X	X	X		X	X	LOCE
	✓	✓	✓	X		X	X	LOE
	✓	✓	✓	X		X	X	LOMCE
RGe	✓	X	X	X	X		X	LOGSE
	✓	X	X	X	X		X	LOCE
	✓	X	X	X	X		X	LOE
	✓	X	X	X	X		X	LOMCE
RT	X	X	X	✓	✓	X		LOGSE
	X	X	X	✓	✓	X		LOCE
	✓	X	X	✓	X	X		LOE
	✓	X	X	✓	X	X		LOMCE

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular. X: no se contempla la conversión. ✓ **se contempla la conversión.**

Fuente: elaboración propia

El porcentaje de conversiones que se tienen en cuenta en los criterios de evaluación es exactamente igual para todos los modelos educativos (35,7%, 15 conversiones). La diferencia en la comparación estriba en las conversiones que se evalúan, siendo más significativas las que se evalúan en la LOE y la LOMCE.

Al igual que pasaba en los casos anteriores, el registro de la lengua natural sigue siendo el más contemplado. Además, las conversiones en las que este registro forma parte son de las pocas en las que la conversión se contempla en los dos sentidos, hecho que también ocurría en los cursos anteriores.

TABLA 2.3.1.2.2.5. *Conversión entre registros de representación semióticos contemplados en los criterios de evaluación de 4º ESO (B)*

	RLN	RN	RA	RFI	RGC	RGr	RT	LEY
RLN		✓	✓	✓	✓	✓	X	LOGSE
		✓	✓	✓	✓	✓	X	LOCE
		✓	✓	✓	X	✓	X	LOE
		✓	✓	✓	X	✓	X	LOMCE
RN	X		✓	✓	X	X	✓	LOGSE
	X		✓	✓	X	X	✓	LOCE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOE
	✓		✓	X	X	X	✓	LOMCE
RA	X	✓		✓	✓	X	X	LOGSE
	X	✓		✓	✓	X	X	LOCE
	X	✓		X	X	X	X	LOE
	X	✓		X	X	X	X	LOMCE
RFI	✓	X	X		X	X	X	LOGSE
	✓	X	X		X	X	X	LOCE
	✓	X	X		X	X	X	LOE
	✓	X	X		X	X	X	LOMCE
RGr	✓	X	X	X		X	X	LOGSE
	✓	X	X	X		X	X	LOCE
	✓	✓	✓	X		X	X	LOE
	✓	✓	✓	X		X	X	LOMCE
RGe	✓	X	X	X	X		X	LOGSE
	✓	X	X	X	X		X	LOCE
	✓	X	X	X	X		X	LOE
	✓	X	X	X	X		X	LOMCE
RT	X	X	X	✓	✓	X		LOGSE
	X	X	X	✓	✓	X		LOCE
	✓	X	X	✓	X	X		LOE
	✓	X	X	✓	X	X		LOMCE

RLN: Registro de la lengua natural; RN: Registro numérico; RA: Registro algebraico; RFI: Registro figural- icónico; RGr: Registro gráfico-cartesiano; RGe: Registro geométrico; RT: Registro tabular. X: no se contempla la conversión. ✓ **se contempla la conversión.**

Fuente: elaboración propia

Al igual que pasaba en Tercero de ESO, la LOGSE, la LOE y la LOMCE presentan el mismo porcentaje en lo que a conversiones entre registros se refiere en los criterios de evaluación (16 conversiones, 38,1%); mientras que la LOCE presenta un porcentaje de 35,7 % (15 conversiones).

Las conversiones en las que participa el registro de la lengua natural siguen predominando frente a las demás.

2.3.1.2.3. Conclusiones

En vista del análisis realizado, podemos concluir que el cambio de registro de representación y todos los fenómenos didácticos que le rodean gozan de cierta invisibilidad no existiendo conciencia didáctica de ello y sus repercusión en el aprendizaje. No se contempla en el tiempo didáctico, como se ha podido comprobar al no estar incluido como contenido en ninguno de los bloques, apareciendo de manera implícita en los mismos y por el bajo porcentaje de conversiones que se tiene en cuenta en los criterios de evaluación. Las posibles relaciones que pueden establecer los alumnos entre un objeto y su representación están ausentes en los currícula.

Este hecho, y en particular la cuestión de que la mayoría de las conversiones aparezcan de modo implícito en la legislación, repercute de manera directa en la práctica del profesorado, los cuales pasan por alto la importancia que guarda la coordinación de los diferentes registros, no estableciendo conexiones entre las distintas representaciones que hacen referencia a un mismo contenido, presentándose como entes que no guardan relación entre sí, ni teniendo en cuenta las dificultades que los estudiantes experimentan fruto de ello.

Toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro, por este motivo aparecen diversas y múltiples conversiones entre registros implícitos en los contenidos, pero en ningún caso se resalta la importancia de tales conversiones, las cuales son necesarias e imprescindibles para la comprensión por parte del alumno de la noción u objeto matemático que entra en juego.

Del mismo modo, a lo largo del análisis se ha observado que ciertas conversiones aparecen en las leyes de manera explícita, pero tal conversión no se contempla como aspecto necesario para que tenga lugar en el estudiante una comprensión significativa de los objetos matemáticos de tal manera que se contribuya, así, a evitar el establecimiento y creación de obstáculos en el proceso de comprensión y aprendizaje, sino como mecanismo de simplificación y resolución de problemas.

A juzgar por las Reformas Educativas que se han producido desde la aparición de la Educación Secundaria Obligatoria, podríamos decir que a pesar de los aparentes y diversos cambios introducidos, la manera en que se contemplan los registros de representación y la conversión entre ellos no difiere de manera significativa de una ley a otra, permaneciendo prácticamente igual e inexistente.

Todo esto pone de manifiesto como la conversión entre registros no es considerada, ni recibe la importancia y trascendencia que realmente tiene y juega en el aprendizaje de las matemáticas.

2.3.2. Los registros de representación semiótica en el ámbito de los libros de texto

Los materiales curriculares de los que dispone un profesor constituyen un recurso de ayuda al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de estos materiales, y con toda seguridad el más empleado, es el libro de texto, el cual resulta de gran utilidad siempre y cuando se utilice correctamente, dependiendo dicha utilización de dos factores: las características del manual escolar y el cómo, para qué y de qué manera es usado (Parcerisa, 1996).

Siguiendo a Cordero y Flores (2007) y a Cordero, Cen y Suárez Téllez (2010), el discurso matemático es la manifestación o reflejo del saber matemático reglado por la perspectiva y visión de los agentes que conforman el sistema didáctico. En este discurso, los manuales escolares juegan un papel significativo y de gran influencia, ya que constituyen un marco de referencia tanto para el estudiante, el cual lo utiliza de guía de estudios, como para el profesor, siendo, para este último, el principal generador del discurso matemático que forma parte de las acciones de enseñanza-aprendizaje que desarrolla en el aula, girando en torno a él.

El texto escolar es utilizado por el docente como referente para organizar sus clases, de modo que adapta su metodología, programaciones, objetivos y evaluación a partir del manual seleccionado. Este hecho se debe sobre todo, a que se tiene la creencia de que todo lo que se incluye en libro de texto, y la manera en que se incluye, es adecuado y correcto tanto desde el punto de vista didáctico como desde el punto de vista de los contenidos de la materia que esté tratando.

Diversos trabajos e investigaciones (Cordero y Flores, 2007; García Moreno y Guillén, 2008; Parcerisa, 1996) subrayan el hecho de que los manuales escolares se han convertido en un recurso en el que las diferentes editoriales reflejan el currículo que luego el docente intentará transmitir a sus alumnos.

Parcerisa señala que

> (...) los libros de texto llegan a condicionar de manera importante el tipo de enseñanza que se realiza, ya que muchos enseñantes lo utilizan de manera cerrada, sometiéndose al currículum específico que se refleja en él, tanto en lo que se refiere a los contenidos de aprendizaje como a la manera de enseñarlos (Parcerisa,1996, p. 35).

La relación existente entre el currículo oficial, los textos y otros materiales curriculares influyen de forma considerable en la calidad y eficacia del proceso educativo.

García y Llinares (1995), indican que el modo en que se presentan y explican ciertos contenidos en los textos escolares influye en la forma en que el alumno aprende.

Esta perspectiva otorga a los manuales escolares un papel notable, ya que intervine de manera directa en el desarrollo cognitivo de alumno, y por ello es necesario que sean objeto de revisión con el fin de evaluar su pertinencia tanto disciplinar como didáctica, así como detectar posibles conflictos.

El análisis de los textos escolares es considerado en didáctica, y concretamente en didáctica de las matemáticas, una vía útil para detectar e identificar posibles fenómenos didácticos ligados a la transposición didáctica y que pueden dar origen a problemas de aprendizaje en los estudiantes. Esto es debido a que, en muchas ocasiones, son generadores potenciales de conflictos e inconsistencias a la hora de presentar los contenidos.

El estudios de los libros de textos contempla, por un lado y siguiendo a Parcerisa (1996), “analizar la coherencia de las decisiones tomadas en el material con los requisitos o condiciones que favorecen un aprendizaje lo más significativo y funcional posible" (p. 68), y por otro, el análisis de la forma en que se reflejan en ellos los contenidos (García y Llinares, 1995; Penalva y Torregrosa, 2001; Cobo y Batanero 2004).

En nuestro caso, vamos a realizar un análisis específico, referido a los diferentes sistemas de representación utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido matemático.

En este sentido, y con objeto de evaluar hasta qué punto los libros de texto toman en consideración la conversión entre registros y la coordinación entre ellos, se han llevado a cabo dos estudios, cuyos resultados se recogen a continuación. El primero de ellos, con el fin de determinar si se inicia a los alumnos en el manejo de distintos registros de representación antes de la Educación Secundaria, ha consistido en un análisis de 12 libros de texto de Educación Primaria (6 a 11 años), cuatro por cada ciclo (dos por cada curso que compone el ciclo). El segundo está centrado en el estudio de quince manuales escolares de primero a cuarto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (12 a 16 años) de tres editoriales distintas.

Los resultados de estos estudios los presentamos en las páginas que siguen.

2.3.2.1. Libros de texto Educación Primaria

El debate sobre los manuales escolares forma parte de las polémicas más antiguas en el seno del pensamiento pedagógico.

Antes de comenzar el análisis y estudio del tratamiento que hacen los libros de texto de Secundaría de la conversión entre registros, hemos creído conveniente focalizar, primeramente, nuestra investigación sobre aquellos factores relativos al empleo y conversión entre registros de representación semiótica que pueden observarse en los manuales escolares de Educación Primaria, con el fin de determinar si los alumnos han trabajado previamente dicho aspecto y de que manera es considerado.

El estudio, el cual nos proporciona una valoración global de los textos de dos editoriales distintas para cada uno de los ciclos que componen la

Educación Primaria, ha consistido en el análisis de las transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica que tienen lugar en los manuales escolares dentro de cada uno de los cuatro bloques de contenido de los que se compone la materia según el currículo español: *Números y operaciones, La medida: estimación y cálculo de magnitudes, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad.*

El estudio se ha basado en el análisis de las actividades por considerar que son los elementos que mejor reflejan si realmente los manuales escolares persiguen que los alumnos sepan manejar diferentes registros de representación o por el contrario, lo único que hacen es proporcionar herramientas para que obtengan la solución de manera rápida y efectiva.

A continuación, hemos recogido algunos de los rasgos que nos parecen más característicos y significativos de los manuales analizados.

2.3.2.1.1. Números y operaciones

El número y la numeración, según Chamorro (2003), son objetos culturales utilizados cotidianamente en el medio social, cultural y familiar. Por eso, desde los primeros niveles de la escolaridad se debería situar a los alumnos frente a situaciones y tareas a través de las cuales construyan con sentido las nociones de número y numeración.

La construcción, codificación y transmisión de sistemas de símbolos con los que expresar los conceptos, nociones y relaciones de una estructura numérica, juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaría.

Según los principios y estándares curriculares del NCTM (2000), las orientaciones y claves que deben marcar la selección de los contenidos numéricos y la organización de su enseñanza son:

- Comprensión numérica, sistemas de representación numérica, relaciones entre números y sistemas numéricos.
- Comprensión de los significados de las operaciones y cómo se relacionan mutuamente.

- Calcular con soltura y hacer estimaciones razonables.

Como se puede observar, el primer punto de los Estándares contempla los sistemas de representación numérica, ya que, siguiendo a Rico (1996), la riqueza y variedad de representaciones que podemos utilizar en el conocimiento numérico es muy amplio, pudiéndolo expresar a través de la lengua natural, mediante una representación simbólica-figural, gráfica, numérica e incluso geométricamente.

En este sentido, y tras estudiar los manuales escolares, podemos hacer las siguientes valoraciones:

- Los contenidos numéricos y aritméticos relativos a los primeros cursos de la Educación Primaria parecen tener como objetivo fundamental nombrar, escribir y leer los números, es decir, la numeración se trabaja como un medio para designar los números, que posteriormente serán utilizados en la resolución de problemas y operaciones.

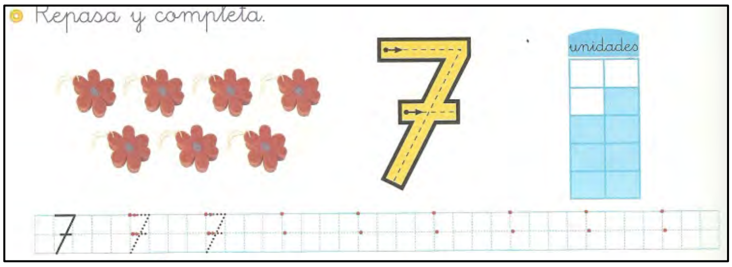


FIGURA 2.3.2.1.1.1. *Actividad numérica. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

En los textos escolares se presentan los números, empezando por la unidad, uno tras otro, haciendo uso del registro de representación numérico-simbólico, en la que cada número aparece acompañado siempre de una colección de objetos. Los manuales estudiados promueven un aprendizaje basado en la ostensión, la observación y la repetición.

El dominio del Sistema Decimal de Numeración en nuestra sociedad es un hecho cultural básico y por ello se le concede una gran importancia

(...) al aprendizaje de la numeración decimal y de las operaciones aritméticas elementales, utilizando como sistema de representación exclusivo el sistema decimal de numeración; el resto de representaciones numéricas tienen en el medio escolar un carácter esporádico y anecdótico. De este modo se llega a identificar cada uno de los números con su notación decimal y el conjunto de los naturales con la secuencia numérica. Tal identificación, aunque culturalmente útil, práctica y económica, no deja de suponer un empobrecimiento y una limitación en el aprendizaje de los números naturales (Rico, 1996, P. 33).

Estos hechos se ven reflejados en los libros de texto de manera clara, de modo que los registros de representación que podemos encontrar principalmente son el registro numérico-simbólico y el registro figural, y por lo tanto la única conversión que los alumnos van a realizar es entre ambos registros.

FIGURA 2.3.2.1.1.2. *Actividades numéricas. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

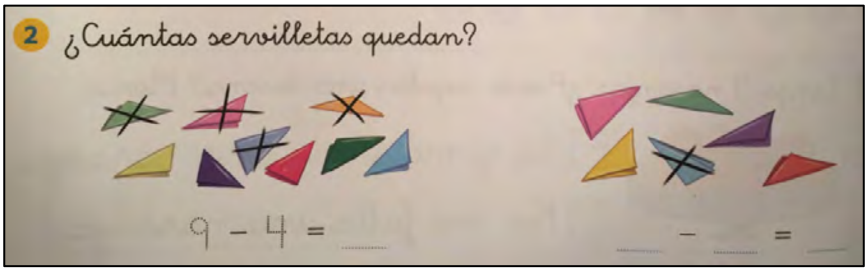


FIGURA 2.3.2.1.1.3. *Actividad numérica. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

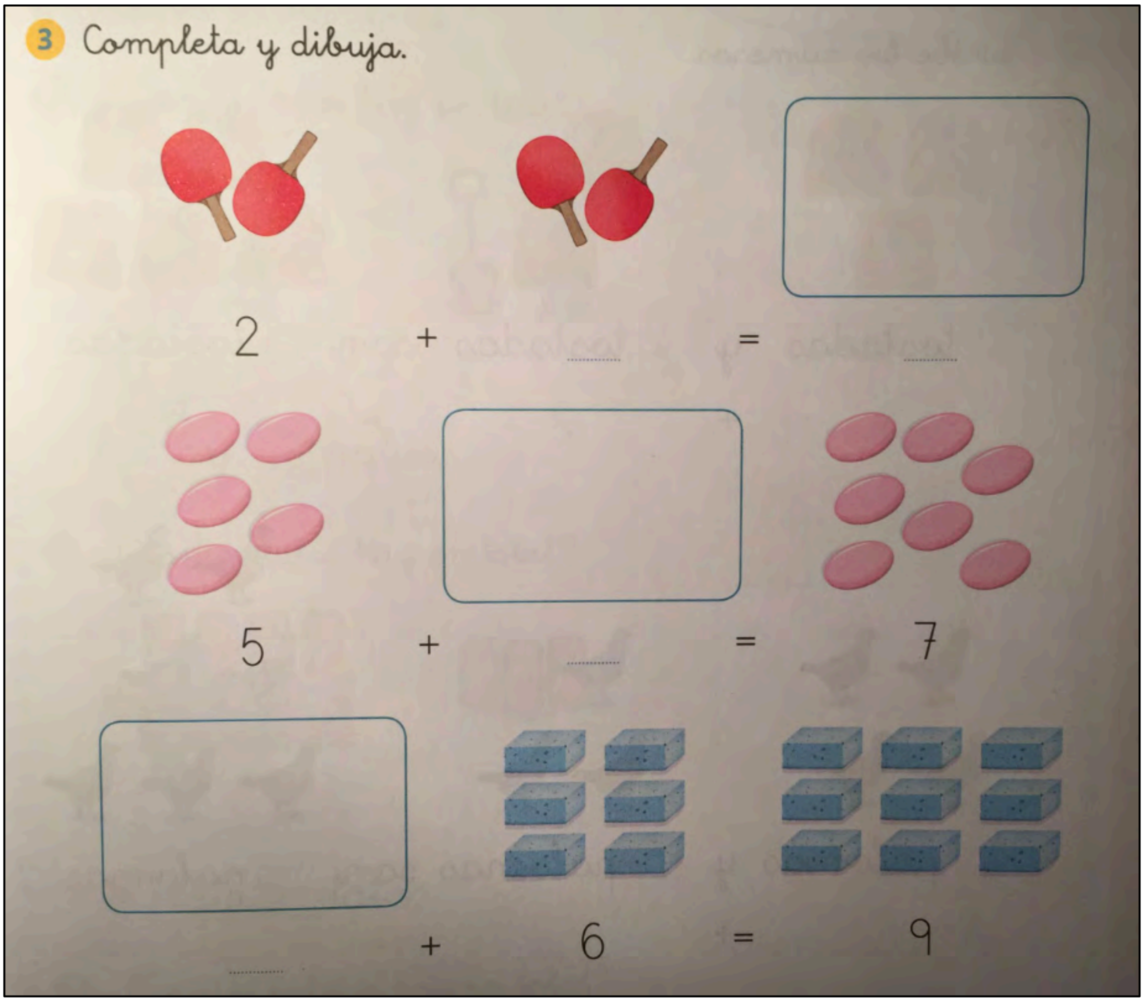


FIGURA 2.3.2.1.1.4. *Actividad numérica. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

- "Las estructuras numéricas necesitan de la actuación coordinada de varios sistemas de representación para poner de manifiesto aspectos esenciales de tales estructuras" (Rico, 1996, p. 3). En particular, las representaciones gráficas sobre la recta numérica juega un papel fundamental para la comprensión de las estructuras numéricas y, sin embargo, tal representación, y las conversiones en las que entra juego, son prácticamente obviadas en los manuales escolares analizados o utilizadas como herramientas para llevar a cabo operaciones:

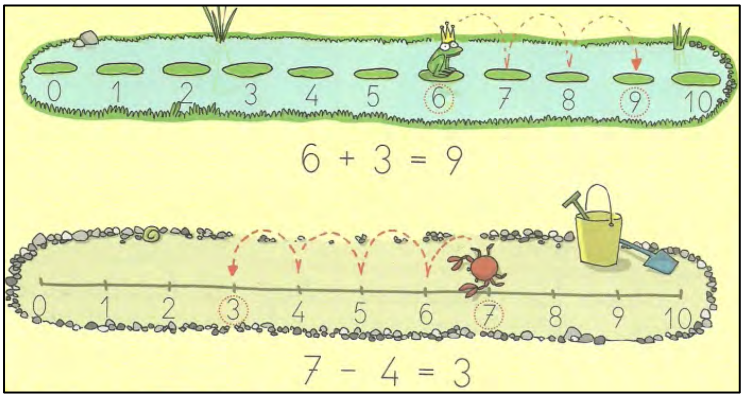


FIGURA 2.3.2.1.1.5. *Actividad de recta numérica. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

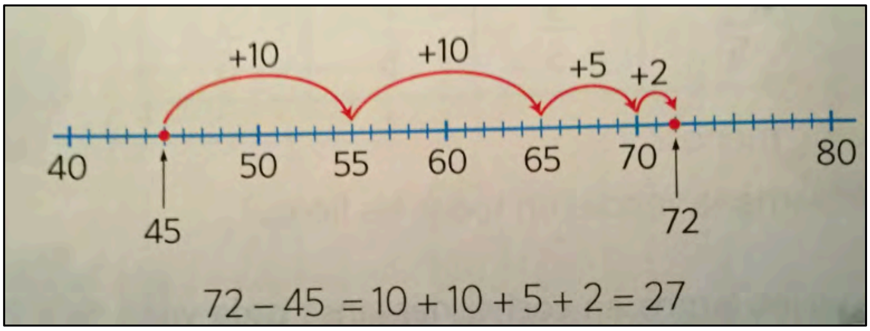


FIGURA 2.3.2.1.1.5. *Actividad de recta numérica. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

De igual manera ocurre con el sistema de representación de números naturales denominado *Números figurados*[1], en la que se emplea una representación puntual en forma de figura geométrica, de modo que permite establecer propiedades generales de los números y descubrir nuevas relaciones entre ellos.

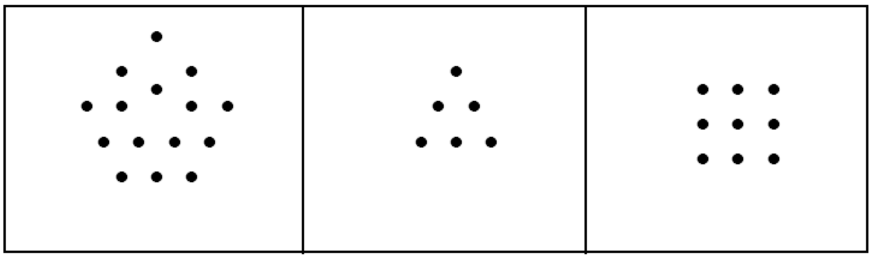


FIGURA 2.3.2.1.1.6. *Ejemplo de Números Figurados.* (Rico, 1996, p. 9)

[1] El término Números Figurados hace referencia a la representación puntual en forma de figura de los números, fundamentalmente geométrica.

- En lo relativo a los números fraccionarios, que se comienzan a estudiar a partir del segundo ciclo de Educación Primaria, los alumnos deben llegar a familiarizarse con los nuevos símbolos y exigencias cognitivas relacionadas con los mismos.

Como se verá y explicará en el apartado que analiza dicho contenido en la Educación Secundaria, el significado de fracción como parte de un todo posee el protagonismo como apoyo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la fracción. Este hecho da lugar a que el registro gráfico pictórico (diagramas circulares o rectangulares) sea la representación más empleada en los libros de texto a la hora de referirse a ellos, acompañado del registro de la lengua natural y el registro numérico.

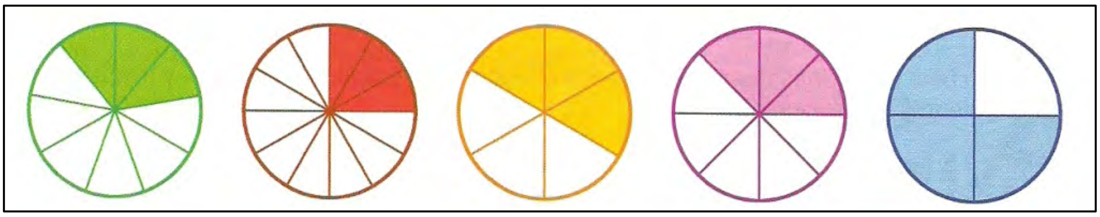


FIGURA 2.3.2.1.1.7. *Actividad de fracciones. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

Las conversiones que los manuales escolares parecen movilizar mayoritariamente a través de las actividades y tareas que proponen a este respecto, son la conversión entre el registro de la lengua natural y el numérico, y la conversión entre el registro numérico y el figural.

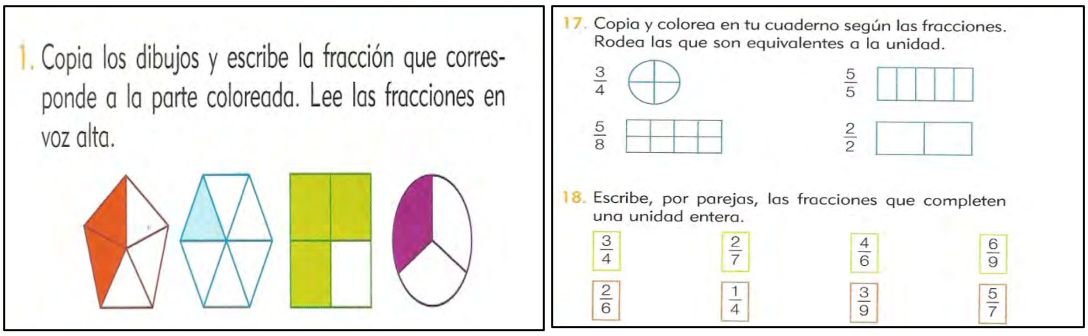


FIGURA 2.3.2.1.1.8. *Actividades de fracciones. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

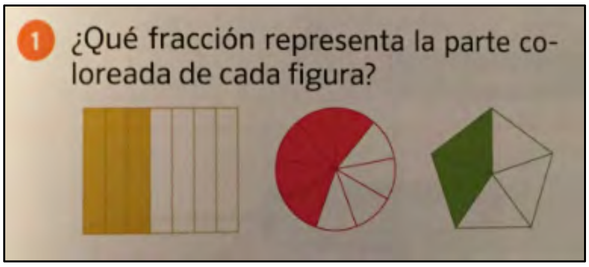


FIGURA 2.3.2.1.1.9. *Actividad de fracciones. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

Dichas conversiones no parecen tener por objetivo la coordinación entre los diferentes registros de representación, y menos aun que los alumnos adquieran alguna noción relacionada con ellos o perseguir una construcción y aprendizaje de dicho conjunto de números de manera más significativa.

- A la hora de abordar los números decimales, el registro de representación que se utiliza mayoritariamente es el numérico de modo que un porcentaje muy amplio de las actividades se centran en la aplicación de tratamientos operacionales dentro de dicho registro.

Llama la atención como, pese al gran potencial que tiene el uso de la recta numérica en la comprensión de los números decimales, su comparación y el redondeo, pocas son las actividades y las referencias que se hacen a ella dentro de los libros de texto, siendo reducido el número de actividades que promueven la conversión entre el registro Gráfico y el Numérico, quedando reducido a pequeñas tareas de reconocimiento:

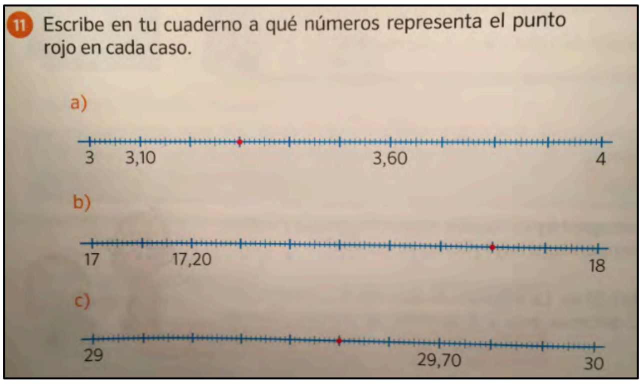
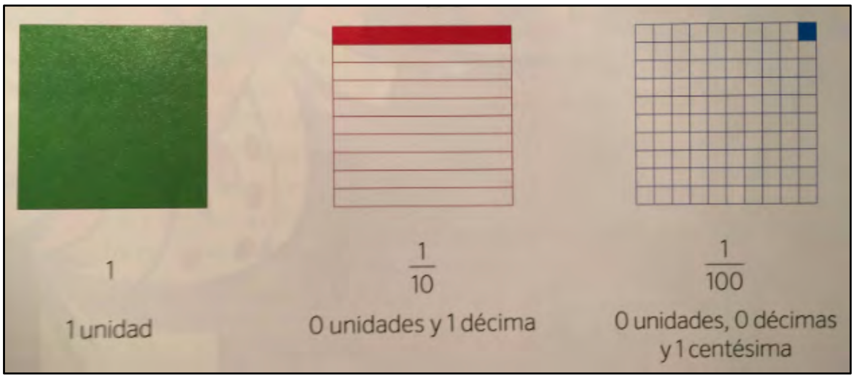


FIGURA 2.3.2.1.1.10. *Actividad de decimales. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

En casos muy aislados encontramos representaciones figurales de los números decimales explicados a partir del concepto de fracción y haciendo uso de dibujos que emulan los bloques multibase, lo que favorece la comprensión de dicho conjunto de números a través de la conversión, en ambos sentidos, entre el registro Numérico y el Figural:



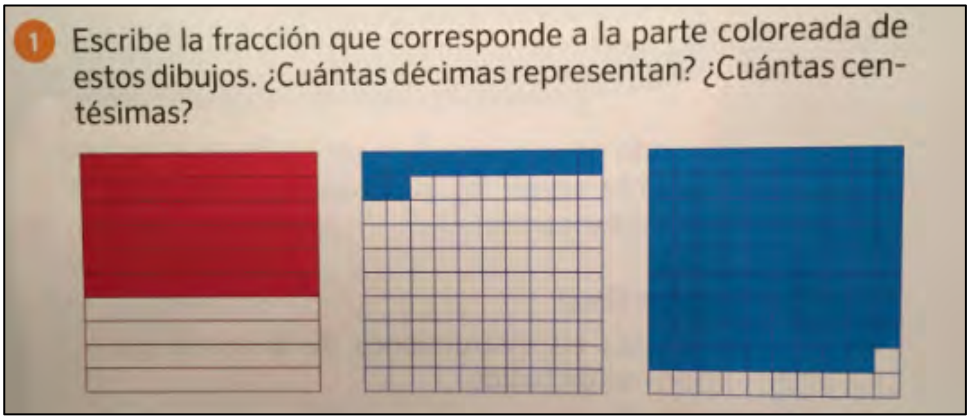
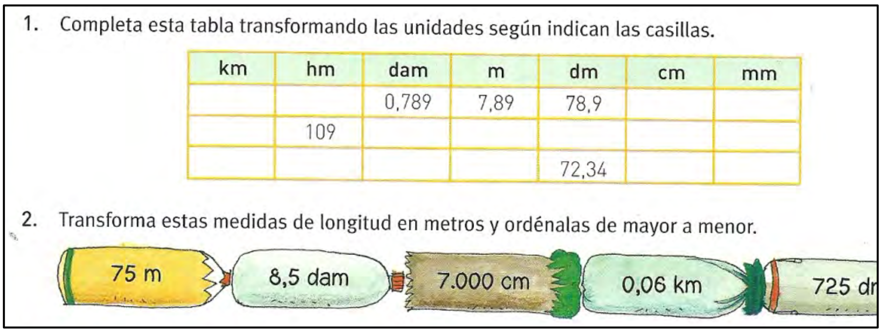


FIGURA 2.3.2.1.1.11. *Actividades de decimales. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

2.3.2.1.2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes

La medida de magnitudes, longitud, tiempo, capacidad y masa, principalmente, y superficie y volumen de manera secundaria, constituye un bloque de contenidos tradicionalmente tratado tanto en le Educación Primaria como en la Educación Secundaria (Chamorro, 2003), por ser considerado un conocimiento social que todo individuo debe haber construido e interiorizado para poder desenvolverse adecuadamente en su vida diaria, comprender lo que pasa a su alrededor e interpretar la realidad.

Los libros de texto analizados presentan tareas en las que el estudio y trabajo con dichos contenidos se reduce al cambio de unidades del Sistema Métrico Decimal y al fraccionamiento de la unidad, de modo que dicho conocimiento se presenta de forma algorítmica, mecanizada y procedimental, dando lugar a una pérdida del sentido que tienen los cambios de unidades y de aquellos aspectos que rodean a la medida de magnitudes.


1. Completa esta tabla transformando las unidades según indican las casillas.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		0,789	7,89	78,9		
	109					
				72,34		

2. Transforma estas medidas de longitud en metros y ordénalas de mayor a menor.

75 m
8,5 dam
7.000 cm
0,06 km
725 d

FIGURA 2.3.2.1.2.1. *Actividad de medida de magnitudes. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

Detrás de las actividades denominadas de medición en los manuales escolares, encontramos que en realidad está teniendo lugar una sustitución de saberes ya que lo que se trabaja con tales actividades es la aritmética y el uso de los números naturales y fraccionarios, “reemplazando las magnitudes por los números y la medición por el conteo” (Chamorro, 2003, p. 253).

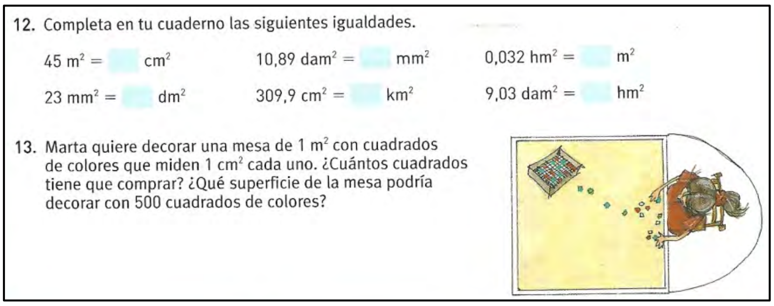


FIGURA 2.3.2.1.2.2. *Actividad de medida de magnitudes. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

Las tareas se presentan al estudiante por medio del registro de la lengua natural, el registro numérico y el registro gráfico-pictórico. Este último aparece como soporte y recurso para ejemplificar las representaciones numérica y verbal, pero pocas de estas representaciones van acompañadas de la adquisición de algún concepto relacionado, se usan tan solo de forma icónica, por lo que las posibles conversiones que se pide que efectúen los alumnos son vacías, carentes de finalidad y sentido, no persiguiendo una coordinación entre los registros semióticos puestos en juego.

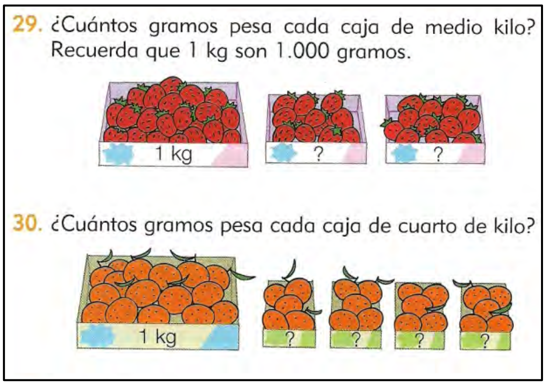


FIGURA 2.3.2.1.2.3. *Actividad de medida de magnitudes. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

2.3.2.1.3. Geometría

En la enseñanza y aprendizaje de la geometría cobra una marcada importancia la interpretación de figuras, dibujos, diagramas, esquemas, etc, y según Duval, D'Amore y Radford, esta interpretación requiere la puesta en funcionamiento de complejos procesos semióticos por parte del alumno.

Siguiendo a Chamorro,

> Los conocimientos espaciales y geométricos no son una simple lectura extraíble por abstracción simple del espacio físico, sino que requieren, como conocimientos lógico-matemáticos que son, de la abstracción reflexiva, que supone coordinación de acciones de los espacios sucesivos(Chamorro, 2005b, p. 4-5).

Sobre el uso que se hace de las figuras en la enseñanza de la geometría, Duval afirma lo siguiente:

> Las figuras no son por tanto más que representaciones que envían a otra cosa," el "espacio", real, percibido, topológico, afín, proyectivo, métrico...Por tanto, ¿por qué hacemos una apuesta en el aprendizaje basada en la relación con las figuras?
>
> Las figuras reenvían necesariamente a un acto que es cognitivamente fundamental: ¡ver! Ahora bien, en los procesos de geometría ese acto se convierte de golpe en problemático y es algo esencial. Pues toda mirada sobre una figura requiere un cuestionamiento que, a menudo, se hace en contra de la primera constatación perceptiva, contra lo que se ha reconocido en un primer vistazo: ¿qué es lo que es necesario ver sobre esta figura?, ¿qué representa?(...)las figuras en geometría no se miran como cualquier otra figura (una imagen, un esquema, un plano...) distinta de las que se dan en geometría (Duval, 2003, p. 1).

El trabajo con figuras geométricas lleva aparejada la utilización de un registro de representación multifuncional, y es la utilización de tratamientos dentro de este registro lo que genera una fuente de incomprensión en el alumno (Duval, 2006b).

Por tanto, hay que intentar que el alumno desarrolle durante su etapa educativa dicha coordinación, mediante tareas que le permitan alcanzar tal capacidad.

Si hacemos una breve revisión de las teorías de Piaget, que desarrollaremos con detalle más adelante, este distingue el espacio perceptivo del espacio representativo, formándose y asimilándose en los sujetos a lo largo las diferentes etapas genéticas del desarrollo intelectual, pilar de su teoría.

Debido a que los conocimientos espaciales y geométricos tardan tiempo en formarse y al largo proceso que el alumno debe recorrer hasta dominar la representación y percepción de los mismos, las actividades y tareas que se recojan en los manuales escolares deben estar en consonancia con el nivel evolutivo de los alumnos, ya que, en caso contrario, tendrá lugar la aparición de obstáculos de tipo ontogenético[2].

Tras el análisis de los libros de texto hemos podido apreciar un predominio absoluto de las representaciones figurales y geométricas, acompañado del registro de la lengua natural, el cual constituye en si mismo un objetivo de aprendizaje, el lenguaje geométrico.

En los primeros cursos de la Educación Primaria, y apoyándonos en los manuales escolares para hacer tal afirmación, el registro figural y el de la lengua natural son los dos registros semióticos que maneja el alumno, de modo que la única conversión, en ciertas ocasiones simplista, que las actividades y ejercicios del texto promueven, es entre ambas representaciones en ambos sentidos.

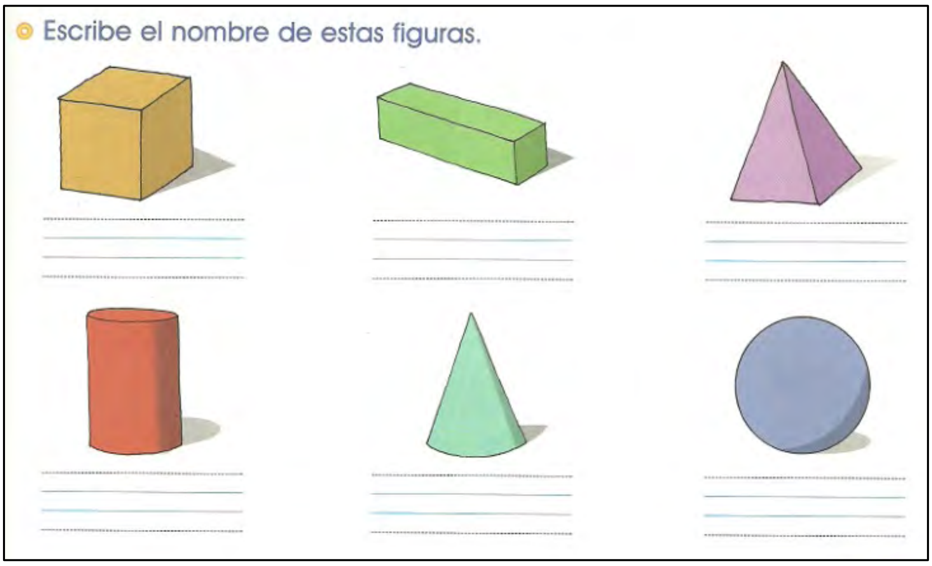


FIGURA 2.3.2.1.3.1. *Actividad de geometría. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

[2] Los obstáculos de origen ontogenético son aquellos ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos, siendo el resultado del desarrollo psicogenético del alumno.

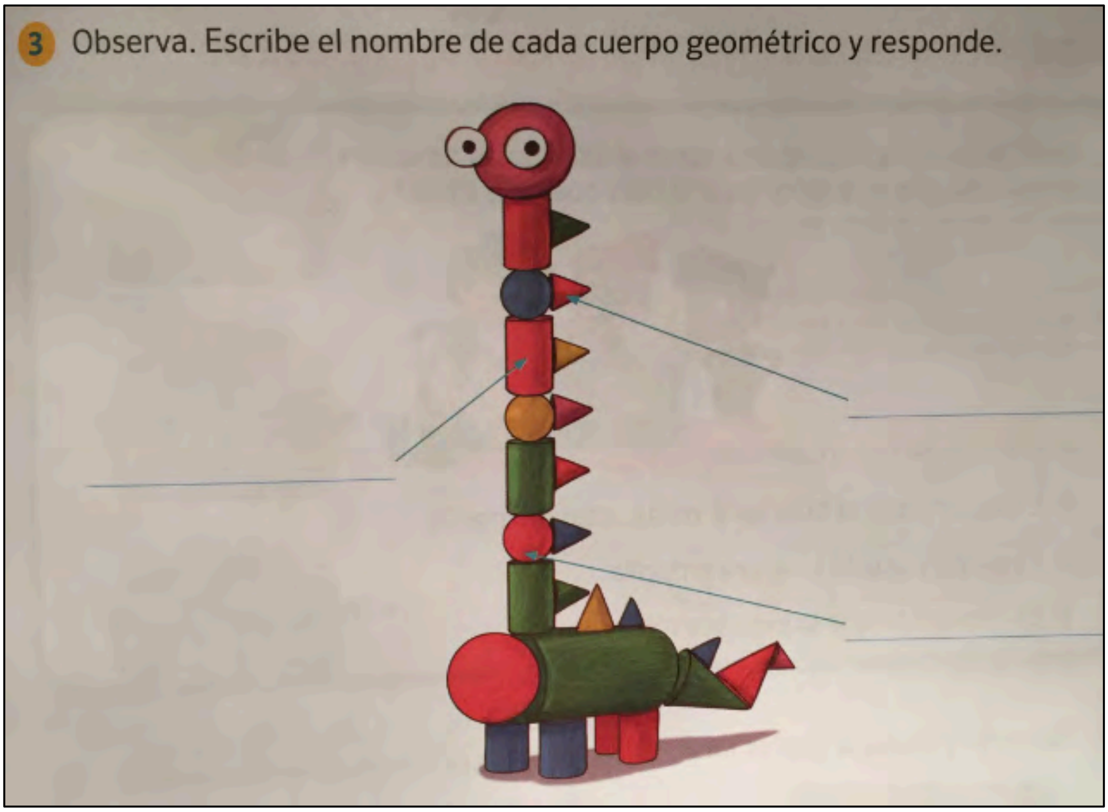
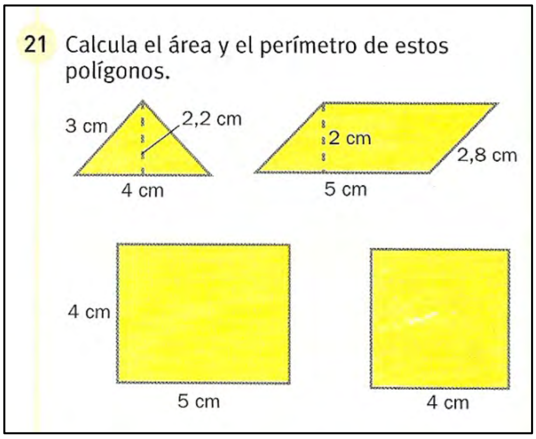


FIGURA 2.3.2.1.3.2. *Actividad de geometría. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

En los libros de texto de cursos superiores se contempla, de manera casi única, la conversión del registro geométrico al registro numérico, de modo que la mayoría de las actividades que aparecen en los temas relativos a la geometría demandan del alumno la aplicación de una fórmula para su resolución, lo que supone un tratamiento algoritmizado y mecánico de la geometría.



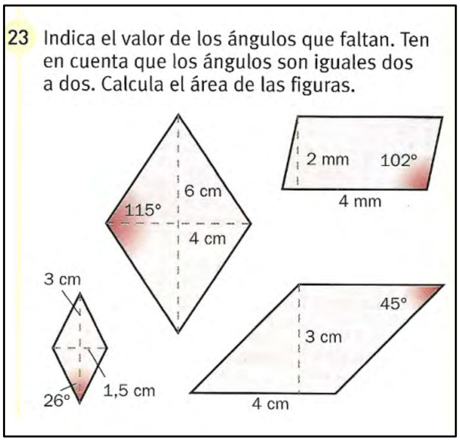


FIGURA 2.3.2.1.3.3. *Actividades de geometría. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

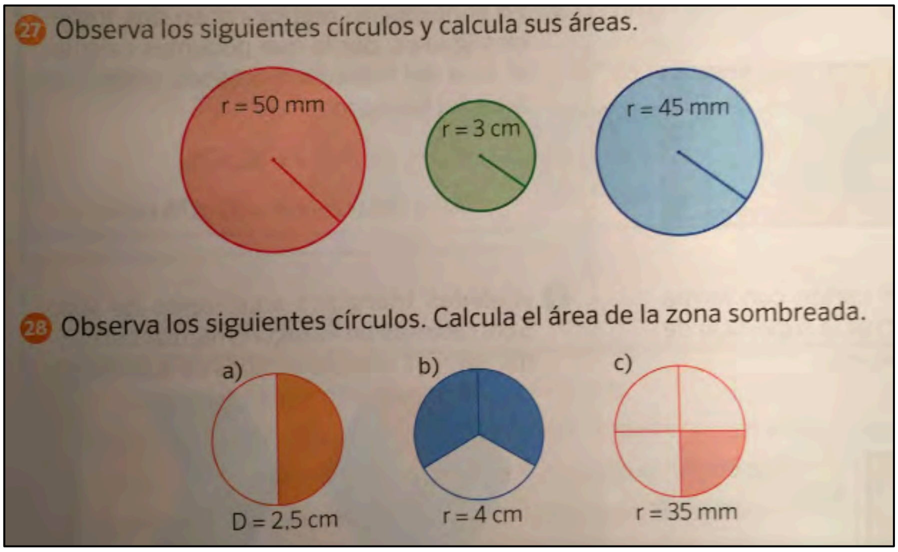


FIGURA 2.3.2.1.3.4. *Actividad de geometría. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

En menor medida, y casi de forma anecdótica, aparecen actividades que requieren del uso del razonamiento, la visualización, reconfiguración figural y, por tanto, de la coordinación de los registros semióticos que forman parte de dichos procesos cognitivos, para su resolución:

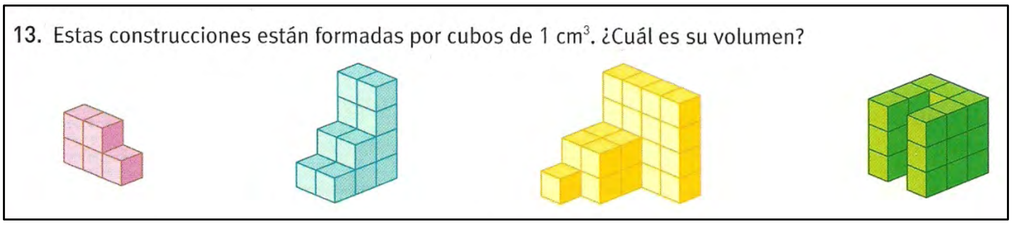


FIGURA 2.3.2.1.3.5. *Actividad de geometría. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

La geometría es, posiblemente, la rama de las matemáticas donde la ostensión se da de manera más frecuente, debido a que precisa de la utilización de representaciones para su enseñanza y aprendizaje.

La ostensión es necesaria para explicar ciertos conceptos o características de los objetos matemáticos que se pretende que el alumno adquiera, pero es fundamental completar la práctica ostensiva con otro tipo de métodos de enseñanza y aprendizaje.

Los libros de texto suelen presentar los conocimientos geométricos apoyandose en la ostensión, recayendo en el alumno la responsabilidad de establecer las relaciones entre los conceptos enseñados y las representaciones con las que estos objetos se relacionan, lo que da lugar a la aparición de errores en el alumno. Además, los libros tienden a utilizar objetos bastante idealizados, lo que genera en el alumno dificultades para pasar del objeto real al objeto teórico.

2.3.2.1.4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

Actualmente, uno de los retos de la enseñanza se centra en conectar los objetos de conocimiento con la realidad y la sociedad en la que vivimos, lo que se ha traducido en el caso concreto de la estadística y el tratamientos de datos, como queda patente en los Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006a, 2014a), en un aumento de dichos contenidos en Primaria, con el fin de acortar distancia entre la escuela y la vida cotidiana.

Los gráficos, pictogramas, diagramas, tablas, etc.. son utilizados con frecuencia en medios de comunicación y prensa escrita como instrumentos de análisis e interpretación de datos, por lo que podemos asegurar que el aprendizaje de los conceptos y nociones de este bloque de contenidos está estrechamente relacionado con la construcción, transformación y manejo representaciones semióticas externas que permiten visualizar conceptos y establecer relaciones difíciles de comprender (Arteaga, 2011).

Por ello, es importante empezar a utilizar lo más tempranamente posible todos aquellos registros de representación vinculados en la enseñanza de la probabilidad y la estadística, oportunidad que ahora es viable al adelantarse dicho bloque de contenidos al primer ciclo de la Educación Primaria y haber sido ampliado a lo largo de esta etapa educativa.

Tras el análisis de los manuales escolares se ha podido observar que cinco son los registros de representación semióticos utilizados en este bloque de contenidos: el registro numérico, el registro tabular (tabla de frecuencias), el registro simbólico (fórmulas), el registro de la lengua natural y el registro gráfico (diagrama de sectores, diagrama de barras, histogramas y pictogramas).

El lenguaje gráfico tiene un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de *transnumeración,* por ello es uno de los registros de representación semiótico más utilizados en la enseñanza-aprendizaje de la estadística.

Desde primer curso se incluyen actividades sencillas de lectura de gráficos de barras y pictogramas y también alguna actividad de construcción e interpretación, con lo que se trabaja la conversión entre el registro de la lengua natural y el gráfico en ambos sentidos, siendo mayoritarios los ejercicios que requieren la conversión del primero al segundo, mientras que en el otro sentido no suelen presentar mucha dificultad al alumno.

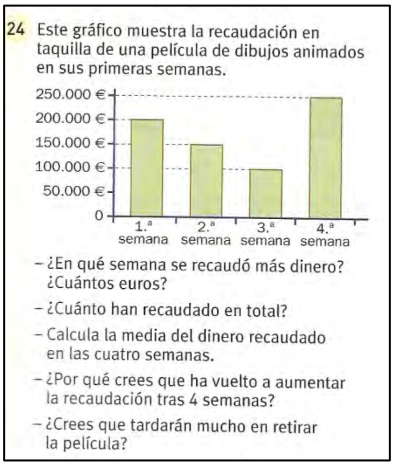


FIGURA 2.3.2.1.4.1. *Actividad de estadística. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

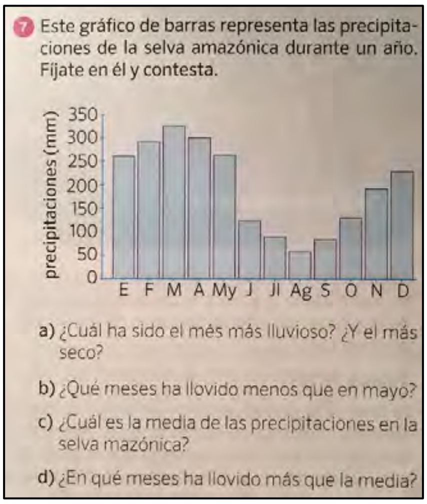
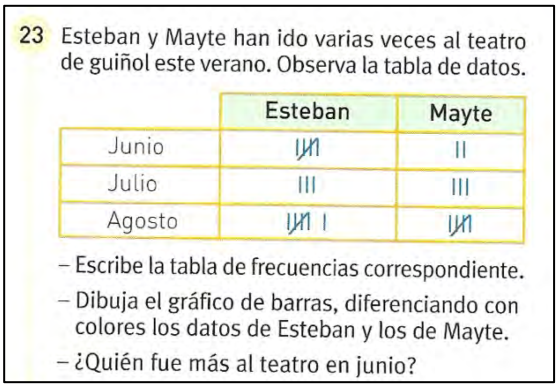


FIGURA 2.3.2.1.4.2. *Actividad de estadística. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

A partir de tercer curso, y en adelante, se incluyen actividades de cambio de representación de tabla a gráfico, utilizando el registro tabular no como un registro de representación semiótico en sí mismo, sino como herramienta a partir de la cual los alumnos pueden construir los gráficos.

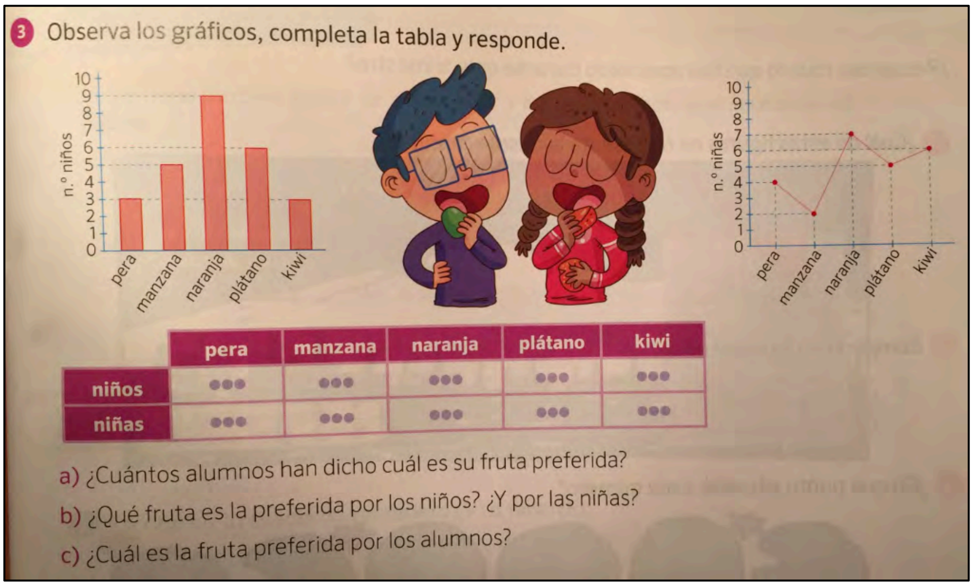

23 Esteban y Mayte han ido varias veces al teatro de guiñol este verano. Observa la tabla de datos.

	Esteban	Mayte
Junio	𝍸	II
Julio	III	III
Agosto	𝍸 I	𝍸

– Escribe la tabla de frecuencias correspondiente.
– Dibuja el gráfico de barras, diferenciando con colores los datos de Esteban y los de Mayte.
– ¿Quién fue más al teatro en junio?

FIGURA 2.3.2.1.4.3. *Actividad de estadística. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

Los ejercicios en los que es necesario que los alumnos pasen del registro gráfico al registro tabular son escasos, siendo el porcentaje de tareas o actividades que requieren de esta articulación muy reducido:



	pera	manzana	naranja	plátano	kiwi
niños	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●
niñas	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●

a) ¿Cuántos alumnos han dicho cuál es su fruta preferida?
b) ¿Qué fruta es la preferida por los niños? ¿Y por las niñas?
c) ¿Cuál es la fruta preferida por los alumnos?

FIGURA 2.3.2.1.4.4. *Actividad de estadística. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

En los manuales escolares de los cursos superiores aparecen actividades en las que se les pide a los alumnos que obtengan el valor numérico (registro numérico) de media, mediana y rango mediante la utilización de fórmulas (registro algebraico), a partir de los datos recogidos en una tabla (registro tabular) o dados mediante el lenguaje natural, pero en ningún momento se han encontrado actividades en las que se pida al alumno que calcule dichos parámetros a partir de una gráfica, es decir, en las que sea necesaria la conversión del registro gráfico al numérico.

Aunque son diversos los registros de representación semiótica que los libros de texto parecen movilizar en el aprendizaje de contenidos estadísticos y tratamientos de datos, muchas de las actividades no persiguen realmente la coordinación entre los registros de representación mediante la conversión para que el alumno adquiera de manera significativa las nociones, sino proporcionar las herramientas necesarias para que los estudiantes encuentran la solución al problema.

Con respecto a la probabilidad y el azar, la escuela primaria ofrece múltiples posibilidades de desarrollo del pensamiento probabilista y, sin embargo la mayor parte de los contenidos y actividades relacionadas con esta rama de las matemáticas queda relegadas al estudio de sucesos posibles, imposibles y seguros a través de problemas dados mediante el registro de la Lengua Natural apoyado, en algunos casos, por el registro Figural:

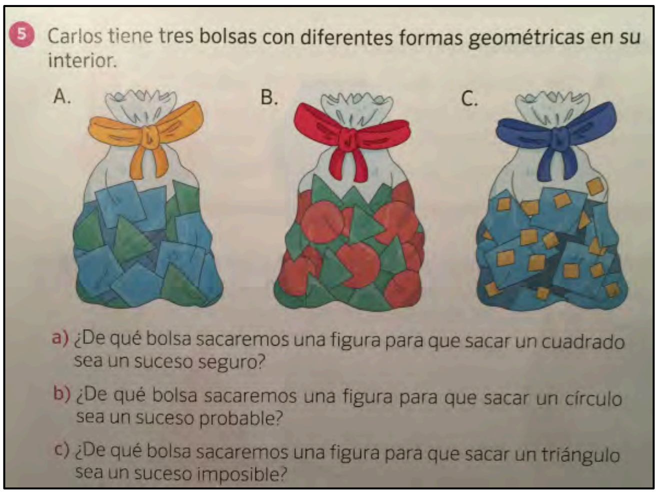


FIGURA 2.3.2.1.4.5. *Actividad de probabilidad. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

2.3.2.2. Libros de texto Educación Secundaria

Nuestro estudio ha consistido en el análisis de las transformaciones entre los distintos registros de representación semiótica que tienen lugar en los libros de texto (15 libros de tres editoriales distintas) dentro de cada uno de los cinco bloques de los que se compone la materia según el currículo español: *Números, Álgebra, Geometría, Funciones y Gráficas* y *Probabilidad y Estadística.*

A continuación, se van a presentar algunos aspectos que nos han parecido didácticamente interesantes tras el estudio de los manuales analizados:

2.3.2.2.1. Números: fracciones, racionales y decimales

La manera de abordar y trabajar los contenidos sobre Números en los libros de texto, vertebran mejor o peor el resto de contenidos que se contemplan en el currículo, pues las capacidades adquiridas y el grado de comprensión de los conceptos, ambos fuertemente vinculados con la coordinación y conversión de registros de representación, actuarán para perjudicar o favorecer el aprendizaje de otros contenidos matemáticos.

En el caso concreto de los números racionales e irracionales, se enriquecen al utilizar múltiples representaciones para afianzarlos.

Un número racional se puede representar de varias formas: icónica, figural, porcentual, como fracción, geométrica, decimal etc. Desde el punto de vista de los procesos de pensamiento, es importante plantear a los estudiantes actividades que faciliten y posibiliten el tratamiento y conversión entre estos registros, aspecto significativo del razonamiento matemático, la comunicación y la resolución de problemas con números racionales y fracciones.

En este sentido y tras haber analizado los libros de texto, podemos hacer las siguientes apreciaciones:

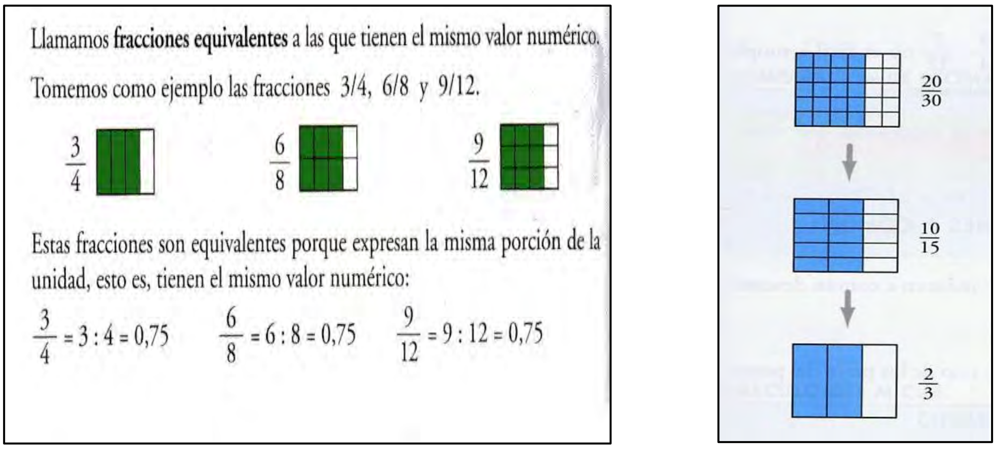
- Utilización de registros gráficos: En los libros de texto actuales aparecen gráficos, tablas, dibujos, diagramas, etc., cuya principal finalidad es la de conseguir la motivación y captar el interés del alumno.

Las representaciones gráficas vinculadas a la fracción se utilizan, principalmente, como recurso para ejemplificar las representaciones simbólica y verbal, pero pocas de estas representaciones van acompañadas de la adquisición de algún concepto relacionado con los números racionales y las fracciones, ni pretenden tampoco fomentar la coordinación entre los diferentes registros de representación.

Si nos centramos en el análisis de los significados y las representaciones más significativas desde un punto de vista epistemológico, sobre el concepto de fracción dentro de cada texto, se observa que de los cinco significados de fracción constatados por diversos autores (Escolano y Gairín, 2005), *fracción como parte de un todo, fracción como operador, fracción como cociente, como medida y como razón,* los más trabajados, aparentemente, en los manuales son los tres primeros.

El significado de fracción como parte de un todo posee el protagonismo como soporte y apoyo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la fracción y sus propiedades. Por ello, las representaciones vinculadas a la fracción que se utilizan principalmente en los textos, son las de carácter pictórico (mayoritariamente diagramas de sectores) que tiene por objeto primordial transmitir el significado parte de un todo.

Destaca la presencia de tratamientos dentro de este sistema de representación gráfico pictórico, que permiten ilustrar la obtención de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones, multiplicación y división:


Llamamos **fracciones equivalentes** a las que tienen el mismo valor numérico.

Tomemos como ejemplo las fracciones 3/4, 6/8 y 9/12.

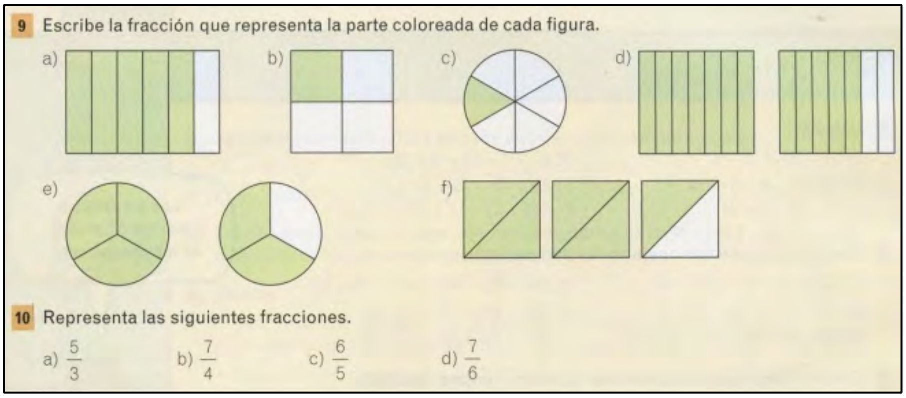
$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{9}{12}$

Estas fracciones son equivalentes porque expresan la misma porción de la unidad, esto es, tienen el mismo valor numérico:

$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$ $\frac{6}{8} = 6:8 = 0{,}75$ $\frac{9}{12} = 9:12 = 0{,}75$

FIGURA 2.3.2.2.1.1. *Actividades de fracciones. Libros de texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

Así, aparte del registro numérico, los sistemas de representación semióticos más utilizado, en lo que al tratamiento de fracciones se refiere en los manuales escolares, es el figural-icónico y el geométrico. Esto supone que la única conversión entre registros que promueven los libros analizados, es entre estos sistemas de representación y el numérico, como se ejemplifica en las siguientes actividades:


9 Escribe la fracción que representa la parte coloreada de cada figura.

a) b) c) d) e) f)

10 Representa las siguientes fracciones.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{6}$

FIGURA 2.3.2.2.1.2. *Actividades de fracciones. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

- Predominio de la operación: Gran parte de los temas de fracciones están dedicados a las operaciones, a comprender su significado, cómo se opera, y a estudiar algunas de sus propiedades matemáticas. Todos estos aspectos dependen del contexto que se esté utilizando y del sistema de representación al cual pertenecen los registros de representación. Por ello, los tratamientos dentro de cada registro ocupan un lugar predominante en la actividad matemática de estos temas, que parecen perseguir que el alumno aprenda de memoria una serie de reglas que le permitan llevar a cabo dichas transformaciones de manera automática o algoritmizada. Las transformaciones que más aparecen se encuentran dentro del sistema de representación numérico. Ejemplos de ellas son: la suma, resta, producto y cociente, la reducción de fracciones a común denominador, la generación de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones, la construcción de clases de equivalencia, etc.

- Se emplean mayoritariamente los sistemas de representación simbólicos (numéricos y algebraicos) y verbal. Éste último se utiliza sobre todo para hacer lecturas de fracciones representadas en forma simbólica.

2.3.2.2.2. Álgebra: Predominio de conversiones

Según Duval (Duval 2006b), un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir y estudiar distintas representaciones del mismo. La enseñanza del álgebra, en los libros de texto, parece desarrollarse a partir de la conversión entre los siguientes sistemas de representación: la lengua natural, el algebraico, el geométrico y el gráfico.

La utilización de estos sistemas de representación y la coordinación entre ellos da lugar a la aparición de esquemas mentales que ayudan a la comprensión y progreso en la adquisición de nuevos objetos, a la vez que desarrollan la capacidad de utilizar ideas algebraicas por parte del alumno.

Pero, ¿es esto lo que consiguen los libros de texto? A lo largo de todos los temas, se observa una fuerte tendencia hacia la conversión de cualquier tipo de registro al registro algebraico, con lo cual, los manuales escolares no consiguen alcanzar tal propósito.

Así, por ejemplo, encontramos los siguientes casos:

- Conversión entre el registro del lenguaje natural y el registro algebraico.

La mayoría de los problemas propuestos en las unidades didácticas que se dedican al desarrollo y estudio del álgebra, se pueden resolver de forma aritmética sin necesidad de recurrir al registro algebraico, lo que indica que no se trata de actividades que verdaderamente movilicen la conversión entre el registro de la lengua natural y el registro algebraico. Sin embargo, al alumno se le pide que los resuelva de manera algebraica, apareciendo así el fenómeno denominado algebrización de la aritmética (Gascón 1993; Bolea, 2003).

Calcula las longitudes de los lados de un rectángulo de perímetro 82 cm y cuya base mide 8 cm más que la altura.

He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

FIGURA 2.3.2.2.2.1. *Actividades que algebrizan la aritmética. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

Gran parte de las actividades planteadas no suponen una verdadera coordinación entre registros, sino que, por regla general, en la mayoría de los textos aparecen, básicamente, actividades que podríamos llamar de traducción, en las que el problema dado en el registro de la lengua natural no se acompaña de ninguna otra representación en otro registro y la conversión consiste únicamente en hacer una lectura de izquierda a derecha.

Expresa cada enunciado con una identidad:

a) La raíz cuadrada del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces cuadradas del dividendo y del divisor.

b) La potencia del producto de dos números es igual al producto de las potencias de los factores.

c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.

d) El producto de un número por el siguiente es igual a ese número más su cuadrado.

● Expresa en lenguaje algebraico estos enunciados.

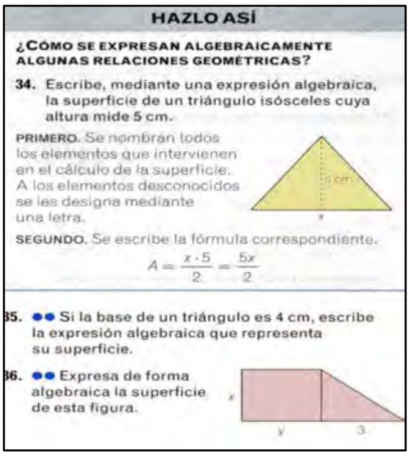
a) El doble de un número más 5.
b) El triple de un número menos 6.
c) El doble de la suma de un número más 4.
d) La mitad de la diferencia de un número menos 8.
e) El cuadrado de la suma de un número más 7.
f) El cubo de la mitad de un número.
g) La mitad del cuadrado de un número.
h) Un número más su cuadrado.
i) El cuádruple del cuadrado de un número.
j) La mitad de un número menos 3.

FIGURA 2.3.2.2.2.2. *Actividades de traducción al algebra. Libros de texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

Este tipo de actividades da lugar a numerosos casos de no congruencia, ya que no existe una correspondencia semántica entre las unidades significantes de cada uno de los registros puestos en juego. Por ello, se debe intentar plantear actividades en las que la conversión entre representaciones sea congruente, para, posteriormente, introducir tareas con diferentes grados de no congruencia.

En ninguno de los libros analizados aparecen actividades en las que la conversión se haga a la inversa, es decir del registro algebraico al del lenguaje natural.

- Conversión entre el registro geométrico y el registro algebraico



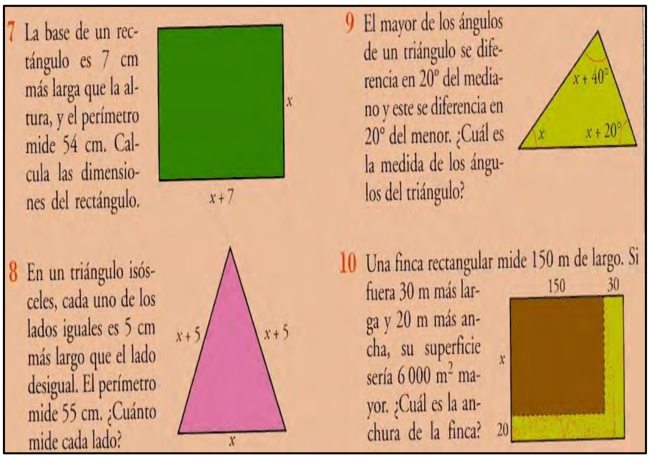


FIGURA 2.3.2.2.2.3. *Actividades de conversión entre el Registro Geométrico y el Registro Algebraico. Libros de texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

Estos son algunos ejemplos de problemas y ejercicios donde es necesario pasar del registro geométrico al registro algebraico para encontrar la solución del problema, es decir, que el álgebra aparece como herramienta necesaria para su resolución.

Por el contrario, no se encuentra ninguna actividad donde se pida al alumno que utilice el registro geométrico para encontrar la solución de un determinado problema algebraico, que represente de manera geométrica una expresión algebraica, o que demuestre geométricamente algún resultado del álgebra, como por ejemplo puede ser la resolución de ecuaciones de segundo grado mediante el método de Al-Khwarizmi. Lo único que aparece, y en forma de anécdota al margen de algunos de los libros, son las demostraciones geométricas de los productos notables.

Cabe destacar, que los libros de texto han tendido hacia una aritmetización y algebreización de la geometría, dando lugar a una pérdida de sentido de las actividades geométricas.

- Conversión entre el registro gráfico y el registro algebraico.

Pasar de una expresión algebraica a una representación gráfica es un proceso que se encuentra con asiduidad en los libros de texto. Son numerosos los ejercicios en los que se le pide al alumno que representen en un sistema de ejes cartesianos la expresión de una determinada función, sistemas de ecuaciones, etc., ya que no se obtiene la misma información cuando se trabaja con un sistema de representación u otro.

> Representa gráficamente estas ecuaciones:
>
> $$x + y = 2$$
> $$2y - x = 4$$
>
> Escribe las coordenadas del punto de corte.
>
> Escribe la solución del sistema que forman ambas ecuaciones.

FIGURA 2.3.2.2.2.4. *Actividades de conversión entre el Registro Algebraico y el Registro Gráfico. Libro de texto de Secundaria de la Ed.*

Sin embargo, no se hace mucho hincapié en proponer tareas en las que se haga variar sistemáticamente las unidades significantes de la representación del registro algebraico, y observar e identificar las variaciones producidas en la representación del registro gráfico. Este tipo de tareas parecen relegarse al bachillerato (16-18 años), por considerarse de dificultad notable para el alumno.

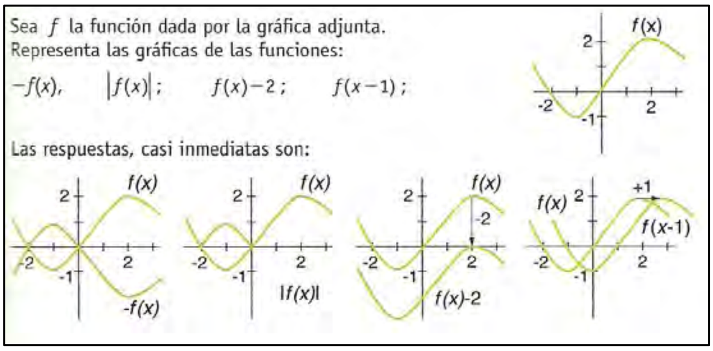


FIGURA 2.3.2.2.2.5. *Actividades de conversión entre el Registro Gráfico y el Registro Algebraico. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Santillana*

Duval afirma que

> (...) esta conversión exige que se discriminen bien las unidades significantes de cada registro, es decir, es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una relación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan significación, y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados (Duval, 1993, p. 182).

Por otro lado, en comparación con el porcentaje de ejercicios que requieren la conversión del registro algebraico al gráfico, son escasos los ejercicios y actividades en los que la conversión se pida en el sentido contrario. Este tipo de tareas fomenta la utilización de tratamientos propios del registro gráfico (dilataciones, contracciones, traslaciones, reflexiones, etc.), promoviendo así, no solo una aprehensión perceptiva, sino también operativa dentro de este registro. Por ello es importante proponer al alumno tareas de este tipo:

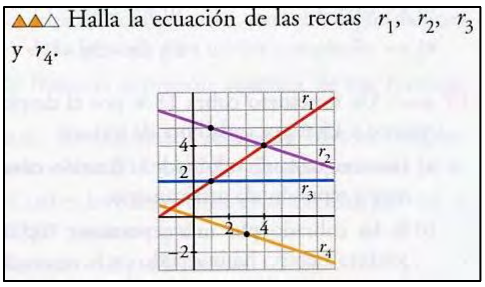


FIGURA 2.3.2.2.2.6. *Actividades de conversión entre el Registro Gráfico y el Registro Algebraico. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

2.3.2.2.3. Geometría

Como indicamos en el análisis de este bloque en los manuales escolares de E.P, un aspecto crucial en la enseñanza de la geometría es la estrecha relación que guarda con la interpretación y utilización de dibujos, figuras y esquemas. Duval, a través de sus trabajos, ha manifestado y corroborado que dicha interpretación precisa de la activación por parte de los estudiantes de complejos procesos semióticos que, por regla general, pasan inadvertidos en la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

La coordinación entre el proceso de visualización y el proceso de razonamiento caracteriza los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas geométricos en alumnos de estas edades, es decir, que en geometría es necesario movilizar conjuntamente y en paralelo dos registros de representación: uno se produce de manera discursiva, por deducción de propiedades que impliquen el uso del lenguaje, y el otro se da de manera visual a través de la reconfiguración de las figuras (Torregrosa y Quesada, 2007).

En los libros de texto de secundaria estudiados, y debido a las características de la geometría comentados anteriormente, predominan los ejercicios que viene dados en modo figurativo. La mayoría de ellos requieren el paso al registro numérico o simbólico, y los alumnos lo único que tienen que hacer es aplicar una fórmula para resolver el problema, echándose en falta así, actividades que requieran de transformaciones figurales como pueden ser añadir o quitar elementos geométricos a la configuración inicial, obteniendo de esta manera subconfiguraciones que les acerquen a la resolución del problema, o la manipulación de los elementos de la figura inicial como si fuesen piezas de un puzzle.

Según trabajos de Duval sobre cómo hacer que los alumnos de Secundaria se aproximen a las representaciones geométricas, las actividades que se suelen proponer a los estudiantes dentro de este campo y que son consideradas como la manera clásica de introducir a los alumnos en los procesos geométricos, pueden ser reagrupadas en cuatro tipos o entradas según el papel que jueguen las figuras o según la utilización que se haga de ellas y los tratamientos puestos en juego. A su vez, estas cuatro entradas pueden clasificarse en dos categorías en función de los procesos de reconocimiento de los objetos representados. De esta manera, tenemos la siguiente clasificación:

TABLA 2.3.2.2.3.1. *Entradas clásicas en Geometría*

<table>
<tr><td colspan="2">Visualización icónica: Reconocimiento del objeto por el parecido con el objeto real que representa.</td><td colspan="2">Visualización no icónica: Reconocimiento del objeto a partir de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas o a partir de hipótesis. Sólo este tipo de visualización, y los tratamientos que tienen lugar en las tareas que se encuadran en ella, son pertinentes en los procesos geométricos.</td></tr>
<tr><th>Botanista</th><th>Agrimensor geómetra</th><th>Constructor</th><th>Inventor</th></tr>
<tr><td>• Actividad geométrica casi inexistente.
• Aprehensión perceptiva : reconocimiento cualidades visuales del contorno</td><td>• Tarea especifica: medir longitudes, distancias, etc.
• Cambio de escala de magnitud</td><td>• Entrada necesaria para que los alumnos entren en contacto con los procesos geométricos.
• Generar con instrumentos de construcción.
• Aprehensión secuencial: descomposición en trazados construibles con la ayuda de un instrumento.</td><td>• Transformación de las figuras: descomposición de la forma de partida o combinación de otras.
• Aprehensión operativa: operaciones de reconfiguración.
• Comienzan los procesos de visualización geométrica.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia a partir de Duval, 2003

A estas cuatro entradas clásicas, Duval añade una quinta que considera de vital importancia para progresar en los procesos geométricos, y es la de la *deconstrucción dimensional de las formas*. Esta quinta entrada consiste en descomponer en unidades figurales, ya sea del mismo número de dimensión (descomposición por división mereológica) o de dimensión inferior (descomposición por deconstrucción dimensional), una figura dada:

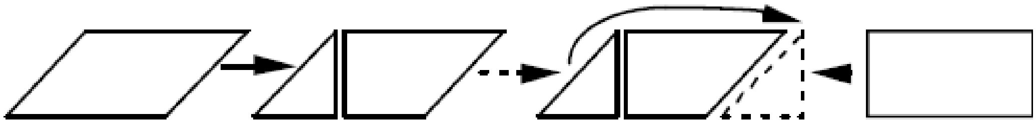


FIGURA 2.3.2.2.3.1. *Deconstrucción dimensional y reconfiguración.* (Duval, 2003, p. 12)

Haciendo un análisis de los libros de texto, en relación a la puesta en práctica de estas entradas, se han obtenido los siguientes resultados:

- Las únicas actividades que hacen referencia a la entrada botanista en los manuales analizados, son los relacionados con el reconocimiento de poliedros:

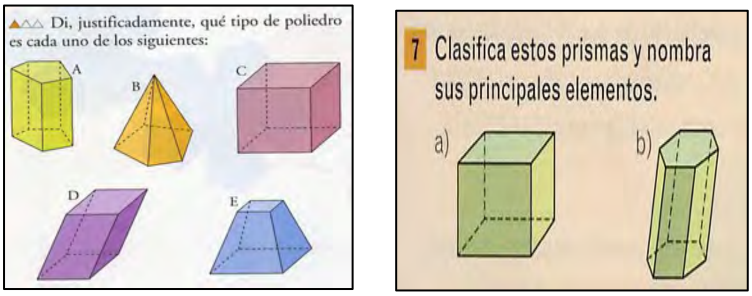
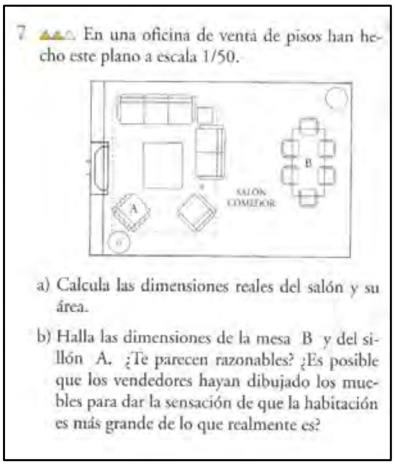


FIGURA 2.3.2.2.3.2. *Actividades de entrada botanista. Libro texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

- Los ejercicios que guardan relación con la entrada agrimensor-geómetra versan sobre mapas, planos y cambios de escala.


7 En una oficina de venta de pisos han hecho este plano a escala 1/50.

a) Calcula las dimensiones reales del salón y su área.

b) Halla las dimensiones de la mesa B y del sillón A. ¿Te parecen razonables? ¿Es posible que los vendedores hayan dibujado los muebles para dar la sensación de que la habitación es más grande de lo que realmente es?

FIGURA 2.3.2.2.3.3. *Actividad de entrada agrimensor-geómetra. Libro texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

- El porcentaje de ejercicios en los que se pide al alumno que construya, utilizando los instrumentos pertinentes y siguiendo una serie de instrucciones, una determinada figura u objeto geométrico, es mínimo, encontrándose, únicamente, ejercicios que hacen referencia a bisectrices, mediatrices, circunferencias inscritas y circunscritas:

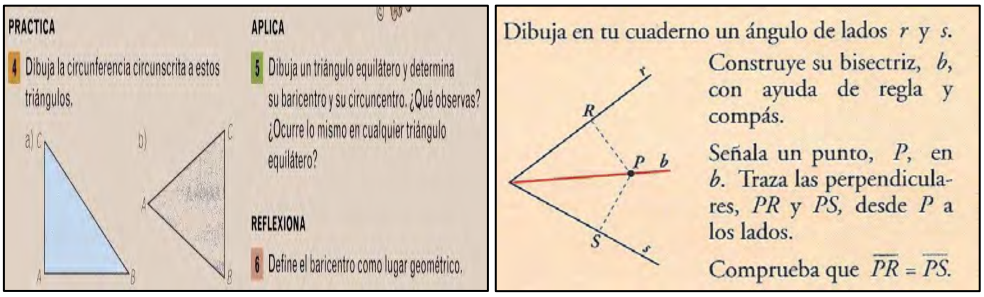


FIGURA 2.3.2.2.3.4. *Actividades de entrada Constructor. Libro texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

La mayoría de los libros de textos estudiados parecen confundir las actividades de construcción con actividades de reproducción y representación.

- Los ejercicios en los que es necesario llevar a cabo una reconfiguración de las figuras para obtener la solución, y que son considerados necesarios para la adquisición y desarrollo de procesos de visualización geométrica, son escasos. Además, algunos de ellos, presentan una dificultad mínima:

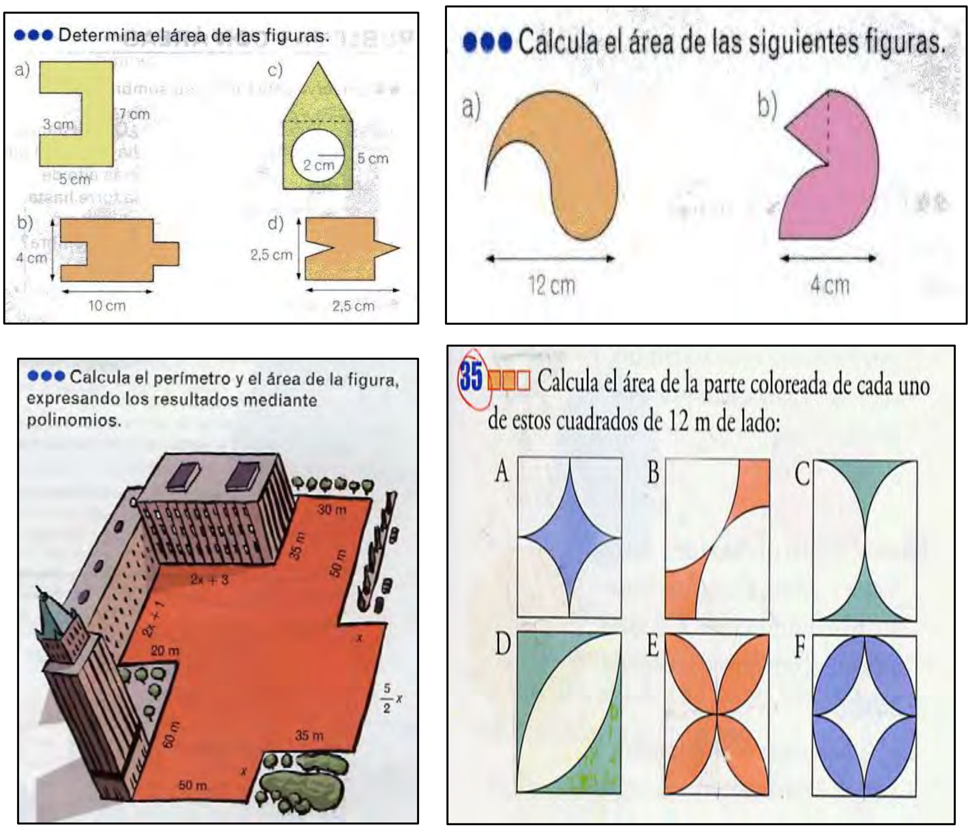


FIGURA 2.3.2.2.3.5. *Actividades de reconfiguración figural. Libros texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

• En lo relativo a la quinta entrada, la deconstrucción dimensional, se han encontrado las siguientes actividades en los manuales analizados:

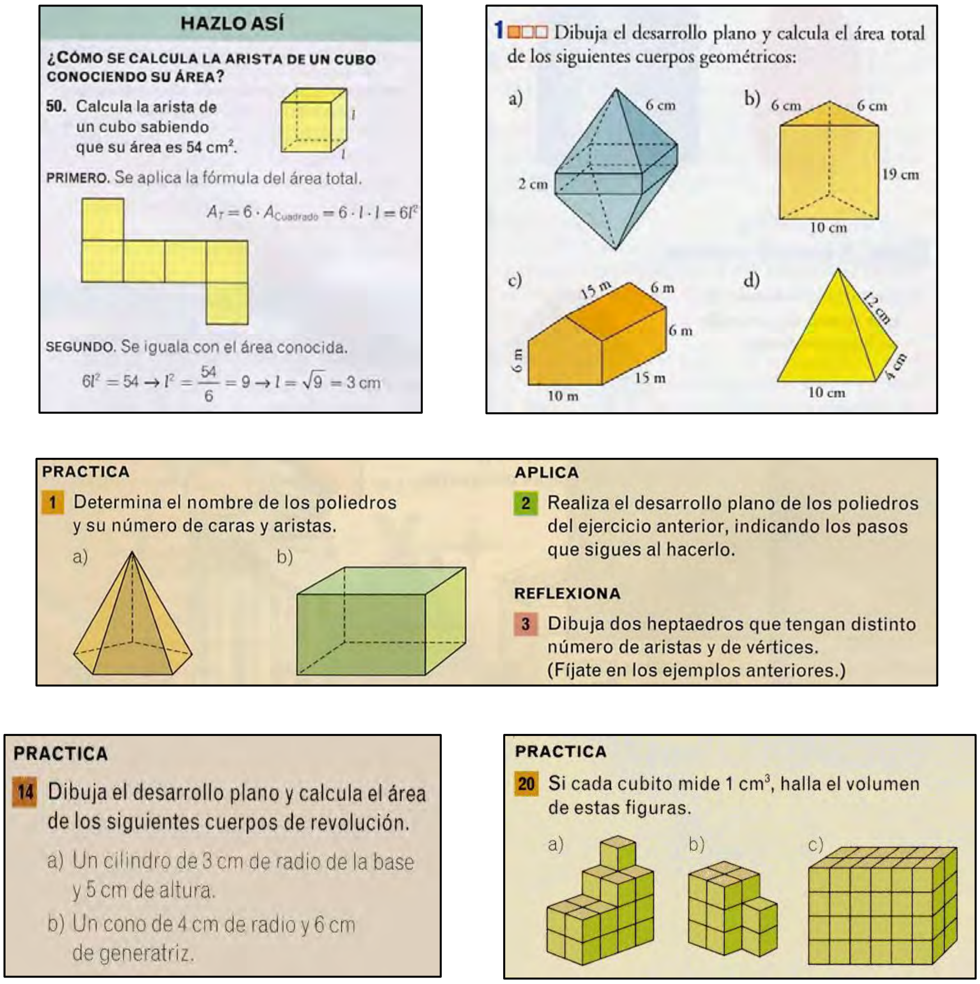


FIGURA 2.3.2.2.3.6. *Actividades de deconstrucción dimensional. Libros texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

Los ejercicios que hacen referencia a la descomposición de la figura de partida en unidades figurales del mismo número de dimensiones que la primera, es decir, actividades donde es necesario hacer una descomposición mereológica, suelen ser del tipo (2D/2D) como aparecen en el apartado anterior. El porcentaje de tareas cuya descomposición es del tipo (3D/3D) es mínimo, quedando reducida a la descomposición de sólidos en bloques poliédricos, fundamentalmente cubos.

Por otro lado, las actividades que se han encontrado que requieren descomponer una figura en unidades figurales de dimensión inferior a la inicial, se limitan a dibujar el desarrollo plano de diferentes poliedros, en los que se pasa de tener un cubo, una pirámide, etc, cuya configuración es (3D/2D), a triángulos, pentágonos, cuadrados (unidades figurales (2D/2D)). Esta deconstrucción dimensional finaliza aquí, de manera que no se continúa con la descomposición de estos polígonos en rectas, curvas y resto de unidades figurales (1D/2D), y mucho menos se continúa hasta la descomposición en puntos, es decir, en unidades (0D/2D).

Aunque aparecen tareas que se encuadran dentro de las diferentes entradas que acercan al alumno a los procesos geométricos, muchas de ellas no establecen una articulación entre la visualización y el razonamiento, característica básica en toda actividad y proceso geométrico. Además, el porcentaje, en comparación con aquellos ejercicios que exclusivamente requieren la utilización de una fórmula o el paso al registro algebraico para su resolución, es reducido.

Otro aspecto a destacar es el relativo al cambio de anclaje[3]. Según Duval, este proceso es de gran importancia para coordinar las distintas maneras de representación al resolver problemas de carácter geométrico. Aunque en los manuales escolares aparecen actividades en las que es necesario efectuar un cambio del anclaje discursivo al anclaje visual o viceversa, en gran parte de los ejercicios el cambio viene efectuado, impidiendo, así, que sea el alumno el que lleve a cabo dicho proceso.

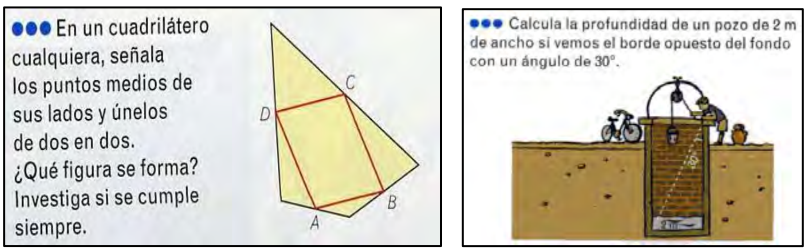


FIGURA 2.3.2.2.3.7. *Actividades de cambio de anclaje. Libro texto de Secundaria de la Ed. Santillana*

[3] Proceso que tiene lugar dentro de la aprehensión discursiva. Consiste en establecer un vínculo entre lo que se está percibiendo visualmente, con afirmaciones matemáticas. Dependiendo del sentido de la transferencia tenemos, *el cambio del anclaje visual al anclaje discursivo* o *el cambio del anclaje discursivo al anclaje visual*.

Al igual que ocurría con los manuales escolares de Educción Primaria estudiados, existe un predominio de la práctica ostensiva, lo que no es suficiente para asegurar el aprendizaje de los conceptos espaciales y geométricos que se pretende que el alumno alcance en esta etapa educativa.

2.3.2.2.4. Funciones y gráficas

Algunas de las concepciones más utilizadas por los alumnos de secundaria en lo que al campo de las funciones se refiere, y que han sido estudiadas en diversas investigaciones (Ruiz Higueras, 1998), son:

- Concepción primitiva: Una función es un desplazamiento de puntos sobre el plano o sobre una línea.
- Razón o proporción: En un desplazamiento de puntos sobre el plano; la nueva posición se puede describir en relación con la posición inicial por una razón de distancias desde un punto fijo.
- Visión sintética de la curva: La función se identifica con su representación en el plano.
- Tabla numérica: Las funciones viene dadas por su tabla de valores.
- Expresión algebraica: Una función se identifica por su ecuación.
- Visión analítica de la curva: La función es un ente “abstracto” en unos ejes de coordenadas.
- Relación funcional: Existe un tipo especial de relaciones que llamamos funciones.

Según el análisis realizado de los libros de textos, se puede afirmar que las concepciones que inducen y promueven los manuales escolares son:

- Expresión algebraica: Una función siempre viene dada por una fórmula algebraica. Se emplean en situaciones que se reducen a la aplicación algorítmica de reglas útiles para la resolución de los ejercicios y problemas propuestos.

- Función representada en un diagrama cartesiano: Una función es una curva representada en unos ejes cartesianos. Su empleo se limita a los ejercicios de representación gráfica de funciones cuyas expresiones algebraicas se reducen a rectas, parábolas, funciones escalonadas, hipérbolas y algunas funciones definidas a trozos.

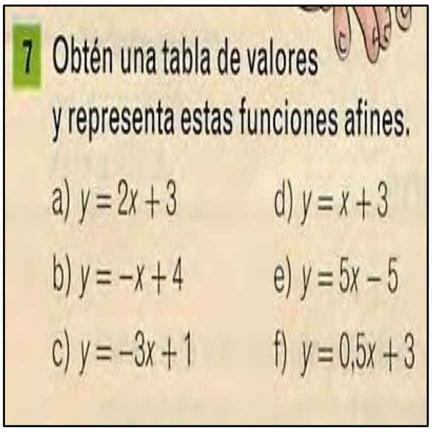
Para la mayoría de los estudiantes, una función es siempre una función lineal. Ello es debido a que las funciones reales de variable real, que tienen la forma $f(x)=mx+n$, son uno de los modelos afines más simples y representan para muchos alumnos el primer contacto formal con el concepto de función.

En los libros de texto analizados se trabaja con registros de representación semiótico gráfico, algebraico y tabular de la función lineal, existiendo un predominio de la representación cartesiana de la misma, lo que puede llevar al alumno a identificar el concepto de función con tal representación.

Por regla general, se procede dando una presentación de las nociones matemáticas que el alumno debe adquirir, que es seguida, posteriormente, de una batería de ejercicios elaborados fundamentalmente para que el alumno pueda reconocerlas y utilizarlas sin apenas realizar ningún tipo de transformación; es decir, se trata de actividades que no suponen una verdadera movilización cognitiva.

En las actividades planteadas en las unidades referentes a funciones, los alumnos parece que tienen que poner en juego el cambio entre las representaciones gráfica, tabular y algebraica, es decir, efectuar la conversión entre dichos registros.

Existen ejercicios en los que se pone a prueba la destreza del alumno para identificar la linealidad en una tabla en la que aparecen los valores que toma la variable x frente a los valores de y. Esta pregunta no requiere de un cambio de registro y está relacionada más bien con la actividad cognitiva de formación en el registro tabular. La mayor parte de los ejercicios propuestos están formulados dentro del marco algebraico, en los que es necesaria la conversión de tal registro al registro gráfico, utilizando como intermediario el registro tabular. La utilización que se hace en los textos del registro tabular es justamente ese, la de herramienta intermediaria que permite localizar puntos en el plano a partir de una representación algebraica, y no como una representación por sí misma.


7 Obtén una tabla de valores y representa estas funciones afines.

a) $y=2x+3$ d) $y=x+3$

b) $y=-x+4$ e) $y=5x-5$

c) $y=-3x+1$ f) $y=0{,}5x+3$

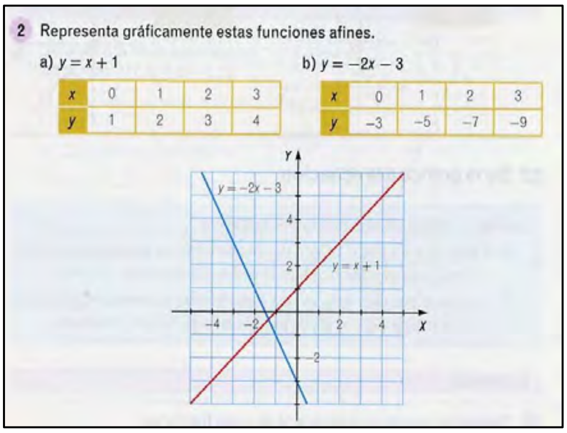
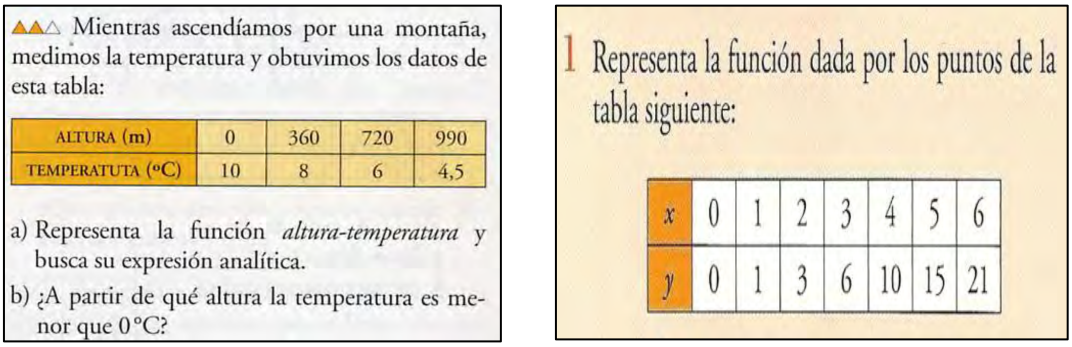


FIGURA 2.3.2.2.4.1. *Actividades de representación gráfica con tabla. Libros texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

Este tipo de actividades no proponen ningún tipo de cuestiones donde el alumno tenga que reflexionar sobre propiedades más generales y significativas de la variación de una función, por lo que la representación gráfica de una función se convierte en un fin en sí mismo y no en un sistema de representación que da cuenta de ciertas propiedades y características que el registro algebraico no permite estudiar.

No se ha encontrado ningún ejercicio en el que se pida encontrar la expresión algebraica de una determinada función a partir de los datos dados en el registro tabular. Se trata de una conversión en cuyo proceso entra en juego el hecho de determinar cuáles son los puntos de la tabla que permiten escribir la ecuación de la función.

Sin embargo, sí aparecen algunas actividades en las que se proporciona al alumno, directamente, una tabla de valores y se le pide que obtenga la gráfica de la función que representan. Tales ejercicios no establecen una verdadera conexión entre el registro tabular y gráfico de las funciones, ya que los alumnos reconocen los datos proporcionados en las tablas como simples puntos y no como unidades significantes del registro tabular.



Mientras ascendíamos por una montaña, medimos la temperatura y obtuvimos los datos de esta tabla:

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATUTA (ºC)	10	8	6	4,5

a) Representa la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

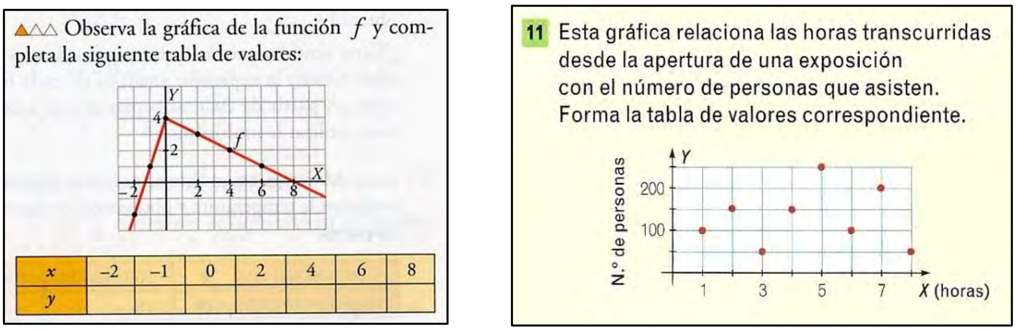
b) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

1 Representa la función dada por los puntos de la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	3	6	10	15	21

FIGURA 2.3.2.2.4.2. *Actividades de representación gráfica con tabla. Libro texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

De igual manera, solo se han encontrado dos actividades en los que se pide realizar una conversión del registro gráfico al registro tabular, lo que requiere localizar un punto en la gráfica y obtener su proyección tanto en el eje de abscisas como en el de ordenadas, es decir, transformar un punto del plano cartesiano a un pareja de números:



x	–2	–1	0	2	4	6	8
y							

FIGURA 2.3.2.2.4.3. *Actividades de conversión del Registro Gráfico al Tabular. Libros texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

En menor medida, aparecen ejercicios rleacionados con la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico. En ellos se proporciona la gráfica de una función con los datos necesarios para que el alumno pueda determinar la expresión algebraica correspondiente. Uno de los aspectos importantes para realizar este tipo de conversión es el de encontrar los parámetros significativos de una gráfica y descubrir cómo estos parámetros se relacionan con la escritura algebraica Este tipo de conversión, por regla general, genera más dificultades para el alumno, debido a problemas de no congruencia; paradójicamente los libros de texto otorgan menos importancia a estos ejercicios:

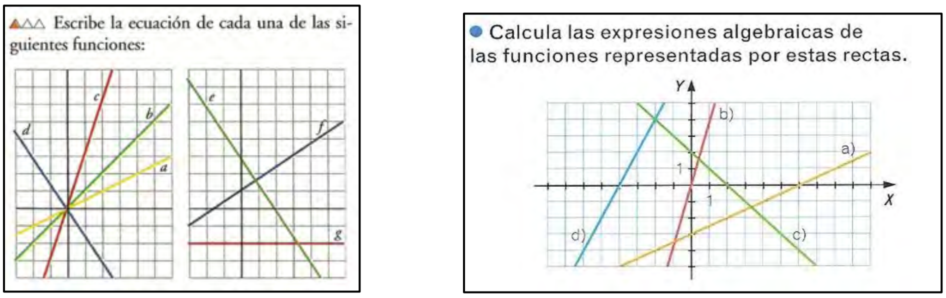


FIGURA 2.3.2.2.4.4. *Actividades de conversión del Registro Gráfico al Algebraico. Libros texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

La consideración de las funciones como una herramienta adecuada para modelizar relaciones entre distintas magnitudes, es una condición fundamental para dar sentido al concepto de función de manera completa. Las actividades donde los alumnos pueden utilizar la función como herramienta de modelización ponen de manifiesto si el alumno ha adquirido el autentico significado de función, o, por el contrario, aparecen bloqueos y comportamientos erróneos que serían indicadores de los límites de las concepciones de los estudiantes (Ruiz Higueras, 1998).

Además, este tipo de actividades permite a los alumnos utilizar diferentes registros de representación en su resolución (numérico, tabular, gráfico, algebraico, geométrico, ideográfico,...) y analizar las diferencias existentes entre los tratamientos que estos utilicen en función del registro movilizado.

Las tareas de modelización que aparecen en la mayoría de los textos escolares se enmarcan dentro del contexto espacio-tiempo, tiempo-precio, número de artículos-precio, etc. y suele tratarse de simples actividades de traducción de enunciados donde el alumno aplica los conocimientos de manera rutinaria, sin que tenga lugar en ellos una verdadera actividad cognitiva:

●● Los taxis de una ciudad cobran 1 € por bajada de bandera y 0,80 € por cada kilómetro recorrido.

a) Haz una tabla que exprese el precio del viaje en función de los kilómetros recorridos.

b) Escribe la función que relaciona ambas magnitudes y represéntala.

FIGURA 2.3.2.2.4.5. *Problema sobre funciones. Libro texto de Secundaria de la Ed. Santillana*

Los manuales escolares parecen promover, en lo que a funciones se refiere, la movilización entre diferentes registros con el fin de que el alumno alcance un conocimiento íntegro del concepto de función, pero en realidad lo único que hacen es proporcionar al alumno procedimientos mecánicos para lograr el éxito en la resolución de ejercicios, lo que en muchos casos se traduce en la manifestación de errores y dificultades, además de producir la utilización por parte de los estudiantes de un solo registro de representación sin ser capaces de coordinar dos o más (Guzmán, 1998).

Al igual que ocurría en el campo de la geometría, la *ostensión, que* supone la presentación de un objeto que designa la clase de objetos a la que pertenece, es muy frecuente en el estudio y aprendizaje de las funciones. La *ostensión gráfica, en la que* mostrar un gráfico es equivalente a una definición o una demostración, y en la que la presentación de un gráfico equivale a conocer una función dada, se da con frecuencia en los libros de texto, siendo generadora de la aparición de concepciones erróneas en los estudiantes, generando, frecuentemente, obstáculos en el proceso de comprensión del concepto de función (Lacasta, 1998; Lacasta y Rodríguez, 2001; Bagni, 2004).

2.3.2.2.5. Probabilidad y estadística

La probabilidad y la estadística han adquirido un papel substancial en el mundo actual, tanto por su importante implicación en el desarrollo científico y tecnológico como por su significativa presencia en el día a día de cada persona a través de juegos de azar, medios de comunicación, estudios, etc.

Por este motivo es necesario determinar y reflexionar sobre cuáles son aquellos aspectos sobre los que se debe centrar la atención para conseguir que dichos conceptos, junto con las propiedades, elementos y características que los constituyen, pasen a formar parte del conocimiento del alumno de forma significativa.

Los significados de probabilidad existentes según diversas investigaciones que se enmarcan dentro del modelo teórico del Enfoque Ontosemiótico (Batanero, 2005) son:

- *Significado intuitivo:* La idea intuitiva de probabilidad surge ligada a la apuesta, esperanza y ganancia en los juegos de azar.

- *Significado Laplaciano:* Laplace dio en 1814 la definición que hoy en día se enseña con el nombre de *regla de Laplace* para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles*.

- *Significado frecuencial:* Bernoulli sugirió que se podría asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento. De esta manera la probabilidad de un suceso se define como el valor en torno al cual tiende a estabilizarse la frecuencia relativa del suceso a medida que aumenta el número de veces que se realiza el experimento.

- *Significado subjetivo:* La probabilidad de un determinado suceso suele estar condicionada por las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad y por tanto, dicha probabilidad es diferente para distintas personas. Luego, la probabilidad subjetiva se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo.

- *Significado matemático:* A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyen al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Desde entonces, la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios.

Tras el análisis de los libros de textos, los significados de probabilidad que parecen promover mayoritariamente los manuales escolares son el significado intuitivo y el Laplaciano, y, en menor medida, el significado frecuencial.

Los registros de representación, vinculados a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, que aparecen en los libros de texto estudiados son, el registro de la lengua natural, el registro algebraico (fórmulas), el registro gráfico (diagramas de árbol) y el registro figural (diagramas de Venn).

La mayoría de los ejercicios vienen dados en el registro de la lengua natural. El cálculo o estimación de la probabilidad de un suceso es una tarea difícil que precisa comprender e interpretar los datos que aparecen en el problema, buscando la información y los datos relevantes para poder encontrar la solución. Por ello, la manera en que vienen redactados los enunciados es, en diversas ocasiones, origen de conflictos cognitivos en los alumnos.

En un instituto se ha preguntado a los alumnos si han practicado esquí y han montado en avión. Resultan los siguientes porcentajes: el 58 % ha practicado esquí, el 42 % ha montado en avión y el 29 % ha practicado esquí y ha montado en avión. ¿Qué es más probable, encontrar a alguien que haya practicado esquí entre los estudiantes que no han montado en avión, o a alguien que haya montado en avión entre los estudiantes que han practicado esquí?

En una competición de bicicletas de montaña, el circuito es tan peligroso que, en el primer puente por el que pasan los ciclistas, una de cada 5 bicicletas cae al agua. En una curva peligrosa, 3 de cada 10 ciclistas derrapan y se averían las bicicletas. Del último túnel solo salen 9 de cada 10 ciclistas que entran, mientras que antes de llegar a meta, el terreno está tan embarrado que 2 bicicletas de cada 5 quedan enterradas. Calcula la probabilidad que tienen los participantes de finalizar la carrera.

FIGURA 2.3.2.2.5.1. *Problemas de probabilidad. Libros texto de Secundaria de la Ed. Santillana*

El hecho de que la mayor parte de los ejercicios vengan dados en el registro de la lengua natural da lugar a que las conversiones entre registros que predominan en los manuales escolares sean entre tal registro y el registro simbólico, mediante la utilización de fórmulas e instrumentos de cálculo presentadas de manera más o menos formal y que conducen al alumno a la resolución del problema de manera mecánica haciendo uso de reglas nemotécnicas de aplicación que terminan por olvidar; encontramos, también, la conversión entre el registro de la lengua natural y el registro gráfico.

Es de gran utilidad representar el problema dado en el registro de la lengua natural mediante un diagrama de árbol o de Venn ya que de esta manera se visualizan y comprenden mejor los conceptos, sucesos, resultados posibles y probabilidades que entran en juego (Pluvinage, 2005). Los textos estudiados promueven únicamente la conversión hacia el registro gráfico de los diagramas de árbol, dedicando, incluso, una sección de la unidad al estudio y construcción de tales diagramas.

1 Dibuja el diagrama de árbol correspondiente al experimento de lanzar 3 monedas. ¿Cuál es el espacio muestral de los posibles resultados? Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) «Obtener 3 caras».

b) «Obtener una cara y dos cruces».

2 Dibuja el diagrama de árbol del experimento correspondiente a lanzar una moneda y a continuación un dado.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cruz y un dos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara y un número par?

FIGURA 2.3.2.2.5.2. *Problemas de probabilidad y diagramas de árbol. Libro de texto de Secundaria de la Ed. SM*

La utilización que hacen los manuales escolares de los diagramas de Venn se reduce a una simple imagen al margen de la página, que trata de ejemplificar las operaciones de unión e intersección de sucesos, pero en ningún momento aparecen problemas en los que se pida la construcción de tales diagramas para calcular probabilidades o realizar la conversión entre un diagrama de árbol y uno de Venn.

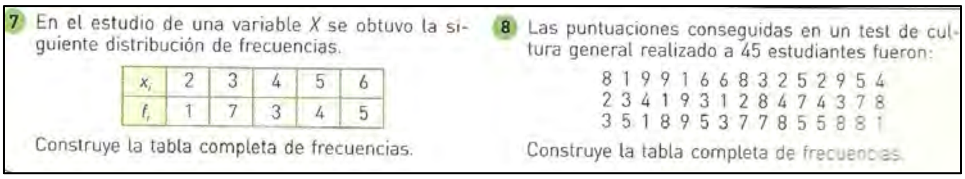
Los diagramas de Venn son especialmente útiles para representar sucesos, de hecho, cada uno de los axiomas de la probabilidad y la definición de probabilidad condicionada, que tantas dificultades genera en los alumnos, pueden ser representados de esta manera, y sin embargo su presencia e importancia dentro de los libros de texto es mínima.

Tampoco se han encontrado ejercicios en los que aparezca el cálculo o estimación de la probabilidad de un determinado suceso y se le pida al alumno que explique qué probabilidad es la que se esta calculando, es decir, problemas en los que se realice el paso del registro simbólico o gráfico al registro de la lengua natural.

En lo referente a la estadística, los registros de representación semiótica que aparecen en los textos escolares son, el registro tabular (tabla de frecuencias), el registro algebraico (fórmulas), el registro de la lengua natural y el registro gráfico (diagrama de sectores, diagrama de barras, histogramas y pictogramas).

Existe un predominio casi absoluto de la representación, organización y tratamiento de los datos en estudio mediante el registro tabular, a través del cual se le proporciona al alumno una serie de técnicas y reglas que le permiten obtener y calcular los parámetros estadísticos de manera automática y con gran comodidad. Esto genera, como consecuencia, errores en el alumno, debido a que no se ha producido un aprendizaje significativo, sino que lo que ha tenido lugar ha sido el aprendizaje de una serie de normas que acaba por olvidar, ya que en lugar de buscar la relación con la expresión matemática que determina tales parámetros e intentar que el alumno sea capaz de comprender e interiorizar el significado y obtención de los mismos, se busca, principalmente, que el alumno llegue al resultado esperado lo más rápido y fácilmente posible.

La conversión entre registros que aparecen mayoritariamente en los textos se da entre el registro de la lengua natural y el registro tabular por un lado y entre el registro tabular y el registro gráfico por el otro. Gran parte de los ejercicios y problemas piden al alumno que represente, mediante el gráfico adecuado, las tablas estadísticas y conjuntos de datos que se le proporcionan:


7 En el estudio de una variable X se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	2	3	4	5	6
f_i	1	7	3	4	5

Construye la tabla completa de frecuencias.

8 Las puntuaciones conseguidas en un test de cultura general realizado a 45 estudiantes fueron:

8 1 9 9 1 6 6 8 3 2 5 2 9 5 4
2 3 4 1 9 3 1 2 8 4 7 4 3 7 8
3 5 1 8 9 5 3 7 7 8 5 5 8 8 1

Construye la tabla completa de frecuencias.

FIGURA 2.3.2.2.5.3. *Actividades de conversión del Registro Tabular al Gráfico. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Santillana*

El número de hijos de 18 familias seleccionadas al azar es el siguiente:

1	2	3	0	2	1	1	0	5
2	1	0	2	2	1	4	1	6

a) Realiza el recuento de datos.

b) Construye la tabla estadística.

c) Dibuja un diagrama de barras.

Se han revisado 30 paquetes de tornillos y en cada uno se han encontrado estos tornillos defectuosos.

1	1	0	1	1	2	1	1	0	0
1	3	0	1	0	4	0	1	2	0
0	2	2	3	4	1	2	1	0	1

a) Realiza el recuento de datos.

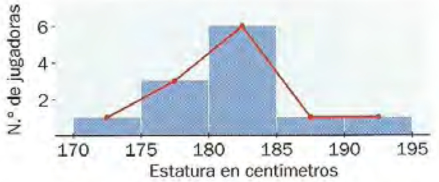
b) Construye la tabla de frecuencias.

c) Representa el diagrama de sectores.

FIGURA 2.3.2.2.5.4. *Actividades de conversión del Registro Tabular al Gráfico. Libro de texto de Secundaria de la Ed. SM*

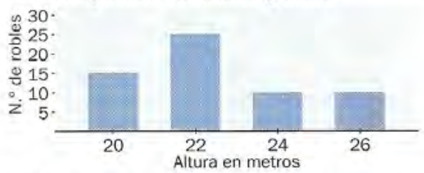
Por el contrario, los ejercicios en los que se les proporciona al alumno un determinado gráfico y se le pide que haga una interpretación del mismo o que determine algún parámetro estadístico a partir de él, es decir, ejercicios en los que la conversión es en el sentido opuesto, son muy pocos y presentan un grado de dificultad mínimo para el alumno.

El siguiente polígono de frecuencias muestra las estaturas de las 12 jugadoras de un equipo de voleibol femenino.



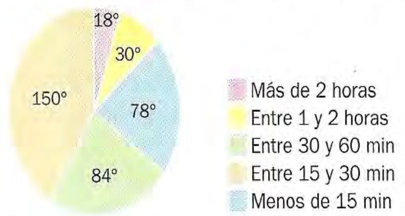
Calcula la media aritmética y la desviación típica.

En el Parque Nacional de los Picos de Europa se ha realizado un estudio sobre la altura de sus robles, y para ello se ha tomado una muestra en una superficie de 15 kilómetros cuadrados, obteniéndose los siguientes resultados gráficos.



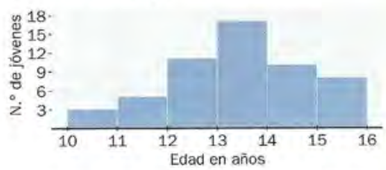
a) Halla la media, la moda y la mediana.

Este diagrama recoge el tiempo que dedican diariamente al ordenador 60 alumnos de Secundaria.



¿Cuántos alumnos corresponden a cada una de las categorías del estudio?

Según un estudio realizado a nivel nacional, la edad media en que la población realiza su primer viaje al extranjero es de 13,6 años. En un estudio realizado en un centro de Secundaria a 54 jóvenes, se han obtenido los siguientes resultados.



a) Elabora una tabla con los datos del gráfico, y calcula su media y su mediana.

b) Compara los resultados con la media nacional.

FIGURA 2.3.2.2.5.5. *Actividades de obtención de parámetros estadísticos a partir del Registro Gráfico. Libro de texto de Secundaria de la Ed. SM*

2.4. Conclusiones

Una de las características más importantes de la actividad matemática es la diversidad de registros de representación semiótica que es necesario movilizar en la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto u objeto matemático. Esto es debido a que, únicamente, a través de tales representaciones, podemos tener acceso a los objetos de conocimiento en matemáticas.

Duval (DUVAL, 1993, 2003, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2012) defiende que no deben confundirse los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que estos se organizan. La lengua natural, una notación, un símbolo, un esquema o una gráfica representan a un objeto matemático.

Los tratamientos dentro de cada registro y, sobre todo, las conversiones entre los distintos registros de representación semiótica que ponen de manifiesto unas determinadas propiedades del objeto en estudio, son fuente de dificultades en el aprendizaje del alumno. Restar importancia a la pluralidad y diversidad de registros de representación, trae como consecuencia la consideración, por parte del alumno, de que todas las representaciones de un objeto matemático determinado tienen el mismo contenido.

Esta diversidad de registros y las dificultades que genera la conversión y coordinación entre ellos, como pueden ser los fenómenos de no congruencia, rara vez son tenidos en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

Desde esta perspectiva, y particularizando en el tratamiento que hacen los libros de texto y el curriculum escolar, a este respecto, en distintas áreas de las matemáticas, se han llegado a las siguientes conclusiones:

- Los dos materiales curriculares de mayor relevancia actualmente empleados en el proceso educativo, es decir, la legislación educativa y los libros de texto, pasan por alto el modo en que los distintos registros de un mismo concepto matemático proporcionan una caracterización diferente de dicho concepto, así como el hecho de que un sistema de representación destaque alguna propiedad importante del concepto representado o que dificulte la comprensión de otras propiedades.

- Los sistemas de representación están estrechamente ligados al proceso de enseñanza-aprendizaje de las nociones matemáticas, y sin embargo la manera en que parecen considerarse en los Decretos de Enseñanzas Mínimas analizados y tratarse y trabajarse en los manuales escolares estudiados, no parecen ayudar ni favorecer la adquisición y enriquecimiento por parte del alumno de sus representaciones internas, así como la conexión y coordinación entre ellas de modo que puedan relacionar los significados y objetos matemáticos correspondientes de manera significativa.

- Los libros de texto promueven un uso simultáneo, no controlado, y en diversas ocasiones carente de sentido y funcionalidad, de algunos registros de representación semiótica, dando por hecho que el estudiante es capaz de interpretar y de establecer relaciones entre ellas por sí mismo. Este hecho, junto con los obstáculos derivados por la falta de congruencia entre los diferentes registros semióticos que pueden entrar en juego, genera la aparición de dificultades en el alumno por la falta de comprensión y manejo de varios sistemas de representación para un mismo concepto.

- Si bien, durante la Educación Primaria parece que existe cierta introducción al uso y manipulación de más de un registro de representación para un determinado concepto, podemos decir que es limitado y bastante pobre con respecto a las posibilidades existentes en dicha etapa educativa. Las conversiones que se han localizado tanto en el estudio del Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria como en los manuales escolares correspondientes a los tres ciclos (seis cursos) que la componen, más que favorecer la comprensión de los objetos matemáticos y las propiedades que los caracterizan, parecen perseguir que el alumno resuelva las tareas planteadas con éxito, pasando por alto la complejidad existente en la relación entre representaciones.

- La manera en que los libros de texto de Secundaria trabajan los tratamientos y conversiones entre registros no es satisfactorio ni suficiente. En lugar de intentar proponer actividades donde estén realmente presentes múltiples representaciones que ejerciten la movilización cognitiva y la coordinación de diferentes sistemas semióticos por parte del alumno, persiguen proporcionar al alumno herramientas que les conduzcan a la solución de los problemas planteados de manera rápida, generando de este modo, errores y dificultades al obviar los saltos cognitivos que tienen lugar en el paso de unas representaciones a otras.

- Para los contenidos matemáticos de Educación Secundaria, encontramos que el registro de la lengua natural, el registro numérico y el algebraico son los más utilizados con diferencia. Los registros gráfico, geométrico y pictórico aparece, en la mayor parte de las ocasiones, como soporte y recurso para ejemplificar las representaciones numérica y verbal, pero pocas de estas representaciones van acompañadas de la adquisición de algún concepto relacionado, por lo que las posibles conversiones que se pide que efectúen los alumnos están vacías, carentes de finalidad y sentido, no persiguiendo una coordinación entre los registros semióticos puestos en juego.

- La forma en que los Decretos de Enseñanzas Mínimas contemplan los registros de representación semiótica y sus posibles conversiones es escasa, pobre e insuficiente, lo que puede dar lugar a futuras limitaciones por parte del alumno en el aprendizaje de los sucesivos conocimientos. El hecho de que la conversión entre registros no se contemple, y que mayor parte de las conversiones no aparezcan de manera explícita en los contenidos, nos indica que dicha noción y todos los aspectos que la rodean gozan de invisibilidad didáctica y no entran dentro del tiempo didáctico.

El ejercitar la coordinación entre los diferentes sistemas de representación es de vital importancia para que el alumno sea capaz de establecer una correspondencia entre tal representación y un funcionamiento cognitivo efectivo. Debido a que la formación y adquisición de conceptos en matemáticas requiere una coordinación entre registros, su enseñanza y aprendizaje no puede limitarse a la automatización de determinadas técnicas operatorias, sino que deben ser trabajados, también, aspectos fundamentales y necesarios para el aprendizaje, como son la visualización, el razonamiento y sobre todo la conversión entre registros.

El hecho de que los objetos matemáticos sean solamente accesibles a través de sus representaciones semióticas conduce, de manera inmediata y necesaria, a prestarles atención estudiando su diversidad, funcionamiento e implicación en el proceso de comprensión de las nociones por parte del alumno, aspectos que, por el momento y basándonos en el estudio realizado, parecen estar ausentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Obligatoria.

Mediante el trabajo con las representaciones, los alumnos asignan significados a los objetos de estudio y comprenden las estructuras matemáticas que subyacen. Por ello, han de recibir una preparación y educación en el uso, comprensión y coordinación entre los diferentes sistemas de representación, y de ahí surge el interés de esta cuestión y tema de estudio e investigación.

3. LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN Y SU COORDINACIÓN EN EVALUACIONES DE DIAGNÓSTICO.

3.1. Introducción

Siendo la educación y todos los componentes de la estructura educativa una de las instituciones de mayor importancia, la evaluación se define como la forma sistemática de apreciar, reflexionar e indagar sobre la realidad que atiende al contexto educativo y de la cual debemos conocer su impacto, sus procesos y sus resultados como requisito básico para la mejora de la calidad educativa.

La principal norma reguladora de la Educación en España es la Ley Orgánica de Educación para la Mejora de la Calidad Educativa (MEC, 2013) dedica su Título VI (artículos 140-147) a la evaluación del sistema educativo. En estos artículos, fija la finalidad, los ámbitos y los objetivos de las evaluaciones.

Concretamente, en el artículo 140, establece las finalidades de la evaluación del sistema educativo:

a) Contribuir a mejorar la calidad y la equidad de la educación.

b) Orientar las políticas educativas.

c) Aumentar la transparencia y eficacia del sistema educativo.

d) Ofrecer información sobre el grado de cumplimiento de los objetivos de mejora establecidos por las Administraciones educativas.

e) Proporcionar información sobre el grado de consecución de los objetivos educativos españoles y europeos, así como del cumplimiento de los compromisos educativos contraídos en relación con la demanda de la sociedad española y las metas fijadas en el contexto de la Unión Europea.

Su utilidad radica en conocer, tanto a nivel individual como a nivel global, el grado en que el alumnado adquiere y desarrolla los conceptos y competencias básicas definidas en el currículo educativo.

No trata únicamente de explorar los conocimientos concretos que los alumnos aprenden en sus clases ordinarias, sino que también estudia los aspectos conceptuales y competencias que hacen posible que los alumnos puedan transferir, utilizar y aplicar con eficacia dichos conocimientos en distintos contextos y situaciones, siendo dichos aspectos la suma de múltiples destrezas, habilidades y actitudes que deben adquirirse a través de las áreas y materias educativas, pero también de la experiencia, de aprendizajes informales y no formales.

El proceso de evaluación no debe centrarse en el simple hecho de obtener un resultado que nos permita calificar a un estudiante y determinar si aprueba una asignatura o no. Debe facilitar información sobre cómo el estudiante aprende, los métodos y técnicas que ha empleado, cómo transmite y aplica lo aprendido, etc. La evaluación puede ser considerada como un herramienta que influye en el aprendizaje del estudiante de diversos modos, pues les indica que conocimientos, prácticas, habilidades, etc., son necesarias que adquieran.

A su vez, los resultados de las evaluaciones de diagnóstico deben facilitar y aportar a las administraciones educativas e instituciones pertinentes, propuestas de planes de mejora, así como la adopción de medidas específicas de apoyo educativo, sugiriendo reorientaciones en la enseñanza de la materia correspondiente: dar menos énfasis a ejercicios mecánicos, sistemáticos y repetitivos, contextualizar con sentido todas las tareas que se proponen en el aula, plantear problemas abiertos con más de una solución o sin solución que puedan ser resueltos usando diversas estrategias, construir tareas que permitan interrelacionar diferentes dominios (numérico, geométrico, métrico) y registros de representación, etc.

En este sentido, y centrándonos en el tema que nos atañe, vamos a realizar un estudio de las principales evaluaciones de diagnóstico tanto a nivel internacional, ya que España forma parte de la UE, la OCDE y la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación) y por tanto participa en los programas de evaluación que estas instituciones planifican y realizan teniendo una repercusión y eco especial no solo en la sociedad española sino mundialmente (PISA y TIMSS), como a nivel nacional a través de la Evaluación General de Diagnóstico, analizando si el marco teórico y los ítems que las forman permiten detectar las deficiencias en el establecimiento, por parte de los estudiantes, de la relación existente entre un objeto y su representación o la conversión entre registros.

Las representaciones están fuertemente ligadas al proceso de enseñanza-aprendizaje, actuando como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y permitiendo expresar, comunicar y establecer conexiones entre los conceptos e ideas que los estudiantes utilizan (Duval, 2003, 2011, 2012).

Por ello, creemos conveniente y acertado que las evaluaciones de diagnóstico presten atención a dichos aspectos, pues los estudiantes no pueden interpretar, crear y coordinar de manera efectiva representaciones por sí solos, sino que han de ser educados en su uso, comprensión y coordinación, y las evaluaciones son un buen instrumento para detectar las carencias que estos poseen.

3.2. Hipótesis

A partir de los resultados en los que diversos ámbitos educativos se centran y hacen hincapié, así como teniendo en cuenta el trabajo previo sobre el marco legislativo, los manuales escolares, sin olvidar la propia experiencia personal, las hipótesis iniciales que podemos inferir antes de comenzar el estudio de las evaluaciones de diagnostico más reseñables, son las siguientes:

HIPÓTESIS 4: Los marcos teóricos respectivos contemplan aspectos concernientes a la importancia de emplear múltiples representaciones en el quehacer matemático. No obstante, los ítems que conforman las mismas difieren mucho de una adecuada coordinación y conversión entre registros semióticos.

HIPÓTESIS 5: Las evaluaciones de diagnostico no están diseñadas para detectar posibles bloqueos y errores generales que se manifiestan en los alumnos en lo referido al reconocimiento de un objeto de estudio en matemáticas a través de diferentes registros de representación así como en la conversión entre los mismos para afrontar y resolver situaciones en contextos cercanos a ellos.

HIPÓTESIS 6: Existe una fuerte influencia de la enseñanza tradicional de las matemáticas, tendiendo a evaluar competencias a partir de procesos mecánicos, algorítmicos y automáticos, disfrazados a través de contextos del día a día.

3.3. Evaluaciones PISA

Para responder a la necesidad de disponer de datos sobre el rendimiento escolar que fueran comparables internacionalmente, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) puso en marcha en 1997 el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), que representa el compromiso de los gobiernos de examinar, de forma periódica y en un marco común internacional, los resultados de los sistemas educativos, medidos en función de los logros alcanzados por los alumnos.

El informe estudia la situación relativa, de los distintos países, en tres áreas: Matemáticas, Ciencias (incluyendo biología, geología, física, química y tecnología) y Lengua. También se centra en otros aspectos como la motivación de los alumnos para aprender, sus opiniones sobre sí mismos y sus estrategias de aprendizaje.

Las evaluaciones PISA se realizan trienalmente y pretenden medir hasta qué punto los alumnos de 15 años y, por tanto, próximos al final de la escolarización obligatoria, están preparados para enfrentarse a los retos de las sociedades del conocimiento actuales. La evaluación mira hacia adelante, se centra más en la capacidad de los jóvenes de utilizar sus conocimientos y sus habilidades para hacer frente a los desafíos de la vida real, que en saber hasta qué punto dominan un programa escolar concreto.

Asimismo, para seguir aprendiendo en esas materias y aplicar lo aprendido al mundo real, necesitan comprender los procesos y principios fundamentales de cada área de conocimiento, sabiéndolos utilizar con flexibilidad en distintas situaciones.

La primera evaluación de PISA se realizó en el año 2000, en 32 países (entre los que estaban 28 países miembros de la OCDE), y se repitió en otros 11 países más en 2002. Dos terceras partes de la evaluación se centraron en la lectura, y la otra parte consistió en un estudio resumido del rendimiento en matemáticas y ciencias.

PISA 2003 se realizó en 41 países, comprendidos los 30 países de la OCDE. En esta ocasión las dos terceras partes de la evaluación se centraron en Matemáticas y el resto en las áreas de ciencias, lectura y solución de problemas.

PISA 2006 se centró en el área de Ciencias y en PISA 2009 se comienza de nuevo el ciclo siendo la Lectura el área principal respecto a la cual trataba la mayor parte de la prueba. Además, este es el primer año donde parte de los ítems se empiezan a aplicar en formato digital, siendo España pionera en este tipo de desarrollo a parte de la utilización de las pruebas impresas en papel. El estudio PISA 2012 trató de evaluar lo que los jóvenes de 15 años de 65 países (34 pertenecientes a la OCDE) saben y son capaces de hacer a partir de la extrapolación y aplicación de los conocimientos adquiridos de manera formal e informal, a lo largo de su vida, a contextos y situaciones similares a las que se encontrarán en su día a día, centrándose en el área de Matemáticas. En la última edición de esta evaluación, PSA 2015, enfocada a las Ciencias, tanto las pruebas de carácter cognitivo como los cuestionarios de contexto se han realizado en formato digital.

La evaluación PISA, en lo que al área de matemáticas se refiere, se centra en el estudio de las capacidades y destrezas que han adquirido los estudiantes para observar, razonar, inducir y comunicar conocimientos matemáticos en el planteamiento y resolución de problemas matemáticos en diferentes contextos.

El proyecto OCDE/PISA define la competencia matemática como:

- La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE/INCE, 2003, p. 28).
- La capacidad personal para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan (OCDE/INCE, 2012, p. 9)

Dicha competencia se divide a su vez en ocho subcompetencias que determinan la manera en que los alumnos deben trabajar y deben adquirir, a medio o largo plazo, en su formación para una adecuada alfabetización matemática: *Pensar y razonar, Argumentación, Comunicación, Construcción de modelos, Formulación y resolución de problemas, Representación, Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico y Empleo de soportes y herramientas*.

La sexta subcompetencia hace referencia al tema que aquí abordamos, la representación, estando definida como: “Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito” (OCDE/INCE, 2003, p. 41).

Para el estudio de cada una de estas ocho subcompetencias, el proyecto OCDE/PISA ha establecido una división, de cada una de ellas, en tres grupos que describen las acciones cognitivas que se ponen funcionamiento al hacer uso de las mismas:

- *Grupo de reproducción*: implica la mera reproducción de los conocimientos estudiados de forma mecánica y memorística. Las actividades se sitúan en contextos familiares y se resuelven mediante el empleo de fórmulas elementales y realización ce cálculos sencillos.
- *Grupo de conexión*: implica el establecimiento de relación entre los métodos de resolución de problemas rutinarios vinculados con el grupo de reproducción y el modo de resolver situaciones más complejas. Las tareas se centran en contextos menos familiares para el estudiante y trabajan la interpretación, relación manejo y relación de diferentes sistemas de representación.
- *Grupo de reflexión*: implica la comprensión y reflexión sobre los procesos y planificación de estrategias necesarias para resolver una situación problemática más original e inusual para el estudiante que las que aparecen en el grupo de conexión.

En la tabla se recogen los procesos que hacen referencia a cada una de las tres categorías dentro de la subcompetencia de la ***Representación***:

TABLA 3.3.1. *Procesos en la subcompetencia de Representación*

Subcompetencia 6: Representación		
Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito.		
Grupo de reproducción	**Grupo de conexión**	**Grupo de reflexión**
Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.	*Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.*	*Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.*

Fuente: elaboración propia a partir de OCDE/NCE, 2003, p. 43-47

A demás de esta división, PISA caracteriza cada subcompetencia en seis niveles de rendimiento, siendo el nivel 6 el más alto y el nivel 1 el más bajo. Estos niveles describen el grado de competencia alcanzado por los sujetos, necesarios para resolver una situación problemática. Así, la descripción de la subcompetencia 6 a partir de los seis niveles de rendimientos establecidos, se resume en la siguiente tabla:

TABLA 3.3.2. *Niveles de rendimiento en la subcompetencia de Representación*

Nivel	**Descripción del nivel**	**Descriptores que caracterizan la subcompetencia 6 para cada nivel**
1	*Los alumnos son capaces de responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.*	Leer datos directamente de tablas, figuras, dibujos, esquemas, etc.
2	*Los alumnos son capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.*	Utilizar un único tipo de representación.
3	*Los alumnos son capaces de ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos, exponiendo sus resultados, interpretaciones y razonamientos.*	Conocer, interpretar y usar diferentes tipos de representación y razonar a partir de ellas.
4	*Los alumnos son capaces de trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos.*	Vincular e integrar diferentes Sistemas de Representación, incluyendo el simbólico.

5	*Los alumnos son capaces de desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos.*	Construir modelos y Sistemas de Representación.
6	*Los alumnos son capaces de formar conceptos, generalizar y utilizar y relacionar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos, pudiendo formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado.*	Relacionar y traducir con fluidez diferentes Sistemas de Representación.

Fuente: elaboración propia a partir de OCDE/NCE, 2012, p. 29-30

Del mismo modo, el estudio de las matemáticas en el proyecto OCDE/PISA se establece en torno a cuatro grandes áreas que tratan de comprender y aglutinar los contenidos a partir de una aproximación fenomenológica que describe las ideas, estructuras y conceptos matemáticos, tratando de cubrir las principales líneas del currículo escolar (Rico, 2006):

- Espacio y forma: El estudio de la forma y las construcciones exige buscar similitudes, patrones, propiedades de los objetos, posiciones y direcciones y diferencias al analizar los componentes formales y al reconocer las formas en diferentes representaciones y diferentes dimensiones. El estudio de las formas está estrechamente vinculado al concepto de percepción espacial. Ello significa entender la relación entre formas e imágenes, o representaciones visuales.
- Cambio y relaciones: Existen procesos de cambio comportan funciones matemáticas simples y pueden describirse o modelarse mediante ellas: funciones lineales, exponenciales, periódicas o logarítmicas, tanto discretas como continuas. No obstante, muchas relaciones pertenecen a categorías diferentes y, a menudo, el análisis de los datos resulta esencial para determinar qué tipo de relación se produce. Las relaciones pueden darse en una gran variedad de representaciones diferentes, entre ellas la simbólica, la algebraica, la tabular y la geométrica. Las diferentes representaciones sirven a propósitos diferentes y poseen propiedades diferentes. Por esta

razón, la traducción entre las diferentes representaciones tiene a menudo una importancia fundamental a la hora de ocuparse de diversas situaciones y tareas (OCDE/INCE, 2003, p. 38-39).

- Cantidad: Esta idea principal se centra en la necesidad de cuantificar para organizar el mundo. Las características importantes engloban la comprensión del tamaño relativo, el reconocimiento de las regularidades numéricas y la utilización de los números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real (recuentos y medidas). Además, la cantidad tiene que ver con el procesamiento y comprensión de los números que de diferentes maneras se nos presentan. Un aspecto importante al tratar con la cantidad es el razonamiento cuantitativo. Los componentes esenciales del razonamiento cuantitativo son el sentido para los números, la representación de los números de diferentes maneras, la comprensión del significado de las operaciones, la percepción de la magnitud de los números, los cálculos matemáticamente elegantes, la estimación y el cálculo mental(OCDE/INCE, 2003, p. 38-39).
- Incertidumbre: La incertidumbre está pensada para sugerir dos temas relacionados: los datos y el azar. Estos dos fenómenos son objeto de estudio matemático por parte de la estadística y de la probabilidad, respectivamente. Actividades y conceptos matemáticos importantes de esta área son la recogida de datos, el análisis y la representación /visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción (OCDE/INCE, 2003, p. 38-39).

Como se puede observar, tanto en las cuatro áreas en que se centra PISA en matemáticas, que aseguran una distribución, organización y división de los contenidos suficiente para su evaluación a través de los ítems empleados, como en todos los aspectos del marco teórico de la evaluación contemplados y estudiados hasta el momento, la presencia de los Sistemas de Representación es clara, numerosa y persistente, pues en la caracterización de los conceptos matemáticos el binomio Objeto-Representación es insoslayable, así como la complementariedad entre distintos Registros Semióticos que permiten entender, relacionar, integrar y vincular las diferentes propiedades y características de un mismo concepto proporcionando su comprensión, la cual reposa en la coordinación de al menos dos sistemas de representación. Igualmente, a lo largo del “proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real” (OCDE/INCE, 2003, 2006, 2009, 2012) en lo que al ámbito matemático se refiere, es decir, a lo largo del proceso de matematización que forma parte del marco teórico de PISA y se describe en el siguiente cuadro, se aprecia una fuerte implicación de la representación en cada una de sus fases:

TABLA 3.3.3. *Proceso de Matematización*

Proceso de matematización		
Consiste en la transformación y formalización de una afirmación o situación problemática del mundo real en una presentación en términos matemáticos para su análisis, reflexión, resolución y validación.		
Fase 1: Matematización Horizontal	**Fase 2: Matematización Vertical**	**Fase 3: Validación y reflexión**
Consiste en la traducción de los problemas planteados del contexto real al matemático. Engloba actividades como: *Identificar las nociones matemáticas relevantes para el problema.* ***Representar el problema de modos diferentes y a través de distintos registros.*** ***Comprender y establecer la relación entre el lenguaje natural, simbólico, gráfico, etc****.* *Detectar regularidades, relaciones y patrones.* *Identificar y relacionar el problema con otros ya conocidos. Traducir la situación a un modelo matemático.*	Consiste en el planteamiento de cuestiones en las que el estudiante utiliza nociones y destrezas matemáticas. Engloba actividades como: ***Utilizar diferentes sistemas de representación e ir cambiando entre ellas.*** *Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.* *Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.* *Argumentar y Generalizar.*	Consiste en la reflexión e interpretación de los resultados. Se basa en: *Entender la aplicabilidad y limitaciones de los conceptos matemáticos puestos en juego.* *Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar, de manera justificada, los resultados.* *Comunicar el proceso de resolución y los resultados.* ***Ser conscientes de las limitaciones de las representaciones utilizadas.*** *Criticar objetivamente el modelo.*

Fuente: elaboración propia a partir de OCDE/INCE, 2003, p. 40

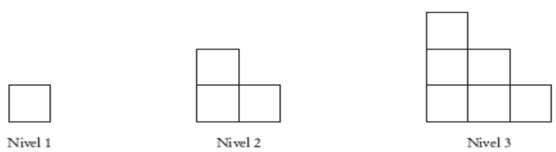
A priori, podemos afirmar que PISA contempla lo formación, aprehensión y aplicación de conceptos en diversos contextos mediante la utilización y coordinación de Registros de Representación Semiótica, siendo clave e imprescindible en la realización de la tarea matemática basada en un funcionamiento cognitivo efectivo. No obstante, el trabajar con tareas o actividades que conducen de manera necesaria al tratamiento de los conceptos matemáticos, a la aplicación de diversos métodos de resolución y a la coordinación de diferentes representaciones, dependen de las situaciones y contextos en que son presentadas. Por ello, a continuación, analizaremos algunos de los ítems más representativos de las evaluaciones PISA realizadas, en concreto de PISA 2000 y PISA 2003 por ser las únicas de las que se dispone de reactivos liberados, con el propósito de determinar si verdaderamente la coordinación y conversión de los diferentes registros de representación semiótica son consideradas de manera adecuada existiendo concordancia con los expuesto en el marco teórico de la evaluación, pudiendo utilizar los resultados de las mismas como una herramienta útil para la mejora de dichas prácticas en la enseñanza actual.

3.3.1. Análisis de los Ítems de PISA liberados

A partir del análisis de los ítems liberados, se ha podido observar que, en contradicción con lo que el proyecto OCDE/PISA postula en su subcompetencia seis, parece existir cierta falta de atención en lo que respecta a la utilización de diversas representaciones y las implicaciones que tienen desde el punto de vista cognitivo. Aunque hay ítems que parecen movilizar destrezas de interpretación, razonamiento y conexión entre diferentes registros, no requieren una reflexión profunda ni una verdadera coordinación entre sistemas de representación por parte del estudiante para su resolución, no pasando, la mayoría de ellos, del nivel 3 de rendimiento de los seis establecidos para la subcompetencia de *Representación*:

Pregunta 39: ESQUEMA DE ESCALERA M806Q01

Roberto construye un esquema de una escalera usando cuadrados. He aquí los pasos que sigue:



Como se puede ver, utiliza un cuadrado para el Nivel 1, tres cuadrados para el Nivel 2, y seis para el Nivel 3.
¿Cuántos cuadrados en total deberá usar para construir hasta el cuarto nivel?

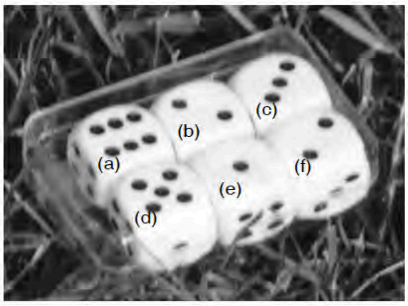
Respuesta: . . . . .cuadrados.

FIGURA 3.3.1. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

Pregunta 3: CUBOS M145Q01

En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados:

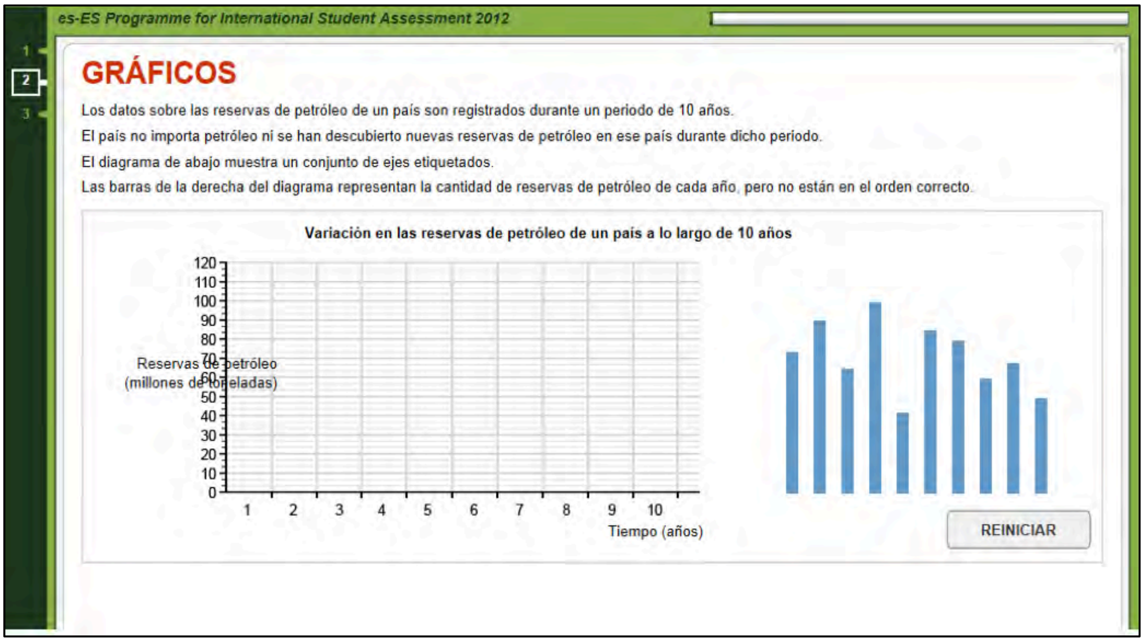
La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.



Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos que tiene la cara inferior del dado correspondiente que aparece en la foto.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

FIGURA 3.3.2. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

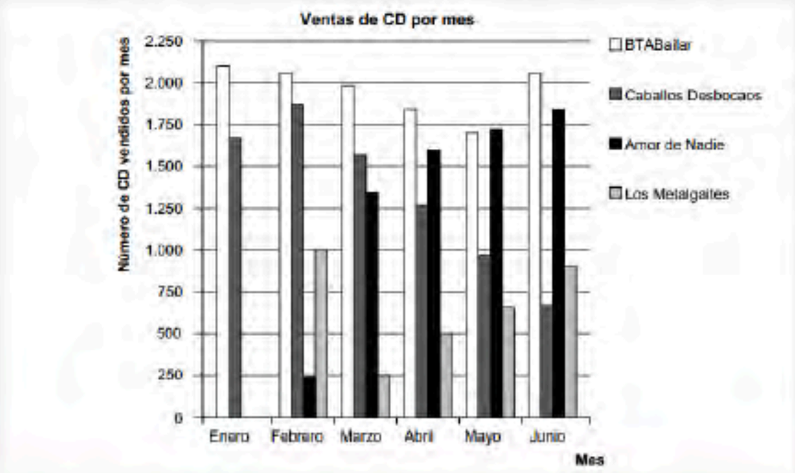


Arrastra y coloca cada una de las barras sobre el eje Tiempo (años) para señalar cómo han cambiado las reservas de petróleo a lo largo del periodo de 10 años.

FIGURA 3.3.3. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

LISTA DE ÉXITOS

Los nuevos CD de los grupos BTABailar y Caballos Desbocaos salieron a la venta en enero. En febrero los siguieron los CD de los grupos Amor de Nadie y Los Metalgaites. El siguiente gráfico muestra las ventas de CD de estos grupos desde enero hasta junio.



Pregunta 1

¿Cuántos CD vendió el grupo Los Metalgaites en abril?

A. 250

B. 500

C. 1000

D. 1270

Pregunta 2

¿En qué mes vendió por primera vez el grupo Amor de Nadie más CD que el grupo Caballos Desbocaos?

A. En ningún mes

B. En marzo

C. En abril

D. En mayo

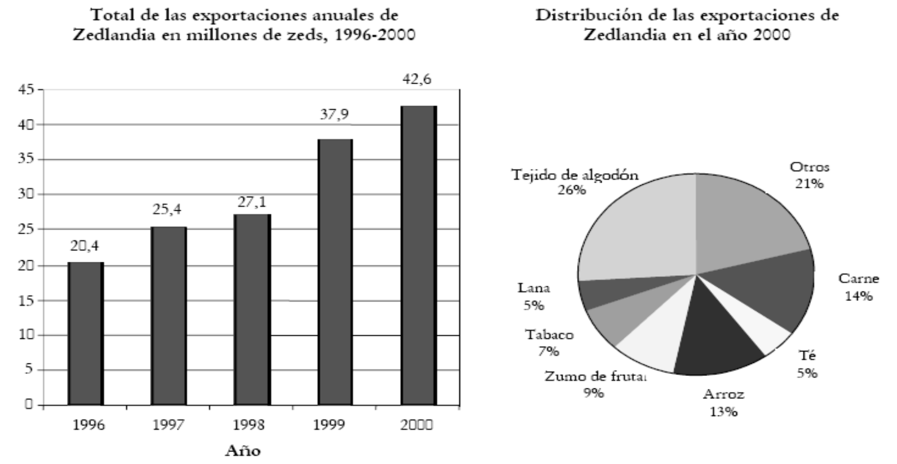
FIGURA 3.3.4. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

Existe un claro predominio de los ítems en los que el estudiante tiene que interpretar y relacionar, fundamentalmente, dos sistemas de representación: el lenguaje natural y las representaciones gráficas. En ellos, tienen que entender el gráfico en el contexto y situación que se les presenta para poder responder las cuestiones que se les formulan seguidamente.

Sin embargo, estas actividades no van más allá de la simple recuperación de información que aparece en el gráfico que se muestra al inicio del ítem a modo de estímulo, sin generar en el estudiante una verdadera necesidad de articular ningún tipo de coordinación ni conversión entre los registros de representación puestos en juego, de analizar las unidades significantes de cada uno de ellos ni de establecer los vínculos pertinentes.

Por ello, desde la perspectiva de los seis niveles de rendimiento y dificultad que describen la subcompetencia que a nosotros nos interesa, dichas tareas se inscriben más en los niveles 1 y 2 que en los niveles que les vienen asignados:

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.



Pregunta 14: EXPORTACIONES M438Q01 - 0 1 9

¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Respuesta: . . . .

Pregunta 15: EXPORTACIONES

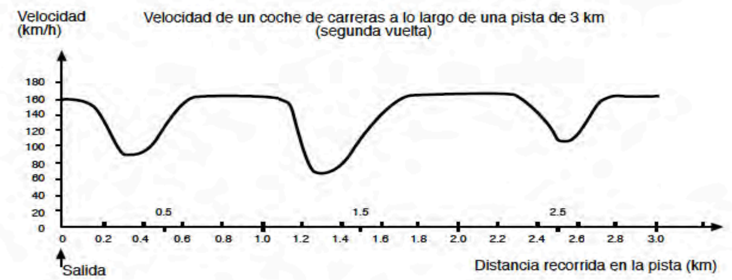
¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

A 1,8 millones de zeds.
B 2,3 millones de zeds.
C 2,4 millones de zeds.
D 3,4 millones de zeds.
E 3,8 millones de zeds.

FIGURA 3.3.5. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

VELOCIDAD DE UN COCHE DE CARRERAS

Este gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llana de 3 km durante su segunda vuelta.



Pregunta 5:

¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo recto más largo que hay en la pista?

A 0,5 km.
B 1,5 km.
C 2,3 km.
D 2,6 km.

Dificultad: 492
Respuesta correcta: B
Aciertos: España 65,0%; OCDE 66,9%

Pregunta 6:

¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja durante la segunda vuelta?

A En la línea de salida.
B Aproximadamente en el km 0,8.
C Aproximadamente en el km 1,3.
D A mitad del recorrido.

Dificultad: 403
Respuesta correcta: C
Aciertos: España 88,6%; OCDE 83,3%

Pregunta 7:

¿Qué se puede decir sobre la velocidad del coche entre el km 2,6 y el 2,8?

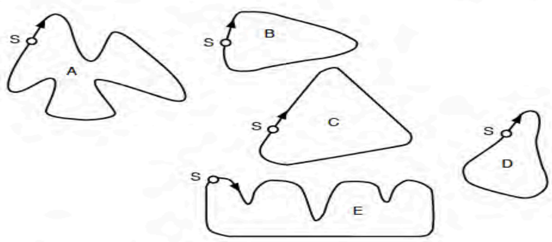
A La velocidad del coche permanece constante.
B La velocidad del coche es creciente.
C La velocidad del coche es decreciente.
D La velocidad del coche no se puede hallar basándose en este gráfico

Dificultad: 413
Respuesta correcta: B
Aciertos: España 80,6%; OCDE 82,5%

Pregunta 8:

Aquí están dibujadas cinco pistas:
¿En cuál de estas pistas se condujo el coche para producir el gráfico de velocidad mostrado anteriormente?

Dificultad: 655
Respuesta correcta: B
Aciertos: España 23,0%; OCDE 28,3%



S: Línea de salida

FIGURA 3.3.6. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2006)

En referencia a este último ítem, la última pregunta que forma parte de él ha sido la única que se ha localizado perteneciente al nivel 6, siendo necesario relacionar y traducir con fluidez diferentes Sistemas de Representación.

También encontramos varios ítems en los que el alumno tiene que indicar aquellas representaciones figurales o geométricas que se ajustan a un enunciado dado. Los estudiantes deben vincular el texto y el dibujo, relacionando su comprensión con las representaciones que forman parte de las opciones de respuesta.

Aunque en un principio parecen tratarse de actividades que buscan la coordinación entre los registros figural o geométrico con el de la lengua natural, en realidad solo son actividades de identificación que no exigen que los estudiantes demuestren que han comprendido los conceptos implicados ni pretenden que el alumno sea capaz de caracterizar y vincular un mismo concepto u objeto matemático con sus diversas representaciones, quedando reducidos a tareas de simple lectura, traducción y comprensión de una serie de enunciados matemáticos de poca complejidad:

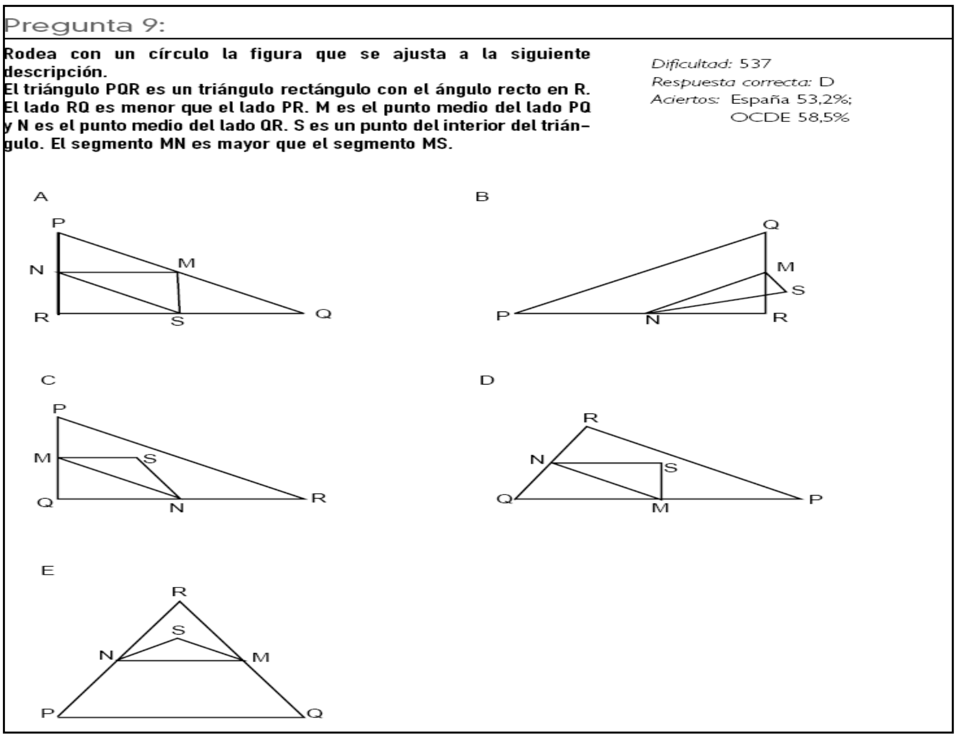
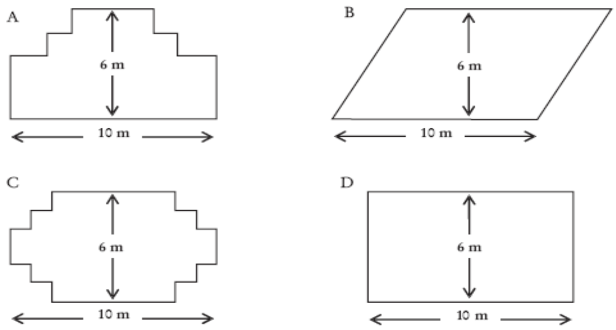


FIGURA 3.3.7. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2006)

Pregunta 8: CARPINTERO M266Q01

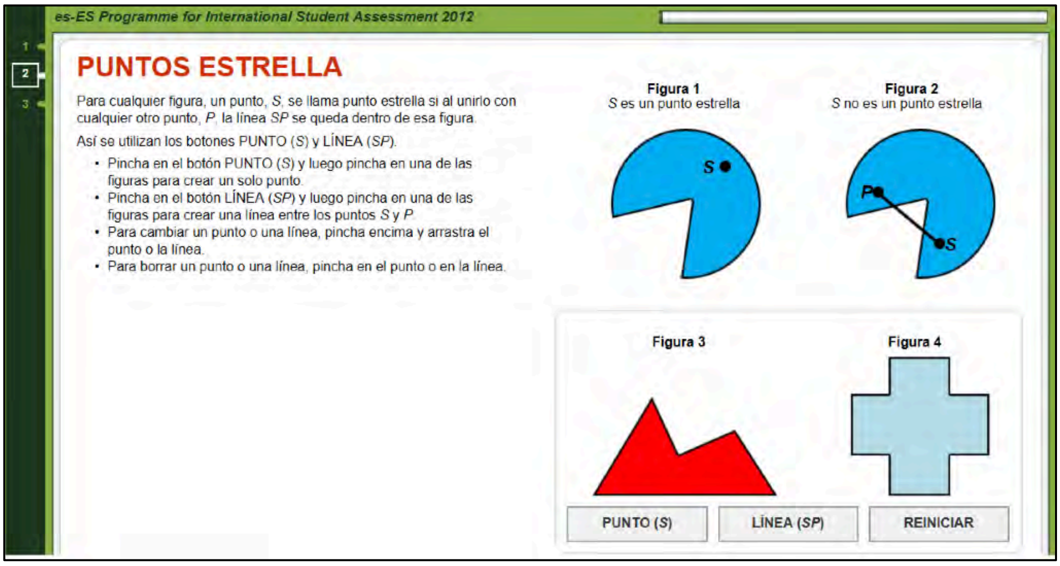
Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Rodea con un círculo *Sí* o *No* para indicar si, para cada diseño, se puede o no se puede construir el parterre con los 32 metros de madera.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	*Sí / No*
Diseño B	*Sí / No*
Diseño C	*Sí / No*
Diseño D	*Sí / No*

FIGURA 3.3.8. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)



Aquí se muestran cuatro figuras planas. En la Figura 1, el punto S es un punto estrella porque, donde quiera que sitúes *P*, la línea *SP* permanece siempre dentro de la figura. Pero en la Figura 2, el punto *S* **no** es un punto estrella porque hay algunas líneas *SP*, como se puede ver en el ejemplo, que se salen **fuera** de la figura.

Crea un punto estrella en la Figura 3, y un punto que **no** sea un punto estrella en la Figura 4.

FIGURA 3.3.9. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

Algunas figuras pueden tener muchos puntos estrella y otras pueden no tener puntos estrella. Para una de las figuras de arriba es imposible encontrar un punto estrella. ¿Cuál de las figuras no tiene punto estrella?

A. Forma 1
B. Forma 2
C. Forma 3
D. Forma 4

FIGURA 3.3.10. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

El registro tabular también se encuentra presente en varios de los ítems, pero el uso que se hace de dicho sistema de representación es de instrumento de recogida de información que permite al estudiante:

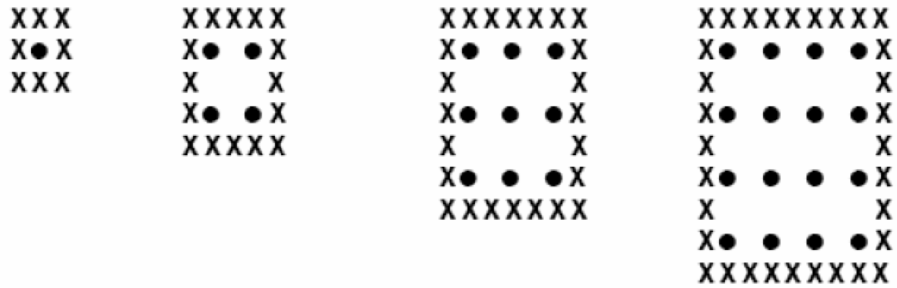
- Encontrar los datos necesarios para hallar la solución al problema planteado con un simple golpe de vista. (Tabla como fuente de información)
- Completar la tabla proporcionada con los correspondientes datos numéricos para posteriormente solucionar la tarea. (Tabla como organizador de la información)

En ningún caso se pretende que el alumno realice ninguna conversión o interrelación entre el registro tabular y cualquier otra forma de representación, no siendo considerado como un registro de representación semiótico como tal:

Manzanas

MANZANAS

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado. Con objeto de proteger los manzanos del viento planta coníferas alrededor de la totalidad del huerto.
Aquí ves un esquema de esta situación donde se puede apreciar la colocación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (n) de filas de manzanos:



X = conífera
● = manzano

Pregunta 1:

Completa la tabla

n	Número de manzanos	Número de coníferas
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

1 punto: Las 7 respuestas correctas.

0 puntos: Otras respuestas.

Dificultad: 548

Respuesta correcta:

n	manzanos	coníferas
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Aciertos: España 44,2%; OCDE 49,1%

Pregunta 2:

Se pueden utilizar dos fórmulas para calcular el número de manzanos y el de coníferas dentro del planteamiento descrito anteriormente:
Número de manzanos = n^2
Número de coníferas = $8n$
siendo n el número de filas de manzanos.
Existe un valor de n para el cual el número de manzanos coincide con el de coníferas. Halla este valor de n y muestra el método que has usado para calcularlo.

Dificultad: 655

Aciertos: España 21,5%; OCDE 24,9%

FIGURA 3.3.11. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2006)

La siguiente tabla muestra las tallas de zapato recomendadas en Zedlandia para las diferentes longitudes de pie.

Desde (en mm)	Hasta (en mm)	Talla de zapato
107	115	18
116	122	19
123	128	20
129	134	21
135	139	22
140	146	23
147	152	24
153	159	25
160	166	26
167	172	27
173	179	28
180	186	29
187	192	30
193	199	31
200	206	32
207	212	33
213	219	34
220	226	35

Tabla de conversión para tallas de zapatos de niños en Zedlandia

Pregunta 24: ZAPATOS PARA NIÑOS M515Q01

El pie de Marina mide 163 mm de longitud. Utiliza la tabla para determinar cuál es la talla de zapatos de Zedlandia que Marina debería probarse.

Respuesta: ....

FIGURA 3.3.12. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

SALSAS

Estás preparando tu propio aliño para la ensalada.

He aquí una receta para 100 mililitros (ml) de aliño.

Aceite para ensalada:	60 ml
Vinagre:	30 ml
Salsa de soja:	10 ml

Pregunta 1

¿Cuántos mililitros (ml) de aceite para ensalada necesitas para preparar 150 ml de este aliño?

Respuesta: .... ml

FIGURA 3.3.13. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

es-ES Programme for International Student Assessment 2012

IMPRESIÓN DE FOTOS

La tabla muestra los precios de cuatro tiendas de fotografía digital online.

Puedes comparar los precios de todos los formatos, desde el formato pequeño de 4"x6" a los pósters de 20"x30".

Todos los precios están en zeds y son por foto. Los descuentos y los gastos de envío[1] **no están incluidos** en esta tabla.

[1] Para más información sobre descuentos y gastos de envío, por favor, pincha en el nombre de la tienda en la primera columna

[2] El índice de satisfacción del cliente se basa en una encuesta a los clientes en la que se les pide que valoren la calidad del servicio de 0 a 3. La puntuación es media y está entre 0 y 3, siendo 3 la puntuación más alta posible. La barra amarilla muestra la puntuación. Situando el cursor sobre cada barra, puedes ver el número de clientes que contestaron a la encuesta.

Foto Zed - Explorador

http://www.fotozed.com.zd/

Foto Zed

Tienda	4x6	5x7	8x10	20x30	Índice de satisfacción del cliente [2]
Superfoto	0,06	0,26	1,49	10,99	0 – 3
Tienda Clic	0,06	0,30	1,50	10,80	0 – 3
Foto 2000	0,06	0,24	1,49	10,79	0 – 3
ImpreZona	0,09	0,79	2,99	29,55	0 – 3

Según la información de la tabla, ¿es *Foto 2000* la más barata a la hora de imprimir una foto de cada formato? Explica tu respuesta.

Esteban dice que en *ImpreZona*, el formato 20"x30" cuesta, aproximadamente, 30 veces más que el formato 4"x6" cuando sólo quieres imprimir una foto.

Está equivocado. ¿Por qué?

El índice de satisfacción del cliente para *Superfoto* es muy alto, pero este valor puede ser menos fiable de lo que es para las otras tres tiendas.

Explica por qué.

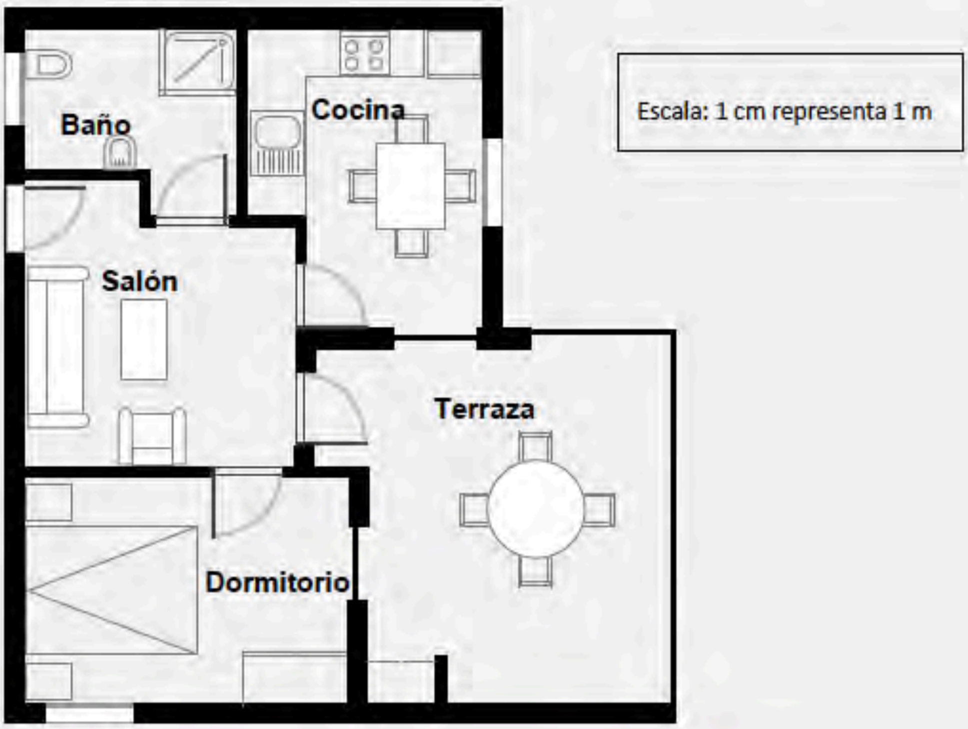
FIGURA 3.3.14. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

En este último ítem podemos observar cómo, a excepción de la última pregunta que si requiere de una verdadera puesta en funcionamiento de procesos cognitivos que involucran a su vez la coordinación entre los registros Figural, Numérico y la Lengua Natural, el resto se centra únicamente en la lectura de la información que viene dada en la tabla, sin vincular este sistema de representación conceptualmente.

Varios son los ítems que partiendo del registro geométrico o figural, sitúan al alumno ante la necesidad de análisis de los mismo para posteriormente realizar la conversión hacía el registro Numérico que les conduzca a la solución:

COMPRA DE UN APARTAMENTO

Este es el plano del apartamento que los padres de Jorge quieren comprar a una agencia inmobiliaria.



Pregunta 1

Para calcular la superficie (área) total del apartamento (incluidas la terraza y las paredes) puedes medir el tamaño de cada habitación, calcular la superficie de cada una y sumar todas las superficies.

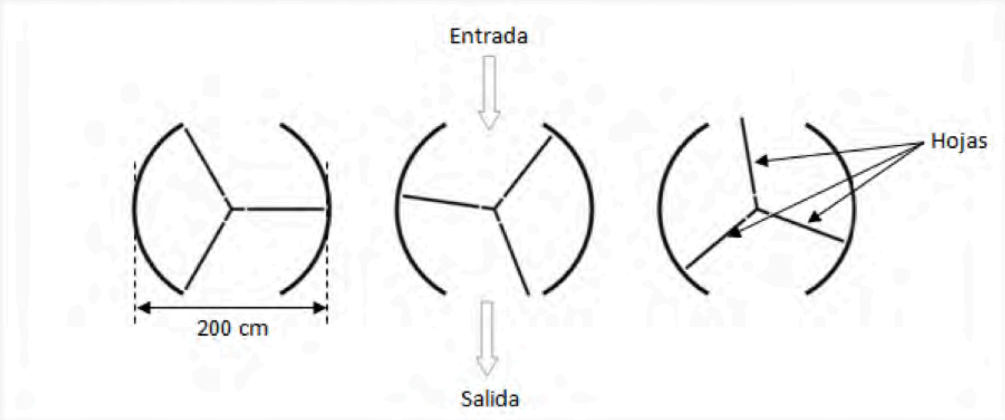
No obstante, existe un método más eficaz para calcular la superficie total en el que solo tienes que medir 4 longitudes. Señala en el plano anterior las **cuatro** longitudes necesarias para calcular la superficie total del apartamento.

FIGURA 3.3.15. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

Si bien, son ítems que podrían considerarse adecuados desde la perspectiva de la articulación y coordinación entre registros, gran parte de ellos presentan ciertas carencias en lo que a dar un significado completo, global e integro de los conceptos que subyacen en ellos respecta.

PUERTA GIRATORIA

Una puerta giratoria consta de tres hojas que giran dentro de un espacio circular. El diámetro interior de dicho espacio es de 2 metros (200 centímetros). Las tres hojas de la puerta dividen el espacio en tres sectores iguales. El siguiente plano muestra las hojas de la puerta en tres posiciones diferentes vistas desde arriba.



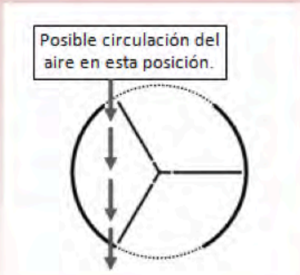
Pregunta 1

¿Cuánto mide (en grados) el ángulo formado por dos hojas de la puerta?

Medida del ángulo: .... º

Pregunta 2

Las dos aberturas de la puerta (la sección punteada en el dibujo) son del mismo tamaño. Si estas aberturas son demasiado anchas las hojas giratorias no pueden proporcionar un espacio cerrado y el aire podría entonces circular libremente entre la entrada y la salida, originando pérdidas o ganancias de calor no deseadas. Esto se muestra en el dibujo de al lado.



¿Cuál es la longitud máxima del arco en centímetros (cm) que puede tener cada abertura de la puerta para que el aire no circule nunca libremente entre la entrada y la salida?

Longitud máxima del arco: .... cm

Pregunta 3

La puerta da 4 vueltas completas en un minuto. Hay espacio para dos personas en cada uno de los tres sectores.

¿Cuál es el número máximo de personas que pueden entrar en el edificio por la puerta en 30 minutos?

A. 60

B. 180

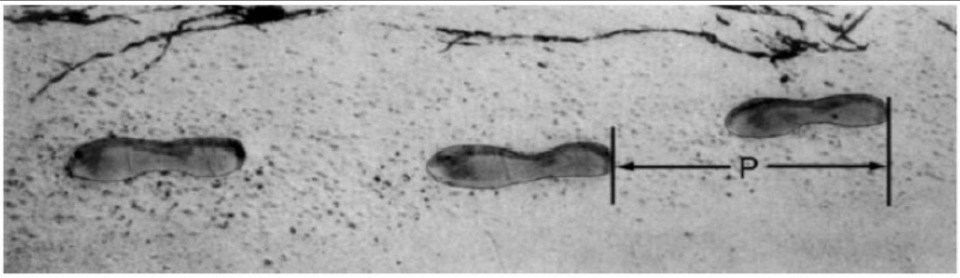
C. 240

D. 720

FIGURA 3.3.16. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

Llama la atención como en todos estos ítems el cambio de anclaje del enunciado a la representación figural o geométrica ya viene dado, por lo que este tipo de conversiones que tan importantes a la hora de valorar la interpretación y lectura que hacen los alumnos de las situaciones problemáticas no son contempladas en PISA.

Finalmente, encontramos ítems que se centran en la utilización del sistema de representación que PISA cataloga de simbólico (el Registro de Representación Algebraico para nosotros). Son reactivos en los que se proporciona al alumno una expresión algebraica o fórmula que les conduce de manera inmediata y sistemática a la resolución del problema, y por tanto, cuya finalidad y objetivo es la obtención del resultado final sin importar el proceso que lleva al alumno a dar una respuesta u otra, careciendo de sentido y funcionalidad desde el punto de vista de la coordinación de registros de representación.



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde:

n = número de pasos por minuto, y
P = longitud del paso en metros.

Pregunta 1: CAMINAR M124Q01 - 0 1 2 9

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

Pregunta 2: CAMINAR M124Q01 - 00 21 22 23 24 31 99

Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula.
Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

FIGURA 3.3.17. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

Pregunta 11: EL TIPO DE CAMBIO M413Q01 - 0 1 9

Mei-Ling se enteró de que el tipo de cambio entre el dólar de Singapur y el rand sudafricano era de:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling cambió 3.000 dólares de Singapur en rands sudafricanos con este tipo de cambio.

¿Cuánto dinero recibió Mei-Ling en rands sudafricanos?

Respuesta: . . . .

Pregunta 12: EL TIPO DE CAMBIO M413Q02 - 0 1 9

Al volver a Singapur, tres meses después, a Mei-Ling le quedaban 3.900 ZAR. Los cambió en dólares de Singapur, dándose cuenta de que el tipo de cambio había cambiado a:

1 SGD = 4,0 ZAR

¿Cuánto dinero recibió en dólares de Singapur?

Respuesta: . . . .

FIGURA 3.3.18. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

La fórmula para hallar los gastos del coche requiere tener en cuenta más aspectos que tan sólo el coste de la gasolina. El Servicio de Transportes de Zedtown añade un valor adicional de *b* zeds al mes para otros gastos del coche tales como el seguro y la matriculación.

La fórmula que utilizan para hallar los costes es: $C = 6d + b$

C es el coste total en zeds, *d* es la distancia al trabajo en kilómetros y *b* son los costes adicionales en zeds por mes sin incluir la gasolina.

Usa la calculadora de gastos del coche para que te ayude a calcular el valor de *b*.

El valor de *b* = . zeds

FIGURA 3.3.19. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

El mejor coche

Una revista de coches utiliza un sistema de puntuaciones para evaluar los nuevos coches y concede el premio de Mejor coche del año al coche con la puntuación total más alta. Se están evaluando cinco coches nuevos. Sus puntuaciones se muestran en la tabla.

Coche	Seguridad (S)	Ahorro de combustible (C)	Diseño exterior (D)	Habitáculo interior (H)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
XK	3	2	3	2

Las puntuaciones se interpretan de la siguiente manera:

3 puntos = Excelente
2 puntos = Bueno
1 punto = Aceptable

Pregunta 37: EL MEJOR COCHE M704Q01

Para calcular la puntuación total de un coche, la revista utiliza la siguiente regla, que da una suma ponderada de las puntuaciones individuales:

Puntuación total = $(3\times S) + C + D + H$

Calcula la puntuación total del coche Ca. Escribe tu contestación en el espacio siguiente.

Puntuación total de *Ca*: ....

FIGURA 3.3.20. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

Solo se ha encontrado una cuestión, para la cual el alumno deba encontrar una expresión algebraica que cumpla una determina propiedad o condición. Dicha cuestión se encuentra dentro del ítem de la búsqueda del *Mejor Coche*:

PPregunta 38: EL MEJOR COCHE M704Q02

El fabricante del coche Ca pensó que la regla para obtener la puntuación total no era justa.

Escribe una regla para calcular la puntuación total de modo que el coche Ca sea el ganador.

Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribir la regla rellenando con números positivos los cuatro espacios de la ecuación siguiente.

Puntuación total = ... S + ... C + ... D + ... H.

FIGURA 3.3.21. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

Luego, a partir del análisis de los reactivos liberados de las pruebas PISA podemos llegar a inducir que la multiplicidad de representaciones existentes para un determinado objeto de conocimiento matemático, así como el reconocer y comprender las relaciones y tipos de cambio fundamentales entre ellas, son consideradas tenuemente.

En ningún momento los estudiantes deben llevar a cabo la construcción de algún modelo de representación, comparar diferentes representaciones o describir la relación entre distintos sistemas semióticos. La conversión, vinculación, integración y traducción con fluidez de diferentes sistemas, se reduce a lo sumo a dos registros de representación, siendo estas actividades mínimas en número con respecto a aquellas que pertenecen a los niveles 1, 2 y 3 de rendimiento para la subcompetencia 6.

No se busca detectar si el estudiante es capaz de identificar las unidades significantes, los contenidos matemáticos y características relevantes que aportan los variados sistemas de representación que aluden a un mismo objeto de conocimiento y mucho menos aun detectar y catalogar los errores, dificultades y bloqueos que se puedan producir producto de la utilización de los sistemas de representación y su conversión.

Es cierto que algunas actividades plantean cierta conversión entre registros, pero no profundizan en ellas, no plantean dificultades a los alumnos más allá de la interpretación, ni plantean reflexiones o dilemas ligados a conversión entre registros, por lo que podemos concluir que las evaluaciones PISA no miden la subcompetencia seis tal y como aparece definida en su proyecto.

3.4. Evaluaciones TIMSS

La evaluación TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) realizada por Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo fundada en 1959 con el objeto de realizar estudios comparativos de investigación sobre políticas, prácticas y resultados educativos, arroja resultados sobre dos áreas de conocimiento concretas, Matemáticas y Ciencias.

Dicha evaluación proporciona elementos de estudio y análisis para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de ambas materias. Su propósito es realizar un seguimiento de los cambios en las prácticas didácticas, formular planes de actuación e intentar dar una visión progresiva de los rendimientos de los estudiantes a lo largo del tiempo para las dos áreas de conocimiento en las que se centra.

Se desarrolla con una periodicidad de 4 años, habiéndose realizando la primera en 1995. Se trata de una evaluación fundamentalmente curricular, ya que todos los contenidos de la prueba preguntan sobre la estructura y el contenido del curriculum pretendido en Matemáticas y Ciencias de los países participantes, evaluando al alumnado de 4º de Primaria y 2º curso de la ESO. En nuestro caso nos centramos en el estudio realizado para Educación Secundaria.

El modelo curricular de TIMSS está organizado en torno a tres aspectos básicos (IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2011a; López-Varona y Moreno-Martínez, 1997; Vázquez, 2000; Mullis et *al.*, 2002):

- *Currículo pretendido*: es el que oficialmente se fija mediante políticas educativas, es decir, lo que cada país decide que sus estudiantes aprendan a través de los currículos oficiales que las autoridades concretan. También se refiere a la organización de la educación para lograrlo, así como a las guías curriculares a las que deben ajustarse los libros de texto para su aprobación.

- *Currículo aplicado*: es el que realmente se imparte en los centros educativos, y contempla tanto los procedimientos de enseñanza en el contexto escolar, como las características del profesorado.

- *Currículo alcanzado*: es el que los estudiantes aprenden, englobando no solo los conocimientos adquiridos, sino también las creencias, destrezas, aptitudes y actitudes de los mismos hacia las Matemáticas y las Ciencias.

Si nos centramos en el marco teórico de evaluación de las matemáticas en TIMSS, vemos que se encuentra estructurado en dos dimensiones que constan de varios dominios: La ***Dimensión de Contenidos*** y la ***Dimensión de Dominios Cognitivos***.

La *Dimensión de contenidos* define la temática matemática específica cubierta por las pruebas. El siguiente cuadro recoge los bloques de contenidos que han formado parte de TIMSS desde su comienzo hasta la actualidad:

TABLA 3.4.1. *Contenidos de Matemáticas en TIMSS*

	TIMSS 1995	TIMSS 1999	TIMSS 2003	TIMSS 2007	TIMSS 2011
BLOQUES DE CONTENIDOS	*Fracciones y sentido numérico* **(30%)** *Proporcionalidad* **(10%)** *Medición* **(10%)** *Representación de datos, análisis y probabilidad* **(15%)** *Geometría* **(15%)** *Álgebra* **(20%)**	*Fracciones y sentido numérico* **(30%)** *Medición* **(15%)** *Representación de datos, análisis y probabilidad* **(15%)** *Geometría* **(15%)** *Álgebra* **(25%)**	*Números* **(30%)** *Álgebra* **(25%)** *Medición* **(15%)** *Geometría* **(15%)** *Datos* **(15%)**	*Números* **(30%)** *Álgebra* **(30%)** *Geometría* **(20%)** *Datos y probabilidad* **(20%)**	*Números* **(30%)** *Álgebra* **(30%)** *Geometría* **(20%)** *Datos y probabilidad* **(20%)**

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2001a.

Como se puede apreciar, no se han producido variaciones significativas de unas evaluaciones a otras, salvo que en TIMSS 2007 y 2011 el bloque específico de Medición desaparece cómo tal, viéndose incluido dentro del bloque geométrico.

Realizando un análisis previo y superficial a partir de los bloques de contenidos que se contemplan y los porcentajes objetivo de las especificaciones de la Evaluación de Matemáticas para cada uno de ellos, cabría esperar la detección de un empleo abusivo de los Registros de Representación Numérico y Algebraico en los ítems que la componen, en detrimento de Registros tan importantes como el Gráfico, Tabular y Geométrico. Resulta claramente llamativa la diferencia de porcentaje entre el bloque geométrico (15- 20%) y los bloques numérico (30%) y algebraico (25-30%), lo que es indicativo de la escasa relevancia que se le concede a la Geometría, y como consecuencia, a todos los procesos y habilidades que se desarrollan en su estudio y aprendizaje, en la formación matemática del estudiante.

También es digno de mención que no exista un bloque expresamente dedicado a funciones y gráficas, donde el trabajo y complementariedad entre múltiples sistemas de representación se considera condición fundamental y necesaria para los aprendizajes básicos de dependencia entre variables, noción de función sin que se produzca en el estudiante una identificación única con la gráfica cartesiana, así como para la formación y aprehensión de conceptos y propiedades (continuidad, dominio, recorrido, máximo, mínimos, crecimiento, decrecimiento, periodicidad, etc.) pertenecientes a dicho bloque.

En lo que a nuestro estudio se refiere, vamos a considerar los cinco bloques de contenidos que han formado más veces parte de la evaluación de Matemáticas en TIMSS (Números, Medición, Álgebra, Geometría, Datos), para realizar el análisis de la idoneidad del empleo y coordinación de registros de representación semiótica en la enseñanza de los conceptos que forman parte de cada uno de ellos, así como su uso apropiado desde una perspectiva de un funcionamiento cognitivo adecuado en el estudiante en el proceso de estudio.

Dentro de estos dominios de contenido se definen varios temas de modo que quedan cubiertos la mayoría de los objetivos de los currícula de matemáticas de los países participantes:

TABLA 3.4.2. *Sub-bloques de Matemáticas en TIMSS*

Bloques de contenido	**Sub-bloques o áreas temáticas**
Números	➢ Números Naturales ➢ Fracciones y decimales ➢ Enteros ➢ Razón proporción y porcentaje
Álgebra	➢ Modelos y patrones ➢ Expresiones algebraicas ➢ Ecuaciones, fórmulas y funciones
Medición	➢ Atributos y unidades ➢ Herramientas, técnicas y formas
Geometría	➢ Formas geométricas ➢ Medidas geométricas ➢ Situación y movimiento
Datos	➢ Organización y representación de datos ➢ Interpretación de datos ➢ Probabilidad

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2001a.

En cada uno de estos sub-bloques o temas, se concretan unos objetivos específicos expresados en términos de comprensión o destreza que los estudiantes deben haber adquirido (IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2011a). En las tablas que siguen se recogen aquellos objetivos específicos que guardan, en mayor o menor medida, relación con la conversión de representaciones:

TABLA 3.4.3. *Objetivos por bloque de contenido en Matemáticas TIMSS*

Bloque de contenidos	Objetivos generales	Nº objetivos específicos	Nº objetivos específicos conversión	Objetivos específicos relacionados con la conversión de representaciones
Números	*Conocer los números (naturales, enteros, fracciones y decimales), sus diferentes formas de representación, las relaciones entre números y los sistemas numéricos. Desarrollar el sentido numérico y la fluidez de cálculo. Comprender los significados de operaciones y cómo se relacionan entre sí. Usar números y operaciones para resolver problemas.*	**28**	**9**	*1.Demostrar el conocimiento del valor posicional de las cifras, incluyendo el reconocimiento y escritura de números de forma expandida y representando los números naturales utilizando palabras, diagramas o símbolos. 2.Representar decimales y fracciones mediante palabras, números o modelos (incluyendo líneas numeradas). 3.Resolver problemas con fracciones. 4.Resolver problemas con decimales. 5.Representar números enteros mediante palabras, números o modelos (incluyendo líneas numeradas). 6.Resolver problemas con números enteros. 7.Resolver problemas con porcentajes. 8.Resolver problemas con proporciones. 9.Resolver problemas mediante cálculo, estimación o aproximación.*
Álgebra	*Reconocer y extender patrones y relaciones. Usar símbolos algebraicos para representar situaciones matemáticas, la adquisición de soltura en la búsqueda de expresiones equivalentes a otras dadas y en la resolución de ecuaciones lineales. Explicar relaciones con conceptos algebraicos.*	**18**	**7**	*1.Extender secuencias o patrones numéricos, algebraicos y geométricos con palabras o símbolos. 2.Generalizar las relaciones de los modelos en una secuencia, o entre términos adyacentes; o entre el número secuencial del término y el término, utilizando números, palabras o expresiones algebraicas. 3.Resolver problemas mediante ecuaciones o fórmulas. 4.Reconocer representaciones equivalentes de funciones como pares ordenados, tablas, gráficos, palabras o ecuaciones. 5.Dada una función en una representación, generar una representación diferente aunque equivalente. 6.Reconocer e interpretar relaciones proporcionales, lineales y no lineales (incluidos gráficos móviles y funciones sencillas). 7.Escribir o seleccionar una función para representar una situación dada.*

Bloque de contenidos	Objetivos generales	Nº objetivos específicos	Nº objetivos específicos conversión	Objetivos específicos relacionados con la conversión de representaciones
Medición	*Asignar un valor numérico a un atributo de un objeto. Comprender los atributos mensurables y demostrar conocimiento de las unidades y los procesos empleados en la medición de diversos atributos. Utilizar instrumentos y herramientas para medir atributos físicos, incluyendo la longitud, el área, el volumen, el peso/masa, el ángulo, la temperatura y el tiempo, en unidades estándar y no estándar y con conversiones entre diferentes sistemas de unidades. Aplicación de fórmulas más complejas para medir áreas compuestas y las áreas superficiales de sólidos.*	**9**	**1**	*1.Seleccionar y utilizar fórmulas de medición apropiadas para perímetros, circunferencias, áreas, superficies y volúmenes; buscar mediciones de áreas compuestas.*
Geometría	*Analizar las propiedades y características de una variedad de figuras geométricas, incluyendo líneas, ángulos y formas de dos y tres dimensiones, así como dar explicaciones basadas en relaciones geométricas. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas y ser competente en la realización de medidas geométricas y en la selección y utilización de fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Comprender la representación de coordenadas y la utilización destrezas de visualización espacial para moverse entre formas bidimensionales y tridimensionales y sus representaciones. Describir, visualizar, dibujar y construir diversidad de figuras geométricas, incluidos ángulos, líneas, triángulos, cuadriláteros y otros polígonos.*	**24**	**4**	*1.Construir o dibujar triángulos, rectángulos y otros polígonos de unas dimensiones dadas. 2.Reconocer relaciones entre formas tridimensionales y sus representaciones bidimensionales (p. ej., redes o vistas bidimensionales de objetos tridimensionales). 3.Dibujar determinados ángulos y líneas; medir y estimar el tamaño de determinados ángulos, segmentos de líneas, perímetros, áreas y volúmenes. 4.Utilizar pares ordenados, ecuaciones, intercepciones, intersecciones y gradiente para localizar puntos y líneas en el plano cartesiano.*

Bloque de contenidos	Objetivos generales	Nº objetivos específicos	Nº de objetivos específicos de conversión	Objetivos específicos relacionados con la conversión de representaciones
Datos	*Interpretar y representar datos mediante tablas o gráficos de diferentes tipos y a partir de ellos debe ser capaz de identificar tendencias, hacer predicciones y razonar sus interpretaciones. Comprender, recopilar, organizar datos recopilados por uno mismo o por otros, y la representar datos en gráficos y tablas Comprender lo que significan diversos números, símbolos y puntos en representaciones de datos. Desarrollar destreza para representar sus datos, mediante gráficos de barras, cuadros o gráficos de líneas. Saber describir y comparar las características de datos (forma, dispersión y tendencia central). Saber identificar tendencias en los datos, hacer predicciones basadas en los datos evaluar lo razonables que son las interpretaciones. Calcular las probabilidades de sucesos sencillos o estimar probabilidades a partir de datos experimentales.*	**14**	**6**	*1.Hacer corresponder un conjunto de datos, o una representación de datos, con características apropiadas de situaciones o contextos (p.e., ventas mensuales de un producto en un año). 2.Organizar un conjunto de datos por una o más características mediante un gráfico de correspondencias, tabla o gráfico. 3.Reconocer y describir posibles fuentes de error en la recopilación y organización de datos (p.e., sesgo, agrupamiento inapropiado). 4.Leer datos de gráficos, tablas, pictogramas, gráficos de barras, gráficos de sectores y gráficos de líneas. 5.Representar datos mediante gráficos, tablas, pictogramas, gráficos de barras, gráficos de sectores y gráficos de líneas. 6.Comparar y hacer corresponder diferentes representaciones de los mismos datos. Interpretar conjuntos de datos (p.e., sacar conclusiones, hacer predicciones y estimar valores entre puntos de datos dados y más allá de los mismos).*

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2001a.

Si realizamos un análisis, bloque por bloque, podemos apreciar los siguientes aspectos en relación con el tema de investigación:

- Bloque: Números
  - Aproximadamente, el 32% de los objetivos específicos de este bloque (9 de 28) guardan relación con la conversión de representaciones.
  - Seis de los nueve objetivos hacen referencia a la *resolución de problemas* (el 3,4 ,6,7,8 y 9), por lo que se promueve una conversión del Registro de la Lengua Natural al Registro Numérico, siendo la predominante dentro de este bloque.
  - Los tres objetivos restantes (el 1, 2 y 5) promueven una conversión del Registro Numérico al Registro de la Lengua Natural y del Registro Numérico al Registro Gráfico (Recta numérica).
  - Los Registros de Representación Geométrico, Figural y Tabular, de gran carga visual y ventajosos en cuanto a un trabajo más intuitivo y deductivo de los contenidos de este bloque, destacan por su ausencia.
- Bloque: Algebra
  - Aproximadamente, el 39% de los objetivos específicos de este bloque (7 de 18) guardan relación con la conversión de representaciones.
  - Dos de los siete objetivos (el 1 y 2) se centran en la utilización de modelos algebraicos y reconocimiento de patrones, por lo que se favorece la conversión del Registro de la Lengua Natural, el Registro Numérico y el Registro Geométrico al Algebraico. No parece contemplarse dichas conversiones en sentido contrario.

- El objetivo 3 hace referencia al uso de expresiones algebraicas y ecuaciones en la resolución de problemas, promoviendo la transformación del Registro de la Lengua Natural al Algebraico, y de este al Numérico, para llegar a la solución mecánica de los mismos mediante el empleo de fórmulas, por lo que dichas conversiones carecen de funcionalidad desde el punto de vista de la Teoría de Duval.

- Los objetivos 4, 5 ,6 y 7, tratan sobre las relaciones funcionales y los registros semióticos que se pueden interpretar, coordinar y complementar en el proceso de aprendizaje de tales nociones. En concreto, los objetivos 4 y 5 hacen hincapié en el reconocimiento y conversión de las diversas representaciones mediante las cuales se puede expresar una dependencia entre variables.

• Bloque: Medición

- Únicamente uno de los nueve objetivos específicos que forman este bloque, guarda relación con la conversión de representaciones, evidenciándose en él un fenómeno ligado al proceso de transposición didáctica que ocurre con asiduidad tanto en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la medida de magnitudes como en el bloque de geometría. Tal fenómeno consiste en la búsqueda de un método de producción de respuestas de manera mecánica a partir de la utilización de algoritmos y fórmulas, produciéndose una apropiación del saber y una algebrización de tales contenidos.

- Las posibles conversiones entre registros que se deducen del objetivo analizado son aquellos que implican la transformación del Registro Geométrico o del Registro Figural, al Registro Algebraico.

- Bloque: Geometría
    - Aproximadamente, el 17% de los objetivos específicos de este bloque (4 de 24) guardan relación con la conversión de representaciones.
    - Dos de los cuatro objetivos (el 1 y 3) centran su atención en el dibujo y construcción de variedad de figuras geométricas, favoreciéndose la conversión del Registro de la Lengua Natural al Geométrico, sin hacer alusión a la transformación en el sentido contrario. Este hecho se encuentra en contradicción con la necesidad absoluta de coordinación que debe darse entre los tratamientos específicos del Registro Geométrico y los del discurso teórico de la Lengua Natural, debiéndose efectuar simultáneamente y de manera interactiva en los procesos en geometría.
    - Estos dos objetivo, junto con el 2, permiten trabajar con los elementos constitutivos de una figura, es decir, con las unidades figurales elementales que constituyen, semióticamente, una figura geométrica. Estas unidades son producto del cruce o combinación de los valores tomados por la variable dimensional (Dimensión 0, 1, 2 o 3) y las variaciones cualitativas (Forma rectilínea, forma curva, contorno abierto, contorno cerrados, etc.), las cuales se recogen de manera implícita en los mencionados objetivos.
    - El objetivo 4 vuelve a hacer referencia a las relaciones funcionales, pues incluye la comprensión de la representación de coordenadas en un plano cartesiano (Registro Gráfico) a partir de pares de números (Registro Numérico), ecuaciones (Registro Algebraico) y Tablas (Registro Tabular). La conversión entre estos registro semióticos se da, de manera única y unidireccional, entre cualquiera de las tres últimas representaciones y el sistema gráfico, no vinculándose ni relacionándose los cuatro registros entre sí.

- Bloque: Datos
    - Aproximadamente, el 43% de los objetivos específicos de este bloque (6 de 14) guardan relación con la conversión de representaciones.
    - Los objetivos 1, 2 y 5 recogen, de forma clara, el empleo de los registros Numérico, Tabular y Gráfico, en la representación, tratamiento y organización de datos, favoreciéndose , así, una conversión del primero hacia los otros dos.
    - En cuanto a la descripción, comparación, interpretación y extracción de conclusiones, donde juega un papel fundamental y prioritario el Registro de la Lengua Natural, basadas en la representación de datos a partir del Registro Numérico, Tabular y Gráfico, es contemplado en los objetivos 3, 4 y 6.
    - Aunque aparentemente los objetivos de este bloque de contenidos parecen movilizar y coordinar diversos registros de representación en lo que al tratamiento de datos se refiere, no podemos asegurar que el tratamiento sea el idóneo, pues por la manera en que se enuncian puede que únicamente se empleen como herramientas que permitan al estudiante encontrar la solución de los problemas planteados de manera rápida y sencilla, perdiendo el sentido desde la perspectiva de una aprehensión completa y significativa de los conceptos estadísticos y probabilísticos basada en la conversión de Registros.

El segundo criterio organizador de la evaluación se centra en las destrezas y capacidades que los estudiantes deben poner en funcionamiento a través de la aplicación de los contenidos especificados según el primer criterio organizador de TIMSS. Se trata de la *Dimensión Cognitiva* que define los comportamientos esperados de los estudiantes al ocuparse del contenido de matemáticas.

Los dominios cognitivos que se han contemplado a lo largo de las Evaluaciones TIMSS se recogen en la siguiente tabla:

TABLA 3.4.4. *Dominios cognitivos de Matemáticas en TIMSS*

Evaluación	Dominios cognitivos
TIMSS 1995	➢ *Conocimiento de hechos y de procedimientos* **(15%)** ➢ *Utilización de conceptos* **(20%)** ➢ *Resolución de problemas habituales* **(40%)** ➢ *Razonamiento* **(25%)**
TIMSS 1999	➢ *Conocimiento de hechos y de procedimientos* **(15%)** ➢ *Utilización de conceptos* **(20%)** ➢ *Resolución de problemas habituales* **(40%)** ➢ *Razonamiento* **(25%)**
TIMSS 2003	➢ *Conocimiento de hechos y de procedimientos* **(15%)** ➢ *Utilización de conceptos* **(20%)** ➢ *Resolución de problemas habituales* **(40%)** ➢ *Razonamiento* **(25%)**
TIMSS 2007	➢ *Conocimiento* **(40%)** ➢ *Aplicación* **(40%)** ➢ *Razonamiento* **(20%)**
TIMSS 2011	➢ *Conocimiento* **(35%)** ➢ *Aplicación* **(40%)** ➢ *Razonamiento* **(25%)**

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2001a.

En lo que sigue, y atendiendo a las dos clasificaciones que se han tenido en cuenta a lo largo de las evaluaciones, se describen las prácticas, aptitudes, competencias y habilidades, relacionadas con la construcción, utilización y coordinación de representaciones, que se incluyen en cada dominio cognitivo que conforman las clasificaciones.

TABLA 3.4.5. *Clasificación de dominios cognitivos TIMSS 1995, 1999,y 2003*

Dominio cognitivo	**Destrezas**	**Destrezas relacionadas con la conversión entre registros**
Conocimiento de hechos y de procedimientos	➢ Recordar ➢ Reconocer/identificar ➢ Calcular ➢ Usar herramientas	***Reconocer o identificar*** *entidades matemáticas que sean equivalentes, es decir, áreas departes de figuras para representar fracciones, fracciones conocidas, decimales y porcentajes equivalentes; expresiones algebraicas simplificadas; figuras geométricas simples orientadas de modo diferente.* ***Usar herramientas****: dibujar líneas, ángulos o figuras según unas especificaciones dadas.*
Utilización de conceptos	➢ Saber ➢ Clasificar ➢ Representar ➢ Formular ➢ Distinguir	***Representar*** *números mediante modelos; representar información matemática de datos en diagramas, tablas, cuadros, gráficos; generar representaciones equivalentes de una entidad o relación matemática dada.* ***Formular*** *problemas o soluciones que puedan ser representados por ecuaciones o expresiones*
Resolución de problemas	➢ Seleccionar ➢ Representar ➢ Interpretar ➢ Aplicar ➢ Verificar	***Seleccionar*** *o usar un método o estrategia eficiente para resolver problemas en los que haya un algoritmo o método de solución conocido, es decir, un algoritmo o método que cabría esperar que resultase conocido para los estudiantes. Seleccionar algoritmos, fórmulas o unidades apropiadas.* ***Representar****: Generar una representación apropiada, por ejemplo una ecuación o un diagrama, para resolver un problema común.* ***Interpretar*** *representaciones matemáticas dadas (ecuaciones, diagramas, etc.); seguir y ejecutar un conjunto de instrucciones matemáticas.*
Razonamiento	➢ Formular hipótesis ➢ Analizar ➢ Evaluar ➢ Generalizar ➢ Conectar ➢ Sintetizar o integrar ➢ Resolver problemas no habituales ➢ Justificar/demostrar	***Analizar****: Determinar y describir o usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas; analizar datos estadísticos univariantes; descomponer figuras geométricas para simplificar la resolución de un problema; dibujar la red de un sólido dado poco conocido; hacer inferencias válidas a partir de información dada.* ***Conectar*** *conocimientos nuevos con conocimientos existentes; hacer conexiones entre diferentes elementos de conocimiento y representaciones relacionadas; vincular ideas u objetos matemáticos relacionados.*

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a

TABLA 3.4.6. *Clasificación de dominios cognitivos TIMSS 2007 y 2011*

Dominio cognitivo	**Destrezas**	**Destrezas relacionadas con la conversión entre registros**
Conocimiento	➢ Recordar ➢ Reconocer/identificar ➢ Calcular ➢ Recuperar ➢ Medir ➢ Clasificar/ordenar	***Reconocer*** *objetos matemáticos, por ejemplo formas, números, expresiones y cantidades; reconocer o identificar entidades matemáticas que sean equivalentes (p. ej., fracciones equivalentes conocidas, decimales y porcentajes; figuras geométricas simples orientadas de modo diferente).* ***Recuperar*** *información de gráficos, tablas y otras fuentes; leer escalas simples.*
Aplicación	➢ Seleccionar ➢ Representar ➢ Modelo ➢ Poner práctica ➢ Resolver problemas de rutina	***Seleccionar*** *o usar un método o estrategia eficiente para resolver problemas en los que haya un algoritmo o método de solución conocido.* ***Representar*** *información y datos matemáticos en diagramas, tablas, cuadros o gráficos y generar representaciones equivalentes para una entidad o relación matemática dada.* ***Modelo****: Generar un modelo apropiado, como una ecuación, figura geométrica o diagrama para resolver un problema de rutina.* ***Poner en práctica*** *un conjunto de instrucciones matemáticas (p. ej., dibujar formas y diagramas según unas determinadas especificaciones).*
Razonamiento	➢ Analizar ➢ Generalizar/especializar ➢ Sintetizar/integrar ➢ Resolver problemas no rutinarios ➢ Justificar	***Analizar****: Determinar y describir o usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas y hacer inferencias válidas a partir de información dada.* ***Integrar/sintetizar:*** *Realizar conexiones entre diferentes elementos de conocimiento y representaciones relacionadas con ellos, y efectuar conexiones entre ideas matemáticas relacionadas entre sí; combinar procedimientos matemáticos (dispares) para establecer resultados; combinar resultados para llegar a un resultado ulterior.*

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 2007a, 2001a.

A partir de la información recabada de ambas clasificaciones, pudiéndolas tildar de casi equivalentes, podemos considerar, a priori y antes de adentrarnos en el análisis de los ítems que son los que verdaderamente nos corroborarán dicha afirmación, que las destrezas cognitivas relacionadas con la representación, que se evalúan conjuntamente con los contenidos del área, contemplan y conceden cierta importancia a la coordinación de los múltiples registros semióticos existentes.

Este hecho queda patente de manera significativa en la destreza *Representar* que aparece tanto en el dominio cognitivo de *Utilización de Conceptos* de la primera clasificación como en el dominio *Aplicación* de la segunda, pues se define en ambas como "representar información y datos matemáticos en diagramas, tablas, cuadros o gráficos y generar representaciones equivalentes para una entidad o relación matemática dada" (IEA, 2011, p. 42).

Del mismo modo ocurre con la destreza *Integrar/sintetizar* de la segunda clasificación, que es equivalente a la destreza *Conectar* de la primera, la cual se define como "realizar conexiones entre diferentes elementos de conocimiento y representaciones relacionadas con ellos, y efectuar conexiones entre ideas matemáticas relacionadas entre sí; vincular ideas u objetos matemáticos relacionados" (IEA, 2011, p. 43) y con la destreza *Reconocer* concretada del siguiente modo:

> Reconocer objetos matemáticos, por ejemplo formas, números, expresiones y cantidades; reconocer o identificar entidades matemáticas que sean equivalentes, es decir, áreas departes de figuras para representar fracciones, fracciones conocidas, decimales y porcentajes equivalentes; expresiones algebraicas simplificadas; figuras geométricas simples orientadas de modo diferente (IEA, 2011, p. 41).

En ellas se manifiesta como la representación de los conceptos y nociones es el pilar y eje fundamental del pensamiento matemático, y como la capacidad para crear, utilizar y coordinar representaciones equivalentes, estableciendo vínculos y relaciones entre las unidades significativas de cada registro, es fundamental para lograr el éxito en términos de aprendizaje significativo.

En lo referente al resto de destrezas relacionadas con el tema de estudio, se aprecia un fuerte predominio de aquellas conversiones en las que uno de los Registros que interviene es el Registro de la Lengua Natural, como se aprecia en la siguiente tabla:

TABLA 3.4.7. *Destrezas y conversiones TIMSS*

Clasificación	Destrezas	Conversiones
TIMSS 1995, 1999 y 2003	*Dibujar líneas, ángulos o figuras según unas especificaciones dadas.*	**RLN** → RFI **RLN** → RGe
	Formular problemas o soluciones que puedan ser representados por ecuaciones o expresiones dadas.	RA → **RLN**
	Seleccionar o usar un método o estrategia eficiente para resolver problemas en los que haya un algoritmo o método de solución conocido, es decir, un algoritmo o método que cabría esperar que resultase conocido para los estudiantes. Seleccionar algoritmos, fórmulas o unidades apropiadas.	**RLN** → RA
	Generar una representación apropiada, por ejemplo una ecuación o un diagrama, para resolver un problema común.	**RLN** → RA **RLN** → RGr **RLN** → RFI
	Interpretar representaciones matemáticas dadas (ecuaciones, diagramas, etc.)	RA → **RLN** RGr → **RLN** RFI → **RLN**
	Determinar y describir o usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas; analizar datos estadísticos univariantes; descomponer figuras geométricas para simplificar la resolución de un problema; dibujar la red de un sólido dado poco conocido; hacer inferencias válidas a partir de información dada.	RGr → **RLN**
TIMSS 2007 y 2011	*Recuperar información de gráficos, tablas y otras fuentes; leer escalas simples.*	RGr → **RLN** RT → **RLN** RFI → **RLN**
	Generar un modelo apropiado, como una ecuación, figura geométrica o diagrama para resolver un problema de rutina.	**RLN** → RA **RLN** → RGr **RLN** → RFI **RLN** → RGe
	Poner en práctica un conjunto de instrucciones matemáticas (p. ej., dibujar formas y diagramas según unas determinadas especificaciones).	**RLN** → RFI **RLN** → RGe

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2011a

El conocimiento matemático tiene características y particularidades que hace que no sea viable el acceso a este conocimiento sin poder utilizar una variedad de registros de representación, entre los cuales la lengua materna, a pesar de ser el registro semiótico por excelencia, no es más que uno entre otros y, al igual que ellos, no es suficiente para movilizar procesos, nociones y conocimientos matemáticos.

3.4.1. Análisis de los Ítems de TIMSS 1995, 1999, 2003 y 2007

TIMSS presenta dos tipos de ítems en sus evaluaciones: de elección múltiple y respuesta construida. Las preguntas de elección múltiple son aquellas en las que el estudiante debe elegir la respuesta correcta entre las opciones que se le presentan, mientras que los ítems de respuesta construida exigen la redacción de la respuesta permitiendo profundizar tanto en el conocimiento matemático en sí mismo como en las destrezas que el estudiante emplea.

A continuación, para cada una de las evaluaciones de las que se disponen de reactivos liberados, se va a estudiar, por bloque de contenido, que tipo de coordinación es la que promueve y favorece cada ítem.

El análisis de los ítems nos permite valorar si verdaderamente existe una correspondencia entre lo que se promulga en el marco teórico de TIMSS y lo que posteriormente se pone en práctica y se evalúa en lo concerniente al desarrollo de habilidades relativas a los registros semióticos y a cómo las características de los diferentes sistemas de representación, que se pueden y deben utilizar en Matemáticas, favorece el aprendizaje de un conocimiento.

La evaluación de matemáticas no ha constado del mismo número de ítems de una aplicación a otra. En las tablas que se adjuntan, se especifica el número de reactivos que han constituido cada evaluación TIMSS de la que se disponen de reactivos liberados, el número de ítems a los que se tiene acceso, así como su distribución en función del bloque de contenido y de su referencia a algún tipo de conversión, ya sea relevante o no desde la perspectiva de un adecuado tratamiento cognitivo de la coordinación de representaciones:

TABLA 3.4.1.1. *Ítems y conversiones TIMSS 1995*

TIMSS 1995	Números	Geometría	Medida	Álgebra	Datos	Prop.	Total
Ítems	51	23	18	27	12	11	151
Ítems libreados	37 (73%)	17 (74%)	12 (67%)	18 (67%)	12 (100%)	6 (55%)	102 (68%)
Ít. liberados conversión	23 (62%)	8 (47%)	9 (75%)	8 (44%)	9 (75%)	6 (100%)	63 (62%)

Fuente: elaboración propia a partir de IEA, 1995a

TABLA 3.4.1.2. *Ítems y conversiones TIMSS 1999*

TIMSS 1999	Números	Geometría	Medida	Álgebra	Datos	Total
Ítems	47	20	15	24	19	125
Ítems libreados	34 (72%)	9 (45%)	8 (53%)	19 (79%)	10 (53%)	80 (64%)
Ít. liberados conversión	22 (65%)	5 (55%)	6 (75%)	15 (79%)	9 (90%)	57 (71%)

Fuente: elaboración propia a partir de IEA, 1999a

TABLA 3.4.1.3. *Ítems y conversiones TIMSS 2003*

TIMSS 2003	Números	Geometría	Medida	Álgebra	Datos	Total
Ítems	57	31	31	47	28	194
Ítems libreados	31 (54%)	16 (52%)	17 (55%)	22 (47%)	11 (39%)	97 (50%)
Ít. liberados conversión	19 (61%)	8 (50%)	11 (65%)	9 (46%)	9 (82%)	56 (58%)

Fuente: elaboración propia a partir de IEA, 2003a

TABLA 3.4.1.4. *Ítems y conversiones TIMSS 2007*

TIMSS 2007	Números	Geometría	Álgebra	Datos	Total
Ítems	63	47	64	41	215
Ítems libreados	32 (51%)	22 (47%)	15 (23%)	18 (44%)	87 (40%)
Ít. liberados conversión	23 (72%)	16 (68%)	6 (40%)	15 (83%)	60 (79%)

Fuente: elaboración propia a partir de IEA, 2007a

Para el trabajo y análisis a partir de los ítems, hemos tomado en cuenta únicamente cuatro bloques de contenidos, *Números, Geometría, Algebra* y *Datos*, incorporando el bloque de *Medida* de TIMSS 1995, 1999 y 2003, dentro de Geometría y el bloque de *Proporcionalidad* de TIMSS 1995 dentro de *Números*, como se ha establecido en las dos últimas aplicaciones de la evaluación, TIMSS 2007 y TIMSS 2011. Consideramos que el porcentaje de ítems liberados para cada uno de los bloques de contenido es lo suficientemente representativo como para poder generalizar los siguientes resultados y obtener las posteriores conclusiones:

BLOQUE: NÚMEROS

TABLA 3.4.1.5. *Coordinación entre registros Bloque de Números*

	Coordinación de Registros	Nº de Ítems
TIMSS 1995	RLN - RN	23
	RFi - RN	4
	RT - RN	1
	RT - RA - RN	1
TIMSS 1999	RLN - RN	15
	RFi - RN	6
	RGr - RN	1
TIMSS 2003	RLN - RN	16
	RFi - RN	2
	RLN - RA - RN	1
TIMSS 2007	RLN - RN	14
	RFi - RN	2
	RLN - RA	1
	RLN - RN - RT	6

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a

En todas las aplicaciones de la evaluación existe un alto porcentaje de ítems (entre el 60 y el 80 por ciento aproximadamente) que requieren el uso de números y operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) para resolver problemas tras la lectura de un enunciado. Es decir, existe un claro predominio de las actividades que movilizan dos registros de representación, el Registro de la Lengua Natural y el Registro Numérico, dándose la conversión del primero al segundo de manera casi instantánea, evaluándose más la comprensión lectora de los alumnos que la capacidad para coordinar ambos registros, pues con una simple lectura de izquierda a derecha los estudiantes son capaces de resolver la tarea, no movilizando actividades cognitivas de real conversión:

I5. In a discus-throwing competition, the winning throw was 61.60 m. The second-place throw was 59.72 m. How much longer was the winning throw than the second-place throw?

A. 1.18 m

B. 1.88 m

C. 1.98 m

D. 2.18 m

K2. A chemist mixes 3.75 milliliters of solution A with 5.625 milliliters of solution B to form a new solution. How many milliliters does this new solution contain?

Answer:______________________________

The total weight of a pile of 500 salt crystals is 6.5 g. What is the average weight of a salt crystal?

A. 0.0078 g

B. 0.013 g

C. 0.0325 g

D. 0.078 g

FIGURA 3.4.1.1. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)

A scoop holds $\frac{1}{5}$ kg of flour. How many scoops of flour are needed to fill a bag with 6 kg of flour?

Answer: ______________

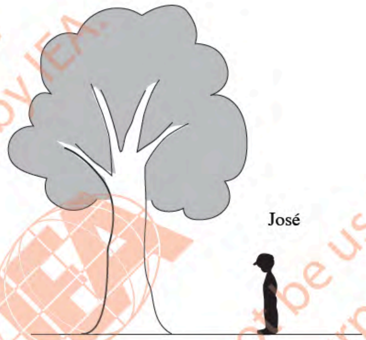
One year a company reported selling 1426 tons of fertilizer. The following year the company sold 15 percent less fertilizer. Which is the closest approximation to the number of tons of fertilizer sold in the second year?

Ⓐ 200
Ⓑ 300
Ⓒ 1200
Ⓓ 1600
Ⓔ 1700

FIGURA 3.4.1.2. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)

Las actividades que pretenden la coordinación entre los Registros Figural y Numérico, en las cuales aparece algún tipo de croquis, dibujo, esquema o figura, son las siguientes en porcentaje en este bloque de contenidos (entre un 10 y 15 por ciento aproximadamente). Este tipo de tareas favorecen y permiten evaluar la comprensión de cantidades representadas mediante diagramas, la estimación, comparación y cálculo a partir de un referente dado figuralmente, así como potenciar destrezas relacionadas con moverse, en ambos sentidos y de manera flexible, entre tales registros, y sin embargo pierde claramente la batalla frente a las actividades tratadas en el punto anterior, pues su porcentaje de aparición es notablemente inferior:

L8.



José is 1.5 m tall. About how tall is the tree?

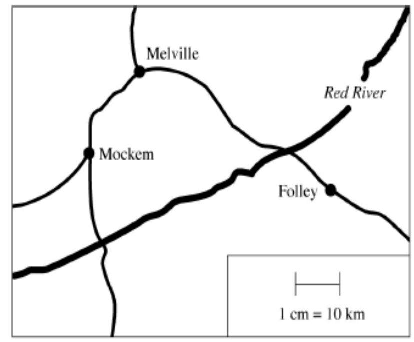
A. 4 m

B. 6 m

C. 8 m

D. 10 m

On the map, 1 cm represents 10 km on the land.



On the land, about how far apart are the towns Melville and Folley?

A. 5 km

B. 30 km

C. 40 km

D. 50 km

N19. Shade in $\frac{5}{8}$ of the unit squares in the grid.

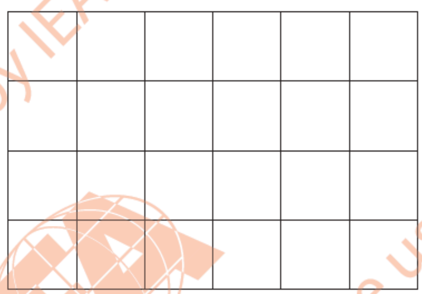
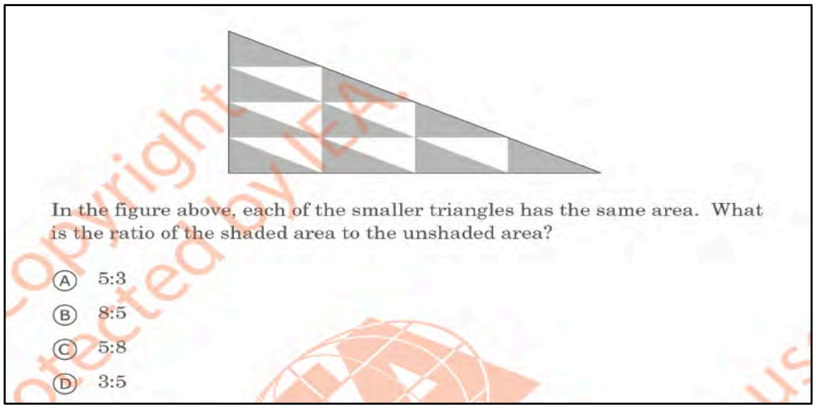


FIGURA 3.4.1.3. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)



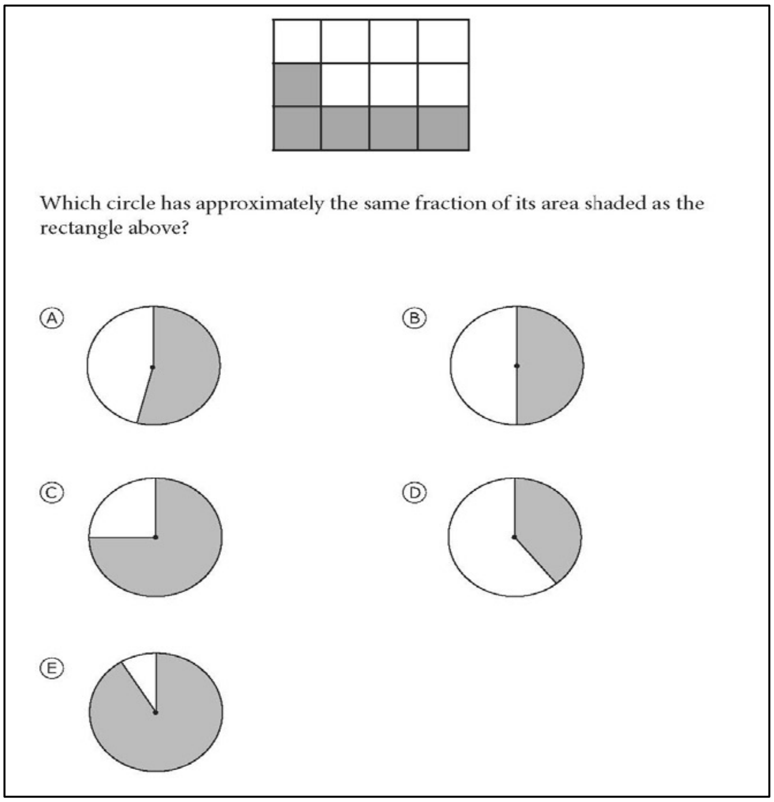


FIGURA 3.4.1.4. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)

Únicamente en TIMSS 1995 y 2007 hay actividades en las que se relacionan el Registro Tabular y el Registro Numérico dentro de los reactivos liberados. El tratamiento que se hace del Registro Tabular, muy alejado de su función como Registro Semiótico, es el de herramienta para presentar datos que igualmente se podrían facilitar mediante el Registro de la Lengua Natural. Luego, dichos ítems carecen de funcionalidad desde el punto de vista de permitir evaluar la conversión e identificación de las unidades significantes de un registro frente al otro por parte del estudiante:

U1. Teresa wants to record 5 songs on tape. The length of time each song plays for is shown in the table.

Song	Amount of Time
1	2 minutes 41 seconds
2	3 minutes 10 seconds
3	2 minutes 51 seconds
4	3 minutes
5	3 minutes 32 seconds

ESTIMATE to the nearest minute the total time taken for all five songs to play and explain how this estimate was made.

Estimate: ______________________

Explain:

Triathlon

A triathlon is a race in which athletes swim, then cycle, then run set distances. The first person to complete the whole course is the winner.

Kathy, Barbara, and Sue competed with each other in a triathalon. The course they covered consisted of a 1 kilometer swim, followed by a 40 kilometer cycle ride, and then a 15 kilometer run.

A. Barbara was the fastest swimmer and completed the 1 km distance in 25 minutes. Kathy took 10 minutes longer than Barbara, and Sue took 5 minutes longer than Kathy.

Use this information to complete the table for swimming:

Swimming	Kathy	Barbara	Sue
Time taken (minutes)		25	

B. Kathy was the fastest cyclist. She averaged 30 kilometers per hour for the 40 km ride. Barbara took 10 minutes more than Kathy, and Sue took 15 minutes more than Kathy.

Use this information to complete the table for cycling:

Cycling	Kathy	Barbara	Sue
Time taken (minutes)			

FIGURA 3.4.1.5. *Actividades TIMSS.* (IEA, 2003b, 2007b)

Katy made a table to keep track of how long it took water in a beaker to cool from 95°C to 70°C. She measured the time it took the water to cool in 5°C intervals.

Interval Readings	Amount of Cooling Time
95°C – 90°C	2 minutes 10 seconds
90°C – 85°C	3 minutes 19 seconds
85°C – 80°C	4 minutes 48 seconds
80°C – 75°C	6 minutes 55 seconds
75°C – 70°C	9 minutes 43 seconds

Estimate to the nearest minute the total time taken for the temperature of the water in the beaker to cool from 95°C to 70°C, and explain how your estimate was made.

Estimate: ________________

Explain:

FIGURA 3.4.1.6. *Actividad TIMSS*. (IEA, 2003b)

El Registro Algebraico aparece en aquellas actividades que hacen referencia a la proporcionalidad, empleándose como método para encontrar la solución de manera eficaz, pasando por alto sus posibilidades de coordinación con el resto de Registros Semióticos en lo que a expresar relaciones y propiedades numéricas de carácter general se refiere.

L14. The table shows the values of x and y, where x is proportional to y.

x	3	6	P
y	7	Q	35

What are the values of P and Q ?

A. $P = 14$ and $Q = 31$

B. $P = 10$ and $Q = 14$

C. $P = 10$ and $Q = 31$

D. $P = 14$ and $Q = 15$

E. $P = 15$ and $Q = 14$

FIGURA 3.4.1.7. *Actividad TIMSS*. (IEA, 2003b)

No existen actividades que se centren en la coordinación y representación de cantidades y números a través de la geometría y sus elementos, lo que facilitaría la evaluación del desarrollo de las capacidades numéricas, la familiarización con distintos modelos y relación entre ellos, y expresión de propiedades y relaciones de este bloque de contenidos.

BLOQUE: GEOMETRÍA

TABLA 3.4.1.6. *Coordinación entre registros Bloque de Geometría*

	Coordinación de Registros	Nº de Ítems
TIMSS 1995	RLN - RN	5
	RGeo - RN	3
	RGeo - RA - RN	2
	RFi - RA -RN	2
	RLN - RA - RN	1
	RLN - RGr	1
	RN - RA	1
	RGr -RN	1
	RT - RLN	1
TIMSS 1999	RGeo - RN	3
	RLN - RGr	2
	RFi - RA -RN	2
	RT - RLN	1
	RLN - RN	1
	RGeo - RA - RN	1
	RGr -RN	1
TIMSS 2003	RLN - RN	5
	RGeo - RN	4
	RGeo - RA - RN	2
	RGeo - RLN	2
	RFi - RN	2
	RLN - RA - RN	1
	RLN - RGeo - RN	1
	RN - RA	1
	RGr -RN	1
TIMSS 2007	RGeo - RN	7
	RLN - RA - RN	2
	RGr -RN	2
	RFi - RA -RN	2
	RGeo - RA - RN	1
	RFi - RT -RN	1
	RLN - RGeo	1

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a

En primer lugar hay que destacar como la mayoría de los ítems únicamente precisan realizar la coordinación con el Registro Numérico para resolverlos satisfactoriamente. Las conversiones que se pueden efectuar se dan de manera directa, sin necesidad de movilizar aquellos aspectos que pertenecen al rango cognitivo de la coordinación entre registros en geometría, como puede ser el cambio de anclaje. A partir de la información dada, ya sea a través de un enunciado que describa ciertas propiedades geométricas (Registro de la Lengua Natural), o a partir de algún polígono o figura geométrica conocida donde con un simple golpe de vista, y sin necesidad de poner en funcionamiento destrezas propias de este campo (descomponer, combinar, analizar, visualizar con profundidad, etc.) se obtienen los datos que se requieren para resolver el problema, el estudiante encuentra la solución mediante operaciones de cálculo numérico, produciéndose cierta sustitución de saberes:

The line *m* is a line of symmetry for figure *ABCDE*.

The measure of angle *BCD* is

A. 30°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

E. 110°

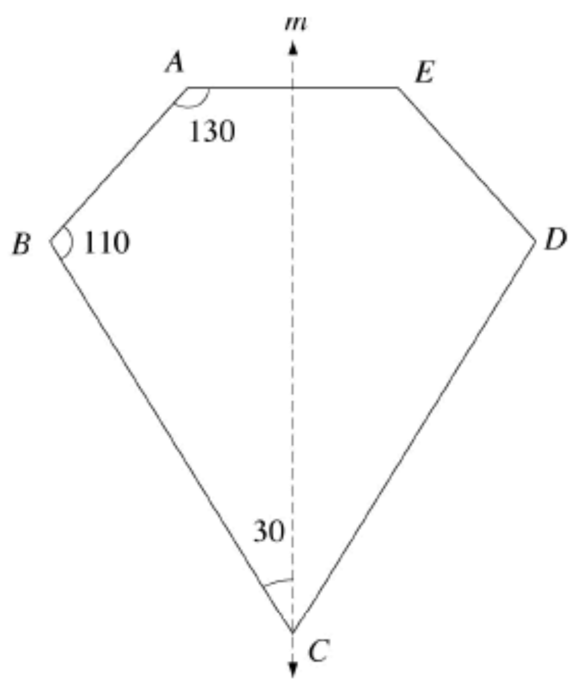


FIGURA 3.4.1.8. *Actividades TIMSS.* (IEA, 1999b)

L15. In a quadrilateral, two of the angles each have a measure of 110°, and the measure of a third angle is 90°. What is the measure of the remaining angle?

A. 50°

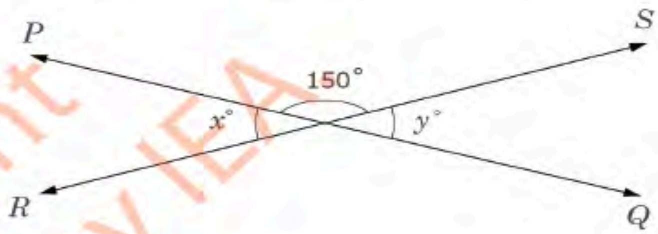
B. 90°

C. 130°

D. 140°

E. None of the above

In the figure, PQ and RS are intersecting straight lines.



What is the value of $x + y$?

(A) 15

(B) 30

(C) 60

(D) 180

(E) 300

FIGURA 3.4.1.9. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

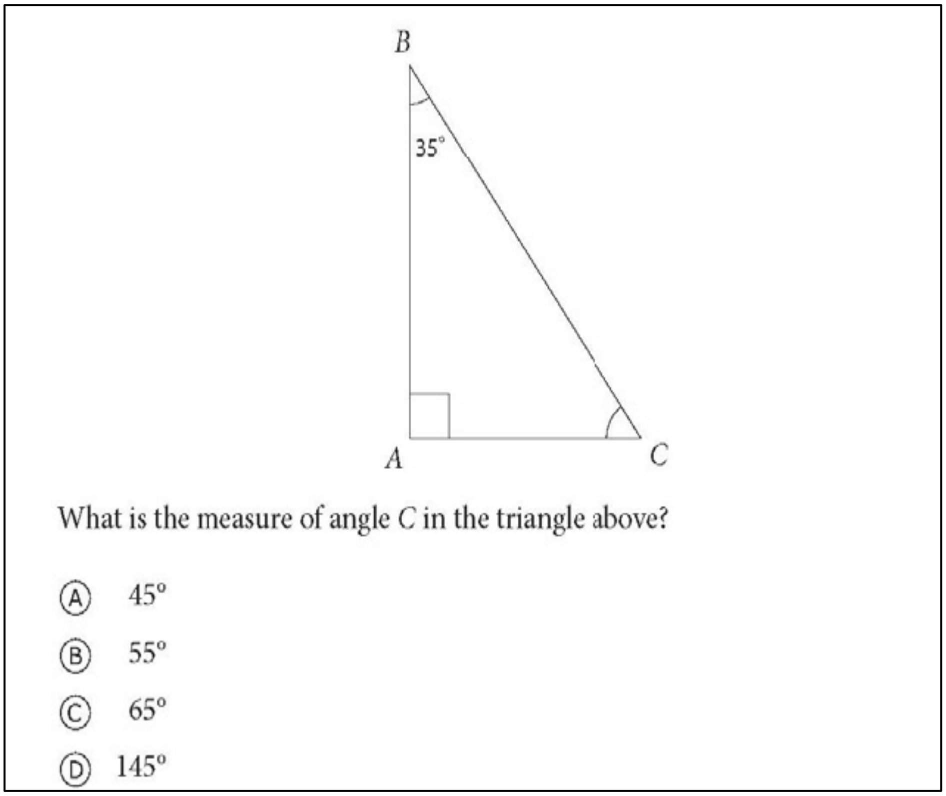


FIGURA 3.4.1.10. *Actividad TIMSS*. (IEA, 1999b)

El Registro Gráfico aparecen, de manera exclusiva, en aquellas actividades relacionadas con la localización y representación de coordenadas y puntos, ya sea en el plano cartesiano o en la recta numérica, y por lo tanto en actividades donde tiene lugar, nuevamente, la coordinación con el Registro Numérico:

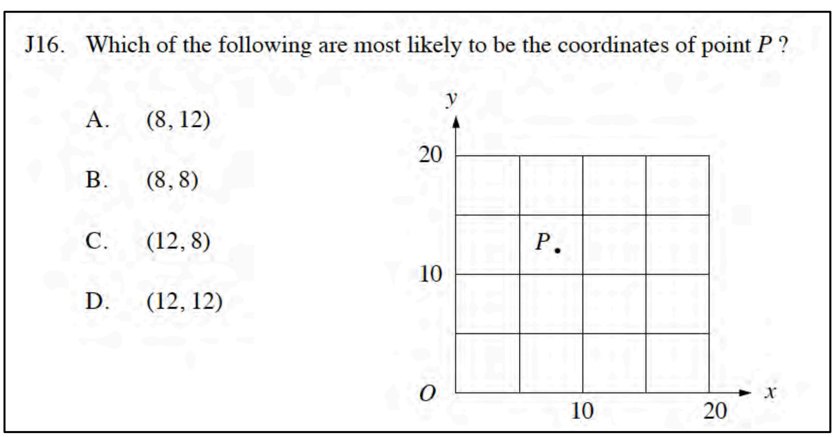


FIGURA 3.4.1.11. *Actividad TIMSS*. (IEA, 1995b)

N12. Point X (not shown) on the number line is 5 units from point R and 3 units from point Q.

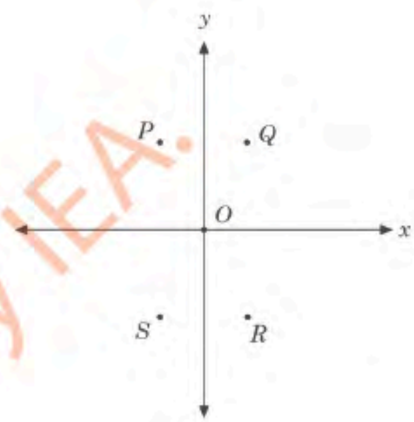
Where is point X located?

A. Between O and P

B. Between P and Q

C. Between Q and R

D. To the right of R



In the coordinate plane above, which point could have coordinates (2,–4)?

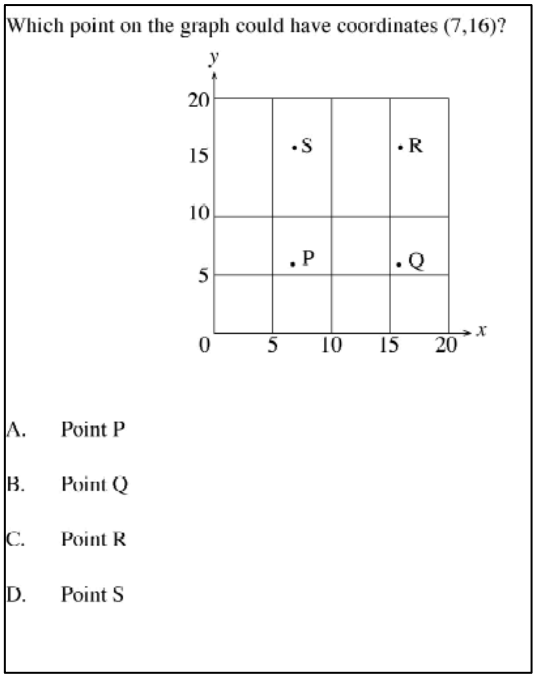
(A) P

(B) Q

(C) R

(D) S

FIGURA 3.4.1.12. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2003b, 2007b)



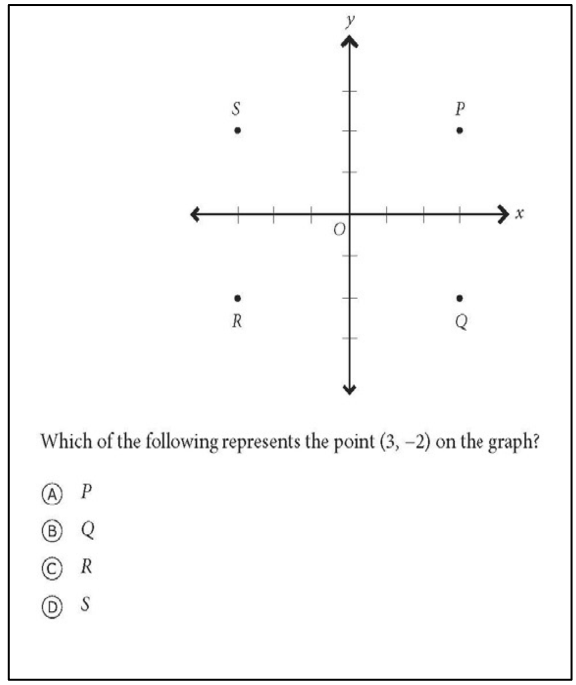


FIGURA 3.4.1.13. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b)

Se puede identificar una carencia en el tratamiento del significado y comprensión tanto de la noción de medida de magnitudes como del sentido, utilidad y manejo de las unidades de medida, en aquellas actividades cuyo foco de atención está puesto en la medición geométrica, lo que se traduce en una falsa coordinación entre registros semióticos, pues no es necesario establecer conexiones, ni generar otros conocimientos o resultados que pueden ser transferidos o generalizados, a partir de la identificación y relación de las unidades significantes de cada sistema de representación.

Esto se observa en tareas en las que, para encontrar la solución, simplemente es necesario un cambio de unidades y la realización de una operación básica (Registro Numérico) a partir de los datos dados mediante el Registro de la Lengua Natural, en tareas en las que se pone el énfasis en el trabajo directo con fórmulas (Registro Algebraico), y en tareas donde se utiliza el Registro Figural como soporte para indicar medidas o ejemplificar y no como un registro en sí mismo:

I3. The number of 750 mL bottles that can be filled from 600 L of water is

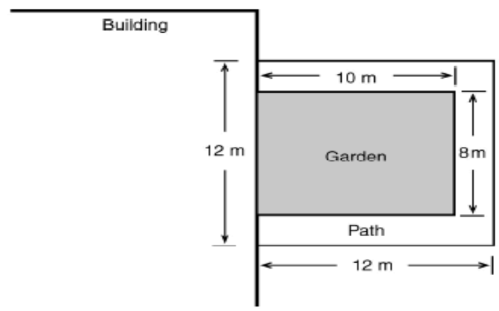
A. 8

B. 80

C. 800

D. 8000

A rectangular garden that is next to a building has a path around the other three sides, as shown.



What is the area of the path?

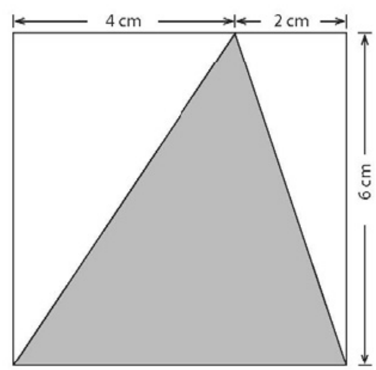
A. 144 m^2

B. 64 m^2

C. 44 m^2

D. 16 m^2

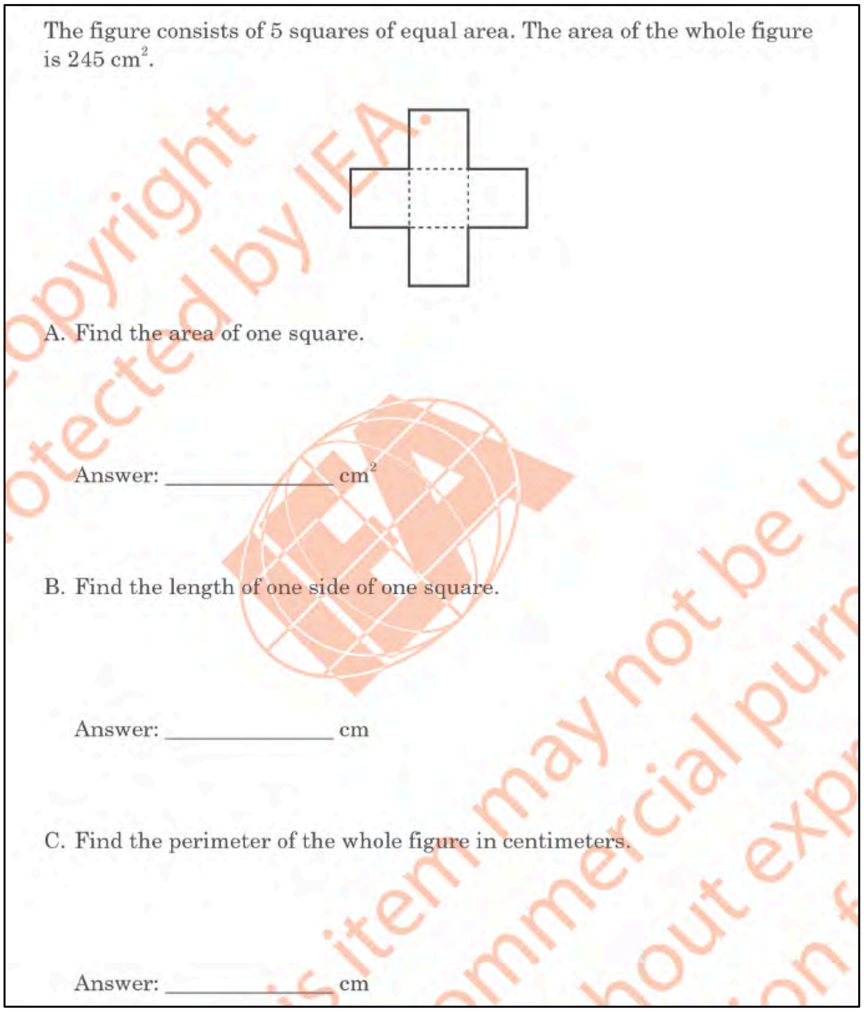
The figure shows a shaded triangle inside a square.



What is the area of the shaded triangle?

Answer: ________________

FIGURA 3.4.1.14. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b)



The figure consists of 5 squares of equal area. The area of the whole figure is 245 cm^2.

A. Find the area of one square.

Answer: ______________ cm^2

B. Find the length of one side of one square.

Answer: ______________ cm

C. Find the perimeter of the whole figure in centimeters.

Answer: ______________ cm

FIGURA 3.4.1.15. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

Luego, estos ítems no facilitan la evaluación de posibles errores, falta de recursos y lagunas cognitivas, que pueden darse en los alumnos, asociados a la tripleta geometría-medida magnitudes-conversión de representaciones, pues el uso de ciertos “instrumentos didácticos” como la escalera para la conversión de unidades, el empleo abusivo de fórmulas para encontrar superficies de polígonos, la utilización de algoritmos de cálculo sin comprensión, el uso de figuras y tablas como herramientas para introducir y presentar datos, etc., en que parecen apoyarse las tareas de esta bloque, son potencialmente productoras de obstáculos, en la medida que impiden que el alumno construya y resuelva las actividades dando sentido a los conceptos.

BLOQUE: ALGEBRA

TABLA 3.4.1.7. *Coordinación entre registros Bloque de Álgebra*

	Coordinación de Registros	Nº de Ítems
TIMSS 1995	RLN - RA	5
	RN - RA	1
	RT - RA - RN	1
	TGeo - RT – RA - RN	1
TIMSS 1999	RLN- RA	7
	RT – RA - RN	4
	RLN - RA - RN	3
	TFi - RT – RA - RN	1
TIMSS 2003	RLN - RA	4
	RFi - RA - RN	2
	TFi - RT – RA - RN	1
	RLN - RA - RN	1
	RGr - RN	1
TIMSS 2007	RLN - RA	2
	RLN - RA- RN	1
	TGeo - RT – RA - RN	1
	RFi - RA - RN	1
	RT- RA	1

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a

En los ítems de este bloque se evidencian dos fenómenos que se dan a menudo en la enseñanza-aprendizaje del álgebra y que ya de detectaron en los manuales escolares. El primero de ellos es el relacionado con la algebrización de la aritmética, pues muchos de los problemas se pueden resolver sin necesidad de recurrir al álgebra, por lo que estos ítems no son fiables para diagnosticar si los alumnos son capaces de realizar la conversión al álgebra:

R11. A group of students has a total of 29 pencils and everyone has at least one pencil. Six students have 1 pencil each, 5 students have 3, and the rest have 2. How many students have only 2 pencils?

A. 4

B. 6

C. 8

D. 9

A club has 86 members, and there are 14 more girls than boys. How many boys and how many girls are members of the club?

Show your work.

The numbers in the sequence 7, 11, 15, 19, 23, ... increase by four. The numbers in the sequence 1, 10, 19, 28, 37, ... increase by nine. The number 19 is in both sequences. If the two sequences are continued, what is the next number that is in BOTH the first and the second sequences?

Answer: ____________

Joe knows that a pen costs 1 zed more than a pencil.
His friend bought 2 pens and 3 pencils for 17 zeds.
How many zeds will Joe need to buy 1 pen and 2 pencils?

Show your work.

FIGURA 3.4.1.16. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)

El segundo fenómeno es el concerniente a las actividades que denominamos de traducción, es decir, a aquellas tareas en las que el problema dado en el Registro de la Lengua Natural no se acompaña de ninguna otra representación en otro registro y hay que dar la expresión algebraica correspondiente y que desde el punto de vista de la Teoría de Duval, tampoco sirven para valorar la conversión entre tales registros semióticos:

Q1. Juan has 5 fewer hats than Maria, and Clarissa has 3 times as many hats as Juan. If Maria has n hats, which of these represents the number of hats that Clarissa has?

A. $5 - 3n$

B. $3n$

C. $n - 5$

D. $3n - 5$

E. $3(n - 5)$

n is a number. When n is multiplied by 7, and 6 is then added, the result is 41. Which of these equations represents this relation?

A. $7n + 6 = 41$

B. $7n \pm 6 = 41$

C. $7n \times 6 = 41$

D. $7(n + 6) = 41$

Carla paid x zeds for 3 cartons of juice. What is the price in zeds of 1 carton of juice?

Ⓐ $\frac{x}{3}$

Ⓑ $\frac{3}{x}$

Ⓒ $3 + x$

Ⓓ $3x$

The number of jackets that Haley has is 3 more than the number Anna has. If n is the number of jackets Haley has, how many jackets does Anna have in terms of n?

Ⓐ $n - 3$

Ⓑ $n + 3$

Ⓒ $3 - n$

Ⓓ $3n$

FIGURA 3.4.1.17. *Actividades TIMSS.* (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)

Hay que destacar la presencia de dos tipos de actividades que requieren de una verdadera coordinación y conversión entre registros en lo que a la enseñanza del algebra se refiere y que, por lo tanto, servirían para detectar aquellas carencias relacionadas con los sistemas de representación que hacen referencia a un mismo concepto algebraico.

La primera de ellas está relacionada con la búsqueda de la dependencia entre variables, cuya relación viene dada a través del Registro Tabular a partir del cual los estudiantes deberán encontrar la expresión algebraica que les permita resolver la actividad:

J18. The table represents a relation between x and y.

What is the missing number in the table?

x	y
1	1
2	?
4	7
7	13

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6

The table represents a relation between x and y.

What is the missing number in the table?

x	y
2	5
3	7
4	?
7	15

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

E. 13

The table below shows a relation between x and y.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Which of the following equations expresses this relation?

(A) $y = x + 4$

(B) $y = x + 1$

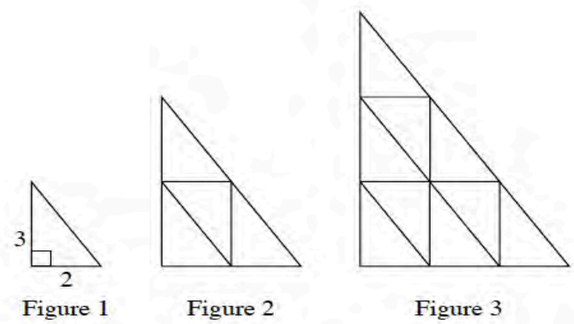
(C) $y = 2x - 1$

(D) $y = 3x - 2$

FIGURA 3.4.1.18. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1995b, 1999b, 2003b)

Las tareas basadas en comprender, reconocer y expandir patrones y relaciones, hallar términos tanto en patrones numéricos como geométricos, relacionar y hacer corresponder patrones numéricos y geométricos, encontrar la regla de formación de los mismos, etc., componen las segundas. Este tipo de reactivos suponen una aproximación al trabajo algebraico apoyándose en la conversión y puesta en funcionamiento de múltiples registros semióticos (**RFi, TGeo, RT, RA, RN**):

S1. Here is a sequence of three similar triangles. All of the small triangles are congruent.



a. Complete the chart by finding how many small triangles make up each figure.

Figure	Number of small triangles
1	1
2	
3	

b. The sequence of similar triangles is extended to the 8th Figure. How many small triangles would be needed for Figure 8?

FIGURA 3.4.1.19. *Actividad TIMSS*. (IEA, 1995b)

The figures show four sets consisting of circles.

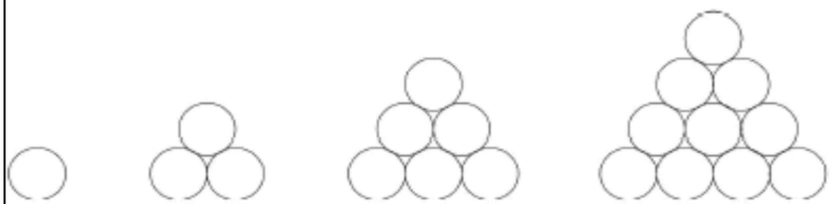


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

a) Complete the table below. First, fill in how many circles make up Figure 4. Then, find the number of circles that would be needed for the 5th figure if the sequence of figures is extended.

Figure	**Number of circles**
1	1
2	3
3	6
4	
5	

b) The sequence of figures is extended to the 7th figure. How many circles would be needed for Figure 7?

Answer: ____________________

c) The 50th figure in the sequence contains 1275 circles. Determine the number of circles in the 51st figure. Without drawing the 51st figure, explain or show how you arrived at your answer.

Matchsticks are arranged as shown in the figures.

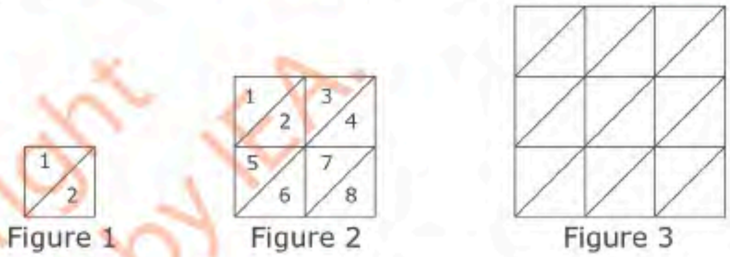
Figure 1 Figure 2 Figure 3

If the pattern is continued, how many matchsticks would be used to make Figure 10?

Ⓐ 30
Ⓑ 33
Ⓒ 36
Ⓓ 39
Ⓔ 42

FIGURA 3.4.1.20. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2003b, 2007b)

The three figures below are divided into small congruent triangles.



A. Complete the table below. First, fill in how many small triangles make up Figure 3. Then, find the number of small triangles that would be needed for the 4th figure if the sequence of figures is extended.

Figure	Number of Small Triangles
1	2
2	8
3	
4	

B. The sequence of figures is extended to the 7th figure. How many small triangles would be needed for Figure 7?

Answer: _______________

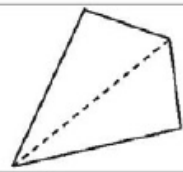
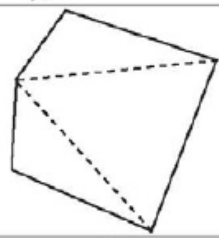
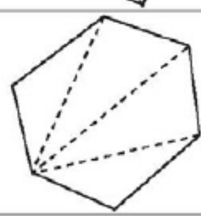
C. The sequence of figures is extended to the 50th figure. Explain a way to find the number of small triangles in the 50th figure that does not involve drawing it and counting the number of triangles.

FIGURA 3.4.1.21. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

Interior Angles

Jackson was investigating the properties of polygons. Jackson made up the table below to see if he could find a connection between sides and angles.

A. Complete the table by filling in the blank spaces.

Polygon	Number of Sides	Number of Triangles	Sum of Interior Angles
	3	1	1 × 180°
	___	___	___ × 180°
	___	___	___ × 180°
	___	___	___ × 180°

B. Put the correct number into the box.

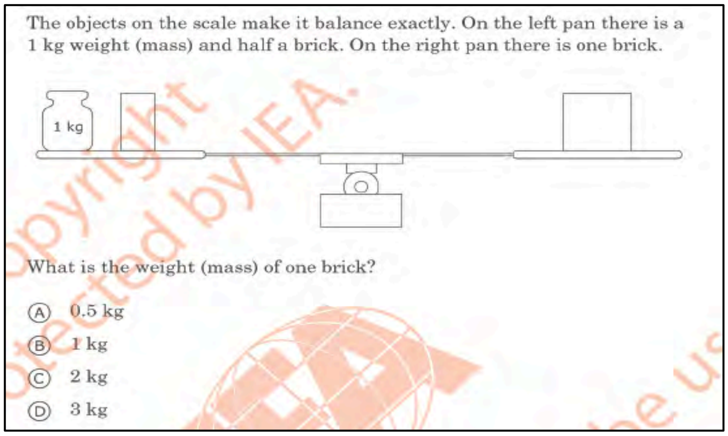
The sum of the interior angles of a polygon with 10 sides = $\boxed{}$ × 180°

C. Jackson could see a pattern and was able to write an expression using *n* that is true for any polygon. Complete what he wrote.

Sum of the interior angles of a polygon with *n* sides = ______ × 180°

FIGURA 3.4.1.22. *Actividades TIMSS.* (IEA, 2003b)

Por otro lado, también encontramos actividades, concretamente en TIMSS 2003, en las que el empleo del algebra y el establecimiento de algún tipo de vinculo o relación con el, sobresale por su ausencia, pues solamente con la observación se llega a la solución del ítem, sin necesidad de movilizar aspectos cognitivos relacionados con la conversión de registros:



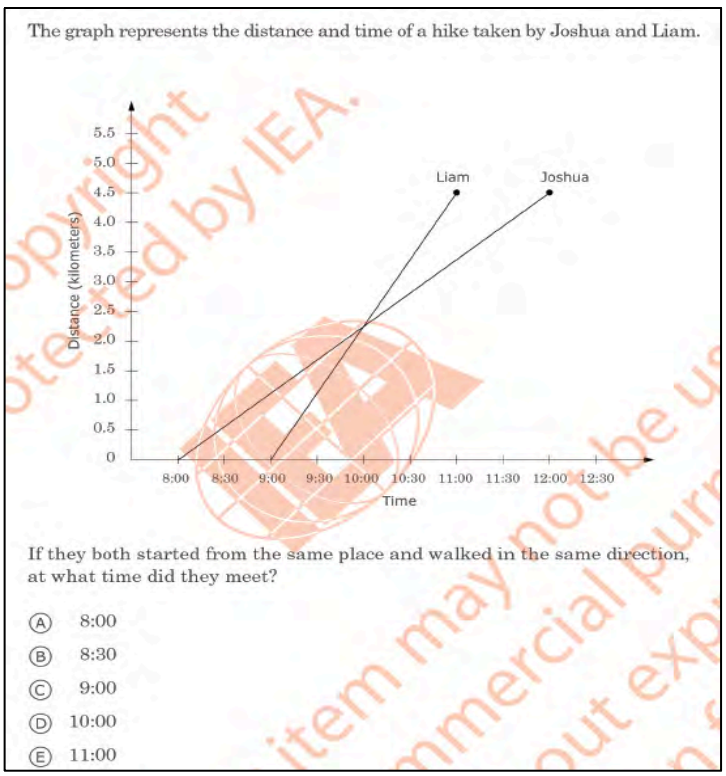


FIGURA 3.4.1.23. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

BLOQUE: DATOS

TABLA 3.4.1.8. *Coordinación entre registros Bloque de Datos*

	Coordinación de Registros	Nº de Ítems
TIMSS 1995	RGr - RN	3
	RT - RFi	2
	RLN - RN	2
	RT - RLN	1
	RFi - RN	1
TIMSS 1999	RGr - RN	3
	RLN - RN	2
	RGr - RLN	2
	RT - RFi	1
	RFi - RN	1
TIMSS 2003	RGr - RN	2
	RLN - RN	2
	RLN - RT - RN	2
	RT - RLN	1
	RGr - RLN	1
	RT - RN	1
TIMSS 2007	RT - RLN	4
	RGr - RLN	3
	RLN - RN	2
	RGr - RN	2
	RT - RN	1
	RT - RGr	1
	RT - RFi - RGr - RN	1
	RLN - RGr - RN	1

Fuente: Elaboración propia a partir de IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a

Los reactivos de este bloque de contenidos presentan una fuerte tendencia a la conversión hacia el Registro de la Lengua Natural y hacia el Registro Numérico. Esto de debe a que se tratan de tareas de simple descripción y recopilación de información, en donde a partir de la elemental observación o lectura de una tabla, grafo o gráfica, y sin necesidad ni obligación de establecer conexiones entre la representación inicial del objeto, el objeto en sí mismo y la nueva representación del objeto de conocimiento, se resuelve el ítem de manera directa:

L10. This chart shows temperature readings made at different times on four days.

TEMPERATURES					
	6 a.m.	9 a.m.	Noon	3 p.m.	8 p.m.
Monday	15°	17°	20°	21°	19°
Tuesday	15°	15°	15°	10°	9°
Wednesday	8°	10°	14°	13°	15°
Thursday	8°	11°	14°	17°	20°

When was the highest temperature recorded?

A. Noon on Monday

B. 3 p.m. on Monday

C. Noon on Tuesday

D. 3 p.m. on Wednesday

The table shows scores for a class on a 10-point test.

Test Score	Tally	Frequency
4	/	1
5	///	3
6	///// /	6
7	//	2
8	////	4
9	///	3
10	/	1

How many in the class made a score greater than 7?

Ⓐ 2

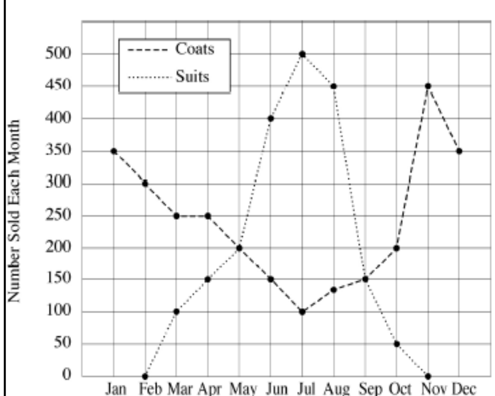
Ⓑ 8

Ⓒ 10

Ⓓ 12

Ⓔ 20

This graph shows the number of suits and coats sold each month.



According to the information in the graph, during which two-month period does the greatest increase in coat sales occur?

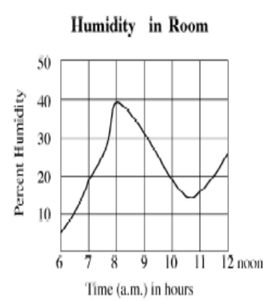
A. December - January

B. May - June

C. June - July

D. October - November

The graph below shows the humidity in a room as recorded on a certain morning.



On the morning shown in the graph, how many times between 6 a.m. and 12 noon was the humidity exactly 20 percent?

A. One

B. Two

C. Three

D. Four

FIGURA 3.4.1.24. *Actividades TIMSS.* (IEA, 1995b, 1999b, 2003b, 2007b)

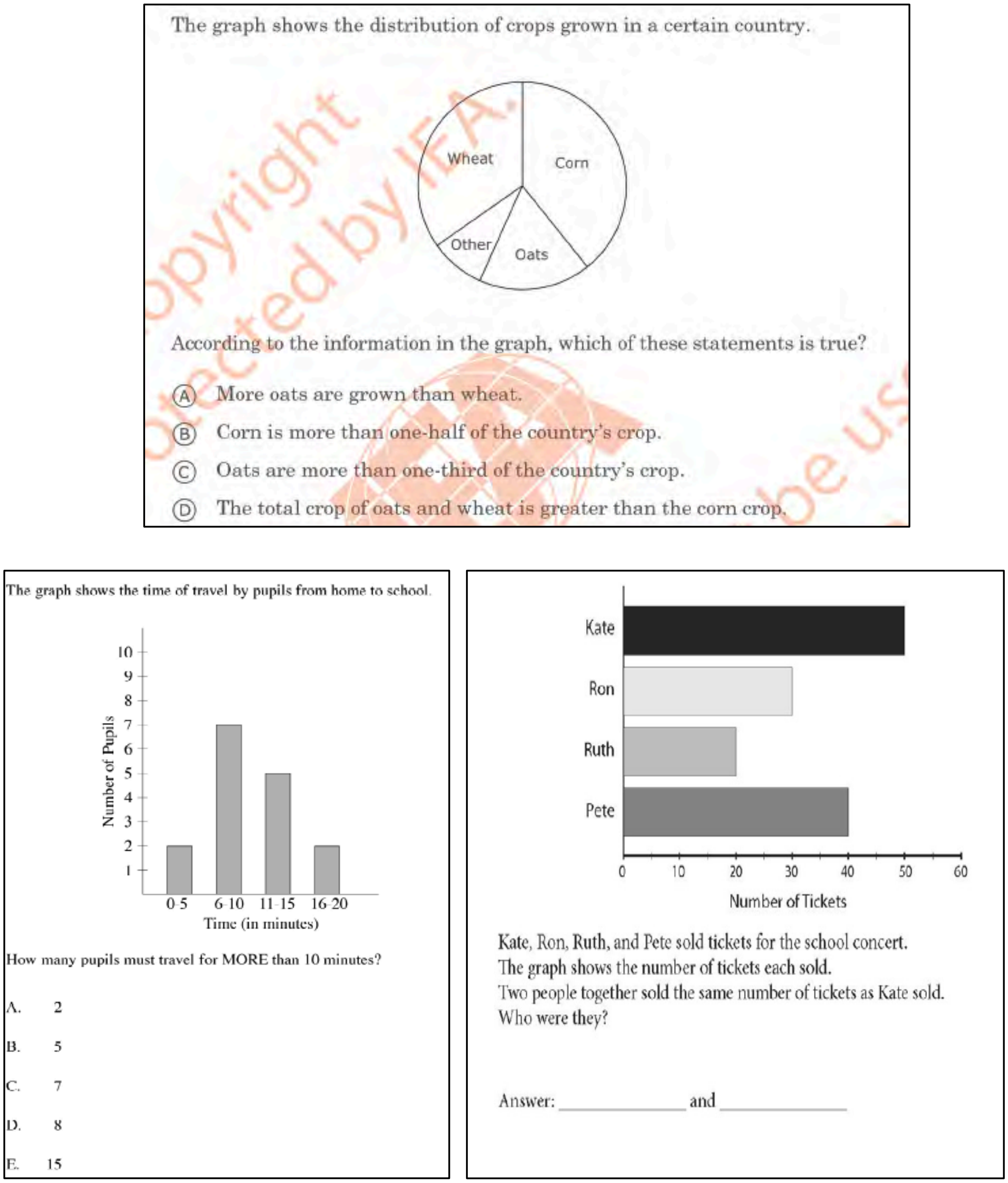


FIGURA 3.4.1.25. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1999b, 2003b, 2007b)

Como se puede apreciar en las actividades anteriores, el Registro Tabular y el Registro Gráfico se emplean fundamentalmente como herramienta de recogida y visualización de información, pasando por alto el establecimiento de relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ellos se recogen, así como el descubrimiento de las diferentes propiedades y características del objeto de conocimiento representado. Tales Registros son utilizados principalmente con fines comunicativos, sin tener en cuenta el papel que juegan en el desarrollo de la actividad matemática en sí misma.

En contraposición, y en menor proporción pues todos aparecen en TIMSS 2007, el bloque de datos cuenta con ítems que sí buscan evaluar las destrezas que han desarrollado los estudiantes para representar, identificar y extraer conclusiones a partir de la coordinación entre gráficos, tablas, figuras, relacionándolos a su vez con el Registro Numérico y el Registro de la Lengua natural, pues dichas conversiones semióticas llevan asociadas cambios sustanciales de las descripciones que se facilitaban de partida, dando un nuevo sentido al objeto representado:

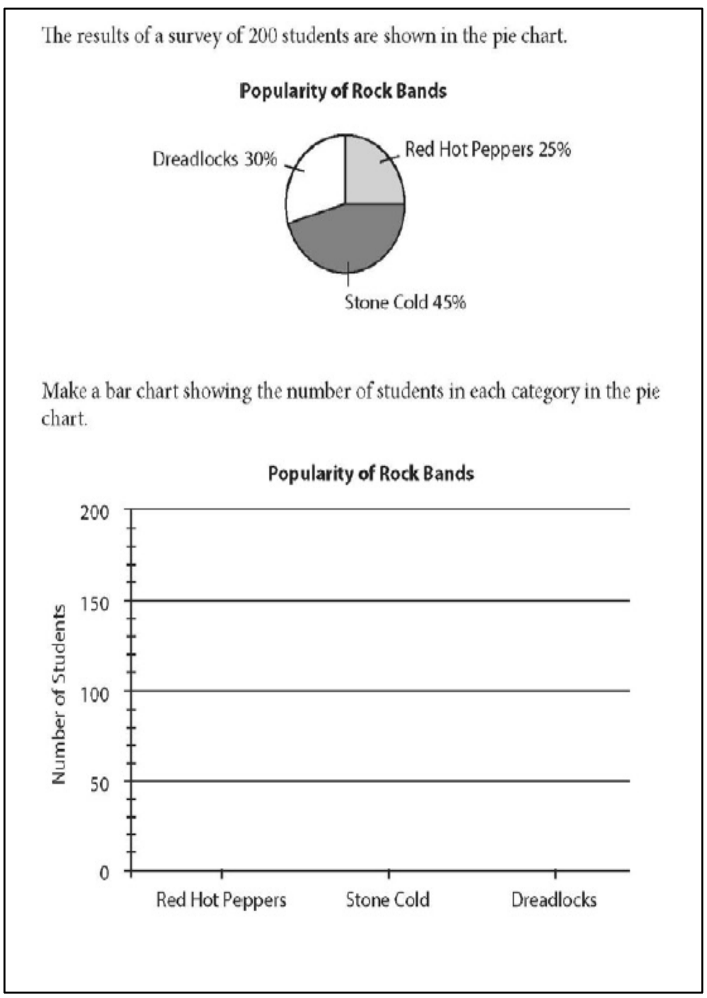
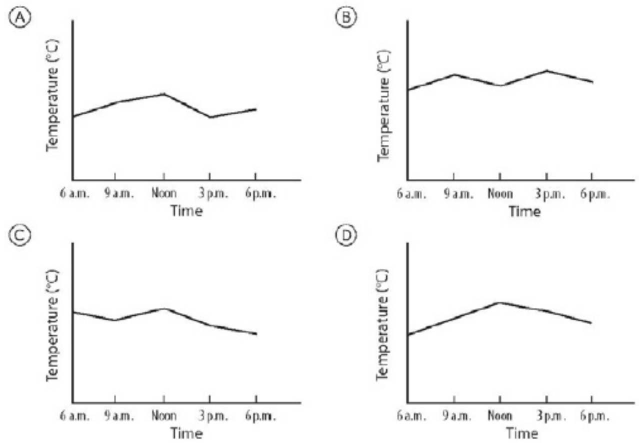


FIGURA 3.4.1.26. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

The table shows the temperatures at various times on a certain day.

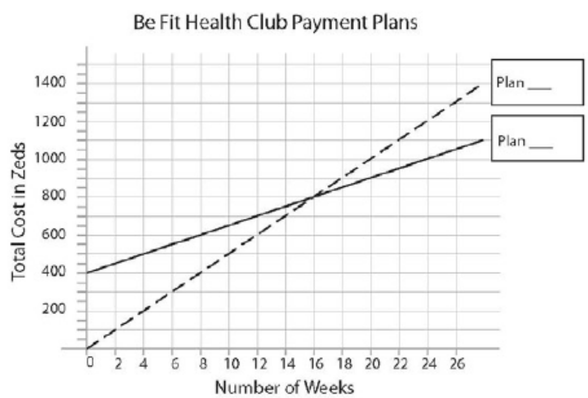
Time	6 a.m.	9 a.m.	Noon	3 p.m.	6 p.m.
Temperature °C	12	17	14	18	15

A graph, without a temperature scale, is drawn. Of the following, which could be the graph that shows the information given in the table?



The Be Fit Health Club offers two different payment plans.
Plan A has an initial fee of 400 zeds and a weekly fee of 25 zeds.
Plan B does not have an initial fee but has a weekly fee of 50 zeds.

The figure below compares the cost for Plan A and Plan B.



A. Label the line that represents the cost for Plan A, and label the line that represents the cost for Plan B.

B. At which week would you have paid the same amount for Plan A and Plan B?

C. At 24 weeks, what is the difference in total cost between the two plans?

FIGURA 3.4.1.27. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

Del mismo modo, aquellas actividades en las que entra en juego el Registro Figural, carecen de funcionalidad y sentido desde el plano de la conversión de registros, pues como se evidencia en las actividades que aparecen a continuación, son irrelevantes en cuanto al diagnóstico y evaluación de los procesos de conversión de representaciones para la conceptualización que se desarrolla en los estudiantes respecto a algún contenido especifico de este bloque:

J13. The tab le shows the number of students in the 7th and 8th grades in a given school.

Grade	Number of Students
7	60
8	55

Complete the Grade 8 row in the pictograph below to represent the number of students in each grade.

One ☺ represents 10 students

Grade 7	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
Grade 8	

P17. This table shows temperatures at various times during the week.

TEMPERATURES					
	6 a.m.	9 a.m.	Noon	3 p.m.	8 p.m.
Monday	15°	17°	20°	21°	19°
Tuesday	15°	15°	15°	10°	9°
Wednesday	8°	10°	14°	13°	15°
Thursday	8°	11°	14°	17°	20°

Which thermometer shows the temperature at 8 p.m. on Monday?

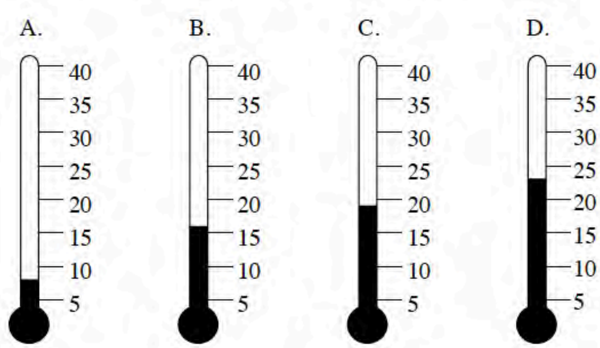
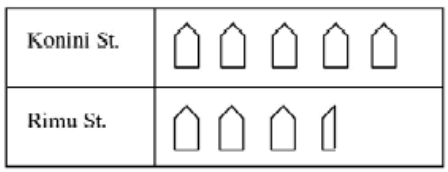


FIGURA 3.4.1.28. *Actividades TIMSS.* (IEA, 1995b)

The table shows the number of houses on two streets of a town, Konini Street and Rimu Street.

Street	Number of Houses
Konini	30
Rimu	21

The pictograph below represents the number of houses in each street.



How many houses does one  represent?

Answer: ____________________

FIGURA 3.4.1.29. *Actividades TIMSS*. (IEA, 2007b)

A partir del análisis efectuado, podemos concluir que existe un salto considerable entre lo que TIMSS pretende evaluar, en lo que ha destrezas, habilidades y capacidades cognitivas relacionadas con la representación se refiere, y lo que realmente se evalúa en los ítems que componen esta evaluación de diagnóstico, pues en los reactivos liberados no incluyen entre sus propósitos el valorar, detectar y diagnosticar las posibles carencias formativas que poseen los estudiantes de cara a la coordinación de los múltiples Registros Semióticos que se pueden utilizar en la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de cada área.

3.5. Evaluación General de Diagnóstico del INCE

A nivel nacional, entre los principios del sistema educativo español, recogidos en la LOE y LOMCE en su *artículo 1. Principios,* están los de la evaluación y la cooperación de las administraciones educativas (MEC, 2006, 2013):

> El sistema educativo español, configurado de acuerdo con los valores de la Constitución y asentado en el respeto a los derechos y libertades reconocidos en ella, se inspira en los siguientes principios:
>
> ñ) La evaluación del conjunto del sistema educativo, tanto en su programación y organización y en los procesos de enseñanza y aprendizaje como en sus resultados;
>
> o) La cooperación entre el Estado y las comunidades autónomas en la definición, aplicación y evaluación de las políticas educativas.

Con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza en nuestro país, el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) realiza de manera periódica la denominada Evaluación General de Diagnóstico (EGD), con el objetivo de contribuir al conocimiento, transformación, innovación y mejora del sistema educativo, generando el compromiso de revisión, reforma y renovación de aquellos aspectos que lo precisen en función de los resultados obtenidos, aplicando para ello medidas específicas.

Dichas evaluaciones, que se realizan en cuarto curso de Educación Primaria y en segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria, pretenden cubrir considerablemente el curriculum de Ciencias, Lengua y Matemáticas a partir de tres de las ocho competencias básicas que los estudiantes deben adquirir y manejar con soltura, pues se relacionan con contenidos curriculares que suponen conocimientos, habilidades y actitudes transferibles y útiles para hacer frente a situaciones y problemas que se presentan en la vida real: Competencia en Comunicación Lingüística, Competencia Matemática y Competencia en el Conocimiento e Interacción con el Mundo Físico.

La Competencia Matemática, viene descrita como

> (...) la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Asimismo, esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones o simulaciones de la vida cotidiana, y la puesta en marcha de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. (INCE, 2010, p. 27).

Con el objetivo de homogeneizar y buscar un esquema común con las evaluaciones internaciones, se tienen en consideración los cuatro siguientes puntos en el diseño de la EGD:

- Los marcos generales de las evaluaciones internaciones: PISA, TIMSS, etc.
- El currículo de cada área a evaluar recogidos en los Decretos de Enseñanzas Mínimas.
- Las competencias básicas definidas por la OCDE.
- La tradición curricular.

Siguiendo el esquema de los estudios internacionales de la misma índole, tres son las destrezas que se tienen en cuenta en la evaluación de esta competencia, adoptando el mismo criterio seguido por la OCDE en la Evaluación PISA: Reproducción, Conexión y reflexión.

A su vez, las mencionadas destrezas se dividen en seis procesos cognitivos, dos por cada una de ellas, permitiendo el dominio y control de estas y las cuales se organizan según se presentan en la siguiente tabla:

TABLA 3.5.1. *Destrezas*

	Reproducción		Conexión		Reflexión	
Definición	*Reproducción de los conocimientos practicados, reconocimiento de tipos de procesos y problemas matemáticos familiares y realización de operaciones habituales. Realización de los ejercicios más sencillos.*		*Interpretación y establecimiento de interrelaciones en diversas situaciones en contextos relativamente conocidos. Realización de problemas de dificultad.*		*Implican perspicacia y reflexión por parte del alumno/a, así como creatividad a la hora de identificar los elementos matemáticos de un problema y establecer interrelaciones.*	
Proceso	**Acceso e identificación**	**Comprensión**	**Aplicación**	**Análisis y valoración**	**Síntesis y creación**	**Juicio y valoración**
Descripción	Recordar y reconocer los términos, los hechos, los conceptos elementales de un ámbito de conocimiento y reproducir fórmulas establecidas.	Captar el sentido e intencionalidad de textos, de lenguajes específicos y códigos relacionales e interpretarlos para resolver problemas.	Seleccionar, transferir y aplicar información para resolver problemas con cierto grado de abstracción e intervenir con acierto en situaciones nuevas.	Examinar y fragmentar la información en partes, encontrar causas y motivos, realizar inferencias y encontrar evidencias que apoyen generalizaciones.	Compilar información y relacionarla de manera diferente, establecer nuevos patrones, descubrir soluciones alternativas.	Formular juicios con criterio propio, cuestionar tópicos y exponer y sustentar opiniones. En otro orden se asociaría a acciones de planificación compleja, de reglamentación y de negociación.
Acción	Nombrar, definir, encontrar, mostrar, imitar, deletrear, listar, contar, recordar, reconocer, localizar, reproducir.	Explicar, ilustrar, extractar, resumir, completar, traducir a otros términos, aplicar rutinas, seleccionar, escoger.	Clasificar, resolver problemas sencillos, construir, aplicar, escoger, realizar, resolver, desarrollar, entrevistar, organizar, enlazar.	Comparar, contrastar, demostrar, experimentar, planear, resolver problemas complejos, Analizar, simplificar, relacionar, inferir, concluir.	Combinar, diseñar, imaginar, inventar, planificar, predecir, proponer, adaptar, estimar.	Criticar, concluir, determinar, juzgar, recomendar, establecer criterios y/o límites.

Fuente: elaboración propia a partir de INCE, 2010, p.28

Como podemos observar, según aparecen descritas las destrezas que se pretenden evaluar, la EGD no parece considerar la recogida y tratamiento de información sobre el grado de coordinación y utilización de representaciones por parte del alumnado con el objetivo de conocer, pronosticar y tomar decisiones que favorezcan la mejora de los procesos y desarrollo de las habilidades y capacidades que se ponen en funcionamiento al tener que emplear, de manera totalmente necesaria, registros semióticos en el trabajo matemático.

En ningún momento se hace alusión a términos, descripciones o acciones relacionadas con la operación de conversión entre registros, por lo que no se podrá valorar el nivel de adquisición de técnicas, métodos, niveles de razonamiento y demás aspectos que forman parte de la misma y que en ningún caso deberían quedarse sin consolidar, pues las representaciones y la interacción entre ellas es un instrumento indispensable en el aprendizaje de las matemáticas.

Igualmente, tampoco se podrán identificar ni detectar las posibles dificultades que presenten los estudiantes en relación a dichos aspectos, de modo que el establecimiento de medidas y programas específicos para reforzarlos serán pasados por alto.

El hecho de que las competencias básicas formen parte del currículo español, dan lugar a que en la EGD exista un mayor peso curricular que en las evaluaciones internacionales, teniendo en cuenta los objetivos, contenidos, y criterios de evaluación de cada área en el diseño de las pruebas, evitando, así, una ruptura entre las competencias y los currícula.

En el caso concreto de la evaluación de matemáticas, se han considerado los mismos cinco bloques de contenidos establecidos en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2007), constituyendo los bloques que forman parte del marco de la evaluación general de diagnóstico, jugando un papel fundamental a la hora de garantizar una aptitud y desempeño adecuado de cara a la competencia matemática, quedando como siguen: *Números, Álgebra, Geometría, Funciones y Gráficas, y Estadística y Probabilidad.* Estos bloques de contenidos aparecen relacionados en el marco teórico de la EGD con las destrezas, los procesos en que se dividen cada una de ellas y los criterios de evaluación para la adquisición de la competencia matemática, como aparecen en los siguientes cuadros:

TABLA 3.5.2. *Bloque de Números*

Reproducción	Acceso e identificación	*• Utilizar números naturales, enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos para recoger información.* *• Identificar los números y las operaciones hasta las potencias de exponente natural.*
	Comprensión	*• Utilizar números naturales, enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos para intercambiar información.* *• Emplear los números y las operaciones de manera adecuada, siendo consciente de su significado y propiedades.* *• Identificar en diferentes contextos relaciones de proporcionalidad numérica entre dos magnitudes.*
Conexión	Aplicación	*• Utilizar los números y sus operaciones y propiedades para transformar información.* *• Aplicar los cálculos numéricos a una amplia variedad de contextos.* *• Usar la calculadora para realizar operaciones.* *• Utilizar las relaciones de proporcionalidad numérica para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.* *• Utilizar diferentes estrategias (**empleo de tablas**, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) **para obtener elementos numéricos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos, en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de proporcionalidad.*** *• Utilizar en la estimación o el cálculo de medidas una precisión acorde con la situación planteada.*
	Análisis y valoración	*• Utilizarlos para resolver problemas relacionados con la vida diaria.* *• Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), utilizando distintas estrategias que permitan simplificar el cálculo con fracciones, decimales y porcentajes.*
Reflexión	Síntesis y creación	*• Resolver problemas aplicando los conocimientos.*
	Juicio y regulación	*• Valorar la adecuación del resultado al contexto.* *• Estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.*

Fuente: Elaboración propia a partir de INCE, 2010

TABLA 3.5.3. *Bloque de Álgebra*

Reproducción	Acceso e identificación	• *Identificar regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números.* • *Percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido y un criterio que permita ordenar sus elementos.*
	Comprensión	• ***Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y generalizar.*** • ***Describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números.*** • ***Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de expresión algebraica.***
Conexión	Aplicación	• *Incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.* • *Plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos.* • *Utilizar el lenguaje algebraico para calcular el valor numérico de una expresión algebraica.* • *Obtener valores a partir de las relaciones funcionales en forma algebraica.* • ***Pasar de la gráfica a la forma algebraica, para el caso de relaciones de proporcionalidad.***
	Análisis y valoración	• *Valorar la utilización de métodos de ensayo y error en la resolución de un planteamiento de ecuaciones de primer grado.* • *Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones.*
Reflexión	Síntesis y creación	• *Poner en práctica estrategias personales, como alternativa al álgebra, a la hora de plantear y resolver los problemas.*
	Juicio y regulación	• *Valorar la coherencia de los resultados.*

Fuente: Elaboración propia a partir de INCE, 2010

TABLA 3.5.4. *Bloque de Geometría*

Reproducción	Acceso e identificación	• ***Reconocer y describir figuras planas.***
	Comprensión	• *Identificar relaciones de proporcionalidad geométrica.* • *Identificar, en diferentes contextos, una relación de semejanza entre dos figuras planas.* • *Utilizar las propiedades de las figuras planas para clasificarlas. Utilizar diferentes elementos y formas geométricas.* • *Comprender los procesos de medida. Diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen. Comprender y los conceptos de longitud, superficie y volumen.*
Conexión	Aplicación	• *Aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada.* • *Utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.*
	Análisis y valoración	• *Utilizar diferentes estrategias (**empleo de tablas**, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) **para obtener elementos geométricos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos, en situaciones de la vida real en las que existan relaciones de semejanza de figuras planas.*** • *Estimar y calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos (utilizando para la estimación diferentes métodos: descomposición en figuras planas elementales, etc.).* • *Expresar el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.*
Reflexión	Síntesis y creación	• *Utilizar las relaciones de proporcionalidad geométrica para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.* • *Comprender los conceptos implicados en el proceso de estimación o cálculo y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.* • *Seleccionar la unidad adecuada para cada estimación o cálculo.*
	Juicio y regulación	

Fuente: Elaboración propia a partir de INCE, 2010

TABLA 3.5.5. *Bloque de Funciones y Gráficas*

Reproducción	Acceso e identificación	• *Identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana.*
	Comprensión	• *Identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.* ***• Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica o mediante un enunciado.*** ***• Obtener la relación de dependencia entre las variables relacionadas, y visualizarla gráficamente.***
Conexión	Aplicación	***• Organizar informaciones diversas mediante tablas y gráficas.*** • *Obtener valores a partir de las relaciones funcionales.* ***• Usar las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados.*** ***• Manejar los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información (en especial, pasar de la gráfica a la forma verbal o numérica, para el caso de relaciones de proporcionalidad).***
	Análisis y valoración	***• Interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.*** ***• Analizar una gráfica y relacionar el resultado de ese análisis con el significado de las variables representadas.***
Reflexión	Síntesis y creación	• *Extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.*
	Juicio y regulación	• *Presentar conclusiones de un pequeño trabajo de síntesis e indagación correctamente.*

Fuente: Elaboración propia a partir de INCE, 2010

TABLA 3.5.6. *Bloque de Estadística y Probabilidad*

Reproducción	Acceso e identificación	*• Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población.* *• Formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio.*
	Comprensión	*• Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios.*
Conexión	Aplicación	***• Recoger y organizar la información obtenida en tablas y gráficas.*** *• Presentar datos relevantes para responder a las preguntas planteadas en un principio.* *• Hallar valores relevantes: media, moda, valores máximo y mínimo, rango.* *• Utilizar la calculadora para la recoger y organizar los datos obtenidos.*
	Análisis y valoración	*• Utilizar los métodos estadísticos apropiados para realizar el análisis.*
Reflexión	Síntesis y creación	*• Obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos.* *• Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica.* *• Hacer predicciones razonables en procesos aleatorios a partir del análisis de regularidades en la repetición sucesiva de los mismos.*
	Juicio y regulación	

Fuente: Elaboración propia a partir de INCE, 2010

Los criterios resaltados en negro son aquellos que hacen algún tipo de alusión a la coordinación entre Registros de Representación. No se trata de criterios que se centren en un fortalecimiento del aprendizaje de la matemática favorecido por la incorporación en su enseñanza de tareas que se basen en el empleo y articulación entre diferentes representaciones, y por tanto tampoco se centran en su evaluación.

Esto causa, como consecuencia, que no sea posible emplear la EGD como herramienta de diagnóstico, análisis y estudio de aquellos fenómenos relativos a la aplicación y conjugación de los múltiples Registros Semióticos, proceso que forma parte de la naturaleza propia de la actividad matemática.

En cuanto al análisis de lo reactivos que constituyen la evaluación nacional, apenas existen ítems liberados, siendo la muestra muy poco significativa. No se pueden extraer, a partir de ellos, resultados concluyentes ni mínimamente generalizables que nos permitan desmentir o reafirmar lo que el análisis del marco teórico nos está indicando, y es que el planteamiento de la EGD implica un diagnóstico del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas del Sistema Educativo Español que enfatiza en la valoración sobre el conocimiento de los estudiantes, las competencias adquiridas y el análisis de errores de manera aisladas, cuando lo realmente necesario es realizarlas de modo más holístico, apoyándose sobre actividades que intenten poner en funcionamiento las posibles conexiones entre la representación de un objeto matemático, el objeto matemático y una nueva representación.

3.6. Conclusiones

A partir del estudio de las Evaluaciones de Diagnóstico podemos inferir, de manera general, que existe cierto interés en lo concerniente y relativo a la utilización de sistemas de representación y conversión y articulación de Registros Semióticos, pero no vas más allá de lo intuitivo y rutinario, no logrando valorar, analizar ni profundizar en los verdaderos aspectos relacionados con una coordinación correcta y significativa entre la lengua natural, un sistema de números, una expresión algebraica, una gráfica, una figura o cuerpo geométrico, una tabla, un dibujo, un esquema, etc. lo cual permite una comprensión de un concepto a un mayor nivel de abstracción.

En contradicción con los marcos teóricos en los que se sustentan las evaluaciones y su diseño, el análisis de los ítems revela una considerable influencia de la enseñanza tradicional de las matemáticas, tendiendo a evaluar competencias y procesos mecánicos, algorítmicos y automáticos, basados en el estudio repetitivo, haciendo especial hincapié en la parte operativa de la matemática, careciendo de un significado concreto para el alumno.

Así, podemos decir que en lo que a nuestro tema de estudio se refiere, las evaluaciones de diagnóstico no se centran en diagnosticar ni evaluar los siguientes aspectos:

- La coordinación de los distintos registros de representación que los alumnos pueden emplear en la resolución de las actividades propuestas.
- El reconocimiento de un objeto de estudio en diferentes registros de representación así como su habilidad para realizar la conversión entre los mismos.
- La conexión, congruencia o falta de ella, entre las unidades significantes de los registros que pueden aparecer o emplearse en la resolución de tareas.
- La destreza y flexibilidad para efectuar un cambio de registro en diferentes representaciones semióticas durante el desarrollo de estas actividades.
- Los errores que comenten los estudiantes al realizar conversiones entre los registros.

Como consecuencia, los resultados que se obtienen no facilitan información que permitan diseñar un plan de actuación y una enseñanza que intente mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, para el área de matemáticas, basado en el desarrollo de habilidades y en el planteamiento y resolución de situaciones problemáticas que favorezcan apropiarse gradualmente de las nociones matemáticas teniendo en cuenta los diversos y múltiples medios de representación que se pueden movilizar, así como las coordinaciones que necesariamente tienen que establecerse entre ellos.

4. INGENIERÍAS DIDÁCTICAS PARA EL TRABAJO CON REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Después de todos los resultados analizados y expuestos en los capítulos anteriores sobre la importancia de la utilización de diversas representaciones y su coordinación en el aprendizaje y enseñanza de las nociones matemáticas y del tratamiento que hacen las Leyes Educativas, libros de texto y evaluaciones de diagnóstico de ello, tomando en consideración las distintas fuentes didácticas, psicológicas y epistemológicas, pasamos ahora a presentar las ingenierías diseñadas para llevar a cabo en las aulas de secundaria.

Para la realización de las mismas nos enmarcamos dentro de la denominada Didáctica Fundamental, corriente francesa de origen sistémico; en particular, vamos a apoyarnos, de manera fundamental, en la Teoría de los Registros de Representación Semióticos de Raymond Duval, que nos proporcionará los estudios teóricos necesarios para abordar el tema objeto de investigación, así como en la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, de probada utilidad en el diseño de ingenierías didácticas, siguiendo rigurosamente la metodología que le es propia.

A partir de esta identificación, tratamos de producir medios de enseñanza más eficaces, más ajustados al saber-sabio y más satisfactorios, que mejoren la enseñanza de los conceptos estudiados, consiguiendo a la par mejorar la articulación entre los distintos registros de representación semióticos pretendiendo conseguir un mayor equilibrio entre los distintos aspectos y variables que intervienen en la enseñanza de conceptos matemáticos.

4.1. Simbiosis entre la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Bajo el paradigma constructivista, el verdadero aprendizaje y aprehensión de los conocimientos en matemáticas dista mucho del trabajo de memorización, mecanización, algoritmización y repetición que se desarrolla y efectúa con asiduidad dentro de las aulas.

Este hecho se contrapone con la variedad de aportaciones teóricas que tenemos desde la didáctica de las matemáticas en lo que a construcción y conceptualización de las nociones matemáticas se refiere, pues a partir de ellas podemos tener cierta idea de cómo el alumno aprende y poner en funcionamiento estrategias a través del diseño de situaciones que potencien y propicien dicho aprendizaje.

Las teorías constructivistas coinciden en que todo conocimiento surge y se forja como resultado de adaptación a unas nuevas circunstancias, pero en esta adaptación juega un papel fundamental el formato en que aparece la información, tanto la nueva como la previa, y los modelos o representaciones utilizados para referenciarla.

Según Carretero (1993), el proceso de construcción del conocimiento depende de dos aspectos:

- De la representación que se tenga de la información o la tarea a resolver.
- Del proceso de adaptación que el estudiante realice al respecto.

Según Díaz (2002),

> La construcción del conocimiento es un proceso de elaboración, en el sentido de que el alumno selecciona, organiza y transforma la información que recibe de muy diversas fuentes, estableciendo relaciones entre dicha información y sus ideas o conocimientos previos. Así, aprender un contenido quiere decir que el alumno le atribuye un significado, construye una representación mental por medio de imágenes o proporciones verbales, o bien elabora una especie de teoría o modelo mental como marco explicativo de dicho conocimiento (Díaz, 2002, p. 32).

La pregunta que debemos hacernos a continuación es, ¿cómo hacemos que los alumnos construyan mediante ese proceso de adaptación al medio, los conceptos matemáticos de una forma integral y significativa a través de las diversas fuentes que tenemos para representar la información?

A la hora de dar respuesta a esta pregunta es cuándo nuestras dos teorías de referencia, la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos, y su relación en simbiosis cobran importancia.

Como ya indicamos en el primer capítulo de esta tesis, la Teoría de Situaciones es un intento de modelización en la que el conocimiento se construye y, por tanto, el aprendizaje se produce, por adaptación al medio, es decir, por adaptación del individuo a las situaciones problemáticas encontradas con las que interactúa.

La noción de situación didáctica es más amplía que la idea de una simple actividad práctica, ya que pretende que el estudiante construya y adquiera un determinado conocimiento de manera significativa a través de la aparición de tal concepto como solución óptima del problema al que se enfrenta.

La situación viene definida como un juego en el que hay un jugador y un sistema antagonista. La primera estrategia que el jugador pone en práctica para tratar de resolver el problema que se le plantea recibe el nombre de estrategia de base, la cual está asociada a unos conocimientos previos que posee el alumno y sin los cuales no comprendería el juego. Esta estrategia no coincide con lo que se quiere enseñar, ya que el aprendizaje va a consistir, y va a mostrarse, en el cambio de estrategia, lo que implica el cambio de los conocimientos que pone en funcionamiento y la aparición de un conocimiento concreto como resultado del cambio. El profesor conseguirá estas modificaciones mediante una gestión de las variables didácticas de la situación.

Por otro lado, toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro para su comprensión.

Duval (2003) entiende por representación semiótica "la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (Duval, 1995, p. 175).

Así, como cada representación es incompleta con respecto al concepto que representa debido a que hará referencia a unas determinadas propiedades del objeto y su contenido dependerá más del registro de representación que del objeto representado, se hace necesaria la interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático que se pretende adquirir.

Gran parte de los docentes coinciden en la relevancia que tiene que los estudiantes empleen figuras, símbolos, gráficas, tablas, así como que tengan un dominio en la utilización del lenguaje natural, algebraico y numérico, a la hora de enfrentarse a las tareas matemáticas que se les plantea. Por ello, la verdadera importancia se encuentra en saber qué tipo de actividades o situaciones problemáticas hay que proponer para lograr dichos propósitos a la vez que el alumno trabaje con el propio concepto matemático que subyace en dichas representaciones.

En este sentido, es donde ambas teorías pueden apoyarse la una en la otra, no sólo para que tenga lugar en los alumnos un aprendizaje de los conceptos de manera significativa, sino para que a través de la Teoría de Situaciones Didácticas se puedan desarrollar tareas que ayuden a los alumnos a favorecer y efectuar conversiones entre los distintos registros de representación existentes, y para que a través de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, y por ende de la utilización de múltiples sistemas de representación y del papel que van a jugar como variable didáctica, los estudiantes lleguen a una conceptualización y comprensión de las nociones matemáticas de una manera más integra y completa, al tenerse que adaptar a cada una de ellas y articularlas para extraer la información que les sea más relevante en cada situación.

Esta combinación es novedosa y permitirá realizar intervenciones didácticas que no se han explorado hasta el momento.

Por este motivo, las Ingenierías Didácticas descritas y desarrolladas más adelante constan de una serie de S*ituaciones Didácticas* que persiguen la construcción y adquisición de conocimientos, atendiendo los obstáculos didácticos y epistemológicos propios de cada uno, orientadas a trabajar con distintos registros semióticos de representación, tales como lengua natural, el lenguaje algebraico, el registro de representación geométrico, la representación figural y el lenguaje gráfico, como también a la formulación de ejercitación que requiera de tratamientos y conversiones. En muchos casos, los obstáculos que se generan a partir de las dificultades en el aprendizaje conceptual de ciertas nociones matemáticas son remontables a través de la coordinación de varios registros semióticos.

Considerando que para lograr la apropiación de los objetos matemáticos es necesaria una buena articulación entre distintos registros semióticos jugando con ellos como variables didácticas que dan lugar a cambios en las estrategias de los estudiante y como consecuencia a la construcción del conocimiento, por un lado, y que para que tenga lugar esa articulación entre los distintos sistemas de representación es necesario plantear actividades en donde dicha coordinación y conversión se traduzca en algo necesario, por otro, la mayoría de las situaciones didácticas que conforman las Ingenierías de cada uno de los cursos se han diseñado partiendo de contextos cercanos al alumno y que pueden formar parte de la vida real.

La razón de esta decisión, se sustenta en que la utilización de problemas prácticos ayuda a conjugar las dos teorías desde una doble perspectiva:

- La aplicación de problemas y situaciones cercanas permiten dar significado a los conceptos y procedimientos matemáticos que tantas veces aparecen desconectados de su entorno.
- La resolución de problemas de la vida real requiere que el alumno movilice y parta de su propia experiencia y sus representaciones mentales, dando sentido a las posibles conversiones entre representaciones semióticas utilizadas.

Desde el punto de vista que a nosotros nos atañe, la utilización de este tipo de problemas y contextos dan lugar a un escenario adecuado y propicio para que tenga lugar la simbiosis entre nuestras teorías, y lograr así favorecer la conversión entre los múltiples registros semióticos aumentando la capacidad y la habilidad en la transformación de unos a otros por parte de los alumnos, así como la aprehensión de los contenidos matemáticos.

4.2. Hipótesis

Lo estudiado en capítulos anteriores y la realización de una amplia revisión de la teoría de investigación previa sobre la importancia de articular el mayor número de registros de representación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conocimientos matemáticos, nos muestra como los alumnos manifiestan ciertas dificultades a la hora de efectuar procesos de conversión entre unos y otros, derivadas por la falta de congruencia entre las unidades significantes que conforman cada registro semiótico, desde una perspectiva intrínseca, y el escaso o nulo trabajo que se realiza en el aula de cara a que el alumno adquiera destrezas y habilidades que le permitan realizar las coordinaciones entre sistemas de representación, desde un punto de vista extrínseco.

Una de las premisas principales en la Teoría de Situaciones, es la constatación de que sólo a partir del estudio de situaciones relativas a un saber, que engloben, a su vez, los procedimientos y procesos que le rodean y dan identidad, permite comprender la actividad cognitiva del alumno. Dicho de otra forma y centrándonos en nuestro tema de estudio, necesitamos conocer las diferentes formas en que se presenta un conocimiento y la relación que los alumnos establecen entre dichas formas y el conocimiento en sí mismo, a efectos, entre otras cosas, de poder describir y analizar los distintos fenómenos que son propios de la conversión entre registros semióticos en la aprehensión de los conceptos matemáticos.

El análisis que hemos llevado a cabo de libros de texto, legislación y evaluaciones, evidencia la falta de conciencia didáctica que existe en torno a la conversión y coordinación de registros de representación. Además, cada concepto suele venir representado por un único registro semiótico, que junto con la falta de trabajo en relación a la conversión, dan lugar a la identificación inmediata de la representación utilizada con el concepto representado en un contexto concreto, por lo que su extrapolación, su comprensión global y pertinencia, pasan a ser responsabilidad del alumno. Esto nos hace emitir la primera de nuestras hipótesis en relación al desarrollo futuro de las ingenierías en el aula:

HIPOTESIS 7: Los alumnos presentan un gran déficit en lo que a la conversión entre registros de representación se refiere, cometiendo muchos de los errores ya detectados en investigaciones que versan sobre la necesidad de la articulación de múltiples registros semióticos en la transmisión de conocimientos.

Las dificultades ligadas a la gestión material de las actividades, que requieren de mucha preparación previa, así como las dificultades de planificación del tiempo, más difícil de prever que en las actividades escolares habituales, hacen al profesor desistir de la realización y diseño de tareas giren en torno tanto hacia la práctica en la conversión de registros como a la consecuencia de un aprendizaje completo de los contenidos, y a su sustitución por actividades, que menos costosas, puedan ficticiamente reemplazarlas.

Esto sumado a la detección en los manuales escolares de un número relativo de tareas que desarrollan usos y formulaciones que si bien precisan que el alumno efectúe algún tipo de conversión entre registros, o bien son siempre hacia el registro Numérico o Algebraico, cuya intencionalidad didáctica no vas más allá de la consecución de un domino aritmético y operacional por parte del estudiante, sustentadas en la mecanización, o bien promueven conversiones en las cuales la congruencia e identificación entre las unidades significantes del registro de partida y el registro de llegada es inmediato.

Estos ejercicios difícilmente se corresponden con un verdadero trabajo de coordinación entre sistemas de representación que persigan la adquisición de destrezas relacionadas con la conversión entre registros semióticos, y mucho menos se corresponden con tareas que busquen la compresión global e integra de los conceptos puestos en juego. Tiene sentido pues, enunciar las tres siguiente hipótesis:

HIPÓTESIS 8: La realización de prácticas efectivas de conversión entre registros hace que la gestión tanto de la clase como del tiempo, sea costosa, por lo que el profesorado tiende a sustituirlas por prácticas menos reflexivas y más mecánicas.

HIPOTESIS 9: Los alumnos tienden a efectuar conversiones hacia el registros operacionales debido a la preparación previa recibida en las aulas en donde existe un predominio del trabajo algorítmico y mecánico.

HIPOTESIS 10: Los alumnos manifiestan, a la hora de trabajar con registros semióticos más visuales, bloqueos estrechamente relacionados con las deficiencias que los mismos poseen en lo que a interpretación y capacidad de visualización se refiere debido al tipo de trabajo previo recibido en el aula, basado en un tipo de enseñanza procedimental y algorítmica.

El predominio de los procesos mecánicos y operacionales hace que no exista un escenario a través del cual los alumnos descubran la necesidad y la utilidad de emplear una u otra representación en la evocación de los objetos de conocimientos. Se dan representaciones simplificadas que en la mayoría de los casos tienen como objeto permitir una lectura e interpretación directa del objeto evocado, lo que evidentemente no es suficiente para provocar una comprensión interiorizada del mismo. Hay por tanto un riesgo de que el alumno construya una representación interna de las nociones matemáticas pobre, no vinculada con otros modos de representación y para nada relacionada ni utilizable en contextos que si bien hacen referencia al mismo se encuentran muy alejados del modo en que les ha sido presentado.

La importancia de la conversión entre representaciones para la formación de conceptos viene por tanto, regulada por la transposición didáctica, el contrato didáctico, de forma que las tareas que el profesor plantea al alumno, son el fruto de una ideología.

El planteamiento de una serie de tareas y situaciones problemáticas en las que se viera la necesidad de realizar conversiones entre registros de representación tendría como efecto, a nuestro juicio, un cambio del contrato didáctico, que permitiría un empleo diferente de los conocimientos de los alumnos, y como consecuencia un cambio en las concepciones de los mismos. Una hipótesis fuerte de la Teoría de Situaciones es que los conocimientos de los alumnos son aquellos permitidos por las situaciones y las condiciones en que el alumno se encuentra, de manera que si bien las situaciones a-didácticas pueden modificar el conocimiento del alumno, es necesario que el contrato didáctico las permita. Esto nos permite enunciar la siguiente hipótesis:

HIPÓTESIS 11: El diseño y puesta en práctica de tareas efectivas sustentadas en la simbiosis entre la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos, permitiría un cambio de contrato didáctico, en el sentido de introducir conocimientos de orden a-didáctico, que ayudarían al profesor a precisar el objeto de enseñanza a tratar. De este modo se consigue en los alumnos una aprehensión de los conocimientos más integra y significativa a través de las múltiples representaciones utilizadas y su función como variables didácticas, así como favorecer y mejorar las destrezas relacionadas con la conversión de registros mediante situaciones a-didácticas.

En el desarrollo de las Ingenierías, los alumnos participantes identificarán y seleccionarán registros de representación para efectuar las conversiones que crean pertinentes en función de cómo se haya diseñado cada situación, y así resolver el problema planteado. Por ello, esperamos encontrar una serie de errores relacionados con la falta de congruencia entre las unidades significantes de los registros semióticos puestos en juego en las conversiones, principalmente en aquellas en que la conversión se da entre registros discursivos, más operacionales, y los no discursivos, más visuales. Luego, en este sentido podemos emitir la siguiente hipótesis:

HIPÓTESIS 12: Las conversiones más complejas en términos de congruencia entre unidades significantes, son alcanzadas por la mayoría de los estudiantes que forman parte de nuestro estudio. Sin embargo, no todos logran un grado de destreza suficiente con respecto a las conversiones que tienen como protagonistas registros discursivos y no discursivos y la coordinación entre ambos.

A las dificultades propias del cambio y transformación de unidades significantes, deben añadirse aquellas derivadas de la comprensión y utilidad de los propios conceptos. En este sentido, partir de situaciones de la vida real, cercanas al alumno, concretas, que disten de contextos confusos, no solamente ayuda a dar significado a los conceptos matemáticos que estemos tratando y a que el alumno reciba una formación desde una perspectiva competencial, sino que también logra dar sentido a posibles conversiones entre representaciones semióticas.

Así, podemos enunciar la última de nuestras hipótesis:

HIPÓTESIS 13: El uso de escenarios contextualizados y relacionados con actividades cercanas, familiares y conocidas por los alumnos, es indispensable para plantear ingenierías didácticas en donde la Teoría Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos establezcan una relación de simbiosis.

A lo largo del estudio que nos queda a partir de este momento, intentaremos verificar las siete hipótesis anteriormente expuestas.

4.3. La ingeniería didáctica y la observación como método de investigación

Ya hicimos referencia en el primer capítulo a la noción de ingeniería didáctica como herramienta de investigación en Didáctica de las Matemáticas. A continuación recogemos algunas reflexiones sobre el dispositivo de observación de las ingenierías, para presentar, posteriormente, las dos ingenierías diseñadas.

Chamorro (2002, p. 76) retoma la cuestión de Chevallard, "¿Cómo puede plantearse el problema de la observación didáctica de la clase en términos compatibles con las prácticas científicas?".

Aunque la observación, prescrita por el marco teórico de referencia, puede centrarse en alguno de los subsistemas que componen el escenario didáctico, los resultados deben ser cuestionados, analizados e interpretados en relación a todos los elementos que constituyen el sistema, interrelacionando unos con otros.

Según las premisas de la Teoría de Situaciones Didácticas, las interacciones del alumno con el medio, a partir de las cuales se va a producir el aprendizaje, se caracterizan por determinados comportamientos que se pueden observar en el estudiante, interpretables en términos de conocimientos.

> De hecho, lo que interesa al investigador son las interacciones que se producen entre los distintos componentes del sistema didáctico, por ello, la observación de clases aparece como un medio privilegiado del que se sirve el investigador en didáctica para confrontar lo que pasa en la realidad con la construcción de la teoría, y gracias a la cual pueden ponerse de relieve los fenómenos didácticos que tienen lugar en clase (Chamorro, 2003, p. 285).

Para la cuestión, ¿cómo podemos llevar a cabo la observación de manera fidedigna? Chamorro (2002, p. 80) cita a Fiedrich (1971) enumerando una serie de factores y efectos que pueden distorsionar los datos de los observadores:

- Efecto de halo: el observador identifica ciertas características positivas en el observado, y tiende a atribuirle otras no observadas.
- Efecto de generosidad: el observador tiende a atribuir características positivas al observado.
- Efecto de regresión hacia la media: el observador no observa actitudes extremas sino actitudes medias.
- Efecto de coherencia lógica: el observador desea que un conjunto de características observadas se organicen en un todo armonioso y pasa por alto los elementos divergentes.
- Efecto de la primera impresión: ésta puede modular la lectura de todas las características posteriormente identificadas.
- Efecto de contacto: el observador tiende a especificar las características observadas en relación con la imagen que tiene de sí mismo, bien en congruencia o en contraste.
- Efecto de espera del observador en relación con el observado, y de éste con la situación.
- Confusión entre las características generales y las momentáneas o aisladas.

Es también habitual la aparición del efecto Rosenthal en el sentido de que las hipótesis del investigador conducen a detectar los resultados que necesita, y el principio de incertidumbre de Heisenberg, ya que la acción del observador puede modificar el comportamiento de lo que se observa.

Con el fin de que la observación se vea condicionada en la menor medida posible por los efectos mencionados anteriormente y cumpla con la función que le corresponde para poder contrastar debidamente las hipótesis formuladas, se ha intentado disponer de aquellos medios que Chamorro (2002) entiende que son necesarios para tal propósito:

- Una persona encargada de hacer la crónica global que describa los aspectos generales de la secuencia. Deberá anotar entre otras cosas, los tiempos de las distintas fases y todas las cuestiones que tengan que ver con la dinámica global de la clase.
- Un equipo de observadores, que deberán anotar, los distintos comportamientos y estrategias de los alumnos, comentarios, intentos fallidos, discusiones en el grupo, etc. Hay que resaltar que los

observadores no intervienen nunca con los alumnos, si bien pueden hacerles preguntas para poder aclarar lo que están haciendo o diciendo, pero si los alumnos necesitan preguntar algo, se les remite al profesor.

- Cuando ello es posible, es muy útil para la investigación, realizar un pequeño debate, inmediatamente después de terminada la experiencia, entre los observadores, el maestro que ha desarrollado la situación y el investigador. Las primeras opiniones *en caliente* tienen también bastante valor porque se recuerdan muchos detalles, a veces relevantes, que se pierden en las notas escritas.

- Los ejercicios y producciones de los alumnos: dibujos, escritos, operaciones, mensajes, etc.

- El material video o audio de la sesión. Muchas de las estrategias de los alumnos no son detectables si no se dispone de un buen equipo de grabación. Muchas de las conversaciones, debates y respuestas de los alumnos son inaudibles y se pierden, de ahí la importancia de poder completar lo que no se ve o se oye con el material suministrado por los observadores y las producciones de los alumnos.

- La trascripción literal del material de vídeo o audio. El análisis y la localización de concepciones, obstáculos, estrategias, etc., aparece muchas veces con más claridad cuando se estudia la trascripción escrita.

4.4. Ingeniería Didáctica para el aprendizaje del Teorema de Pitágoras y la semejanza.

Diariamente, utilizamos diversos conceptos geométricos y espaciales sin ser conscientes de ello: intuimos formas, figuras y tamaños, establecemos distancias, determinamos direcciones y posiciones de los objetos que nos rodean, etc.

La enseñanza y aprendizaje de la geometría es compleja y menos exitosa que la enseñanza de la aritmética, el álgebra e incluso que el estudio de la probabilidad y estadística, ya que en dicho aprendizaje intervienen complejos procesos semióticos que el estudiante pone en funcionamiento a la hora de utilizar e interpretar las distintas representaciones que hacen referencia a los objetos de naturaleza geométrica.

Antes de introducir a nuestros estudiantes en el mundo geométrico, debemos reflexionar sobre varias cuestiones: ¿De qué trata la geometría? ¿Hacia dónde va? ¿Cómo evoluciona? ¿Qué utilidad tiene, o pensamos que puede tener, en la vida cotidiana?¿Cómo se puede aprender esta geometría?¿Qué metodología debemos emplear?¿Qué tipos de situaciones, problemas o materiales podemos utilizar?, etc.

Este capítulo tiene como objetivo caracterizar los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas espaciales y geométricos, generando un modelo teórico que ayude a interpretar las interacciones de dichos procesos, centrándonos, principalmente, en la caracterización de la coordinación de los procesos de visualización y los procesos de razonamiento, que tan importantes son para nuestro tema de estudio.

También analizaremos y estudiaremos las dificultades y obstáculos que emergen de la utilización, casi inevitable y absolutamente necesaria, de las figuras, gráficas y dibujos que permiten apoyar explicaciones, demostrar teoremas, exponer ideas y facilitar la comprensión y aprehensión de los objetos de conocimiento en geometría, particularizando, en el último apartado, en el caso del Teorema de Pitágoras y la semejanza de longitudes, superficies y volúmenes.

4.4.1. Geometría, su enseñanza y aprendizaje

En la actualidad, una de las áreas más descuidadas en la enseñanza de las matemáticas, principalmente en Educación Secundaria Obligatoria, es la referida a la Geometría, lo que contrasta con su consideración como uno de los pilares principales de la formación académica, social y cultural de los sujetos y con la importancia que juega en la adquisición de habilidades como la argumentación, la visualización y el razonamiento.

La evolución histórica de la Geometría ha estado y está fuertemente vinculada tanto al desarrollo de actividades humanas, en particular de carácter arquitectónico y artístico, como a avances científicos y tecnológicos producto del afán de mejora de las condiciones de vida y acondicionamiento del entorno, lo que refleja su aplicabilidad y utilidad en la vida del ser humano (NCTM, 2000).

La necesidad de medir longitudes, áreas y volúmenes dio lugar a su nacimiento, siendo necesario el empleo de representaciones figurales, gráficas e incluso esculturales para poder resolver problemas ligados, principalmente, a la vida cotidiana y a la creación artística. Un claro ejemplo de ello lo tenemos en las antiguas civilizaciones egipcias, que desarrollaron y aplicaron conocimientos geométricos para hacer frente a las inundaciones de sus tierras de cultivos producidas al acrecentarse el caudal del río Nilo, como podemos admirar en su arquitectura.

Entre los siglos VI y IV a.C., la Geometría deja de emplearse exclusivamente para la realización de mediciones y resolución de problemas de cálculo, adquiriendo un rango más universal de la mano de la Escuela Griega con representantes como Thales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Apolonio, Arquímedes, etc., los cuales le otorgan un carácter más científico concediéndole importancia de peso en procesos de generalización, modelización y demostración de resultados basados en el razonamiento.

El epistemólogo francés Rudolprh Bkouche, en sus reflexiones sobre la geometría (Bkouche, 1991) nos ayuda a esclarecer cuál es su naturaleza, distinguiendo tres aspectos:

- la geometría como ciencia de las situaciones espaciales,
- la geometría en relación con otros dominios de conocimiento (cartografía, física, geodesia, astronomía, etc.), y
- la geometría como lenguaje y representación, fundamento de la geometrización, considerada esta como modo de representación de fenómenos en los que no intervienen cuestiones espaciales.

Actualmente, la Geometría abarca tal diversidad de aplicaciones y tareas interdisplinarias que enumerarlas se convertiría en tarea ardua. En la siguiente tabla se recogen algunos ejemplos de aplicaciones geométricas descritas por Alsina, Fortuny y Pérez (1997):

TABLA 4.4.1.1. *Ejemplos de aplicaciones geométricas*

➢ Aplicaciones a la modelización matemática del mundo físico
➢ Geodesia y triangulación
➢ Aplicaciones en astronomía y mecánica celeste
➢ Cartografía /aérea, satélite, temática,…)
➢ Cálculo de medidas (áreas, superficies, volúmenes)
➢ Problemas comerciales (envasado, empaquetado, tallas, patrones,…)
➢ Estructuras en ingeniería y arquitectura
➢ Clasificación de nudos
➢ Digitalización y manipulación de imágenes
➢ Grafos e investigación operativa
➢ Formas y trasformaciones al servicio de la creación artística
➢ Aplicaciones a la computación y gráficos por ordenador
➢ Visualización de datos estadísticos
➢ Procesamiento de imágenes, comprensión y registro
➢ Teoría de barras y engranajes
➢ Aplicaciones en óptica, fotografía y cine
➢ Elementos multimedia inter-activos
➢ Codificación, descodificación y criptografía
➢ Robótica: movimientos, visión, tereas automáticas,…
➢ Descripciones cristalográficas estáticas y de conocimiento
➢ Modelización de procesos dinámicos y caóticos
➢ Doblado de papel, origami y empaquetado

Fuente: elaboración propia a partir de Alsina, Fortuny y Pérez (1997)

Siguiendo a Villani (1995), la Geometría ha ido adquiriendo nuevas y múltiples consideraciones con sus correspondientes implicaciones, lo que ofrece nuevas perspectivas desde el punto de vista didáctico:

TABLA 4.4.1.2. *Consideraciones Geométricas de Vallini*

Consideraciones	Implicaciones
Geometría como Ciencia del Espacio	*Las relaciones espaciales se manifiestan en las distintas dimensiones físicas en que se puede producir conocimiento: desde la dimensión 1 de las líneas, curvas, longitudes; a la dimensión 2 de las superficies, áreas, etc., a la dimensión 3 de los objetos tridimensionales, cuerpos sólidos, volúmenes; hasta las dimensiones superiores de los modelos científicos y combinatorios* (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987, p. 15). La geometría Euclídea, Afín, Descriptiva, Proyectiva y Topológica permiten construir, describir, medir, valorar y estudiar patrones del mundo físico y fenómenos del mundo real.
Geometría como método de representación	Para construir, comunicar y expresar la información espacial que se percibe, son de gran utilidad el uso de representaciones, que permiten caracterizar y visualizar propiedades y características.
Geometría como punto de encuentro entre matemáticas como Teoría y matemáticas como fuente de modelos.	La Geometría se conforma como el cimiento o base sobre la cual se desarrolla la matemática más teórica.
Geometría como manera de pensar y entender	Permite afrontar y abordar situaciones de la vida que requieren de conocimientos, habilidades y capacidades propias de la rama y que potencia el desarrollo de ese pensamiento y entendimiento general y único de cada sujeto.

Geometría como un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo	Potencia el desarrollo de procesos deductivos tan esenciales en el descubrimiento y consolidación de conceptos a partir de la observación, el análisis y la verificación.
Geometría como una herramienta en aplicaciones	La Geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestra sociedad (producción industrial, diseño gráfico, óptica, topografía, robótica, etc.), siendo un instrumento esencial en su desarrollo.

Fuente: elaboración propia a partir de Villani, 1995

Estas concepciones, junto con el papel que juega la Geometría como herramienta para interpretar y entender la realidad e instrumento de avance tecnológico y científico, han dado lugar a diversos principios didácticos que se consideran primordiales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta rama del conocimiento matemático.

El NCTM (2000) señala cuatro objetivos generales orientados a lograr una enseñanza de la geometría contextualizada y dirigida a la adquisición de ciertas habilidades y destrezas:

- Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Del mismo modo, el proyecto OCDE/INCE (2000, 2003, 2006, 2009, 2012) organiza el conocimiento matemático en cuatro áreas a partir de las cuales evalúan la adquisición de la competencia matemática en los estudiantes: *Cantidad, Espacio y Forma, Cambio y Relaciones, e Incertidumbre.*

Espacio y Forma hace referencia a situaciones y contextos geométricos y espaciales, centrando sus objetivos e interés en la observación de similitudes y diferencias, en la orientación por el espacio y a través de las construcciones y las formas, en el análisis de las componentes de las formas y su reconocimiento bajo diferentes representaciones y diferentes dimensiones, así como en entender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas (NCTM, 2003). Según PISA, "las regularidades geométricas pueden servir como unos modelos relativamente simples de muchas clases de hechos, y su estudio resulta posible y deseable en todos los niveles" (OCDE /INCE, 2003, p. 45).

Báez e Iglesias (2007, p. 73) consideran de vital importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría los siguientes principios:

- Principio globalizador o interdisciplinar: Consiste en un acercamiento consciente a la realidad, donde todos los elementos están estrechamente relacionados entre sí.
- Integración del conocimiento: El conocimiento no está fragmentado, sino que representa un saber integrado, lo que implica también una integración de los objetivos, contenidos, metodología y la evaluación.
- Contextualización del conocimiento: Los conocimientos son adaptados a las necesidades y características de las estudiantes y los estudiantes, a partir del uso de hechos concretos.
- Principio de flexibilidad: La organización y administración del proceso educativo debe ser adaptable a las necesidades del alumnado, sin perder de vista el logro de los objetivos propuestos.
- Aprendizaje por descubrimiento: Todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa del estudiantado, de manera que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.
- Innovación de estrategias metodológicas: El grupo docente debe buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al alumnado hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje.

Alsina, Burgués y Fortuny (1987), indican las siguientes recomendaciones generales a tener en cuenta en la Enseñanza de la Geometría:

a) El estudio de la Geometría debe estar relacionado con el mundo real. Los alumnos deben tener oportunidad de explorar distintas relaciones espaciales de su entorno, así como buscar, aplicar y transferir relaciones geométricas para analizar los fenómenos naturales, científicos, técnicos, sociales y artísticos.

b) La instrucción en Geometría debe favorecer la interacción entre la actividad especial y la representación mental del espacio.

c) La presentación de la Geometría debe seguir el proceso del desarrollo intelectual, es decir, debe ser gradual y progresiva, empezando con una introducción informal mediante situaciones cotidianas que gradualmente se irán precisando y formalizando. Ello debe permitir el descubrimiento activo, el razonamiento inductivo, la construcción de inferencias y conjeturas, el desarrollo de la percepción visual y la imaginación espacial, etc.

Por otro lado, Vecino (2001, p. 126) apunta que para lograr la efectiva emergencia de la percepción, la representación espacial y sentar las bases fundamentales de los conocimientos geométricos, es necesario el desarrollo de un currículo geométrico basado en:

1. Una geometría dinámica frente a una geometría estática que se propone desde los libros de texto o desde las explicaciones en la pizarra.
2. Una geometría interfigural e intrafigural que tenga en cuenta no solo las relaciones al interno de cada figura o ente geométrico, sino también entre las diversas figuras, dando lugar, entonces, a procesos de clasificación y de estructuración que tengan en cuenta las diversas relaciones que se pueden establecer entre distintos elementos geométricos.
3. Una geometría que tenga en cuenta el carácter deductivo intrínseco al razonamiento geométrico, pero también un carácter inductivo que pueden generar los diversos procesos o materiales propuestos para el desarrollo de la misma.

4. Una geometría que proponga procesos de construcción, de reproducción, de representación y de designación de los elementos geométricos.
5. Una geometría construida a partir de la iconización que supone el uso de materiales diversos: poliminos, geoplano, tangram, tiras de mecano, policubos..., o de otros materiales como puedan ser la tortuga de suelo logo o el ordenador con los diversos entornos (Logo, Cabri) que permitan las operaciones mencionadas en el punto anterior (P.126)

En definitiva, podemos concluir que se persigue y pretende una enseñanza de la Geometría contextualizada, útil desde el punto de vista de la aplicabilidad, orientada al desarrollo de habilidades y procesos específicos como la comprensión, la construcción, el análisis, la visualización, la exploración, etc., mediante el planteamiento de situaciones y tareas problemáticas que impliquen un desarrollo cognitivo significativo en el sujeto.

No obstante, la realidad es muy distinta. Diversas investigaciones (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997; Vecino, 2001; Villella, 2001; Godino y Ruíz, 2002; Chamorro, 2005b; Kuzniak, 2005, 2006 y 2010; Báez e Iglesias, 2007; Caro, 2009; Guerra, 2010) han puesto de manifiesto como la enseñanza de esta rama del conocimiento matemático ha quedado limitada a la transmisión de fórmulas totalmente alejadas y desconectadas de la realidad de los estudiantes, imponiéndose una concepción de la Geometría simplista, sesgada, sin consistencia y falta de rigor, producto de una transposición didáctica claramente reduccionista.

Usualmente, los contenidos de geometría son presentados al estudiante como el producto acabado de la actividad matemática, sin proporcionarle ejemplos cotidianos y contextualizados que le faciliten un mejor entendimiento de los contenidos a tratar, estando su enseñanza fuertemente condicionada por los manuales escolares y quedando, en múltiples ocasiones, relegada al final del curso académico, pasando por alto obstáculos que emergen en su enseñanza y los efectos ligados al contrato didáctico: se ha enfatizado en la memorización y aplicación de fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, etc., y en la resolución automática de problemas que en realidad tratan aspectos aritméticos y algebraicos, limitando su aprendizaje a la repetición continuada de las mismas, produciéndose, así, una sustitución se saberes.

Esto nos conduce a una enseñanza de la geometría pobre, en la que la manipulación, la visualización, el razonamiento y el desarrollo de los conocimientos espaciales han pasado a un segundo plano, olvidando que la geometría pertenece, al menos en una parte, a la modelización del espacio físico y del entorno. A este respecto, Bkouche (1991, p. 161) nos dice:

> (...) la enseñanza de la geometría debe apoyarse sobre el estudio de las situaciones espaciales, ya sea desde el punto de vista de la medida o del dibujo; es sobre los objetos de naturaleza empírica como se construye la racionalidad geométrica (...) A falta de este proceso las grandes estructuras carecen de sentido, y dan lugar al saber escolar al que antes nos hemos referido.

La Geometría es una de las ramas de la matemática que mayores posibilidades ofrece a la hora de experimentar, mediante materiales adecuados, sus métodos, sus conceptos, sus demostraciones y sus propiedades, y es por ello por lo que no debe limitarse al trabajo con fórmulas y al manejo de un solo registro de representación.

Una enseñanza activa, lúdica, de aprendizaje por descubrimiento, que dote a los estudiantes de técnicas empíricas como el plegado, el recortado, el trazado, la manipulación de materiales, el ensamblado de piezas, la construcción etc., fundamenta los conocimientos geométricos (Villarroel y Sgreccia, 2011), y facilita su aprehensión, permitiéndoles, a través de actividades de carácter práctico, comparar superficies, comprender las nociones de ángulo, traslación, giro, simetría, distinguir el concepto de área del de perímetro y observar su diferente variación rompiendo la falsa concepción de que igual perímetro supone igual área, etc., y ,en el caso particular de la Ingeniería Didáctica que proponemos, materializar y comprender el Teorema de Pitágoras y el concepto de semejanza en longitudes, áreas y volúmenes.

4.4.1.1. Consideraciones psicopedagógicas

Por lo visto anteriormente, podemos afirmar que la metodología pedagógica tradicional basada en la consideración del profesor como eje central del proceso de enseñanza-aprendizaje, siendo la fuente fundamental de información, sigue siendo la preponderante en el campo de la enseñanza de la Geometría.

Nosotros partimos de la idea de que el proceso de aprendizaje del estudiante debe estar basado en sus descubrimientos personales, en su actividad creadora, en sus motivaciones, en su adaptación a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades y de desequilibrios, prestando atención a su forma de acceder al conocimiento y cómo lo construye, es decir, partimos de una concepción constructivista del aprendizaje.

En el estudio de las bases del aprendizaje de la Geometría cabe distinguir dos aspectos, que una vez tratados permiten establecer los principios para conseguir un aprendizaje que favorezca la adquisición de nociones y relaciones geométricas de manera significativa: el primero de ellos guarda relación con el proceso de construcción de las relaciones espaciales en la mente de los sujetos, y el segundo se centra en el análisis de los distintos niveles de conocimiento que sobre las cuestiones geométricas se puede tener.

Si hacemos una revisión de los trabajos de investigación en psicología relacionados con la enseñanza de la Geometría, podemos destacar dos líneas principales que han aportado resultados y consideraciones psicopedagógicas al respecto: El modelo Constructivista de Piaget y el modelo Van Hiele basado en la Teoría de los niveles de razonamiento.

4.4.1.1.1. Piaget y su aportación a la Geometría

Bajo el nombre Epistemología Genética se esconde una de las teorías que mayor impacto han tenido en el desarrollo de la psicología evolutiva del siglo XX con su consecuente implicación en el área educativa, particularmente, en lo referente al proceso de enseñanza-aprendizaje, nos referimos a la teoría desarrollada por el psicólogo suizo Jean Piaget la cual pretende dar cuenta del origen y construcción del conocimiento a lo largo del desarrollo cognitivo humano, cómo conocemos y cómo pasamos de estados de conocimiento de menor validez a estados superiores.

La concepción del conocimiento como resultado de procesos de acción, de experimentación con los objetos, de transformaciones que el sujeto realiza sobre el mundo que le rodea y como construcción estrictamente personal, es la idea fundamental de la obra de Piaget: *el aprendizaje se apoya en la acción* siendo el fundamento de toda actividad intelectual, desde la más simple a la operación intelectual más compleja.

Piaget (1950) otorga a la mente humana dos características principales: *organización* y *adaptación*. Los conocimientos se organizan y estructuran en lo que denomina esquemas cognitivos, que van desarrollándose en el tiempo siguiendo determinadas etapas:

TABLA 4.4.1.1.1.1. *Esquemas cognitivos de Piaget*

Etapa Sensomotora (0-2 años)	**Etapa Preoperacional (2-7 años)**	**Etapa de las Operaciones Concretas (7-11 años)**	**Etapa Lógico Formal (11-16 años)**
Inteligencia práctica unida a la acción	Razonamiento intuitivo y trabajo con símbolos y representaciones	Razonamiento lógico y desarrollo de operaciones aplicables a situaciones reales y concretas	Razonamiento hipotético-deductivo, generalización mediante razonamiento inductivo y acción reflexiva

Fuente: elaboración propia a partir de Piaget, 1950

La idea central de la construcción del conocimiento es la de la *adaptación* o *equilibración*, que se produce a través de dos procesos íntimamente relacionados y dependientes:

- *Asimilación*: es el proceso que tiene lugar cuando un individuo se enfrenta a una situación, en particular a un problema matemático, integrando los objetos o conocimientos a los esquemas conceptuales ya existentes.
- *Acomodación*: Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye, reestructura o expande para acomodar la situación.

Mediante estos dos movimientos se produce la adaptación del sujetos que actúa y reacciona para mantener el equilibrio interno que ha sido perturbado por la modificación y alteración del ambiente.

Esta teoría ha influido en la enseñanza de las matemáticas en general y de la Geometría en particular, pues a partir de ella Piaget (1948) formuló en su obra *La representación de espacio en el niño*, la teoría del desarrollo de los conceptos espaciales y de las relaciones geométricas en correspondencia con las diferentes etapas genéticas del desarrollo intelectual que había establecido. De dicha teoría podemos destacar las siguientes hipótesis primordiales (Vecino, 2005):

- Las relaciones espaciales se expresan utilizando una geometría.
- A un espacio sensomotor inicial (0-2 años) sigue un espacio representativo (2-12 años).
- Las relaciones topológicas son anteriores a las proyectivas y a las métricas en ambos tipos de espacio.

Piaget distingue el espacio perceptivo, que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio a través de la cual se conocen los objetos mediante el contacto directo, del espacio representativo, abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente los objetos y evocarlos en ausencia de ellos. La representación, para Piaget, prolonga la percepción, y es una acción interiorizada que se produce gradualmente, de modo que a la actividad sensomotora ligada a la percepción, le sigue la acción evocada en la etapa de las operaciones concretas (7-8 años a 11-12), hasta llegar a la etapa de las operaciones formales la cual se caracteriza por la coordinación entre distintos sistemas permitiendo la aparición de formas hipotéticos-deductivas en torno a los 12 años, desembocando en la axiomatización del espacio (Chamorro, 2005a).

En cada etapa o estadio del desarrollo, según Piaget (1948), se distingue una gradual distinción y diferenciación de propiedades geométricas, partiendo de las relaciones *topológicas* (abierto, cerrado, interior, exterior, frontera, continuidad, discontinuidad, compacidad, orden, conexión, etc., es decir, aquellas relaciones que no varían por deformación bicontinua), seguida de las propiedades *proyectivas* (delante, detrás, encima, debajo, sobre, bajo, derecha, izquierda y todas aquellas relaciones que hacen referencia a la orientación y la localización en el espacio) para concluir con las *métricas* (medida de segmentos, superficies, volúmenes, ángulos, perpendicularidad, paralelismo, forma, etc.)

DESARROLLO

NIVEL	DESARROLLO INTELECTUAL GENERAL	NIVELES DE ORGANIZACIÓN ESPACIAL	RELACIONES ESPACIALES QUE PUEDEN SER CONSTRUIDAS
IV	**Etapa Lógico Formal (11-16 años)**	Espacio Representativo o Abstracto	Relaciones topológicas Relaciones proyectivas Relaciones métricas
III	**Etapa de las Operaciones Concretas (7-11 años)**	Espacio Concreto Operacional	
II	**Etapa Preoperacional (2-7 años)**	Espacio Preoperacional	
I	**Etapa Sensomotora (0-2 años)**	Espacio Perceptivo	

FIGURA 4.4.1.1.1.1. *Esquemas cognitivos de Piaget*. ((Alsina, Burgués y Fortuny, 1987, p. 86)

Como cada etapa supone una reestructuración e inclusión de la anterior, esto supone la jerarquización de las distintas geometrías, hipótesis cuestionada y que ha suscitado discusión dentro del ámbito de la Didáctica de la Geometría.

Las investigaciones de Vecino (2001, 2004, 2005) ponen en cuestión la prelación establecida por Piaget en la aprehensión de las relaciones espaciales, proponiendo una enseñanza de la geometría caracteriza por los grupos de invariantes (topológicos, proyectivos y métricos) sin establecimiento, a priori, de ninguna preeminencia de una relación espacial sobre otra.

No obstante, la concepción piagetiana es lo suficientemente completa y atractiva para seguir siendo un marco de referencia en la enseñanza de la Geometría, pues ha favorecido a la adopción de determinadas medidas en el ámbito curricular en varios países y en el diseño de secuencias didácticas organizadas al efecto, convirtiéndose en un referente inexcusable ante el que las nuevas investigaciones, corrientes y didactas han de posicionarse y referirse.

4.4.1.1.2. El modelo de aprendizaje del matrimonio Van Hiele

El modelo teórico conocido como "los niveles de Van Hiele" propone un modo de estructurar el aprendizaje de la Geometría coherente con la construcción del espacio, tratando de explicar cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los sujetos y cómo se puede ayudar a mejorar la calidad de dicho razonamiento, resultando de utilidad para organizar el currículo de Geometría en la educación primaria y secundaria (Godino y Ruiz, 2002).

Se trata de un modelo de estratificación del conocimiento en una serie de niveles y las fases de aprendizaje que se deben producir para pasar de un nivel a otro, permitiendo categorizar los distintos grados de representación del espacio (Alsina, Fortuny y Pérez, 1997).

La idea básica es que el aprendizaje de los conocimientos geométricos tiene lugar pasando por unos determinados niveles de razonamiento que no se encuentran asociados a la edad, de modo que solo se puede pasar al siguiente nivel una vez aprehendidos los conceptos y relaciones geométricas del nivel que le precede.

Dos son los principales elementos que marcan el diseño del modelo y que son base en el aprendizaje de la Geometría:

- *El lenguaje utilizado*: implica que los niveles y su adquisición están estrechamente relacionados con el dominio del lenguaje adecuado.

- *La significatividad de los contenidos*: implica que el sujeto solo va a aprender aquello que le es presentado a nivel de su razonamiento.

Si a los estudiantes se les presenta una situación de aprendizaje que requiere un vocabulario, unos conceptos y unos conocimientos de un nivel superior al que se encuentran, no serán capaces de progresar en la situación problemática planteada, y por tanto se produce un fracaso en su enseñanza.

Los Van Hiele (1958, 1986) propone cinco niveles de conocimiento en Geometría:

- *NIVEL 0*: Visualización o reconocimiento
- *NIVEL 1*: Análisis
- *NIVEL 2*: Ordenación o clasificación
- *NIVEL 3*: Deducción formal
- *NIVEL 4*: Rigor

Cada nivel exige un razonamiento más complejo que el anterior, progresando de la intuición y lo concreto a la abstracción y la generalización, que son dos de las características fundamentales de pensamiento matemático avanzado. En la siguiente tabla se recogen los aspectos más importantes y características de cada nivel:

TABLA 4.4.1.1.2.1. *Niveles de conocimiento en Geometría del matrimonio Van Hiele*

Nivel	Descripción	Objetos de conocimientos propios del nivel	Productos de pensamiento
0	Reconocimiento de figuras que son distinguidas por su forma global, sin diferenciar atributos, propiedades y componentes. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.	Formas individuales	Clases o agrupaciones de formas
1	Análisis de las partes y propiedades particulares de las figuras. Se comienzan a establecer relaciones entre figuras, pero de una forma intuitiva o experimental, no de una forma lógica.	Clases o agrupaciones de formas	Partes y propiedades de las formas
2	Se relacionan y clasifican las figuras de un modo lógico, mediante razonamientos sencillo: reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones y consecuencias.	Partes y propiedades de las formas	Relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.
3	Se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Se comprenden las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.	Relaciones entre propiedades de los objetos geométricos. Definiciones	Sistemas axiomáticos deductivos
4	Se aprecian las distinciones y relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.	Sistemas axiomáticos deductivos	Comparaciones y contrastes entre diferentes sistemas axiomáticos

Fuente: elaboración propia a partir de Alsina, Burgués y Fortuny, 1987, p. 91

Resulta evidente que cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior. Los Van Hiele afirman que el progreso a través de los niveles depende más de la instrucción recibida que de la edad o madurez y que cualquier persona, en el aprendizaje de un nuevo concepto geométrico, pasa por todos esos niveles. Para conseguir esto, proponen cinco fases de aprendizaje:

- *Fase 1. Discernimiento:* se proporciona a los estudiantes situaciones, contextos y escenarios de aprendizaje dotándoles del vocabulario y las recomendaciones necesarias para poder trabajar. Está fase es oral y mediante preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los estudiantes y el camino a seguir de las actividades siguientes.

- *Fase 2. Orientación dirigida:* el profesor, cuya labora es vital en esta fase para obtener el aprendizaje deseado, presenta una secuencia graduada de actividades que permitan al estudiante explorar, investigar y reflexionar a través de los materiales proporcionados, propiciando el avance en los niveles de conocimiento.

- *Fase 3. Explicitación:* los estudiantes intercambian las ideas, resultados y experiencias tras haberse enfrentado a las situaciones planteadas previamente. La interacción se da entre los estudiantes, siendo el papel del profesor únicamente el de corregir el nivel del lenguaje.

- *Fase 4. Orientación libre:* con los conocimientos adquiridos, los estudiantes se enfrentan a actividades más complejas y abiertas, fundamentalmente referidas a aplicarlos de forma significativa.

- *Fase 5. Integración:* los objetos y las relaciones son unificadas, creando una red interna de conocimientos nuevos o mejorados que sustituyan a los que forman parte del sistema mental del estudiante.

Ni mucho menos la aplicación de este modelo implica que los estudiantes aprendan los conocimientos geométricos sin esfuerzo o que no sufran obstáculos delante de ciertos conceptos o relaciones geométricas. Sin embargo, aporta orientaciones didácticas para secuenciar la docencia y los contenidos, de modo que los estudiantes vayan progresando de los niveles que requieren una menor abstracción a los que requieren un razonamiento matemáticos más avanzado, mejorando su aprendizaje y fomentando su comprensión, resultando de gran importancia en el ámbito didáctico.

4.4.1.2. Conocimientos espaciales y conocimientos geométricos

La Geometría se ha constituido en parte como una modelización del espacio físico, convirtiéndose en la rama de las Matemáticas que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales que tan importantes son para el desarrollo integral de cada sujeto, pues su adquisición supone la potencialización de la intuición geométrica y construcción de la percepción espacial (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987; Kuzniak, 2005, 2006 y 2010).

Ello conlleva que se haya establecido una estrecha relación entre el espacio físico y la estructuración del mismo a partir de los datos que provienen de la medición y percepción, y los objetos teóricos de naturaleza propiamente geométrica, con sus propiedades y características particulares.

Cada sujeto desarrolla y asimila los conocimientos espaciales necesarios para poder enfrentarse a los problemas que se le plantean en sus relaciones con el espacio mediante la interacción con el medio que le rodea, elaborando saberes y competencias de manera espontánea que serán la base de posteriores aprendizajes más formales.

Sin embargo, para que exista la aprehensión de los conocimientos geométricos por parte de cada individuo, es condición estrictamente necesaria que formen parte de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Siguiendo a Chamorro (2005b), la confusión que se produce en la enseñanza entre conocimientos espaciales y conocimientos geométricos es constante, no obstante tienen una problemática bien distinta. Los conocimientos espaciales se validan a través de la experiencia, (p.e., los movimientos necesarios para introducir un objeto voluminosos a través de una puerta), en tanto que los conocimientos geométricos requieren procesos de demostración formales. La enseñanza de la geometría se apoya sobre los conocimientos espaciales espontáneos que poseen los estudiantes, olvidando que a veces son justamente esos conocimientos espontáneos los que constituyen un obstáculo para la adquisición de los conocimientos geométricos; pero por otra parte, en múltiples ocasiones, es necesario partir de los conocimientos espaciales que posee el estudiante, sin que sea realista la posición de establecer una ruptura entre los dos tipos de conocimientos, pues a su vez los conocimientos geométricos contribuyen a resolver los problemas espaciales, por lo que estamos delante de una de las muchas paradojas que se presentan en la enseñanza de las matemáticas.

La distinción entre estos dos tipos de conocimiento es muy útil para sentar las bases de la enseñanza de la Geometría, pero es difícil encontrar criterios comunes en la comunidad de enseñantes que permitan diferenciar conocimientos geométricos y conocimientos espaciales, sin embargo, su interrelación es grande.

La comprensión y adquisición de la noción del espacio geométrico se produce en el sujeto a través de dos momentos que, si bien son muy distintos, son complementarios entre sí: el que se realiza en forma directa a través de la intuición geométrica, la percepción espacial, de naturaleza visual, que es creativo y subjetivo; y el que se realiza en forma reflexiva, estableciendo conexiones con una construcción lógica mediante palabras u otras clases de signos o representaciones que pueden ser comunicadas a los demás , que es analítico y objetivo (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987).

En los trabajos de Gálvez y Brousseau (1985), aparece por primera vez una variable a considerar en la construcción del espacio: el tamaño del espacio.

Las acciones de los sujetos en el espacio dependen del tamaño de este, y así, en función de esto, Gálvez y Brousseau (2000) hablan del micro, meso y macroespacio, caracterizándolos como siguen:

- *Microespacio*: corresponde al espacio próximo, accesible a través de la manipulación de la vista, en el que el desplazamiento de los objetos y el cambio de puntos de vista del propio sujeto son posibles. Las acciones ejercidas por el sujeto sobre los objetos le proporcionan una gran información. Otra característica importante del microespacio es el control que posee el sujeto de las relaciones espaciales con los objetos.

- *Mesoespacio*: es accesible a una visión global, por ejemplo el espacio que contiene un inmueble. En el Mesoespacio, los objetos fijos constituyen puntos de referencia, y el sujeto se desplaza en función de la localización de los mismos.

  Su construcción requiere la integración de los diferentes puntos de vista que el sujeto va obteniendo en sus desplazamientos, a modo de yuxtaposición de representaciones parciales. Se construye poco a poco una visión de conjunto, en la que el Mesoespacio tiene extensión, por lo que la noción de distancia entre objetos, al igual que la noción de ángulo, cobran gran importancia.

- *Macroespacio*: imposible de percibir globalmente, requiere que el sujeto se desplace y vaya integrando, con continuidad, diferentes visiones obtenidas por desplazamiento sobre la superficie terrestre, lo que demanda una representación global.

  Dentro del macroespacio se distinguen tres tipos: el urbano, el rural y el marítimo. Para la organización del macroespacio basta con dos dimensiones, obviando la altura, y se requiere coordinar el sistema de referencia corporal (delante-detrás, derecha-izquierda) con un sistema de referencia externa al sujeto que no varíe con sus desplazamientos.

Parece razonable, en función de estas caracterizaciones, la idea de que la necesidad de conceptualizar y representar el espacio, es inversamente proporcional a la cantidad de información que ese espacio proporciona.

En estos momentos, parece existir cierto acuerdo de que el proceso de enseñanza de la Geometría debe contemplar entre sus objetivos el proporcionar y transmitir conocimientos espaciales, de manera que permitan a cada individuo dominar su entorno, a la vez que proporcionarles un punto de apoyo para el aprendizaje de los conocimientos geométricos.

Todos estos aspectos son puntos de necesaria consideración a la hora de diseñar situaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría.

4.4.1.3. Coordinación entre procesos de visualización y procesos de razonamiento: Teoría Cognitiva de Duval para la enseñanza de la Geometría

El aprendizaje de la Geometría implica el desarrollo de múltiples capacidades, pero son dos, principalmente, las que intervienen en la consecución de un aprendizaje significativo de esta rama por parte del estudiante, de modo que se hace necesario construir una interacción fuerte entre ambas. Nos estamos refiriendo a los procesos de visualización y a los procesos de razonamiento (Goméz-Chacón, 2013, 2014; Deliyianni, Gagatsis, Kalogirou, y Kusniak, 2011; Ekinova, 2010; Giaquinto, 2005; Godino, 2012; Kospentaris y Spyrou, 2008).

Cuando nos encontramos ante un problema por primera vez, juega un papel fundamental el sentido de la vista. A partir de él percibimos los elementos constitutivos de la situación a abordar, integrando esas primeras imágenes en una estructura más compleja, para, posteriormente, mediante la identificación, la lógica, la extracción de propiedades y el establecimiento de relaciones, todo ello basado en procesos de razonamiento, conocer la situación con mayor profundidad, encontrar la solución al problema y adquirir estrategias de solución para poder enfrentarnos a las mismas situaciones en contextos diferentes, abstractos o más formalizados.

Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), sostienen que el discurso teórico, con base en el razonamiento, debe quedar anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir sus sentido, y a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría para ganar en precisión, ver más allá de lo descriptivo y comprender la interrelación entre los elementos que pueden derivarse de la visualización. Estos autores, además, mencionan que el aprendizaje de la geometría se centra principalmente en tres aspectos:

- Los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas, constituyendo el soporte de la actividad cognitiva en geometría donde los estudiantes evolucionan en su percepción de los objetos.
- Los procesos de argumentación y justificación propios de la actividad geométrica.
- El papel que poseen las construcciones geométricas en el desarrollo del conocimiento geométrico.

Uno de los *hándicaps* en la enseñanza de la geometría es la dificultad que existe en la coordinación de los dos primeros aspectos contemplados por Castiblanco et *al.* (2004), es decir, en la coordinación de los procesos de visualización y razonamiento que tan importante es en la resolución de problemas geométricos y en la apertura de la puerta hacia el razonamiento deductivo, pues que el estudiante pase de la mera descripción superficial de las figuras y formas a un proceso más formal, basado en razonamientos y argumentación, no es algo que se de manera natural, sino que debe ser desarrollada y trabajada paulatinamente, sin dejarlo pasar por alto.

La visualización no debe quedar relegada a un simple papel descriptivo-ilustrativo de las afirmaciones geométricas, sino que debe ser reconocida como un elemento clave del razonamiento, profundamente unida a lo conceptual (Torregrosa y Quesada, 2007, p. 43).

Duval (1998) en el marco propuesto cuando habla del problema de la enseñanza de la geometría, parte de las siguientes hipótesis:

- La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción.
- Las tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente.
- Es necesario realizar durante el currículo escolar un trabajo que reconozca los diferentes procesos de visualización y de

razonamiento, pues no sólo hay varias formas de ver una figura, sino también de razonamiento.

- La coordinación entre visualización y razonamiento sólo puede ocurrir realmente tras este trabajo de diferenciación.

De acuerdo con su modelo, a la hora de hablar de los procesos de visualización y razonamiento, se hace necesario introducir el término aprehensión, distinguiendo tres tipos que caracteriza como sigue:

TABLA 4.4.1.3.1. *Tipos de aprehensiones geométricas de Duval*

Tipo de aprehensión	**Descripción**	**Subtipos**
Aprehensión perceptiva	Primera que aparece en el desarrollo cognitivo del sujeto. Se corresponde con la identificación simple de una configuración. Debe ser desarrollada en relación al ***cambio dimensional*** (proceso de identificación de configuraciones de dimensiones diferentes a la inicial)	---------
Aprehensión discursiva	Es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse en dos direcciones a la que se denomina ***cambio de anclaje.***	***Del anclaje visual al anclaje discursivo.*** ***Del anclaje discursivo al anclaje visual.***
Aprehensión operativa	Se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación en la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Este proceso es el que llamamos ***cambio configural***.	***Aprehensión operativa de cambio figural:*** consiste en añadir o quitar elementos geométricos a la configuración inicial, obteniendo nuevas subconfiguraciones. ***Aprehensión operativa de reconfiguración:*** consiste en manipular las configuraciones iniciales a modo de piezas de puzzle.

Fuente: Elaboración propia a partir de Torregrosa y Quesada, 2007

Duval considera que la aprehensión perceptiva está conectada con la discursiva y la operativa, siendo la base para el aprendizaje de la Geometría, existiendo, por lo tanto, un fuerte nexo entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento, englobando, estos últimos, a todas aquellas acciones y procedimientos que permiten comunicar, explicar, concluir, desprender nueva información a partir de datos que aporta el problema o de conocimientos adquiridos por el sujeto previamente.

Siguiendo a Duval (1998), se pueden distinguir tres tipos de razonamiento en función de la coordinación que se dé entre los tipos de aprehensiones y el grado de discurso utilizado:

TABLA 4.4.1.3.2. *Coordinación entre aprehensiones de Duval*

Tipo de razonamiento	Coordinación entre aprehensiones	Descripción
Proceso configural	Discursiva y Operativa	Desarrollo de la acción coordinada De la aprehensión discursiva y operativa que efectúa el estudiante cuando resuelve un problema de geometría, lo cual genera una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas. Puede dar lugar a la solución del problema o a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y, por tanto, hay un estancamiento del razonamiento producido.
Proceso discursivo natural	Perceptiva y discursiva natural	El proceso discursivo natural se lleva a cabo de manera espontánea en el lenguaje natural, en el acto de la comunicación ordinaria, a través de descripciones, explicaciones o argumentaciones.
Proceso discursivo teórico	Perceptiva y discursiva teórica	El proceso discursivo teórico utiliza sólo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, está estructurado deductivamente y ocurre en un registro estrictamente simbólico o en lenguaje natural.

Fuente: elaboración propia a partir de Duval, 1998

Como ya introdujimos en el análisis de las unidades de Geometría de los libros de texto, existen cuatro tipos de actividades que constituyen las cuatro grandes maneras clásicas de introducir a los estudiantes en los procesos de geometría según el papel que jueguen las figuras y formas y el uso que se haga de ellas: *Botanista, Agrimensor-Geómetra, Constructor e Inventor-Manitas*.

A estas cuatro entradas Duval (2003, 2005) añade un quinta relacionada con la manera de ver que se requiere en cualquier proceso discursivo en Geometría y que es cognitivamente crucial para la coordinación entre los procesos de visualización y los distintos procesos discursivos y de razonamiento enunciados en la tabla anterior: la *Descomposición dimensional de las formas*.

Existen dos maneras de descomponer figuras:

- *Descomposición por división mereológica*: consiste en la descomposición de una configuración inicial en unidades figurales del mismo número de dimensiones que aquella. Puede ser de tres tipos:
    - o *Estrictamente homogénea*: la descomposición se hace en unidades figurales de la misma forma que la figura que se descompone.

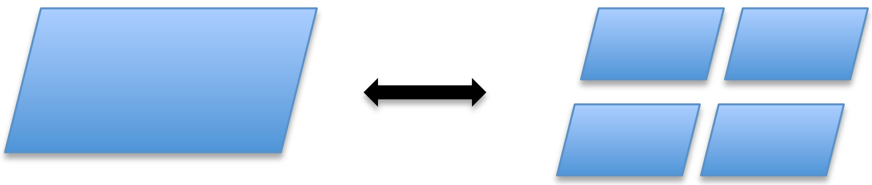


FIGURA 4.4.1.3.1. *Descomposición estrictamente homogénea*

- o *Homogénea*: se hace en unidades figurales de la misma forma pero diferentes de la forma descompuesta

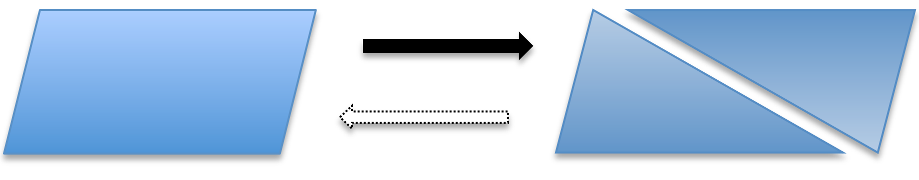


FIGURA 4.4.1.3.2. *Descomposición homogénea*

o ***Heterogénea***: se hace en unidades figurales de formas diferentes.

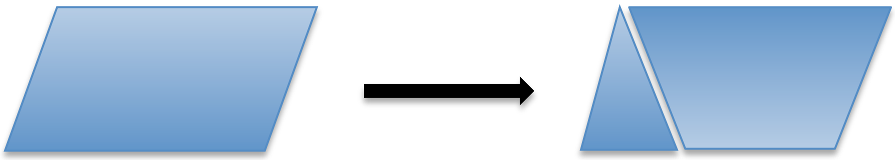


FIGURA 4.4.1.3.3. *Descomposición heterogénea*

- ***Descomposición por deconstrucción dimensional***: Consiste en descomponer una figura en unidades figurales de un número de dimensiones inferior al de la figura. Por ejemplo el desarrollo plano de un cubo:

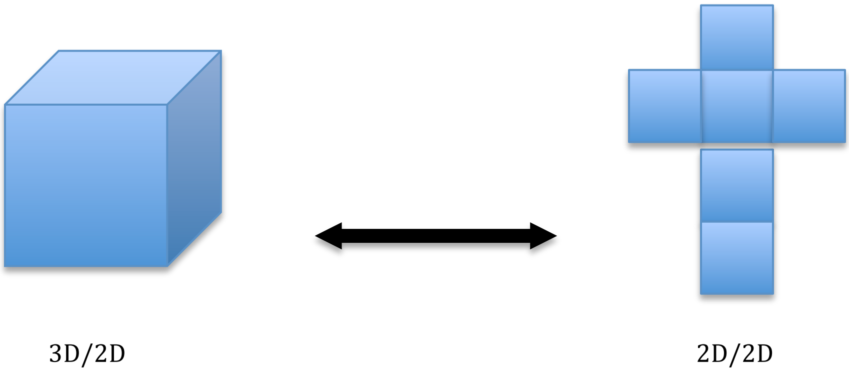


FIGURA 4.4.1.3.4. *Deconstrucción dimensional*

La descomposición dimensional se hace necesariamente en articulación con una actividad discursiva, poniendo de manifiesto la aprehensión discursiva y no solamente la perceptiva, produciéndose así la coordinación entre visualización y razonamiento.

Todos los aspectos aquí tratados han sido considerados a la hora de diseñar nuestra Ingeniería Didáctica, pues para que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría no carezca de sentido y se produzca de manera significativa, es importante la articulación entre los procesos de visualización y razonamiento, así como buscar el equilibrio entre ambas, pues dichas habilidades son fundamentales dentro del proceso formativo del sujeto en lo que a esta rama de conocimiento se refiere.

A nivel de aprendizaje, la forma de visualizar, la forma de razonar y su coordinación, deben tener tanto interés como los propios contenidos, pues en sí mismos son un gran objetivo a adquirir.

Por ello, y partiendo de la base de que la coordinación entre visualización y razonamiento solo se puede conseguir tras cierto trabajo de diferenciación de ambos procesos, la ingeniería Didáctica trata de integrar dichos elementos, así como aportar una estructura general de articulación entre ambos sobre los que se apoyen los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas de Geometría.

4.4.1.4. Algunas consideraciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría y las representaciones: dificultades y obstáculos

Como ya hemos mencionado con anterioridad, la enseñanza de la Geometría es una de las áreas de las Matemáticas en las que hay más puntos de desencuentro, no sólo en relación con sus propósitos y contenidos sino también con la manera de enseñarla y enfocarla dentro del aula.

Las representaciones, ya sean gráficas, planas o incluso espaciales (maquetas, modelos a escala, etc.), han sido, y son en la actualidad, un núcleo central de interés, siendo insoslayables e imprescindibles para expresar, comunicar y construir conocimientos, conceptos e ideas geométricas.

A las representaciones en Geometría se les atribuye, principalmente, un doble funcionamiento. El primero de ellos hace referencia a su carácter únicamente descriptivo, para exponer y evidenciar características y propiedades de un problema geométrico. El segundo es su función heurística, sirviendo de apoyo a la intuición para encontrar estrategias y procedimientos que lleven a la resolución del problema. Sin embargo, nosotros consideramos que desempeñan funciones mucho más amplias.

El ser humano, desde su infancia, crea representaciones del mundo físico que le rodea. La construcción de las imágenes mentales de nuestro entorno requiere hacer presente en la mente las formas y las relaciones de los objetos y elementos que lo constituyen, por lo que los diversos registros de representación semióticos, en particular los concernientes a figuras, dibujos, croquis, representaciones icónicas y gráficas, constituyen un lenguaje ideal para el desarrollo de la intuición geométrica, la percepción visual y la percepción espacial, resultando ser herramientas muy útiles, no solo para la resolución de problemas, sino también para comprender razonamientos y generar una visión completa del objeto de conocimiento al que hacen referencia.

Al tratarse la Geometría de una disciplina eminentemente visual, cobra una marcada importancia el manejo e interpretación de esquemas, imágenes, diagramas, etc., lo cual según Duval (1993, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2008, 2011, 2012), D'Amore (2003, 2004, 2006) y Radford (2004a, 2004b, 2008, 2009, 2013), requiere la puesta en funcionamiento de complejos procesos semióticos por parte del alumno, y por ello es indudablemente necesario tratar y reflexionar sobre la naturaleza de sus objetos y las dificultades que emergen en la enseñanza de la misma, en la cual se localizan diversos fenómenos didácticos.

De entre todos los registros de representación semióticos existentes, tres son los más utilizados en la presentación, tratamiento y conceptualización de la información geométrica:

- Registro Figural-Icónico ligado al sistema perceptivo visual, constituyendo un punto intermedio entre los objetos teóricos y los objetos reales.
- Registro de la Lengua Natural ligado a los procesos discursivos natural y teórico.
- Registro Algebraico que adquiere características particulares en Geometría e incluye el recurso de las fórmulas.

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría es necesario, para la representación, exposición y comprensión de ideas y conceptos, la utilización de estos registros, principalmente del Figurativo-Icónico, que alude a imágenes y dibujos a través de las cuales podamos mostrar los objetos y nociones, estudiar los elementos que los definen y establecer relaciones estructurales. En diversas ocasiones, este hecho, puede dar lugar a la aparición de dificultades en el aprendizaje, debido a que el objeto geométrico y su representación son cosas diferentes, no son el mismo ente. Esta distinción es crucial, pues de considerarlo lo mismo, limita e impide generalizar, de modo que los estudiantes quedan atrapados por una situación particular.

Una determinada imagen, pongamos por ejemplo el dibujo de un triángulo, puede ser tomado como entidad genérica y representante de todos los casos o situaciones, lo que conduce inmediatamente a la aparición de errores en los estudiantes, los cuales razonaran con un dibujo genérico como si fuera un caso específico no correspondiente con el representado.

Debemos tener en cuenta que la naturaleza de las entidades geométricas es substancialmente distinta de los objetos y representaciones perceptibles que evocan a aquellos (una recta, como ente matemático, es infinita y carece de espesor, no así los dibujos que se hacen de ella), por lo que es necesario establecer la diferenciación de los dos planos (objeto abstracto y realidad concreta) (Godino, 2002, 2012).

Es precisamente este carácter abstracto lo que nos sitúa, de manera inmediata, delante de las figuras, siendo a través de ellas como los enseñantes, practicando una presentación ostensiva, van haciendo aparecer los nuevos objetos de la geometría, definiciones y propiedades.

El contrato didáctico en que se apoya la ostensión, deja bajo la responsabilidad del estudiante el establecimiento de relaciones entre los conceptos que se les pretende transmitir y las representaciones mostradas, de manera que el profesor, de manera inconsciente, pretende que el estudiante comprenda lo que él quiere que vea, considerando que ambos deben ver y leer en la representación exactamente lo mismo, situación que no se produce en diversas ocasiones (Chamorro, 2005a), pues el proceso de visualización, y el establecimiento de conexiones entre lo representado y las características, propiedades y conocimientos que debe sustraer de la misma, exige el desarrollo de una serie de habilidades entre las que destacan el saber ver, el saber interpretar y comprender la manera de mirar (Ekinova, 2010).

Puesto que el uso de la ostensión en la enseñanza de la Geometría es inevitable, pues no podemos definir un punto, un plano, un paralelepípedo, etc, sin mostrarlo, es necesario que el profesor ejerza un control consciente, limitándola al mínimo, además de completar la práctica ostensiva con otro tipo de métodos de enseñanza y aprendizaje, en las que el alumno se enfrente a diversas situaciones donde el conocimiento adquiera sentido y en las que se puede variar tanto el tipo de información que se les da como el registro de representación utilizado para dársela.

Además, no debemos olvidar que el uso de representaciones prototípicas, muy decantadas, estereotipadas, se pueden constituir en un obstáculo didáctico por ocultar las verdaderas propiedades y relaciones geométricas que subyacen en ellas.

Luego, la clasificación de las figuras, el establecimientos de relaciones y la generalización de propiedades, no puede transmitirse al alumno a partir únicamente de la percepción, pues debemos tener en cuenta que un dibujo no muestra el significado, que los dibujos como signos son generalmente polisémicos y que, por lo tanto, el estudiante necesita unir dibujo y significado en el marco de la teoría en la que se trabaja.

El trabajo con figuras geométricas lleva aparejada la utilización de un registro de representación multifuncional, y es la utilización de tratamientos dentro de este registro lo que genera una fuente de incomprensión en el estudiante (Duval, 2006b).

Como ya hemos dicho en el apartado anterior, la coordinación entre el proceso de visualización y el proceso de razonamiento caracteriza los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas geométricos, es decir, que en geometría es necesario movilizar conjuntamente y en paralelo dos registros de representación: uno se produce de manera discursiva, por deducción de propiedades que impliquen el uso del lenguaje, y el otro se da de manera visual a través de la reconfiguración de las figuras (Torregrosa y Quesada, 2007).

Por tanto, hay que intentar que el alumno desarrolle durante su etapa educativa dicha coordinación, mediante tareas que le permitan alcanzar tal capacidad.

Debido a que los conocimientos espaciales y geométricos tardan tiempo en formarse y al largo proceso que el alumno debe recorrer hasta dominar la representación y percepción de los mismos, las actividades y tareas que se recojan en los manuales escolares y las situaciones que se propongan en el aula, deben estar en consonancia con el nivel evolutivo de los alumnos, ya que, en caso contrario, tendrá lugar la aparición de obstáculos de tipo ontogenético[1].

Además, partiendo de la idea de que los conceptos matemáticos son entidades ideales y abstractas que debemos representar para hacerlos visibles y que, siguiendo a Vecino (2001), a cada ente geométrico le podemos asociar diversas representaciones, sean estas implícitas o explicitas, su enseñanza debe focalizarse en profundizar estas formas de representación múltiples, para que los alumnos se muevan libremente de una representación a otra, lo que se traduce en prestar atención al desarrollo de distintos niveles de representación, a la expresión verbal y a la representación a través de signos, símbolos, dibujos, gráficos, etc.

4.4.1.5. El caso particular de la enseñanza del Teorema de Pitágoras y la Semejanza

Durante años se ha discutido, tanto por parte de matemáticos como de educadores, sobre distintos aspectos relacionados con la transmisión de los conceptos geométricos en la Educación Secundaria, así como qué contenidos debían contemplarse.

[1] Los obstáculos de origen ontogenético son aquellos ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos, siendo el resultado del desarrollo psicogenético del alumno.

En los primeros años de la secundaria, el trabajo con figuras y cuerpos continúa: se avanza en el establecimiento de relaciones más complejas (entre ellas, algunos teoremas clásicos de la geometría plana) así como en el desarrollo de la argumentación deductiva como forma de trabajo en geometría.

Por ello, cobra una gran importancia el trabajo perceptivo como complemento de la acción y de la representación en la Geometría, como reivindicaban autores como Montessori (1937), Castelnuovo (1963), Área, Parcerisa y Rodríguez (2010), González Marí (2010), Viillarroel y Sgreccia (2011), lo que se traduce en la utilización de recursos y material variado, así como plantear experiencias que hagan darse cuenta de la importancia de la geometría respecto al propio entorno en el mundo cotidiano.

La construcción o del descubrimiento de un concepto matemático se realiza recorriendo diferentes niveles, que empiezan a un nivel intuitivo y van progresando sucesivamente a través de un nivel experimental, un nivel teórico y un nivel axiomático.

Siguiendo a Gattegno (1967),

> los alumnos a quienes se introduce con excesiva premura en la verbalización de situaciones no exploradas en el nivel perceptivo y activo, no dispondrán de las dimensiones que hacen posible el diálogo intelectual (p. 26)

Así les será muy difícil alcanzar más adelante el nivel formal si antes no han manipulado de forma activa material y realizando descripciones con detalle de la actividad, pues para descubrir, comprender y consolidar conceptos es necesario manipular, palpar, hacer tangible, siendo necesario que sea el punto de partida en la construcción del conocimiento geométrico, ya que de lo concreto, percibido, actuado y representado explícitamente, pasaremos a lo imaginado y a la abstracción.

Al trabajar con material, una de las cuestiones que surgen es que hay que tener en cuenta las distintas técnicas de reproducción que los estudiantes pueden emplear (dibujar, copiar, recortar, pavimentar, etc.) de manera que no solo trabajen con objetos que ya existen en su entrono, con material ya construido o con herramientas como el compás, el transportador, etc., sino que ellos mismos vean la necesidad de construir y manipular un material adecuado para la resolución de las situaciones planteadas, cuyo resultado sea la consecución del conocimiento deseado.

Por otro lado, para que la utilización de material resulte realmente útil, a la par que creativo, debe sustentarse en el lenguaje, lo que nos conduce de manera necesaria al trabajo en grupo y por lo tanto a hablar: discutir ideas, formular preguntas, describir procesos, explicar métodos de resolución, argumentar resultados, etc.

A continuación, vamos a centrarnos en la enseñanza de dos conceptos de gran relevancia dentro de la matemática de Secundaria en general, y del bloque geométrico en particular, por su riqueza de conexiones con otros conocimientos y temas.

En primer lugar, trataremos de exponer y analizar el marco legislativo en relación a ambas nociones, para, posteriormente, presentar maneras alternativas de abordarlos dentro de las aulas de secundaria, que por lo general se encuentran bastante alejadas de las prácticas expuestas más arriba, girando su proceso de enseñanza-aprendizaje entorno al discurso del profesor, al contexto representado por los libros de texto y a la presentación de expresiones algebraicas y fórmulas que aparecen totalmente desconectadas y desvinculadas de las estructuras propias de cada concepto.

4.4.1.5.1. El Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras es probablemente uno de los más famosos, populares e importantes resultados de la geometría elemental que forma parte del bagaje cultural de toda civilización, al menos desde un punto de vista práctico, desde las más antiguas (India, China, Babilonia, Egipto) hasta la actualidad (Godino, Batanero y Roa, 2002).

Desde los primeros pasos de institucionalización de la Escuela en el mundo grecorromano, el Teorema de Pitágoras se ha constituido como un elemento curricular imprescindible e insoslayable, convirtiéndose en una de las relaciones matemáticas más conocida por los sujetos con una formación básica, ofreciendo un importante valor práctico y teórico, debido, principalmente, a dos de sus aspectos más destacados.

En primer lugar destaca su rol instrumental y utilitario, considerándose una relación matemática absolutamente necesaria tanto para la enseñanza de posteriores conceptos de ámbito matemático y científico, presentando interesantes conexiones con otros problemas y teorías, como para resolver y afrontar multitud de problemas. Pero aún más destaca su carácter formativo, pues si centramos su enseñanza-aprendizaje en que los estudiantes desarrollen el proceso de construcción del Teorema, les estaremos introduciendo en un tipo de conocimiento muy específico, con características propias y diferenciadoras frente a otros contenidos, ya que supone un trabajo práctico empírico- inductivo a la vez que promueve la argumentación deductivo-demostrativa (Arrieta, Álvarez y González, 1997).

Cuando leemos el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria de la actual Ley Orgánica de Educación (MEC, 2007), observamos que El Teorema de Pitágoras se recoge por primera vez en el Bloque de Geometría a partir del 2º Curso, especificándose los siguientes contenidos y criterios de evaluación en relación con él hasta el último curso de la Educación Secundaria Obligatoria:

TABLA 4.4.1.5.1.1. *El Teorema de Pitágoras en la LOE*

	Contenidos	**Criterios de Evaluación**
1º ESO	----	----
2º ESO	Triángulos rectángulos. El Teorema de Pitágoras: justificación geométrica y aplicaciones. Utilización del Teorema de Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.	Emplear el Teorema de Pitágoras y las formas adecuadas para obtener longitudes, áreas y volúmenes de las figuras planas y los cuerpos elementales en la resolución de problemas geométricos.
3º ESO	Aplicación de los teoremas de Thales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.	Utilizar los teoremas de Thales, de Pitágoras y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales por medio de ilustraciones, de ejemplos tomados de la vida real o en la resolución de problemas geométricos.
4º ESO (A)	Aplicación del Teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.	Utilizar instrumentos, técnicas y fórmulas apropiadas para obtener medidas indirectas en situaciones reales.
4º ESO (B)	---	---

Fuente: elaboración propia a partir del MEC, 2007

Lo primero que constatamos es el predominio de su vertiente utilitaria e instrumental, tanto en los contenidos como en los criterios de evaluación, pasando totalmente por alto la importancia de que el estudiante lleve a cabo el proceso de construcción del Teorema, a través del cual descubriría la relación existente entre ángulos, longitudes y áreas.

No existe teorema matemático que haya suscitado tanto interés y atención, tantas ilustraciones y demostraciones como el Teorema de Pitágoras; es posible enunciarlo en términos de áreas, de medidas de áreas o de medidas de longitud al cuadrado, existiendo, como recoge Loomis en su obra *The Pythagorean Proposition* publicada en 1927, pruebas algebraicas basadas en relaciones entre lados y segmentos, pruebas geométricas basadas en comparaciones de áreas e incluso pruebas dinámicas basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, etc., por lo que sería necesario hacer una revisión de las distintas formas en que se puede presentar el teorema, y por tanto, de transmitirlo a los alumnos.

Se impone el reconocimiento del Teorema en su forma algebraica por medio de la formulación, frente a su forma geométrica. Este hecho desemboca en que para un abanico bastante amplio de sujetos el Teorema de Pitágoras se reduzca a la expresión $a^2 + b^2 = c^2$, sin recordar qué son y que papel juegan *a*, *b* y *c*, perdiéndose todo el sentido y esencia del mismo.

Los conceptos que son precisos aprender para asegurar una implementación de los conocimientos que más adelante posibiliten su adecuada utilización, están recogidos en la relación básica que se establece en el Teorema, a saber que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Las nociones de catetos, hipotenusa, triángulo rectángulo, ángulo recto, suma de cuadrados, el proceso de descomposición de rectángulos y otras formas geométricas en triángulos, etc., constituyen las figuras sintácticas que conforman el Teorema, siendo necesario construirlas y desarrollarlas a partir de una dinámica de trabajo que sitúe al estudiante frente a contextos en los que sea necesario actuar, probar, experimentar, diseñar, modelar, etc., proponiéndoles situaciones en las cuales los conocimientos aparezcan como solución óptima a los problemas planteados (Arrieta, Álvarez y González, 1997).

El comportamiento del Teorema aplicado a triángulos acutángulos y obtusángulos tampoco se recoge en los contenidos establecidos por el Decreto de Enseñanzas Mínimas, al igual que la generalización del teorema de Pitágoras a partir de la construcción de polígonos regulares construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, lo que completaría de manera significativa la comprensión y aprehensión de dicho objeto de conocimientos por parte de los estudiantes.

Del mismo modo, no se tiene en cuenta el desarrollo histórico como herramienta para introducir los conceptos, lo que permitiría la apropiación del conocimiento teniendo en cuenta la trascendencia y alcance que ha tenido desde tiempos remotos.

Es necesario ver el Teorema de Pitágoras como un teorema que relaciona números y geometría, sabiéndolo demostrar utilizando material y el pensamiento visual, a partir de juegos didácticos (puzzles, mosaicos, figuras recortadas, etc.) que desarrollen la inquietud sobre la veracidad del mismo y permitan acercarse a los conceptos a partir de su carácter dinámico favoreciendo la formación de representaciones mentales, la ejemplificación de ideas, la modelización de situaciones y el cambio de registros de representación semióticos.

Por todo ello, debemos intentar cubrir todas estas carencias y apoyarnos en los principios psicopedagógicos que se deducen de una concepción constructivista del proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras, para lograr que los estudiantes, a partir de su nivel de desarrollo y mediante la construcción y modificación de sus esquemas internos, efectúen aprendizaje significativo por sí mismos.

4.4.1.5.2. Semejanza

Siguiendo a Hart, Brown y Küchmann (1981), una palabra tan utilizada y tan usual como es *semejante*, que aparentemente no debería presentar ningún tipo de dificultad ni controversia, es en realidad una noción espinosa desde el punto de vista matemático, dado que para muchos estudiantes su significado es el de tener *la misma forma*, pero *la misma forma* es también una noción difícil cuando se trata de figuras planas, pues por ejemplo todos los rectángulos tienen *la misma forma* en el sentido de que son todos rectángulos, y sin embargo no todos los rectángulos son *semejantes*.

Una posible causa de la complejidad del aprendizaje del concepto de semejanza deriva de la evolución histórica que ha sufrido (Escudero, 2005). Ya en *Los Elementos de Euclides* aparecen teoremas relativos a la semejanza, lo que nos indica que se trata de una noción muy antigua que ha variado la forma en que se define a los largo del tiempo.

Si consultamos el Diccionario de la Real Academia Española, semejante, en su acepción geométrica, se define como, “Dicho de una figura: Que es distinta a otra solo por el tamaño y cuyas partes guardan todas respectivamente la misma proporción.”

Lewis Carrol en su obra *Las Aventuras de Alicia en el país de las maravillas*, citado por Coxeter (1971) en el capítulo dedicado al estudio de la semejanza, , escribe:

> Estoy segura de que al comer uno de estos pastelillos, pensó, cambiaré de tamaño... de manera que se tragó uno... y con alegría descubrió que se empezaba a encoger directamente (p. 58).

Con este ejemplo, Coxeter pretende poner de manifiesto a que nos referimos visualmente cuando hablamos de semejanza, pues Alicia se encoje manteniendo sus proporciones.

El Grupo Beta (1990), caracteriza la noción de semejanza partiendo de los conceptos básicos implicados como cantidad, magnitud y medida, hasta llegar a los conocimientos más importantes relacionados con el tema de estudio como son la proporcionalidad de segmentos, el teorema de Thales, la semejanza en el plano y en el espacio.

Son múltiples los conceptos que son necesarios abordar en el estudio de la semejanza, como podemos observar en el siguiente mapa conceptual, resultando de suma importancia construirlos y concebirlos para que los estudiantes sean capaces de abstraerse de las figuras, pues el rol que juegan cada uno de estos conceptos es fundamental para la descomposición genética del concepto de semejanza:

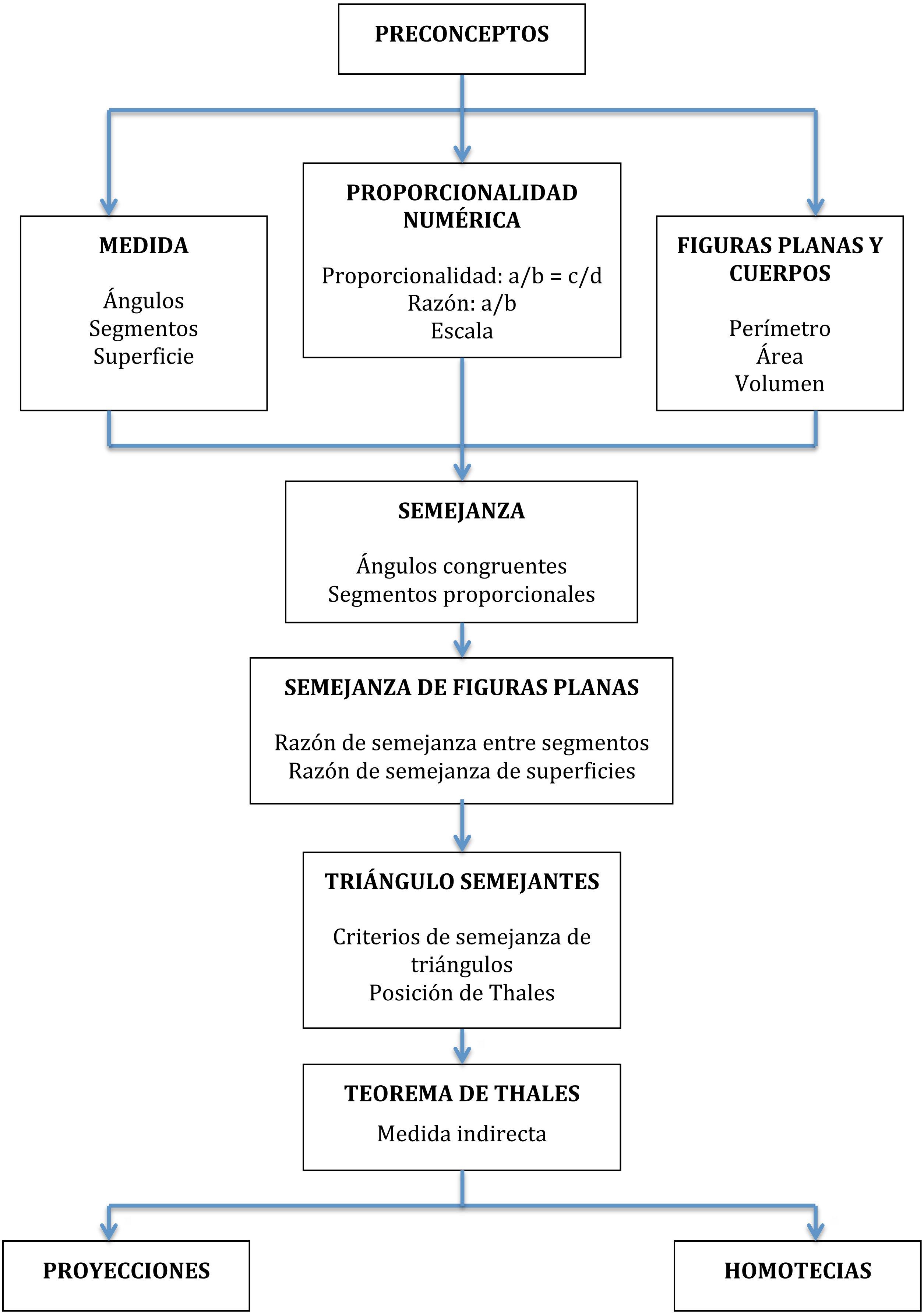


FIGURA 4.4.1.5.2.1. *Descomposición genética del concepto de semejanza*

Es necesario que los estudiantes generen las estructuras cognitivas necesarias y previas al estudio de la semejanza, pues la comprensión de los nuevos conceptos se sustentaran en esos cimientos precedentes a modo de redes neuronales, evitando su incorporación como conocimientos aislados.

Dos figuras pueden tener la misma forma, dimensiones diferentes y no ser semejantes, pues para que lo sean, una de ellas debe ser un modelo a escala de la otra, cumpliendo dos condiciones necesarias y suficientes: que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales.

Siguiendo a Godino, Batanero y Font (2003), en el nivel 0 de razonamiento, según el modelo de Van Hiele, el concepto de *semejanza* es estrictamente visual y posiblemente no será preciso. En el nivel 1, los alumnos pueden comenzar a hacer medidas de ángulos, longitudes de lados, calcular áreas , etc., pudiendo encontrar relaciones entre formas semejantes.

Para lograr que los estudiantes se aproximen al concepto de semejanza de manera que se produzca un aprendizaje significativo, Lemonidis (1991) afirma que se debe de tener en cuanta dos aspectos fundamentales:

- La relación intrafigural: se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.
- La transformación geométrica: Aparece la noción de transformar una figura en otra.

Del mismo modo, Escudero (2003), fija unos referentes para la adecuada transmisión de la noción de semejanza basados en los principios de Lemonidis y en los modos de representación, entendidos estos últimos como posibilidades semióticas de representar el contenido. Son diversos los distintos sistemas de representación, cada uno con sus características, usos y finalidades, mediante los cuales se hace presente la noción de semejanza y todos los conceptos relacionados con ella: el Registro de la Lengua

Natural, el Registro Algebraico, el Registro Figural, el Registro Tabular, el Registro Numérico y el Registro Geométrico.

Junto a ello, Escudero considera vital analizar el tipo de actividades y situaciones sobre la semejanza, en particular, y el razonamiento proporcional, en general, que se les presenta a los estudiante, pues pueden encontrar algunos obstáculos y dificultades como son el no reconocimiento de la semejanza cuando el valor de los lados de una figura no son medidas enteras, el uso de una estrategia aditiva errónea y la falta de relación entre los lados en el caso de que a un lado le corresponda un valor fraccionario, así como la falta de congruencia entre los distintos registros de representación, problema que surge, por ejemplo, cuando las figuras no tienen la misma orientación sobre el plano y sí son semejantes, lo que hace deducir a los alumnos que no lo son, situación que se da porque el orden entre los elementos que forman las figuras dejan de ser congruentes visualmente en el sentido de Duval.

Es de suma importancia que el concepto formal se aprenda con rigurosidad en los años de escolaridad, de lo contrario podría tener efectos en la compresión de diversos conceptos con los que el estudiante se enfrentará posteriormente, como es el Teorema de Thales.

El estudio de la semejanza está propuesto en el Curriculum Oficial de Secundaria desde 2º hasta 4º de ESO, mostrando el desarrollo de competencias, que se pretende que el estudiante adquiera, de manera gradual, como se muestra en la tabla siguiente:

TABLA 4.4.1.5.2.1. *El concepto de Semejanza en la LOE*

	Contenidos	**Criterios de Evaluación**
1º ESO	----	----
2º ESO	Idea de semejanza: figuras semejantes. ampliación y reducción de figuras: razón de semejanza y escalas. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Utilización del Teorema de Thales para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.	Utilizar la semejanza para construir polígonos semejantes a otros a partir de una razón dada. Elegir la escala adecuada para representar figuras de dimensiones reales en el plano.
3º ESO	Aplicación de los teoremas de Thales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Teorema de Thales. División de un segmento en partes proporcionales.	Calcular las dimensiones reales de figuras representadas en mapas o planos, y construir croquis a escala adecuadas. Utilizar los teoremas de Thales, de Pitágoras y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales por medio de ilustraciones, de ejemplos tomados de la vida real o en la resolución de problemas geométricos.
4º ESO (A)	Aplicación de la semejanza de triángulos para la obtención indirecta de medidas.	Utilizar instrumentos, técnicas y fórmulas apropiadas para obtener medidas indirectas en situaciones reales.
4º ESO (B)	Figuras y cuerpos semejantes: razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes. Teorema de Thales. Aplicación al cálculo de medidas indirectas.	Utilizar instrumentos, técnicas y fórmulas apropiadas para obtener medidas indirectas en situaciones reales.

Fuente: elaboración propia a partir del MEC, 2007

El significado de semejanza y el estudio de la razón de semejanza entre figuras, superficies y volúmenes, son tratados, según el Curriculum Oficial de Educación Secundaria, de forma aparentemente superficial, casi de pasada, cómo si lo importante y fundamental fuera solo el cálculo numérico, lo que trae como consecuencia una concepción pobre e incompleta por parte de los estudiantes.

Este contenido generalmente se construye como una acción en los alumnos, los cuales no reconocen las variaciones en las figuras y al no hacerlo no comprenden el concepto que existe detrás, ya que se pone mayor énfasis en lo operacional que en lo estructural.

La noción se semejanza parece trabajarse con excesivo formulismo, tendiéndose a una algebrización de las nociones geométricas que en ella subyacen, como podemos observar en los criterios de evaluación donde se hace continua alusión a la utilización de las fórmulas apropiadas para obtener medidas indirectas.

El fin principal y último del estudio de la semejanza parece ser la introducción al Teorema de Thales, apareciendo ambas nociones desconectadas; es necesario preocuparnos de que los estudiantes conozcan el porqué y qué es lo que demuestra las proporciones que plantea el Teorema de Thales, pues de lo contrario los estudiantes tienden a una concepción acción del teorema, sin relacionarlo con la semejanza de triángulos, en particular, y la semejanza de figuras planas en general.

Debemos trabajar actividades sobre la semejanza con una metodología de exploración, investigación, descubrimiento, construcción, etc., con y sobre objetos reales de los que rodean al estudiante, empleando materiales y recursos como pueden ser los puzzles, el tangram, maquetas a escala, planos, etc. Tenemos plantear situaciones de aprendizaje que conlleven una participación activa del alumno, alejándonos de ejercicios rutinarios, que aunque proporcionan algún tipo de beneficio no son lo suficientemente completos en el proceso de enseñanza-aprendizaje debido a su carácter mecánico y repetitivo.

Todo lo aquí expuesto nos ha servido como fuente y soporte para el diseño de nuestra propuesta de aula, permitiendo abordar estrategias, evitar errores y desarrollar un aprendizaje significativo del concepto de semejanza a partir de la utilización de diversos sistemas de representación y uso de recursos y materiales que han facilitado tanto la construcción de significados y como una adecuada aprehensión de los mismos a través de diversas situaciones didácticas.

4.4.2. Presentación de la ingeniería

Está primera ingeniería, desarrollada para el curso de 2º de ESO, va centrarse en la enseñanza de la Geometría, por ser una de las áreas de las Matemáticas en las que hay más puntos de desencuentro, no sólo en relación con sus propósitos y contenidos sino también en la manera de enseñarla, además de ser una disciplina eminentemente visual, donde cobra una marcada importancia el manejo e interpretación de figuras, esquemas, dibujos, diagramas, etc., lo cual requiere la puesta en funcionamiento de complejos procesos semióticos por parte del alumno.

Las situaciones didácticas diseñadas intentan cumplir una doble función. De un lado la ingeniería didáctica pretende observar y estudiar los fenómenos establecidos en las hipótesis de este trabajo de investigación, es decir, una función fenomenotécnica. Por otra parte tiene una clara intención didáctica, buscando conclusiones que permitan el diseño de una propuesta de enseñanza que favorezca el trabajo con registros de representación semióticos y su conversión en relación a los conceptos de Teorema de Pitágoras y semejanza se refiere.

El listado de las situaciones es el siguiente:

Aprendizaje del Teorema de Pitágoras:

- Situación 1: Familiarización con la descomposición de figuras. Pavimentado de una superficie con otra.
- Situación 2: El Teorema de Pitágoras a través de tratamientos figurales.
- Situación 3: Generalización del Teorema de Pitágoras.
- Situación 4: El Teorema de Pitágoras a través del álgebra.
- Situación 5: Aplicación del Teorema de Pitágoras. Cable más corto.

Duración estimada: 5 sesiones

Aprendizaje de la Semejanza:

- Situación 1: Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.
- Situación 2: Trabajando con planos, mapas y escalas.
- Situación 3: Criterios de semejanza en triángulos.
- Situación 4: Aplicación de la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias. Sombras.

Duración estimada: 5 sesiones

4.4.2.1. Descripción del dispositivo experimental.

Gracias al material y equipo suministrado por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, ha sido posible acondicionar un aula con el sistema de grabación en el Instituto Público “Pablo Neruda” de Leganés (Madrid), lo que ha hecho posible el desarrollo de la experiencia con los alumnos de 2º ESO durante los meses de abril y mayo del curso 2011-2012.

El aula dónde se montó la infraestructura no era en la que los alumnos desarrollaban habitualmente el transcurso de las clases, ya que el propio centro seleccionó y facilitó una cuyas condiciones acústicas eran más favorables para la realización de la experiencia. En dicho aula se instalaron una serie de micrófonos según aparecen en el esquema siguiente:

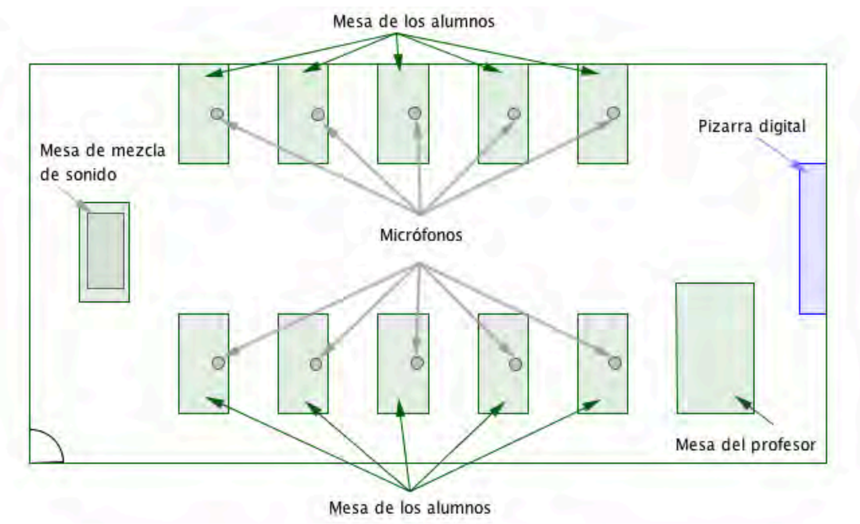


FIGURA 4.4.2.1.1. *Disposición en el aula de trabajo*

Los alumnos trabajaran en grupos de 2 o 3 y en cada una de las mesas de trabajo se dispondrá de un micrófono que permite registrar las conversaciones que tengan lugar entre los miembros del grupo aunque estas se den a volúmenes bajos, y que tan enriquecedoras son de cara a nuestro estudio. Además, la propia cámara está equipada con un micrófono direccional que se utiliza cuando se graba de manera directa a cada uno de los grupos o cuando algún alumno sale a la pizarra a dar alguna explicación. El profesor lleva colocado su propio micrófono inalámbrico.

Desde la mesa de mezcla de sonidos se selecciona la señal de audio que se va a grabar en vídeo a través de una cámara de formato mini DV, abriendo y cerrando cada micrófono, de modo que es posible grabar las decisiones, razonamientos y discusiones de cada grupo a una cierta distancia.

Para el desarrollo de cada sesión se ha contado con un equipo humano que se encargaba de las siguientes funciones:

- Profesor-conductor de la Ingeniería y responsable de la crónica general de la clase:
    - Jesús Macías Sánchez (Alumno de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).
- Observadores:
    - Mª del Carmen Chamorro Plaza (Catedrática de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid).
    - Juan Miguel Belmonte Gómez (Profesor titular del departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid).
    - Irene Rodríguez Mora (Alumna de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).

- María González Cámara (Alumna del Master del Profesorado en la especialidad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).

- Gestión y organización de los alumnos:
  - Carlos Cerrolaza Gómez (Profesor de Matemáticas del grupo A de 2º ESO)
- Manejo de cámara para la grabación en vídeo:
  - Paulina Olivares (Alumna del Master del Profesorado en la especialidad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).
- Manejo de la mesa de mezcla de sonido:
  - Eduardo Bustamante Vargas (Alumno del Master del Profesorado en la especialidad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).
  - Javier Merino Silva (colaborador).

Previamente a la realización de la experiencia, se desarrollaron varias reuniones de trabajo con el Jefe de estudios del centro, Don Enrique Fernández González, el Jefe de Departamento de Matemáticas, Don Javier Sanz, y el profesor de matemáticas del grupo en el cuál se iba a desarrollar la ingeniería, Don Carlos Cerrolaza Gómez, con el propósito de hacerles conocedores y partícipes de las situaciones didácticas diseñadas.

Del mismo modo, con el fin de asegurarnos que todo el equipo colaborador tuviera la información necesaria sobre la experiencia a realizar y conocieran bien el desempeño de sus funciones, tuvieron lugar una serie de sesiones informativas y aclaratorias.

Además, se redactó una carta que se hizo llegar a los padres de los alumnos, detallándoles las características de las prácticas que se iban a llevar a cabo e indicándoles el valor en términos de enseñanza-aprendizaje de la acción didáctica que se iba a realizar con sus hijos.

Con todo el dispositivo ya operativo, se han desarrollado casi la totalidad de las situaciones nombradas más arriba, dejando fuera aquellas que versaban sobre contenidos extracurriculares y que por falta de tiempo ha sido imposible llevar a la práctica.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, la experiencia tuvo lugar con los alumnos del grupo A de 2º ESO.

En el grupo, constituido por 23 alumnos, encontramos dos alumnos con necesidades educativas especiales, de los cuales uno de ellos participó en todas las sesiones realizadas obteniendo resultados satisfactorios en varias de ellas.

Por otro lado, entre los alumnos matriculados en este curos, no se encuentra ningún estudiante repetidor.

El curso elegido ha sido 2º ESO, y en concreto el grupo A, por varias razones:

- Los contenidos tratados se ajustan desde un punto de vista curricular a dicho nivel.
- Se trata de un grupo de alumnos que presenta cierta homogeneidad en lo que a rendimiento, en términos de eficacia, tienen en la asignatura de matemáticas.
- Disponen de los conocimientos matemáticos necesarios para abordar con garantías las estrategias optimales que presentan las situaciones diseñadas.
- Se trata de niños de 13 o 14 años de edad, lo que permite trabajar de forma significativa la conversión entre registros y los contenidos geométricos a tratar a partir de la manipulación y la visualización.

La cronología de las sesiones en relación al Teorema de Pitágoras fue la siguiente:

TABLA 4.4.2.1.1. *Distribución de la sesiones de Pitágoras*

Sesión	Fecha	Situación
1	11/04/2012	**Situación 1:** Familiarización con la descomposición de figuras. Pavimentado de una superficie con otra.
		Situación 2: Teorema de Pitágoras a través de tratamientos figurales. ***Fase 1:*** *Descomposición mereológica estrictamente homogénea.*
		Situación 2: Teorema de Pitágoras a través de tratamientos figurales. ***Fase 2:*** *Descomposición mereológica homogénea.*
2	12/04/2012	**Situación 2:** Teorema de Pitágoras a través de tratamientos figurales. ***Fase 3:*** *Descomposición mereológica heterogénea.*
3	13/04/2012	**Situación 4:** El Teorema de Pitágoras a través del álgebra. ***Fase 1:*** *Demostración del Teorema de Pitágoras mediante álgebra.*
		Situación 4: El Teorema de Pitágoras a través del álgebra. ***Fase 2:*** *Identificación de los tipos triángulos atendiendo a sus ángulos a partir de sus medidas.*
4	16/04/2012	**Situación 4:** El Teorema de Pitágoras a través del álgebra. ***Fase 3:*** *En busca de un teorema.*
5	18/04/2012	**Situación 5:** Aplicación del Teorema de Pitágoras: Cable más corto.

Fuente: elaboración propia

La cronología de las sesiones en relación al concepto de semejanza fue la siguiente:

TABLA 4.4.2.1.2. *Distribución de la sesiones de Semejanza*

Sesión	Fecha	Situación
6	19/04/2012	**Situación 1:** El Juguetero. ***Fase 1:*** Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.
7	20/04/2012	**Situación 1:** El Juguetero. ***Fase 2:*** El Juguetero. Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.
8	23/04/2012	**Situación 2:** Trabajando con planos, mapas y escalas. ***Fase 1:*** Medida de planos a partir de la escala dada. Juego de comunicación.
9	25/04/2012	**Situación 2:** Trabajando con planos, mapas y escalas. ***Fase 1:*** Medida de planos a partir de la escala dada. Juego de comunicación. ***Fase 3:*** Medida de planos a partir de la escala establecida por los alumnos.
10	26/04/2012	**Situación 4:** Aplicación de la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias. Sombras.

Fuente: elaboración propia

4.4.3. Análisis a priori

Situación 1: Familiarización con la descomposición de figuras. Pavimentado de una superficie con otra.

Objetivo:

- Proporcionar al alumno una herramienta que permita hacer una comparación de figuras, desde el punto de vista de la superficie, basada en la descomposición mereológica 2D/2D.

- Insistir en la igualdad de cantidad de superficie de figuras con forma distinta.

Material:

- Dos figuras con diferente forma y equivalentes en superficie, recortadas en papeles de colores distintos.

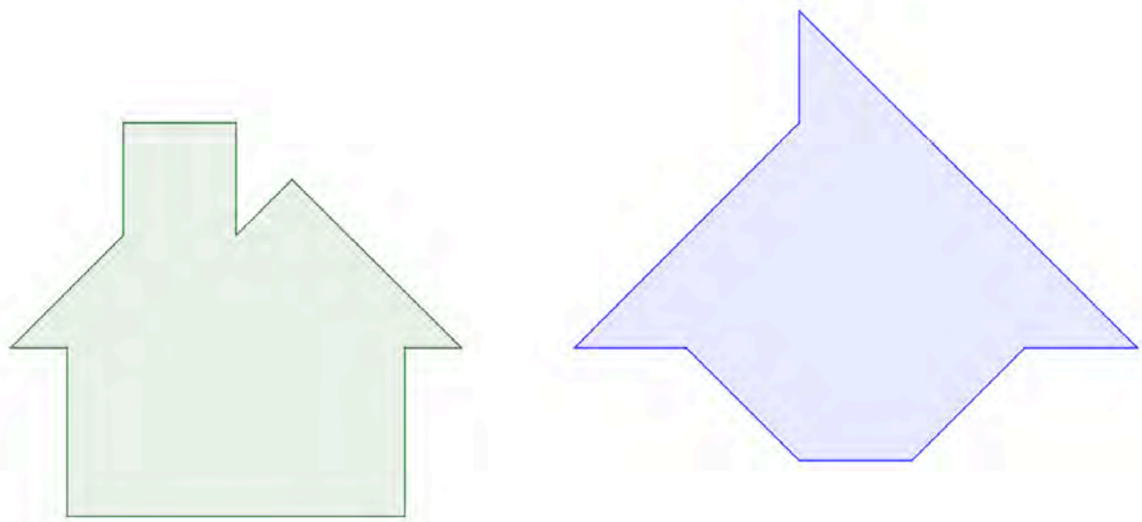


FIGURA 4.4.3.1. *Figuras construidas con tangram*

- Tijeras, regla y pegamento

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

- El profesor distribuye a los alumnos las figuras indicadas más arriba.

Tiempo de realización:

- Entre 5 y 10 minutos.

Consigna:

"Las dos figuras que os he repartido son dos superficies equivalentes, es decir, tienen la misma cantidad de superficie. Tenéis que probar que, efectivamente, se trata de dos superficies equivalentes, ya que mi afirmación es cierta.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil"

Variables didácticas y su gestión:

- La forma de las superficies: Las figuras han sido escogidas de modo que su forma no sea simple ni demasiado reconocida por el alumnado con el fin de bloquear aquellas estrategias basadas en la descripción de formas.

- Similitud entre las formas: Las figuras no serán demasiado parecidas en forma, pues de serlo la actividad carecería de sentido. Del mismo modo, tampoco serán muy distintas ya que ello dificultaría la búsqueda de los posibles métodos de resolución.

- Dar las figuras recortadas: Con ello se pretende dar lugar a la aparición de la descomposición mereológica (2D/2D) de figuras mediante la técnica del recortado-pegado.

- Trazos en las figuras: Las figuras no tienen dibujadas ningún trazo interior que pueda indicar por donde deben recortar.

Estrategia óptima:

Descomponer una de las figuras mediante la técnica del recortado para pavimentar con ella la otra.

Otras estrategias esperadas:

- Dibujar formas geométricas sobre una de las piezas y transportarlas sobre la otra, sin llegar al recortado.

- Describir las formas más o menos reconocibles que componen las figuras y dar las dimensiones de estas.
- Medida de los lados de las figuras y comparación de los perímetro.
- Descomponer las figuras en otras elementales y dar las dimensiones exactas.
- Hacer una cuadrícula y dar el número de cuadrados inscritos en cada figura.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido demostrar la afirmación.

La verificación se hace mediante la pavimentación de una figura con pedazos de la otra.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

Si nadie ha encontrado nada o no han empleado ningún método para resolver la tarea, el profesor pregunta expresamente: “¿Podríamos cubrir una superficie con pedazos de la otra?. Intentadlo.”

Si ningún grupo consigue demostrar que son equivalentes, el profesor lo demostrará delante de todos.

Institucionalización:

En la validación se ha debido llegar a la conclusión de que una superficie puede descomponerse en los mismos pedazos que la otra.

El profesor dará el resultado siguiente:

“Dos superficies son equivalentes, es decir, tienen la misma cantidad de superficie, si el recortado de una permite cubrir completamente la otra.”

Deducción después de hacer preguntas:

y con respecto a la forma, ¿qué podemos decir? ¿Las figuras que teníamos tiene la misma forma?¿Dos figuras con forma diferente pueden tener la misma cantidad de superficie?

“La equivalencia de superficies es independiente de la forma.”

Situación 2: Teorema de Pitágoras a través de tratamientos figurales.

Objetivo:

- Aplicar tratamientos dentro del registro figural o geométrico con el fin de potenciar el proceso de visualización geométrica a través de la aprehensión operativa: Reconfiguración y descomposición.
- Saber demostrar el Teorema de Pitágoras mediante la descomposición por división mereológica de figuras y el pensamiento visual.
- Potenciar, movilizar y coordinar los procesos de visualización y razonamiento.

Material:

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, en la que hay dibujada una figura, la misma para todos los grupos. La figura variará según la fase de la situación en la que nos encontremos.
- Trama cuadriculada en papel de acetato: la trama cuadriculada tiene como función hacer más fácil la búsqueda de la relación entre las áreas y facilitar la validación.
- Cuadrados correspondientes a los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles, construidos en cartulina.
- Cuadrados correspondientes a los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno, construidos en cartulina.
- Tijeras y pegamento.
- Listones.

Fase 1: Descomposición mereológica estrictamente homogénea (la descomposición se hace en unidades de la misma forma que la figura que se descompone) como primera aproximación a la demostración del Teorema de Pitágoras.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor distribuirá a cada grupo una hoja en la que está dibujada la figura siguiente

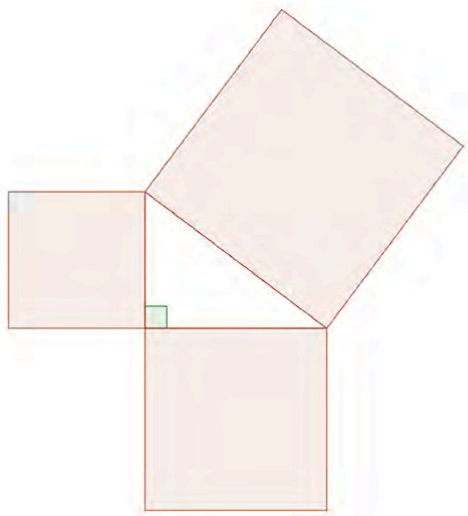


FIGURA 4.4.3.2. *Tª de Pitágoras en triángulo rectángulo escaleno*

Se trata de saber que relación existe en las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos e hipotenusa del triángulo y explicar como se ha procedido para ello.

Tiempo de realización:

- Entre 5 y 8 minutos.

Consigna:

El profesor pregunta inicialmente:

"¿Qué hay dibujado en la hoja que os he repartido? ¿Qué figuras geométricas hay? ¿Los cuadrados tienen todos el mismo tamaño?¿Alguien sabe que significa o que nos indica el cuadradito verde que aparece en la imagen?"

Una vez introducida la ficha, el profesor enuncia la consigna:

"Sabemos que las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo que aparece en la hoja, guardan cierta relación, ¿sabríais decir cuál?

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil. En la hoja que os he dado escribís vuestra respuesta y decís cómo habéis llegado a la solución.

No podéis utilizar tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de esta actividad."

Variables didácticas y su gestión:

- La no utilización de las tijeras: Este hecho dará lugar a que los alumnos busquen otro método distinto a la técnica del recortado, que han trabajado en la actividad anterior, para encontrar la solución.
- Dimensiones del triángulo: El hecho de que las longitudes de los lados sean enteras facilitará el trabajo con la cuadrícula.
- La no aportación de ningún dato numérico, así como la no utilización de la regla, que permita encontrar la relación existente entre las áreas mediante el cálculo del área del cuadrado. Esto obligará a que tengan que emplear procesos de visualización y manipulación para llegar a la solución.
- Disponer de la cuadrícula, que permitirá llegar a la solución óptima de la actividad.

Estrategia óptima:

Descomposición de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo en unidades figurales del mismo número de dimensiones que los primeros (Descomposición 2D/2D), utilizando la rejilla de cuadrados unidad.

La figura representa una de las situaciones más sencillas, en la que se puede comprobar su veracidad sin más que contar cuadrados.

Otras estrategias esperadas:

- División de los cuadrados en piezas mediante el trazado de líneas interiores.
- Utilización de los cuadrados que no pertenecen a esta fase de la situación.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido demostrar la relación entre las áreas de los cuadrados.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que explique cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

Si transcurridos unos minutos ningún grupo ha empleado ningún método para demostrar lo pedido, el profesor lo relanza indicando el empleo del método utilizado en la primera situación mediante la descomposición recortando las figuras.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las áreas de los cuadrados, entonces el profesor realiza la demostración mediante la cuadrícula delante de todos.

Fase 2: Descomposición mereológica homogénea (la descomposición se hace en unidades figurales de la misma forma pero diferentes de la forma descompuesta).

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor distribuirá a cada grupo una hoja en la que está dibujada la figura siguiente:

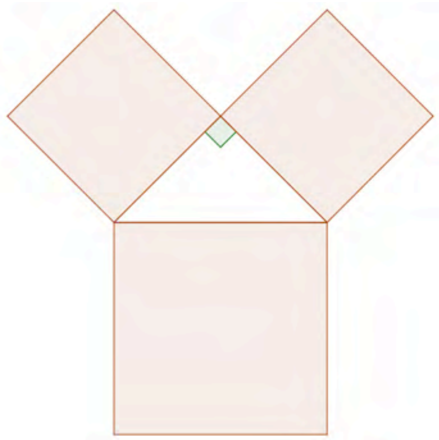


FIGURA 4.4.3.3. *Tª de Pitágoras en triangulo rectángulo isósceles*

Tiempo de realización:

- Entre 5 y 8 minutos

Consigna:

El profesor pregunta inicialmente:

"En la nueva hoja que os repartido, ¿Qué observáis? ¿Qué figuras geométricas hay? ¿Hay alguna similitud entre este triángulo y el de la actividad anterior?"

Una vez introducida la ficha, el profesor enuncia la consigna:

"Sabemos que las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo que aparece en la hoja, también guardan cierta relación, ¿sabríais decir cuál es dicha relación en esta ocasión?

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

Además, los grupos que consigan demostrar dicha relación de la manera más sencilla que existe habrán ganado.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil. En la hoja que os he dado escribís vuestra respuesta y decís cómo habéis llegado a la solución.

No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad, pero si podéis utilizar la tijera."

Variables didácticas y su gestión:

- Dimensiones del triángulo: El hecho de que las longitudes de los lados no sean enteras dificultará el trabajo con la cuadrícula bloqueando dicha estrategia para la solución del problema.
- Tipo de triángulo: El triángulo rectángulo isósceles permite la descomposición por división mereológica homogénea a partir de la división de los cuadrados mediante sus diagonales. La relación que expresa el teorema de Pitágoras es especialmente intuitiva si se aplica a este tipo de triángulos.
- La no aportación de ningún dato numérico, así como la no utilización de la regla, que permita encontrar la relación existente entre las áreas mediante el cálculo del área del cuadrado. Esto obligará a que tengan emplear procesos de visualización y manipulación para llegar a la solución.
- Cuadrados recortados: Si únicamente diéramos recortados los cuadrados que se construyen sobre los catetos del triángulo rectángulo isósceles estaríamos conduciendo al alumno de manera directa hacía la relación pedida. Por ello disponen tanto de dichos cuadrados como del construido sobre la hipotenusa.

Estrategia óptima:

Descomposición de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo en unidades figurales del mismo número de dimensiones que los primeros (Descomposición 2D/2D), mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Otras estrategias esperadas

- División de los cuadrados en piezas no obtenidas mediante el corte por las diagonales.
- Búsqueda de la relación entre la áreas mediante el empleo del álgebra.
- Empleo de la cuadrícula para encontrar la relación entre las áreas.
- Conteo de la cuadrículas interiores, dibujándolas cuando éstas no existen.
- Recortado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido demostrar la relación entre las áreas de los cuadrados.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta al resto de grupos si han utilizado un método más sencillo y les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos, constatando que no siempre es posible usar la descomposición mediante la cuadrícula.

Si ningún grupo ha conseguido demostrar la relación entre las áreas de los cuadrados mediante la descomposición de los cuadrados construidos sobre los catetos, recortando por una de sus diagonales, y posterior pavimentado sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa , entonces el profesor les da la siguiente indicación:

“ Las demostraciones que habéis realizado son validas, pero ninguna de ellas es la más sencilla que se puede realizar.

La más simple solo precisa de hacer dos cortes con la tijera. ¿Seríais capaces de hacerlo?. Intentadlo.”

Fase 3: Descomposición mereológica heterogénea (la descomposición se hace en unidades figurales de formas diferentes).

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor distribuirá a cada grupo una hoja en la que está dibujada la figura siguiente

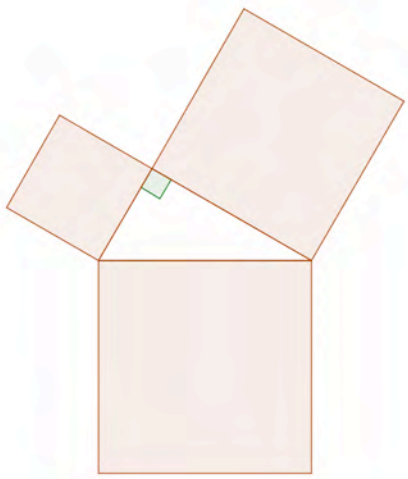


FIGURA 4.4.3.4. *Tª de Pitágoras en triangulo rectángulo escaleno*

Tiempo de realización:

- 10 minutos

Consigna:

El profesor pregunta inicialmente:

“En la nueva hoja que os repartido, ¿Qué observáis? ¿Qué figuras geométricas hay? ¿Hay alguna similitud entre este triángulo y los dos anteriores?”

Una vez introducida la ficha, el profesor enuncia la consigna:

“Sabemos que las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo que aparece en la hoja, también guardan cierta relación, ¿sabríais decir cuál es dicha relación en esta ocasión?

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil. En la hoja que os he dado escribís vuestra respuesta y decís cómo habéis llegado a la solución.

No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad, pero si podéis utilizar tijeras.”

Variables didácticas y su gestión:

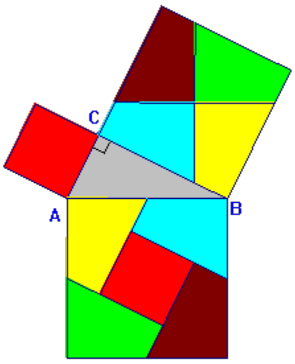
- Dimensiones del triángulo: El hecho de que las longitudes de los lados no sean enteras dificultará el trabajo con la cuadrícula bloqueando dicha estrategia para la solución del problema.
- Tipo de triángulo: El triángulo rectángulo escaleno no permite la descomposición por división mereológica homogénea a partir de la división de los cuadrados mediante sus diagonales. La descomposición de los cuadrados en este caso debe realizarse por división mereológica heterogénea.
- La no aportación de ningún dato numérico, así como la no utilización de la regla, que permita encontrar la relación existente entre las áreas mediante el cálculo del área del cuadrado. Esto obligará a que tengan que emplear procesos de visualización y manipulación para llegar a la solución.
- Cuadrados recortados: Si únicamente diéramos recortados los cuadrados que se construyen sobre los catetos del triángulo rectángulo escaleno estaríamos conduciendo al alumno de manera directa hacía la relación pedida. Por ello disponen tanto de dichos cuadrados como del construido sobre la hipotenusa.

Estrategia óptima:

Descomposición de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo en unidades figurales de distinta forma, mediante el recortado, y posterior pavimentado sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Algunas de las posibilidades:

Demostración de Perigal   Generalización de la demostración de Perigal



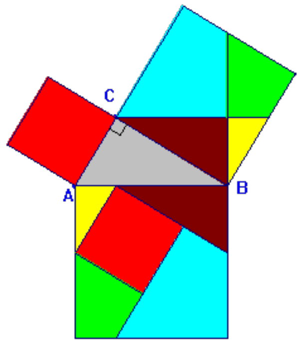


FIGURA 4.4.3.5. *Demostración de Perigal del Tª de Pitágoras*

Otras estrategias esperadas:

- Búsqueda de la relación entre las áreas mediante el empleo de álgebra.
- Empleo de la cuadrícula para encontrar la relación entre las áreas.
- Conteo de la cuadrículas interiores, dibujándolas cuando éstas no existen.
- Recortado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido demostrar la relación entre las áreas de los cuadrados.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las áreas de los cuadrados, entonces el profesor realiza una demostración mediante el recortado y pavimentado delante de todos los alumnos y relanza la situación.

Institucionalización:

A lo largo de la situación se ha debido llegar a la conclusión de que los tres triángulos que forman parte de la misma, tienen en común el tener un ángulo de 90º.

El profesor introduce el vocabulario que se desea fijar en relación a los triángulos rectángulos:

- **Triángulo rectángulo: En geometría, se llama triángulo rectángulo a todo triángulo que posee un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90º.**
- **Hipotenusa: Se denomina hipotenusa al lado mayor del triángulo, el lado opuesto al ángulo recto.**
- **Catetos: Se denominan catetos a los dos lados menores, los que conforman el ángulo recto por ser perpendiculares entre sí.**

El profesor enunciará los Teoremas siguientes:

Por tanto, lo que hemos visto puede enunciarse así:

- **"En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Este teorema recibe el nombre de Teorema de Pitágoras."**
- **" Si el área del cuadrado construido sobre el lado mayor de un triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. Este teorema recibe el nombre de Teorema recíproco de Pitágoras."**

Si algún alumno pregunta si la relación es válida para otro tipo de triángulos, el profesor indicará que se va a ver a continuación:

El profesor también da los siguientes resultados y los demostrará mediante puzles que cumplen estas condiciones:

- **“ Si el área del cuadrado construido sobre el lado mayor de un triángulo es menor que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo acutángulo.”**
- **“ Si el área del cuadrado construido sobre el lado mayor de un triángulo es mayor que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo obtusángulo.”**

Situación 3: Generalización del Teorema de Pitágoras.

Objetivo:

- Efectuar la conversión entre Registro de la lengua natural ⇔ Registro geométrico.
- Desarrollar y mejorar la aprehensión discursiva, es decir, la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se le denomina cambio de anclaje: Del anclaje discursivo al anclaje visual y viceversa.
- Mostrar unas extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de polígono regular.

Material:

- Hoja para cada dos o tres alumnos con los enunciados alternativos del Teorema de Pitágoras.
- Lápiz, regla y compás.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- 40 minutos

Consigna:

"Hemos visto que en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

En la hoja que se os ha repartido aparecen las siguientes alternativas al teorema enunciado:

- En un triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos.

- En un triángulo rectángulo, el área del hexágono regular construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los hexágonos regulares construidos sobre los catetos.

Demostrar si se verifican o no dichas afirmaciones. Para ello, partir en ambos casos de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean 3 y 4 cm.

En ningún momento podéis utilizar ni tijeras ni calculadora

¿Se puede deducir algún resultado más general a partir de estos enunciados? Escribidlo en la hoja que se os ha dado."

Variables didácticas y su gestión:

- Dimensiones del triángulo rectángulo de partida: se ha elegido un triángulo rectángulo cuyos catetos e hipotenusa tienen dimensiones enteras para facilitar la descomposición de los triángulos equiláteros y del hexágono en triángulos, también equiláteros, de lado 1 cm. De no hacerlo así, la tarea podría resultar demasiado dificultosa y se produciría una pérdida del sentido de lo que se pretende demostrar.

- Figuras construidas sobre los lados del triángulo: las formas geométricas seleccionadas no deben ser muy complejas, pues esto podría dificultar la demostración y convertir la actividad en un proceso arduo.

- La no construcción ni aportación de la figuras con el fin de que sean los estudiantes los que realicen la conversión del Registro de la Lengua Natural al Registro Geométrico y por tanto efectúen un cambio de anclaje.

Estrategia óptima:

- Caso de los triángulos equiláteros: Descomposición de los triángulos equiláteros en los triángulos equiláteros de 1 cm de lado que lo componen.
- Caso de los hexágonos: Descomposición de los hexágonos en los triángulos equiláteros que lo componen y aplicar el método del caso anterior.

Otras estrategias esperadas:

- Búsqueda de la relación entre la áreas mediante el empleo de álgebra.
- Descomponer los triángulos y hexágonos en otras figuras elementales y dar las dimensiones exactas.
- Descomposición de los triángulos y hexágonos, mediante el trazado de líneas internas, al azar, y transportarlas o identificarlas sobre los otros.
- Hacer una cuadrícula y dar el número de cuadrados inscritos en cada figura.
- Empleo de la regla para encontrar las dimensiones necesarias para el cálculo, mediante la fórmula, de las áreas de las figuras.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta: “¿Quién piensa que las afirmaciones son ciertas? ¿Quién piensa que no lo son?”

El profesor pide a los alumnos que han respondido que son ciertas que expliquen cómo lo han hecho. Los alumnos dan sus razones y explican cómo han llegado a dicha conclusión.

Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente le pide que lo explique.

Si tras construir las figuras, los grupos no han empleado ningún método para resolver la tarea o no hubiesen encontrado nada, el profesor hace el dibujo y pregunta expresamente:

"¿Podríamos dividir los triángulos y hexágonos utilizando un método similar al de la cuadrícula? ¿Podríamos hacer formas regulares para cubrir las figuras utilizando un método similar al de la cuadrícula?. Intentadlo."

De esta manera, la división de las figuras en triángulos equiláteros aparece como la solución al problema.

Una vez establecida la veracidad de las afirmaciones, se pregunta a los alumnos si pueden dar algún resultado más general a partir de lo visto.

Si nadie dice nada, el profesor propone observar estas dos demostraciones y la del Teorema de Pitágoras y deducir en consecuencia.

Institucionalización:

El profesor enunciará el teorema siguientes:

- **"En un triángulo rectángulo, el área del polígono construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas del mismo tipo de polígonos construidos sobre los catetos. Este teorema recibe el nombre de Teorema de Pitágoras Generalizado."**
- **"En un triángulo rectángulo, el área de cualquier figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de esa misma figura construida sobre los catetos."**

Situación 4: El Teorema de Pitágoras a través del álgebra.

Objetivo:

- Obtener la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras mediante la relación entre longitudes y áreas y la aplicación de los productos notables.
- Conocer la importancia del lenguaje algebraico como herramienta para establecer relaciones entre longitudes y áreas.
- Identificar triángulos a partir de las medidas de sus lados.
- Efectuar la conversión del Registro Geométrico al Registro algebraico. (Fase 1 y Fase 3)
- Efectuar la conversión Registro Tabular - Registro Algebraico - Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural.
- Potenciar, movilizar y coordinar los procesos de visualización y razonamiento.

Material:

- Hoja para cada dos o tres alumnos con una de las demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras.
- Tabla con las dimensiones de los triángulos de la Fase 2.
- Lápiz, calculadora y papel.

Fase 1: Demostración del Teorema de Pitágoras mediante álgebra.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 15 y 20 minutos

Consigna:

"El Teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración de él para alcanzar el grado de Magíster matheseos.Os presentamos a continuación la demostración geométrica de una de ellas. Demostrad que es correcta dicha demostración a partir de los datos que se os proporcionan.

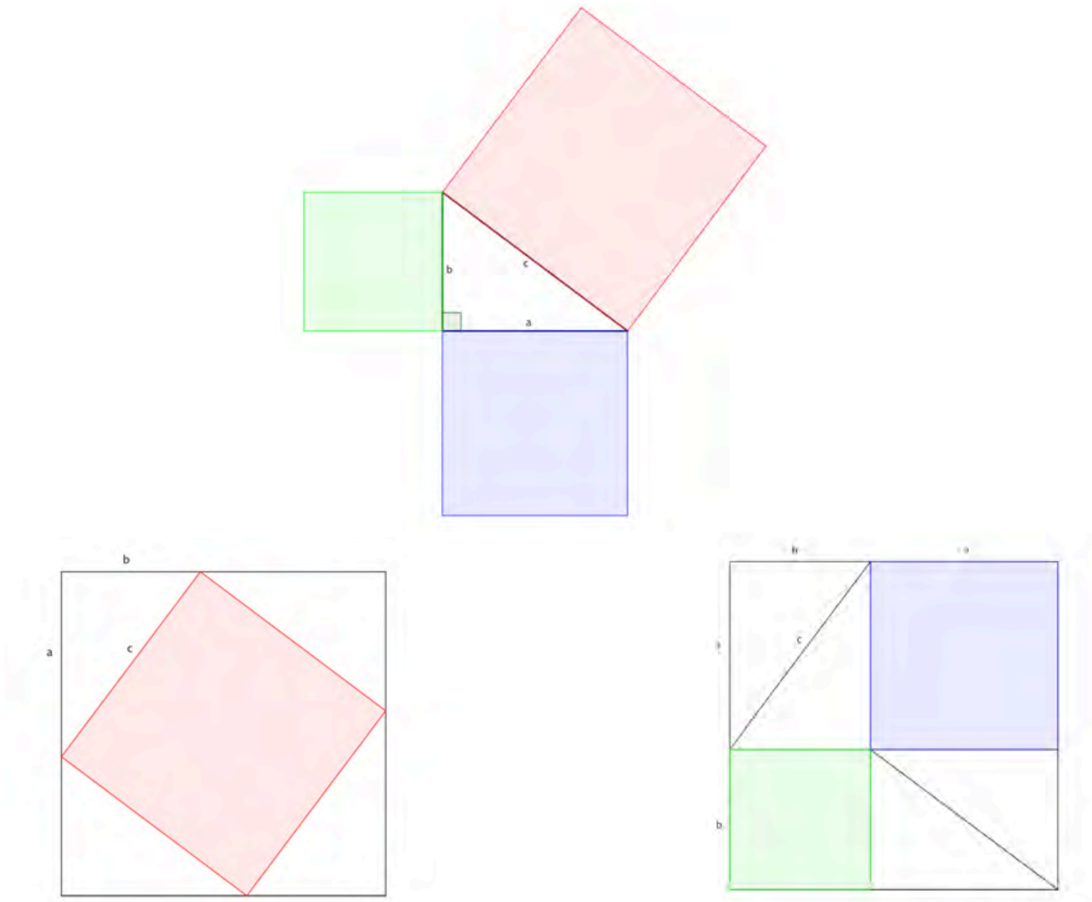


FIGURA 4.4.3.6. *Demostración geométrica del Tª de Pitágoras*

No podéis utilizar ni tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de la actividad."

Variables didácticas y su gestión:

- La no aportación de ningún dato numérico, así como la no utilización de la regla, que permita encontrar la relación existente entre las áreas de los cuadrados. Esto obligará a que tengan que utilizar el registro algebraico para llegar a la solución.

- Soporte de la imagen: El hecho de que la demostración geométrica se proporcione dibujada en una hoja y no se aporte ningún otro tipo de material adicional, tiene como función el bloquear la estrategia del recortado-pegado, de modo que tengan que emplear el álgebra para demostrarlo.

- La designación de los elementos del triángulo rectángulo como indicativo del método de resolución que deben seguir. Si no introdujéramos ningún tipo de nomenclatura que les guíe, es posible que los alumnos quedaran bloqueados ante la actividad.

- La demostración escogida: el valor de esta demostración es la de estar realizada mediante figuras geométricas reconocidas por los alumnos de las que se conoce la fórmula del área, de modo que no requiere un gran esfuerzo de abstracción por parte de los estudiantes, lo que complicaría en exceso la actividad. Además se trata de una demostración que conduce a la aparición de la igualdad de manera bastante directa.

Estrategia óptima:

- Calcular el área del primer cuadrado como suma del área de cuatro triángulo de base b y altura a y un cuadrado de lado c. Cálculo del área del segundo cuadrado como suma de cuatro triángulo de base b y altura a, un cuadrado de lado a y un cuadrado de lado b. Igualación de ambas expresiones.

Otras estrategias esperadas:

- Cálculo de las áreas de los dos cuadrados a partir del producto notable $(a+b)^2$ y posterior igualación de las expresiones. Está estrategía no les llevaría a la expresión pedida.

- Obtención de la expresión únicamente a partir del primer cuadrado mediante la igualación de las áreas obtenidas como suma del área de cuatro triángulo de base b y altura a y un cuadrado de lado c $(2ab+c^2)$, por un lado, y a partir del producto notable $(a+b)^2$, por otro. Está demostración no pone de manifiesto la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es decir, tiene como inconveniente principal que los estudiantes no ven la conexión entre las figuras geométricas que aparecen.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los estudiantes, el profesor pregunta quién ha conseguido probar la demostración planteada.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que explique cómo lo ha hecho. Después, preguntará al resto de grupos si consideran que es correcto el método empleado, justificando su respuesta.

Si los grupos no han empleado ningún método para resolver la tarea o no hubiesen encontrado nada, el profesor pregunta expresamente:

"¿Qué observáis en los cuadrados? ¿Por qué figuras geométricas están compuestos? ¿Podéis calcular el área de los cuadrados a partir de ellas? ¿Podéis encontrar una relación entre las tres figuras? Intentadlo."

Si ningún grupo consigue probar mediante el empleo del álgebra la demostración, entonces el profesor la realizará en la pizarra.

Institucionalización:

El profesor enunciará los Teoremas siguientes:

- **"En un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de los catetos. Es decir, si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes *a* y *b* , y la medida de la hipotenusa es *c*, se verifica que: $c^2 = a^2 + b^2$.**

Fase 2: Identificación de los tipos triángulos atendiendo a sus ángulos a partir de sus medidas.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 5 y 10 minutos.

Consigna:

“En la tabla que se os ha repartido aparecen las medidas de los lados de cinco triángulos:

TABLA 4.4.3.1. *Tabla para el alumno con las dimensiones de los triángulos*

	Lado a	Lado b	Lado c
Triángulo 1	4,5 cm	6 cm	7,5 cm
Triángulo 2	3,44 cm	2,12 cm	4,42 cm
Triángulo 3	5 cm	3, 5 cm	7 cm
Triángulo 4	7,5 cm	4 cm	8,5 cm
Triángulo 5	3,47 cm	3,44 cm	4,42 cm

Fuente: elaboración propia

¿Sabríais decir cuáles de los triángulos que aparecen en la tabla son triángulos rectángulos?”

Variables didácticas y su gestión:

- Dimensiones de los triángulos: se han elegido dimensiones no enteras para algunos de los lados de los triángulos para evitar que encuentren la solución al problema de manera directa, o mediante la construcción con regla.

- Tipos de triángulos: las dimensiones se corresponden con triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

- La no aportación de las figuras, lo que obligará a los estudiantes a tener que emplear la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras para encontrar la solución del problema.

Estrategia óptima:

Aplicación de la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras para encontrar la solución del problema.

Otras estrategias:

- Intentar construir los triángulos con regla.
- Dar el resultado por estimación de las medidas.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Cuántos triángulos rectángulos hay?".

Pide a uno de los grupos que asegura que hay dos que digan cuales son que expliquen cómo lo han hecho. Después, preguntará al resto de grupos si consideran que es correcto el método empleado, justificando su respuesta.

Si los grupos no han empleado ningún método para resolver la tarea o no hubiesen encontrado nada, el profesor pregunta expresamente:

"¿A partir del Teorema de Pitágoras podrías encontrar los triángulos rectángulos?"

Institucionalización:

El profesor enunciará el Teorema siguiente:

- **" Si la longitud del lado mayor de un triángulo al cuadrado es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. Es decir, si en un triángulo se verifica que $c^2 = a^2 + b^2$, siendo *c* la**

longitud del lado mayor y *a* y *b* la medida de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

El profesor también da los siguientes resultados:

- **" Si la longitud del lado mayor de un triángulo al cuadrado es menor que la suma de las longitudes al cuadrado de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo acutángulo. Es decir, si en un triángulo se verifica que $c^2 < a^2 + b^2$, siendo *c* la longitud del lado mayor y *a* y *b* la medida de los otros dos lados, entonces el triángulo es acutángulo.**

- **" Si la longitud del lado mayor de un triángulo al cuadrado es mayor que la suma de las longitudes al cuadrado de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo obtusángulo. Es decir, si en un triángulo se verifica que $c^2 > a^2 + b^2$, siendo *c* la longitud del lado mayor y *a* y *b* la medida de los otros dos lados, entonces el triángulo es obtusángulo.**

Fase 3: En busca de un Teorema

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 15 y 20 minutos

Consigna:

"Sobre los lados del cuadrilátero ABCD, que tiene una característica especial y es la de tener dos ángulos rectos, se han construido los correspondientes cuadrados. Sabemos que entre dichos cuadrados existe una relación.

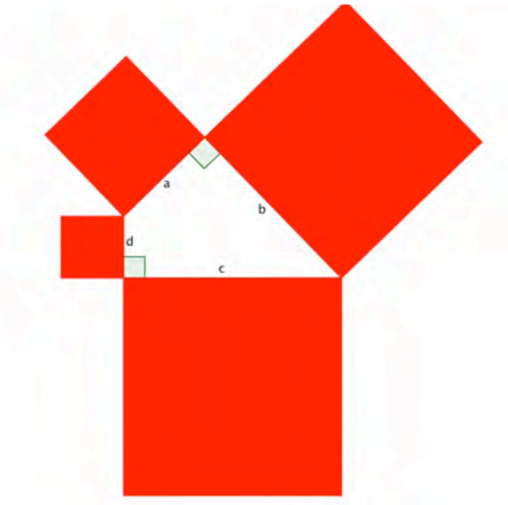


FIGURA 4.4.3.7. *Construcción geométrica sobre cuadrilátero*

Los grupos que consigan encontrar la expresión que indica dicha relación, justificando como han llegado a ella correctamente, habrán ganado.

No podéis utilizar tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de esta actividad.

¿Podrías enunciar un Teorema similar al de Pitágoras para este tipo de figuras?"

Variables didácticas y su gestión:

- La no aportación de ningún dato numérico, así como la no utilización de la regla, que permita encontrar la relación existente entre las áreas de los cuadrados. Esto obligará a que tengan utilizar exclusivamente el registro algebraico para llegar a la solución.

- Soporte de la imagen: El hecho de que la imagen se proporcione dibujada en una hoja y no se aporte ningún otro tipo de material adicional, tiene como función el bloquear la estrategia del recortado-pegado para encontrar la relación entre las áreas de los cuadrados.

- El no trazado de la línea interna que divide el cuadrilátero en los dos triángulos rectángulos, con hipotenusa común, de que se compone: de así hacerlo, la actividad carecería de sentido desde le punto de vista de intentar potenciar en el alumno los procesos de visualización y razonamiento que son tan importantes coordinar en el estudio de la geometría.

- Indicación de los ángulos rectos interiores de los que consta el cuadrilátero: de no indicarlos la actividad podría resultar demasiado compleja, dificultado la búsqueda del método de resolución.

- Longitud de los lados del cuadrilátero: se han elegido lo suficientemente distintos para evitar que al construir los cuadrados sobre ellos obtengamos áreas similares, lo que conduciría al estudiante a la resolución visual de la tarea.

- La designación de los elementos del polígono como indicativo del método de resolución que deben seguir. Si no introdujéramos ningún tipo de nomenclatura que les guíe, es posible que los alumnos quedaran bloqueados ante la actividad.

Estrategia óptima:

Designación de los lados del cuadrilátero. Identificación de los triángulos rectángulos con hipotenusa común que forman el cuadrilátero ABCD. Establecer la relación entre las áreas mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras.

Otras estrategias esperadas:

- Conteo de la cuadrículas interiores, dibujándolas cuando éstas no existen.
- Dibujar formas geométricas sobre los cuadrados, mediante el trazado de líneas internas al azar, y transportarlas o identificarlas sobre los otros.
- Dibujar formas geométricas elementales sobre los cuadrados y transportarlas o identificarlas sobre los otros.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar la relación entre los cuadrados.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

Si los grupos no han empleado ningún método para resolver la tarea o no hubiesen encontrado nada, el profesor pregunta expresamente:

"¿Podríais dividir el polígono en triángulos rectángulos? ¿Qué se observa si hacemos tal división? Intentadlo."

Si ningún grupo consigue probar mediante el empleo del álgebra la relación entre los cuadrados, entonces el profesor la realizará en la pizarra.

Una vez establecida la relación entre los cuadrados, se pregunta a los alumnos si pueden enunciar un teorema similar al de Pitágoras para ese tipo de figuras.

Situación 5 : Aplicación del Teorema de Pitágoras: Cable más corto.

Objetivo:

- Aplicar del Teorema de Pitágoras en el cálculo de un lado del triángulo rectángulo conociendo los otros dos lados.
- Calcular la longitud de un segmento de una figura plana a partir de otros que, con él, formen un triángulo rectángulo.
- Efectuar la conversión entre varios registros de representación en la resolución de problemas: Registro Cartesiano - Registro Geométrico – Registro Algebraico – Registro Numérico – Registro Tabular- Registro de la Lengua Natural.

Material:

- Hoja para cada dos o tres alumnos como la que se muestra a continuación:

LOCALIZACIÓN DE LOS POSTES DE LUZ

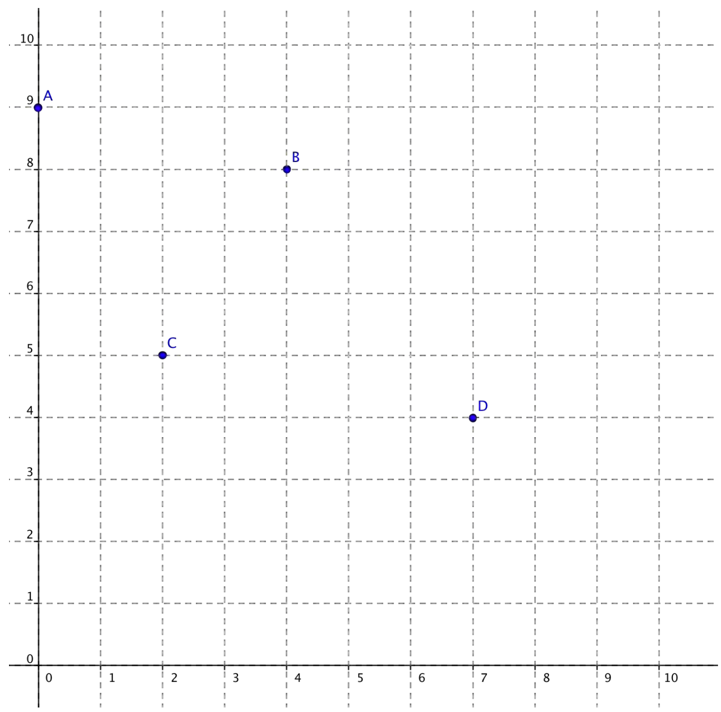


FIGURA 4.4.3.8. *Localización de postes de luz sobre gráfico cartesiano*

OPCIONES

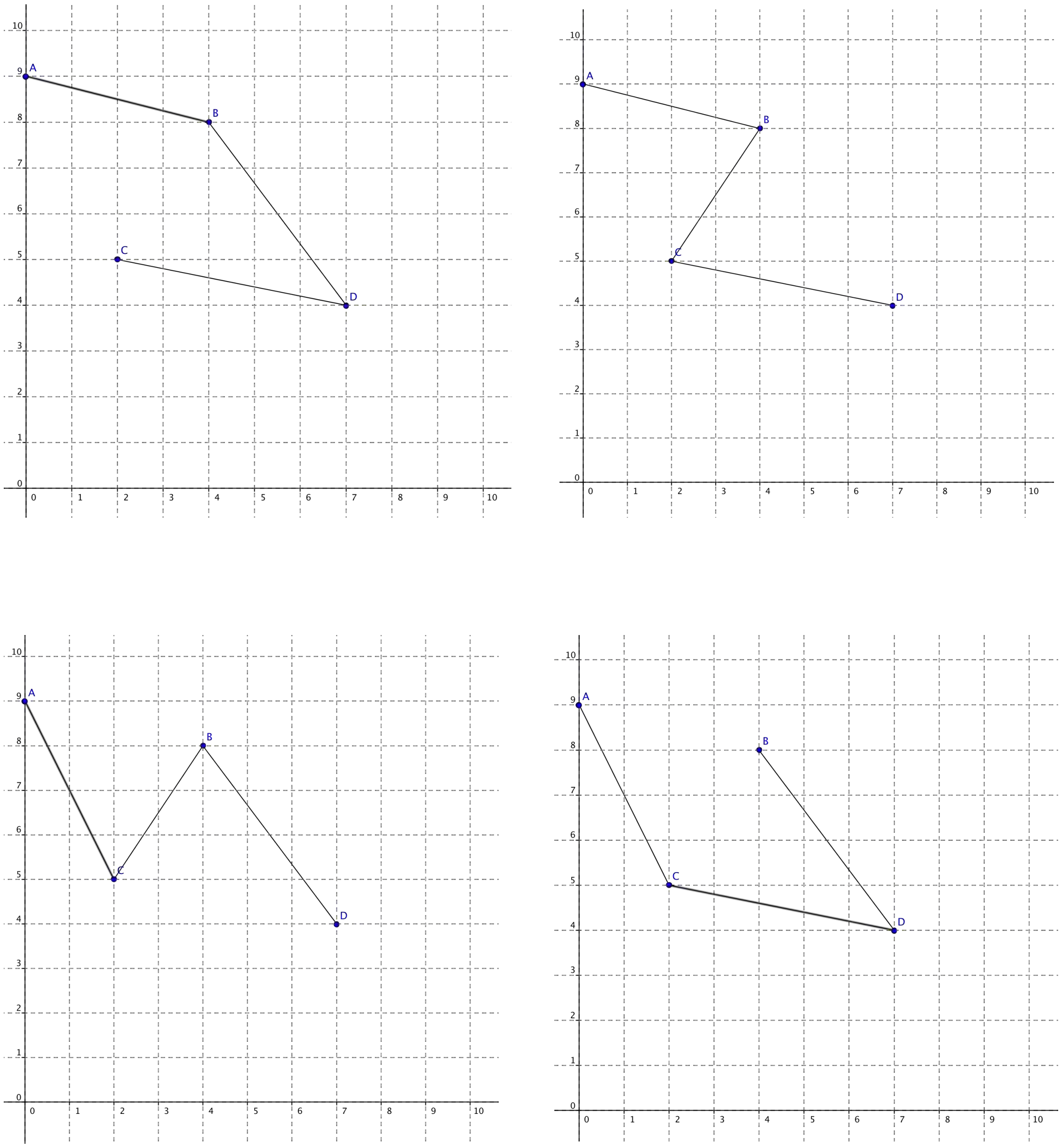


FIGURA 4.4.3.9. *Posible colocación de los cables entre los postes de luz*

- Papel, lápiz y calculadora

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 20 y 25 minutos

Consigna:

"En la siguiente hoja se muestra la localización de 4 postes de luz que un ayuntamiento quiere poner en una zona de la ciudad. Los cables pueden ir conectados de 4 maneras distintas, pero no todas precisan de la misma longitud de cable, por lo que para ahorrar, nos piden que determinemos cual es la opción más económica.

No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad.

El profesor reparte una tabla por grupo y dice:

"Aquí tenéis una tabla que podéis utilizar si os es útil."

Escribid un informe en el que indiques cual es la opción más económica y cómo has procedido para encontrarla."

Variables didácticas y su gestión:

- Posición de los postes: Hemos situado los postes sobre coordenadas enteras positivas con el fin de no dificultar el cálculo de las longitudes de los catetos de los triángulos rectángulos que deben formar los estudiantes para solucionar el problema.

  De no ser así, la actividad se podría convertir en algo que no nos interesa en este momento: el cálculo de la distancia entre dos puntos dadas sus coordenadas.

- Distancia entre los postes: Las distancias entre los puntos son similares, siendo algunas de ellas de diferencia mínima, pues de haber sido demasiado distintas podría resolverse a simple vista, sin necesidad de aplicar el Teorema de Pitágoras.

- La no utilización de la regla, ya que la actividad carecería de sentido.

- Cuadrícula: se ha creído oportuno el hacer visible la cuadrícula de la representación cartesiana para evitar que el alumno tenga que establecer la relación existente entre la posición de los postes y las coordenadas cartesianas que los determinan, pues ello no es la finalidad de la tarea.

- Tabla: el reparto de la tabla permite que entre en juego el Registro Tabular como registro que permite establecer relaciones entre datos. Además, facilitará la validación de la actividad.

Estrategia óptima:

Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.

Otras estrategias esperadas:

- Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo.
- Dar la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.
- Empleo del álgebra para intentar encontrar la relación entre las longitudes.
- Utilización de algún intermediario para medir la longitud de los cables.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta a cada grupo cual considera que es la opción más económica y como han procedido para encontrarla.

La verificación de los cableados se hace de forma colectiva en la pizarra mediante comparación numérica utilizando la tabla de distancias.

Si los grupos no han empleado ningún método para resolver la tarea o no hubiesen encontrado nada, el profesor pregunta expresamente:

"A partir de los segmentos que hay, ¿Podéis formar triángulos rectángulos? Intentadlo."

Institucionalización:

El profesor enunciará los siguientes resultados:

"Sabiendo lo que miden dos de los lados de un triángulo rectángulo, se puede averiguar la medida del tercer lado aplicando el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

- **Si conocemos *a* y *b*, *c* es igual a** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Si conocemos *a* y *c*, *b* es igual a** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- **Si conocemos *b* y *c*, *a* es igual a** $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Situación 1: El Juguetero. Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.

Fase 1:

Objetivo:

- Conocer y comprender el concepto de razón de semejanza.
- Establecer la razón de semejanza para la construcción de figuras semejantes.
- Construir figuras semejantes a una dada.
- Conversión entre el Registro Figural – Registro Geométrico – Registro algebraico - Registro numérico.

Material:

- Cartulinas de dos tamaños.
- Tijeras, calculadora, regla y lápiz.
- Caja mediana construida.
- Hoja con el desarrollo plano de la caja mediana:

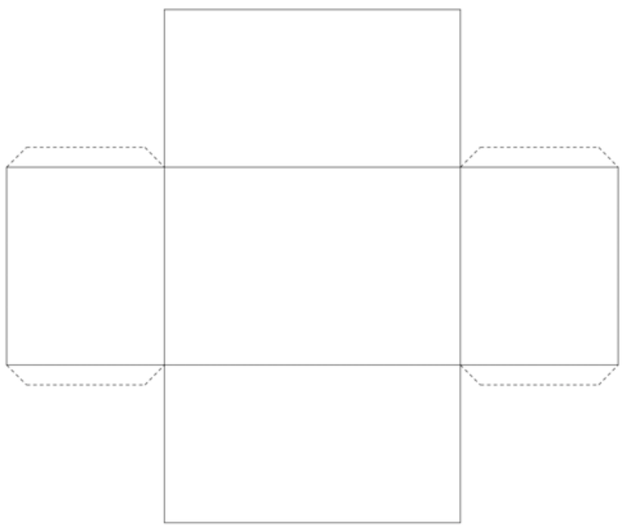


FIGURA 4.4.3.10. *Desarrollo plano de la caja*

- Tapas de las cajas.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

“Una juguetería dispone de cajas de un solo tamaño para embalar juguetes.

Las dimensiones de la caja son las siguientes:

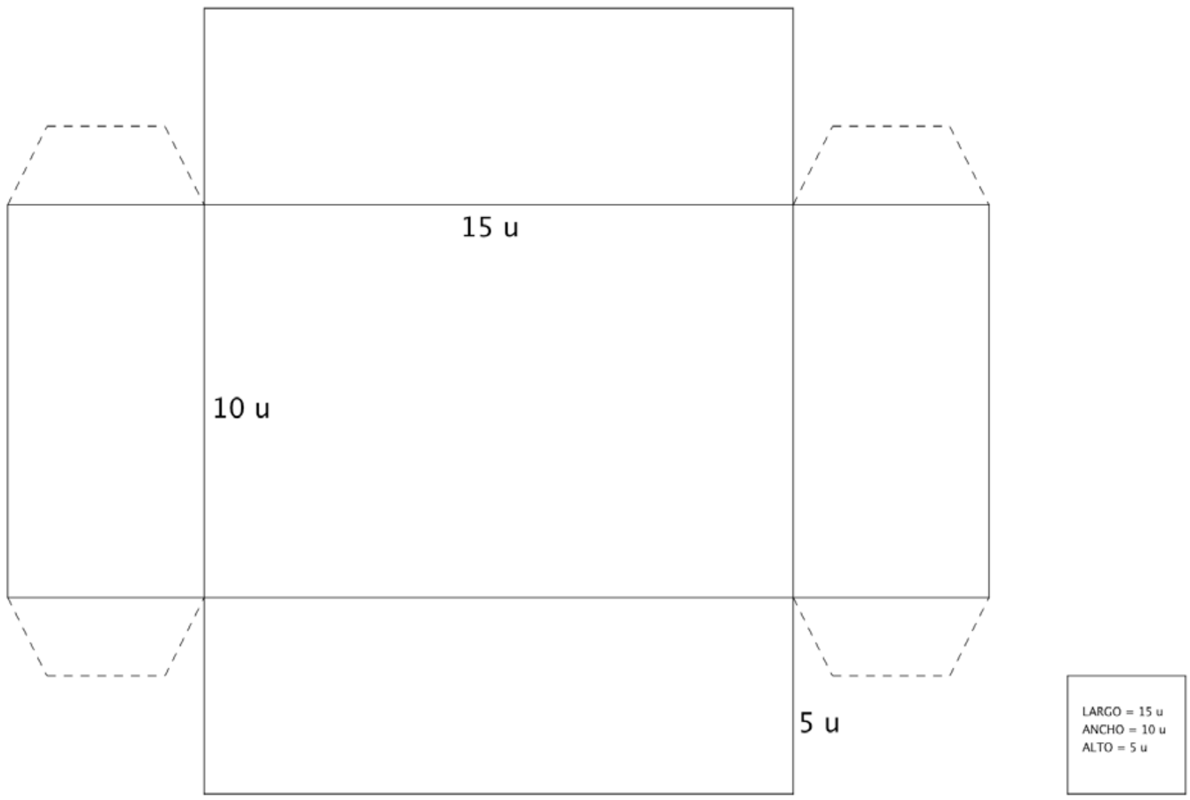


FIGURA 4.4.3.11. *Desarrollo plano de la caja para el alumno*

El dueño ha decidido encargar dos tipos de cajas nuevas, una más grande y otra más pequeña que la que ya dispone.

Al realizar el encargo, únicamente ha dado los siguientes datos:

- Caja pequeña: el lado que mide 5 unidades en la caja que tengo, debe medir 4 unidades en la nueva caja. El resto de medidas tienen que estar en relación con está.
- Caja grande: el lado que mide 5 unidades en la caja que tengo, debe medir 7 unidades en la nueva caja. El resto de medidas tienen que estar en relación con está.

Vosotros vais a ser los encargados de construir una caja de cada modelo.

Debéis construir con cartulina las nuevas cajas y apuntar sus dimensiones en las pegatinas que os he repartido para pegarla en la caja a modo de etiqueta. La mitad de la clase seréis el grupo A y vais a construir la caja pequeña. La otra mitad de la clase, seréis el grupo B y tenéis que construir la caja grande.

Cuándo creáis que las tenéis correctamente construidas y la etiqueta con las dimensiones puesta, podéis ir a probar si el rectángulo de las tapas que tenemos encima de la mesa y el rectángulo de la parte inferior de la caja son iguales. Solamente podréis probar una vez, de manera que el grupo que consiga construir la caja correctamente habrá ganado.”

Variables didácticas y su gestión:

- Las dimensiones de las cajas: se han elegido dimensiones de modo que la razón entre las longitudes no sean ni demasiado simples, como sería el caso de si fuera el doble o el triple, ni demasiado complejas.

- Un único intento: El hecho de que únicamente puedan probar una vez si la caja y la tapa encaja o no, evita que encuentren la solución por ensayo y error.

- La dimensión que se le proporciona: le proporcionamos los datos referente a la altura de las cajas por ser la medida que guarda menos relación con las tapas.

Estrategia óptima:

Encontrar la razón de semejanza de las longitudes a partir de los lados conocidos:

TABLA 4.4.3.2. *Dimensiones y relación entre las cajas*

Dimensiones	Caja pequeña	Caja mediana	Caja grande
Alto	4 u	5 u	7 u
Largo	12 u	15 u	21 u
Ancho	8 u	10 u	14 u

Fuente: elaboración propia

Otras estrategias:

- Añadir 2 unidades a cada lado en la caja grande y quitar 1 unidad a cada lado en la caja pequeña.
- Construir la caja por estimación a partir del lado que conocen.
- Construir la caja al azar.

Validación:

La verificación se hace mediante la colocación de las tapas de las cajas por parte de los alumnos.

Los grupos que hayan construido cajas que encajen en las tapas, deben explicar cómo han procedido para ello.

Si ningún grupo ha conseguido construir ninguna caja que encaje exactamente en la tapa, el profesor enseñará un modelo de cada una de ellas y explicará cómo se han obtenido mediante su desarrollo plano.

Institucionalización:

El profesor enunciará los siguientes resultados:

“Dos figuras son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales, es decir, tienen la misma forma.”

“La razón de proporcionalidad entre los lados, es decir, el cociente entre sus longitudes, se denomina razón de semejanza, y la denotamos por *k.*

“Dos figuras son semejantes si la razón de proporcionalidad entre sus lados son iguales”

Si k>1, obtenemos una ampliación.

Si k<1, obtenemos una reducción.

Si k=1, obtenemos figuras iguales.”

“Dada una figura, se puede obtener otra semejante a ella multiplicando la longitud de sus lados por la razón de semejanza.”

Fase 2:

Objetivo:

- Conocer y establecer la relación entre las áreas de figuras semejantes.
- Efectuar la conversión entre el registro de la lengua natural y el registro geométrico.
- Efectuar tratamientos dentro del registro geométrico: Descomponer meriológicamente.
- Potenciar y coordinar los procesos de visualización y razonamiento.

Primera parte

Material:

- Regla, lápiz y compás.
- Dos hojas cuadriculadas.
- Tablero inicial de 2.5 cm de lado para cada uno de los grupos.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

"Un juguetero ha creado un tablero para un nuevo juego de bolsillo, que consta de seis casillas:

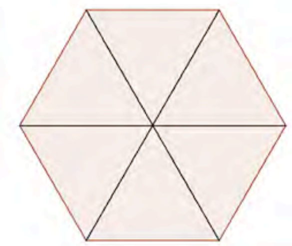


FIGURA 4.4.3.12. *Tablero hexagonal mostrado al alumno*

Como el número de casillas del tablero le parece escaso y el tablero es un poco pequeño, ha pensado en agrandarlo para obtener dos nuevos modelos de tablero, con un mayor número de casillas, que sean semejantes al tablero de seis casillas. Los modelos son los siguientes:

- Modelo de tablero para jugadores de 6 a 12 años: el tablero tendrá el doble de perímetro que el tablero inicial.
- Modelo de tablero para jugadores más de 13 años: El tablero tendrá el triple de perímetro que el tablero inicial.

Aunque el perímetro de los tableros aumenta, el tamaño de las casillas que lo forman debe seguir siendo el mismo.

¿Cuántas casillas tendrán los nuevos tableros?"

Variables didácticas y su gestión:

- Forma del tablero: Hemos escogido un hexágono por tratarse de una forma reconocible, la cual se puede dividir fácilmente en triángulos equiláteros, pero que a su vez resulta menos simple que el trabajar con rectángulos o cuadrados, cuya descomposición en casillas podría resultar más evidente.
- Dimensiones del tablero inicial: El tamaño del tablero inicial es importante si pretendemos que los tableros que tienen que construir , los de perímetro doble y perímetro triple, quepan dentro de la hoja de papel.
- Razón de semejanza entre los lados: Se han elegido razones de semejanza enteras porque de no ser así no podrían descomponer dichos tableros en casillas de la misma dimensión que las que forman el tablero inicial.

Estrategia óptima:

Construcción de los nuevos tableros y su posterior descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.

Otras estrategias:

- Multiplicar el número de casillas iniciales por dos (12) y por tres (18), por considerar que el número de casillas de los tableros guardan la misma relación que la razón entre los lados, derivada de la concepción de que si se dobla o triplica el perímetro, se dobla o triplica el área.
- Dar cualquier número al azar.
- Dar un intervalos del número de casillas.
- Calcular el perímetro y dividirlo entre seis.
- Calcular el perímetro y dividirlo entre el perímetro del tablero inicial.

Validación:

El profesor pregunta a cada uno de los grupos, aunque colectivamente, cuántas casillas tienen los nuevos tableros. Pide a cada grupo que justifique su respuesta, a fin de hacer presentes las estrategias empleadas.

La verificación se hace mediante el conteo de las casillas que forman cada uno de los tableros.

Si ningún grupo ha construido ningún tablero, el profesor procederá a su construcción delante de todos los alumnos.

Segunda parte:

Material:

- Los tres tableros anteriores dibujados sobre papel.
- Lápiz, compás, papel y regla.

Consigna:

“Ahora, el juguetero quiere construir un tablero que tenga el quíntuple de perímetro que el inicial.

¿Cuántas casillas tendrá este tablero?”

El profesor entregará a cada grupo una copia de cada uno de los tableros anteriores.

Objetivo didáctico:

- Establecer la relación entre las áreas de figuras semejantes: la **razón de semejanza** entre **superficies** es el cuadrado de la razón de semejanza de las longitudes.

Variables didácticas y su gestión:

- Las dimensiones del nuevo tablero, pues ya no podrán construirlo sobre el papel y contar el número de casillas como en el caso anterior, sino que tendrán que saber de antemano, sin llegar a construirlo, de cuantas casillas consta el nuevo tablero.

Estrategia óptima:

- Encontrar la relación de semejanza de las superficies estableciendo la relación existente entre el número de casillas de los tableros ya construidos.

Otras estrategias:

- Multiplicar el número de casillas iniciales por cinco (30), por considerar que el número de casillas de los tableros guardan la misma relación que la razón entre los lados, derivada de la concepción de que si se dobla o triplica el perímetro, se dobla o triplica el área.
- Dar cualquier número al azar.
- Dar un intervalo del número de casillas.
- Intentar construir el tablero.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar el número de casillas que tendrá el nuevo tablero.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

Si nadie dice nada, el profesor propone observar los tableros anteriores y preguntará:

"¿Cuáles son las razones de semejanza entre el tablero inicial y los otros dos? ¿Cuál es la razón entre las casillas del tablero de perímetro doble y el tablero inicial? ¿Qué ocurre en el caso del tablero de perímetro triple? ¿Podéis deducir algo en consecuencia?

Institucionalización:

El profesor enunciará los siguientes resultados:

"La razón de semejanza entre los perímetros de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza de las dos figuras."

"La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de las figuras.

Por tanto, si la razón de semejanza entre dos figuras es *k*, la razón entre sus áreas es k^2."

Fase 3:

Objetivo:

- Conocer y establecer la relación entre los volúmenes de figuras semejantes.
- Efectuar la conversión entre el registro figural, el registro geométrico y el registro de la lengua natural.
- Efectuar tratamientos dentro del registro geométrico: Descomponer meriológicamente.
- Potenciar, movilizar y coordinar los procesos de visualización y razonamiento.

Material:

- Tetracubos y pentacubos.
- Centicubos, en un número de 8 cubos.
- Papel y lápiz.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

“Cada uno de vosotros ha recibido un pieza de un juego de construcción, formada por piezas cúbicas encajables. Tenéis que escribir un mensaje en el que pongáis el número de piezas cúbicas que necesitan vuestros compañeros para construir una figura semejante, es decir, que tenga exactamente la misma forma, pero cuyas aristas sean el doble de los de la figura inicial. La figura inicial se les entregará también junto con el mensaje.

El grupo que reciba vuestro mensaje, solo podrán trabajar con la cantidad de piezas cúbicas que hayáis indicado, utilizándolas todas, de manera que si sobran o faltan piezas no podrán construir la figura pedida.

Podéis utilizar 8 cubitos para probar. Cuando estéis seguros de la cantidad de cubitos que necesitan para hacer la figura, escribidlo en la hoja.

El grupo que indique el número exacto de cubos que se necesitan habrá ganado."

Variables didácticas y su gestión:

- Formas de las piezas: las piezas han sido escogidas de modo que su forma no sea simple, lo que facilitaría demasiado la actividad, ni demasiado compleja ya que dificultaría la búsqueda de los posibles métodos de resolución.
- Número de cubos que forman las piezas iniciales: se han escogido piezas formadas por 4 ó 5 cubos con el fin de que la tarea no se convierta en un trabajo arduo.
- No aportar ningún dato con el fin de desarrollar un razonamiento y tratamientos de tipo geométrico y bloquear posibles conversiones al registro algebraico y numérico.
- El número de cubos con los que se les permite trabajar: Se les permite trabajar únicamente con 8 cubitos con el fin de que establezcan la relación de que al doblar las aristas de cada uno de los cubitos, el cubo resultante está formado por 8 cubitos, por un lado, y para evitar que lleguen a la solución del problema por ensayo y error, por otro.

Estrategia óptima:

Establecer la relación de que al doblar las aristas de cada uno de los cubitos, el cubo resultante está formado por 8 cubitos, de modo que si la pieza consta de 4 ó 5 cubos, la semejante estará formada por 32 y 40 cubitos respectivamente.

Otras estrategias:

- Multiplicar el número de cubos iniciales por dos (8), por considerar que el número de cubos entre las figuras guardan la misma relación que la razón entre los lados, idea derivada de la concepción de que si se dobla la longitud de las aristas, se dobla el volumen.
- Dar cualquier número al azar.
- Dar un intervalos del número de piezas.
- No se puede saber de antemano, pero más de 8.
- Construcción de figuras con la misma forma, pero no semejantes a la inicial.

Validación:

El profesor pregunta a cada par de grupos si han conseguido que funcionen los mensajes o no:

"¿Os han faltado cubos?¿han sobrado?¿Dónde faltan cubos para que las figuras fueran semejantes?"

Pide que expliquen el procedimiento seguido.

Para verificar si la construcción es correcta, se procederá a comparar las aristas de las figuras iniciales y las nuevas figuras, pues para que ambas piezas sean semejantes es necesario que todos los lados sean proporcionales. Se utilizarán fotografías de las figuras construidas para proceder a la validación.

Institucionalización:

El profesor enunciará los siguientes resultados:

"La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza de las figuras.

Por tanto, si la razón de semejanza entre dos figuras es *k*, la razón entre sus volúmenes es k^3."

Situación 2: Trabajando con planos, mapas y escalas.

Objetivo:

- Conocer el concepto de escala y aplicarlo para interpretar planos.
- Medir longitudes, distancias y bordes de superficies sobre un dibujo, dando lugar a actividades que exigen que se pase de una escala a otra.
- Establecer la correspondencia entre la representación de un plano, mapa o dibujo y la realidad.
- Leer y establecer la escala de un plano o un mapa.
- Construir figuras a partir de una escala.
- Efectuar la conversión Registro Figural - Registro Geométrico – Registro Algebraico - Registro Numérico - Registro de la Lengua Natural. (Fase 1)
- Efectuar la conversión Registro Numérico – Registro Geométrico – Registro Figural – Registro Algebraico. (Fase 2)
- Efectuar la conversión entre el Registro Figural- Registro Tabular-Registro Algebraico - Registro Numérico. (Fase 3)

Fase 1: Medida de planos a partir de la escala dada. Juego de comunicación.

Material:

- Plano de una casa en dos escalas distintas, 1:50 y 1:100:

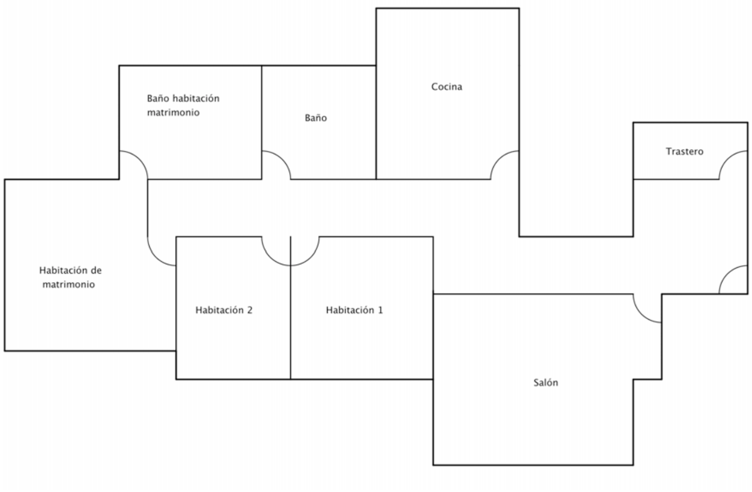


FIGURA 4.4.3.13. *Plano de una vivienda*

- Lápiz, regla, calculadora y papel.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

"La mitad seréis grupos A y la otra mitad, grupos B. A los grupos A les voy a dar un plano de una casa, y a los grupos B, el plano de otra casa. Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con ese mensaje, saber cuál es la casa de mayor tamaño.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, saber cuál es la casa de mayor tamaño. Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades."

Variables didácticas y su gestión:

- Forma del plano: se ha seleccionado un plano escogido de modo que su forma no sea ni demasiado simple ni demasiado compleja a la hora de calcular las dimensiones, pues de ser así se produciría una perdida del sentido de la actividad.

- Dimensiones del plano: se han escogido dimensiones que no supongan un trabajo de paso de escala dificultoso, lo que convertiría la actividad en una tarea de cálculo numérico que no es lo pretendido.
- La no aportación de ningún dato numérico de manera que tengan que realizar la conversión del Registro Figural y Geométrico al numérico.

Estrategia óptima:

Cálculo de las dimensiones reales de cada una de las estancias y del pasillo mediante el empleo de la escala correspondiente a cada plano.

Otras estrategias:

- Medida del perímetro del plano.
- Medida de las dimensiones sin efectuar el cambio de escala.
- Efectuar el cambio de escala sobre la medida de superficie.
- No tener en cuenta la escala y comparar las superficies a partir del tamaño en que se han dado.
- Buscar la relación cuadrado - cuadrado de la cuadrícula sobre la que están construidos los planos.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Quién piensa que la casa de los grupos A es más grande?¿Quién piensa que la casa de los grupos B es más grande? ¿Hay alguien que piense que son iguales?"

El profesor pregunta a cada par de grupos si han conseguido que funcionen los mensajes o no, y pide que expliquen el procedimiento seguido.

Fase 2: Medida de planos a partir de la escala establecida por los alumnos.

Material:

- Plano de una habitación

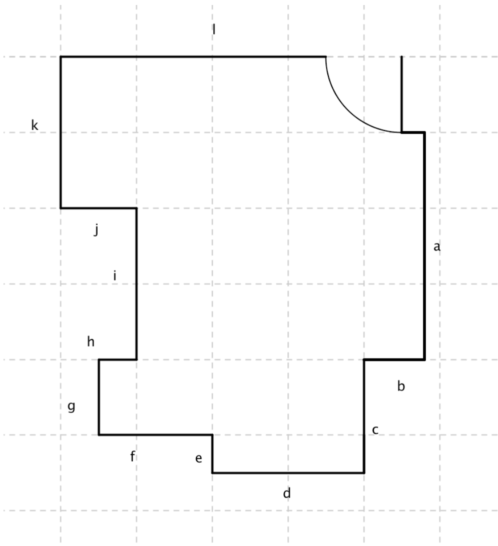


FIGURA 4.4.3.14. *Plano de una habitación*

- Hoja con la preselección de los muebles

TABLA 4.4.3.3. *Muebles y dimensiones*

Camas	Medidas de los productos
	Longitud: 210 cm Ancho: 105 cm Altura piecero: 30 cm Altura cabecero: 77 cm

	Longitud: 210 cm Ancho: 165 cm Altura: 47 cm Largo del colchón: 200 cm Ancho del colchón: 160 cm
Mesillas	Medidas de los productos
	Ancho: 45 cm fondo: 37.5 cm Altura: 55 cm
	Ancho: 60 cm fondo: 45 cm Altura: 55 cm

Librerías	Medidas de los productos
	Ancho: 75 cm fondo: 30 cm Altura: 202 cm
	Ancho: 45 cm fondo: 39 cm Altura: 185 cm
	Ancho: 60 cm fondo: 37.5 cm Altura: 106 cm

Armarios	Medidas de los productos
	Ancho: 200 cm fondo: 66 cm Altura: 236.4 cm
	Ancho: 150 cm fondo: 60 cm Altura: 181 cm
Escritorios	Medidas de los productos
	Ancho: 105 cm fondo: 60 cm Altura: 73 cm

	Ancho: 90 cm fondo: 60 cm Altura: 75 cm
	Ancho: 120 cm fondo: 60 cm Altura: 74 cm

Fuente: elaboración propia a partir de folleto de Ikea, 2012

- Regla, calculadora, tijeras, lápiz y papel milimetrado.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 30 y 40 minutos

Consigna:

"Se os ha repartido el plano de una habitación que tenéis que amueblar. La única información que tenéis es la dimensión de la puerta 205 cm x 75 cm. En la habitación hay que poner una cama, un escritorio, dos librerías, un armario y una mesilla.

La ubicación de los mismo en la habitación es la siguiente:

- La cama y la mesilla deben de ir en la pared *k* y no debe sobrar hueco.
- Una librería debe de ir en la pared *g*, de modo que no sobre hueco ni sobresalga de la pared *h*.
- El escritorio y la otra librería deben de ir en la pared *d*, de modo que no sobre hueco, ni sobresalga de la pared *e* el mueble que esté en dicho lado.
- El armario debe ir en la pared *a* y no debe de sobresalir de *b*.

Se ha hecho una preselección de algunos muebles en un catálogo.

Tenéis que encontrar aquella combinación de muebles que encajen en la habitación.

Disponéis de papel y tijeras para construirlos y ubicarlos en la habitación."

Variables didácticas y su gestión:

- La no aportación de la escala: a diferencia de la actividad de la fase anterior, en esta ocasión no se les proporciona la escala, de manera que deben ser los alumnos quienes la establezcan a partir de la dimensión de la puerta. Este hecho obligará a los estudiantes a realizar la conversión del registro figural al registro numérico.
- Dimensiones de la puerta: se les proporciona tanto el ancho como el alto, pues de indicarles únicamente la anchura de la puerta asociarían esta dimensión con la interpretación que tienen que hacer de ésta en el plano, lo que facilitaría en exceso el desarrollo de la actividad.
- Forma de la habitación: se ha diseñado una habitación con forma alejada de lo que es habitual, cuadrada o rectangular, pues de haber sido así, la tarea perdería parte de su sentido.
- Dimensiones de los muebles: se han escogido dimensiones que no supongan un trabajo de paso de escala dificultoso, lo que convertiría

la actividad en una tarea de cálculo numérico que no es lo pretendido.

- Colocación de los muebles: se ha decidido dar la colocación de los muebles para evitar que el problema se convierta en una actividad de combinatoria en lugar de en una tarea de trabajo con escala.

Estrategia óptima:

Establecer la escala a partir del ancho de la puerta. Utilizar dicha escala para pasar de las dimensiones reales de los muebles a las dimensiones que tendrían sobre el plano para intentar encajarlos una vez construidos y recortados en papel.

Otras estrategias:

- Inventarse una escala.
- Establecer al escala a partir de la altura de la puerta.
- Encajar los muebles por estimación.
- Encajar los muebles al azar.
- Usar medidas que no son pertinentes, como la altura de los muebles.

Validación:

El profesor pregunta a cada uno de los grupos, aunque colectivamente, quien ha conseguido colocar los muebles en la habitación. Pide a cada grupo que justifique su respuesta, a fin de hacer presentes las estrategias empleadas.

La verificación se hace mediante la colocación de los muebles construidos en papel milimetrado, sobre el plano dado.

Si transcurridos 5 minutos los grupos no han empleado ningún método para resolver la tarea o no hubiesen encontrado nada, el profesor pregunta expresamente:

"¿Conocéis algún dato que os sirva de referencia para poder saber la dimensión que tendrá cada mueble si se representa en el plano?"

Si ningún grupo ha conseguido ubicar los muebles correctos, el profesor procederá a su demostración delante de todos los alumnos.

Institucionalización:

El profesor introduce el concepto de escala:

"La escala es la razón de semejanza entre la longitud representada en el dibujo y la longitud real:

$$Escala = \frac{longitud\ en\ la\ representación}{longitud\ en\ la\ realidad}$$

La escala numérica representa la relación entre el valor de la representación (el número a la izquierda del símbolo ":") y el valor de la realidad (el número a la derecha del símbolo ":").Un ejemplo de ello sería 1:1000, lo que indica que una unidad cualquiera en el plano representa 1000 de esas mismas unidades en la realidad."

Fase 3: En busca de las pistas. Escalas en planos.

Material:

- Hoja con el mapa de las pistas.
- Tabla con distancias.
- Regla, calculadora, lápiz y papel.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

“Unos amigos han organizado un gincana en la que hay que buscar tres pistas para ganar. Para ello, proporcionan a los equipos que van a participar un mapa con unos puntos marcados señalizando las pistas.

La cuestión es que en el mapa hay más de tres pistas marcadas, así que para determinar cuáles son las que hay que buscar, también les proporcionan la siguiente tabla donde se recoge la distancia real que hay en línea recta entre las pistas que deben recoger:

TABLA 4.4.3.4. *Tabla para el alumno con la distancia entre las pistas*

	Salida	Pista 1	Pista 2	Pista 3
Salida		160 m	712 m	936 m
Pista 1	160 m		672 m	816 m
Pista 2	712 m	672 m		448 m
Pista 3	936 m	816 m	448 m	

Fuente: elaboración propia

Es necesario determinar las pistas antes de comenzar la gincana, de lo contrario los grupos participantes podrían perderse. Por ello os piden que les ayudéis a localizar las pistas sobre el mapa. El punto de partida para todo los grupos viene marcado con una S roja en el mapa.

¿Cuáles son las tres pistas correctas?”

Variables didácticas y su gestión:

- Distancia entre las pistas: la distancia entre las pistas se ha escogido de tal manera que no pueda determinarse cuales son las correctas a simple vista. Del mismo modo, tenemos pistas falsas que se encuentran a la misma distancia que una verdadera, de modo que tienen que emplear la tabla de distancias entre las pistas buenas para determinar cual es la correcta.
- Utilización de la tabla de distancias con el fin de potenciar la conversión entre dicho registro y los demás que entran en juego en la actividad.
- La aportación de la escala, pues de tener que establecer al escala los estudiantes la actividad se convertiría en una tarea de marcado carácter combinatorio y numérico.
- El formato de la escala: se ha escogido un formato figural para dar la escala con la distancia real dada en metros con el fin de evitar problemas emergentes derivados del cambio de unidades en el sistema métrico decimal.

Estrategia óptima:

Medida de las distancias entre las pistas en el plano mediante el uso de la regla para su posterior conversión a la distancia real mediante la escala. Identificación de dichas distancias en la tabla.

Otras estrategias:

- Elección de las pistas mediante la estimación de distancias a ojo.
- Elección de las pistas al azar.
- Conversión de las distancias reales dadas en la tabla a distancias en el plano mediante el factor de escala. Posterior medición en el plano para ver la correspondencia entre las distancias calculadas y las medidas. Esta estrategia es válida pero más larga y laboriosa que la estrategia óptima.

Validación:

El profesor pregunta a cada uno de los grupos, aunque colectivamente, quien ha conseguido encontrar las pistas correctas. Pide a cada grupo que justifique su respuesta, a fin de hacer presentes las estrategias empleadas.

La verificación se hace mediante la utilización de la tabla de las distancias reales entre las pistas y la escala que viene dada en el mapa.

Si ningún grupo ha conseguido ubicar las pistas correctas, el profesor procederá a su demostración delante de todos los alumnos.

Institucionalización:

El profesor introduce el término escala gráfica:

"La escala gráfica representa las distancias reales sobre un segmento graduado.

Esta escala facilita la realización de los cálculos, ya que comparando el segmento de la escala y el segmento determinado por la distancia que queremos conocer, podemos obtener una aproximación de la distancia real."

Situación 3: Criterios de semejanza en triángulos.

Fase 1:

Objetivo:

- Conocer y aplicar el criterio de semejanza entre triángulos:
    - o Si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, son semejantes.
- Efectuar la conversión Registro Geométrico – Registro Tabular - Registro Numérico - Registro de la Lengua Natural.

Material:

- Hoja con seis triángulos dibujados. Los triángulos 1 y 3 son semejantes entre sí; los triángulos 2 y 5 son semejantes entre sí; el 4 no es semejantes con ninguno.

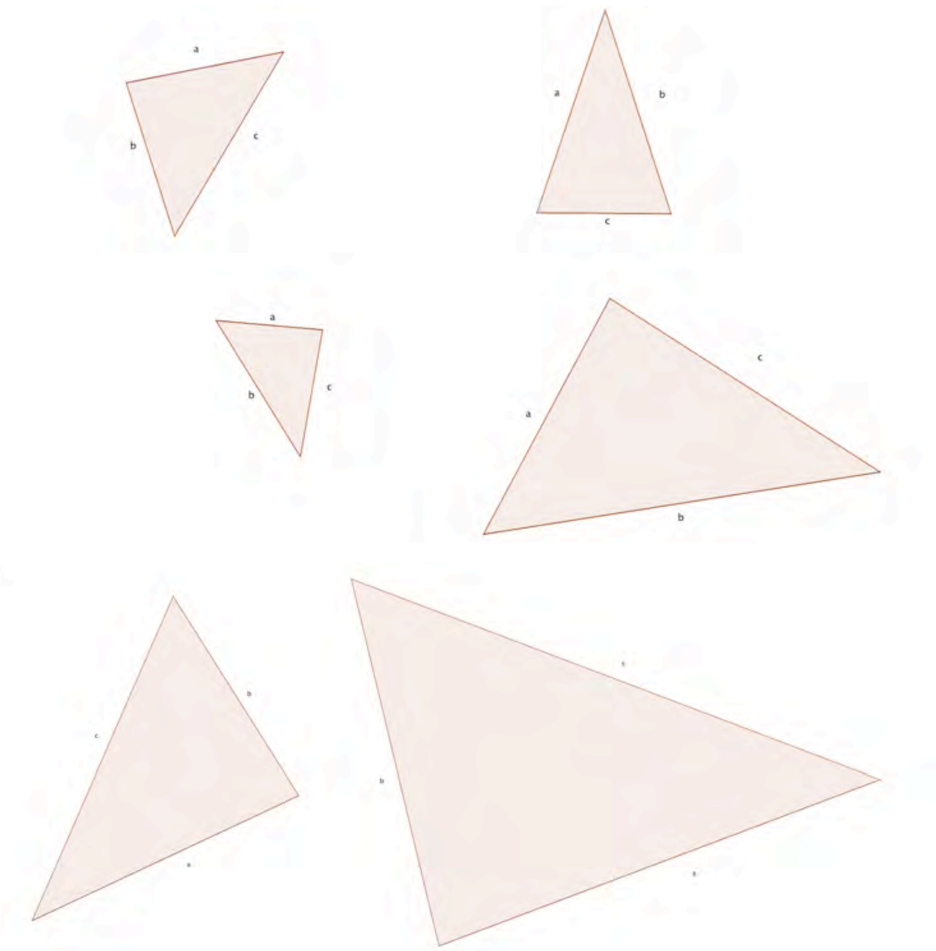


FIGURA 4.4.3.15. *Triángulos semejantes*

- Hoja con tabla para recoger los datos.

TABLA 4.4.3.5. *Tabla para encontrar triángulos semejantes*

	a	b	c
Triángulo 1			
Triángulo 2			
Triángulo 3			
Triángulo 4			
Triángulo 5			
Triángulo 6			

Fuente: elaboración propia

- Regla, lápiz y calculadora.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

"Se os ha repartido una hoja con una colección de triángulos dibujados. Algunos de estos triángulos son semejantes entre sí.

¿Sabríais indicar cuáles? Indicad como lo habéis averiguado.

Enunciad, a partir de lo visto, un criterio que nos permita saber si dos triángulos son semejantes."

Variables didácticas y su gestión:

- Soporte de la imagen: El hecho de que los triángulos se proporcionen dibujado en una hoja y no se aporte ningún otro tipo de material adicional, tiene como función el bloquear la estrategia de la comparación directa mediante la superposición, lo que les podría permitir comparar los ángulos de los triángulos.

- Posición de los triángulos: Los triángulos semejantes tienen posiciones distintas sobre la ficha en la que están dibujados con el fin de evitar la posible identificación de triángulos semejantes a partir de la forma, pues al variar la orientación de estos sobre el plano, se distorsiona tal identificación.

- Tipos de triángulos: los triángulos no son demasiado diferentes entre si, pues de ser así la actividad perdería su sentido.

- Uso de la tabla: la tabla les permitirá establecer de manera más eficaz la relación entre los lados de los triángulos.

- La razón de semejanza: se han escogido razones de semejanzas no enteras, ya que ello conduciría al estudiante a la resolución inmediata de la tarea.

- Nomenclatura de los lados del triángulo, pues de no indicarlo la actividad se complicaría en exceso, perdiéndose el sentido de la misma.

Estrategia óptima:

Medida de los lados de cada triángulo para la posterior búsqueda de la razón de semejanza.

Otras estrategias:

- Búsqueda de los triángulos semejantes a ojo.

Validación:

Cuando los estudiantes han acabado, tras 10 o 15 minutos, el profesor pregunta si han encontrado los triángulos semejantes.

Instaura un debate a efectos de :

- Ponerse de acuerdo sobre los triángulos semejantes.

- Exponer las estrategias utilizadas que han permitido encontrar los triángulos semejantes.

- Enunciar el primer criterio de semejanza de triángulos.

El profesor pide a un miembro de uno de los grupos que explique la estrategia seguida por su equipo y las razones de su elección.

A continuación, pregunta "Quién ha utilizado esta estrategia?¿Quién ha utilizado otra?"

Si nadie hubiese encontrado nada, el profesor propondrá completar la tabla con la medida de los lados de los triángulos y observar la relación entre los mismos.

Institucionalización:

El profesor enunciara el primer criterio de semejanza entre triángulos:

"Si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, son semejantes."

Fase 2:

- Conocer y aplicar el criterio de semejanza entre triángulos:
    - Si dos triángulos tiene dos ángulos iguales, son semejantes.
- Efectuar la conversión Registro Figural – Registro de la Lengua Natural.
- Utilizar tratamientos dentro del registro figural.

Material:

- Colección de cinco triángulos recortados a los cuales les falta un pedazo desapareciendo uno de los ángulos por completo y parte de dos de los lados. Entre los triángulos hay únicamente dos triángulos semejantes.
- Lápiz y papel.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- 10 minutos

Consigna:

“Se os ha repartido una colección de cinco figuras recortadas. Como podéis observar, se tratan de triángulos a los cuales les ha desaparecido un pedazo. Sabemos que únicamente había dos triángulos que eran semejantes entre sí.

¿Sabríais indicar cuáles? Indicad como lo habéis averiguado.

A lo largo de la actividad no podéis utilizar la regla.

Enunciad, a partir de lo visto, un criterio que nos permita saber si dos triángulos son semejantes.”

Variables didácticas y su gestión:

- Pedazo recortado: a todos los triángulos se les ha recortado un pedazo de tal manera que aparecen dos de los ángulos que forman parte del triángulo, con el fin de que puedan encontrar la estrategia óptima. A demás, esto también bloquea la utilización del criterio de semejanza de triángulos trabajado en las fase anterior.

- El no empleo de la regla: de lo contario podrían medir la longitud de los lado que han desaparecido y la actividad se convertiría en la de la primera fase, perdiendo el sentido.

- Igualdad de los ángulos: lo ángulos de los triángulos que forman parte de la actividad no serán muy diferentes entre sí, pues de ser así, el estudiante podría llegar a la solución pedida mediante el descarte, sin llegar a superponer las figuras.

Estrategia óptima:

Selección de los triángulos cuyos ángulos son iguales, mediante la superposición.

Otras estrategias:

- Trazado de los lados que falta para estimar su longitud y determinar si son proporcionales.

- Utilización de intermediarios para medir los lados que faltan.

- Determinar los triángulos semejantes seleccionando al azar.

- Utilización del criterio de semejanza visto en la primera fase.

Validación:

Cuando los estudiantes han acabado, tras 10 minutos, el profesor pregunta si han encontrado los dos triángulos semejantes.

Instaura un debate a efectos de :

- Ponerse de acuerdo sobre los triángulos semejantes.
- Exponer las estrategias utilizadas que han permitido encontrar los triángulos semejantes.
- Enunciar el segundo criterio de semejanza de triángulos.

El profesor pide a un miembro de uno de los grupos que explique la estrategia seguida por su equipo y las razones de su elección.

A continuación, pregunta "Quién ha utilizado esta estrategia?¿Quién ha utilizado otra?"

Se pide a los alumnos que digan qué criterio o método pueden utilizar para determinar si dos triángulos son semejantes, ya que no siempre va a ser posible comprobar la proporcionalidad de los lados.

Si nadie hubiese encontrado nada, el profesor recordará la definición de figuras semejantes:

"Dos figuras son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales, es decir, tienen la misma forma**.**"

De esta manera la comparación de los ángulos por superposición aparece como solución al problema.

Institucionalización:

El profesor enunciará el segundo criterio de semejanza entre triángulos:

"Si dos triángulos tiene dos ángulos iguales, son semejantes.

El profesor indicará que:

" La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, por lo que si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, son semejantes, pues el tercer ángulo también será igual."

Fase 3:

Objetivo:

- Conocer y aplicar el criterio de semejanza entre triángulos:
  - o Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales, son semejantes.
- Efectuar la conversión Registro Figural - Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural.
- Utilizar tratamientos dentro del Registro Figural.

Material:

- Colección de cinco triángulos recortados a los cuales les falta un pedazo, desapareciendo uno de los lados por completo. Entre los triángulo habrá únicamente dos triángulos semejantes. Tendremos triángulos con dos lados proporcionales pero cuyo ángulo, el formado por tales lados, sea desigual; hay triángulos con ángulo igual pero con los lados que lo forman no proporcionales.
- Tabla con las dimensiones de los lados conocidos de los triángulos:

TABLA 4.4.3.6. *Tabla para el alumno con las dimensiones de los triángulos*

	a	b
Triángulo 1	7	10
Triángulo 2	8,4	12
Triángulo 3	10,5	15
Triángulo 4	11,2	16
Triángulo 5	18	20

Fuente: elaboración propia

- Lápiz y papel.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 10 y 15 minutos

Consigna:

"Se os ha repartido una colección de siete figuras. Como podéis observar, al igual que pasaba antes, se tratan de triángulos a los cuales les ha desaparecido un pedazo. Sabemos que únicamente había dos triángulos que eran semejantes entre sí.

¿Sabríais indicar cuáles? Indicad como lo habéis averiguado.

A lo largo de la actividad no podéis utilizar la regla.

Enunciad, a partir de lo visto, un criterio que nos permita saber si dos triángulos son semejantes."

Variables didácticas y su gestión:

- Pedazo recortado: a todos los triángulos se les ha recortado un pedazo de tal manera que uno de los lados ha desaparecido con el fin de evitar la comparación directa de los ángulos por superposición. A demás, esto también bloquea la utilización de los criterios de semejanza de triángulos trabajados en las fases anteriores.

- El no empleo de la regla: de lo contario podrían medir la longitud del lado que ha desaparecido y la actividad se convertiría en la de la fase anterior, perdiendo el sentido.

- Triángulos con lados proporcionales pero con ángulo que forman desigual: si únicamente son proporcionales los lados de los triángulos que hemos dicho que son semejantes, el alumno llegaría a la solución de la tarea por simple descarte. Por ello, hemos incluido triángulos que tienen los lados proporcionales a los que realmente son semejantes, pero cuyo ángulo es desigual.

- Triángulos con ángulo igual pero con los lados que lo forman no proporcionales: si únicamente son iguales los ángulos de los triángulos que hemos dicho que son semejantes, el alumno podría llegar a la solución de la actividad por descarte a través de la superposición de figuras.

- Longitud de los lados del triángulo que aparecen, para que puedan encontrar la relación entre los lados.

Estrategia óptima:

Selección de los triángulos cuyo ángulo es igual, por superposición. Entre estos, buscar aquellos que tengan los lados que forman dicho ángulo proporcionales.

Otras estrategias:

- Trazado del lado que falta para estimar su longitud y determinar si son proporcionales.

- Utilización de intermediarios para medir el lado que falta.

- Determinar los triángulos semejantes seleccionando al azar.

- Determinar los triángulos semejantes por estimación mediante la visualización.

- Utilización de los criterios de semejanza anteriores.

Validación:

Cuando los estudiantes han acabado, tras 10 minutos, el profesor pregunta si han encontrado los dos triángulos semejantes.

Instaura un debate a efectos de :

- Ponerse de acuerdo sobre los triángulos semejantes.

- Exponer las estrategias utilizadas que han permitido encontrar los triángulos semejantes.

- Enunciar el tercer criterio de semejanza de triángulos.

El profesor pide a un miembro de uno de los grupos que explique la estrategia seguida por su equipo y las razones de su elección.

A continuación, pregunta "¿Quién ha utilizado esta estrategia?¿Quién ha utilizado otra?"

Se pide a los alumnos que digan qué criterio o método pueden utilizar para determinar si dos triángulos son semejantes, ya que no siempre va a ser posible comprobar la proporcionalidad de los lados, ni la igualdad de dos de los ángulos.

Si nadie hubiese encontrado nada, el profesor recordará los dos criterios anteriores e indicará:

"Estos dos criterios, aunque no los podéis utilizar tal cual, os proporcionan información que podéis utilizar para encontrar los dos triángulos que son semejantes. Intentadlo"

De esta manera el tercer criterio aparece como solución al problema.

Institucionalización:

El profesor enunciara el segundo criterio de semejanza entre triángulos:

"Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales, son semejantes."

Situación 4: Aplicación de la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias. Sombras.

Objetivo:

- Aplicar la semejanza de triángulos rectángulos en el cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra.
- Efectuar la conversión entre varios registros de representación en la resolución de problemas: Registro Tabular - Registro Geométrico – Registro Figural - Registro Algebraico – Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural.

Material:

- Hoja con el enunciado del problema.
- Lápiz, papel y calculadora.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajarán en grupos de dos o tres.

Tiempo de realización:

- Entre 20 y 30 minutos

Consigna:

“Con motivo de un campeonato de baloncesto que se va a disputar entre varios institutos de la zona, un grupo de inspectores deportivos acude a examinar las 3 canchas de baloncesto donde se va a jugar para comprobar que las alturas de las canastas cumplen las medidas reglamentarias: 3,95 m de altura.

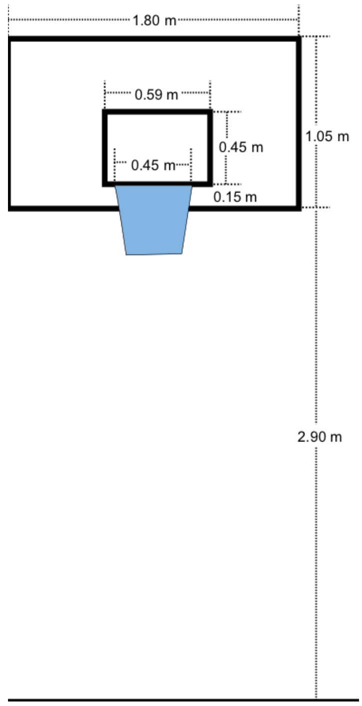


FIGURA 4.4.3.16. *Esquema para el alumno de una canasta*

Debido a un descuido, pues solo han cogido un trípode que mide 1,25 metros olvidándose el resto de instrumentos que les permiten calcular la altura de las canastas en la oficina, los inspectores se han visto obligados a calcular las alturas mediante otro sistema. Para ello, han medido la sombra de cada canasta y la sombra del trípode de manera simultánea, es decir, a la misma hora del día, obteniendo los siguientes resultados:

TABLA 4.4.3.7. *Tabla para el alumno con las dimensiones de las sombras del trípode y la canasta*

Medida de la sombra de la	Medida de la
Canasta 1= 1,58 m	0.5 m
Canasta 2= 2.37 m	0.75 m
Canasta 3= 4.74 m	1.5 m
Canasta 4= 2,88 m	0.9 m
Canasta 5= 3.16 m	1 m
Canasta 6= 4.48 m	1.4 m

Fuente: elaboración propia

A partir de estos datos, los inspectores creen que hay dos canastas que no cumplen con las medidas reglamentarias.

¿Sabríais decir cuales son?

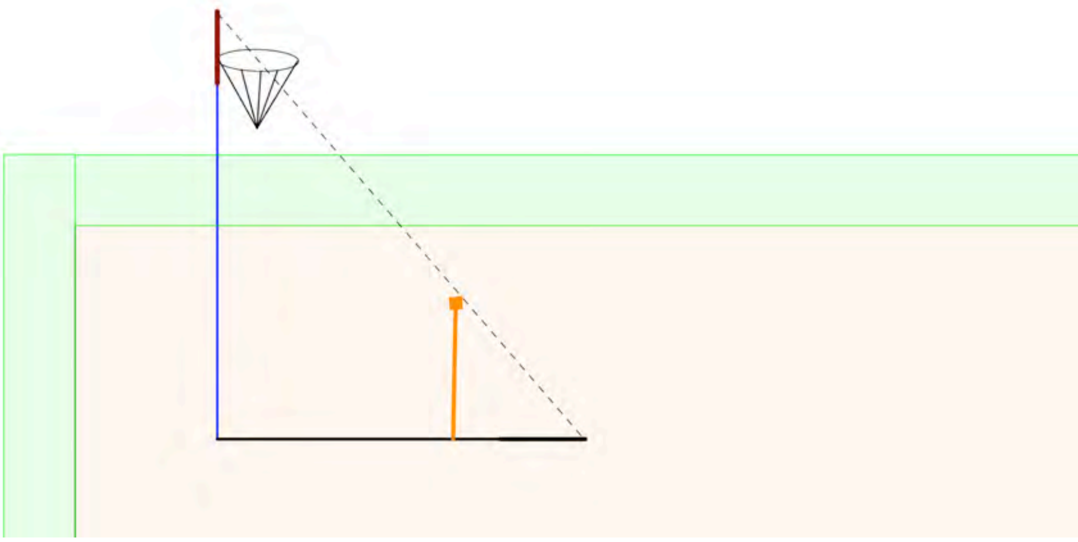


FIGURA 4.4.3.17. *Esquema para el alumno de la situación descrita*

Variables didácticas:

- Dar un esquema de la situación: Con ello se pretende que el alumno se vea obligado a utilizar el registro Figural, coordinarlo con el de la Lengua Natural y realizar la conversión hacia el Geométrico, Algebraico y Numérico.

- Medidas de las sombras a distintas horas del día, pues de no ser así todas las sombras de las canastas medirían lo mismo salvo las que no tienen las medidas reglamentarias.

Estrategia óptima:

Construcción de los triángulos rectángulos semejantes que forman la canasta y el trípode con sus respectivas sombras a partir de los datos proporcionados en la tabla , para encontrar la medida pedida.

Otras estrategias:

- Elección de las canastas al azar.
- Construcción de triángulos que no sean semejantes.

Validación:

Cuando los estudiantes han acabado, tras 20 minutos, el profesor pregunta si han encontrado las dos canastas que no cumplen las medidas reglamentarias.

Instaura un debate a efectos de :

- Ponerse de acuerdo sobre las canastas que no tiene las medidas correctas.
- Exponer las estrategias utilizadas que han permitido encontrar las canastas.

La verificación viene dada por el conocimiento de la medida estándar de la canasta.

El profesor pide a un miembro de uno de los grupos que explique la estrategia seguida por su equipo y las razones de su elección.

A continuación, pregunta “¿Quién ha utilizado esta estrategia?¿Quién ha utilizado otra?”

4.4.4. Análisis a posteriori. Resultados de las observaciones.

Como ya se mencionó al referirnos a la metodología de observación de la ingeniería didáctica, son diversas las fuentes en que nos vamos a apoyar para realizar el análisis a posteriori: observaciones y crónicas de los miembros del equipo, transcripciones de las cintas de video, ejercicios y datos dejados por los estudiantes al abordar la tareas propuestas. No obstante, es sumamente difícil tener bajo control todo lo que pase en la clase, de forma que no exista perdida de información para quien ha diseñado las situaciones.

Así, por ejemplo, si se comparan las situaciones, organización y planificación inicial de las mismas con el posterior desarrollo en el aula, se observan sesgos debidos a modificaciones que tratan de responder y ajustarse a lo que ha ocurrido previamente en el desarrollo de la clase. Por ello, algunas de las situaciones diseñadas no han podido desarrollarse en el aula como se había previsto, lo que no ha supuesto, por otro lado, que la ingeniería pierda sentido ni significado.

Estudios experimentales de ingeniería didáctica I. El Teorema de Pitágoras

Situación 1: Familiarización con la descomposición de figuras. Pavimentado de una superficie con otra.

La situación se desarrolló el día 11 de abril de 2012 durante los 15 primero minutos de clase.

Objetivo de la situación:

El objetivo principal de esta situación era que el alumno se familiarizará con el material a utilizar a lo largo de diversas situaciones siguientes, a la vez de que fueran capaces de encontrar una herramienta que les permitiera hacer una comparación de figuras, desde el punto de vista de la superficie, basada en la descomposición mereológica 2D/2D.

Por ello pusimos mucho interés en que los procesos de comparación directa surgieran espontáneamente sin indicación alguna por nuestra parte.

Por otro lado, aunque debería de tratarse de un concepto ya asimilado e interiorizado en cursos anteriores, la situación también trata de hacer operacional la definición de equivalencia de superficies que les será de utilidad para comprender el teorema de Pitágoras a partir de su demostración geométrica.

Descripción:

Esta primera situación, la cual consta de un única fase, pretende introducir al alumnado en la técnica de la descomposición de figuras para que mediante el recortado y el pavimentado lleguen a concluir que dos superficies son equivalentes, es decir, tienen la misma cantidad de superficie, si el recortado de una permite cubrir completamente la otra:

“Las dos figuras que os he repartido son dos superficies equivalentes, es decir, tienen la misma cantidad de superficie. Tenéis que probar que, efectivamente, se trata de dos superficies equivalentes, ya que mi afirmación es cierta.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil”

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona las figuras con las que van a tener que desarrollar la actividad:

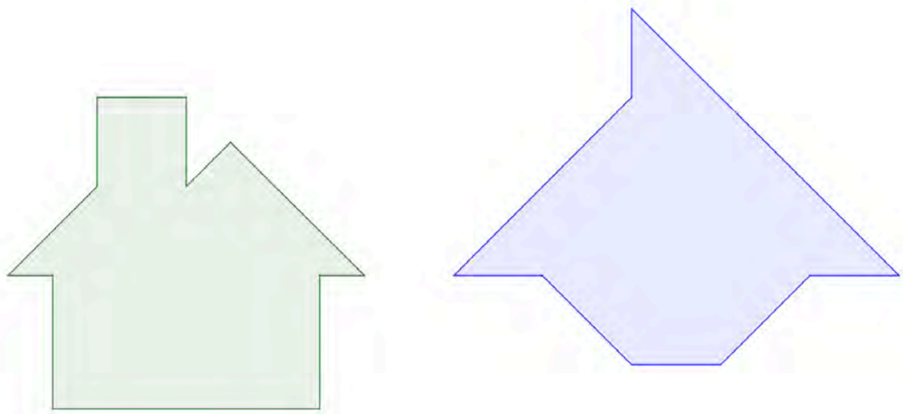


FIGURA 4.4.4.1. *Figuras construidas con tangram*

Las figuras han sido construidas de tal manera que su forma no sea simple ni demasiado reconocida por el alumnado con el fin de bloquear aquellas estrategias basadas en la descripción de formas.

Se trata de una actividad que sentará las bases de los procesos y razonamientos que serán necesarios poner en funcionamiento a la hora de introducir a los alumnos en el Teorema de Pitágoras a partir de la descomposición mereológica (2D/2D) de figuras mediante la técnica del recortado-pegado.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna:

- **Profesor**: *Estas dos figuras (mostrándolas) que tenéis son dos superficies equivalentes. Eso quiere decir que hay la misma cantidad de superficie en una que en la otra. Vosotros tenéis que probar que efectivamente son dos superficies equivalentes, por que la afirmación que he dicho es cierta.*

  En la mesa tenéis material que podéis utilizar. Podéis empezar cuando queráis.

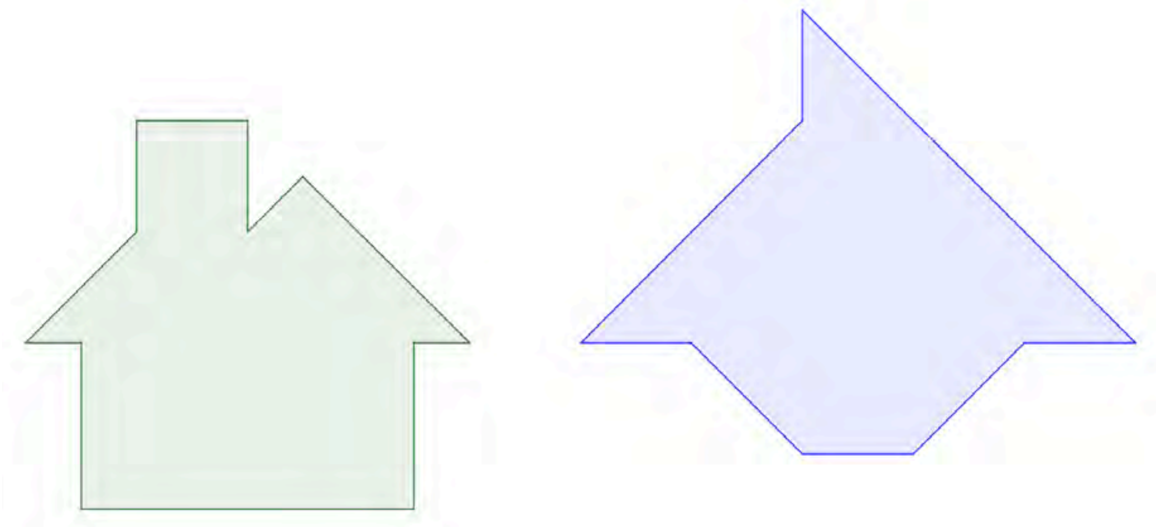


FIGURA 4.4.4.2. *Figuras para el alumno construidas con tangram*

Los nueve grupos se implican en la resolución de la tarea de manera inmediata produciéndose devolución, pues el carácter completamente a-didáctico de la situación, que se asimila más a un juego que a la típica actividad tradicional, clásica y reglada que acostumbran a resolver, les motiva y persuade al instante.

Todos los alumnos pueden entrar sin problema con los conocimientos de los que disponen, poseen la misma información sobre el medio material y de referencia.

Varios son los alumnos que tras enunciar la consigna y repartir las figuras hacen preguntas como las que siguen:

- **Profesor**: *Os voy a repartir estas figuritas* (muestra las figuras a los alumnos).
- **Sandra**: *¿Sacamos libro?*
- **Profesor**: No, no hace falta.
- **Marta y Elena**: *¿No hace falta libro?*
- **Profesor**: *No, no es necesario. Los libros no los vais a necesitar. Los podéis guardar y el cuaderno también. Si tenéis que escribir algo, yo os daré papel.*
- **Sandra***: ¿Y cómo lo resolvemos?¿Se puede cortar?*
- **Profesor***: Lo que queráis, podéis hacer lo que queráis.*
- **Jaime***: ¿Y dibujar?*
- **Profesor***: Podéis hacer lo que queráis si creéis que sirve para probar lo pedido.*

Ambas conversaciones son un claro ejemplo de los conflictos que les genera la rotura con el contrato didáctico al que están acostumbrados a responder. Además, queda reflejada la importancia que se ha concedido al libro de texto en el desarrollo habitual de la clase, donde es considerado por los estudiantes como algo básico y totalmente imprescindible.

La tarea ha resultado más difícil de lo que a priori se había imaginado, debido quizás a que el alumno está a acostumbrado a recibir más información a la hora de enfrentarse a las tareas que el profesor les propone, es decir, no están familiarizados con este tipo de trabajo donde ellos son los que tienen que descubrir cómo resolver la actividad de la manera más óptima.

Este hecho queda patente en diálogos como el que sigue, en donde dos estudiantes reclaman más información e indicaciones sobre cómo proceder para resolver la actividad. El profesor les vuelve a dar la consigna sin indicar en ningún momento la estrategia a seguir:

- **Fran**: *¿Me puedes explicar que hay que hacer?*
- **Profesor**: *Si.*
- **Javier**: *Mejor, porque no nos estábamos enterando.*
- **Profesor**: *Estas dos figuras tienen la misma cantidad de superficie. Yo os afirmo que son superficies equivalentes, es decir, que hay la misma cantidad de superficie en una que en otra. Vosotros tenéis que probar que efectivamente lo que yo estoy diciendo es vedad.*
- **Fran**: *¿qué haya lo mismo en un lado que en otro?*
- **Profesor**: *Que haya la misma cantidad de superficie en una que la otra.*
- **Javier**: *¿Entonces tenemos que sumar todos los lados?*
- **Fran**: *No. Hay que buscar el mismo número de figuras en este lado y en este* (haciendo referencia a la figura verde y a la figura azul).
- **Profesor**: *Si ese método* (en referencia al propuesto por Fran) *os parece correcto, hacedlo.*

Únicamente uno de los grupos ha empleado la estrategia óptima, descomponer una de las figuras mediante la técnica del recortado para pavimentar con ella la otra.

Los ocho grupos restantes optan por utilizar estrategias basadas en la medida y el cálculo tanto de perímetros como de áreas.

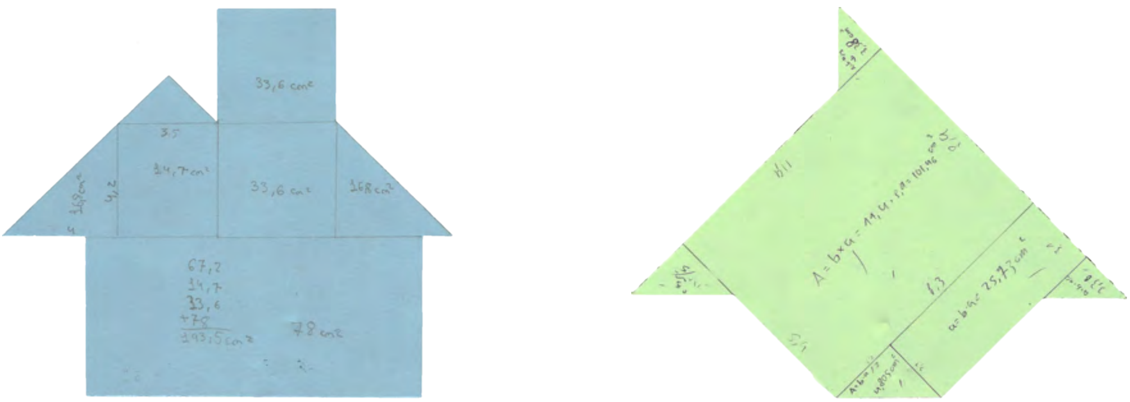


FIGURA 4.4.4.3. *Trabajo realizado por el grupo 5*

Estrategias y conclusiones

En la siguiente tabla se recogen las estrategias de base utilizadas por cada grupo y si han realizado algún cambio en la misma ante la insuficiencia de la primera. Marcamos en verde las estrategias óptimas:

TABLA 4.4.4.1. *Estrategias utilizas en la Situación 1 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Medida de los lados de las figuras y comparación de los perímetro.	Superposición de las figuras iniciales tal cual se les ha repartido intentando identificar elementos comunes a las dos para dibujarlos. Señalan, con uso de lápiz y regla, las partes que les sobra en cada una de las figuras
Grupo 2	Medida de los lados de las figuras y comparación de los perímetro.	Recortado de las figuras verde y azul en piezas geométricas elementales iguales dos a dos. Las partes restantes, tras recortar, que les quedan por hacer coincidir, las superponen para buscar partes comunes.
Grupo 3	Descomposición, mediante el trazado de líneas, la figura verde en figuras geométricas elementales (cuadrados, triángulos, etc.) para posteriormente empezar a calcular, mediante el uso de la regla, el área de cada una de ellas.	Recortado de las dos figuras para comparar sus partes, para posteriormente intentar superponerlas.
Grupo 4	Trasladado de las figuras sobre una cuadrícula para dividirlas en figuras elementales mediante el uso de la regla, anotando las dimensiones de los lados de dichas figuras.	

Grupo 5	Descomposición de la figura azul en figuras geométricas elementales para calcular el área de cada una de ellas y luego sumarlas. Realizan el mismo procedimiento con la verde para luego comparar los resultados.	
Grupo 6	Descomposición de la figura azul en figuras geométricas elementales para calcular el área de cada una de ellas y luego sumarlas. Realizan el mismo procedimiento con la verde para luego comparar los resultados.	
Grupo 7	Descomposición de la figura azul en figuras geométricas elementales para calcular el área de cada una de ellas y luego sumarlas. Realizan el mismo procedimiento con la verde para luego comparar los resultados.	
Grupo 8	Superposición de las figuras iniciales tal cual se les ha repartido, intentando identificar elementos comunes a las dos para dibujarlas. Hacen uso de la regla.	Recortado de la figura verde obteniendo piezas geométrica reconocidas que superponen sobre la azul. Dibujan sobre la azul las piezas que ya han obtenido de la verde.
Grupo 9	Recortado de las figuras verde y azul en piezas geométricas elementales iguales dos a dos.	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.2. *Estrategias bases utilizadas en la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Descomposición, mediante el trazado de líneas, la figura verde en figuras geométricas elementales (cuadrados, triángulos, etc.) para posteriormente empezar a calcular, mediante el uso de la regla, el área de cada una de ellas.	1	11,11 %
Trasladado de las figuras sobre una cuadrícula para dividirlas en figuras elementales mediante el uso de la regla, anotando las dimensiones de los lados de dichas figuras.	1	11,11 %
Descomposición de la figura azul en figuras geométricas elementales para calcular el área de cada una de ellas y luego sumarlas. Realizan el mismo procedimiento con la verde para luego comparar los resultados.	3	33,33 %
Superposición de las figuras iniciales tal cual se les ha repartido, intentando identificar elementos comunes a las dos para dibujarlas. Hacen uso de la regla.	1	11,11 %
Medida de los lados de las figuras y comparación de los perímetro.	1	11,11 %
Recortado de las figuras verde y azul en piezas geométricas elementales iguales dos a dos.	2	22,22 %

Fuente: elaboración propia

En dos de los grupos parece que resurge el obstáculo área/perímetro, pues su estrategia de base consiste en medir los lados de las figuras para proceder después a la comparación de perímetros. Al comprobar que los perímetros de ambas figuras no coinciden, optan por buscar otro método, pues saben que la afirmación que les ha proporcionado el profesor es cierta.

Es probable que el contrato didáctico que habita en la clases haya sido el motivo por el cual varios de los grupos no hayan hecho uso de la tijeras para cortar las figuras y pavimentar para encontrar la solución al problema a partir de la descomposición mereológica 2D/2D. La mayoría han optado por descomponer las superficies en formas geométricas elementales mediante el trazado de líneas interiores que les permita calcular sus áreas y comprobar que son iguales a través de procesos operacionales.

Esto es un claro síntoma de la existencia de una fuerte tendencia dentro de las aulas de la transmisión de métodos de resolución algorítmicos y mecánicos basados en el cálculo por parte del profesorado, en detrimento de todas aquellas técnicas que se apoyan en procesos manipulativos y visuales y en transformaciones dentro de un propio registro de representación, que siendo mas directos e intuitivos no se han manifestado en los estudiantes de manera espontanea y natural como cabría esperar.

Situación 2: Teorema de Pitágoras a través de tratamientos figurales.

La situación se desarrolló el día 11 de abril de 2012 durante los 20 minutos restantes de clase (Fase 1 y 2) y el día 12 de abril de 2012 durante los 40 minutos de clase (Fase 3).

Objetivo de la situación:

La presente situación consta de tres fases, y tuvo como propósito el descubrimiento y construcción de la relación que subyace en el teorema de Pitágoras mediante la aplicación de tratamientos dentro del registro figural o geométrico con el fin de potenciar el proceso de visualización geométrica a través de la aprehensión operativa: Reconfiguración y descomposición.

Para ello, se utilizaron tres fichas, una por fase, en donde el tipo de triángulo con el que el alumno va a trabajar va a ser diferente. Este hecho ha permitido ver claramente el papel de variable didáctica que juega el material proporcionado.

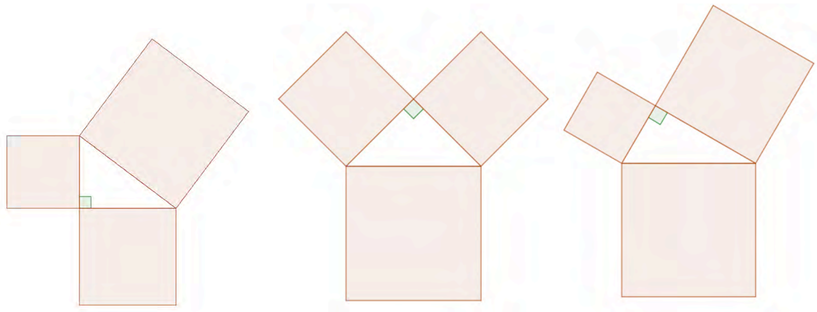


FIGURA 4.4.4.4. *Tª de Pitágoras a través de distintos triángulos*

Entre el material que pueden emplear los alumnos a lo largo de las tres fases encontramos:

- Trama cuadriculada en papel de acetato: la trama cuadriculada tiene como función hacer más fácil la búsqueda de la relación entre las áreas de los cuadrados y facilitar la validación. Solamente podrán hacer uso de este material en la primera fase, pues el triángulo de dicha ficha es el único cuyos lados tienen longitudes enteras.

- Cuadrados correspondientes a los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y a los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3 , construidos en cartulina.

Fase 1: Descomposición mereológica estrictamente homogénea

Descripción:

La primera fase consiste en una primera aproximación a la demostración del Teorema de Pitágoras basada en la descomposición mereológica 2D/2D estrictamente homogénea (la descomposición se hace en unidades de la misma forma que la figura que se descompone), partiendo de un triángulo rectángulo escaleno sobre cuyos lados se han construido los cuadrados correspondientes.

La figura representa una de las situaciones más sencillas, en la que se puede comprobar la veracidad del teorema sin más que contar cuadraditos tras descomponer los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo:

“¿Qué hay dibujado en la hoja que os he repartido? ¿Qué figuras geométricas hay? ¿Los cuadrados tienen todos el mismo tamaño?¿Alguien sabe que significa o que nos indica el cuadradito verde que aparece en la imagen?”

Sabemos que las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo que aparece en la hoja, guardan cierta relación, ¿sabríais decir cuál?

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil. En la hoja que os he dado escribís vuestra respuesta y decís cómo habéis llegado a la solución.

No podéis utilizar tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de esta actividad.”

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona el triángulo a partir del cual tienen que trabajar y se les muestra el acetato cuadriculado y los cuadrados de cartulina que tienen sobre la mesa:

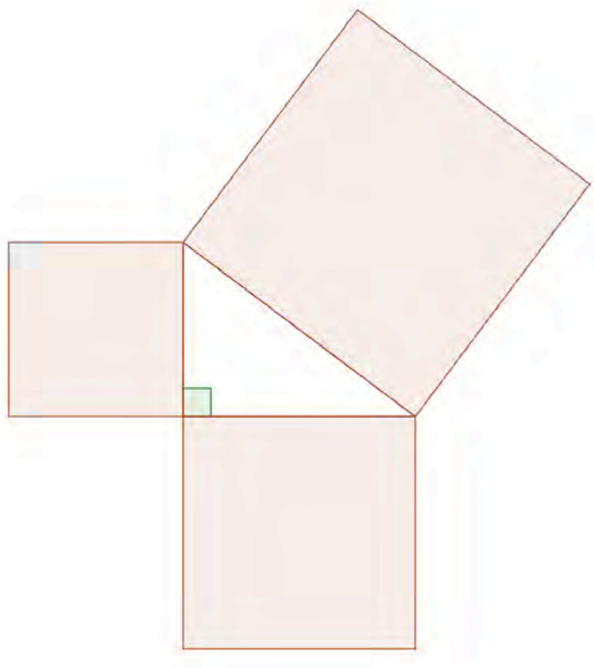


FIGURA 4.4.4.5. *Tª de Pitágoras en triángulo rectángulo escaleno*

Las dimensiones del triángulo se han escogido de tal manera que únicamente se pueda llegar a la solución del problema haciendo uso de la cuadrícula de acetato.

Además, la no aportación de ningún dato numérico, así como la no utilización de la regla, que permita encontrar la relación existente entre las áreas mediante el cálculo del área de los cuadrados, sitúa a los alumnos frente a la necesidad de recurrir a procesos de visualización y manipulación para llegar a la solución.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la ficha:

- **Profesor:** *Todos tenéis esta hoja, ¿verdad?*
- **Todos:** *¡Sí!*
- **Profesor:** *¿Qué veis en ella? Contadme un poco.*
- ***Raquel*:** *Un triángulo y tres cuadrados.*
- **Sergio:** *No. Hay cuatro cuadrados.*
- **Profesor:** *Los cuadrados, ¿son todos del mismo tamaño?*
- **Varios:** *No.*
- **Profesor:** *Vale. ¿Y alguien sabría decirme que representa el cuadradito pequeño?*
- **Varios:** *el ángulo*
- **Profesor:** *y concretamente, ¿qué tipo de ángulo?*
- **Varios:** Recto
- **Profesor:** *Nosotros sabemos que el área de estos tres cuadrados que están construidos sobre los lados del triángulo guardan alguna relación. Están relacionados de alguna manera. Vosotros tenéis que encontrar esa relación y probar el porqué es verdad lo que estáis diciendo. En la mesa voy a dejar material que podéis utilizar. No podéis utilizar, material que no esté en la mesa, ni tijeras ni regla. En la hoja en blanco que os he dado escribís la relación y explicáis como lo habéis hecho. Si os equivocáis, no borréis ni tachéis mucho, de manera que se pueda leer lo que habéis puesto. Podéis empezar.*

Tras enunciar la consigna, todos los grupos se levantan a la mesa del profesor en busca del material que les permita encontrar la relación entre los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo, a excepción del grupo 3 que, o bien porque no han entendido la consigna o porque consideran que no necesitan ningún material adicional, se centran en adivinar cuánto miden los ángulos del triángulo rectángulo. Una vez ven que el resto de compañeros están utilizando material, acuden a la mesa del profesor. Esto les retrasa mientras que el resto de grupos ya han iniciado algún procedimiento.

La tarea a realizar ha sido bien comprendida en general. Los 9 grupos son capaces de encontrar la relación entre los cuadrados que componen la figura sin ninguna dificultad, pero no todos han empleado desde un principio la estrategia óptima del uso de la cuadrícula.

El hecho de bloquear el uso de la regla es lo que mueve a muchos de los grupos a buscar otro tipo de herramienta que les permita encontrar las dimensiones de los cuadrados.

- **Profesor:** *¿Me podéis explicar lo que habéis hecho?*
- **Lidia:** *Si. Hemos utilizado la cuadrícula y nos han salido las comprobaciones.*
- **Xana:** *Esté tiene 25 cuadraditos, este 16 y este 9.*
- **Lidia:** *Y entonces hemos hecho la prueba. Este tiene que ser equivalente a este más este. Y este, a este menos este.*
- **Profesor:** *Vale.* (se marcha)
- **Lidia:** *No nos ha dicho si está bien o no. Como no tenemos regla pues lo hacemos con cuadraditos.*

El uso de este tipo de instrumentos ofrece diferentes representaciones de los objetos matemáticos permitiendo movilizar aspectos perspectivos para que se pueda ver de distintas maneras lo que normalmente sólo se ve de una.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.3. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 2 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Utilización de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3.	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.
Grupo 2	Utilización de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3.	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.
Grupo 3	Utilización de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3.	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida. A pesar de haber contado cuadritos y encontrado la relación, no se quedan convencidos y empiezan a medir las diagonales (con la cuadrícula) y a compararlas.
Grupo 4	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	

Grupo 5	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	
Grupo 6	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	
Grupo 7	Utilización de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3.	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.
Grupo 8	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	
Grupo 9	Utilización de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3.	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.4. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Utilización de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles de la fase 2 y con los construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno de la fase 3.	5	55,55 %
Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	4	44,44 %

Fuente: elaboración propia

Cinco son los grupos que inicialmente, inducidos por la estrategia óptima de resolución de la situación anterior, intentan utilizar los cuadrados recortados en cartulina para, mediante la técnica de la superposición, compararlos con los que aparecen en la ficha y encontrar la relación.

- **Fran:** *Profe, no lo entiendo.*
- **Javier:** *Solo encaja uno. Los demás no encajan.*
- **Profesor:** *Pues si solo encaja uno a lo mejor ese no es un buen método.*
- **Javier:** *Es que los demás se salen* (superponiendo los cuadrados de cartulina sobre los dibujados)
- **Profesor:** *Claro.*
- **Javier:** *Pero no se puede recortar, ¿No?*
- **Profesor:** *No. En la mesa os he dejado material, pero eso no significa que todo el material que haya allí os pueda servir.*

Pese a que finalmente todos los grupos han recurrido a la trama cuadriculada, fundamental para poner en marcha la estrategia óptima de la descomposición de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo en unidades figurales del mismo número de dimensiones que los primeros (Descomposición 2D/2D) basada en el tratamiento dentro de un mismo registro de representación semiótico, no todos lo han hecho de manera adecuada ni han expresado la relación entre las áreas de los tres cuadrados debidamente, manifestándose algunos de los siguiente fenómenos:

- Grupo 1: es el caso más llamativo de todos. Han utilizado la cuadrícula, pero se basan en la raíz cuadrada y el aumento de un cuadradito en el lado del cuadrado más grande con respecto al mediano, y de este con respecto al pequeño, para intentar relacionar las áreas de los tres:

  – **Ana:** *Nosotras hemos sacado que contando los cuadraditos, el pequeño tiene la raíz de tres…*

  – **Profesor:** *¿Y eso para qué lo habéis hecho?*

  – **Ana:** *Para ver…cómo las raíces…que van aumentando…*

  – **Mireya:** *Es que no sé como explicarlo. Qué según cada cuadrado va aumentando cierta cantidad para sacar el otro.*

  – **Ana:** *Y es su raíz. Que la raíz de 3 es 9 y son los cuadraditos que tiene el pequeño.*

  – **Profesor:** *La raíz de 9 es 3.*

  – **Ana:** *Uy, sí, la raíz de 9 es 3 y son los cuadraditos que tiene. La raíz de 16 es 4 y la raíz de 25 es 5. Por lo que va a aumentando cada vez un cuadradito.*

  – **Profesor:** *Con eso que habéis hecho, ¿Habéis llegado a encontrar alguna relación entre las áreas de los cuadrados?*

  – **Ana:** *Si, que va aumentando un cuadradito.*

  – **Profesor:** *Pero no relaciona un cuadrado con otro. Sin embargo lo primero que habéis hecho sí, porque el grande daba 25 cuadraditos, el pequeño 9 y el mediano 16. Entonces, si sumáis el mediano y el pequeño os da , que la suma de las áreas de los cuadrados que están en los lados más pequeños os da el área del cuadrado construido sobre el lado grande.*

  Para dar la relación, utilizan el registro semiótico que resulta más espontaneo e innato, la lengua natural. Además, a priori y ante la forma en que el profesor ha enunciado la consigna, se trata del registro más directo para responder.

- Grupo 2: los miembros del grupo obtienen el área de cada uno de los cuadrados, pero no encuentran la relación entre ellas, posiblemente por falta de tiempo. Es el único grupo que ha indicado las áreas utilizando una unidad de medida de superficie distinta al cuadradito de la trama. En ningún momento el profesor ha establecido que un cuadradito sea igual a 1 cm^2, quedando patente la fuerte influencia del contrato didáctico en cuanto a utilización de las unidades legales de superficie en estos alumnos:

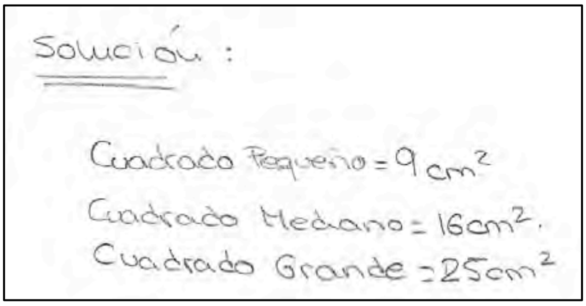


FIGURA 4.4.4.6. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.2.1*

- Grupo 3: Como ya hemos recogido en el cuadro de las estrategias utilizadas por cada grupo, los miembros del grupo 3, tras contar los cuadraditos que componen cada cuadrado, cuentan los que hay en la diagonal, debido a la posible existencia de un obstáculo producto del establecimiento de una relación errónea entre las longitudes de los lados de un cuadrado y la longitud de su diagonal. Por otro lado, no solamente no indican la relación pedida, sino que parece que los alumnos no son capaces de establecer un vínculo entre el número total de cuadraditos que componen un cuadrado y su área.

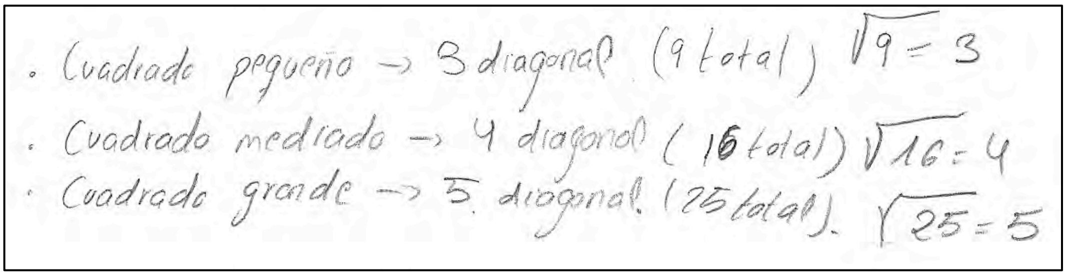


FIGURA 4.4.4.7. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.2.1*

Resulta llamativa la utilización de las raíces cuadradas y la relación que establecen de la misma con la diagonal del cuadrado en lugar de con la longitud del lado del mismo, lo que es un claro ejemplo de la falta de significado que se la otorgado al concepto de raíz en su enseñanza.

- Grupo 4: Cuentan el número de cuadraditos interiores que componen cada cuadrado construido sobre los lados del triángulo. Expresan correctamente tanto las áreas como la relación existente entre ellas, haciendo uso del lenguaje algebraico para nombrar a cada uno de los cuadrados:

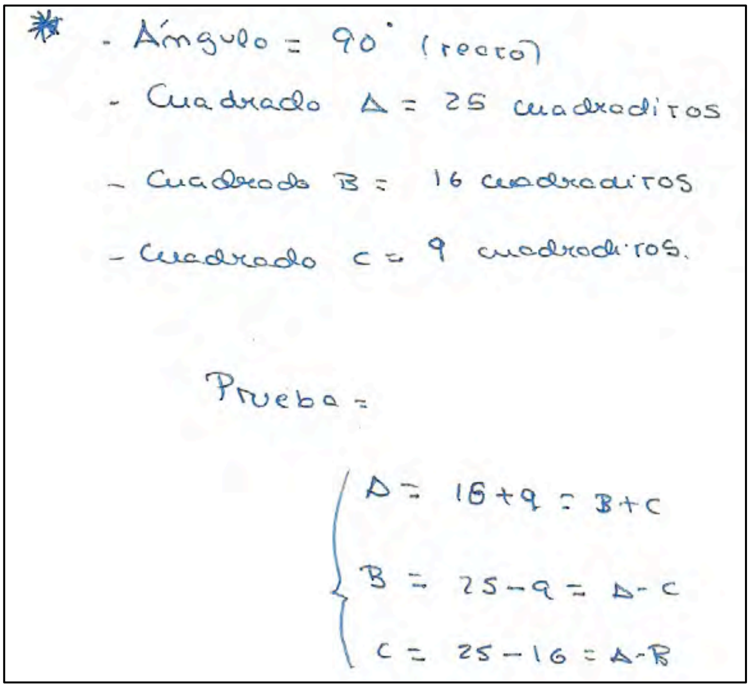


FIGURA 4.4.4.8. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.2.1*

- Grupo 5: Es el grupo que más claramente ha utilizado el registro de representación algebraico para expresar la relación. Denotan con a, b y c a los lados de los cuadrados pequeño, mediano y grande respectivamente, y expresan la correspondencia pedida a través de la expresión algebraica que define la relación descrita por Pitágoras:

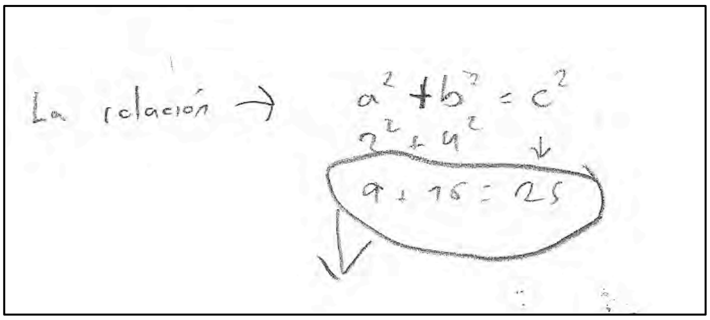


FIGURA 4.4.4.9. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.2.1*

- Grupo 6: Al igual que el grupo 4, expresan correctamente tanto las áreas como la relación existente entre ellas, haciendo uso del lenguaje algebraico para nombrar a cada uno de los cuadrados. Pero en esta ocasión, la técnica utilizada para determinar las áreas no ha sido el conteo completo de los cuadraditos interiores ni la aplicación de la fórmula para calcular el área de un cuadrado, sino el producto cartesiano:

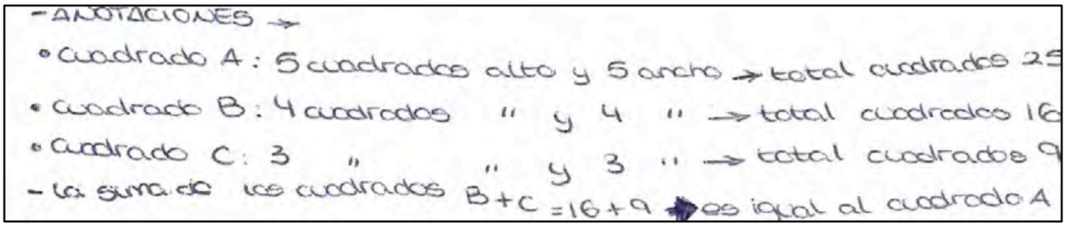

-ANOTACIONES →
• cuadrado A: 5 cuadrados alto y 5 ancho → total cuadrados 25
• cuadrado B: 4 cuadrados " y 4 " → total cuadrados 16
• cuadrado C: 3 " " y 3 " → total cuadrados 9
- la suma de los cuadrados B+C = 16+9 → es igual al cuadrado A

FIGURA 4.4.4.10. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.2.1*

- Grupo 7: el caso del grupo 7 es el más curioso en cuanto a utilización de unidades de superficie se refiere. Es un claro ejemplo de la falta de comprensión de la magnitud superficie y el empleo de sus unidades. Como se puede apreciar, en primer lugar utilizan como unidad de medida el cm^2, para posteriormente expresarlo en cuadrados al cuadrado. Esto pone claramente de manifiesto la falta de un trabajo específico de las unidades de superficie del Sistema Métrico Decimal alejado de la práctica habitual del paso de unas unidades a otras empleando la escalera de conversión para encontrar las equivalencias. Por otro lado, no han sido capaces de encontrar la relación pedida.

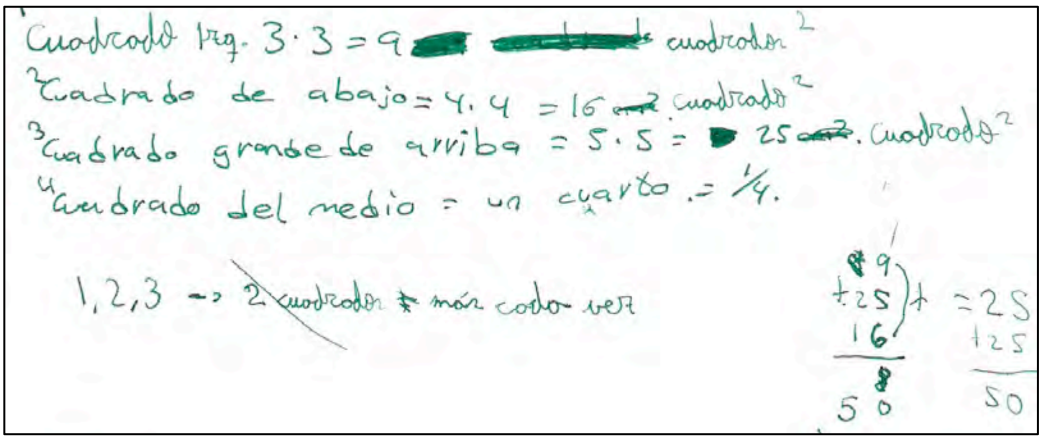
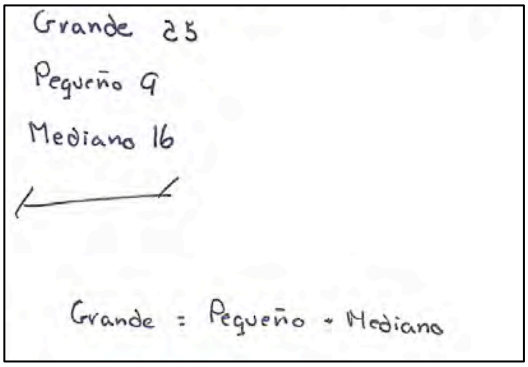

1 Cuadrado peq. 3·3 = 9 cuadrados²
2 Cuadrado de abajo = 4·4 = 16 cuadrados²
3 Cuadrado grande de arriba = 5·5 = 25 cuadrados²
4 Cuadrado del medio = un cuarto = 1/4.
1,2,3 → 2 cuadrados más cada vez
9 + 25 + 16 = 50
25 + 25 = 50

FIGURA 4.4.4.11. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.2.1*

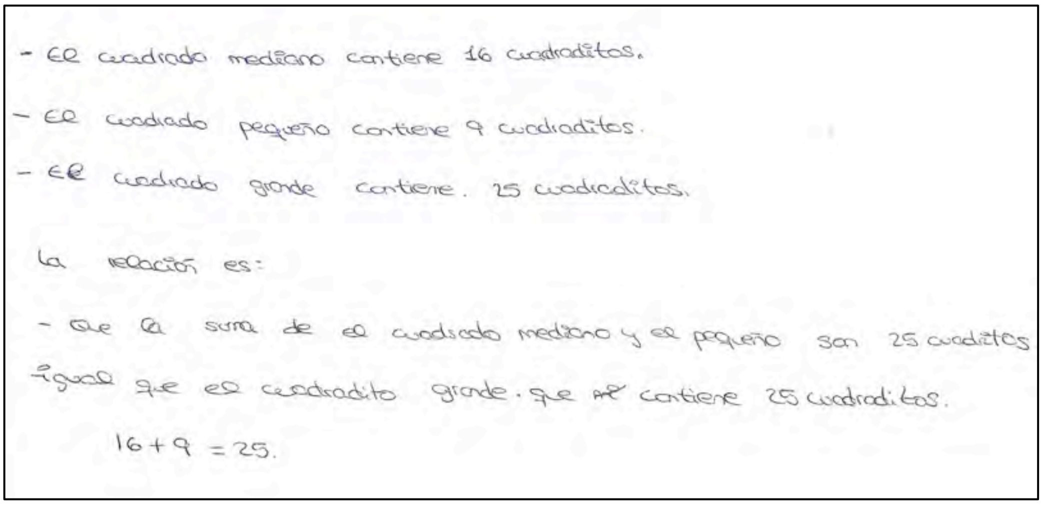
- Grupo 8: Los alumnos de este grupo encuentran las áreas de los cuadrados sin problemas, pero no indican unidades. Por otro lado, emplean el registro de la Lengua Natural con para expresar la correspondencia entre las áreas haciendo uso de elementos simbólicos:


Grande 25
Pequeño 9
Mediano 16

Grande = Pequeño + Mediano

FIGURA 4.4.4.12. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.2.1*

- Grupo 9: se trata del grupo que más claramente hace uso del registro semiótico de la lengua natural para enunciar la relación entre las áreas. Llama la atención que no hacen alusión al término área en ningún momento:


- El cuadrado mediano contiene 16 cuadraditos.
- El cuadrado pequeño contiene 9 cuadraditos.
- El cuadrado grande contiene. 25 cuadraditos.

la relación es:

- que la suma de el cuadrado mediano y el pequeño son 25 cuaditos igual que el cuadradito grande. que al contiene 25 cuadraditos.

16+9 = 25.

FIGURA 4.4.4.13. *Trabajo realizado por el grupo 9 en S.2.1*

Si bien la consigna ha sido bien comprendida, hay grupos que la pierden por el camino, centrándose en encontrar el área de los cuadrados sin relacionarlas, dejando de lado la cuestión propuesta por el profesor.

<u>Fase 2</u>: Descomposición mereológica homogénea

Descripción:

La segunda situación sirve de reutilización de los conocimientos adquiridos en la primera fase. En esta ocasión, el triángulo rectángulo utilizado es isósceles, lo que permite la descomposición por división mereológica homogénea, en unidades figurales de la misma forma pero diferentes de la forma descompuesta, a partir de la división de los cuadrados mediante sus diagonales. Con el propósito de favorecer la aplicación de tratamientos dentro de los registros multifuncionales no discursivos, las dimensiones del triángulo se han elegido de tal manera que dificultará el trabajo con la cuadrícula bloqueando la estrategia empleada en el caso anterior, poniéndose verdaderamente en juego el tratamiento de descomposición y la aprehensión operativa:

“En la nueva hoja que os repartido, ¿Qué observáis? ¿Qué figuras geométricas hay? ¿Hay alguna similitud entre este triángulo y el de la actividad anterior?

Sabemos que las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo que aparece en la hoja, también guardan cierta relación, ¿sabríais decir cuál es dicha relación en esta ocasión?

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

Además, los grupos que consigan demostrar dicha relación de la manera más sencilla que existe habrán ganado.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil. En la hoja que os he dado escribís vuestra respuesta y decís cómo habéis llegado a la solución.

No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad, pero si podéis utilizar la tijera.”

Además de la información dada en la consigna, se les proporciona el triángulo a partir del cual tienen que trabajar y se les muestra el acetato cuadriculado y los cuadrados de cartulina que tienen sobre la mesa:

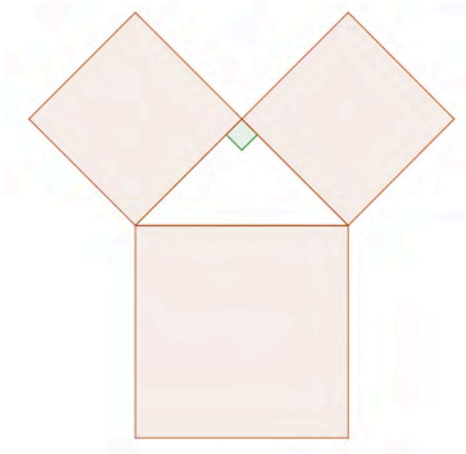


FIGURA 4.4.4.14. *Tª de Pitágoras en triángulo rectángulo isósceles*

En esta ocasión, las longitudes de los lados del triángulo son no enteras con el fin de bloquear la utilización de la cuadrícula de acetato y así tengan que recurrir a los cuadrados de cartulina y a la técnica del recortado y pavimentado.

Además, el tipo de triángulo escogido permite la descomposición por división mereológica homogénea a partir de la división de los cuadrados mediante sus diagonales. La relación que expresa el teorema de Pitágoras es especialmente intuitiva si se aplica a este tipo de triángulos.

Entendemos que el razonamiento en el marco geométrico es vital para dotar de sentido al teorema de Pitágoras.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la ficha:

- **Profesor:** *Todos tenéis esta hoja, ¿verdad?*
- **Todos:** *Sí*
- **Profesor:***¿Qué veis en ella? Contadme un poco*
- **Ana:** *Tres cuadrados que forman un triángulo*
- **Profesor:** *¿Cómo que tres cuadrados que forman un triángulo?*

- **Sandra:** *hay tres cuadrados que uno de sus lados forman un triángulo.*
- **Profesor:** *tenemos un triángulo y en cada uno de sus lados hay un cuadrado. ¿Hay alguna similitud con la hoja de la actividad anterior?*
- **Varios:** *Si*
- **Fran:** *es igual pero más grande*
- **Profesor:** *¿Igual?*
- **Varios:** *No*
- **Profesor:** *¿Este triángulo y el que teníamos antes son iguales?*
- **Varios:** *No*
- **Profesor:** *¿Pero tienen algo en común?*
- **Varios:** *Si*
- **Profesor:** *¿El qué?*
- **Sergio:** *el cuadradito*
- **Profesor:***¿y que indicaba ese cuadradito?*
- **Varios:** *Un ángulo recto*
- **Profesor:** *Pues ahora, tenéis que hacer exactamente lo mismo que en la actividad anterior. Hay dos variantes: primero, aquí podéis utilizar tijeras, pero no regla. Solo podéis utilizar el material que hay en la mesa. Segundo: hay una manera de resolverlo que es más sencilla que otra. El grupo que haya conseguido encontrar esa manera que es más sencilla, habrá ganado.*
- **Varios:** *¿El qué?*
- **Profesor:** *el reconocimiento del resto de compañeros.*

Esta fase de la situación, pese a haber trabajado previamente la técnica del recortado y pavimentado en la situación 1, genera una mayor dificultad de la que se había pensado en un principio.

La mayoría de los grupos dan por sentado que va a ocurrir lo mismo que en el caso anterior y disponen de conocimientos para abordar la situación y elaborar una estrategia base encaminada a probar o desmentir sus previsiones. Todos, menos el grupo 4, comienzan utilizando la cuadrícula para intentar encontrar la relación entre las áreas de los cuadrados. Una vez descubren que no pueden utilizar la cuadrícula, abordan la tarea mediante el recortado de los cuadrados de cartulina correspondientes.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.5. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de la Situación 2 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Medida de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los que aparecen en la ficha con la trama cuadriculada, a pesar de haber comprobado previamente sobre la ficha que las medidas no son enteras. Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 2	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Medida de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los que aparecen en la ficha con la trama cuadriculada, a pesar de haber comprobado previamente sobre la ficha que las medidas no son enteras. Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 3	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Medida de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los que aparecen en la ficha con la trama cuadriculada, a pesar de ya haber comprobado previamente sobre la ficha que las medidas no son enteras. Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 4	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	

Grupo 5	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 6	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 7	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Medida de los cuadrados de cartulina con la trama cuadriculada e identificación con los cuadrados del folio. Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 8	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Medida de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los que aparecen en la ficha con la trama cuadriculada, a pesar de ya haber comprobado previamente sobre la ficha que las medidas no son enteras. Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.
Grupo 9	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Medida de los cuadrados de cartulina con la trama cuadriculada e identificación con los cuadrados del folio. Recortado al azar de los cuadrados pequeños para pavimentar.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.6. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	8	88,88 %
Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Solo las componentes del grupo 4 son capaces de encontrar una descomposición de los cuadrados construidos sobre los lados iguales del triángulo isósceles (catetos) que encaje correctamente con el construido sobre el lado desigual (hipotenusa), además lo obtiene de la manera más sencilla, el corte por las diagonales. Todos los demás grupos realizan varios cortes al azar en los cuadrados de cartulina, teniendo que recurrir a la utilización de varios ejemplares para proseguir con la búsqueda.

Esto deja entrever cierta falta de trabajo en el aula de tareas en las que intervienen e interactúan los procesos de visualización y el razonamiento, que tan importantes son en la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Consideramos que se trata de una ausencia muy grave por las repercusiones que tiene en el aprendizaje del alumno, limitándose al trabajo fundamentalmente algebraico, lo que evidencia la falta de conocimiento de cómo se aprende en matemáticas y en particular en geometría.

Los diálogos recogidos por la cámara nos muestran situaciones tan curiosas y llamativas como las de los grupos 1, 2, 3 y 8. Estos grupos, una vez han comprobado que no pueden hacer uso de la cuadrícula para intentar hallar el área de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo, utilizan los cuadrados recortados en cartulina que hay sobre la mesa del profesor, pero para nuestro asombro lo primero que hacen tras comprobar que son iguales a los dibujados en la ficha, es volver a ponerlos sobre la cuadrícula para ver si así si pueden descomponerlos en cuadraditos.

- **Víctor:** *Esto tiene 8, y esto se supone que es la mitad, ¿no?, bueno…no.* (descubren que no hay un número entero de cuadraditos que formen los cuadrados del triángulo)

- **José Antonio:** *No te vale ese sistema.*

- **Víctor:** *No es la mitad.*

- **José Antonio:** *No te vale.*

- **Víctor:** *Pues vaya…*

- **José Antonio:** *Hay que utilizar los cuadrados* (Superponen los cuadrados de cartulina sobre los dibujados en la hoja)*. ¡Mira!, ¡el grande encaja!*

- **Víctor:** *¡Hala tu! ¿Y ahora qué hacemos?*

- **José Antonio:** *Pues ahora con los cuadrados …a lo mejor se le puede poner la cuadrícula.* (Lo prueba)

- **Víctor:** *Pero si es igual que este* (señalando el de la hoja)*. ¡No te da exacto! Lo que tenemos claro es que los medianos son el grande.*

Caso llamativo es el de los grupos 7 y 9, que para identificar qué cuadrados de cartulina son los que se corresponden con los que aparecen en la ficha de la actividad optan por realizar una comparación indirecta utilizando un intermediario o instrumento que les permita obtener las áreas de los cuadrados en lugar de llevar a cabo una comparación directa mediante la superposición. “Miden”, en primer lugar, los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo con la trama cuadriculada, procediendo del mismo modo con los seis cuadrados de cartulina distintos que hay sobre la mesa del profesor para emparejarlos.

Todo lo acontecido puede deberse a dos posibles causas. La primera de ellas es, nuevamente, la fuerte influencia que el contrato didáctico tradicional ejerce sobre los estudiantes, pues el hecho de haber utilizado una estrategia valida con anterioridad les conduce de manera directa a pensar que siempre lo va a ser. La segunda está relacionada con el papel de variable didáctica que juega el material proporcionado, pues a la hora de elegir entre la utilización de la cuadrícula y los cuadrados de cartulina, la inmensa mayoría se inclinan por la primera. Ello se debe a que, por el bloqueo del uso de la regla y por el fenómeno didáctico de la aritmetización de la medida (Chamorro, 1997), los alumnos hacen uso de aquel recursos que les permite dar una medida numérica a las áreas para poder hacer la comparación y encontrar la relación pedida, considerando el problema presentado como una actividad de tratamiento aritmético y no geométrico.

Esto es producto del tipo de trabajo que se desarrolla habitualmente en el aula de matemáticas, en donde se da al alumno la herramienta necesaria, ya sea algoritmo, pauta o proceso, para su aplicación directa y constante en la resolución de los ejercicios y actividades que se le proponen.

Fase 3: Descomposición mereológica heterogénea.

En esta última fase los alumnos tienen que trabajar con un triángulo rectángulo escaleno, lo que no permite el tratamiento dentro del registro geométrico por división mereológica homogénea a partir de la división de los cuadrados mediante sus diagonales. La descomposición de los cuadrados en este caso debe realizarse por división mereológica heterogénea, es decir en unidades figurales de distinta forma entre sí para el posterior pavimentado sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa:

"En la nueva hoja que os repartido, ¿Qué observáis? ¿Qué figuras geométricas hay? ¿Hay alguna similitud entre este triángulo y los dos anteriores?

Sabemos que las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo que aparece en la hoja, también guardan cierta relación, ¿sabríais decir cuál es dicha relación en esta ocasión?

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

En la mesa tenéis algún material que quizá os pueda ser útil. En la hoja que os he dado escribís vuestra respuesta y decís cómo habéis llegado a la solución.

No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad, pero si podéis utilizar tijeras."

Además de la información dada en la consigna, se les proporciona el triángulo a partir del cual tienen que trabajar y se les muestra el acetato cuadriculado y los cuadrados de cartulina que tienen sobre la mesa:

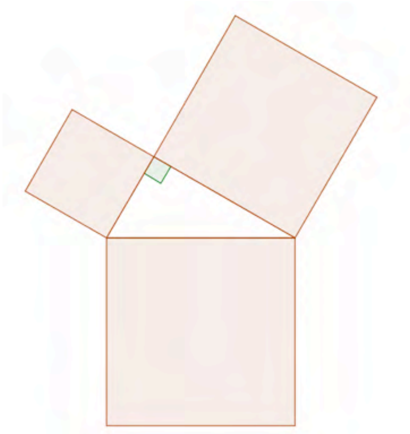


FIGURA 4.4.4.15. *Tª de Pitágoras en triángulo rectángulo escaleno*

El hecho de que las longitudes de sus lados no sean enteras dificultará el trabajo con la cuadrícula bloqueando dicha estrategia como en la fase anterior, teniendo que recurrir a los cuadrados de cartulina nuevamente.

Desarrollo de la situación en el aula:

Como dicha fase tuvo lugar al día siguiente del desarrollo de las dos anteriores que conforman esta situación, se comienza la clase con un repaso de lo trabajado hasta el momento:

- **Profesor:** *Antes de empezar, vamos a repasar un poco lo que hicimos ayer en las dos últimas actividades. La primera fue esta, ¿os acordáis?* (mostrando la ficha de la primera fase)
- **Varios:** *Si*
- **Profesor:** *¿Alguien podría explicar qué es lo que teníamos que hacer en esta actividad?*
- **Sandra:** *Yo.*
- **Profesor:** *Sal y nos lo cuentas a todos.*
- **Sandra:** *Lo que hicimos es calcular el área de este cuadrado y de este* (señalando a los cuadrados construidos sobre los catetos), *los sumamos y comprobamos que la suma de las dos áreas era la de este* (señalando al construido sobre la hipotenusa)

- **Profesor:** *¿Y cómo lo hicimos?¿Qué método utilizamos?*
- **Sandra:** *Con la cuadrícula*
- **Profesor:** *Vale...pero ¿cuál era la pregunta de la actividad?¿qué teníais que encontrar?*
- **Sandra:** *Qué entre estos tres cuadrados había una relación.*
- **Profesor:** *¿Y a qué conclusión llegamos?*
- **Sandra:** *Que la suma del cuadrado pequeño y del cuadrado mediano era igual al cuadrado grande.*
- **Profesor:** *¿Os acordáis todos?*
- **Varios:** *Si*
- **Profesor:** *Luego, trabajamos con esta ficha* (mostrando la segunda actividad relacionada con el Teorema de Pitágoras). *¿alguien que me cuente que hicimos con ella?*
- **Ainhoa:** *Preguntaste lo mismo.*
- **Profesor:** *¿Qué pregunté?*
- **Ainhoa:** *Que qué relación existía entre los tres cuadrados.*
- **Profesor:** *Si.*
- **Ainhoa:** *Y resulta que estos dos cuadrados* (señalando a los cuadrados construidos sobre los catetos) *eran el mismo que este* (señalando al construido sobre la hipotenusa)*. Se partía por la mitad los dos y con ellos se formaba este.*
- **Profesor:** *Pero...¿qué era lo que era lo mismo que este?* (en referencia al cuadrado construido sobre la hipotenusa)
- **Ainhoa:** *La superficie. La suma de estos dos era este.*
- **Profesor:** *¿Y el método que utilizamos fue?*
- **Ainhoa:** *Cortar por la mitad estos dos* (en referencia a los cuadrados de los catetos) *y quedaba este.*
- **Profesor:** *¿Todos lo recordáis?*
- **Varios:** *Si*

Hemos querido hacer referencia a este dialogo para ejemplificar algo que ocurrió a lo largo de todas las sesiones. Se trata de la buena predisposición que los alumnos han demostrado a la hora de contestar y participar de manera activa en el desarrollo de las situaciones, manifestando un constante interés, implicación y nivel de motivación que en palabras del propio profesor *no ocurre cuando se imparte la asignatura como se hace habitualmente.*

Tras el repaso, el profesor reparte la nueva ficha y vuelve a introducir la consigna, idéntica a la de las dos fases anteriores. La devolución se vuelve a producir de manera instantánea

Un problema inesperado, que no habíamos previsto, es la dificultad que han tenido los estudiantes a la hora de descomponer los cuadrados construidos sobre los catetos para luego pavimentar sobre el construido sobre la hipotenusa. La configuración del triángulo rectángulo escaleno junto con la falta de precisión a la hora del recortado y pavimentación, pues muchos son los alumnos que realizan solapamientos de las piezas o dejan pequeños huecos a la hora de encajarlas, han sido los principales motivos por los cuales la tarea se ha convertido en un proceso costoso y lento de resolver, requiriendo más tiempo del que inicialmente se había considerado necesario para su consecución.

En este sentido, es especialmente llamativo el caso del grupo 1 como podemos observar en la siguiente transcripción de un diálogo mantenido con el profesor:

- **Ana:** *¿Qué hacemos?*
- **Mireya:** *Es que esto serían…*(contando sobre la cuadrícula)
- **Ana:** *Que no… que están bien contados.*
- **Profesor:** *¿Me podéis contar que estáis haciendo?*
- **Ana:** *Pues no lo sabemos.*
- **Profesor:** *¿Qué estáis utilizando para encontrar la relación?*
- **Ana:** *Hemos recortado el cuadrado morado* (construido sobre uno de los catetos)*…porque creíamos que con el y el rosa* (construido sobre el otro cateto) *podíamos hacer el amarillo* (construido sobre la hipotenusa)*, pero no entra, porque sobra. Y no sabemos que hacer ahora.*
- **Mireya:** *Creíamos que la suma de estos* (rosa + morado) *daba este* (amarillo), *pero se pasa. Entonces vamos a buscar otra cosa.*
- **Ana:** *Contar los cuadrados de la diagonal.*

La experiencia de los niños en actividades en las que es necesario efectuar tratamientos dentro del registro de representación geométrico como son la descomposición y pavimentación, y más concretamente por descomposición mereológica heterogénea, es prácticamente nula. El uso generalizado y prácticamente unánime de la trama cuadriculada en problemas de carácter geométrico en los que interviene la pavimentación, reduce este tipo de tareas a un mero problema de conteo de cuadraditos, muy alejado conceptualmente del verdadero problema geométrico planteado.

A excepción del grupo 3 que ha vuelto a recurrir a la trama cuadriculada desde un principio e intentan buscar a “ojo” una proporcionalidad entre las áreas de los cuadrados construidos, el resto de grupos han utilizado directamente los cuadrados de cartulina que se corresponden con los que aparecen en la ficha, recortando los construidos sobre los catetos por las diagonales por similitud con la actividad de la fase 2. Como dicha estrategia enseguida se muestra como insuficiente, dos son los estrategias que llevan a cabo los grupos:

- Descomposición de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los catetos en unidades figurales de la misma forma, mayoritariamente triángulos.
- Descomposición de los cuadrados de cartulina que se corresponden con los construidos sobre los catetos en unidades figurales geométricas conocidas, elementales y regulares, con distinta forma: cuadrados, rectángulos, triángulos isósceles, etc.

Únicamente el grupo 8, tras efectuar múltiples cortes, ha sido capaz de encontrar una configuración de las piezas que encaje perfectamente sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.7. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de la Situación 2 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	1. Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en figuras geométricas básicas y regulares que les permita pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
		2. Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida mediante el conteo de los cuadros de la diagonal.
		3. Búsqueda de relaciones de proporcionalidad entre los cuadrados haciendo uso de la cuadrícula.
Grupo 2	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	1. Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en figuras geométricas básicas y regulares que les permita pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
		2. Búsqueda de relaciones de proporcionalidad entre los cuadrados mediante la superposición de figuras.
		3. Colocación del cuadrado pequeño dentro del grande prácticamente en la posición de la configuración óptima, pero no saben cómo recortar el cuadrado mediano para terminar de completar el pavimentado sobre el mayor.

Grupo 3	Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en triángulos de distintos tamaños para pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
Grupo 4	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en figuras irregulares para pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa pero sin conseguir llegar a la configuración óptima.
Grupo 5	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en figuras geométricas básicas y regulares que les permita pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
Grupo 6	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	Recortado de los cuadrados que se corresponden con los construidos sobre los catetos del triángulo tanto de la ficha actual como de la ficha anterior, en figuras geométricas básicas y regulares que les permita pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Grupo 7	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en triángulos de distintos tamaños para pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
Grupo 8	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	Recortado de los cuadrados construidos sobre los catetos en figuras geométricas básicas regulares y piezas irregulares para pavimentar el cuadrado construido sobre la hipotenusa logrando una configuración óptima.
Grupo 9	Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	1. Búsqueda de relaciones de proporcionalidad entre los cuadrados mediante el trazado de líneas interiores en el cuadrado construido sobre la hipotenusa.
		2. Descomposición del cuadrado construido sobre la hipotenusa para pavimentar con sus piezas los otros dos.
		3. Colocación del cuadrado pequeño dentro del grande prácticamente en la posición de la configuración óptima, pero no saben cómo recortar el cuadrado mediano para terminar de completar el pavimentado sobre el mayor.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.8. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 3 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Descomposición de los cuadrados de cartulina correspondientes a los catetos mediante el recortado por una de sus diagonales y posterior pavimentado sobre el construido sobre la hipotenusa.	8	88,88 %
Utilización de la trama cuadriculada para encontrar la relación pedida.	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Algunos grupos, pese a ser la tercera vez que se les da la misma consigna, se centran en encontrar otro tipo de relación entre los cuadrados, olvidándose del objetivo principal de la actividad. En particular, encontramos tres que intentan encontrar relaciones de proporcionalidad entre los cuadrados empleando distintas técnicas:

Grupo 1:

- **Ana:** *Es que este no encaja* (La cuadrícula sobre el cuadrado morado)
- **Mireya:** *Este* (el rosa), *forma cuatro veces este* (el amarillo), *pero este* (el morado) *no hace nada.*
- **Ana:** *Aquí me falta y aquí me sobra* (refiriéndose a que el rosa y el amarillo no son proporcionales al morado, sobrando con respecto al rosa y faltando con respecto al amarillo). No es ni tres veces más pequeño, ni cuatro…

Grupo 2:

- **Profesor:** *Contadme lo que estáis haciendo.*
- **Sandra:** *El cuadrado morado lo hemos dividido por la mitad y luego por la mitad.*
- **Nuria:** *Y el cuadrado pequeño lo hemos cortado por la mitad y hemos rellenado el hueco del morado.*
- **Profesor:** *¿ Y con eso habéis encontrado la relación que se pedía?*
- **Sandra:** *¡NO!, pero hemos encontrado otra cosa. Que este* (el rosa) *es cuatro veces este* (el amarillo) (La relación es al revés, pues el cuadrado amarillo es cuatro veces el rosa).

- **Profesor:** *Pero lo que tenéis que probar es la relación entre los tres cuadrados.*
- **Sandra:** Vuelta a empezar.

Grupo 9

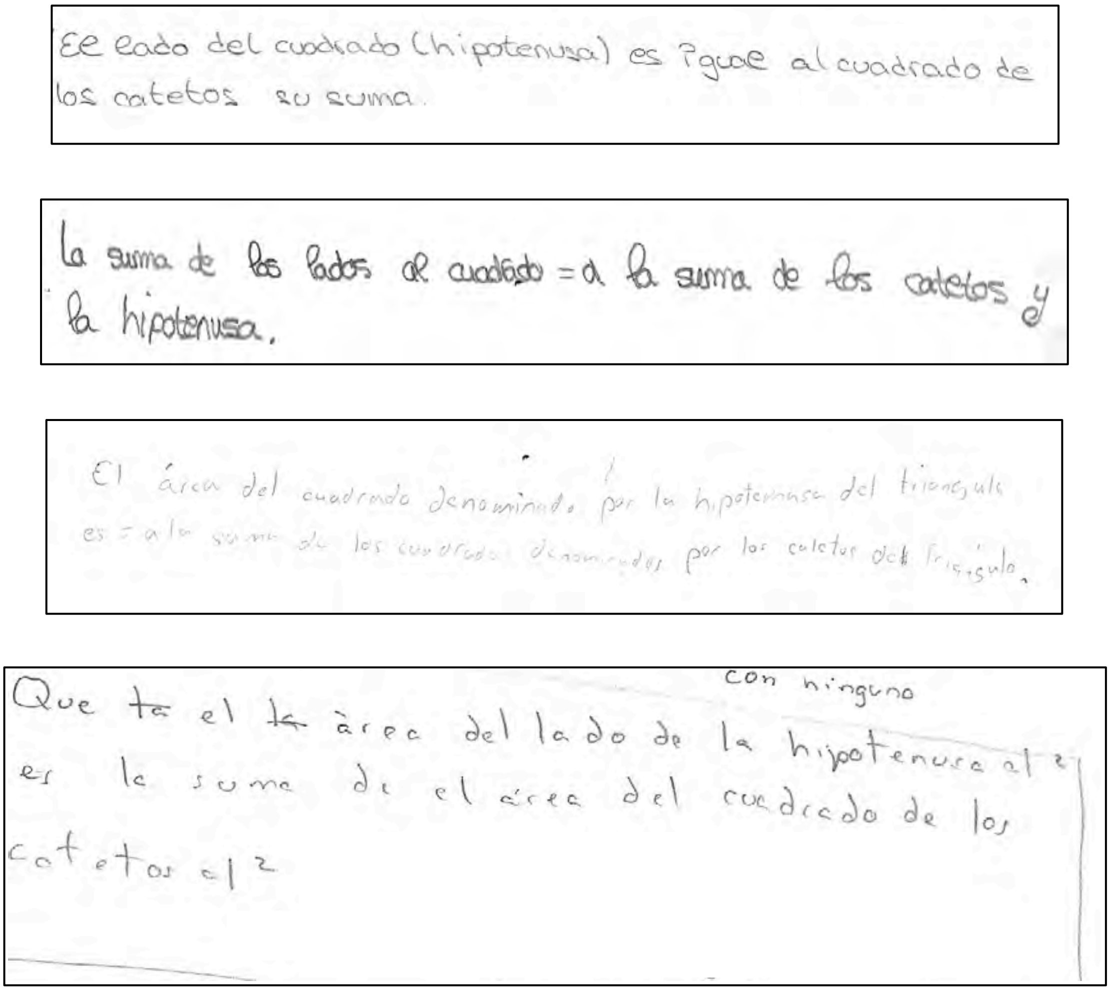
- **Helena:** *Claro tía, es que la has hecho la raya más abajo. Entonces podemos decir que el pequeño sigue siendo cuatro veces el grande* (La relación es al revés, pues el cuadrado amarillo es cuatro veces el rosa).
- **Marta:** *De ahí no salimos.*
- **Helena:** *¡No!, El grande es cuatro veces el pequeño!*
- **Marta:** *Eso.*

Por todo lo anterior, es fácil entender que si bien los alumnos comprenden la consigna y saben lo que tiene que hacer, tropiezan con un problema, pues son incapaces de pavimentar completamente la superficie en su afán de recortar los cuadrados en figuras regulares, debido, posiblemente, a que ni la escuela ni la sociedad ha proporcionado a estos estudiantes ocasiones para ejercitar habilidades relacionadas con el recortado y recubrimiento.

A lo largo de las tres fases de la situación, los alumnos han debido llegar a la conclusión que los triángulos con los que han trabajado tienen en común el tener un ángulo de 90º. Es en ese momento cuando el profesor institucionaliza el vocabulario que se desea fijar en relación a los triángulos rectángulos y enuncia el teorema de Pitágoras y su recíproco en términos de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos e hipotenusa.

Pese a no haber diseñado la situación para trabajar la coordinación entre el Registro de la Lengua Natural y el Registro Geométrico, esta ha estado muy presente, ya que, de una manera u otra, el estudiante ha tenido que realizar un tránsito de la representación verbal a la geométrica y tras la aplicación de tratamientos en este registro para encontrar la solución a la pregunta planteada, emitir nuevamente en el registro de la lengua materna las conclusiones obtenidas.

Ellos nos ha permitido comprobar como algunos estudiantes presentan ciertas dificultades al realizar el cambio del anclaje visual al discursivo:



Ee lado del cuadrado (hipotenusa) es igual al cuadrado de los catetos su suma.

La suma de los lados al cuadrado = a la suma de los catetos y la hipotenusa.

El área del cuadrado denominado por la hipotenusa del triangulo es = a la suma de los cuadrados denominados por los catetos del triángulo.

Que ~~ta~~ el ~~la~~ área del lado de la hipotenusa al 2 es la suma de el área del cuadrado de los catetos al 2 con ninguno

FIGURA 4.4.4.16. *Ejemplos de dificultades al cambiar de anclaje*

Situación 3: Generalización del Teorema de Pitágoras.

La situación 3 se diseñó con el propósito de llevarla a cabo en el aula en el único caso de disponer tiempo suficiente para su desarrollo, pues se centra en contenidos extracurriculares. Con ello, se pretendía afianzar el teorema de Pitágoras a partir de la construcción de una extensión del mismo en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de figuras geométricas, distintas al cuadrado, construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo de manera que los alumnos dedujesen que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de polígono regular.

Además, buscábamos seguir ejercitando la conversión entre el Registro de la Lengua Natural y el Registro Geométrico, que ya se había empezado a trabajar en la situación anterior y que también se trabaja con posterioridad.

Situación 4: El Teorema de Pitágoras a través del álgebra.

La situación 4 consta de tres fases. La primera de ellas se desarrolló el día 13 de abril de 2012 durante los 40 minutos de clase; la fase dos fue mandada como tarea para realizar en casa; y la fase tres tuvo lugar el día 16 de abril de 2012 durante los 40 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

EL objetivo principal de esta situación era lograr que el alumno trabajase y coordinase distintos registros de representación que de un modo u otro hacen alusión a triángulos rectángulos y al teorema de Pitágoras (Registro Tabular - Registro Algebraico - Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural), de modo que llegase a obtener la expresión algebraica de dicho Teorema a través del establecimiento de relaciones entre longitudes y áreas.

Continuando con la dinámica seguida hasta el momento, los alumnos se implicaron en cada una de las fases sin mostrarse nada reticentes ni perezosos, sino que llamaba la atención el interés puesto y el cierto grado de impaciencia que manifestaban a la hora de repartir el material, pues ven cada tarea como un juego, un acertijo, que quieren resolver.

Fase 1: Demostración del Teorema de Pitágoras mediante álgebra.

Descripción:

Con la fase 1 se pretende que el alumno descubra la importancia del lenguaje algebraico como herramienta que permite establecer relaciones de modo genérico. Está fase ha sido pensada como una tarea que permite la emergencia del álgebra y su coordinación con el registro geométrico a partir de la visualización y el razonamiento. Esto se consigue mediante el bloqueo de las estrategias empleadas hasta el momento prohibiendo el uso de las tijeras y la regla, por un lado, y a través de la designación de los elementos del triángulo rectángulo como indicativo del método de resolución que deben seguir, por otro. Si no introdujéramos ningún tipo de nomenclatura que les guíe es posible que los alumnos quedaran bloqueados ante la actividad:

“El Teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración de él para alcanzar el grado de Magíster matheseos. Os presentamos a continuación la demostración geométrica de una de ellas. Demostrad que es correcta dicha demostración a partir de los datos que se os proporcionan.”

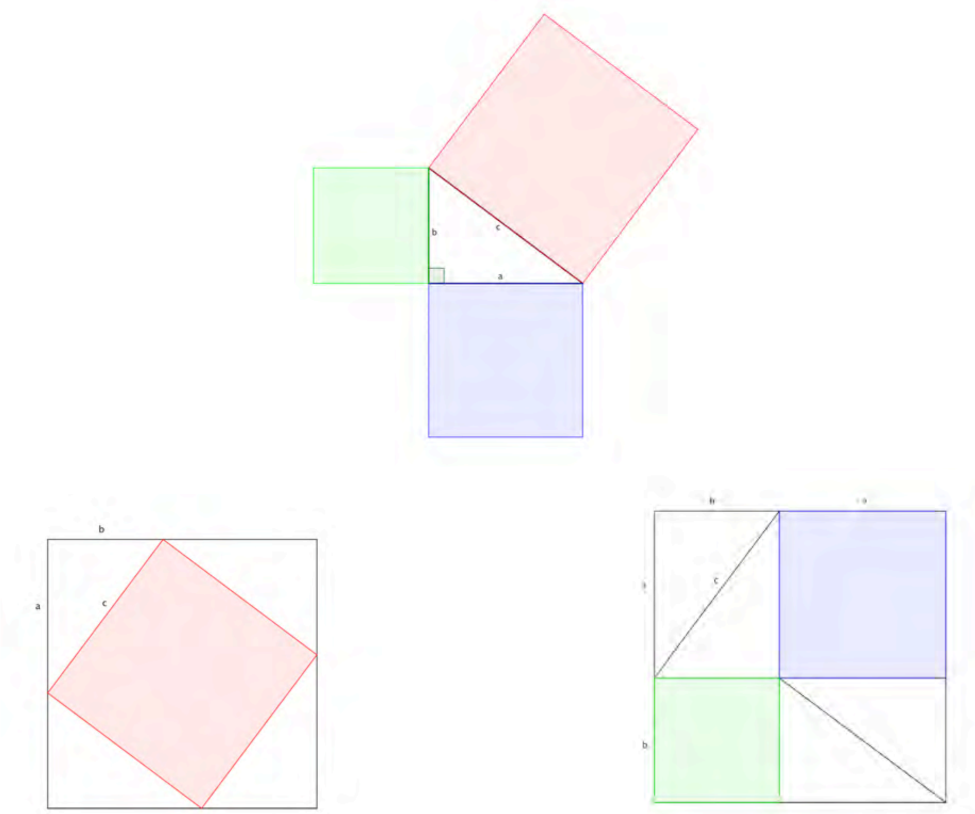


FIGURA 4.4.4.17. *Demostración geométrica del Tª de Pitágoras*

No podéis utilizar ni tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de la actividad.”

Además de la información dada en la consigna, se les proporciona la hoja con la demostración del Teorema de Pitágoras con la que van a tener que trabajar, cuyo valor radica en estar realizada mediante figuras geométricas reconocidas por los alumnos de las que se conoce la fórmula del área, de modo que no requiere un gran esfuerzo de abstracción por parte de los estudiantes, permitiendo llegar a la igualdad de manera directa.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna a la vez que enseña la ficha de trabajo a los alumnos:

- **Profesor:** *Ahora os voy a repartir una nueva actividad.*

  El Teorema de Pitágoras es uno de los teoremas que más demostraciones tiene. Eso debe a que en la Edad Media para ser Magister Matheseos, es decir, Maestro en Matemáticas, esa persona tenía que encontrar una nueva demostración del Teorema de Pitágoras. En la ficha que os he entregado viene una de las muchas demostraciones geométricas que tiene, vale. Pues, con los datos que aparecen aquí, vosotros tenéis que probar que efectivamente, esto es una demostración del Teorema de Pitágoras.

  No podéis utilizar ni regla ni tijeras, únicamente el material que tenéis en la mesa, es decir, la ficha y la hoja en blanco que os he dado. ¿Alguien qué me repita lo qué tenemos que hacer?

Varios grupos comienzan por trazar líneas interiores o exteriores para intentar demostrar lo que se pedía en la consigna, es decir, trabajan desde la perspectiva de la aprehensión operativa de cambio figural añadiendo o quitando elementos geométricos a la configuración inicial, obteniendo nuevas subconfiguraciones:

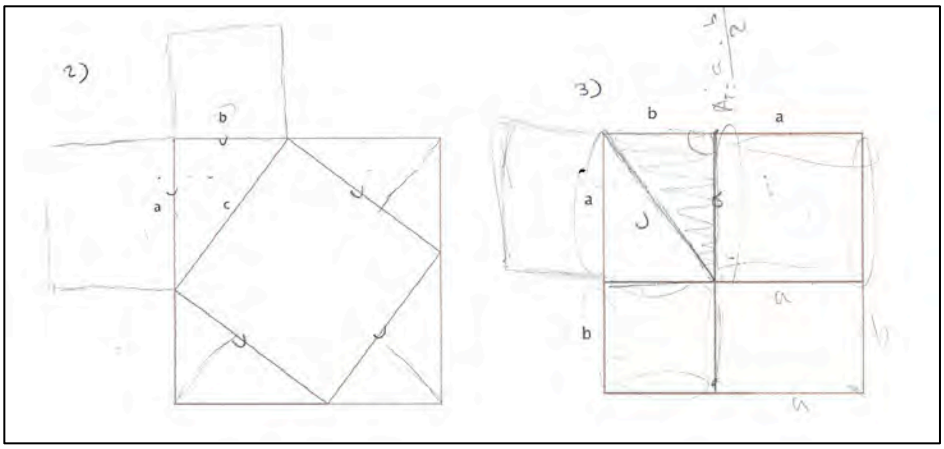


FIGURA 4.4.4.18. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.4.1*

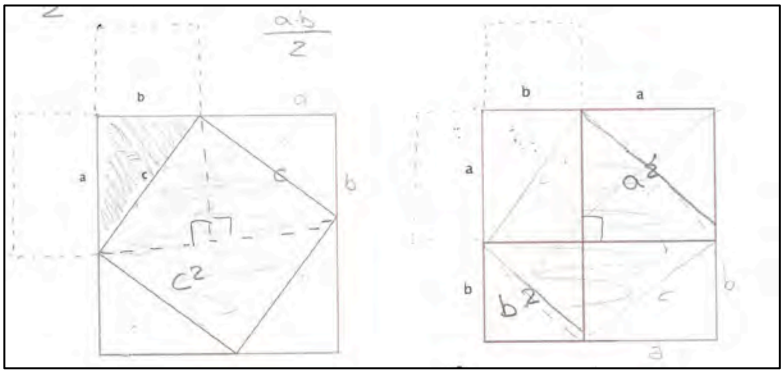


FIGURA 4.4.4.19. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.4.1*

Varios grupos identifican el triángulo rectángulo que aparece en la parte superior de la ficha con los cuatro triángulos rectángulos que se ven a primera vista en la figura inferior izquierda (FII), pero no saben cómo utilizarlo para demostrar la igualdad pedida. La identificación de dicho triángulo en la figura inferior derecha (FID) no se da de manera inmediata, necesitando, algunos estudiantes, ciertas indicaciones para encontrarlos:

- **Sandra:** *Es que no entendemos bien que es lo que hay que hacer.*
- **Colaborador 1:** *Mira, en el Teorema de Pitágoras, el área de este cuadrado es la suma de esta área* (el cuadrado de un cateto) *y la suma de esta área* (el cuadrado del otro cateto). *¿Veis qué está probado aquí?* (señalando las figuras inferiores).
- **Sandra:** *Pero aquí no hay ningún triángulo* (señalando la FID)
- **Nuria:** *Pero están estos dos cuadrados que también están aquí* (en la figura superior).
- **Colaborador 1:** *y a lo mejor también hay triángulos que no ves a simple vista. ¿Qué ves aquí?* (señalando la FID)
- **Sandra:** *Un cuadrado con cuatro cuadrados.*
- **Colaborador 1:** *Relaciona esto con esto* (figura superior con FID)
- **Nuria:** *Si esto lo partes por la mitad* (los rectángulo blanco divididos por la diagonal en la FID), *tenemos este triángulo* (el de la imagen superior)
- **Colaborador 1:** *¿Qué más cosas?*
- **Sandra:** *Que falta la C de la hipotenusa*
- **Colaborador 1:** *Pues mira a ver donde la colocas.*
- **Sandra:** *Esto sería así* (divide los rectángulos blancos por la diagonal) y eso sería C.

El grupo cuatro pone en entredicho lo afirmado por el profesor y no creen que sea posible resolverlo porque no se han indicado las medidas, lo que refleja el abuso del empleo del registro de representación numérico en actividades que implican el cálculo de áreas y su comparación. En lugar de tratar de relacionar las superficies, intentan relacionar longitudes, pero lo que realmente hacen es relacionar el número de lados. por ejemplo: "*Como hay cuatro triángulos, se forman tres cuadrados con sus lados*".

El papel del registro numérico como obstáculo para la aparición y el trabajo con el algebra también se manifiesta en los estudiantes del grupo 2:

- **Sandra:** *Hemos descubierto que como tienen el mismo área, podemos utilizar aquí* (En FID) *la fórmula del cuadrado y del rectángulo, y aquí* (En FII) *la del triángulo.*
- **Colaborador 2:** *¿Qué estás calculando? ¿El área del de este triángulo?*
- **Sandra:** *Si.*
- **Colaborador 2:** *¿Y qué te ha dado?*
- **Sandra:** *Todavía no lo he hecho.*
- **Colaborador 2:** *Pues hazlo.*
- **Sandra:** *Pero, ¿las letras?*
- **Colaborador 2:** *Claro, te va a quedar con letras. ¿Cuál es el área del triángulo? Indícame la base y la altura.*
- **Sandra:** *La base es A y la altura es B*
- **Colaborador 2:** *¿Cuál sería el área?*
- **Sandra:** *A por B partido de 2.*
- **Nuria:** *Ya, pero… ¡si no tenemos números!*
- **Colaborador 2:** *No pasa nada, no os preocupéis por los números.*
- **Nuria:** *¿Despejamos las letras?*
- **Colaborador 2:** *No, aquí no hay ecuaciones.*
- **Nuria:** *¿Por qué?*

Las observaciones de los comportamientos de los alumnos nos indican que no han comprendido bien la consigna, pues varios son los que en lugar de buscar la relación entre las áreas de los cuadrados que contienen al de lado igual a la hipotenusa (FII) y a los de lado igual a los catetos (FID), se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.

Otro contratiempo con el que no contábamos es el olvido o desconocimiento de las fórmulas para calcular el área de triángulos, rectángulos y cuadrados, que se ha detectado en varios de los estudiantes.

Ante tales bloqueos, el profesor se ve en la necesidad de intervenir para que la actividad pueda seguir desarrollándose:

- **Profesor:** *Lo que tenéis que probar es que estos dos cuadrados son iguales, que lo son porque tiene las mismas dimensiones. Para ello, este Cuadrado* (FII) *¿por qué figuras está formado?*
- **Varios:** *Por un cuadrado y cuatro triángulos*
- **Profesor:** *¿y este?* (FID)
- **Varios:** *Por cuadrados y rectángulos.*
- **Profesor:** *Entonces tenéis que llegar a la igualdad de estos cuadrados a partir de eso. También tenéis que recordar ciertas fórmulas. ¿Alguien se acuerda cómo es la fórmula para calcular el área de un rectángulo?*
- **Algunos alumnos:** *Base por altura*
- **Profesor :** *¿Y la del triángulo?*
- **Algunos alumnos:** *Base por altura partido de dos.*
- **Profesor:** *Pues a partir de ahí a ver si llegáis a algo.*

Previamente a la intervención del profesor, solo una alumna, Natalia, consiguió probar que la demostración del teorema de Pitágoras era cierta empleando la estrategia del cálculo de las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que los componen para comprobar que, efectivamente, son iguales. Resaltamos este hecho con énfasis porque la alumna presente un desarrollo cognitivo muy inferior al correspondiente a su edad debido al trastorno que padece. A partir de este resultado, y del desarrollo de las situaciones anteriores, se puede llegar a pensar que este tipo de metodología ayuda y favorece en cierta medida a potenciar el aprendizaje en alumnos de características similares a las de Natalia, trabajo que posponemos para investigaciones futuras.

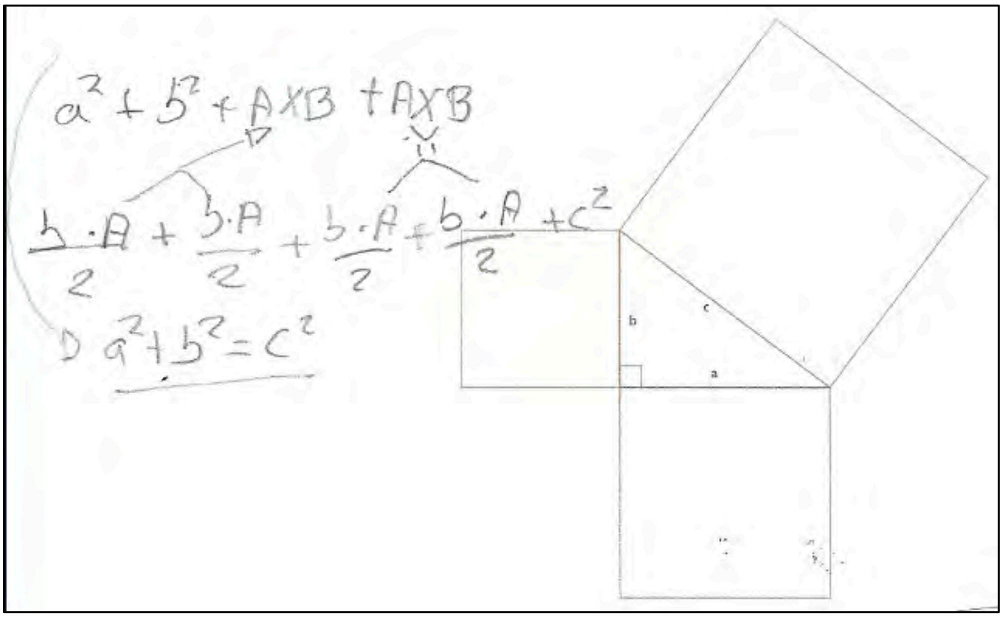


FIGURA 4.4.4.20. *Trabajo realizado por Natalia en S.4.1*

Los alumnos del grupo 3 también habían empleado la estrategia seguida por Natalia antes de que el profesor interviniera para hacer las aclaraciones, pero el error cometido a la hora de calcular el área de los triángulos en la FII les impide encontrar la relación.

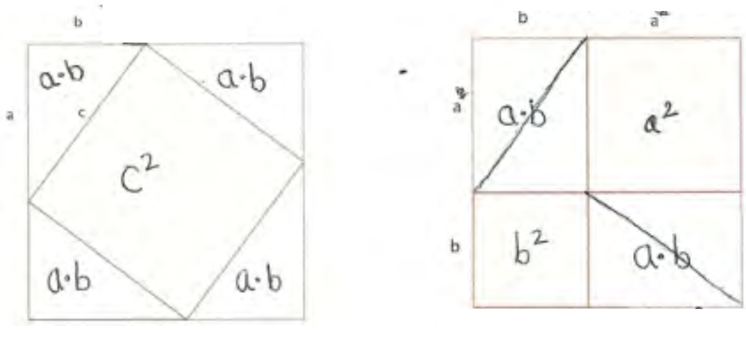


FIGURA 4.4.4.21. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.4.1*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.9. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de la Situación 4 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Descomposición de los rectángulos blancos de la FID en los dos triángulos rectángulo que son iguales al de la figura superior. Se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)
Grupo 2	Trazado de líneas interiores y exteriores sobre FID y FII. Se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)
Grupo 3	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen. Cometen errores al calcular el área de los triángulos.	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)
Grupo 4	Trazado de líneas interiores y exteriores sobre FID intentando probar que los cuatro triángulos rectángulos que se pueden encontrar en dicha figura están en la figura principal. Se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)

Grupo 5	Descomposición de FID y FII mediante el trazado de líneas internas intentando identificar elementos comunes a las dos.	Cálculo de las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de las dimensiones de sus lados, comprobando la igualdad de ambas. Cálculo de las zonas no coloreadas de cada uno de ellos probando que son iguales, deduciendo, por tanto, que las coloreadas también lo son.
Grupo 6	Descomposición de FID y FII mediante el trazado de líneas internas intentando identificar elementos comunes a las dos.	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)
Grupo 7	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones.	
Grupo 8	Descomposición de FID y FII mediante el trazado de líneas internas intentando identificar elementos comunes a las dos.	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)
Grupo 9	Trazado de líneas interiores o exteriores sobre FID y FII	Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones. (Tras la intervención del profesor)

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.10. *Estrategias bases utilizadas en Fase 1 de la Situación 4*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Descomposición de los rectángulos blancos de la FID en los dos triángulos rectángulo que son iguales al de la figura superior. Se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.	1	11,11 %
Trazado de líneas interiores y exteriores sobre FID y FII. Se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.	1	11,11 %
Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen. Cometen errores al calcular el área de los triángulos.	1	11,11 %
Trazado de líneas interiores y exteriores sobre FID intentando probar que los cuatro triángulos rectángulos que se pueden encontrar en dicha figura están en la figura principal. Se centran en encontrar algo que relacione la figura superior con cada una de estas dos, como si se tratase de elementos independientes.	1	11,11 %
Cálculo las áreas de los cuadrados inferiores (FID y FII) a partir de la suma de las áreas de las figuras que las componen e igualación de ambas expresiones.	1	11,11 %
Descomposición de FID y FII mediante el trazado de líneas internas intentando identificar elementos comunes a las dos.	4	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha, Natalia se ofrece voluntaria para explicar su método de resolución que además es el empleado por todos los grupos menos por el grupo 5, que en lugar de calcular la suma de las áreas de los elementos que forman FID y FII, calculan el área de los cuadrados a partir del producto notable $(a+b)^2$ comprobando que son iguales y obtienen las áreas de las zonas no sombreadas de FID y FII concluyendo que son las mismas y por tanto se trata de una demostración geométrica del teorema de Pitágoras.

Tras todo el trabajo geométrico que se ha desarrollado en relación al teorema de Pitágoras, tanto en esta sesión como en situaciones anteriores, el estudiante ya se encuentra en disposición de relacionar la expresión geométrica del teorema con la expresión algebraica con la que es más habitual trabajar:

En un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de los catetos. Es decir, si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b , y la medida de la hipotenusa es c, se verifica que: $\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$

<u>Fase 2</u>: Identificación de los tipos triángulos atendiendo a sus ángulos a partir de sus medidas.

Descripción:

Esta fase de la situación se propone como tarea para casa ante la imposibilidad de realizarla en el aula por falta de tiempo.

La actividad tiene por objetivo que el alumno descubra la funcionalidad de la aplicación de la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras para encontrar la solución a problemas en los que no se puede recurrir a la construcción geométrica, articulando de esta manera el registro de representación numérico, tabular y algebraico:

“En la tabla que se os ha repartido aparecen las medidas de los lados de cinco triángulos:

TABLA 4.4.4.11. *Tabla para el alumno con dimensiones de los triángulos*

	Lado a	Lado b	Lado c
Triángulo 1	4,5 cm	6 cm	7,5 cm
Triángulo 2	3,44 cm	2,12 cm	4,42 cm
Triángulo 3	5 cm	3, 5 cm	7 cm
Triángulo 4	7,5 cm	4 cm	8,5 cm
Triángulo 5	3,47 cm	3,44 cm	4,42 cm

Fuente: elaboración propia

¿Sabríais decir cuáles de los triángulos que aparecen en la tabla son triángulos rectángulos?”

EL hecho de no facilitar la representación geométrica de los triángulos obligará a los estudiantes a tener que emplear la expresión algebraica del Teorema de Pitágoras para encontrar la solución del problema.

Además, las longitudes de los lados de los triángulos se han escogido no enteras para evitar que encuentren la solución al problema mediante la construcción con regla.

Desarrollo de la actividad:

El profesor enuncia la consigan al final de la clase del día 13, dejando claro que es imprescindible que realicen la tarea solos y sin ayuda de nadie, condición que parece que han respetado ante los resultados que veremos más adelante:

- **Profesor:** *En la tabla que se os ha repartido aparecen las medidas de los lados de cinco triángulos:*

TABLA 4.4.4.12. *Tabla para el alumno con dimensiones de los triángulos*

	Lado a	Lado b	Lado c
Triángulo 1	4,5 cm	6 cm	7,5 cm
Triángulo 2	3,44 cm	2,12 cm	4,42 cm
Triángulo 3	5 cm	3, 5 cm	7 cm
Triángulo 4	7,5 cm	4 cm	8,5 cm
Triángulo 5	3,47 cm	3,44 cm	4,42 cm

Fuente: elaboración propia

¿Sabríais decir cuáles de los triángulos que aparecen en la tabla son triángulos rectángulos?

Pese a haber construido los triángulos que aparecen en la tabla teniendo en cuenta que las dimensiones de los mismos no den pie a su construcción mediante con regla y papel, la mayoría de los estudiantes menos dos han recurrido a esta estrategia para ver cuales son rectángulos y cuales no.

El profesor cuestiona los resultados obtenidos y el procedimiento utilizado por dichos alumnos preguntándoles, por un lado, sobre cómo han realizado las medidas para construir los triángulos 2 y 5 si sus reglas solo permiten medir centímetros y milímetros, y por otro, si están seguros entonces de poder garantizar que han realizado la clasificación correctamente, a lo que ellos se muestran dudosos.

A continuación vamos a ver cada uno de los casos representativos de lo que han hecho los alumnos en la realización de la tarea en casa:

- Clasificación de los triángulos al azar, marcando aquellos que consideran rectángulos sobre la misma tabla de datos. No realizan ningún tipo de tratamiento dentro del registro numérico ni conversión a otro registro de representación.

	Lado a	Lado b	Lado c
Triángulo 1	4,5 cm	6 cm	7,5 cm
Triángulo 2	3,44 cm	2,12 cm	4,42 cm
Triángulo 3	5 cm	3, 5 cm	7 cm
Triángulo 4	7,5 cm	4 cm	8,5 cm
Triángulo 5	3,47 cm	3,44 cm	4,42 cm

FIGURA 4.4.4.22. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 7 en S.4.2*

- Construcción de los triángulos sobre hoja cuadriculada, encontrando problemas a la hora de clasificar el triángulo 2. Efectúan la conversión del registro numérico al geométrico.

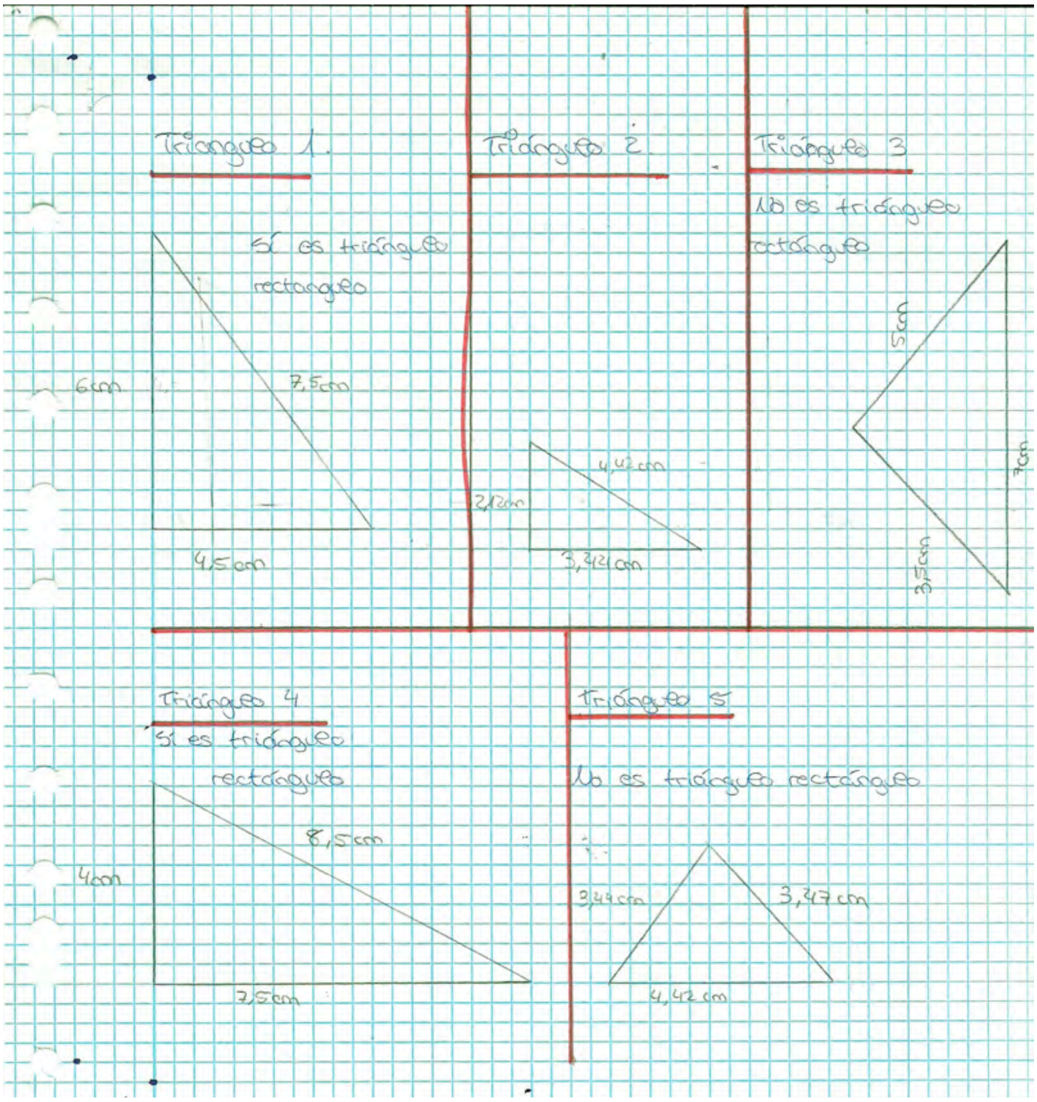


FIGURA 4.4.4.23. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 4 en S.4.2*

- Construcción de los triángulos sobre hoja cuadriculada, clasificándolos en rectángulos o no de manera incorrecta, pues consideran que el triángulo 2 es rectángulo cosa que es errónea. Realizan la conversión del registro numérico al geométrico.

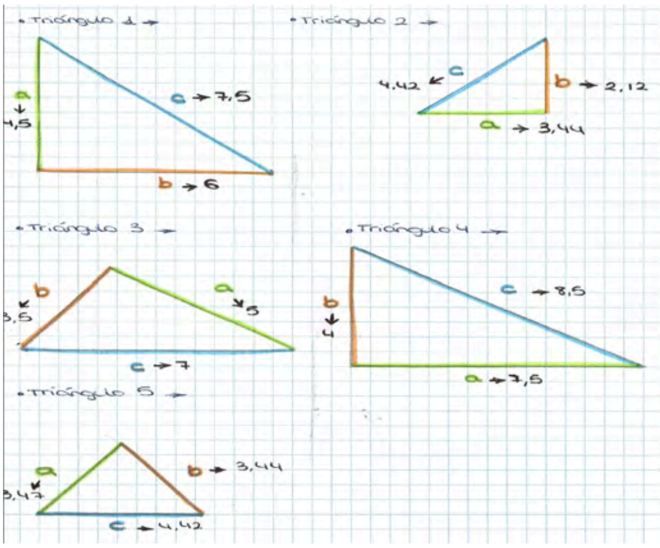


FIGURA 4.4.4.24. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 6 en S.4.2*

- Construcción de los triángulos sobre hoja sin cuadricular, clasificándolos en rectángulos o no de manera correcta pese a que el instrumento para construirlos carece de la precisión necesaria para poder asegurarlo. Realizan la conversión del registro numérico al geométrico.

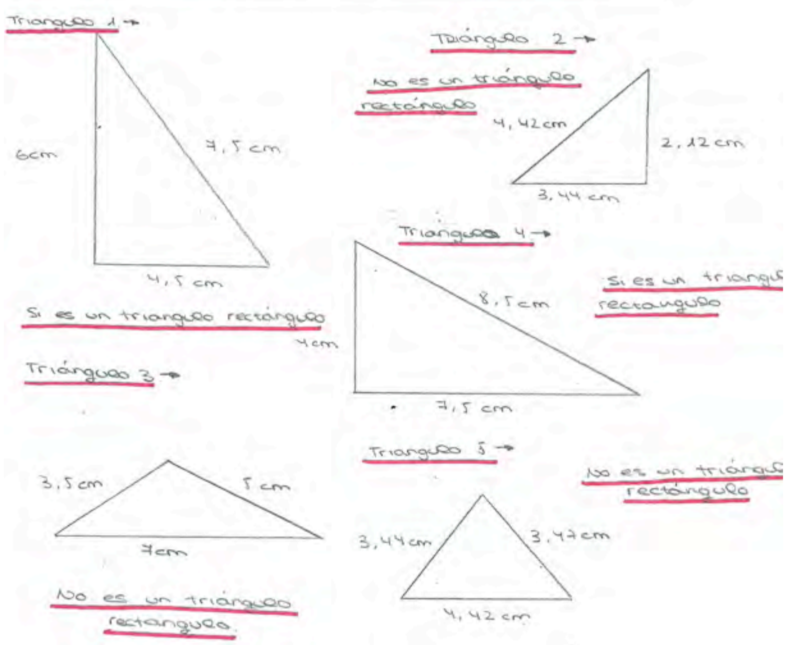


FIGURA 4.4.4.25. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 1 en S.4.2*

- Construcción de todos los triángulos como si todos fueran rectángulos. Realizan la conversión del registro numérico al geométrico sin tener en cuenta las dimensiones que se les ha facilitado a través del registro tabular.

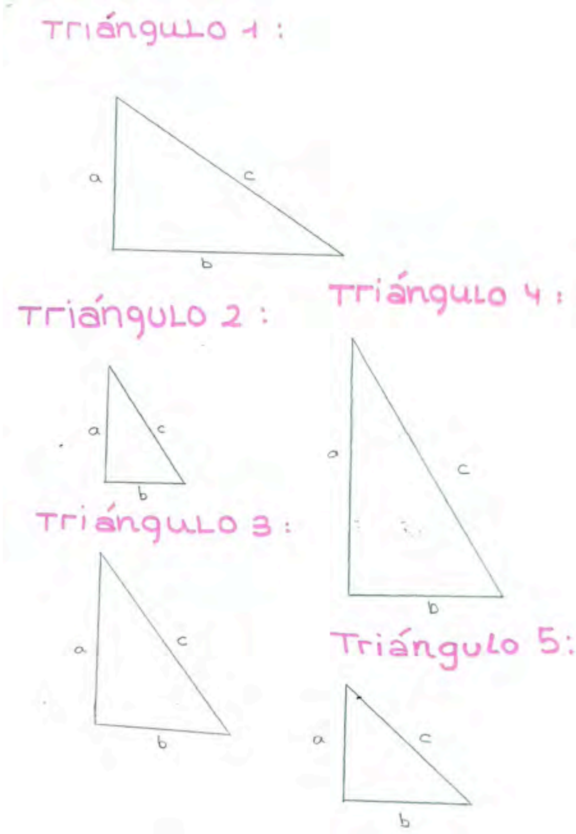


FIGURA 4.4.4.26. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 2 en S.4.2*

- Identificación de los triángulos rectángulos mediante la expresión algebraica del teorema de Pitágoras. Coordinan los registros de representación número y algebraico.

Hipotenusa cateto

$h^2 = c^2 + c^2$

	Lado a		Lado b		Lado c
Triángulo 1	4,5 cm 20,25 cm²	+	6 cm 36 cm²	=	7,5 cm 56,25 cm²
Triángulo 2	3,44 cm 11,83 cm²	+	2,12 cm 4,5 cm²	≠	4,42 cm 19,6 cm²
Triángulo 3	5 cm 25 cm²	+	3, 5 cm 12,25 cm²	≠	7 cm 49 cm²
Triángulo 4	7,5 cm 56,25 cm²	+	4 cm 16 cm²	=	8,5 cm 72,25 cm²
Triángulo 5	3,47 cm 12,04 cm²	+	3,44 cm 11,8 cm²	≠	4,42 cm 19,5 cm²

FIGURA 4.4.4.27. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 5 en S.4.2*

- Identificación de los triángulos rectángulos mediante la expresión algebraica del Tª de Pitágoras y posterior construcción geométrica. Coordinan los registros numérico, algebraico y geométrico.

		Lado a	Lado b	Lado c	
1:	Triángulo 1	4,5 cm	6 cm	7,5 cm	SÍ
2:	Triángulo 2	3,44 cm	2,12 cm	4,42 cm	NO
3:	Triángulo 3	5 cm	3, 5 cm	7 cm	NO
4:	Triángulo 4	7,5 cm	4 cm	8,5 cm	SÍ
5:	Triángulo 5	3,47 cm	3,44 cm	4,42 cm	NO

$h^2 = c^2 + c^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

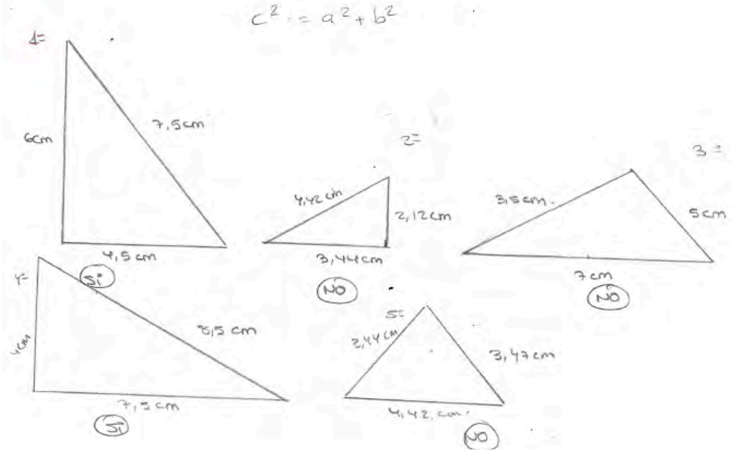


FIGURA 4.4.4.28. *Trabajo realizado por un alumno del grupo 8 en S.4.2*

Únicamente dos alumnos de todo el grupo han recurrido a la expresión algebraica del teorema de Pitágoras para realizar la clasificación de los triángulos.

La utilización de figuras prototípicas en matemáticas, y en concreto en geometría, se ha manifestado de forma clara en esta actividad. Varios son los alumnos que para indicar que los triángulos son rectángulos, lo construyen apoyando sobre el ángulo recto, sin tener en cuenta que un triángulo que tenga un ángulo de 90º en el vértice contrario al lado sobre el que se apoya, también es rectángulo. Este tipo de representación prototípica se forma en los alumnos a partir de los sucesivos encuentros que ha tenido a lo largo de su etapa escolar, creando así una representación gráfica estereotipada que les puede conducir a grandes bloqueos y errores, pues algunos alumnos parecen anteponer la posición del triángulo y el punto de vista adoptado para observarlo a la afirmación de que para que sea rectángulo es necesario que tenga un ángulo recto.

Fase 3: En busca de un teorema.

Descripción:

Esta fase de la situación se centra en la coordinación de tres registros de representación, geométrico, algebraico y la lengua natural, apoyándonos, para ello, en la búsqueda de un teorema similar al de Pitágoras para cuadriláteros que se caracterizan por tener dos ángulos rectos. Se pretende seguir ejercitando el cambio del anclaje visual al discursivo, estableciendo la relación entre ambos a través del registro algebraico.

Para ello, los alumnos tendrán que designar los lados del cuadrilátero, para así poder identificar los triángulos rectángulos con hipotenusa común que forman dicho cuadrilátero y establecer la relación entre las áreas mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras:

"Sobre los lados del cuadrilátero ABCD, que tiene una característica especial y es la de tener dos ángulos rectos, se han construido los correspondientes cuadrados. Sabemos que entre dichos cuadrados existe una relación.

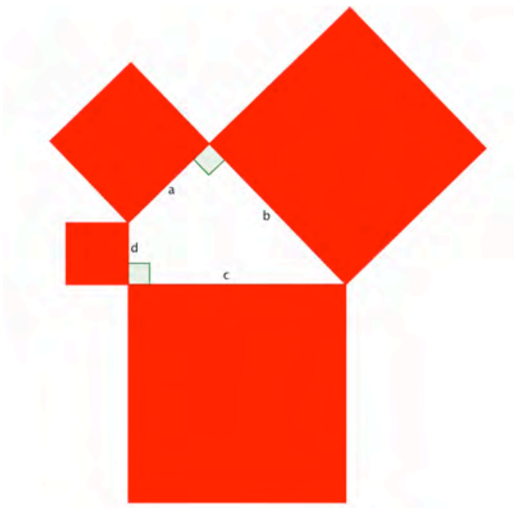


FIGURA 4.4.4.29. *Construcción geométrica sobre cuadrilátero*

Los grupos que consigan encontrar la expresión que indica dicha relación, justificando como han llegado a ella correctamente, habrán ganado.

No podéis utilizar tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de esta actividad.

¿Podrías enunciar un Teorema similar al de Pitágoras para este tipo de figuras?"

Como se puede comprobar a través de la ficha, no se aporta ningún dato numérico. Este hecho junto con la prohibición de la utilización de la regla sitúa al alumno ante la necesidad de recurrir al registro Algebraico y su articulación con los demás sistemas de representación para llegar a la solución.

En cuanto al diseño de la figura, se han tenido en cuenta una serie de aspectos que dotaran de sentido a la tarea:

- El no trazado de la línea interna que divide el cuadrilátero en los dos triángulos rectángulos, con hipotenusa común, de que se compone para potenciar en el alumno los procesos de visualización y razonamiento.
- Longitud de los lados del cuadrilátero: se han elegido lo suficientemente distintos para evitar que al construir los cuadrados sobre ellos obtengamos áreas similares.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor, repartió la ficha de trabajo previamente a dar la consigna lo que permitió comprobar nuevamente la implicación de los estudiantes, producto de la manera de trabajar de la metodología empleada.

- **Profesor:** *Sobre los lados del cuadrilátero ABCD, que tiene una característica especial y es la de tener dos ángulos rectos, se han construido los correspondientes cuadrados. Sabemos que entre dichos cuadrados existe una relación.*

  Los grupos que consigan encontrar la expresión que indica dicha relación, justificando como han llegado a ella correctamente, habrán ganado.

  No podéis utilizar tijeras ni regla a lo largo del desarrollo de esta actividad.

  ¿Podrías enunciar un Teorema similar al de Pitágoras para este tipo de figuras?

Aunque inicialmente en la ficha no se indicaban los ángulos rectos interiores de los que consta el cuadrilátero, se pensó que de no hacerlo la actividad podría resultar demasiado compleja, dificultado la búsqueda del método de resolución.

La mayoría de los grupos trazan la línea que divide al cuadrilátero en dos triángulos rectángulos y escriben la expresión del teorema de Pitágoras para cada uno de ellos, pero algunos de ellos tardan en identificar que dicha línea es la hipotenusa común a ambos y no proceden a la igualación de ambas expresiones. Este es el caso de los grupos 2, 4 y 7.

- **Colaborador 1:** *Esto me habéis dicho que es ¿Qué?* (En referencia a una de las expresiones del teorema de Pitágoras de uno de los triángulos)
- **Sandra:** *La hipotenusa*
- **Colaborador 1:** *¿Y esto?* (En referencia a la otra expresión)
- **Sandra:** *la hipotenusa*
- **Colaborador 1:** *¿Y es la misma está que esta?* (En referencia a las hipotenusas)
- **Sandra y Nuria:** *Si*
- **Carmen:** *¿Y es lo mismo esto que esto?* (en referencia al resto de cada una de las expresiones)
- **Sandra y Nuria:** *Si*
- **Colaborador 1:** *¿Cómo se escribe eso? Cuando dos cosas son iguales ¿Qué sucede?*
- **Nuria y Sandra:** *Que son igual.*
- **Colaborador 1:** *¿Entonces?*
- **Nuria:** *¿Sería así?* (Nuria escribe la expresión pedida)
- **Colaborador 1:** *Señaladme en el dibujo que es a cuadrado, b cuadrado, c cuadrado y d cuadrado.*

  Sandra y Nuria lo indican correctamente.
- **Colaborador 1:** *Pues ahora escribir esa expresión en función de los cuadrados.*

El grupo 6 ha optado por la búsqueda de triángulos rectángulo utilizando los cuadrados construidos sobre los lados. Para ello han trazado una de las diagonales del cuadrado que han nombrado como 3, que junto con el cuadrilátero forma un triángulo rectángulo. Por otro lado, trazan la diagonal del cuadrado 1 e indican que el triángulo rectángulo resultante y el que han formado anteriormente, son iguales pero no llegan a ninguna conclusión.

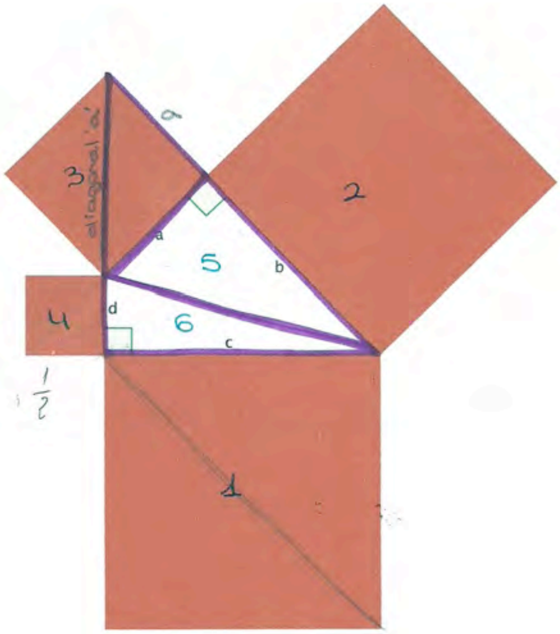


FIGURA 4.4.4.30. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.4.3*

El grupo 9 dibuja formas geométricas elementales sobre los cuadrados e intenta transportarlas o identificarlas sobre los otros, llegando a la conclusión errónea de que la suma de las áreas de los tres cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado grande. Lo hacen, según sus palabras, *aproximando el área*. Finalmente se dan cuenta de que su procedimiento no en concluyente y al tratar de encontrar una estrategia alternativa descubren la línea que divide al cuadrilátero en los dos triángulos rectángulos.

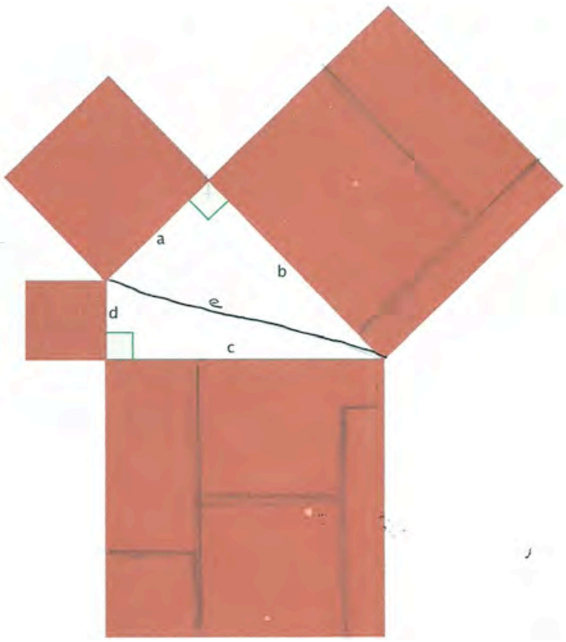


FIGURA 4.4.4.31. *Trabajo realizado por el grupo 9 en S.4.3*

En este ocasión tenemos que volver a destacar el trabajo de Natalia, que de manera directa ha empleado la estrategia optima para resolver la tarea.

- **Natalia:** *He dividido el cuadrilátero por la diagonal en dos triángulos rectángulos.*
- **Colaborador 1:** *¿Por qué sabes que son rectángulos?*
- **Natalia:** *Porque tienen un ángulo recto.*
- **Colaborador 1:** *¿Dónde está el ángulo recto? Que yo lo vea.*
- **Natalia:** *Aquí* (marcándolo correctamente).
- **Colaborador 1:** *¿Y en el otro?*
- **Natalia :** *Aquí* (marcándolo correctamente).

  Luego, los dos catetos los he sumado al cuadrado utilizando el Teorema de Pitágoras. Como no hay hipotenusa, la hemos llamado X. Y luego en el otro igual.
- **Colaborador 1:** *¿Qué tienes ahora escrito?*
- **Natalia:** $a^2+b^2=x^2$ *y en el otro triángulo rectángulo* $c^2+d^2=x^2$
- **Colaborador 1:** ¿Y ahora qué puedes deducir? Si esto es x al cuadro y esto es x al cuadrado…
- **Natalia:** *Que las dos hipotenusas son igual.*
- **Colaborador 1:** *¿Y ahora que puedes deducir? Piénsalo un rato.*

Por su lado, el grupo 3 intuyen, también según sus palabras, la relación correcta, pero sin razonamiento alguno.

- **Fran:** *¿Esto está bien?* (mostrando la relación correcta entre las áreas de los cuadrados)
- **Profesor:** *Pero, ¿Cómo lo sabéis?*
- **Javier:** *No se…intuyendo. Porque estos dos medianos tiene que ser igual a la suma del grande y el pequeño.*
- **Profesor:** *Pero eso no lo sabemos por ciencia infusa. Mirad la figura. ¿Qué característica tiene?*
- **Fran:** *Que estos dos tiene un ángulo recto* (refiriéndose a los cuadrados construidos sobre los lados a y b) *y estos dos otro.*
- **Profesor:** *¿Y que figuras hemos trabajado nosotros estos días?*
- **Javier:** *Cuadrados y triángulos.*

- **Profesor:** *¿Y el Teorema de Pitágoras de qué Triángulos habla?*
- **Fran:** *De triángulos rectángulos.*
- **Profesor:** *Vale. Mirad ahí si hay alguno.*
- **Javier:** *Hay dos. Aquí y aquí* (forma triángulos rectángulos al azar, sin considerar los que ya están marcados por los ángulos rectos)
- **Profesor:** *Pero, ¿Eso son triángulos rectángulos?*
- **Javier:** *Si haces así,* (trazando una línea desde el vértice ab hacia el lado c) *hay uno.*
- **Fran:** *Si trazas por aquí una línea, hay uno* (refiriéndose a la línea que determina la hipotenusa de los dos triángulos)
- **Profesor:** *Fran, traza la línea que has dicho y ahora mirad cuantos triángulos rectángulos hay ahí.*
- **Javier:** *Dos.*
- **Profesor:** *Y de los triángulos rectángulos sabéis cosas ,¿no?*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.13. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de la Situación 4 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera inmediata.	
Grupo 2	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman. Tardan en identificar que la línea de división es la hipotenusa común a ambos y no proceden a la igualación de ambas expresiones.	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera.
Grupo 3	Utilizan la intuición para encontrar la relación sin emplear razonamiento alguno.	
Grupo 4	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman. Tardan en identificar que la línea de división es la hipotenusa común a ambos y no proceden a la igualación de ambas expresiones.	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera.

Grupo 5	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera inmediata.	
Grupo 6	Búsqueda de triángulos rectángulos iguales mediante el trazado de líneas internas y diagonales sobre los cuadrados construidos en los lados del cuadrilátero.	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera.
Grupo 7	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman. Tardan en identificar que la línea de división es la hipotenusa común a ambos y no proceden a la igualación de ambas expresiones.	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera.
Grupo 8	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera inmediata.	
Grupo 9	Construcción de formas geométricas sobre los cuadrados, mediante el trazado de líneas internas al azar, y transportarlas o identificarlas sobre los otros.	División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.14. *Estrategias bases utilizadas en Fase 3 de la Situación 4*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman identificando que la línea de división es la hipotenusa común a ambos llegando a la relación pedida de manera inmediata.	3	33,33 %
División del cuadrilátero en los dos triángulos rectángulo que lo forman. Tardan en identificar que la línea de división es la hipotenusa común a ambos y no proceden a la igualación de ambas expresiones.	3	33,33 %
Utilizan la intuición para encontrar la relación sin emplear razonamiento alguno.	1	11,11 %
Búsqueda de triángulos rectángulos iguales mediante el trazado de líneas internas y diagonales sobre los cuadrados construidos en los lados del cuadrilátero.	1	11,11 %
Construcción de formas geométricas sobre los cuadrados, mediante el trazado de líneas internas al azar, y transportarlas o identificarlas sobre los otros.	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Los mayores problemas de esta actividad han emergido a la hora de abordar la segunda parte de la tarea en la que tenían que enunciar un teorema similar al de Pitágoras para este tipo de cuadriláteros, permitiéndonos recoger los conocimientos que han interiorizado los estudiantes después del desarrollo de esta situación.

La conversión al registro de la lengua natural a partir del registro algebraico y geométrico no se produce de forma instantánea ni espontanea. Se observa que los alumnos saben más de lo que son competentes de expresar y redactar, pues cuándo se les pregunta son capaces de dar respuestas más claras de manera oral que de manera escrita:

- **Víctor:** *¿Esto está bien?*
- **Profesor:** *La expresión es correcta. A ver que habéis puesto como Teorema.*
- **Víctor:** *Es un poco lioso.*
- **Profesor:** *La suma de los cuadrados formados por los lados a y b es igual que los formados por los lados en los cuadrados d y c. Pero…¿la suma de qué?*
- **Víctor:** *Es igual a la suma de los lados de los cuadrados.*
- **Profesor:** *Pero…¿qué es lo que sumáis?*
- **José Antonio:** *Más que los lados es el área lo que sumas.*
- **Profesor:** *de las áreas. Pero…¿de las áreas de quienes?*
- **José Antonio:** *De los cuadrados. Ponlo.*
- **Profesor:** *Y ahora yo os hago una pregunta, ¿Por qué decís que los de la suma de a y b?*
- **Jaime:** *Porque son los catetos que no son la hipotenusa.*
- **Profesor:** *porque son los que forman, ¿El qué?*
- **Víctor:** *EL triángulo.*
- **Profesor:** *Pero los catetos ¿Qué son lo que forma?*
- **José Antonio:** *El ángulo recto*
- **Profesor:** *Eso es, el ángulo recto.¿ Y eso vosotros lo habéis dicho en vuestro Teorema?*
- **José Antonio:** *No.*

En general, se detecta una grave falta de coordinación entre registros cuando la conversión hay que efectuarla hacia el registro de la lengua natural. Esto puede ser debido al tipo de tareas habituales que se han desarrollado a lo largo de su formación matemática, en donde no se acostumbra a verbalizar la interpretación de un resultado o demostración que parte o se efectúa dentro de un registro determinado como es en este caso el geométrico. Este tipo procesos requieren cierto aprendizaje que es pasado por alto habitualmente, pues el tener que expresar mediante la lengua natural una serie de descubrimientos o conclusiones es un proceso cognitivamente costoso para los alumnos.

Situación 5: Aplicación del Teorema de Pitágoras: Cable más corto.

La situación 5 tiene lugar el 18 de abril de 2012 durante los 40 minutos del desarrollo de clase.

Objetivo de la situación:

El objetivo de esta última situación sobre el teorema de Pitágoras, fue trabajar la aplicación del mismo en contextos reales en donde es necesario calcular la longitud de un segmento de una figura plana a partir de otros que, con él, formen un triángulo rectángulo.

Con esta actividad se pretende potenciar la conversión entre varios registros de representación en la resolución de problemas: Registro Gráfico - Registro Geométrico – Registro Algebraico – Registro Numérico –Registro de la Lengua Natural.

Descripción:

En esta única fase de la situación, los estudiantes deben determinar cómo se deben conectar cuatro postes de la luz en Leganés de manera que el coste del cableado que hay que utilizar para la conexión sea mínimo, teniendo que elegir entre cuatro posibles configuraciones.

Desde el punto de vista a-didáctico, el hecho de situar la actividad en su ciudad y en un contexto que les puede resultar más o menos cercano, despierta el interés y la motivación en los alumnos de manera inmediata:

“En la siguiente hoja se muestra la localización de 4 postes de luz que un ayuntamiento quiere poner en una zona de la ciudad. Los cables pueden ir conectados de 4 maneras distintas, pero no todas precisan de la misma longitud de cable, por lo que para ahorrar, nos piden que determinemos cual es la opción más económica.

No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad.

Aquí tenéis una tabla que podéis utilizar si os es útil.

Escribid un informe en el que indiques cual es la opción más económica y cómo has procedido para encontrarla.”

Además de la información dada en la consigna, se les proporciona un cuadernito con la representación sobre un plano cartesiano de localización de los postes de la luz y las posibles opciones del cableado:

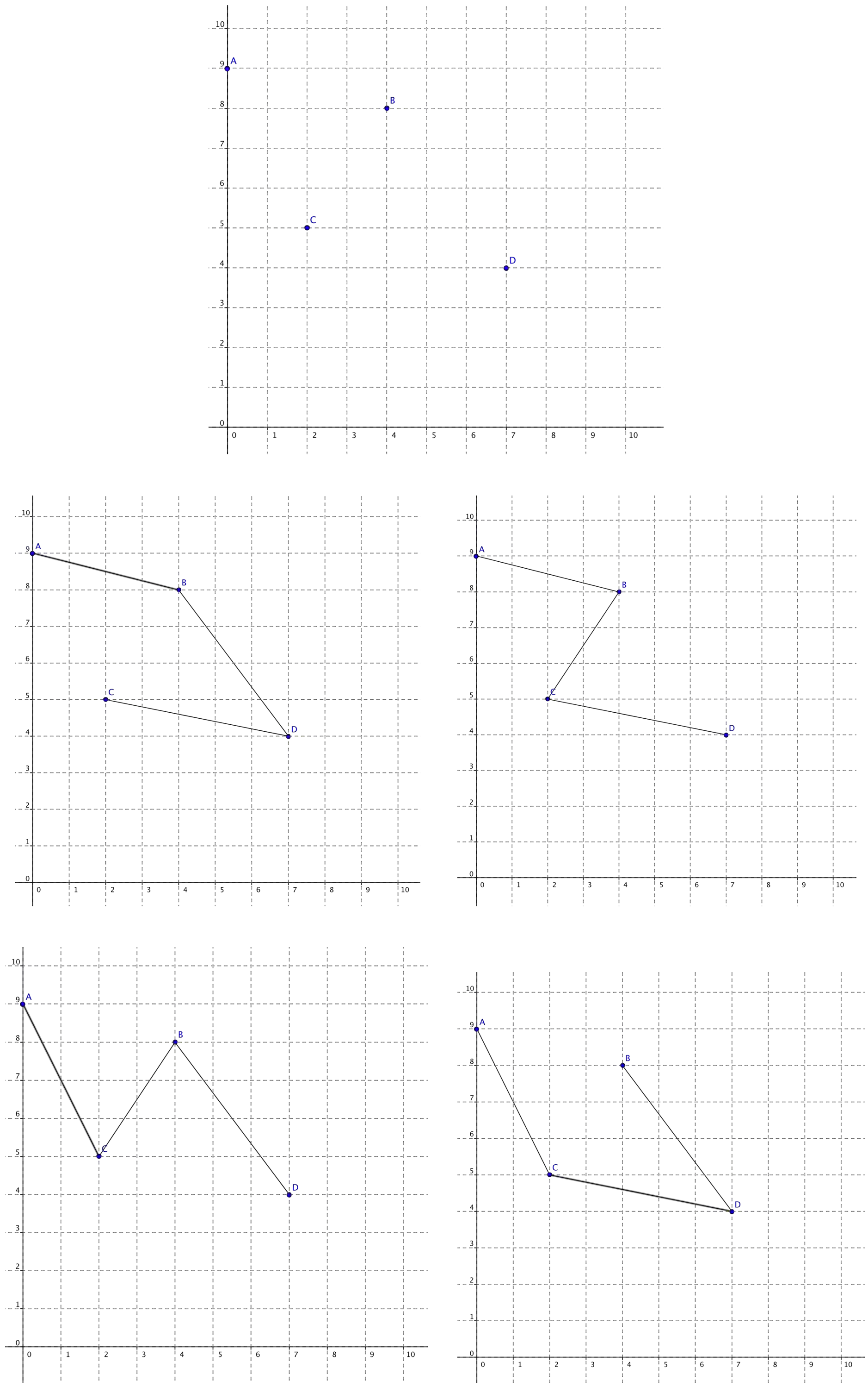


FIGURA 4.4.4.32. *Ficha para el alumno con la colocación postes de la luz y opciones de cableado*

Se han situado los postes de la luz sobre coordenadas enteras positivas con el fin de no dificultar el cálculo de las longitudes de los catetos de los triángulos rectángulos que deben formar los estudiantes para solucionar el problema. Además, la distancia entre ellos son similares, siendo algunas de ellas de diferencia mínima, para forzar al alumnos a la utilización del Teorema de Pitágoras para su resolución.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna:

- **Profesor:** *En la siguiente hoja se muestra la localización de 4 postes de luz que el ayuntamiento de Leganés quiere poner en una zona de la ciudad. Los cables pueden ir conectados de 4 maneras distintas, pero no todas precisan de la misma longitud de cable, por lo que para ahorrar, nos piden que determinemos cual es la opción más económica. No podéis utilizar regla a lo largo del desarrollo de esta actividad. Escribid un informe en el que indiques cual es la opción más económica y cómo has procedido para encontrarla."*

Pese haber estado trabajando el teorema de Pitágoras durante las cuatro sesiones anteriores, únicamente el grupo 5 lo emplea en la resolución de la actividad formando los triángulos rectángulos sobre la cuadrícula de la representación cartesiana cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes.

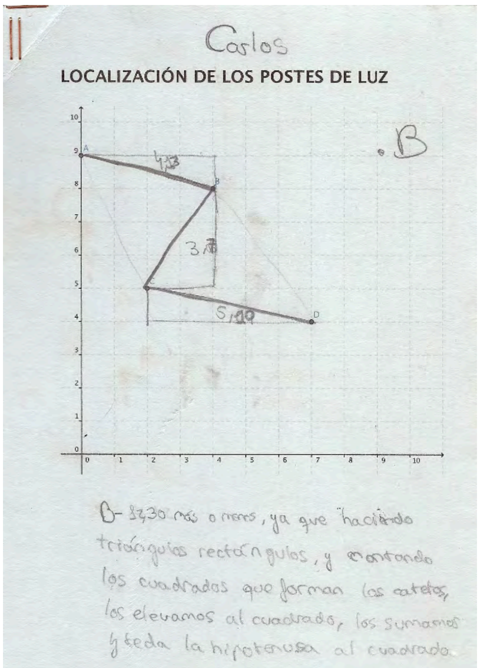


FIGURA 4.4.4.33. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.5*

Todos los demás grupos dan la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable, sin tener en cuenta que la longitud de cable que pasa por cada uno de ellos no es igual.

Incluso descartan algunas configuraciones haciendo una comparación aproximada del tipo "*este cable más este otro cable es un poco más corto de aquel*" (Grupo 3) o "*ir por aquí es más corto que hacer todo ese rodeo*" (Grupo 4).

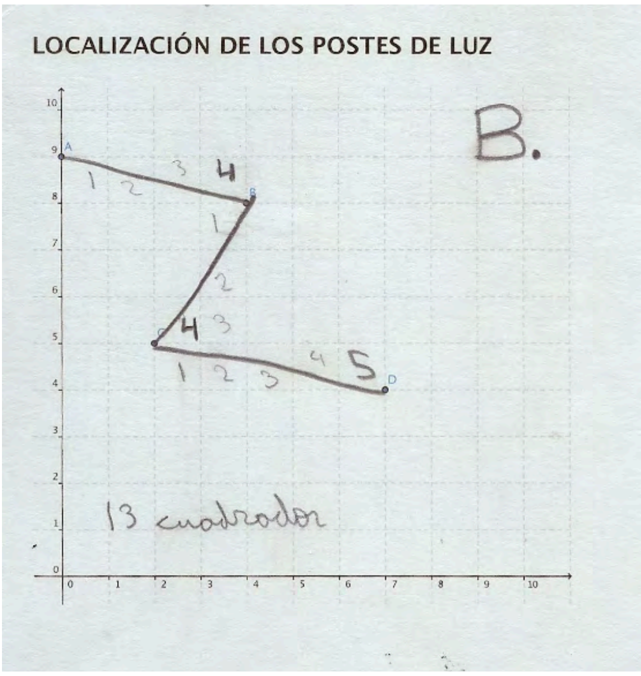


FIGURA 4.4.4.33. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.5*

Ante dicha situación, producto de las carencias que presentan los estudiantes con respecto a los procesos de visualización, poco potenciados y tratados en su formación escolar y que como consecuencia les ha impedido identificar que los segmentos dados sobre el registro gráfico cartesiano se corresponden con las hipotenusas de los triángulos rectángulos que se pueden construir (Registro geométrico), el profesor ve la necesidad de intervenir para que la actividad continúe con cierta normalidad y se puedan trabajar las conversiones entre registros que estaban previstas: *Según la estrategia que estáis utilizando*, *¿se ve claramente cual es la longitud de cada cable? ¿Pasa la misma cantidad de cable por cada cuadrito? A partir de los segmentos que hay, ¿podéis formar triángulos conocidos? Intentadlo*.

Tras la intervención, todos los grupos, salvo el grupo 7, caen en la cuenta de que a partir de los segmentos dados pueden formar triángulos rectángulos y aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la opción más barata, realizando, así, la conversión del registro gráfico al geométrico y de este al numérico, objetivo principal de está actividad.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.15. *Estrategias utilizas en la Situación 5 del Teorema de Pitágoras*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.
Grupo 2	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.
Grupo 3	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.
Grupo 4	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.

Grupo 5	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.	
Grupo 6	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.
Grupo 7	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar triángulos algunos de los cuales no son rectángulos, por lo que no es posible calcular la longitud pedida.
Grupo 8	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes.
Grupo 9	Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.16. *Estrategias bases utilizadas en la Situación 5*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Intentar resolver el problema a simple vista, por estimación, sin realizar ningún cálculo, dando la solución en función de los cuadros que atraviesa el cable.	8	88,88 %
Formar los triángulos rectángulos cuyas hipotenusas se corresponden con la longitud de cable que habrá entre los postes. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de dichas longitudes y así poder determinar la opción que menos cable precisa.	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Con está situación, ponemos fin a la primera parte de la ingeniería dedicada al teorema de Pitágoras y a la coordinación de los diferentes registros que podemos conjugar en su estudio y aprehensión.

Nuevamente se ha podido comprobar cierta falta de habilidad por parte de los alumnos en relación a todas aquellas destrezas vinculadas con los procesos de visualización, concentrando un gran porcentaje de los obstáculos que los alumnos manifiestan a la hora de enfrentarse a situaciones en los que el teorema de Pitágoras está presente y no se ostenta, a través del registro geométrico, la imagen prototípica de triángulo rectángulo con la que están habituados a trabajar.

Esto es debido a que el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos contenidos se apoya principalmente en la resolución de actividades basadas en el cálculo a partir de la puesta en funcionamiento de procesos mecánicos y algorítmicos. En particular, se ha corroborado que los alumnos de la enseñanza secundaria tienen dificultades para utilizar estrategias y métodos donde es necesario conjugar la visualización y el razonamiento, lo que sin duda tiene su origen en la falta de actividades de coordinación entre registros que podrían constituir un soporte consciente en los que anclar un aprendizaje más global y completo.

Estudios experimentales de ingeniería didáctica II. Semejanza

Situación 1: El Juguetero.

La situación se desarrolló el día 19 de abril de 2012 (*Fases 1*) y el día 20 de abril (*Fase 2*) durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

En los textos escolares y en el currículum de secundaria, la razón de semejanza aparece pronto al estudiar las figuras semejantes –principalmente los triángulos semejantes- y se espera que los estudiantes aprendan qué es la semejanza, reconozcan cuando dos figuras son semejantes, conozcan sus propiedades y sepan usarlas en algunas de sus aplicaciones más comunes, como por ejemplo en la determinación de distancias inaccesibles.

Se trata de una actividad muy rica desde el punto de vista didáctico, pues a la vez que se están trabajando conceptos matemáticos de manera manipulativa, se favorece la coordinación entre cuatro registros de representación: Figural, Geométrico, Algebraico y Numérico.

<u>Fase 1</u>: Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.

Descripción:

Partiendo de la base de que los alumnos son conocedores de los cuerpos geométricos básicos y del ortoedro o prisma rectangular particularmente, en esta primera fase de la situación se pretende que sean capaces de conocer y comprender el concepto de razón de semejanza a través de la construcción de cajas.

A partir de una caja modelo, los alumnos deben construir una de mayor y menor tamaño de modo que las tapas de las que dispone el profesor encajen a la perfección en su respectiva caja.

El hecho de tener que trabajar de manera manipulativa para resolver la situación hace que el alumno se implique en la actividad de forma inmediata, mostrando todos ellos un gran entusiasmo ante el problema planteado, además de resultar un medio adecuado y propicio para favorecer la conversión de varios registros de representación:

"Una juguetería dispone de cajas de un solo tamaño para embalar juguetes.

Las dimensiones de la caja son las siguientes:

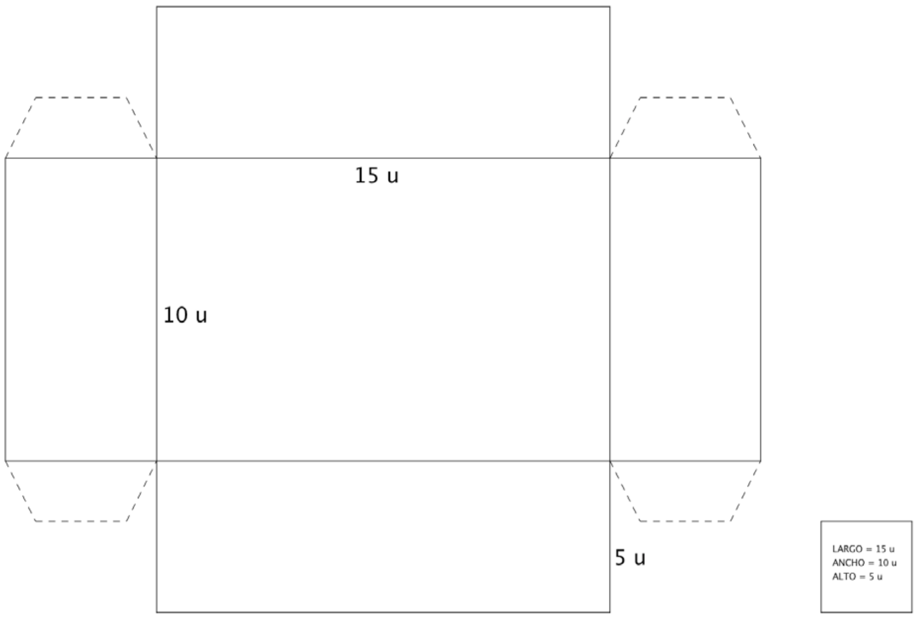


FIGURA 4.4.4.35. *Desarrollo de la caja para el alumno*

El dueño ha decidido encargar dos tipos de cajas nuevas, una más grande y otra más pequeña que la que ya dispone.

Al realizar el encargo, únicamente ha dado los siguientes datos:

- Caja pequeña: el lado que mide 5 unidades en la caja que tengo, debe medir 4 unidades en la nueva caja. El resto de medidas tienen que estar en relación con está.
- Caja grande: el lado que mide 5 unidades en la caja que tengo, debe medir 7 unidades en la nueva caja. El resto de medidas tienen que estar en relación con está.

Vosotros vais a ser los encargados de construir una caja de cada modelo.

Debéis construir con cartulina las nuevas cajas y apuntar sus dimensiones en las pegatinas que os he repartido para pegarla en la caja a modo de etiqueta. La mitad de la clase seréis el grupo A y vais a construir la caja pequeña. La otra mitad de la clase, seréis el grupo B y tenéis que construir la caja grande.

Cuándo creáis que las tenéis correctamente construidas y la etiqueta con las dimensiones puesta, podéis ir a probar si el rectángulo de las tapas que tenemos encima de la mesa y el rectángulo de la parte inferior de la caja son iguales. Solamente podréis probar una vez, de manera que el grupo que consiga construir la caja correctamente habrá ganado."

Por motivos de tiempo, la actividad se planteó de tal modo que la mitad de la clase construyó la caja pequeña y la otra mitad la caja grande.

Los datos numéricos que se les proporciona son los referentes a la altura de las cajas por ser la medida que guarda menos relación con las tapas y así generar la necesidad de tener que trabajar con varios registros de representación a la vez y no únicamente con el numérico.

Las unidades de las cajas vienen dadas en cuadraditos con el fin de evitar que la actividad se vea contaminada por posibles bloqueos derivados de la falta de destreza en lo que a medida y conversión de unidades del S.M.D se refiere.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna:

- **Profesor:** *En una juguetería, utilizan cajas de este tipo con su tapa para embalar juguetes. Esta caja la han construido siguiendo este esquema* (está en la pizarra)*. Las cajas están construidas con cartulinas cuadriculadas, de manera que para saber que dimensiones tiene la caja, es decir, para saber cual es el largo, el ancho y el alto, utilizamos como unidad de medida el cuadradito. ¿Alguien sale aquí y me dice cuanto mide de largo esta caja? Fran sal y cuéntalo en alto.*
- **Fran:** 15 cuadraditos de largo, 10 de ancho y 5 de alto.
- **Profesor:** *La juguetería piensa que le van a hacer falta otros dos tipos de cajas: una más pequeña y otra más grande que esta. Han hecho el encargo de las cajas a una empresa y una vez que han recibido el pedido, únicamente les han enviado las tapas. Las cajas no las han enviado. Como les hacen falta, os piden a vosotros que las construyáis.*

Vosotros (el lado derecho) *tenéis que construir la caja pequeña, y vosotros* (el lado izquierdo) *tenéis que construir la cajas grandes.*

Estas son las indicaciones:

- *Caja pequeña: el lado que mide 5 unidades en la caja que tengo, debe medir 4 unidades en la nueva caja. El resto de medidas tienen que estar en proporción con esta.*
- *Caja grande: el lado que mide 5 unidades en la caja que tengo, debe medir 7 unidades en la nueva caja. El resto de medidas tienen que estar en proporción con esta.*

Debéis construir con cartulina las nuevas cajas y apuntar sus dimensiones en las pegatinas que os he repartido para pegarla en la caja a modo de etiqueta

Cuándo creáis que las tenéis correctamente construidas y la etiqueta con las dimensiones puesta, podéis ir a probar si el rectángulo de las tapas que tenemos encima de la mesa y el rectángulo de la parte inferior de la caja son iguales. Solamente podréis probar una vez.

En un primer lugar, parece que algunos de los grupos parecen confundir la noción de proporcionalidad con la de ser equivalentes:

- **Elena:** *Para construir la caja pequeña, el alto que mide 5 cuadraditos en esta tiene que medir 4 y el ancho y el largo tienen que ser equivalentes.*
- **Profesor:** *¿Qué quiere decir equivalente?*
- **Elena:** *Equivalentes al alto.*
- **Profesor:** *Equivalentes no. Tienen que estar en…?*
- **Elena:** *en proporción a la altura.*

Casi todos los grupos, consiguen construir su caja con éxito siguiendo múltiples estrategias como se pueden comprobar a través de las siguientes conversaciones con los grupos:

Grupo 5:

- **Profesor:** *¿Podéis explicarme cómo habéis calculado las dimensiones de vuestra caja?*
- **Christoffer:** *Sí!. 4 es 5 lo que x es a 15. Da 12. Las dimensiones son 8 de ancho, 4 de alto y 12 de largo. Es una regla de tres.*

Grupo 6:

- **Colaborador 1:** *¿Por qué sabéis que son esas dimensiones?*
- **Noelia:** *A ver, porque si mide 7, el doble es el ancho* (porque en la caja estándar el alto era 5 y el ancho era 10, que es el doble), *y como es por dos, pues el ancho es 14. Y el triple 5 es 15* (en la caja estándar el alto es 5 y el largo 15), *entonces multiplicamos por tres el 7 y nos da…*
- **Ainhoa:** *21.*
- **Noelia:** *Entonces las dimensiones son 7, 14 y 21*
- **Helena:** *A ver, primero lo hemos hecho según las medidas que están ahí* (las de la caja estándar). *Como el ancho son 10, es el doble que el alto.*
- **Noelia:** *Entonces multiplicamos por dos* (refiriéndose al alto de la caja grande que tienen que construir para encontrar el ancho).
- **Helena:** *Y el largo es el triple que el alto.*
- **Noelia:** *Entonces multiplicamos por tres.*

Grupo 7:

- **Colaborador 3:** *¿Me podéis decir que es lo que estáis haciendo?*
- **Sergio:** *Como 7 menos 5 son dos. Por cada cinco cuadritos hay que sumarle dos para hacerla más grande. Entonces 15 entre 5 son 3. Tres por dos son 6. Por lo tanto 15 más 6 son 21 de largo. Por otro lado 10 entre 5 son dos. Dos por dos son cuatro. 10 más cuatro son 14*.

Grupo 9:

- **Colaborador 3:** *¿Me podéis explicar que es lo que estáis buscando?*
- **Marta:** *No se si estará bien. Nosotras la relación que hemos visto es que si en vez de 5 es 4, en vez de 15 será 14 y en vez de 10 será 9.*
- **Elena:** *una menos*
- **Colaborador 3:** *Entonces vosotras creéis que las proporciones se calculan restando, ¿no?*
- **Elena:** *Claro si al 5 le hemos quitado una, a las demás le tenemos que quitar otra.*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

__TABLA 4.4.4.17.__ Estrategias utilizas en la Fase 1 de la Situación 1 de Semejanza

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Relación numérica: 15U largo + 5 U alto = 20 que es igual que multiplicar las 5U alto x 4. La altura de la caja que tienen que construir es 4U que si se multiplica por 4 como en la caja anterior da 16. Luego 16 - 4U alto = 12 U largo. Hacen mismo proceso con el ancho.	
Grupo 2	No han sido capaces de construir ninguna caja.	
Grupo 3	Utilizan la regla de tres para encontrar las dimensiones de la nueva caja sin ser conscientes del concepto de proporcionalidad y que existe detrás de él.	
Grupo 4	Utilizan la regla de tres para encontrar las dimensiones de la nueva caja. sin ser conscientes del concepto de proporcionalidad y que existe detrás de él.	

Grupo 5	Utilizan la regla de tres para encontrar las dimensiones de la nueva caja sin ser conscientes del concepto de proporcionalidad y que existe detrás de él.
Grupo 6	Encuentran una relación entre el alto y el ancho en la caja estándar y el alto y el largo en la caja estándar (del doble y el triple respectivamente) y lo aplican a la nueva caja.
Grupo 7	Utilizan una estrategia mixta basada en la búsqueda de relaciones entre las dimensiones de la caja estándar y la diferencia de cuadrados entre dicha caja y la que tienen que construir.
Grupo 8	Encuentran una relación entre el alto y el ancho en la caja estándar y el alto y el largo en la caja estándar (del doble y el triple respectivamente) y lo aplican a la nueva caja.
Grupo 9	Utilizar un procedimiento aditivo para hallar segmentos proporcionales.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.18. *Estrategias bases utilizadas en Fase 1 de la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Relación numérica: 15U largo + 5 U alto = 20 que es igual que multiplicar las 5U alto x 4. La altura de la caja que tienen que construir es 4U que si se multiplica por 4 como en la caja anterior da 16. Luego 16 - 4U alto = 12 U largo. Hacen mismo proceso con el ancho.	1	11,11 %
Utilizan la regla de tres para encontrar las dimensiones de la nueva caja sin ser conscientes del concepto de proporcionalidad y que existe detrás de él.	3	33,33 %
Encuentran una relación entre el alto y el ancho en la caja estándar y el alto y el largo en la caja estándar (del doble y el triple respectivamente) y lo aplican a la nueva caja.	2	22,22 %
Encuentran una relación entre el alto y el ancho en la caja estándar y el alto y el largo en la caja estándar (del doble y el triple respectivamente) y lo aplican a la nueva caja.	1	11,11 %
Utilizar un procedimiento aditivo para hallar segmentos proporcionales.	1	11,11 %
No aplican ninguna estrategia	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Como se puede observar, aunque todos los grupos menos uno han sido capaces de construir su caja, ninguno de ellos, durante el proceso, ha llegado a calcular la razón de proporcionalidad entre unas cajas y otras:

TABLA 4.4.4.19. *Dimensiones y relación entre las cajas*

Dimensiones	**Caja pequeña**	**Caja mediana**	**Caja grande**
Alto	4 u	5 u	7 u
Largo	12 u	15 u	21 u
Ancho	8 u	10 u	14 u

Fuente: elaboración propia

Los alumnos que han empleado la regla de tres son los que más se han aproximado a este concepto, pero se produce el fenómeno didáctico del desplazamiento metacognitivo, de modo que dicha técnica ha desplazado al objeto de conocimiento que hay detrás, y los alumnos no son conscientes de haber trabajado con razones de semejanza ni proporcionalidad.

Por otro lado, en algunos alumnos aun se manifiesta la utilización de procedimientos aditivos para hallar segmentos proporcionales, lo que es un claro ejemplo de la falta de comprensión del concepto de proporcionalidad en su totalidad.

Luego, en ningún grupo ha tenido lugar la siguiente progresión lógica en lo que al estudio y construcción de segmentos proporcionales hubiese sido más productivo seguir:

1. Reconocer series de segmentos proporcionales.
2. Calcular la razón de dos segmentos.
3. Construir segmentos proporcionales dada la razón

Llama la atención como la utilización del registro numérico y algebraico son los que más se relacionan entre sí, pese que a través del registro geométrico e incluso tabular podrían haber descubierto y visualizado de manera directa la proporcionalidad que existe entre los segmentos que forman el desarrollo plano de las cajas. No obstante, esta primera fase se ha constituido como una buena actividad a través de la cual poder trabajar con los alumno la conversión entre los registros Figural, Numérico y Geométrico principalmente.

<u>Fase 2:</u> El Juguetero. Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.

Descripción:

La razón de ser de la introducción del concepto de semejanza entre áreas va a ser principalmente su utilidad para la construcción e interpretación de mapas y planos, y la resolución de problemas que requieran de mediciones indirectas, así como su aplicación en el tratamiento de imágenes, principalmente en la ampliación y reducción de fotografías y documentos en fotocopiadoras.

La razón de semejanza entre áreas es un concepto complicado de asimilar por los estudiantes, pues en dicha relación intervienen la complejidad relacionada con la bidimensionalidad, lo que hace que la razón de semejanza entre longitudes se convierta en un obstáculo epistemológico para este nuevo objeto de conocimiento, por la generalización de la razón de semejanza y proporcionalidad entre segmentos a superficies.

Se ha pretendido elaborar una secuencia didáctica a partir de una cuestión generatriz que dé origen a la aparición de un conflicto cognitivo que rompa con concepciones matemáticas ya adquiridas, la proporcionalidad de segmentos homólogos entre figuras semejantes, y a su vez exija la evolución de dichos conocimientos para su aplicación en distintas situaciones.

Con esta situación se pretende que el alumno llegue a identificar figuras o polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza, describir invariantes entre dos figuras semejantes, establecer con sentido la relación existente entre las áreas de figuras semejantes y construir (con regla y compás un polígono (o figura) semejante a otro, dada o calculada la razón, apoyándose para ello, por un lado, en la conversión entre el registro de la lengua natural y el registro geométrico y por otro, el tratamiento dentro del registro geométrico mediante la descomposición meriológica:

“Un juguetero ha creado un tablero para un nuevo juego de bolsillo, que consta se seis casillas:

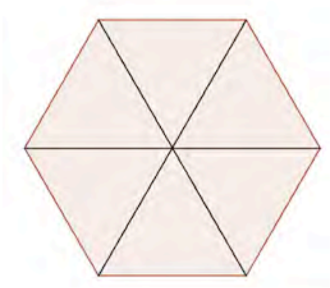


FIGURA 4.4.4.36. *Tablero hexagonal mostrado al alumno*

Como el número de casillas del tablero le parece escaso y el tablero es un poco pequeño, ha pensado en agrandarlo para obtener dos nuevos modelos de tablero, con un mayor numero de casillas, que sean semejantes al tablero de seis casillas. Los modelos son los siguientes:

- Modelo de tablero para jugadores de 6 a 12 años: el tablero tendrá el doble de perímetro que el tablero inicial.
- Modelo de tablero para jugadores de 13 a 99 años : El tablero tendrá el triple de perímetro que el tablero inicial.

Aunque el perímetro de los tableros aumenta, el tamaño de las casillas que lo forman debe seguir siendo el mismo.

¿Cuántas casillas tendrán los nuevos tableros?"

Como material para poder utilizar durante el desarrollo de la actividad, el profesor proporciona hojas cuadriculadas, una regla y un compás.

La elección del tablero con forma hexagonal no ha sido gratuita, pues por tratarse de una forma reconocible la cual se puede dividir fácilmente en triángulos equiláteros, pero que a su vez resulta menos simple que el trabajar con rectángulos o cuadrados, cuya descomposición en casillas podría resultar más evidente, se ha considerado idóneo para la actividad.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Pues vamos a empezar con una nueva actividad. Seguimos en la misma juguetería del otro día y han diseñado un tablero para un juego, que tiene esa forma. ¿Alguien me puede decir que figura es?*
- **Varios:** *Un hexágono.*
- **Profesor:** *Esta dividido el hexágono, ¿verdad?*
- **Varios:** *Si*
- **Profesor:** *¿En qué?*
- **Sandra:** *En triángulos equiláteros.*
- **Profesor:** *Vale. Este tablero tiene de lado 2,5 cm, entonces al construirlo, nos queda un tablero así de pequeño. Como no están muy conformes, quieren construir dos semejantes a este pero que sean más grandes. Es decir, el tablero va a tener más cantidad de superficie y por lo tanto va a tener un mayor numero de casillas, porque con seis casillas el juego finalizaba muy pronto. Aunque el tablero aumenta de tamaño, el tamaño de las casillas sigue siendo el mismo, es decir, el tablero aumenta en superficie, pero las casillas siguen siendo de este tamaño.*

  Los dos tableros que quieren construir son estos:

  El primero debe tener el doble de perímetro que el tablero inicial.

  El segundo tendrá el triple de perímetro que el tablero inicial.

  El juguetero desea saber el número de casillas que va a tener el tablero que es el doble de perímetro que el inicial y el numero de casillas del tablero de triple perímetro con respecto a la inicial.

  Vosotros (el lado izquierdo), tenéis que adivinar, porque os lo pide el juguetero, el número de casillas que tendrá el tablero con el doble de perímetro. Y vosotros (lado derecho) tenéis que adivinar, porque os lo pide el juguetero, el número de casillas que tendrá el tablero con el triple de perímetro.

Como primera observación, todos los grupos, salvo el grupo 2 y el grupo 3, consideran necesario construir el tablero para saber el número de casillas triangulares que tendrá sobre la hoja cuadriculada, por lo que ninguno parte directamente de la búsqueda y utilización de la razón de semejanza, y por tanto de la utilización del registro numérico y algebraico, para realizar la tarea asignada.

Grupo 8

- **Profesor:** *¿Me explicáis un poco qué habéis hecho?*
- **José Antonio:** *Hemos calculado la longitud del lado del tablero, que es la longitud del lado del triángulo equilátero. Hemos cogido*

el compás y hemos calculado los puntos a partir de los cuales, uniéndolos, tenemos un triángulo equilátero. Y luego hemos ido uniendo, según la misma forma, los otros triángulos.

- **Profesor:** *¿Y así sabéis ya el número de casillas?*

- **José Antonio:** *Todavía no hemos terminado.*

Pronto, los grupos descubren que una vez construidos los tableros tiene que dividirlos en los triángulos que forman el hexágono y cada triángulo descomponerlo meriológicamente para saber el número de casillas.

Grupo 8

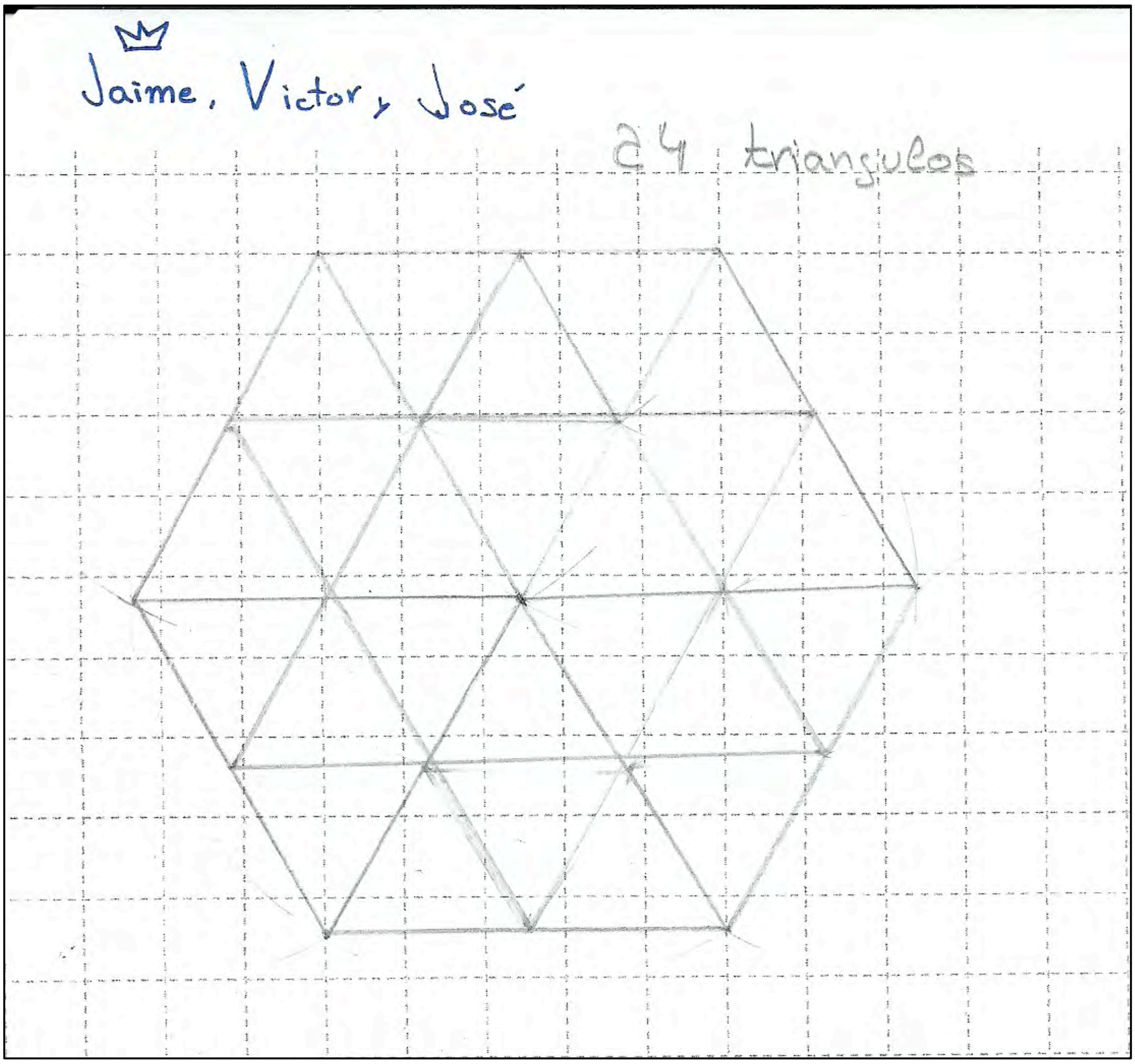


FIGURA 4.4.4.37. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.6.2*

Grupo 2

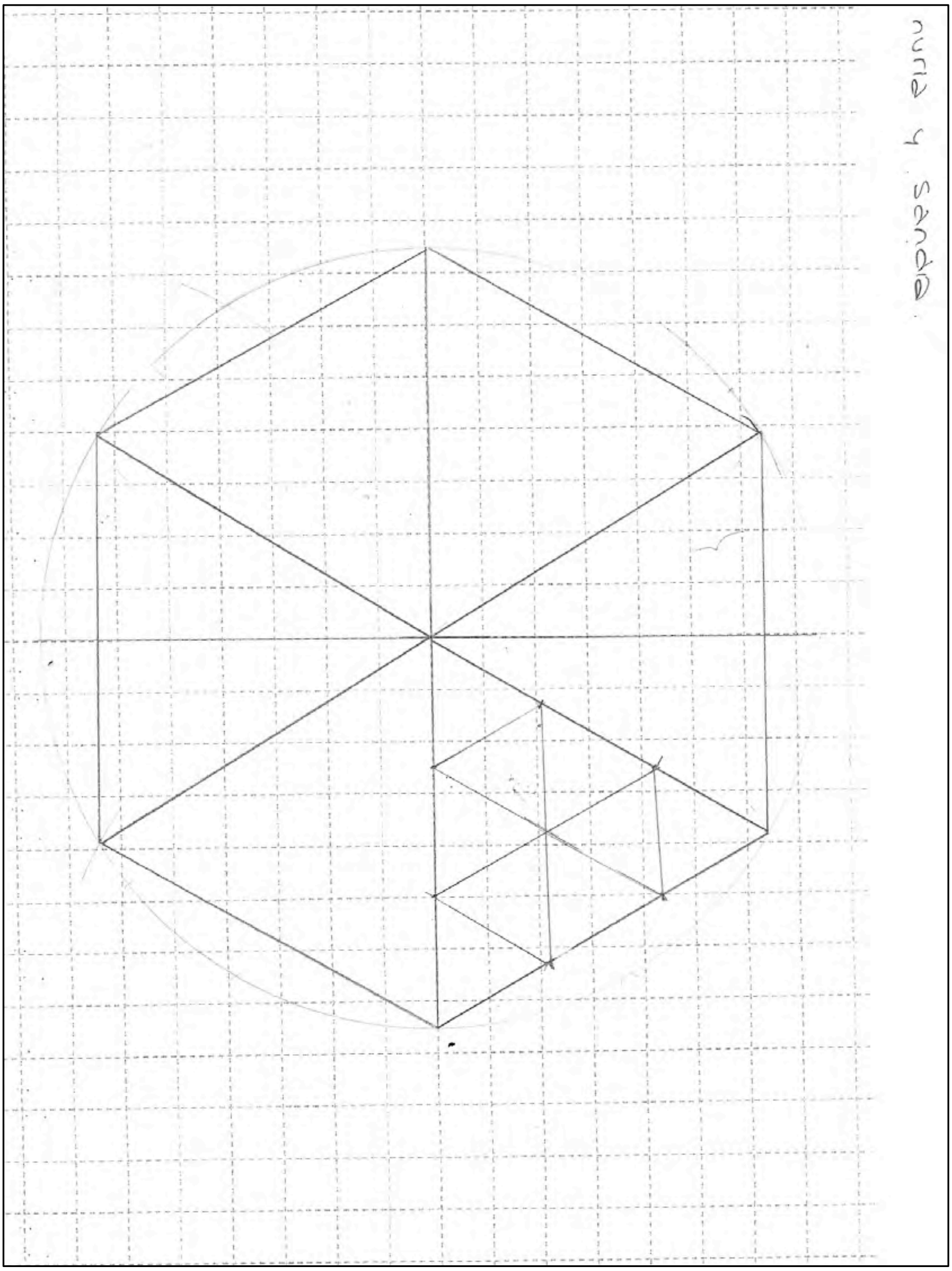


FIGURA 4.4.4.38. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.6.2*

Grupo 7

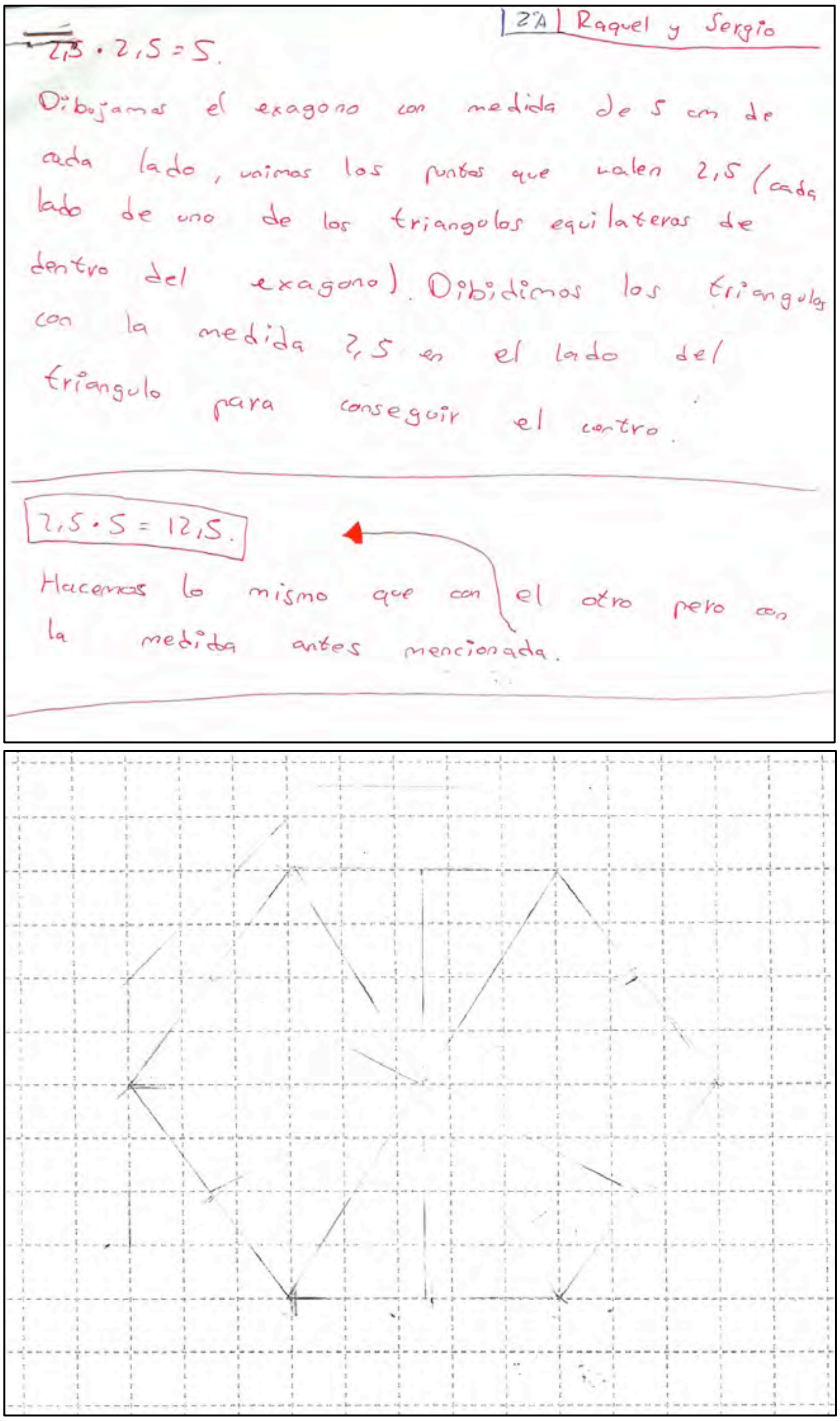


FIGURA 4.4.4.39. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.6.2*

Por su lado, el grupo 3 es el único que ha efectuado cálculos numéricos para dar el número de casillas del tablero, bajo unas premisas y concepciones equivocadas.

Grupo 3

- **Colaborador 1**: *Contadme que habéis hecho*

- **Fran**: *Hemos multiplicado 2,5, que es el lado por 6, que es el número de lados. Para saber el perímetro. Luego hemos multiplicado 15 por tres, porque es el triple, para saber el perímetro del nuevo tablero. Y ahora, 45 que mide el perímetro entre 2,5 que mide el lado. Nos da 18 triangulitos.*

- **Colaborador 1**: *¿Y por qué dices que al dividir 45 entre 2,5 lo que te da son las casillas?¿Porque dividís 45 entre 2,5?*

- **Fran**: *Porque es el perímetro del triple…*

- **Colaborador 1**: *2,5 es el lado ¿de qué?*

- **Fran**: *De esto (marcando el lado del tablero inicial)*

- **Colaborador 1**: *¿Y qué tiene que ver con el otro?*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.20. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de la Situación 1 de Semejanza*

Grupo	**Estrategia base**	**Cambio de estrategia**
Grupo 1	Intentan construir un hexágono con regla y compás obteniendo como resultado final un octógono.	Construyen el hexágono con compás, hallando previamente el radio de la circunferencia circunscrita. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.
Grupo 2	Construyen el hexágono con compás, a partir de la construcción de los seis triángulos equiláteros que lo forman. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.	
Grupo 3	Multiplicar el número de casillas iniciales por tres (18), por considerar que el número de casillas de los tableros guardan la misma relación que la razón entre los lados, derivada de la concepción de que si se triplica el perímetro, se triplica el área.	Construyen el hexágono con compás, hallando previamente el radio de la circunferencia circunscrita. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.
Grupo 4	Solo pintan uno de los triángulos interiores del tablero hexagonal, construyen sus casillitas, y lo multiplican por 6.	

Grupo 5	Construyen el hexágono con compás, hallando previamente el radio de la circunferencia circunscrita. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.	
Grupo 6	Construyen el hexágono a partir de la construcción de los seis triángulos equiláteros que lo forman. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.	
Grupo 7	Construyen el hexágono a partir de la construcción de los triángulos equiláteros que lo forman pero irregularmente. Realizan una descomposición mereológica no homogénea.	
Grupo 8	Construyen el hexágono con compás, a partir de la construcción de los seis triángulos equiláteros que lo forman. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.	
Grupo 9	Construyen un hexágono irregular sin utilizar regla y compás.	Construyen el hexágono con compás, a partir de la construcción de los seis triángulos equiláteros que lo forman. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.21. *Estrategias bases utilizadas en Fase 2 de la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Intentan construir un hexágono con regla y compás obteniendo como resultado final un octógono.	1	11,11 %
Construyen el hexágono con compás, a partir de la construcción de los seis triángulos equiláteros que lo forman. Luego realizan una descomposición mereológica homogénea en triángulos equiláteros, para el posterior conteo de las casillas.	4	44,44 %
Multiplicar el número de casillas iniciales por tres (18), por considerar que el número de casillas de los tableros guardan la misma relación que la razón entre los lados, derivada de la concepción de que si se triplica el perímetro, se triplica el área.	1	11,11 %
Construyen el hexágono a partir de la construcción de los triángulos equiláteros que lo forman pero irregularmente. Realizan una descomposición mereológica no homogénea.	1	11,11 %
Construyen un hexágono irregular sin utilizar regla y compás.	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Las estrategias utilizadas, debido a las características y variables didácticas que forman parte de esta situación, se han centrado en la aplicación de la proporcionalidad de segmentos sobre el perímetro del tablero para obtener las dimensiones de los nuevos y en la posterior división de los mismos, por lo que para que los alumnos sean capaces de deducir que **la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de las figuras**, el profesor propone una nueva cuestión que exige la utilización de conceptos y herramientas que inicialmente el alumno no posee:

- **Profesor**: *Pues ahora resulta que el juguetero ha decidido que quiere hacer un tablero más grande todavía, semejante al inicial, pero que tenga de perímetro el quíntuple. Todos tenéis que averiguar el numero de casillas que va a tener ese tablero, recordando un poco lo que os ha dado aquí.*

El grado de complejidad de esta nueva tarea radica en la construcción del tablero, pues ya no les cabe en la hoja cuadriculada, siendo la dimensión del nuevo tablero la variable didáctica fundamental que va a conducir a los alumnos a la construcción del conocimiento buscado.

Grupo 5

- **Colaborador 1**: *Explicádmelo.*
- **Christoffer**: *nos hemos dado cuenta que al aumentar el perímetro 3 veces, el área aumenta 9 veces, que es como si fuera 3 al cuadrado. Entonces aquí como aumenta 6 veces, no? Es 6 al cuadrado, que luego hay que multiplicarlo por 6 que son los triángulos.*
- **Colaborador 1** : *Explícamelo bien tú (a Carlos)*
- **Carlos**: *A ver. Cuando era el triple cada triángulo tenía 9 casillas que son tres por tres. Aquí, como es por 5, cada triángulo tendrá 5 por 5 igual a 25 casillas. Lo multiplicamos por 6 y nos da 150 casillas.*

Grupo 6

- **Colaborador 1**: *Pero a ti, ¿ que es lo que te están preguntado? Lo que mide el lado, el perímetro…*
- **Noelia**: *El número de casillas.*
- **Colaborador 1**: *Pues eso es lo que tenéis que averiguar.*
- **Lidia**: *Se sale* (con respecto a la circunferencia para construir el hexágono)
- **Colaborador 1**: *Lidia, ¿Qué pasa con la circunferencia?*
- **Lidia**: *Que no cabe.*

- **Noelia**: *Pues entonces no hay que hacerlo con una circunferencia.*
- **Colaborador 1**: *Pues si no cabe la circunferencia en la hoja, a lo mejor hay otra manera de resolverlo.*
- **Noelia**: *No se si es verdad lo que vamos a decir.*
- **Colaborador 1**: *A ver dime. No te preocupes.*
- **Noelia**: *Cuando hemos el doble nos ha salido que en cada triángulo del hexágono había 4 veces las casillas que había. A los del triple les ha salido 9. Entonces, al multiplicarlo por 5 y si antes nos ha salido lo de 4 y lo de 9...*
- **Colaborador 1**: *es por ahí.*

De estos resultados podemos extraer las siguientes conclusiones:

Dificultades en la conversión hacia el Registro geométrico: el mayor conflicto de la actividad la hemos encontrado a la hora de realizar la conversión entre el Registro de la Lengua Natural, dado a través del enunciado, y el Registro Numérico hacia el Registro Geométrico, pues varios grupos han manifestado dificultades en la construcción del hexágono regular a partir de los datos dados y calculados. Esto es debido a que en la práctica habitual de clase y en los libros de texto, el paso al Registro Geométrico a partir de cualquier otro registro de partida viene ya dado. En la mayoría de los libros de texto aparece la construcción de figuras semejantes mediante la técnica de la cuadrícula, pero dichas construcciones ya vienen dadas y las actividades se convierten en simples tareas de identificación de formas y conteo de cuadraditos, traduciéndose en una perdida de información y comprensión por parte del alumno de los conocimientos puestos en juego.

La concepción errónea de que al doblar o triplicar el perímetro de una figura, se dobla o triplica el área de la misma, como herencia de lo que ocurre en la razón de semejanzas entre segmentos, se ha manifestado menos de lo que cabría esperar en alumnos de estas edades, los cuales todavía están poco familiarizados con el concepto de razón de semejanza entre áreas.

La secuencia de la situación ha permitido a los alumnos conocer y establecer la relación entre las áreas de figuras semejantes partiendo de una situación inicial en la que el paso al registro geométrico se hacía necesario, permitiéndoles estudiar los casos presentados para a partir de ellos analizar el patrón de construcción de los tableros y sus casillas y extraer conclusiones realizando la conversión del registro geométrico al numérico y de este al de la lengua natural.

Fase 3: El Juguetero. Razón de semejanza de longitudes, áreas y volúmenes.

Descripción:

La fase 3 se diseñó con el propósito de llevarla a cabo en el aula en el único caso de disponer tiempo suficiente para su desarrollo, pues se centra en contenidos extracurriculares. Con ello, se pretendía que el alumno conociera y estableciera la relación existente entre el volumen de figuras semejantes, mediante formas construidas con policubos (tetracubos y pentacubos), efectuando, para ello, la conversión entre el registro figural, el registro geométrico, el registro numérico y el registro de la lengua natural.

Cada grupo recibiría una figura, formada por piezas cúbicas encajables, de modo que debían de escribir un mensaje en el que se indicara el número de piezas cúbicas que necesitaría otro grupo para construir una figura semejante, es decir, que tenga exactamente la misma forma, pero cuyas aristas sean el doble de los de la figura inicial. La figura inicial se les entregaría también al otro grupo junto con el mensaje.

El grupo que recibiera el mensaje, solo podría trabajar con la cantidad de piezas cúbicas indicadas, utilizándolas todas, de manera que si sobran o faltan piezas no podrán construir la figura pedida.

Situación 2: Trabajando con planos, mapas y escalas.

La situación se desarrolló los días 23 abril de 2012 (*Fases 1*) y el día 25 de abril (*Fase 3*) durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

La presente situación, la cuál consta de 3 fases, persigue que el alumno sea capaz de articular la coordinación entre los registros de representación Figural, Geométrico, Algebraico, Numérico Tabular y la Lengua Natural a la vez que se introduce el concepto de escala y su aplicación en la lectura y construcción de planos, croquis y mapas, estableciendo la correspondencia entre tales representaciones y la realidad.

Fase 1: Medida de planos a partir de la escala dada. Juego de comunicación.

Descripción:

El objetivo de esta situación fue la de familiarizar a los alumnos con la interpretación de un plano y obtención de las dimensiones reales de la superficie de una casa a partir de una escala y la medición de longitudes y superficies sobre un dibujo. Se trata de una primera aproximación al concepto de escala y a su relación con la razón de semejanza trabajada previamente.

Con esta actividad se pretende potenciar la conversión entre varios registros de representación en la resolución de problemas: Registro Figural - Registro Geométrico – Registro Algebraico - Registro Numérico - Registro de la Lengua Natural:

“La mitad seréis grupos A y la otra mitad, grupos B. A los grupos A les voy a dar un plano de una casa, y a los grupos B, el plano de otra casa. Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con ese mensaje, saber cuál es la casa de mayor tamaño.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, saber cuál es la casa de mayor tamaño. Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades.”

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona el plano de una casa en dos escalas distintas, 1:50 y 1:100:

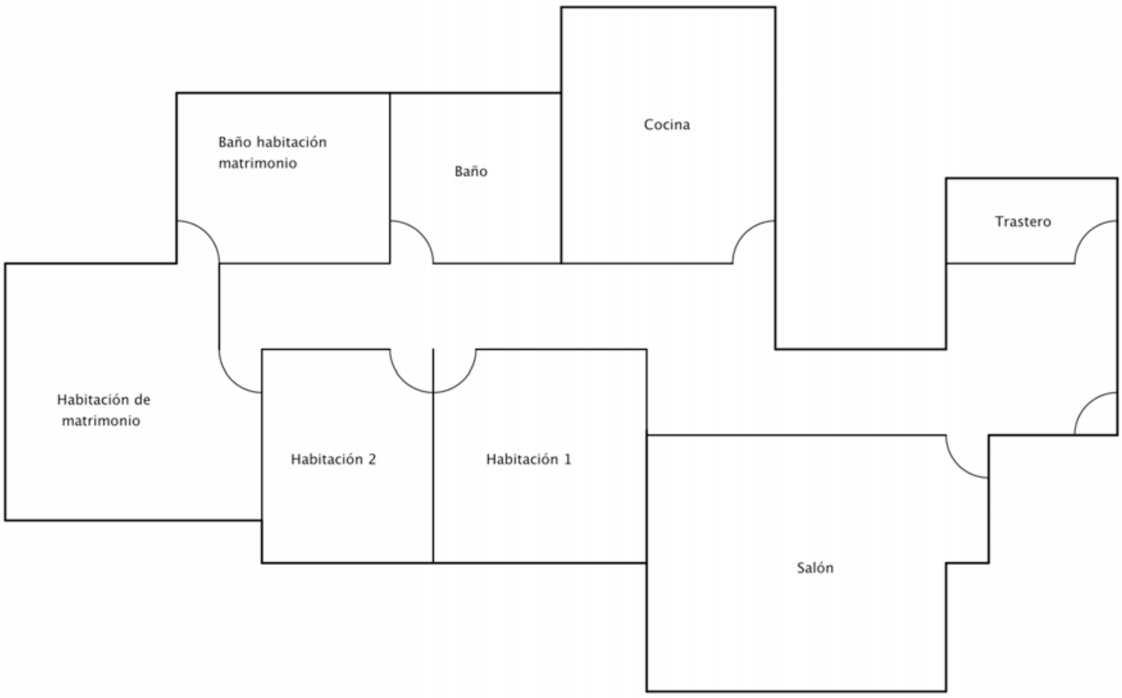


FIGURA 4.4.4.40. *Plano de una vivienda*

La no aportación de ningún dato numérico sitúa al alumno en la necesidad de tener que recurrir a la conversión del Registro Figural y Geométrico al Numérico.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna:

- **Profesor**: *Vosotros vais a ser el grupo A (Lado derecho) y vosotros (el izquierdo) el grupo B. A cada uno de vosotros os voy a repartir el plano de una casa. Los del grupo A, tenéis que escribir cada uno de vosotros un mensaje, de manera que luego se lo daremos a alguien de los B para que determinen que casa es más grande, si la que tienen ellos o la que teníais vosotros, en función del mensaje que vosotros escribáis. Y vosotros (grupo B), tenéis que hacer lo mismo. ¿Os habéis enterado?¿Alguien que me repita lo que hay que hacer?*

Plano Grupo A (Grupos del 6 al 9)

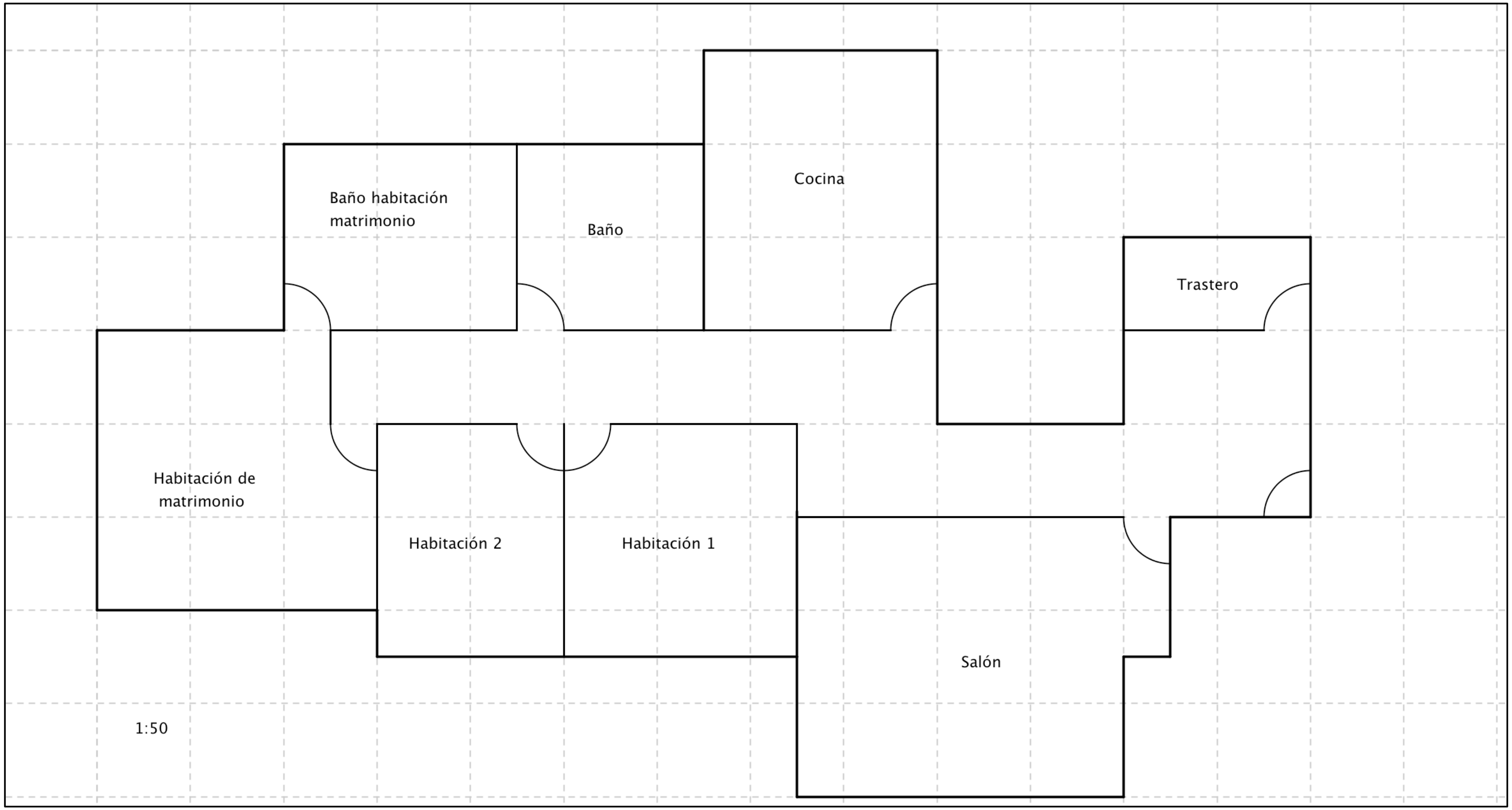


FIGURA 4.4.4.41. *Plano de la vivienda escala 1:50*

Plano Grupo B (grupos del 1 al 5)

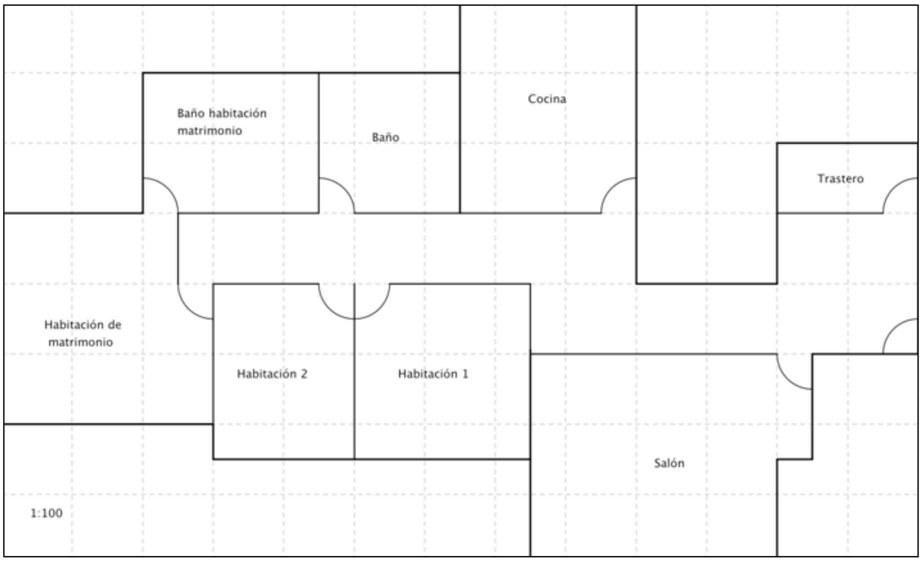
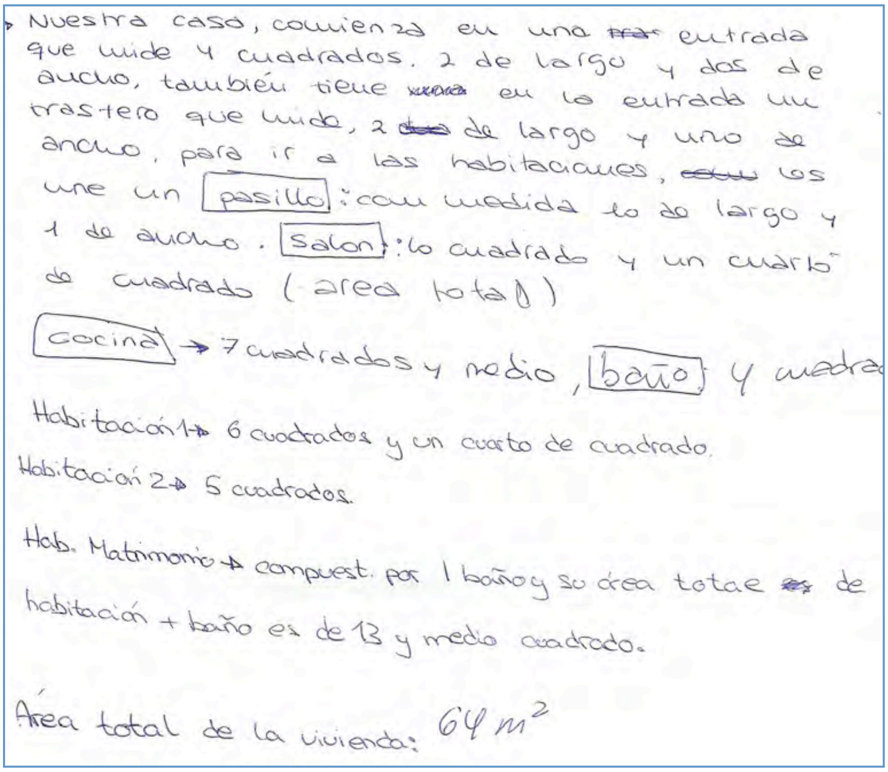


FIGURA 4.4.4.42. *Plano de la vivienda escala 1:100*

La mayoría de los grupos empiezan la actividad haciendo una descripción de la casa y las partes de las que consta, seguido del conteo de los cuadraditos que forman cada habitación.

Grupo 2


Nuestra casa, comienza en una ~~tra~~ entrada que mide 4 cuadrados. 2 de largo y dos de ancho, también tiene ~~xxxx~~ en la entrada un trastero que mide, 2 ~~dos~~ de largo y uno de ancho, para ir a las habitaciones, ~~estas~~ los une un pasillo: con medida 10 de largo y 1 de ancho. Salon: 10 cuadrado y un cuarto de cuadrado (área total)

Cocina → 7 cuadrados y medio, baño y medio

Habitación 1 → 6 cuadrados y un cuarto de cuadrado.

Habitación 2 → 5 cuadrados.

Hab. Matrimonio → compuest. por 1 baño y su área total ~~es~~ de habitación + baño es de 13 y medio cuadrado.

Área total de la vivienda: 64 m^2

FIGURA 4.4.4.43. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.7.1*

Les crea un conflicto cognitivo la existencia de mitades y cuartos de cuadrado en las habitaciones, si los huecos de las puertas hay que considerarlos o no y si se debe tomar como unidad de medida centímetros o cuadraditos.

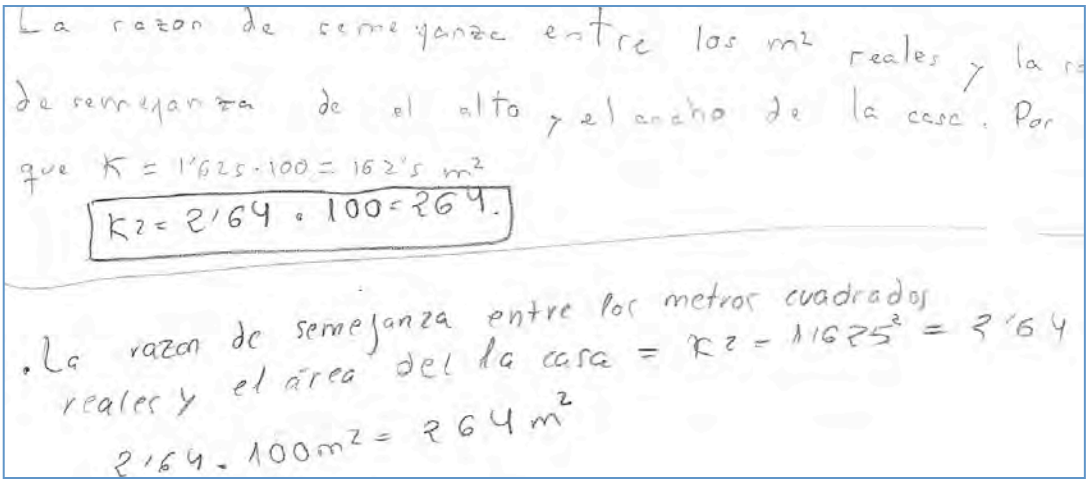
Surge de manera inmediata la problemática de interpretación de la escala pues no tienen claro si refiere a unidades de longitud o a unidades cuadráticas, razonando, erróneamente, que un cuadrado (unidad de superficie) son 50 o 100 cuadrados en la realidad en función del plano del que dispongan, siendo más llamativo en el caso de los grupos que tienen el plano escala 1:50.

Veamos una a una las estrategias utilizadas por cada grupo:

Grupo 1

El grupo 1 buscan una razón de semejanza ente el alto y el ancho de la casa.

- **Ana**: *La razón de semejanza entre esto y esto es 1,625 (*13/8 =1,625, han calculado la razón entre los lados del rectángulo que delimita la casa*). Entonces estamos comparando las 100 metros reales, los 100 metros cuadrados, con el 1,625. Y nos da 162,5.*
- **Profesor**: *¿Y con eso tendrías lo que mide vuestra casa?*
- **Ana**: *Sería eso.* (muestran la hoja)


La razon de semejanza entre los m^2 reales y la r
de semejanza de el alto y el ancho de la casa. Por
que $K = 1'625 \cdot 100 = 162'5\ m^2$
$\boxed{K^2 = 2'64 \cdot 100 = 264.}$

. La razon de semejanza entre los metros cuadrados reales y el área del la casa $= K^2 = 1'625^2 = 2'64$
$2'64 \cdot 100m^2 = 264\ m^2$

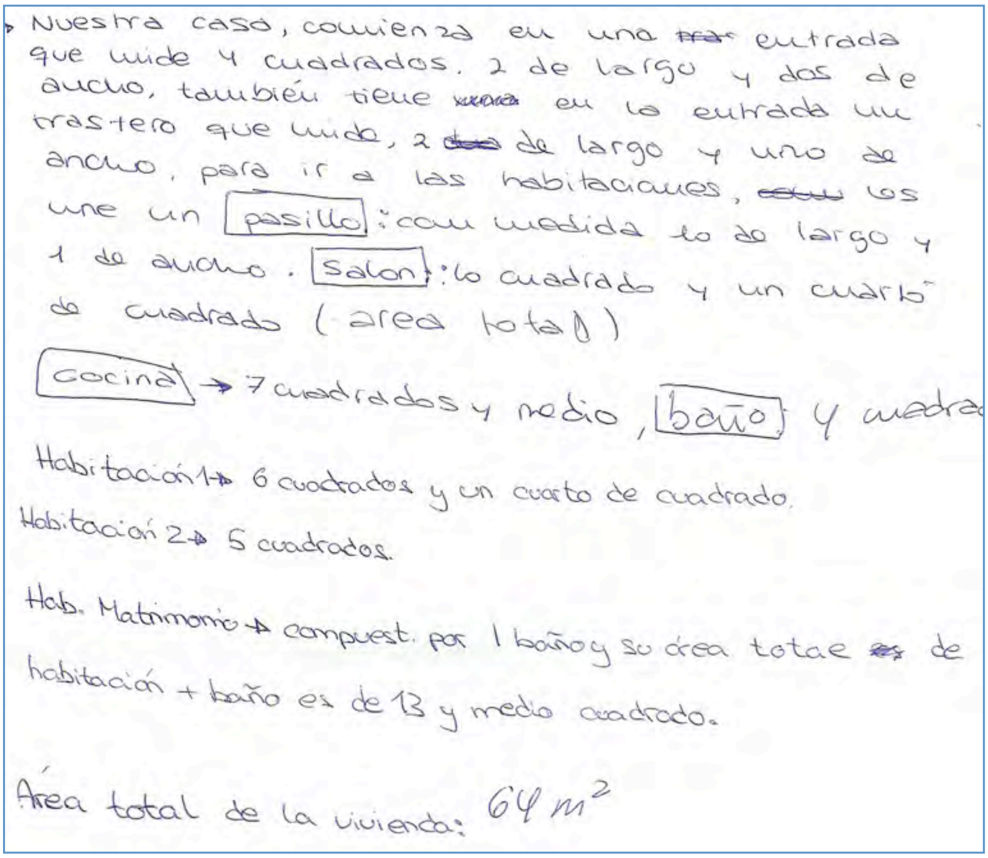
FIGURA 4.4.4.44. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.7.1*

En este grupo podemos observar dos obstáculos que les conduce a resolver la situación planteada de manera incorrecta:

- El concepto de razón de semejanza no ha quedado fijado después de haber desarrollado las actividades previas a la actual, pues calculan la razón entre dos dimensiones que forman parte de la misma figura.
- No tienen claro el concepto de escala y lo que ello significa, pues consideran que la relación que les viene dada es que un cuadrado en el plano son 100 metros en la realidad, aplicando la relación sobre medidas de superficie en lugar de en medidas de longitud.

Grupo 2

El grupo 2 realiza el conteo de los cuadraditos que forman parte de cada estancia de la casa e interpretan la escala como que un 1 cm en el plano son 100 cm en la realidad, es decir, 1 metro, por lo que cada cuadradito es 1 m^2 en la realidad.


Nuestra casa, comienza en una entrada que mide 4 cuadrados. 2 de largo y dos de ancho, también tiene en la entrada un trastero que mide, 2 de largo y uno de ancho, para ir a las habitaciones, los une un $\boxed{\text{pasillo}}$: con medida 10 de largo y 1 de ancho. $\boxed{\text{Salon}}$: 10 cuadrado y un cuarto de cuadrado (area total)

$\boxed{\text{Cocina}}$ → 7 cuadrados y medio, $\boxed{\text{baño}}$ y cuadra

Habitación 1 → 6 cuadrados y un cuarto de cuadrado.

Habitación 2 → 5 cuadrados.

Hab. Matrimonio → compuest. por 1 baño y su área total de habitación + baño es de 13 y medio cuadrado.

Área total de la vivienda: 64 m^2

FIGURA 4.4.4.45. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.7.1*

Este grupo realiza un cálculo muy próximo al verdadero, pues la dimensiones de la casa son 63,5 m^2, por lo que cometen algún error la hora de contar los cuadraditos.

Grupo 3

Calculan el área de cada habitación haciendo una interpretación correcta de la escala. A diferencia de lo que han hecho la mayoría de los grupos que ha sido tomar el cuadrado como unidad de medida, este grupo ha tomado el lado del cuadrado como unidad, miden el largo y el ancho de cada estancia y aplican la escala directamente sobre dichas dimensiones para, posteriormente, calcular su área. Al igual que ocurría con el grupo 2, han cometido algún error a la hora de contar sobre y medir sobre el plano.

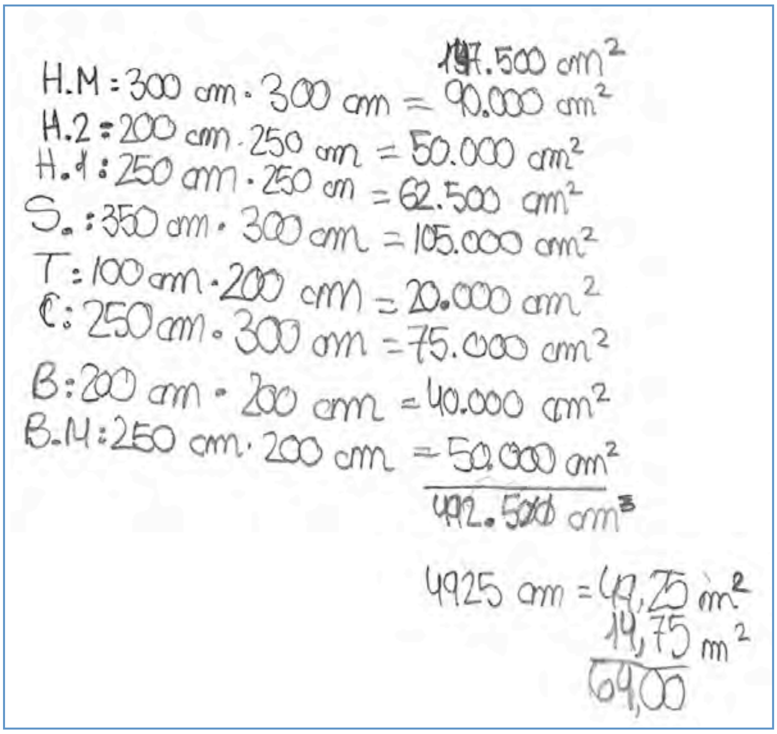


FIGURA 4.4.4.46. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.7.1*

Grupo 4

El grupo 4 realiza el conteo de los cuadraditos que forman parte de cada estancia de la casa e interpretan la escala como que un 1cm en el plano son 100 cm en la realidad, es decir, 1 metro, por lo que cada cuadradito es 1 m^2 en la realidad. También realizan el conteo de manera incorrecta debido a errores de solapamiento al delimitar las estancias.

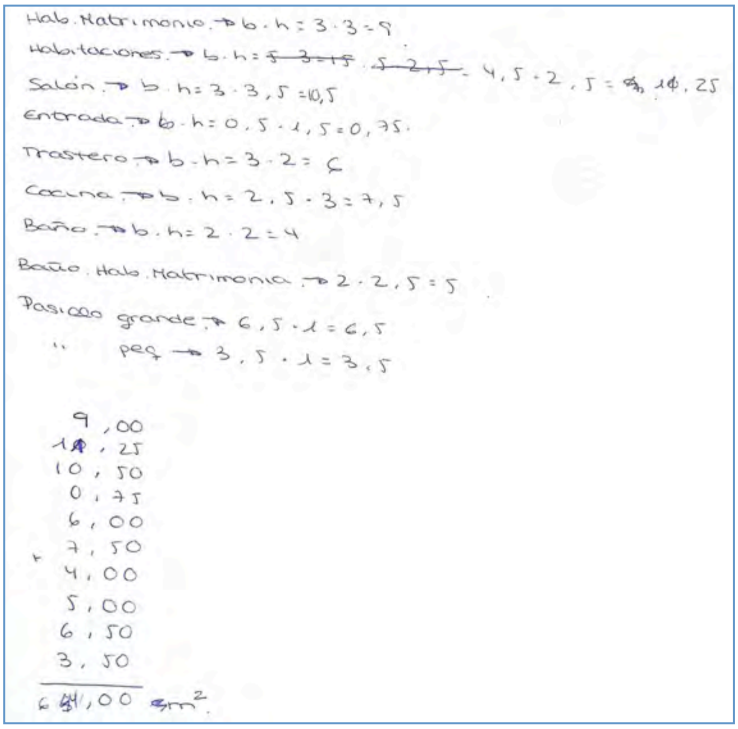


FIGURA 4.4.4.47. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.7.1*

Grupo 5

El grupo 5 sigue una estrategia basada en el cálculo de los cuadraditos que forman el rectángulo que contiene a la casa y quitan aquellos que no forman parte de la superficie de la misma. Aplican mal el cambio de escala: consideran 1 metro en el dibujo es igual a 100 metros en la realidad.

- **Christoffer***: Mira sobran, 1,2 , 3 ,….44*
- **Carlos***: Pero ¿has contado todos estos?, si has hecho la línea por aquí (*la del rectángulo que contiene a la casa*) estos no hay que contarlos.*
- **Christoffer***: Ay…es verdad.*
- **Carlos***: 1,2,3…..36*
- **Christoffer***: 40*

- **Carlos**: *Y ahora eso por 100, porque la escala es 1:100*
- **Christoffer**: *Pero esto sale demasiado grande, ¿no?*
- **Carlos**: *6400 metros cuadrados.*

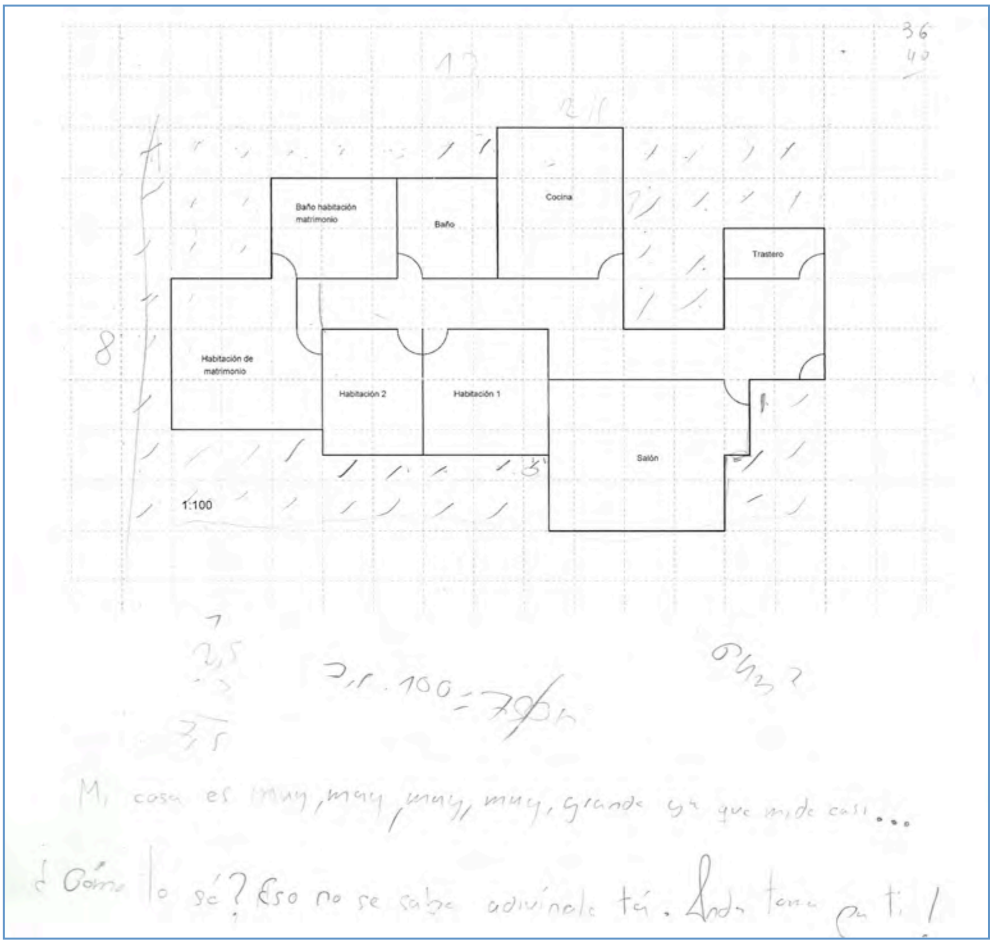


FIGURA 4.4.4.48. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.7.1*

Grupo 6

El grupo 6, que ya tiene el plano 1:50, realiza un conteo correcto de los cuadraditos que la forman y calculan la superficie de cada cuadradito que en este caso tienen de lado 2 cm, por lo que cada cuadradito también tiene una superficie de 1 m^2 en la realidad.

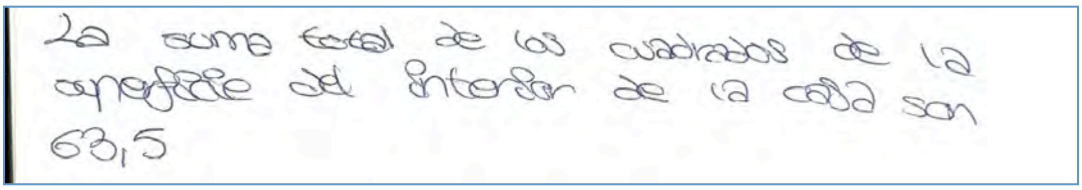

La suma total de los cuadrados de la superficie del interior de la casa son 63,5

FIGURA 4.4.4.49. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.7.1*

Grupo 7

El grupo 7 toma como unidad de medida el lado del cuadradito que tiene longitud 2 cm y a partir de el calcula, de manera errónea pues no visualizan ni delimitan bien cada estancia, el área de cada habitación y de las zonas exteriores que forman parte del rectángulo que contiene a la casa pero no forma parte de su superficie, para luego restarlas y aplicar la escala directamente sobre la unidad de superficie en lugar de sobre la longitud.

- **Profesor**: *Su casa mide en la realidad 4925 unidades al cuadrado. ¿Me podéis explicar de donde habéis sacado esto?*
- **Raquel**: *Pues hemos medido el ancho y largo de cada habitación. Luego hemos medido las zonas exteriores y hemos hecho lo mismo, y lo hemos restado. Y luego hemos multiplicado por 50.*
- **Sergio**: *Porque la escala es 1:50.*

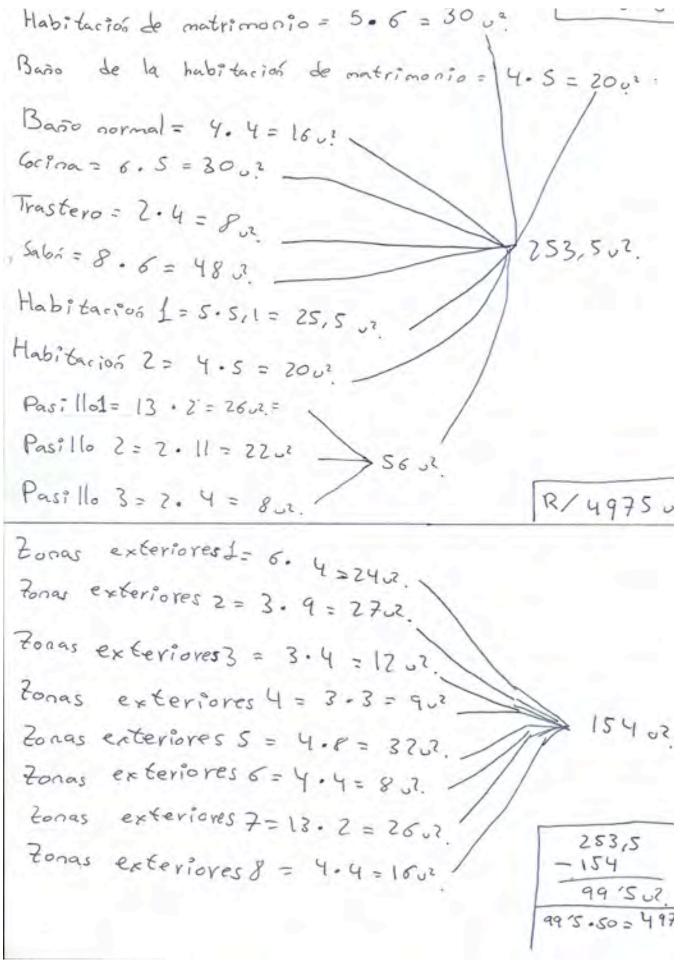


FIGURA 4.4.4.50. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.7.1*

Grupo 8 y 9

Ambos grupos suman el número de cuadraditos que forma cada estancia de la casa y multiplican el resultado por 50, pues consideran que la escala significa que un cuadrado en el plano es igual a 50 cuadrados en al realidad.

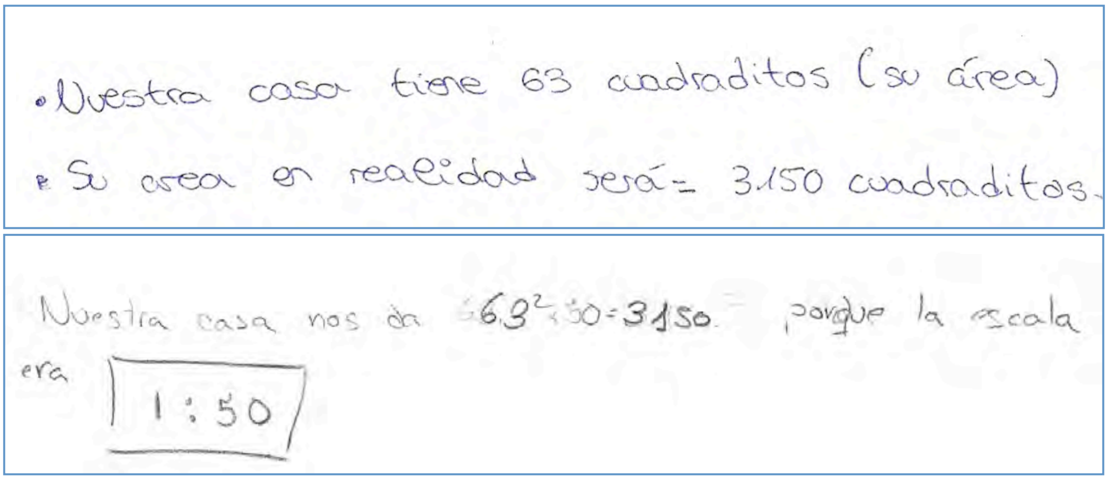


FIGURA 4.4.4.51. *Trabajo realizado por los grupos 8 y 9 en S.7.1*

Ante la situación, tras haber transcurrido los 40 minutos de clase, el profesor decide retomar la actividad en la próxima sesión para intentar que los grupos que han aplicado la escala directamente sobre las unidades de superficie sean conscientes de que dicha estrategia no es óptima.

- **Profesor**: *Bueno, pues vamos a cambiar un poco la dinámica de la actividad de manera que ya no vamos a hacer el intercambio de mensajes, si no que vamos a ver aquí entre todos los mensajes que habéis escrito y las estrategias que habéis seguido.*

  Lo primero, los planos que os di fueron estos. El grupo A tenía este plano y el grupo B este otro plano. Los dos planos tienen un trastero, una cocina, tres habitaciones y dos baños, y están distribuidos igual. Muchos de vosotros lo que habéis hecho, la primera estrategia que habéis seguido, es la de describir la casa, decir el número de habitaciones que tenía y cómo estaban situadas más o menos. ¿Creéis que esa información es suficiente para saber que casa es la más grande?

- **Varios**: *No.*

- **Profesor**: *¿Por qué? Sandra.*

- **Sandra**: *Porque pueden ser casa con las mismas habitaciones, pero las habitaciones pueden ser más grandes o más pequeñas.*

- **Profesor***: Vale. Claro, esa información, la del número de habitaciones que tiene la casa y cómo están distribuidas no nos va a decir que casa tiene mayor tamaño. Es decir que esa estrategia no vale. Los mensajes que contenían ese tipo de información estaban incompletos. Ahora, en los planos hay una cuadrícula, ¿no?*

- **Varios***: Si.*

- **Profesor***: Son igual de grandes los cuadros que forman las cuadrículas.*

- **Varios***: No.*

- **Profesor***: Muchos de vosotros lo que habéis hecho es contar los cuadraditos que hay en el plano y decir que la superficie de la casa era el número de cuadraditos que teníamos. Aquí tenemos un mensaje, aquí tenemos otro*(mostrando dos de los mensajes)*…pero, ¿los cuadraditos son del mismo tamaño?*

- **Varios***: No.*

- **Profesor***: Es decir, ¿con la información del número de cuadraditos que hay en una casa podemos saber que casa es más grande?*

- **Varios***: No.*

- **Profesor***: ¡De acuerdo! Con lo cual, esta estrategia tampoco vale. Es incompleta. No nos da toda la información. ¿Qué había en los planos, importante, que nos podía servir para saber que casa es más grande?*

- **Varios***: La escala.*

- **Profesor***: La escala, efectivamente. Este plano tiene escala 1:50 y este otro escala 1:100. ¿Qué significaba la escala?¿Alguien me puede recordar que significaba la escala?*

- **Ana***: Los metros reales.*

- **Profesor***: ¿Cómo los metros reales, Ana?*

- **Ana***: Cada metro, son 100 metros en realidad. Y en el otro cada metro son 50 metros en realidad.*

- **Profesor***: ¿Y por qué has cogido esa unidad?¿Por qué has cogido el metro?*

- **Ana***: Pues porque es la medida internacional esa.*

- **Profesor**: *Pero aquí no se especificaba ninguna unidad, ¿no?*

- **Ana**: *No.*

- **Profesor**: *La escala, como decía vuestra compañera, significa que, una unidad de medida de longitud en el plano, equivale a 100 de esas mismas unidades de medida de longitud, en la realidad. Siempre de longitud, no de unidades de superficie. En este caso, una unidad de longitud en el plano, equivalen a 50 de esas mismas unidades de longitud, siempre de longitud, en la realidad.*

  En el caso de los planos que tenéis vosotros, trabajamos con centímetro, es decir. En el plano 1:100.

- **Raquel**: *un centímetro en el plano son 100 centímetros en la realidad.*

- **Profesor**: *Vale. ¿Y en el caso de 1:50?*

- **Varios**: *Un centímetro en el plano equivalen a 50 centímetros en la realidad.*

- **Profesor**: *¿Vale? Pues bien, algunos habéis aplicado al escala, pero habéis aplicado la escala sobre lo que habéis considerado la unidad de superficie, es decir, sobre los cuadraditos. Habéis contado los cuadraditos, habéis considerado el cuadradito como unidad de superficie, y luego habéis dicho si un cuadradito son 50, si tenemos 63 cuadraditos, pues habéis multiplicado. Pero lo estáis aplicando sobre unidades de superficie y la escala hemos dicho que es, ¿en?*

- **Varios**: *Longitud.*

- **Profesor**: *Luego, esta estrategia tampoco es valida. ¿Cómo había que utilizar la escala? Voy a empezar con los que tenían el plano 1:100, luego vamos con los que tienen la 1:50. Los del plano 1:100, iros a la habitación 2. Medid la anchura de la habitación.*

- **Varios**: *2*

- **Profesor**: *¿Dos qué?*

- **Varios:** *Centímetros.*

- **Profesor**: *Si aquí mide 2 cm, ¿cuánto mide en la realidad?*

- **Varios**: *200 cm.*

- **Profesor**: *200 cm, que me habéis dicho que son, ¿Cuántos metros?*

- **Varios***: 2 m.*

- **Profesor***: Ahora, medid el largo de la habitación.*

- **Varios***: 2 cm y medio.*

- **Profesor***: ¿En la realidad?*

- **Varios***: 2 metros y medio.*

- **Profesor***: ¿Cuál es la superficie de esta habitación en la realidad?*

- **Varios***: 2 x 2,5*

- **Profesor***: Luego , 2 x 2,5 es igual a 5 metros cuadrados. Así es cómo había que aplicar la escala, es decir, la escala se aplica sobre las longitudes, (primero hemos medido el ancho y luego el largo) y luego ya hemos calculado la superficie una vez hecho el cambio de escala.*

  Ahora, los que tenéis el plano con escala 1:50. Nos quedamos con la misma habitación. Medimos lo mismo.

- **Víctor***: el ancho mide 4 cm.*

- **Profesor***: 4 cm, ¿cuánto son en la realidad? Hemos quedado que un centímetro en el plano, son 50 en la realidad, ¿no?. Pues 4 cm en el plano ¿Cuántos son en la realidad?*

- **Varios***: 200.*

- **Profesor***: ¿Sabéis cuantos metros son?*

- **Varios***: 2 m.*

- **Sergio***: Igual que ellos.*

- **Profesor***: ¿Cuánto mide de largo?*

- **Varios***: 5 cm.*

- **Profesor***: En la realidad , ¿cuánto?*

- **Varios***: 250 cm.*

- **Profesor***: 250 cm, que son 2,5 metros. Luego, la superficie de la habitación es …*

- **Varios***: 5 metros cuadrados.*

- **Profesor**: *Igual que ellos. Probad con el salón, a ver si os da igual.*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.22. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de la Situación 2 de Semejanza*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Calculan la razón entre dos dimensiones que forman parte de la misma figura y aplican la escala sobre medidas de superficie, es decir, consideran que la relación que les viene dada es que un cuadrado en el plano son 100 metros en la realidad.	Cálculo de las dimensiones reales de cada una de las estancias y del pasillo mediante el empleo de la escala sobre las medidas de longitud medidas sobre el plano y posterior cálculo de la superficie.
Grupo 2	Realizan el conteo de los cuadraditos que forman parte de cada estancia de la casa e interpretan la escala como que un 1 cm en el plano son 100 cm en la realidad, es decir, 1 metro, por lo que cada cuadradito es 1 m^2 en la realidad.	
Grupo 3	Consideran el lado del cuadrado como unidad, miden el largo y el ancho de cada estancia y aplican la escala directamente sobre dichas dimensiones para, posteriormente, calcular su área.	
Grupo 4	Realizan el conteo de los cuadraditos que forman parte de cada estancia de la casa e interpretan la escala como que un 1 cm en el plano son 100 cm en la realidad, es decir, 1 metro, por lo que cada cuadradito es 1 m^2 en la realidad.	

Grupo 5	Cuentan los cuadraditos que forman el rectángulo que contiene a la casa y quitan aquellos que no forman parte de la superficie de la misma. Aplican mal el cambio de escala.	Cuentan los cuadraditos que forman el rectángulo que contiene a la casa y quitan aquellos que no forman parte de la superficie de la misma. Aplicación correcta de la escala.
Grupo 6	Cuentan los cuadraditos que la forman y calculan la superficie de cada cuadradito que en este caso tienen de lado 2 cm, por lo que cada cuadradito también tiene una superficie de 1 m^2 en la realidad.	
Grupo 7	Toman como unidad de medida el lado del cuadradito que tiene longitud 2 cm y calculan el área de cada habitación y de las zonas exteriores para luego restarlas y aplicar la escala directamente sobre la unidad de superficie en lugar de sobre la longitud.	Calculan las dimensiones reales de cada una de las estancias y del pasillo mediante el empleo de la escala sobre las medidas de longitud medidas sobre el plano y posterior cálculo de la superficie.
Grupo 8	Cuentan el número de cuadraditos que forma cada estancia de la casa y multiplican el resultado por 50, considerando que un cuadrado en el plano es igual a 50 cuadrados en al realidad.	Calculan las dimensiones reales de cada una de las estancias y del pasillo mediante el empleo de la escala sobre las medidas de longitud medidas sobre el plano y posterior cálculo de la superficie.
Grupo 9	Cuentan el número de cuadraditos que forma cada estancia de la casa y multiplican el resultado por 50, considerando que un cuadrado en el plano es igual a 50 cuadrados en la realidad.	Cuentan los cuadraditos que la forman y calculan la superficie de cada cuadradito que en este caso tienen de lado 2 cm, por lo que cada cuadradito también tiene una superficie de 1 m^2 en la realidad.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.23. *Estrategias bases utilizadas en Fase 1 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Calculan la razón entre dos dimensiones que forman parte de la misma figura y aplican la escala sobre medidas de superficie, es decir, consideran que la relación que les viene dada es que un cuadrado en el plano son 100 metros en la	1	11,11%
Realizan el conteo de los cuadraditos que forman parte de cada estancia de la casa e interpretan la escala como que un 1 cm en el plano son 100 cm en la realidad, es decir, 1 metro, por lo que cada cuadradito es 1 m^2 en la realidad.	2	22,22 %
Consideran el lado del cuadrado como unidad, miden el largo y el ancho de cada estancia y aplican la escala directamente sobre dichas dimensiones para, posteriormente, calcular su	1	11,11%
Cuentan los cuadraditos que forman el rectángulo que contiene a la casa y quitan aquellos que no forman parte de la superficie de la misma.	1	11,11%
Cuentan los cuadraditos que la forman y calculan la superficie de cada cuadradito que en este caso tienen de lado 2 cm, por lo que cada cuadradito también tiene una superficie de 1 m^2 en la	1	11,11%
Toman como unidad de medida el lado del cuadradito que tiene longitud 2 cm y calculan el área de cada habitación y de las zonas exteriores para luego restarlas y aplicar la escala directamente sobre la unidad de superficie.	1	11,11%
Cuentan los cuadraditos que forma cada estancia. Multiplican el resultado por 50, considerando que un cuadrado en el plano son 50 en la realidad.	2	22,22%

Fuente: elaboración propia

En la realización de la actividad se han evidenciado las dificultades conceptuales con que tropieza la mayoría de los estudiantes a la hora de trabajar e interpretar las escalas en planos y aplicarla en el cálculo de superficies. Ello se debe a la falta de conexión existente entre la noción se razón de semejanza cuando de lo que se trata es de representar objetos de la realidad aplicando una reducción estrictamente necesaria para poder trabajar sobre ellos en un plano.

Ningún grupo ha partido directamente de la relación de razón de semejanza entre superficies trabajada en la sesión anterior, pues o bien, han calculado primero la superficie de cada cuadradito tras aplicar la escala sobre la longitud del lado del mismo, o han aplicado directamente la escala como si de una razón de semejanza entre superficies se tratase, sin tener en cuenta que si las longitudes se transforman con una escala k, entonces el área se transforma con una escala k^2.

La utilización a lo largo de toda la actividad de los diversos registros de representación puestos en juego (Registro Figural, Registro Geométrico, Registro Numérico y Registro de la Lengua Natural), ha contribuido de manera positiva en dos aspectos fundamentales:

1. De manera intrínseca en la propia coordinación y conversión entre registros, promoviéndose y obteniéndose una mayor soltura en el paso de unos a otros en función de las necesidades que se requiera en cada momento para su resolver la situación, mediante la adaptación al medio.

2. De manera extrínseca en la creación de un aprendizaje de los conceptos matemáticos más global y completo, lo que está permitiendo al alumno romper con la vinculación de cada noción matemática con un registro de representación determinado.

<u>Fase 2:</u> Medida de planos a partir de la escala establecida por los alumnos.

La fase 2 se diseñó con el propósito de llevarla a cabo en el aula en el único caso de disponer tiempo suficiente para su desarrollo, pues se centra en el establecimiento de la escala que se ha perdido en un plano de una habitación y en la elección de los muebles de un catálogo para ubicarlos en dicho cuarto una vez encontrada la escala correcta.

- Plano de una habitación

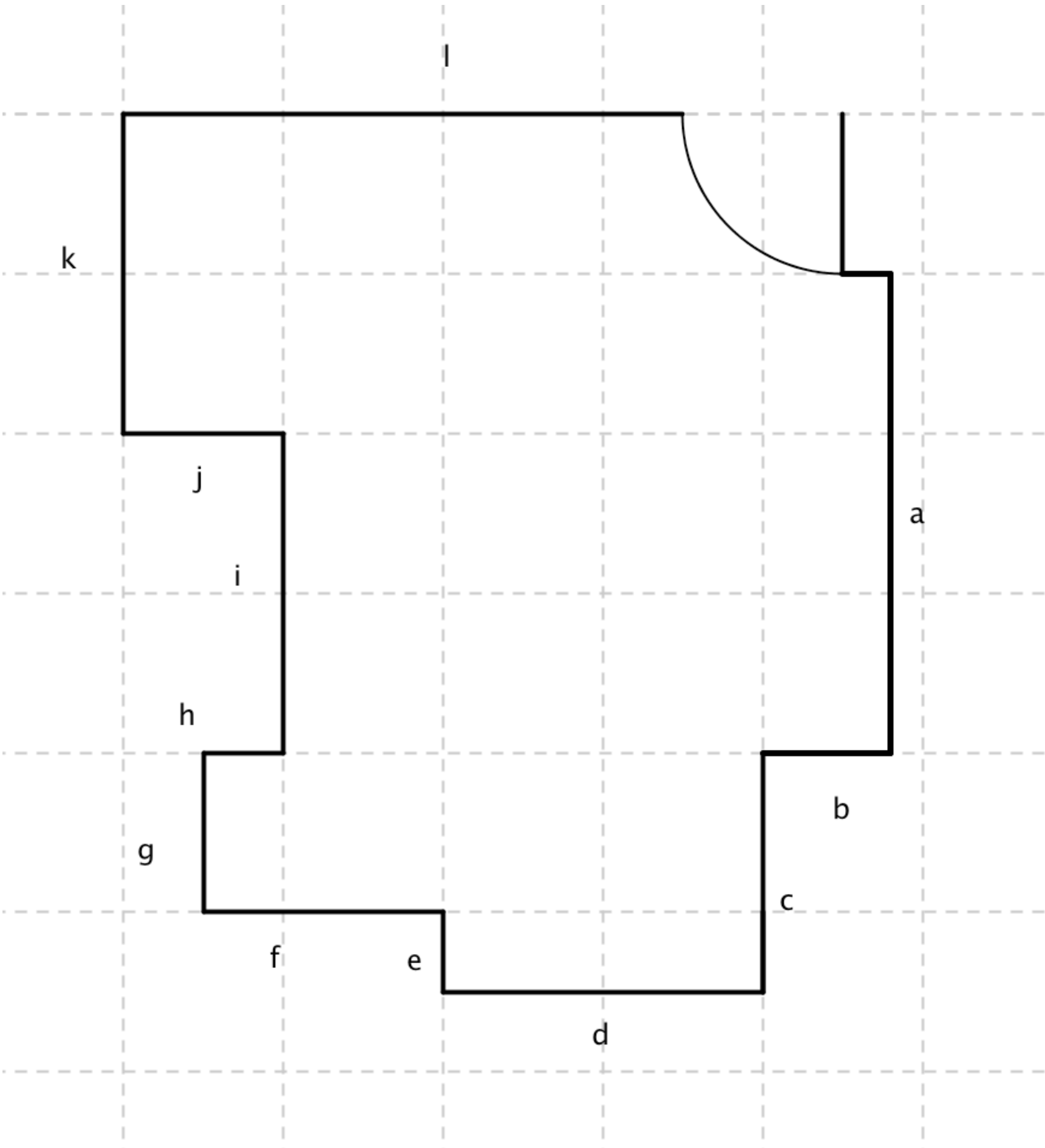


FIGURA 4.4.4.11. *Plano de una habitación*

• Hoja con la preselección de los muebles:

Tabla 4.4.4.24. *Muebles y dimensiones*

Camas	Medidas de los productos
	Longitud: 210 cm Ancho: 105 cm Altura piecero: 30 cm Altura cabecero: 77 cm
	Longitud: 210 cm Ancho: 165 cm Altura: 47 cm Largo del colchón: 200 cm Ancho del colchón: 160 cm
Mesillas	Medidas de los productos
	Ancho: 45 cm fondo: 37.5 cm Altura: 55 cm

	Ancho: 60 cm fondo: 45 cm Altura: 55 cm
Librerías	Medidas de los productos
	Ancho: 75 cm fondo: 30 cm Altura: 202 cm
	Ancho: 45 cm fondo: 39 cm Altura: 185 cm

	Ancho: 60 cm fondo: 37.5 cm Altura: 106 cm
Armarios	Medidas de los productos
	Ancho: 200 cm fondo: 66 cm Altura: 236.4 cm
	Ancho: 150 cm fondo: 60 cm Altura: 181 cm
Escritorios	Medidas de los productos

	Ancho: 105 cm fondo: 60 cm Altura: 73 cm
	Ancho: 90 cm fondo: 60 cm Altura: 75 cm
	Ancho: 120 cm fondo: 60 cm Altura: 74 cm

Fuente: elaboración propia a partir del catálogo de Ikea, 2012

La única información de la que disponen es la dimensión de la puerta 205 cm x 75 cm y las siguientes instrucciones para ubicar los muebles:

- La cama y la mesilla deben de ir en la pared *k* y no debe sobrar hueco.
- Una librería debe de ir en la pared *g*, de modo que no sobre hueco ni sobresalga de la pared *h*.
- El escritorio y la otra librería deben de ir en la pared *d*, de modo que no sobre hueco, ni sobresalga de la pared *e* el mueble que esté en dicho lado.
- El armario debe ir en la pared *a* y no debe de sobresalir de *b*.

Con esta actividad se pretendía que el alumno fuera capaz de establecer la correspondencia entre la representación de la habitación y la realidad, encontrando la escala a partir de la representación en el plano, la regla y el conocimiento de alguna dimensión real, efectuando la conversión entre los siguientes registros: Registro Numérico – Registro Geométrico – Registro Figural – Registro Algebraico.

Para lograr que los alumnos alcancen los objetivos que nos proponemos con esa actividad, juegan un papel fundamental los siguientes aspectos:

- La no aportación de la escala: a diferencia de la actividad de la fase anterior, en esta ocasión no se les proporciona la escala, de manera que deben ser los alumnos quienes la establezcan a partir de la dimensión de la puerta, lo que les obligará a realizar la conversión del registro figural al registro numérico y de este a los demás que entran en juego en la situación.
- Dimensiones de la puerta: se les proporciona tanto el ancho como el alto, pues de indicarles únicamente la anchura asociarían esta dimensión con la interpretación que tienen que hacer de ésta en el plano, lo que facilitaría en exceso el desarrollo de la actividad.
- Forma de la habitación: se ha diseñado una habitación con forma alejada de lo que es habitual, cuadrada o rectangular, pues de haber sido así, la tarea perdería parte de su sentido.

- Dimensiones de los muebles: se han escogido dimensiones que no supongan un trabajo de paso de escala dificultoso, lo que convertiría la actividad en una tarea de cálculo numérico que no es lo pretendido.
- Colocación de los muebles: se ha decidido dar la colocación de los muebles para evitar que el problema se convierta en una actividad de combinatoria en lugar de en una tarea de trabajo con escala.

Fase 3: Medida de planos a partir de la escala establecida por los alumnos.

Descripción:

El objetivo de la última fase fue la de reforzar el concepto de escala, trabajando esta vez sobre un mapa y utilizando la representación gráfica de la escala. La actividad se planteó de tal manera que era necesario efectuar conversiones entre el Registro Figural- Registro Tabular- Registro Algebraico - Registro Numérico, para encontrar las pistas correctas que hay que encontrar para ganar una gincana:

"Unos amigos han organizado un gincana en la que hay que buscar tres pistas para ganar. Para ello, proporcionan a los equipos que van a participar un mapa con unos puntos marcados señalizando las pistas.

La cuestión es que en el mapa hay más de tres pistas marcadas, así que para determinar cuáles son las que hay que buscar, también les proporcionan la siguiente tabla donde se recoge la distancia real que hay en línea recta entre las pistas que deben recoger:

Tabla 4.4.4.25. *Tabla para el alumno con la distancia entre las pistas*

	Salida	Pista 1	Pista 2	Pista 3
Salida		160 m	712 m	936 m
Pista 1	160 m		672 m	816 m
Pista 2	712 m	672 m		448 m
Pista 3	936 m	816 m	448 m	

Fuente: elaboración propia

Es necesario determinar las pistas antes de comenzar la gincana, de lo contrario los grupos participantes podrían perderse. Por ello os piden que les ayudéis a localizar las pistas sobre el mapa. El punto de partida para todo los grupos viene marcado con una S roja en el mapa.

¿Cuáles son las tres pistas correctas?"

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona el mapa de la zona donde va a tener lugar la gincana:

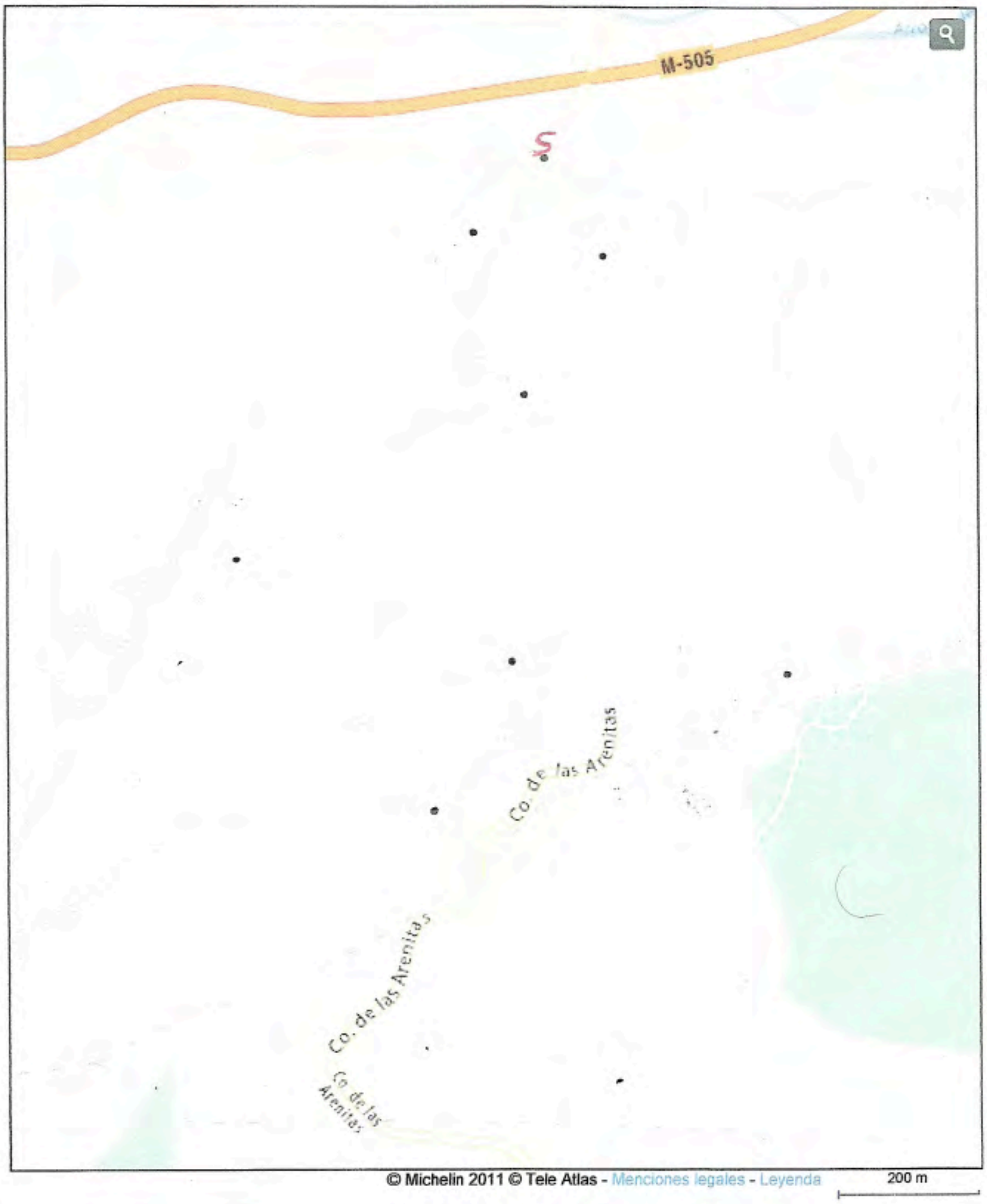


FIGURA 4.4.4.53. *Mapa gincana*

La distancia entre las pistas se ha escogido de tal manera que no pueda determinarse cuales son las correctas a simple vista. Del mismo modo, tenemos pistas falsas que se encuentran a la misma distancia que una verdadera, para que así se vean obligados a utilizar la tabla de distancias para favorecer el trabajo entre registros de representación.

En ese mismo sentido, la escala se ha aportado en un registro figural para así tener que realizar la conversión al Numérico.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna:

- **Profesor:** *Unos compañeros han organizado un gincana. En la gincana hay que buscar tres pistas por la zona en la que se va a desarrollar. ¿Cuál es el problema?*

  (El profesor pone la imagen del plano donde se va a desarrollar la gincana con las pistas marcadas).

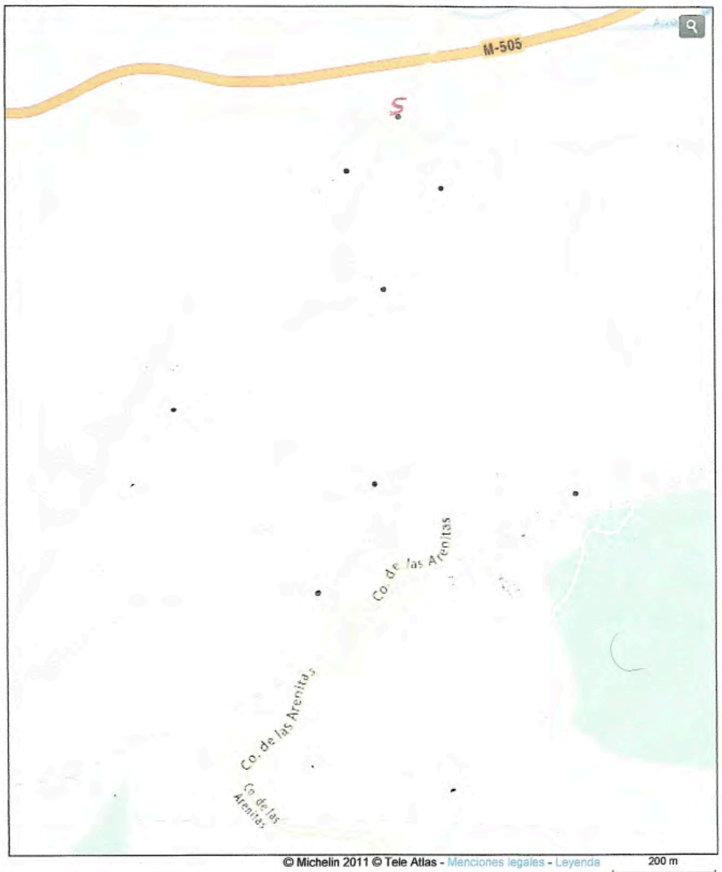


FIGURA 4.4.4.54. *Mapa gincana mostrado a los laumnos*

Los puntos negros son las pistas. ¿Cuántas pistas he dicho que hay que buscar?

- ***Varios:*** *Muchas, unas cuantas.*
- **Profesor*:*** *Tres pistas son las que valen, el resto son falsas. Hay 7 pistas en el mapa, pero de esas siete hay 3 pistas que son las verdaderas y cuatro que no sirven. Entonces, para que vosotros podáis hacer la gincana bien y no os perdáis, os dan una tabla con la distancia real entre las pistas buenas. No os dan la distancia que hay entre las pistas en el mapa, sino la distancia que hay entre la pistas en línea recta, en la realidad. Yo ahora os voy a repartir el mapa y la tabla con las distancias, y tenéis que indicar cuales son las pistas buenas, porque antes de salir necesitamos saber cuales son las pistas para no perdernos.*

Tabla 4.4.4.26. *Tabla para el alumno con la distancia entre las pistas*

	Salida	Pista 1	Pista 2	Pista 3
Salida		160 m	712 m	936 m
Pista 1	160 m		672 m	816 m
Pista 2	712 m	672 m		448 m
Pista 3	936 m	816 m	448 m	

Fuente: elaboración propia

En vuestro mapa, aparece una cosa así, ¿no? (El profesor dibuja la escala gráfica en la pizarra). *La escala esta vez no viene como antes, ¿verdad?, viene de otra manera. Es lo que se llama escala gráfica y significa que esta distancia en el plano son 200 metros en la realidad, o al revés que 200 metros de la realidad equivalen a esta distancia en el plano.*

Tras dar la consigna, los grupos comienzan la actividad sin presentar ningún tipo de bloqueo aparente, pues todos utilizan la regla para saber cual es la medida de la escala gráfica que aparece en el plano y poder realizar las conversiones.

Como ya ocurrió en la actividad de las cajas, la regla de tres vuelve a hacer aparición en esta situación y la aplican sin ser conscientes que lo que verdaderamente están utilizando es una razón de proporcionalidad entre longitudes, dándose el fenómeno del desplazamiento metacognitivo:

Grupo 9

- **Marta**: *Es una regla de tres, ¿sabes por qué?*
- **Helena**: *¿Por qué?*
- **Marta**: *Mira, si 2,5 son 200 metros 160 son x*
- **Carmen**: *¿Ya habéis encontrado alguna pista buena?*
- **Marta**: *Si*
- **Carmen**: *¿Por qué sabéis que es la buena?*
- **Helena**: *Porque según la escala, 2,5 centímetros son 200 metros, entonces 160, que es la distancia a la primera pista buena, serán x. Eso nos da 2 cm. Hemos buscado desde la salida aquella pista que está a 2 cm.*

Grupo 5

- **Carlos**: *Si 2,5 son 200, pues 10 serán x.*
- **Profesor**: *¿Y de donde salen los 10?*
- **Carlos**: *De medir sobre el mapa la distancia entre estas dos pistas.*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.27. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de la Situación 2 de Semejanza*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Miden las distancias entre las pistas en el mapa y calculan su equivalente en la realidad a partir de la escala comparando los resultados con los datos proporcionados en la tabla de doble entrada. Utilización de la regla de tres.	
Grupo 2	Transforman las medidas dadas en la tabla a centímetros, utilizando la escala, para buscar luego sobre el mapa que pistas están a esa distancia. Utilización de la regla de tres.	
Grupo 3	Miden las distancias entre las pistas en el mapa y calculan su equivalente en la realidad a partir de la escala comparando los resultados con los datos proporcionados en la tabla de doble entrada. Utilización de la regla de tres.	
Grupo 4	Transforman las medidas dadas en la tabla a centímetros, utilizando la escala, para buscar luego sobre el mapa que pistas están a esa distancia. Utilización de la regla de tres.	

Grupo 5	Miden las distancias entre las pistas en el mapa y calculan su equivalente en la realidad a partir de la escala comparando los resultados con los datos proporcionados en la tabla de doble entrada. Utilización de la regla de tres.
Grupo 6	Miden las distancias entre las pistas en el mapa y calculan su equivalente en la realidad a partir de la escala comparando los resultados con los datos proporcionados en la tabla de doble entrada. Utilización de la regla de tres.
Grupo 7	Miden las distancias entre las pistas en el mapa y calculan su equivalente en la realidad a partir de la escala comparando los resultados con los datos proporcionados en la tabla de doble entrada. Utilización de la regla de tres.
Grupo 8	Transforman las medidas dadas en la tabla a centímetros, utilizando la escala, para buscar luego sobre el mapa que pistas están a esa distancia. Utilización de la regla de tres.
Grupo 9	Transforman las medidas dadas en la tabla a centímetros, utilizando la escala, para buscar luego sobre el mapa que pistas están a esa distancia. Utilización de la regla de tres.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.28. *Estrategias bases utilizadas en Fase 3 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Miden las distancias entre las pistas en el mapa y calculan su equivalente en la realidad a partir de la escala comparando los resultados con los datos proporcionados en la tabla de doble entrada. Utilización de la regla de tres.	5	55,55 %
Transforman las medidas dadas en la tabla a centímetros, utilizando la escala, para buscar luego sobre el mapa que pistas están a esa distancia. Utilización de la regla de tres.	4	44,44 %

Fuente: elaboración propia

Todos los grupos han sido capaces de resolver la situación de manera correcta siguiendo una de las dos estrategias siguientes:

- Medida sobre el mapa de la distancia entre las pistas para, a través de la escala, averiguar cuantos metros son en la realidad y cotejar los resultados con los datos dados en la tabla.
- Transformar los datos dados en la tabla a centímetros y localizar sobre el mapa aquellas pistas que se encuentran a dicha distancia.

No obstante, el procedimiento utilizado para el cálculo, la regla de tres, que aplican al conocer tres de los cuatro datos que componen las proporciones, desplaza al verdadero conocimiento puesto en juego, que es el de la escala como razón de proporcionalidad entre longitudes.

Aunque aplicada correctamente la regla de tres supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo, utilizándose de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente.

En lo que a la coordinación de registro se refiere, la actividad ha puesto de manifiesto como los alumnos, ha medida que han trabajado con múltiples sistemas de representación, son capaces de realizar aquellas conversiones que consideran oportunas y en el sentido en que sean necesarias para resolver las situaciones planteadas en función de su manera de razonar, atendiendo de una manera personalizada a su modo de aprendizaje.

Situación 3: Criterios de semejanza en triángulos.

Objetivo de la situación:

La presente situación, que consta de 3 fases, se diseñó con el propósito de llevarla a cabo en el aula en el único caso de disponer de tiempo suficiente para su desarrollo. Los objetivos de la misma eran los siguientes:

- Conocer y aplicar el criterio de semejanza entre triángulos:
    - Si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, son semejantes.
    - Si dos triángulos tiene dos ángulos iguales, son semejantes.
    - Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales, son semejantes.
- Efectuar la conversión Registro Geométrico – Registro Tabular - Registro Numérico - Registro de la Lengua Natural.
- Utilizar tratamientos dentro del Registro Figural.

El alumno dispondría para cada una de las fases una serie de triángulos:

Fase 1: Hoja con seis triángulos dibujados sin ninguna medida dada y con los lados nombrados como a, b y c. Los triángulos 1 y 3 son semejantes entre sí; los triángulos 2 y 5 son semejantes entre sí; el 4 no es semejantes con ninguno.

Fase 2: Colección de cinco triángulos recortados a los cuales les falta un pedazo desapareciendo uno de los ángulos por completo y parte de dos de los lados. Entre los triángulos hay únicamente dos triángulos semejantes.

Fase 3: Colección de cinco triángulos recortados a los cuales les falta un pedazo, desapareciendo uno de los lados por completo. Entre los triángulos habrá únicamente dos triángulos semejantes, triángulos con dos lados proporcionales pero cuyo ángulo, el formado por tales lados, sea desigual y triángulos con ángulo igual pero con los lados que lo forman no proporcionales.

Situación 4: Aplicación de la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias. Sombras.

Esta última situación tiene lugar el 26 de abril de 2012 durante los 40 minutos del desarrollo de la clase.

Objetivo de la situación:

La aplicación del Teorema de Tales sobre triángulos rectángulos semejantes es el principal objetivo de la última situación de la ingeniería planteada para los contenidos de esta unidad.

Mediante la conversión y coordinación entre varios registros de representación (Registro Tabular - Registro Geométrico – Registro Figural - Registro Algebraico – Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural) se pretende que el alumno sea capaz de calcular la altura la altura de varias canastas a partir de la longitud de la sombra que proyecta.

Descripción:

Partiendo de un contexto relacionado con el desarrollo de un campeonato de baloncesto que va a tener lugar, los alumnos deben ayudar a un equipo de inspección a comprobar que las canastas cumplen con la medidas reglamentarias. Para ello, deberán articular la coordinación entre seis registros de representación semióticos (Tabular, Geométrico, Figural, Numérico, Algebraico y la Lengua natural) para construir los triángulos rectángulos semejantes que forman la canasta y el trípode que llevan los inspectores, con sus respectivas sombras, a partir de los datos proporcionados en la tabla y el esquema dado:

“Con motivo de un campeonato de baloncesto que se va a disputar entre varios institutos de la zona, un grupo de inspectores deportivos acude a examinar las 3 canchas de baloncesto donde se va a jugar para comprobar que las alturas de las canastas cumplen las medidas reglamentarias: 3,95 m de altura.

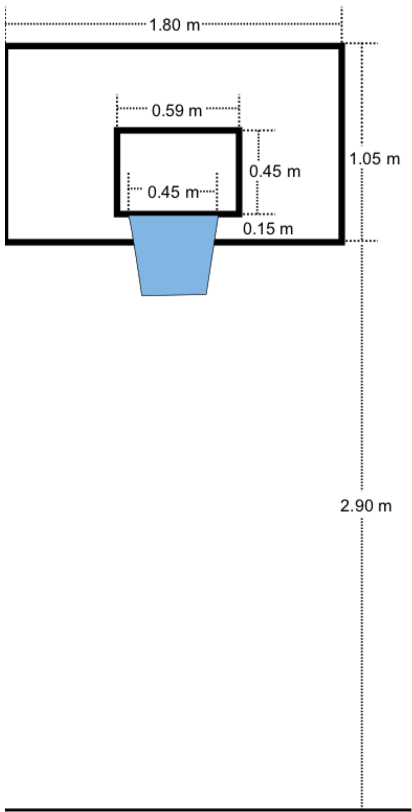


FIGURA 4.4.4.55. *Esquema para el alumno de una canasta*

Debido a un descuido, pues solo han cogido un trípode que mide 1,25 metros olvidándose el resto de instrumentos que les permiten calcular la altura de las canastas en la oficina, los inspectores se han visto obligados a calcular las alturas mediante otro sistema. Para ello, han medido la sombra de cada canasta y la sombra del trípode de manera simultanea, es decir, a la misma hora del día, obteniendo los siguientes resultados:

TABLA 4.4.4.29. *Tabla para el alumno con las dimensiones de las sombras del trípode y la canasta*

Medida de la sombra de la canasta	**Medida de la sombra del trípode**
Canasta 1= 1,58 m	0.5 m
Canasta 2= 2.37 m	0.75 m
Canasta 3= 4.74 m	1.5 m
Canasta 4= 2,88 m	0.9 m
Canasta 5= 3.16 m	1 m
Canasta 6= 4.48 m	1.4 m

Fuente: elaboración propia

A partir de estos datos, los inspectores creen que hay dos canastas que no cumplen con las medidas reglamentarias.

¿Sabríais decir cuales son?

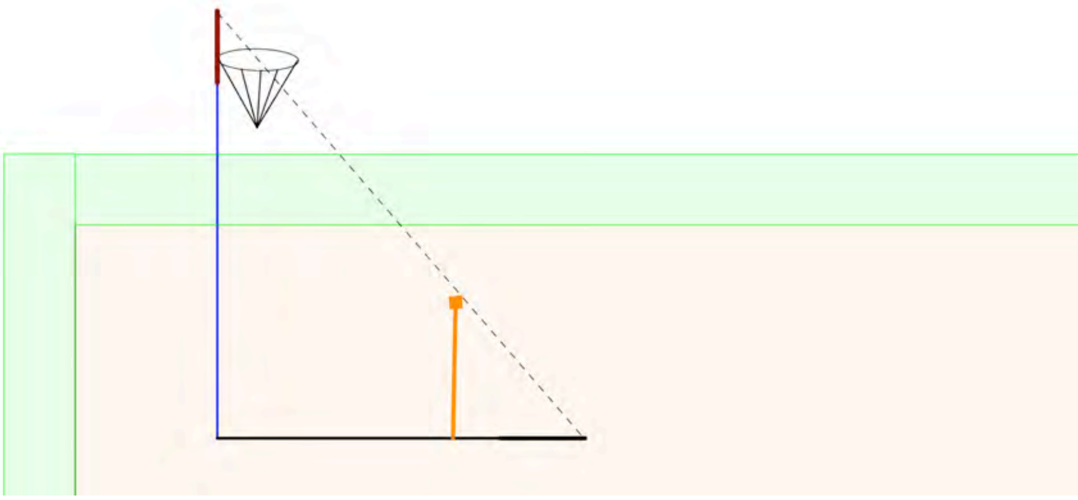


FIGURA 4.4.4.56. *Esquema para el alumno de la situación descrita*

Dando un esquema de la situación, se pretende que el alumno vea la utilidad de tal registro semiótico obligado y la necesidad de coordinarlo con el de la Lengua Natural para realizar la conversión hacia el Geométrico, Algebraico y Numérico.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor enuncia la consigna:

- **Profesor**: *La actividad de hoy se llama el torneo de baloncesto. Se ha organizado un torneo entre varios institutos de la zona. Para comprobar que las canchas están en condiciones, que cumplen las medidas reglamentarias, etc., un grupo de inspectores va a ir a las tres canchas de baloncesto, cada cancha con dos canastas, para comprobar que la medida de las canastas es la reglamentaria. Normalmente la medida de las canastas es de 3,95 m, desde el pie hasta la parte de arriba del tablero. Si esta es la canasta* (el profesor muestra la imagen de una canasta)

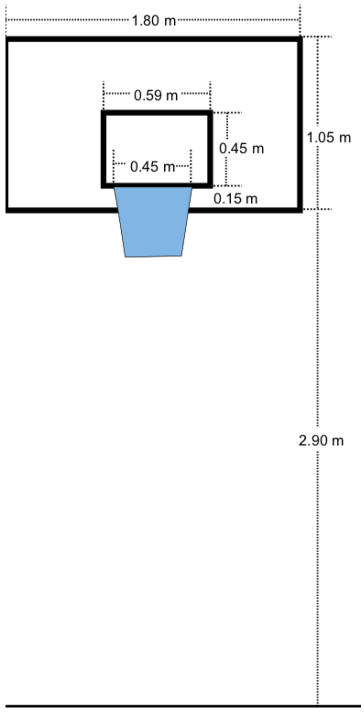


FIGURA 4.4.4.57. *Esquema para el alumno de una canasta*

desde aquí (el pie) *a aquí* (la parte superior del tablero) *debería de medir 3,95 metros. Eso es lo que van a comprobar los inspectores. Van a ir canasta por canasta y van a comprobar si miden eso.*

¿Cuál es el problema? Que cuando han llegado a las pistas se han dado cuenta de que se han olvidado de los instrumentos de medición. Así que para poder medir van a utilizar un sistema más rudimentario. Solamente se han acordado de llevar el trípode donde se coloca el aparato que les permite medir. ¿Qué hace?, pues colocan el trípode y miden la sombra que proyecta la canasta y la sombra que proyecta el trípode en el mismo momento, es decir, a las 12:00 cogen y miden la longitud de la sombra de la canasta y la longitud de la sombra del trípode. Las han ido anotando (enseña la tabla con las anotaciones)

TABLA 4.4.4.30. *Tabla para el alumno con las dimensiones de las sombras del trípode y la canasta*

Medida de la sombra de la canasta	**Medida de la sombra del trípode**
Canasta 1= 1,58 m	0.5 m
Canasta 2= 2.37 m	0.75 m
Canasta 3= 4.74 m	1.5 m
Canasta 4= 2,88 m	0.9 m
Canasta 5= 3.16 m	1 m
Canasta 6= 4.48 m	1.4 m

Fuente: elaboración propia

Es decir, (Jesús enseña un esquema gráfico del procedimiento).

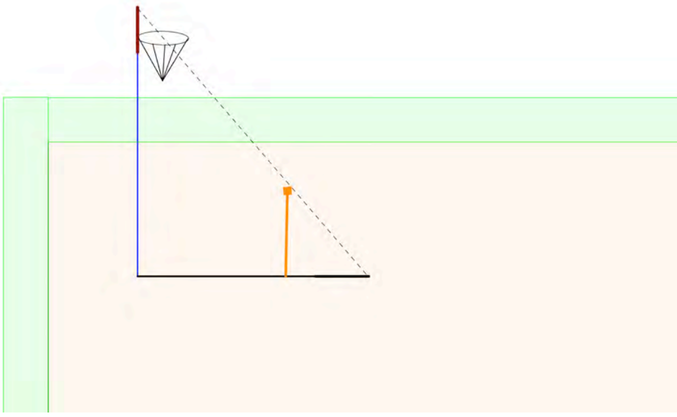


FIGURA 4.4.4.58. *Esquema para el alumno de la situación descrita*

Esto es la canasta y el trípode. Miden la longitud de la sombra de la canasta y miden la longitud de la sombra del trípode. A partir de esos datos, que son los que tenemos aquí en la tabla, se dan cuenta que hay dos de las seis canastas que no cumplen la medida reglamentaria, no miden los 3,95 metros. Vosotros tenéis que descubrir con esos datos, qué canastas son las que no cumplen con las medidas reglamentaria.

Los alumnos, ya conocedores del Teorema de Tales y por lo tanto del contenido que tienen que aplicar para resolver la situación, presentan dificultades a la hora de identificar sobre el esquema las sombras que proyectan los objetos:

Grupo 3

- **Fran***: Profe, explícanoslo otra vez, que no nos hemos enterado.*
- **Colaborador 1***: Enséñame el dibujo. ¿Cuál es la canasta?*
- **Fran***: Esta* (la señala correctamente)
- **Colaborador 1***: Señálame la altura de la canasta*
- **Fran***: Esta* (la señala correctamente)
- **Colaborador 1***: señálame la altura del trípode*
- **Fran***: Esta* (la señala correctamente)
- **Colaborador 1***: ¿Cuál es la sombra que da la canasta?*
- **Fran***: Esta* (señala la incidencia no la sombra). *Por el suelo.*
- **Colaborador 1***: Señala otra vez la sombra de la canasta.*
- **Fran***: Por aquí estará.* (señala el trozo de sombra del trípode)
- **Colaborador 1***: Pero, ¿de dónde a donde va?*
- **Fran***: De aquí a aquí* (señala el trozo de sombra del trípode)
- **Colaborador 1***: Vamos a ver. El trípode tendrá una sombra y la canasta otra, ¿no?*
- **Fran***: Si.*
- **Colaborador 1***: ¿Cuál es la sombra de la canasta y la del trípode?*
- **Javier***: La sombra de la canasta estará por aquí, por esta parte* (señalando la parte del triángulo rectángulo que forma la canasta la sombra y la proyección*) y la del trípode por aquí* (Idem a lo anterior)
- **Colaborador 1***: ¿La sombra está de pie?*
- **Fran***: No, está por aquí, por el suelo.*
- **Colaborador 1***: ¿Cuál es la sombra de la canasta?*
- **Fran***: Aquí.* (marcando el cacho de sombra desde el pie de la canasta al pie del trípode)
- **Javier***: De esa punta a esta punta* (marcando lo mismo que Fran)
- **Fran***: Yo creo que es esta parte negrita* (parte correspondiente al trípode)
- **Colaborador 1***: Entonces, ¿Cuál es la del trípode? ¿Tú la sombra la ves por el aire?¿Por dónde ves tu la sombra?*
- **Fran***: Pues no lo se.*

Grupo 1

- **Ana**: *Tiene que dar la misma altura, y las que no den es porque no están bien hechas.*
- **Colaborador 2**: *Pero esa constante…¿Cuál es la constante?¿Por qué lo habéis hecho así?¿Por qué sabéis que tiene que haber una constante de proporcionalidad?*
- **Ana**: *Por que tiene que dar 3,95*
- **Colaborador 2**: *Pero 3,95 es esto* (marcando la altura de la canasta)
- **Ana**: *Ya, pero…a ver, si todas tienen la misma constante de proporcionalidad, que es 3,16, es que…*
- **Colaborador 2**: *Pera esa constante de proporcionalidad, ¿Entre qué dos longitudes la estas calculando?*
- **Ana**: *Entre la sombra de esto* (la canasta) *y la sombra de esto* (el trípode).
- **Colaborador 2**: *¿Cuál es la sombra de eso?* (la canasta)
- **Ainhoa**: *La sombra de esto es hasta aquí* (Marcando en la proyección hasta llegar al trípode) *y la sombra de esto es hasta aquí* (Marcando la del trípode en la proyección también).
- **Colaborador 2**: *A ver, ¿Marcad la sombra?*

  Ana marca la sombra sobre la proyección
- **Colaborador 2**: *¿Esa es la sombra?¿Cuál es la sombra aquí?* (pone un lápiz encima de la mesa)*La sombra es la parte de aquí. La sombra es lo que se ve en el suelo.*

Seis de los nueve grupos parten directamente de la idea de la búsqueda de la razón de semejanza entre los triángulos rectángulos que forman la figura, mientras que los tres intentan resolver el problema aplicando el Teorema de Pitágoras, como es el caso del grupo 7:

- **Colaborador 1**: *Explicadme hacéis. ¿Qué datos tienes hay?*
- **Sergio**: *Pues conocemos la sombra de la canasta, la sombra del trípode, la medida del trípode y lo que debería medir la canasta.*
- **Colaborador 1**: *Entonces, esto que estáis haciendo, explicadme qué es. Decidme en este dibujo quienes son estos números para que yo lo vea. Poner los datos que yo lo vea*
- **Sergio**: *1,25 es el trípode, en el primer caso 0,5 es la sombra del trípode. 158 es la sombra de la canasta. Entonces a ver si hay alguna relación de semejanza entre esto.*

- **Colaborador 1***: Y para ello, ¿qué estáis utilizando?*
- **Raquel***. El Teorema de Pitágoras.*
- **Colaborador 1***: ¿Para calcular el qué?*
- **Sergio***: La hipotenusa.*
- **Colaborador 1***: Y cuando tengáis la hipotenusa, ¿Qué vais a hacer con ella?*
- **Sergio***: Pues ver si hay alguna relación de semejanza.*
- **Raquel***: Pero la hipotenusa al cuadrado sería la suma de los catetos al cuadrado. Entonces ya sabremos que esa canasta mide 3,95.*
- **Colaborador 1***: Pero, ¿cómo vais a calcular la hipotenusa?*
- **Raquel***: Utilizando el Teorema de Pitágoras.*
- **Colaborador 1***: ¿Con qué hipotenusa?*
- **Sergio***: Primero calculamos esta (la del trípode), que da 1,34. Y ahora calculamos todo esto* (toda la proyección)
- **Colaborador 1***: ¿Y cómo lo vais a hacer?*
- **Sergio***: Pues haciendo el Teorema de Pitágoras con la medida que tendría que darme la canasta.*
- **Colaborador 1***: Pero la medida que tendría que tener la canasta es lo que tenéis que averiguar, ¿no?*
- **Sergio***: Ya*
- **Colaborador 1***: ¿Qué conocéis de ese triángulo?*
- **Sergio***: De ese triángulo conocemos este cateto* (toda la sombra de la canasta) *y …*
- **Raquel***: lo que supuestamente tiene que medir la canasta.*
- **Colaborador 1***: No, pero lo que es supuestamente lo tenéis que averiguar. Si tomáis que esto* (la altura de la canasta) *mide 3,95, estáis dando ya por bueno que la canasta mide lo reglamentario. Eso es lo que tenéis que averiguar, si la canasta mide 3,95 o no.*

Estrategias y conclusiones

En resumen, las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas en aquellos grupos donde han tenido que replantear su estrategia base, han sido las siguientes:

TABLA 4.4.4.31. *Estrategias utilizas en la Situación 4 de Semejanza*

Grupo	**Estrategia base**	**Cambio de estrategia**
Grupo 1	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.	
Grupo 2	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.	
Grupo 3	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.	
Grupo 4	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.	

Grupo 5	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.	
Grupo 6	Utilizan la regla de tres, a partir de la relación entre la altura del trípode, la longitud de su sombra y la de la canasta.	
Grupo 7	Utilización del Teorema de Pitágoras sin llegar a ningún resultado concluyente.	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.
Grupo 8	Utilización del Teorema de Pitágoras sin llegar a ningún resultado concluyente.	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.
Grupo 9	Utilización del Teorema de Pitágoras sin llegar a ningún resultado concluyente.	Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.4.32. *Estrategias bases utilizadas en la Situación 4*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Calculan la razón entre la altura que debe tener la canasta y la altura del trípode (3,95:1,25= 3,16). Posteriormente calculan las razones entre las longitudes de la sombra de la canasta y la sombra del trípode para ver cuales dan también como resultado 3,16, que es la razón de semejanza.	5	55,55 %
Utilización del Teorema de Pitágoras sin llegar a ningún resultado concluyente.	3	33,33 %
Utilizan la regla de tres, a partir de la relación entre la altura del trípode, la longitud de su sombra y la de la canasta.	1	11,11 %

Fuente: elaboración propia

Llama nuevamente la atención la utilización de la regla de tres por parte del grupo 6, quedando cada vez más patente su utilización como herramienta que permite solucionar ciertos problemas sin ser conscientes de los conceptos que hay detrás:

- **Helena***: Para averiguar la altura de la canasta hemos hecho una regla de tres. Si la medida del trípode es 1,25 y tiene una sombra de 0,5, 1,58 que es la sombra de la canasta será X.*
- **Colaborador 1***: Enséñamelo con el dibujo, que a lo mejor te resulta más fácil.*
- **Lidia***: Si 1,25 es la medida del trípode, y proyecta una sombra de 0,5 . X* (marcando la altura de la canasta) *proyectará una sombra de 1,58.*
- **Colaborador 1***: Osea, que si yo tengo un instrumento alto, ¿va a dar una sombra más grande o más pequeña?*
- **Helena***: Pues más grande.*
- **Colaborador 1***: Entonces, la sombra, ¿cómo es en relación a la altura?*
- **Helena***: Pues más grande que al altura…no entiendo…no lo se…*

- **Colaborador 1**: *Tú me estás diciendo si esto mide tanto, entonces esto medirá esto….estas haciendo una regla de tres.*

- **Helena**: *Si.*

- **Colaborador 1**: *La regla de tres se hace, ¿cuándo qué? Cuándo las cantidades son…*

- **Helena**: *Tiene relación.*

- **Carmen**: *Las cantidades que pones en una regla de tres, ¿cómo se llaman? Proporcionales.*

La utilización del Teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa de los triángulos rectángulos por parte de los tres últimos grupos viene condicionada por dos aspectos:

- No llegan a la idea de que los triángulos son semejantes ni que tienen ángulos en común y lados proporcionales.

- No son capaces de identificar sobre el esquema qué partes de los triángulos se corresponden con las sombras que arrojan cada objeto.

Esto es una prueba evidente de cómo el contexto y el paso del Registro de representación figural al geométrico y de este al numérico, que dan significación a los conceptos puestos en juego, no se trabajan lo suficiente en el día a día del aula. La representaciones aparecen al margen del contexto, por lo que una tarea simple se convierte en irresoluble si no se encuentra la conexión entre ambas cosas. En educación secundaria es de gran importancia contextualizar los conceptos haciendo uso del mayor numero de registros de representación posibles.

La manera de presentar la situación ha forzado a que los estudiantes hayan pasado de la representación figural y tabular a la geométrica para así donde poder identificar las partes de cada triángulo rectángulo y los datos conocidos y a partir de ella pasar a la numérica para encontrar las canastas que no tienen la medida reglamentaria.

En este sentido, se ha conseguido el propósito de la situación en lo que a conversión entre registros se refiere.

4.4.5. Estudio del rendimiento en términos de calificaciones a partir de la metodología empleada.

Con el fin de completar el estudio anteriormente realizado, bajo este epígrafe nos propones realizar un pequeño estudio estadístico, basado en un diseño pre-postest, a efectos de observar las implicaciones que la aplicación de la metodología desarrollada en el aula ha tenido sobre el rendimiento de la asignatura en términos de calificaciones tanto a nivel global como a nivel individual.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, uno de los aspectos que cobra mayor importancia es el relacionado con el rendimiento académico de los estudiantes. Actualmente, factores como la situación socioeconómica y familiar de los alumnos, el entrono, el diseño de los programas de estudio y los currícula oficiales, los conocimientos previos que poseen, las metodologías de enseñanza utilizadas en el aula y el rol del profesorado, etc., son analizados a la hora de evaluar el rendimiento de los estudiantes debido a su carácter multidimensional (Benítez, Giménez y Osicka, 2000).

Una de las variables más empleadas tanto por investigadores (Jimenez, 2000; Cascón, 2000; Edel; 2003) como por la propia comunidad educativa para explicar el rendimiento académico son las calificaciones.

Cascón (2000), sostiene que dicha circunstancia se produce debido a las siguientes razones:

> 1) uno de los problemas sociales, y no sólo académicos, que están ocupando a los responsables políticos, profesionales de la educación, padres y madres de alumnos; y a la ciudadanía, en general, es la consecución de un sistema educativo efectivo y eficaz que proporcione a los alumnos el marco idóneo donde desarrollar sus potencialidades; 2) por otro lado, el indicador del nivel educativo adquirido, en este estado y en la práctica totalidad de los países desarrollados y en vías de desarrollo, ha sido, sigue y probablemente seguirán siendo las calificaciones escolares. A su vez, éstas son reflejo de las evaluaciones y/o exámenes donde el alumno ha de demostrar sus conocimientos sobre las distintas áreas ó materias, que el sistema considera necesarias y suficientes para su desarrollo como miembro activo de la sociedad (Cascón, 2000, p. 8).

En este sentido, y siendo conocedores del gran número de variables que incurren en el rendimiento académico, en las páginas que siguen vamos a centrarnos en su estudio a partir de las calificaciones obtenidas por los alumnos con el propósito de poder valorar el grado de incidencia que la metodología desarrollada ha tenido a este respecto.

Para ello, vamos a realizar un primer análisis y comparación de los resultados obtenidos por los estudiantes del grupo A de 2º ESO antes y después de desarrollar la metodología planteada, considerando como pre-test la nota media obtenida en las dos primeras evaluaciones y como post-test la nota del examen que se centra en los contenidos tratados en nuestro trabajo en el aula.

Seguidamente, efectuaremos un análisis comparativo de los resultados obtenidos por el grupo experimental que ha seguido la metodología en esta tesis descrita y el grupo de control que ha continuado con la metodología habitual llevada a cabo en el centro, considerando como pre-test y post-test, en cada uno de los grupos, las mismas variables mencionadas en el párrafo anterior.

Finalmente, y teniendo en cuenta que durante el curso 2001-2012 los alumnos de 2º ESO del Instituto Público “Pablo Neruda” de Leganés (Madrid), forman parte de la muestra seleccionada para realizar la prueba PISA, se ha creído conveniente analizar los resultados obtenidos por el grupo experimental y el grupo de control ante un examen totalmente competencial y contextualizado de elaboración propia. De este modo se pretende comprobar si la metodología desarrollada prepara al alumnado frente a este tipo de pruebas, y si mejora o empeora con respecto a los aportes de metodología tradicional, a partir de la comparación de los dos post-test de los que se disponen en cada grupo: la calificación del examen tradicional y la calificación del examen competencial de los contenidos tratados.

De acuerdo al diseño de la investigación pre-postest, nos basamos fundamentalmente en comparaciones estadísticas de las calificaciones obtenidas antes y después de la intervención, mediante:

- Análisis descriptivo:
    - Parámetros de centralización y dispersión: media, mediana, moda, cuartiles, desviación típica y coeficiente de variación.
    - Tablas de frecuencias.
- Prueba de Shapiro-Wilk para comprobar la normalidad de los datos.
- Contraste de homogeneidad a partir de los pre-test para comprobar que el punto de partida de los grupos de control y experimental coinciden.
- Prueba t para datos pareados para comparar,
    - los pre-test con el post-test y así comprobar los efectos de la intervención. Se ha de comprobar previamente la normalidad de los datos.
    - los resultados de los dos post-test en el grupo de control y experimental y ver los efectos de la intervención de cara a afrontar pruebas de carácter competencial.

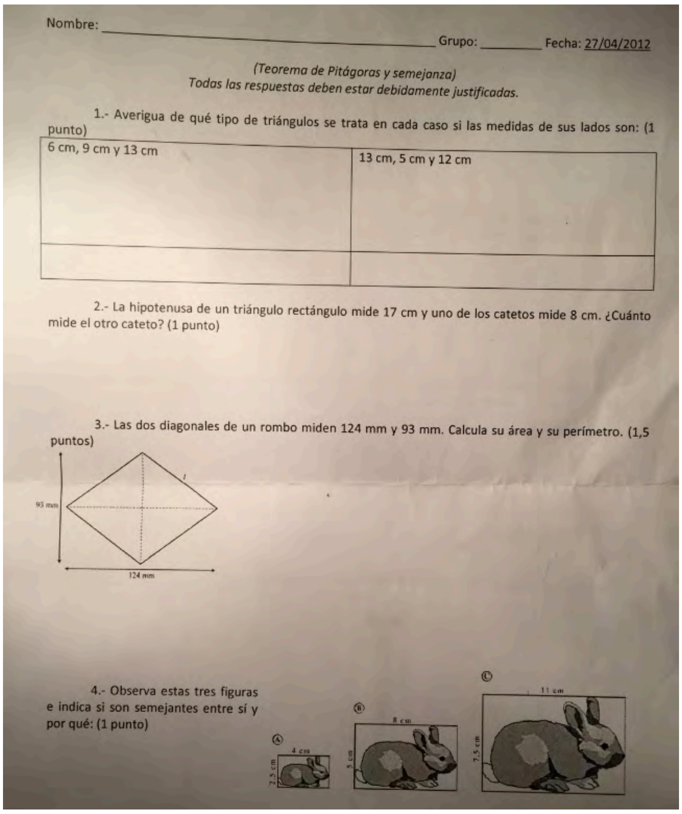
Para el análisis estadístico se emplean los siguientes programas informáticos:

- SPSS versión 19 para Windows.
- Statgraphics Centurion SR.
- Excel Profesional Plus 2010.

4.4.5.1. Comparación del rendimiento en términos de calificaciones dentro del grupo experimental.

Cómo suele ser habitual dentro de la dinámica escolar, al término de las sesiones que conforman la ingeniería, y por tanto al finalizar la unidad, los alumnos tuvieron que afrontar el correspondiente examen con el fin de poder valorar el nivel de adquisición de los contenidos que formaban parte de la misma.

El examen, común a todos los grupos de 2º ESO y elaborado de manera conjunta por el profesorado del departamento de matemáticas que se encarga de impartir la materia en dicho curso, consta de 8 ítems: 4 de aplicación directa de los conceptos estudiados y 4 problemas de entre los cuales solo uno (el ítem 7) cumple las condiciones necesarias para poder ser catalogado cómo tal. Se trata de un modelo de examen clásico, centrado en evaluar la adquisición de conocimientos por parte del alumno, sin contemplar otros aspectos evaluables como son la utilidad y aplicabilidad de las nociones aprendidas en contextos reales, distando mucho de la tipología de examen competencial.


Nombre: ____________________ Grupo: ________ Fecha: 27/04/2012

(Teorema de Pitágoras y semejanza)
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

1.- Averigua de qué tipo de triángulos se trata en cada caso si las medidas de sus lados son: (1 punto)

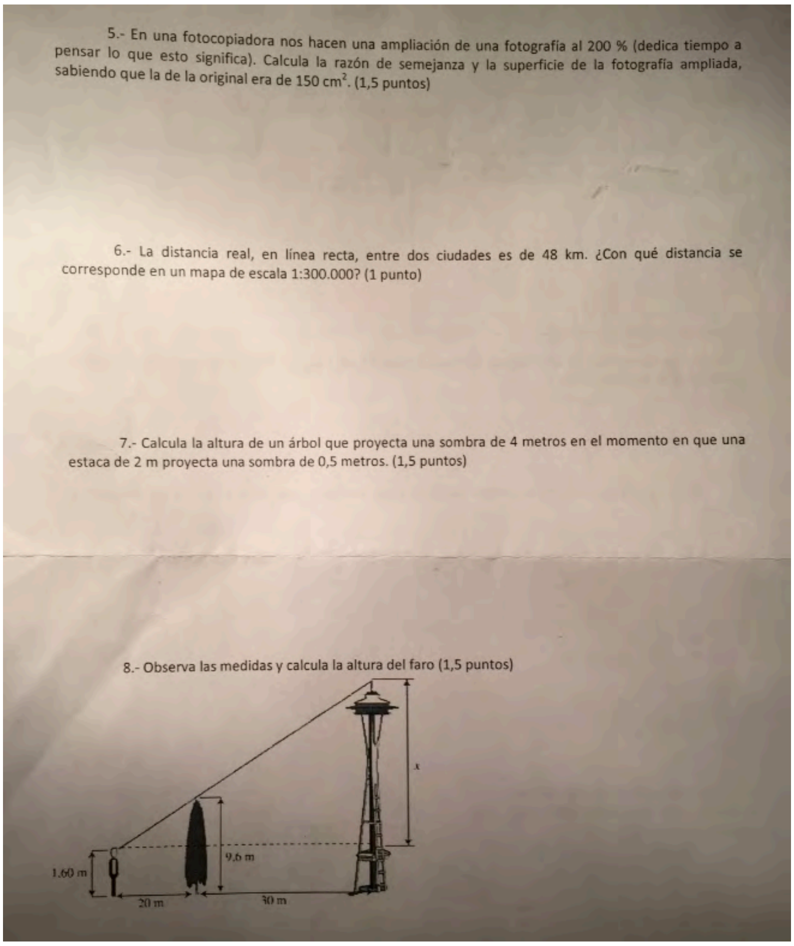
6 cm, 9 cm y 13 cm	13 cm, 5 cm y 12 cm

2.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 cm y uno de los catetos mide 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto? (1 punto)

3.- Las dos diagonales de un rombo miden 124 mm y 93 mm. Calcula su área y su perímetro. (1,5 puntos)

4.- Observa estas tres figuras e indica si son semejantes entre sí y por qué: (1 punto)

FIGURA 4.5.5.1.1. *Examen sobe Tª de Pitágoras y Semejanza de 2º ESO*



5.- En una fotocopiadora nos hacen una ampliación de una fotografía al 200 % (dedica tiempo a pensar lo que esto significa). Calcula la razón de semejanza y la superficie de la fotografía ampliada, sabiendo que la de la original era de 150 cm^2. (1,5 puntos)

6.- La distancia real, en línea recta, entre dos ciudades es de 48 km. ¿Con qué distancia se corresponde en un mapa de escala 1:300.000? (1 punto)

7.- Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 4 metros en el momento en que una estaca de 2 m proyecta una sombra de 0,5 metros. (1,5 puntos)

8.- Observa las medidas y calcula la altura del faro (1,5 puntos)

FIGURA 4.5.5.1.2. *Examen sobe Tª de Pitágoras y Semejanza de 2º ESO*

Para el estudio a realizar, utilizaremos como pre-test la nota obtenida al hacer la media de las calificaciones finales obtenidas en la primera y segunda evaluación, y como post-test la correspondiente a la calificación del examen anteriormente descrito y que se realiza con posterioridad a la aplicación de la metodología expuesta en esta tesis. Dicho examen ha sido corregido y calificado por el profesor del instituto encargado de dar clase en nuestro grupo experimental.

El profesor de la asignatura así como el Departamento de Matemáticas en sí mismo, nos facilitaron todos los datos necesarios para poder llevar a cabo nuestro estudio.

A continuación se muestra la tabla con las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo A de 2º ESO a lo largo de las dos primeras evaluaciones, así como la calificación del examen correspondiente a los contenidos de nuestra ingeniería:

TABLA 4.4.5.1.1. *Calificaciones a lo largo del curso 2º A*

2ºA	Primera Evaluación				Segunda Evaluación				Media 1ªY 2ª	Tercera Evaluación			
Alumno	**A**	**B**	**C**	**Media 1ª**	**D**	**E**	**F**	**Media 2ª**		**G**	**H**	**I**	**MEDIA 3ª**
Alumno 1	5,6	7,5	3,9	5,67	5,0	2,1	3,3	3,47	4,57	4,7			
Alumno 2	2,5	3,3	1,3	2,37	3,8	2,8	1,7	2,77	2,57	2,2			
Alumno 3	5,6	6,5	4,3	5,47	3,5	6,6	4,3	4,80	5,13	5,9			
Alumno 4	5,8	5,5	2,7	4,67	5,9	6,3	4,0	5,40	5,03	5,3			
Alumno 5	6,9	7,5	7,3	7,23	7,5	7,6	6,5	7,20	7,22	5,8			
Alumno 6	6,3	4,5	2,4	4,40	3,0	1,6	6,2	3,60	4,00	4,7			
Alumno 7	7,3	7,2	9,0	7,83	7,8	7,9	8,4	8,03	7,93	9,5			
Alumno 8	5,0	4,8	4,9	4,90	4,8	6,1	6,4	5,77	5,33	7,0			
Alumno 9	4,3	3,3	1,7	3,10	4,8	2,2	2,9	3,30	3,20	5,7			
Alumno 10	3,9	5,3	3,3	4,17	5,8	3,2	3,9	4,30	4,23	5,0			
Alumno 11	7,2	6,0	6,6	6,60	7,8	6,2	6,4	6,80	6,70	7,7			
Alumno 12	7,3	6,8	4,6	6,23	5,3	5,7	4,9	5,30	5,77	4,0			
Alumno 13	7,0	7,5	6,8	7,10	8,0	9,3	7,3	8,20	7,65	6,5			
Alumno 14	8,1	6,4	5,8	6,77	5,7	8,9	8,0	7,53	7,15	4,4			
Alumno 15	5,4	8,0	5,8	6,40	9,8	6,5	4,0	6,77	6,58	6,8			
Alumno 16	7,3	9,3	7,5	8,03	8,1	7,5	5,8	7,13	7,58	8,5			
Alumno 17	4,6	5,2	5,3	5,03	6,0	5,6	4,8	5,47	5,25	6,0			
Alumno 18	8,0	9,3	9,5	8,93	9,0	8,8	9,8	9,20	9,07	9,0			
Alumno NEE 1													
Alumno 19	1,3	3,0	0,8	1,70	4,5	3,2	2,3	3,33	2,52	4,3			
Alumno NEE 2													
Alumno 20	6,2	3,8	5,0	5,00	7,2	4,4	3,3	4,97	4,98	6,3			
Alumno 21	8,0	8,3	6,0	7,43	6,4	8,7	4,3	6,47	6,95	7,2			

A: Examen unidad Divisibilidad y números enteros; **B**: Examen unidad Sistema de numeración decimal y sexagesimal; **C**: Examen final con unidad de números racionales; **D** Examen unidad Proporcionalidad y porcentajes; **E**: Examen unidad Álgebra; **F**: Examen final con unidad de Ecuaciones; **G**: Examen Unidad Teorema de Pitágoras y semejanza.

Fuente: elaboración propia

Nos quedamos únicamente con los datos tomados como pre-test y post-test, eliminando de la muestra a los alumnos con necesidades educativas especiales por no realizar ningún examen estándar:

TABLA 4.4.5.1.2. *Pre-test/post-test1 2º A*

Alumno	Medía 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1
Alumno 1	4,57	4,7
Alumno 2	2,57	2,2
Alumno 3	5,13	5,9
Alumno 4	5,03	5,3
Alumno 5	7,22	5,8
Alumno 6	4,00	4,7
Alumno 7	7,93	9,5
Alumno 8	5,33	7,0
Alumno 9	3,20	5,7
Alumno 10	4,23	5,0
Alumno 11	6,70	7,7
Alumno 12	5,77	4,0
Alumno 13	7,65	6,5
Alumno 14	7,15	4,4
Alumno 15	6,58	6,8
Alumno 16	7,58	8,5
Alumno 17	5,25	6,0
Alumno 18	9,07	9,0
Alumno 19	2,52	4,3
Alumno 20	5,0	6,3
Alumno 21	6,95	7,2

Fuente: elaboración propia

A partir de una primera aproximación a los datos, observamos:

TABLA 4.4.5.1.3. *Calificaciones pre-test 2º A*

Calificaciones Pre-test		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Suspensos		6	28,6 %	28,6 %
Aprobados	[5, 6)	6	28,6 %	57,2 %
	[6,7)	3	14,3 %	71,5 %
	[7,9)	5	23,8 %	95,3 %
	[9, 10)	1	4,7 %	100%
	Total	15	71,4 %	
Total		21	100 %	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.5.1.4. *Calificaciones post-test1 2º A*

Calificaciones Post-test 1		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
Suspensos		6	28,6 %	28,6 %
Aprobados	[5, 6)	5	23,8 %	52,4 %
	[6,7)	4	19,1 %	71,5 %
	[7,9)	4	19,1 %	90,6 %
	[9, 10)	2	9,4 %	100 %
	Total	15	71,4 %	
Total		21	100 %	

Fuente: elaboración propia

Tanto en el pre-test como en el post-test, el porcentaje general de aprobados y suspensos es el mismo (aprobados: 71,4 %; suspensos: 28,6 %). Explorando los datos en relación a los estudiantes suspensos, podemos verificar cómo los alumnos 1, 2, 6 y 19 tienen una calificación inferior a 5 tanto en el pre-test como en el post-test, mientras que los alumnos 9 y 10, suspensos en el pre-test, aprueban el post-test, ocurriendo en sentido contrario con respecto a los alumnos 12 y 14, casos que serán estudiados más adelante.

El análisis descriptivo de los datos arroja los siguientes resultados:

TABLA 4.4.5.1.5. *Análisis descriptivo pre-test/post-test1 2º A*

Curso 2º ESO (A)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,69	1,81	31,81%	21
Post-test1	6,02	1,87	31,53%	21

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

Se observa cómo ambas variables presentan un exceso de dispersión con un CV > 25% por lo que hace que la media sea un valor poco representativo de los datos. Este hecho es algo que nos aventuramos a indicar que ocurrirá de igual manera a la hora de analizar los datos concernientes al grupo B de 2º ESO, así como en el estudio realizado en 3º ESO, debido al escenario heterogéneo que forma parte de la realidad educativa de los centros de educación secundaria.

La existencia de alumnos con necesidades específicas, con desfases curriculares, con desmotivación, con problemáticas escolares relacionadas con el bajo rendimiento, etc., motiva, justifica y potencia la búsqueda de experiencias ajustadas a la diversidad y diferencias individuales de los estudiantes, con el fin de lograr una mayor eficacia en los centros consiguiendo resultados equitativos en lo que a consecución de competencias básicas se refiere (García, 1997; Booth y Ainscow, 2000; Álvarez *et al.,* 2002; Arnaiz, 2009).

Si tomamos como medida de centralización la mediana o los cuartiles, obtenemos:

TABLA 4.4.5.1.6. *Cuartiles pre-test/post-test1 2º A*

	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	4,57	5,34	7,15
Post-test1	4,40	5,90	7,00

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

La diferencia entre las medianas del pre-test y el post-test, por un lado, y de los percentiles, por otro, es prácticamente inexistente, siendo sutilmente más marcada la diferencia en el caso de las medianas, pues el centro de gravedad de los datos recogidos en el post-test están más cercanos a 6 (mediana= 5,90) que a 5 como es el caso del pre-test (mediana = 5,34). Esto nos indica cómo el pre-test y el post-test se comportan de manera similar con respecto a estos parámetros de centralización con cierta tendencia de mejora de los resultados en torno al aprobado.

Para estudiar adecuadamente el nivel de alcance que la metodología desarrollada ha tenido sobre el rendimiento de los alumnos en términos de calificaciones, procedemos a realizar una prueba t para datos pareados, previa comprobación del carácter normal de nuestras variables mediante el estadístico de Shapiro-Wilk:

TABLA 4.4.5.1.7. *Pruebas de normalidad pre-test/post-test1 2º A*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Pre-test	,142	21	,200*	,960	21	,564
Post-test1	,077	21	,200*	,985	21	,986

a. Corrección de la significación de Lilliefors.

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

A partir de los resultados obtenidos por la prueba podemos asumir, tanto para el pre-test [S-W= ,960; p-valor= ,564] como para el post-test [S-W= ,985; p-valor= ,986], la normalidad de las variables.

Una vez verificada dicha normalidad, pasamos a realizar la prueba t:

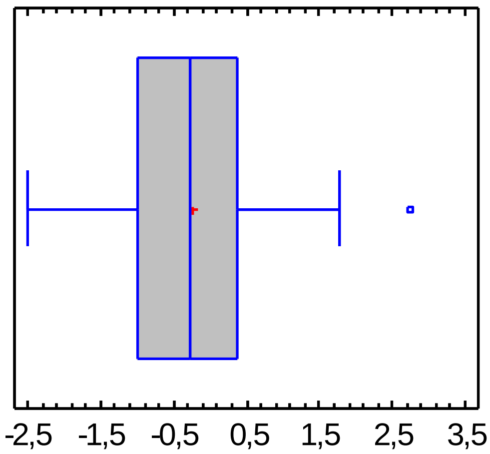


FIGURA 4.4.5.1.3. *Gráfico de Caja y bigotes pre-test/post-test1 2º A.* (SPSS 19)

Los resultados proporcionados por el gráfico de caja y bigotes así como por la propia prueba t para datos pareados nos llevan a concluir que no existen diferencias significativas a nivel global entre el pre-test y el post-test [t=-0,849112; p-valor= ,4059].

Además, el gráfico nos muestra la existencia de un outlier que se corresponde con el caso del alumno 14, el cuál obtuvo una calificación de 7,15 en el pre-test en contraposición con el 4,4 obtenido en el post-test:

TABLA 4.4.5.1.8. *Resultados pre-test/post-test1 alumno 14*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1
Alumno 14	7,15	4,4

Fuente: elaboración propia

Si analizamos la puntuación obtenida en cada ítem del examen, así como lo errores cometidos, podemos hacer las siguientes observaciones:

TABLA 4.4.5.1.9 *Resultados ítems del Alumno 14*

Ítem 1 (1pto)	**Ítem 2** (1pto)	**Ítem 3** (1,5 ptos)	**Ítem 4** (1 pto)	**Ítem 5** (1,5 ptos)	**Ítem 6** (1 pto)	**Ítem 7** (1,5 ptos)	**Ítem 8** (1,5 ptos)	**Total**
0,5	0,9	0,5	1	0	0	1,5	0	4,4

Fuente: elaboración propia

- Ítem 1: El alumno 14 ha sido capaz de identificar debidamente los tipos de triángulos en obtusángulo y rectángulo a partir de las medidas de los lados y la aplicación del teorema de Pitágoras. La perdida de puntos de este ítem se debe a la utilización de los signos de igualdad y la escritura matemáticas, siendo algo confusa.
- Ítem 2: El alumno ha determinado de manera correcta la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo conocidos el otro cateto y la hipotenusa aplicando Pitágoras y despejando la ecuación. Nuevamente los problemas con el lenguaje simbólico han repercutida en la puntuación.
- Ítem 3: El alumno ha calculado el área del rombo a parir de la aplicación del área del triángulo correctamente. A la hora de determinar la longitud del lado del rombo haciendo uso del teorema de Pitágoras, ha cometido errores de cálculo que le han impedido llegar a la solución correcta.
- Ítem 5: El alumno calcula erróneamente la razón de semejanza tomando k= 200:150, en lugar de k= 200:100. Razona correctamente que la razón de semejanza para la superficie es k^2 a partir de lo calculado y lo aplica.
- Ítem 6: A la hora de aplicar la escala el alumno no ha tenido en cuenta el cambio de unidades entre kilómetros y centímetros, pese a que el procedimiento de cambio era correcto.

- Ítem 8: El alumno ha establecido correctamente las relaciones entre las medidas que en el dibujo se recogen, cometiendo errores de cálculo en la aplicación de la regla de 3 para obtener la altura del faro.

A la vista de estas observaciones, podemos concluir que el alumno 14 ha obtenido baja calificación en el examen debido principalmente a errores relacionados con el cálculo numérico, la utilización del lenguaje simbólico y el cambio de unidades, pues salvo en el ítem 5 donde si parece que existe cierta falta de comprensión del concepto que en el subyace, el alumno manifiesta un dominio y a adquisición de lo conocimientos apropiado en gran medida.

A la luz de los resultados arrojados por la prueba t, y no poder afirmar que existan cambios a nivel a global entre el pre-test y el post-test pasamos a realizar un estudio más concreto de la comparativa entre calificaciones.

De los 21 alumnos, 15 mejoran la calificación del post-test con respecto a la del pre-test, lo que supone que un 71,4 % de los estudiantes mejoran su rendimiento:

TABLA 4.4.5.1.10. *Alumnos de 2º A que mejoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Diferencia Post-test 1 – Pre-test
Alumno 1	4,57	4,7	0,13
Alumno 3	5,13	5,9	0,77
Alumno 4	5,03	5,3	0,27
Alumno 6	4,00	4,7	0,70
Alumno 7	7,93	9,5	**1,57**
Alumno 8	5,33	7,0	**1,67**
Alumno 9	**3,20**	**5,7**	**2,50***
Alumno 10	4,23	5,0	0,77
Alumno 11	6,70	7,7	**1,00**
Alumno 15	6,58	6,8	0,22
Alumno 16	7,58	8,5	**0,92**
Alumno 17	5,25	6,0	0,75
Alumno 19	**2,52***	**4,3**	**1,78**
Alumno 20	5,0	6,3	**1,32**
Alumno 21	6,95	7,2	0,25

Fuente: elaboración propia

De entre los 15 alumnos, 5 de ellos (marcados en rojo) presentan una mejora significativa en las calificaciones tanto respecto al pre-test como respecto a la trayectoria general a lo largo del curso, siendo la diferencia mayor que un punto. Destaca el caso particular del alumno 9 (marcado con un asterisco), que no habiendo aprobado ningún examen de los realizados en la asignatura y llevando una media global de 3,20, obtiene una calificación muy próxima al 6 en el pos-test.

Algo similar, pero sin llegar a aprobar el post-test, ha ocurrido con el alumno 19, que teniendo una media global de 2,52 y solo una calificación en uno de los exámenes realizados por encima del 4, presenta un índice de mejora de 1,78 puntos.

Dos de los alumnos (marcados en verde), el 11 y el 16, han obtenido calificaciones en el post-test con una diferencia entorno a un punto con respecto a la media global. Sin embargo, tal diferencia no es tan significativa como las anteriormente mencionadas, pues al estudiar la trayectoria de ambos alumnos, se observa cómo en varios de los exámenes realizados hasta el momento obtienen calificaciones cercanas o superiores a la obtenida en el post-test.

Analicemos ahora los casos opuestos:

TABLA 4.4.5.1.11. *Alumnos de 2º A que empeoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Diferencia Post-test 1 – Pre-test
Alumno 2	2,57	2,2	-0,37
Alumno 5	7,22	5,8	**-1,42**
Alumno 12	5,77	4,0	**-1,77**
Alumno 13	7,65	6,5	**-1,15**
Alumno 14	7,15	4,4	**-2,75**
Alumno 18	9,07	9,0	-0,07

Fuente: elaboración propia

De los 21 alumnos, 6 obtienen una calificación inferior en el post-test con respecto al pre-test, lo que supone que un 28,6 % de los estudiantes empeoran en su rendimiento. Cuatro son los casos significativos de entre los alumnos cuya diferencia se ha dado en sentido negativo. Pasamos a estudiar particularmente lo ocurrido con los alumnos 5, 12 y 13, pues el caso del alumno 14 ya fue analizado al ser detectado como outlier:

TABLA 4.4.5.1.12. *Resultados ítems del Alumno 5*

Ítem 1 (1pto)	Ítem 2 (1pto)	Ítem 3 (1,5 ptos)	Ítem 4 (1 pto)	Ítem 5 (1,5 ptos)	Ítem 6 (1 pto)	Ítem 7 (1,5 ptos)	Ítem 8 (1,5 ptos)	Total
0,5	1	1,25	0	0	1	1,5	0,5	5,8

Fuente: elaboración propia

- Ítem 1: El alumno ha utilizado correctamente el teorema de Pitágoras para clasificar los tipos de triángulos en función de sus ángulos a partir de las medidas de los lados. La perdida de puntos se debe a la clasificación del primero de ellos en acutángulo en lugar de obtusángulo al interpretar de manera errónea la desigualdad.
- Ítem 3: El alumno ha calculado el área del rombo a parir de su fórmula correctamente. Del mismo modo, ha empleado el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado del rombo llegando al resultado correcto. Los problemas con la utilización del lenguaje simbólico han repercutida en la puntuación.
- Ítem 4: De la contestación proporcionada por el alumno se deduce que ha efectuado una mala interpretación del enunciado de la actividad, pues ha creído que se le preguntaba si las tres figuras eran semejantes y no que si lo eran por parejas.
- Ítem 5: El alumno calcula correctamente la razón de semejanza k, pero no lo aplica en términos de superficie a partir de k^2.
- Ítem 6: A la hora de aplicar la escala el alumno no ha tenido en cuenta el cambio de unidades entre kilómetros y centímetros, pese a que el procedimiento de cambio era correcto.
- Ítem 8: El alumno ha cometido un error de cálculo al determinar k. EL procedimiento realizado para obtener la medida pedida ha sido el correcto, pero debido al equívoco al hallar k, el resultado final no es el correcto.

El cálculo numérico, la utilización del lenguaje simbólico y la falta de compresión lectora son las razones fundamentales que han repercutido negativamente en la calificación del alumno. Vuelve a ser en el ítem 5, como en el caso del alumno 14, donde se manifiesta la falta de comprensión del concepto de razón de semejanza entre superficies y su relación con la razón de semejanza entre longitudes.

TABLA 4.4.5.1.13. *Resultados ítems del Alumno 12*

Ítem 1 (1pto)	**Ítem 2** (1pto)	**Ítem 3** (1,5 ptos)	**Ítem 4** (1 pto)	**Ítem 5** (1,5 ptos)	**Ítem 6** (1 pto)	**Ítem 7** (1,5 ptos)	**Ítem 8** (1,5 ptos)	**Total**
0,5	1	1	0,75	0	0	0,75	0	4

Fuente: elaboración propia

- Ítem 1: El alumno ha utilizado correctamente el teorema de Pitágoras para clasificar los tipos de triángulos en función a sus ángulos a partir de las medidas de los lados. La perdida de puntos se debe a la clasificación del primero de ellos en acutángulo en lugar de obtusángulo al interpretar de manera errónea la desigualdad.
- Ítem 3: El alumno ha calculado el área del rombo a parir de la aplicación del área del triángulo correctamente. Del mismo modo, ha empleado el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado del rombo, cometiendo un error de cálculo al obtener la raíz del resultado.
- Ítem 4: El alumno ha justificado correctamente la semejanza entre las figuras A y B mediante el cálculo de su razón de semejanza. Por otro lado, también índica que la figura C no es semejante a ninguna de las otras dos, pero la no referencia a la razón de semejanza en este caso ha sido la causa de le perdida de puntos en este ítem.
- Ítem 5: El alumno ha realizado un razonamiento totalmente erróneo de lo que significa ser semejantes en relación a la superficie.

- Ítem 6: A la hora de aplicar la escala el alumno no ha tenido en cuenta el cambio de unidades entre kilómetros y centímetros, pese a que el procedimiento de cambio era correcto.
- Ítem 7: El alumno ha resuelto el problema en dos sitios, dando una solución errónea en la hoja del examen y una solución totalmente correcta en el folio donde ha ido resolviendo algunos de los problemas por falta de espacio. La no indicación de que la solución correcta era la del folio ha sido la causa de la bajada de puntos.
- Ítem 8: El alumno ha establecido correctamente las relaciones entre las medidas que en el dibujo se recogen, cometiendo errores de cálculo en la aplicación de la regla de 3 para obtener la altura del faro.

Nuevamente el Ítem 5 deja entrever cómo el concepto de la razón de semejanza aplicado a superficies no ha sido bien aprehendido, debido principalmente al papel que juega el concepto de razón de semejanza entre longitudes como obstáculo epistemológico. El resto de errores cometidos por el alumno derivan fundamentalmente del cálculo y los procesos operacionales, así como de la conversión entre unidades.

TABLA 4.4.5.1.14. *Resultados ítems del Alumno 13*

Ítem 1 (1pto)	**Ítem 2 (1pto)**	**Ítem 3 (1,5 ptos)**	**Ítem 4 (1 pto)**	**Ítem 5 (1,5 ptos)**	**Ítem 6 (1 pto)**	**Ítem 7 (1,5 ptos)**	**Ítem 8 (1,5 ptos)**	**Total**
1	1	1	1	1,5	1	0	0	6,5

Fuente: elaboración propia

- Ítem 3: El alumno ha calculado ha utilizado una fórmula errónea para calcular el área del rombo (A= D x d). Por otro lado, ha empleado el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado del rombo llegando al resultado correcto.
- Ítem 7: Pese al hacer una correcta interpretación del enunciado como se puede apreciar a través de las representaciones realizadas, el alumno comete errores de cálculo al efectuar la regla de tres para hallar el resultado.

- Ítem 8: El alumno ha establecido correctamente las relaciones entre las medidas que en el dibujo se recogen, cometiendo errores de cálculo en la aplicación de la regla de 3 para obtener la altura del faro.

En el caso de este alumno, el aprendizaje de los conceptos, así como su aplicación, parece que han tenido lugar de manera adecuada y efectiva, pues los fallos cometidos derivan del cálculo y del olvido de las fórmulas para el cálculo de las áreas de figuras planas básicas.

En vista de estos análisis más concretos de la comparación entre las calificaciones y de los errores cometidos en la prueba por los alumnos cuyo rendimiento parecía empeorar, podemos concluir que la metodología empleada en el aula para favorecer la conversión entre los registros de representación semióticos en lo que a los conceptos del Teorema de Pitágoras y Semejanza se refiere, tiene efectos beneficiosos a nivel de aprendizaje, particularmente en aquellos alumnos cuyo rendimiento esta por debajo del 5.

4.4.5.2. Comparación del rendimiento en términos de calificaciones a partir del examen de la unidad entre el grupo experimental y el grupo de control.

Bajo este título, vamos a realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos por el grupo experimental (2º ESO Grupo A) y el grupo de control (2º ESO Grupo B) en lo que ha rendimiento en términos de calificaciones se refiere.

El grupo de control, cuyo profesor de la asignatura de matemáticas es el mismo que en el grupo experimental, ha realizado los mismos modelos de exámenes que en el grupo A de 2º ESO, puesto que, como ya se ha mencionado, los elaboran conjuntamente los miembros del departamento.

A continuación se muestra la tabla con las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo B de 2º ESO a lo largo de las dos primeras evaluaciones, así como la calificación del examen correspondiente a los contenidos del Teorema de Pitágoras y la Semejanza:

TABLA 4.4.5.2.1. *Calificaciones a lo largo del curso 2º B*

2ºB	Primera Evaluación				Segunda Evaluación				Media1ªY 2ª	Tercera Evaluación			
Alumno	**A**	**B**	**C**	**Media 1ª**	**D**	**E**	**F**	**Media 2ª**		**G**	**H**	**I**	**Media 3ª**
Alumno 22	5,4	5,3	5,0	5,23	6,3	5,6	5,0	5,63	5,43	6,2			
Alumno 23	4,4	5,3	2,3	4,00	2,3	1,2	2,0	1,83	2,92	2,2			
Alumno 24	2,8	1,8	1,3	1,97	2,3	1,3	1,0	1,53	1,75	2,3			
Alumno 25	9,2	9,2	7,5	8,63	9,0	8,4	7,9	8,43	8,53	7,8			
Alumno 26	9,0	9,8	9,8	9,53	10,0	10,0	10,0	10,00	9,77	10,0			
Alumno 27	8,5	10,1	9,5	9,37	10,0	10,0	10,0	10,00	9,68	10,0			
Alumno 28	7,3	9,0	9,3	8,53	9,8	9,8	9,6	9,73	9,13	10,0			
Alumno 29	5,3	5,3	7,0	5,87	4,0	8,1	4,2	5,43	5,65	3,9			
Alumno 30	5,7	4,3	1,3	3,77	1,5	5,8	2,9	3,40	3,58	2,5			
Alumno 31	7,5	7,4	6,0	6,97	5,0	7,6	5,7	6,10	6,53	5,6			
Alumno 32	5,0	6,3	4,5	5,27	2,8	5,8	4,3	4,30	4,78	5,5			
Alumno 33	7,2	9,6	8,5	8,43	8,4	10,0	8,0	8,80	8,62	9,7			
Alumno 34	7,0	6,5	4,8	6,10	7,0	6,1	7,2	6,77	6,43	9,0			
Alumno 35	5,6	5,8	3,4	4,93	3,5	5,7	5,2	4,80	4,87	9,4			
Alumno 36	4,2	4,0	3,0	3,73	5,5	4,6	3,3	4,47	4,10	4,9			
Alumno 37	6,0	5,5	5,9	5,80	6,3	8,0	5,8	6,70	6,25	8,2			
Alumno 38	6,0	8,3	5,9	6,73	6,9	5,8	7,8	6,83	6,78	8,2			
Alumno 39	5,9	4,5	2,6	4,33	4,8	4,2	4,5	4,50	4,42	5,3			
Alumno 40	4,0	4,8	2,0	3,60	3,5	2,5	2,0	2,67	3,13	2,2			
Alumno 41	4,1	4,5	3,0	3,87	3,2	4,4	4,6	4,07	3,97	5,8			
Alumno 42	6,3	7,5	5,3	6,37	5,9	7,2	4,8	5,97	6,17	6,7			
Alumno 43	4,1	0,8	1,5	2,13	0,8	2,0	1,3	1,37	1,75	0,3			
Alumno 44	5,3	8,0	4,5	5,93	2,0	4,2	5,3	3,83	4,88	6,5			
Alumno 45	4,0	1,8	0,8	2,20	0,0	0,0	1,8	0,60	1,40	1,8			

A: Examen unidad Divisibilidad y números enteros; **B**: Examen unidad Sistema de numeración decimal y sexagesimal; **C**: Examen final con unidad de números racionales; **D** Examen unidad Proporcionalidad y porcentajes; **E**: Examen unidad Álgebra; **F**: Examen final con unidad de Ecuaciones; **G**: Examen Unidad Teorema de Pitágoras y semejanza.

Fuente: elaboración propia

Nos quedamos únicamente con los datos pre-test y post-test:

TABLA 4.4.5.2.2. *Pre-test/post-test1 2º B*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1
Alumno 22	5,43	6,2
Alumno 23	2,92	2,2
Alumno 24	1,75	2,3
Alumno 25	8,53	7,8
Alumno 26	9,77	10,0
Alumno 27	9,68	10,0
Alumno 28	9,13	10,0
Alumno 29	5,65	3,9
Alumno 30	3,58	2,5
Alumno 31	6,53	5,6
Alumno 32	4,78	5,5
Alumno 33	8,62	9,7
Alumno 34	6,43	9,0
Alumno 35	4,87	9,4
Alumno 36	4,10	4,9
Alumno 37	6,25	8,2
Alumno 38	6,78	8,2
Alumno 39	4,42	5,3
Alumno 40	3,13	2,2
Alumno 41	3,97	5,8
Alumno 42	6,17	6,7
Alumno 43	1,75	0,3
Alumno 44	4,88	6,5
Alumno 45	1,40	1,8

Fuente: elaboración propia

A partir de una primera aproximación a los datos, observamos:

TABLA 4.4.5.2.3. *Calificaciones pre-test 2º B*

Calificaciones Pre-test		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Suspensos		12	50 %	50 %
Aprobados	[5, 6)	2	8,3 %	58,3 %
	[6,7)	5	20,9 %	79,2 %
	[7,9)	2	8,3 %	87,5 %
	[9, 10)	3	12,5 %	100 %
	Total	12	50 %	
Total		24	100 %	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.5.2.4. *Calificaciones post-test1 2º B*

Calificaciones Post-test 1		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Suspensos		8	33,3 %	33,3 %
Aprobados	[5, 6)	4	16,7 %	50 %
	[6,7)	3	12,5 %	62,5 %
	[7,9)	3	12,5 %	75 %
	[9, 10)	6	25 %	100 %
	Total	16	71,4 %	
Total		24	100 %	

Fuente: elaboración propia

Se observa como el porcentaje de suspensos en el post-test es menor que el del pre-test (33,3 % < 50%). Explorando los datos en relación a los estudiantes suspensos, podemos verificar cómo los alumnos 23, 24, 30, 36, 40, 43 y 45 tienen una calificación inferior a 5 tanto en el pre-test como en el post-test, mientras que los alumnos 32, 35, 39, 41 y 44, suspensos en el pre-test, aprueban el post-test, ocurriendo en sentido contrario con respecto al alumno 29.

La comparación del análisis descriptivo del grupo de control (2º ESO Grupo B) con el grupo experimental (2º ESO Grupo A) nos ofrece los siguientes resultados:

TABLA 4.4.5.2.5. *Análisis descriptivo pre-test/post-test1 2º A*

Curso 2º ESO (A)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,69	1,81	31,81%	21
Post-test1	6,02	1,87	31,53%	21

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

TABLA 4.4.5.2.6. *Análisis descriptivo pre-test/post-test1 2º B*

Curso 2º ESO (B)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,44	2,47	45,40%	24
Post-test1	6,00	3	50,00%	24

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

Se observa cómo ambas variables presentan medias similares tanto el pre-test como en el post-test. Sin embargo la desviación típica y el CV, tanto en pre-test como en post-test, son mucho mayores en el grupo de control, lo que indica una mayor dispersión de los datos.

Veamos que ocurre con los valores de la mediana y los cuartiles:

TABLA 4.4.5.2.7. *Cuartiles pre-test/post-test1 2º A*

Curso 2º ESO (A)			
	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	4,57	5,34	7,15
Post-test1	4,40	5,90	7,00

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

TABLA 4.4.5.2.8. *Cuartiles pre-test/post-test1 2º B*

Curso 2º ESO (B)			
	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	3,78	5,15	6,60
Post-test1	3,20	6	8,60

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

A partir de estos datos podemos resaltar los siguientes hechos:

- La diferencia, dentro del grupo de control, entre el percentil 25 del pre-test y el post-test es muy pequeña, además de ser superior a 2,5 en ambos casos (pre-test= 3,78 > 2,50; post-test= 3,20 > 2,50). Por otro lado, la mediana y el percentil 75 del post-test no son únicamente mayores que las del pre-test, sino que también superan los valores estándar de estos parámetros para datos de esta tipo (mediana= 6 > 5; percentil 75= 8,60 > 7,50) lo que parece indicar cierta mejora de los resultados con respecto al pre-test.
- La diferencia entre las medianas de los pre-test y entre las medianas del post-test del grupo de control y experimental, son casi inexistente, comportándose los dos de manera similar respecto a este parámetro. Sin embargo, no ocurre lo mismo al examinar los percentiles, pues los valores de los percentiles 25 en el grupo de control indican como existe un mayor número

de calificaciones suspensas entrono y por debajo del 3, siendo inferiores con respecto al grupo experimental. Por la contra, el valor del percentil 75 del post-test del grupo de control mejora el obtenido por le experimental, señalando la existencia de calificaciones más altas.

Para estudiar de manera adecuada la comparación entre los dos grupos, pasamos a realizar las siguientes pruebas:

1. Prueba Shapiro-Wilk para comprobar la normalidad de las variables del grupo de control:

TABLA 4.4.5.2.9. *Pruebas de normalidad pre-test/post-test1 2º B*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Pre-test	,136	24	,200*	,953	24	,443
Post-test1	,138	24	,200*	,933	24	,200

a. Corrección de la significación de Lilliefors.

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

A partir de los resultados arrojados por la prueba de Shapiro-Wilk, podemos asumir, tanto para el pre-test [S-W= ,953; p-valor= ,443] como para el post-test [S-W= ,933; p-valor= ,200], la normalidad de las variables.

2. Contraste de homogeneidad a partir de los pre-test de ambos grupos para comprobar que el punto de partida coincide:

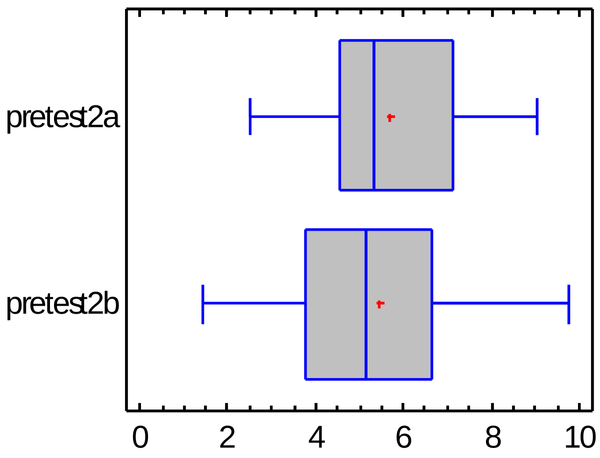


FIGURA 4.4.5.2.1. *Gráfico de Caja y bigotes para contrastar homogeneidad*. (SPSS 19)

A partir del contraste de homogeneidad realizado y de la información proporcionada por el gráfico, podemos suponer tanto igualdad de medias [t= ,377738; p-valor= ,7075] como de varianzas [F= ,538743; p-valor=0,1666], con lo cuál los pre-test muestran una igualdad en la muestra, lo que indica que el punto de partida del grupo control y experimental es el mismo.

3. Un prueba t para datos pareados en el grupo de control para poder estudiar si existen diferencias significativas en el rendimiento de los alumnos, en términos de calificaciones, al seguir recibiendo la formación habitual utilizando la metodología del centro:

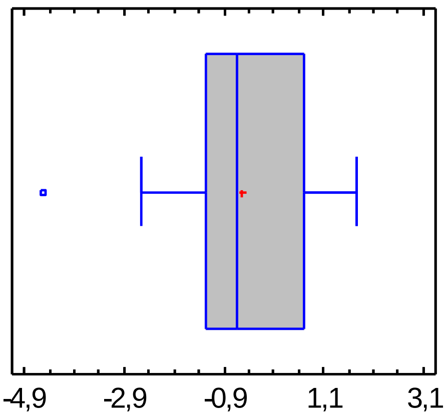


FIGURA 4.4.5.2.2. *Gráfico de Caja y bigotes pre-test/post-test1 2º B.* (SPSS 19)

Los resultados proporcionados por el gráfico de caja y bigotes así como por la propia prueba t para datos pareados nos llevan a concluir que no existen diferencias significativas a nivel global entre el pre-test y el post-test [t=-1,94148; p-valor= ,0645].

Además, el gráfico nos muestra la existencia de un outlier que se corresponde con el caso del alumno 35, el cuál obtuvo una calificación de 4,87 en el pre-test en contraposición con el 9,4 obtenido en el post-test:

TABLA 4.4.5.2.10. *Resultados pre-test/post-test1 alumno 35*

Alumno	**Media 1ªY 2ª Pre-test**	**G Post-test 1**
Alumno 35	4,87	9,4

Fuente: elaboración propia

Resulta especialmente llamativo este caso si se observa la trayectoria del alumno a lo largo de todo el curso, pues ninguna de las calificaciones obtenidas en los exámenes realizados hasta el momento superan el 5,8.

De manera homóloga a como se hizo con el grupo experimental, pasamos a realizar un estudio más concreto de la comparativa entre calificaciones dentro del grupo de control.

De los 24 alumnos, 17 mejoran la calificación del post-test con respecto a la del pre-test, lo que supone que un 70,8 % de los estudiantes mejoran su rendimiento frente al 71,4 % que lo hacían en le grupo experimental:

TABLA 4.4.5.2.11. *Alumnos de 2º B que mejoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Diferencia Post-test 1 – Pre-test
Alumno 22	5,43	6,2	0,77
Alumno 24	1,75	2,3	0,55
Alumno 26	9,77	10,0	0,23
Alumno 27	9,68	10,0	0,32
Alumno 28	9,13	10,0	0,87
Alumno 32	4,78	5,5	0,72
Alumno 33	8,62	9,7	**1,08**
Alumno 34	6,43	9,0	**2,57**
Alumno 35	4,87	9,4	**4,53**
Alumno 36	4,10	4,9	0,80
Alumno 37	6,25	8,2	**1,95**
Alumno 38	6,78	8,2	**1,42**
Alumno 39	4,42	5,3	0,88
Alumno 41	3,97	5,8	**1,83**
Alumno 42	6,17	6,7	0,53
Alumno 44	4,88	6,5	**1,62**
Alumno 45	1,40	1,8	0,40

Fuente: elaboración propia

De entre los 17 alumnos, 6 de ellos (marcados en rojo) presentan una mejora significativa en las calificaciones tanto respecto al pre-test como respecto a la trayectoria general a lo largo del curso. Destacan particularmente los índices de mejora del alumno 35, ya comentado al ser detectado como outlier, y del alumno 34, que no habiendo sacado en ningún examen una calificación por encima del 7,2 y llevando una media global de 6,43, obtiene una calificación de 9 en el pos-test.

Por su parte, el alumno 33 ha obtenido un resultado en el post-test con una diferencia entorno a un punto con respecto a su media global de los dos primeros trimestres. Sin embargo, tal diferencia no es tan significativa como las anteriormente mencionadas, pues al estudiar su trayectoria se observa cómo en varios de los exámenes realizados hasta el momento obtienen calificaciones cercanas o superiores a la obtenida en el post-test.

Analicemos ahora los casos opuestos:

TABLA 4.4.5.2.12. *Alumnos de 2º B que empeoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Diferencia Post-test 1 – Pre-test
Alumno 23	2,92	2,2	-0,72
Alumno 25	8,53	7,8	-0,73
Alumno 29	5,65	3,9	**-1,75**
Alumno 30	3,58	2,5	**-1,08**
Alumno 31	6,53	5,6	**-0,93**
Alumno 40	3,13	2,2	**-0,93**
Alumno 43	1,75	0,3	**-1,45**

Fuente: elaboración propia

En este caso, el 29,2 % de los alumnos empeoran su rendimiento frente al 28,6 % que lo hacia en el grupo experimental. De entre estos 7 alumnos en donde la diferencia entre calificaciones se ha dado en sentido negativo, tenemos 4 que, si bien muestran un índice de empeoramiento en torno o superior a un punto, un análisis de las calificaciones obtenidas en los exámenes del resto de unidades refleja que dicha variación no es significativa dada la variabilidad de sus notas.

Por otro lado, el caso más significativo es el del alumno 29, que analizamos a continuación:

TABLA 4.4.5.2.13. *Resultados ítems del Alumno 29*

Ítem 1 (1pto)	Ítem 2 (1pto)	Ítem 3 (1,5 ptos)	Ítem 4 (1 pto)	Ítem 5 (1,5 ptos)	Ítem 6 (1 pto)	Ítem 7 (1,5 ptos)	Ítem 8 (1,5 ptos)	Total
1	0,9	1,5	0,5	0	0	0	0	3,9

Fuente: elaboración propia

- Ítem 2: El alumno ha aplicado correctamente el Teorema de Pitágoras para obtener la longitud del cateto de un triángulo rectángulo conocidos el otro cateto y la hipotenusa cometiendo un error de cálculo al obtener la raíz del resultado.

- Ítem 4: El alumno indica que dos figuras son semejantes entre sí, pero no hace referencia a la razón de semejanza en la justificación.
- Ítem 5: El alumno ha realizado un razonamiento totalmente erróneo de lo que significa ser semejantes en relación a la superficie.
- Ítem 6: El alumno parece no comprender el concepto de escala. Realiza cálculos con los números que aparecen al azar.
- Ítem 7: Utiliza el teorema de Pitágoras para resolver el problema sin hacer mención a la razón de semejanza ni a ningún concepto relacionado con ello.
- Ítem 8: No ha resuelto la actividad.

Podemos observar como, a parte de los errores de cálculo detectados, el alumno presenta ciertas carencias en la aplicación de los conceptos relacionados con la semejanza lo que puede deberse a la falta de comprensión de dicha noción, lo que ha dado lugar a su baja calificación.

A la vista de todos los resultados en este epígrafe obtenidos, podemos concluir dos cosas:

- No se han detectado diferencias significativas a nivel global entre el grupo experimental y el de control a la hora de abordar un modelo de examen de tipología tradicional propuesto por el profesor de la asignatura, lo que es indicativo de que la metodología desarrollada prepara a los alumnos frente a este tipo de pruebas satisfactoriamente.

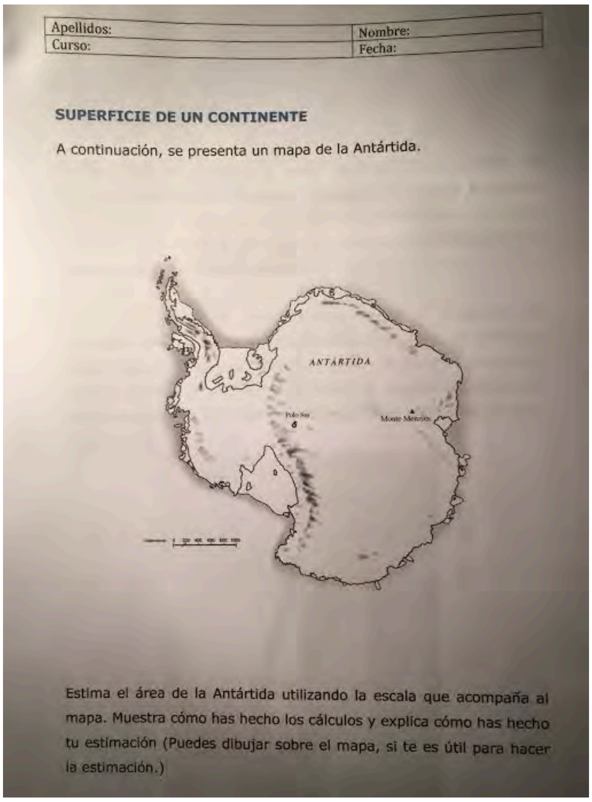
- El hecho de no poder valorar a través del post-test realizado hasta que punto la metodología aplicada repercute positivamente en el rendimiento de los alumnos en términos de calificaciones, nos conduce a preparar un modelo de examen de características competenciales a través del cual poder estudiar si, efectivamente, el aprendizaje se ha producido de manera más significativa en los alumnos que han estado expuestos a ella.

4.4.5.3. Comparación del rendimiento en términos de calificaciones a partir del examen competencial entre el grupo experimental y el grupo de control.

Debido a los resultados obtenidos en el epígrafe anterior y teniendo en cuenta que los alumnos de 2º ESO del Instituto van a realizar la prueba PISA para este curso 2011-2012, se ha preparado una prueba competencial con los siguientes propósitos:

- Estudiar si el aprendizaje de los contenidos se ha producido de manera más significativa en alumnos que han seguido nuestra metodología.
- Comprobar si la metodología desarrollada prepara al alumnado frente a este tipo de pruebas, mejorando los aportes de la tradicional.

La prueba diseñada consta de cuatro ítems que versan sobre los contenidos del Teorema de Pitágoras y Semejanza aplicados a contextos reales y de cierta cercanía al alumno. El primero de ellos se ha extraído directamente de PISA 2003, mientras que los 3 restantes son de elaboración propia:


Apellidos: Nombre:
Curso: Fecha:

SUPERFICIE DE UN CONTINENTE

A continuación, se presenta un mapa de la Antártida.

Estima el área de la Antártida utilizando la escala que acompaña al mapa. Muestra cómo has hecho los cálculos y explica cómo has hecho tu estimación (Puedes dibujar sobre el mapa, si te es útil para hacer la estimación.)

FIGURA 4.5.5.3.1. *Examen competencial de 2º ESO*

Apellidos:	
Curso:	Nombre:
	Fecha:

LA ESCALERA DE INCENDIOS

Las escaleras de incendios o grúas modernas de los coches de bomberos disponen de un pequeño ordenador que calcula la medida que debe alargarse la grúa, para alcanzar un edificio de 20 m, 25 m, 30 m, 35m, 40 m, 45m, 50 m, etc. en función de la distancia entre la base de la grúa y la base del edificio.

Estos datos deben de estar introducidos en el programa del ordenador para que funcione correctamente la escalera, de modo que dada la distancia entre la base de la grúa y la base del edificio, y dada la altura a la que se quiere llegar, la escalera se alarga de manera automática la medida necesaria para que el bombero alcance su objetivo.

Apellidos:	
Curso:	Nombre:
	Fecha:

¿Qué valores se deben introducir en las tablas que aparecen a continuación para que el ordenador funcione y la escalera cumpla su función?

Distancia de la base de la grúa a la base del edificio: 25 metros

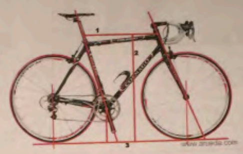
Altura a la que se quiere llegar	20	25	30	35	40	45	50
Metros de escalera necesarios							

FIGURA 4.5.5.3.2. *Examen competencial de 2º ESO*

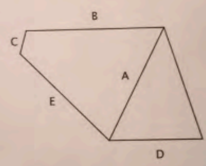
Apellidos:	Nombre:
Curso:	Fecha:

LAS DIMENSIONES DE LA BICICLETA

En una tienda de deportes, entre otras cosas, se venden bicicletas de carretera. A continuación puedes ver una foto con las partes fundamentales:



En la tienda únicamente se venden bicicletas de la talla M, cuyas dimensiones viene dadas en la siguiente tabla:



Parte de la bicicleta	Dimensiones en centímetros
Tubo vertical o de sillín (A)	46 cm
Tubo horizontal (B)	50 cm
Tubo o pipa de dirección (C)	12 cm
Vaina (D)	25 cm
Tubo E	55 cm

Apellidos:	Nombre:
Curso:	Fecha:

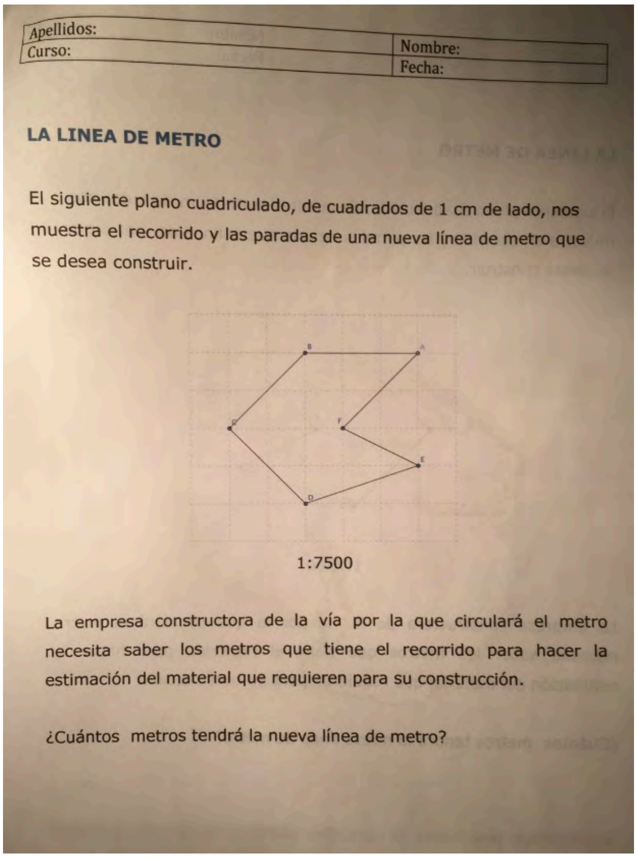
El dueño de la tienda de deporte pide al fabricante la posibilidad de que fabrique bicicletas de las tallas S y L.

Sabemos que la talla de las bicicletas viene determinada por las dimensiones del tubo vertical, de manera que:

Talla	Dimensión Tubo vertical
S	43,7 cm
L	50,6 cm

¿Qué dimensiones tendrán el resto de piezas en estás bicicletas?

FIGURA 4.5.5.3.3. *Examen competencial de 2º ESO*



Apellidos:

Curso: Nombre:

Fecha:

LA LINEA DE METRO

El siguiente plano cuadriculado, de cuadrados de 1 cm de lado, nos muestra el recorrido y las paradas de una nueva línea de metro que se desea construir.

1:7500

La empresa constructora de la vía por la que circulará el metro necesita saber los metros que tiene el recorrido para hacer la estimación del material que requieren para su construcción.

¿Cuántos metros tendrá la nueva línea de metro?

FIGURA 4.5.5.3.4. *Examen competencial de 2º ESO*

El estudio lo vamos a realizar a partir de la comparación de los dos post-test de los que se disponen en cada grupo: la calificación del examen tradicional y la calificación del examen competencial.

A continuación se encuentran las tablas con las calificaciones obtenidas por los alumnos de cada grupo en cada uno de los ítems y globalmente en la prueba competencial que compone el post-test2, así como las calificaciones del pre-test y post-test1. En dichas tablas se encuentran únicamente los datos de los alumnos que han realizado ambas pruebas:

TABLA 4.4.5.3.1. *Resultados pre-test/post-test1/post-test 2 2º A*

2ºA	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Prueba competencial Post-test 2				
			Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Suma Total
Alumno			(2,5 pto)	(2 pto)	(2,5 pto)	(3 pto)	
Alumno 2	2,57	2,2	0	2	0	3	5
Alumno 3	5,13	5,9	0	2	0	2,5	4,5
Alumno 4	5,03	5,3	0	2	2,5	1,5	6
Alumno 5	7,22	5,8	0	2	1,25	0	3,25
Alumno 6	4	4,7	2,5	1	0	2,5	6
Alumno 7	7,93	9,5	2	2	2,5	2,5	9
Alumno 9	3,2	5,7	0	2	1	0	3
Alumno 10	4,23	5	0	1,5	0	0	1,5
Alumno 11	6,7	7,7	0	2	2,5	3	7,5
Alumno 12	5,77	4	1,25	2	0	1,75	5
Alumno 13	7,65	6,5	0	2	2,5	2	6,5
Alumno 14	7,15	4,4	0	2	0	0	2
Alumno 15	6,58	6,8	2	0	0	0	2
Alumno 16	7,58	8,5	1,25	2	2,5	2,5	8,25
Alumno 17	5,25	6	1,25	2	0	1	4,25
Alumno 18	9,07	9	2,5	2	2,5	3	10
Alumno 19	2,52	4,3	0	1,7	0	1	2,7
Alumno 20	5	6,3	0	2	0	0	2
Alumno 21	6,95	7,2	2,5	2	1,75	2	8,25

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.5.3.2. *Resultados pre-test/post-test1/post-test 2 2º B*

2ºB	Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Prueba competencial Post-test 2				
Alumno			Ítem 1 (2,5 pto)	Ítem 2 (2 pto)	Ítem 3 (2,5 pto)	Ítem 4 (3 pto)	Suma Total
Alumno 22	5,43	6,2	0	2	1,25	0	3,25
Alumno 23	2,92	2,2	0	2	0	0	2
Alumno 24	1,75	2,3	0	0	0	0	0
Alumno 25	8,53	7,8	1	2	2,5	1,5	7
Alumno 26	9,77	10	1,25	2	2,5	3	8,75
Alumno 28	9,13	10	1,25	2	2,5	1,5	7,25
Alumno 30	3,58	2,5	0	0	0	0	0
Alumno 31	6,53	5,6	1	2	1,25	0	4,25
Alumno 32	4,78	5,5	0	0	0	0	0
Alumno 33	8,62	9,7	1	2	0	0	3
Alumno 34	6,43	9	0	2	2,5	2	6,5
Alumno 35	4,87	9,4	0	2	2	1	5
Alumno 36	4,1	4,9	0	2	0	0	2
Alumno 38	6,78	8,2	0	2	1,25	3	6,25
Alumno 39	4,42	5,3	0	2	2,5	0	4,5
Alumno 41	3,97	5,8	0	2	2,5	0	4,5
Alumno 43	1,75	0,3	0	0	0	0	0
Alumno 44	4,88	6,5	0	2	2	0,75	4,75
Alumno 45	1,4	1,8	0	0	0	0	0

Fuente: elaboración propia

A partir de una primera aproximación a los datos, observamos:

TABLA 4.4.5.3.3. *Calificaciones post-test2 2º A*

Calificaciones Post-test 2 2ºA		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Suspensos		9	47,4 %	47,4 %
Aprobados	[5, 6)	2	10,5 %	57,9 %
	[6,7)	3	15,8 %	73,7 %
	[7,9)	3	15,8 %	89,5 %
	[9, 10)	2	10,5 %	100 %
	Total	10	52,6 %	
Total		19	100 %	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.4.5.3.4. *Calificaciones post-test2 2º B*

Calificaciones Post-test 2 2ºB		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Suspensos		13	68,4 %	68,4 %
Aprobados	[5, 6)	1	5,3 %	73,7 %
	[6,7)	2	10,5 %	84,2 %
	[7,9)	3	15,8 %	100 %
	[9, 10)	0	0 %	100 %
	Total	6	31,6 %	
Total		19	100 %	

Fuente: elaboración propia

Se observa como el porcentaje de suspensos en el post-test del grupo experimental es menor que el del grupo de control (47,4 % < 68,4%).

La comparación del análisis descriptivo de ambos grupos incluyendo el segundo post-test, nos ofrece los siguientes resultados:

TABLA 4.4.5.3.5. *Análisis descriptivo pre-test/post-test 1 y 2 2º A*

Curso 2º ESO (A)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,69	1,81	31,81%	21
Post-test1	6,02	1,87	31,53%	21
Post-test2	5,09	2,63	51,67%	19

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

TABLA 4.4.5.3.6. *Análisis descriptivo pre-test/post-test 1 y 2 2º B*

Curso 2º ESO (B)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,44	2,47	45,40%	24
Post-test1	6,00	3	50,00%	24
Post-test2	3,63	2,81	77,41%	19

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

En los resultados de los post-test2 de ambos grupos volvemos a encontrar CV muy altos, lo que hace que la media sea un valor poco representativo de los datos. No obstante, cabe destacar la diferencia que existe entre el valor de ambas medias, siendo la del grupo experimental mayor que la de control además de encontrarse dentro del rango del aprobado (5,09 > 3,63).

Veamos que ocurre con los valores de la mediana y los cuartiles:

TABLA 4.4.5.3.7. *Cuartiles pre-test/post-test1/post-test2 2º A*

Curso 2º ESO (A)			
	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	4,57	5,34	7,15
Post-test1	4,40	5,90	7,00
Post-test2	2,70	5,00	7,50

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

TABLA 4.4.5.3.8. *Cuartiles pre-test/post-test1/post-test2 2º B*

Curso 2º ESO (B)			
	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	3,78	5,15	6,60
Post-test1	3,20	6	8,60
Post-test2	,00	4,25	6,25

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

Analizando los resultados de cada grupo por separado y comparando la de los dos post-test2 entre sí, podemos señalar que:

- la mediana y los percentiles del post-test2 del grupo experimental se corresponden casi fielmente con los parámetros de una situación estándar e ideal para este tipo de datos. Además, salvo el percentil 25 que está por debajo del valor del primer cuartil del pre-test y del post-test1, el post-test2 se comporta de manera casi idéntica que las otras dos variables con respecto al resto de parámetros.

- en el caso del grupo de control, tanto la mediana como los percentiles presentan valores por debajo de los de la situación estándar (percentil 25= ,00 < 2,50; mediana= 4,25 < 5,00; percentil 75= 6,25 < 7,50) siendo reseñable el percentil 25 que tiene un valor de ,00. Además, la comparación de la mediana y los percentiles del post-tes2 con los obtenidos en el pre-test y post-test1, deja claro como se ha producido un descenso significativo en las calificaciones de los alumnos empeorando su rendimiento.
- Los valores obtenido en el post-test2 del grupo de experimental son mejores que los obtenidos en el grupo de control, además de presentar menos variaciones con respecto a su pre-test y post-tes1, señalando como los alumnos que han seguido la metodología han mantenido su rendimiento a diferencia de lo ocurrido en el grupo de control.

Para estudiar de manera adecuada la comparación entre los dos grupos, pasamos a realizar las siguientes pruebas:

1. Prueba Shapiro-Wilk para comprobar la normalidad de los post-test de ambos grupos:

TABLA 4.4.5.3.9. *Pruebas de normalidad post-test2 2º A*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Pre-test	,142	21	,200*	,960	21	,564
Post-test1	,077	21	,200*	,985	21	,986
Post-test2	,126	19	,200*	,942	19	,287

a. Corrección de la significación de Lilliefors.

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

TABLA 4.4.5.3.10. *Pruebas de normalidad post-test2 2º B*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Pre-test	,136	24	,200*	,953	24	,443
Post-test1	,138	24	,200*	,933	24	,200
Post-test2	,165	19	,188	,923	19	,131

a. Corrección de la significación de Lilliefors.

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

A partir de los resultados que nos proporciona la prueba de Shapiro-Wilk, podemos asumir la normalidad de las variables tanto para el post-test2 del grupo experimental [S-W= ,942; p-valor= ,287] como para el del grupo de control [S-W= ,923; p-valor= ,131].

2. Un prueba t para datos pareados a partir del pre-test y el post-tes2 en cada grupo, con el fin poder estudiar si existen diferencias significativas en el rendimiento de los alumnos, en términos de calificaciones, en función de si han seguido la nueva metodología o no:

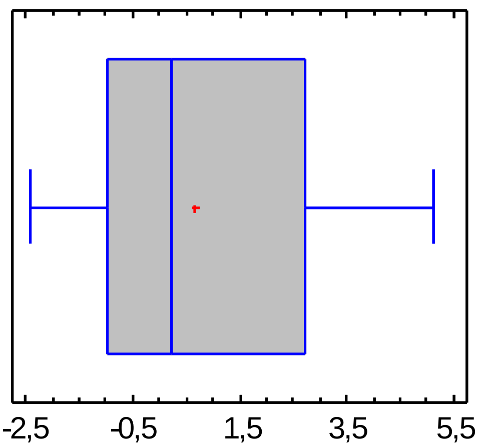


FIGURA 4.4.5.3.5. *Gráfico de Caja y bigotes pre-test/post-test2 2º A.*
(SPSS 19)

Los resultados proporcionados por el gráfico de caja y bigotes así como por la propia prueba t para datos pareados nos llevan a concluir que no existen diferencias significativas a nivel global entre el pre-test y el post-test2 [t=1,31491; p-valor= ,2050].

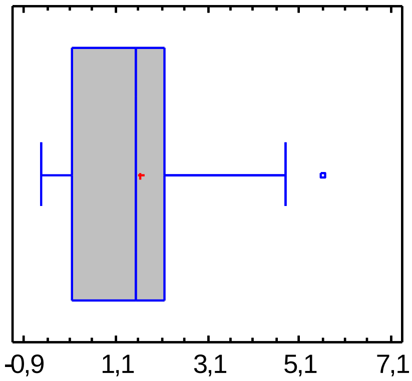


FIGURA 4.4.5.3.6. *Gráfico de Caja y bigotes pre-test/post-test2 2º B.* (SPSS 19)

Los resultados obtenidos al aplicar la prueba t para datos pareados nos indican que no podemos suponer igualdad de medias [t=4,27751; p-valor= ,0005], por lo que sí existen diferencias entre el pre-test y el post-test2, siendo mejores los resultados obtenidos en el pre-test. El gráfico nos muestra la existencia de un outlier que se corresponde con el caso del alumno 33, analizado más adelante.

3. Un prueba t para datos pareados a partir del post-test1 y el post-tes2 en cada grupo, con el propósito de estudiar si la metodología empleada comprobar prepara al alumnado ante a este tipo de pruebas en comparación con la metodología del centro:

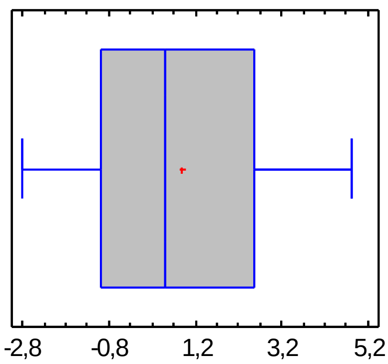


FIGURA 4.4.5.3.7. *Gráfico de Caja y bigotes post-test1/post-test2 2º A.* (SPSS 19)

Los resultados proporcionados por el gráfico de caja y bigotes así como por la propia prueba t para datos pareados nos llevan a concluir que no existen diferencias significativas a nivel global entre el post-test1 y el post-test2 [t=1,83133; p-valor= ,0837].

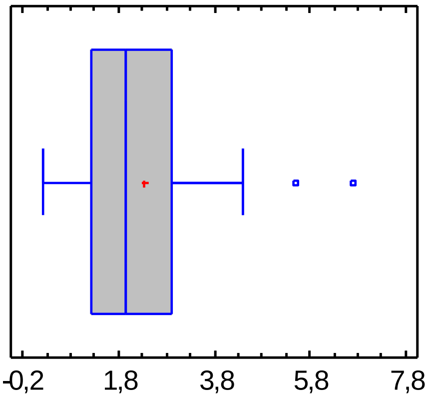


GRÁFICO 4.4.5.3.8. *Gráfico de Caja y bigotes post-test1/post-test2 2º B.* (SPSS 19)

En este caso, los resultados obtenidos al aplicar la prueba t para datos pareados nos indican que no podemos suponer igualdad de medias [t=5,5846; p-valor= ,0000], por lo que si existen diferencias entre ambos post-test, siendo mejores los resultados obtenidos en el post-test1.

Nuevamente el gráfico muestra la existencia de dos outliers: alumno 32 y el alumno 33. Pasamos a estudiar las respuestas dadas y errores cometidos por cada uno de ellos en cada ítem de la prueba competencial con el fin de dar explicación a esta situación:

Alumno 32

Obtuvo una calificación de 4,78 en el pre-test y de 5,5 en el post-test1 en contraposición con el 0 obtenido en el post-test2:

TABLA 4.4.5.3.11. *Resultados ítems del post-test2 del Alumno 32*

Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Prueba competencial Post-test 2				
		Ítem 1 (2,5 pto)	Ítem 2 (2 pto)	Ítem 3 (2,5 pto)	Ítem 4 (3 pto)	Suma Total
4,78	5,5	0	0	0	0	0

Fuente: elaboración propia

- Ítem 1: El alumno traza el contorno de la figura. Aplica un cambio de escala incorrecto sobre las dimisiones que ha obtenido al medir el contorno, obteniendo lo que podría ser el perímetro de la Antártida.

- Ítem 2: El alumno utiliza el teorema de Pitágoras de manera errónea en el cálculo de los datos pedidos, intercambiando las dimensiones de las longitudes conocidas del triángulo por una falta de comprensión e identificación de la hipotenusa.
- Ítem 3: El alumno no realiza este ítem por falta de comprensión de lo que se pide.
- Ítem 4: El alumno da la respuesta en función del numero de cuadros que atraviesa cada trayectoria. No identifica triángulos rectángulos para aplicar Pitágoras.

Alumno 33

Obtuvo una calificación de 8,62 en el pre-test y de 9,7 en el post-test1 en contraposición con el 3 obtenido en el post-test2:

TABLA 4.4.5.3.12. *Resultados ítems del post-test2 del Alumno 33*

Media 1ªY 2ª Pre-test	G Post-test 1	Prueba competencial Post-test 2				
		Ítem 1 (2,5 pto)	Ítem 2 (2 pto)	Ítem 3 (2,5 pto)	Ítem 4 (3 pto)	Suma Total
8,62	9,7	1	2	0	0	3

Fuente: elaboración propia

- Ítem 1: El alumno traza el contorno de la figura y realiza una triangulación de la misma. Aplica un cambio de escala correcto sobre las dimisiones que ha obtenido al medir el contorno, obteniendo lo que podría ser el perímetro de la Antártida.
- Ítem 3: El alumno no realiza este ítem por falta de comprensión de lo que se pide.
- Ítem 4: El alumno no realiza este ítem por falta de comprensión de lo que se pide.

Ambos alumnos, conocedores de la expresión algebraica que representa el Teorema de Pitágoras, manifiesta una falta de comprensión y de habilidades visuales en relación a dicho objeto de conocimiento, particularmente reseñable en el caso del alumno 32.

Del mismo modo, parecen no haber interiorizado de manera adecuada la noción de semejanza y su aplicación en contextos y situaciones que van más allá de la mera actividad de cálculo numérico.

A partir de los resultados en este epígrafe obtenidos, podemos concluir que la metodología empleada en el grupo experimental, en la que convergen la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos, ha contribuido en la adquisición de los conocimientos y en su aprehensión de manera más significativa y global que en el caso del grupo de control que ha seguido la metodología del centro, los cuales manifiestan una falta de compresión e interiorización de los conceptos, señal de que se ha producido un proceso de enseñanza-aprendizaje que probablemente se ha basado en el trabajo mecánico, memorístico y operacional.

Este hecho queda evidenciado al estudiar el rendimiento de los alumnos del grupo de control, tanto a lo largo del curso como en el examen correspondiente a la unidad aquí tratada, y la diferencia que se produce, en sentido negativo, en dicho rendimiento a la hora de afrontar situaciones contextualizadas en las que deben aplicar los conceptos supuestamente adquiridos.

A demás, el análisis efectuado también nos indica como la metodología desarrollada prepara a los alumnos tanto para la realización de pruebas de carácter tradicional y clásicas, cómo para pruebas competenciales y contextualizadas lo que revela el amplio potencial a nivel formativo que presenta al producirse un verdadero aprendizaje.

4.5. Ingeniería Didáctica para el aprendizaje de la noción de función y sus propiedades.

El concepto de función, sus propiedades y aplicaciones, ha tenido un papel significativo tanto en el desarrollo de avances científicos y culturales, donde es considerado como un instrumento que facilita el modelamiento de diversas situaciones, como en el propio desarrollo histórico de las matemáticas, pues constituye un pilar fundamental del análisis matemático con la consiguiente repercusión en otras ramas de las matemáticas.

La función es el objeto matemático que más cercano se encuentra del contexto físico (cinemática, dinámica, etc.) y económico, por no hablar de su utilidad en el campo de la medicina, meteorología, ingenierías, etc. Por otro lado, en el mundo actual, y en particular en los medios de comunicación, existe una gran cantidad de información sobre diversos fenómenos de cambio que hacen uso de tablas, gráficas, relaciones, en definitiva, de funciones, para transmitirla a los sujetos. Tampoco debemos olvidar las múltiples situaciones de la vida cotidiana donde la función de proporcionalidad (función lineal) hace aparición, ya sea a la hora de hacer una receta de cocina, hacer la compra, etc.

El objetivo de intentar determinar con la mayor precisión posible cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que ha dado sentido al estudio de las funciones a lo largo de la historia. Por ello, "es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de mas de 2000 años" (Ruíz Higueras, 1998, p. 105), pues ha sufrido múltiples transformaciones hasta llegar a ser lo que conocemos hoy en día.

Aunque aparentemente el concepto de función pueda parecer algo intuitivo y de fácil entendimiento, diversos investigadores han dado cuenta de las dificultades que entraña su proceso de enseñanza-aprendizaje (Blázquez y Ortega, 2001; Hitt, 2000 y 2003, González-Martín y Camacho, 2005, Díaz Lozano, Haye, Montenegro, Córdoba, 2015; Farfán y García, 2015). Esto se debe a que en dicho proceso intervienen aspectos tales como las ideas preconcebidas de los estudiantes, factores y estrategias de visualización, la utilización de distintos registros de representación semiótica y la modelación como elemento integrador de dichas representaciones, lo que genera diferentes niveles de abstracción y de significados.

¿Qué utilidad tienen las funciones en el día a día?¿Qué problemas y dificultades tienen los alumnos en el aprendizaje de las funciones?¿Cómo podemos introducir y relacionar los distintos lenguajes y representaciones implicadas en el tratamiento de las funciones?¿Cuáles deben ser preponderantes?¿Qué metodología debemos emplear?¿Qué tipos de situaciones, problemas o materiales podemos utilizar? Estas son algunas de las cuestiones que debemos plantearnos antes de introducir a nuestros estudiantes en este campo de las matemáticas, que si bien han podido tratar de manera informal no será hasta secundaria donde se abordará formalmente.

En este apartado se pretende caracterizar el concepto de función y su proceso de enseñanza-aprendizaje, centrándonos, principalmente, en la utilización de los distintos registros de representación, pues el aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de los sistemas de representación que permiten expresar un fenómeno de cambio o dependencia entre variables, y posteriormente, por la coordinación de los mismos, que tan importante es para nuestro tema de estudio.

También estudiaremos el papel que juega la simulación, modelación y contextualización en el aprendizaje significativo del concepto de función, así como los preconceptos, dificultades y errores que manifiestan los alumnos.

4.5.1. El Concepto de Función: Breve reseña histórica

El nacimiento del concepto de función ha generado gran controversia entre aquellos autores que han dedicado su trabajo al estudio del origen y evolución de dicho concepto. Algunos admiten y defienden el carácter funcional en trabajos de naturaleza astronómica desarrollados por antiguas civilizaciones como los babilónicos y griegos, mientras que otros sitúan su verdadero origen en el siglo XVII con Descartes, Fermat, Leibnitz y Newton donde una serie de condiciones y situaciones permitieron acuñar por primera vez el término función aunque fuese con cierto carácter restringido.

Incluso hay autores que lo enmarcan más tardíamente con Dirichlet en el siglo XIX.

Un breve análisis de la evolución del concepto nos permitirá, según Farfán y García (2015) y Ruíz Higueras (1998, p. 105-106),

- Identificar concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución y generalización y por tanto, pueden describirse como obstáculos epistemológicos.
- Aportar conocimiento relevante para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Siguiendo a Azcarate y Deulofeu (1989), Ruíz Higueras (1998) y Farfán y García (2015), se pueden distinguir tres períodos que tratan de recoger los momentos más importantes y las principales contribuciones en el desarrollo histórico del concepto de Función:

- *Edad Antigua*: en las antiguas civilizaciones, lejos de dar una idea y formulación genérica de la noción de función y de aproximarse formalmente a conceptos generales como cantidades variables, dependencia, variable dependiente e independiente, etc., se sentaron los cimientos para el desarrollo de los mismos, pues las aportaciones vinculadas a casos y estudios concretos realizados por babilónicos y griegos, fueron fundamentales para su aparición posterior.

  Se podría decir que las primeras relaciones funcionales de las que se tiene constancia aparecen en Babilonia estrechamente ligadas a problemas astronómicos, pues su interés por tratar de predecir determinados sucesos les condujo a la búsqueda de relaciones de dependencia basadas en la observación de fenómenos que se repetían de manera periódica.

  Dichas observaciones arrojaban datos que eran recogidos en tablas dispuestas y configuradas de tal manera que guardan gran parecido con las tan utilizadas tablas de valores que nuestros estudiantes construyen a la hora de trabajar cualquier función.

La utilidad de estas tablas babilónicas iba más allá de la mera representación de resultados, ya que se empleaban como medio para poder realizar interpolaciones, extrapolaciones y buscar regularidades.

Posteriormente, con la civilización griega, aparecen los primeros obstáculos de tipo conceptual que impidieron un avance más directo hacia el concepto general de dependencia entre variables y función. Dichos obstáculos son los relacionados con la idea de proporción, inconmensurabilidad y disociación entre número y magnitud.

Según René de Cotret (1985), la

> costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo la forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo de la noción de función (...) la homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza, pudo ser también un obstáculo al desarrollo de la noción de función (...) La inconmensurabilidad y las paradojas son obstáculos a la noción de función, puesto que discretizan los números y esto impide que se establezcan relaciones generales numéricas entre las magnitudes (Cotret, 1985, citado por Ruíz Higueras, 1998, p. 109).

Estas consideraciones imposibilitaron descubrir la relación de dependencia entre variables de diferentes magnitudes, aspecto fundamental para el desarrollo del concepto función.

- *Edad Media*: Dentro de este periodo destacan las referencias explicitas, ya sea a través del Lengua Natural o mediante la representación gráfica, de ciertas nociones y relaciones de dependencia.

  Con el estudio de fenómenos de la naturaleza como el movimiento, el calor, la intensidad, la velocidad, la distancia, la densidad, etc. realizados por las escuelas filosóficas de Oxford y París durante el siglo XIV, aparece un concepto íntimamente relacionado con la idea de función: cantidad variable.

Por otra parte, Nicolás Oresme realiza una importante innovación muy relacionada con nuestro tema central de estudio: ¿Por qué no hacer un dibujo que represente el modo en que las cosas varían?

Por ejemplo, para representar cómo varía la velocidad de un objeto a lo largo del tiempo con aceleración constante, utiliza representaciones cuya construcción es la que sigue:

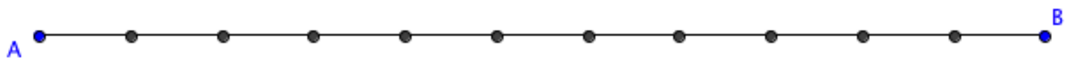


FIGURA 4.5.1.1. *Fase 1 de la construcción de Nicolás de Oresme.*
(Azcárate y Deulofeu, 1989, p. 46)

Los puntos del segmento AB representan los instantes de tiempo, correspondiéndose con lo que Oresme denomina longitudes. Para cada instante traza un segmento perpendicular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en ese momento.

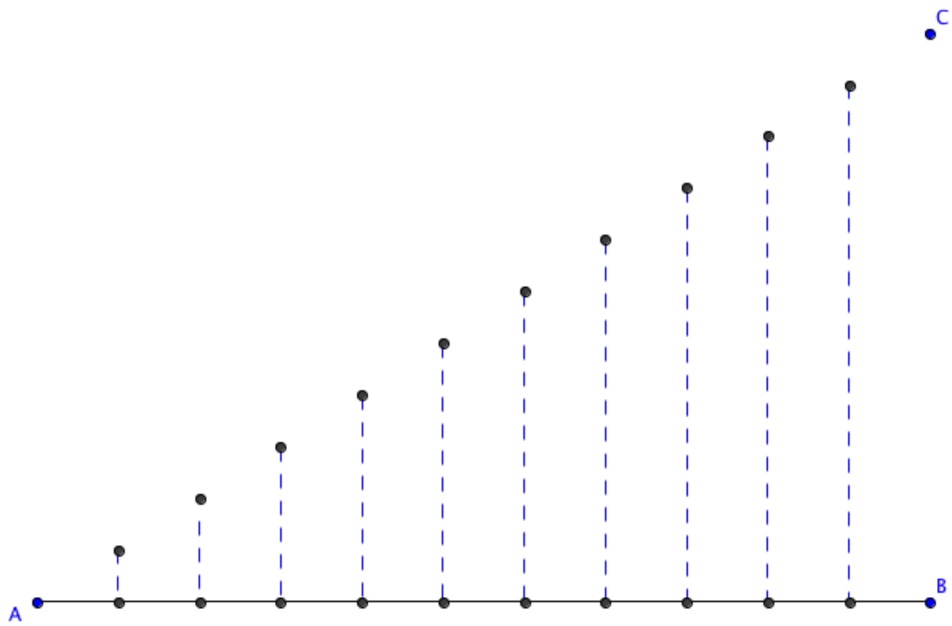


FIGURA 4.5.1.2. *Fase 2 de la construcción de Nicolás de Oresme.*
(Azcárate y Deulofeu, 1989, p. 45)

La unión de los extremos de los segmentos que representan la velocidad determinan una recta que indica la variación de la velocidad de un objeto a lo largo del tiempo en condiciones de uniformidad.

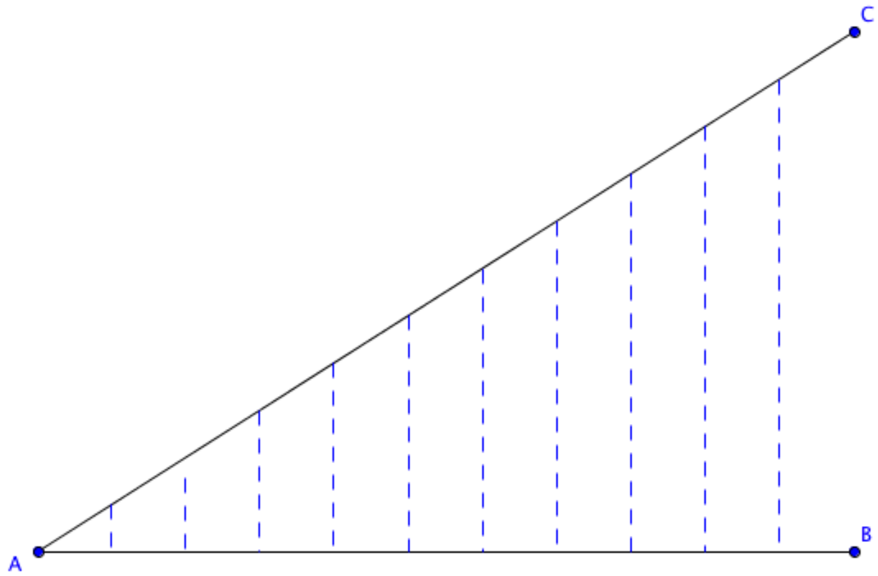


FIGURA 4.5.1.3. *Fase 3 de la construcción de Nicolás de Oresme.* (Azcárate y Deulofeu, 1989, p. 46)

Para Oresme existen tres tipos de representaciones:

- o Representación de una variación uniformemente uniforme: siguiendo con el símil de la velocidad y el tiempo, se correspondería con el caso de que la velocidad sea constante:

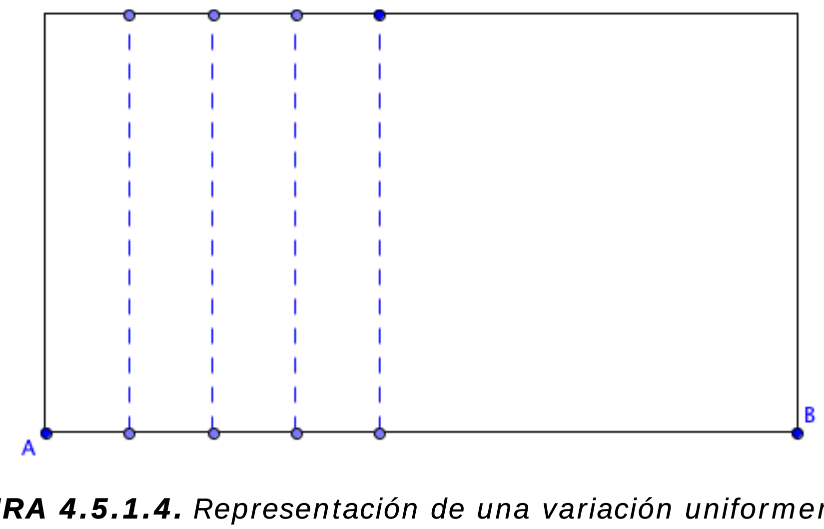


FIGURA 4.5.1.4. *Representación de una variación uniformemente uniforme.* (Higueras, 1998, p. 114)

- Representación de una variación uniformemente deforme: se corresponde con el caso de la variación de la velocidad de un objeto a lo largo del tiempo con aceleración constante:

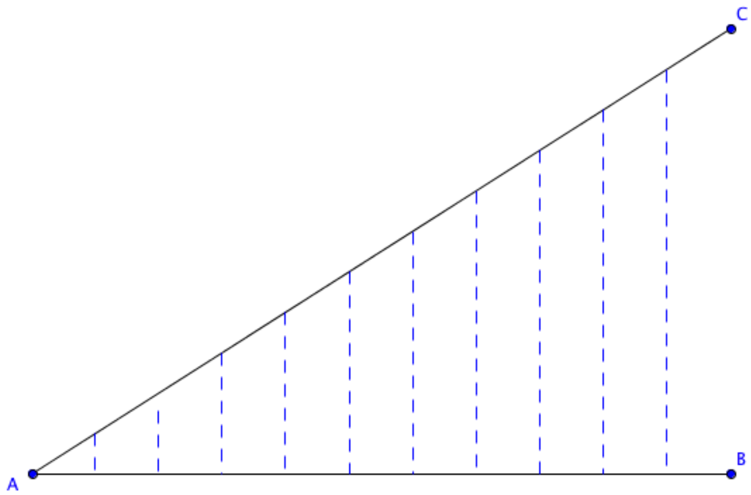


FIGURA 4.5.1.5. *Representación de una variación uniformemente deforme.* (Higueras, 1998, p. 114)

- Representación de una variación deformemente deforme: según el ejemplo que estamos siguiendo, se corresponde con el caso de que la aceleración del móvil no sea constante:

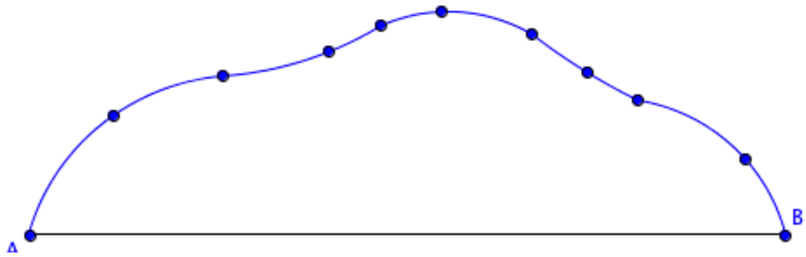


FIGURA 4.5.1.6. *Representación de una variación deformemente deforme.* (Higueras, 1998, p. 114)

Este tipo de representaciones, que supusieron un gran paso hacia el establecimiento y formalización del concepto general de función, guarda bastante relación con la actual representación gráfica de una función sobre unos ejes cartesianos, aunque insuficiente para ser considerada como la expresión que determina una relación de dependencia entre variables entendida tal y como la entendemos hoy en día.

- *Edad Moderna*: no será hasta ya entrado el siglo XVII donde aparecerá el término función y las primeras definiciones gracias al nacimiento de la geometría analítica y el calculo infinitesimal de la mano de matemáticos como Descartes y Fermat, y Newton y Leibnitz respectivamente.

  A partir de ese momento, además de la utilización del registro de la lengua natural, el registro tabular y el registro gráfico para referirse a una dependencia entre magnitudes o cantidades variables, se utiliza por primera vez, en concreto en *La Géométrie* de Descartes, el registro algebraico para expresar y calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de otra en términos de *x* e *y*.

  El empleo de la notación algebraica y la resolución de ecuaciones supuso la superación del obstáculo epistemológico resultado de la inconmensurabilidad y los problemas de diferenciación existente en número y magnitud en Grecia, según Sierpinska (1989b).

  El término función aparece por primera vez de la mano de Leibnitz en 1673 en referencia a la relación que guardan las ordenadas y las abscisas en la determinación de la tangente a una curva. Sería en 1718 cuando Bernoulli enunciara la primitiva definición de función de la que se tenga constancia a lo largo de la historia: "Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de la manera que sea, por esta variable y por constante" (Bernoulli, 1718, citado en Hitt, 2000, p. 77)

  Posteriormente, Euler sigue a su maestro y en el año 1784 da la siguiente definición detallando algunos de los subconceptos y términos relacionados con las funciones, recogida por Hitt (2000, p. 77):

  - Una cantidad constante es una cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor.
  - Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o, si se quiere, una cantidad universal, que comprende todos los valores determinados.

- Una cantidad variable se determina cuando se le atribuye un valor especifico cualquiera .
- Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes.
- Entonces, una función de variables es también una cantidad variable.

Además, Euler es el primero en utilizar la expresión *f(x)* para designar una relación funcional. La definición de Lagrange la identifica cómo *toda expresión de cálculo*:

> Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas (Lagrange, citado por Ruíz Higueras, 1998, p. 127).

En 1821, Cauchy propone una definición en términos de dependencia entre variables que supuso el principio de la independencia de una relación funcional y toda expresión analítica:

> Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable (Cauchy, citado por Ruíz Higueras, 1998, p. 131).

Fourier, por su parte, nos dice que

> En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas están sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola. (Fourier, citado por Azcárate y Deulofeu, 1989, p. 52).

Dirichlet, en 1837, propone la siguiente definición general de función:

> *Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x* (Dirichlet, 1837, citado por Azcarate y Deulofeu, 1989, p. 52).

Y más tarde, Riemann define el concepto como sigue: "se dirá que y es función de x si a todo valor de bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de relación que une a x y a y" (Riemann, 1858, citado por Ruíz Higueras, 1998, p. 132)

Estas últimas definiciones presentan todas una disociación entre el concepto de función y la intuición geométrica.

Como se puede apreciar, el concepto de función ha pasado por múltiples etapas y fases desde aquella noción primitiva e intuitiva que tenían las antiguas civilizaciones hasta llegar al grado de abstracción, formalidad y generalidad con la que podemos encontrarla en cualquier texto a nivel universitario en la actualidad, cosa que no es de extrañar pues, como dice Spivak (1978),

> (...) el concepto más importante de las Matemáticas es, sin dudarlo, el de función. En casi todas las ramas de la Matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad (p.47).

4.5.2. Funciones: su enseñanza y aprendizaje

El objeto función ocupa un posición importante como contenido matemático en la educación secundaria, pues su estudio engloba a su vez subconceptos como el de variable, dependencia, dominio, crecimiento y decrecimiento, periodicidad, tendencia, transformación, máximo, mínimo, etc. Este hecho unido a que se trata de un concepto que puede abordarse a partir de una multiplicidad de registros de representación, lo convierten en un objeto complejo cuya enseñanza precisa cierta atención especial.

Hitt (1996) nos dice que "la aprehensión del concepto de función no parece una tarea fácil, la gran cantidad de investigaciones realizadas con estudiantes para detectar obstáculos en el aprendizaje del concepto confirman la dificultad de aprehensión del concepto" (Hitt 1996, p. 246).

Hitt no es el único en defender esta postura, pues investigaciones en Didáctica de las Matemáticas realizadas por Markovits, Eylon, y Bruckheimer (1988), García y Llinares (1995), Ruiz Higueras (1998), De la Rosa (2000), Solar, Azcárate y Deulofeu (2009), Díaz Lozano, Haye, Montenegro, Córdoba (2015) entre otros, dan cuenta de esta problemática, y resaltan la necesidad de plantear secuencias didácticas dirigidas a la construcción progresiva de los distintos conceptos estrechamente vinculados con las funciones y a la utilización de distintos sistemas de representación. Sin embargo, la realidad es muy distinta. Es habitual encontrarse que en el aula predomina el trabajo basado en la resolución de problemas estandarizados, reduciéndose la idea de este concepto a la memorización de un conjunto de técnicas o reglas que pasan a ser imágenes mentales que quedan sujetas al procedimiento y no al concepto, producto de un proceso de enseñanza-aprendizaje mecánico.

Además, la representación de las funciones se limita principalmente a su construcción gráfica siguiendo unas instrucciones dadas, creándose "significaciones restringidas del concepto, lo que oculta la riqueza y la complejidad de la noción como objeto matemático" (García, Serrano y Espitia, 1997). Esto conduce de manera errónea a que el registro gráfico, en múltiples ocasiones, adquiera más valor como instrumento de comunicación de la información que como objeto propio del conocimiento que resalta características que otros registros de representación no pueden manifestar.

Bajo la perspectiva de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), la relación funcional es un objeto de conocimiento importante dentro del pensamiento matemático abstracto, y consideran cuatro puntos de vista que contribuyen a la construcción, definición y comprensión de la misma:

- El punto de vista de la acción de los estudiantes, en el que distinguen la tarea de interpretación, acción por la cual se da sentido a una expresión matemática, y la tarea de construcción, acto de generar algo nuevo. Además, la interpretación y la construcción llevan asociadas 4 tareas: predicción, clasificación, traslación y escala.

- El punto de vista de la situación, por el que se entiende que la función esté o no contextualizada, y el fin para el que es usado el gráfico: social, científico o matemático. Los autores indican que, aunque está asumido que los alumnos tienen más facilidad para llevar a cabo tareas en situaciones contextualizadas que en situaciones abstractas, no está claro cómo influye el contexto en el proceso de aprendizaje.
- El punto de vista de las variables, como objetos de las funciones y los gráficos.
- El punto de vista del enfoque, que hace referencia a la localización de la atención en una tarea específica, el gráfico y sus componentes, el sistema de coordenadas...

Las creencias y conocimientos previos que los estudiantes poseen sobre una determinada noción antes de que tenga lugar un aprendizaje formal, pueden obstaculizar la comprensión, lo que acentúa la necesidad de tomarlos en consideración en el momento de pensar, reflexionar, diseñar, preparar y realizar la intervención didáctica en el aula.

En el caso de las funciones, existe un conocimiento implícito en los niños de edades tempranas debido al papel que juega la intuición, fruto de las vivencias y situaciones que encuentran en su día a día. Este es un rasgo fundamental que no debe pasar desapercibido, pues, por un lado, es el germen para la comprensión del concepto como correspondencia entre dos conjuntos y relación entre dos variables, y por otro, puede generar concepciones erróneas derivadas, de forma lógica, del sentido común y las intuiciones del estudiante.

Seguidamente, nos centramos en el estudio de algunas concepciones, dificultades y obstáculos que emergen en el aprendizaje dela funciones.

4.5.2.1. Algunas consideraciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones: concepciones, dificultades y obstáculos

El objetivo de este apartado es realizar una breve presentación de las posibles concepciones presentes en alumnos o reflejadas en materiales curriculares, así como estudiar los obstáculos, errores y dificultades que subyacen en el aprendizaje y compresión de las funciones.

El concepto de función es, posiblemente, uno de los objetos matemáticos que a más definiciones y aproximaciones responde. Como hemos visto, no ha permanecido inerte, sino que ha ido variando a lo largo del tiempo adaptándose y acoplándose a los avances de cada época.

Bajo la perspectiva de la evolución histórica, siete son las concepciones asociadas a la noción de función (Ruíz Higueras, 1998), quedando establecidas en el siguiente orden en función de su aparición:

- *Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos a cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables.* Esta concepción se encuentra ligada a la relación causa-efecto que aparece en magnitudes físicas variables que intervienen en los fenómenos de carácter natural.
- *Razón o proporción,* relacionada con las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.
- *Visión sintética.* Vinculada con la relación de dependencia cualitativa de magnitudes físicas (luz, movimiento, calor, etc.) representadas a través de gráficos cuyo significado se adquiere de forma global.
- *Curva.* Esta concepción emerge al establecer conexión entre la Geometría y el Álgebra.
- *Expresión analítica,* la cual permite expresar la dependencia entre variables por medio de ecuaciones en x e y.
- *Aplicación.* Hace a alusión a la noción de correspondencia arbitraria: *si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera*

que siempre que se atribuya un valor numérico a x, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

- *Función como terna f=(F,X,Y)*. Según está concepción, una función es un conjunto de pares ordenados de manera que si dos pares (x,y) y (x,z) del conjunto XxY tienen el mismo primer elemento, deben tener siempre igual el segundo.

Ligados de manera más o menos directa a algunas de estas concepciones, Ruíz Higueras (1998) destaca los siete obstáculos epistemológicos más significativos que pueden emerger a partir de ellas:

- *Obstáculo de la concepción estática*, relacionado con la creencia y convicción de que la variabilidad es una característica propia y exclusiva de las magnitudes físicas.
- *Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números*, ligado a la consideración de las primeras como entidades continuas y de los segundos como discretos.
- *Obstáculo de la razón o proporción*, el cual deriva del carácter rigurosa y estrictamente escalar que se le concede a la proporción, pasando totalmente inadvertido su aspecto funcional.
- *Obstáculo de la homogeneidad en las proporciones*, lo que dificulta encontrar y estudiar dependencias entre variables de diferentes magnitudes.
- *Obstáculo de la concepción geométrica de las variables*, lo que impide realizar el producto de un número mayor de tres factores y realizar la división si la dimensión del dividendo es menor que la del divisor, limitando el desarrollo de la noción de función.
- *Obstáculo de la concepción algebraica,* relacionado con la idea de que una relación entre variables solo es función si puede expresarse por medio de ecuaciones.

- *Obstáculo de la concepción mecánica de la curva*, las cuales no eran consideradas como un conjunto de puntos que cumplen condiciones dadas a través de una relación funcional.

Cada uno de estos siete obstáculos son propios de la construcción y evolución histórica del concepto de función, intrínsecos al objeto de conocimiento y totalmente objetivos (Díaz Lozano, Haye, Montenegro, Córdoba, 2015). Sin embargo, no son los únicos existentes, pues también debemos centrar nuestra atención en aquellos que emergen de las particularidades del proceso de enseñanza-aprendizaje: cómo se recoge el concepto de función en el curriculum oficial, cómo se presenta en los libros de texto y cómo lo transmite el profesor en el aula, todo ello sin perder de vista las concepciones e ideas propias del alumno.

En este sentido, Sierpinska (1992) identifica en los estudiantes algunas concepciones, que, posteriormente, han sido estudiadas y tenidas en cuenta en diversas investigaciones (Ruiz Higueras, 1998):

- *Concepción primitiva*: Una función es un desplazamiento de puntos sobre el plano o sobre una línea.
- *Razón o proporción*: En un desplazamiento de puntos sobre el plano; la nueva posición se puede describir en relación con la posición inicial por una razón de distancias desde un punto fijo.
- *Visión sintética de la curva*: La función se identifica con su representación en el plano.
- *Tabla numérica*: Las funciones viene dadas por su tabla de valores.
- *Expresión algebraica*: Una función se identifica por su ecuación.
- *Visión analítica de la curva*: La función es un ente “abstracto” en unos ejes de coordenadas.
- *Relación funcional*: Existe un tipo especial de relaciones que llamamos funciones.

Además, establece una serie de categorías que se pueden observar y estudiar en el sujeto a lo largo del proceso global de comprensión del concepto de función:

TABLA 4.5.2.1.1. *Categorías en la comprensión del concepto de función*

1. La identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea es un problema práctico para resolver.
2. La identificación de regularidades en las relaciones entre cambios es un medio de tratar los cambios.
3. La identificación de los objetos que cambian.
4. Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático (en términos de cantidades conocidas y desconocidas y en términos de variables y constantes).
5. Discriminación entre variables dependiente e independiente.
6. Generalización y síntesis de la noción de número.
7. Discriminación entre número y cantidad.
8. Síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función.
9. Discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan para describir su ley.
10. Discriminación entre definiciones y descripciones de objetos.
11. Síntesis de la concepción general de la función como un objeto.
12. Discriminación entre los conceptos de función y relación.
13. Discriminación entre las nociones de función y sucesión.
14. Discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y los segmentos "rellenos" de la curva de ciertas funciones.
15. Discriminación entre los diferentes significados de la representación de funciones y las funciones mismas.
16. Síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones.
17. Generalización de la noción de variable.
18. Síntesis de los "roles" de la noción de función y de causa.
19. Discriminación entre las nociones de relación causal y funcional.

Fuente: elaboración propia a partir de Sierpinska, 1992

Ruíz Higueras (1998), en un estudio basado en el análisis de las respuestas efectuadas por un grupo de estudiantes de secundaria ante una serie de ítems centrados en determinar y estudiar que concepciones poseen sobre la noción de función, describe seis tipologías, pudiendo, un mismo sujeto, manifestar una o varias de las mismas en función de la situación o tarea a la que se enfrente:

1. *Algoritmo de cálculo*: se identifica la función matemática con procedimientos de cálculo llevadas a cabo a través de las expresiones algebraicas dadas de forma explícita.

2. *Expresión algebraica*: para una gran mayoría de los estudiantes, una expresión algebraica y una función son lo mismo, definiendo esta última bajo términos como es un fórmula, es una ecuación o es un expresión con letras y números.

3. *Gráfica construida a partir de una fórmula*: para otro amplio porcentaje de los alumnos, una función es una gráfica que se ha construido a partir de los valores dados a una fórmula, lo que indica el fuerte vínculo existente entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función.

4. *Ideograma*: esta concepción se encuentra asociada al reconocimientos ostensivo de la *forma* de la función, de modo que el alumno identifica la expresión algebraica de una función como función si cumple ciertas condiciones "sintácticas", y la representación cartesiana de una función es considerada como función según sea su construcción y configuración.

5. *Correspondencia entre conjuntos numéricos*: esta concepción se da en menor porcentaje y en la mayoría de los casos no se suele precisar ni el conjunto de partida ni el de llegada.

6. *Transformación*: es la concepción que menos se da entre los estudiantes.

Teniendo en cuenta estas concepciones y a partir de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario realizado, Higueras detecta una serie de obstáculos clasificándolos como sigue:

TABLA 4.5.2.1.2. *Obstáculos en la concepción del concepto de función*

Obstáculos didácticos	*Técnicas algebraicas*: Los métodos empleados por los estudiantes para obtener una ecuación a partir de los datos e incógnitas de un problema, pueden suponer un obstáculo en la adquisición de los conceptos de variable y variabilidad.
	Fórmulas geométricas y físicas: la consideración de las fórmulas de tipo geométrico y físico como elementos que relacionan magnitudes, puede constituirse en un obstáculo, pues pasa desapercibido el carácter de variabilidad que se da en las mismas.
	Proporcionalidad: El empleo, tan común y extendido, de la regla de tres supone un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional.
Obstáculos a nivel de conocimiento del estudiante	*Intuiciones*: las ideas previas y enraizado de las primeras intuiciones sobre la noción de variación, pueden suponer un gran obstáculo para la comprensión del concepto de función.
	Números naturales y enteros: el carácter simplificativo que ofrecen los números naturales y enteros genera la mayor parte de las producciones de los estudiantes se limiten a ellos restringiendo el concepto de función al de sucesión en detrimento del desarrollo y comprensión de las funciones de variable real.
	Concepción de función como expresión algebraica y concepción como gráfica construida a partir de una fórmula: ambas concepciones pueden constituirse en obstáculos propiamente dichos al darse la posibilidad de que el estudiante no considere función a toda aquella relación entre variables que no pueda expresarse mediante el registro algebraico o gráfico.

Fuente: elaboración propia a partir de Ruíz Higueras, 1998

En esta línea, son algunas las investigaciones que muestran la existencia de dificultades cognitivas y obstáculos didácticos en la comprensión de la dependencia funcional. En la tabla adjunta se recogen, brevemente, algunos de los resultados y conclusiones presentados en dichos estudios:

TABLA 4.5.2.1.3. *Estudios sobre obstáculos en la concepción de función*

Markovits et *al*., (1986)	• Uso abusivo de la función lineal: el empleo habitual de ejemplos centrados en la función lineal puede constituir un obstáculo. El alumno tenderá a identificar como función únicamente aquellas que respondan a dicho patrón.
Janvier, (1987)	• Confusión gráfico-dibujo, gráfico-verbal e intervalo-punto, debido a la transferencia de las propiedades y características de un sistema de representación a otro. • Personal *ditractors*: Errores inducidos por la experiencia personal, lo que dificulta la construcción de la noción de función. • Discretización de los gráficos: sea la gráfica que representa una función discreta o continua, un índice elevado de alumnos tienden a centrarse en un número discreto de puntos, lo que se constituye en un obstáculo a la hora de hacer la distinción entre discreto y continuo.
Leinhardt, Zaslavsky y Stein, (1990)	• Cuando la función viene definida como relación entre variables, el estudiante tiende a considerar una variable como elemento único, pasando por alto la relación funcional. • La fuerte tendencia hacia la linealidad y sus propiedades, conduce al fracaso a la hora de tener que identificar relaciones funcionales. Esto genera una visión restringida del concepto de función.

Deulofeu, (1995)	• Construcción de una gráfica a partir de la expresión algebraica: en diversas ocasiones se trata de un procedimiento elemental y generalmente descontextualizado que puede constituirse en un obstáculo. Ello es debido a que el alumno considera el trazado de la gráfica como aquel elemento que permite unir los pares de puntos que son los que realmente representan la relación de dependencia entre variables según su concepción. • Tendencia a la discretización: los estudiantes se centran en los pares de puntos que consideran más relevantes y restringiendo la dependencia de las variables puestas en juego a las coordenadas de dichos puntos. • Funciones continuas: las funciones continuas suponen un obstáculo en el desarrollo y comprensión del concepto de función discontinua.
Knuth, (2000)	• Desconexión entre las coordenadas de los puntos y las soluciones de la expresión algebraica que representa la función, considerándolos como elementos independientes. • La dificultad en los estudiantes a la hora de relacionar y conectar sus representaciones internas se deben en gran medida a la influencia de las representaciones externas que tengan.

Fuente: elaboración propia

Las ideas expuestas hasta el momento aportan importante información, así como elementos de análisis a la hora de afrontar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la funciones en clase de matemáticas.

Antes de abordar el tratamiento que hacen los libros de texto de las relacionales funcionales, sus subconceptos y propiedades, es necesario situarlo dentro del currículo escolar para así tener una visión global y general de la progresión, estructuración y secuenciación establecida por los programas oficiales. Si estudiamos el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria de la actual Ley Orgánica de Educación (MEC, 2007), observamos que desde el primer curso de la Secundaria Obligatoria existe un bloque específico de Funciones y Gráficas (Bloque 5), donde se recogen los siguientes contenidos y criterios de evaluación:

TABLA 4.5.2.1.4. *El concepto de función en la LOE*

	Contenidos	**Criterios de**
1° ESO	*Organización de datos en tablas de valores. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas. Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales. Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Interpretación puntual y global de informaciones pre sentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.*	Criterio de Evaluación 6: *Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.*
2° ESO	*Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.*	Criterio de Evaluación 5: *Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.*

3° ESO	*Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.* *Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.* *Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.* *Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.* *Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.* *Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.*	Criterio de Evaluación 5: *Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.*
4° ESO (A)	*Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.* *La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.* *Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.*	Criterio de Evaluación 5: *Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas.* Criterio de Evaluación 6: *Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento.*
4° ESO (B)	*Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.* *La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.* *Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.* *Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.* *Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.*	Criterio de Evaluación 4: *Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.*

Fuente: elaboración propia a partir de MEC, 2007

Lo primero que cabe destacar es la fuerte tendencia existente hacia la identificación del concepto función con dos de sus registros de representación, y a la coordinación y conexión entre ellos. Nos referimos a la utilización de los gráficos cartesianos y las expresiones algebraicas, obteniendo los primeros a partir de las segundas. Este hecho puede desembocar en una perdida total de sentido de las nociones de variable y dependencia, quedando ocultas por el tratamiento aritmético y el cálculo que deriva de la conversión del registro algebraico al gráfico. Además, es generador de confusiones a la hora de determinar el tipo de relación de dependencia que se da entre las variables.

Se observa como la progresión de los contenidos a lo largo de la secundaria sigue un modelo en espiral acumulativo, de modo que en cada curso se retoman los conceptos tratados con anterioridad y se amplían.

Aunque aparentemente se promueve un aprendizaje de la noción de función vinculada a la aplicabilidad en diversos contextos y situaciones reales, se induce de manera implícita al tratamiento de las relaciones funcionales de forma teórica, lo que puede constituirse, a corto plazo, en un obstáculo,, siendo el alumno incapaz de aplicar las nociones aprehendidas fuera del contexto de su aprendizaje por la utilización del concepto de manera mecánica

No hay que olvidar que aunque los programa oficiales proporcionan ciertos principios metodológicos y pedagógicos, la transmisión de los conocimientos dependen en última instancia de las secuencias de enseñanza, las actividades específicas, materiales didácticos y planificación del aula que desarrolle el profesor.

Pero esta no es la única manera en que se encuentra el objeto función en nuestro sistema educativo, ya que a partir de los programas oficiales, los manuales escolares se configuran de una manera específica jugando un papel decisivo en el desarrollo de las concepciones de los sujetos, y por ello deben ser tenidos en cuenta como posibles elementos explicativos de las concepciones, dificultades e inconsistencias que se dan en los estudiantes.

Según Ruíz Higueras (1998), tres son las principales concepciones que promueven los textos escolares:

- *Expresión algebraica o fórmula*: Una relación funcional siempre se puede expresar a través del algebra.
- *Curva representada en un diagrama cartesiano*: Rectas, parábolas, funciones a trozos, cúbicas, hipérbolas, etc. cuyo proceso de construcción se lleva a cabo mediante la obtención de pares de puntos utilizando como intermediario el registro tabular.
- *Aplicación entre conjuntos numéricos*: Como su propio nombre indica, una función es una aplicación entre dos conjuntos numéricos, de modo que se da una correspondencia entre los elementos de uno y otro conjunto.

Si se analiza el modo en que los libros de texto de secundaria que hemos utilizado en la investigación (Anaya, SM y Santillana), tratan el objeto función, se aprecia como todas lo abordan como dependencia entre variables, ejemplifican con situaciones de la vida cotidiana y se presenta a través del registro tabular, gráfico y algebraico. A partir del análisis de los manuales realizado en el capítulo 2, podemos asegurar que ninguna de las editoriales hace alusión al concepto de función como aplicación o como par ordenado de puntos, lo que choca con el hecho de la existencia en los estudiantes de preconceptos relacionados con la correspondencia entre elementos de dos conjuntos.

En los primeros cursos persiste la idea del estudio de la función vinculada a la función de proporcionalidad, función afín y función constante. En este sentido, una inadecuada actuación del profesor en la conducción del proceso de enseñanza-aprendizaje puede generar grandes bloqueos, pues el estudiante tiende a identificar la idea de línea recta con la relación funcional.

Por último, debemos señalar el gran peso que existe del algebra en la unidades que se centran en el contenido motivo de estudio. Esto se debe, siguiendo a Ruíz Higueras, principalmente a dos factores,

- el epistemológico, por el papel jugado por el algebra en la evolución y desarrollo histórico del objeto función;
- al didáctico, como consecuencia de la fuerza que posee el algebra como herramienta en la resolución mecánica y algorítmica de problemas en los que intervienen relaciones funcionales.

Los aspectos contemplados en este apartado ponen en evidencia ciertos fenómenos didácticos a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones, pues proporcionan una serie de consideraciones para la detección y diagnóstico de posibles dificultades y obstáculos que nuestros estudiantes pueden manifestar en la compresión de las relaciones funcionales y los subconceptos que forman parte de ellas. Nos ofrece una panorámica general desde las primeras aproximaciones intuitivas fundamentadas en las experiencias personales hasta la formalización por parte del profesor, lo que nos permite crear oportunidades de enseñanza que integren tanto los conocimientos matemáticos, garantizando que no se produzca una banalización del saber sabio a efectos de ser enseñado, como didácticos, ofreciendo la posibilidad de determinar estrategias, técnicas y métodos apropiados para el proceso de enseñanza.

En este sentido, vamos a abordar a continuación algunas aportaciones referentes a nuestro tema de estudio, los Registros de Representación Semiótica, relacionadas precisamente con el proceso de construcción y comprensión del concepto de función.

4.5.2.2. El papel de los registros de representación en el aprendizaje del concepto función.

A lo largo de todo nuestro trabajo hemos centrado la atención en el papel que juegan los sistemas de representación en los procesos cognitivos, considerándolos piezas fundamentales en la construcción y significación de los conceptos matemáticos.

El caso concreto de la aprehensión de las funciones, admite una gran variedad de Registros de representación:

- El Registro de la Lengua Natural: el lenguaje común es empleado para describir las variables y la relación de dependencia entre ellas. Nos da una visión descriptiva y cualitativa de la relación funcional.

- El Registro Figural-icónico: el menos utilizado. Se centra en la representación pictórica de situaciones que representan algún tipo de relación funcional.

- El Registro Geométrico: Hace alusión al concepto de función a través de Diagramas de Venn o representaciones similares, permitiendo al alumno establecer una relación de dependencia entre los conjuntos en donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un solo elemento en el conjunto de llegada.

- El Registro Numérico: corresponde a la representación de función mediante un conjunto puntos dados a partir de sus coordenadas.

- El Registro Algebraico: se trata de la representación de funciones mediante las expresiones algebraicas con dos variables que determinan rectas, parábolas, curvas, etc.

- El Registro Tabular: representa la relación de dependencia entre las variables a partir de los datos organizados en una tabla, haciendo corresponder un valor de entrada (x) con uno de salida (y). En ocasiones es insuficiente pues no siempre se puede extraer información relativa a las características globales de la función a partir de él.

- El Registro Gráfico: se trata de la representación en el plano cartesiano. Permite ver las características globales de la función (máximos, mínimos, periodicidad, crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, etc.)

La interacción, traducción y coordinación entre estos sistemas de representación es una de las condiciones fundamentales para el aprendizaje de las funciones y la exploración de sus características y propiedades, sin embargo, no todos son considerados (Hitt, 2000 y 2003; Díaz Lozano, Haye y Macías, 2012; González-Martín y Camacho, 2005; Díaz Lozano, Haye, Montenegro, Córdoba, 2015).

De estos seis registros de representación, el Registro algebraico, el Registro Gráfico y el Registro Tabular son los más empleadas tanto por el profesor en el aula como en los libros de texto de los estudiantes. En la mayoría de las ocasiones, como ya se observó en el análisis de las actividades de los manuales escolares, se establece una conexión, en un único sentido, entre el registro algebraico y el registro gráfico, utilizando el registro tabular para realizar la conversión entre los dos sistemas de representación anteriores. Ambas representaciones emplean sistemas de símbolos muy diferentes que, correctamente articulados, contribuyen de manera significativa a la comprensión del concepto función. No obstante, no es habitual trabajar la conversión en sentido inverso, es decir, trasladar las funciones representadas en unos ejes coordenados a una expresión algebraica. Esto se debe principalmente a que se trata de una tarea de mayor dificultad por la falta de congruencia entre las unidades significantes de ambos registros. Sin embargo, la realización de ese tipo de conversiones proporciona al alumno un mayor conocimiento de lo que representa una relación funcional.

Otro factor a tener en cuenta es la falta de conversión de las representaciones tabular, gráfica y algebraica hacía la representación verbal, en detrimento de la argumentación. Con asiduidad se trabajan la interpretación de las gráficas contextualizadas a través de preguntas sobre aspectos concretos de la gráfica, pero en ningún momento se demanda que el alumno tenga que hacer una descripción global y verbal de la gráfica.

Esta visión tan reducida y simplista de los procesos de coordinación y conversión entre registros, conduce a los estudiantes a mecanizar procesos sin comprenderlos, dándose como resultado concepciones erróneas sobre lo que una gráfica significa y la información que puede aportar.

Varios han sido los autores cuyo objetivo principal dentro de sus investigaciones ha sido el de estudiar las funciones y la relación que se puede establecer entre los múltiples sistemas de representación que interactúan en el proceso de aprendizaje. Como resultado de ello, han trabajado en la posibilidad de determinar estrategias apropiadas para el proceso de enseñanza.

Así, Janvier (1987) concreta que cuatro son los Registros de Representación fundamentales con los que se puede interactuar al trabajar con funciones, cuya articulación viene dada en la siguiente tabla de doble entrada:

TABLA 4.5.2.1.5. *Articulación de representaciones según Janvier*

	Lengua Natural	**Tablas**	**Gráficos Cartesianos**	**Expresiones Algebraicas**
Lengua Natural		Medir	Esbozar	Modelizar
Tablas	Leer		Dibujar	Ajustar
Gráficos Cartesianos	Interpretar	Leer		Identificar la función
Expresiones Algebraicas	Reconocer o identificar una fórmula	Calcular	Dibujar	

Fuente: elaboración propia a partir de Azcárate y Deulofeu, 1989, p. 63

Como se puede apreciar, Janvier distingue entre dos tipos de traducciones, aquellas relacionadas con la interpretación, la visualización y la lectura por un lado, y las concernientes a la construcción, diseño y elaboración por el otro.

Azcárate (1995) sostiene que cada una de las representaciones propuestas por Janvier permiten expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables.

Por su parte Bagni (2004), remarca el desmesurado protagonismo que la representación gráfica ha adquirido en el estudio de las funciones, lo que dificulta, en diversas ocasiones, la adecuada conceptualización del concepto. Expone en sus estudios la importancia de no prescindir del uso y coordinación de otros registros semióticos entendidos en el sentido de Duval, pues así se evita que se constituyan en los estudiantes obstáculos producidos por la identificación, de manera inmediata y exclusiva, de la noción de función con la representación en los ejes cartesianos.

El considerar el sistema gráfico como eje principal en el aprendizaje de las funciones genera algunas concepciones erróneas y dificultades, descritas por varios autores, en la interpretación de gráficas cartesianas por parte de los estudiantes:

- Búsqueda de regularidad: el estudiante busca modelos reconocibles par determinar si son funciones o no. Los gráficos que presentan algún tipo de irregularidad son descartados como gráficos de funciones, debido, fundamentalmente, a la falta de linealidad y a la tendencia que tienen los alumnos a conectar puntos.
- Restricción al punto: el alumno centra la atención en un punto o grupo de punto en contraposición a la concepción global de la función y sus características (variación, concavidad, convexidad, etc.)
- Relación gráfica-ecuación: el abuso del registro gráfico y una coordinación inadecuada con el registro algebraico, puede generar la falta de relación entre ambas, pues los alumnos no terminan de comprender porqué las coordenadas de cualquier punto de la gráfica de la función satisfacen la expresión algebraico de la misma.

Para Bloch (2003), las variadas representaciones que se pueden utilizar cuando nos enfrentamos a un mismo problema referente a las relaciones funcionales, no tienen el mismo método de resolución y por tanto no muestran las mismas características de la función. Bloch sostiene que inicialmente, como primera aproximación al concepto, la representación gráfica es la más adecuada, pues de un solo golpe de vista permite acercarse a sus propiedades y caracterizarla. El hecho de que este tipo de registro solo permita representar parte de la función supone una limitación, además de no ser lo suficientemente manejable para realizar algunos tipos de demostraciones. Es en este momento cuando el registro algebraico adquiere valor para Bloch (2003), pues es una forma útil para realizar demostraciones, no obstante no lo es tanto en el sentido visual ni intuitivo. Los registros numérico y tabular, aunque muy útiles en el estudio de la dependencia entre variables, los considera ambiguos y generadores de obstáculos por su carácter discreto. Por todo ello, el autor resalta la importancia de la utilización del máximo número de representaciones, pues de alguna manera están implícita o explícitamente conectados y garantizan un aprehensión completa del objeto función.

La comprensión de esta noción involucra la articulación coherente de estos registros de representación que juegan un papel primordial en la resolución de problemas, ya que la elección adecuada de uno u otro determina en gran medida el propio proceso de aprendizaje, tanto del concepto en si como de los que subyacen. No podemos hablar de un solo sistema de representación en términos absolutos, pues, como dice Tall (1991), cuando se hace alusión a un concepto,

> (…) es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que tenga representaciones visuales o una colección de expresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las experiencias verbales no son la primera cosa evocada en nuestra mente…. Cuando escuchas la palabra función, puedes evocar la expresión $y=f(x)$, puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como : $y=x^2$ o $y=$ sen x, $y = \ln x$, etc. (Tall, 1991, p. 68).

Todo aprendizaje en matemáticas exige establecer relaciones entre diversos sistemas de representación, resultando dicho proceso pauperrimo si no se recurre a la coordinación de registros, siendo didácticamente necesario. La falta de coordinación no entorpece u obstaculiza toda la comprensión, pero si conlleva limitaciones en la transferencia de saberes, en su interiorización y su aplicabilidad. En el caso concreto de las funciones, aunque la tarea de coordinación y conversión entre representaciones pudiera parecer algo simple y sin dificultad, son muchos los aspectos que intervienen que pueden convertirse en verdaderas trabas para el aprendizaje si no son tratados debidamente, por lo que el profesor debe prestarles tiempo y atención.

4.5.2.3. Simulación y Modelación en el aprendizaje de las funciones.

Las técnicas que se emplean en el aprendizaje y trasferencia de conocimiento matemático basadas en situaciones y datos relativos al mundo real y más particularmente de la física, han adquirido gran interés con el paso de los años.

La incorporación de nuevas técnicas didácticas y pedagógicas que centran el proceso de enseñanza-aprendizaje en la contextualización, la realidad y la aplicación, con el fin de que los conceptos adquieran significado, han cobrado fuerza en las últimas décadas. Dicho enfoque supone un mayor nivel de funcionalidad al constituir un punto importante en el aprendizaje significativo, permitiendo superar muchas de las dificultades que emergen en la enseñanza en el aula.

Freundental (1980) señaló que:

> La perspectiva correcta se da principalmente a partir del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección. No: primero hacer las matemáticas y después regresar al 'mundo real', sino el mundo real primero, y después la matematización. El mundo real ¿qué significa? perdonen esta expresión descuidada. Al enseñar a matematizar el 'mundo real' está representado por un contexto significativo que involucra un problema matemático. 'Significativo' por supuesto que quiere decir significativo para quienes aprenden. Las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos y a mi me gustaría que las matemáticas más abstracta fueran enseñadas dentro de los contextos más concretos (Freundental,1980, p. 20).

Es aquí donde la modelación y la simulación juegan un papel fundamental, y más concretamente en el en el aprendizaje de las funciones ya que, siguiendo a Hitt (2000),

> (...) a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo (Hitt, 2000, p. 81).

Tanto la simulación como la modelación mantienen un fuerte vínculo con los sistemas de representación, abarcando símbolos, figuras, gráficas, esquemas, construcciones geométricas, etc., que facilitan la interpretación y predicción de fenómenos del día a día en los que intervienen relaciones funcionales a la par que expresan el concepto de función allanando el camino de lo concreto a lo abstracto en relación a esta área del conocimiento matemático.

La siguiente tabla recoge los aspectos más importantes y potencial didáctico que caracteriza a la modelación y la simulación en lo referente a la noción de función:

TABLA 4.5.2.1.6. *Modelación y Simulación en el concepto de función*

	Definición	Aspectos relacionados con la enseñanza de las fracciones
Modelación	Construir una representación de algo. Un modelo es una representación de estructuras.	Se puede presentar el concepto de forma ágil y atractiva. Rescata ideas intuitivas que permiten por un lado, potenciar el proceso de aprendizaje, y por otro, atajar posibles concepciones que se conformen en obstáculos posteriores. Se provoca que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. Favorece la distinción de variables y la relación entre ellas, las cuales a su vez, impulsan la construcción de otros subconceptos. Función de motivación en el estudiante.
Simulación	Experimentación que imita aspectos de la realidad permitiendo trabajar en condiciones similares a las reales en entornos creados artificialmente. Una simulación infiere un proceso o interacción de entre las estructuras del modelo para crear un patrón de comportamiento.	

Fuente: elaboración propia a partir de Hitt, 2000

Si observamos, por ejemplo, como varía la elongación de un muelle según aumentamos o disminuimos el peso que podemos colgar de él, podemos, mediante una función, describir el comportamiento y establecer la relación entre el peso aplicado y la elongación producida.

Este tipo de situaciones son las que nos proporcionan modelos para analizar, estudiar, definir, y detectar propiedades no solo en relación con el fenómeno físico que estamos observando, sino del objeto en estudio en cuestión: las funciones.

La simulación, la modelación, la utilización de diversos registros de representación y la combinación de todos los aspectos abordados previamente, pueden coordinarse de tal manera que se obtenga como producto procesos de enseñanza de mayor interés y significación desde el punto de vista de transmisión del conocimiento en general y de las funciones en particular.

4.5.2.4. La Visualización

Desde hace siglos, el papel jugado por la percepción visual como proceso e instrumento que permite el acercamiento a los objetos matemáticos, ha sido parte esencial en la aprehensión de los conocimientos.

La visualización fortalece en gran medida el proceso cognitivo que conduce al aprendizaje, permitiendo conjeturar, demostrar, inducir, deducir, interpretar, transformar, etc., y por ello ha adquirido importancia en todos los niveles y etapas educativas (Gómez-Chacón, 2014).

Duval (1999) nos dice lo siguiente en relación a la visualización:

> Desde un punto de vista psicológico la 'visión' se refiere a percepción visual y por extensión a imaginación visual. Como percepción, la visión envuelve dos funciones cognitivas: La primera consiste en lograr un acceso directo a cualquier objeto físico. Es por ello que la percepción visual es siempre tomada como un modelo para la noción epistemológica de intuición. Nada es más convincente que lo que se ve. En este sentido, la visión es opuesta representación, aún de las "imágenes mentales".
>
> La segunda función es muy diferente. La visión consiste en la aprehensión simultánea de varios objetos o el campo completo (…) la visión provee un acceso directo al objeto, la visualización está basada en la producción de una representación semiótica (Duval, 1999; 12).

Debido a la importancia que tiene en nuestra investigación la utilización de los diversos registros de representación en la conceptualización y comprensión del concepto función, interesa explicar como la visualización se integra en el proceso cognitivo.

La visualización debe considerarse un aspecto esencial en el estudio de las funciones, ya que ofrece grandes posibilidades para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, puesto que ayuda a la comprensión del concepto y sirve de cimiento hacia la abstracción del mismo.

La aplicación y desarrollo de procesos visuales supone una mejora en la comprensión. Visualizar una función no se reduce simplemente a verla, echarle un vistazo o contemplar su gráfica, sino que la visualización conlleva la puesta en funcionamiento de una red de estructuras cognitivas que nos permite obtener resultados y conclusiones del conjunto de informaciones dadas en forma gráfica.

Castro y Castro (1997) sostienen que el “incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos” (Castro y Castro,1997, p. 99)

Resumiendo, para potenciar el aprendizaje de las funciones, contenido relevante dentro del campo de las matemáticas y con mayor aplicabilidad en otras áreas, es necesario e imprescindible hacer énfasis en el desarrollo del proceso de visualización, pues genera una comprensión global, integradora y holística del concepto y subconceptos que lo circundan, estimulando un aprendizaje significativo.

4.5.3. Presentación de la ingeniería

Como ya hemos indicado, las tareas de enseñanza aprendizaje dirigidas hacia la ejercitación y la resolución de actividades rutinarias y mecánicas, han conducido a grandes errores didácticos.

La práctica educativa en el aula se circunscribe y limita, en la mayoría de las ocasiones, a esquemas convencionales de transmisión de conocimientos, es decir, a una enseñanza de carácter transitivo entendida como una simple suma de conocimientos acumulados.

Lejos de incurrir en dicha metodología, nuestra propuesta de trabajo se fundamenta en el diseño de situaciones didácticas que integren los conocimientos relativos al concepto de función establecidos para el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, cuyas actividades de aprendizaje se caracterizan por ofrecer oportunidades para que los estudiantes, por medio de la experimentación y la reflexión, logren descubrir y construir el conocimiento que se pretende transmitir.

Está segunda ingeniería, desarrollada para el curso de 3º de ESO, va centrarse en la enseñanza de las funciones, sus propiedades y la función lineal, aunando dos unidades dl temario en una única propuesta.

Las tareas que proponemos, contextualizadas y que dan cuerpo a los contenido propiamente matemáticos, se sustentan en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, y recurren al trabajo con múltiples registros de representación como núcleo para su desarrollo.

Se trata de un planteamiento de la enseñanza de las funciones con nuevas situaciones que implican al alumno de manera activa en el proceso de aprendizaje y al profesor como guía en dicho proceso.

El listado de las situaciones es el siguiente:

- Situación 1: El alquiler de vehículos.
    - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
    - Un día para la realización de la fase 3.
    - Un día para la realización de la fase 4.
- Situación 2: La inspección medioambiental.
    - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
    - Un día para la realización de la fase 3.
- Situación 3: Las centrales Eólicas.
    - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
- Situación 4: El Observatorio Astronómico.
    - Un día para la realización de la fase 1.
    - Un día para la realización de la fase 2.
- Situación 5: Las Pastelerías.
    - Un día para la realización de la fase 1.
    - Un día para la realización de la fase 2.
- Situación 6: El juego de los Marcianitos.
    - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
    - Un día para la realización de la fase 3 y 4.

Un total de 13 – 14 sesiones entre los temas.

4.5.3.1. Descripción del dispositivo experimental.

De igual manera y utilizando los mismo medios que se emplearon en la puesta en práctica de la ingeniería desarrollada durante el curso 2011-2012, se ha procedido al acondicionamiento de un aula del Instituto Público "Pablo Neruda" de Leganés (Madrid), mediante el montaje del equipo de grabación, posibilitando el desarrollo de esta nueva propuesta didáctica dirigida a los alumnos de 3º ESO durante los meses de abril y mayo del curso 2012-2013.

El espacio dónde se instaló la mesa de mezcla de sonido y los micrófonos no era el aula correspondiente al grupo con el que se trabajó ni el mismo en la que se realizó la experiencia el curso anterior, proporcionándonos una cuyas condiciones acústicas y de luminosidad mejoraban con creces las de las dos ubicaciones anteriores.

La instalación del equipo (mesa de mezcla de sonido y micrófonos) que permite grabar las conversaciones de los distintos grupos de trabajo, aparece en el esquema siguiente:

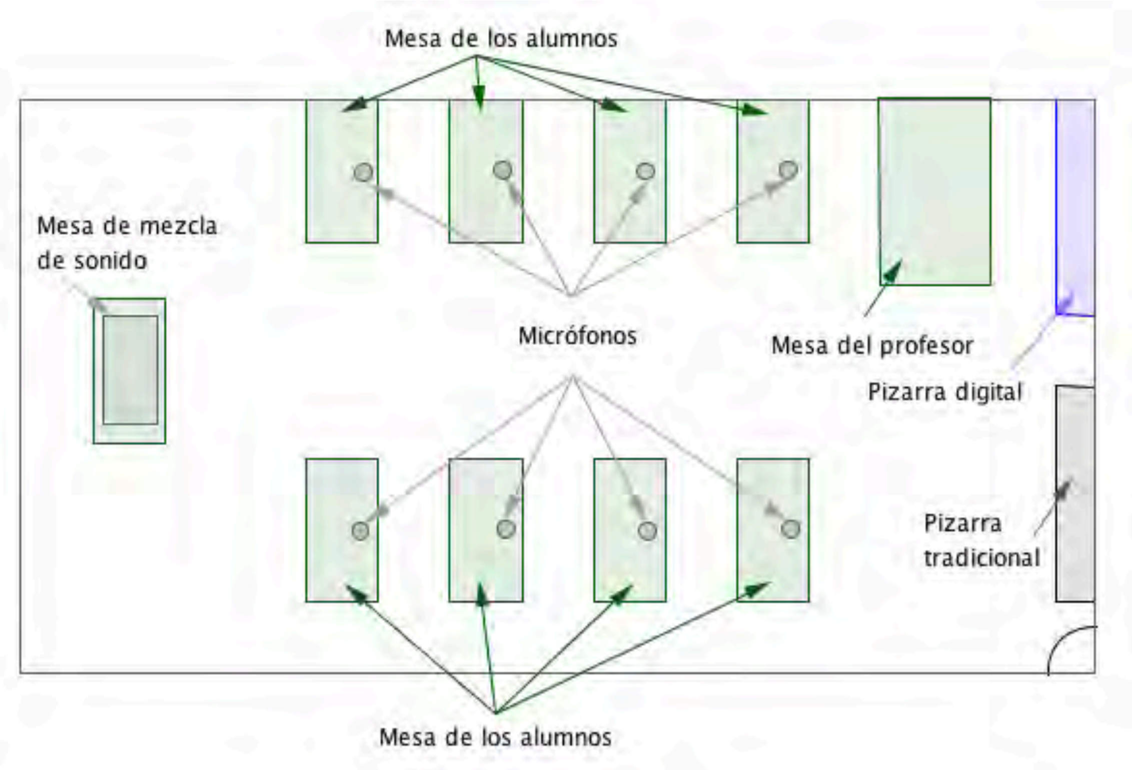


FIGURA 4.5.3.1.1. *Disposición en el aula de trabajo*

El equipamiento de cámara de vídeo de formato mini DV, mesa de mezcla de sonido, micrófonos de mesa, micrófono direccional de la cámara y micrófono inalámbrico del profesor, así como la función de cada uno de ellos, es exactamente el mismo que el desempeñado durante la realización de l experiencia del curso anterior.

Para el desarrollo de cada sesión se ha contado con un equipo humano que se encargaba de las siguientes funciones:

- Profesor-conductor de la Ingeniería y responsable de la crónica general de la clase:
    - Jesús Macías Sánchez (Alumno de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).
- Observadores:
    - Mª del Carmen Chamorro Plaza (Catedrática de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid).
    - Juan Miguel Belmonte Gómez (Profesor titular del departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid).
    - Juan Miguel Belmonte Alfaro (Alumno del Grado de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).
    - Irene Rodríguez Mora (Alumna de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid).
- Gestión y organización de los alumnos:
    - Carlos Cerrolaza Gómez (Profesor de Matemáticas del grupo A de 3º ESO)

- Manejo de cámara para la grabación en vídeo:
    - o Raquel Macías Sánchez (Colaboradora).
- Manejo de la mesa de mezcla de sonido:
    - o María Sánchez Arahuetes (Colaboradora).

Cómo ya se hiciera la vez anterior, se celebraron varias reuniones con el Jefe de estudios del centro, Don Enrique Fernández González, el Jefe de Departamento de Matemáticas, Don Javier Sanz, y el profesor de matemáticas del grupo en el cuál se iba a desarrollar la ingeniería, Don Carlos Cerrolaza Gómez, así como sesiones informativas con el equipo colaborador, con el fin de que todos ellos conocieran previamente las situaciones didácticas diseñadas y el desempeño de sus funciones en el transcurso de la mismas.

Además, se envió una circular a los padres, detallándoles las características de la ingeniería que se ha diseñado e indicándoles los propósitos y beneficios que dicha acción didáctica podía tener en el aprendizaje de sus hijos.

A partir de toda esta infraestructura, se han desarrollado la totalidad de las situaciones nombradas más arriba con los 27 alumnos matriculados en el grupo B de 3º ESO, los cuales trabajaron en grupos de 2, 3 o 4 estudiantes. Entre los alumnos matriculados en este curos, no se encuentra ningún estudiante repetidor ni ningún caso con necesidades educativas especiales.

El curso elegido ha sido 3º ESO, y en concreto el grupo B, por varias razones:

- Los contenidos tratados se ajustan desde un punto de vista curricular a dicho nivel.
- Se trata de un grupo de alumnos que presenta cierta homogeneidad en lo que a rendimiento, en términos de eficacia, tienen en la asignatura de matemáticas.

- Disponen de los conocimientos matemáticos necesarios para abordar con garantías las estrategias optimales que presentan las situaciones diseñadas.
- Se trata de niños de 14 o 15 años de edad, lo que permite trabajar de forma significativa la conversión entre registros y los contenidos del bloque de funciones a tratar a partir de contextos reales.

La cronología de las sesiones fue la siguiente:

TABLA 4.5.3.1.1. *Distribución de la sesiones sobre el concepto de función*

Sesión	Fecha	Situación
1	17/04/2013	**Situación 1:** El alquiler de vehículos. ***Fase 1:*** Coste de alquiler
		Situación 1: El alquiler de vehículos. ***Fase 2:*** Tipo de Vehículo alquilado
2	18/04/2013	**Situación 1:** El alquiler de vehículos. ***Fase 3:*** Tipo de combustible
3	22/04/2013	**Situación 1:** El alquiler de vehículos. ***Fase 4:*** El vehículo de la mudanza
4	23/04/2013	**Situación 2:** La inspección medioambiental. ***Fase 1:*** El informe del Ministerio
		Situación 2: La inspección medioambiental. ***Fase 2:*** Las emisiones de CO_2
5	25/04/2013	**Situación 2:** La inspección medioambiental. ***Fase 3:*** La Visita
6	29/04/2013	**Situación 3:** Las Centrales Eólicas. ***Fase 1:*** Los aerogeneradores

7	30/04/2013	**Situación 3:** Las Centrales Eólicas. ***Fase 2:*** La clave
		Situación 4: El observatorio astronómico. ***Fase 1:*** Fases de la Luna
8	06/05/2013	**Situación 4:** El observatorio astronómico. ***Fase 2:*** Distancia Tierra – Sol
9	07/05/2013	**Situación 5:** Juego de Comunicación. Las pastelerías. ***Fase 1:*** Gramos de azúcar
10	08/05/2013	**Situación 5:** Juego de Comunicación. Las pastelerías. ***Fase 2:*** Gramos de harina y almendra
11	13/05/2013	**Situación 5:** Juego de Comunicación. Las pastelerías. ***Fase 3:*** Gramos de mantequilla
12	14/05/2013	**Situación 6:** EL juego de los Marcianos. ***Fase 1:*** Pertenencia de puntos a una recta.
		Situación 6: EL juego de los Marcianos. ***Fase 2:*** Ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente.
13	15/05/2013	**Situación 6:** EL juego de los Marcianos. ***Fase 3:*** Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
		Situación 6: EL juego de los Marcianos. ***Fase 4:*** Determinar la ecuación de la recta a partir de la gráfica.

Fuente: elaboración propia

4.5.4 Análisis a Priori

Situación 1: El alquiler de vehículos.

Dependencia entre magnitudes: Variable dependiente y Variable independiente.

Objetivo:

- Estudiar la dependencia entre magnitudes.
- Saber identificar las variable independiente y las variable dependiente, así como distinguir una de otra en contextos reales.
- Identificar las magnitudes que se relacionan y representan en ejes de coordenadas, entendiendo la gráfica como un modo de representar la relación entre dos variables.
- Proporcionar al alumno las herramientas que le permitan buscar, identificar y relacionar datos en tablas y gráficas. Apreciar la utilidad del lenguaje gráfico y tabular para representar situaciones diversas e introducirles en la nomenclatura necesaria.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Tabular - Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural (primera, segunda y tercera fase)
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Gráfico - Registro tabular - Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural (Cuarta fase)

<u>Fase 1</u>: Coste de alquiler (Actividad de introducción)

Material:

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, con la información correspondiente al precio de alquiler de los vehículos en función de los días alquilados:

TABLA 4.5.4.1. *Tabla 1 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

PRECIO ALQUILER DE VEHÍCULOS				
Tipo Vehículo	**Días de alquiler**	**Precio**	**Km incluidos**	**Euros por Km extra**
Pasajero 5 plazas	1	47,53 €	120 Km	0,180 €
	2	95,06 €	230 Km	
	3	142,59 €	450 Km	
	4	163,20 €	600 Km	
Pasajero 6 plazas	1	61,31 €	120 Km	0,234 €
	2	122,62 €	230 Km	
	3	183,93 €	450 Km	
	4	210,52 €	600 Km	
Pasajero 9 plazas	1	83,59 €	120 Km	0,250 €
	2	145,90 €	230 Km	
	3	218,85 €	450 Km	
	4	253 €	600 Km	

Fuente: elaboración propia

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, en la que aparecen las fichas con la información de los alquileres realizados:

Apellidos del Conductor: Rufián Liviano
Nombre: Miguel
Tipo de Vehículo alquilado: 5 plazas **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 3 **Día devolución del Vehículo**: 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 553 Km **Combustible consumido**: 28,756 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje:
Total a pagar por combustible:
Coste Total :

FIGURA 4.5.4.1. *Ficha para los alumnos del conductor 1*

Apellidos del Conductor: Macías Sánchez
Nombre: Jesús
Tipo de Vehículo alquilado: 9 pasajeros **Tipo de Combustible**: Diesel
Nº días de alquiler: 4 **Día devolución del Vehículo**: 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 815 Km **Combustible consumido**: 53,79 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje:
Total a pagar por combustible:
Coste Total :

FIGURA 4.5.4.2. *Ficha para los alumnos del conductor 2*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15 y 20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"Somos empleados en una empresa de ***Alquiler de Vehículos***, y nos encargamos de gestionar las fichas que se elaboran cada vez que un cliente alquila un vehículo.

Hoy, dos clientes han devuelto los vehículos que habían alquilado y tenemos que calcular el ***Total a pagar por el alquiler y el kilometraje*** , ***el Total a pagar por el combustible*** y el ***Coste total.***

En la tabla con los datos, aparece el precio de alquiler por día, los kilómetros que incluyen por día de alquiler y el precio por cada kilómetro extra que recorren con el vehículo, lo que nos permitirá calcular el ***Total a pagar por el alquiler y el kilometraje***.

El precio del litro de combustible que utiliza cada coche el día 04/03/2013, es de:

Gasolina: 1,40 €/l **Diesel**: 1,34 €/l

Los grupos que afirméis saber cuál es el ***Coste total***, debéis estar en condiciones de probarlo.

Para la realización de la actividad podéis utilizar calculadora."

Variables didácticas y su gestión:

- El número de kilómetros incluidos por vehículo y día es igual para todos los vehículos. De no hacerlo así, la tarea podría resultar demasiado dificultosa y se produciría una perdida del sentido de la actividad.
- Los valores numéricos, con los que el alumno tiene que trabajar, se han elegido de modo tal que los resultados que se obtienen de su manipulación den como resultado decimales finitos, con el fin de evitar que la actividad se complique en exceso con la obtención de valores periódicos o irracionales.
- Los dos clientes utilizan vehículos distintos, con distinto tipo de combustible y lo alquilan distintos días para que el alumno sea consciente que el coste total del alquiler de un vehículo depende de varias variables.

Estrategia óptima:

- Cálculo del ***Total a pagar por el alquiler y el kilometraje*** a partir de los datos de la tabla y del ***Total a pagar por el combustible*** a partir de los litros consumidos y el precio por litro.
- Solución: Miguel = 142,49 € por 3 días de alquiler + 18,54 € por los Km extras + 40,2584 € por el combustible=201,2884€; Jesús = 253 € por 4 días de alquiler + 53,75 € por los Km extras + 72,0786 € por el combustible = 378,8286 €.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado por estimación de las cantidades sin identificar las variables que entran en juego.
- Considerar variables que no son necesarias para resolver la situación.
- Establecimiento erróneo de la relación entre variables.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar los datos pedidos.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las variables, entonces el profesor les preguntará:

"¿Qué datos os han proporcionado para que podáis calcular los costes?"

"¿En la ficha del cliente donde se localizan esos datos?"

Si finalmente ningún grupo llega a la solución adecuada, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Fase 2: Tipo de Vehículo alquilado

Material:

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, con la información correspondiente al precio de alquiler de los vehículos en función de los días alquilados:

TABLA 4.5.4.2. *Tabla 1 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

PRECIO ALQUILER DE VEHÍCULOS				
Tipo Vehículo	**Días de alquiler**	**Precio**	**Km incluidos**	**Euros por Km extra**
Pasajero 5 plazas	1	47,53 €	120 Km	0,180 €
	2	95,06 €	230 Km	
	3	142,59 €	450 Km	
	4	163,20 €	600 Km	
Pasajero 6 plazas	1	61,31 €	120 Km	0,234 €
	2	122,62 €	230 Km	
	3	183,93 €	450 Km	
	4	210,52 €	600 Km	
Pasajero 9 plazas	1	83,59 €	120 Km	0,250 €
	2	145,90 €	230 Km	
	3	218,85 €	450 Km	
	4	253 €	600 Km	

Fuente: elaboración propia

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, en la que aparecen las fichas con la información de los alquileres realizados:

Apellidos del Conductor: Pérez Gil	
Nombre: Consuelo	
Tipo de Vehículo alquilado:	**Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 2	**Día devolución del Vehículo**: 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km	**Combustible consumido**: 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183, 45 €	
Total a pagar por combustible: 35,93 €	
Coste Total : 219,38 €	

FIGURA 4.5.4.3. *Ficha para los alumnos del conductor 3*

Apellidos del Conductor: Miralles Rosales	
Nombre: Pedro	
Tipo de Vehículo alquilado:	**Tipo de Combustible**: Diesel
Nº días de alquiler: 3	**Día devolución del Vehículo**: 29/05/2012
Kilómetros recorridos: 700 Km	**Combustible consumido**: 31,5 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 187, 59 €	
Total a pagar por combustible: 40,32 €	
Coste Total : 228,01 €	

FIGURA 4.5.4.4. *Ficha para los alumnos del conductor 4*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15 y 20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Una empresa de ***Alquiler de Vehículos***, como cada mes de diciembre, está realizando el balance del año. Para ello, tienen que consultar las fichas que elaboran cada vez que un cliente alquila un vehículo.

Cual es su sorpresa cuando descubren que en algunas de estas fichas no aparece el tipo de vehículo que se alquiló. Por ello, os piden a vosotros que averigüéis ese dato a partir de la información que os proporcionan.

En la tabla con los datos, aparece el precio de alquiler por día, los kilómetros que incluyen por día de alquiler y el precio por cada kilómetro extra.

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.

Para la realización de la actividad podéis utilizar calculadora.”

Variables didácticas y su gestión:

- La incorporación del kilometraje incluido por día de alquiler y el precio por cada kilómetros extra para evitar la identificación de los coches de manera inmediata a partir, únicamente, de los días de alquiler, de modo que intervengan más variables en el coste.

- El precio de alquiler por día y los datos cuantitativos de las fichas de los clientes se han elegido de tal manera que no se identifique el tipo de vehículo a simple vista. Esto obligará a que tengan que emplear procesos de identificación de las variables dependientes e independientes y cálculos con ellos para llegar a la solución.

- El número de kilómetros incluidos por vehículo y día es igual para todos los vehículos. De no hacerlo así, la tarea podría resultar demasiado dificultosa y se produciría una perdida del sentido de la actividad.

- Información de la ficha: Si únicamente diéramos la información requerida para llegar a la solución (Número de días de alquiler y kilómetros recorridos) estaríamos conduciendo al alumno de manera directa hacía la relación que es necesaria establecer entre las variables dependientes e independientes que le permitirá llegar a la resolución del problema.

Estrategia óptima:

- Identificación de la variable dependiente (Euros a pagar por kilómetros extras) y de la variable independiente (kilómetros recorridos) y establecer la relación entre ellas, para, a partir del número de días de alquiler, identificar el vehículo que utilizó cada cliente.
- Solución: Consuelo ha alquilado el coche de 9 plazas y Pedro el de 5 plazas.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado por estimación de las cantidades sin identificar las variables que entran en juego.
- Considerar variables que no son necesarias para resolver la situación.
- Establecimiento erróneo de la relación entre variables.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar los datos pedidos.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las variables, entonces el profesor les preguntará:

"¿Qué datos os han proporcionado para que podáis identificar el coche alquilado?"

"¿En la ficha del cliente donde se localizan esos datos?"

Si finalmente ningún grupo llega a la solución adecuada, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Fase 3: Tipo de combustible

Material:

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, en la que aparecen las fichas con la información de los alquileres realizados:

Apellidos del Conductor: Lordén Martín **Nombre**: Pablo
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajero 6 plazas **Tipo de Combustible**:
Nº días de alquiler: 1 **Día devolución del Vehículo**: 13/06/2012
Kilómetros recorridos: 110Km **Combustible consumido**:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 61,31 €
Total a pagar por combustible consumido: 8,7901€
Coste Total : 70,1001€ ≅ 70,10€

FIGURA 4.5.4.5. *Ficha para los alumnos del conductor 5*

Apellidos del Conductor: Merino Mora **Nombre**: Elena
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajeros 9 plazas **Tipo de Combustible**:
Nº días alquiler: 4 **Día devolución del Vehículo**: 05/06/2012
Kilómetros recorridos: 640 Km **Combustible consumido**:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 273€
Total a pagar por combustible consumido: 58,24€
Coste Total : 331,24€

FIGURA 4.5.4.6. *Ficha para los alumnos del conductor 6*

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, con la información correspondiente al consumo en litros por cada 100 km de combustible diesel o gasolina en función del tipo de vehículo:

TABLA 4.5.4.3. *Tabla 2 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

CARACTERÍSTICAS DE LOS VEHÍCULOS			
Tipo	**Plazas**	**Foto**	**Litros de consumo por cada 100 km**
PASAJEROS	5 plazas		4,5 litros de Diesel
			5,2 litros de Gasolina
	6 plazas		5,8 litros de Diesel
			6,1 litros de Gasolina
	9 plazas		6,6 litros de Diesel
			7 litros de Gasolina

Fuente: elaboración propia

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, con la información correspondiente al precio por litro de combustible diesel y gasolina en el mes de junio de 2012:

TABLA 4.5.4.4. *Tabla para el alumno con el precio de combustible*

PRECIO POR LITRO COMBUSTIBLE DIESEL (JUNIO)									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1,243€	1,243€	1,245€	1,248€	1,25€	1,242€	1,242€	1,24 €	1,24 €	1,238€
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1,235€	1,226€	1,22€	1,227€	1,227€	1,241€	1,241€	1,242€	1,242€	1,243€
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1,243€	1,243€	1,242€	1,242€	1,243€	1,243€	1,243€	1,24 €	1,24 €	1,24 €

PRECIO POR LITRO COMBUSTIBLE GASOLINA (JUNIO)									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1,314€	1,314€	1,306€	1,302€	1,3€	1,306€	1,306€	1,311€	1,31€	1,31€
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1,311€	1,31€	1,31€	1,31€	1,315€	1,316€	1,316€	1,324€	1,32€	1,32€
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1,326€	1,326€	1,326€	1,324€	1,324€	1,321€	1,321€	1,321€	1,32€	1,32€

Fuente: elaboración propia

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15 y 20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Cuando un cliente alquila un vehículo, el deposito del mismo se encuentra totalmente lleno, de manera que cuando lo entregan se procede a su llenado y se cobra el combustible repostado.

Siguiendo con la revisión de las fichas, han localizado otras dos en las que faltan los campos ***relativos al combustible***, así que os vuelven a pedir que averigüéis esos datos a partir de la información que os proporcionan.

En la tabla con los datos, aparece el consumo de combustible en función del vehículo alquilado y el precio del litro de combustible según sea diesel o gasolina durante el mes de junio que es la fecha en la que los clientes realizaron el alquiler.

Los grupos que afirméis haber hallado los datos que faltan, debéis estar en condiciones de probarlo.

Para la realización de la actividad podéis utilizar calculadora.”

Variables didácticas y su gestión:

- Información de la ficha: Si únicamente diéramos la información requerida para llegar a la solución estaríamos conduciendo al alumno de manera directa hacía la relación que es necesaria establecer entre las variables dependientes e independientes que le permitirá llegar a la resolución del problema.

- Datos de la ficha a determinar: en la ficha de cliente, además del tipo de combustible que emplea el vehículo, se ha omitido el dato de litros de combustible consumidos con la finalidad de bloquear la estrategia de determinar si el vehículo es diesel o gasolina a partir de los *euros totales a pagar por el combustible consumido* y el *precio por litro de combustible*. De este modo, se hará necesario establecer la relación entre las variables *kilómetros recorridos* y *litros que consume cada vehículo por cada 100 km*.

- Los datos cuantitativos tanto de las fichas de clientes como de las tablas de información, se han elegido de tal manera que no se identifique el tipo de combustible a simple vista. Esto obligará a que tengan que emplear procesos de identificación de las variables dependientes e independientes y cálculos con ellos para llegar a la solución.

- Los valores numéricos, con los que el alumno tiene que trabajar, se han elegido de modo tal que los resultados que se obtienen de su manipulación den como resultado decimales finitos tanto para la situación acertada de combustible como para la errónea, con el fin de evitar la resolución de la actividad por descarte en el caso de la obtención de valores periódicos o irracionales.

- Los dos clientes utilizan vehículos con el mismo tipo de combustible, para evitar que una vez que el alumno haya determinado el tipo de combustible del vehículo de uno de los clientes, sepa automáticamente el del otro cliente.

Estrategia óptima:

- Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos tanto para el vehículo diesel como para el gasolina. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro.

- Solución: Ambos vehículos utilizan gasolina.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado por estimación de las cantidades sin identificar las variables que entran en juego.
- Considerar variables que no son necesarias para la resolver la situación.
- Determinar el tipo de combustible a partir, únicamente, del precio por litro de combustible y el coste total por el combustible consumido.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar los datos pedidos.

El alumno podrá validar el mismo si la estrategia llevado a cabo es correcta a partir de los datos *Total a pagar por combustible consumido* y *Kilómetros recorridos*.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las variables, entonces el profesor les preguntará:

"¿Qué datos os han proporcionado para que podáis identificar el tipo de combustible?

"¿En la ficha del cliente donde se localizan esos datos?"

Si finalmente ningún grupo llega a la solución adecuada, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Fase 4: El vehículo de la mudanza

Material:

- Una hoja para cada dos o tres alumnos, en la que aparecen las gráficas con los euros a pagar en función de los kilómetros extra para cada uno de los tres vehículos.

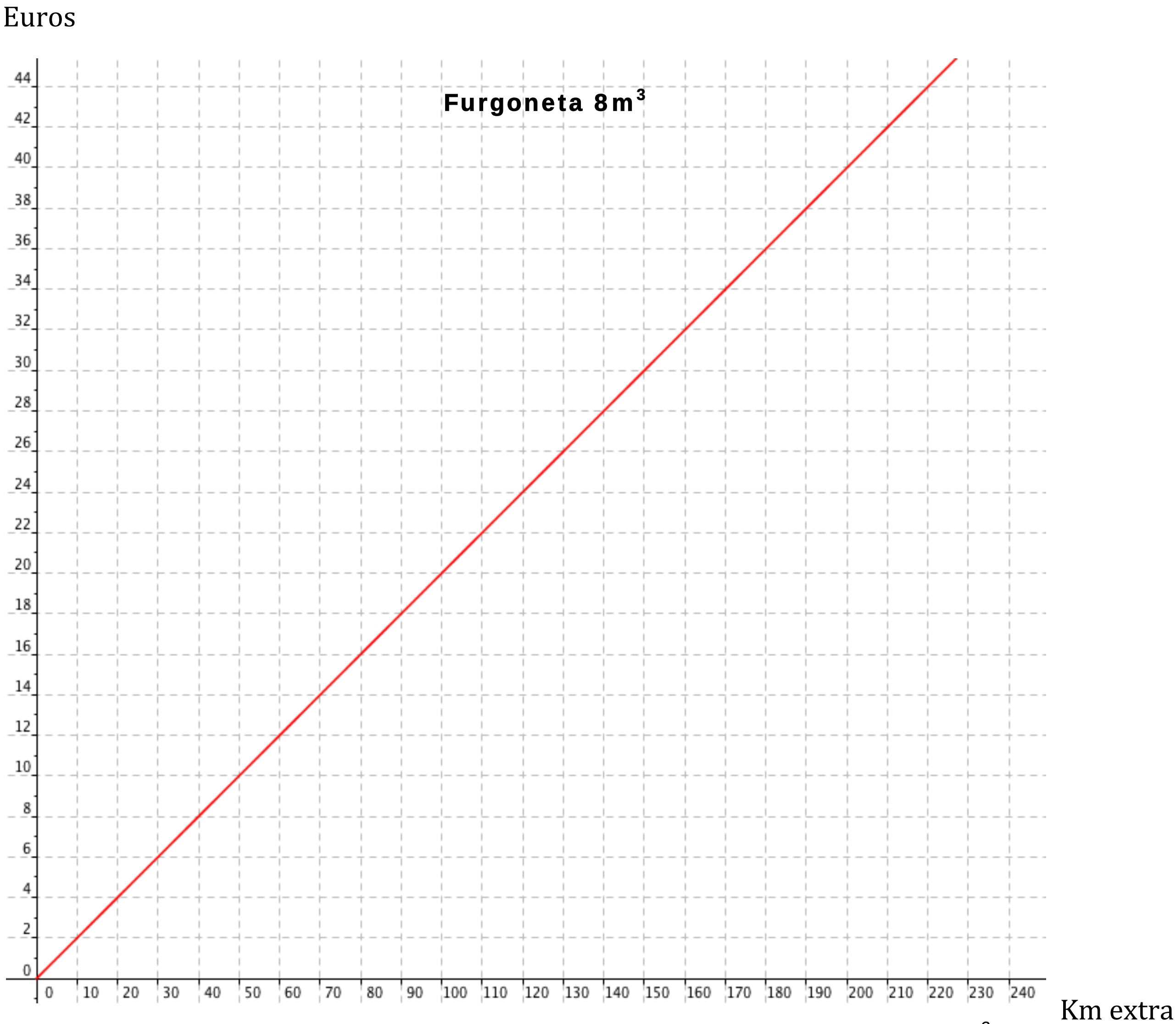
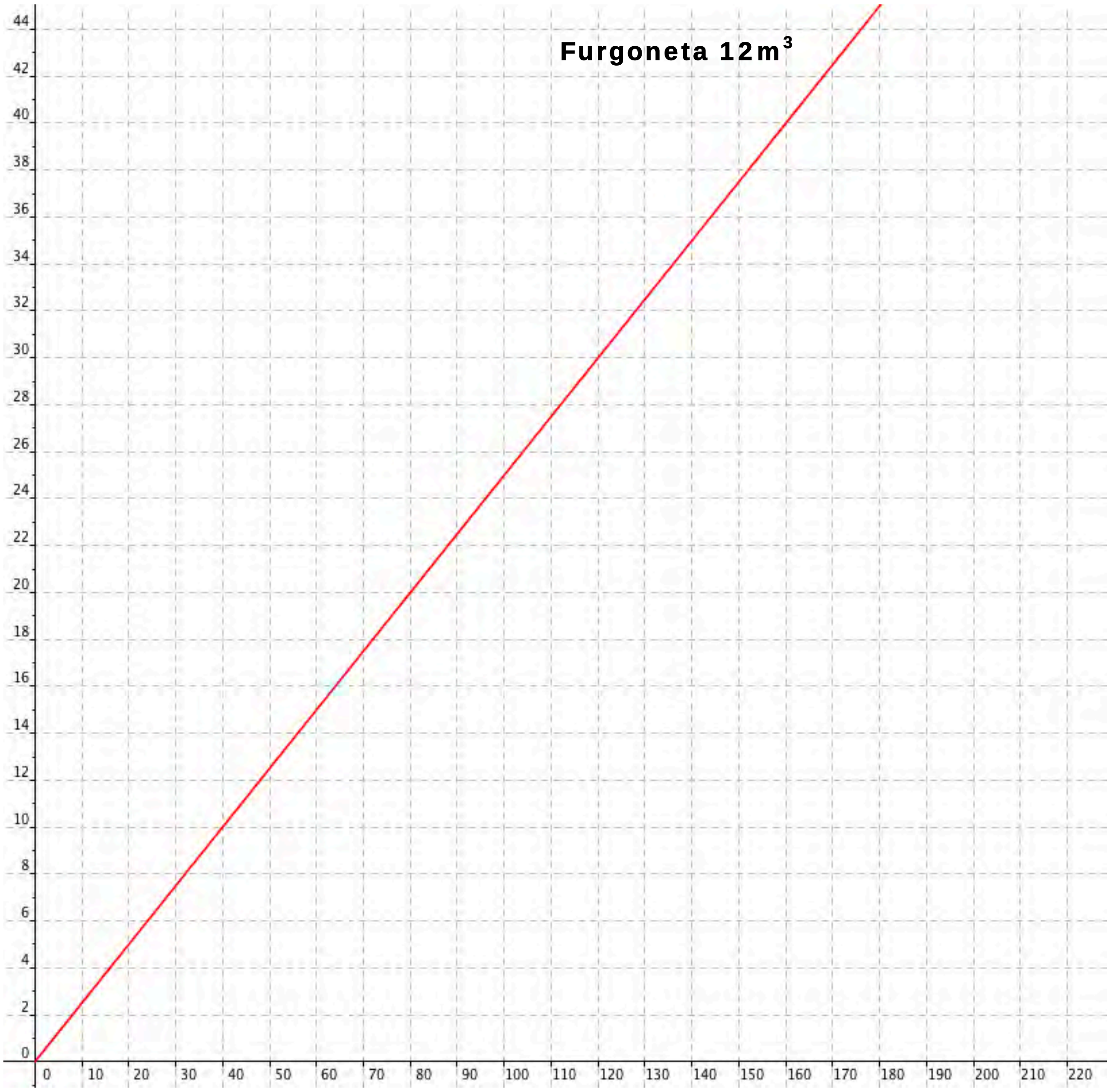


FIGURA 4.5.4.7. *Gráfica relación €/km extra de la furgoneta de 8 m^3*

Euros



Km extra

FIGURA 4.5.4.8. *Gráfica relación €/km extra de la furgoneta de 12 m^3*

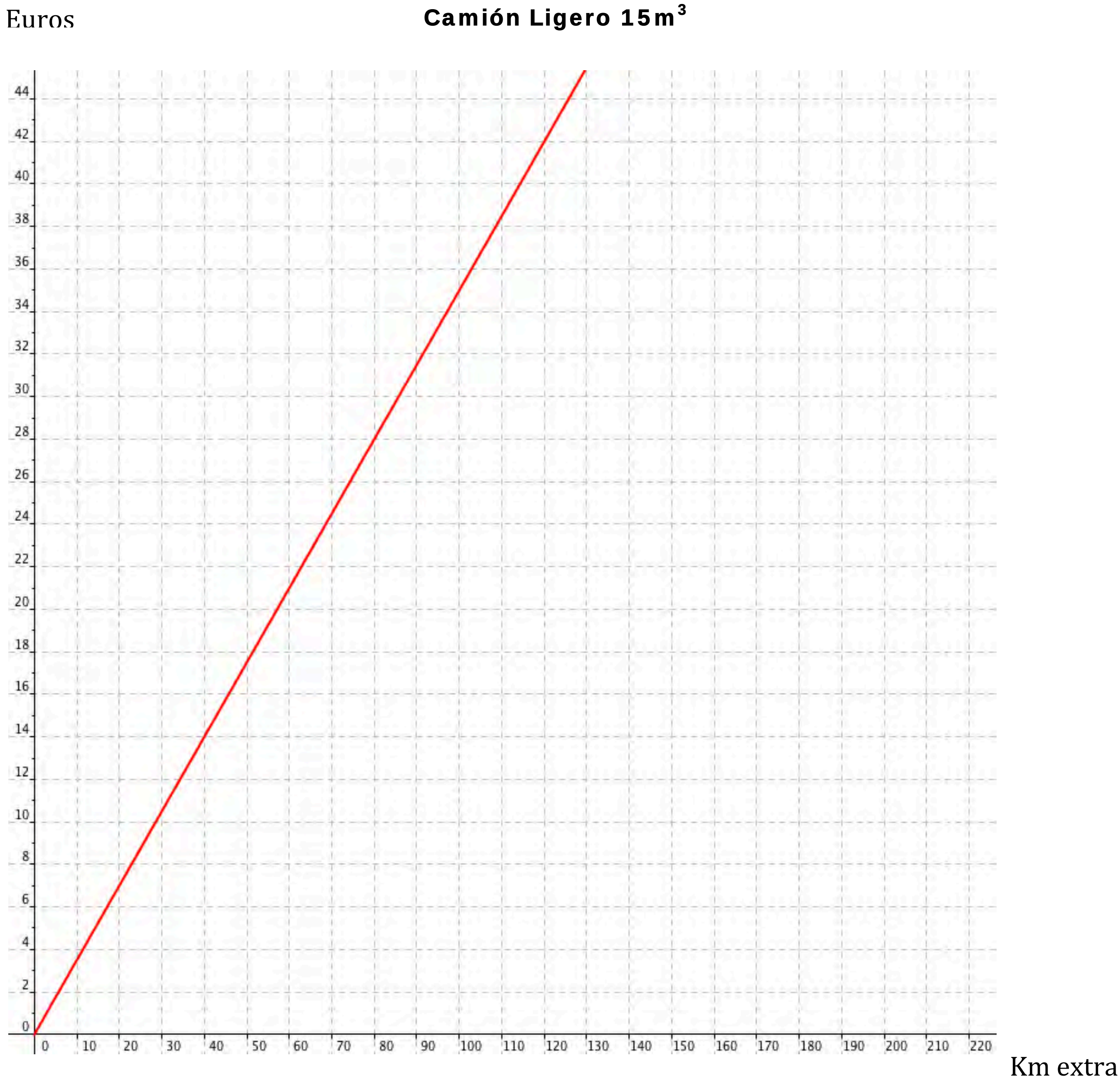


FIGURA 4.5.4.9. *Gráfica relación €/km extra del camión ligero de 15 m^3*

- Una hoja para cada dos o tres alumnos, en la que aparecen las gráficas con los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos, para cada uno de los tres vehículos:

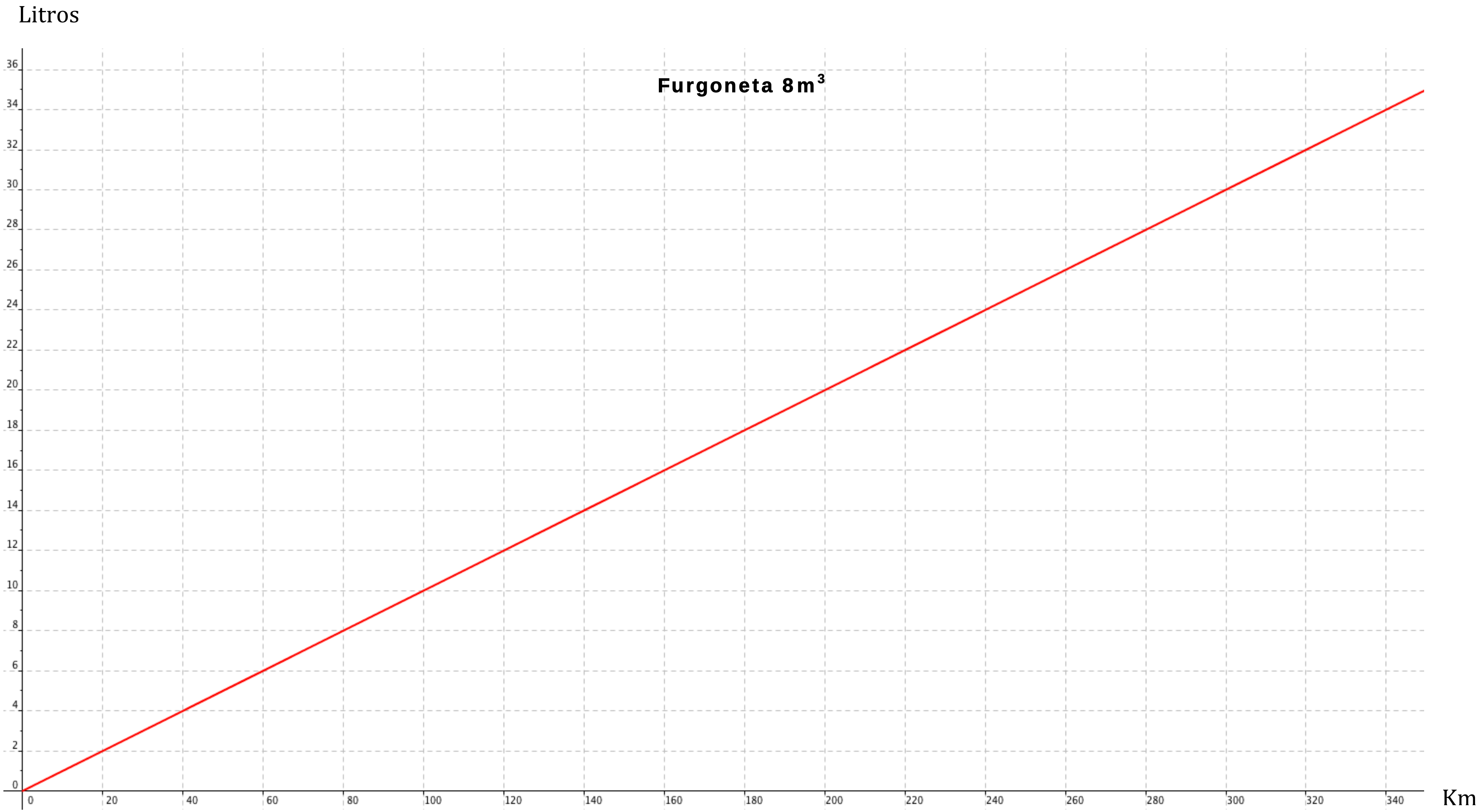


FIGURA 4.5.4.10. *Gráfica relación l/km de la furgoneta de 8 m^3*

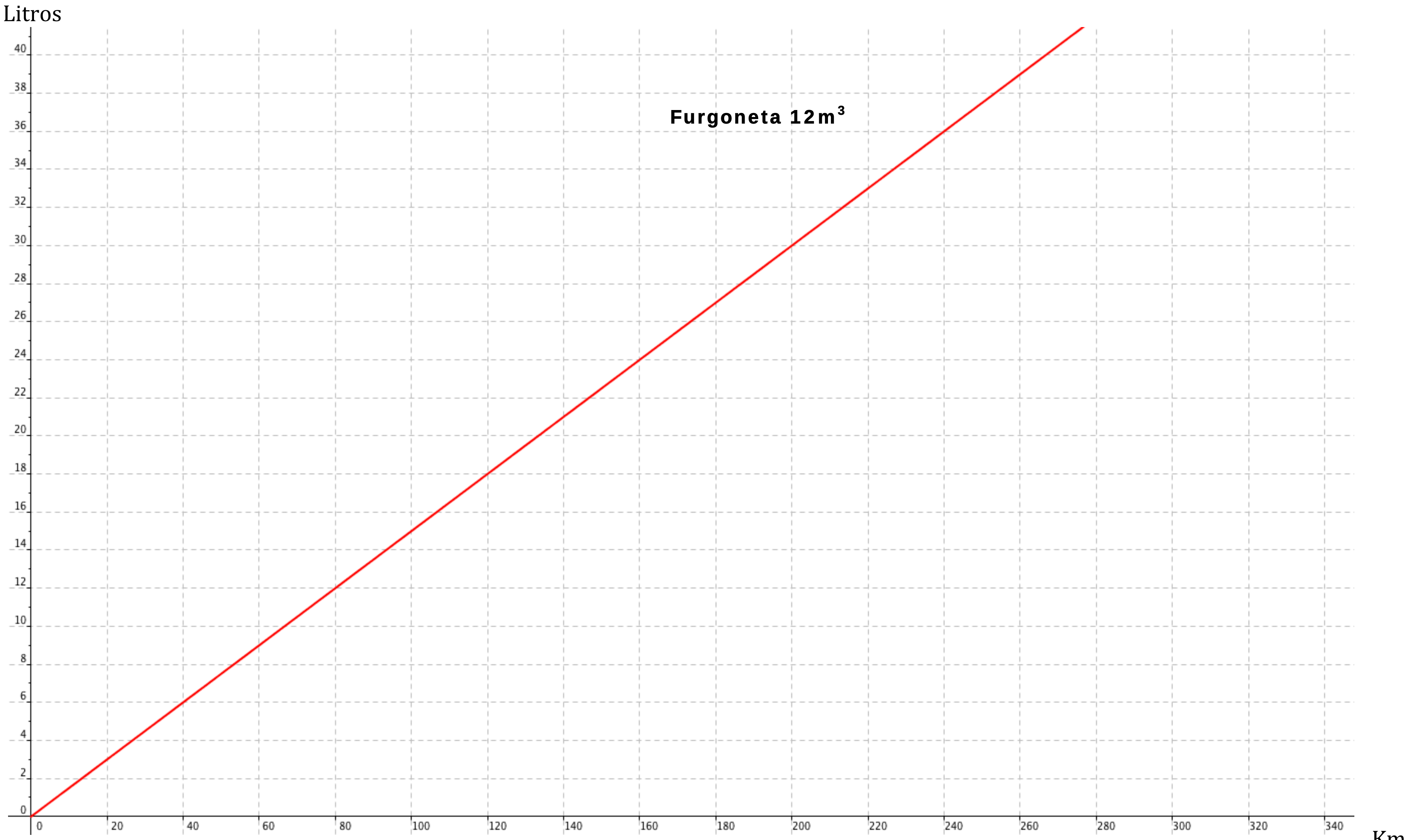


FIGURA 4.5.4.11. *Gráfica relación l/km de la furgoneta de 12 m^3*

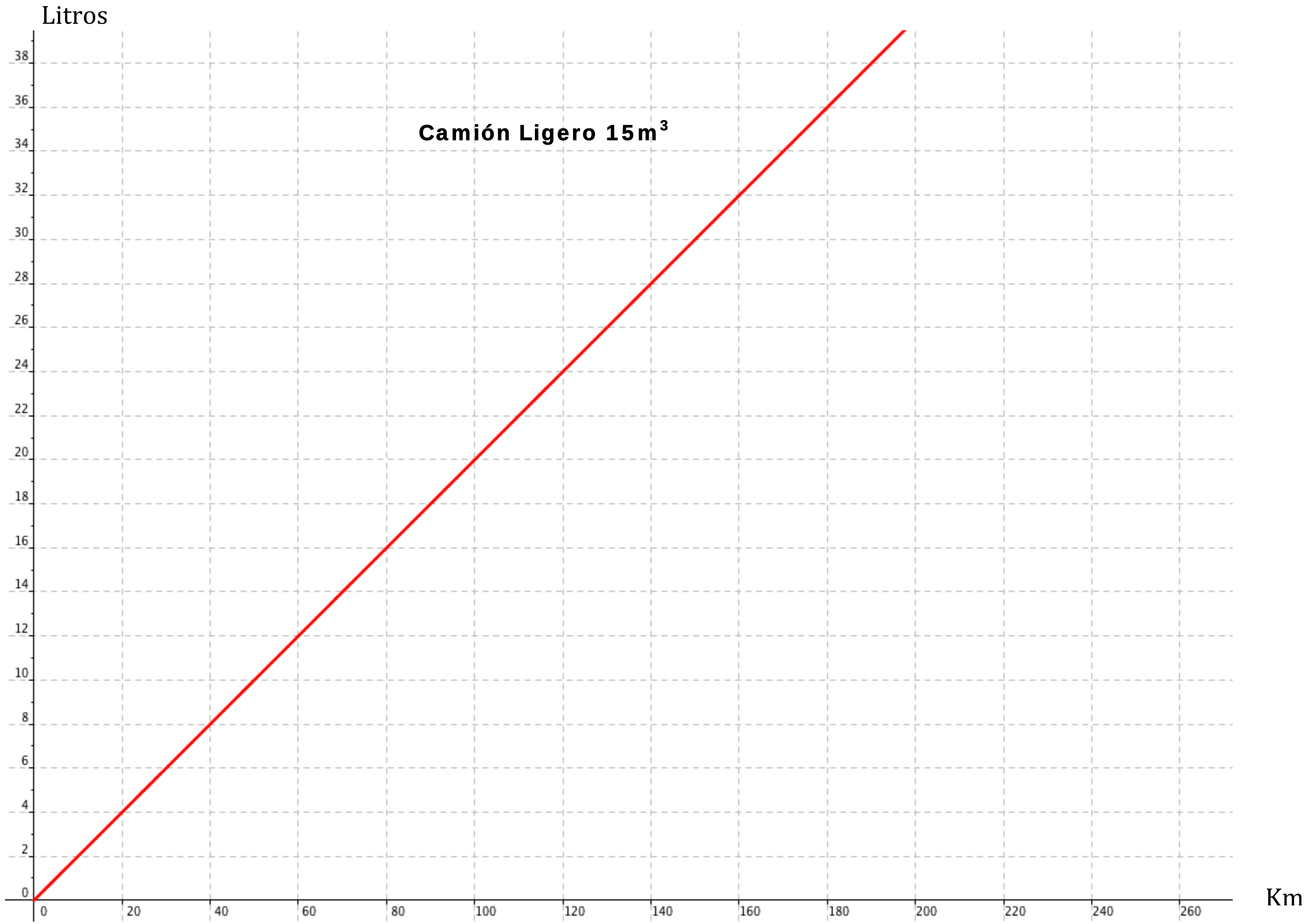


FIGURA 4.5.4.12. *Gráfica relación l/km del camión ligero de 15 m^3*

- Un hoja para cada dos o tres alumnos, con la información correspondiente al precio de al alquiler de los vehículos en función de los días alquilados:

TABLA 4.5.4.5. *Tabla 3 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

PRECIO ALQUILER DE VEHÍCULOS			
Tipo Vehículo	**Días de alquiler**	**Precio**	**Km incluidos**
Furgoneta 8m^3	1	69,46 €	120 Km
	2	108,75 €	230 Km
	3	163,13 €	450 Km
	4	186,84 €	600 Km
Furgoneta 12m^3	1	75,44 €	120 Km
	2	137,12 €	230 Km
	3	205,68 €	450 Km
	4	235,40 €	600 Km
Camión Ligero 15m^3	1	93,28 €	120 Km
	2	151,30 €	230 Km
	3	225,93 €	450 Km
	4	259,77 €	600 Km

Fuente: elaboración propia

- Una hoja con la información del cliente:

Apellidos del Conductor: Risco Meneses
Nombre: Juan
Tipo de Vehículo alquilado: **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 1 **Día devolución del Vehículo**: 24/10/2012
Kilómetros recorridos: **Combustible consumido**:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje:
Total a pagar por combustible:
Coste Total :

FIGURA 4.5.4.13. *Ficha para los alumnos del conductor 7*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 30-40 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"Por último, tenemos los datos del Señor Juan Risco Meneses, que contrató los servicios de la empresa para hacer una mudanza desde una casa situada en Leganés a otra en Aranjuez en un día, pero desconocemos el tipo de vehículo que alquiló.

Sabemos que dudaba entre alquilar la furgoneta de 8 m^3, la 12 m^3 o el camión ligero de 15 m^3. Dependiendo del vehículo que alquilase, el número de viajes que tenía que hacer para llevar los muebles, y por tanto, el número de kilómetros recorridos, eran los siguientes:

- Furgoneta 8 m^3: 340 km recorridos
- Furgoneta 12 m^3: 260 km recorridos
- Camión ligero de 15 m^3: 180 km recorridos

El precio del combustible ese día era de 1,5 €/l.

¿Qué tipo de vehículo alquiló si sabemos que eligió la opción que le resultaba más barata?"

Los grupos que afirméis haber hallado los datos que faltan, debéis estar en condiciones de probarlo.

Para la realización de la actividad podéis utilizar calculadora."

Variables didácticas y su gestión:

- Proporcionar la información a través del registro gráfico, de modo que el alumno se vea en la necesidad de identificar la variable dependiente y la variable independiente en un eje cartesiano, y así localizar los datos correspondientes para la resolución del problema.

- Los valores numéricos, con los que el alumno tiene que trabajar, se han elegido de modo tal que el vehículo que recorre más kilómetros sea la opción más barata, evitando así la identificación directa de la opciones más caras a partir, únicamente, de si ha recorrido más o menos kilómetros el vehículo.

Estrategia óptima:

- Cálculo de los kilómetros totales que recorre cada vehículo en función del número de viajes y la distancia al centro de recogida del vehículo. Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.

- Solución: Furgoneta de 8 m^3.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado por estimación de las cantidades sin identificar las variables que entran en juego.

- Considerar que la opción más cara será aquella cuyo vehículo recorra más kilómetros y viceversa.

- Considerar que la opción más cara es aquella cuyo precio de combustible es más caro y viceversa.

- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar los datos pedidos.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las variables, entonces el profesor les preguntará:

“¿Qué datos os han proporcionado para que podáis identificar la opción más barata?

“¿Qué factores intervienen en el precio final?”

Si finalmente ningún grupo llega a la solución adecuada, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

A lo largo de la situación se ha debido llegar a la conclusión de que existen dos tipos de variables, y que unas dependen de otras.

El profesor introduce el vocabulario que se desea fijar:

- **Una variable independiente es aquella cuyo valor no depende del de otra variable.**
- **Una variable dependiente es aquella cuyos valores dependen de los valores que tome otra variable, que será la variable independiente.**

El profesor estudiará las variables dependientes e independientes que han estado presentes en la actividad realizada.

TABLA 4.5.4.6. *Tipos de variables*

Variables Dependientes	**Variables Independientes**
Precio de alquiler	Nº días alquilado
Coste kilómetros extra	Nº de kilómetros extra
Litros consumidos	Nº de kilómetros totales recorridos
Coste combustible	Nº de litros consumidos

Fuente: elaboración propia

"A la variable independiente se la denota con *x* y a la variable dependiente con *y*."

El profesor explica a sus alumnos las distintas formas de expresar una relación de dependencia (tablas, gráficas y fórmulas). Para ello, pide a los alumnos realizar las siguientes actividades:

Relaciones dadas por tablas.

Un kilogramo de azúcar cuesta 1,10 €. Completa la siguiente tabla que relaciona las magnitudes número de kilogramos y precio en euros.

TABLA 4.5.4.7. *Tabla relación entre €/kg*

Nº de kilogramos	2	5		20
Precio €			11	

Fuente: elaboración propia

A continuación, indica las variables que intervienen en el problema. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la variable dependiente? Razona tu respuesta.

Relaciones dadas por gráficas.

La gráfica siguiente muestra la altura en metros del vuelo de un águila en función del tiempo.

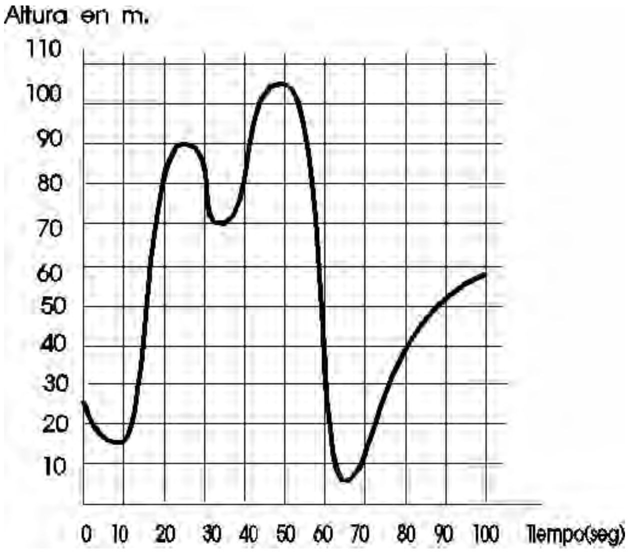


FIGURA 4.5.4.14. *Gráfica relación m/s*

Indica las variables que intervienen en el problema. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la variable dependiente? Razona tu respuesta.

El profesor explica que cada punto de la expresión gráfica viene dado de la forma (x,y).

Relaciones dadas por fórmulas.

El área de un cuadrado en función de su lado viene dada por la expresión

$$A = l^2$$

Indica las variables que intervienen en el problema. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la variable dependiente? Razona tu respuesta.

Situación 2: La inspección medioambiental. Definición de función.

Objetivo:

- Proporcionar al estudiante las herramientas necesarias que le permitan distinguir una relación funcional de otra que no lo sea.
- Introducir el concepto de función y la nomenclatura necesaria.
- Identificación de una relación funcional a través de los datos recogidos en una tabla.
- Identificación de una relación funcional a través de los datos recogidos en una gráfica cartesiana.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Tabular - Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural (primera fase)
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Gráfico- Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural (Segunda fase)

Fase 1

Material:

- Tabla con emisiones de NO_2 y CO medidas cada dos horas a lo largo de un día, para cada dos o tres alumnos:

TABLA 4.5.4.8. *Tabla para el alumno con la emisión de gases*

Hora	Temperatura Maquinaria	Dióxido de nitrógeno (NO_2)	Monóxido de carbono (CO)
00:00 h	407	26,72 μg/m^3	2,457 g/m^3
02:00 h	415	27,25 μg/m^3	2,409 g/m^3
04:00 h	400	26,26 μg/m^3	2,50 g/m^3
06:00 h	415	27,25 μg/m^3	2,409 g/m^3
08:00 h	420	27,53 μg/m^3	2,381 g/m^3
10:00 h	407	26,83 μg/m^3	2,457 g/m^3
12:00 h	411	26,98 μg/m^3	2,433 g/m^3
14:00 h	400	26,21 μg/m^3	2,495 g/m^3
16:00 h	406	26,65 μg/m^3	2,463 g/m^3
18:00 h	415	27,18 μg/m^3	2,402 g/m^3
20:00 h	407	26,72 μg/m^3	2,457 g/m^3
22:00 h	416	27,31 μg/m^3	2,404 g/m^3
00:00 h	400	26,26 μg/m^3	2,50 g/m^3

Fuente: elaboración propia

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15-20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“El Real Decreto 100/2011 desarrolla el Catálogo de Actividades Potencialmente Contaminadoras de la Atmósfera. Todas las instalaciones en las que se desarrollen alguna de las actividades incluidas en el Catálogo, quedan sometidas a una inspección reglamentaria y a la realización de controles periódicos.

Por ello, tienen que enviar una serie de informes al Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente con el fin de valorar si las instalaciones pueden seguir operativas.

Una de las empresas que tiene que someterse periódicamente a este proceso, ha hecho llegar un informe donde se recogen la cantidad de NO_2 y CO, gases potencialmente contaminantes, que se generan en la combustión del motor de la maquinaria a lo largo de un día normal de trabajo.

El NO_2, Dióxido de nitrógeno, es uno de los principales contaminantes que se forma en los procesos de combustión a altas temperaturas, como en vehículos y plantas eléctricas y por ello es un contaminante frecuente en zonas urbanas. Se trata de una gas tóxico e irritante, que afecta al sistema respiratorio.

El CO, Monóxido de Carbono, es un gas inodoro, incoloro, inflamable y altamente tóxico. Puede causar la muerte cuando se respira en niveles elevados. Se produce por la combustión deficiente de sustancias como gas, gasolina, keroseno, petróleo, madera, etc. Las chimeneas, las calderas, los calentadores de agua o calefactores y los aparatos domésticos que queman combustible, como las estufas o los calentadores, también pueden producirlo si no están funcionando bien. Los vehículos detenidos con el motor encendido también lo despiden.

El personal del Ministerio que ha recogido el informe, ha observado ciertas anomalías o posibles errores de medición, pero como desconoce el tema, os hace llegar el informe a vosotros, que formáis parte del equipo de inspección, para que las detectéis y digáis porque son valores erróneos.”

Variables didácticas y su gestión:

- Las mediciones erróneas pertenecen a temperaturas que se dan tres veces a lo largo del día, con el fin de que el alumno pueda identificar aquel valor que no se corresponde con la temperatura del momento y, así, descubra que para un valor de la variable independiente (la temperatura) no puede existir más de un valor de la variable dependiente (cantidad de gas emitido).

- Se facilitan los datos relativos a las emisiones de los dos tipos de gases en la misma tabla con el fin de evitar la resolución de la actividad de manera inmediata, pues de dar las tablas por separado se evidenciaría la relación de dependencia de la cantidad de emisión en función de la temperatura.

- Los datos se facilitan a través del registro tabular con la finalidad de que el estudiante alcance la idea inicial del concepto de función sin necesidad de que intervenga el registro gráfico, a la vez que se favorece la conversión entre el Registro Tabular y el Registro de la Lengua Natural.

Estrategia óptima:

- Identificación de los valores erróneos tomados en las mediciones a partir de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado buscando la relación entre las emisiones de los dos tipos de gases.

- Dar el resultado en función de las horas del día en que se hizo la medición.

- Construir la gráfica de las relaciones funcionales planteadas.

- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar los datos pedidos.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen. La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos. Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las variables, entonces el profesor les preguntará:

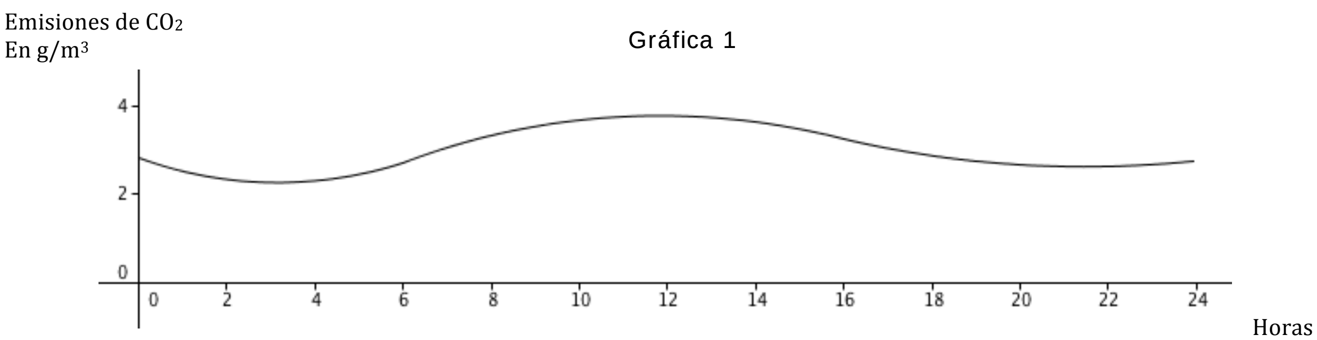
"¿Qué factores intervienen en la cantidad de gas que se genera?"

Si finalmente ningún grupo llega a la solución adecuada, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Fase 2

Material:

- Gráficas con emisiones de las chimeneas:



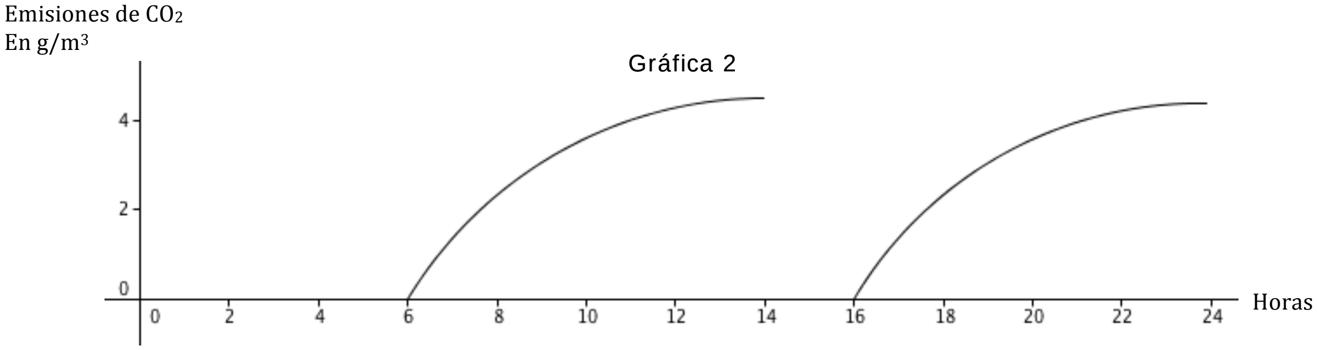


FIGURA 4.5.4.15. *Gráficas 1 y 2 de emisión de gases*

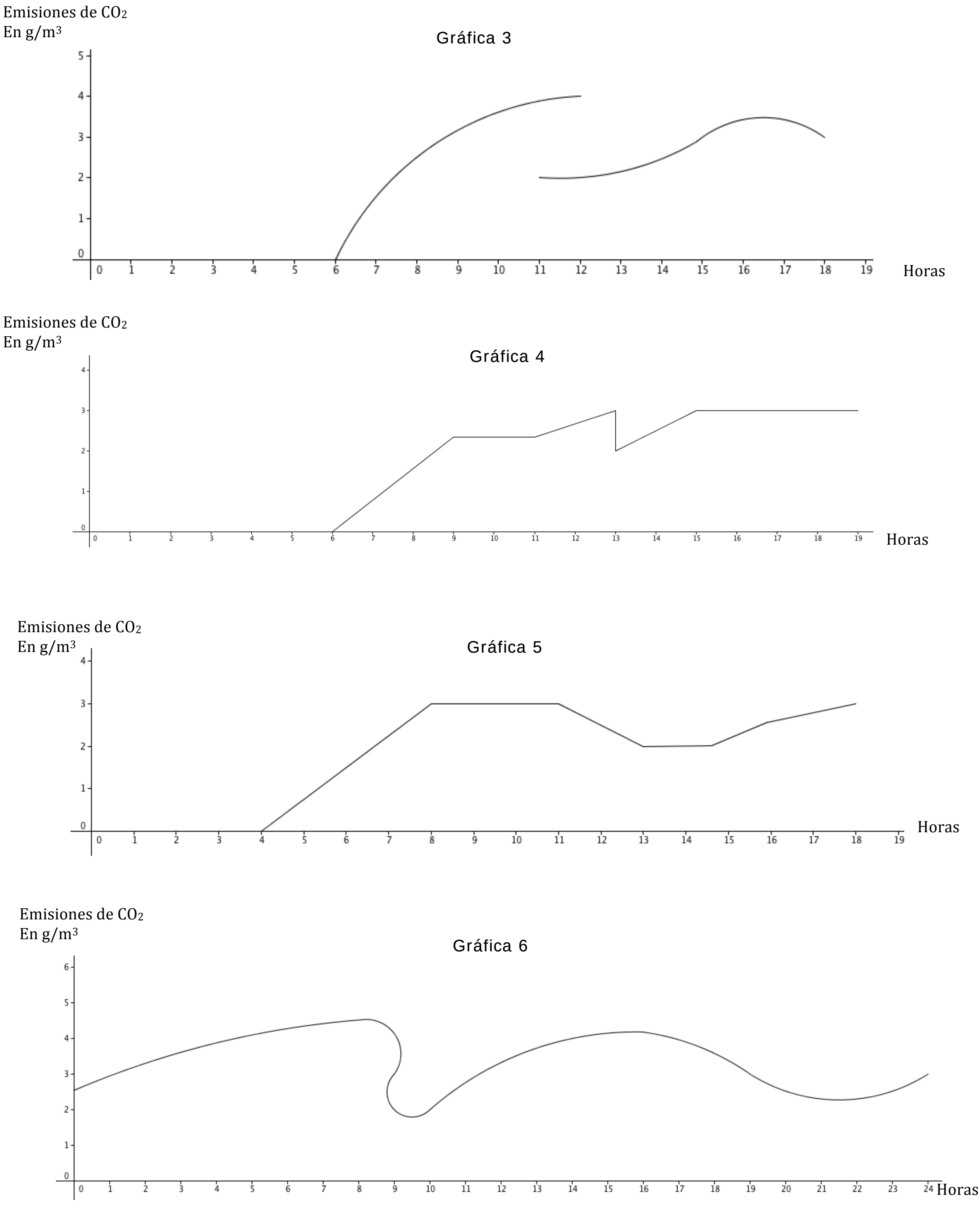


FIGURA 4.5.4.13. *Gráficas 3, 4, 5, y 6 de emisión de gases*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15-20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Siguiendo con la inspección, seis empresas nos han hecho llegar los siguientes gráficos que representan las emisiones de CO_2 que arrojan a la atmosfera a lo largo de un día normal de trabajo a través de su chimenea.

El administrativo tiene motivos para pensar que algunas empresas parece que pretenden engañarnos, y nuevamente os vuelve a entregar los informes para que las identifiquéis, justificando donde está el engaño.”

Variables didácticas y su gestión:

- Aportación de los datos relativos a las emisiones de CO_2 a través del Registro Gráfico con el fin de llegar al concepto de función mediante su representación en un plano cartesiano, obligando, así, a tener que realizar la coordinación entre dicho registro, el Registro Numérico y el Registro de la Lengua natural.
- Gráficas de las emisiones: las gráficas construidas no deben ser muy complejas, pues esto podría dificultar que el estudiante alcance el conocimiento deseado y convertir la actividad en un proceso arduo.
- Las gráficas que no representan una función se han construido de tal manera que el alumno no identifique de manera inmediata la correspondencia de más de un valor de la variable dependiente para un mismo valor de la variable independiente.

Estrategia óptima:

- Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar los datos pedidos.

Pide a uno de los grupos que asegura haberlo demostrado que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación entre las variables, entonces el profesor les preguntará:

"¿Qué hemos visto en la actividad anterior? ¿Podría ocurrir algo parecido en las gráficas?"

Si finalmente ningún grupo llega a la solución adecuada, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explica a sus alumnos que las relaciones vistas en las actividades realizadas hasta el momento reciben el nombre de función (dinero que pagamos dependiendo o *"en función"* del nº de litros de gasolina que echemos, litros que consumimos dependiendo o *"en función"* del número de kilómetros recorridos, cantidad de gas generado dependiendo o *"en función"* de la temperatura del motor de combustión, etc.).

El profesor plantea a los alumnos, que por grupos de 2 o 3 traten de dar una definición de lo que entienden por función, basándose en las actividades vistas hasta el momento, escribiéndolas en una hoja y poniendo ejemplos.

Una vez finalizado el tiempo estipulado se realiza una puesta en común, donde los alumnos expresan sus ideas acerca de lo que entienden por función. Una vez que existe consenso en clase, el profesor pasa a ordenar las ideas dadas por los alumnos, de forma que se obtenga una definición del concepto función coherente:

"Una función es una relación o correspondencia entre magnitudes, de manera que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y.

Para indicar que una magnitud (*y*) depende o es función de otra (*x*) se utiliza la notación *y* = *f* (*x*), que se lee *y es función de x*."

<u>Fase 3</u>

Objetivo:

- Aproximar al alumno a la definición de dominio de definición de una función. Identificar, buscar e interpretar el dominio de definición de una función a partir de su representación gráfica.
- Introducir el concepto de continuidad y discontinuidad de una función. Identificar y reconocer gráficas de funciones continuas y discontinuas.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Gráfico y el Registro de la Lengua Natural.

Material:

- Hoja con el funcionamiento de la maquinaria de las cuatro empresas, para cada dos o tres alumnos, dos dadas en el Registro de la Lengua Natural y otras dos dadas a través del Registro Gráfico.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 30-40 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"Debido a que tenemos cuatro empresas cuyos informes dejan mucho que desear, los miembros que formáis parte del grupo de inspección recibís ordenes de ir a realizar las mediciones de los gases contaminantes a dichas fabricas en el momento en que funciona el 100% de la maquinaria de cada empresa, es decir, cuando la maquinaria funciona al máximo rendimiento.

La inspección de cada instalación es de una hora en cada empresa y en el traslado de una empresa a otra se tarda media hora independientemente del orden a seguir.

Debéis realizar todas las inspecciones en un día, siendo vuestra jornada la siguiente:

- De 10-14 horas
- 14-15 horas comida
- 15 a 20 horas

Según los informes recibidos, el rendimiento de la maquinaria de las cuatro empresas son las siguientes:

Empresa 1

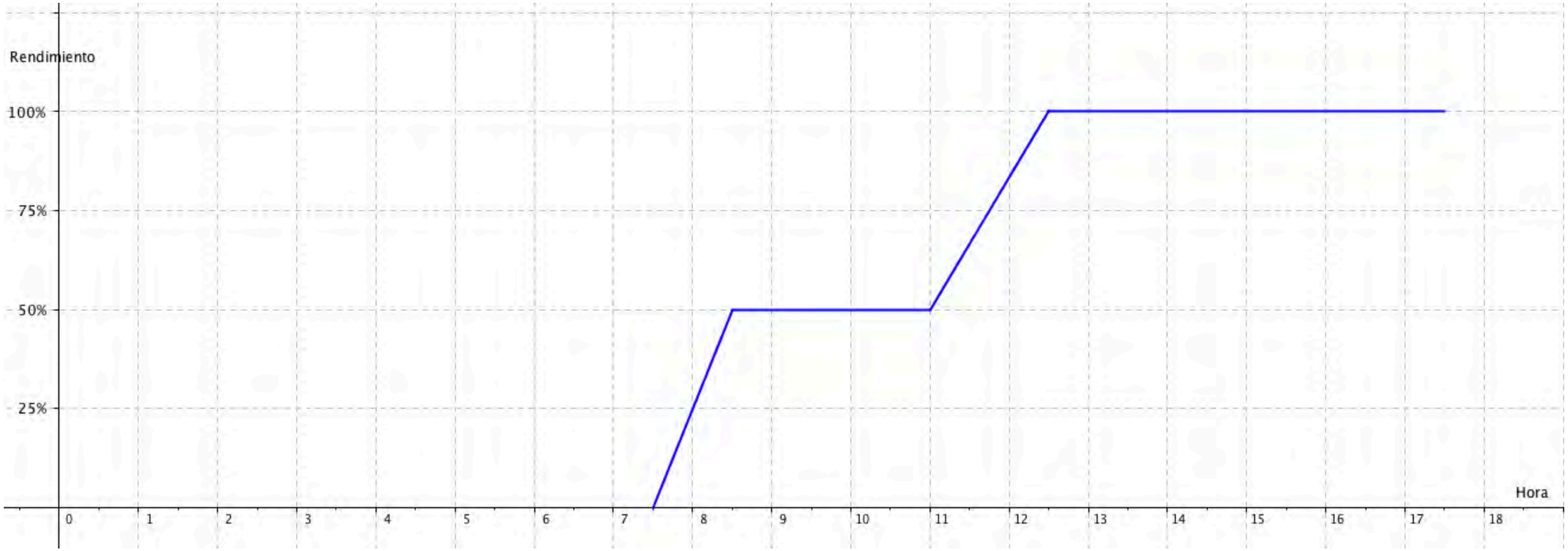


FIGURA 4.5.4.17. *Gráfica funcionamiento maquinaria empresa 1*

Empresa 2

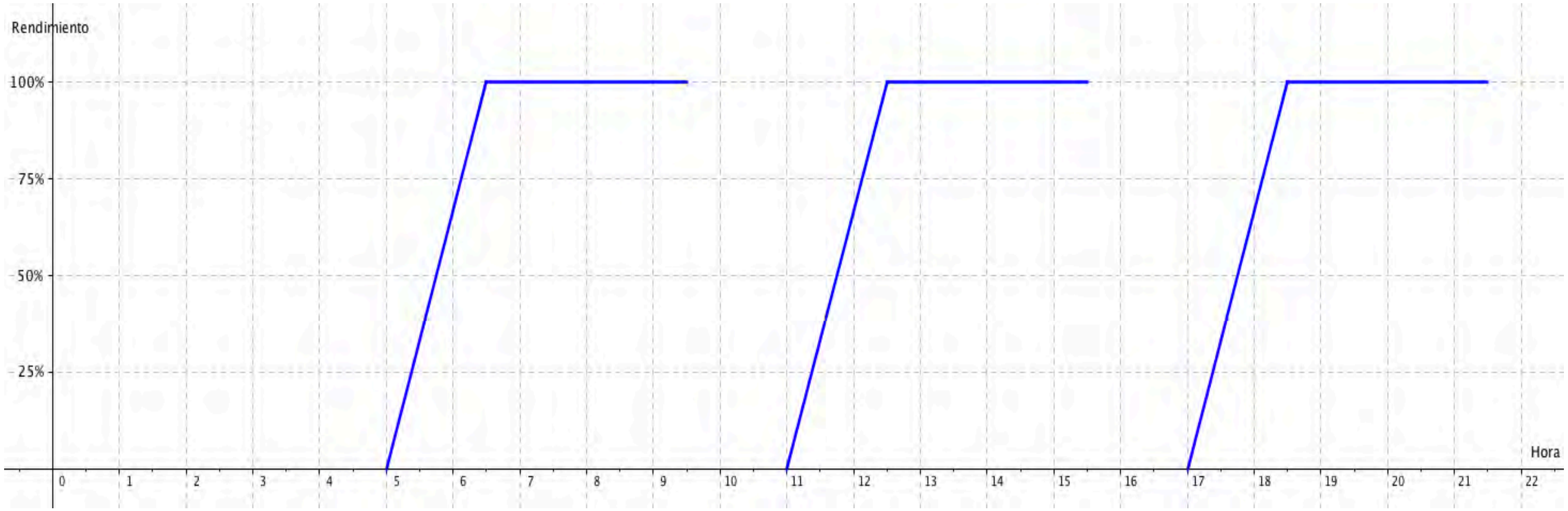


FIGURA 4.5.4.18. *Gráfica funcionamiento maquinaria empresa 2*

Empresa 3

La maquinaria permanece en funcionamiento durante las 24 horas del día. De las 00:00 a las 06:00 trabaja al 50%, y a partir de ahí, aumenta este hasta alcanzar el valor máximo a las dos horas. Permanece en ese punto durante 5 horas, momento en el cual comienza a reducirlo hasta alcanzar el 75% a las dos horas. Hasta las 21:30 de la noche permanece trabajando al 75% y se vuelve a disminuir su funcionamiento hasta alcanzar el 50% a las 00:00 horas.

Empresa 4

La maquinaria se pone en funcionamiento a las 08:00 horas. A la hora de ser encendida alcanza un cuarto de su rendimiento y se mantiene ahí durante una hora. A partir de este momento, se incrementa su funcionamiento hasta alcanzar la mitad de su rendimiento y se vuelve a mantener otra hora. Transcurrida otra hora, alcanza el máximo de su rendimiento y se mantiene ahí hasta las 14:00, momento en que apagan la maquinaria para ir a comer.

A las 15:30 horas vuelven a poner en funcionamiento la maquinaria. A la hora y media la hacen trabajar a la mitad de su rendimiento y la mantienen en dicho valor durante una hora. A partir de ahí, incrementan su rendimiento hasta alcanzar el valor máximo a las 19:30, punto en el que se mantiene hasta su apagado final a las nueve y media de la noche

En función de esta información, ¿qué orden es el que tenéis que seguir para poder visitar las cuatro empresas?"

Variables didácticas y su gestión:

- Los datos relativos al funcionamiento de la maquinaria de cada una de las fábricas se da en el registro de la lengua natural con el fin de que el estudiante se vea en la necesidad de cambiar a un Registro de Representación más visual para encontrar la solución, sirviéndoles como indicación la aportación del funcionamiento de la maquinaria de dos de las empresas a través del Registro Gráfico.

- Número de fábricas a visitar: si el número de fábricas que reciben la inspección es demasiado reducido, la actividad carecería de sentido, pues el propósito de la misma es que el alumno identifique el dominio de definición de cada una las gráficas, así como la continuidad y discontinuidad que presentan las mismas según las maquinas estén en funcionamiento o no, lo que se simplificaría si solo hubiese que visitar dos o tres empresas. Por otro lado, el número de fábricas tampoco debe ser muy elevado, ya que ello dificultaría en exceso la búsqueda de la solución.

- Las horas en que el funcionamiento de las maquinas es del 100%, el tiempo que se tarda en hacer la inspección, el horario de los inspectores, el tiempo que se tarda en desplazarse de un lugar a otro y el horario de trabajo de la fábricas se han elegido y ajustado de tal manera que solo exista una posibilidad para visitar las cuatro empresas a lo largo de un día, garantizando así que todos los estudiantes lleguen a la misma solución, y evitando, por otro lado, que la tarea se convierta en un problema de combinatoria.

Estrategia óptima:

- Representación de la información dada en el registro de la lengua natural a través de gráficas cartesianas para poder visualizar los periodos de trabajo de la maquinaria de cada una de las empresas y establecer el orden de visita en función del horario de cada fábrica y funcionamiento de la maquinaria, es decir, a partir del dominio de definición y la continuidad de cada una de las gráficas.

- Solución: Empresa 3, empresa 4, empresa 1 y empresa 2.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado sin tener en cuenta la jornada laboral de los inspectores.

- Utilización de una línea temporal para encontrar la solución.

- Dar el resultado sin tener en cuenta la media hora que se tarde en ir de una fábrica a otra.

- Dar el resultado sin tener en cuenta lo que se tarda en realizar cada inspección.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar la solución.

Pide a uno de los grupos que asegura saber cual es el orden para visitar las empresas que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explica a sus alumnos lo que se entiende por **dominio** de una función:

"Llamamos dominio de definición de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente *x* y se representa por Dom f.

Es el tramo de valores de *x* para los cuales hay valores de *y*."

El profesor señala el dominio de definición de las gráficas vistas en la tarea planteada y pone algunos ejemplos para que los alumnos lo identifiquen.

El profesor introduce un nuevo concepto ligado al de función:

"Imagen o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente *y* (variable que se deduce de la variable independiente) y se representa por Im f."

El profesor señala el recorrido de las gráficas vistas en la tarea planteada y pone algunos ejemplos para que los alumnos lo identifiquen.

El profesor introduce una definición intuitiva de la noción de continuidad de una función:

“La gráfica de una función se dice continua si se puede dibujar de un solo trazo. En caso de no poderse dibujarla de un solo trazo, diremos que la gráfica es discontinua.”

El profesor analiza la continuidad de las gráficas vistas en la tarea planteada y pone algunos ejemplos para que los alumnos lo identifiquen:

Temperaturas en un día de invierno

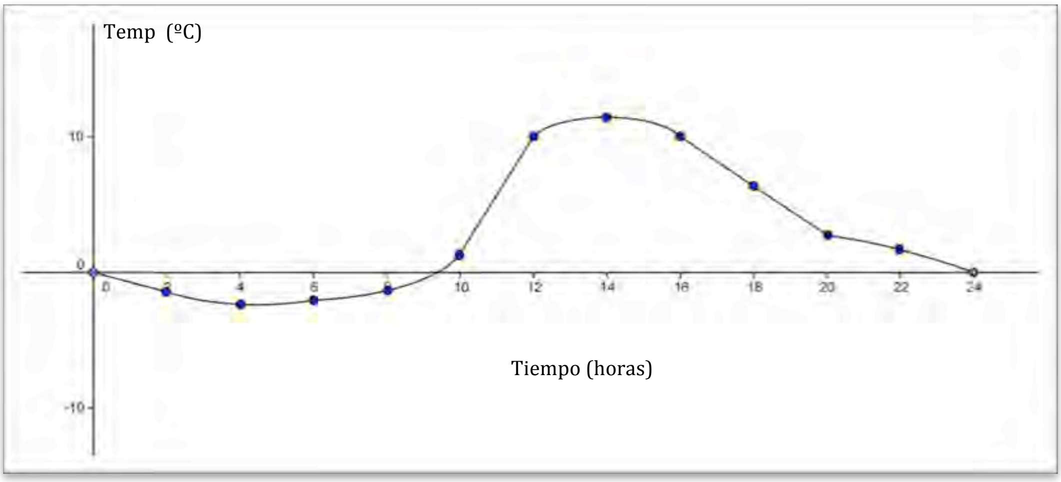


FIGURA 4.5.4.19. *Gráfica temperatura en un día de invierno*

Altura en cm. de un niño en sus 10 primeros años

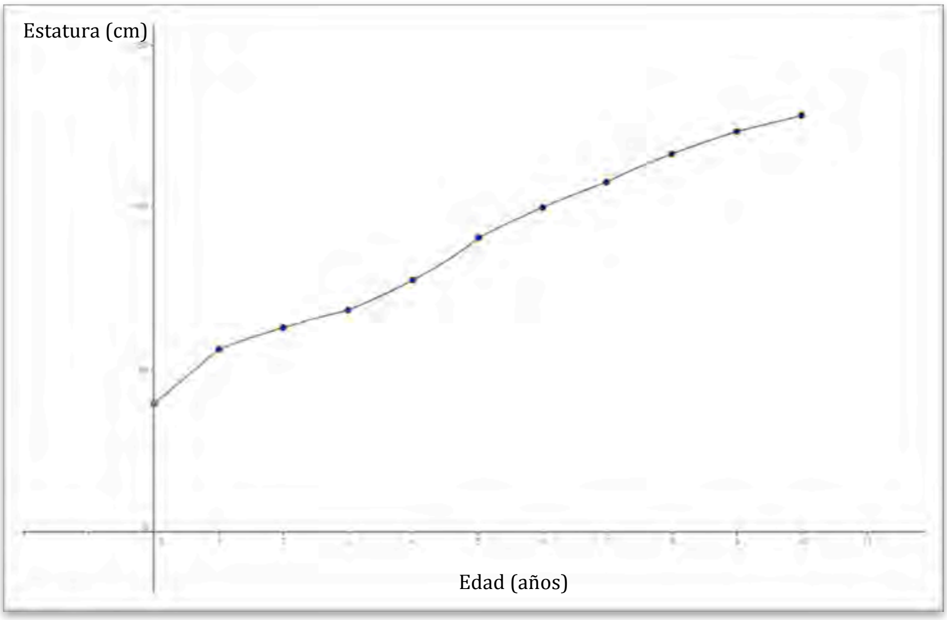


FIGURA 4.5.4.20. *Gráfica altura en cm de un niño en sus 10 primeros años*

Coste del envío de paquete por una agencia según su masa

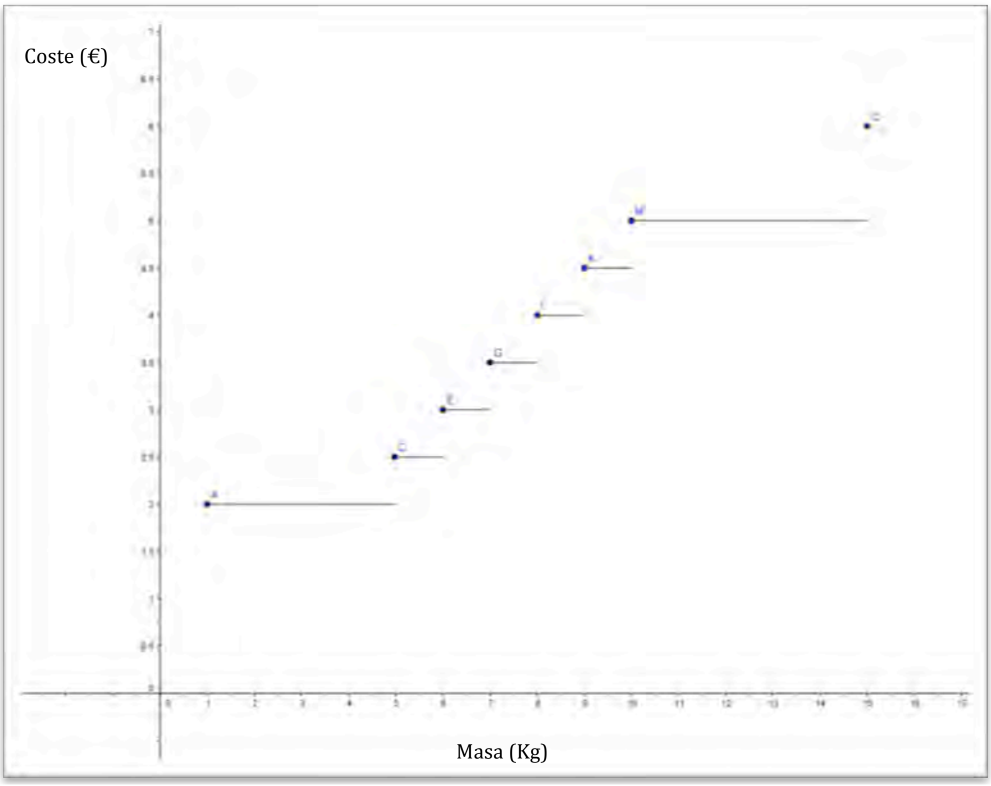


FIGURA 4.5.4.21. *Gráfica coste de envío de un paquete según su masa*

Situación 3: Las Centrales Eólicas. Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento.

Objetivo:

- Introducir los conceptos de máximos y mínimos de una función, así como proporcionar al estudiante las herramientas necesarias para identificarlos y estudiarlos a partir del registro gráfico.
- Introducir los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo, así como proporcionar al estudiante las herramientas necesarias para reconocer y estudiar tramos crecientes y decrecientes en la gráfica de una función.
- Estudiar, partiendo de la representación algebraica, el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos de una función.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Gráfico y el Registro Numérico (Fase 1).
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Algebraico – Registro Tabular - Registro Numérico - Registro Gráfico (Fase 2).

Fase 1

Material:

- Hoja con las gráficas de las funciones de la velocidad del viento de las zonas donde se quieren instalar las dos centrales eólicas.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15-20 minutos.

Consigna:

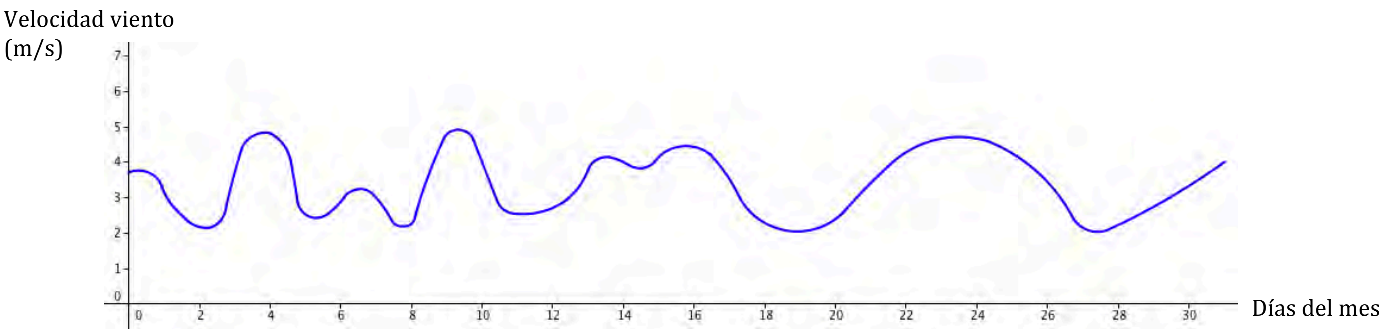
El profesor enuncia la consigna:

“Las centrales eólicas son consideradas como una fuente de energía eléctrica ecológica capaz de reemplazar a las centrales térmicas de carbón, gas o petróleo, que tanto contaminan el medio ambiente.

En la foto se puede ver un parque eólico con varios aerogeneradores y sus enormes aspas, que el viento hace girar. En un principio, puede parecer que, cuanto más fuerte es el viento, mas energía eléctrica se produce, pero esto no es siempre así. Con vientos menores de 2 m/s no funcionan, y con superiores a 5 m/s se pueden producir grandes averías. Lo que interesa, por lo tanto, es un viento dentro de esos valores, lo más constante posible y que no presente cambios bruscos.

En Madrid, se está examinando la ubicación de un campo de aerogeneradores y, para que sea lo más eficaz posible, se ha estudiado la fuerza del viento a lo largo de los siete primeros meses del año en dos lugares diferentes. Las siguientes gráficas representan la velocidad media del viento en esos 2 lugares en cada uno de los meses del año indicados:

Enero



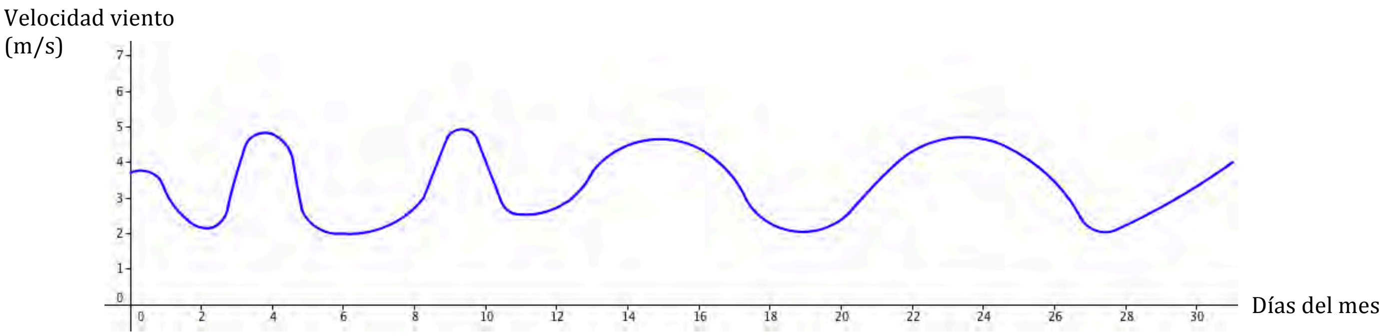
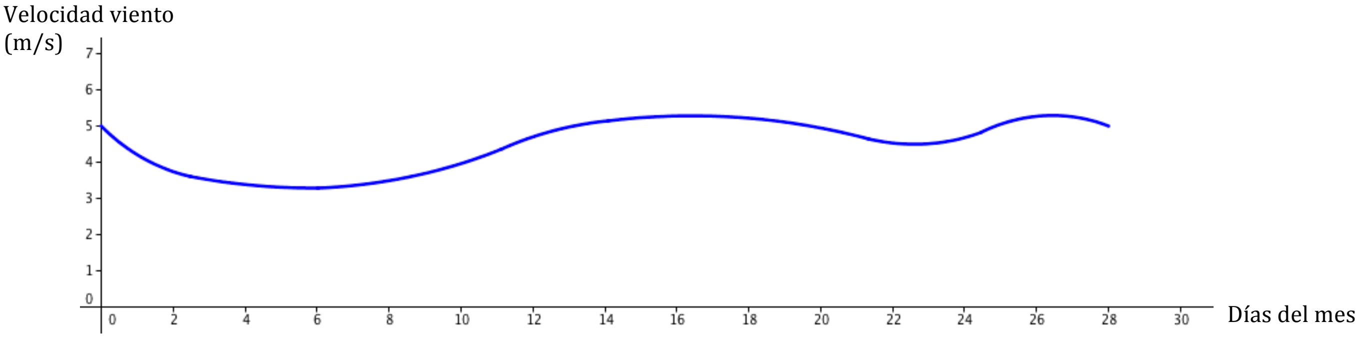
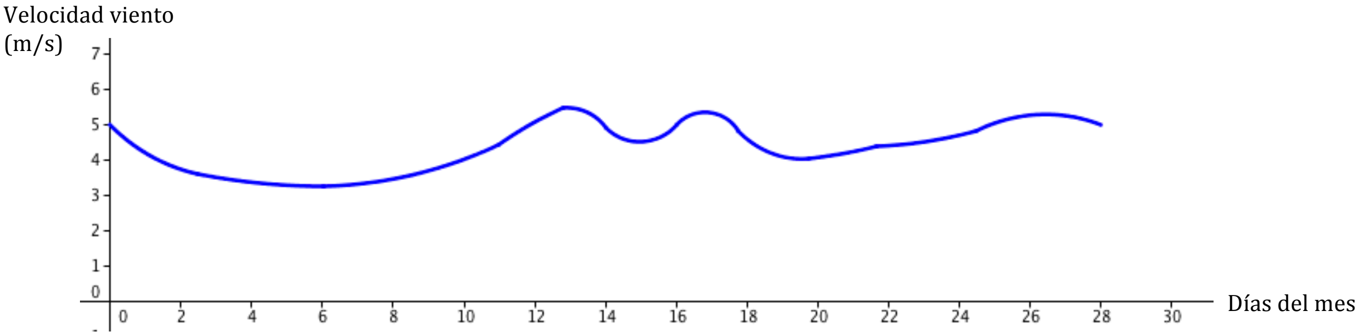


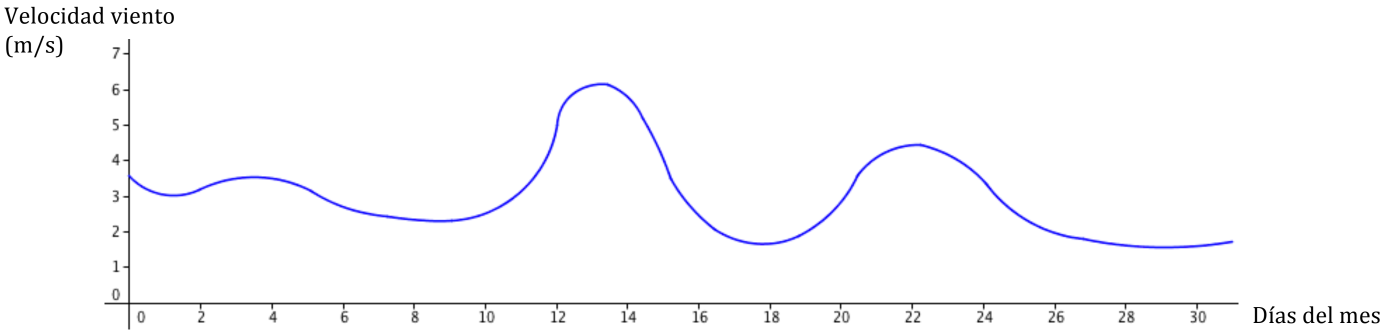
FIGURA 4.5.4.22. *Gráficas mes de enero*

Febrero





Marzo



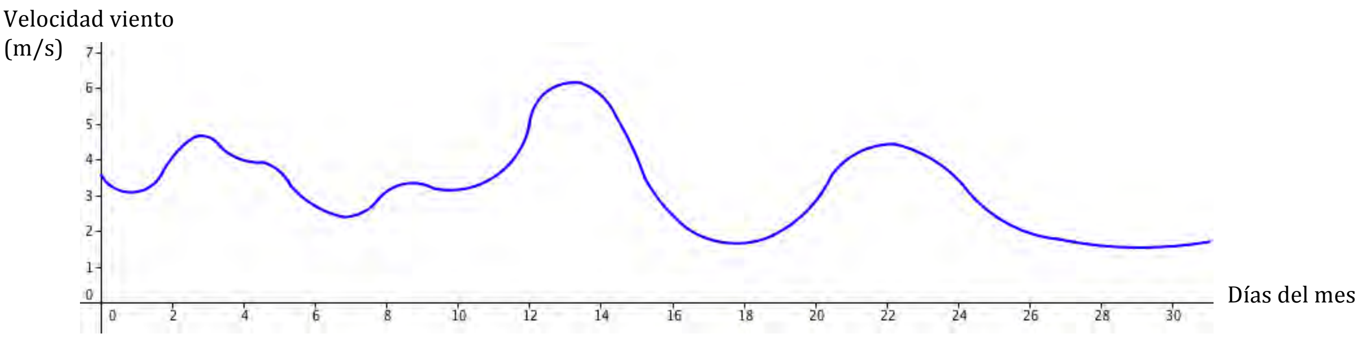
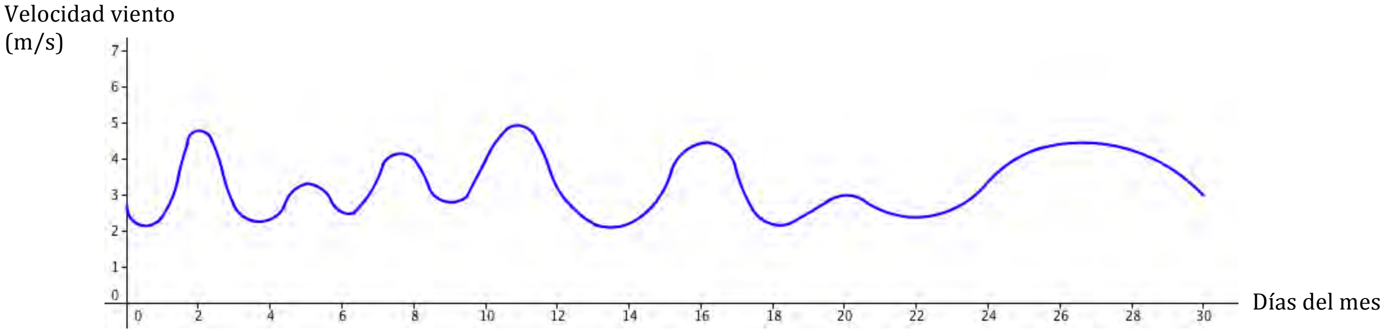
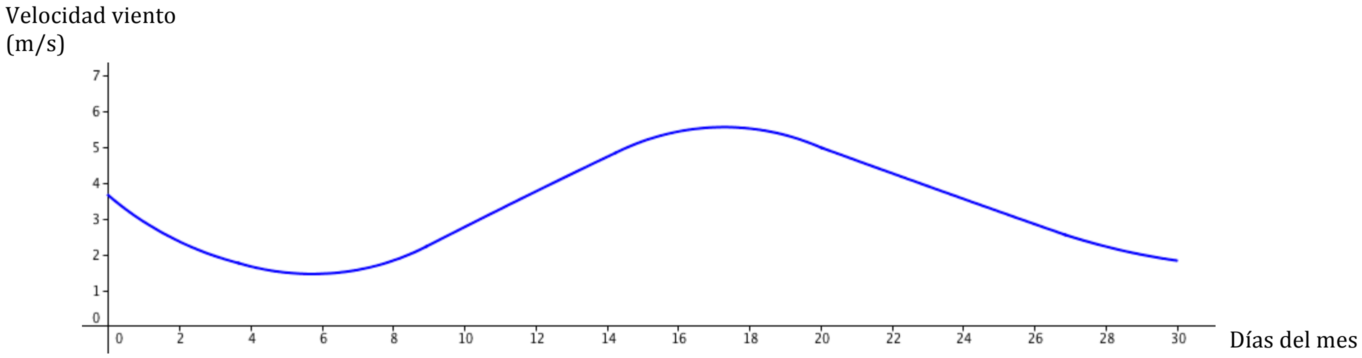


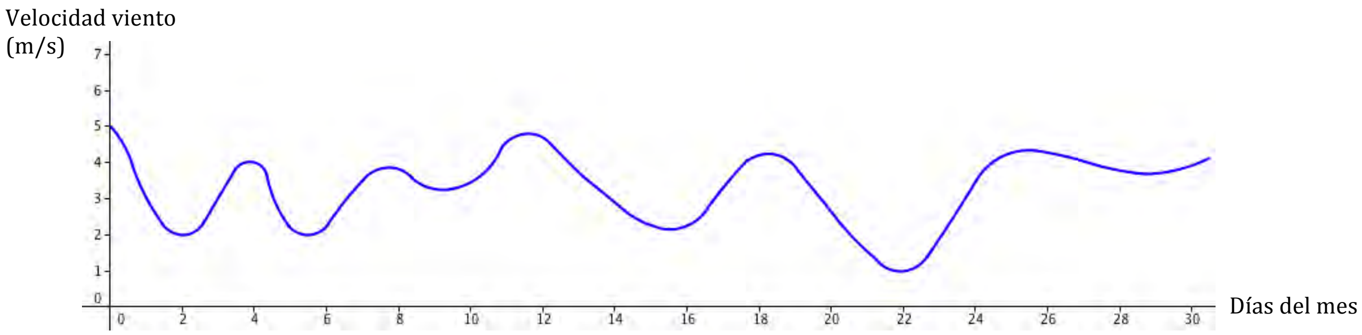
FIGURA 4.5.4.23. *Gráficas meses de febrero y marzo*

Abril





Mayo



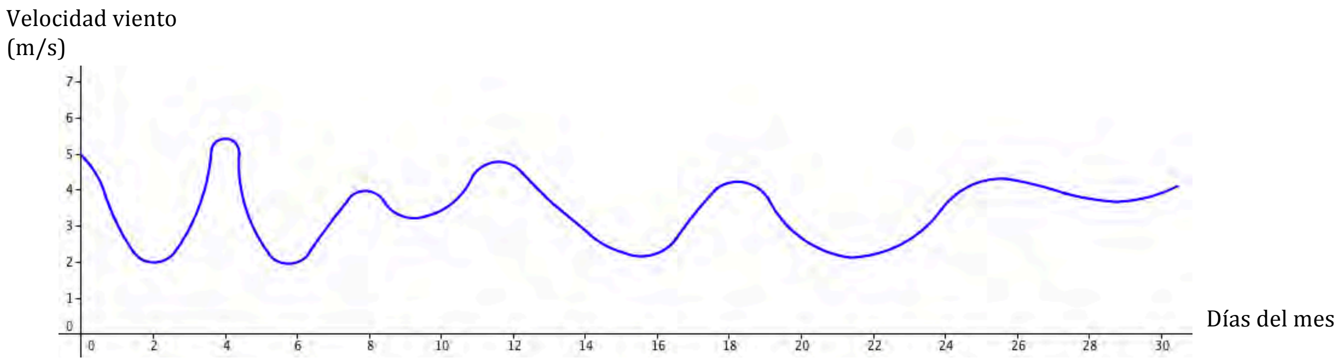
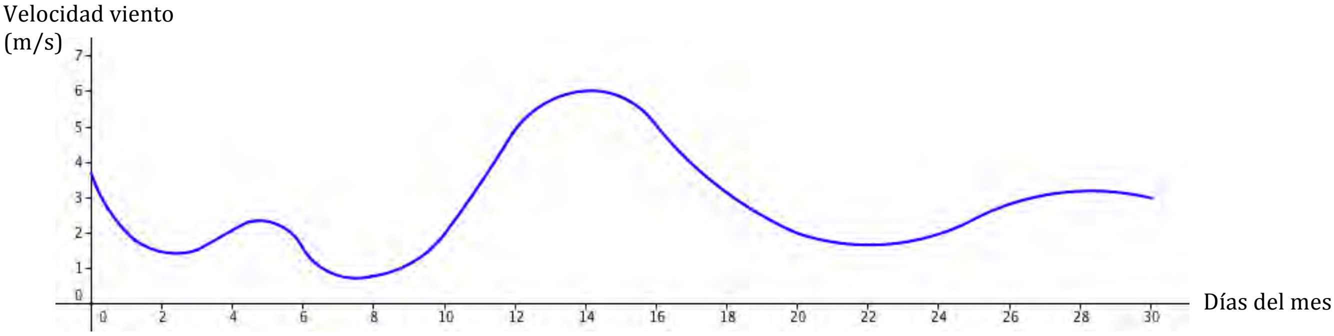
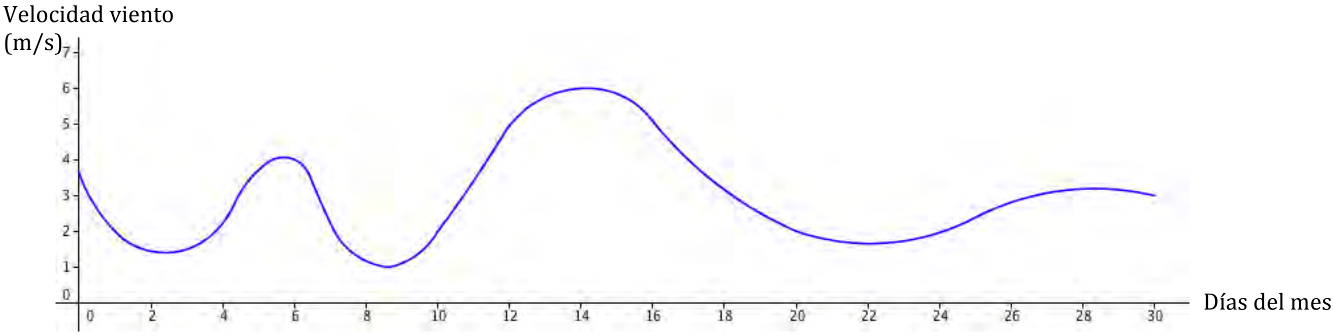


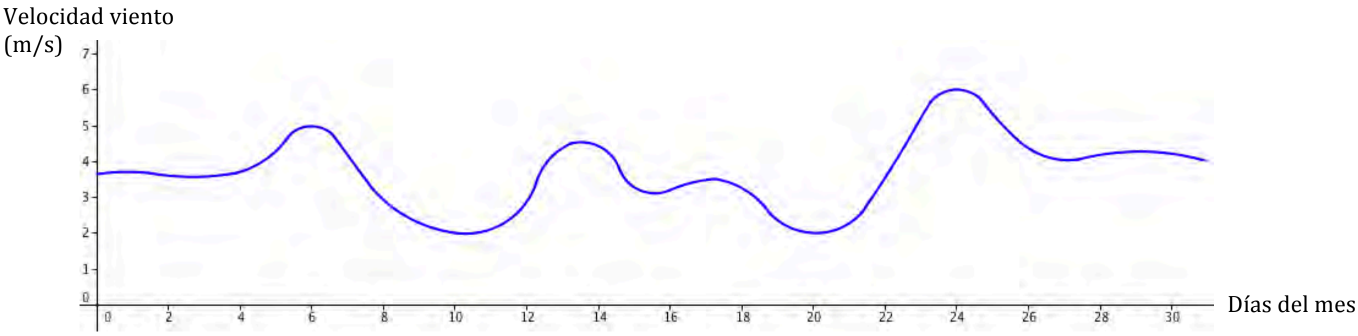
FIGURA 4.5.4.24. *Gráficas meses de abril y mayo*

Junio





Julio



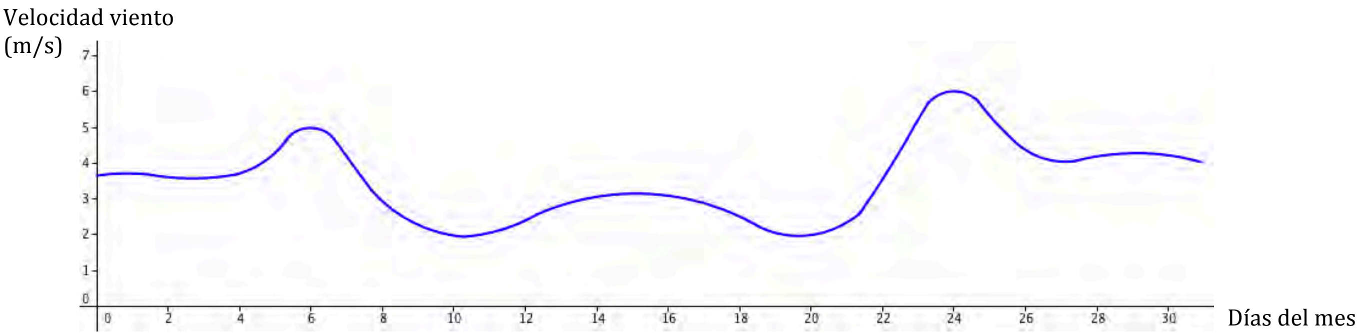


FIGURA 4.5.4.25. *Gráficas meses de junio y julio*

¿En qué meses se pondrá en funcionamiento cada central?"

Variables didácticas y su gestión:

- Los datos relativos a la velocidad del viento a lo largo de cada mes se han aportado en el registro gráfico con el fin de que el alumno se aproxime a la idea de máximo y mínimo y crecimiento y decrecimiento de manera natural.
- Las velocidades del viento en cada una de las ubicaciones para cada uno de los meses, se han elegido y ajustado de tal manera que se evita la ambigüedad a la hora de elegir una opción, lo que dificultaría la realización de la tarea.
- Constancia: Con el fin de que el alumno se vea en la necesidad de localizar los máximos y mínimos de las funciones, no siempre las funciones más constantes van a ser las opciones a elegir, pues en diversos de los casos planteados, sus valores se han determinado de modo que se encuentren fuera del intervalo para el cual los aerogeneradores podrían estar en funcionamiento.
- Similitud entre gráficas: Con el fin de que el alumno se vea en la necesidad de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones, se han construido gráficas similares para las dos ubicaciones en un mismo mes en algunas de las opciones, de modo que para elegir la central eólica que estará en funcionamiento en dicho mes, sea necesario analizar las variaciones de las funciones.

Estrategia óptima:

- Estudio de los máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento de cada una de las opciones en cada uno de los meses. Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos representaciones se encuentren fuera de los parámetros en intervalos distintos.
- Solución: Enero (2), Febrero (2), Marzo (1), Abril (1), Mayo (2), Junio (2), Julio (2).

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado teniendo solo en cuenta la constancia de las funciones.
- Dar el resultado teniendo solo en cuenta que ha más velocidad más energía se genera.
- Dar el resultado sin tener en cuenta el tiempo que se encentra la función fuera de los valores recomendados para el funcionamiento de la central.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar la solución.

Pide a uno de los grupos que asegura saber que centrales tienen que funcionar en cada mes que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Fase 2

Material:

- Hoja con las instrucciones para introducir la clave y la función con la que hay que trabajar.

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.

- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15-20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Para acceder al panel de mandos que controla el funcionamiento de los aerogeneradores, es necesario introducir una clave numérica.

Un día de mucho viento, el responsable de manejar el panel de mandos no se encuentra en la central y os pide a vosotros, que estáis de guardia, que paréis los aerogeneradores.

El problema es que desconocéis la clave, pero sabéis que los dígitos que forman dicha clave se corresponden con las coordenadas (x,y) de dos puntos determinados de la función $y= 3x – x^3$.

Las instrucciones para encontrar la clave e introducirla son:

- Primero: se introducen las coordenadas (x,y) del punto donde la función pasa de crecer a decrecer.
- Segundo: se introducen las coordenadas (x,y)del punto donde la función pasa de decrecer a crecer

¿Cuál es la clave que da acceso al panel de mandos?”

Variables didácticas y su gestión:

- Tipo de función: se ha escogido una función polinómica por ser una función continua y lo suficientemente accesible para el alumno a la hora de trabajar con ella. Del mismo modo, se ha elegido de grado tres porque si fuese de grado dos la actividad resultaría demasiado sencilla y si el grado fuese mayor que tres podría convertirse en una tarea compleja. Además, el hecho de ser de grado tres da lugar a que el alumno se vea en la necesidad de recurrir a su representación gráfica para localizar los máximos y mínimos, pues únicamente a partir del registro tabular o numérico sería difícil localizarlos.

- Los valores del máximo y el mínimo que presenta la gráfica toman valores enteros tanto para la coordenada x como para la y, pues de tomar valores decimales se complicaría la búsqueda de dichos puntos a partir de la representación gráfica que tiene que realizar el estudiante, teniendo lugar una perdida sentido de la actividad.
- Se proporciona la función a través de su registro algebraico para obligar al estudiante a realizar la conversión al registro numérico o tabular y de este al registro gráfico para encontrar la solución.
- No se indica el número de dígitos que tiene la clave para no condicionar la búsqueda de máximos y mínimos de la función.

Estrategia óptima:

- Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo.
- Solución: (1, 2, -1, -2)

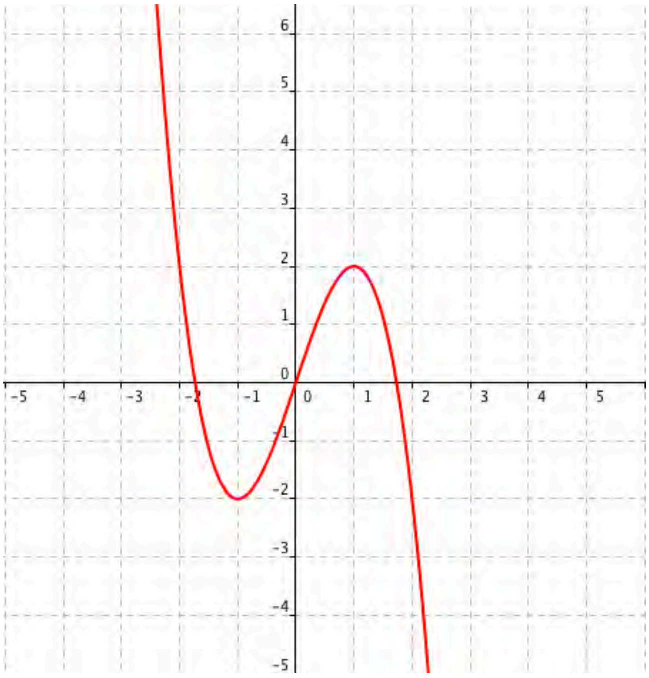


FIGURA 4.5.4.26. *Gráfica de la función* $y = 3x - x^3$

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado teniendo solo los valores obtenidos en el registro tabular o numérico.
- Dar el resultado sin tener en cuenta el crecimiento y decrecimiento de la función.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar la clave.

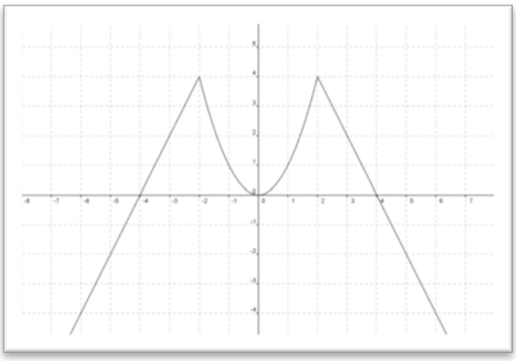
Pide a uno de los grupos que asegura saber cual es la clave que expliquen cómo lo han hecho. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrar la relación, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explica a sus alumnos lo que se entiende por **crecimiento y decrecimiento** de una función destacando el papel que juega el dominio y el recorrido en esta clasificación. Para ello se apoyará en diversos ejemplos:



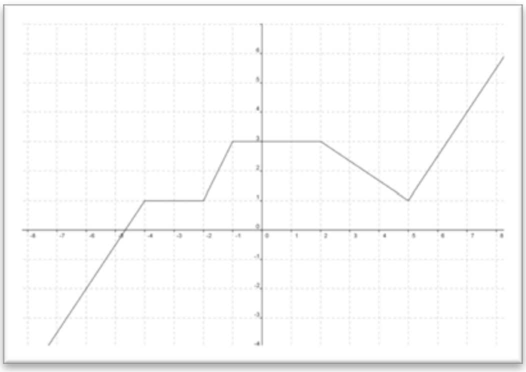


FIGURA 4.5.4.27. *Gráficas para estudiar el crecimiento y el decrecimiento*

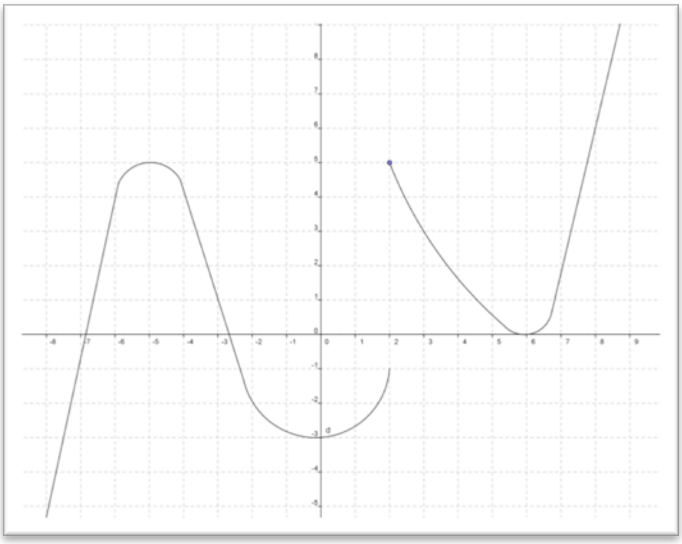


FIGURA 4.5.4.28. *Gráfica para estudiar el crecimiento y el decrecimiento*

“Cuando dentro de un intervalo el dominio aumenta y el recorrido también podemos decir que la función crece en ese intervalo, y cuando el dominio aumenta y el recorrido disminuye la función decrece en ese intervalo.

Es decir, una función es creciente en un intervalo si al aumentar la variable independiente (x) aumenta la variable dependiente (y), y una función es decreciente en un intervalo si al aumentar la variable independiente (x) disminuye la variable dependiente (y).”

El profesor explica a sus alumnos lo que se entiende por **máximo y mínimo** de una función destacando el papel que juega los intervalos de crecimiento y decrecimiento en esta clasificación. Para ello se apoyará en diversos ejemplos:

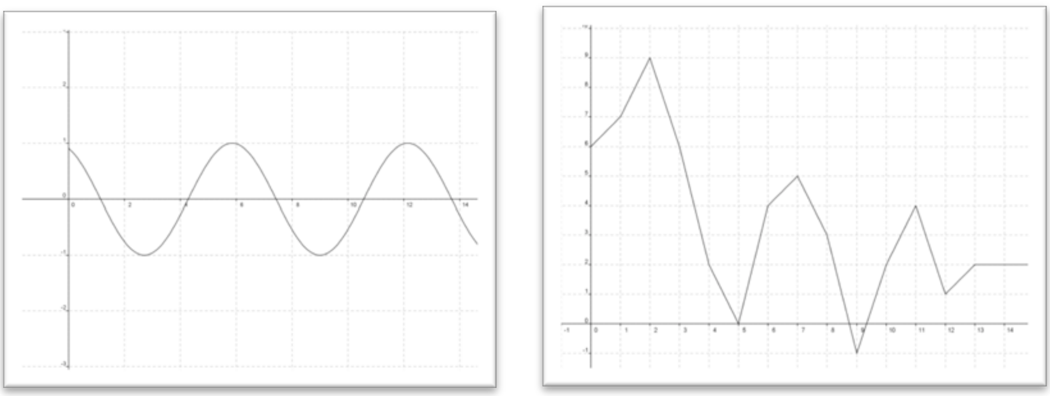


FIGURA 4.5.4.29. *Gráficas para estudiar máximos y mínimos*

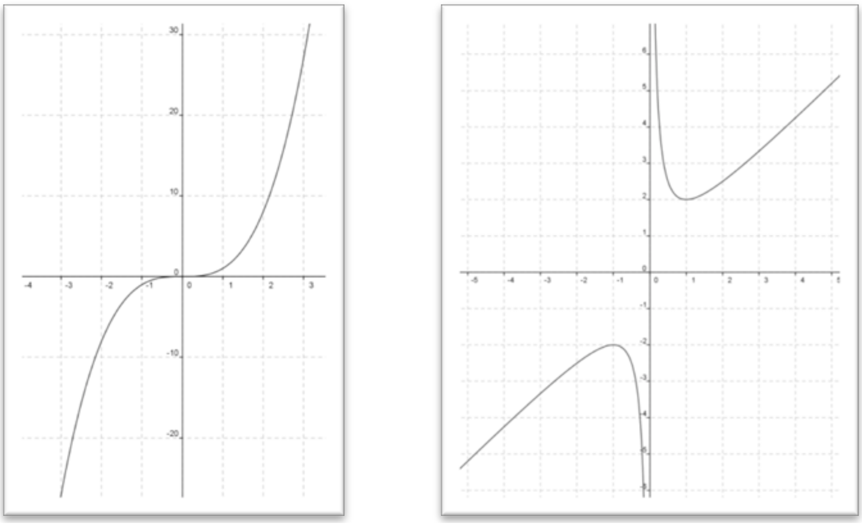


FIGURA 4.5.4.30. *Gráficas para estudiar máximos y mínimos*

"Una función tiene un máximo en un punto cuando su coordenada *y* es mayor que la coordenada *y* de los puntos que lo rodean. A la izquierda del máximo, la función es creciente, y a su derecha, decreciente, es decir, en el punto donde una función pasa de crecer a decrecer se dice que tenemos un máximo.

Si la función tiene más de un máximo, aquel que tenga mayor valor de la variable dependiente *y* diremos que es el máximo absoluto y los demás serán máximos relativos.

Una función tiene un mínimo en un punto cuando su coordenada *y* es menor que la de los puntos que lo rodean. A la izquierda del mínimo, la función es decreciente, y a su derecha creciente, es decir, en el punto donde una función pasa de decrecer a crecer se dice que tenemos un mínimo.

Si la función tiene más de un mínimo, aquel que tenga menor valor de la variable dependiente *y* diremos que es el mínimo absoluto y los demás serán mínimos relativos.

Situación 4: el observatorio astronómico. Periodicidad

Objetivo:

- Estudiar el comportamiento a largo plazo y reconocer aquellas funciones que presentan periodicidad.
- Estudiar la periodicidad de una función a partir de su representación gráfica y tabular.
- Identificar el periodo de una función a partir de su representación gráfica.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Numérico - Registro Gráfico - Registro de la Lengua Natural (Fase 1).
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre Registro Figural - Registro de la Lengua Natural- Registro Gráfico (Fase 2).
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre el Registro Gráfico y el Registro Numérico (fase 3)

Fase 1. (Fases de la Luna)

Material:

- Hoja con la tabla con el % de la luna que es visible desde la Tierra a lo largo de su ciclo en una determinada fecha:

TABLA 4.5.4.9. *Tabla para los alumnos con el % de luna visible*

DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%
10 Mar	16%	17 Mar	25%	24 Mar	83%	31 Mar	76%
11 Mar	8%	18 Mar	34%	25 Mar	90%	1 Abr	67%
12 Mar	3%	19 Mar	43%	26 Mar	97%	2 Abr	58%
13 Mar	0%	20 Mar	50%	27 Mar	100%	3 Abr	50%
14 Mar	3%	21 Mar	58%	28 Mar	97%	4 Abr	43%
15 Mar	8%	22 Mar	67%	29 Mar	90%	5 Abr	34%
16 Mar	16%	23 Mar	76%	30 Mar	83%	6 Abr	25%

Fuente: elaboración propia

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 30-40 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Como sabéis, no todos los días vemos la misma cantidad de Luna en el cielo nocturno.

FIGURA 4.5.4.31. *Fases lunares*

El % que es visible de la luna varía en función del día, desde el 0% (luna nueva) hasta el 100% (luna llena). En la tabla que aparece a continuación podéis ver los últimos datos que han recogido en el observatorio en relación al % que es visible de la luna:

TABLA 4.5.4.10. *Tabla para los alumnos con el % de luna visible*

DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%
10 Mar	16%	17 Mar	25%	24 Mar	83%	31 Mar	76%
11 Mar	8%	18 Mar	34%	25 Mar	90%	1 Abr	67%
12 Mar	3%	19 Mar	43%	26 Mar	97%	2 Abr	58%
13 Mar	0%	20 Mar	50%	27 Mar	100%	3 Abr	50%
14 Mar	3%	21 Mar	58%	28 Mar	97%	4 Abr	43%
15 Mar	8%	22 Mar	67%	29 Mar	90%	5 Abr	34%
16 Mar	16%	23 Mar	76%	30 Mar	83%	6 Abr	25%

Fuente: elaboración propia

Hoy es 30/04/2013,

¿Cuándo ha sido la última Luna nueva?

¿Cuándo será la próxima Luna llena?

¿Qué tanto por ciento de la Luna se verá esta noche?

¿Qué día de junio será cuarto creciente?

¿Qué tanto por ciento es visible de la Luna el 01/01/2013?

¿Qué tanto por ciento es visible de la Luna el día 29/04/2013?"

Variables didácticas y su gestión:

- Aportación de los datos a partir del registro tabular: se han facilitado los datos únicamente a través del registro tabular con la intención de no mostrar visiblemente el carácter periódico de la función, lo que si se hubiese manifestado a través del Registro Gráfico. Además, este hecho permitirá al estudiante encontrar la solución a las preguntas tanto a través de la conversión al registro numérico directamente o pasando previamente por el registro gráfico.

- Tres de las preguntas hacen referencia a fechas distanciadas en el tiempo, tanto anterior como posterior al ciclo lunar actual, con el fin de que el estudiante se vea obligado a detectar el carácter periódico del mismo, pues de realizar preguntas que solo hagan referencia al ciclo actual o a fechas muy próximas a él, el alumno resolvería la actividad por simple conteo a partir de la tabla, sin necesidad de detectar el periódico de la función y perdiéndose el sentido de la tarea.

- Los datos del ciclo lunar de la tabla aparecen vinculados a fechas concretas para evitar aquellas dificultades y bloqueos que pueden surgir al intentar relacionarla duración de dicho ciclo con la duración de cada mes.

Estrategia óptima:

- Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de ahí, encontrar la solución a las cuestiones planteadas, ya sea directamente a través del Registro Numérico o sea previo paso al Registro Gráfico:

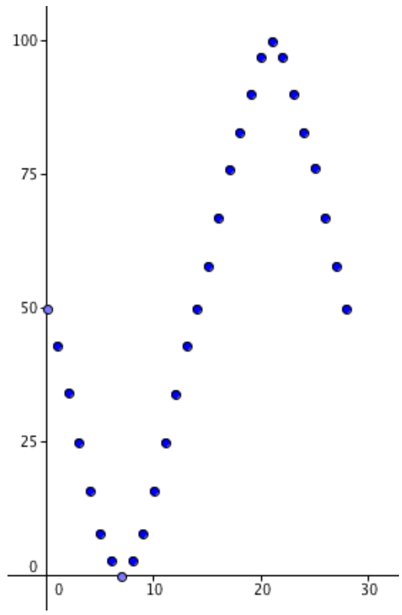


FIGURA 4.5.4.32. *Gráfica periódica del % de luna visible*

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado considerando que el mismo día de cada uno de los meses se ve el mismo porcentaje de la Luna, sin tener en cuenta el periodo de la función.

- Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.
- Dar el resultado al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido encontrar la respuesta a cada una de las preguntas.

Pide a uno de los grupos que explique cual es la respuesta a la pregunta y cómo han hecho para resolverlo. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Fase 2. (Distancia Tierra – Sol)

Material:

- Hoja con la distancia de la Tierra al Sol en cada una de las fechas seleccionadas.
- Dibujo de la trayectoria de la orbita de la Tierra alrededor del Sol:

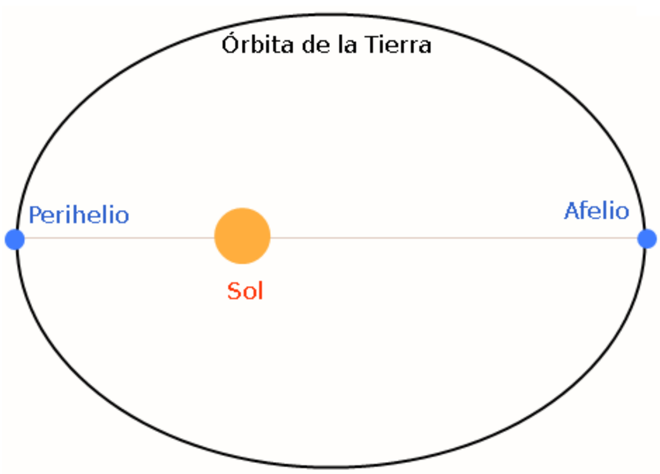


FIGURA 4.5.4.33. *Trayectoria de la Tierra alrededor del Sol*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 30-40 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"El planeta Tierra tarda un año en dar una vuelta completa alrededor del sol. Cuándo la Tierra alcanza su máxima proximidad al Sol, se dice que pasa por el perihelio, y cuando se encuentra en el punto más alejado, se dice que está en el afelio.

Sabemos que la orbita del la Tierra alrededor del sol es la siguiente:

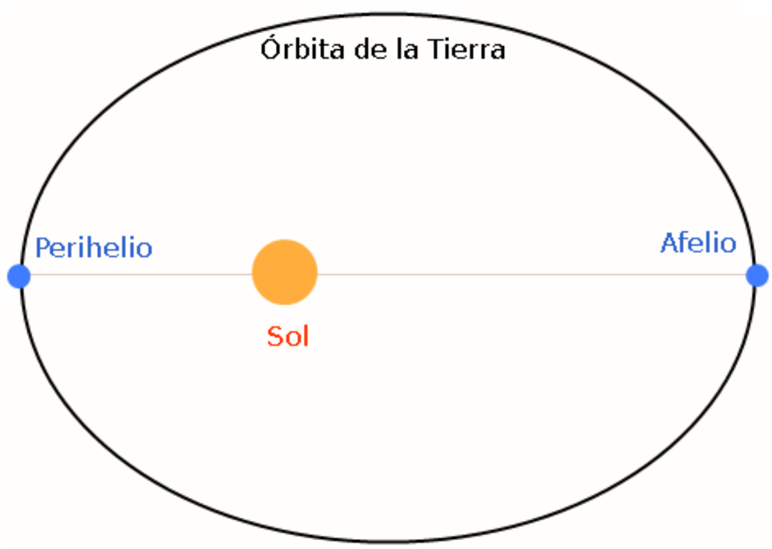


FIGURA 4.5.4.34. *Trayectoria de la Tierra alrededor del Sol*

El centro astronómico dispone de los siguientes datos de la distancia de la Tierra al Sol:

El día 4 de abril de 1976, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de junio de 1979, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de septiembre de 1981, la Tierra se encontraba aproximadamente una distancia de 150,8 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de noviembre de 1983, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de mayo de 1985, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 150,8 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de febrero de 1988, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de julio de 1990, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 152 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Afelio.

El día 4 de diciembre de 1994, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

EL día 4 de enero de 1998, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Perihelio.

El día 4 de marzo de 2003, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de octubre de 2007, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de agosto de 2012, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

A partir del análisis de esos datos, el centro astronómico os pide que construyáis la gráfica cartesiana que describirá la distancia entre la Tierra y el Sol para el año 2015."

Variables didácticas y su gestión:

- Día seleccionado: se ha seleccionado el mismo día para cada uno de los meses para mostrar regularidad en relación a la medida de la distancia entre la Tierra y el Sol en cada mes. De haber dado un día distinto para cada mes podría producirse cierta confusión en el estudiante generando un bloqueo a la hora de construir la gráfica.

- Dar la distancia de la Tierra al Sol en distintos años, ya que de este modo recaerá en el alumno el detectar la periodicidad de la función, necesaria para resolver la tarea. Si hubiésemos dado los datos concernientes a los 12 meses a lo largo de un mismo año, el alumno reproduciría esos mismos datos pero para el año 2015 sin necesidad de estudiar su periodicidad. Además, el carácter periódico se hubiese manifestado de manera inmediata, sin ser necesario que el estudiante cayera en la cuenta de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses.

- La no correspondencia entre el orden creciente de los años con el orden creciente de los meses, pues de haberse establecido dicha correspondencia, el carácter periódico de la gráfica a construir se manifestaría de manera inmediata, perdiéndose el sentido de la actividad.

- No indicar la fecha del perihelio y el afelio, con la intención de que sea el propio estudiante el que les detecte para facilitarle la construcción de la gráfica. De proporcionarles dicha información, establecerían fácilmente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función que a la vez marcan la periodicidad de la misma.

Estrategia óptima:

- Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.

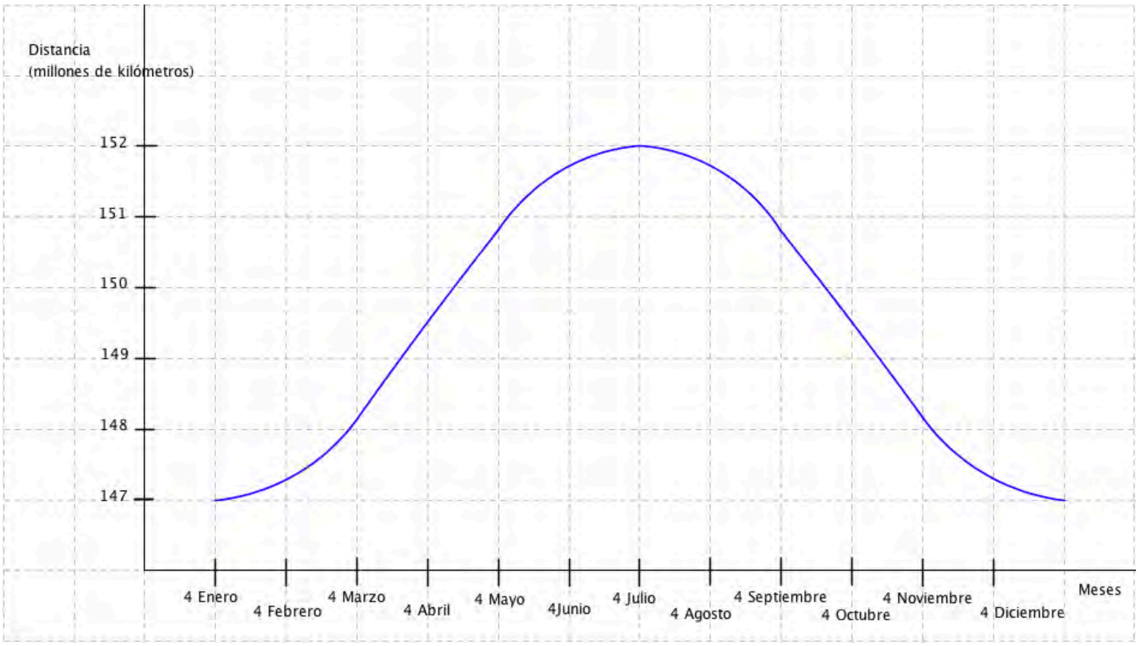


FIGURA 4.5.4.35. *Gráfica distancia Tierra-Sol a lo lardo de un año*

Otras estrategias esperadas:

- Búsqueda de algún patrón de repetición entre los años dados y el años que se pide representar gráficamente.
- Realización de cálculos numéricos para encontrar la distancia de la Tierra al Sol en cada uno de los meses del año 2015.
- Construir una gráfica al azar.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta quién ha conseguido representar la gráfica.

Pide a uno de los grupos, que afirma haberla obtenido, que expliquen como han hecho para construirla. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

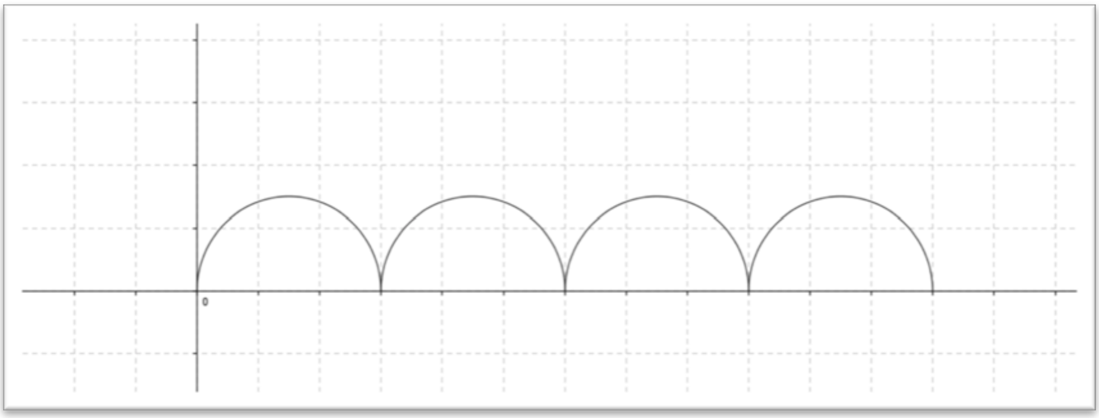
Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explica a sus alumnos lo que se entiende por función periódica:

"Una función es periódica cuando la gráfica de la misma se repite de manera idéntica cada vez que la variable independiente x recorre cierto intervalo. La longitud de este intervalo recibe el nombre de periodo."

El profesor se apoyará en diversos ejemplos y en las funciones utilizadas a lo largo de la situación:



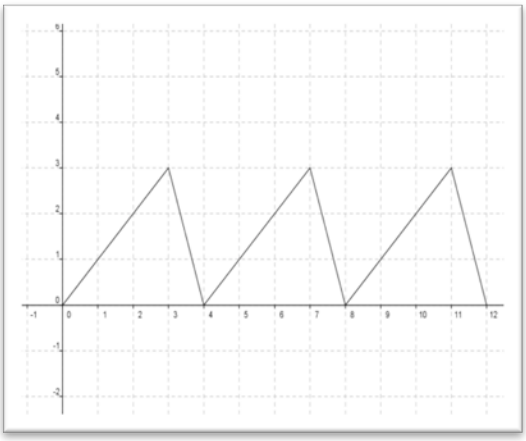


FIGURA 4.5.4.36. *Gráficas para estudiar la periodicidad*

Situación 5: Juego de Comunicación. Las pastelerías.

<u>Fase 1</u>: Función de proporcionalidad a través del registro tabular.

Objetivo:

- Reconocer y estudiar la función de proporcionalidad $y = mx$ a partir del registro tabular.
- Presentar situaciones prácticas a las que responde una función de proporcionalidad.
- Hacer hincapié en la necesidad de utilizar el registro algebraico.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre el Registro Tabular, el Registro de la Lengua Natural y el Registro algebraico.

Material:

- Hoja con las tablas que indican la cantidad de azúcar que deben echar para hacer las tartas en función del número de raciones:

TABLA 4.5.4.11. *Tablas para los alumnos gr azúcar/ración*

Raciones	Gramos de azúcar
4	170 gr
6	255 gr
8	340 gr
10	425 gr
12	510 gr
14	595 gr
16	680 gr
18	765 gr
20	850 gr
22	935 gr
24	1020 gr
26	1105 gr
28	1190 gr
30	1275 gr

Raciones	Gramos de azúcar
4	150 gr
6	225 gr
8	300 gr
10	375 gr
12	450 gr
14	525 gr
16	600 gr
18	675 gr
20	750 gr
22	825 gr
24	900 gr
26	975 gr
28	1050 gr
30	1125 gr

Fuente: elaboración propia

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 30-40 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Sois pasteleros que trabajáis para la misma empresa que tiene dos sucursales en Leganés. La mitad trabajáis en la sucursal A y la otra mitad, en la B. Los que trabajáis en la sucursal A disponéis de la receta de la Tarta de Mondoñedo, y los de la sucursal B, la receta de una Tarta de Manzana.

En las recetas os aparece una tabla que os indica la cantidad de azúcar que necesita cada tarta en función de las raciones que podemos hacer con ellas para luego venderlas.

Hoy, de manera excepcional y debido a que os habéis quedados sin los ingredientes principales para elaborar cada una de las tartas, la sucursal A va a hacer la Tarta de Manzana y la sucursal B la Tarta de Mondoñedo.

Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora la tabla con la cantidad de azúcar que deben echar para hacer la Tarta de Mondoñedo en función del número de raciones.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora la tabla con la cantidad de azúcar que deben echar para hacer la Tarta de Manzana en función del número de raciones.

Los mensajes no pueden contener ninguno de los datos numéricos que hay en las tablas.

Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades.”

Variables didácticas y su gestión:

- Empleo de la calculadora: Debido a que los estudiantes tienen que emplear la calculadora para encontrar las cantidades pedidas a partir del mensaje recibido, el alumno que manda el mensaje se verá en la necesidad de recurrir al Registro Algebraico o al Registro de la Lengua Natural para expresar la relación entre las raciones y las cantidades, bloqueando así el empleo del Registro Numérico y el Registro Gráfico. Además, la utilización de la calculadora reducirá aquellas dificultades que surjan propias del cálculo y agilizará la realización de la actividad.
- La restricción de que el mensaje no pueda contener datos numéricos de los que aparecen en la tabla, bloquea que el estudiante intente reproducir total o parcialmente los datos que en ella se recogen, creando la necesidad encontrar la razón de proporcionalidad entre las cantidades.
- Aportación de los datos a través del Registro Tabular para favorecer la conversión entre dicho registro y el Registro algebraico, sin empleo del Registro Gráfico.
- Número de datos que forman parte de cada tabla: si el número de datos que forman parte de cada tabla fuera reducido, el alumno simplemente mandaría un mensaje indicando la cantidad de azúcar que se necesita mediante el Registro Numérico, pero al proporcionar un número de datos relativamente elevado, tal cantidad de información no se puede transmitir en el espacio disponible, lo que conduce al empleo del Registro Algebraico.
- El número de raciones inicial comienza en cuatro en lugar de en la unidad de modo que no se evidencie la razón de proporcionalidad que interviene en cada receta, pues se perdería el sentido de la actividad.

Estrategia óptima:

- Búsqueda de la razón de proporcionalidad para mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
- Solución: $y= 42.5x$; $y= 37.5x$

Otras estrategias esperadas:

- Indicar en el mensaje únicamente la razón de proporcionalidad.
- Indicar todas las cantidades reduciendo la letra.
- Considerar como razón de proporcionalidad la cantidad de azúcar que se añade por cada dos raciones.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

“¿Quién ha conseguido los datos para la tarta que tenéis que hacer?”

Aquellos grupos que afirmen tenerla procederán a la comparación con la tabla de datos correcta que tiene el grupo emisor del mensaje.

El profesor pregunta a cada par de grupos si han conseguido que funcionen los mensajes o no, y pide que expliquen el procedimiento seguido.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

<u>Fase 2.</u> Función de proporcionalidad a través del Registro Gráfico

Objetivo:

- Reconocer y estudiar la función de proporcionalidad $y = mx$ a partir del registro gráfico.
- Presentar situaciones prácticas a las que responde una función de proporcionalidad.
- Obtener la ecuación de una recta que corresponde a una gráfica y representar gráficamente una función de proporcionalidad dada por su ecuación.
- Localizar y obtener la pendiente de una función de proporcionalidad y utilizar la relación entre la pendiente de una función y su crecimiento.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre el Registro Gráfico y el Registro algebraico.

Material:

- Hoja con las gráficas que indican la cantidad de almendras y harina, respectivamente, que deben echar para hacer las tartas en función del número de raciones:

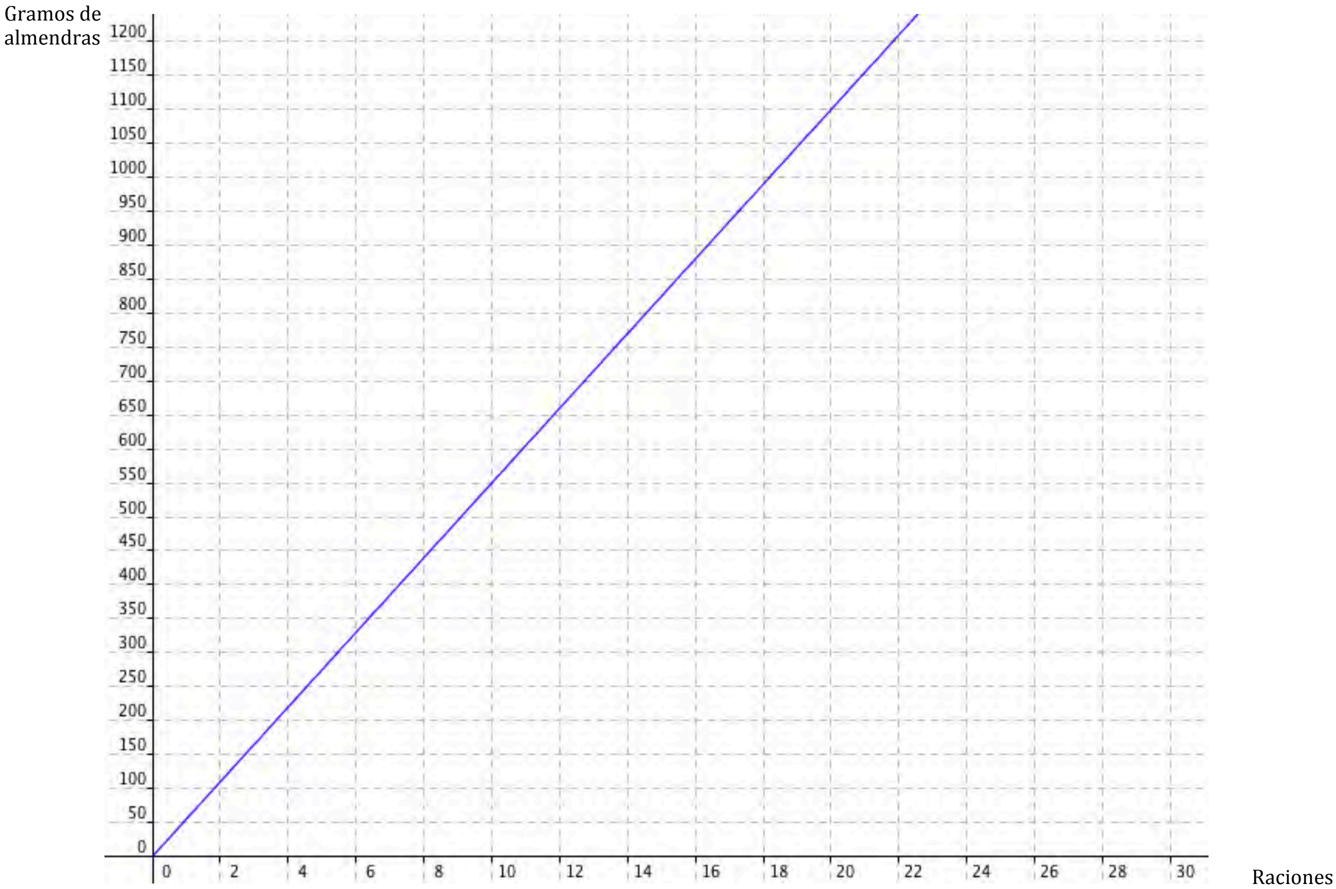


FIGURA 4.5.4.37. *Gráfica para el alumno relación gr almendra/raciones*

FIGURA 4.5.4.38. *Gráfica para el alumno relación gr harina/raciones*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 30-40 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"Ahora, nos pasa algo similar con la cantidad de almendras que lleva la Tarta de Mondoñedo y la cantidad de harina de repostería que es necesario emplear para la Tarta de manzana.

El problema es que en esta ocasión no tenemos la tabla con los valores, sino que de lo que se dispone es de una gráfica con las cantidades que se necesitan dependiendo del número de raciones.

Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con la información que transmitáis en ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de almendras que deben echar para hacer la Tarta de Mondoñedo en función del número de raciones.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de harina de repostería que deben echar para hacer la Tarta de Manzana en función del número de raciones.

Para mandar el mensaje, solo disponéis del siguiente espacio:

Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades."

Variables didácticas y su gestión:

- Espacio para mandar el mensaje: El alumno solo dispondrá del hueco establecido para mandar el mensaje con la intención de que se vea en la necesidad de recurrir al Registro Algebraico por las limitaciones del espacio, bloqueando así el empleo del Registro de la Lengua Natural, el Registro Numérico y el Registro Gráfico.

- Empleo de la calculadora: Debido a que los estudiantes tienen que emplear la calculadora para encontrar las cantidades pedidas a partir del mensaje recibido, el alumno que manda el mensaje se verá en la necesidad de recurrir al Registro Algebraico o al Registro de la Lengua Natural para expresar la relación entre las raciones y las cantidades, bloqueando así el empleo del Registro Numérico y el Registro Gráfico. Además, la utilización de la calculadora reducirá aquellas dificultades que surjan propias del cálculo y agilizará la realización de la actividad.

- Aportación de los datos a través del Registro Gráfico lo que obliga al a realizar la conversión de tal sistema de representación al registro algebraico para mandar el mensaje, favoreciendo así la coordinación entre ambos registros.

- Escala de las gráficas: las escala del eje *y* de las gráficas se ha elegido de tal manera que no coincida con la razón de proporcionalidad, de modo que los alumnos solo pueden conocer con exactitud los gramos de almendras y harina correspondientes a las tartas con un número determinado de porciones. De hacer coincidir la escala con la razón de proporcionalidad, la actividad se traduciría en la de la fase anterior pero con los datos proporcionados a través de un registro diferente.

Estrategia óptima:

- Búsqueda de la razón de proporcionalidad a partir de los datos que conocen con exactitud, para mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
- Solución: y= 55x; y= 45x

Otras estrategias esperadas:

- Indicar en el mensaje únicamente la razón de proporcionalidad.
- Cálculo de la razón de proporcionalidad a partir de datos inexactos obtenidos de la gráfica.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Quién ha conseguido la gráfica para la tarta que tenéis que hacer?"

Aquellos grupos que afirmen tenerla procederán a la comparación con la tabla de datos correcta que tiene el grupo emisor del mensaje.

Aparecerá el obstáculo de la escala, pues puede que el grupo que tiene que hacer la gráfica emplee una escala distinta a la dada originalmente. En ese caso, el profesor les hará reflexionar sobre ello.

El profesor pregunta a cada par de grupos si han conseguido que funcionen los mensajes o no, y pide que expliquen el procedimiento seguido.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explica el concepto de función lineal: y=mx, haciendo hincapié en su relación con las situaciones de proporcionalidad:

“Las relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes *x* e *y* se pueden expresar como funciones de expresión algebraica *y=mx* que reciben el nombre de funciones lineales.

La representación gráfica de este tipo de funciones es una recta que pasa por el punto (0, 0), por lo que para representar la gráfica a partir de su ecuación solo es necesario obtener otro punto.

Las funciones lineales son funciones continuas.

En la función lineal *y=mx*, el coeficiente *m* se llama pendiente y coincide con la razón de proporcionalidad. Expresa el aumento (si *m* es positiva) o disminución (si *m* es negativa) de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente. Si la pendiente es negativa, diremos que la función es decreciente, y si la pendiente es positiva diremos que es creciente.”

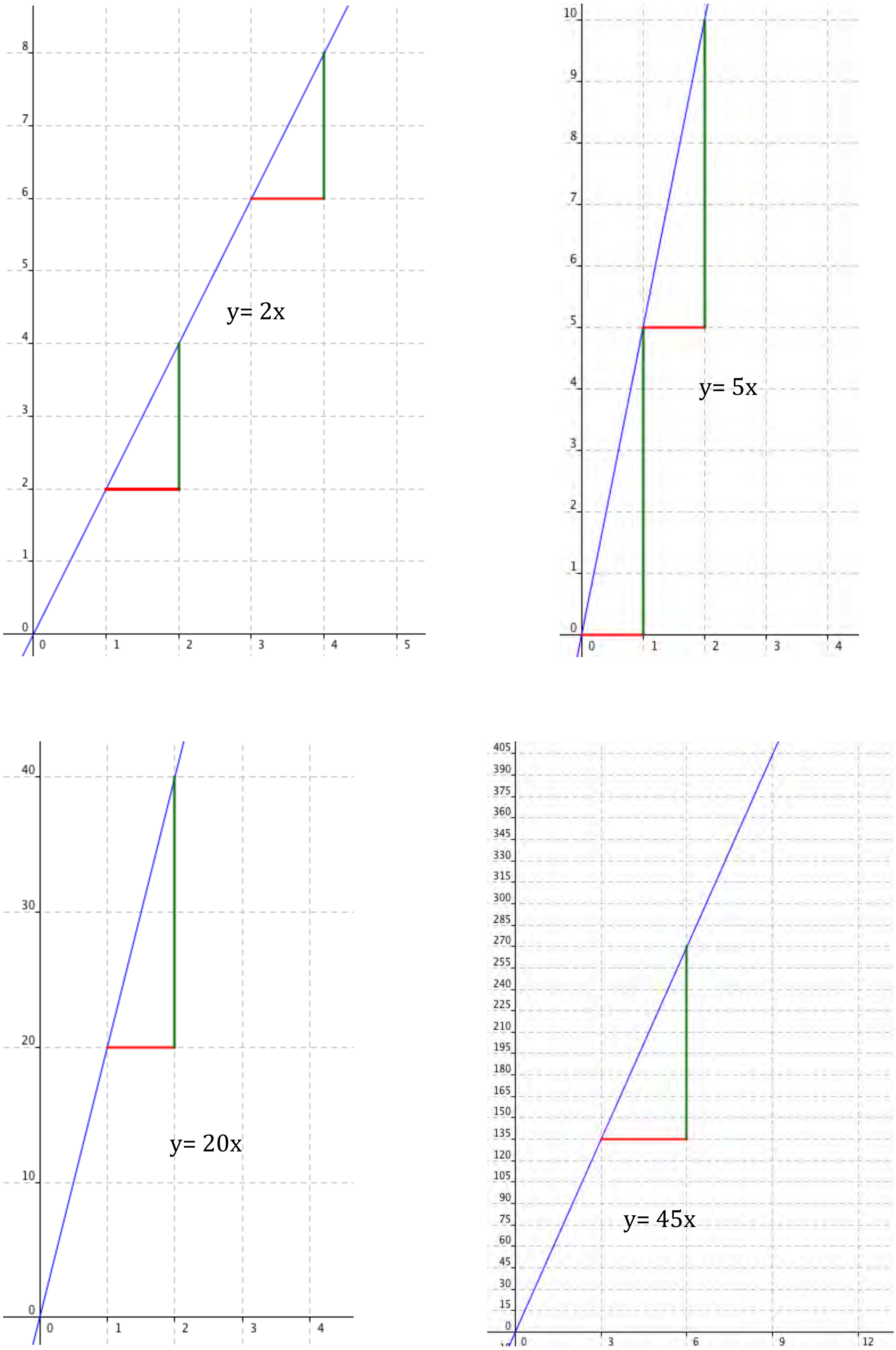
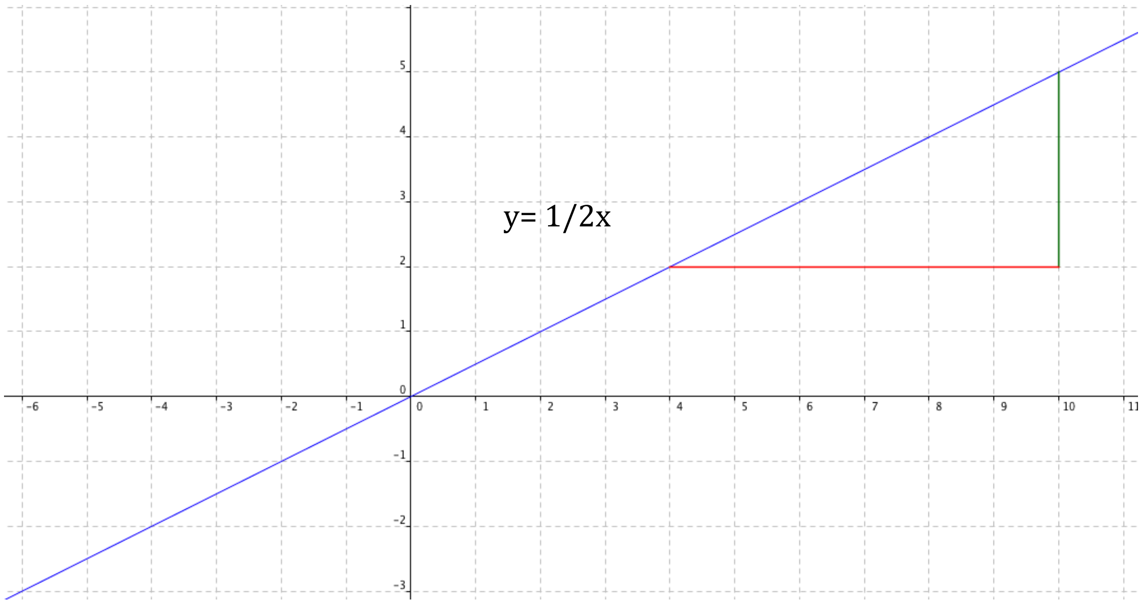


FIGURA 4.5.4.39. *Gráficas para estudiar la pendiente gráficamente*



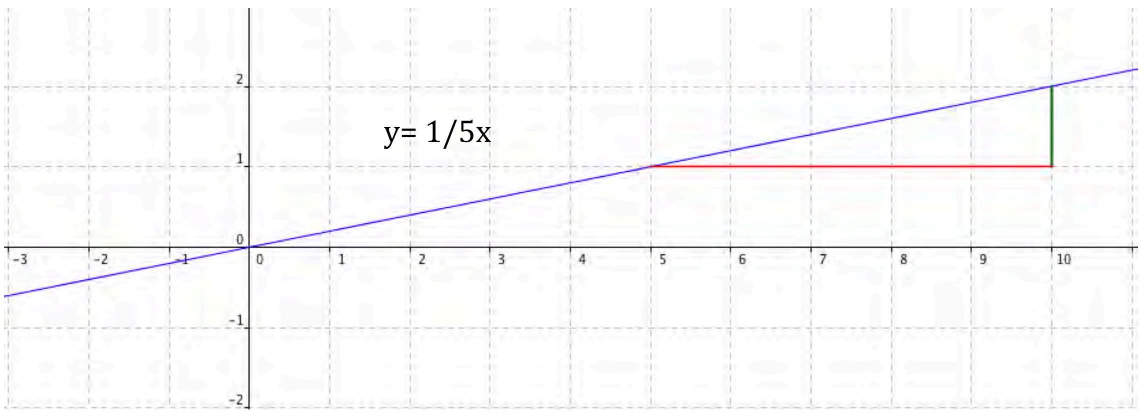


FIGURA 4.5.4.40. *Gráficas para estudiar la pendiente gráficamente*

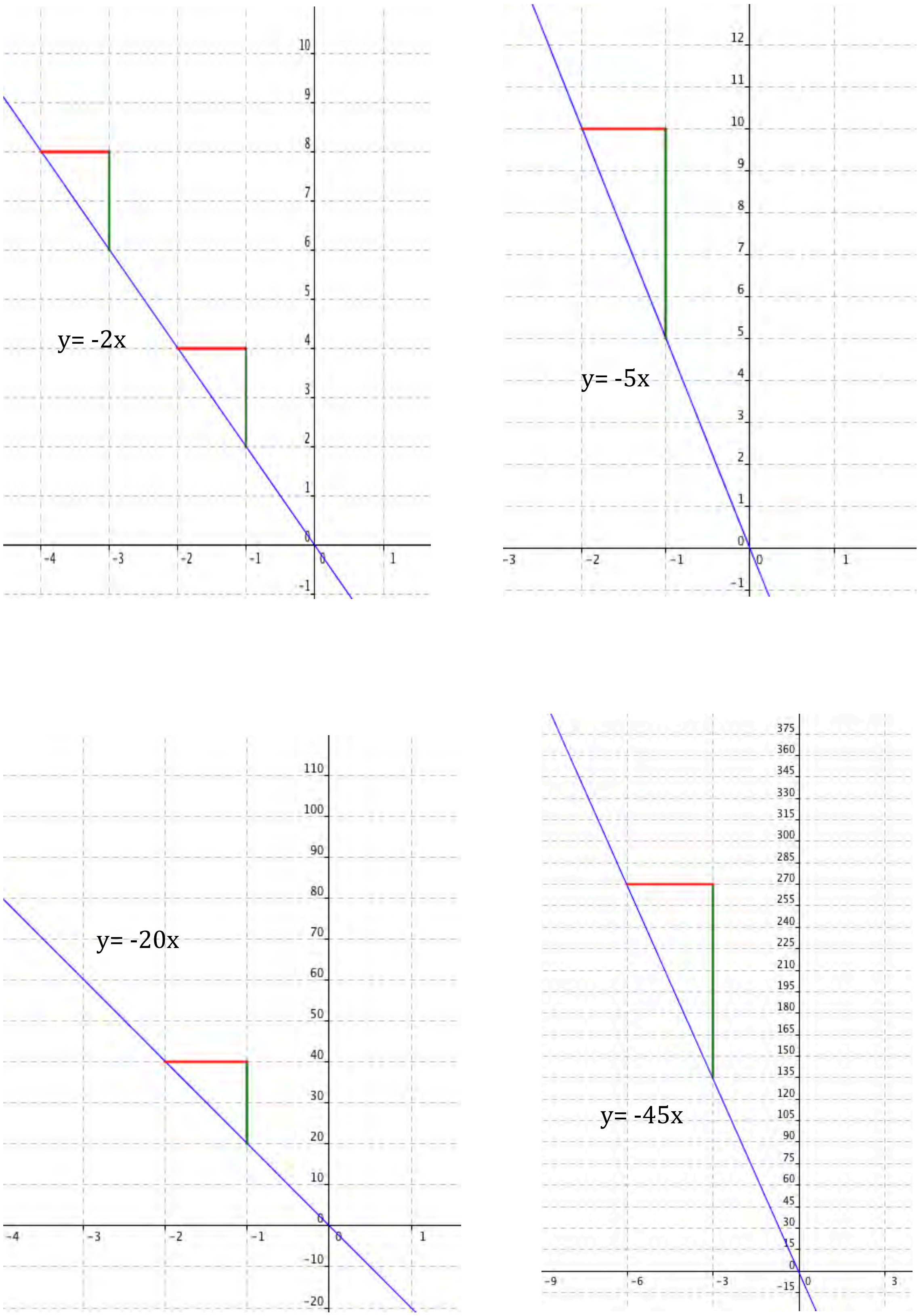


FIGURA 4.5.4.41. *Gráficas para estudiar la pendiente gráficamente*

Fase 3. Función Afín a partir del registro Gráfico

Objetivo:

- Reconocer y estudiar la función afín $y = mx + n$ a partir del registro gráfico.
- Presentar situaciones prácticas a las que responde una función de proporcionalidad.
- Obtener la ecuación de una recta que corresponde a una gráfica y representar gráficamente una función afín dada por su ecuación.
- Localizar y obtener la pendiente y la ordenada en el origen de una función afín.
- Efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre el Registro Gráfico y el Registro algebraico.

Material:

- Hoja con las gráficas que indican la cantidad de mantequilla que deben echar para hacer las tartas:

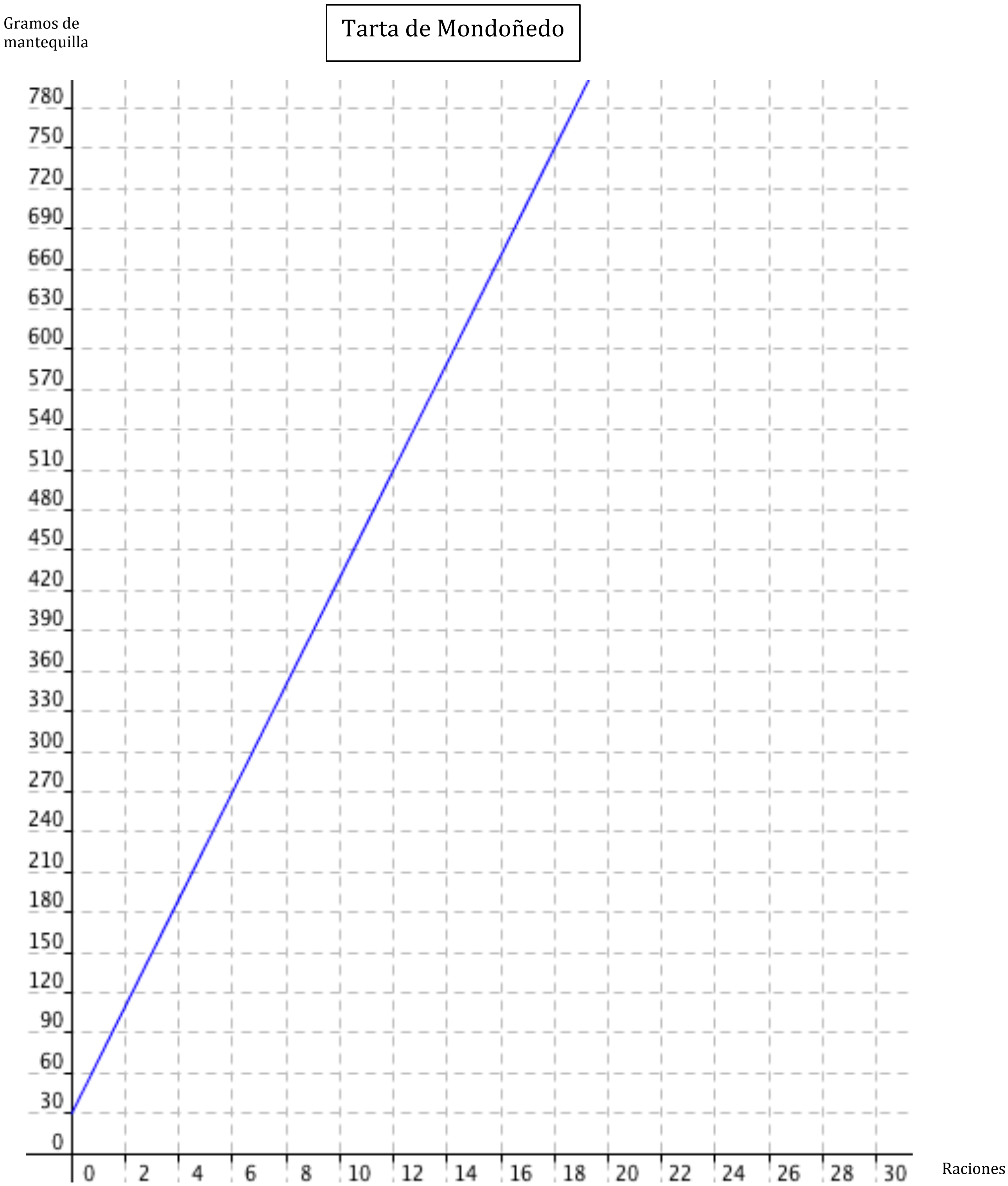


FIGURA 4.5.4.42. *Gráficas para el estudiante relación gr mantequilla/raciones*

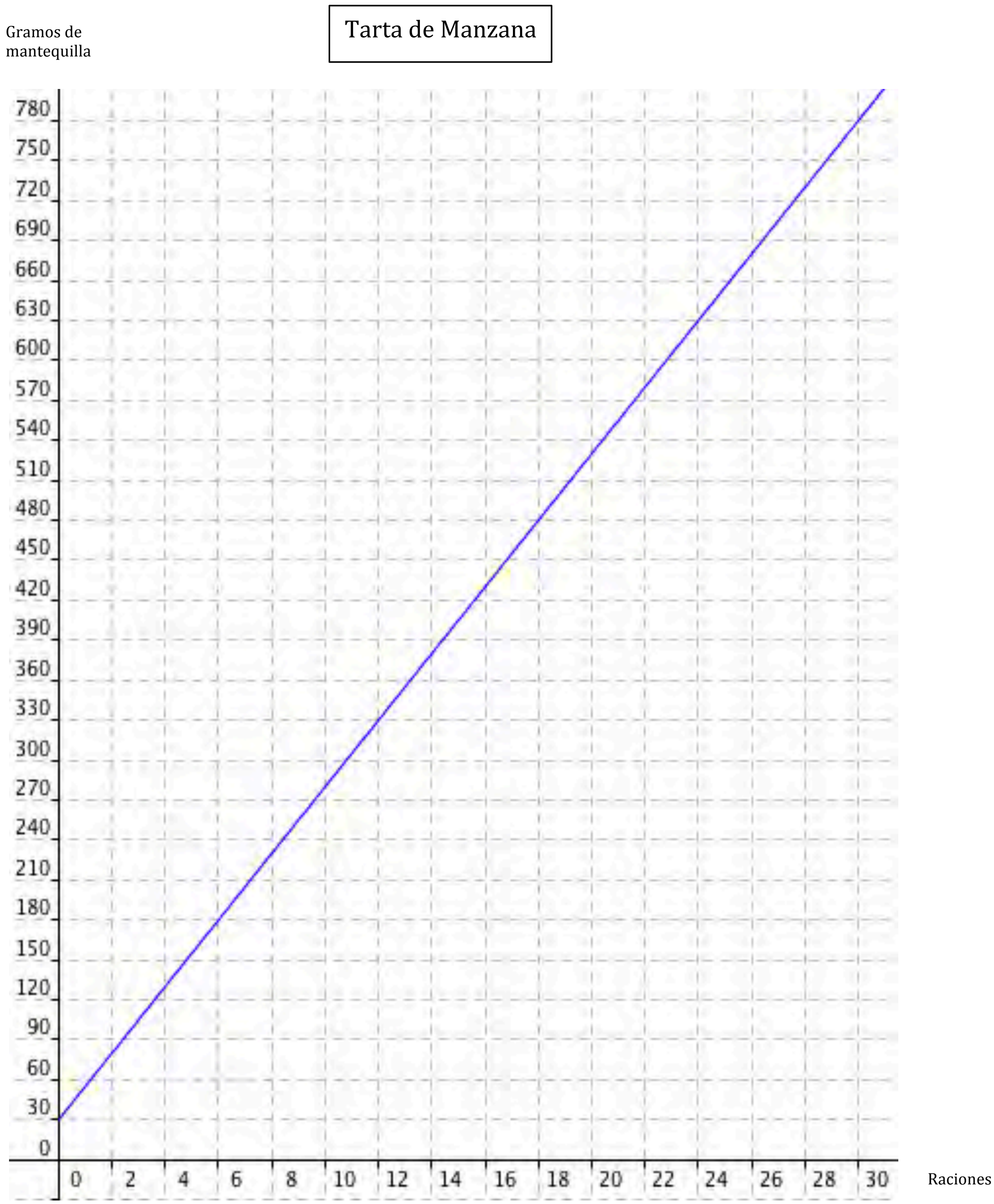


FIGURA 4.5.4.43. *Gráficas para el estudiante relación gr mantequilla/raciones*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 20-30 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“Por último, nos falta saber la cantidad de mantequilla que requiere cada una de las tartas.

Todos los moldes llevan untada una cantidad de mantequilla que evita que la tarta se pegue cuando la metemos al horno, además de la mantequilla que lleva la mezcla.

Al igual que en el caso anterior, no disponemos de la tabla con los gramos de mantequilla que se necesitan en función de las porciones, sino que lo que tenemos es un gráfico con la cantidad total de mantequilla que se utiliza en su elaboración.

Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de mantequilla que deben echar para hacer la Tarta de Mondoñedo en función del número de porciones.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de harina de repostería que deben echar para hacer la Tarta de Manzana en función del número de porciones.

Para mandar el mensaje, solo disponéis del siguiente espacio:

Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades.”

Variables didácticas y su gestión:

- Espacio para mandar el mensaje: El alumno solo dispondrá del hueco establecido para mandar el mensaje con la intención de que se vea en la necesidad de recurrir al Registro Algebraico por las limitaciones del espacio, bloqueando así el empleo del Registro de la Lengua Natural, el Registro Numérico y el Registro Gráfico.

- Empleo de la calculadora: Debido a que los estudiantes tienen que emplear la calculadora para encontrar las cantidades pedidas a partir del mensaje recibido, el alumno que manda el mensaje se verá en la necesidad de recurrir al Registro Algebraico o al Registro de la Lengua Natural para expresar la relación entre las raciones y las cantidades, bloqueando así el empleo del Registro Numérico y el Registro Gráfico. Además, la utilización de la calculadora reducirá aquellas dificultades que surjan propias del cálculo y agilizará la realización de la actividad.

- Aportación de los datos a través del Registro Gráfico lo que obliga al estudiante a realizar la conversión de tal sistema de representación al registro algebraico para mandar el mensaje, favoreciendo así la coordinación entre ambos registros.

- Cantidad inicial de mantequilla que requiere el molde: el hecho de que los moldes lleven impregnada una cantidad de mantequilla da lugar a que la función ya no pase por el origen, convirtiéndose en una función afín con ordenada en el origen la cantidad inicial de mantequilla que lleva el molde. De este modo, el alumno no podrá emplear la estrategia utilizada en las fases anteriores, teniendo que determinar la pendiente de manera gráfica.

- Escala de las gráficas: la escala de las gráficas se ha elegido de tal manera que no se vea a simple vista ni sea sumamente evidente la pendiente de la recta, pues nos interesa que el alumno sea capaz de encontrar la pendiente de manera gráfica.

Estrategia óptima:

- Búsqueda de la pendiente a partir de los datos que conocen con exactitud, para mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función teniendo en cuenta la cantidad inicial de mantequilla que lleva cada molde.
- Solución: $y = 40x + 30$; $y = 25x + 30$

Otras estrategias esperadas:

- Indicar en el mensaje únicamente la razón de proporcionalidad.
- Dar la función a partir únicamente de la pendiente, sin tener en cuenta la ordenada en el origen de coordenadas
- Cálculo de la pendiente de la función sin tener en cuenta que la función no pasa por el origen de coordenadas.
- Cálculo de la razón de proporcionalidad a partir de datos inexactos obtenidos de la gráfica.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Quién ha conseguido la gráfica para la tarta que tenéis que hacer?"

Aquellos grupos que afirmen tenerla procederán a la comparación con la tabla de datos correcta que tiene el grupo emisor del mensaje.

Aparecerá el obstáculo de la escala, pues puede que el grupo que tiene que hacer la gráfica emplee una escala distinta a la dad originalmente. En ese caso, el profesor les hará reflexionar sobre ello.

El profesor pregunta a cada par de grupos si han conseguido que funcionen los mensajes o no, y pide que expliquen el procedimiento seguido.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explica el concepto de función afín: y= mx + n:

“Las funciones cuya expresión algebraica es $y = mx + n$ con $n \neq 0$, se llaman funciones afines.

La representación gráfica de este tipo de funciones es una recta que no pasa por el punto (0, 0) sino que pasa por el punto (0,n), donde n es la ordenada en el origen, es decir, el punto de corte de la recta con el eje *y*.

En la función afín $y=mx + n$, el coeficiente *m* sigue siendo la pendiente y como ya dijimos, expresa el aumento (si *m* es positiva) o disminución (si *m* es negativa) de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente.

Las funciones afines son funciones continuas.”

El profesor pone varios ejemplos de gráficas para que los alumnos determinen cual es la pendiente y cual es la ordenada en el origen:

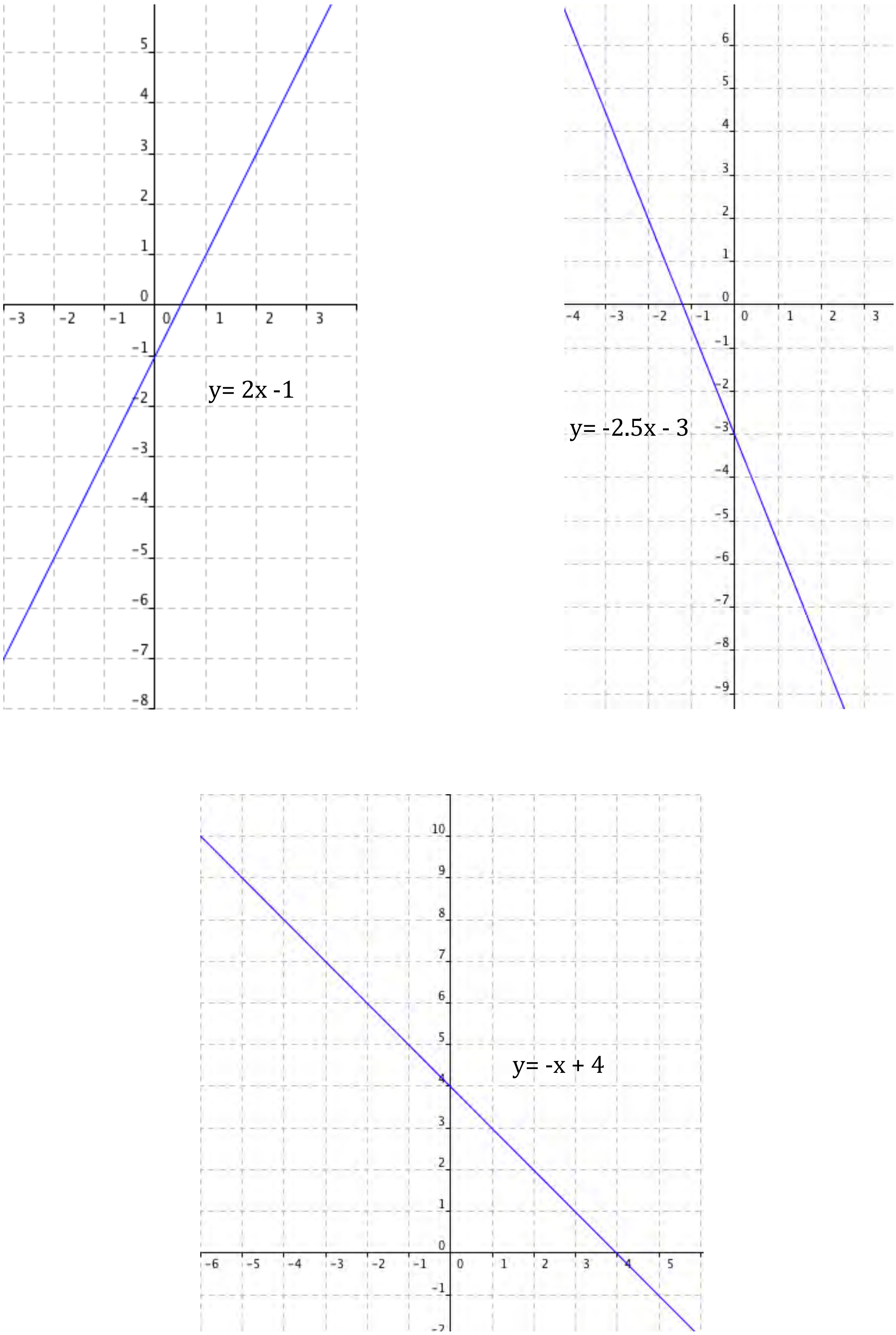


FIGURA 4.5.4.44. *Gráficas para estudiar la pendiente y ordenada en el origen gráficamente*

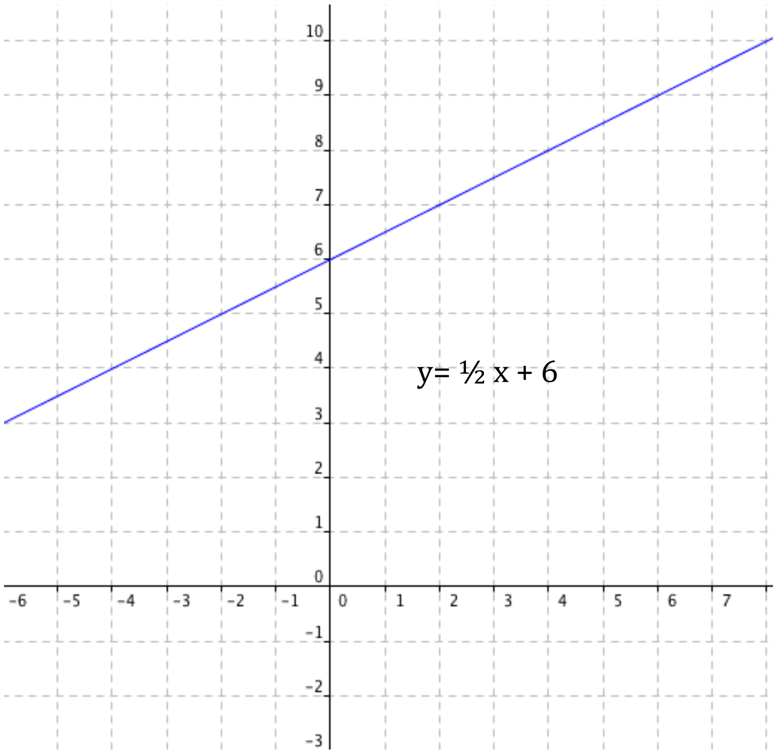


FIGURA 4.5.4.45. *Gráfica para estudiar la pendiente y ordenada en el origen gráficamente*

El profesor pregunta a los alumnos que ocurre si m=0 y pone dos ejemplos:

"¿Qué ocurre si el valor de m es igual a cero? ¿Cómo sería la gráfica de la función?"

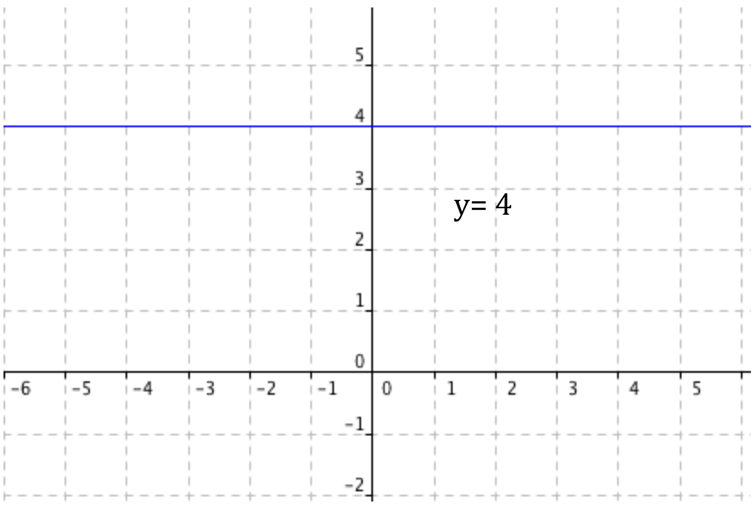


FIGURA 4.5.4.46. *Gráficas para estudiar que ocurre cuando m=0*

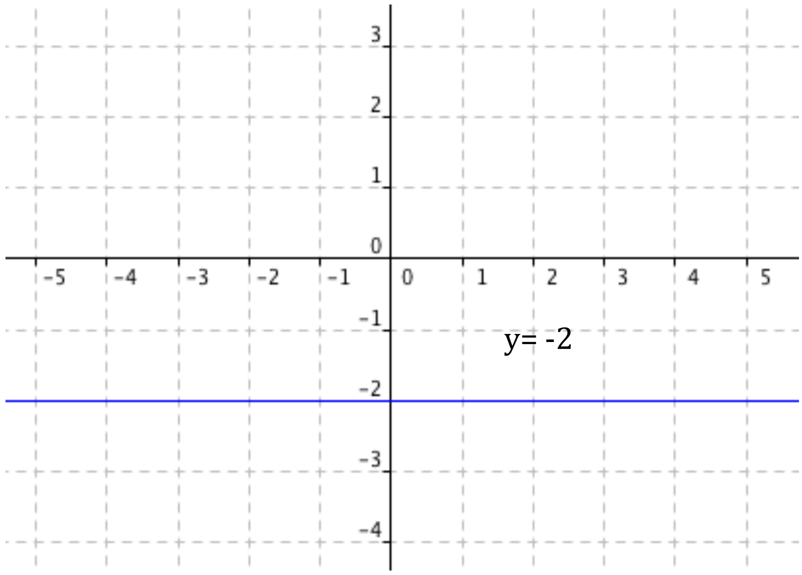


FIGURA 4.5.4.47. *Gráficas para estudiar que ocurre cuando m=0*

El profesor les explica que a las funciones con pendiente m = 0 se les llaman **funciones constantes** puesto que sea cual sea el valor de x, el valor de y es siempre el mismo, permanece constante.

Situación 6: EL juego de los Marcianos. Formas de obtener la ecuación de una recta.

<u>Fase 1</u>. Pertenencia de puntos a una recta.

Objetivo:

- Estudiar la pertenencia de un punto a una recta.
- Favorecer la coordinación entre el registro algebraico y numérico.

Material:

- Hoja con las posiciones de los marcianitos:

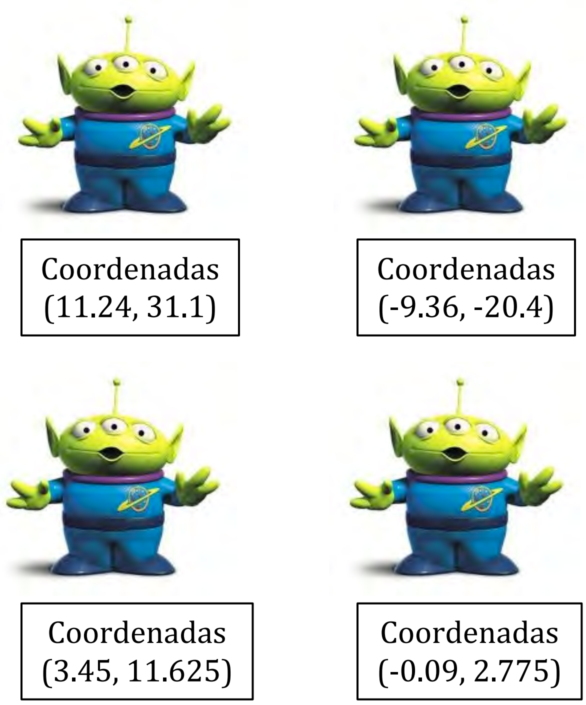


FIGURA 4.5.4.48. *Ficha 1 para el alumno con las coordenadas de localización de los marcianos*

- Ecuación de la recta que describe el rayo laser: y= 2.5x + 3

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 10-15 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“ Hoy vamos a jugar a un videojuego de Marcianos. El juego consiste en disparar a unos marcianos, que se encuentran dispersos en un plano cartesiano, con un cañón laser.

En la primera fase del juego, el rayo laser que emite el cañón es una recta que tiene por ecuación y= 2.5x + 3

Tenemos a cuatro marcianitos, de los cuales conocemos el punto exacto (x,y) de su posición:

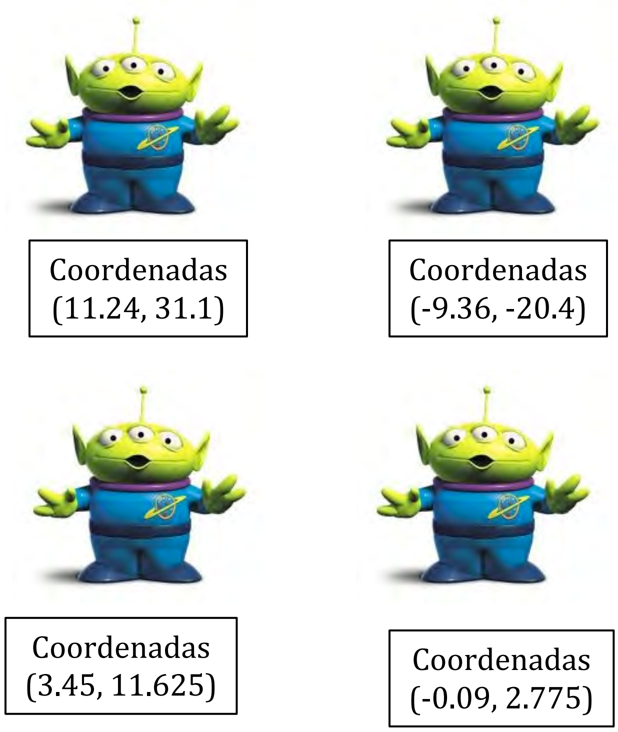


FIGURA 4.5.4.49. *Ficha 1 para el alumno con las coordenadas de localización de los marcianos*

Si queréis pasar a la siguiente fase del juego, es necesario que averigüéis cuantos marcianitos son alcanzados por el laser.”

Variables didácticas y su gestión:

- La posición de los marcianos se ha elegido de tal manera que no se pueda estudiar si el rayo laser les alcanza a través del registro gráfico, pues las coordenadas de su posición presentan valores difíciles de representar a partir de una gráfica cartesiana. Esto obligará a que el estudiante tenga que recurrir a la sustitución de las coordenadas en la ecuación dada para resolver la tarea.

Estrategia óptima:

- Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.
- Solución: Todos los marcianos son alcanzados por el rayo.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado al azar.
- Construir la gráfica a partir de las posiciones de los marcianos.
- Construir la gráfica de la ecuación para comprobar si los puntos de las posiciones pertenecen a la recta representada.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Quién ha conseguido averiguar cuántos marcianos son alcanzados por el rayo?"

Pide a uno de los grupos, que afirma haberla obtenido, que expliquen como han hecho para construirla. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

EL profesor explicará que para saber si un determinado punto pertenece a una recta, basta con sustituir las coordenadas en la ecuación de la misma y ver si se verifica la igualdad.

Fase 2. Ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente.

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la recta de la que se conocen un punto y la pendiente a través del registro numérico.
- Favorecer la conversión y coordinación entre el registro algebraico y numérico.

Material:

- Hoja con los datos relativos a la posición del cañón y la pendiente del rayo: Posición del cañón (5, 7) y pendiente del rayo -1/2.
- Posición del marciano: (455, -227.5)

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15-20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

“En esta fase del juego, no conocemos la ecuación de la recta que describe el rayo laser. Únicamente sabemos la posición del cañón en el punto (5, 7) y la pendiente de la recta que describe el rayo que sale del cañón, que es -1/2.

Para pasar a la siguiente fase es necesario saber si el rayo alcanza a un marciano que está situado en el punto (455, -227.5).

¿Alcanza el rayo laser al marcianito?”

Variables didácticas y su gestión:

- La posición del marciano se ha elegido de tal manera que no se pueda estudiar si el rayo laser le alcanza a través del registro gráfico, pues las coordenadas de su posición son relativamente difíciles de representar en una gráfica cartesiana. Esto obligará a que el estudiante tenga que recurrir a la sustitución de las coordenadas en la ecuación de la recta una vez calculada.

- La no aportación de la ecuación de la recta, para que el alumno se vea en la necesidad de tener que encontrarla a partir del punto y la pendiente conocidos.

- Datos de la recta: Los datos conocidos de la recta se han determinado de modo que no supongan una dificultad a la hora de que el alumno tenga que trabajar con ellos para encontrar el valor de la ordenada en el origen, pues de lo contrario, la actividad se convertiría en una tarea de cálculo numérico perdiéndose el sentido de la misma.

- Distancia entre el punto conocido de la recta (posición del cañón) y la posición del marciano: se han establecido puntos considerablemente alejados uno del otro para evitar que el estudiante construya la gráfica a partir de ambos y compruebe mediante ella si la pendiente coincide con la dada en la consigna.

Estrategia óptima:

- Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación $y=mx+n$ para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.

- Solución: Ecuación de la recta: $y= -1/2x + 9.5$. El marciano no es alcanzado por el rayo.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado al azar.

- Determinar la ecuación de la recta a partir de la posición del marciano y la pendiente del rayo.

- Determinar la ecuación de una recta a partir de los dos puntos que se dan en la consigna y comprobar si la pendiente coincide.

- Construir la gráfica a partir de los puntos dados y comprobación de que la pendiente resultante coincide con la dada.

- Construir la gráfica de la ecuación para comprobar si los puntos de las posiciones pertenecen a la recta representada.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Quién ha conseguido averiguar si le marciano es alcanzado por el rayo?"

Pide a uno de los grupos, que afirma haberla obtenido, que expliquen como han hecho para construirla. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explicará como se obtiene la ecuación de una recta a partir de las coordenadas de un punto y su pendiente:

"Se trata de determinar la ecuación de una recta dado un punto de la misma (x_0, y_0) y la pendiente m, por lo que basta con determinar la ordenada en el origen para escribir la ecuación.

Sabemos que *y* = *m x* + *n*

¿Cómo utilizar el punto conocido para obtener *n* sabiendo que ha de cumplirse la ecuación anterior?

Vamos a intentar obtener la ecuación de una recta que pasa por el punto (3, 7) y la pendiente m= 4."

El profesor les muestra una forma de resolver el problema, sin más que sustituir el punto (3, 7) en la ecuación y = 4x + n para obtener el valor de n: 7 = 4.3 + n => n = -5 y la ecuación de la recta es y = 4x -5.

El profesor explica a sus alumnos otra manera de obtener la ecuación pedida, mediante la ecuación punto pendiente cuya expresión es $y = y_0 + m(x - x_0)$, siendo (x_0, y_0) el punto conocido.

El profesor pide a sus alumnos que calculen la ecuación del problema anterior mediante la ecuación punto-pendiente y comprueben que el punto (3, 7) pertenece a la misma, m = 4 es su pendiente y la ecuación puede transformarse en la obtenida: y = 4x – 5.

Fase 3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la recta a partir de dos puntos conocidos a través del Registro Numérico.
- Favorecer la conversión y coordinación entre el registro algebraico y numérico.

Material:

- Hoja con los datos relativos a la posición del cañón (4, -3) y la posición del marciano (320, 1419).

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 10-15 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"En esta fase del juego, el cañón se encuentra en la posición (4, -3) y tenemos un marcianito situado en el punto (320, 1419).

Para poder pasar a la cuarta fase es necesario encontrar la ecuación de la recta que describe el rayo laser que sale del cañón y que alcanza a dicho marcianito."

Variables didácticas y su gestión:

- La aportación, únicamente, de dos de los puntos que forman parte de la recta para que el estudiante tenga que encontrar una nueva forma de hallar la ecuación de la misma a partir de ellos.

- Datos de la recta: Los datos conocidos de la recta se han determinado de modo que no supongan una dificultad a la hora de que el alumno tenga que trabajar con ellos para encontrar el valor de la ordenada en el origen y la pendiente, pues de lo contrario, la actividad se convertiría en una tarea de cálculo numérico perdiéndose el sentido de la misma.

- Distancia entre los puntos conocidos de la recta: se han establecido puntos considerablemente alejados uno del otro para evitar que el estudiante construya la gráfica a partir de ambos y determine la ordenada en el origen y la pendiente gráficamente.

Estrategia óptima:

- Obtención de la ecuación de la recta a partir de los dos puntos conocidos, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de sustituir dichos valores en el ecuación $y=mx+n$ para averiguar el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente.

- Solución: Ecuación de la recta: $y= 4.5x - 21$.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado al azar.

- Calculo de la pendiente a partir de los puntos dados y utilización de l estrategia óptima de la fase anterior.

- Construir la gráfica de la ecuación para determinar la ordenada en el origen y la pendiente gráficamente.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

"¿Quién ha conseguido encontrar la ecuación del rayo?"

Pide a uno de los grupos, que afirma haberla obtenido, que expliquen como han hecho para construirla. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

Institucionalización:

El profesor explicará como se obtiene la ecuación de una recta a partir de las coordenadas de dos puntos conocidos de la recta:

"Se trata de determinar la ecuación de una recta dados dos puntos de la misma (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Se considera la ecuación de la recta y=mx +n. Los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma, por tanto, cumplirán la ecuación.

Luego, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = x_1 m + n} \\ \boldsymbol{y_2 = x_2 m + n} \end{cases}$$

Lo resolvemos y obtendremos el valor de la pendiente y la ordenada en el origen de nuestra recta."

El profesor pide a los alumnos que hallen la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (-2, -1) y (1, -7).

El profesor explica otra alternativa a partir de la obtención de la pendiente de una recta a partir de dos puntos y aplicación de lo visto en la fase anterior:

" A partir de dos puntos, podemos hallar la pendiente de una recta empleando la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una vez hallada la pendiente, podemos utilizar el método de encontrar la ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente de la misma."

Fase 4. Determinar la ecuación de la recta a partir de la gráfica.

Objetivo:

- Obtener la ecuación de la recta a partir de dos puntos conocidos a partir del registro gráfico.
- Favorecer la conversión y coordinación entre el registro gráfico, registro algebraico y registro numérico.

Material:

- Representación gráfica de la ecuación de la recta que describe el rayo:

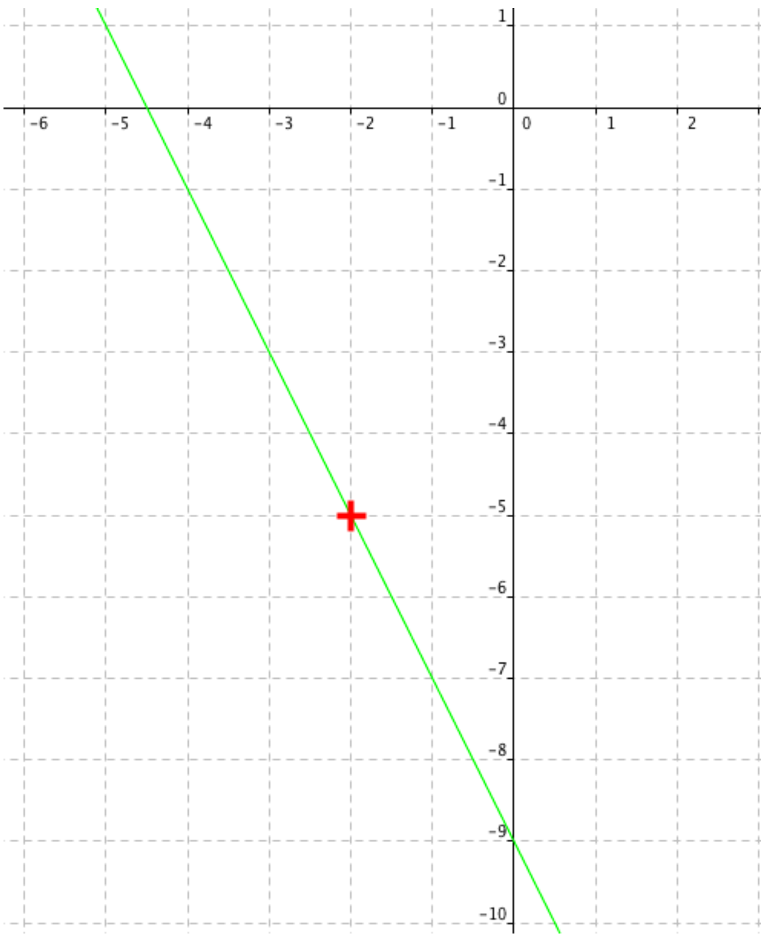


FIGURA 4.5.4.50. *Gráfica con la posición del cañón y trayectoria laser*

- Hoja con posición de los marcianos:

Coordenadas (742, -1493)	Coordenadas (852, -1704)	Coordenadas (-961, 1913)

FIGURA 4.5.4.51. *Ficha 2 para el alumno con las coordenadas de localización de los marcianos*

Organización de la clase:

- Los alumnos trabajaran en grupos de dos o tres.
- El profesor repartirá el material mencionado para la realización de la actividad.

Tiempo de realización:

- Entre 15-20 minutos.

Consigna:

El profesor enuncia la consigna:

"En la última parte del juego, tenemos la siguiente gráfica:

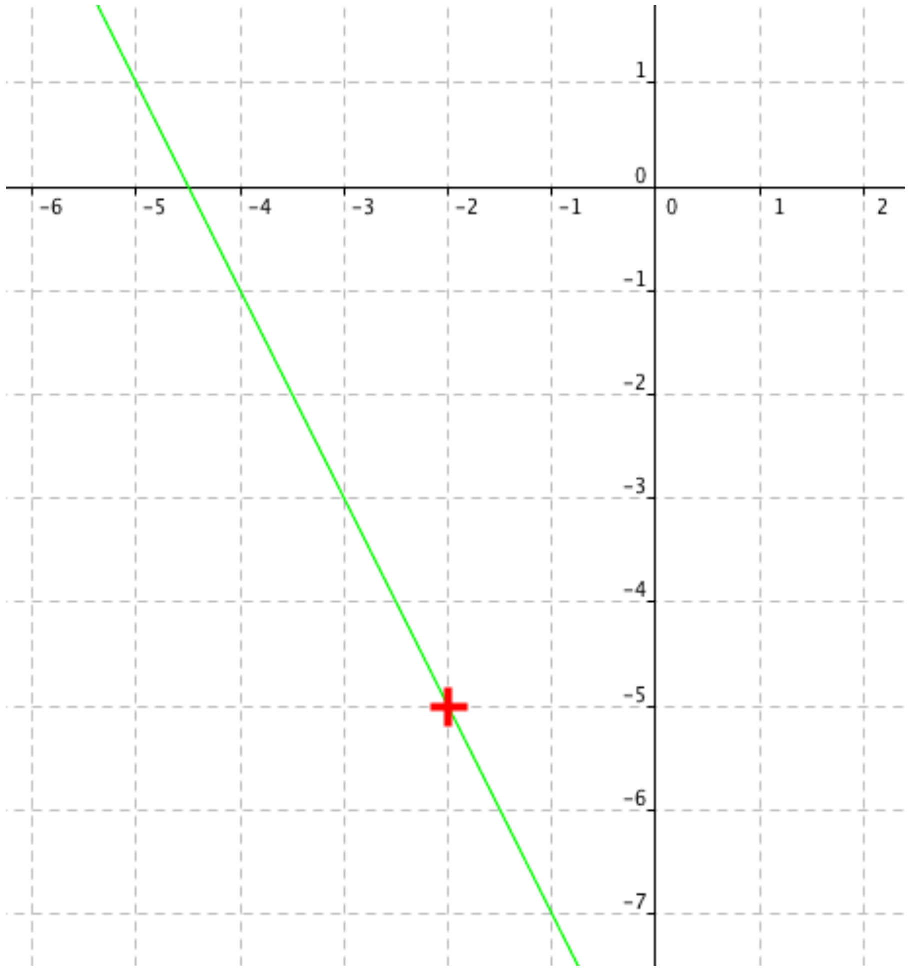


FIGURA 4.5.4.52. *Gráfica con la posición del cañón y trayectoria laser*

La cruz roja representa un cañón de doble boca, es decir, que emite el mismo rayo laser por ambas salidas.

Para finalizar el juego, debes averiguar cuantos de los siguientes tres marcianitos se libra del laser:

Coordenadas (742, -1493)	Coordenadas (852, -1704)	Coordenadas (-961, 1913)

Figura 4.5.4.52. *Ficha 2 para el alumno con las coordenadas de localización de los marcianos*

Variables didácticas y su gestión:

- Recta dada a través del Registro Gráfico lo que obligará a los alumnos a obtener la ecuación de la misma a partir de los datos que en ella se recogen.
- No representación del punto de corte con el eje *y*: Se ha omitido la representación de la ordenada en el origen para que el alumno se vea en la necesidad de obtener la ecuación de la recta por uno de los dos métodos explicados en las fases anteriores. De proporcionar la ordenada en el origen, la ecuación de la recta la obtendría por simple observación ya que dispondrían tanto de la pendiente como de este dato a partir de la gráfica, sin necesidad de realizar ningún cálculo.
- La posición de los marcianos se ha elegido de tal manera que no se pueda estudiar si el rayo laser les alcanza a partir del trozo de gráfica proporcionada. Esto obligará a que el estudiante tenga que recurrir a calcular la ecuación de la recta dada para resolver la tarea.

Estrategia óptima:

- Obtención de la ecuación de la recta a partir de dos puntos de coordenadas conocidas o de un punto de coordenadas conocidas y la pendiente.
- Solución: Ecuación de la recta: $y= -2x - 9$. Se libra el segundo marciano.

Otras estrategias esperadas:

- Dar el resultado al azar.
- Dar la ecuación de la recta estimando la ordenada en el origen.
- Prolongar la recta para encontrar la ordenada en el origen y así poder determinar la ecuación de la recta.

Validación:

Para proceder a la verificación, y justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha por los alumnos, el profesor pregunta:

“¿Quién ha conseguido averiguar cuantos marcianos se salvan?”

Pide a uno de los grupos, que afirma haberla obtenido, que expliquen como han hecho para construirla. Después, pregunta a los otros si han hecho lo mismo y si alguno ha empleado algún método diferente les pide que lo expliquen.

La situación de validación debe dar a los alumnos la ocasión de comparar sus métodos.

Si ningún grupo consigue encontrarla solución a alguna de las preguntas, el profesor lo resolverá en la pizarra paso a paso.

4.5.5. Análisis a posteriori. Resultados de las observaciones.

De la misma manera que se procedió con la Ingeniería Didáctica desarrollada durante el curso 2011-2012 en la clase de 2º ESO, se presenta a continuación el análisis a posteriori de la Ingeniería que se ha llevado a la práctica durante el curso 2012-2013 en la clase de 3º ESO:

- Situación 1: El alquiler de vehículos.
  - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
  - Un día para la realización de la fase 3.
  - Un día para la realización de la fase 4.
- Situación 2: La inspección medioambiental.
  - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
  - Un día para la realización de la fase 3.
- Situación 3: Las centrales Eólicas.
  - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
- Situación 4: El Observatorio Astronómico.
  - Un día para la realización de la fase 1.
  - Un día para la realización de la fase 2.
- Situación 5: Las Pastelerías.
  - Un día para la realización de la fase 1.
  - Un día para la realización de la fase 2.
  - Un día para la realización de la fase 3.
- Situación 6: El juego de los Marcianitos.
  - Un día para la realización de la fase 1 y 2.
  - Un día para la realización de la fase 3 y 4.

Un total de 14 – 15 sesiones entre los dos temas. Si se comparan las situaciones, organización y planificación inicial de las mismas con el posterior desarrollo en el aula, se observan sesgos debidos a modificaciones que tratan de ajustarse a lo que ha ocurrido en el desarrollo de la clase.

Estudios experimentales de ingeniería didáctica. Funciones y propiedades. Funciones lineales.

Situación 1: El alquiler de vehículos.

Dependencia entre magnitudes: Variable dependiente y Variable independiente.

La situación se desarrolló los días 17 (*Fases 1 y 2*), 18 (*Fase 3*) y día 22 de abril (*Fase 4*) de 2013 en los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

La presente situación consta de cuatro fases, y tuvo como propósito el descubrimiento, identificación, búsqueda y comprensión de la relación existente entre las variables independiente y dependiente, y su distinción en contextos reales, la representación en ejes de coordenadas, entendiendo la gráfica como un modo de representar la relación entre dos variables, así cómo proporcionar al alumno las herramientas que le permitan buscar, identificar y relacionar datos en tablas y gráficas, apreciando la utilidad del lenguaje gráfico y tabular para representar situaciones diversas e introducirles en la nomenclatura necesaria.

Por otro lado, no debemos olvidar el objetivo principal de nuestras ingenierías, que es el favorecer la conversión y coordinación de los diferentes registros de representación semióticos que se pueden movilizar para conseguir una mayor comprensión y un aprendizaje más significativo de todas aquellas nociones puestas en juego.

En el caso de esta primera situación se persigue que el alumno sea capaz de efectuar la conversión y favorecer la coordinación entre el Registro Tabular - Registro Gráfico- Registro Numérico – Registro de la Lengua Natural.

Fase 1: Coste de alquiler (Actividad de introducción)

Descripción:

Esta primera fase se conforma como un primer acercamiento a la identificación y búsqueda de relación entre las diferentes variables que pueden relacionarse, y la dependencia que se da entre ellas, a la hora de alquilar un coche en una empresa de ***Alquiler de Vehículos***, con el fin de darle significado a dichos conceptos matemáticos en un contexto real que puede resultar conocido por el alumnado:

"Somos empleados en una empresa de ***Alquiler de Vehículos***, y nos encargamos de gestionar las fichas que se elaboran cada vez que un cliente alquila un vehículo.

Hoy, dos clientes han devuelto los vehículos que habían alquilado y tenemos que calcular el ***Total a pagar por el alquiler y el kilometraje*** , ***el Total a pagar por el combustible*** y el ***Coste total.***

En la tabla con los datos, aparece el precio de alquiler por día, los kilómetros que incluyen por día de alquiler y el precio por cada kilómetro extra que recorren con el vehículo, lo que nos permitirá calcular el ***Total a pagar por el alquiler y el kilometraje***.

El precio del litro de combustible que utiliza cada coche el día 04/03/2013, es de:

Gasolina: 1,40 €/l **Diesel**: 1,34 €/l

Los grupos que afirméis saber cuál es el ***Coste total***, debéis estar en condiciones de probarlo."

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona una tabla para cada grupo, con la información correspondiente al precio de alquiler de los vehículos en función de los días alquilados:

TABLA 4.5.5.1. *Tabla 1 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

PRECIO ALQUILER DE VEHÍCULOS				
Tipo Vehículo	**Días de alquiler**	**Precio**	**Km incluidos**	**Euros por Km extra**
Pasajero 5 plazas	1	47,53 €	120 Km	0,180 €
	2	95,06 €	230 Km	
	3	142,59 €	450 Km	
	4	163,20 €	600 Km	
Pasajero 6 plazas	1	61,31 €	120 Km	0,234 €
	2	122,62 €	230 Km	
	3	183,93 €	450 Km	
	4	210,52 €	600 Km	
Pasajero 9 plazas	1	83,59 €	120 Km	0,250 €
	2	145,90 €	230 Km	
	3	218,85 €	450 Km	
	4	253 €	600 Km	

Fuente: elaboración propia

A demás, también disponen de las fichas que la empresa prepara a cada uno de los dos clientes que han alquilado los vehículos:

Apellidos del Conductor: Rufián Liviano
Nombre: Miguel
Tipo de Vehículo alquilado: 5 plazas **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 3 **Día devolución del Vehículo**: 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 553 Km **Combustible consumido**: 28,756 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje:
Total a pagar por combustible:
Coste Total :

FIGURA 4.5.5.1. *Ficha para los alumnos del conductor 1*

Apellidos del Conductor: Macías Sánchez **Nombre**: Jesús **Tipo de Vehículo alquilado**: 9 pasajeros **Tipo de Combustible**: Diesel **Nº días de alquiler**: 4 **Día devolución del Vehículo**: 04/03/2013 **Kilómetros recorridos**: 815 Km **Combustible consumido**: 53,79 litros **Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje**: **Total a pagar por combustible**: **Coste Total** :

FIGURA 4.5.5.2. *Ficha para los alumnos del conductor 2*

Al proporcionar la información para abordar la situación en estos formatos, se pretende que el alumno sea capaz de realizar la conversión entre los registro Tabular, Numérico y la Lengua Natural, de modo que el sistema de representación tabular adquiera identidad propia para el alumno como un registro de representación semiótico más y no como una mera herramienta de recogida de información.

A demás, la situación se ha forzado de manera que los dos clientes utilizan vehículos distintos, con distinto tipo de combustible y lo alquilan distintos días para que el alumno sea consciente de que el coste total del alquiler de un vehículo depende de varias variables y aproximarle al concepto de función a partir de contextos de la vida real.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *En Leganés hay una empresa que se dedica al alquiler de vehículos. Entre los vehículos que tienen, tienen vehículos de 5 plazas, 6 plazas y 7 plazas* (muestra en la pizarra digital la tabla que posteriormente repartirá a los alumnos).

  En función de los días que alquilen el coche tienen que pagar una cantidad de dinero. Por ejemplo, el de 5 plazas si lo alquilan dos días, tiene que pagar 95,06 € y en ese precio les incluyen unos kilómetros que pueden hacer con ese coche y si se pasan de esos kilómetros, por cada kilómetro extra van a tener que pagar una cantidad que viene aquí contada. Si se pasan de los 120 km, pues por cada kilómetro de más tendrán que pagar 0,180 €, y así con todos los vehículos.

Esta empresa cada vez que llega un cliente les hace una ficha de este tipo (el profesor muestra en la pizarra digital las fichas de los datos que luego proporcionará a los alumnos) *donde se recoge el nombre del cliente, el tipo de vehículo que ha alquilado, el tipo de combustible que utiliza, el número de días que ha alquilado el coche, el día que lo ha devuelto, los kilómetros que recorre, los litros de combustible que consume y luego ya el total a pagar: Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje, Total a pagar por combustible, Coste Total que es la suma de las otras dos cantidades.*

¿Qué ha pasado? Que al revisar algunas fichas se han dado cuenta de que faltan algunos datos. En estas dos, les falta poner lo que han pagado estos clientes, lo que tenía que pagar Miguel Rufián Liviano y lo que tenía que pagar Jesús Macías Sánchez. Entonces, os piden a vosotros que averigüéis las cantidades para completar las fichas y poderlas archivar.

Yo ahora voy a repartir la tabla y las fichas. Además, fijaos que tanto Miguel cómo Jesús devolvieron las fichas el día 4 marzo de 2013. Entonces para saber lo que hay que pagar por el combustible, ¿qué necesitamos saber?

- **Varios:** *EL precio de la gasolina.*
- **Profesor:** *Efectivamente. Pues el día 4 marzo la gasolina costaba 1,40 €/l y el diesel 1,34 €/l* (el profesor muestra estos datos en la pizarra digital)*. Pues , ahora, con todos estos datos, vosotros tenéis que completar la ficha.*

Tras enunciar la consigna, el profesor pide que alguien salga a la pizarra y explique a los compañeros que es lo que hay que hacer en la actividad con la intención de comprobar si han comprendido la consigna y se de el intercambio de información entre iguales, favoreciendo así la resolución de conflictos entre miembros de un mismo grupo social según las hipótesis de Vygotsky. Esta dinámica se repetirá a lo largo de cada una de las actividades diseñadas y planteadas en el aula.

Todos los grupos se centran en el trabajo y análisis de la tabla proporcionada, buscando la relación entre las magnitudes y datos que en ella aparecen y los elementos descritos en las fichas de los clientes.

De este modo se consigue adentrarles en una interpretación e identificación inicial e intuitiva de la ley que regula la dependencia entre magnitudes o variables que tan cotidianamente se utiliza de una manera inconsciente en el día a día en otros contextos o situaciones:

- **Colaborador 1:** *¿Me podéis explicar lo que habéis hecho?*
- **Sergio:** *Aquí pone que tiene incluido dentro del precio 450 kilómetros en los 3 días de alquiler, pero ha hecho 553. Lo restamos y da 103 kilómetros que lo multiplicamos por 0,180 cada kilómetro extra da 18,54 que más el precio de alquiler del vehículo que es 142,59 da 161,13 €.*
- **Colaborador 1:** *vale, vale. ¿Y ahora que vais a hacer?*
- **Javi:** *Como viene en la ficha el combustible que ha consumido, vamos a multiplicar los 28,756 litros por 1,40.*
- **Colaborador 1:** *¿Por qué por 1,40?*
- **Javi:** *Porque es el precio de la gasolina.*
- **Colaborador 1:** *Pero… ¿qué es lo que cuesta 1,40?*
- **Sergio:** *cada litro de gasolina es lo que cuesta 1,40 €.*
- **Colaborador 1:** *vale.*

Este hecho resulta llamativo desde la perspectiva de las dificultades que posteriormente presentan los estudiantes en relación a la comprensión de la noción de función, pues los conflictos cognitivos que genera este concepto en el alumnado resultan, en cierta medida, contradictorios con la aparente soltura que manifiestan a la hora de trabajar con nociones subyacentes en él, como es el de dependencia entre variables.

La tarea a realizar ha sido bien comprendida a modo general. Los 8 grupos son capaces de encontrar la relación entre las variables puestas en juego sin ninguna dificultad, pero no todos han seguido el mismo procedimiento, pues nuevamente, en este curso, hace aparición la regla de 3 cuando esta no es necesaria:

FICHAS

Apellidos del Conductor: Rufián Liviano
Nombre: Miguel
Tipo de Vehículo alquilado: 5 plazas **Tipo de Combustible:** Gasolina
Nº días de alquiler: 3 **Día devolución del Vehículo:** 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 553 Km **Combustible consumido:** 28,756 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 161,13 €
Total a pagar por combustible: 40,26 €
Coste Total : 201,39 €

3 días → 142,59 € → 450 Km

1 Km → 0,18 €
103 Km → x
} x = $\boxed{18,54 €}$

1 l → 1,40 €
28,756 l → x
} x = $\boxed{40,26 €}$

142,59 + 18,54 = $\boxed{161,13 €}$

161,13 + 40,26 = $\boxed{201,39 €}$

Apellidos del Conductor: Macías Sánchez
Nombre: Jesús
Tipo de Vehículo alquilado: 9 pasajeros **Tipo de Combustible:** Diesel
Nº días de alquiler: 4 **Día devolución del Vehículo:** 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 815 Km **Combustible consumido:** 53,79 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 306,75 €
Total a pagar por combustible: 72,08 €
Coste Total : 378,83 €

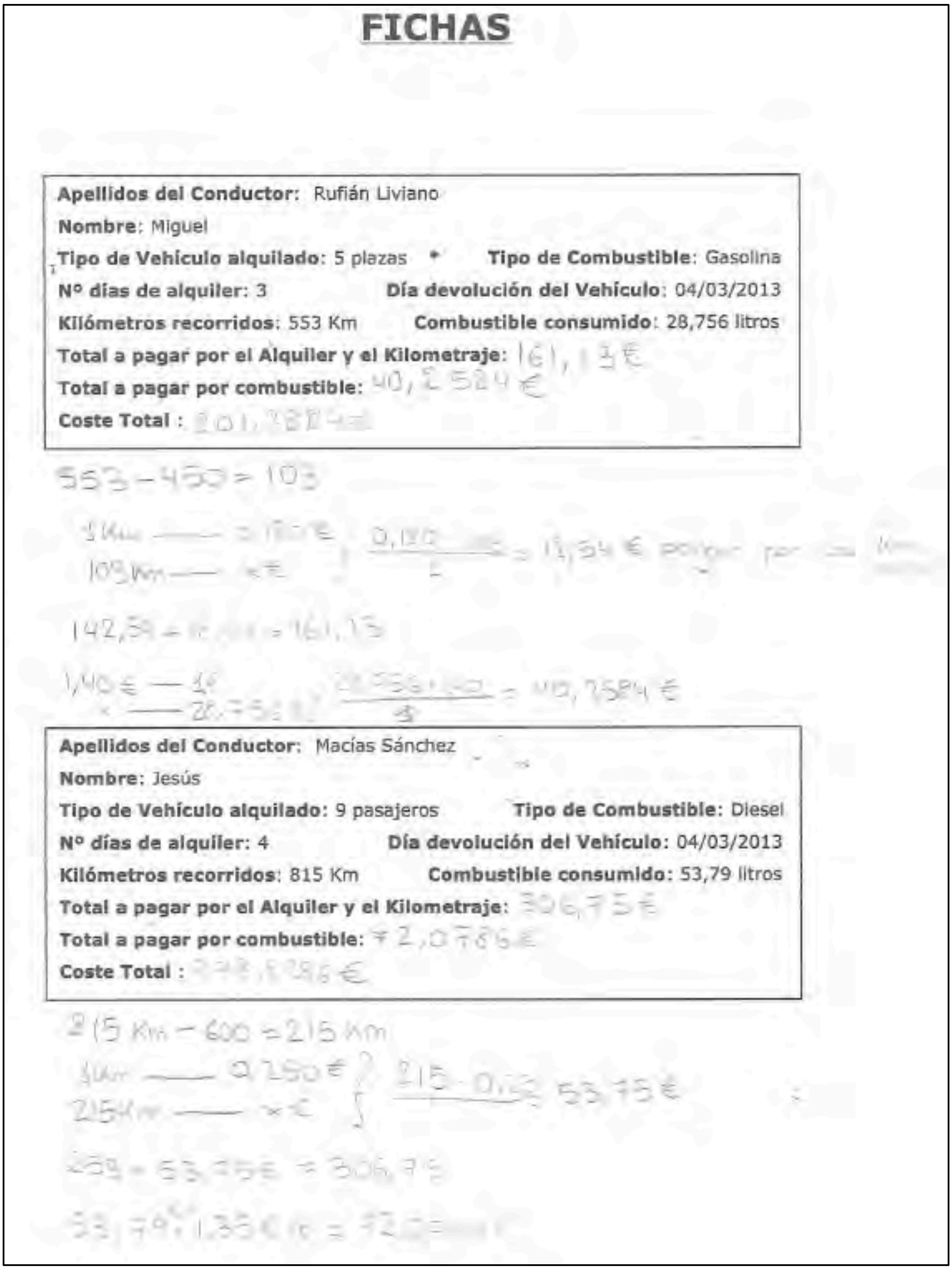
4 días → 253 € → 600 Km

1 Km → 0,25 €
215 Km → x
} x = $\boxed{53,75 €}$

1 l → 1,34 €
53,79 l → x
} x = $\boxed{72,08 €}$

253 + 53,75 = $\boxed{306,75 €}$

FIGURA 4.5.5.3. *Trabajo realzado por el grupo 5 en S.1.1*



FICHAS

Apellidos del Conductor: Rufián Liviano
Nombre: Miguel
Tipo de Vehículo alquilado: 5 plazas **Tipo de Combustible:** Gasolina
Nº días de alquiler: 3 **Día devolución del Vehículo:** 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 553 Km **Combustible consumido:** 28,756 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 161,13 €
Total a pagar por combustible: 40,2584 €
Coste Total :

Apellidos del Conductor: Macías Sánchez
Nombre: Jesús
Tipo de Vehículo alquilado: 9 pasajeros **Tipo de Combustible:** Diesel
Nº días de alquiler: 4 **Día devolución del Vehículo:** 04/03/2013
Kilómetros recorridos: 815 Km **Combustible consumido:** 53,79 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 306,75 €
Total a pagar por combustible:
Coste Total :

FIGURA 4.5.5.4. *Trabajo realzado por el grupo 2 en S.1.1*

Estrategias y conclusiones

En la siguiente tabla se recogen las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas. Marcamos en verde aquellas consideradas cómo óptimas:

TABLA 4.5.5.2. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 1*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.	
Grupo 2	Utilización de la regla de 3 para el cálculo del precio a pagar por los kilómetros recorridos de más y para el cálculo del coste por el combustible consumido.	
Grupo 3	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.	
Grupo 4	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.	

Grupo 5	Utilización de la regla de 3 para el cálculo del precio a pagar por los kilómetros recorridos de más y para el cálculo del coste por el combustible consumido.
Grupo 6	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.
Grupo 7	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.
Grupo 8	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.3. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Utilización de la regla de 3 para el cálculo del precio a pagar por los kilómetros recorridos de más y para el cálculo del coste por el combustible consumido.	2	25%
Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos por cada vehículo y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más, por un lado, y del combustible consumido y el precio por litro, por otro.	6	75 %

Fuente: elaboración propia

Seis son los grupos que, de manera directa, han establecido la relación correcta de dependencia entre variables. La caracterización de la actividad a partir de la tabla proporcionada permite obtener una visión interesante sobre los procedimientos de traducción e interpretación de la variabilidad de algunas de las magnitudes que en ella se recogen en función de otras, permitiendo, por un lado, la coordinación y vinculación con otros sistemas de representación como son el numérico y el lenguaje natural, y por otro, una interesante introducción al concepto de función a partir de situaciones reales que sirven de soporte para la construcción de este concepto.

Dos de los grupos han recurrido a la regla de tres para el cálculo del gasto por los kilómetros recorridos de más y el gasto del combustible, lo que resulta sorprendente dado que los datos se han facilitado ya reducidos a la unidad: euros por cada kilómetro Extra (€/km extra) y euros por cada litro (€/l). Este hecho permite inducir que para algunos de los alumnos dos magnitudes están asociadas de tal forma que al asignar una valor a una de ellas se asigna automáticamente un nuevo valor a la otra por medio de alguna regla o correspondencia, existiendo, para ellos, una fuerte vinculación entre los conceptos de dependencia y variabilidad con el concepto de proporcionalidad, lo que va muy de la mano de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, quien sostiene que ningún concepto se encuentra aislado (Vergnaud, 1983, 1988).

<u>Fase 2</u>: Tipo de Vehículo alquilado

Descripción:

La segunda fase sirve de reutilización de los conocimientos adquiridos en su antecesora y su afianzamiento.

A demás, esta fase de la situación requiere de una mayor concreción e identificación de la dependencia entre variables, pues se precisa abstraer la regla que da la dependencia entre las magnitudes puestas en juego.

En esta ocasión, se pretende que los alumnos realicen un trabajo previo de discriminación para prescindir de aquellas variables que en la anterior fase eran necesarias para resolver la situación, como son el combustible consumido y los euros por litro de combustible, y que en esta son innecesarias, pues a partir de los costes totales los euros a pagar por kilómetros extras (variable dependiente), los kilómetros recorridos (variable independiente) y del número de días de alquiler de cada cliente, pueden identificar el vehículo que han utilizado que es el dato a completar en las fichas:

“La empresa de ***Alquiler de Vehículos***, como cada mes de diciembre, está realizando el balance del año. Para ello, tienen que consultar las fichas que elaboran cada vez que un cliente alquila un vehículo.

Cual es su sorpresa cuando descubren que en algunas de estas fichas no aparece el tipo de vehículo que se alquiló. Por ello, os piden a vosotros que averigüéis ese dato a partir de la información que os proporcionan.

En la tabla con los datos, aparece el precio de alquiler por día, los kilómetros que incluyen por día de alquiler y el precio por cada kilómetro extra.

Los grupos que afirméis saber cuál es, debéis estar en condiciones de probarlo.”

A demás de la información dada en la consigna, se les vuelve a proporcionar la tabla con el precio de alquiler de los vehículos:

TABLA 4.5.5.4. *Tabla 1 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

PRECIO ALQUILER DE VEHÍCULOS				
Tipo Vehículo	**Días de alquiler**	**Precio**	**Km incluidos**	**Euros por Km extra**
Pasajero 5 plazas	1	47,53 €	120 Km	0,180 €
	2	95,06 €	230 Km	
	3	142,59 €	450 Km	
	4	163,20 €	600 Km	
Pasajero 6 plazas	1	61,31 €	120 Km	0,234 €
	2	122,62 €	230 Km	
	3	183,93 €	450 Km	
	4	210,52 €	600 Km	
Pasajero 9 plazas	1	83,59 €	120 Km	0,250 €
	2	145,90 €	230 Km	
	3	218,85 €	450 Km	
	4	253 €	600 Km	

Fuente: elaboración propia

Sin perder de vista el propósito de nuestro trabajo, que es el trabajo con los múltiples registros de representación semióticos, en esta ocasión pretendemos que por medio de la tabla el alumno reconozca un determinado modelo que le permita hallar valores o establecer relaciones de dependencia entre variables, trabajándose, así, la conversión con los registros de la lengua natural y numérico.

A demás se pretende favorecer y reforzar la lectura, construcción, interpretación y tratamientos entendidos desde la perspectiva de Duval, de las tablas para su posterior coordinación con los registros gráfico y algebraico.

Entendemos que el razonamiento en el marco tabular es vital para dotar de sentido a las relaciones funcionales.

También disponen de las fichas que la empresa ha preparado a cada uno de los dos nuevos clientes:

Apellidos del Conductor: Pérez Gil
Nombre: Consuelo
Tipo de Vehículo alquilado: **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 2 **Día devolución del Vehículo**: 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km **Combustible consumido**: 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183,45 €
Total a pagar por combustible: 35,93 €
Coste Total : 219,38 €

FIGURA 4.5.5.5. *Ficha para los alumnos del conductor 3*

Apellidos del Conductor: Miralles Rosales
Nombre: Pedro
Tipo de Vehículo alquilado: **Tipo de Combustible**: Diesel
Nº días de alquiler: 3 **Día devolución del Vehículo**: 29/05/2012
Kilómetros recorridos: 700 Km **Combustible consumido**: 31,5 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 187,59 €
Total a pagar por combustible: 40,32 €
Coste Total : 228,01 €

FIGURA 4.5.5.6. *Ficha para los alumnos del conductor 4*

Con el hecho de proporcionar en la ficha información que no resulta relevante para resolver la actividad, se pretende no conducir al estudiante de manera inmediata al establecimiento de la relación de dependencia entre las variables, favoreciendo así ese proceso de discriminación y selección de datos que son necesarios para la resolución.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Ahora tenemos otras dos fichas en las que faltan también datos. El dato que faltan en cada ficha es el tipo de vehículo que han alquilado. Tenemos a Consuelo Pérez Gil y a Pedro Miralles Rosales que les falta en su ficha indicar el tipo de vehículo que han alquilado.*

  Ahora os voy a repartir estas fichas. Utilizando, únicamente la información de la tabla, tenéis que intentar averiguar que vehículo es el que ha alquilado cada uno de los clientes.

Esta fase de la situación se ha visto condicionada por su predecesora, pues cinco de los ocho grupos han recurrido al procedimiento utilizado en aquella para encontrar los datos que faltan en la tabla mediante el ensayo-error, mientras que los restantes han considerado todas las variables puestas en juego en la fase 1:

Grupo 2

El grupo 2, tras haber realizado los cálculos para los tres tipos de coches, no obtienen coincidencia de sus resultados con los datos que vienen dados en la ficha, pues han cometido algún error de cálculo que posteriormente subsanan.

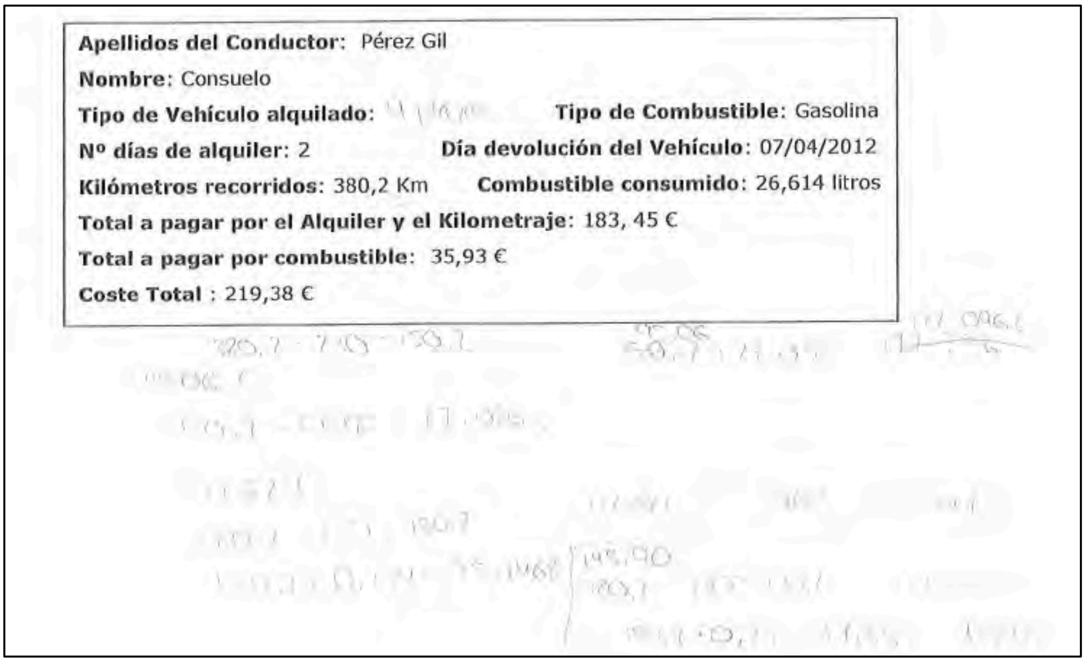
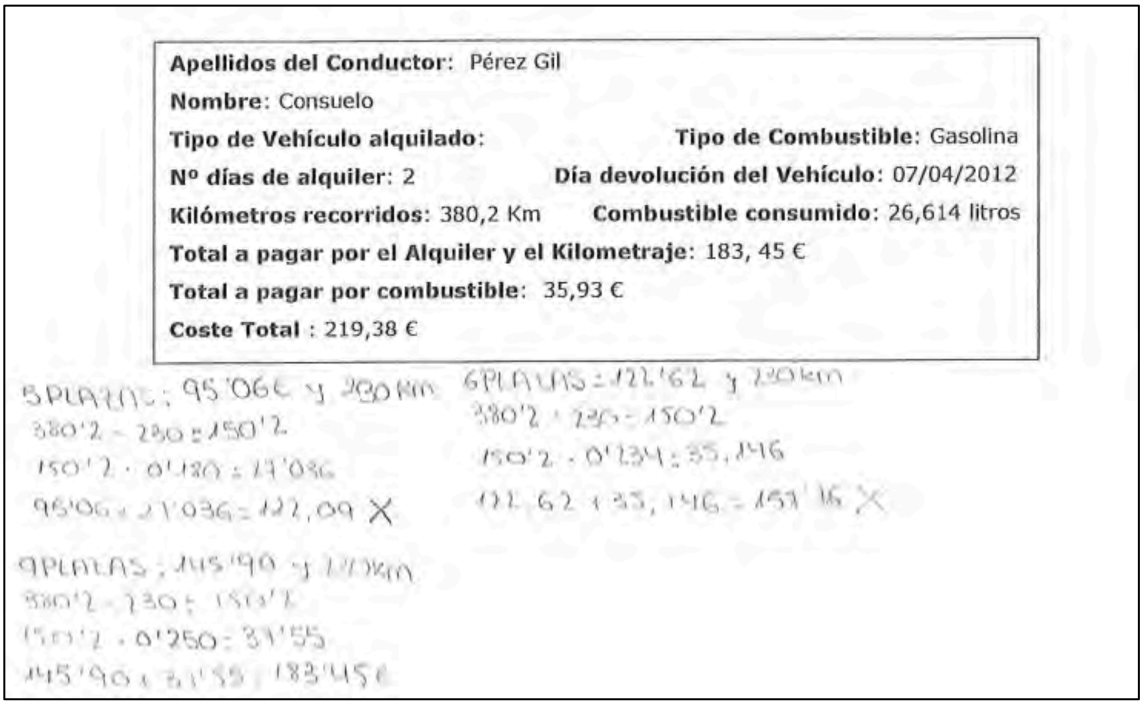

Apellidos del Conductor: Pérez Gil
Nombre: Consuelo
Tipo de Vehículo alquilado: **Tipo de Combustible:** Gasolina
Nº días de alquiler: 2 **Día devolución del Vehículo:** 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km **Combustible consumido:** 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183, 45 €
Total a pagar por combustible: 35,93 €
Coste Total : 219,38 €

FIGURA 4.5.5.7. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.1.2*

Grupo 3


Apellidos del Conductor: Pérez Gil
Nombre: Consuelo
Tipo de Vehículo alquilado: Tipo de Combustible: Gasolina
Nº días de alquiler: 2 Día devolución del Vehículo: 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km Combustible consumido: 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183, 45 €
Total a pagar por combustible: 35,93 €
Coste Total : 219,38 €

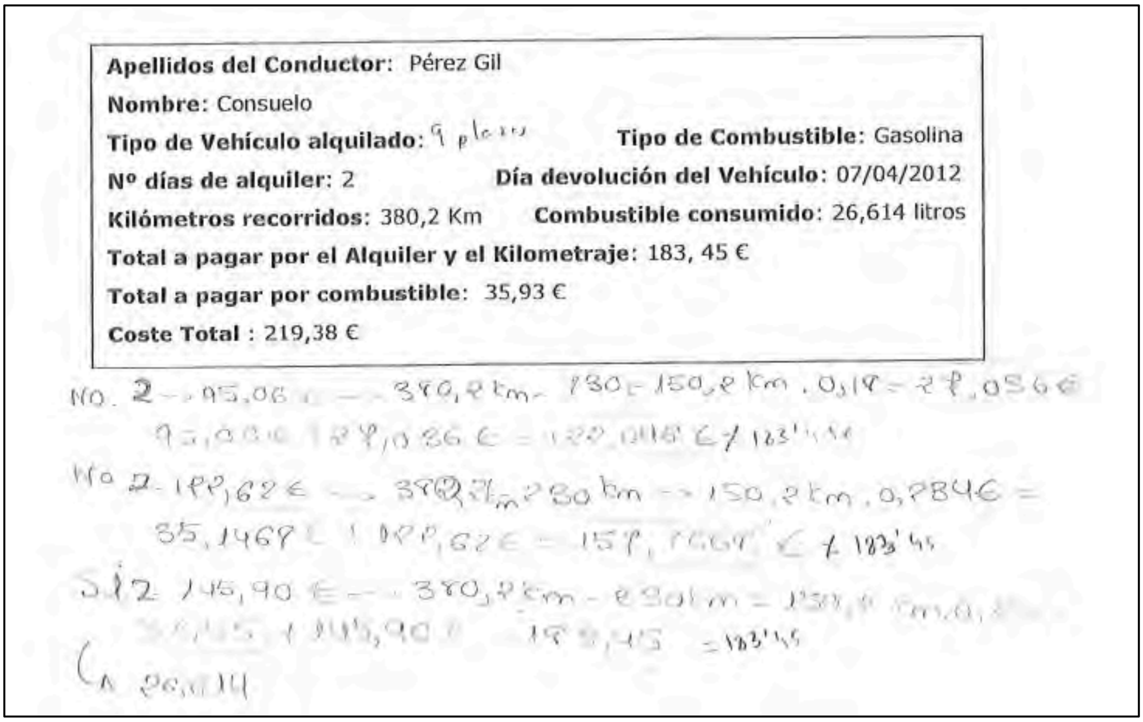
5PLAZAS: 95'06€ y 230 km
380'2 - 230 = 150'2
150'2 · 0'180 = 27'036
95'06 + 27'036 = 122,09 X

6PLAZAS = 122'62 y 230 km
380'2 - 230 = 150'2
150'2 · 0'234 = 35,146
122'62 + 35,146 = 157'76 X

9PLAZAS: 145'90 y 230 km
380'2 - 230 = 150'2
150'2 · 0'250 = 37'55
145'90 + 37'55 = 183'45€

FIGURA 4.5.5.8. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.1.2*

Grupo 4

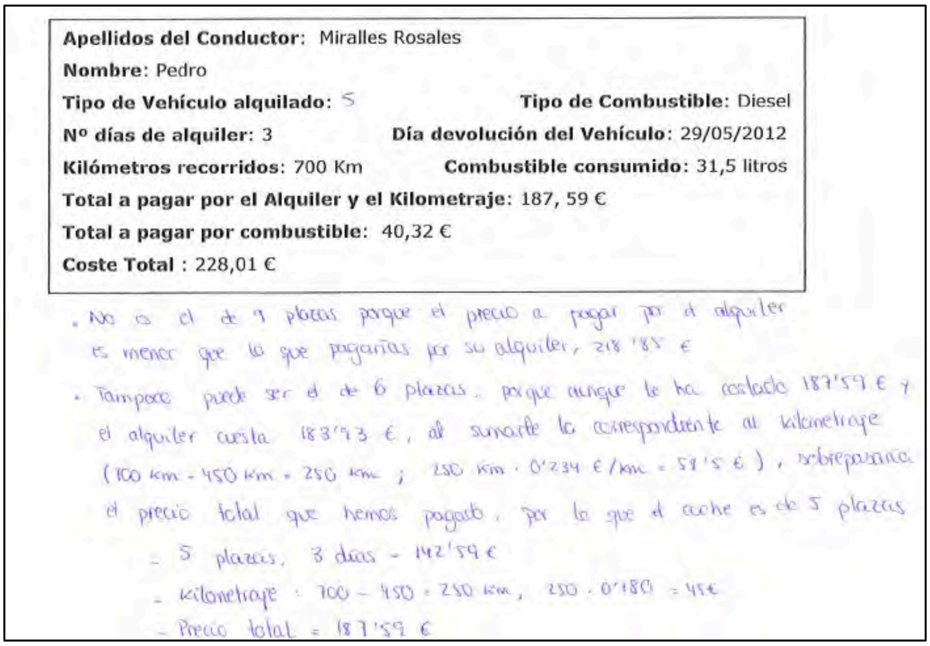

Apellidos del Conductor: Pérez Gil
Nombre: Consuelo
Tipo de Vehículo alquilado: 9 plazas Tipo de Combustible: Gasolina
Nº días de alquiler: 2 Día devolución del Vehículo: 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km Combustible consumido: 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183, 45 €
Total a pagar por combustible: 35,93 €
Coste Total : 219,38 €

No. 2 → 95,06 € → 380,2 km - 230 = 150,2 km · 0,18 = 27,036 €
95,06 € + 27,036 € = 122,096 € ≠ 183'45
No 2 - 122,62 € → 380,2 km - 230 km → 150,2 km · 0,234 =
35,1468 € + 122,62 € = 157,7668 € ≠ 183'45
Sí 2 145,90 € → 380,2 km - 230 km = 150,2 km · 0,25
37,55 + 145,90 = 183,45 = 183'45
C_A 26,614

FIGURA 4.5.5.9. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.1.2*

Grupo 5

- **Colaborador 2:** *¿Me podéis explicar lo que estáis haciendo?*
- **Silvia:** *Hemos probado primero con el coche de 5 plazas. Como son 2 días de alquiler costaría 95,06 y nos incluye 230 km. Cómo recorre 380,2, restamos y se sobrepasa 150, 2 km, que por los 0,180 € que cuesta cada kilómetro de más, da 27,036 €. Si ahora sumamos los 95,06 + 27,036, no da 183,45 que es lo que pone en la ficha.*
- **Colaborador 2:** *¿Y que vais a seguir haciendo?*
- **Lidia:** *Probar con los otros dos coches hasta que uno encaje.*

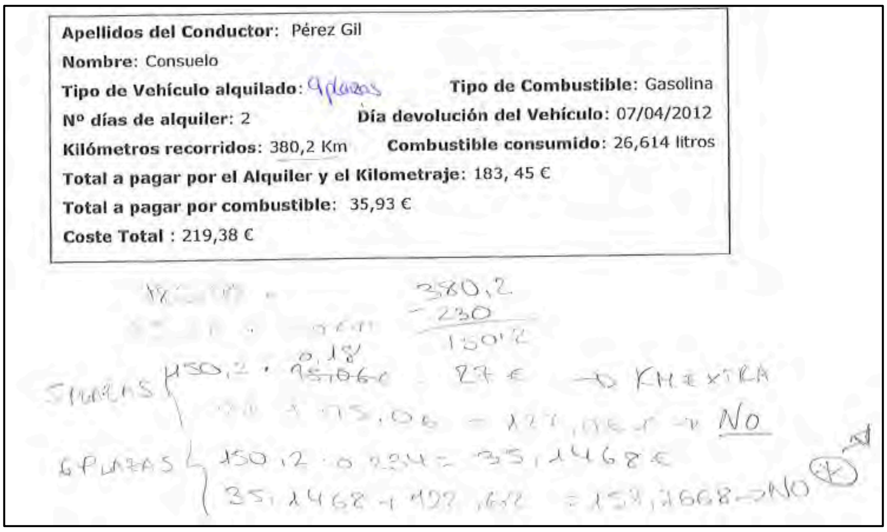


Apellidos del Conductor: Miralles Rosales
Nombre: Pedro
Tipo de Vehículo alquilado: 5 **Tipo de Combustible:** Diesel
Nº días de alquiler: 3 **Día devolución del Vehículo:** 29/05/2012
Kilómetros recorridos: 700 Km **Combustible consumido:** 31,5 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 187, 59 €
Total a pagar por combustible: 40,32 €
Coste Total : 228,01 €

· No es el de 9 plazas porque el precio a pagar por el alquiler es menor que lo que pagarías por su alquiler, 218'85 €
· Tampoco puede ser el de 6 plazas, porque aunque le ha costado 187'59 € y el alquiler cuesta 183'93 €, al sumarle la correspondiente al kilometraje (700 km - 450 km = 250 km ; 250 km · 0'234 €/km = 58'5 €), sobrepasaría el precio total que hemos pagado, por lo que el coche es de 5 plazas
- 5 plazas, 3 días - 142'59 €
- kilometraje : 700 - 450 = 250 km, 250 · 0'180 = 45€
- Precio total = 187'59 €

FIGURA 4.5.5.10. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.1.2*

Grupo 7



Apellidos del Conductor: Pérez Gil
Nombre: Consuelo
Tipo de Vehículo alquilado: 9 plazas **Tipo de Combustible:** Gasolina
Nº días de alquiler: 2 **Día devolución del Vehículo:** 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km **Combustible consumido:** 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183, 45 €
Total a pagar por combustible: 35,93 €
Coste Total : 219,38 €

380,2
− 230
150'2

5 PLAZAS { 150,2 · 0,18 = 27 € → KM EXTRA
+ 95,06 → NO

6 PLAZAS { 150,2 · 0,234 = 35,14468 €
35,14468 + 122,622 = 158,1668 → NO

FIGURA 4.5.5.11. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.1.2*

El grupo 1 no consigue avanzar en el proceso pues se muestran convencidas de que tienen que utilizar el dato de la gasolina de la fase anterior para poder continuar, cuando la realidad es que en la ficha proporcionada ya les viene dado el tipo de combustible utilizado, los litros consumidos y el total a pagar por ellos, que por otra parte son datos irrelevantes a la hora de averiguar el tipo de vehículo que ha alquilado:

- **Colaborador 1:** *¿Qué estáis haciendo?*
- **Mónica:** *Hemos restado los kilómetros que pone en la ficha que ha recorrido menos 230.*
- **Colaborador 1:** *¿Por qué menos 230?*
- **Mónica:** *Porque es lo que incluye el alquiler de 2 días en el coche de 5 plazas.*
- **Colaborador 1:** *¿Y por qué sabéis que es el coche de 5 plazas?*
- **Raquel:** *No lo sabemos…vamos a probar con los 3, pero ahora no sabemos que tenemos que hacer con la gasolina. Tenemos que hacer algo con lo de la gasolina, con el 1,40, pero el caso es que no sabemos el qué.*

Tras algunos minutos, se percatan de que el dato de la gasolina no es necesario en esta ocasión y proceden a resolver como la mayoría de los grupos:

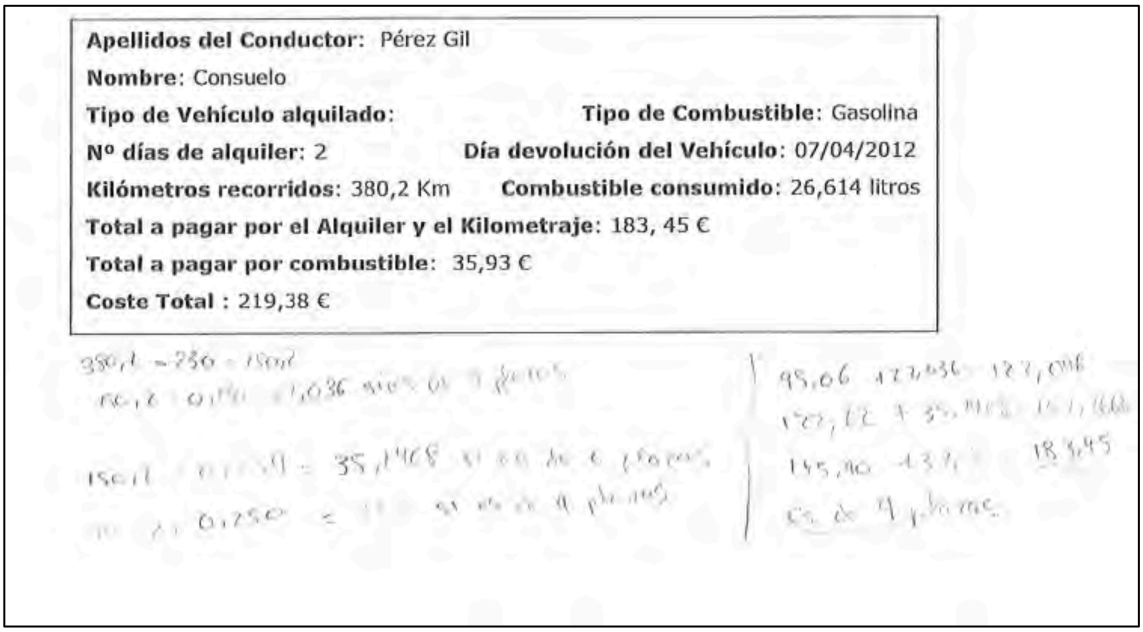

Apellidos del Conductor: Pérez Gil
Nombre: Consuelo
Tipo de Vehículo alquilado: **Tipo de Combustible:** Gasolina
Nº días de alquiler: 2 **Día devolución del Vehículo:** 07/04/2012
Kilómetros recorridos: 380,2 Km **Combustible consumido:** 26,614 litros
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 183, 45 €
Total a pagar por combustible: 35,93 €
Coste Total : 219,38 €

FIGURA 4.5.5.12. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.1.2*

Por su lado, los grupos 6 y 8 no han sido capaces de llegar a ningún resultado por centrarse en variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.5. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de Situación 1*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.
Grupo 2	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.	
Grupo 3	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.	
Grupo 4	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.	

Grupo 5	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.
Grupo 6	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.
Grupo 7	Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.
Grupo 8	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.6. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Establecimiento de la relación de dependencia entre los kilómetros recorridos y el coste a pagar por cada kilómetro recorrido de más para cada uno de los coches, de modo que mediante el ensayo-error encuentran la solución al problema.	5	62,5%
Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	3	37,5 %

Fuente: elaboración propia

Solo uno de los tres grupos que no han partido de la estrategia óptima ha sido capaz de aislar aquellas variables que no eran necesarias para encontrar las relaciones de dependencia que les condujera a la resolución de la actividad.

Cinco de los ocho grupos han elegido como estrategia base la estrategia óptima, reconociendo por medio de la tabla aquellos valores y relaciones que les permiten establecer una correspondencia entre los datos proporcionados en conjugación con los registros de la lengua natural y numérico.

Estos tres registros semióticos no sirven de nada si no se reconocen las características a las que hacen referencia, más allá de la simple lectura de datos.

De este modo, esta fase se ha convertido en una primera toma de contacto de la articulación de tres registros de representación que se utilizan de manera natural en distintos contextos del día al día que hacen referencia a situaciones en donde intervienen relaciones de dependencias entre variables, por lo que ha sido indispensable para iniciar un aprendizaje significativo y un buen desarrollo cognitivo de las nociones que giran alrededor del concepto de función, tarea que no resulta natural para los alumnos.

Fase 3: Tipo de combustible

Descripción:

La tercera fase se desarrolla con la principal intención de que el alumno termine de relacionar y vincular los registros Tabular, Numérico y de la Lengua Natural con el concepto de dependencia entre variables, antes de introducir un nuevo registro de representación como es el registro gráfico.

Para ello, en esta ocasión nos centramos concretamente en el cálculo de los litros de combustible consumidos tras la identificación por parte del alumno del tipo de vehículo que ha utilizado cada cliente. Dicha identificación se efectúa a partir del precio que ha pagado el cliente al repostar en función de los kilómetros recorridos y los litros de consumo por cada 100 kilómetros que caracteriza a cada tipo de vehículo de los que la empresa oferta:

"Cuando un cliente alquila un vehículo, el deposito del mismo se encuentra totalmente lleno, de manera que cuando lo entregan se procede a su llenado y se cobra el combustible repostado.

Siguiendo con la revisión de las fichas, han localizado otras dos en las que faltan los campos ***relativos al combustible***, así que os vuelven a pedir que averigüéis esos datos a partir de la información que os proporcionan.

En la tabla con los datos, aparece el consumo de combustible en función del vehículo alquilado y el precio del litro de combustible según sea diesel o gasolina durante el mes de junio que es la fecha en la que los clientes realizaron el alquiler.

Los grupos que afirméis haber hallado los datos que faltan, debéis estar en condiciones de probarlo."

A demás de la información dada en la consigna, se les proporcionan los siguientes datos:

Las fichas que la empresa ha preparado a cada uno de los dos nuevos clientes:

Apellidos del Conductor: Lordén Martín	**Nombre**: Pablo
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajero 6 plazas	**Tipo de Combustible**:
Nº días de alquiler: 1	**Día devolución del Vehículo**: 13/06/2012
Kilómetros recorridos: 110Km	**Combustible consumido**:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 61,31 €	
Total a pagar por combustible consumido: 8,7901€	
Coste Total : 70,1001€ ≅ 70,10€	

Figura 4.5.4.13. *Ficha para los alumnos del conductor 5*

Apellidos del Conductor: Merino Mora	**Nombre**: Elena
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajeros 9 plazas	**Tipo de Combustible**:
Nº días alquiler: 4	**Día devolución del Vehículo**: 05/06/2012
Kilómetros recorridos: 640 Km	**Combustible consumido**:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 273€	
Total a pagar por combustible consumido: 58,24€	
Coste Total : 331,24€	

Figura 4.5.4.14. *Ficha para los alumnos del conductor 6*

De todos los datos que en ellas se proporciona, el alumno únicamente va a tener que utilizar los **Kilómetros recorridos** y el **Total a pagar a pagar por el combustible consumido,** por lo que deben realizar una labor de discriminación y búsqueda de aquellas variables que intervienen en las relaciones de dependencia relacionadas con el combustible consumido y el kilometraje.

En la ficha de cliente, además del **Tipo de combustible** que emplea el vehículo, se ha omitido el dato de litros de **combustible consumidos** con la finalidad de bloquear la estrategia de determinar si el vehículo es diesel o gasolina a partir de los *euros totales a pagar por el combustible consumido* y el *precio por litro de combustible*. De este modo, se hará necesario establecer la relación entre las variables *kilómetros recorridos* y *litros que consume cada vehículo por cada 100 km*.

Una hoja con la información correspondiente al consumo en litros por cada 100 km de combustible diesel o gasolina en función del tipo de vehículo:

TABLA 4.5.5.7. *Tabla 2 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

CARACTERÍSTICAS DE LOS VEHÍCULOS				
Tipo	**Plazas**	**Foto**	**Litros de consumo por cada 100 km**	
PASAJEROS	5 plazas		4,5 litros de Diesel	
			5,2 litros de Gasolina	
	6 plazas		5,8 litros de Diesel	
			6,1 litros de Gasolina	
	9 plazas		6,6 litros de Diesel	
			7 litros de Gasolina	

Fuente: elaboración propia

Una con la información correspondiente al precio por litro de combustible diesel y gasolina en el mes de junio de 2012:

TABLA 4.5.5.8. *Tabla para el alumno con el precio de combustible*

PRECIO POR LITRO COMBUSTIBLE DIESEL (JUNIO)									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1,243€	1,243€	1,245€	1,248€	1,25€	1,242€	1,242€	1,24 €	1,24 €	1,238€
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1,235€	1,226€	1,22€	1,227€	1,227€	1,241€	1,241€	1,242€	1,242€	1,243€
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1,243€	1,243€	1,242€	1,242€	1,243€	1,243€	1,243€	1,24 €	1,24 €	1,24 €

PRECIO POR LITRO COMBUSTIBLE GASOLINA (JUNIO)									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1,314€	1,314€	1,306€	1,302€	1,3€	1,306€	1,306€	1,311€	1,31€	1,31€
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1,311€	1,31€	1,31€	1,31€	1,315€	1,316€	1,316€	1,324€	1,32€	1,32€
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1,326€	1,326€	1,326€	1,324€	1,324€	1,321€	1,321€	1,321€	1,32€	1,32€

Fuente: elaboración propia

Los datos cuantitativos tanto de las fichas de clientes como de las tablas de información, se han elegido de tal manera que no se identifique el tipo de combustible a simple vista. Esto obligará a que tengan que emplear procesos de identificación de las variables dependientes e independientes y cálculos con ellos para llegar a la solución coordinando los distintos registros de representación utilizados.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Pues hoy tenemos otras fichas, que también nos faltan datos. En este caso no sabemos el tipo de combustible ni los litros que se han consumido. Nos faltan esos dos datos.*

  Os voy a repartir esta ficha. Es la ficha donde aparecen los coches que teníamos de 5 plazas, 6 plazas y 9 plazas y los litros que consumen cada 100 km dependiendo de si son diesel o si son gasolina.

  Con estos datos y con el precio del diesel y la gasolina a lo largo de los días del mes de julio, tenéis que averiguar el tipo de combustible que utilizan los coches que han alquilado nuestros dos clientes y los litros consumidos por cada uno.

Todos los grupos identifican de manera rápida los datos de las fichas de los clientes que les son necesarios para averiguar los resultados que faltan, salvo el grupo 1 y el grupo 6. Los miembros del grupo 1 piden al profesor la hoja de la tabla con el precio de alquiler de los vehículos utilizada en las dos primeras fases al no discriminar las variables que entran en juego:

- **Raquel:** *Le restamos 61,31 a 70,10 para saber lo que es el kilometraje*
- **Mónica:** *¿Por qué?*
- **Raquel:** *Por que es lo que sobra.*
- **Mónica:** *No, por que el coste total es la suma del total a pagar a pagar por el alquiler y el kilometraje y el total a pagar por el combustible consumido.*
- **Raquel:** *Pero vamos a necesitar la ficha de ayer para saber lo que paga por los kilómetros extra.*

Tras unos minutos de discusión entre los miembros del grupo, llegan a la conclusión que no les es necesario saber cuanto han pagado por los kilómetros extra, ya que el combustible consumido está relacionado con el total de kilómetros recorridos por el vehículo, sean kilómetros extra o no.

Seis de los ocho grupos han recurrido a la representación y utilización clásica de la regla de tres para calcular los litros consumidos, según el vehículo sea gasolina o diesel, a partir de los kilómetros recorridos, para después, mediante ensayo y error encontrar el vehículo empleado multiplicando los litros consumidos por los €/l que costaba el combustible el día que devolvieron el coche:

Grupo 1

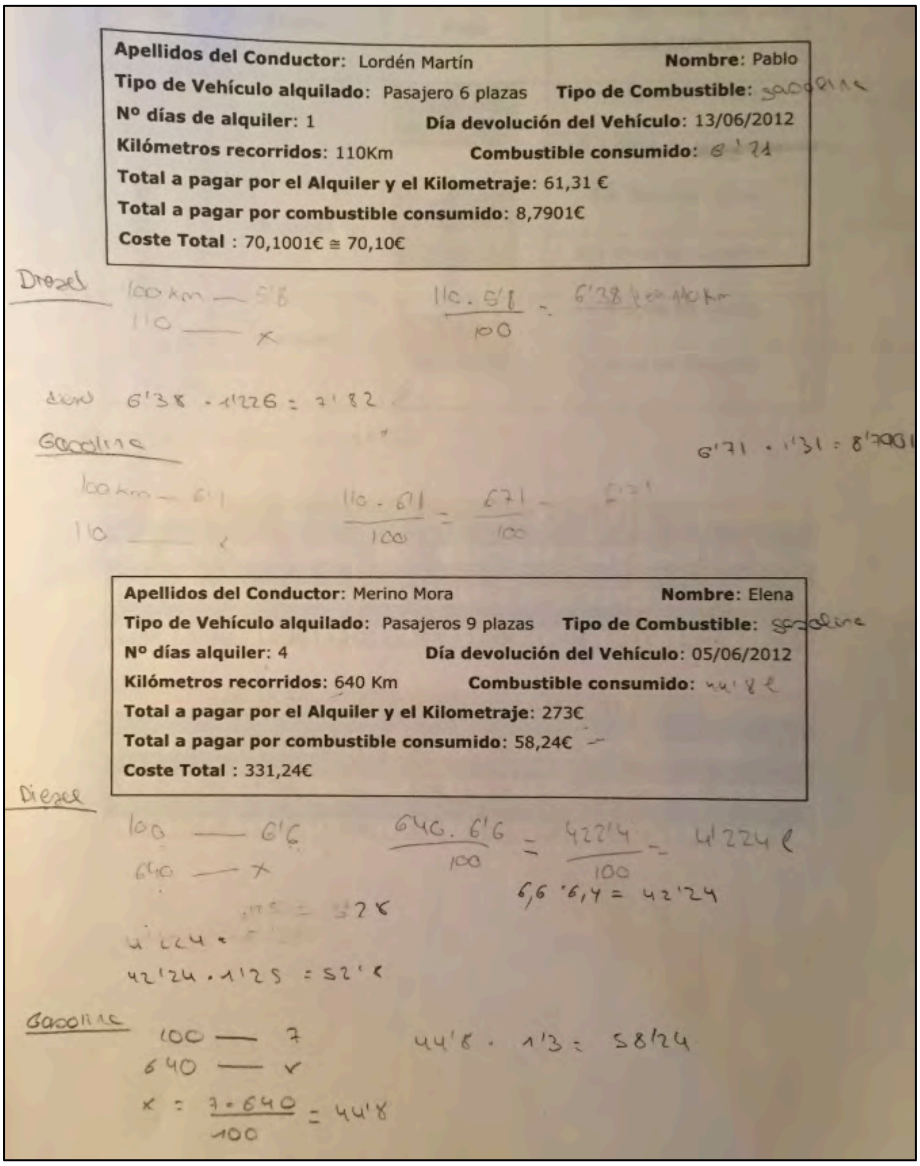
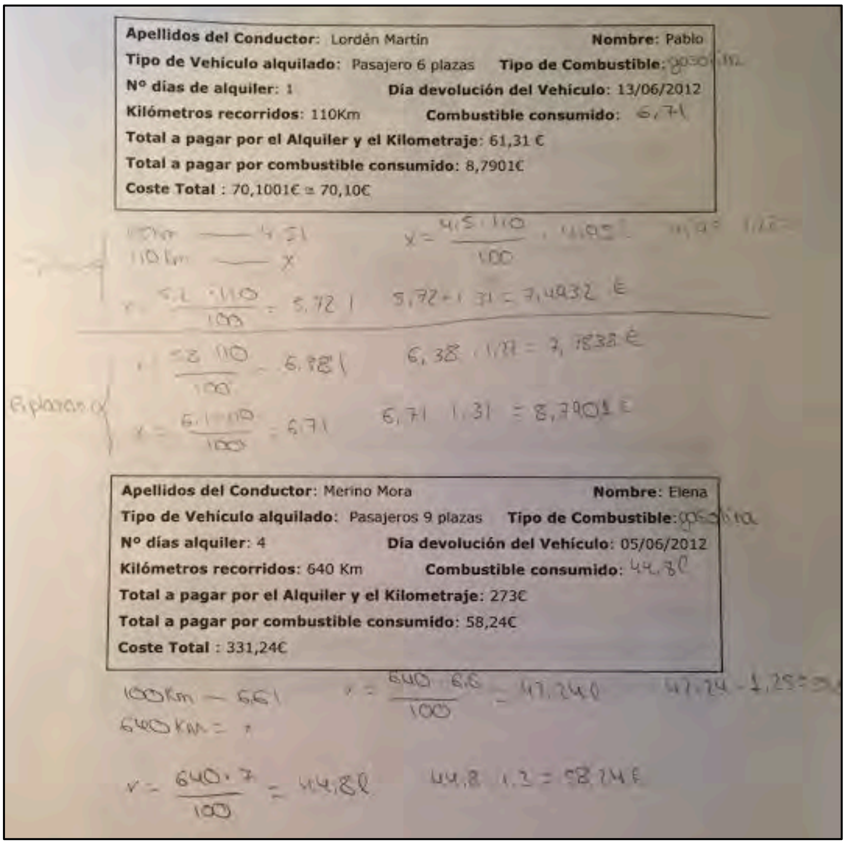


FIGURA 4.5.5.15. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.1.3*

Grupo 2

- **Colaborador 1:** *¿Qué estáis haciendo?*
- **Beatriz:** *Hemos utilizado la regla de tres para calcular los litros que ha consumido cada coche en los kilómetros que han recorrido.*
- **Colaborador 1:** *¿Y ahora que vais a hacer?*
- **Sara:** *Nos hemos quedado ahí.*
- **Colaborador 1:** *¿Qué más datos tenéis?*
- **Beatriz:** *Las tablas con el precio de los combustibles en el mes de junio.*
- **Colaborador 1:** *¿Y por qué creéis que tenéis esas tablas?*
- **Beatriz:** *Porque es cuando han alquilado y devuelto los vehículos. Lo pone en la ficha.*
- **María:** *Ahhhh… ¡ya!*
- **Colaborador 1:** *¿Ya qué?, María*
- **Beatriz:** *Cómo lo ha devuelto el 13 de junio tenemos que multiplicar el precio por un litro de gasoil ese día por los litros que nos han salido y comprobar.*



Apellidos del Conductor: Lordén Martín Nombre: Pablo
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajero 6 plazas Tipo de Combustible:
Nº días de alquiler: 1 Día devolución del Vehículo: 13/06/2012
Kilómetros recorridos: 110Km Combustible consumido:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 61,31 €
Total a pagar por combustible consumido: 8,7901€
Coste Total : 70,1001€ ≅ 70,10€

Apellidos del Conductor: Merino Mora Nombre: Elena
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajeros 9 plazas Tipo de Combustible:
Nº días alquiler: 4 Día devolución del Vehículo: 05/06/2012
Kilómetros recorridos: 640 Km Combustible consumido:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 273€
Total a pagar por combustible consumido: 58,24€
Coste Total : 331,24€

FIGURA 4.5.5.16. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.1.3*

Grupo 3

- **Colaborador 1:** *¿Qué estáis haciendo?*
- **Noelia:** *Una regla de tres.*
- **Colaborador 1:** *¿Para qué?*
- **Noelia:** *Porque en 100 kilómetros sabemos lo que es, pero no en los kilómetros que han recorrido cada uno.*
- **Colaborador 1:** *¿Lo que es qué?*
- **Sandra:** *Los litros consumidos.*
- **Colaborador 1:** *Ok.*
- **Noelia:** *Y esos litros lo multiplicamos por el precio del combustible ese día y comprobamos.*

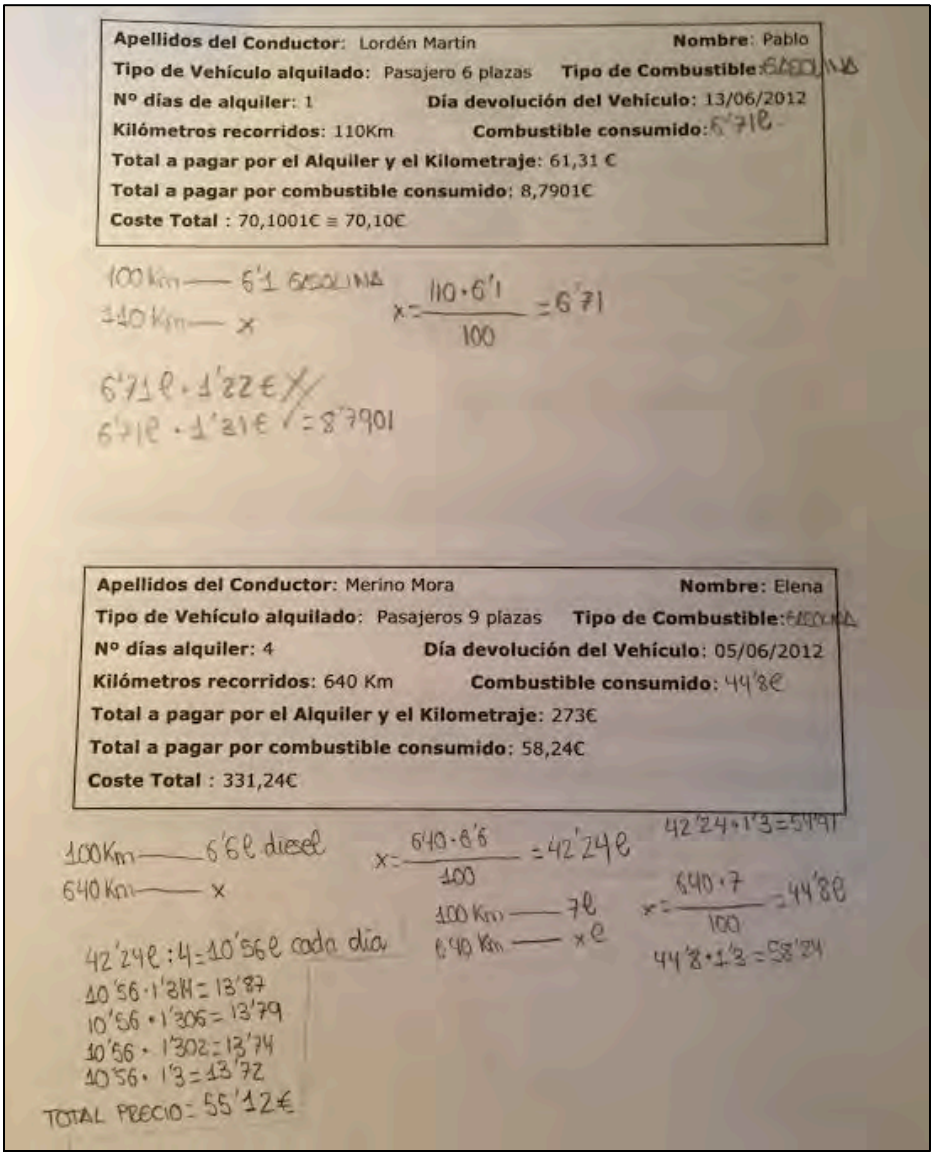
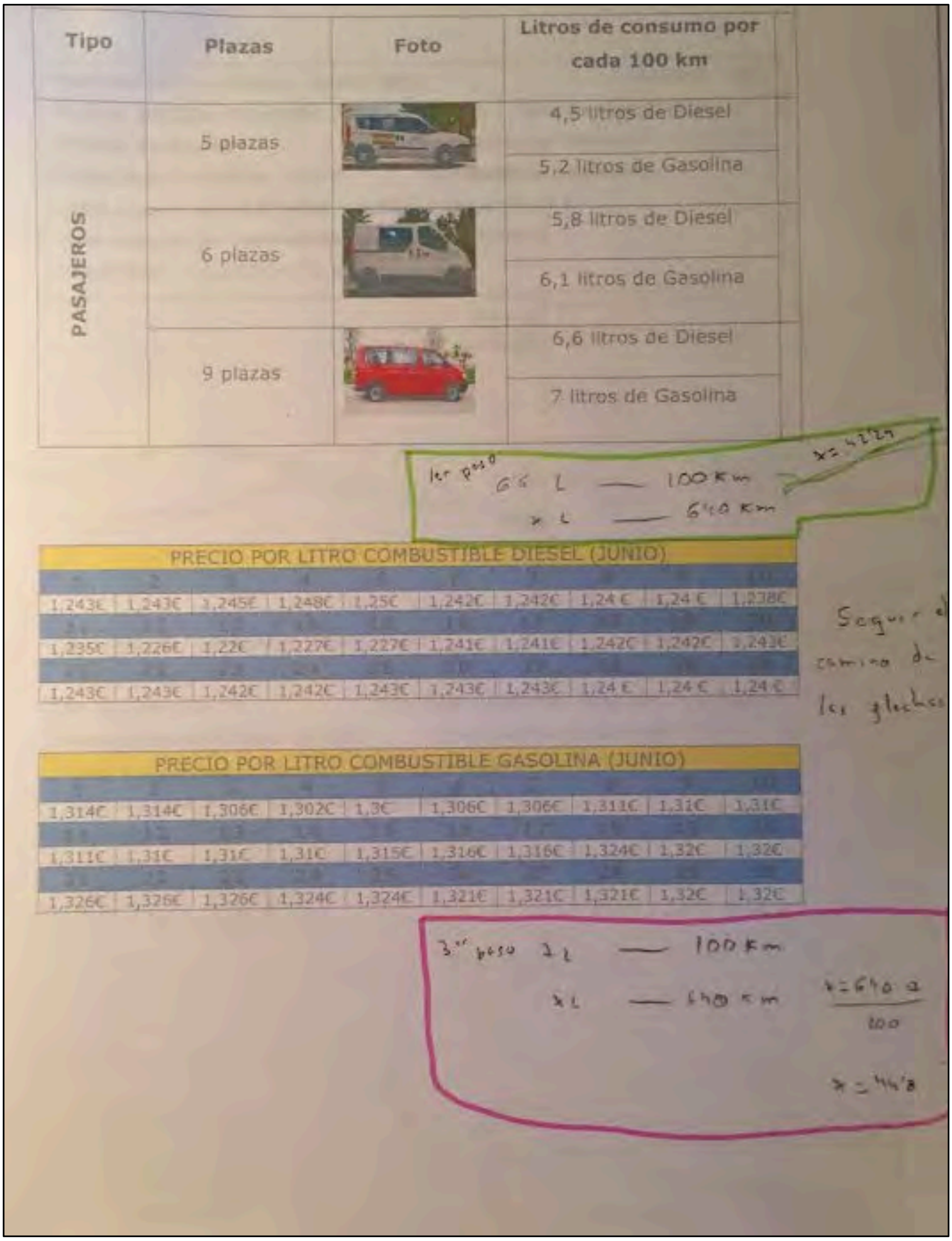


FIGURA 4.5.5.17. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.1.3*

Grupo 4



Tipo	Plazas	Foto	Litros de consumo por cada 100 km
PASAJEROS	5 plazas		4,5 litros de Diesel
			5,2 litros de Gasolina
	6 plazas		5,8 litros de Diesel
			6,1 litros de Gasolina
	9 plazas		6,6 litros de Diesel
			7 litros de Gasolina

1er paso 6'6 L — 100 Km

x L — 640 Km

x = 42'24

PRECIO POR LITRO COMBUSTIBLE DIESEL (JUNIO)									
[illegible]	2	3	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	10
1,243€	1,243€	1,245€	1,248€	1,25€	1,242€	1,242€	1,24 €	1,24 €	1,238€
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,235€	1,226€	1,22€	1,227€	1,227€	1,241€	1,241€	1,242€	1,242€	1,243€
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,243€	1,243€	1,242€	1,242€	1,243€	1,243€	1,243€	1,24 €	1,24 €	1,24 €

Seguir el camino de las flechas

PRECIO POR LITRO COMBUSTIBLE GASOLINA (JUNIO)									
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,314€	1,314€	1,306€	1,302€	1,3€	1,306€	1,306€	1,311€	1,31€	1,31€
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,311€	1,31€	1,31€	1,31€	1,315€	1,316€	1,316€	1,324€	1,32€	1,32€
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,326€	1,326€	1,326€	1,324€	1,324€	1,321€	1,321€	1,321€	1,32€	1,32€

3er paso 7 L — 100 Km

x L — 640 Km

$x = \frac{640 \cdot 7}{100}$

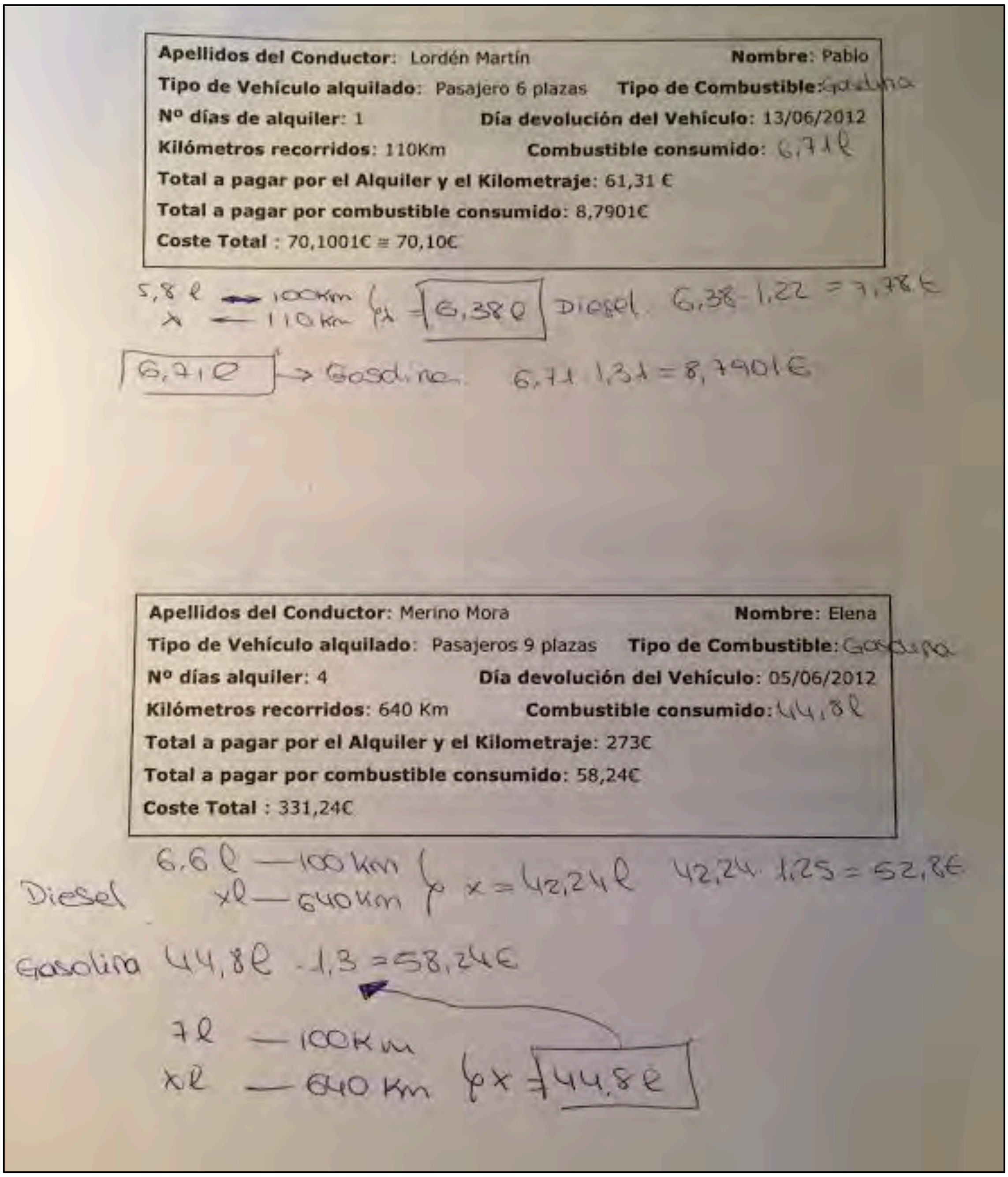
x = 44'8

FIGURA 4.5.5.18. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.1.3*

Grupo 5

– **Colaborador 4:** *¿Me contáis que habéis hecho?*

– **María:** *Tenemos los kilómetros recorridos. Si 100 kilómetros equivalían a 5,8 litros, hemos hecho una regla de tres para saber cuantos litros teníamos en 110 kilómetros. Lo que nos ha dado lo hemos multiplicado por el coste de diesel ese día y no nos daba lo que ponía en la ficha. Luego lo hemos hecho con la gasolina y nos daba lo que ha tenido que pagar el hombre este según la ficha. En el segundo lo hemos hecho igual.*



Apellidos del Conductor: Lordén Martín **Nombre**: Pablo
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajero 6 plazas **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 1 **Día devolución del Vehículo**: 13/06/2012
Kilómetros recorridos: 110Km **Combustible consumido**: 6,71ℓ
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 61,31 €
Total a pagar por combustible consumido: 8,7901€
Coste Total : 70,1001€ ≅ 70,10€

5,8 ℓ — 100Km
x — 110 km } x = $\boxed{6,38ℓ}$ Diesel 6,38 · 1,22 = 7,78 €
$\boxed{6,71ℓ}$ → Gasolina 6,71 · 1,31 = 8,7901 €

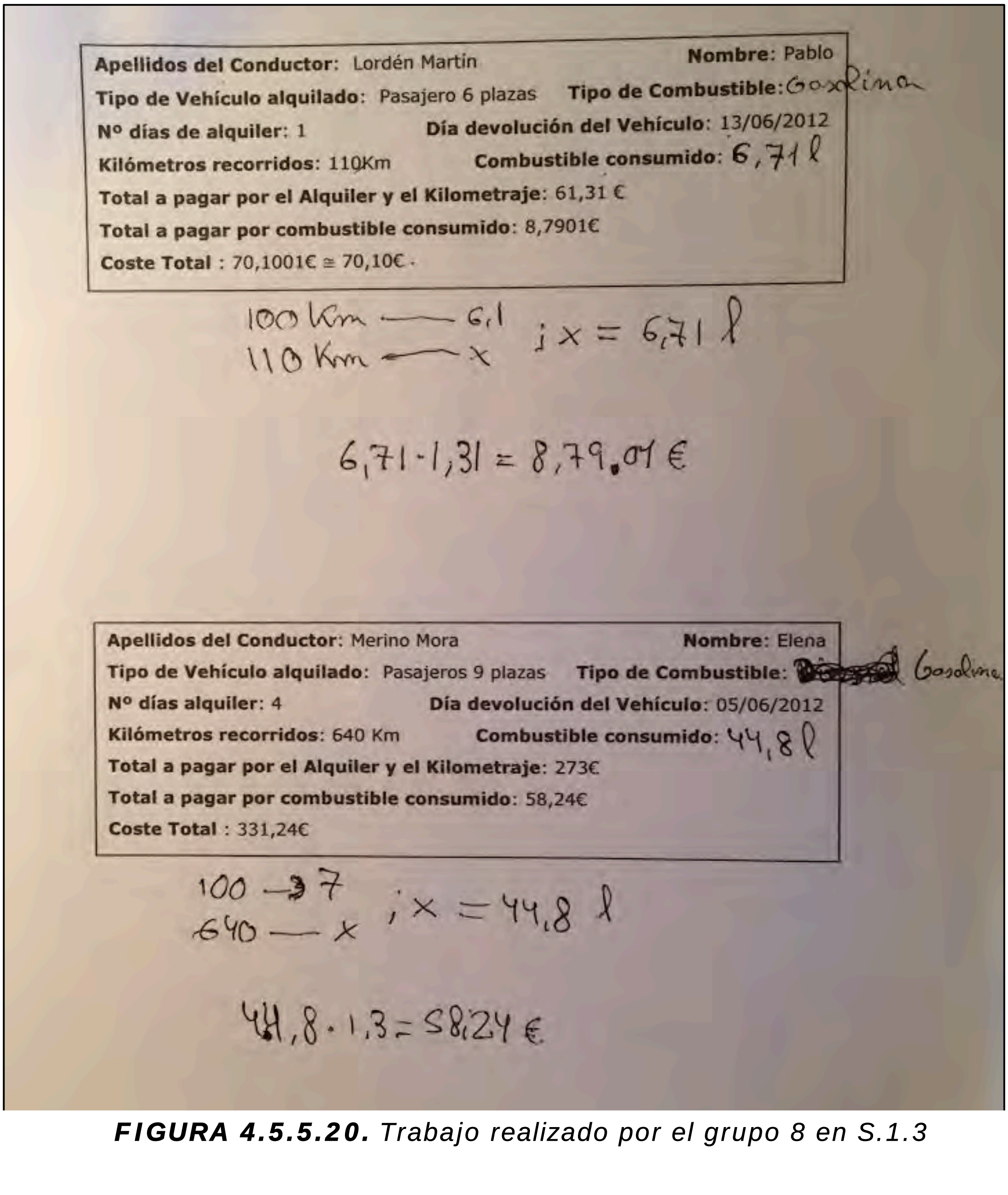
Apellidos del Conductor: Merino Mora **Nombre**: Elena
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajeros 9 plazas **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días alquiler: 4 **Día devolución del Vehículo**: 05/06/2012
Kilómetros recorridos: 640 Km **Combustible consumido**: 44,8ℓ
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 273€
Total a pagar por combustible consumido: 58,24€
Coste Total : 331,24€

6,6 ℓ — 100 km
Diesel xℓ — 640 km } x = 42,24ℓ 42,24 · 1,25 = 52,8€
Gasolina 44,8ℓ · 1,3 = 58,24€
7ℓ — 100Km
xℓ — 640 Km } x = $\boxed{44,8ℓ}$

FIGURA 4.5.5.19. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.1.3*

Grupo 8

- **Colaborador 3:** *¿Qué habéis hecho?*
- **Álvaro:** *Una regla de tres. Sí en 100 kilómetros consume 6,1 litros, en 110 kilómetros consumirá x.*
- **Colaborador 1:** *¿Y ahora?*
- **Jaime:** *Multiplicamos por le precio de la gasolina o el diesel ese día.*



Apellidos del Conductor: Lordén Martín **Nombre**: Pablo
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajero 6 plazas **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 1 **Día devolución del Vehículo**: 13/06/2012
Kilómetros recorridos: 110Km **Combustible consumido**: 6,71 l
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 61,31 €
Total a pagar por combustible consumido: 8,7901€
Coste Total : 70,1001€ ≅ 70,10€ ·

100 Km —— 6,1
110 Km —— x ; x = 6,71 l

6,71 · 1,31 = 8,79,01 €

Apellidos del Conductor: Merino Mora **Nombre**: Elena
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajeros 9 plazas **Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días alquiler: 4 **Día devolución del Vehículo**: 05/06/2012
Kilómetros recorridos: 640 Km **Combustible consumido**: 44,8 l
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 273€
Total a pagar por combustible consumido: 58,24€
Coste Total : 331,24€

100 → 7
640 — x ; x = 44,8 l

44,8 · 1,3 = 58,24 €

FIGURA 4.5.5.20. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.1.3*

Los dos grupos restantes han utilizado la relación de proporcionalidad entre las variables kilómetros recorridos y litros de combustibles consumido, dejando claramente marcada la relación de dependencia entre ambas variables:

Grupo 6

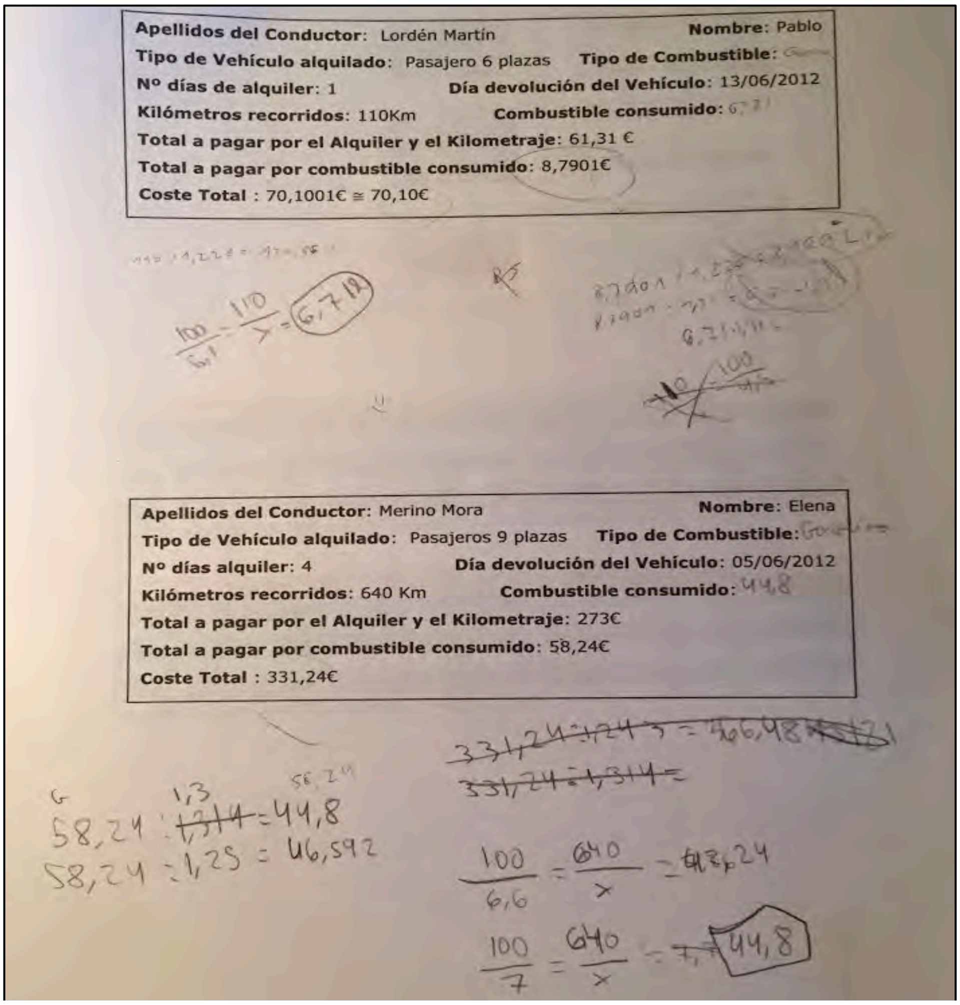
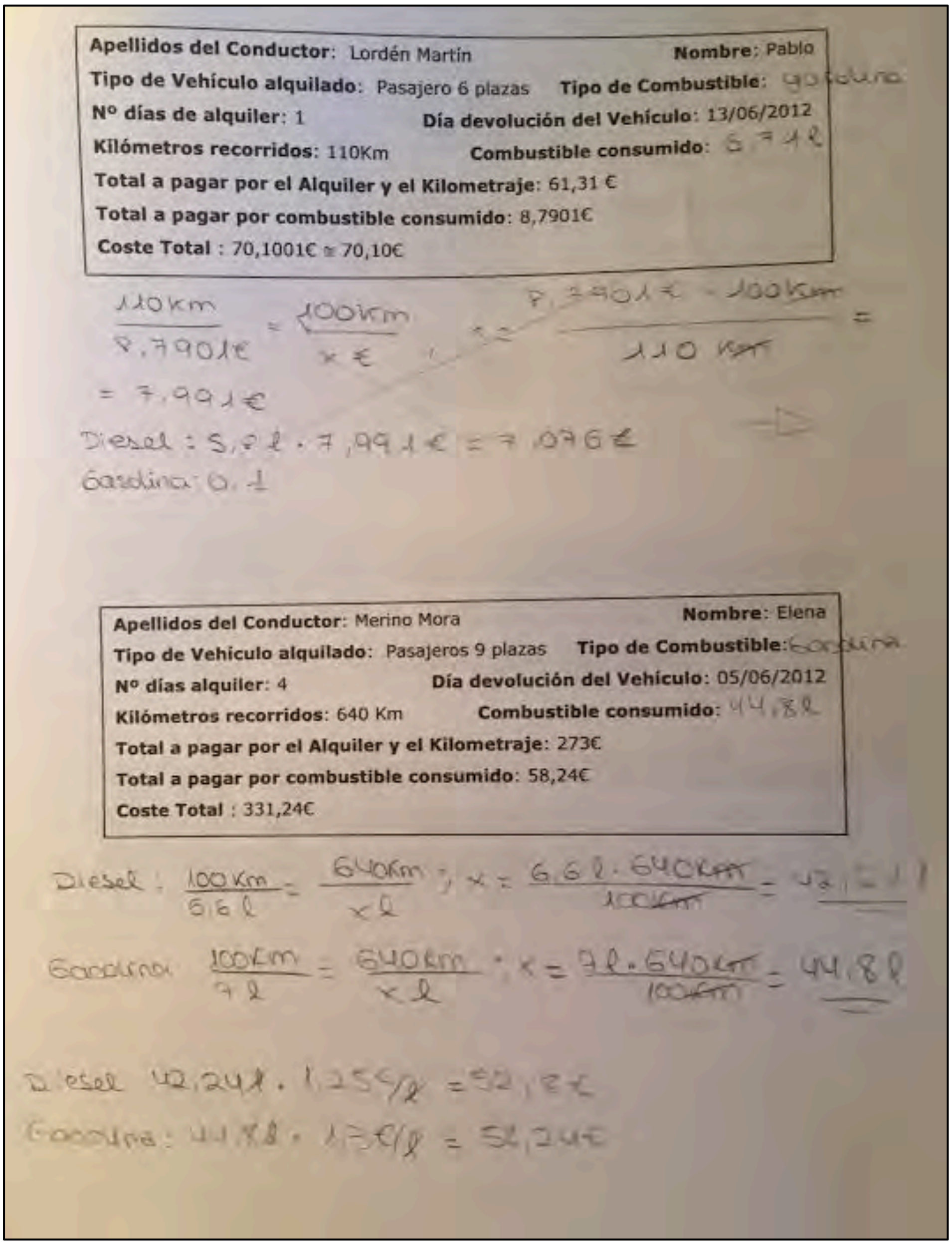


FIGURA 4.5.5.21. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.1.3*

El grupo 6 realiza un doble cálculo para luego comparar resultados. Por un lado, dividen el **total a pagar por el combustible consumido** entre el **precio por litro del combustible** del día que se devuelve el vehículo para averiguar los litros que se han consumido; y, por otro lado, utilizan la relación de proporcionalidad partiendo de los litros que se consumen por cada 100 kilómetros para saber los litros consumidos en los kilómetros que se han recorrido. Comparan ambos resultados y se quedan con aquel que coincide.

Grupo 7



Apellidos del Conductor: Lordén Martín | Nombre: Pablo
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajero 6 plazas | Tipo de Combustible: gasolina
Nº días de alquiler: 1 | Día devolución del Vehículo: 13/06/2012
Kilómetros recorridos: 110Km | Combustible consumido: 6,71 l
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 61,31 €
Total a pagar por combustible consumido: 8,7901€
Coste Total : 70,1001€ ≅ 70,10€

$\frac{110\,km}{8{,}7901€} = \frac{100\,km}{x\,€}$; $x = \frac{8{,}7901€ \cdot 100\,km}{110\,km} = 7{,}991€$

Diesel : 5,9 l · 7,991 € = 7,076 €
Gasolina: 6,1

Apellidos del Conductor: Merino Mora | Nombre: Elena
Tipo de Vehículo alquilado: Pasajeros 9 plazas | Tipo de Combustible: Gasolina
Nº días alquiler: 4 | Día devolución del Vehículo: 05/06/2012
Kilómetros recorridos: 640 Km | Combustible consumido: 44,8 l
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje: 273€
Total a pagar por combustible consumido: 58,24€
Coste Total : 331,24€

Diesel: $\frac{100\,Km}{6{,}6\,l} = \frac{640\,Km}{x\,l}$; $x = \frac{6{,}6\,l \cdot 640\,Km}{100\,Km} = 42{,}24\,l$

Gasolina: $\frac{100\,Km}{7\,l} = \frac{640\,Km}{x\,l}$; $x = \frac{7\,l \cdot 640\,Km}{100\,Km} = 44{,}8\,l$

Diesel 42,24 l · 1,25 €/l = 52,8 €
Gasolina: 44,8 l · 1,3 €/l = 58,24 €

FIGURA 4.5.5.22. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.1.3*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.9. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de Situación 1*

Grupo	**Estrategia base**	**Cambio de estrategia**
Grupo 1	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.
Grupo 2	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	
Grupo 3	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	
Grupo 4	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	

Grupo 5	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	
Grupo 6	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	División del total a pagar por el combustible consumido entre el precio por litro del combustible para averiguar los litros consumidos. Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando la relación de proporcionalidad.Comparan ambos resultados y se quedan con aquel que coincide.
Grupo 7	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando la relación de proporcionalidad. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	
Grupo 8	Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	Reducción a la unidad para saber cuantos litros consume cada vehículo en un kilómetro. Multiplicación de lo que consume cada vehículo en un kilómetro por el total de kilómetros recorridos. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.10. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 3 de la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando regla de tres. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	5	62,5%
Cálculo de los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos utilizando la relación de proporcionalidad. Cálculo de los euros totales a pagar por el combustible consumido a partir de los litros consumidos y el precio por litro del día de la devolución.	1	12,5 %
Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	2	25 %

Fuente: elaboración propia

Los dos grupos que inicialmente no habían empleado una estrategia apropiada que les condujera a la resolución óptima de la misma, finalmente han conseguido establecer la relación adecuada entre las variables mediante la coordinación de los tres registros de representación puestos en juego en el desarrollo de la misma.

Cinco de los ocho grupos han utilizado directamente la regla de tres. Como en otras ocasiones, la utilización de la regla de tres no deja claro si en algunos de los grupos se está estableciendo de manera significativa la relación de dependencia entre variables, pues su uso mecánico da a lugar a un desplazamiento de los conceptos matemáticos que detrás de ella existen.

Llama especialmente la atención la segunda forma de resolución que el grupo 8 realiza y plantea como una alternativa a la plasmada en el papel, pues realizan un proceso por reducción a la unidad para saber cuantos litros consume cada vehículo en un kilómetro.

De este modo, la coordinación de los registros de la Lengua Natural, Numérico y Tabular, nos han permitido, por un lado introducir el concepto matemático de dependencia de variables y por otro que el alumno pueda entrenarse en la conversión entre ellos de acuerdo con las necesidades de comunicación o extracción de información, de tal manera que dicha coordinación ha favorecido la comprensión conceptual.

Fase 4: El vehículo de la mudanza

Descripción:

Tras haber trabajo el concepto de dependencia de variables mediante los registros Tabular, Numérico y la Lengua Natural, en esta cuarta fase introducimos uno nuevo con el fin de que el alumno efectúe la conversión y coordinación con los antes mencionados: el Registro Gráfico.

El motivo del porqué hasta este momento no se ha introducido uno de los principales registros de representación semióticos empleados en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función ha sido que se ha considerado que era necesario que el alumno adquiera ciertas destrezas previas en la búsqueda de relaciones de dependencia para así evitar ciertos errores que en algunos estudiantes se manifiestan de manera general en la lectura e interpretación de gráficas (Azcarate y Deulofeu, 1990).

En esta ocasión, y retomando todo lo trabajado en las tres fases anteriores, los alumnos tienen que identificar que tipo de vehículo ha alquilado un cliente para hacer una mudanza sabiendo que la opción escogida ha sido la que le salía más barata, proporcionando parte de la información a través del registro gráfico, de modo que el alumno se vea en la necesidad de identificar la variable dependiente y la variable independiente en un eje cartesiano, y así localizar los datos correspondientes para la resolución del problema en la conjugación con el resto de registros.

"Por último, tenemos los datos del Señor Juan Risco Meneses, que contrató los servicios de la empresa para hacer una mudanza desde una casa situada en Leganés a otra en Aranjuez en un día, pero desconocemos el tipo de vehículo que alquiló.

Sabemos que dudaba entre alquilar la furgoneta de 8 m^3, la 12 m^3 o el camión ligero de 15 m^3. Dependiendo del vehículo que alquilase, el número de viajes que tenía que hacer para llevar los muebles, y por tanto, el número de kilómetros recorridos, eran los siguientes:

- Furgoneta 8 m^3: 340 km recorridos
- Furgoneta 12 m^3: 260 km recorridos
- Camión ligero de 15 m^3: 180 km recorridos

El precio del combustible ese día era de 1,5 €/l.

¿Qué tipo de vehículo alquiló si sabemos que eligió la opción que le resultaba más barata?

Los grupos que afirméis haber hallado los datos que faltan, debéis estar en condiciones de probarlo."

A demás de la información dada en la consigna, se les proporcionan los siguientes datos:

La ficha que la empresa ha preparado para el cliente:

Apellidos del Conductor: Risco Meneses	
Nombre: Juan	
Tipo de Vehículo alquilado:	**Tipo de Combustible**: Gasolina
Nº días de alquiler: 1	**Día devolución del Vehículo**: 24/10/2012
Kilómetros recorridos:	**Combustible consumido**:
Total a pagar por el Alquiler y el Kilometraje:	
Total a pagar por combustible:	
Coste Total :	

FIGURA 4.5.5.23. *Ficha para los alumnos del conductor 7*

El alumno debe establecer todas las relaciones de dependencia entre variables que entran en juego para poder completar la ficha.

Una hoja con la información correspondiente al precio de al alquiler de los vehículos en función de los días alquilados:

TABLA 4.5.5.11. *Tabla 3 para el alumno sobre datos de alquiler de vehículos*

PRECIO ALQUILER DE VEHÍCULOS			
Tipo Vehículo	**Días de alquiler**	**Precio**	**Km incluidos**
Furgoneta 8m^3	1	69,46 €	120 Km
	2	108,75 €	230 Km
	3	163,13 €	450 Km
	4	186,84 €	600 Km
Furgoneta 12m^3	1	75,44 €	120 Km
	2	137,12 €	230 Km
	3	205,68 €	450 Km
	4	235,40 €	600 Km
Camión Ligero 15m^3	1	93,28 €	120 Km
	2	151,30 €	230 Km
	3	225,93 €	450 Km
	4	259,77 €	600 Km

Fuente: elaboración propia

Los valores numéricos, con los que el alumno tiene que trabajar, se han elegido de modo tal que el vehículo que recorre más kilómetros sea la opción más barata, evitando así la identificación directa de la opciones más caras a partir, únicamente, de si ha recorrido más o menos kilómetros el vehículo.

Una hoja en la que aparecen las gráficas con los euros a pagar en función de los kilómetros extra para cada uno de los tres vehículos:

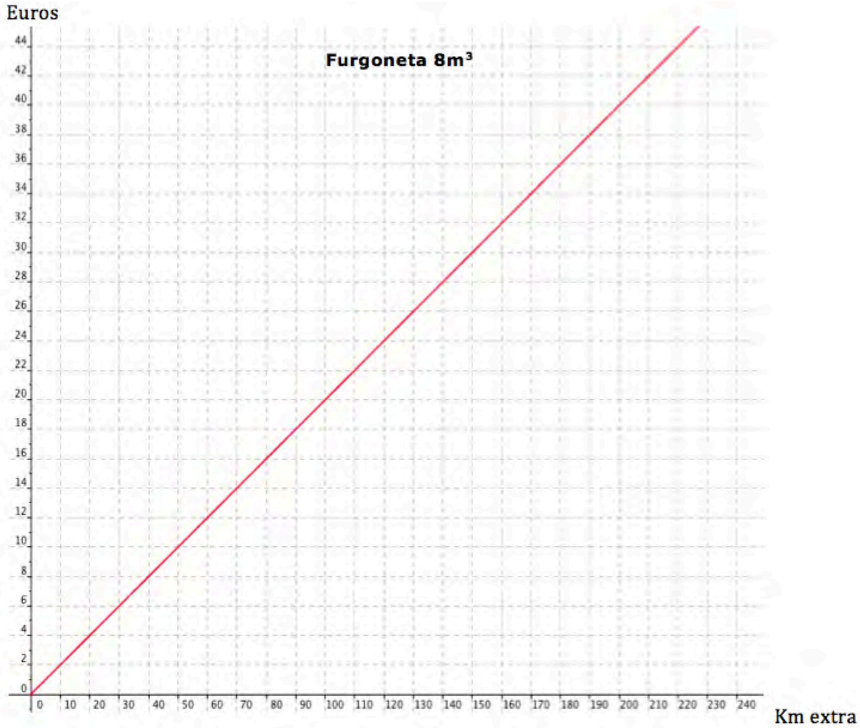


FIGURA 4.5.5.24. *Gráfica relación €/km extra de la furgoneta de 8 m^3*

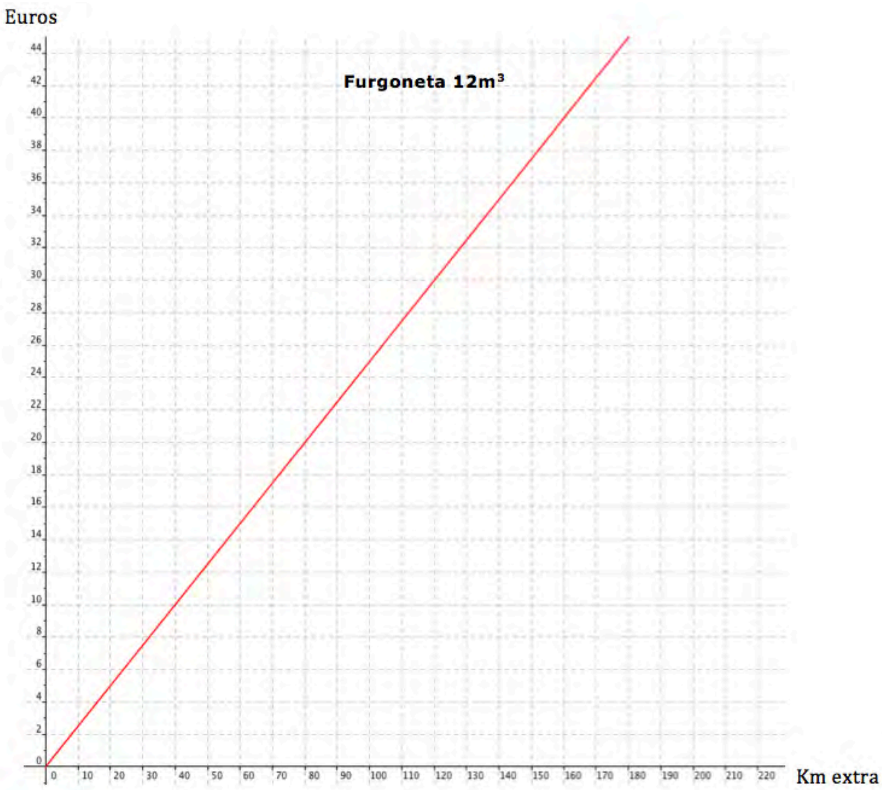


FIGURA 4.5.5.25. *Gráfica relación €/km extra de la furgoneta de 12 m^3*

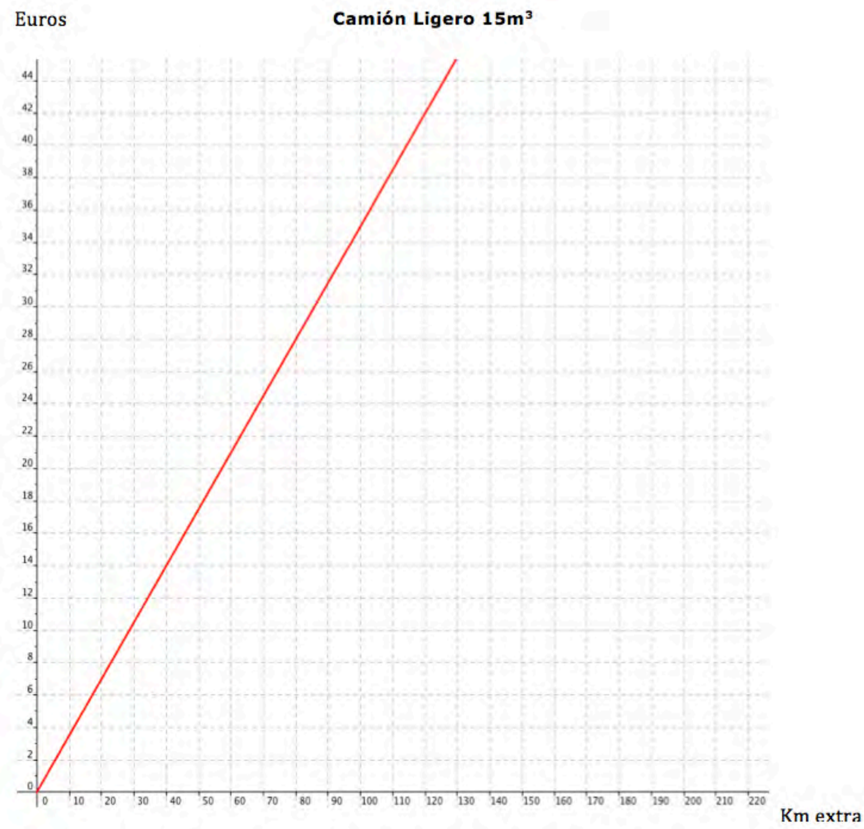


FIGURA 4.5.5.26. *Gráfica relación €/km extra del camión ligero de 15 m*^{3}

Una hoja en la que aparecen las gráficas con los litros consumidos en función de los kilómetros recorridos, para cada uno de los tres vehículos:

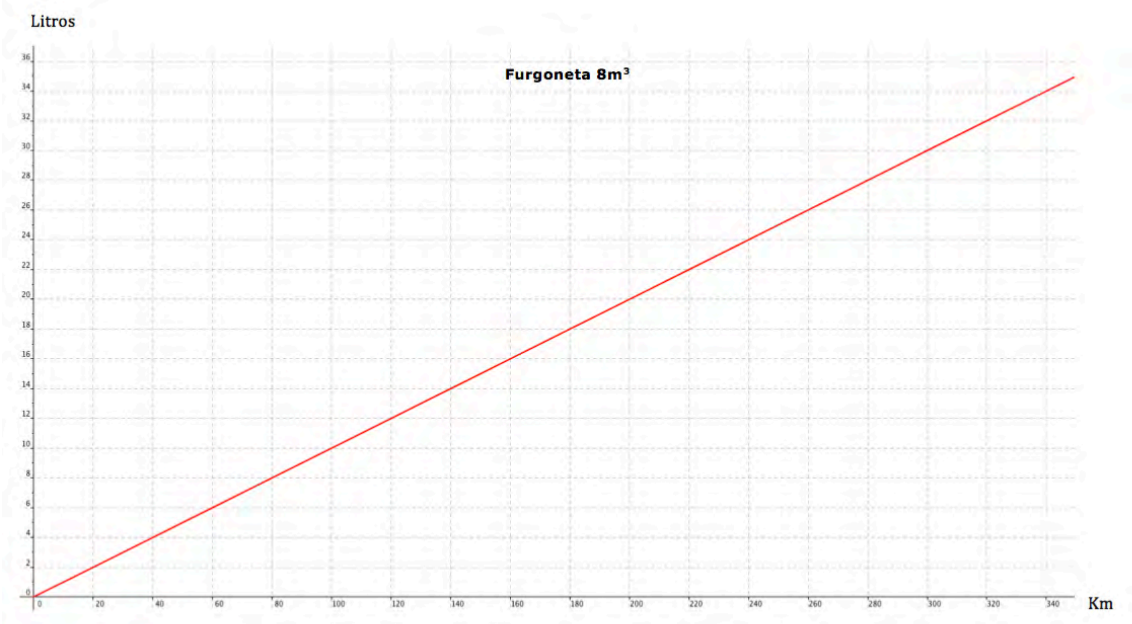


FIGURA 4.5.5.27. *Gráfica relación l/km de la furgoneta de 8 m*^{3}

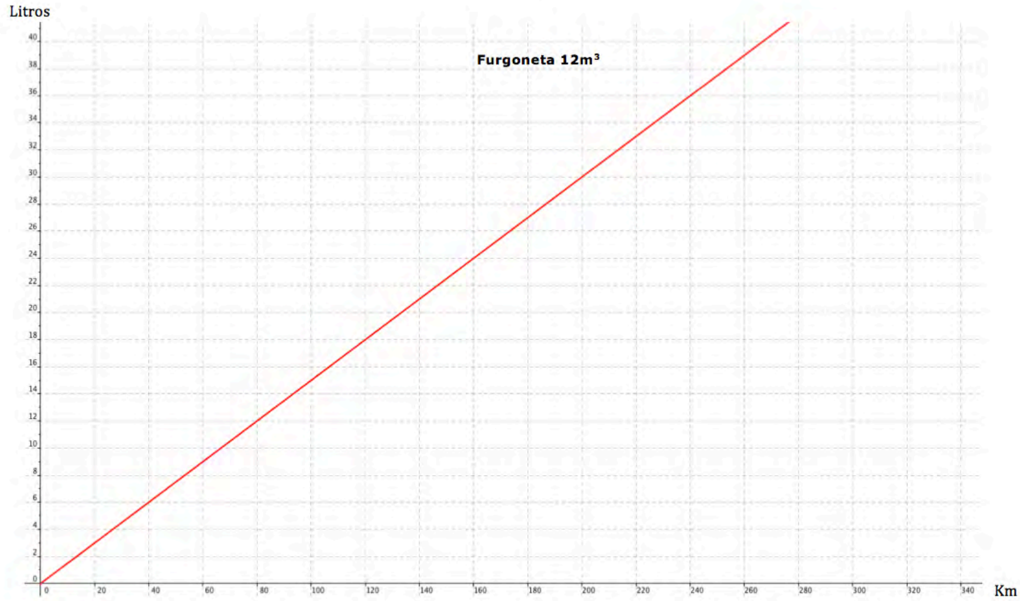


FIGURA 4.5.5.28. *Gráfica relación l/km de la furgoneta de 12 m^3*

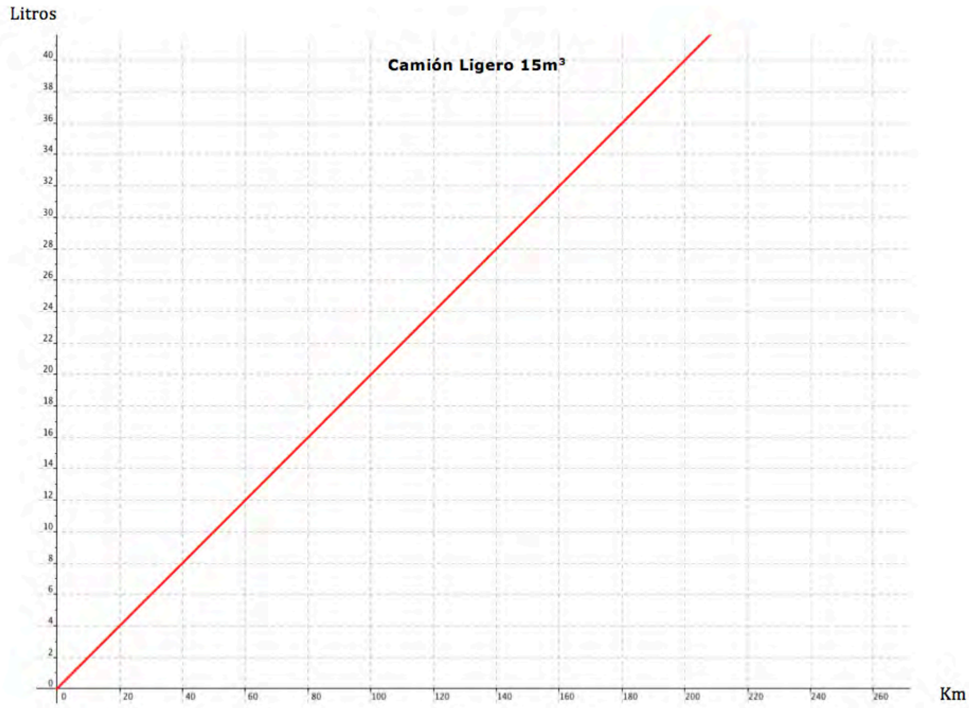


FIGURA 4.5.5.29. *Gráfica relación l/km del camión ligero de 15 m^3*

Todas las gráficas se han construido de tal manera que los alumnos puedan identificar puntos a partir de los cuales establecer adecuadamente la relación dependencia a través de su representación en el gráfico cartesiano. De este modo, trabajamos la discriminación yendo más allá de la mera lectura y reconocimiento de pares ordenados de puntos a partir de los datos de los kilómetros que recorre cada vehículo del que los alumnos disponen.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Para finalizar, tenemos el caso de Juan Risco Meneses. Si os dais cuenta, su ficha está muy vacía. Solo sabemos su nombre, el número de días que ha alquilado el vehículo, el tipo de combustible y el día de alquiler. Todo lo demás está vacío. Pero nuestros amigos saben algunos datos.*

  Saben que el señor Juan Risco Meneses, quiere hacer una mudanza en un solo día de una casa de aquí de Leganés a una casa que hay en Aranjuez. Estaba dudando entre alquilar tres tipos de vehículos: una furgoneta de tamaño medio de una capacidad de 8 m^3, una un poco más grande con una capacidad de 12 m^3 o un camión ligero de 15 m^3. En función de la capacidad, va a tener que hacer más o menos viajes entre Leganés y Aranjuez.

  Sabemos los kilómetros que tendría que hacer para hacer la mudanza en función del vehículo que alquile. Si alquila furgoneta pequeña 340 kilómetros tienes que hacer, la furgoneta grande 260 kilómetros y si alquila el camión ligero 180 kilómetros. Los tres tipos de vehículos utilizan gasolina y ese día el coste de la gasolina es 1,5 €/l.

  Con estos datos tenéis que averiguar que vehículo ha alquilado porque ellos saben que elijó la opción más barata.

  A demás tenéis esta tabla, ¿os suena? Es parecida a la del primer día. Viene el tipo de vehículo, el número de días que lo podemos alquilar y el coste en función de los días de alquiler y los kilómetros que incluye. ¿Aquí falta algún dato con respecto a la tabla del primer día?

- **Varios:** *Lo kilómetros extra.*

- **Profesor:** *Esta vez lo que tienen que pagar por cada kilómetro extra no viene dado en la tabla. Lo tienen en una gráfica, una para cada vehículo en donde aparecen los euros a pagar por cada kilómetro extra recorrido. ¿Y os falta algo más para saber cuanto va a tener que pagar en total?*

- **Noelia:** *Los litros de combustible.*

- **Profesor:** *Pues esos datos también os los dan en forma de gráfica, en donde aparecen los litros que consume en función de los kilómetros.*

  Con estos datos tenéis que averiguar que vehículo alquiló Juan Risco Meneses sabiendo que eligió la opción más barata.

Varios grupos manifiestan una gran destreza en el manejo de las gráficas e identificación de pares de puntos y promueven la coordinación con el resto de sistemas de representación que forman parte de la actividad.

No obstante, surgen dificultades en aquellas representaciones cartesianas en donde los valores de los kilómetros no se corresponden con valores enteros de euros a pagar por cada kilómetro extra o con litros de combustible que consume respectivamente:

Grupo 3

- **Sandra:** *Profesor, tenemos un problema.*
- **Profesor:** *Decidme.*
- **Noelia:** *En 220 no hay raya* (mirando la gráfica).
- **Profesor:** *¿Y en otros puntos hay raya?*
- **Noelia:** *Sí. Sandra, elige una que pase por un punto.*
- **Sandra:** *En 120 son 30. ¿Tenemos que hacer si en 120 son 30 en 220 son x?*
- **Profesor:** *¿Con eso podéis averiguar lo que ocurre en 220?*
- **Sandra:** *Sí, es una regla de tres y con eso lo averiguamos. Es 220 por 30 entre 120.*

Grupo 7

- **Colaborador 2:** *¿Qué os pasa?*
- **María:** *Que la furgoneta de 12 m^3 recorre 140 kilómetros extra y al mirar en la gráfica para saber lo que tiene que pagar, el 140 no coincide con un punto exacto.*
- **Colaborador 2:** *¿Y en otros puntos coincide?*
- **Esther:** *En otros si coincide.*
- **Colaborador 2:** *¿Y podéis hacer algo entonces?*
- **Esther:** *¿Una regla de tres?*

Debido al gran número de variables que intervienen en la resolución de esta actividad, los grupos 1, 2, 7 y 8 presentan ciertas dificultades en su identificación, organización y relación de dependencia:

Grupo 2

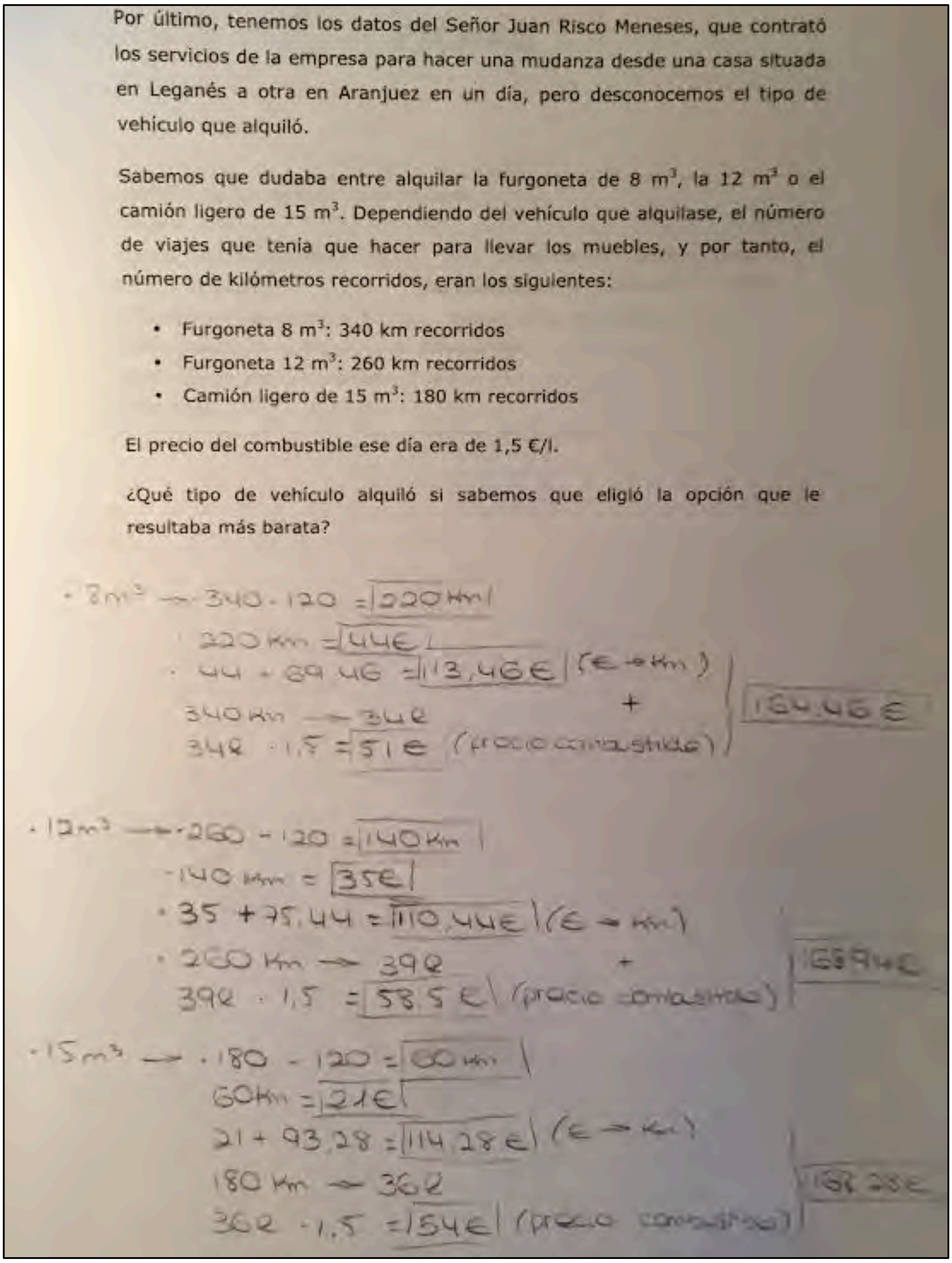
- **Profesor:** *¿Qué hacéis?*
- **Beatriz:** *Es que nos hemos equivocado con esta gráfica.*
- **Profesor:** *¿Por?*
- **Beatriz:** *Nonos hemos dado cuenta de que esto eran los litros que gastaba, pensábamos que eran euros.*
- **Profesor:** *¿Y qué tenéis que hacer?*
- **Sara:** *Multiplicar los litros que ha consumido en esos kilómetros por 1,5.*

Grupo 8

- **Jaime:** *La furgoneta de 8 m^3 ha recorrido 340 kilómetros y esto es que consume 36 litros, ¡pero no sabemos los euros!*
- **Álvaro:** *Sí, en la hoja pone que son 1,5 €/l. Tienes que multiplicar 113,46 (este es el resultado del total a pagar por el alquiler y el kilometraje) por 1,5.*
- **Jaime:** *Nooo... lo que hay que multiplicar es 36 litros por 1,5. Por ejemplo,* (mirando la gráfica) *si hubiese recorrido 80 kilómetros gastaría8 litros y habría que multiplicar 8 por 1,5. Hay que sumarle esto a lo del combustible.*

Todos los grupos salvo el 1 han sido capaces de establecer las relaciones adecuadas entre las variables y coordinar bien los registros de representación utilizados, pues salvo algún pequeño fallo dentro del tratamiento dentro del registro numérico, llegan a que la furgoneta de 8 m^3 fue la opción elegida por el cliente:

Grupo 5



Por último, tenemos los datos del Señor Juan Risco Meneses, que contrató los servicios de la empresa para hacer una mudanza desde una casa situada en Leganés a otra en Aranjuez en un día, pero desconocemos el tipo de vehículo que alquiló.

Sabemos que dudaba entre alquilar la furgoneta de 8 m³, la 12 m³ o el camión ligero de 15 m³. Dependiendo del vehículo que alquilase, el número de viajes que tenía que hacer para llevar los muebles, y por tanto, el número de kilómetros recorridos, eran los siguientes:

- Furgoneta 8 m³: 340 km recorridos
- Furgoneta 12 m³: 260 km recorridos
- Camión ligero de 15 m³: 180 km recorridos

El precio del combustible ese día era de 1,5 €/l.

¿Qué tipo de vehículo alquiló si sabemos que eligió la opción que le resultaba más barata?

· 8m³ → 340 - 120 = 220 Km
220 Km = 44€
· 44 + 69,46 = 113,46€ (€ → Km)
340 Km → 34ℓ +
34ℓ · 1,5 = 51€ (precio combustible)
184,46 €

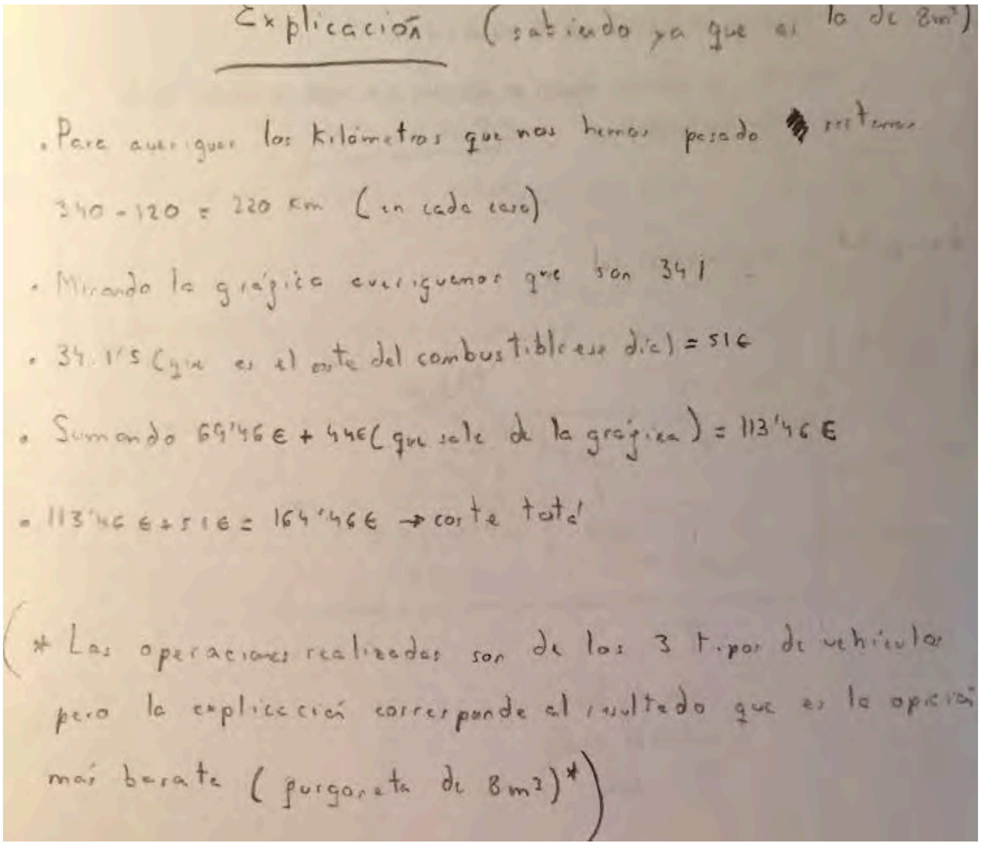
· 12m³ → 260 - 120 = 140 Km
·140 Km = 35€
· 35 + 75,44 = 110,44€ (€ → Km)
· 260 Km → 39ℓ +
39ℓ · 1,5 = 58,5 € (precio combustible)
168,94€

· 15m³ → · 180 - 120 = 60 Km
60Km = 21€
21 + 93,28 = 114,28€ (€ → Km)
180 Km → 36ℓ
36ℓ · 1,5 = 54€ (precio combustible)
168,28€

FIGURA 4.5.5.30. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.1.4*

Por otra parte, cabe destacar la conversión que han realizado los grupos 4 y 7 del registro numérico al registro de la lengua natural para explicar el procedimiento empleado en la resolución de la actividad, lo que es un indicativo del papel favorecedor que dicha situación tiene en la coordinación de registros:

Grupo 4



Explicación (sabiendo ya que es la de 8m³)

· Para averiguar los kilómetros que nos hemos pasado restamos

340 - 120 = 220 Km (en cada caso)

· Mirando la gráfica averiguamos que son 34 l

· 34 · 1'5 (que es el coste del combustible ese día) = 51€

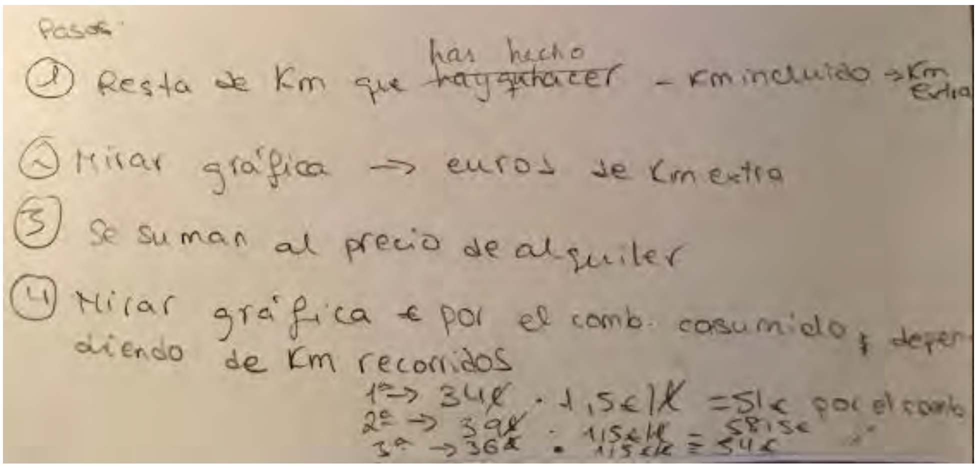
· Sumando 69'46€ + 44€ (que sale de la gráfica) = 113'46€

· 113'46€ + 51€ = 164'46€ → coste total

(* Las operaciones realizadas son de los 3 tipos de vehículo pero la explicación corresponde al resultado que es la opción más barata (furgoneta de 8m³)*)

FIGURA 4.5.5.31. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.1.4*

Grupo 7



Pasos:

1 Resta de Km que ~~hay que hacer~~ has hecho - Km incluido → Km extra

2 Mirar gráfica → euros de Km extra

3 Se suman al precio de alquiler

4 Mirar gráfica € por el comb. consumido dependiendo de Km recorridos

1º → 34 l · 1,5€/l = 51€ por el comb.

2º → 39 l · 1,5€/l = 58'5€

3º → 36 l · 1,5€/l = 54€

FIGURA 4.5.5.32. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.1.4*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.12. *Estrategias utilizas en la Fase 4 de Situación 1*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	
Grupo 2	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.
Grupo 3	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.	
Grupo 4	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.	

Grupo 5	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.	
Grupo 6	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.	
Grupo 7	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.
Grupo 8	Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.13. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 4 de la Situación 1*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Identificación, en la gráfica correspondiente, del total a pagar por los kilómetros extras. Identificación, en la gráfica correspondiente, de los litros consumidos por el vehículo en función de los kilómetros recorridos. Calculo del total a pagar por el combustible consumido.	4	50 %
Utilización de variables que no son necesarias para resolver la situación y establecer erróneamente las relaciones de dependencia.	4	50 %

Fuente: elaboración propia

Inicialmente, por tratarse de la primera actividad en la que aparece el registro de representación semiótico Gráfico, solo la mitad de los grupos demuestran ciertas habilidades para leer las gráficas proporcionadas e identificar correctamente la relación de dependencia entre las variables que en ellas se representa, a través de la coordinación que establecen con el registro de la Lengua Natural y el registro Numérico, entendiendo así la gráfica como un medio más de representar la relación.

El proceso de conversión del registro Gráfico al Numérico estableciendo la relación adecuada entre las unidades significantes del registro de representación de partida al registro de llegada, les ha permitido identificar, organizar la información de la situación planteada y efectuar los tratamientos matemáticos para dar con la solución a la misma. En aquellos grupos en los que dicha coordinación no se da de partida, se ha conseguido alcanzar a lo largo del desarrollo de la actividad, cumpliendo el objetivo fundamental de la misma que era el de favorecer la coordinación entre los registros Gráfico, Numérico y el de la Lengua Natural en relación a los conceptos de variable independiente y dependiente.

De este modo, esta primera situación formada por cuatro fases, se ha constituido como una primera toma de contacto y un escalón inicial en el proceso de coordinación y conversión entre registros que se pretende que el alumno domine. Al finalizar la misma, el profesor institucionaliza los conceptos de variables dependiente, independiente y su nomenclatura en términos de y e x respectivamente.

Situación 2: La inspección medioambiental.

Iniciación al concepto de función.

La situación se desarrolló el día 23 de abril de 2013 (*Fases 1 y 2*) y el día 25 de abril (*Fase 3*) durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

La presente situación consta de tres fases, y su objetivo principal fue la de introducir a los estudiantes del concepto de función y de dominio, así como proporcionarles las herramientas necesarias para identificar y distinguir relaciones funcionales a través de datos recogidos en tablas y gráficas.

Para ello, se persigue el alumno sea capaz de efectuar las conversiones entre los registros Tabular, Numérico, Lengua Natural y Gráfico, favoreciendo la coordinación entre las unidades significantes de cada uno de ellos en lo al concepto de función se refiere.

Fase 1: El informe del Ministerio

Descripción:

Esta primera fase se constituye como una primera toma de contacto con el concepto de función a través del registro tabular, contextualizada a través de una tabla de emisiones de NO_2 y CO que una empresa que va a ser sometida a la inspección anual medioambiental ha recogido cada dos horas a lo largo de un día.

A través de dicha tabla, la cual no presenta el formato habitual de relación de la variable dependiente e independiente, los alumnos, que son los que constituyen el equipo de inspección, deben identificar los valores erróneos tomados en las mediciones a partir de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.

A demás, el hecho de proporcionar los datos únicamente a través del registro Tabular contribuye a que los estudiantes sean capaces de alcanzar una idea inicial del concepto de función a través de la conversión entre el Registro Tabular y el Registro de la Lengua Natural:

“El Real Decreto 100/2011 desarrolla el Catálogo de Actividades Potencialmente Contaminadoras de la Atmósfera. Todas las instalaciones en las que se desarrollen alguna de las actividades incluidas en el Catálogo, quedan sometidas a una inspección reglamentaria y a la realización de controles periódicos.

Por ello, tienen que enviar una serie de informes al Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente con el fin de valorar si las instalaciones pueden seguir operativas.

Una de las empresas que tiene que someterse periódicamente a este proceso, ha hecho llegar un informe donde se recogen la cantidad de NO_2 y CO, gases potencialmente contaminantes, que se generan en la combustión del motor de la maquinaria a lo largo de un día normal de trabajo.

El NO_2, Dióxido de nitrógeno, es uno de los principales contaminantes que se forma en los procesos de combustión a altas temperaturas, como en vehículos y plantas eléctricas y por ello es un contaminante frecuente en zonas urbanas. Se trata de una gas tóxico e irritante, que afecta al sistema respiratorio.

El CO, Monóxido de Carbono, es un gas inodoro, incoloro, inflamable y altamente tóxico. Puede causar la muerte cuando se respira en niveles elevados. Se produce por la combustión deficiente de sustancias como gas, gasolina, keroseno, petróleo, madera, etc. Las chimeneas, las calderas, los calentadores de agua o calefactores y los aparatos domésticos que queman combustible, como las estufas o los calentadores, también pueden producirlo si no están funcionando bien. Los vehículos detenidos con el motor encendido también lo despiden.

El personal del Ministerio que ha recogido el informe, ha observado ciertas anomalías o posibles errores de medición, pero como desconoce el tema, os hace llegar el informe a vosotros, que formáis parte del equipo de inspección, para que las detectéis y digáis porque son valores erróneos.”

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona la tabla con emisiones de NO_2 y CO medidas cada dos horas a lo largo de un día:

TABLA 4.5.5.14. *Tabla para el alumno con la emisión de gases*

Hora	Temperatura Maquinaria	Dióxido de nitrógeno (NO_2)	Monóxido de carbono (CO)
00:00 h	407	26,72 μg/m^3	2,457 g/m^3
02:00 h	415	27,25 μg/m^3	2,409 g/m^3
04:00 h	400	26,26 μg/m^3	2,50 g/m^3
06:00 h	415	27,25 μg/m^3	2,409 g/m^3
08:00 h	420	27,53 μg/m^3	2,381 g/m^3
10:00 h	407	26,83 μg/m^3	2,457 g/m^3
12:00 h	411	26,98 μg/m^3	2,433 g/m^3
14:00 h	400	26,21 μg/m^3	2,495 g/m^3
16:00 h	406	26,65 μg/m^3	2,463 g/m^3
18:00 h	415	27,18 μg/m^3	2,402 g/m^3
20:00 h	407	26,72 μg/m^3	2,457 g/m^3
22:00 h	416	27,31 μg/m^3	2,404 g/m^3
00:00 h	400	26,26 μg/m^3	2,50 g/m^3

Fuente: elaboración propia

La tabla se ha construido de tal manera que las mediciones erróneas pertenecen a temperaturas que se dan tres veces a lo largo del día, con el fin de que el alumno pueda identificar aquel valor que no se corresponde con la temperatura del momento y, así, descubra que para un valor de la variable independiente (la temperatura) no puede existir más de un valor de la variable dependiente (cantidad de gas emitido).

A demás, para intentar bloquear que el alumno intente construir las gráficas correspondientes a cada relación funcional, se han dado valores difíciles de representar a través de dicho registro.

Por otro lado, como se ha dicho ya, el formato de la tabla difiere de las tablas habituales en las que se relacionan dos variables, pues se proporcionan los datos relativos a las emisiones de los dos tipos de gases en la misma tabla con el fin de evitar la resolución de la actividad de manera inmediata, pues de dar las tablas por separado se evidenciaría la relación de dependencia de la cantidad de emisión en función de la temperatura.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Hoy vamos a empezar con una nueva actividad…la Inspección medioambiental.*

  En España hay una Ley que se encarga de las actividades potencialmente contaminadoras de la atmosfera de manera que toda aquella instalación, fábrica o empresa, que realice alguna actividad que se encuentre dentro de esta Ley, tiene que someterse a unas inspecciones periódicas o controles rutinarios.

  Todos los años tienen que hacer un informe para mandarlo al Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medioambiente para que allí vean si está todo en orden o si tienen que revisar algo o cerrar las instalaciones porque contaminan en exceso.

  Hay una empresa que este año cuando ha enviado el informe les ha enviado esta tabla con las emisiones de NO_2 y CO. ¿Sabéis lo que son?

- **Varios:** *Dióxido de nitrógeno y monóxido de carbono.*
- **Profesor:** *Ya veo que la química la lleváis bien. Pues la tabla recoge las emisiones de estos dos gases que se generan a lo largo de un día y que se genera en la combustión que tienen lugar en los motores de las máquinas que hay en estas fábricas y que dependen de la temperatura. Estos dos gases son ambos muy contaminantes.*

  Cuando han recibido esta tabla en el Ministerio, la persona que lo ha recibido parece que ah detectado ciertas anomalías, pero como desconoce el tema, os pide a vosotros que formáis parte del equipo de inspección del Ministerio que descubráis cuales son esas anomalías y expliquéis porque creéis que son esas las anomalías como si vosotros hicierais el informe.

La primera conclusión a la que llegan varios de los grupos al analizar la tabla es que a mayor temperatura mayor es la cantidad de NO_2 que se genera, existiendo una relación de proporcionalidad directa entre ambas magnitudes; mientras que por el contrario, a mayor temperatura menos cantidad de CO se genera, existiendo en este caso una relación de proporcionalidad inversa.

Los grupos 2, 3, 5, 7 y 8 identifican de manera bastante rápida la existencia de emisiones distintas de los gases cuando la temperatura es igual:

Grupo 5

- **Silvia:** *Aquí hay un 407 y aquí hay otro 407.*
- **María:** *Y aquí hay otro y este no coincide con los otros dos. Es este el que está mal.*
- **Helena:** *¿Por qué?*
- **Silvia:** *Porque para la misma temperatura tiene que salir la misma cantidad de gas.*
- **María:** *Ahora hay que mirarlo con el otro gas.*
- **Profesor:** *¿Qué estáis haciendo? ¿Me lo contáis un poco?*
- **Lidia:** *Mirando en las temperaturas, los gases que coinciden y no. Por ejemplo en el 400 para el Co hay uno de 2,50, otro de 2,495 y otro de 2,50. Entonces el de 2,495 está mal.*
- **Profesor:** *Y eso...¿por qué lo sabéis?*
- **Lidia:** *Porque para la misma temperatura debería dar lo mismo.*

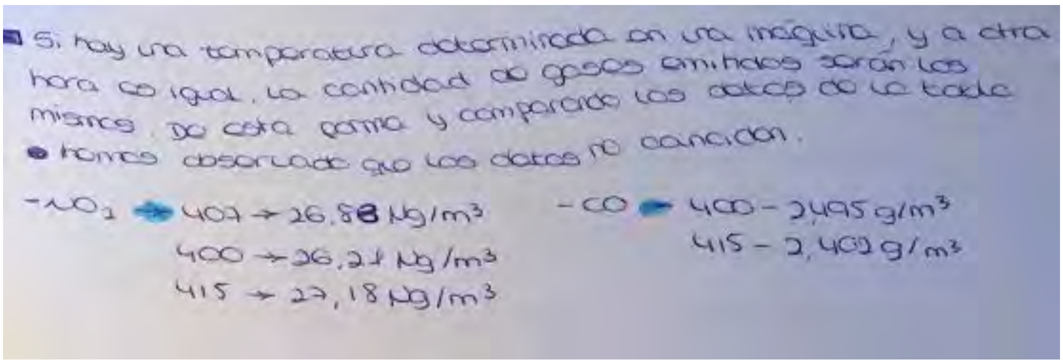


FIGURA 4.5.5.33. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.2.1*

Grupo 2

- **Beatriz:** *Profe, ya lo tenemos.*
- **Colaborador 2:** *Contádmelo a ver.*
- **Beatriz:** *Como la temperatura y el NO_2 son directamente proporcionales...*
- **María:** *Espera. Estas son las misma temperaturas y sus emisiones de NO_2 son iguales…pero esta tercera también tiene la misma temperatura pero la emisión no es igual.*
- **Colaborador 2:** *Entonces…para una misma temperatura os dan dos niveles distintos de concentración de gases. ¿Y eso no os parece razonable?*
- **Beatriz:** *No! Tienen que ser iguales porque la emisión depende de la temperatura y por eso para una temperatura tiene que salir igual.*

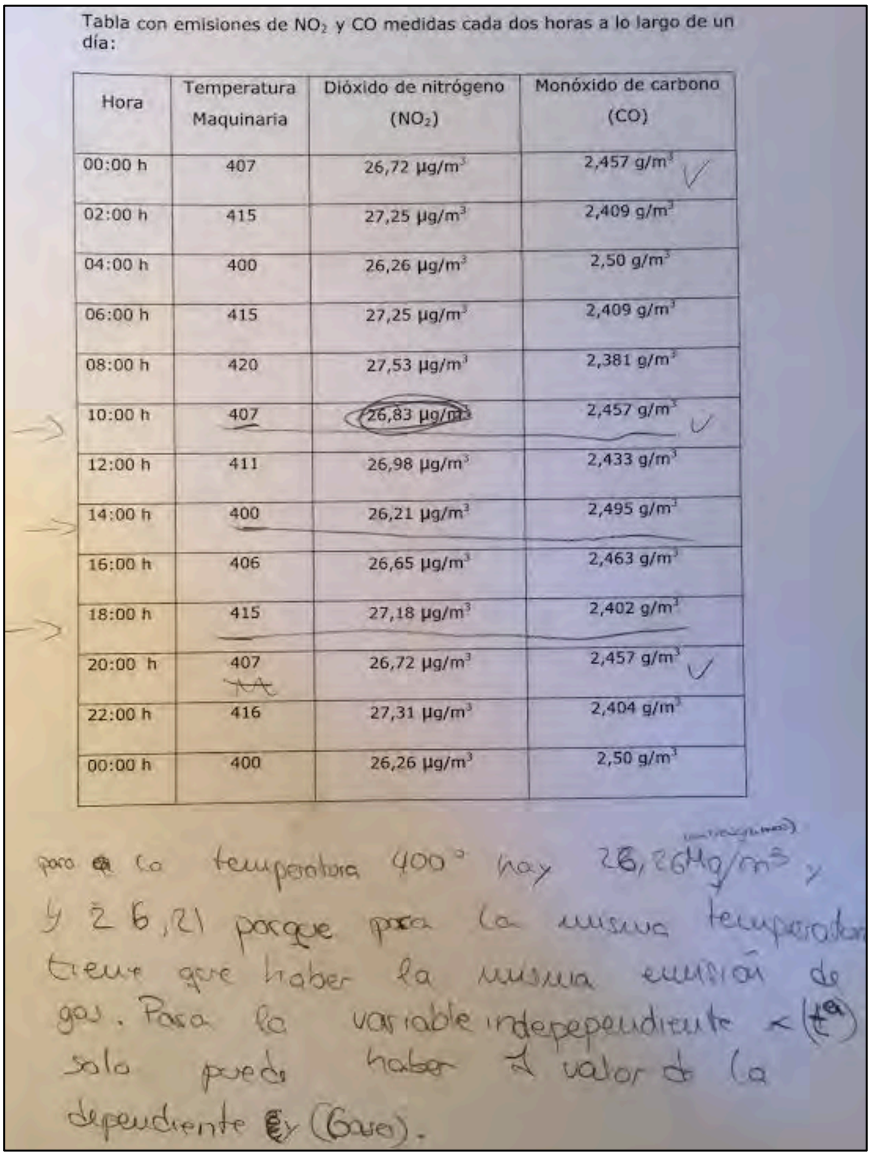


Tabla con emisiones de NO_2 y CO medidas cada dos horas a lo largo de un día:

Hora	Temperatura Maquinaria	Dióxido de nitrógeno (NO_2)	Monóxido de carbono (CO)
00:00 h	407	26,72 µg/m³	2,457 g/m³
02:00 h	415	27,25 µg/m³	2,409 g/m³
04:00 h	400	26,26 µg/m³	2,50 g/m³
06:00 h	415	27,25 µg/m³	2,409 g/m³
08:00 h	420	27,53 µg/m³	2,381 g/m³
10:00 h	407	26,83 µg/m³	2,457 g/m³
12:00 h	411	26,98 µg/m³	2,433 g/m³
14:00 h	400	26,21 µg/m³	2,495 g/m³
16:00 h	406	26,65 µg/m³	2,463 g/m³
18:00 h	415	27,18 µg/m³	2,402 g/m³
20:00 h	407	26,72 µg/m³	2,457 g/m³
22:00 h	416	27,31 µg/m³	2,404 g/m³
00:00 h	400	26,26 µg/m³	2,50 g/m³

para la temperatura 400° hay 26,26µg/m³ y
y 26,21 porque para la misma temperatura
tiene que haber la misma emisión de
gas. Para la variable indepependiente x (tª)
solo puede haber 1 valor de la
dependiente y (Gases).

FIGURA 4.5.5.34. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.2.1*

Grupo 3

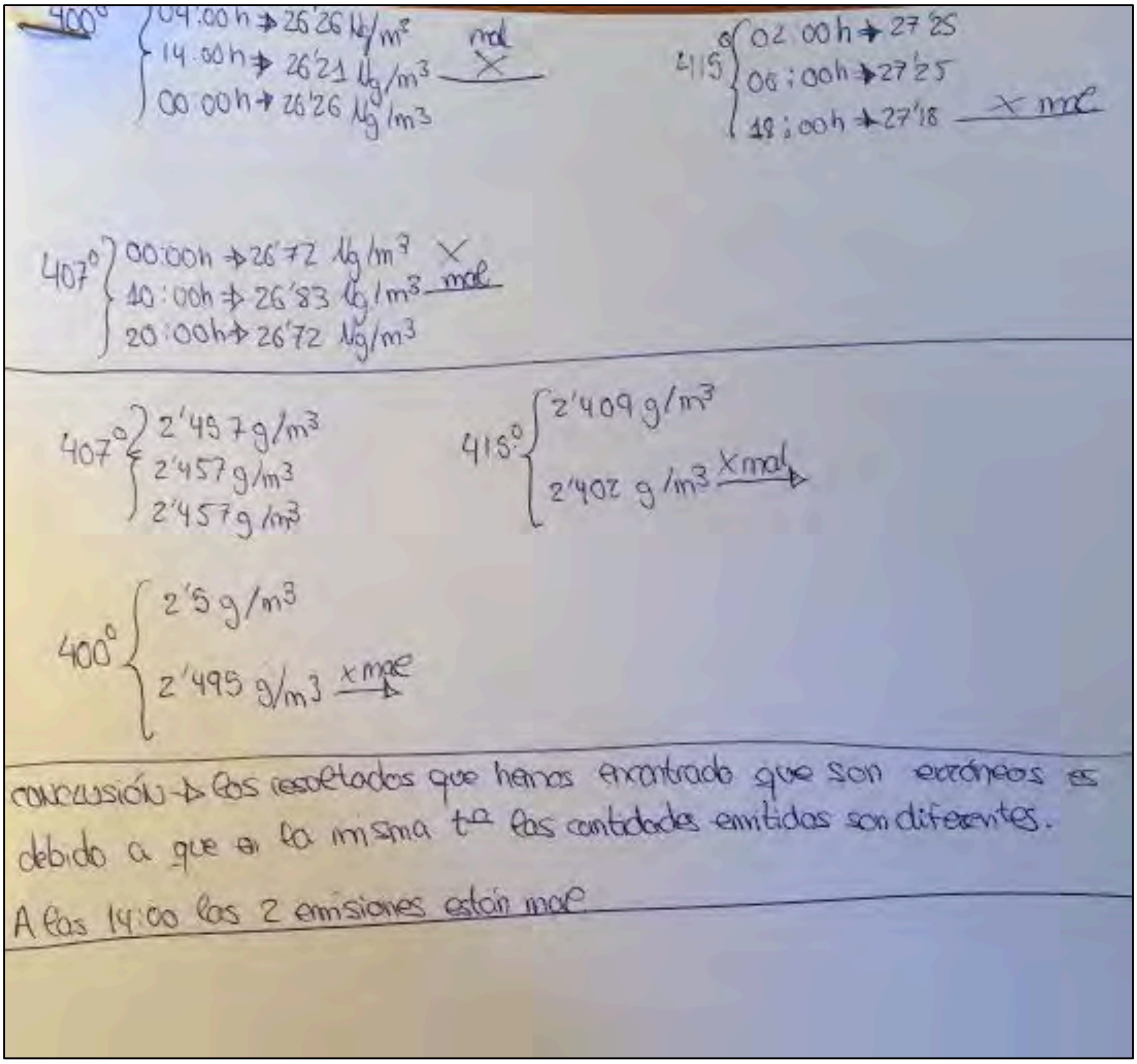


FIGURA 4.5.5.35. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.2.1*

Cabe destacar el trabajo realizado por el grupo 7, pues una vez que han identificado aquellos valores anómalos, justificando razonadamente que a la misma temperatura hay emisiones de gases distintas, comienzan a comprobar si el resto de valores proporcionados en la tabla son correctos mediante el empleo de la regla de tres.

Para ellos, parten de los pares de valores que ya han detectado como correctos, y cotejan si los resultados que obtienen coinciden con los dados en la tabla:

Grupo 7

- **Profesor:** *¿Me contáis un poco qué estáis haciendo?*
- **Lucía:** *Primero, para saber cuales están mal, hemos ido comparando unas con otras y por ejemplo en esta de 415 estas dos son iguales y está tercer no, pues la que no es igual es la que está mal.*
- **Profesor:** *Perfecto. ¿Y esos cálculos que estáis haciendo?*
- **Lucía:** *Pues como no todas las temperaturas están tres veces, estamos calculando las reglas de tres a partir de las que sabemos que están bien para ver si coincide las demás con la tabla.*

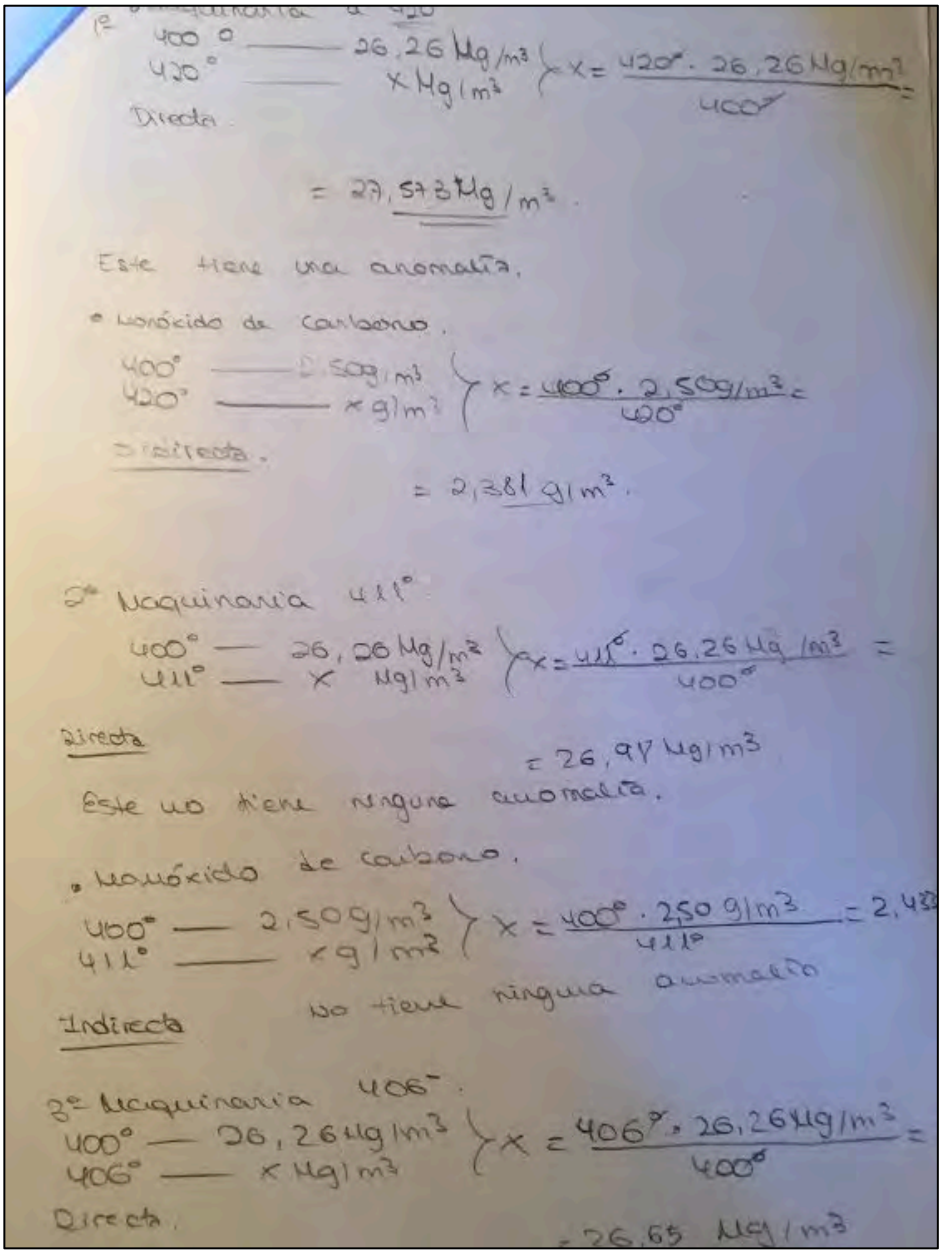
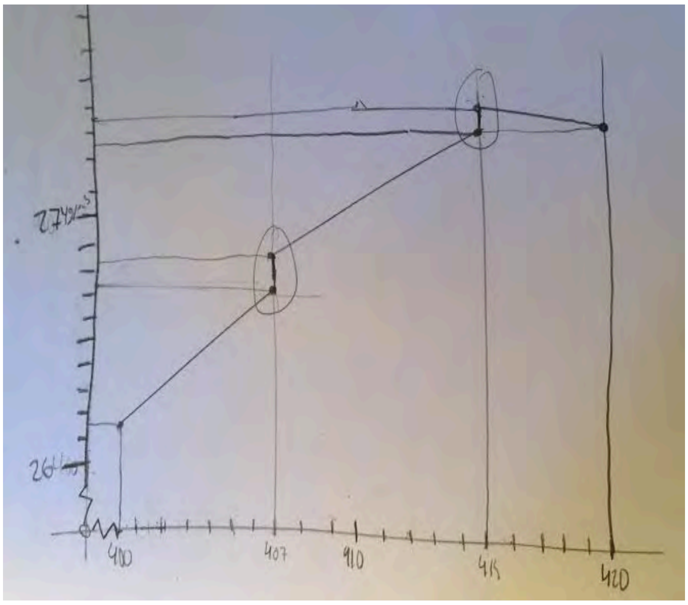


FIGURA 4.5.5.36. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.2.1*

El grupo 6 ha sido el único que se ha planteado resolver el problema a través de la construcción de las gráficas correspondientes a cada relación funcional, no siendo conscientes de la complejidad que ello conllevaba dada la naturaleza de los datos:

Grupo 6

- **Colaborador 3:** *Chicos, ¿qué estáis haciendo?*
- **Sergio:** *Una gráfica. Bueno, dos gráficas para ver si hay algo raro.*
- **Colaborador 3:** *¿Algo raro?*
- **Sergio:** *Si, con la recta que tiene que salir. Y luego ya veremos.*



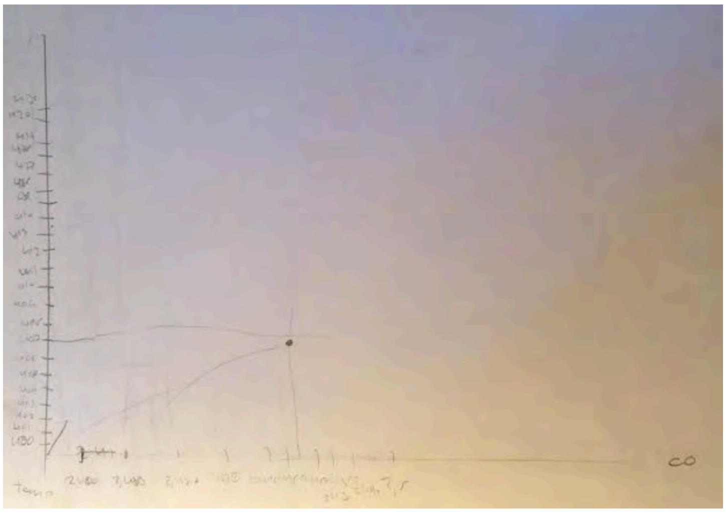


FIGURA 4.5.5.37. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.2.1*

Por su parte, el grupo 4 busca la razón de proporcionalidad entre la temperatura y el NO_2 por un lado y de la temperatura y el CO por otro. Dicho grupo ha realizado una conversión del registro Tabular al registro numérico para encontrar la solución al problema por lo que el trabajo previo con distintos sistemas de representación da lugar a que cada alumno pueda utilizar libremente aquellas representaciones que parezcan más accesibles y que le pueden ayudar a comprender cada etapa del proceso de resolución.

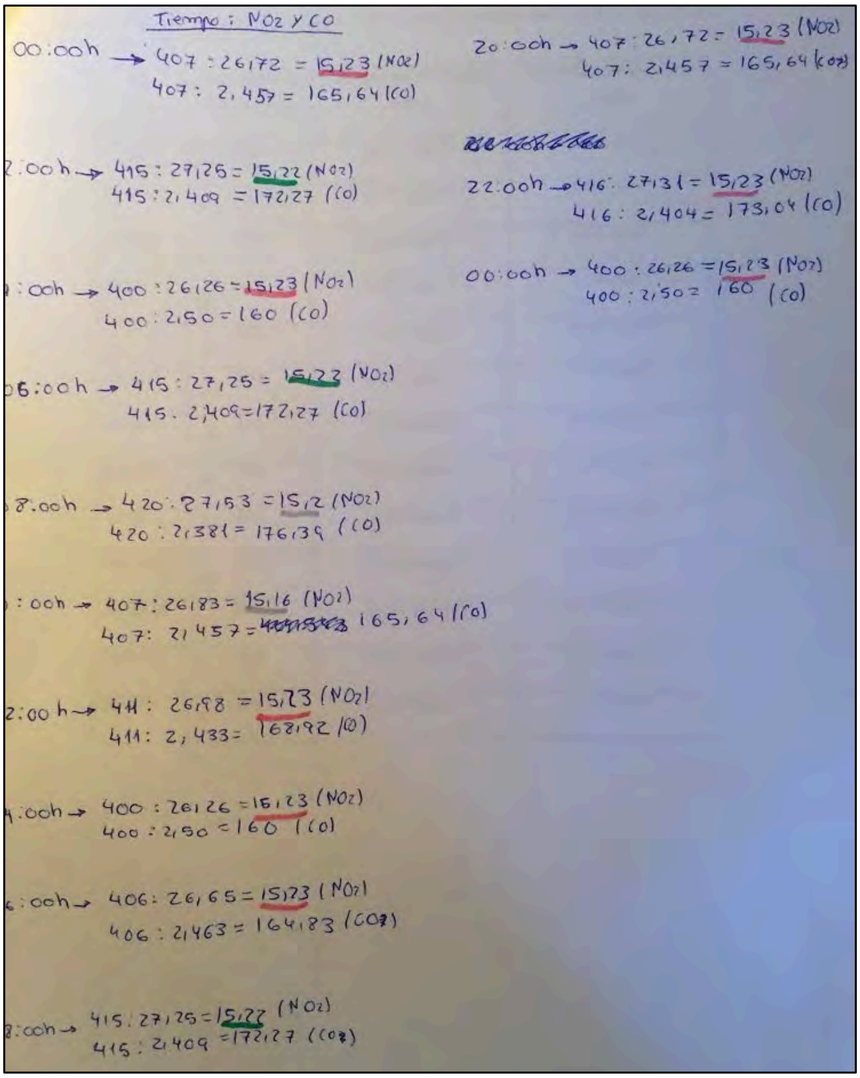


FIGURA 4.5.5.38. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.2.1*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.15. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 2*

Grupo	**Estrategia base**	**Cambio de estrategia**
Grupo 1	Dar el resultado buscando la relación entre las emisiones de los dos tipos de gases.	Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.
Grupo 2	Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.	
Grupo 3	Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.	
Grupo 4	Localización de los valores erróneos de las mediciones a través del cálculo de la razón de proporcionalidad.	

Grupo 5	Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.
Grupo 6	Construcción de las gráficas correspondientes a cada una de las relaciones funcionales recogidas en la tabla.
Grupo 7	Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.
Grupo 8	Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.16. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Identificación, a través del análisis de la tabla, de los valores erróneos de la relación entre la variable *temperatura* y la variable *emisión*, estableciendo que no puede haber dos valores distintos de emisiones del mismo tipo de gas para una misma temperatura.	5	62,5%
Construcción de las gráficas correspondientes a cada una de las relaciones funcionales recogidas en la tabla.	1	12,5 %
Localización de los valores erróneos de las mediciones a través del cálculo de la razón de proporcionalidad.	1	12,5 %
Dar el resultado buscando la relación entre las emisiones de los dos tipos de gases.	1	12,5 %

Fuente: elaboración propia

Cinco de los ocho grupos han elegido como estrategia base la estrategia óptima. De esta manera se ha conseguido favorecer la conversión entre el Registro Tabular y el Registro de la Lengua Natural en los alumnos y que alcancen la idea inicial del concepto de función sin necesidad de que intervenga el registro gráfico que es lo que se acostumbra a hacer en libros de texto y, por ende, en el desarrollo habitual de clase cuando se aborda dicho contenido.

Solo uno de los tres grupos que no han partido de la estrategia óptima, el grupo 1, ha establecido la relación funcional entre la temperatura y la emisión de cada gas, concluyendo, a través de la tabla, que para una misma temperatura no puede haber valores distintos de gas emitido. Los grupos 4 y 6 han recurrido a la conversión del registro tabular a los registros Numérico y Gráfico respectivamente, lo que es un claro ejemplo de cómo el adquirir la destreza de la coordinación entre registros satisface las necesidades de aprendizaje y la resolución de problemas de manera particular. Lo que importa no es encontrar la representación adecuada en muchos casos, sino averiguar las diversas y adecuadas representaciones que podemos emplear para coordinarlas adecuadamente, teniendo en cuenta sus virtudes y sus limitaciones.

Fase 2: Las emisiones de CO_2

Descripción:

Con el objetivo de afianzar el concepto de función trabajado en la primera fase a través de la coordinación de los registros Tabular, Numérico y de la Lengua natural, en esta segunda fase se pretende que el alumno relacione dicho concepto con su representación gráfica cartesiana mediante la identificación de gráficas que no representan funciones, obligando, así, a tener que realizar la conversión entre dicho registro, el Registro Numérico y el Registro de la Lengua natural.

Para ello, los alumnos disponen de la representación gráfica de las emisiones de CO_2 que las chimeneas de 6 empresas emiten a lo largo de un día de trabajo, por lo que deben establecer que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea:

"Siguiendo con la inspección, seis empresas nos han hecho llegar los siguientes gráficos que representan las emisiones de CO_2 que arrojan a la atmosfera a lo largo de un día normal de trabajo a través de su chimenea principal.

El administrativo tiene motivos para pensar que algunas empresas parece que pretenden engañarnos, y nuevamente os vuelve a entregar los informes para que las identifiquéis, justificando donde está el engaño."

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona las seis gráficas correspondientes a las emisiones de las 6 empresas:

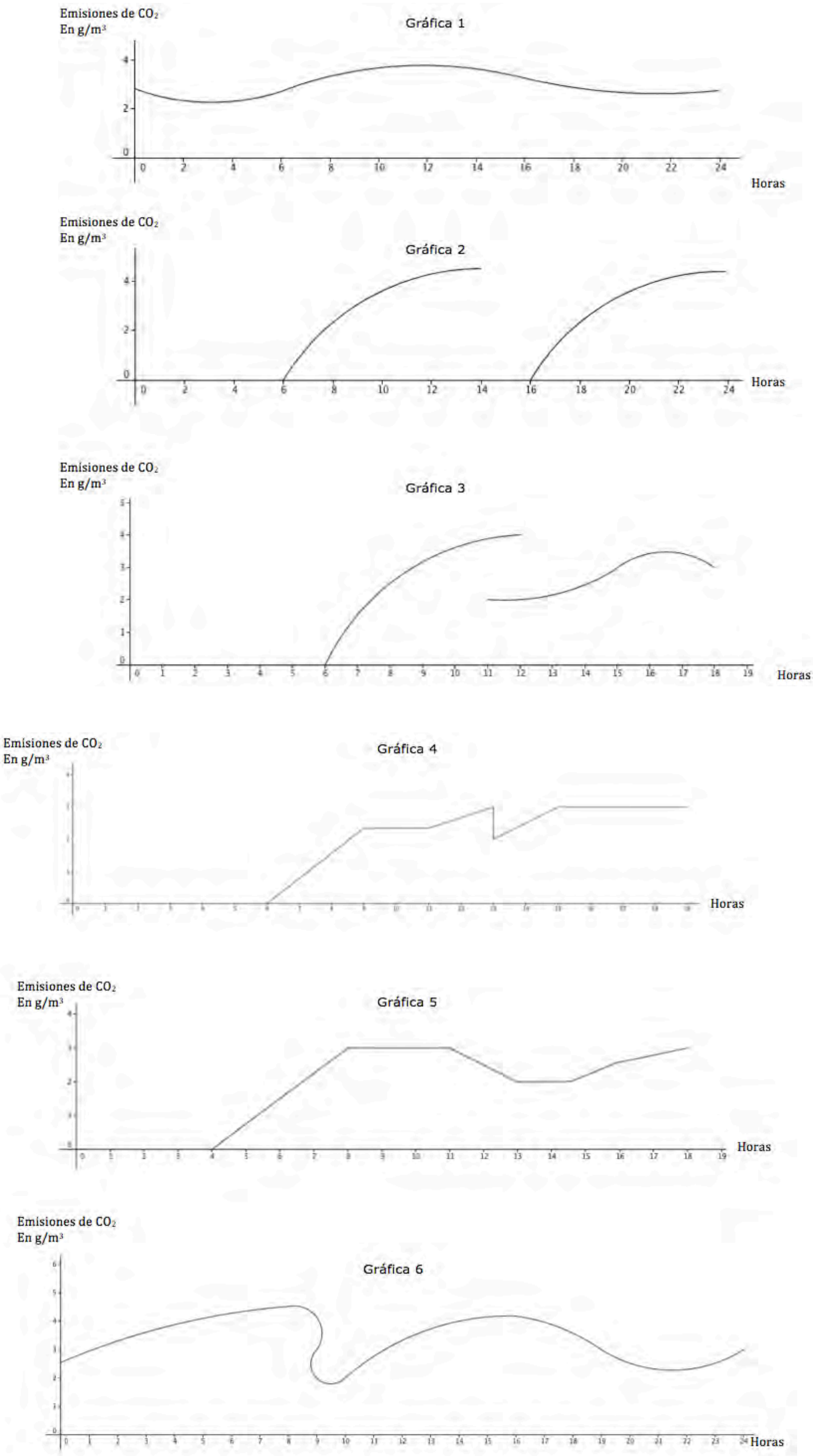


Figura 4.5.5.39. *Gráficas de emisión de gas de 6 fábricas*

Las gráficas que no representan una función, que son la 3 la 4 y la 6, se han construido de tal manera que el alumno no identifique de manera inmediata la correspondencia de más de un valor de la variable dependiente para un mismo valor de la variable independiente.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Han llegado más informes al Ministerio. Esta vez traen cantidades de CO_2.*

  Hay 6 empresas y cada una de las 6 empresas ha enviado una gráfica.

  La persona del Ministerio que ha recibido las gráficas se ha dado cuenta de que algunas no son correctas y que parece que las empresas nos quieren engañar para trucar las emisiones de CO_2 que emiten a la atmosfera. Como desconoce el tema, os vuelve a pedir a los equipos de inspección que intentéis averiguar cuales de esas empresas parece que nos quieren engañar para pasar esa inspección.

Varios grupos, al recibir la hoja con las gráficas de las emisiones, intentan buscar una relación entre unas y otras. Debido a este hecho, el profesor realiza la aclaración pertinente:

- **Profesor:** *No tenéis que relacionar unas gráficas con otras. La gráfica 1 es de la empresa 1, la gráfica 2 es de la empresa 2 y así con todas. Son independientes. En cada una de esas gráficas tenéis que observar si hay algo raro. Si en alguna no veis nada, pues perfecto, esa empresa no nos ha engañado. Si en otra si veis que hay algo raro, es posible que nos quieran engañar.*

Tras dicha aclaración, surge el segundo de los problemas, pues los grupos 1, 4, 6 y 8 no comprenden porque las gráficas están definidas a trozos y presentan discontinuidades, no concluyendo que en ocasiones y en determinadas fabricas no se trabaja de forma continuada y manifestando que dichas empresas son las que nos quieren engañar:

Grupo 6

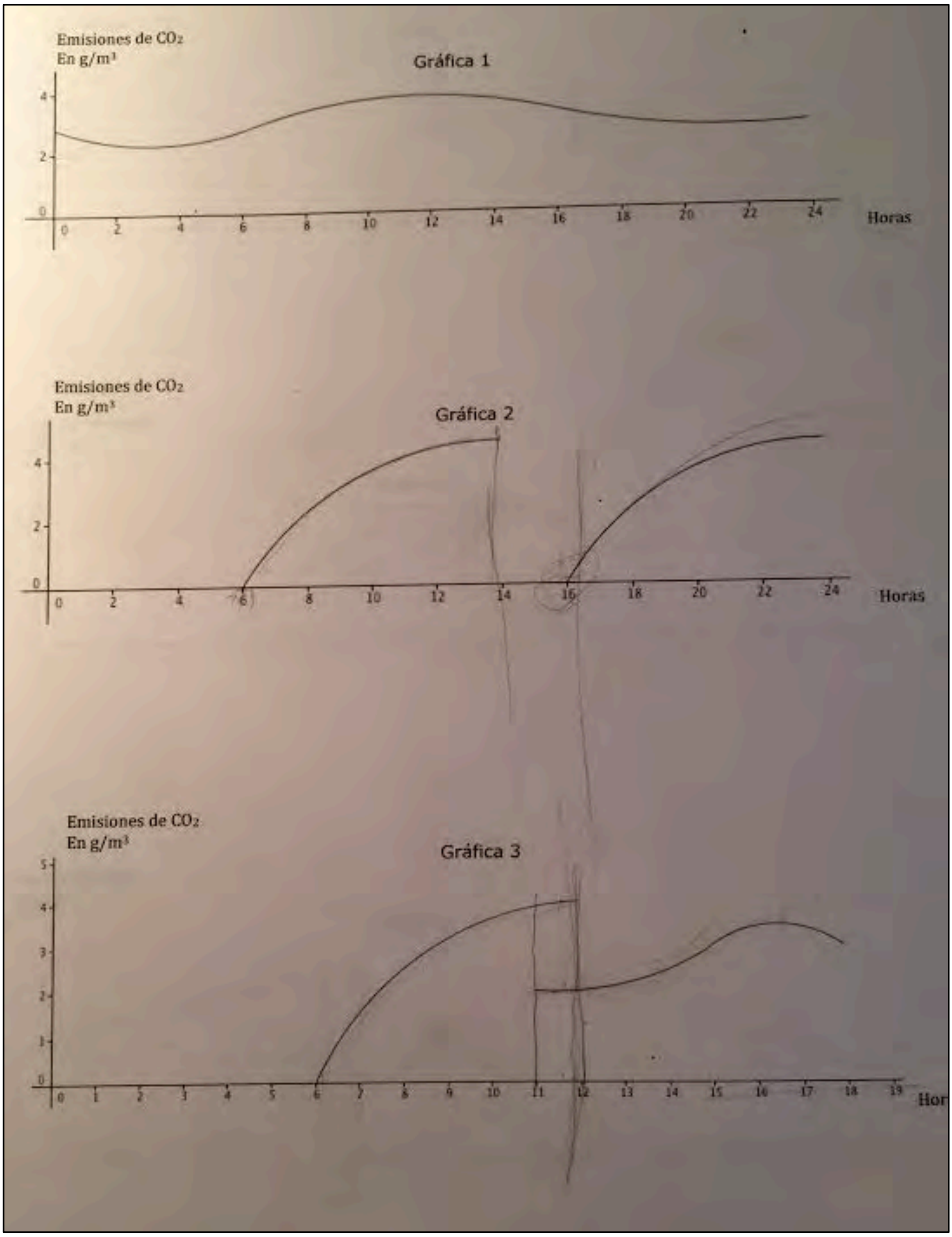


FIGURA 4.5.5.40. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.2.2*

Grupo 8

- **Jaime:** *La segunda gráfica está mal.*
- **Colaborador 3:** *¿Por?*
- **Jaime:** *La línea se corta.*
- **Colaborador 3:** *Vamos a analizar lo que ocurre. ¿Cuál es la variable independiente y cual es la variable dependiente?*
- **David:** *La independiente el tiempo y la dependiente el gas.*
- **Colaborador 3:** *¿Y cuándo empieza a salir gas?*
- **Jaime:** *a las 6.*
- **Colaborador 3:** *¿Y por qué creéis que antes no?*
- **Álvaro:** *Porque estará apagada la máquina.*
- **Colaborador 3:** *Y entonces… ¿por qué creéis que ahí se corta la curva de misión y vuelve a empezar?*
- **Jaime:** *Ahhh, porque la maquina para.*
- **Colaborador 3:** *Entonces, ¿creéis que eso es un error y que nos quieren engañar?.*
- **Jaime:** *No.*
- **Colaborador 3:** *¿Qué ocurre con la tercera?*
- **Jaime:** *Empieza a emitir a las 6 y luego para.*
- **Colaborador 3:** *Es decir que pasa como en la segunda, ¿no?.*
- **Álvaro:** *Si, pero aquí hay dos emisiones a la misma hora y eso no puede ser.*

Es digno de mención el caso del grupo 4, que presenta ciertas dificultades en la interpretación de algunas de las gráficas, manifestando que algunas de la funciones construidas se encuentran “flotando” debido a un percepción numérica selectiva que no ha permitido leer la representación gráfica y realizar la conversión al registro numérico adecuadamente por la falta de congruencia entre las unidades significantes de ambos sistemas semióticos:

Grupo 4

- **Xana:** *Hay que poner que la gráfica 2 y la gráfica 3 están mal.*
- **Mireya:** *Sí, por que no pueden haber dos rectas en una gráfica.*
- **Ainhoa:** *A demás en la 3 esta flotando la segunda y eso no puede ser. Siempre tienen que salir de un punto y esta está flotando literalmente.*
- **Colaborador 4:** *Contadme un poquillo lo que estáis haciendo.*
- **Mireya:** *Pues a ver… esta está mal porque no puede haber dos rectas distintas* (señalando la gráfica 2). En esta pasa igual y además no puede no partir de ningún punto, tiene que partir de aquí(señalando el eje de abscisas) *o de aquí* (señalando el origen)
- **Colaborador 4:** *¿Cómo que tiene que partir? No lo entiendo.*
- **Mireya:** *Pues que no puede estar flotando.*
- **Colaborador 4:** *¿Y por qué no puede estar flotando?*
- **Mireya:** *Porque al estar flotando no tiene ninguna hora ni ningún valor de emisión del gas.*
- **Colaborador 4:** *Tampoco entiendo porque si hay dos está mal.*
- **Mireya:** *Porque es solo una gráfica. Tiene que ser todo continuo.*
- **Colaborador 4:** *¿Y no podría ser que a las 14:00 hayan hecho un parón para comer?*
- **Ainhoa:** *Sí.*
- **Mireya:** *Ya, pero entonces tendría que bajar.*
- **Colaborador 4:** *Pero...¿eso no significaría que estando apagada seguiría emitiendo?*
- **Xana:** *Vale entonces la gráfica 2 está bien. Pero aquí, en la tres, mira lo que pasa. Hay dos (marcando que hay dos emisiones de gases a la misma hora)*
- **Colaborador 4:** *A ver a ver, explica eso de que hay dos.*
- **Xana:** *Pues que a las 11 hay emisión de 4 y también de 2.*
- **Colaborador 4:** *Esa es la clave.*

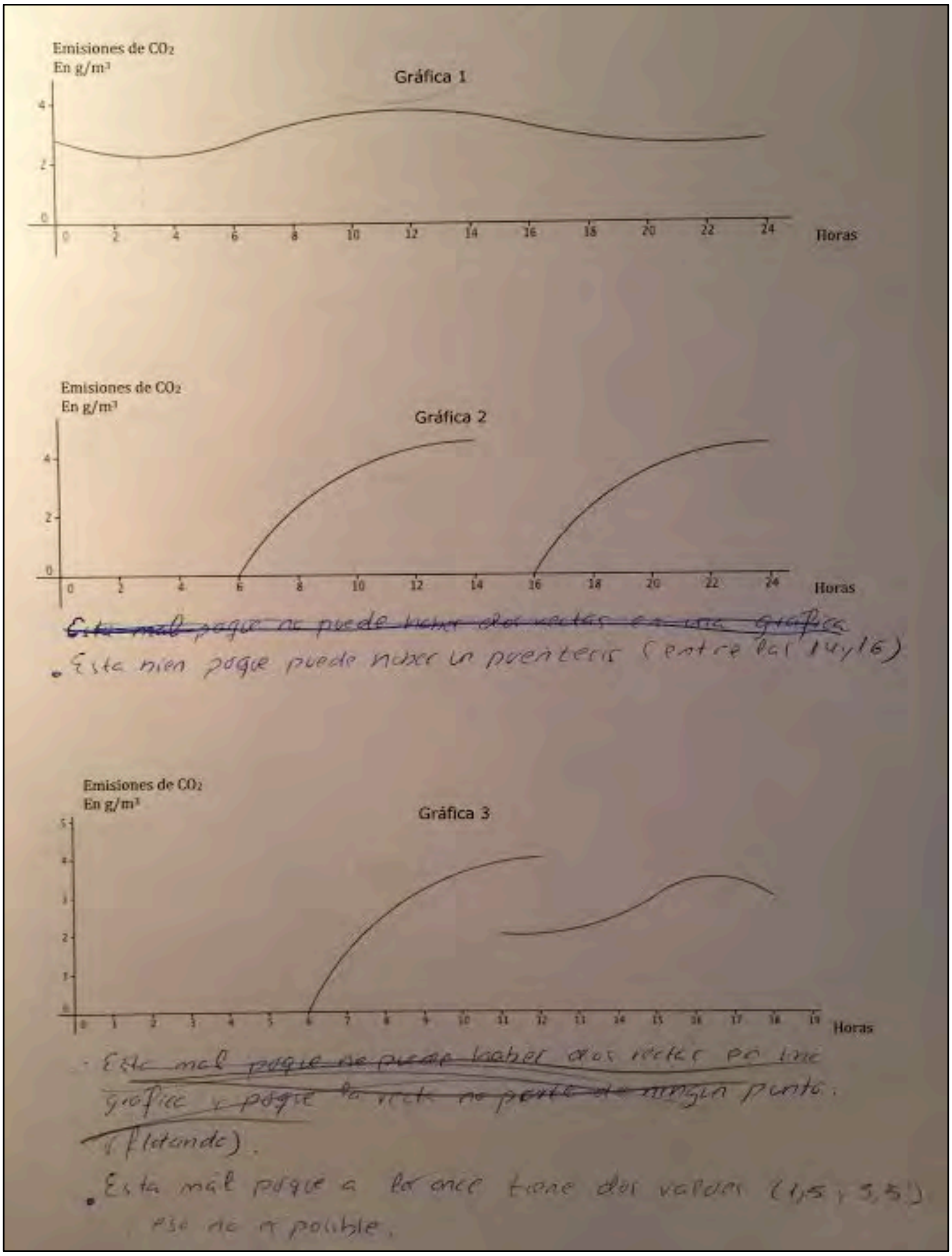


FIGURA 4.5.5.41. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.2.2*

El resto de grupos, tras la aclaración hecha por el profesor en referencia a que cada gráfica pertenecía a una empresa y eran independientes unas de otras, han localizado aquellas gráficas en dónde para una misma hora hay dos emisiones distintas de gas, realizando la justificación a partir de lo ya trabajado en la fase anterior:

Grupo 3

- **Colaborador 3:** *¿Me contáis que habéis visto?*

- **Noelia:** *En la gráfica 1 cada un hora tiene una cantidad de emisión y en la 2 también. Pero en la 3 coincide a las 11:00 el 4 con el 2. Entonces no puede haber dos números diferentes de emisión y por eso creemos que está mal.*

- **Sandra:** *y esto ocurre también con la gráfica 4 y la gráfica 6.*

Grupo 2

- **Colaborador 3:** *¿Me contáis que habéis visto?*

- **Beatriz:** *Pues a ver, están mal la 3, la 4 y la 6. Porque para un valor de x hay dos valores de y. No puede haber dos porque entonces no sería función.*

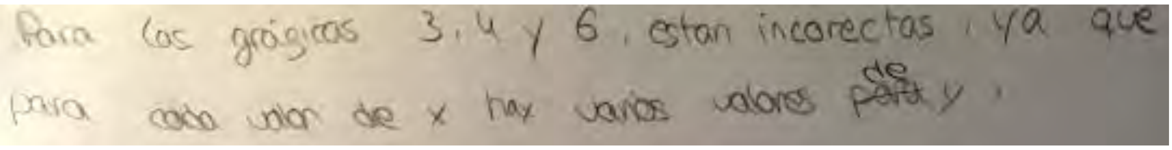

Para los gragicas 3, 4 y 6, estan incorectas, ya que para cada valor de x hay varios valores ~~para~~ de y.

FIGURA 4.5.5.42. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.2.2*

Grupo 7

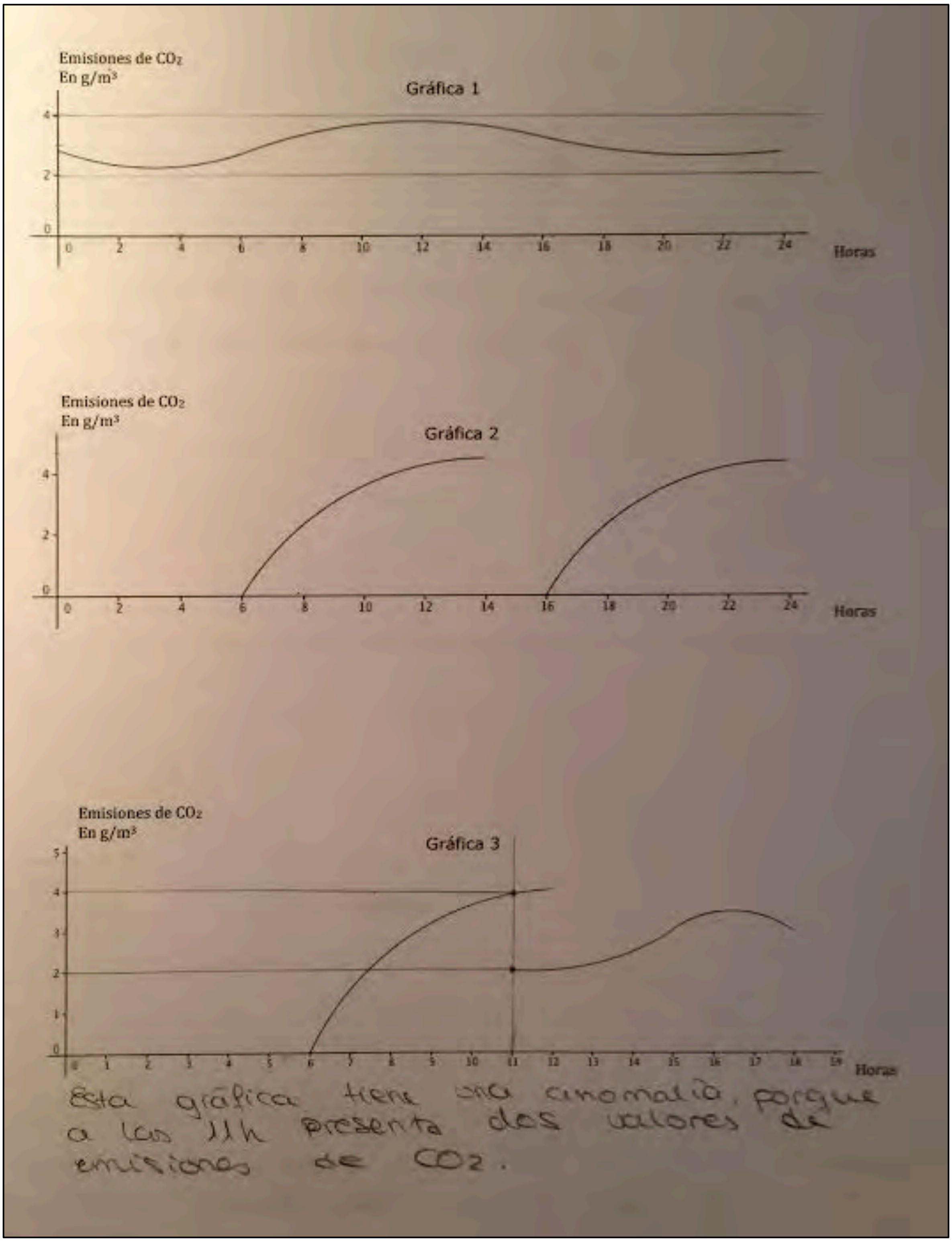


FIGURA 4.5.5.43. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.2.2*

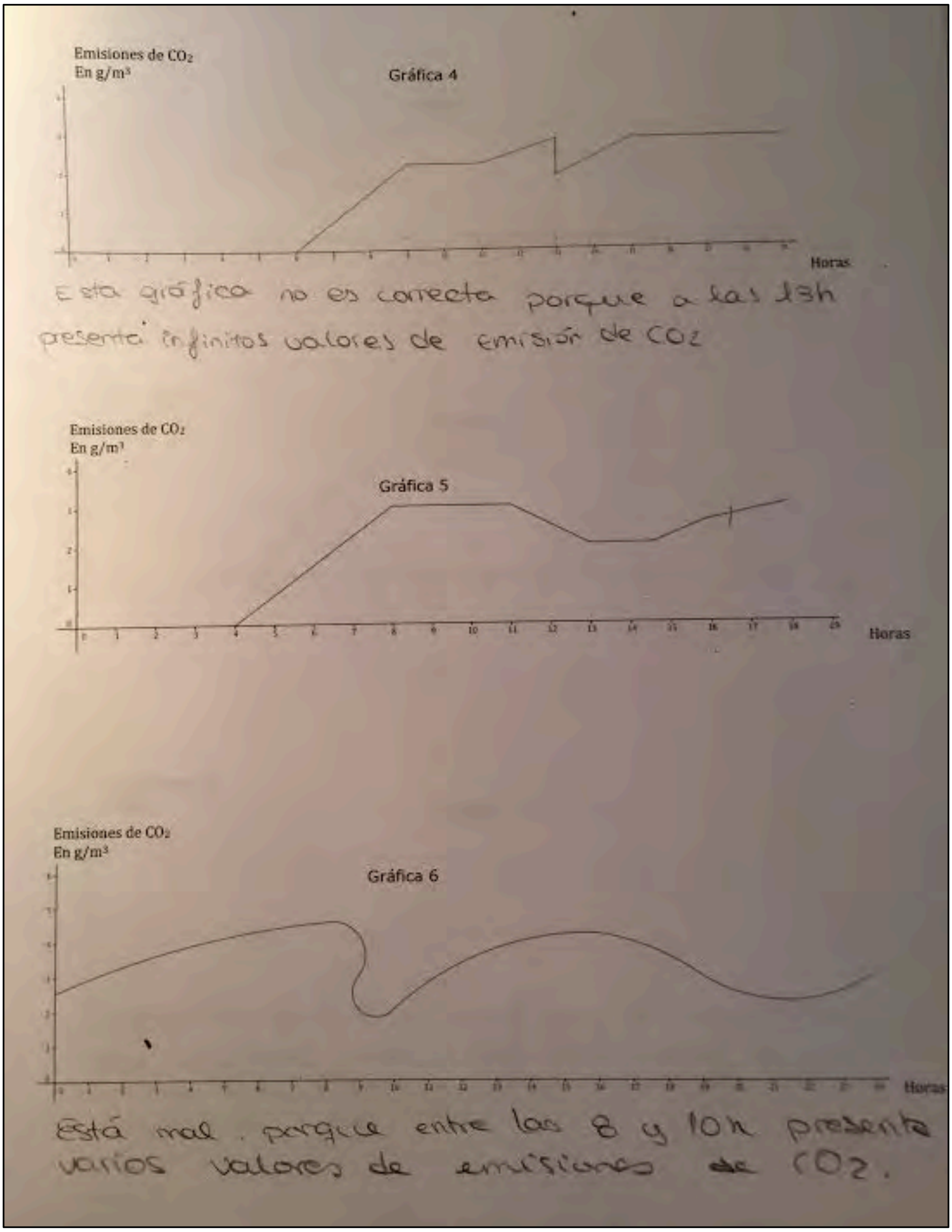


FIGURA 4.5.5.44. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.2.1*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.17. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de Situación 2*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Establecimiento de relaciones entre unas gráficas y otras, no considerándolas cómo independientes. Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.	
Grupo 2	Establecimiento de relaciones entre unas gráficas y otras, no considerándolas cómo independientes.	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.
Grupo 3	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.	
Grupo 4	Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.

Grupo 5	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.	
Grupo 6	Establecimiento de relaciones entre unas gráficas y otras, no considerándolas cómo independientes. Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.
Grupo 7	Establecimiento de relaciones entre unas gráficas y otras, no considerándolas cómo independientes.	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.
Grupo 8	Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.	Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.18. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Identificación de las gráficas que no representan funciones estableciendo que no puede haber más de un valor de emisiones de CO_2 a una misma hora del día a través de la misma chimenea.	2	25 %
Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.	2	25 %
Establecimiento de relaciones entre unas gráficas y otras, no considerándolas cómo independientes.	2	25 %
Establecimiento de relaciones entre unas gráficas y otras, no considerándolas cómo independientes. Dar el resultado basándose en otras características de la funciones, como su curvatura, discontinuidad, variación, etc.	2	25 %

Fuente: elaboración propia

Todos los grupos salvo uno han conseguido, finalmente, poner en funcionamiento la articulación necesaria entre los registros semióticos puestos en juego en esta fase de la situación, para a su vez afianzar el concepto de función partiendo de una representación gráfica cartesiana.

Las dificultades que han mostrando inicialmente algunos alumnos se encuentran estrechamente relacionadas con las deficiencias que los mismos poseen en lo que a interpretación, coordinación de representaciones y capacidad de visualización se refiere a la hora de enfrentarse a la lectura de gráficas que vayan más allá de la mera lectura de pares ordenados de números o reconocimiento de puntos.

Ello puede ser debido al tipo de trabajo previo recibido en el aula, basado en un tipo de enseñanza procedimental y algorítmica, dejando de lado los aspectos visuales que son pilar fundamental de un aprendizaje significativo de todos aquellos conceptos relacionados con la noción de función y sus propiedades, que no debe limitarse a la utilización de un solo registro de representación.

En este sentido, la actividad ha contribuido a favorecer la articulación de los registros de la Lengua Natural, Numérico y Gráfico por parte del alumnado, que, junto con la utilización del registro Tabular en la primera fase, han permitido además, construir y definir el concepto de función de manera conjunta y bajo las premisas de un tipo de enseñanza menos mecánica.

Fase 3: Las emisiones de CO_2

Descripción:

Una vez trabajado el concepto de función, esta tercera fase de la situación se centra en introducir a los alumnos los conceptos de dominio de definición de una función, continuidad y discontinuidad.

En esta ocasión los alumnos deben determinar el orden de visita de las cuatro empresas que en las dos fases anteriores han presentado anomalías en sus informes para corroborar que todo es correcto.

A su vez, y sin perder de vista el tema con compete, el alumno debe alcanzar la coordinación y conversión, en ambos sentidos, entre el registro Gráfico y el Registro de la Lengua Natural, pues se pretende que transformen la información dada de forma escrita a gráficas cartesianas para poder visualizar los periodos de trabajo de la maquinaria de cada una de las empresas en función del horario de cada fábrica y rendimiento de la maquinaria:

"Debido a que tenemos cuatro empresas cuyos informes dejan mucho que desear, los miembros que formáis parte del grupo de inspección recibís ordenes de ir a realizar las mediciones de los gases contaminantes a dichas fabricas en el momento en que funciona el 100% de la maquinaria de cada empresa, es decir, cuando la maquinaria funciona al máximo rendimiento.

La inspección de cada instalación es de una hora en cada empresa y en el traslado de una empresa a otra se tarda media hora independientemente del orden a seguir.

Debéis realizar todas las inspecciones en un día, siendo vuestra jornada la siguiente:

- De 10-14 horas
- 14-15 horas comida
- 15 a 20 horas

Según los informes recibidos, el rendimiento de la maquinaria de las cuatro empresas son las siguientes:

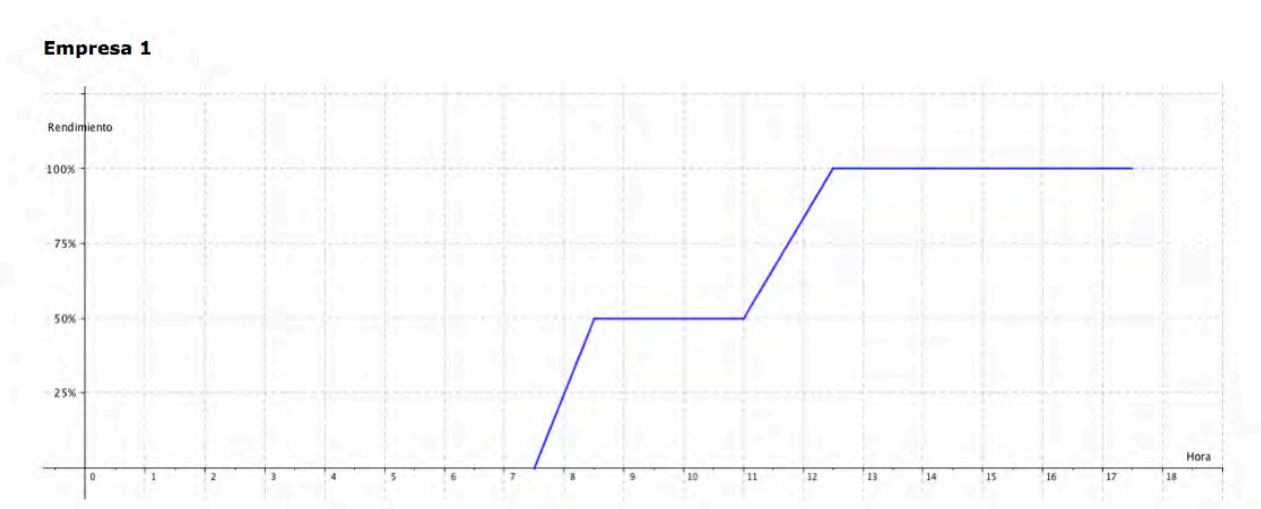


FIGURA 4.5.5.45. *Gráfica funcionamiento maquinaria empresa 1*

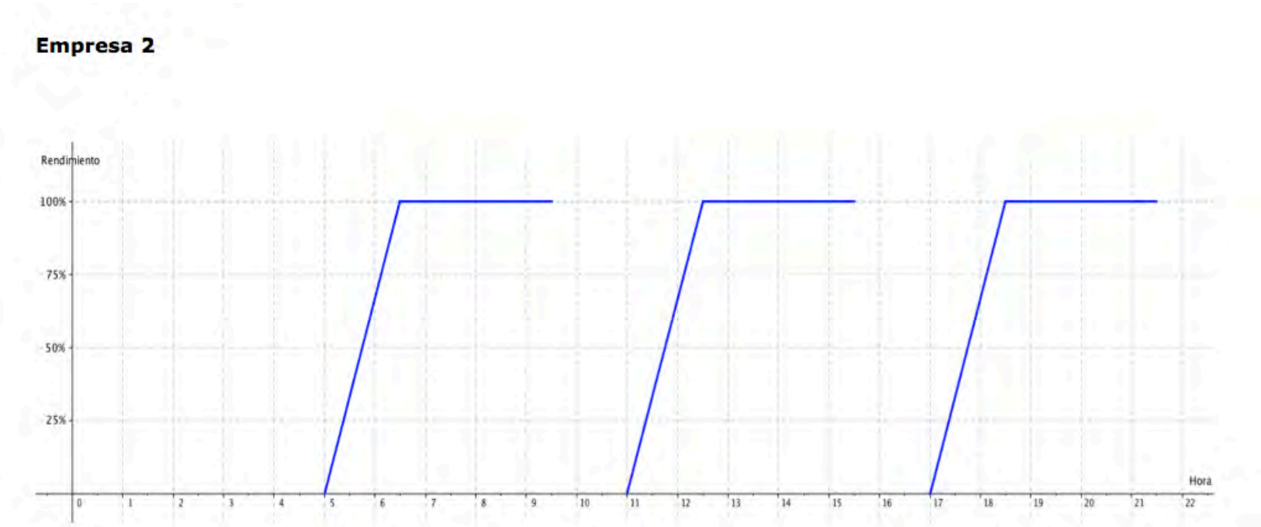


FIGURA 4.5.5.46. *Gráfica funcionamiento maquinaria empresa 2*

Empresa 3

La maquinaria permanece en funcionamiento durante las 24 horas del día. De las 00:00 a las 06:00 trabaja al 50%, y a partir de ahí, aumenta este hasta alcanzar el valor máximo a las dos horas. Permanece en ese punto durante 5 horas, momento en el cual comienza a reducirlo hasta alcanzar el 75% a las dos horas. Hasta las 21:30 de la noche permanece trabajando al 75% y se vuelve a disminuir su funcionamiento hasta alcanzar el 50% a las 00:00 horas.

Empresa 4

La maquinaria se pone en funcionamiento a las 08:00 horas. A la hora de ser encendida alcanza un cuarto de su rendimiento y se mantiene ahí durante una hora. A partir de este momento, se incrementa su funcionamiento hasta alcanzar la mitad de su rendimiento y se vuelve a mantener otra hora. Transcurrida otra hora, alcanza el máximo de su rendimiento y se mantiene ahí hasta las 14:00, momento en que apagan la maquinaria para ir a comer. A las 15:30 horas vuelven a poner en funcionamiento la maquinaria. A la hora y media la hacen trabajar a la mitad de su rendimiento y la mantienen en dicho valor durante una hora. A partir de ahí, incrementan su rendimiento hasta alcanzar el valor máximo a las 19:30, punto en el que se mantiene hasta su apagado final a las nueve y media de la noche.

Con esta información, ¿qué orden tenéis que seguir para visitar las empresas?”

La actividad se ha diseñado con el propósito principal de que la mayoría de los grupos realicen el paso del Registro de la Lengua Natural al Gráfico, pues las indicaciones dadas para las empresas 3 y 4 se han confeccionado de tal manera que se visualizan y comprenden mejor tras realizar la conversión al registro gráfico.

No obstante, los datos relativos al funcionamiento de la maquinaria de las empresas se dan indistintamente en el registro de la Lengua Natural (empresas 3 y 4) o en el registro Gráfico (empresas 1 y 2) con el fin de que el estudiante que se maneje mejor con registros de representación más visuales, realice la conversión del Registro de la Legua Natural al Gráfico para encontrar la solución, y, por otro lado, que aquellos que tengan más destrezas con la lectura e interpretación de gráficas, pasen del Registro Gráfico al de la Lengua Natural para resolver la actividad.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Hoy el Ministerio os manda que vayáis a esas cuatro empresas para que comprobéis que todo funciona correctamente, a recoger emisiones para ver si son las que se recogían en los informes y tenéis que ir en un solo día. Las cuatro empresas en un solo día.*

  La inspección en esas empresas la tenéis que hacer cuando la maquinaria está funcionando al completo al 100% al máximo rendimiento. Una máquina puede estar trabajando al 10%, 15%, 50%...pero vosotros solo podéis ir a realizar la inspección cuando la maquinaría funcione al 100%.

  La inspección en cada una de las empresas dura una hora, ni más ni menos. En cada empresa tenéis que estar una hora. Y para trasladaros de una empresa a otra, independientemente de a cuál vayáis, da igual, tardáis media hora. Es decir, yo estoy una hora en un empresa, termino mi hora de inspección, me voy a otra y tardo medio hora. Da igual a cuál vaya, siempre se tarda media hora.

  Ahora, no podéis estar todo el día trabajando. Tenéis un horario normal de trabajo. Vuestro horarios es de 10:00 a 14:00, y a las 10:00 ya podéis estar en la primera empresa, porque a vosotros os han dado la orden el día anterior. Es decir, en lugar de ir al Ministerio y de allí ir a la primera empresa, ya podéis ir ala primera empresa a las 10:00 de la mañana. De 14:00 a 15:00 el tiempo para comer y de 15:00 a 20:00 el horario de por la tarde.

  Con esta información y con la información que nos han mandado las empresas de cuando su maquinaria está funcionando al 100%, tenéis que ver el orden de visita.

  La primera empresa nos ha mandado la información en forma de gráfico, en donde están las horas y el rendimiento. ¿Cuál es aquí la variable independiente?

- **Varios:** *Las horas.*
- **Profesor:** *¿Y la dependiente entonces?*
- **Varios:** *el rendimiento.*
- **Profesor:** *Esta empieza a trabajar a las 07:30 y la gráfica nos va indicando el rendimiento que tiene la maquina.*

Lo mismo nos ha hecho la empresa 2, que también nos lo da en forma de gráfica. Y las empresas 3 y 4 nos lo da en forma escrita.

Con toda esta información, vosotros tenéis que ir a visitar las cuatro empresas en un solo día y tenéis que averiguar cuál es el orden de visita para poder visitar todas, porque dependiendo del orden que establezcáis podréis ir a todas o no, y vosotros tenéis que ir a todas.

Lo primero a destacar es que ningún grupo se ha planteado de inicio realizar la conversión del registro de la Lengua Natural al registro Gráfico para visualizar los datos de las empresas 3 y 4 a través de la gráfica cartesiana y poder establecer bien en que momentos las maquinarias de dichas empresas están trabajando a máximo rendimiento.

Todos parten de la interpretación de los gráficos proporcionados por las empresas 1 y 2 para ver en que momentos cada máquina funciona a pleno rendimiento y ajustarlos con las indicaciones dadas por las empresas 3 y 4:

Grupo 5

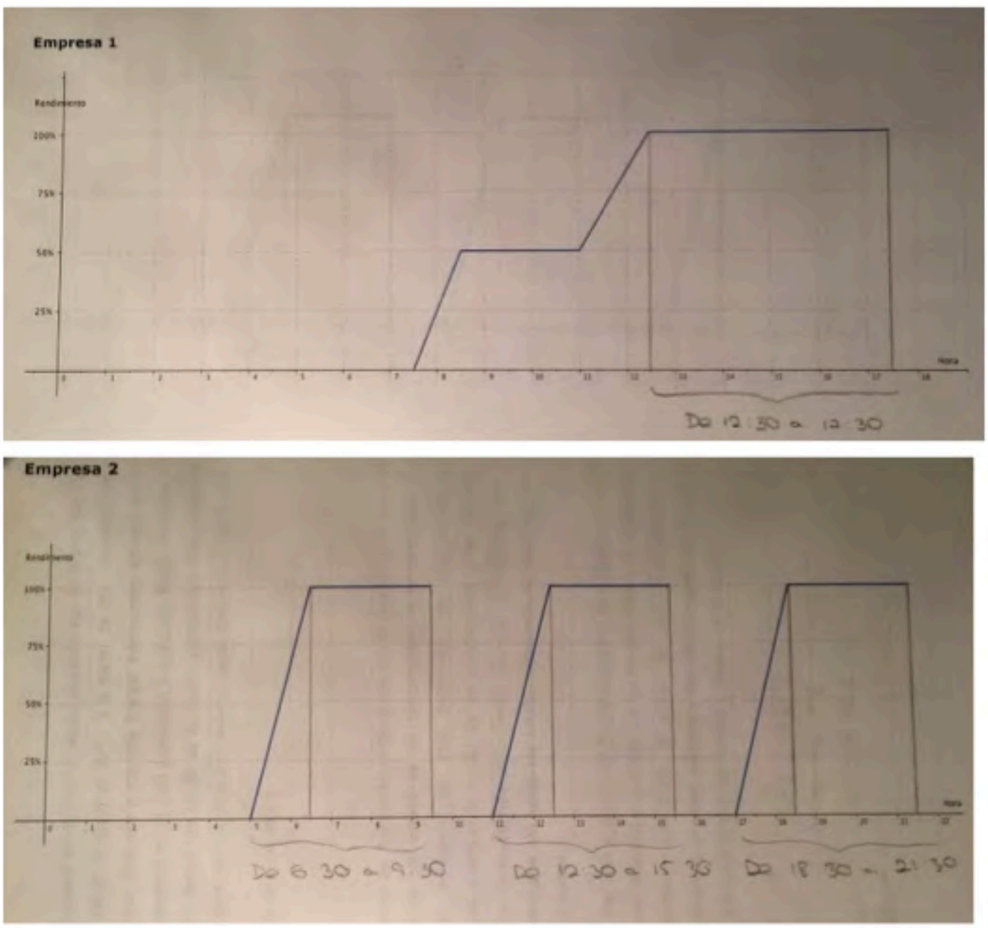
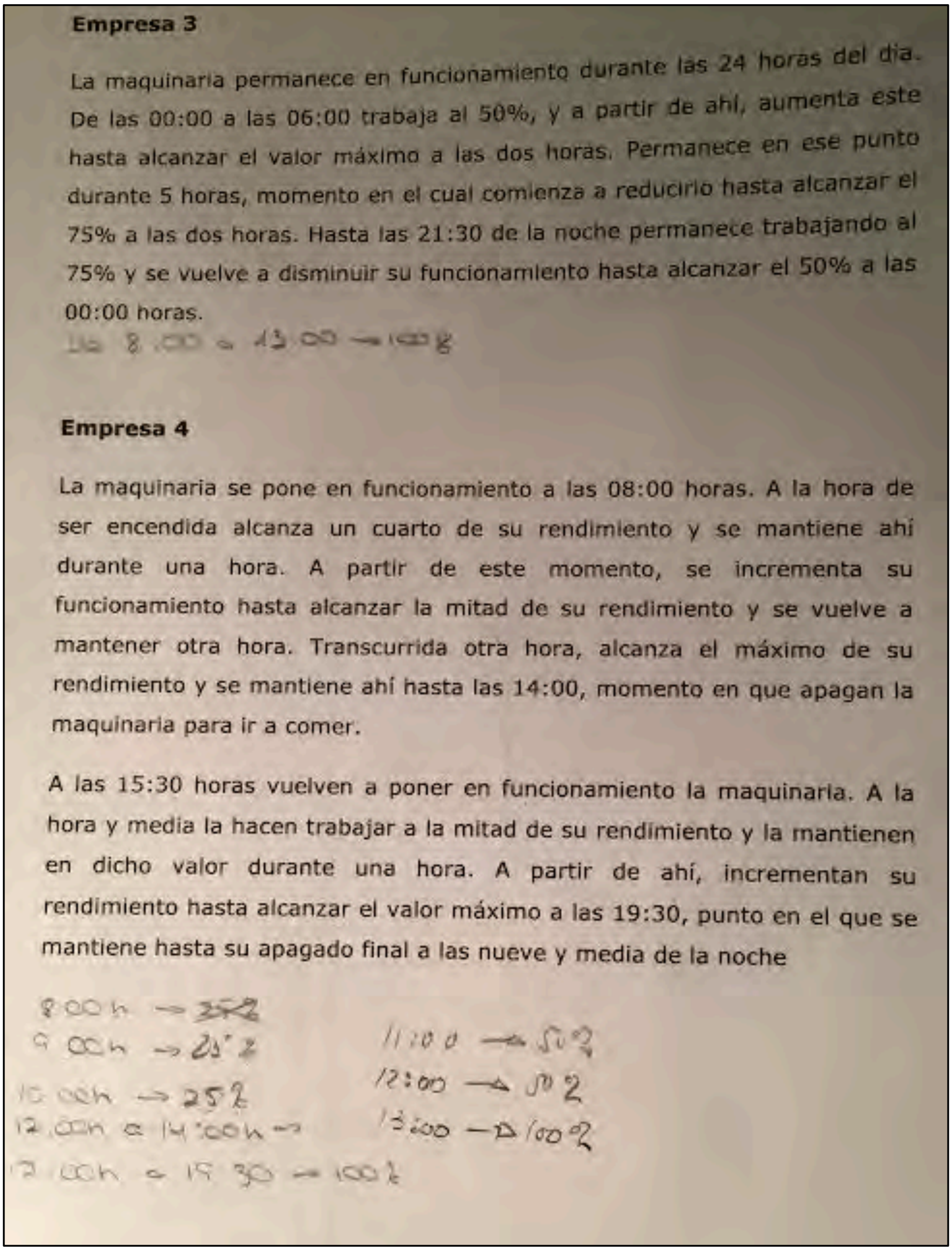


FIGURA 4.5.5.47. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.2.3*



Empresa 3

La maquinaria permanece en funcionamiento durante las 24 horas del día. De las 00:00 a las 06:00 trabaja al 50%, y a partir de ahí, aumenta este hasta alcanzar el valor máximo a las dos horas. Permanece en ese punto durante 5 horas, momento en el cual comienza a reducirlo hasta alcanzar el 75% a las dos horas. Hasta las 21:30 de la noche permanece trabajando al 75% y se vuelve a disminuir su funcionamiento hasta alcanzar el 50% a las 00:00 horas.

De 8:00 a 13:00 → 100%

Empresa 4

La maquinaria se pone en funcionamiento a las 08:00 horas. A la hora de ser encendida alcanza un cuarto de su rendimiento y se mantiene ahí durante una hora. A partir de este momento, se incrementa su funcionamiento hasta alcanzar la mitad de su rendimiento y se vuelve a mantener otra hora. Transcurrida otra hora, alcanza el máximo de su rendimiento y se mantiene ahí hasta las 14:00, momento en que apagan la maquinaria para ir a comer.

A las 15:30 horas vuelven a poner en funcionamiento la maquinaria. A la hora y media la hacen trabajar a la mitad de su rendimiento y la mantienen en dicho valor durante una hora. A partir de ahí, incrementan su rendimiento hasta alcanzar el valor máximo a las 19:30, punto en el que se mantiene hasta su apagado final a las nueve y media de la noche

8:00h → 25%
9:00h → 25%
10:00h → 25%
12:00h a 14:00h →
17:00h a 19:30 → 100%

11:00 → 50%
12:00 → 50%
13:00 → 100%

FIGURA 4.5.5.48. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.2.3*

Por tanto, inicialmente, todos optan por realizar la conversión del registro Gráfico al registro de la Lengua Natural, probando múltiples combinaciones con los horarios hasta dar con aquel que encaja dentro de los parámetros que se han establecido y pautado para la actividad:

Grupo 4

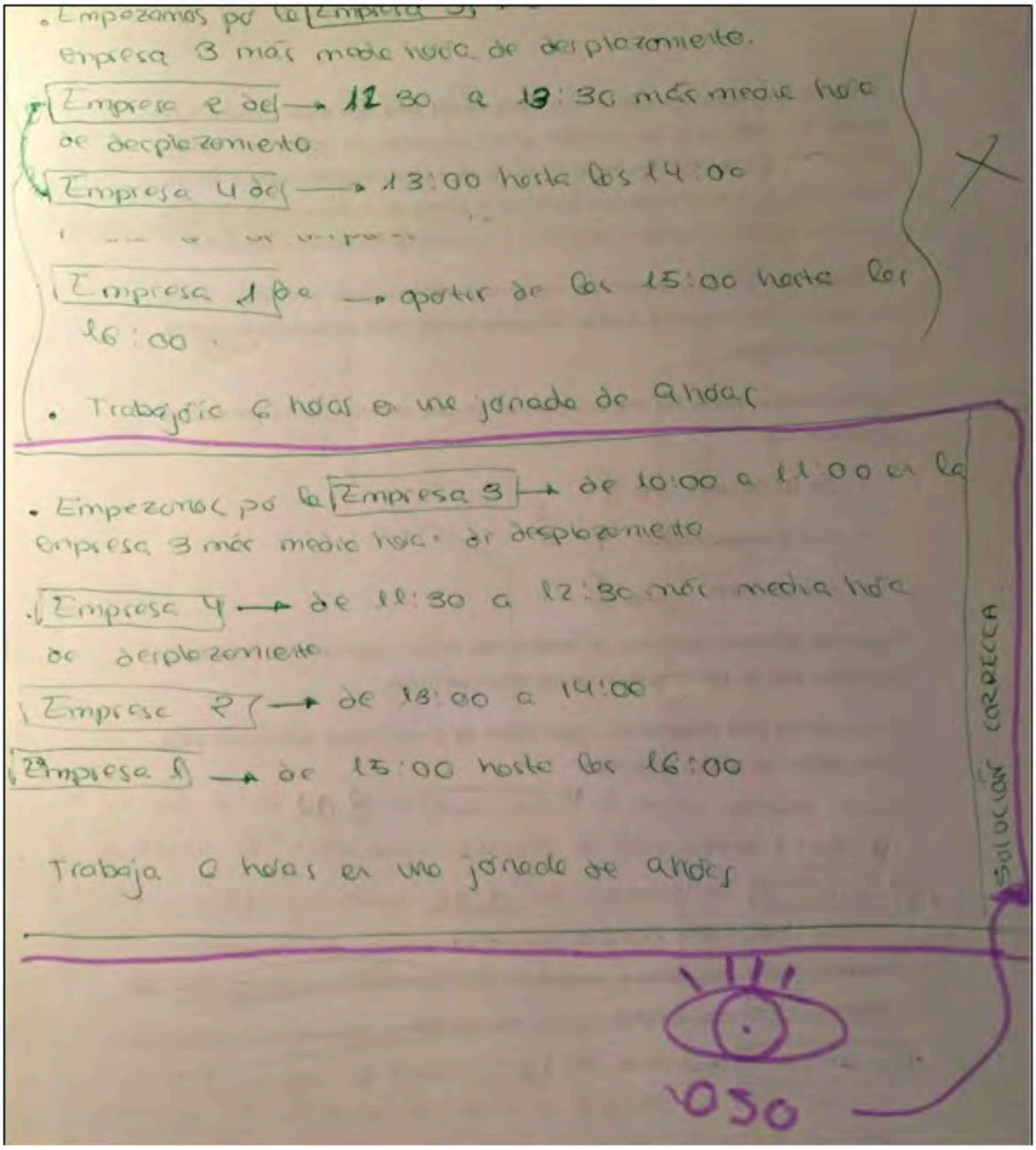


FIGURA 4.5.5.49. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.2.3*

Esta situación ha desencadenado que varios grupos presenten ciertas dificultades a la hora de interpretar el funcionamiento de la maquinaria de la empresa 4, que se hubiese visto solventado, en gran medida, al articular el registro en que viene dada la información con la representación gráfica. Esto queda ejemplificado con el caso particular de los alumnos del grupo 7:

Grupo 1

- **Profesor:** *¿Me contáis que estas haciendo?*
- **Raquel:** *La primera es la empresa 4, por que a las 10:00 que es cuando empieza tiene su máximo rendimiento. Ahora estamos buscando otra empresa que a las 11:30 tenga su máximo rendimiento.*
- **Profesor:** *Y esto de que a las 10:00 tiene su máximo rendimiento, ¿de dónde lo habéis sacado?*
- **Raquel:** *Porque dice que pasa una hora, que son las 9 y transcurrida otra hora alcanza el máximo de su rendimiento.*
- **Profesor:** *¿Estáis seguras de eso? Leed bien lo que os dicen.*

Grupo 8

- **Profesor:** *¿Qué os ocurre?*
- **Álvaro:** *Dice que a las 09:00 está al 25%.*
- **Jaime:** *Luego dice, se mantiene ahí durante una hora. A las 10:00 empieza el incremento hasta la mitad, hasta el 50%. A las 11:00 sigue en 50%. A partir de ahí es de 100% hasta las 12:00.*
- **Profesor:** *Es decir…empezamos a las 08:00. A las 09:00 está en el 25 % como decís. Y está ahí ¿hasta?*
- **Álvaro:** *Hasta las 10:00. A partir de ese momento empieza a incrementar y llega al as 11:00. Y a las 11:00 está al 100%. No, espera, a las 11:00 se mantiene otra hora al 50%.*
- **Profesor:** *Es dice, a las 11:00 llega hasta el 50% y se mantiene ahí hasta las 12:00. ¿Y a las 12:00 que vuelve a hacer?¿Que rendimiento me habéis dicho que tiene a las 12:00?*
- **Álvaro:** *El 100%.*
- **Profesor:** *No, la mitad de su rendimiento.*
- **Álvaro:** *No, eso es a las 11:00.*
- **Profesor:** *¿Cuánto tiempo estaba ahí?*
- **Álvaro y Jaime:** *Es verdad! Otra hora.*
- **Profesor:** *Otra hora está ahí. AL 50% porciento está durante una hora. Luego, a las 12:00, ¿qué rendimiento tiene la máquina?*
- **Jaime:** *50%.*
- **Profesor:** *¿Y que hora me habéis puesto de visita de esa empresa?*

- **Álvaro:** *A las 12:00.*
- **Profesor:** *Pues en esa hora no está al 100%*

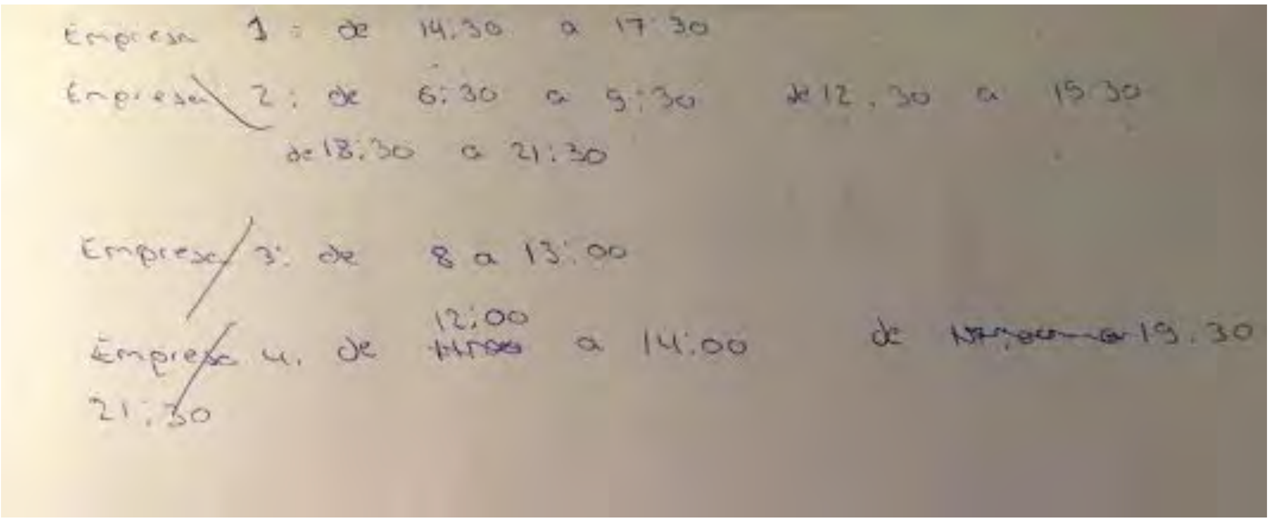


FIGURA 4.5.5.50. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.2.3*

Grupo 7

- **Profesor:** *¿Me contáis que habéis hecho?*
- **Maili:** *La primera empresa que visitamos es la 3, porque a las 10:00 está al 100%.*
- **Profesor:** *¿Y por que habéis decidido no ir al resto de empresas?*
- **Lucía:** *El resto de empresas no está al 100% a las 10:00.*
- **Profesor:** *Perfecto. Después de la 3, ¿cuál visitáis?*
- **Maili, Esther y Lucía:** *la 4*
- **Profesor:** *¿por?*
- **Lucía:** *Porque acabamos a las 11 e la 3, tardamos media hora en llegar…y entonces a las 11:30 es la única que está al 100%.*
- **Profesor:** *¿A las 11:30 está al 100%?¿a que hora empieza?*
- **Maili:** *A las 08:00.*
- **Profesor:** *¿y que pasa?*
- **Esther:** *A la hora alcanza un cuarto de su rendimiento. Es decir, que a las 09:00 está al 25%.*
- **Profesor:** *Luego, a las 09:00, ¿dónde está?*
- **Lucía:** *Al 25% y se mantiene ahí durante una hora.*
- **Profesor:** *Es decir, que a las 10:00, ¿dónde está?*

- **Maili:** *En el 25%. Y ahora incremente un 50%.*
- **Profesor:** *¿Y cuánto tarda en ese incremento?*
- **Maili:** *Una hora y nos mantenemos otra hora.*
- **Profesor:** *Entonces a las 10:00 estábamos en el 25%, a las 11:00 hemos llegado al 50% y ahora estamos de las 11:00 a las 12:00 en el 50%. Por lo tanto a las 11:30 no podéis visitar esta empresa, ¿lo veis?*
- **Maili y Lucía:** *Sí. (el profesor se va)*
- **Esther:** *Pues yo creo que está bien.*
- **Maili:** *¿Y si hacemos una gráfica?*
- **Lucía:** *Eso estaba haciendo ya.*

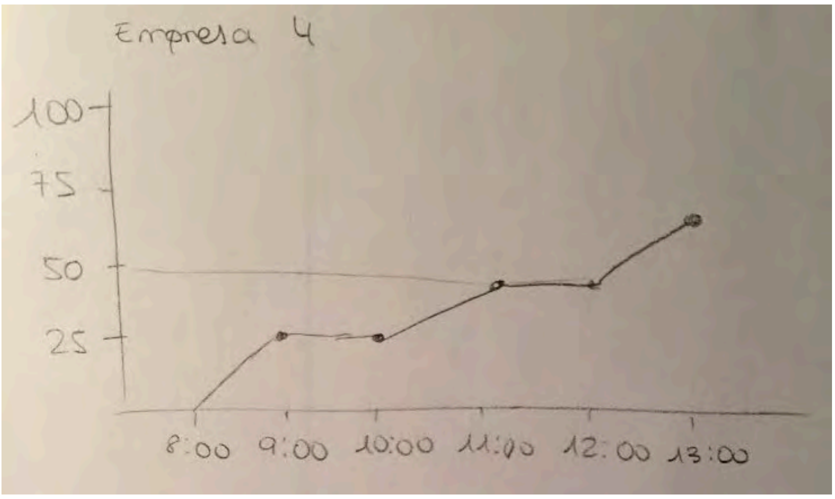


FIGURA 4.5.5.51. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.2.3*

Por su parte, los grupos 3 y 6 también acaban optando por la construcción de las gráficas de rendimientos para las empresas 3 y 4.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.19. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de Situación 2*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita, mediante una buena organización de los datos.
Grupo 2	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita, mediante una buena organización de los datos.	
Grupo 3	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	Representación de la información dada en el registro de la lengua natural a través de gráficas cartesianas para poder visualizar los periodos de trabajo de la maquinaria de cada una de las empresas y establecer el orden de visita.
Grupo 4	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita, mediante una buena organización de los datos.

Grupo 5	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita, mediante una buena organización de los datos.	
Grupo 6	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	Representación de la información dada en el registro de la lengua natural a través de gráficas cartesianas para poder visualizar los periodos de trabajo de la maquinaria de cada una de las empresas y establecer el orden de visita.
Grupo 7	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	Representación de la información dada en el registro de la lengua natural a través de gráficas cartesianas para poder visualizar los periodos de trabajo de la maquinaria de cada una de las empresas y establecer el orden de visita.
Grupo 8	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita, mediante una buena organización de los datos.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.20. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 3 de la Situación 2*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita, mediante una buena organización de los datos.	2	25 %
Interpretación de las gráficas de las empresas 1 y 2 para junto con la información dada mediante el registro de la Lengua Natural en las empresas 3 y 4, encontrar el horario de visita por ensayo y error.	6	75 %

Fuente: elaboración propia

En esta ocasión, aunque todos los grupos han acabado utilizando una estrategia que les permitiera encontrar la solución óptima al problema, no todos han llegado a la solución correcta.

Los tres grupos que han acabado optando por representar gráficamente los datos proporcionados por las empresas 3 y 4, han llegado correctamente a la solución del problema, pues les ha permitido visualizar los rendimientos de las maquinas de las cuatro empresas mediante un registro óptimo para ello, simplificando la ardua tarea de comparar horas mediante textos dados en el registro de la Lengua Natural.

Por el contrario, de los cinco grupos restantes que han partido de la interpretación de los gráficos y la conversión hacia el registro de la Lengua Natural para intentar ajustar los horarios, únicamente dos, el grupo 4 y el grupo 5, han llegado a la respuesta correcta. Si bien, aunque todos ellos han realizado una correcta interpretación de los gráficos y su posterior articulación con el registro de la Lengua Natural, el problema ha venido dado por la falta de compresión de las instrucciones dadas, habiéndose solucionado si se hubiese recurrido a su representación a través de una gráfica cartesiana.

Esto pone de manifiesto cómo el sentido en que se dan las conversiones entre registros semióticos tiene distintos grados de dificultad que derivan de la falta de congruencia entre las unidades significantes de cada sistema de representación, pues pasar de información dada mediante la Lengua Natural, cuyas unidades están formadas por frases, palabras y letras, al registro gráfico formado por coordenadas, puntos, variables, etc... requiere un salto cognitivo por parte del alumno que debemos tener en cuenta.

A demás, también se aprecia como las distintas conversiones entre registros nos ofrecen múltiples perspectivas de un mismo problema. Por ello, debemos comprender que es absolutamente necesario proponer a nuestros alumnos actividades de conversión de entre al menos dos registros de representación y que las conversiones se hagan en ambos sentidos, para que los registros semióticos puestos en juego, constituyan un pilar consistente en la construcción y aprehensión de los conceptos a los que hacen referencia, en este caso, el de dominio y continuidad.

Situación 3: Las Centrales Eólicas.

Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento.

La situación se desarrolló el día 29 de abril de 2013 (*Fases 1*) y el día 30 de abril (*Fase 2*) durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

Esta tercera situación, constituida por dos fases, tuvo por objetivo el potenciar la articulación entre los registros Algebraico, Tabular, Numérico, Lengua Natural y Gráfico en lo que a los conceptos de máximo y mínimo de una función y crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo se refiere.

Para ello, se persigue proporcionar al alumno de las herramientas necesarias para identificarlos y estudiarlos partiendo del registro gráfico y su coordinación con el Numérico y la Lengua Natural, durante el desarrollo de la primera fase, y partiendo del registro Algebraico articulado con el registro Numérico, Tabular y Gráfico, en la segunda.

Fase 1: Los aerogeneradores

Descripción:

La primera fase se centra en el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a través de la lectura e interpretación de los datos proporcionados a través del registro semiótico Gráfico. Para ello, los alumnos disponen de dos gráficas por cada uno de los 7 primeros meses del año, una por cada zona de estudio donde se encuentran ubicadas unas centrales eólicas. En ellas se recogen la velocidad media del viento a lo largo de cada mes, por lo que los alumnos deben determinar en que meses es adecuado poner en funcionamiento cada central eólica, tras estudiar las gráficas y efectuar su conversión al registro Numérico para localizar la amplitud de los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Los datos relativos a la velocidad del viento a lo largo de cada mes se han aportado en el registro gráfico con el fin de que el alumno se aproxime a la idea de crecimiento y decrecimiento de manera natural, mediante un registro visual:

"Las centrales eólicas son consideradas como una fuente de energía eléctrica ecológica capaz de reemplazar a las centrales térmicas de carbón, gas o petróleo, que tanto contaminan el medio ambiente.

En la foto se puede ver un parque eólico con varios aerogeneradores y sus enormes aspas, que el viento hace girar. En un principio, puede parecer que, cuanto más fuerte es el viento, mas energía eléctrica se produce, pero esto no es siempre así. Con vientos menores de 2 m/s no funcionan, y con superiores a 5 m/s se pueden producir grandes averías. Lo que interesa, por lo tanto, es un viento dentro de esos valores, lo más constante posible y que no presente cambios bruscos.

En Madrid, se está examinando la ubicación de un campo de aerogeneradores y, para que sea lo más eficaz posible, se ha estudiado la fuerza del viento a lo largo de los siete primeros meses del año en dos lugares diferentes. Las siguientes gráficas representan la velocidad media del viento en esos 2 lugares en cada uno de los meses del año indicados:

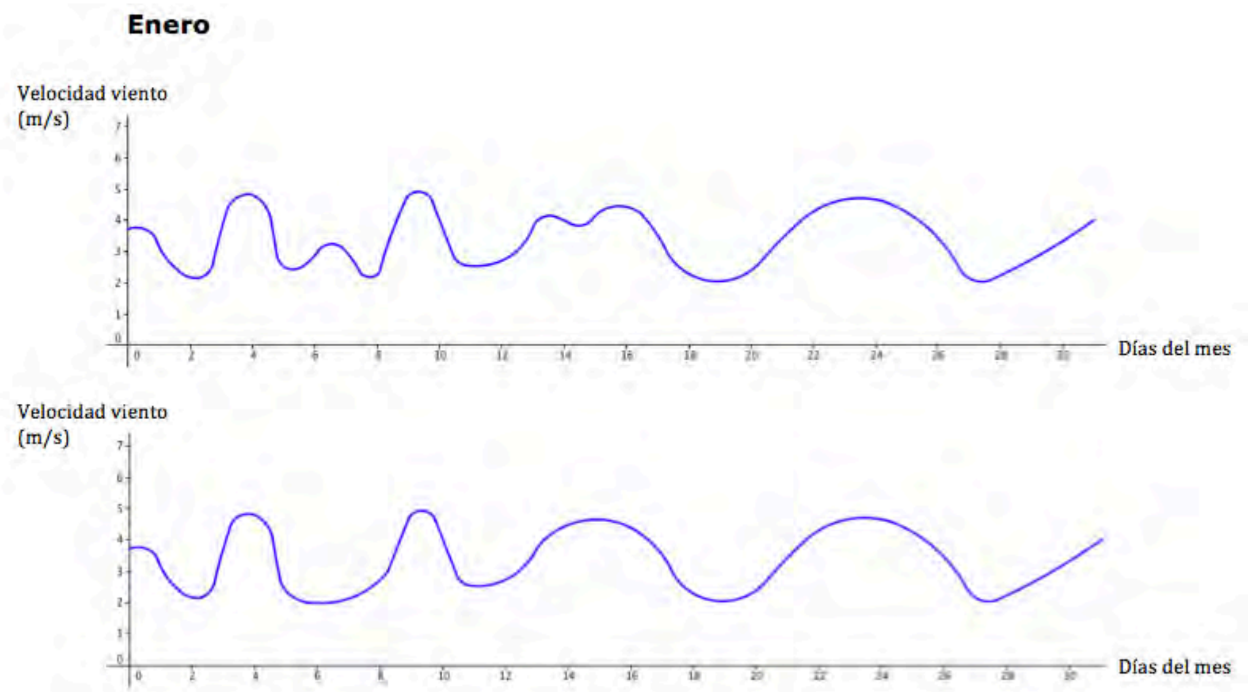


FIGURA 4.5.5.52. *Gráficas mes de enero*

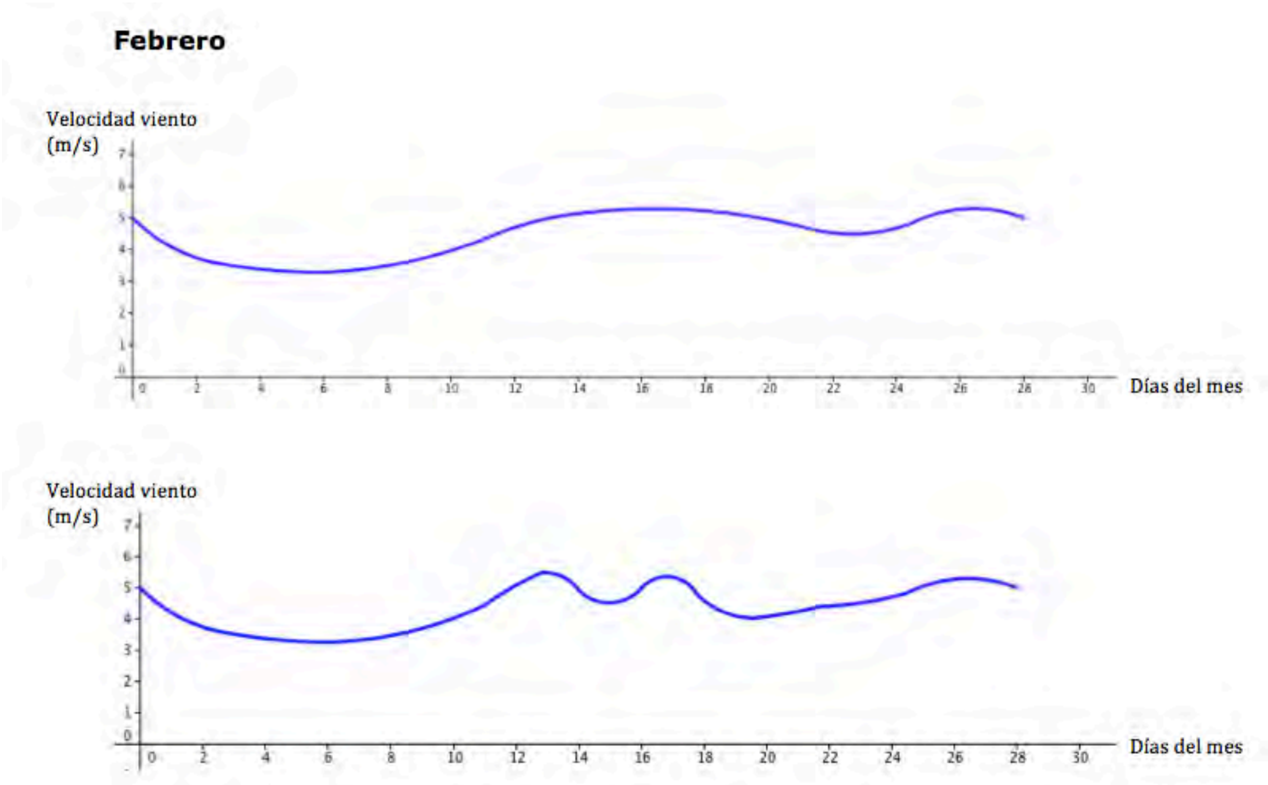


FIGURA 4.5.5.53. *Gráficas mes de febrero*

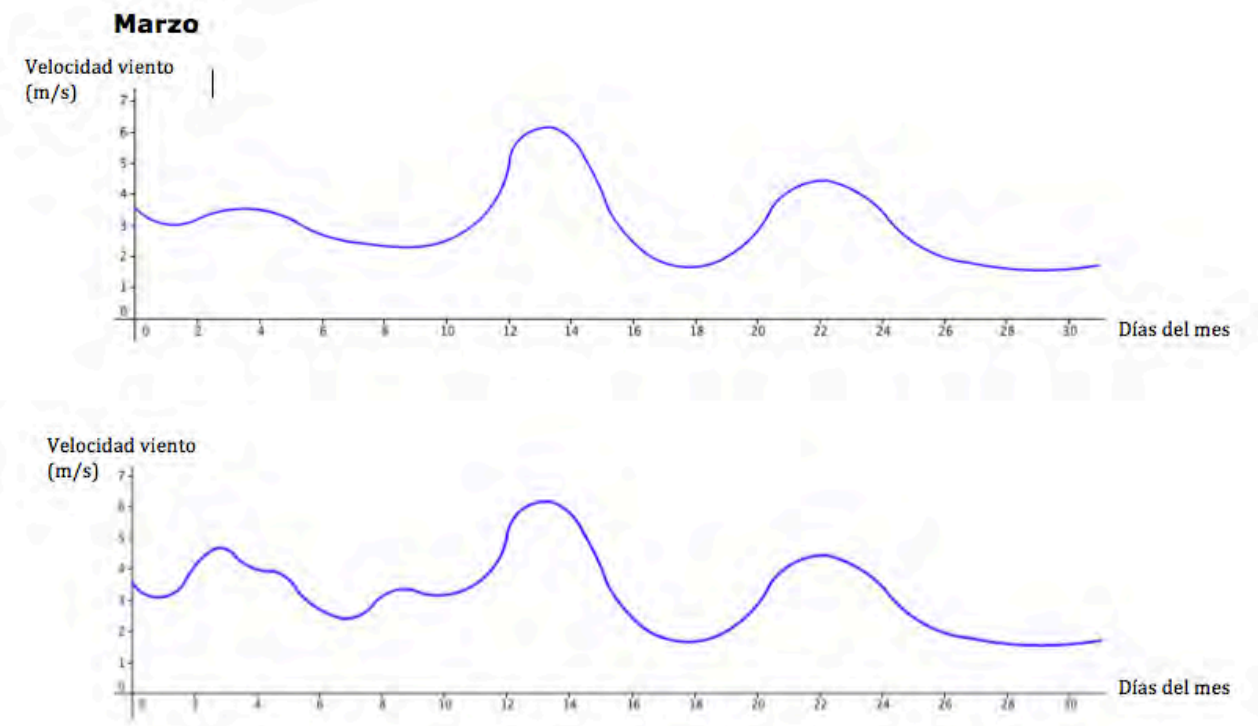


FIGURA 4.5.5.54. *Gráficas mes de marzo*

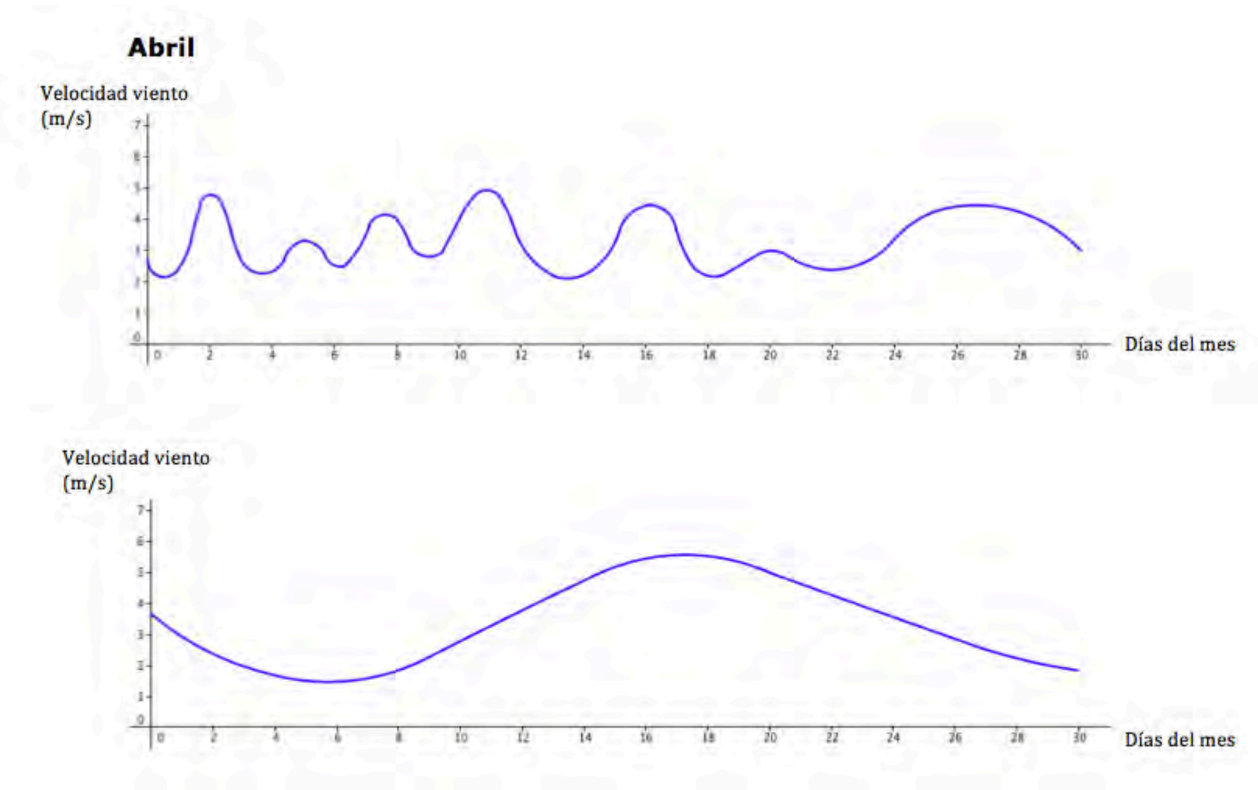


FIGURA 4.5.5.55. *Gráficas mes de abril*

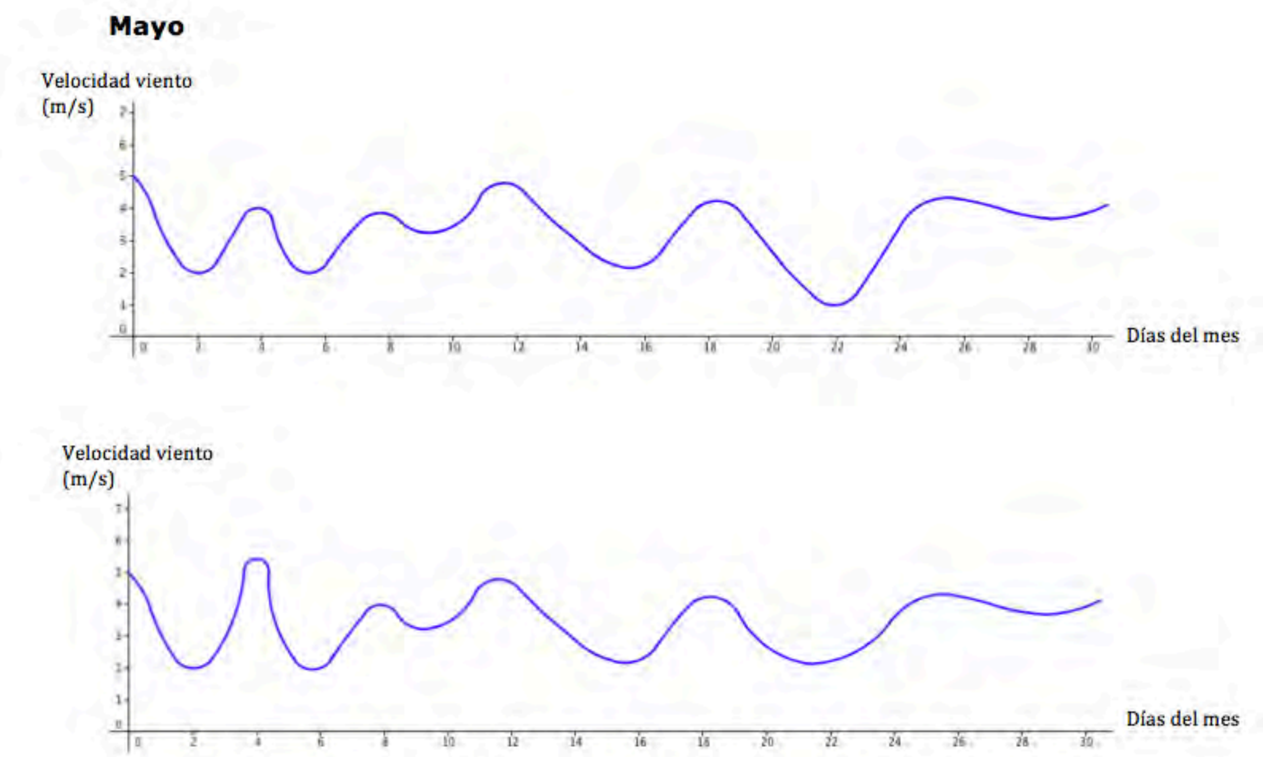


FIGURA 4.5.5.56. *Gráficas mes de mayo*

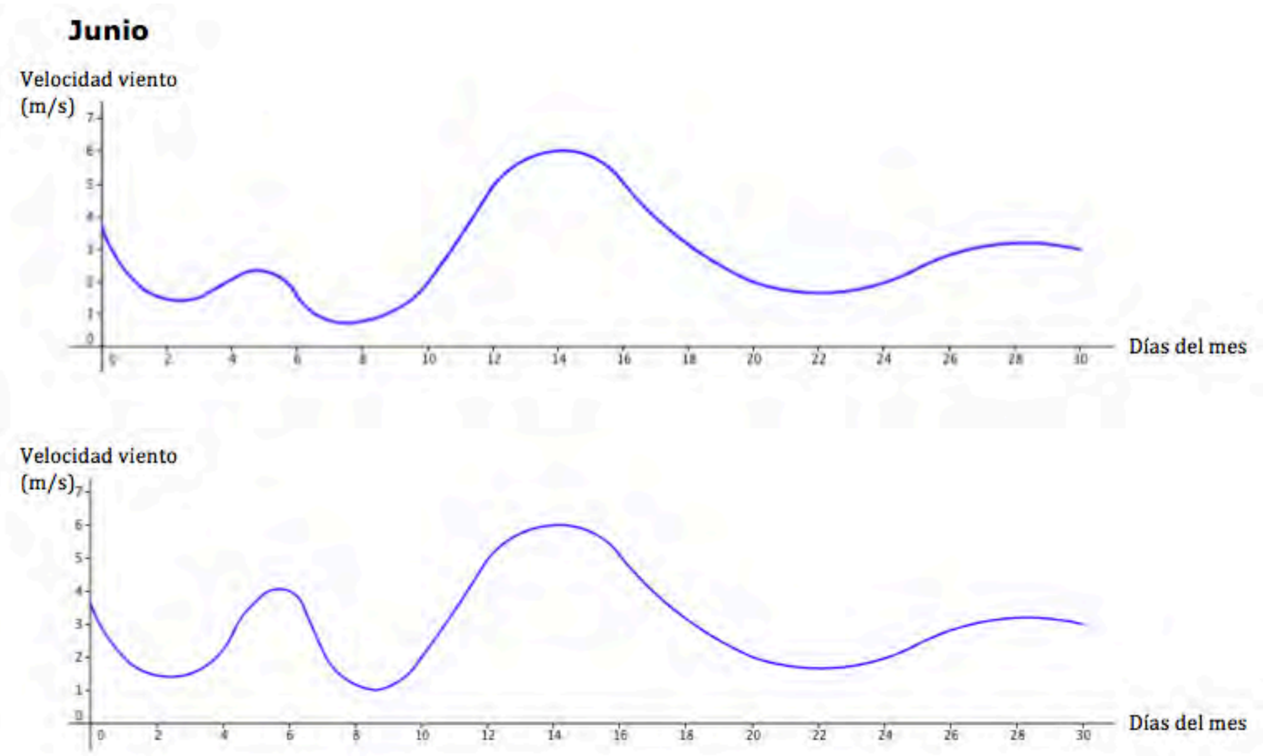


FIGURA 4.5.5.57. *Gráficas mes de junio*

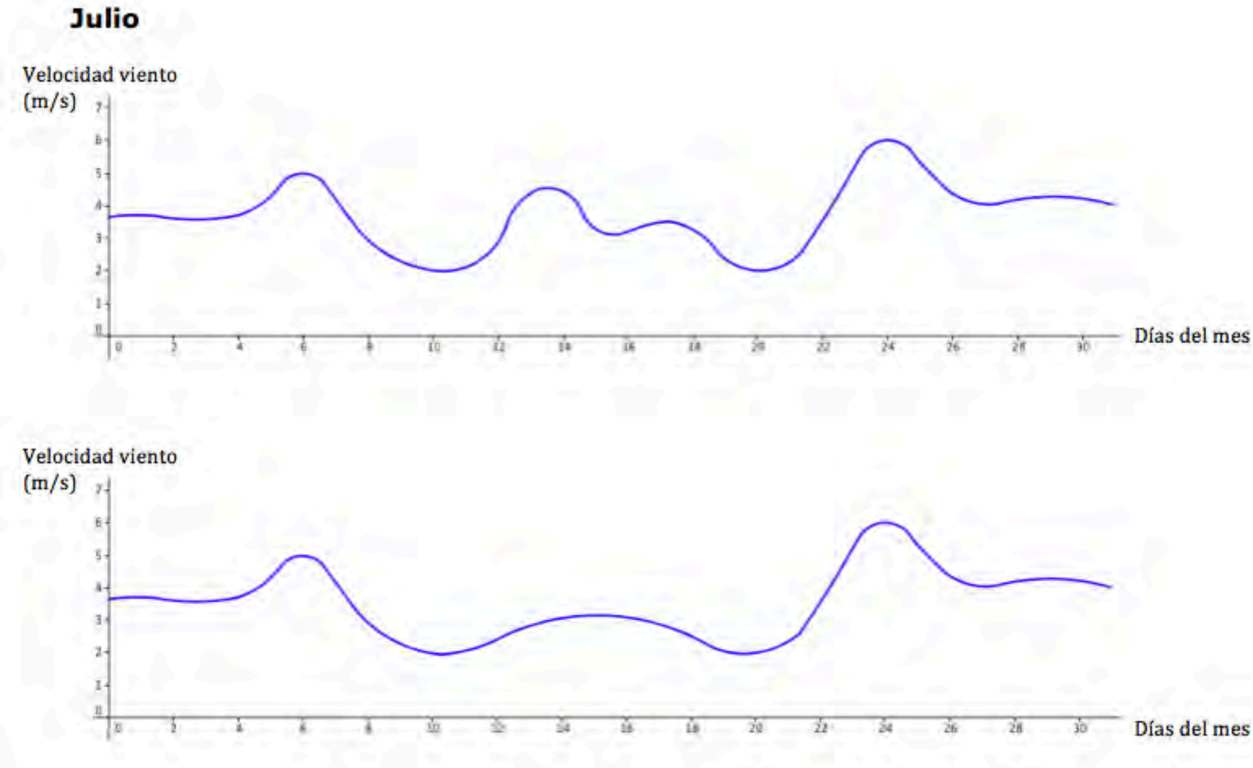


FIGURA 4.5.5.58. *Gráficas mes de julio*

¿En qué meses se pondrá en funcionamiento cada central?"

Para lograr los objetivos propuestos, y que la articulación entre los registros de representación tengan sentido y sean necesarios en el desarrollo de la actividad, las gráficas se han diseñado de tal manera que no siempre las funciones más constantes van a ser las óptimas, pues en varias de ellas sus valores se han determinado de modo que se encuentren fuera del intervalo para el cual los aerogeneradores podrían estar en funcionamiento. A demás, por otro lado, para que el alumno se vea en la necesidad de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones, se han construido gráficas similares para las dos ubicaciones en un mismo mes en algunas de las opciones, de modo que para elegir la central eólica que estará en funcionamiento en dicho mes, sea necesario analizar las variaciones de las funciones.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Bueno…, ¿sabéis lo que es una central eólica?*
- **Varios:** *Sí.*
- **Profesor:** *¿Alguien que me lo cuente?*
- **Sandra:** *Es una central que produce energía mediante el viento. Es decir, que el viento hace que se muevan las aspas y eso…que produce energía.*
- **Profesor:** *¿Y es ecológica ese tipo de energía?*
- **Sandra:** *Sí.*
- **Profesor:** *Efectivamente, es más ecológica que las centrales térmicas que utilizan carbón, petróleo o gas. Es de energías renovables.*

  Uno puede pensar que cuánto más viento hay, más energía se genera, ¿no?
- **Varios:** *Sí.*
- **Profesor:** *Pues esto no siempre es así. Tiene que estar entre unos valores…la velocidad del viento tiene que estar entre unos valores. Si es inferior a 2 m/s, las aspas no se mueven; y si es superior a 5 m/s la velocidad del viento, las aspas pueden producir averías. Para que funcione correctamente, la velocidad del viento se tiene que encontrar entre esos dos valores; entre 2m/s y 5 m/s.*

  Eso es lo más importante de todo, lo principal. Y otro factor a tener en cuenta es que la velocidad del viento sea lo más constante posible, es decir, que no presente cambios bruscos…que de repente suba o que de repente baje.

  Pues en Madrid, hay dos zonas donde se pueden ubicar dos centrales eólicas. Hay un grupo de técnicos que está estudiando la velocidad del viento en esas dos zonas para saber en qué momento utilizar una central y en que momento utilizar la otra para generar la energía.

  ¿Qué han hecho? Durante los primeros siete meses del año, de enero a julio, han medido la velocidad del viento en esas dos zonas. Y ahorra, a vosotros, os dan las siguientes gráficas: enero y os dan las gráficas de cada zona con la velocidad media del viento. Igual para febrero, marzo…hasta julio.

  Pues vosotros, con esta información, tenéis que decidir que central es la que va a funcionar en cada mes y explicar el porqué.

Inicialmente, todos los grupos, nada más recibir las gráficas, realizan una primera conversión del registro Numérico al Gráfico, dibujando las rectas y= 2 e y=5 para comprobar si la velocidad media del viento se encuentra dentro de los parámetros de funcionamiento.

Este hecho da lugar a tres situaciones a la hora de resolver la actividad. La primera de ellas, se da en los casos en los que las gráficas de cada zona no sobrepasan los parámetros establecidos en un mes determinado, lo que les obliga a centrarse en el estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento que presentan cada una, realizando así tratamientos dentro del propio registro Gráfico:

Grupo 4

- **Profesor:** *¿Me contáis que estáis haciendo?*
- **Mireya:** *Primero miramos si se pasan del 5. Si no se pasan del 5 ninguna de las dos, pues miramos cuál es más constante.*
- **Profesor:** *¿Sólo si no se pasan del 5?.*
- **Ainhoa:** *Y del 2.*

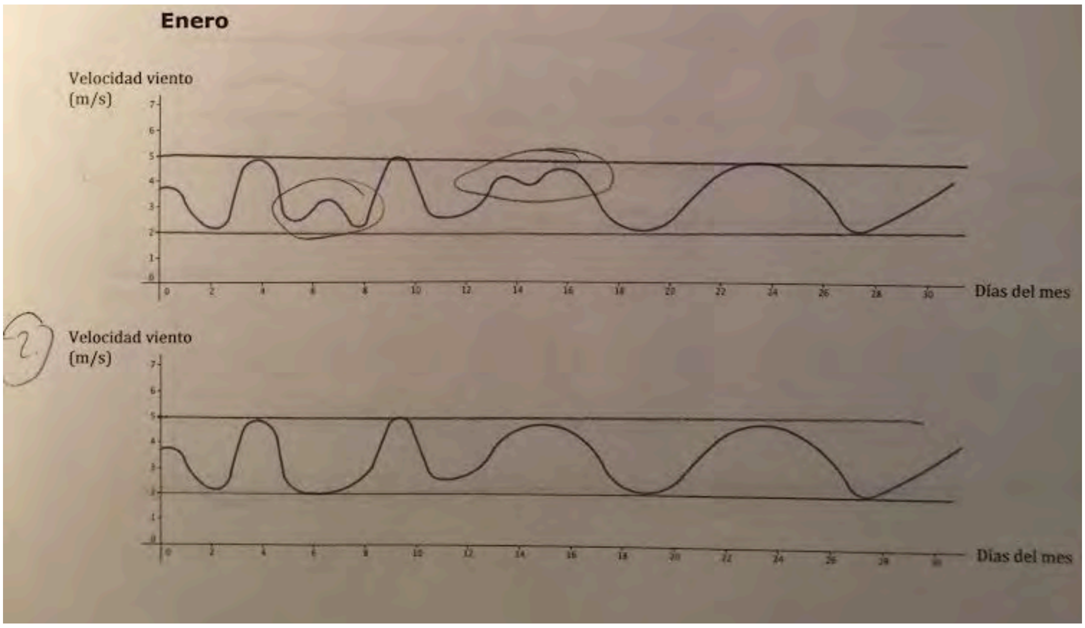


FIGURA 4.5.5.59. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.3.1*

Grupo 1

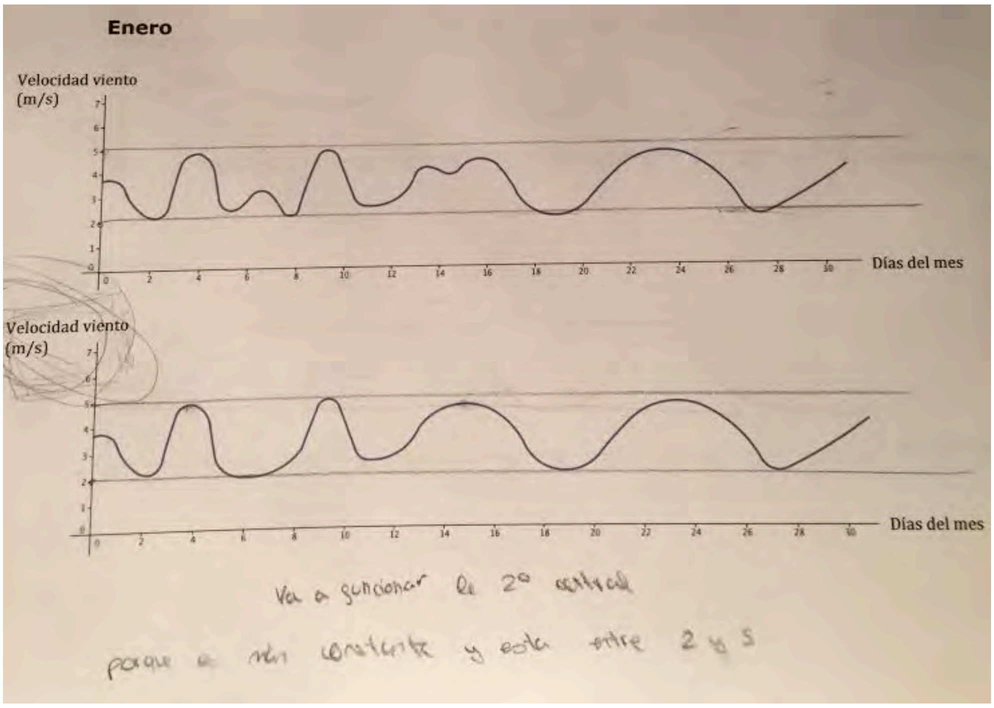


FIGURA 4.5.5.60. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.3.1*

La segunda ocurre cuando las gráficas de cada zona sobrepasan dichos parámetros en el mismo mes. En ese momento es donde los alumnos se ven obligados a ver cuanto tiempo se encuentra la velocidad media del tiempo fuera de esos parámetros, produciéndose así la conversión en el sentido opuesto al inicial, de lo gráfico a lo numérico.

Grupo 5

- **María:** *Silvia, ¿has utilizado la regla para dibujar las rectas?*
- **Silvia:** *Sí.*
- **María:** *Pero es que en las dos se pasan de 5.*
- **Lidia:** *Sí, pero ahora hay que mirar cuanto tiempo está fuera de cada línea en cada gráfica.*

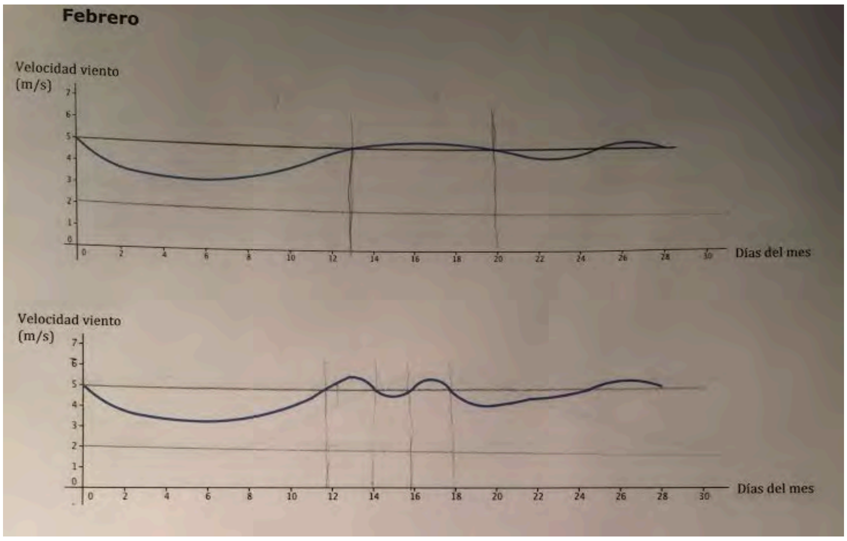


FIGURA 4.5.5.61. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.3.1*

Grupo 3

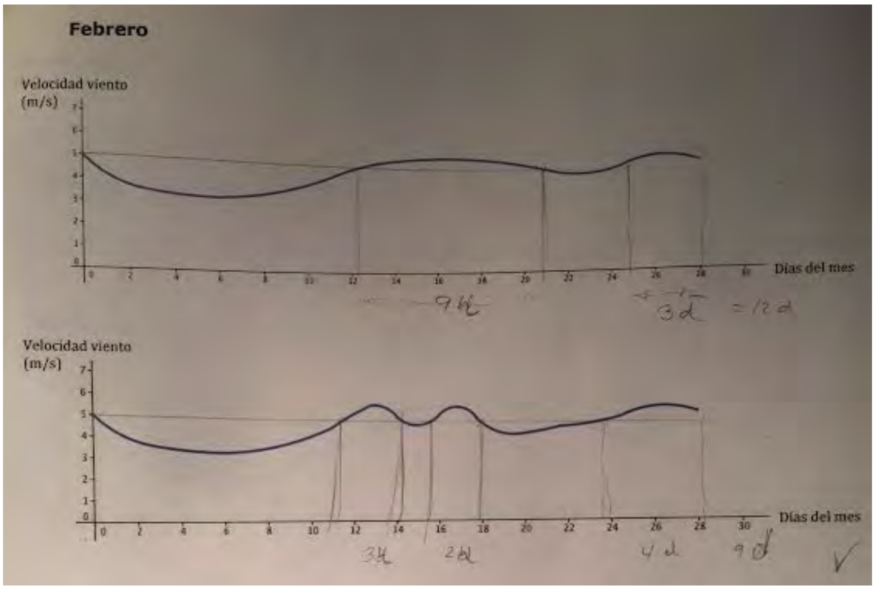


FIGURA 4.5.5.62. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.3.1*

Y por último, el caso en el que las gráficas de cada zona sobrepasan dichos parámetros en el mismo mes y durante el mismo tiempo. De este modo, los alumnos deben centrarse nuevamente en el estudio de la variación de la función, en términos de crecimiento y decrecimiento:

Grupo 2

- **Profesor:** *¿Me contáis por qué en marzo habéis elegido la primera gráfica?*
- **Beatriz:** *Pues a ver… las dos se pasan de 2 y de 5…*
- **Profesor:** *Pero, si las dos se pasan, ¿por qué habéis elegido la primera?*
- **María:** *Porque se pasan el mismo tiempo y como la segunda, aquí y aquí es menos constante… y el resto es igual en las dos, pues por eso hemos cogido la primera.*

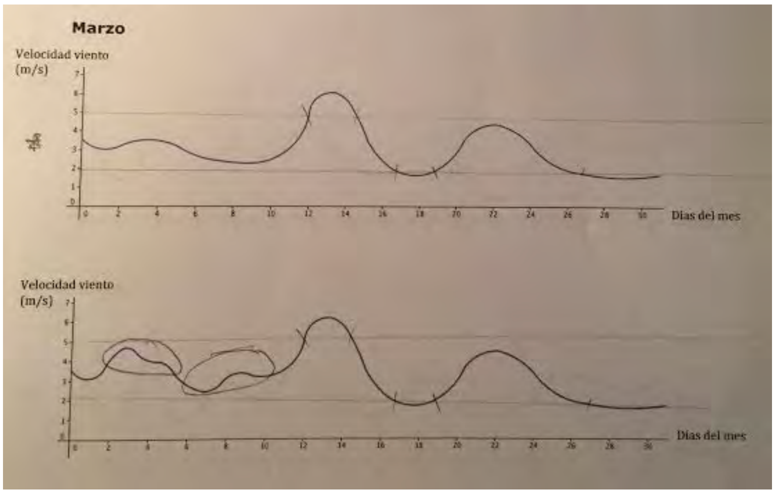


FIGURA 4.5.5.63. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.3.1*

Todos los grupos, cada uno a su ritmo, han sido capaces de llegar a la solución de la actividad de manera óptima, pasando por cada uno de los tres pasos mencionados anteriormente.

No obstante cabe resaltar la manifestación de dos dificultades u obstáculos con los que algunos grupos se han encontrado:

1. Utilización de la regla: Varios de los grupos han construido las rectas y= 2 e y=5 con cierta inclinación, lo que les ha generado dificultades a la hora de valorar si la velocidad media del tiempo se encontraba entre dichos parámetros, llevándoles a confusiones y errores como ha sido el caso del grupo 1.
2. El predominio de la constancia frente al del tiempo que cada gráfica se encuentra por fuera de los parámetros: en los grupos 6 y 8, en aquellas gráficas en donde la función se salía de los márgenes establecidos para que

la central entre en funcionamiento, han elegido aquella opción en la que la función era más constante pese a que los intervalos en lo que estaría fuera de funcionamiento sea mayor.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.21. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 3*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.	
Grupo 2	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.	

Grupo 3	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.
Grupo 4	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.
Grupo 5	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.

Grupo 6	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos, es decir, dar el resultado teniendo solo en cuenta la constancia de las funciones.	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.
Grupo 7	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.	
Grupo 8	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos, es decir, dar el resultado teniendo solo en cuenta la constancia de las funciones.	Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.22. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 3*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos, es decir, dar el resultado teniendo solo en cuenta la constancia de las funciones.	2	25 %
Utilización de la regla para construir las rectas y=2 e y=5. Estudio de la regularidad de las gráficas analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en los casos en que los pares de gráficas se encuentran dentro de los parámetros o están fuera de ellos el mismo tiempo. Determinación del tiempo en el caso de que las dos gráficas estén fuera de los parámetros en intervalos distintos.	6	75 %

Fuente: elaboración propia

Aunque, finalmente, todos los grupos han conseguido llegar a la solución óptima del problema, dos de ellos, se apoyaron únicamente en el estudio del carácter constante de las gráficas, siempre y cuando estuvieran ambas dentro de los parámetros o las dos fuera de ellos.

Pese a ello, todos, de una manera u otra y antes o después, han tenido que recurrir a la conversión y articulación entre los registros Numérico y Gráfico en ambos sentidos, cumpliéndose así uno de los principales objetivos de esta fase de la situación

El papel que ha jugado la coordinación entre estos registros semióticos nos indica la habilidad que el alumno ha ido adquiriendo a lo largo de las sesiones anteriores en lo que a visualización, análisis gráfico y relación entre las unidades significantes de dichos sistemas de representación se refiere.

Todo ello ha contribuido a su vez a la construcción de los conceptos de crecimiento, decrecimiento de una función, partiendo directamente de la representación gráfica, evitando así los obstáculos que aparecen cuando se pretende que el alumno lea una gráfica en el análisis de sus propiedades y favoreciendo el pensamiento visual el cual requiere poner en funcionamiento procesos cognitivos que se encuentran por encima de los que se movilizan al trabajar algorítmicamente sin necesidad de realizar conversiones entre registros.

Fase 2: La clave

Descripción:

En la segunda fase de esta situación aparece por primera vez el registro Algebraico como un nuevo sistema de representación que hace referencia al concepto de función.

La función con la que van a tener que trabajar los alumnos es polinómica de grado tres por tratarse de una función continua, con un único máximo y un único mínimo y que obliga al estudiante a recurrir a la representación gráfica para localizar los máximos y mínimos, pues únicamente a partir del registro Tabular o Numérico sería difícil localizarlos.

De este modo, la conversión de este registro, a los Registros Tabular y Numérico y de estos al registro Gráfico se convierte en el objetivo principal que se pretende que el alumno desarrolle a través de un contexto relacionado con la búsqueda de las coordenadas del máximo y del mínimo de la función dada para poder acceder al panel de mando de los aerogeneradores:

"Para acceder al panel de mandos que controla el funcionamiento de los aerogeneradores, es necesario introducir una clave numérica.

Un día de mucho viento, el responsable de manejar el panel de mandos no se encuentra en la central y os pide a vosotros, que estáis de guardia, que paréis los aerogeneradores.

El problema es que desconocéis la clave, pero sabéis que los dígitos que forman dicha clave se corresponden con las coordenadas (x,y) de dos puntos determinados de la función $y= 3x - x^3$.

Las instrucciones para encontrar la clave e introducirla son:

- Primero: se introducen las coordenadas (x,y) del punto donde la función pasa de crecer a decrecer.
- Segundo: se introducen las coordenadas (x,y)del punto donde la función pasa de decrecer a crecer

¿Cuál es la clave que da acceso al panel de mandos?"

Como ya se ha dicho, el hecho de proporcionar la función a través del registro algebraico en términos de la nomenclatura habitual de las variables dependiente e independiente, promueve la articulación con los registros Numérico y Tabular y de estos al registro Gráfico para encontrar la solución.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Vamos a empezar una nueva actividad. Para manejar los aerogeneradores, es decir, los molinos estos de viento, hay un panel de control.*

  Resulta que un día que hace mucho viento, el encargado de manejar ese panel de control no está en la central eólica y entonces vosotros tenéis que manejar ese panel de control para parar los aerogeneradores porque sino se van romper.

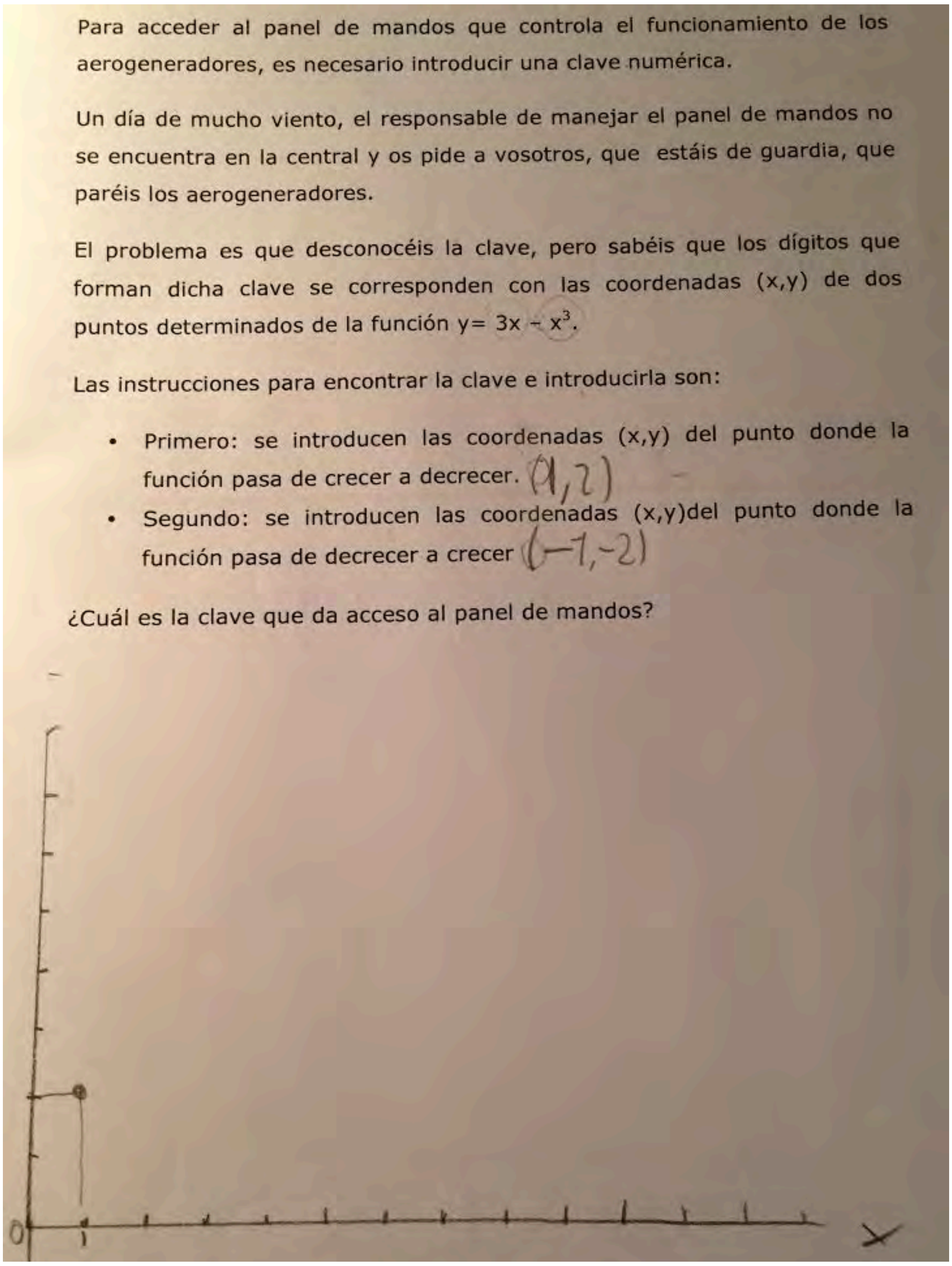
  El panel tiene una clave, pero no conocéis la clave. Lo único que conocéis sabéis es que se corresponden con las coordenadas de dos puntos. De dos puntos de esta función: $y =3x - x^3$.

  ¿Cuáles son esos dos puntos? Pues el primero…las coordenadas del primer punto (x, y), es el punto donde la función pasa de crecer a decrecer. Y el segundo es el punto donde la función pasa de decrecer a crecer.

  Esas coordenadas son las que os van a dar la clave para poder acceder al panel.

Nada más recibir la información todos los grupos tienen claro que para poder encontrar las coordenadas de los puntos que hacen faltan para la clave, tiene que construir la gráfica de la función que se les ha dado. En este sentido, es reseñable que los grupos 6 y 7 empiezan a trazar los ejes de la gráfica antes de encontrar los valores que definen la función, cometiendo el error de dibujar únicamente los ejes positivos, teniendo que modificarlo más adelante:

Grupo 6



Para acceder al panel de mandos que controla el funcionamiento de los aerogeneradores, es necesario introducir una clave numérica.

Un día de mucho viento, el responsable de manejar el panel de mandos no se encuentra en la central y os pide a vosotros, que estáis de guardia, que paréis los aerogeneradores.

El problema es que desconocéis la clave, pero sabéis que los dígitos que forman dicha clave se corresponden con las coordenadas (x,y) de dos puntos determinados de la función $y = 3x - x^3$.

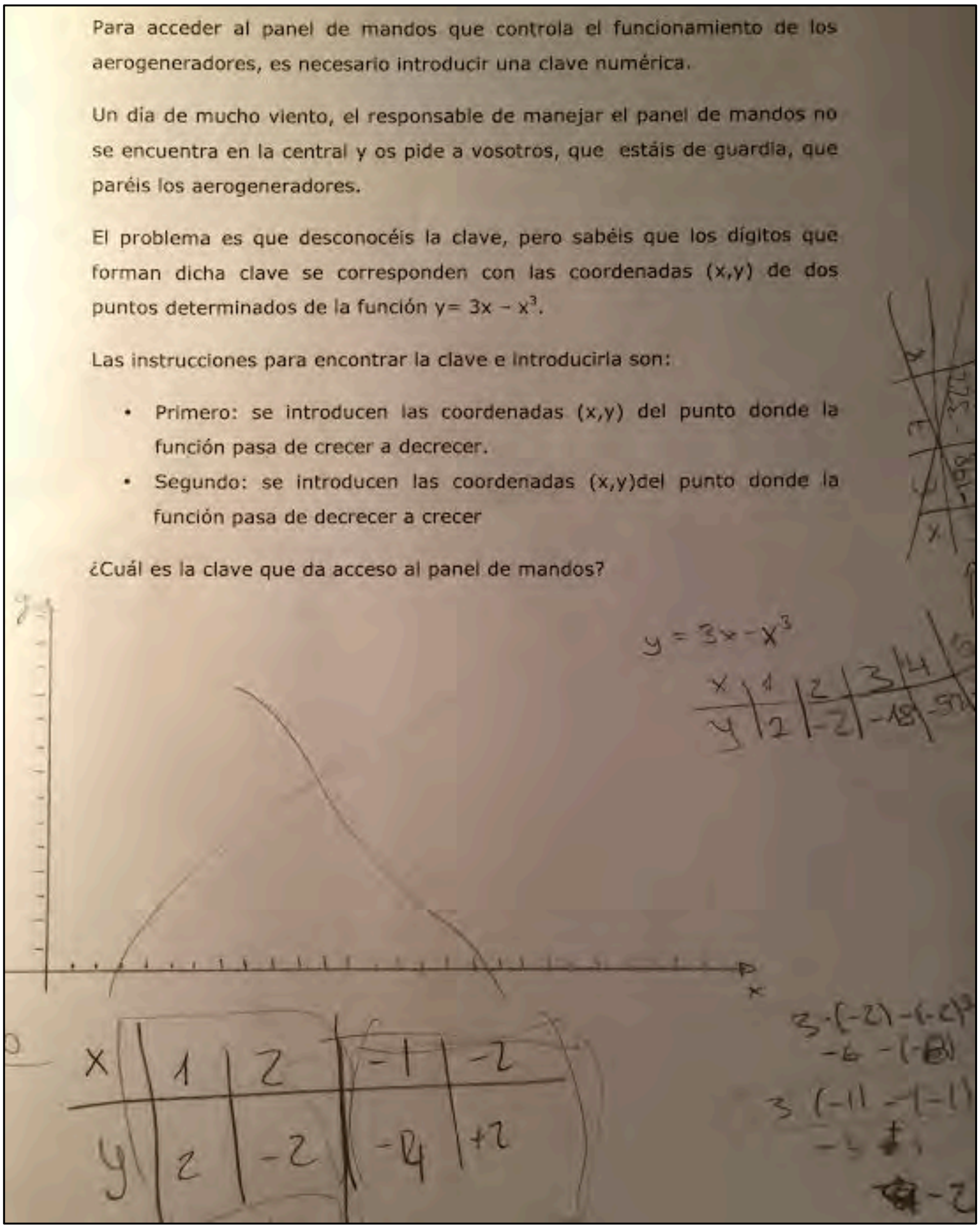
Las instrucciones para encontrar la clave e introducirla son:

- Primero: se introducen las coordenadas (x,y) del punto donde la función pasa de crecer a decrecer. (1,2)
- Segundo: se introducen las coordenadas (x,y)del punto donde la función pasa de decrecer a crecer (-1,-2)

¿Cuál es la clave que da acceso al panel de mandos?

FIGURA 4.5.5.64. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.3.2*

Grupo7



Para acceder al panel de mandos que controla el funcionamiento de los aerogeneradores, es necesario introducir una clave numérica.

Un día de mucho viento, el responsable de manejar el panel de mandos no se encuentra en la central y os pide a vosotros, que estáis de guardia, que paréis los aerogeneradores.

El problema es que desconocéis la clave, pero sabéis que los dígitos que forman dicha clave se corresponden con las coordenadas (x,y) de dos puntos determinados de la función $y= 3x - x^3$.

Las instrucciones para encontrar la clave e introducirla son:

- Primero: se introducen las coordenadas (x,y) del punto donde la función pasa de crecer a decrecer.
- Segundo: se introducen las coordenadas (x,y)del punto donde la función pasa de decrecer a crecer

¿Cuál es la clave que da acceso al panel de mandos?

$y = 3x - x^3$

x	1	2	3	4
y	2	-2	-18	-52

x	1	2	-1	-2
y	2	-2	-4	+2

FIGURA 4.5.5.65. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.3.2*

Por otro lado, el grupo 7 presenta ciertas dificultades iniciales para construir la gráfica debido a la no identificación de las variables dependiente e independiente en la representación de la función dada mediante el registro algebraico:

– **Profesor:** *Contadme que estáis haciendo.*

– **María:** *Pues vamos a hacer una gráfica.*

- **Profesor:** *Vais a hacer una gráfica.*
- **María:** *Esa es la conclusión a la que hemos llegado.*
- **Profesor:** *¿Y por qué habéis llegado a esa conclusión?*
- **Esther:** *Porque sino no vemos bien en que puntos son en los que crece y decrece.*
- **Profesor:** *¿Y para dibujar la gráfica, ¿qué vais a hacer?*
- **María:** *Pues tenemos que resolver esto, pero no sabemos.*
- **Profesor:** *¿Resolverlo? ¿Qué se ve en esa función? ¿Qué hay?*
- **Esther:** *x e y.*
- **Profesor:** *Es decir, las variables. ¿Qué variables son? ¿x quién era?*
- **Esther:** *x la independiente e y la dependiente.*
- **Profesor:** *Luego, la y…¿de quién depende?*
- **María y Esther:** *De la x.*
- **Profesor:** *Entonces, si una depende de otra, ¿qué podéis hace para empezar a dibujar?*
- **María:** *Pues hay que sustituir.*
- **Profesor:** *¿El qué vais a sustituir?*
- **Esther:** *Damos valores para x…*
- **María:** *Hay poner esto* (dibuja tabla de valores).
- **Esther:** *Pues eso, dar valores a la x para saber la y.*

Por otro lado, como también ha quedado ejemplificado en la conversación anterior, 6 de los ocho grupos han recurrido a la conversión del registro Algebraico al Tabular para a partir de este construir la gráfica que les permita visualizar los puntos:

Grupo 2

- **Colaborador 4:** *¿Me explicáis cómo lo habéis resuelto?*
- **María:** *Lo primero que hemos pensado es que había que representar la función. Y por eso le hemos dado valores a la x. Por ejemplo le hemos dado el valor 1 y nos da que la y es 2. Hemos utilizado una tabla.*
- **Colaborador 4:** *¿Por qué le habéis dado valores a la x?*
- **María, Sara y Beatriz:** *Porque es la independiente.*

- **María:** *Y entonces nos ha salido está función y ya hemos visto cuales son los mínimos y los máximos y nos ha dado (-1, -2) y (1 , 2).*
- **Beatriz:** *No. (1, 2) y (-1, -2)*
- **María:** *Y que más dará el orden…*
- **Beatriz:** *Porque si metes la clave al contrario, ¡no sale!*

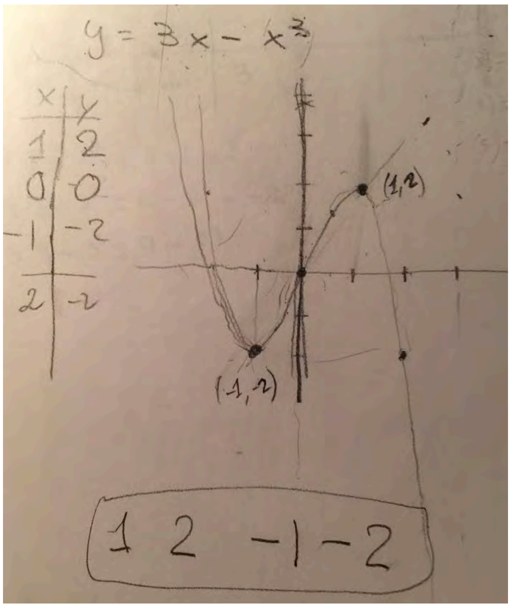
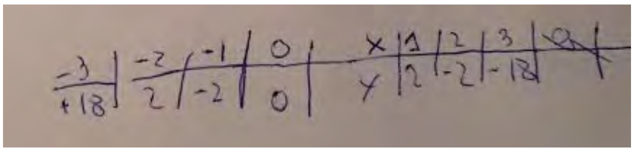


FIGURA 4.5.5.66. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.3.2*

Grupo 8



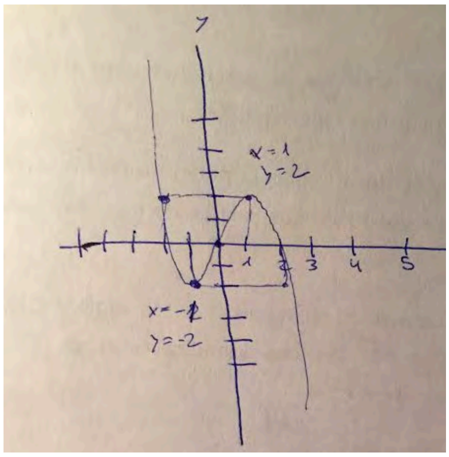
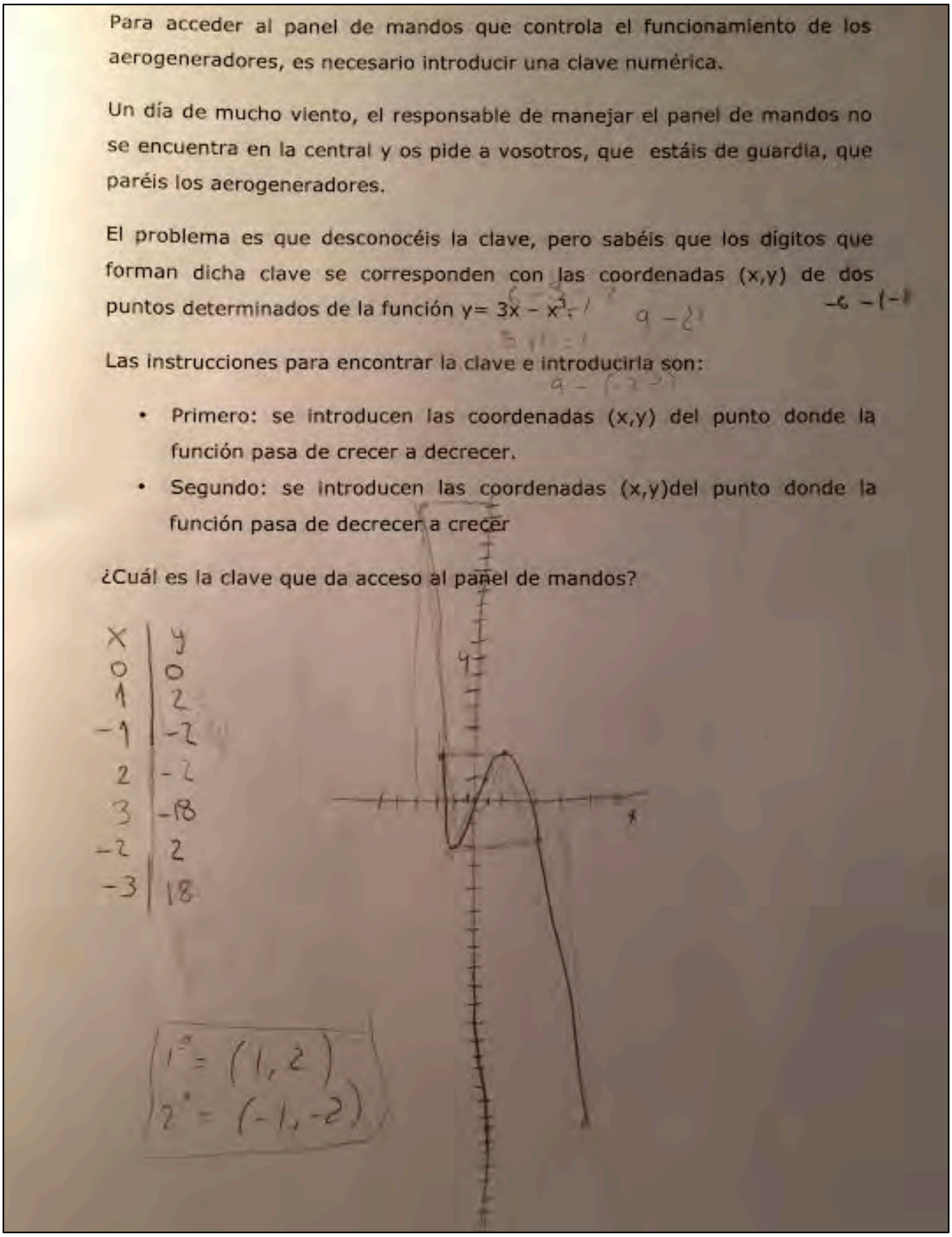


FIGURA 4.5.5.67. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.3.2*

Grupo 1



Para acceder al panel de mandos que controla el funcionamiento de los aerogeneradores, es necesario introducir una clave numérica.

Un día de mucho viento, el responsable de manejar el panel de mandos no se encuentra en la central y os pide a vosotros, que estáis de guardia, que paréis los aerogeneradores.

El problema es que desconocéis la clave, pero sabéis que los dígitos que forman dicha clave se corresponden con las coordenadas (x,y) de dos puntos determinados de la función $y = 3x - x^3$.

Las instrucciones para encontrar la clave e introducirla son:

- Primero: se introducen las coordenadas (x,y) del punto donde la función pasa de crecer a decrecer.
- Segundo: se introducen las coordenadas (x,y)del punto donde la función pasa de decrecer a crecer

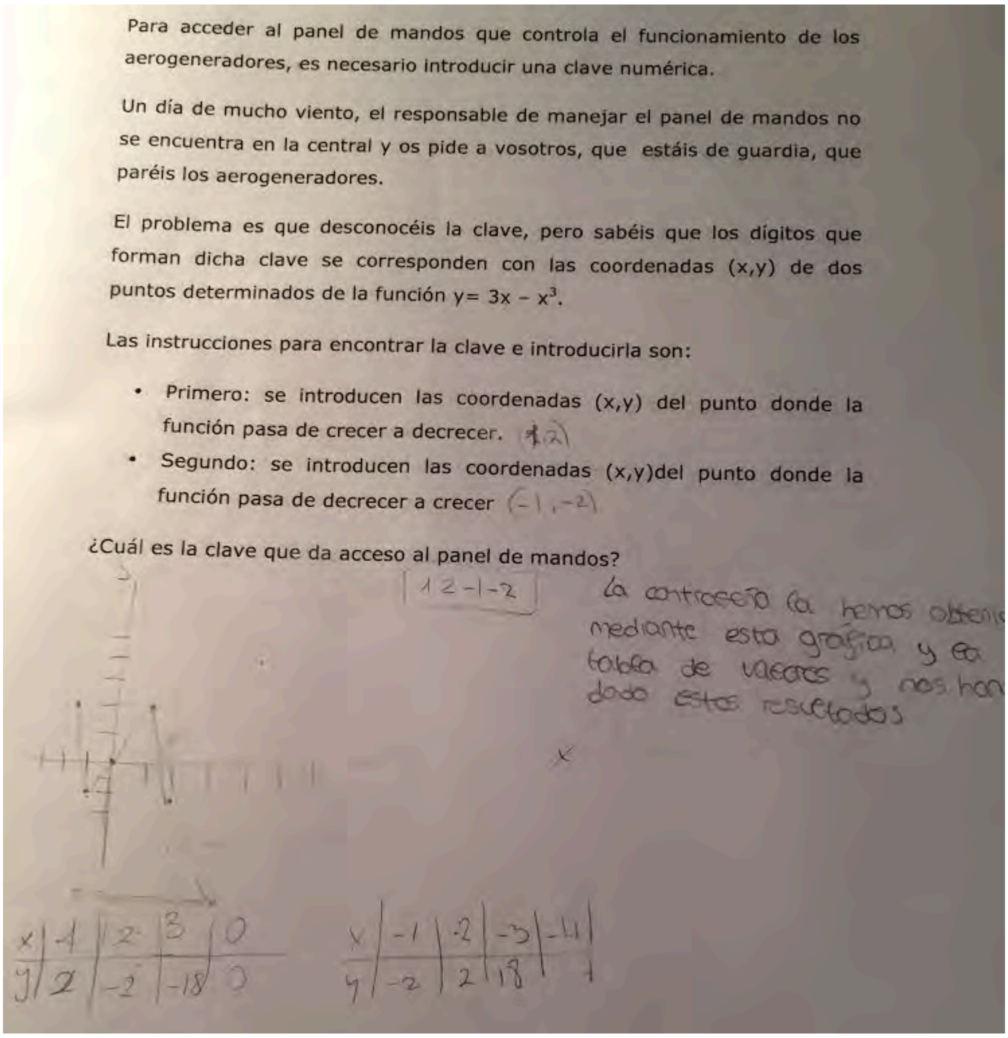
¿Cuál es la clave que da acceso al panel de mandos?

X	y
0	0
1	2
-1	-2
2	-2
3	-18
-2	2
-3	18

$1^o = (1, 2)$
$2^o = (-1, -2)$

FIGURA 4.5.5.68. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.3.2*

Grupo 5


Para acceder al panel de mandos que controla el funcionamiento de los aerogeneradores, es necesario introducir una clave numérica.

Un día de mucho viento, el responsable de manejar el panel de mandos no se encuentra en la central y os pide a vosotros, que estáis de guardia, que paréis los aerogeneradores.

El problema es que desconocéis la clave, pero sabéis que los dígitos que forman dicha clave se corresponden con las coordenadas (x,y) de dos puntos determinados de la función $y = 3x - x^3$.

Las instrucciones para encontrar la clave e introducirla son:

- Primero: se introducen las coordenadas (x,y) del punto donde la función pasa de crecer a decrecer. (1,2)
- Segundo: se introducen las coordenadas (x,y)del punto donde la función pasa de decrecer a crecer (-1,-2)

¿Cuál es la clave que da acceso al panel de mandos?

$\boxed{1\ 2\ -1\ -2}$

La contraseña la hemos obtenido mediante esta gráfica y la tabla de valores y nos han dado estos resultados

x	-1	2	3	0
y	2	-2	-18	0

x	-1	-2	-3	-4
y	-2	2	18	

FIGURA 4.5.5.69. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.3.2*

No obstante, cabe destacar que algunos grupos, como es el caso del grupo 5 cuya gráfica se puede apreciar encima de estas líneas, únicamente dibujan la gráfica correspondiente a los puntos que han calculado, no prolongando la función.

Por su parte, los grupos 4 y 6, inicialmente no hacen uso de la tabla para organizar ni calcular los valores de la variable dependiente a partir de los de la independiente, recurriendo de manera directa a la articulación del registro Algebraico con el Numérico:

Grupo 6

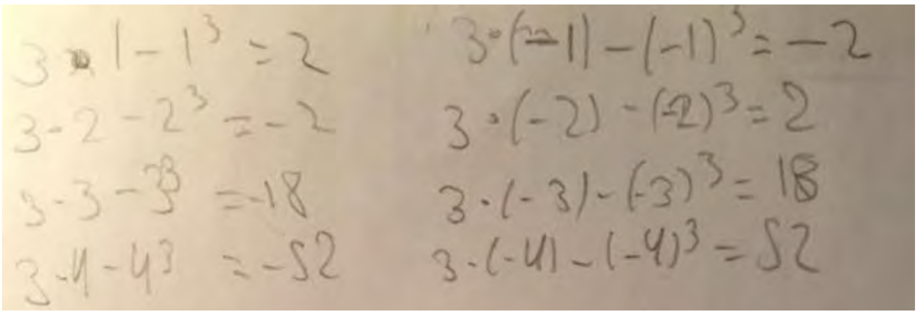


FIGURA 4.5.5.70. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.3.2*

Grupo 4

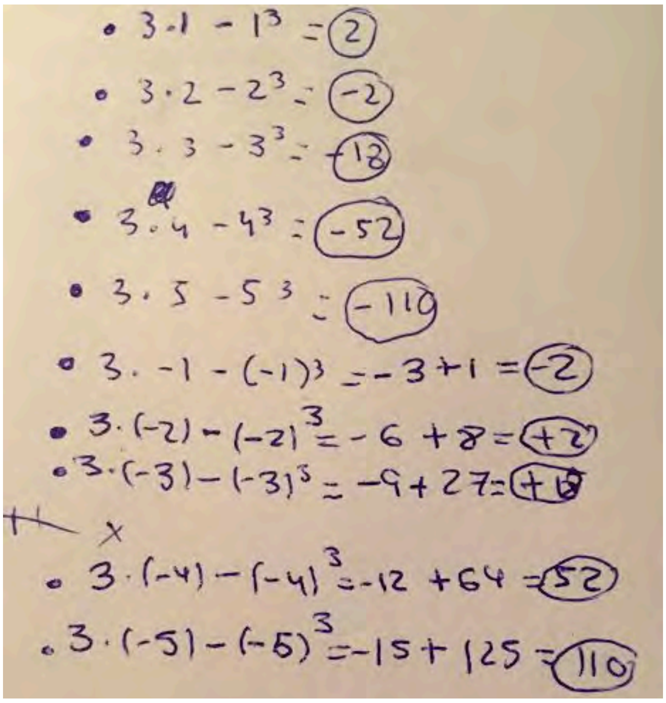


FIGURA 4.5.5.71. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.3.2*

Es a la hora de ponerse a construir la gráfica a partir de los valores calculados cuando deciden organizar los resultadas a través de una tabla para visualizar mejor la correspondencia entre x e y.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.23. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de Situación 3*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.	
Grupo 2	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.	
Grupo 3	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.	
Grupo 4	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico.	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.

Grupo 5	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.	
Grupo 6	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico.	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.
Grupo 7	Resolución de la ecuación que define la función para así poder representarla.	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.
Grupo 8	Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.24. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 3*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico y Tabular y de este al Gráfico.	5	62,5 %
Representación gráfica de la función para localizar el máximo y el mínimo mediante la conversión del registro Algebraico al Numérico.	2	25 %
Resolución de la ecuación que define la función para así poder representarla.	1	12,5 %

Fuente: elaboración propia

Siendo la primera toma de contacto de los alumnos con el concepto de función representado mediante el registro semiótico Algebraico, todos los grupos han partido de la premisa de que, con las herramientas de las que disponen hasta el momento, era necesaria la conversión de la expresión algebraica a su correspondiente representación cartesiana para localizar las coordenadas del máximo y el mínimo de la función.

Sin embargo, no todos ellos identifican las variables dependiente e independiente dadas algebraicamente para así poder relacionarlas posteriormente con sus homólogos en la representación gráfica, intentando resolver la ecuación en lugar de asignar valores.

Del mismo modo, aunque un alto porcentaje recurre de manera inmediata al registro Tabular como proceso de coordinación intermedio entre lo algebraico y lo gráfico, dos de los grupos prescinden en primera instancia de él hasta percatarse de su utilidad como registro que permite visualizar de manera directa la dependencia establecida entre x e y, logrando así alcanzar uno de los objetivos de esta fase que era el de favorecer la coordinación entre cuatro registros semióticos: Registro Algebraico –Registro Tabular- Registro Numérico - Registro Gráfico.

Esto nos sugiere la necesidad de potenciar la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos en general y del concepto de función y sus propiedades en particular, a través de la articulación del máximo número de registros de representación mediante actividades que demanden por parte del estudiante el empleo de diferentes representaciones, pues así pueden vislumbrar, aclarar y comprender diferentes aspectos de un mismo concepto y de sus relaciones con otros, como ha ocurrido en este caso al tener que trabajar la dependencia entre variables a partir del registro Algebraico.

Situación 4: El observatorio astronómico.

Periodicidad.

La situación se desarrolló el día 30 de abril de 2013 (*Fases 1*) y el día 6 de mayo (*Fase 2*) durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

La cuarta situación, constituida por dos fases, giró en torno al estudio de la periodicidad de las funciones ostentadas a través de su representación gráfica y de su representación tabular.

Con el fin de seguir trabajando la conversión de registros semióticos con nuestros alumnos, la primera de las fases se configuró de tal manera que se buscaba que los estudiantes promoviesen la traducción del registro Tabular al registro Numérico o Gráfico.

Por su lado, en la segunda fase entraría en juego un nuevo registro, el Figural, con el fin de extraer conclusiones a partir de él y poder construir la gráfica del fenómeno natural que representaba.

Fase 1: Fases de la Luna

Descripción:

Partiendo de un fenómeno natural, perceptible y de gran cercanía al alumno como es el ciclo lunar, esta primera fase se ha diseñado con la intención de que el alumno pueda trabajar libremente con aquellas representaciones y conversiones que les resulten más asequibles.

Para ello, a partir de la aportación de los datos, dados en formato tabla, del tanto porciento que es visible la Luna desde la Tierra en función del día, el alumno debe responder a una serie de preguntas tras haber descubierto el carácter periódico de dicho fenómeno mediante la conversión hacía el registro Numérico o al registro Gráfico, pues el hecho de facilitar la información haciendo uso del registro Tabular impide visualizar de manera directa el carácter periódico de la función.

“Como sabéis, no todos los días vemos la misma cantidad de Luna en el cielo nocturno.

FIGURA 4.5.5.72. *Fases lunares*

El % que es visible de la luna varía en función del día, desde el 0% (luna nueva) hasta el 100% (luna llena). En la tabla que aparece a continuación podéis ver los últimos datos que han recogido en el observatorio en relación al % que es visible de la luna:

TABLA 4.5.5.25. *Tabla para los alumnos con el % de luna visible*

DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%
10 Mar	16%	17 Mar	25%	24 Mar	83%	31 Mar	76%
11 Mar	8%	18 Mar	34%	25 Mar	90%	1 Abr	67%
12 Mar	3%	19 Mar	43%	26 Mar	97%	2 Abr	58%
13 Mar	0%	20 Mar	50%	27 Mar	100%	3 Abr	50%
14 Mar	3%	21 Mar	58%	28 Mar	97%	4 Abr	43%
15 Mar	8%	22 Mar	67%	29 Mar	90%	5 Abr	34%
16 Mar	16%	23 Mar	76%	30 Mar	83%	6 Abr	25%

Fuente: elaboración propia

Hoy es 30/04/2013,

¿Cuándo ha sido la última Luna nueva?

¿Cuándo será la próxima Luna llena?

¿Qué tanto por ciento de la Luna se verá esta noche?

¿Qué día de junio será cuarto creciente?

¿Qué tanto por ciento es visible de la Luna el 01/01/2013?

¿Qué tanto por ciento es visible de la Luna el día 29/04/2013?”

Si analizamos las cuestiones a responder, tres de ellas se centran en fechas distanciadas en el tiempo con respecto a la fecha de referencia y su ciclo lunar. De este modo el estudiante se ve obligado a moverse a lo largo del calendario partiendo de los datos proporcionados en la tabla, teniendo detectar el carácter periódico ya se sea directamente mediante la articulación del registro Tabular con el Numérico o sea previo paso al Registro Gráfico.

No obstante, aunque el diseño de la actividad permite al alumno utilizar el registro Numérico o el Gráfico para detectar la periodicidad de la función y el valor de dicho periodo, se considera que el trabajo se simplifica en gran medida si se opta por la opción de pasar de los datos de la tabal a la gráfica para percibir visualmente dicho comportamiento y su duración.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

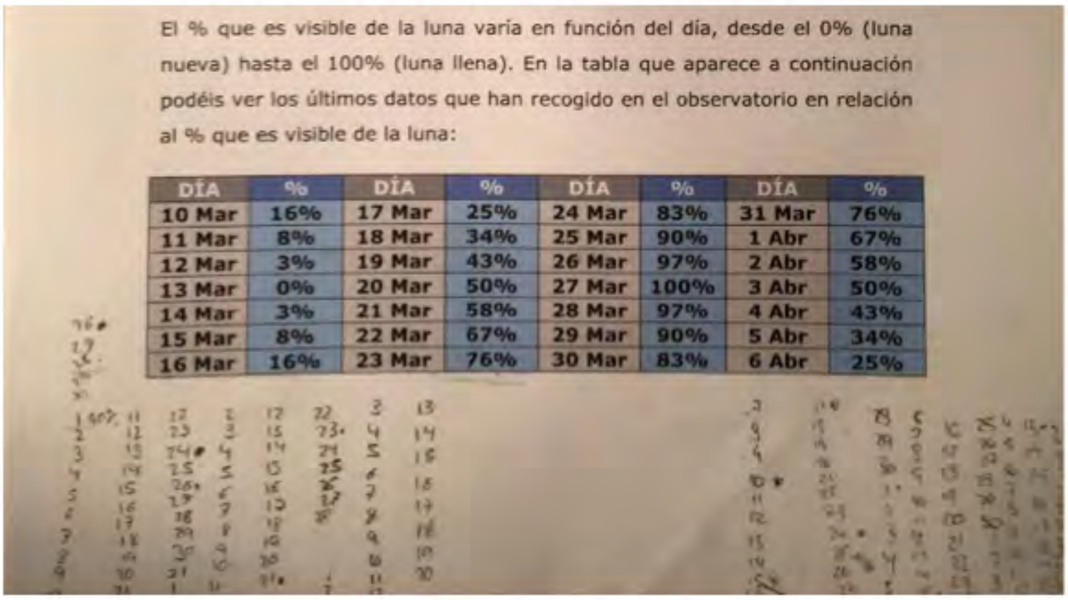
- **Profesor:** *Trabajáis en un observatorio astronómico. Estamos observando el cielo nocturno, en concreto la Luna. Ya sabéis que no siempre vemos la misma proporción de Luna en el cielo. Tenemos la Luna nueva, la Luna llena, cuarto menguante y cuarto creciente.*

  Bueno, pues algunos compañeros del observatorio han recogido desde el 10 de marzo de 2013 al 6 de abril de 2013 el % de Luna que vemos en el cielo en cada una de esas noches.

  Sí se ve el 100%, ¿qué tipo de Luna es?

- **Varios:** *Llena.*
- **Profesor**: *¿Y si se ve el 0%?*
- **Varios:** *Nueva.*
- **Profesor:** *Pues a partir de estos os piden que contestéis las siguientes cuestiones. Tenéis que explicar el porque dais esas respuestas. No vale que únicamente pongáis el día o el porcentaje, hay que dar una explicación.*

En esta ocasión, todos los grupos coinciden en la utilización de la estrategia base, pues los 8 recurren al simple conteo hasta llegar a las fechas pedidas o los periodos lunares por los que se pregunta, al detectar que los % se van repitiendo, trabajando con los registros Tabular y Numérico:


El % que es visible de la luna varía en función del día, desde el 0% (luna nueva) hasta el 100% (luna llena). En la tabla que aparece a continuación podéis ver los últimos datos que han recogido en el observatorio en relación al % que es visible de la luna:

DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%
10 Mar	16%	17 Mar	25%	24 Mar	83%	31 Mar	76%
11 Mar	8%	18 Mar	34%	25 Mar	90%	1 Abr	67%
12 Mar	3%	19 Mar	43%	26 Mar	97%	2 Abr	58%
13 Mar	0%	20 Mar	50%	27 Mar	100%	3 Abr	50%
14 Mar	3%	21 Mar	58%	28 Mar	97%	4 Abr	43%
15 Mar	8%	22 Mar	67%	29 Mar	90%	5 Abr	34%
16 Mar	16%	23 Mar	76%	30 Mar	83%	6 Abr	25%

FIGURA 4.5.5.73. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.4.1*

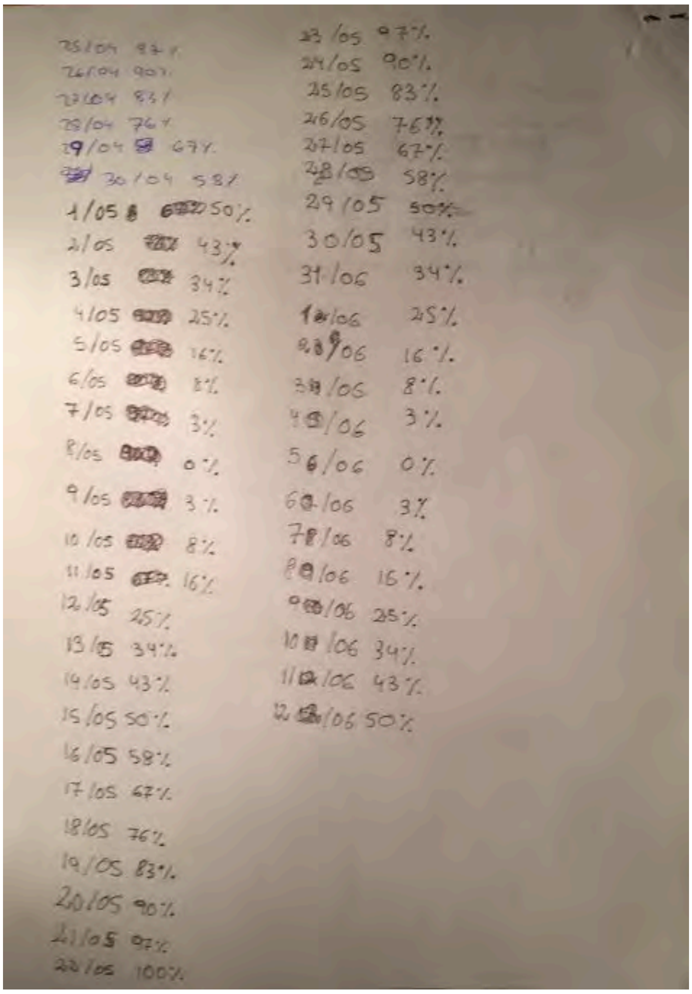


FIGURA 4.5.5.74. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.4.1*

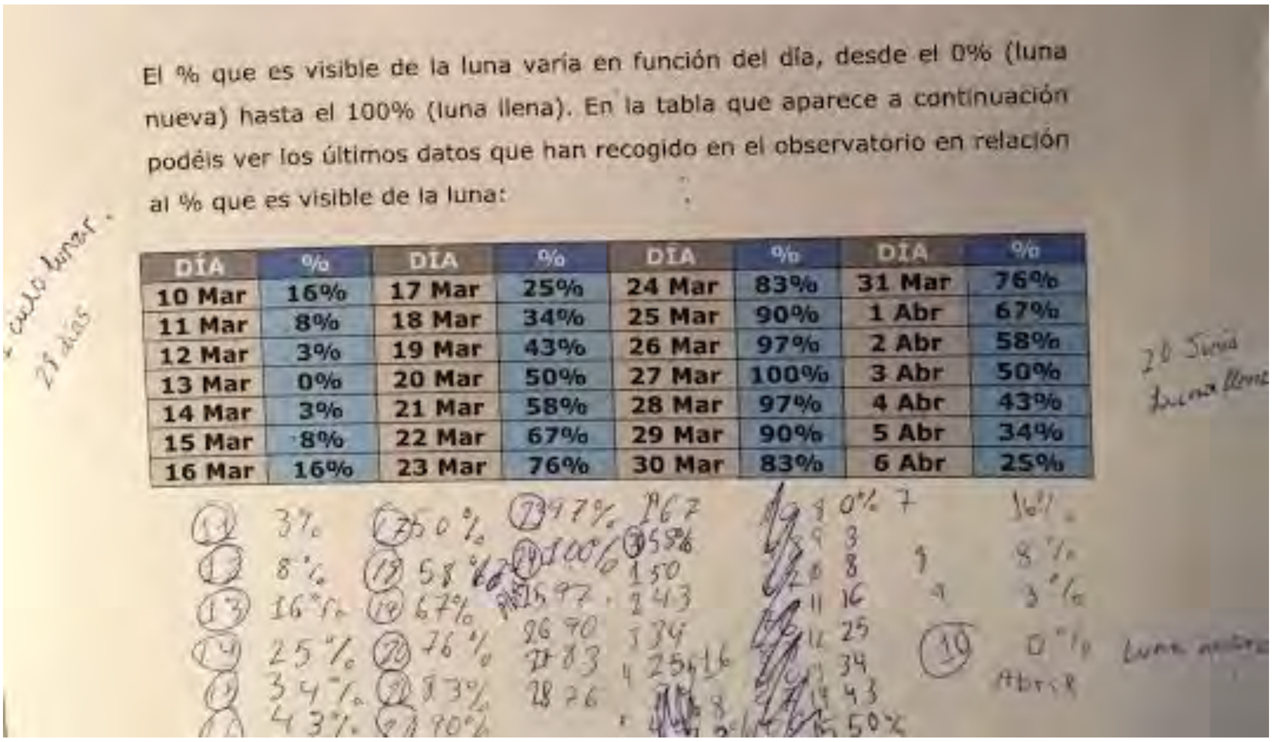
Los grupos 2, 4, 5, 6 y 7, al intentar dar respuesta a las demás cuestiones, descubren que la técnica del conteo es muy lenta, lo que les lleva a descubrir pautas en los datos, siempre trabajando desde el cálculo y el registro Numérico:

Grupo 2

- **Profesor:** *¿Qué tal?¿Qué hacéis?*
- **Beatriz:** *a ver…que yo te voy a dar la explicación..*
- **Profesor:** *Venga, explícamelo Beatriz.*
- **Beatriz:** *Cómo la Luna nueva se ve el 0% y los porcentajes se van repitiendo…hemos contado desde el 0% hasta ver cuando es otra vez 0%.*
- **Profesor:** *¿Cuántos días os salen de una luna nueva a otra?*
- **Sara:** *28.*

Grupo 4

- **Profesor:** *¿Me contáis que habéis hecho?*
- **Xana:** *Es que nos hemos equivocado.*
- **Profesor:** *Pero…, ¿qué estáis haciendo?*
- **Xana:** *Pues nos hemos dado cuenta que cada vez que era Luna llena o Luna nueva, volvían a repetirse los valores. Y entonces estamos construyendo día para ver el porcentaje que se ve y así hasta que nos den todos los resultados.* (el profesor se va)
- **Ainhoa:** *El 27 de marzo fue Luna llena, el siguiente será el 24 de abril* (completando los días que han escrito con el porcentaje que se ve cada día). Todavía no llegamos.
- **Mireya:** *¿Y porque no en lugar de poner todos otra vez, no contamos?*
- **Xana:** *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14. 14 por 2 son 28 días. Entonces 28 días después, son 28 días para acá…va a caer en mayo. 24 más 28 son 52. 52 menos 30 son 12, el 12 de mayo. Abril tiene 30, ¿no?*
- **Mireya:** *Sí.*



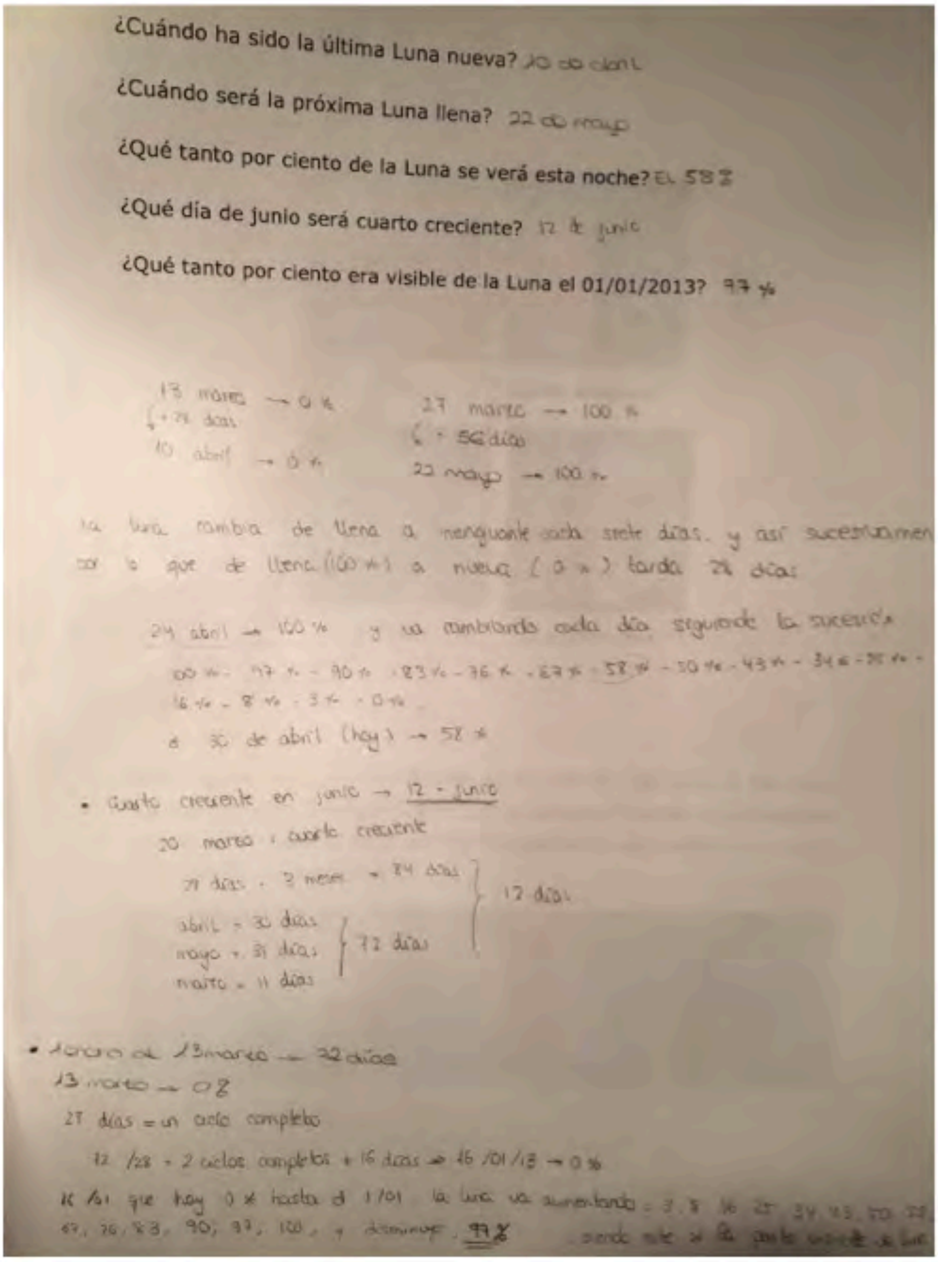
El % que es visible de la luna varía en función del día, desde el 0% (luna nueva) hasta el 100% (luna llena). En la tabla que aparece a continuación podéis ver los últimos datos que han recogido en el observatorio en relación al % que es visible de la luna:

DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%
10 Mar	16%	17 Mar	25%	24 Mar	83%	31 Mar	76%
11 Mar	8%	18 Mar	34%	25 Mar	90%	1 Abr	67%
12 Mar	3%	19 Mar	43%	26 Mar	97%	2 Abr	58%
13 Mar	0%	20 Mar	50%	27 Mar	100%	3 Abr	50%
14 Mar	3%	21 Mar	58%	28 Mar	97%	4 Abr	43%
15 Mar	8%	22 Mar	67%	29 Mar	90%	5 Abr	34%
16 Mar	16%	23 Mar	76%	30 Mar	83%	6 Abr	25%

FIGURA 4.5.5.75. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.4.1*

Grupo 5

- **Helena:** *El 7 habrá 16%...*
- **María y Helena:** *8, 9 y 10.*
- **María:** *Hasta el 10 de abril*
- **Helena:** *Entonces, ¿cada cuanto hay luna nueva?*
- **María:** *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.*
- **Helena:** *14 por 2. De cero para arriba 14 y de 100 para abajo 14. 14 por 2.*


¿Cuándo ha sido la última Luna nueva?

¿Cuándo será la próxima Luna llena? 22 de mayo

¿Qué tanto por ciento de la Luna se verá esta noche? EL 58 %

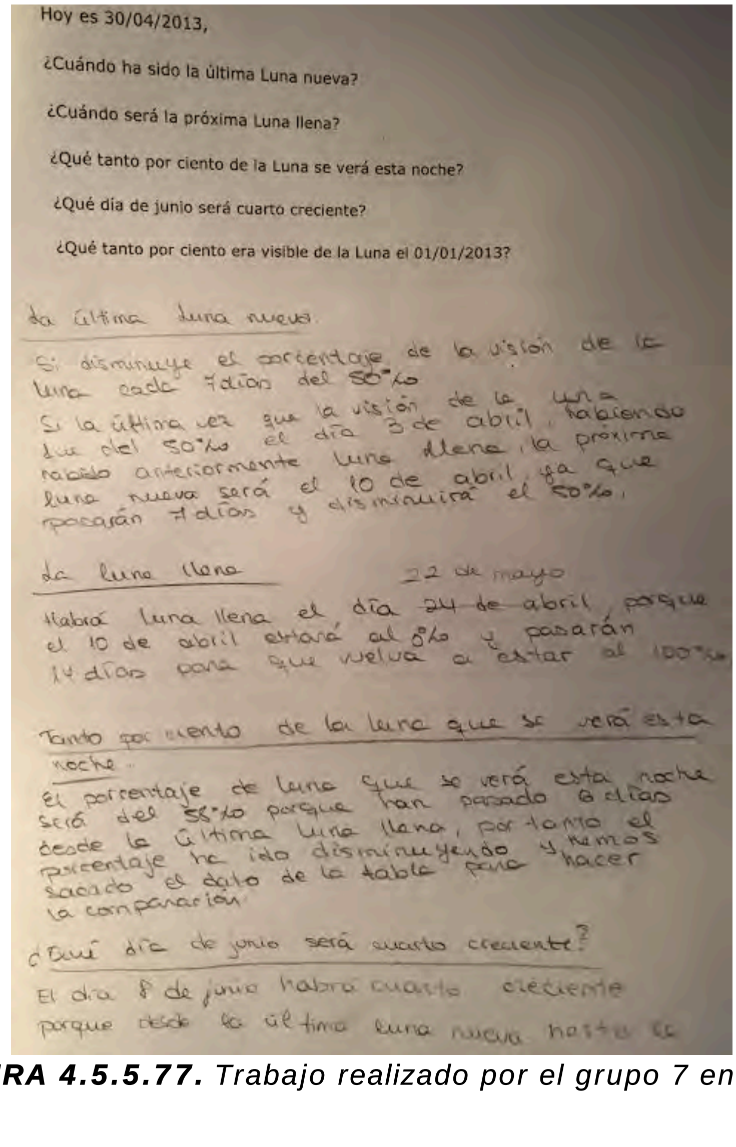
¿Qué día de junio será cuarto creciente? 12 de junio

¿Qué tanto por ciento era visible de la Luna el 01/01/2013? 97 %

FIGURA 4.5.5.76. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.4.1*

Grupo 7

- **María:** *Aquí pone 0%, 50%, 100%. Por lo tanto aquí debería poner 0%.*
- **Esther:** *No. Es 0- 50-100-50-0. Y sigue así, 50-100-50-0...*
- **Lucía:** *Hay 7 días entre una y otra.*
- **Profesor:** *¿Me contáis lo que estáis haciendo?*
- **Lucía:** *Pues hemos descubierto que aumenta el 50% o disminuye el 50% cada 7 días. Entonces si el 3 de abril había el 50%, a los 7 días habrá el 0%.*
- **Profesor:** *¿Y por qué sabéis que es 0 y no va a ser el 100%?*
- **Lucía:** *Porque va disminuyendo según los datos de la tabla.*
- **Profesor:** *¿Y que día os sale entonces que fue la última Luna nueva?*
- **Lucía, María y Esther:** *El 10.*



Hoy es 30/04/2013,

¿Cuándo ha sido la última Luna nueva?

¿Cuándo será la próxima Luna llena?

¿Qué tanto por ciento de la Luna se verá esta noche?

¿Qué día de junio será cuarto creciente?

¿Qué tanto por ciento era visible de la Luna el 01/01/2013?

La última luna nueva.

Si disminuye el porcentaje de la visión de la luna cada 7 días del 50%
Si la última vez que la visión de la luna fue del 50% el día 3 de abril, habiendo habido anteriormente luna llena, la próxima luna nueva será el 10 de abril, ya que pasarán 7 días y disminuirá el 50%.

La luna llena

22 de mayo

Habrá luna llena el día ~~24 de abril~~, porque el 10 de abril estará al 0% y pasarán 14 días para que vuelva a estar al 100%.

Tanto por ciento de la luna que se verá esta noche.

El porcentaje de luna que se verá esta noche será del 58% porque han pasado 6 días desde la última luna llena, por tanto el porcentaje ha ido disminuyendo y hemos sacado el dato de la tabla para hacer la comparación.

¿Qué día de junio será cuarto creciente?

El día 8 de junio habrá cuarto creciente porque desde la última luna nueva hasta la

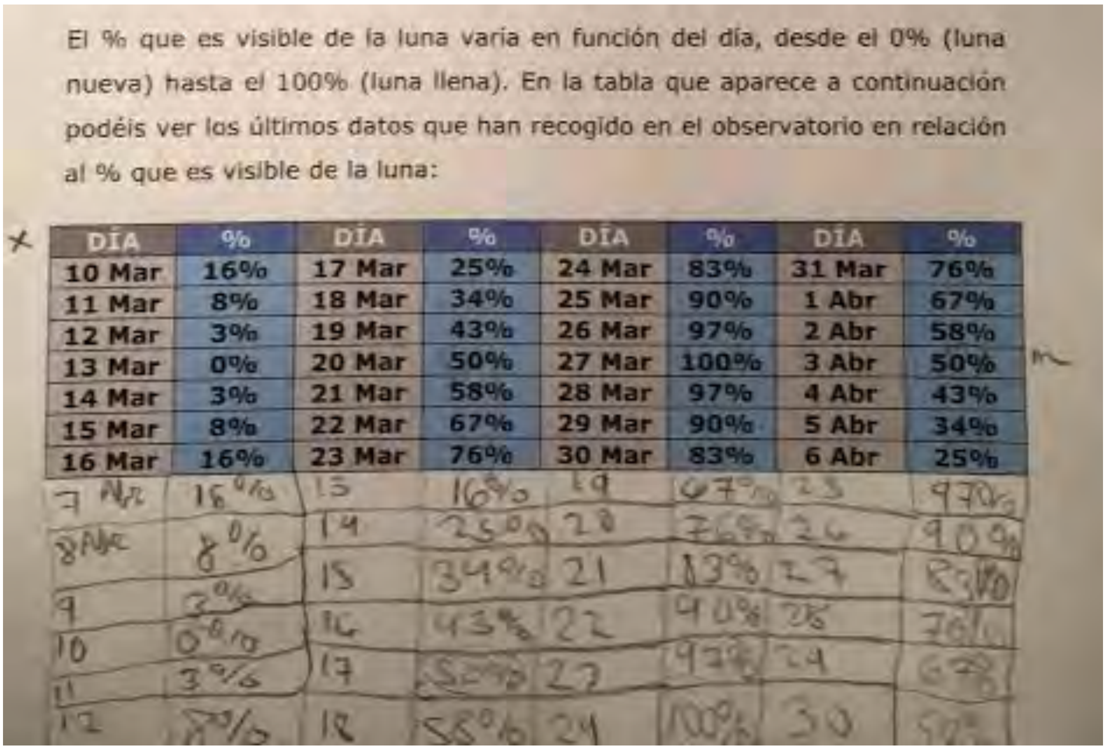
FIGURA 4.5.5.77. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.4.1*

Únicamente, un componente del grupo 6 se plantea en un determinado momento en recurrir al registro Gráfico para poder visualizar cada cuanto se repiten los datos y como se producen las variaciones en los % de visibilidad de la Luna.

Grupo 6

- **Javier:** *1, 2, 3, 4 …*
- **Sergio:** *¿No ves que se repiten? Vamos a hacer una gráfica si quieres.*
- **Javier:** *Pero nos preguntan cuando ha sido la última Luna nueva.*
- **Sergio:** *A mi me da que hay que hacer una gráfica.*
- **Javier:** *En la tabla pone que la última Luna nueva ha sido el 13 de marzo.*
- **Sergio:** *Yaaa…pero hay que calcularlo, porque no estamos a 6 de abril, estamos a 30 y la Luna cambia ha podido haber alguna entremedias.*

No obstante, nunca llegan a construir la gráfica y optan, finalmente por la búsqueda del periodo a través del registro Numérico, lo que les conduce a error debido a un problema de conteo entre los días que transcurren entre una Luna llena y una Luna nueva, pues cuentan 15 días entre ambas:



El % que es visible de la luna varía en función del día, desde el 0% (luna nueva) hasta el 100% (luna llena). En la tabla que aparece a continuación podéis ver los últimos datos que han recogido en el observatorio en relación al % que es visible de la luna:

DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%	DÍA	%
10 Mar	16%	17 Mar	25%	24 Mar	83%	31 Mar	76%
11 Mar	8%	18 Mar	34%	25 Mar	90%	1 Abr	67%
12 Mar	3%	19 Mar	43%	26 Mar	97%	2 Abr	58%
13 Mar	0%	20 Mar	50%	27 Mar	100%	3 Abr	50%
14 Mar	3%	21 Mar	58%	28 Mar	97%	4 Abr	43%
15 Mar	8%	22 Mar	67%	29 Mar	90%	5 Abr	34%
16 Mar	16%	23 Mar	76%	30 Mar	83%	6 Abr	25%

FIGURA 4.5.5.78. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.4.1*

El mayor problema de la actividad ha venido dado por la falta de dominio que han manifestado gran cantidad de alumnos con respecto a los días que tiene cada mes del año, dándose afirmaciones como que abril tiene 31 días o que febrero tiene 30.

También se han percibido ciertas carencias en cálculo mental que han conducido a los alumnos a determinar erróneamente los datos pedidos aunque hayan encontrado el periodo de la función.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.26. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 4*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	
Grupo 2	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de ahí, encontrar la solución a las cuestiones planteadas a través del Registro Numérico.
Grupo 3	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	
Grupo 4	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de ahí, encontrar la solución a las cuestiones planteadas a través del Registro Numérico.

Grupo 5	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de ahí, encontrar la solución a las cuestiones planteadas a través del Registro Numérico.
Grupo 6	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de ahí, encontrar la solución a las cuestiones planteadas a través del Registro Numérico.
Grupo 7	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de ahí, encontrar la solución a las cuestiones planteadas a través del Registro Numérico.
Grupo 8	Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.27. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 4*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Resolver la tarea por simple conteo hasta las fechas pedidas.	8	100 %

Fuente: elaboración propia

Lo principal a destacar tras el desarrollo de esta primera fase de la situación, es la predilección que los alumnos tienen hacia el registro Numérico, el cálculo y el trabajo algorítmico, pues, salvo el pequeño comentario realizado por uno de los miembros del grupo 6, en ningún momento surge el planteamiento de pasar los datos recogidos en la tabla a una gráfica.

Esto, unido a que el formato de la tabla no es el habitual a la hora de presentar las relaciones funcionales, ha dado lugar a que la única conversión entre sistemas de representación sea de lo tabular a lo numérico, indicativo de que el alumno recurre de manera inmediata a la conversión al registro gráfico cuando el registro de partida utilizado para representar la relación funcional es el Algebraico, como se pudo ver en la segunda fase de la situación 3.

Cuando los alumnos son capaces de seleccionar o utilizar los registros de representación más pertinentes a la hora de abordar la resolución de problemas, podemos afirmar que ha integrado en su ser el concepto matemático que subyace en ellos. En este caso, aunque la utilización del registro Numérico era totalmente valido, como se ha hecho notar en la descripción inicial de la tarea, consideramos que, por su gran potencial visual, el registro Gráfico hubiese resultado más adecuado y útil a la hora de detectar y trabajar con la noción de función periódica y cálculo del periodo.

Todo ello nos indica que en lo que a los conceptos y propiedades de la función se refiere y en particular al de periodicidad, el alumno está acostumbrado a trabajarlos de forma directa sobre la representación gráfica, siendo probablemente esta situación la primera toma de contacto de esta noción a partir del registro tabular.

Fase 2: Distancia Tierra – Sol

Descripción:

Siguiendo con el estudio de la periodicidad, la segunda fase de la situación persigue que mediante los datos que el observatorio astronómico dispone de la distancia de la Tierra al Sol a lo largo de diferentes años, el alumno sea capaz de detectar el patrón de regularidad que tiene lugar mediante la conversión del registro de la Lengua Natural al registro Gráfico con ayuda auxiliar del Registro Figural, para así determinar cual será la distancia de la Tierra al Sol durante el año 2015:

“El planeta Tierra tarda un año en dar una vuelta completa alrededor del sol. Cuándo la Tierra alcanza su máxima proximidad al Sol, se dice que pasa por el perihelio, y cuando se encuentra en el punto más alejado, se dice que está en el afelio.

Sabemos que la orbita del la Tierra alrededor del sol es la siguiente:

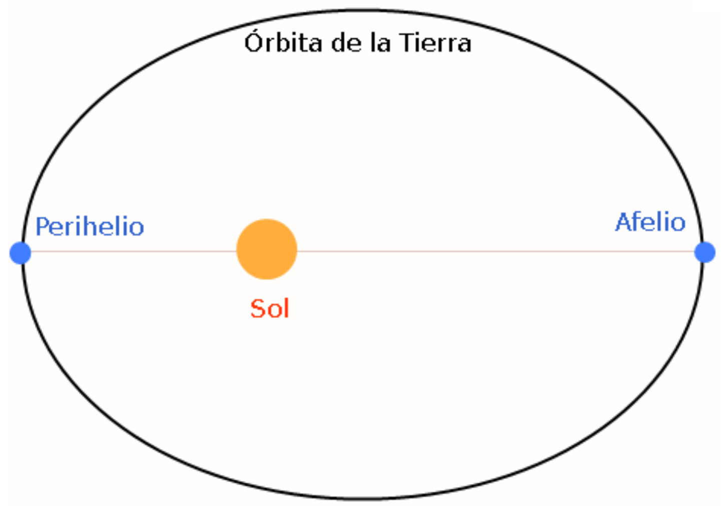


FIGURA 4.5.5.79. *Trayectoria de la Tierra alrededor del Sol*

El centro astronómico dispone de los siguientes datos de la distancia de la Tierra al Sol:

El día 4 de abril de 1976, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de junio de 1979, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de septiembre de 1981, la Tierra se encontraba aproximadamente una distancia de 150,8 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de noviembre de 1983, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de mayo de 1985, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 150,8 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de febrero de 1988, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de julio de 1990, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 152 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Afelio.

El día 4 de diciembre de 1994, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

EL día 4 de enero de 1998, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Perihelio.

El día 4 de marzo de 2003, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de octubre de 2007, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de agosto de 2012, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

A partir del análisis de esos datos, el centro astronómico os pide que construyáis la gráfica cartesiana que describirá la distancia entre la Tierra y el Sol para el año 2015."

Para evitar que el carácter periódico de la función se manifieste de manera inmediata y así forzar al alumno a efectuar la conversión del registro de la Lengua Natural al Gráfico, se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

- Dar la distancia de la Tierra al Sol en distintos años, ya que hubiésemos dado los datos concernientes a los 12 meses a lo largo de un mismo año, el alumno reproduciría esos mismos datos pero para el año 2015 sin necesidad de estudiar su periodicidad.
- No establecer una correspondencia entre el orden creciente de los años con el orden creciente de los meses.
- No indicar la fecha del perihelio y el afelio, pues de facilitarles dichos datos, establecerían fácilmente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función que a la vez marcan la periodicidad de la misma.

Desarrollo de la situación en el aula:

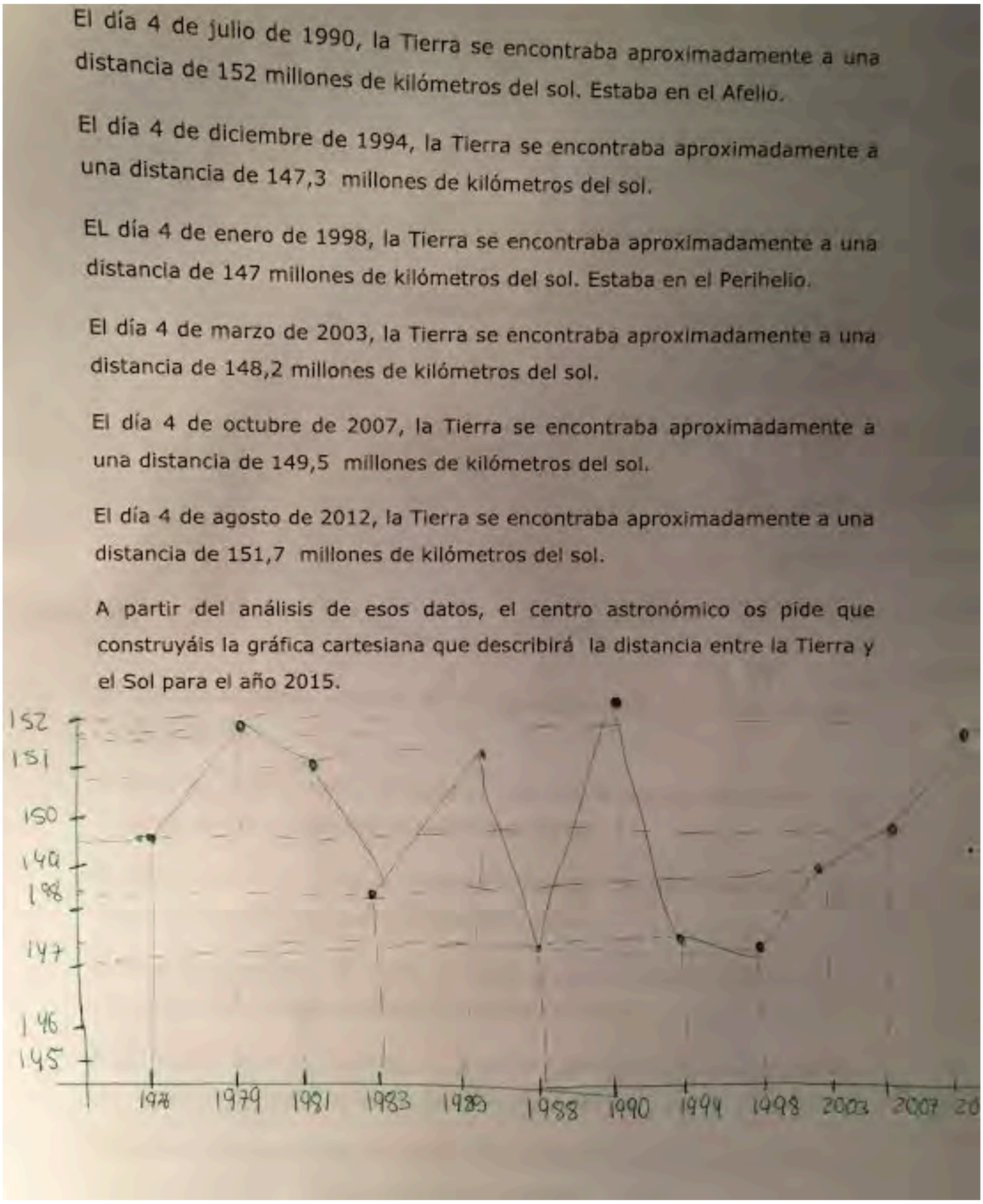
El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Seguimos en el observatorio, ¿vale?*

  ¿Cuánto tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol?
- **Varios:** *365 días.*
- **Profesor***: ¿Y si es bisiesto?*
- **Varios:** *366 días.*
- **Profesor:** *Pues cuando la Tierra se encuentra a la menor distancia posible del Sol se dice que está en el perihelio y cuando se encuentra a la mayor distancia posible se dice que está en el afelio. Y está es la órbita que describe la Tierra alrededor del Sol. En el observatorio tienen los siguientes datos. Saben que el día 4 de abril de 1976 la distancia entre la Tierra y el Sol era de 149,5 millones de kilómetros; que el 4 de junio del 79 era de 151,7 millones de kilómetros. Así tenemos varias fechas con sus distancias hasta llegar al 4 de agosto de 2012 que saben que la distancia era de 151, 7. Entonces, con estos datos os piden que representéis gráficamente la distancia que habrá entre la Tierra y el Sol durante el año 2015. Un gráfico de la distancia Tierra-Sol durante el año 2015, a partir de los datos que tenéis ahí que son las fechas con sus distancias.*

Todos los grupos, salvo el 2 y el 4, comienzan construyendo directamente la gráfica que relaciona los años con las distancias, debido a la falta de análisis de la situación y al no efectuar una buena discriminación de los datos que se les ha proporcionado:

Grupo 3



El día 4 de julio de 1990, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 152 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Afelio.

El día 4 de diciembre de 1994, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

EL día 4 de enero de 1998, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Perihelio.

El día 4 de marzo de 2003, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

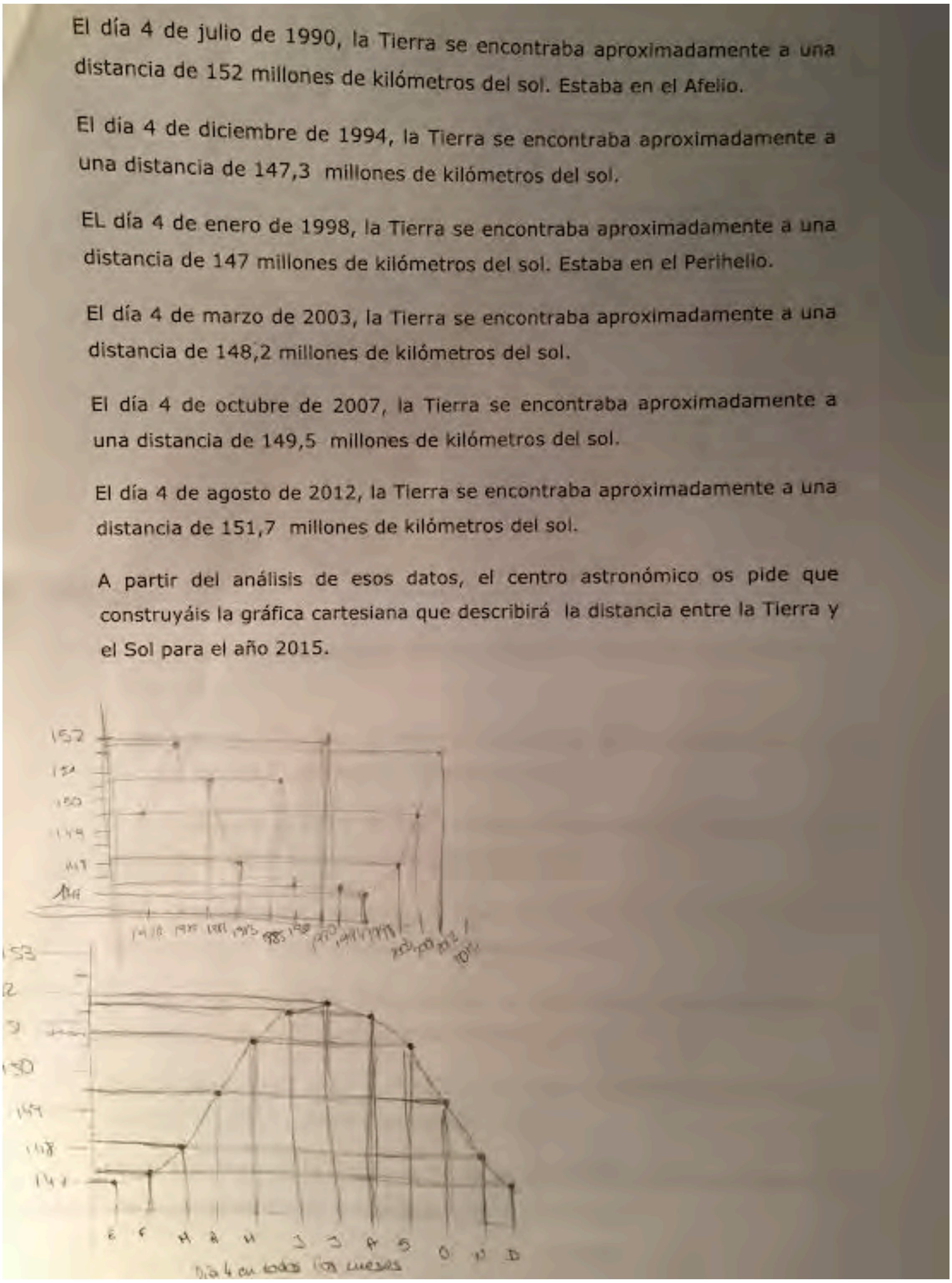
El día 4 de octubre de 2007, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de agosto de 2012, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

A partir del análisis de esos datos, el centro astronómico os pide que construyáis la gráfica cartesiana que describirá la distancia entre la Tierra y el Sol para el año 2015.

FIGURA 4.5.5.80. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.4.2*

Grupo 7



El día 4 de julio de 1990, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 152 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Afelio.

El día 4 de diciembre de 1994, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

EL día 4 de enero de 1998, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Perihelio.

El día 4 de marzo de 2003, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de octubre de 2007, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de agosto de 2012, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

A partir del análisis de esos datos, el centro astronómico os pide que construyáis la gráfica cartesiana que describirá la distancia entre la Tierra y el Sol para el año 2015.

FIGURA 4.5.5.81. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.4.2*

No obstante, como se puede apreciar en los casos anteriores, una vez construida la gráfica años-distancia, todos se dan cuenta de dicha estrategia no es factible, pues a partir de ella no saben como averiguar lo que ocurrirá en 2015. A partir de ese momento es cuando se centran en los datos que el observatorio les ha proporcionado y descubren que la información que verdaderamente es relevante son los meses y las distancias, pues con apoyo del registro Figural se percatan de que independientemente del año que sea la Tierra realiza la misma trayectoria alrededor del sol, percibiendo a través de dicha representación el carácter periódico que va a te a tener la gráfica:

Grupo 5

- **Profesor:** *¿Me contáis que estáis haciendo?*
- **Lidia:** *De momento hemos puesto los datos así, porque hemos visto que estaban todos repetidos:*

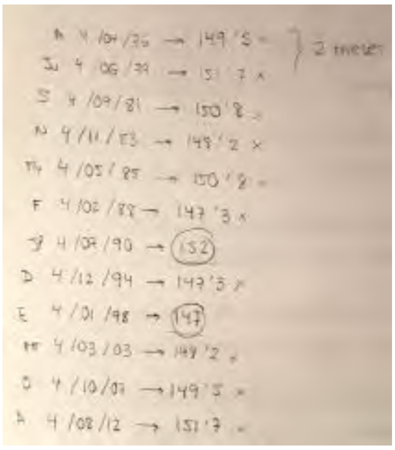
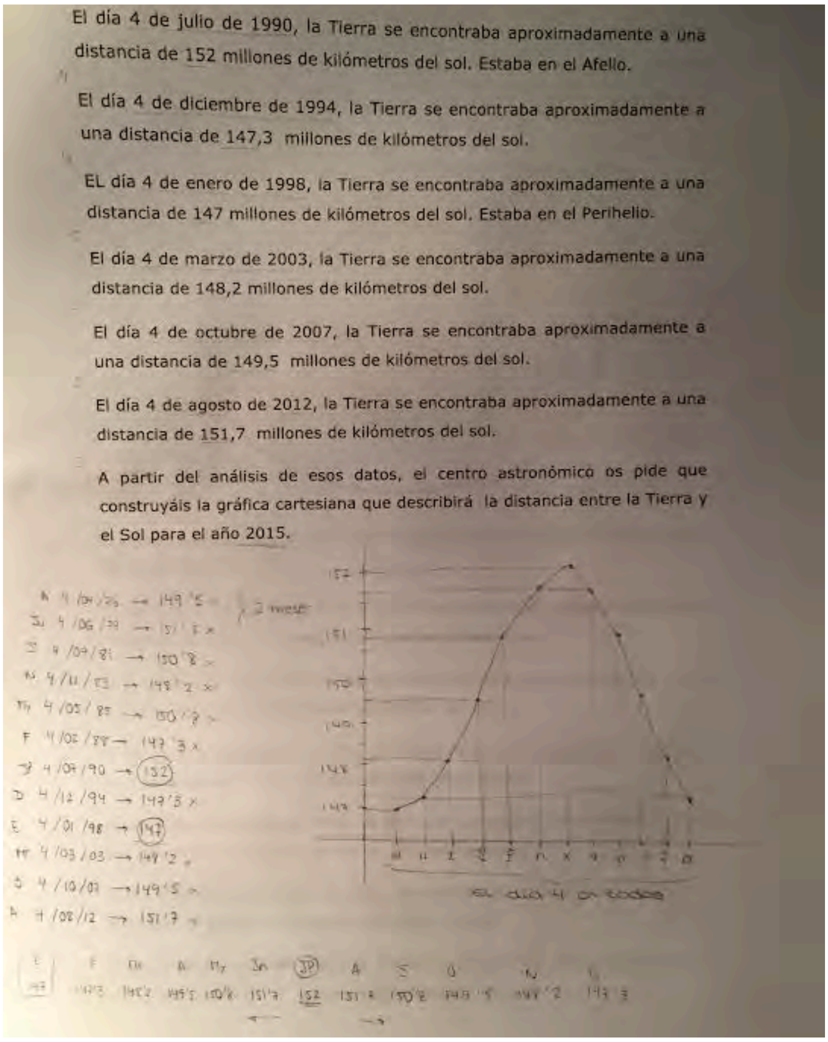


FIGURA 4.5.5.82. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.4.2*

- **Profesor:** *Muy bien, habéis colocado los datos así. ¿Qué veis en común en esos datos que habéis colocado ahí a parte de que hay valores que se repiten. ¿Veis algo más?*
- **Lidia:** *Si, que siempre es el 4.*
- **Profesor:** *Muy bien. Y después del día…¿qué viene?*
- **Lidia:** *El mes.*
- **Profesor:** *¿Mirad los meses?*
- **Lidia:** *Están los 12. Hay una fecha para cada mes.*
- **Profesor:** *Ok. Esta es la órbita de la Tierra alrededor del Sol. En el año 76, ¿qué hizo?*
- **Lidia:** *Dar una vuelta.*
- **Profesor:** *¿Y en el 79?*

- **Lidia:** *También.*
- **Profesor:** *¿Y en el 81?*
- **Silvia:** *En todos los años.*
- **Profesor:** *Luego, ¿el dato del año es relevante o no?*
- **Silvia:** *No, no nos hace falta porque todo los años hace lo mismo.*
- **Profesor:** *Entonces, de todos los datos que tenéis, ¿cuáles son importantes?*
- **Silvia:** *La distancia y el mes.*


El día 4 de julio de 1990, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 152 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Afelio.

El día 4 de diciembre de 1994, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147,3 millones de kilómetros del sol.

EL día 4 de enero de 1998, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 147 millones de kilómetros del sol. Estaba en el Perihelio.

El día 4 de marzo de 2003, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 148,2 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de octubre de 2007, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 149,5 millones de kilómetros del sol.

El día 4 de agosto de 2012, la Tierra se encontraba aproximadamente a una distancia de 151,7 millones de kilómetros del sol.

A partir del análisis de esos datos, el centro astronómico os pide que construyáis la gráfica cartesiana que describirá la distancia entre la Tierra y el Sol para el año 2015.

FIGURA 4.5.5.83. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.4.2*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.29. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de Situación 4*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.
Grupo 2	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.	
Grupo 3	Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.
Grupo 4	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.	

Grupo 5	Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.
Grupo 6	Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.
Grupo 7	Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.
Grupo 8	Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.30. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 4*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Relación de las variables equivocadas. Construcción de la gráfica año- distancia.	6	75 %
Descubrir el carácter periódico de la función para, a partir de la idea de que independientemente del año en que estemos, la distancia de la Tierra al Sol se va a mantener para el día seleccionado en cada uno de los meses, para, posteriormente, construir la gráfica pedida.	2	25 %

Fuente: elaboración propia

En esta ocasión, la conversión adecuada entre el registro de la Lengua Natural y el registro Gráfico en torno a un contexto que hace alusión a la propiedad de periodicidad de una función, ha sido alcanzado por todos los grupos a los largo de la realización de la actividad.

El papel que ha jugado el registro Figural como apoyo para extraer los datos que verdaderamente eran relevantes en la construcción de la gráfica, ha promovido la articulación de dicho registro con el de la Lengua Natural en aquellos grupos en donde la relación de dependencia entre variables a partir del texto se ha efectuado de manera equívoca. De este modo, el registro Figural ha aparecido como un sistema de representación más a través del cual se pueden expresar relaciones funcionales y presentar sus características.

El error inicial cometido por los 6 grupos que no han establecido debidamente la relación entre las variables puede ser debido, como ya se mencionó en la situación 2, al escaso trabajo de coordinación entre la lengua natural y los gráficos cartesianos que se haya dado previamente en el aula, pese a ser dos registros semióticos entre los que existe una fuerte relación de simbiosis con el fin de arrojar luz el uno sobre el otro.

Ni la lengua natural, ni las gráficas, ni ningún otro sistema de representación debe ser tratado de manera aislada, pues todos son sistemas y fuentes de comunicación e información a la par que herramientas de construcción de conceptos matemáticos.

Situación 5: Juego de Comunicación. Las pastelerías.

Función de proporcionalidad.

La situación se desarrolló el día 7 de mayo de 2013 (*Fases 1*), el día 8 de mayo (*Fase 2*) y el día 13 de mayo durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

Hasta el momento, los alumnos han manipulado múltiples registros de representación y han llevado a cabo diferentes tareas de conversión entre unos y otros en relación a los conceptos de variable dependiente e independiente, dependía, noción de función y propiedades globales de las mismas a través de una variedad de contextos que han permitido a los estudiantes tratarlos de manera significativa a partir de situaciones cercanas y familiares.

Está quinta situación, formada por 3 fases, se ha diseñado con el objetivo principal de hacer ver al alumno la necesidad de utilizar el registro algebraico y su coordinación con los registros Gráfico y Tabular, en tareas vinculadas al estudio de la función de proporcionalidad y= mx y sus características.

Fase 1: Gramos de azúcar

Descripción:

A través de una tarea cercana, alejada de contextos particularmente confusos y así evitar distraer a los estudiantes con elementos irrelevantes alejados del tema de estudio, esta primer fase sitúa a los alumnos en un juego de comunicación en donde siendo pasteleros de dos sucursales distintas, deben buscar, efectuando la conversión entre los registros Tabular, Numérico, Lengua Natural y Algebraico, la razón de proporcionalidad existente entre los gramos de azúcar que lleva un determinado tipo de tarta, para posteriormente mandar un mensaje con la expresión algebraica de dicha función, que recibirán los compañeros de la otra pastelería para poder desarrollar la receta correctamente:

“Sois pasteleros que trabajáis para la misma empresa que tiene dos sucursales en Leganés. La mitad trabajáis en la sucursal A y la otra mitad, en la B. Los que trabajáis en la sucursal A disponéis de la receta de la Tarta de Mondoñedo, y los de la sucursal B, la receta de una Tarta de Manzana.

En las recetas os aparece una tabla que os indica la cantidad de azúcar que necesita cada tarta en función de las raciones que podemos hacer con ellas para luego venderlas.

Hoy, de manera excepcional y debido a que os habéis quedados sin los ingredientes principales para elaborar cada una de las tartas, la sucursal A va a hacer la Tarta de Manzana y la sucursal B la Tarta de Mondoñedo.

Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora la tabla con la cantidad de azúcar que deben echar para hacer la Tarta de Mondoñedo en función del número de raciones.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora la tabla con la cantidad de azúcar que deben echar para hacer la Tarta de Manzana en función del número de raciones.

Los mensajes no pueden contener ninguno de los datos numéricos que hay en las tablas.

Para mandar el mensaje, solo disponéis del siguiente espacio:

Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades.”

La condición de que el mensaje no pueda contener datos numéricos de los que aparecen en la tabla, busca bloquear la reproducción total o parcial de los datos aportados a través de este registro, de modo que se vean en la necesidad de encontrar la razón de proporcionalidad entre las cantidades.

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona una hoja con las tablas que indican la cantidad de azúcar que deben echar para hacer las tartas en función del número de raciones:

TABLA 4.5.5.30. *Tablas para los alumnos gr azúcar/ración*

Raciones	Gramos de azúcar
4	170 gr
6	255 gr
8	340 gr
10	425 gr
12	510 gr
14	595 gr
16	680 gr
18	765 gr
20	850 gr
22	935 gr
24	1020 gr
26	1105 gr
28	1190 gr
30	1275 gr

Raciones	Gramos de azúcar
4	150 gr
6	225 gr
8	300 gr
10	375 gr
12	450 gr
14	525 gr
16	600 gr
18	675 gr
20	750 gr
22	825 gr
24	900 gr
26	975 gr
28	1050 gr
30	1125 gr

Fuente: elaboración propia

Con la aportación de los datos a través del registro Tabular se pretende favorecer la conversión de dicho registro al Algebraico de manera directa, coordinación que suele pasar desapercibida en gran medida dentro de las aulas de Secundaria cuando se llega a dicha unidad del libro, pues la conversión que se suele realizar y fomentar casi en el 100% de los casos es justamente la contraria, del registro Algebraico al Tabular para luego construir la gráfica.

A demás, el número de datos que forman parte de cada tabla se ha elegido relativamente elevado de manera que el alumno no pueda mandar un mensaje indicando la cantidad de azúcar que se necesita mediante el registro Numérico, Gráfico o el registro de la Lengua Natural, pues el espacio disponible para transmitir la información es demasiado reducido, lo que conduce al empleo del registro Algebraico.

Por otro lado, el número de raciones con el que comienza cada tabla es cuatro en vez de la unidad de modo que no se evidencie la razón de proporcionalidad que interviene en cada receta, pues se perdería el sentido de la actividad.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *Vamos a comenzar ahora con una actividad que a lo mejor os da un poco de hambre.*

  Escuchadme bien, que os tenéis que enterar muy bien.

  Trabajáis para una empresa que tiene dos pastelerías en Leganés.

  Vosotros (señalando a los grupos de la columna de la derecha) trabajáis en la pastelería A y vosotros en la B (señalando a los grupos de la columna izquierda).

  Habitualmente, en la pastelería A hacéis un tipo de tarta. Es una que lleva almendras y se llama tarta de Mondoñedo y en la tienda B hacéis una tarta de manzana. En la A hacéis la de almendras y en la B de manzana.

  ¿Qué pasa esta semana? Pues que de manera excepcional los de la pastelería A vais a tener que hacer la tarta de manzana y en la B la de almendras. Lo que ocurre es que vosotros (señalando a los de la pastelería B) no tenéis la receta de la de almendras y vosotros (señalando a los de la pastelería A) no tenéis la receta de la de manzana.

  Los de la pastelería A, como hacíais la de almendras tenéis una tabla en la que aparecen los gramos de azúcar que necesita la tarta de almendras en función de las raciones que tenga esa tarta. Y con esos datos que vosotros tenéis, tenéis que escribir un mensaje, que quepa en un tamaño así (enseñando el hueco) para mandárselo a la otra tienda para que ellos reproduzcan esa tabla y saber los gramos de azúcar que necesitan para hacer la tarta.

  Y al revés, vosotros como hacíais la de manzana, tenéis una tabla donde aparece los gramos de azúcar que necesitáis para hacer una tarta que tenga un número determinado de raciones. Tenéis que escribir un mensaje para mandar a la otra tienda y ellos puedan construir la tabla que les indique los gramos de azúcar que necesitan para hacer las tartas en función de las porciones.

A lo largo de esta fase y de las dos que le siguen, la clase se ha dividido en 10 grupos en lugar de en 8 de manera excepcional, para obtener un mayor número de resultados en lo que al juego de comunicación se refiere, característica fundamental de esta situación.

Tras recibir las tablas con los datos, todos los grupos sin excepción optan por calcular los gramos de azúcar que hay en una ración de tarta, ya sea dividiendo directamente los gramos de azúcar de azúcar que hay en una tarta de 4 raciones entre cuatro o aplicando una regla de 3 e incluso realizando ambas:

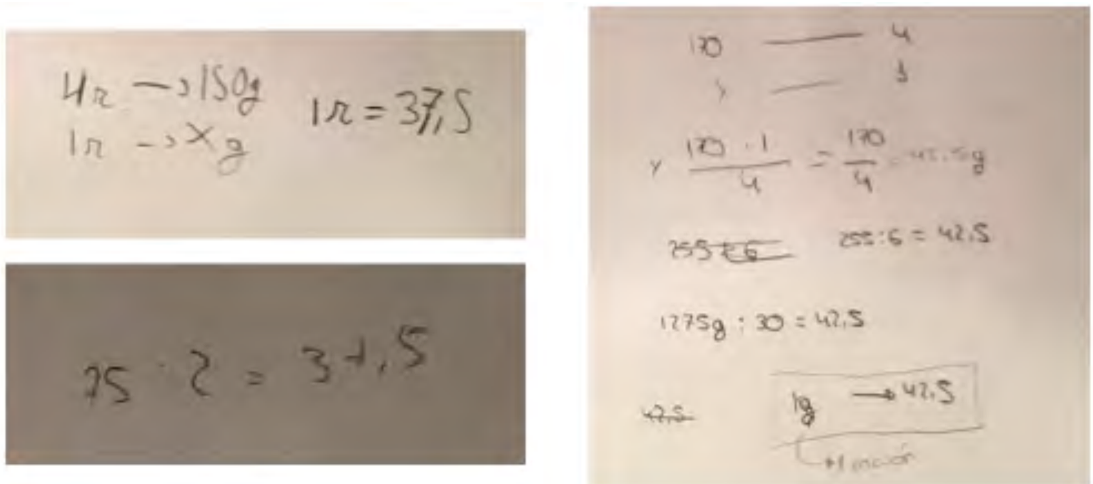


FIGURA 4.5.5.84. *Estrategias de algunos grupos en S.4.2*

Una vez calculados los gramos de azúcar que tiene una ración de sus respectivas tartas, los grupos 1, 2, 4, 8 y 9 empiezan a escribir el mensaje recurriendo directamente al registro de la Lengua Natural:

Grupo 1

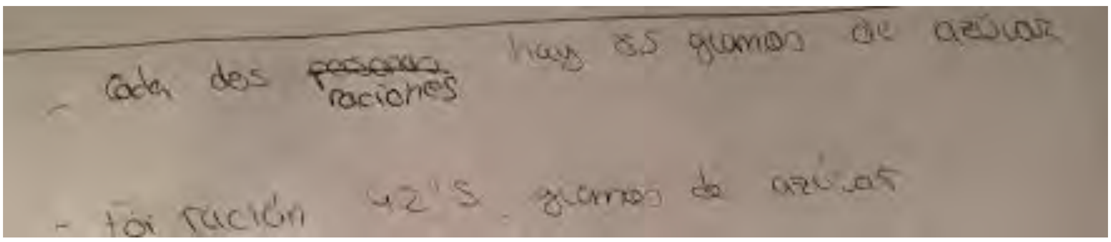


FIGURA 4.5.5.85. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.5.1*

Grupo 2

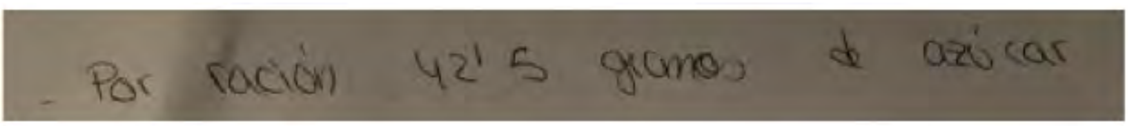
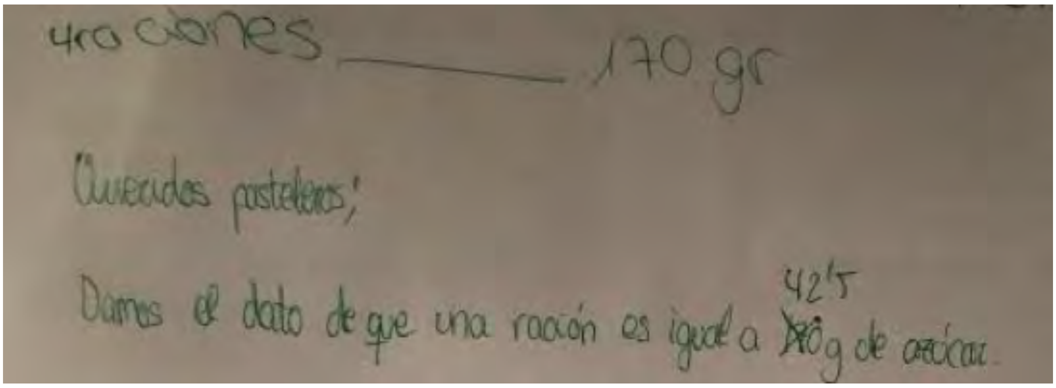


FIGURA 4.5.5.86. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.5.1*

Grupo 4

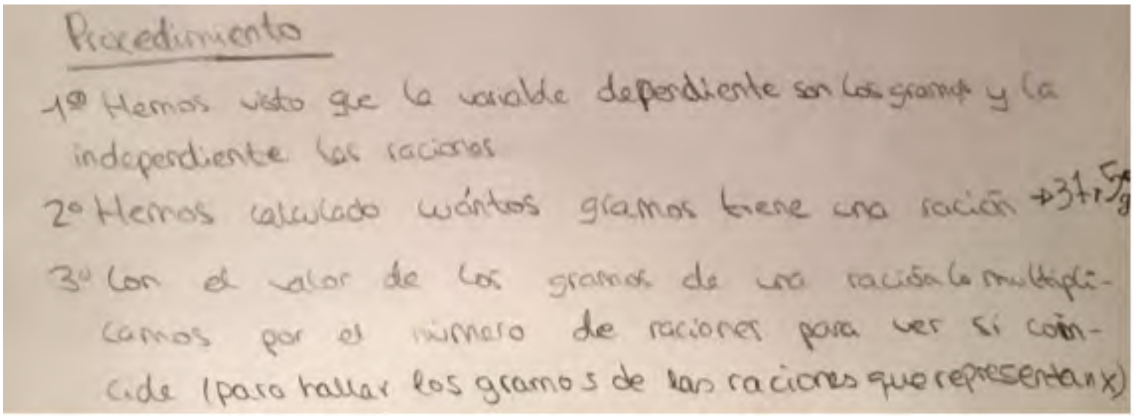

4raciones ——— 170 gr

Queridos pasteleros:

Damos el dato de que una ración es igual a 42'5 g de azúcar.

FIGURA 4.5.5.87. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.5.1*

Grupo 8


Procedimiento

1º Hemos visto que la variable dependiente son los gramos y la independiente las raciones

2º Hemos calculado cuántos gramos tiene una ración → 37,5 g

3º Con el valor de los gramos de una ración lo multiplicamos por el número de raciones para ver si coincide (para hallar los gramos de las raciones que representan x)

FIGURA 4.5.5.88. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.5.1*

Grupo 9

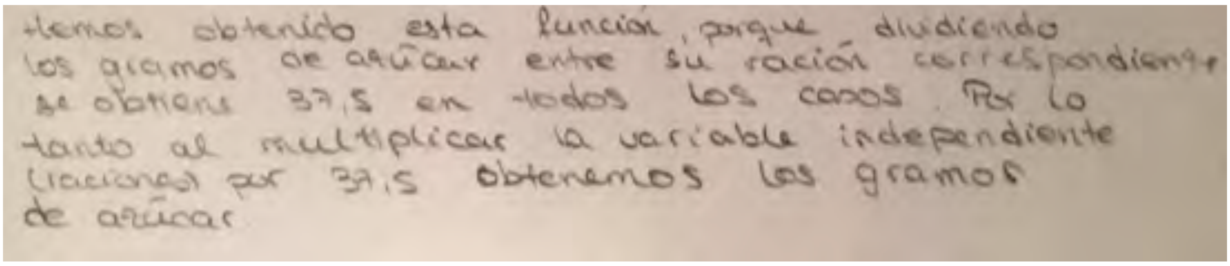
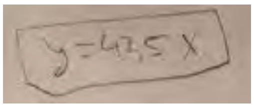
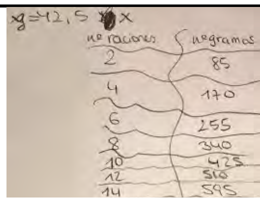
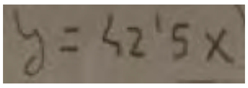
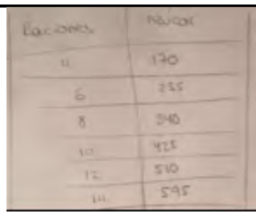
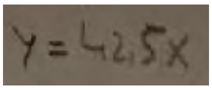
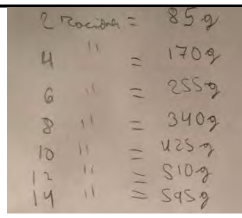
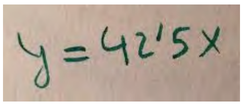
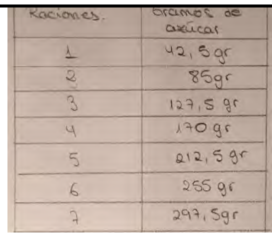
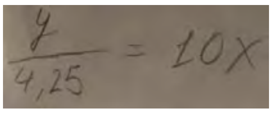
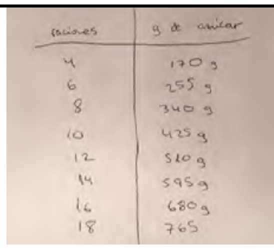

Hemos obtenido esta función, porque dividiendo los gramos de azúcar entre su ración correspondiente se obtiene 37,5 en todos los casos. Por lo tanto al multiplicar la variable independiente (raciones) por 37,5 obtenemos los gramos de azúcar

FIGURA 4.5.5.89. *Trabajo realizado por el grupo 9 en S.5.1*

Aunque todos los mensajes escritos mediante la Lengua Natural son correctos, el hecho de no disponer de hueco suficiente para poder mandarlos da lugar a que se vena en la necesidad de transformar dichos mensajes en alguno más reducido que les quepa en el recuadro asignado, produciéndose así la conversión obligada hacia el registro Algebraico.

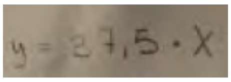
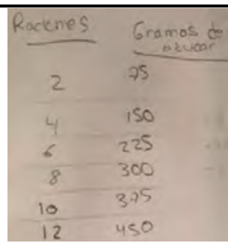
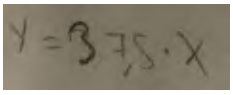
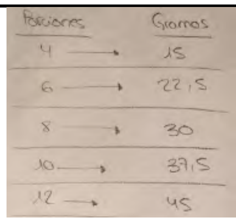
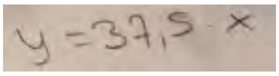
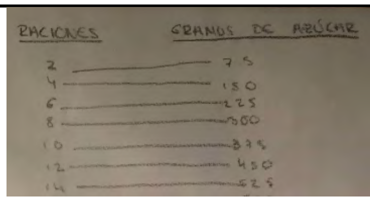
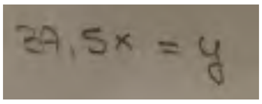
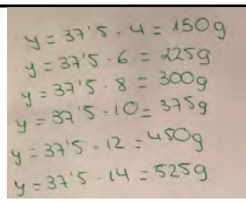
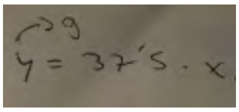
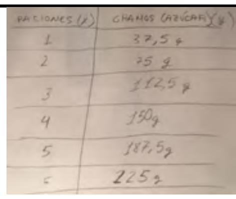
De este modo, los mensajes enviados y las tablas construidas a partir de la información enviada por cada uno de los grupos han sido los siguientes:

TABLA 4.5.5.31. *Mensajes enviados por A y lo construido por B*

<table>
<tr><th colspan="2">Mensaje enviado por la tienda A</th><th colspan="2">Tabla construida por la tienda B</th></tr>
<tr><td>Grupo 1</td><td>
</td><td>Grupo 8</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>
</td><td>Grupo 6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>
</td><td>Grupo 7</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>
</td><td>Grupo 9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>
</td><td>Grupo 10</td><td>
</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.32. *Mensajes enviados por B y lo construido por A*

Mensaje enviado por la tienda B		**Tabla construida por la tienda A**	
Grupo 6		Grupo 2	
Grupo 7		Grupo 3	
Grupo 8		Grupo 1	
Grupo 9		Grupo 4	
Grupo 10		Grupo 5	

Fuente: elaboración propia

Todos los grupos, salvo el 7 que ha cometido un fallo en el cálculo de los gramos que tiene una ración de tarta, han sido capaces de construir su mensaje utilizando el registro Algebraico sin mayor complicación, pues a través del registro Tabular han establecido la relación de pendencia entre variables para su posterior traducción en términos de x e y.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.33. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 5*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro de la Lengua Natural.	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.
Grupo 2	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro de la Lengua Natural.	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.
Grupo 3	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.	
Grupo 4	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro de la Lengua Natural.	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.
Grupo 5	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.	

Grupo 6	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.	
Grupo 7	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.	
Grupo 8	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro de la Lengua Natural.	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.
Grupo 9	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro de la Lengua Natural.	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.
Grupo 10	Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.34. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 5*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro Algebraico.	5	50 %
Reducción de la cantidad de azúcar a la unidad (ración). Construir mensaje mediante la conversión del registro Tabular al registro de la Lengua Natural.	5	50 %

Fuente: elaboración propia

El objetivo principal de esta fase de la situación, centrada en lograr que a lo largo de ella los grupos consiguieran articular la conversión del registro Tabular al Algebraico, se ha conseguido de forma satisfactoria.

El número de actividades en recogen los libros de texto o se desarrollan durante la dinámica normal de una clase centrada en el tratamiento de la función de probabilidad, que persiguen que el alumno lleve a cabo la conversión que en esta tarea ha tenido lugar, es porcentualmente muy inferior a aquella en las que la conversión entre ambos sistemas de representación se dan de lo algebraico a lo tabular, debido al uso que se le da a la tabla como mera herramienta de transito entre la expresión algebraica de la función y la gráfica, perdiéndose su potencia como registro que hace referencia a relaciones funcionales y que el alumno puede encontrar en multitud de ocasiones en su vida diaria.

Este tipo de actividades pone en evidencia, que si bien, no es tan inmediato el paso del registro Tabular al algebraico, pues son distintos desde la perspectiva de las unidades significantes que conforman cada uno, bajo una serie de condiciones los alumnos son capaces de establecer dicha coordinación a través de la identificación de las variables puestas en juego. No se puede acceder al concepto de función a través de solo una definición, se requiere tener actividad con las diversas representaciones, con las expresiones algebraicas, tablas, números, graficas y lenguaje natural; esta actividad involucra formación, tratamiento y conversión entre representaciones, aunque estas no se den de forma directa e inmediata.

<u>Fase 2</u>: Gramos de harina y almendra.

Descripción:

Siguiendo con el juego de comunicación y a través del análisis y el estudio de una función de proporcionalidad que relaciona los gramos de harina o almendra que se utilizan para hacer cada una de las tartas respectivamente en función de las raciones a partir del registro gráfico, en esta segunda fase los grupos tienen que volver a manar un mensaje para que los compañeros de la pastelería contraria puedan realizar la receta de la tarta.

Por ello, el objetivo de esta segunda fase gira en torno a la obtención de la expresión algebraica de la función a partir del registro gráfico para poder resolver satisfactoriamente la misma. Del mismo modo, la tarea se ha diseñado de manera tal que los grupos que reciban el mensaje tienen que construir la gráfica que relaciona ambas variables para saber las cantidades de harina o almendra que van a necesitar, promoviendo en definitiva la conversión entre ambos registros en los dos sentidos:

“Ahora, nos pasa algo similar con la cantidad de almendras que lleva la Tarta de Mondoñedo y la cantidad de harina de repostería que es necesario emplear para la Tarta de manzana.

El problema es que en esta ocasión no tenemos la tabla con los valores, sino que de lo que se dispone es de una gráfica con las cantidades que se necesitan dependiendo del número de raciones.

Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con la información que transmitáis en ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de almendras que deben echar para hacer la Tarta de Mondoñedo en función del número de raciones.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de harina de repostería que deben echar para hacer la Tarta de Manzana en función del número de raciones.

Para mandar el mensaje, solo disponéis del siguiente espacio:

Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades."

Nuevamente, el alumno solo dispone del hueco marcado para mandar el mensaje con la intención promover la articulación del registro Gráfico al Algebraico, bloqueando así el empleo del registro de la Lengua Natural, el registro Numérico y el propio registro Gráfico a la hora de mandar los mensajes.

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona una hoja con las gráficas correspondientes:

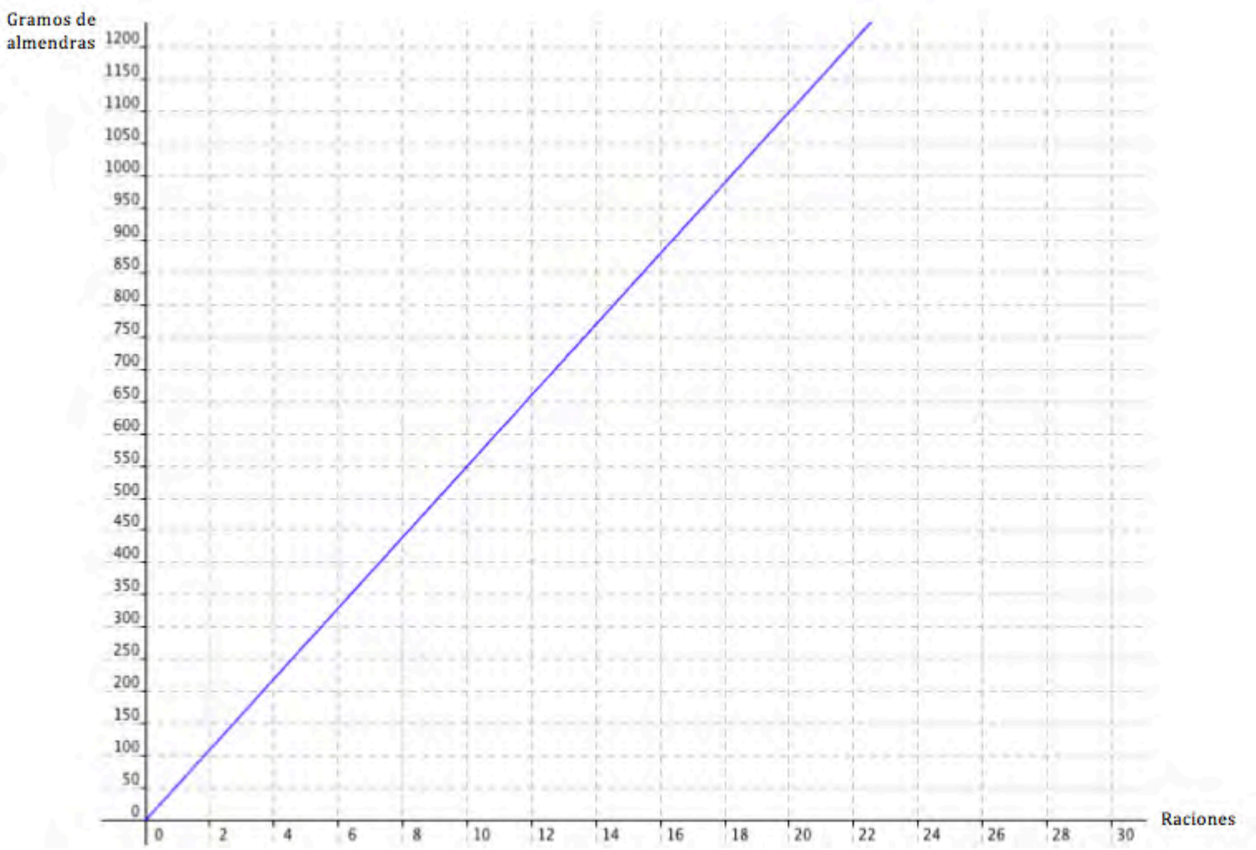


FIGURA 4.5.5.90. *Gráfica para el alumno relación gr almendra/raciones*

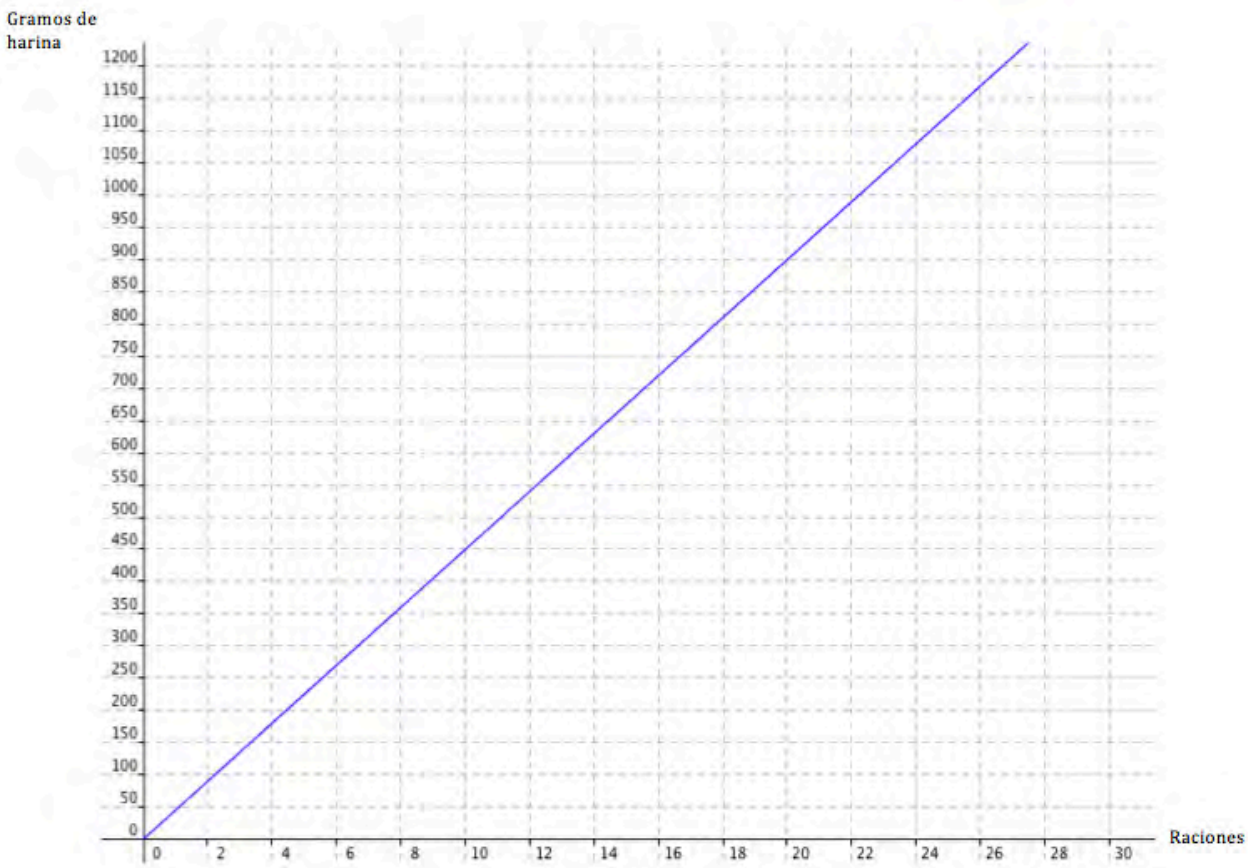


FIGURA 4.5.5.91. *Gráfica para el alumno relación gr harina/raciones*

Las gráficas se han diseñado de tal manera que la escala del eje *y* no coincida con la razón de proporcionalidad. Solo así los alumnos se verán en la necesidad de buscar esa razón de proporcionalidad que les permita mandar el mensaje correcto a través de aquellos pares de puntos que estén definidos por coordenadas enteras.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad:

- **Profesor:** *¿Recordáis lo que nos pasaba ayer con las tartas y el azúcar?*
- **Varios:** *Sí.*
- **Profesor:** *Pues hoy pasa lo mismo, pero en lugar de con el azúcar, nos pasa con los gramos de almendra que se van a necesitar en función de las raciones que se hagan de tarta de almendras y en el caso de la de manzana con los gramos de harina que se van a necesitar en función de las raciones.*

  ¿Qué pasa?¿Ayer como os daban la información? ¿Lo recordáis?

- **Varios:** *En tabla.*
- **Profesor:** *Pues hoy la información no viene en tabla. La información viene de manera gráfica. Y tenéis que hacer lo mismo.*

  Vosotros (señalando a los grupos de la pastelería A)*, escribid un mensaje a partir de esa gráfica para que el otro grupo con dicho mensaje construya la gráfica que vosotros tenéis de los gramos de almendras que se necesitan en función de las raciones.*

  Vosotros (dirigiéndose a los grupos de la tienda B)*, tenéis que manda un mensaje a los de la tienda A para puedan construir y saber la gráfica que vosotros tenéis de los gramos de harina que se necesitan en función de las raciones.*

  El espacio que tenéis para mandar el mensaje, otra vez, este recuadro, que hoy os lo voy a dar yo. No podéis escribir nada más. Lo que pasemos tiene que ir en ese recuadro.

Salvo los grupos 1 y 3 que llegan a plantearse que falta información porque no aparece ninguna tabla de datos como en la fase que precedía a esta y no ven posible mandar poder mandar un mensaje sacando información de la gráfica, los 8 grupos restantes comienzan a situar, sobre la recta representada en la gráfica, puntos cuyas coordenadas pueden localizarse de forma directa según la escala establecida en los ejes:

Grupo 6

- **Lidia:** *¿Qué hacemos?*
- **Silvia:** *Pues mira. Para 10 raciones salen 450 gramos* (señalando sobre la gráfica el punto de coordenadas enteras)
- **Lidia:** *Pero....*
- **Silvia:** *Si x es igual a 10, la y da 450. Entonces y es igual a 45x.*
- **Lidia:** *No lo entiendo. No se que has hecho.*
- **Silvia:** *A ver. Te acurdas que ayer pusimos que los gramos de azúcar, que era y, era igual a las raciones, x, por los gramos que tenía cada ración. Entonces aquí, (señalando el x=2) no puedes saber cuanto es porque no sabemos este punto (señalando el cruce de coordenadas no enteras), pero en 10 son 450. Si en 10 son 450 en una ración son 45.*
- **Lidia:** *AAhhh, vale vale.*

Como ya ocurrió en la fase anterior, dos son los procedimientos que utilizan los alumnos para determinar la razón de proporcionalidad que existe entre los gramos y las raciones:

1. Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones:

Grupo 9

- **Profesor:** *¿Qué tal?*
- **Lucia y Maili:** *Bien.*
- **Profesor:** *¿Me explicáis cómo lo habéis hecho?*
- **Lucía:** *Hemos visto que coincide en el 10 con 450 y que coincide en 20 con 900. Entonces hemos dividido 450 entre 10 y 900 entre 20 y los dos nos dan 45.*
- **Profesor:** *Vale.*
- **Maili:** *Entonces hemos puesto que 45x es igual a y.*

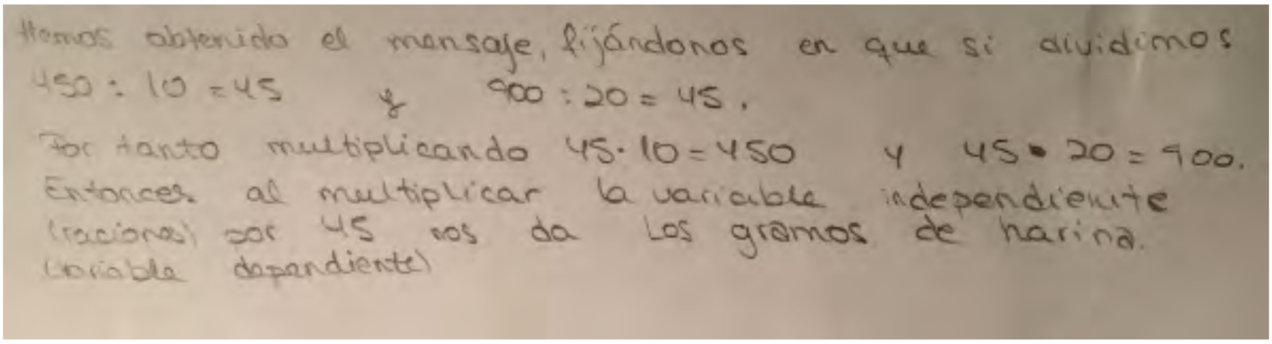


FIGURA 4.5.5.92. *Trabajo realizado por el grupo 9 en S.5.2*

Grupo 10

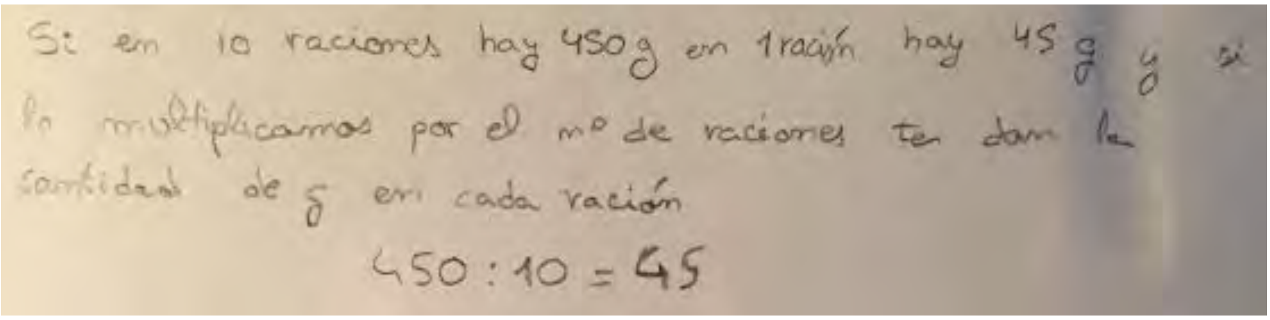


FIGURA 4.5.5.93. *Trabajo realizado por el grupo 10 en S.5.2*

2. Reducción a la unidad utilizando regla de 3:

Grupo 2

- **Colaborador 4:** *¿Me contáis que habéis hecho?*
- **Beatriz:** *Claro. Hemos cogido la gráfica y hemos cogido un punto que coincida, osea, un punto que sea exacto y hemos hecho una regla de 3. Es decir, si 500 gramos de almendra son 10… 1 serán x.*

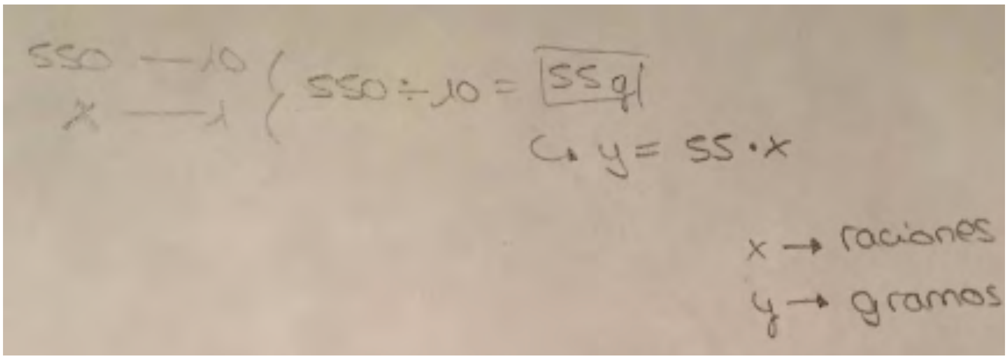


FIGURA 4.5.5.94. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.5.2*

Grupo 7

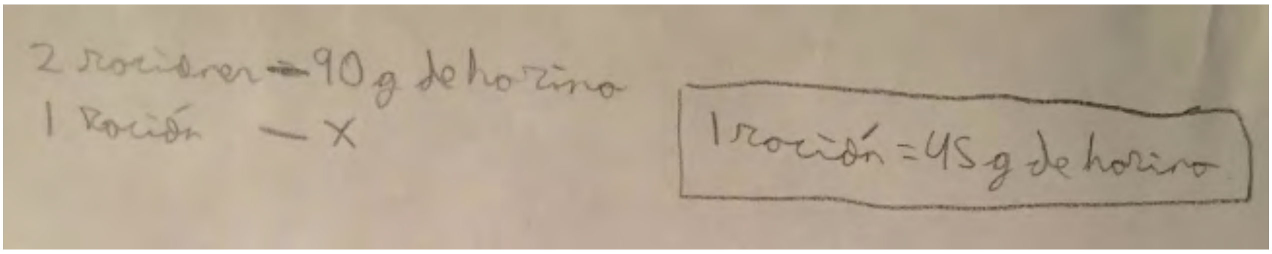


FIGURA 4.5.5.95. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.5.2*

Por su parte, los grupos 1, 3 y 8 nos hacen participes de las dificultades que encuentran a la hora de decidir que magnitud se corresponde con cada variable en el momento de la conversión del registro Gráfico al Algebraico.

Dicha dificultad deriva de la falta de congruencia entre las unidades significantes que forman cada uno de estos registros semióticos:

Grupo 8

- **Profesor:** *¿Ya lo habéis resuelto?*
- **María:** *Sí.*
- **Profesor:** *¿Me lo contáis?*
- **María:** *Pues a ver. Hemos mirado los puntos donde corta y da valores que podemos conocer.*
- **Profesor:** *Ok.*
- **María:** *Hemos mirado que en 10 raciones da 450. Hemos hecho 450 entre el número de raciones y nos da cuanto es una ración. Entonces lo que hay en una ración por el número de raciones nos da la cantidad.*
- **Profesor:** *Muy bien. ¿Y cuál es el mensaje entonces?*
- **María:** *y= 45x.*
- **Profesor:** *Ok*
- **María:** *Pero...¿esto está bien?* (señalando las variables x e y). *Es que me hago un lio.*
- **Profesor:** *¿Quién depende de quién?*
- **María:** *Las raciones no dependen de los gramos. Osea, los gramos dependen de las raciones.*
- **Profesor:** *Muy bien. ¿Cuál es el eje en donde aparecen al variable independiente?*
- **María:** *EL horizontal y este* (marcado el vertical) *la dependiente.*
- **Profesor:** *Eso es.*
- **María:** *entonces esto es x y esto es y.*

Este hecho es especialmente llamativo en el grupo 1, pues tal dificultad vuelve a aparecer cuando la conversión tienen que realizarla en sentido contrario una vez que han recibido el mensaje, pues colocan las variables en los ejes equivocados:

Grupo 1

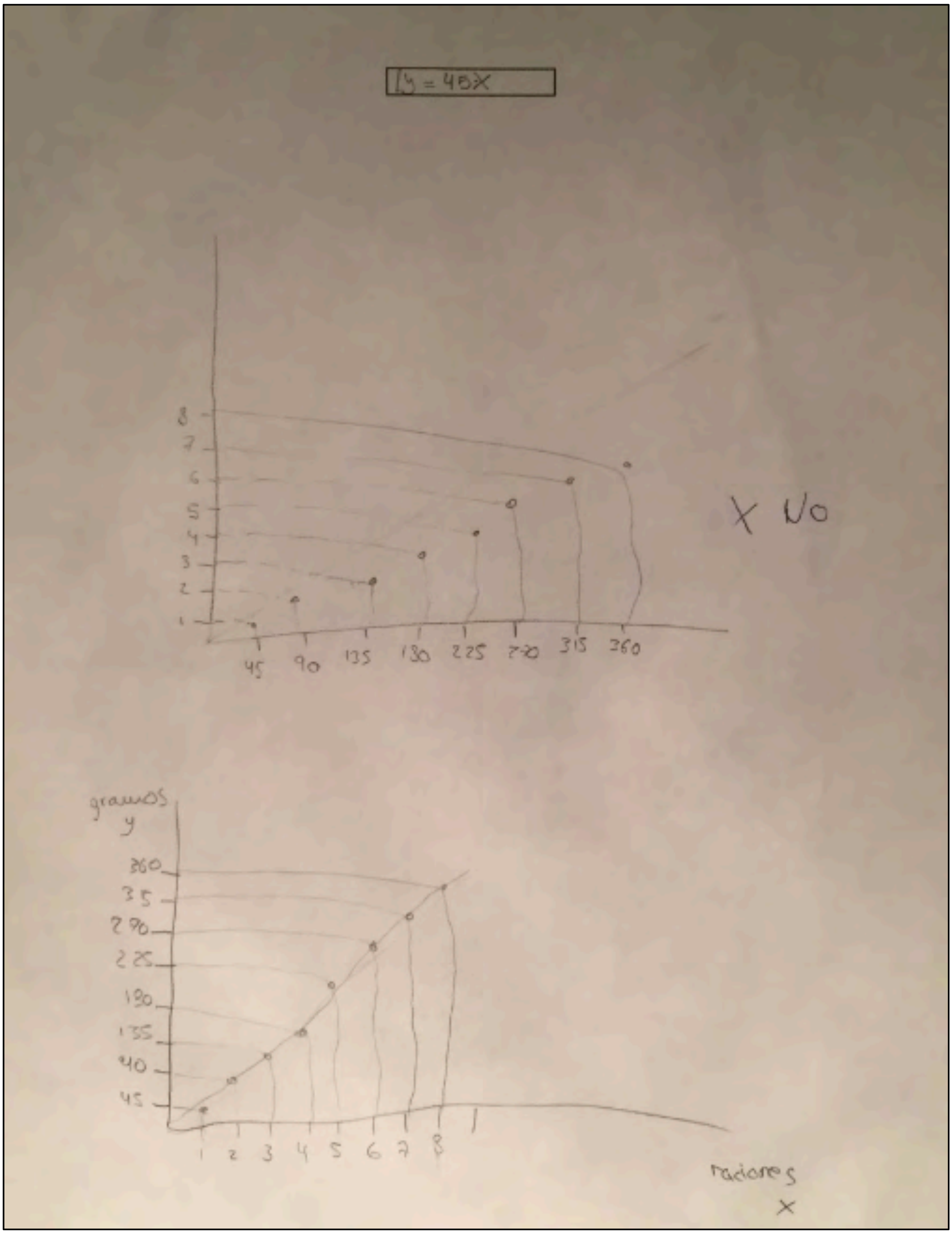
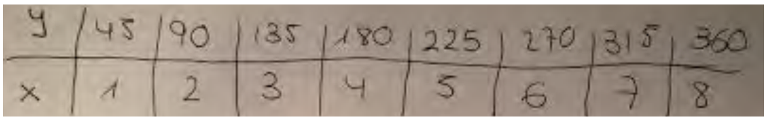
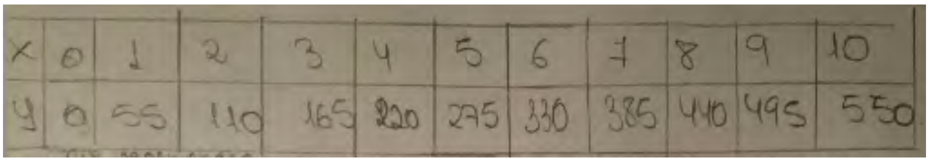


FIGURA 4.5.5.96. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.5.2*

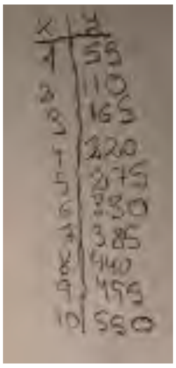
En este proceso de conversión del registro Algebraico al Gráfico, todos los grupos sin excepción hacen uso del registro Tabular para construir la recta que representa la función de proporcionalidad:



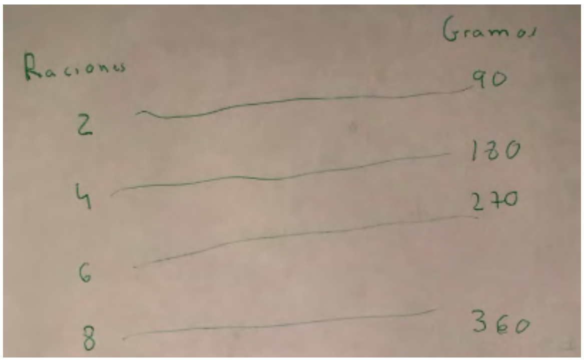
y	45	90	135	180	225	270	315	360
x	1	2	3	4	5	6	7	8

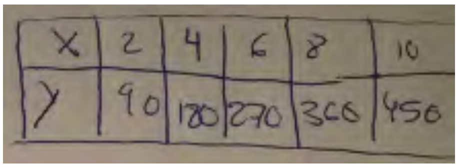


x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	55	110	165	220	275	330	385	440	495	550

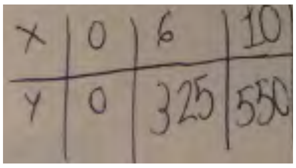


x	y
1	55
2	110
3	165
4	220
5	275
6	330
7	385
8	440
9	495
10	550





X	2	4	6	8	10
Y	90	180	270	360	450



X	0	6	10
Y	0	325	550

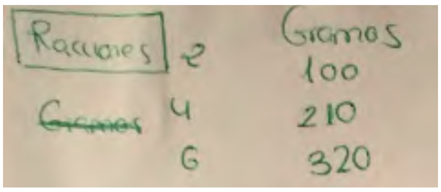
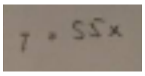
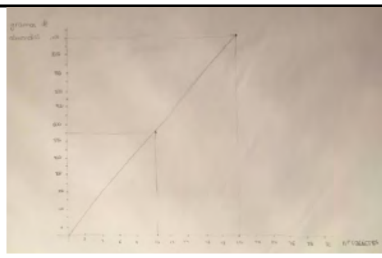
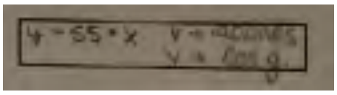
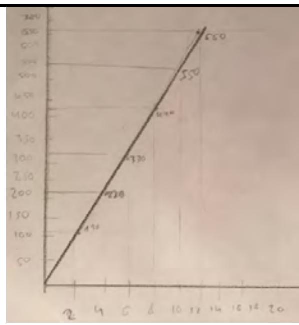
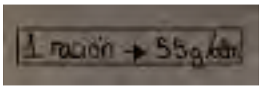
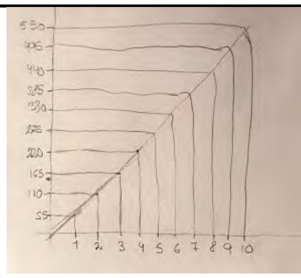
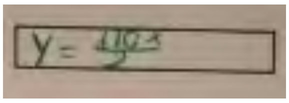
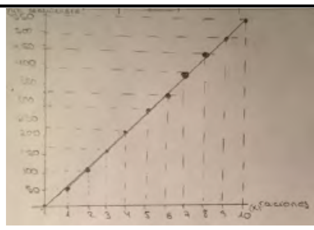
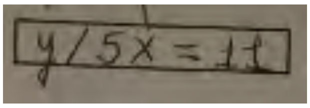
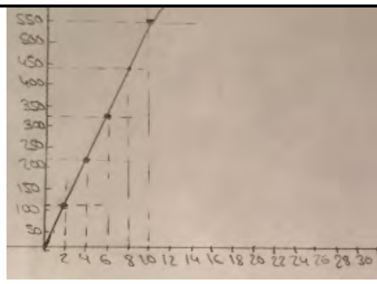


FIGURA 4.5.5.97. *Construcción de tablas por los grupos en S.5.2*

Llama la atención cómo todos los alumnos dan más de dos valores a la variable independiente para poder construir la gráfica pedida, lo que es indicativo de que desconocen que a partir de dos puntos se define una recta. Por otro lado, también es digno de mención que entre los valores asignados el x=0 resalta por su ausencia en la mayoría de los grupos.

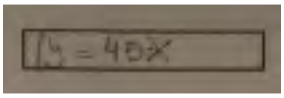
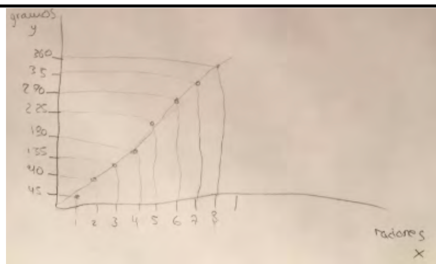
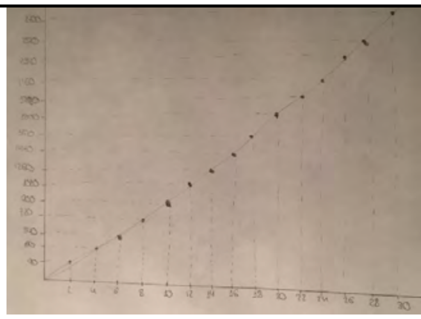
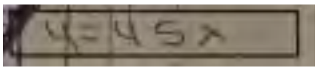
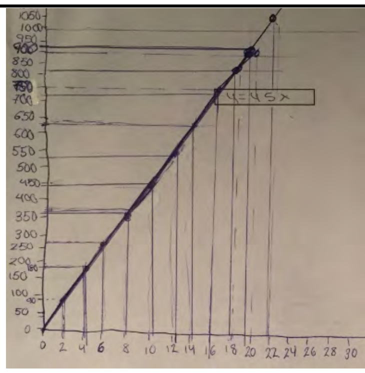
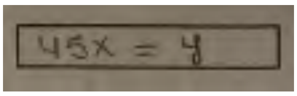
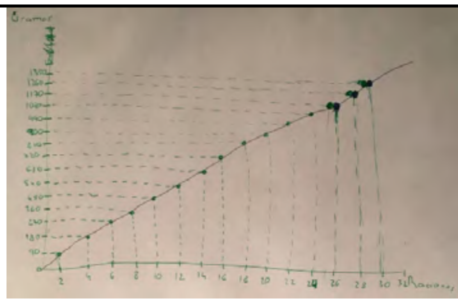
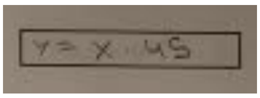
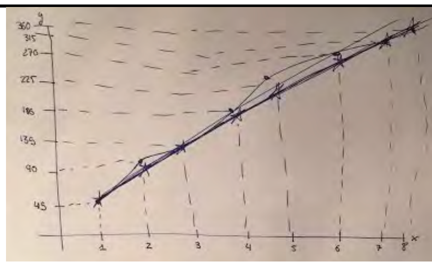
De este modo, los mensajes enviados y las gráficas construidas a partir de la información enviada por cada uno de los grupos han sido los siguientes:

TABLA 4.5.5.35. *Mensajes enviados por A y lo construido por B*

Mensaje enviado por la tienda A		**Tabla construida por la tienda B**	
Grupo 1		Grupo 6	
Grupo 2		Grupo 7	
Grupo 3		Grupo 10	
Grupo 4		Grupo 9	
Grupo 5		Grupo 8	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.36. *Mensajes enviados por B y lo construido por A*

Mensaje enviado por la tienda B		Tabla construida por la tienda A	
Grupo 6		Grupo 1	
Grupo 7		Grupo 2	
Grupo 8		Grupo 5	
Grupo 9		Grupo 4	
Grupo 10		Grupo 3	

Fuente: elaboración propia

De entre los mensajes enviados, tenemos que destacar cuatro ellos:

- Mensaje de los grupos 4 y 5: Ambos han utilizado una expresión algebraica algo alejada de la ecuación de la recta que define la función de proporcionalidad. El motivo expresado por ambos grupos que previamente habían encontrado la expresión $y= 55x$, ha sido que querían añadirle dificultad al mensaje para que los grupos que lo recibieran no llegaran rápidamente a la solución.
- Mensaje de los grupos 3 y 7: Ambos han optado por mandar un mensaje utilizando el registro de la Lengua Natural, reduciendo el tamaño de la letra para que les cupiese en el espacio solicitado, lo que nos indica que, para una posterior ocasión, dicho espacio debe ser más reducido aun para evitar estos casos y forzar el paso hacia el registro Algebraico. En el caso del grupo 3, han realizado dicha conversión por los problemas que han tenido para identificar las variables a la hora de intentar escribir la expresión algebraica. En el caso del grupo 7, la decisión ha venido condicionada por el error cometido en la fase 1 al escribir la función.

De entre las gráficas construidas, a parte de lo comentado con respecto a la cantidad de puntos que determinan para construir la gráfica, resulta llamativa la gráfica del grupo 3, pues no parte del origen de coordenadas.

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.37. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de Situación 5*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Imposibilidad de escribir mensaje por la falta de información.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 2	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.	
Grupo 3	Imposibilidad de escribir mensaje por la falta de información.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje utilizando el registro de la Lengua Natural.
Grupo 4	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.	
Grupo 5	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.	

Grupo 6	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 7	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje utilizando el registro de la Lengua Natural.
Grupo 8	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 9	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 10	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.38. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 5*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.	4	40 %
Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.	3	30 %
Imposibilidad de escribir mensaje por la falta de información.	2	20 %
Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica y mandar el mensaje utilizando el registro de la Lengua Natural.	1	10 %

Fuente: elaboración propia

Al fin de esta fase, todos los grupos salvo dos, han sido capaces de enviar un mensaje dado mediante el sistema de representación algebraico a partir de su coordinación con los gráficos cartesianos.

La identificación y discriminación de las unidades significantes de cada uno de los registros semióticos principales que se han articulado en esta fase de la situación, se ha conformado como factor fundamental para su correcta realización, pues era totalmente necesario determinar en la recta representada a través del gráfico cartesiano las variables que se relacionaban y sus correspondiente valores, y , a la hora de construir la expresión algebraica de la función, las distintas magnitudes que le dan significación a los símbolos empleados.

Es poco común que un profesor demande al alumno que dada una función mediante su representación gráfica, deduzca o encuentre la expresión algebraica que subyace en ella. A través de tareas como la aquí propuesta, el alumno no solo se ve en la necesidad de efectuar dicho cambio a través de un contexto concreto, sino que encuentra cuál es la utilidad y porque razón surge la utilización del álgebra.

<u>Fase 3</u>: Gramos de mantequilla

Descripción:

La última fase de esta situación deja de lado la función de proporcionalidad para introducir al alumno el concepto de función afín por medio de la coordinación del registro gráfico y Algebraico.

Siguiendo en el contexto de las pastelerías, los alumnos deben mandar un mensaje con la ecuación de la recta que representa la cantidad de mantequilla que se necesita para la elaboración de sus respectivas tartas, teniendo en cuenta el hecho de que los moldes llevan impregnada una cantidad de mantequilla lo que da lugar a que la función ya no pase por el origen, convirtiéndose en una función afín con ordenada en el origen la cantidad inicial de mantequilla que lleva el molde. De este modo, el alumno no podrá emplear la estrategia utilizada en las fases anteriores:

"Por último, nos falta saber la cantidad de mantequilla que requiere cada una de las tartas.

Todos los moldes llevan untada una cantidad de mantequilla que evita que la tarta se pegue cuando la metemos al horno, además de la mantequilla que lleva la mezcla.

Al igual que en el caso anterior, no disponemos de la tabla con los gramos de mantequilla que se necesitan en función de las porciones, sino que lo que tenemos es un gráfico con la cantidad total de mantequilla que se utiliza en su elaboración.

Cada grupo A debe escribir un mensaje para que otro grupo B pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de mantequilla que deben echar para hacer la Tarta de Mondoñedo en función del número de porciones.

Igualmente, cada grupo B debe escribir un mensaje para que otro grupo A pueda, con ese mensaje, obtener mediante la calculadora los valores que les permitan construir la gráfica para saber la cantidad de harina de repostería que deben echar para hacer la Tarta de Manzana en función del número de porciones.

Para mandar el mensaje, solo disponéis del siguiente espacio:

Aquellos que no lo consigan se juntarán para intentar resolver sus dificultades.”

A demás de la información dada en la consigna, se les proporciona una hoja con las gráficas correspondientes:

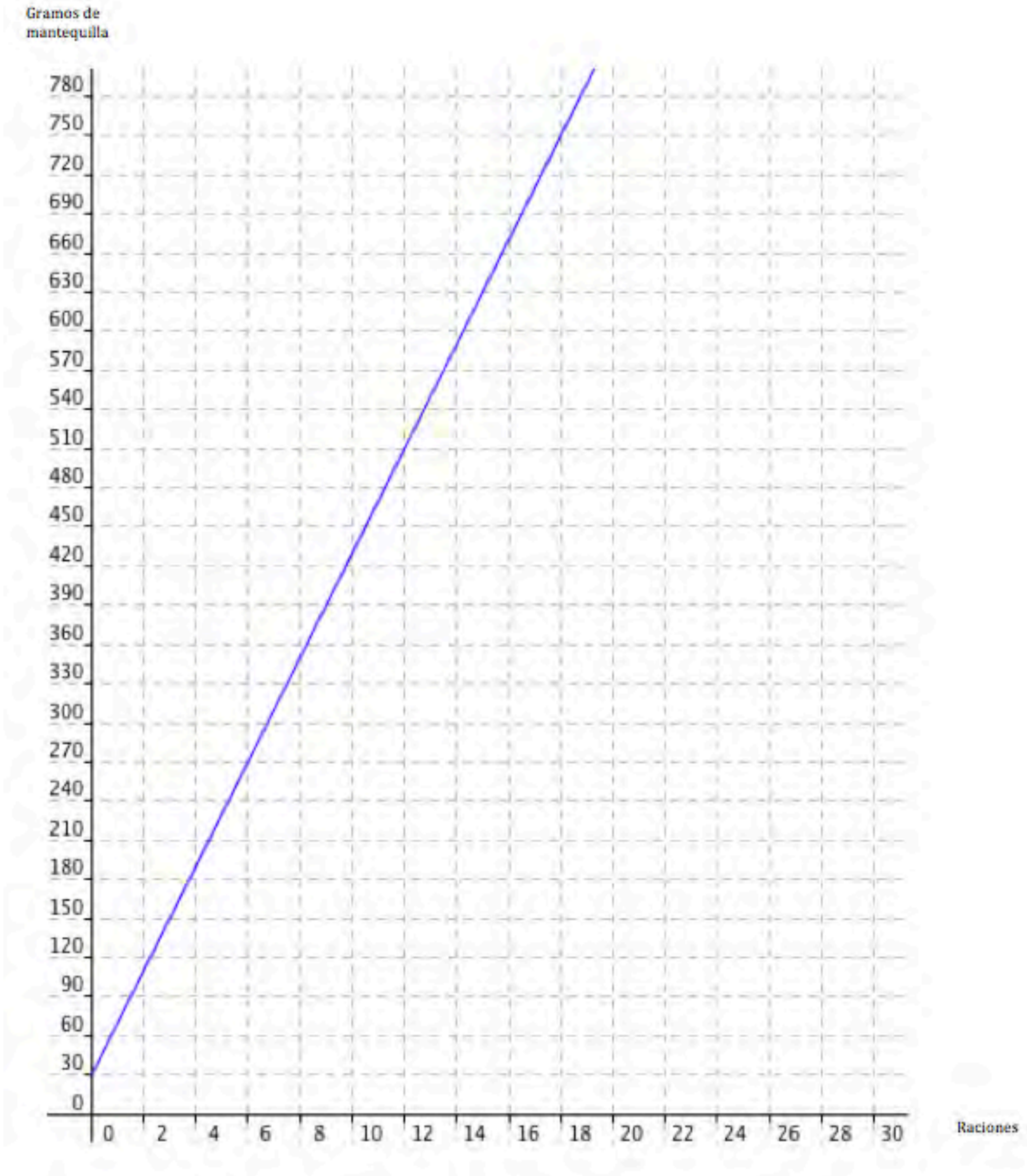


FIGURA 4.5.5.98. *Gráficas para el estudiante relación gr mantequilla/raciones*

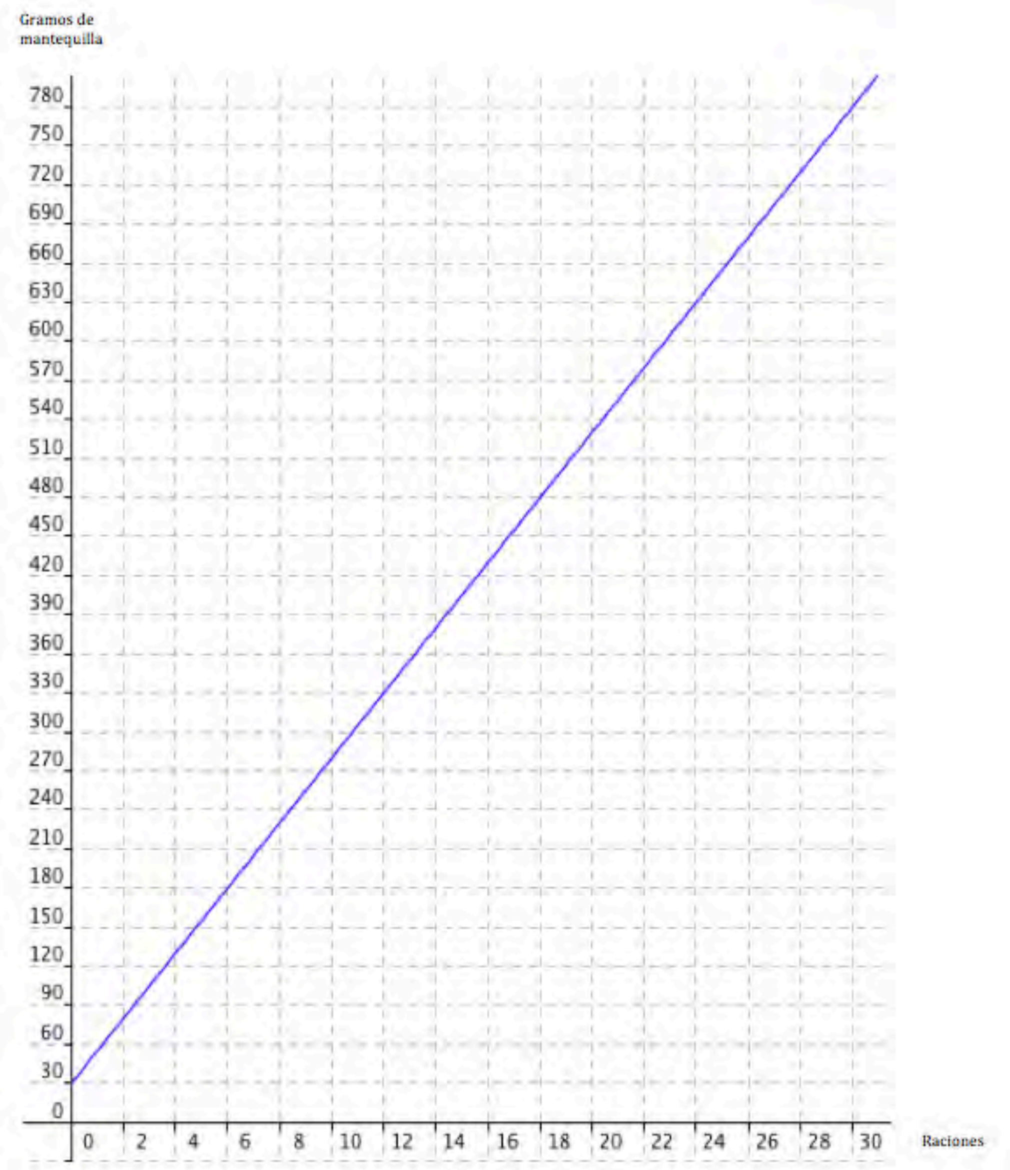


FIGURA 4.5.5.99. *Gráficas para el estudiante relación gr mantequilla/raciones*

Al igual que en la fase anterior, tanto el facilitar los datos únicamente a través del Registro Gráfico como el espacio del que disponen para mandar el mensaje, obliga al estudiante a realizar la conversión a la representación algebraico, favoreciendo así la coordinación entre ambos registros.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad, tras repasar los conceptos vistos en la fase anterior:

– **Profesor:** *Seguimos trabajando con nuestras tartas.*

Vosotros (dirigiéndose a los grupos de la pastelería A) que hacías la de almendras tenéis que hacer la de manzana. Vosotros (dirigiéndose a los grupos de la pastelería B) que hacías la de manzana tenéis que hacer la de almendras.

Ya os habían pasado los gramos de azúcar que necesitabais, los gramos de harina y los gramos de almendras. ¿Qué nos falta ahora? Pues la mantequilla.

Lo primero de todo, independientemente de las raciones que tenga la tarta, todos los moldes, en los que hacemos las tartas van untados de mantequilla par que nos e pegue y luego podamos sacar la tarta sin que se quede pegada en el molde.

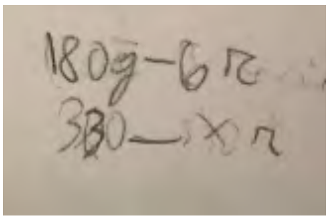
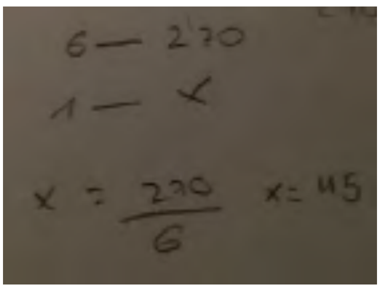
Y luego, a parte están los gramos de mantequilla que vayamos a necesitar, para hacer la masa, en función de las raciones que tenga la tarta.

Es decir, que tenemos la mantequilla que va en el molde, que es independiente de las raciones y luego los gramos de mantequilla que necesitemos en función de las raciones que tenga la tarta.

¿Cómo tenéis la información? Toda esta información que os he dicho aparece en una gráfica y tenéis que mandar un mensaje a la pastelería opuesta para que sepan cuanta mantequilla van a tener que utilizar para hacer esa tarta, contando la que va untada en el molde y luego los gramos que lleve en función de las raciones.

Para mandar ese mensaje, solo disponéis de este espacio. Y la información os la dan en una gráfica.

Condicionados por el procedimiento seguido en la fase anterior, todos los grupos localizan algún punto de la recta definido por coordenadas fácil de localizar a partir de las escalas establecidas para los ejes y, ya sea mediante el uso de la regla de tres o dividiendo directamente, calculan los gramos de mantequilla que lleva una ración de la tarta sin haber tenido en cuenta los gramos del molde:

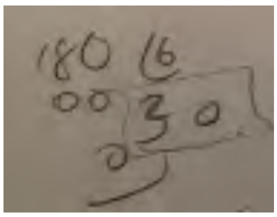


FIGURA 4.5.5.100. *Estrategias de algunos grupos en S.5.3*

Al hacer la comprobación con otros puntos de la recta, empiezan a darse cuenta que no coinciden los resultados, llegando a la conclusión de que como la recta no parte del origen de coordenadas, deben restar los 30 gramos que cada tarta lleva en el molde antes de dividir:

Grupo 2

- **Colaborador 4:** *¿Explicáis cómo lo habéis resuelto?*
- **Sara:** *Pues al principio habíamos hecho que como en 6 raciones había 270 gramos de mantequilla, en una hay x.*
- **María:** *Pero el resto no coincidía.*
- **Beatriz:** *Y hemos visto que en cero raciones hay 30 gramos de mantequilla porque lo pones en el molde…hay que quitarle 30 antes de hacer la regla de tres.*

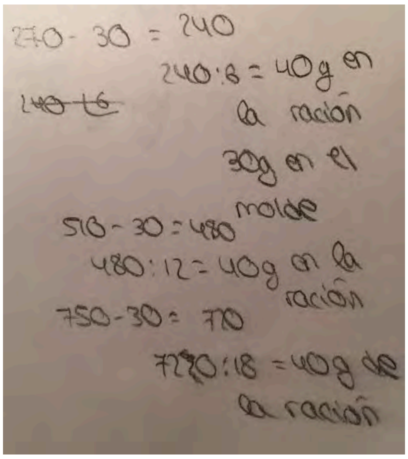


FIGURA 4.5.5.101. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.5.3*

Grupo 7

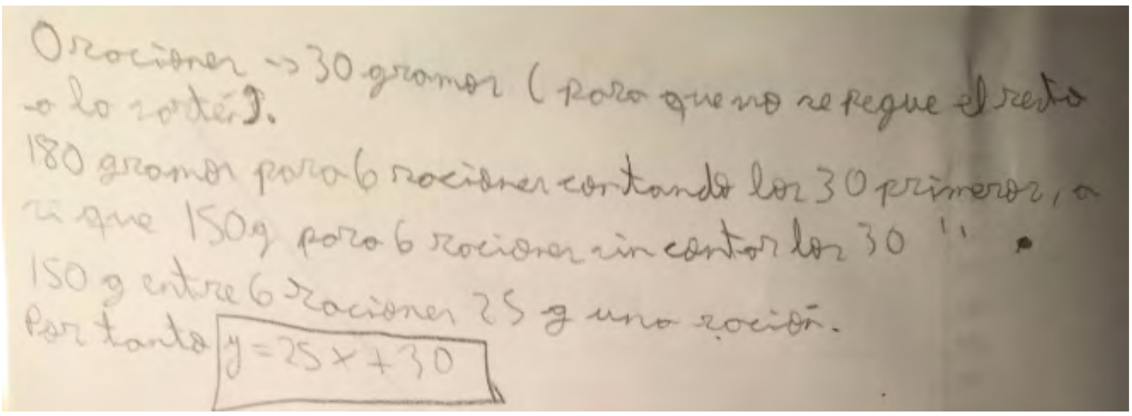


FIGURA 4.5.5.102. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.5.3*

Grupo 8

- **Colaborador 4:** *¿Me contáis cómo lo habéis resuelto?*
- **María:** *En la gráfica pone que 180 gramos se corresponde con 6 raciones. Pero según esto sabemos que se han utilizado 30 gramos para el molde. Entonces, a 180 le quitamos 30 y nos queda la mantequilla que nos queda para utilizar la parte del bizcocho. Eso es 150 gramos que lo dividimos entre 6 y sale los gramos de mantequilla en una ración. Te da 25 por el numero de raciones más los 30 gramos de mantequilla que necesitas para que no se pegue el bizcocho.*

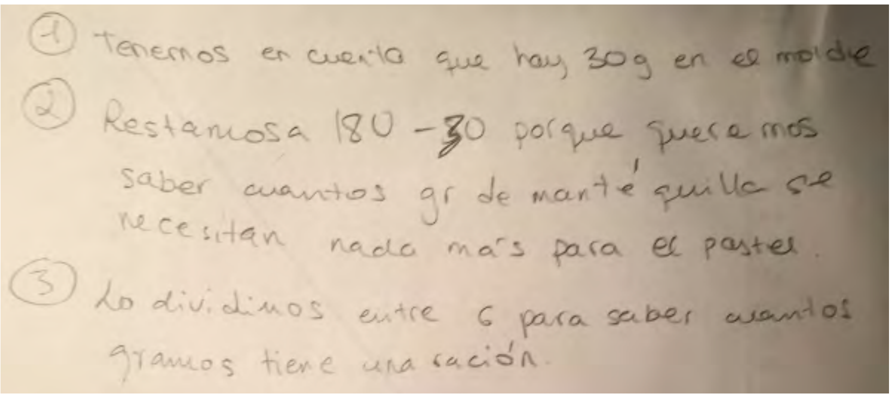


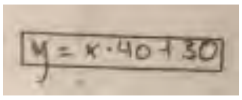
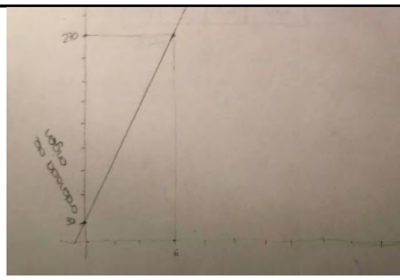
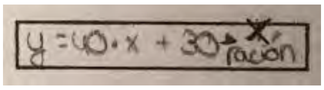
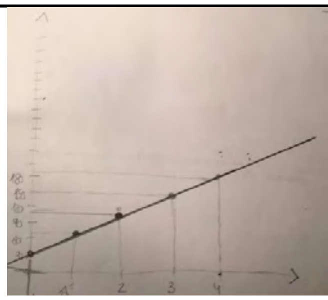
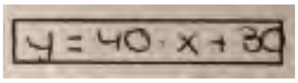
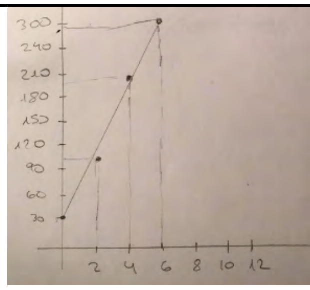
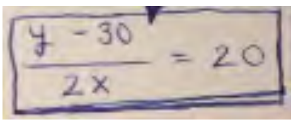
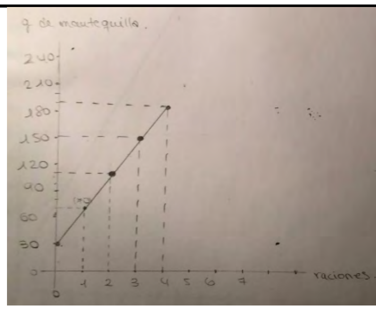
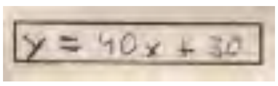
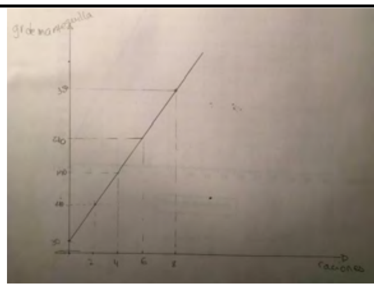
FIGURA 4.5.5.103. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.5.3*

Grupo 6

- **María:** *No sale como antes. Si cojo x igual 5 sale y 270. 270 entre 6 da 45, pero no dan el resto.*
- **Silvia:** *Si x es igual a 6, esto da 270. Pero ahora no sale del 0.*
- **Lidia:** *¿Y si restamos los 30?*
- **María:** *¿Por qué restas 30?*
- **Lidia:** *Porque sale de 30. Eso es la mantequilla del molde. Sino pasaría por 0.*
- **Silvia:** *Sí. Hay que restar 270 menos 30 y lo que da entre 6. Ya lo tenemos.*
- **María:** *Eso da 25. ¿Probamos con otro?*
- **Silvia:** *Helena, multiplica 12 por 25.*
- **Helena:** *300.*
- **Silvia:** *Más 30 da 330. Ya está.*

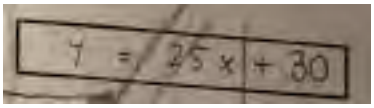
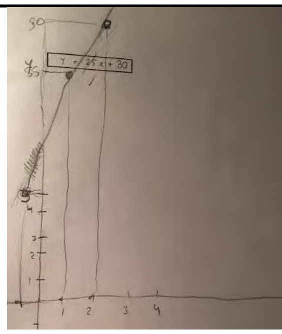
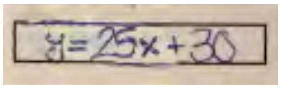
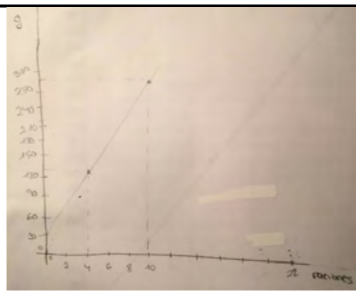
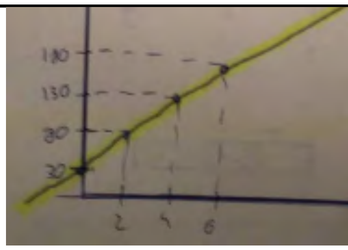
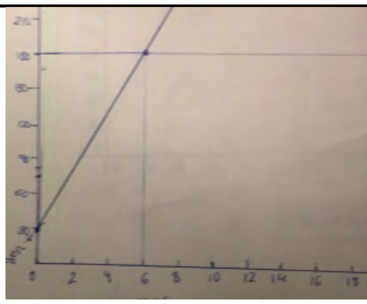
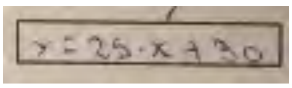
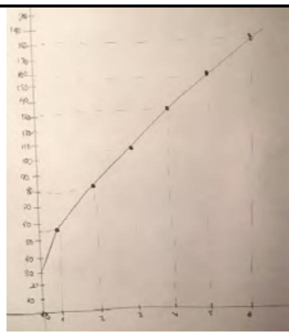
Así, los mensajes enviados y las gráficas construidas a partir de la información enviada por cada uno de los grupos han sido los siguientes:

TABLA 4.5.5.39. *Mensajes enviados por A y lo construido por B*

Mensaje enviado por la tienda A		**Tabla construida por la tienda B**	
Grupo 1		Grupo 6	
Grupo 2		Grupo 7	
Grupo 3		Grupo 10	
Grupo 4		Grupo 9	
Grupo 5		Grupo 8	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.40. *Mensajes enviados por B y lo construido por A*

Mensaje enviado por la tienda B		Tabla construida por la tienda A	
Grupo 6		Grupo 1	
Grupo 7		Grupo 2	
Grupo 8		Grupo 5	
Grupo 9		Grupo 4	
Grupo 10		Grupo 3	

Fuente: elaboración propia

De estos resultados tenemos que destacar la gráfica construida por el grupo 1 y los valores que ha asignado a la variable independiente, pues entre ellos se encuentra el -1, considerando la existencia de menos una raciones:

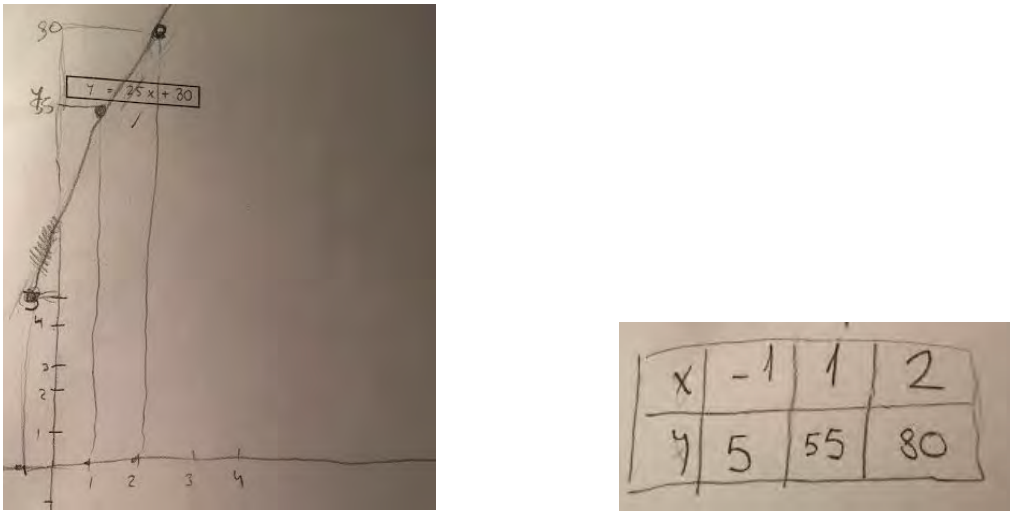


FIGURA 4.5.5.104. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.5.3*

Esto es una clara manifestación de que dicho grupo sigue presentado ciertas dificultades en lo que a la identificación de variables se refiere y los valores que estas pueden tomar en función del contexto.

Con respecto a la utilización del registro tabular, solo el grupo 1, el grupo 3 y el grupo 5 han recurrido a él para realizar el paso del Algebraico al Gráfico:

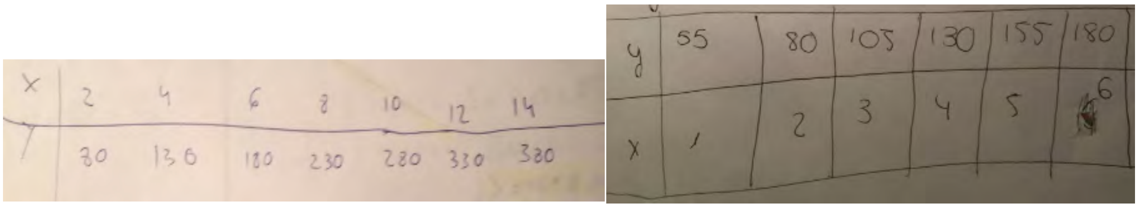


FIGURA 4.5.5.105. *Utilización del registro tabular en S.5.3*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.41. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de Situación 5*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 2	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 3	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 4	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.
Grupo 5	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función.

Grupo 6	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad dividiendo gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función afín.
Grupo 7	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad dividiendo gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función afín.
Grupo 8	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad dividiendo gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función afín.
Grupo 9	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad dividiendo gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función afín.

Grupo 10	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica restando previamente los gramos de mantequilla del molde y mandar el mensaje con la expresión algebraica de dicha función afín.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.42. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 3 de la Situación 5*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Reducción a la unidad utilizando regla de 3, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	4	40 %
Reducción a la unidad dividiendo directamente gramos entre raciones, para buscar la razón de proporcionalidad a partir de gráfica sin restar previamente los gramos de mantequilla del molde.	6	60 %

Fuente: elaboración propia

El cambio de estrategia realizado por los estudiantes para poder mandar el mensaje con la expresión de la función que se corresponde con la recta dada, ha servido para reforzar y afianzar el paso entre los registros Gráfico y Algebraico a la vez de descubrimiento del concepto de recta afín.

Tanto en la fase anterior como en esta cabe destacar que ningún grupo ha hecho uso del registro tabular para identificar los puntos dados en la gráfica, lo que podría ser un buen inicia de comprensión respecto a la tarea de visualización y el uso de diferentes representaciones.

En el caso particular de esta fase, el análisis de la gráfica va más allá de un mero análisis cuantitativo y de localización de puntos y coordenadas, pues es imprescindible desarrollar una interpretación cualitativa de la misma para percibir la relación entre las dos variables. Dicho objetivo se ha conseguido por parte de todos los alumnos.

Ninguno de los grupos hace uso del significado de pendiente ni la perciben a través de la representación gráfica como una variable visual más de la misma, limitándose al cálculo.

Situación 6: EL juego de los Marcianos.

Formas de obtener la ecuación de una recta.

La situación se desarrolló el día 14 de mayo de 2013 (*Fases 1 y 2*) y el día 15 de mayo (*Fases 3 y 4*) durante los 50 minutos de clase.

Objetivo de la situación:

Una vez introducidas y construidas las expresiones algebraicas de la función de proporcionalidad y de la función afín en coordinación con el registro tabular y el gráfico, esta última situación de la ingeniería tiene por objetivo que los alumnos sean capaces de deducir y llegar a otras formas de obtener la ecuación de la recta que definen a estas funciones a partir del registro Numérico, el registro Gráfico, el registro Algebraico y la conversión entre ellos.

Por ello, a lo largo de las 4 fases que conforman esta situación, el papel de la identificación de los elementos variables y de las unidades significantes de cada registro y su congruencia con los de los otros, se convierte en el trabajo principal a realizar por el alumno, favoreciendo, por un lado la conversión entre registros de representación semiótica y por otro la aprehensión de los conceptos y procesos siguientes:

- Pertenencia de un punto a una recta.
- Obtención de la ecuación de la recta de la que se conocen un punto y la pendiente.
- Obtención de la ecuación de la recta a partir de dos puntos conocidos.
- Obtención de la ecuación de la recta a partir de dos puntos conocidos.

Fase 1: Pertenencia de puntos a una recta.

Descripción:

A través de una situación tan cercana y motivadora que es la de simular las pantallas de un juego de marcianitos que son atacados por un rayo laser, esta primera fase de la situación persigue que el alumno identifique que marcianos son alcanzados por el laser sabiendo la ecuación de la recta que define el rayo y la posición de los marcianos.

De este modo, mediante la coordinación de los registros Algebraico y Numérico, los estudiantes llegarán a construir y comprender cuando un punto pertenece a una recta a partir del trabajo con las coordenadas:

“ Hoy vamos a jugar a un videojuego de Marcianos. El juego consiste en disparar a unos marcianos, que se encuentran dispersos en un plano cartesiano, con un cañón laser.

En la primera fase del juego, el rayo laser que emite el cañón es una recta que tiene por ecuación $y= 2.5x + 3$

Tenemos a cuatro marcianitos, de los cuales conocemos el punto exacto (x, y) de su posición:

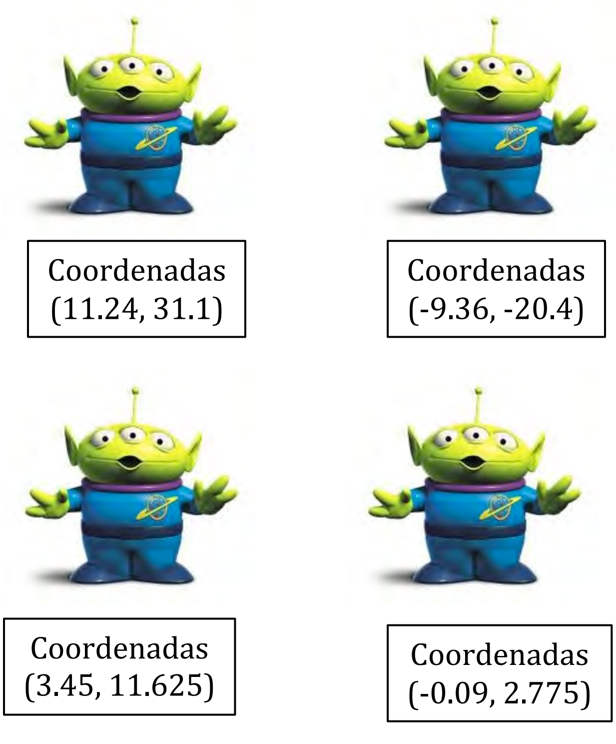


FIGURA 4.5.5.106. *Ficha 1 para el alumno con las coordenadas de localización de los marcianos*

Si queréis pasar a la siguiente fase del juego, es necesario que averigüéis cuantos marcianitos son alcanzados por el laser.”

La posición de los marcianos se ha elegido de tal manera que no se pueda estudiar si el rayo laser les alcanza a través del registro gráfico, pues las coordenadas de su posición presentan valores difíciles de representar a partir de una gráfica cartesiana. Esto obligará a que el estudiante tenga que recurrir a la sustitución de las coordenadas en la ecuación dada para resolver la tarea.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad, tras repasar los conceptos vistos en la fase anterior:

- **Profesor:** *Hoy vamos a empezar una actividad nueva, ¿vale?*

  Se llama, videojuego de marciano. El juego consiste en disparar a los marcianos con un cañón laser. Tanto los marcianos como el cañón se encuentran en unos ejes cartesianos. En una gráfica. Nos dan la ecuación del rayo laser que sale del cañón, que es y=2,5x + 3. Esa es la ecuación del rayo laser que sale del cañón. Y nos dan la posición de cuatro marcianitos. La primera pantalla consiste, para que así podáis pasar al siguiente nivel, en que digáis cuantos de estos marcianitos son alcanzados por el rayo laser. Es decir, el rayo les da y acaba con ellos. Y os dan la ecuación del rayo y la posición de los marcianos.

De inicio, todos los grupos salvo el 5 y el 8, comienzan a construir la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo:

Grupo 1

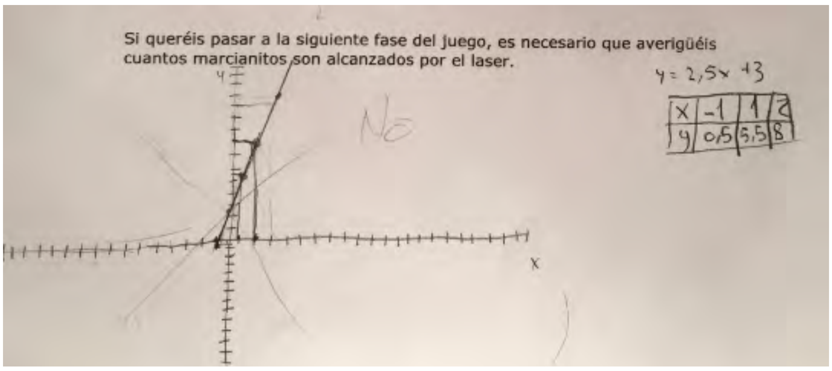


FIGURA 4.5.5.107. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.6.1*

Grupo 3

- **Profesor:** *¿Me contáis que vais a hacer?*
- **Sandra:** *Vamos a hacer una gráfica.*
- **Profesor:** *¿Y para qué queréis hacer una gráfica?*
- **Noelia:** *Para poner las coordenadas de los marcianitos y con la recta saber si pasa por esas coordenadas.*
- **Profesor:** *Pero...¿veis algo que dificulte el hacer eso?*
- **Noelia:** *Si, porque tenemos unos decimales un poco largos.*

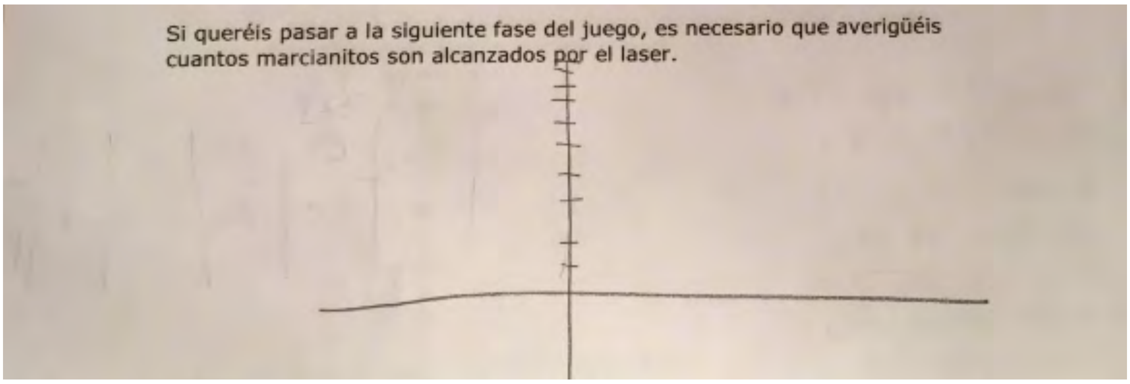


FIGURA 4.5.5.108. *Trabajo realizado por el grupo 3 en S.6.1*

Grupo 6

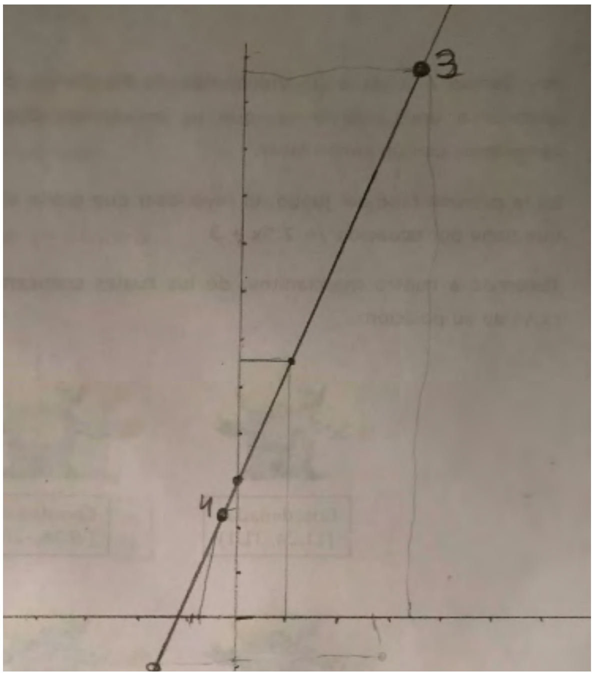


FIGURA 4.5.5.109. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.6.1*

Cabe destacar, que 3 de los grupos que han recurrido a esta estrategia, vuelven a dar más de dos valores a la hora de construir la tabla para la posterior representación gráfica, pese a que en la institucionalización de la situación anterior el profesor indico que cuando la función se trata de una recta únicamente es necesario obtener dos puntos para representarla.

Una vez construida la gráfica y representada la recta del rayo, todos los grupos que han optado por esta estrategia descubren el problema que existe con las coordenadas de los marcianos, pues al tener tantas cifras decimales les resulta imposible situarlos de manera exacta en los puntos de su ubicación y comprobar si de verdad el rayo les alcanza, mostrándose la estrategia inicial totalmente como insuficiente.

De este modo, llegan a la estrategia óptima de sustitución de la variable dependiente de las coordenadas de localización de los marcianos en la expresión algebraica del rayo y ver si coincide el resultado con la coordenada y:

Grupo 2

- **Colaborador 4:** *¿Me explicáis que hacéis?*
- **Beatriz:** *Pues estamos sustituyendo el valor x que te dan por la x de la fórmula y si da la y de este valor, pues muere… y sino coincide es que está vivo.*
- **Colaborador 4:** *¿Y esa tabla y esa gráfica?*
- **María:** *Porque al principio hemos pensado hacer la gráfica del rayo laser y ver si daba a los marcianitos.*
- **Colaborador 4:** *¿Y por qué no habéis seguido?*
- **María:** *Porque las coordenadas de los marcianitos tienen muchos decimales y no sabemos bien colocarlos luego.*

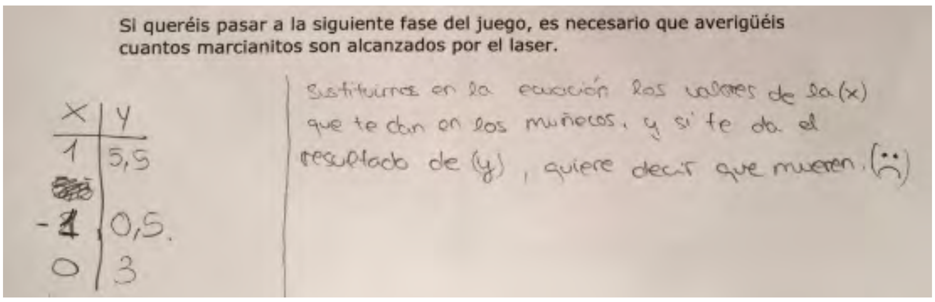


FIGURA 4.5.5.110. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.6.1*

Grupo 4

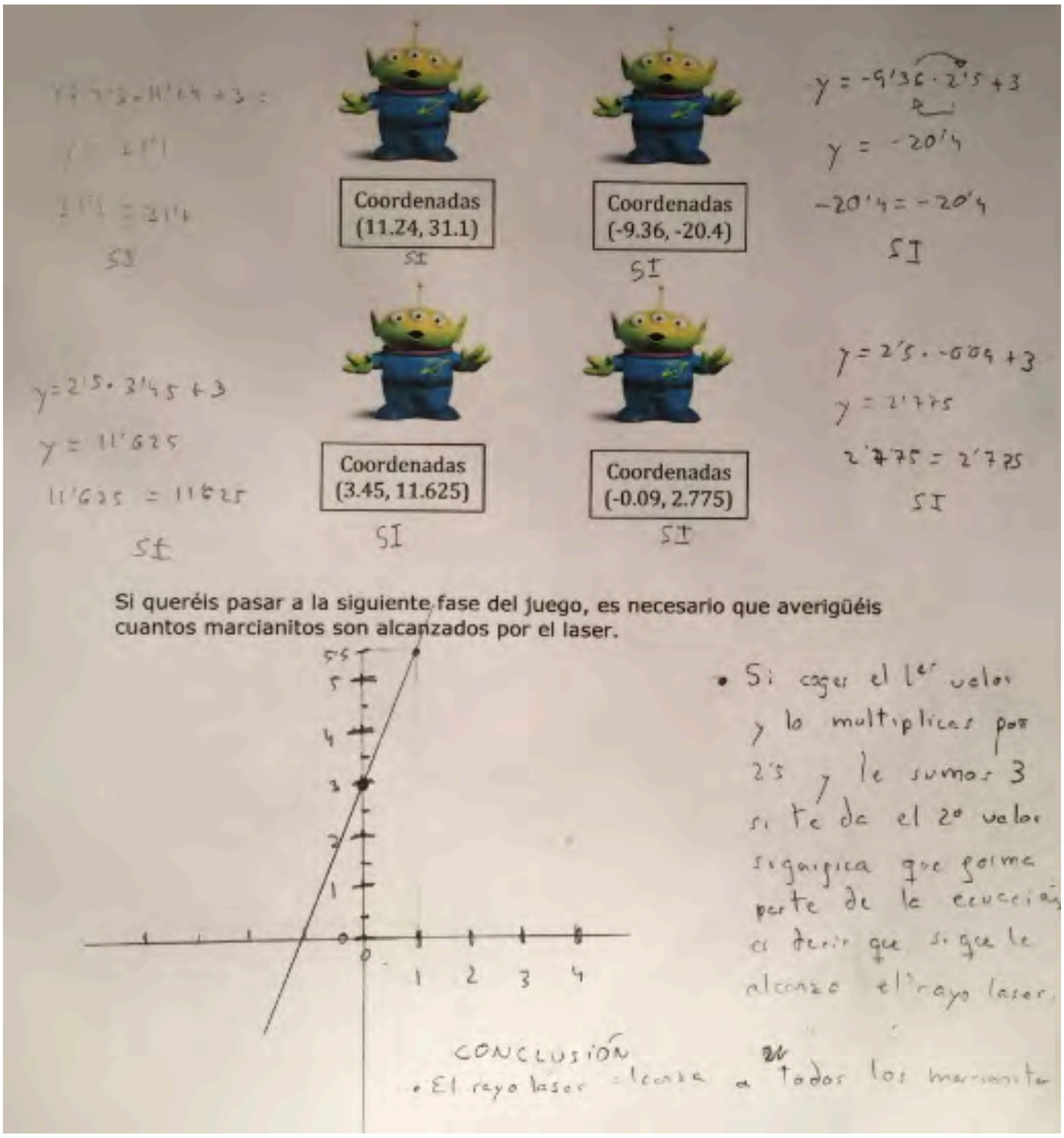


FIGURA 4.5.5.111. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.6.1*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.43. *Estrategias utilizas en la Fase 1 de Situación 6*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.
Grupo 2	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.
Grupo 3	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.
Grupo 4	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.

Grupo 5	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.	
Grupo 6	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.
Grupo 7	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.
Grupo 8	Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.44. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 1 de la Situación 6*

Estrategias bases utilizadas	Nº de grupos	Porcentaje
Sustitución de las coordenadas de la posición de los marcianos en la ecuación de la recta que describe el rayo.	2	25 %
Construcción la gráfica de la recta que define el rayo laser a partir de la ecuación facilitada y previa conversión al registro tabular, para luego colocar a los marcianos en la gráfica y ver si coinciden sus coordenadas con el rayo.	6	75 %

Fuente: elaboración propia

La estrategia base utilizada por la mayoría de los grupos es un claro ejemplo de la fuerte tendencia de graficación existente en los alumnos cuando se encuentran antes una función dada en el registro Algebraico.

Los problemas en el aprendizaje de las nociones aquí tratadas, pueden ser explicadas, en cierta medida, por el fuerte énfasis que tanto manuales escolares como profesorado efectúan sobre los procesos algebraicos explicados y trabajados de manera mecánica, parcelando su enseñanza limitándola a la representación sin conexión entre un registro y otro.

Es claro que mediante la construcción de las gráficas los estudiantes pretendían ayudarse de la visualización para encontrar aquellos marcianos que eran alcanzados por el rayo, pero la configuración de la actividad y la elección de las coordenadas de posición han hecho de esta estrategia un método insuficiente, permitiendo, así, que el alumno descubra que a partir de la expresión algebraica es posible conocer si un determinado punto pertenece a una recta o no, mediante un sencillo cálculo dentro del registro Numérico.

Fase 2: Ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente.

Descripción:

Tomando como punto partida el trabajo realizado con la función afín en la situación 5, y en la institucionalización efectuada a su término en donde se explicó al alumno que, en $y=mx + n$, el coeficiente m es la pendiente que expresa el aumento (si m es positiva) o disminución (si m es negativa) de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente y que el coeficiente n es la ordenada en el origen, es decir, el punto de corte de la recta con el eje y, esta fase de la situación 6 se centra en la obtención de la ecuación de la recta que define al rayo a partir del punto que donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma a partir de la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen n, favoreciéndose así la conversión y coordinación entre el registro algebraico y numérico:

"En esta fase del juego, no conocemos la ecuación de la recta que describe el rayo laser. Únicamente sabemos la posición del cañón en el punto (5, 7) y la pendiente de la recta que describe el rayo que sale del cañón, que es -1/2.

Para pasar a la siguiente fase es necesario saber si el rayo alcanza a un marciano que está situado en el punto (455, -227.5).

¿Alcanza el rayo laser al marcianito?"

Para evitar que el estudiante recurra al registro semiótico Gráfico y se vea en la necesidad de tener que trabajar con los registros Algebraico y Numérico y articularlos para hallar la expresión de la recta del rayo a partir del punto conocido y la pendiente, se tomaron las siguientes medidas:

- La posición del marciano se ha elegido de tal manera que las coordenadas de su posición son relativamente difíciles de representar en una gráfica cartesiana. Esto obligará a que el estudiante tenga que recurrir a la sustitución de las coordenadas en la ecuación de la recta una vez calculada.

- Los puntos que sitúan al cañón y al marciano están considerablemente alejados para evitar la construcción de la gráfica a partir de ambos.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad, tras repasar los conceptos vistos en la fase anterior:

– **Profesor:** *Pasamos a la siguiente pantalla. ¿Qué pasa en la siguiente pantalla?*

  En la siguiente pantalla no conocemos la ecuación de la recta que describe el rayo laser. Antes teníamos la ecuación, pero en esta pantalla no.

  Lo que sí tenemos es la posición del cañón. El cañón está en la posición (5, 7). Y también conocemos la pendiente. ¿con que letra denominábamos a la pendiente?

– **Varios:** *Con m.*

– **Profesor:** *Pues conocemos la pendiente de la recta del rayo laser que sale del cañón. Luego conocemos la posición del cañón y la pendiente de la recta.*

  Tenemos un marcianito en está posición (455, -227,5). Para pasar de pantalla tenéis que ver si el rayo alcanza al marciano que está en esa posición.

  Conocemos la posición del cañón, la pendiente de la recta que describe el rayo y la posición del marciano. Y tenéis que ver si el rayo laser alcanza al marciano.

Tras enunciar la consigna, únicamente los grupos 1 y 5 han partido de la expresión general de la función afín y= mx + n para encontrar el valor de n y hallar, así, la expresión algebraica de la recta que define el rayo laser del cañón de esta pantalla.

De este modo, una vez calculada, sustituyen las coordenadas de la posición del marciano para comprobar si es alcanzado o no, realizando un perfecto trabajo de coordinación entre los registros Numérico y Algebraico:

Grupo 5

- **Profesor:** *Contadme cómo lo habéis hecho.*
- **Lidia:** *Pues hemos puesto la fórmula de y =mx +n…*
- **Profesor:** *¿Y por qué habéis cogido esa en lugar de y=mx?*
- **Silvia:** *Porque n también puede ser cero y si da cero ya está la otra.*
- **Lidia:** *Hemos sustituido 7 en y, 5 en x y -1/2 en la m.*
- **Profesor:** *¿Y por qué habéis cogido ese punto y no el del marciano?*
- **Lidia:** *Porque es donde está el cañón.*
- **Profesor:** *muy bien.*
- **Lidia:** *hemos despejado la n y nos da 9,5. Hemos puesto la fórmula con m y n.*
- **Profesor:** *Es decir, que habéis llegado a que la ecuación del rayo es y= -172x + 9,5, ¿no?*
- **Lidia:** *Sí.*
- **Profesor:** *¿Y con eso qué habéis hecho?*
- **Lidia:** *Que hemos sustituido por las coordenadas del marciano.*

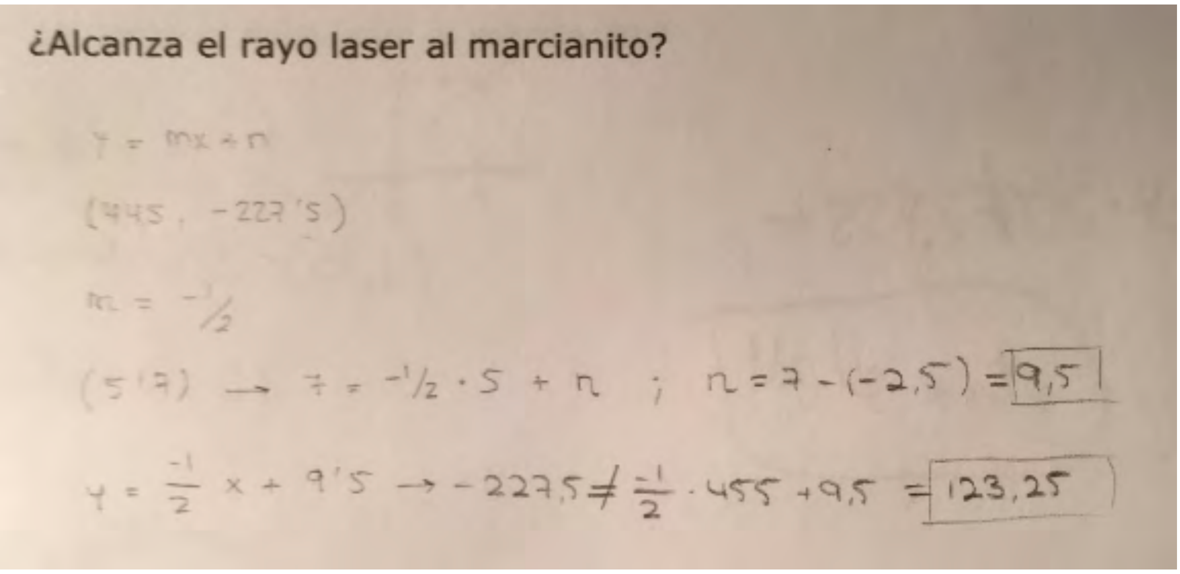
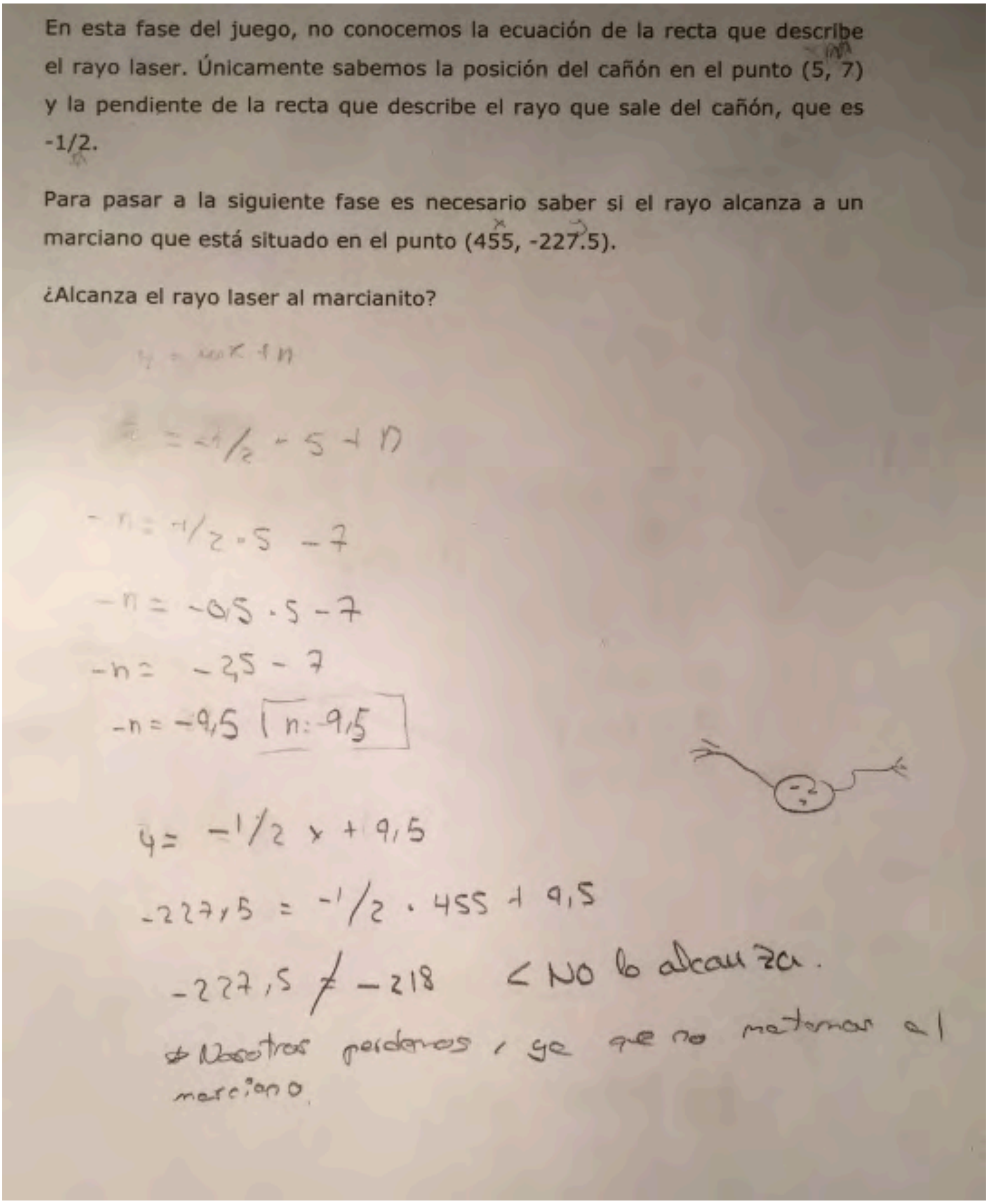


FIGURA 4.5.5.112. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.6.2*

Grupo 1



En esta fase del juego, no conocemos la ecuación de la recta que describe el rayo laser. Únicamente sabemos la posición del cañón en el punto (5, 7) y la pendiente de la recta que describe el rayo que sale del cañón, que es -1/2.

Para pasar a la siguiente fase es necesario saber si el rayo alcanza a un marciano que está situado en el punto (455, -227.5).

¿Alcanza el rayo laser al marcianito?

$y = mx + n$

$7 = -1/2 \cdot 5 + n$

$-n = -1/2 \cdot 5 - 7$

$-n = -0,5 \cdot 5 - 7$

$-n = -2,5 - 7$

$-n = -9,5 \quad \boxed{n = 9,5}$

$y = -1/2\, x + 9,5$

$-227,5 = -1/2 \cdot 455 + 9,5$

$-227,5 \neq -218$ < NO lo alcanza.

Nosotros perdemos, ya que no matamos al marciano.

FIGURA 4.5.5.113. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.6.2*

Por su parte, los grupos 2, 7 y 8, comienzan construyendo una gráfica que les de cierta idea de si el rayo alcanza al marciano o no. Enseguida descubren que debido a la falta de la expresión que define la recta y lo alejado que se encuentra el marciano, esta vía no es factible, optando, finalmente, por la misma realizada por los grupos 1 y 5:

Grupo 7

- **Maili:** *¿Lo dibujamos?*
- **Lucía:** *¿El qué? ¿La gráfica?*
- **Maili:** *Si, más o menos para hacernos una idea.*
- **María:** *Si, si con que nos imaginemos como está situado aunque luego ya nos imaginemos que esté muchísimo más lejos…*
- **Lucía:** *uno, dos, tres, cuatro, cinco. Uno dos tres cuatro cinco seis y siete* (dibujando la gráfica)*. Aquí estaría el cañón. La pendiente es decreciente. Por lo tanto iría así* (señalando sobre la gráfica una recta decreciente)
- **Maili:** *Puede que si le dé. Porque si el marcianito está por aquí más o menos…*
- **Lucía:** *Si, puede que le de…pero, ¿cómo lo sabemos?*
- **Profesor:** *Buenas. ¿Qué tal?¿Qué estáis haciendo?*
- **Maili:** *Comprobando más o menos si va a dar al Marcano o no.*
- **Profesor:** *¿Y cómo lo vais a hacer?*
- **Lucía:** *De momento estamos situando cómo está situada cada cosa.*
- **Profesor:** *Porque lo que no conocemos es la ecuación del rayo esta vez, ¿no?*
- **María:** *Sí.*
- **Profesor:** *¿El rayo de dónde sale?*
- **Lucía:** *Del (5, 7).*
- **Profesor:** *¿Y qué más sabemos del rayo?*
- **Maili:** *Pues que la pendiente es menos un medio.*
- **Profesor:** *¿Qué funciones hemos estado trabajando?*
- **Maili:** *Afín y de proporcionalidad. Y la de proporcionalidad es la afín cuando la n es igual a cero.*
- **Profesor:** *¿Cómo era la ecuación de la función afín? ¿Os acordáis?*

– **Maili:** *La afín era y = mx + n.*

– **Profesor:** *Escribirla en el papel. Pensad, de esa ecuación, ¿qué conocéis?*

– **Lucía:** *la m.*

– **Profesor:** *¿qué era?*

– **Lucía:** *-1/2.*

– **Profesor:** *y el rayo, ¿de donde nacía?*

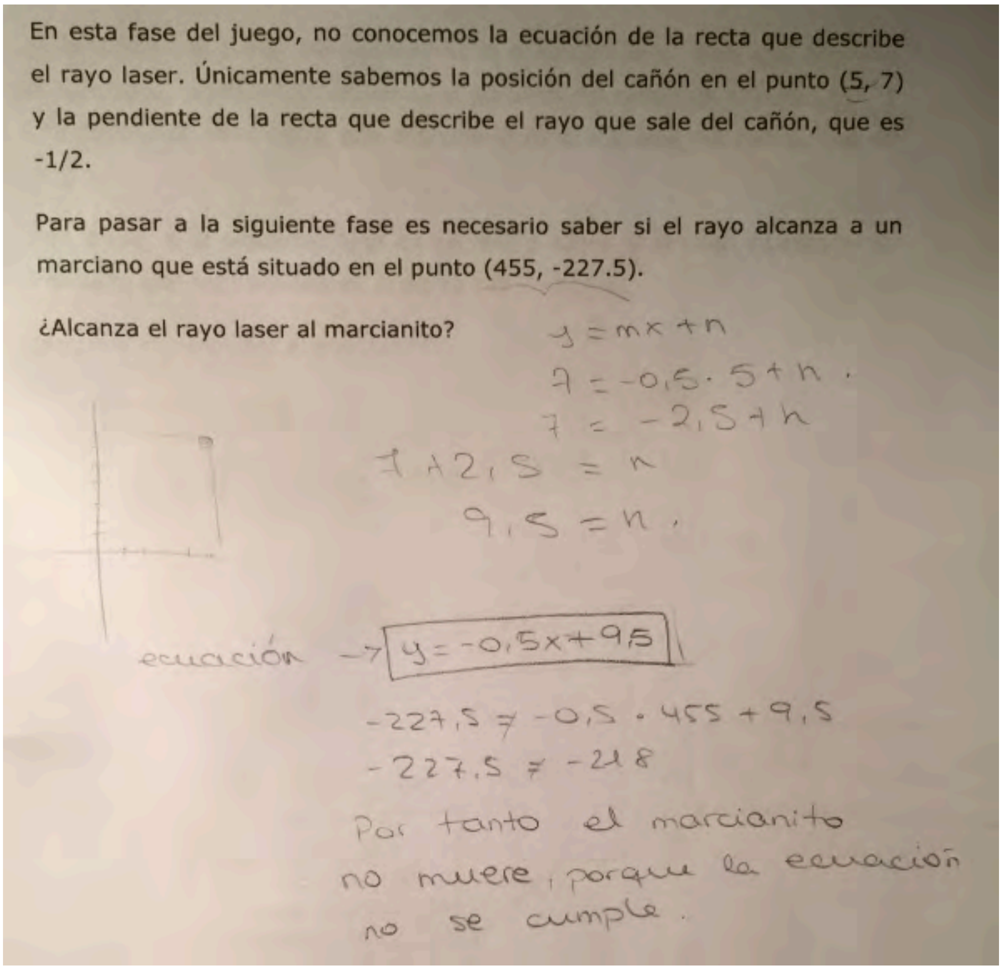
– **Maili:** *De (5, 7).*

– **Profesor:** *¿Y qué son (5, 7)?*

– **Maili:** *La x y la y.*

– **Profesor:** *¿Con esto podéis averiguar algo?*

– **Maili, Lucía y María:** *La n.*



En esta fase del juego, no conocemos la ecuación de la recta que describe el rayo laser. Únicamente sabemos la posición del cañón en el punto (5, 7) y la pendiente de la recta que describe el rayo que sale del cañón, que es -1/2.

Para pasar a la siguiente fase es necesario saber si el rayo alcanza a un marciano que está situado en el punto (455, -227.5).

¿Alcanza el rayo laser al marcianito?

$y = mx + n$

$7 = -0{,}5 \cdot 5 + n$.

$7 = -2{,}5 + n$

$7 + 2{,}5 = n$

$9{,}5 = n$.

ecuación $\rightarrow \boxed{y = -0{,}5x + 9{,}5}$

$-227{,}5 \neq -0{,}5 \cdot 455 + 9{,}5$

$-227{,}5 \neq -218$

Por tanto el marcianito no muere, porque la ecuación no se cumple.

FIGURA 4.5.5.114. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.6.2*

Grupo 2

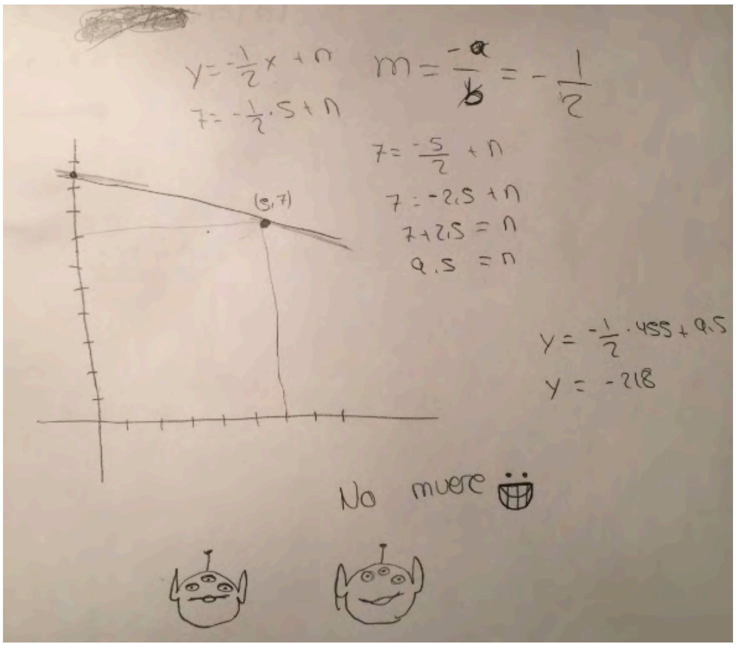
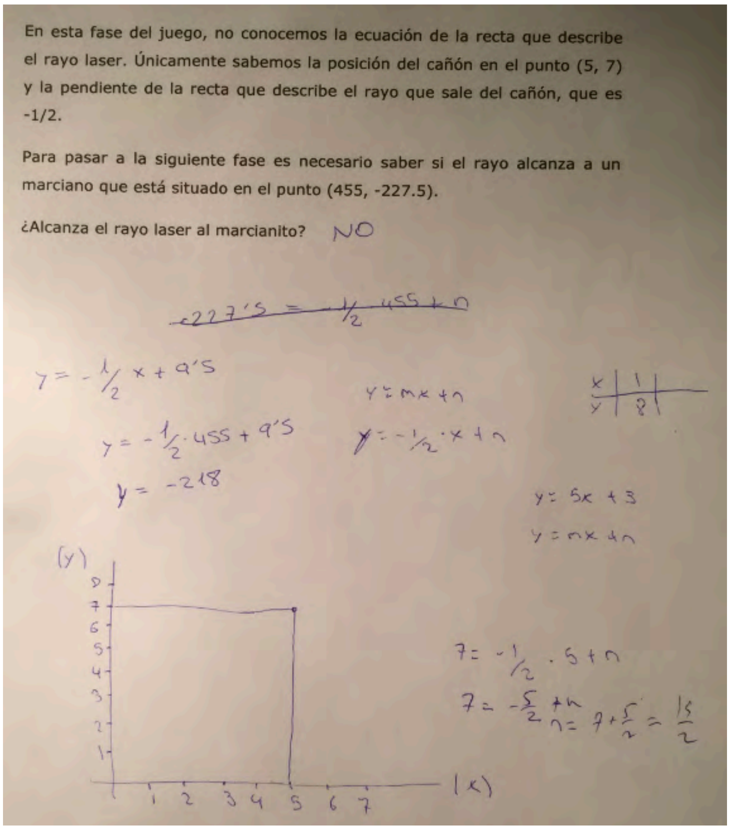


FIGURA 4.5.5.115. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.6.2*

Grupo 8


En esta fase del juego, no conocemos la ecuación de la recta que describe el rayo laser. Únicamente sabemos la posición del cañón en el punto (5, 7) y la pendiente de la recta que describe el rayo que sale del cañón, que es -1/2.

Para pasar a la siguiente fase es necesario saber si el rayo alcanza a un marciano que está situado en el punto (455, -227.5).

¿Alcanza el rayo laser al marcianito? NO

FIGURA 4.5.5.116. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.6.2*

Los grupos 3 y 6, contra todo pronostico, hallan el valor de n por tanteo en lugar de resolver la ecuación una vez sustituidos los datos. Esto puede ser debido a las siguientes posibles causas o una conjugación de ellas:

- La falta de conexión entre conceptos que se desarrolla en las aulas, en los que cada unidad del temario se presenta como compartimentos estanco, de modo que al estar trabajando con funciones, el alumno no se plantea el uso de ecuaciones y su resolución.
- La designación de la variable a hallar, pues aparece bajo la letra n en lugar de la comúnmente utilizada x.

Grupo 6

- **Profesor:** *Cuéntame Sergio, ¿qué estáis haciendo?*
- **Sergio:** *Pues hemos calculado la ecuación a partir de y=mx+n. Ya sabemos que m es -1/2 y tiene que cumplirse que sustituyendo 5 por x, que d e igual a 7.*
- **Profesor:** *Entonces, ¿la n la habéis averiguado por tanteo hasta que os ha dado el valor de la y?¿Cómo habéis llegado a ese 9,5? ¿Por tanteo?*
- **Javier:** *Pensando*
- **Profesor:** *Por tanteo. Probando con valores hasta dar con uno que de 7 en la y, ¿no?.*
- **Javier:** *Sí.*
- **Profesor:** *¿Y ahora con eso que vais a hacer?*
- **Sergio:** *Pues ahora escribimos la ecuación y tenemos el mismo problema que en la primera pantalla.*

Caso especial ha sido el del grupo 4, que desobedeciendo la instrucción que se dio al comienzo de estas sesiones sobre la utilización del libro, han consultado en este para utilizar la fórmula que permite calcular la pendiente de una recta a través de las coordenadas de dos de sus puntos para cotejar si dicho resultado coincide con el valor de le pendiente ya dada en el enunciado de la actividad:

Grupo 4

- **Profesor:** *¿Qué tal chicas? ¿Matamos al marcianito o no matamos al marcianito*
- **Ana, Mireya, Ainhoa y Xana:** *No,*
- **Profesor:** *¿Y por qué lo sabéis?*
- **Mireya:** *Porque al utilizar esta fórmula, la pendiente que da al utilizar esto dos puntos da -0,52 y era -0,5.*
- **Profesor:** *Es decir, que vosotras habéis utilizado una fórmula que os permite saber la pendiente de una recta dados dos puntos, ¿no?*
- **Xana:** *Si.*
- **Profesor:** *¿Y eso fórmula de donde la habéis sacado?*
- **Xana:** *Del libro.*

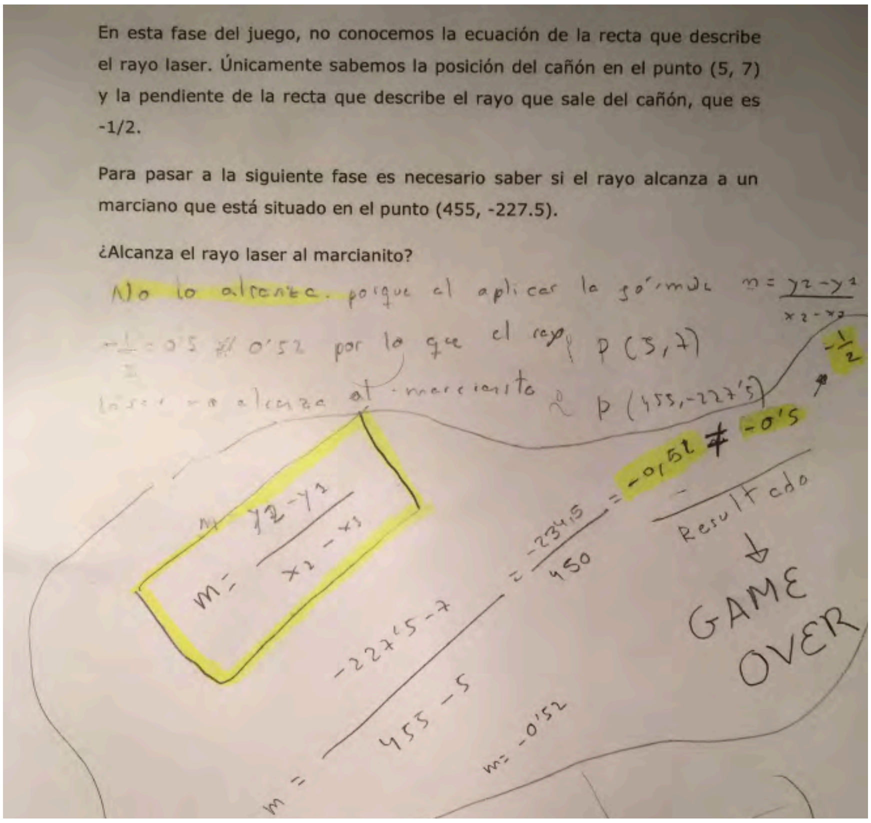


FIGURA 4.5.5.117. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.6.2*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.45. *Estrategias utilizas en la Fase 2 de Situación 6*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.	
Grupo 2	Construcción de una gráfica que les de cierta idea de si el rayo alcanza al marciano o no.	Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.
Grupo 3	Obtención de la ecuación de la recta a partir previo cálculo por del valor de n por tanteo en lugar de resolver la ecuación una vez sustituidos los datos.	
Grupo 4	Utilización de la fórmula que permite calcular la pendiente de una recta a través de las coordenadas de dos de sus puntos para cotejar si dicho resultado coincide con el valor de le pendiente ya dada.	

Grupo 5	Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.	
Grupo 6	Obtención de la ecuación de la recta a partir previo cálculo por del valor de n por tanteo en lugar de resolver la ecuación una vez sustituidos los datos.	
Grupo 7	Construcción de una gráfica que les de cierta idea de si el rayo alcanza al marciano o no.	Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.
Grupo 8	Construcción de una gráfica que les de cierta idea de si el rayo alcanza al marciano o no.	Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.46. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 2 de la Situación 6*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.	2	25 %
Construcción de una gráfica que les de cierta idea de si el rayo alcanza al marciano o no.	3	32,5 %
Obtención de la ecuación de la recta a partir previo cálculo por del valor de n por tanteo en lugar de resolver la ecuación una vez sustituidos los datos.	2	25 %
Utilización de la fórmula que permite calcular la pendiente de una recta a través de las coordenadas de dos de sus puntos para cotejar si dicho resultado coincide con el valor de le pendiente ya dada.	1	12,5 %

Fuente: elaboración propia

Siete de los ocho grupos han averiguado, durante el desarrollo de esta fase de la situación, que el determinar la ecuación de una recta dado un punto de la misma y la pendiente m, pasa por hallar la ordenada en el origen a partir de la expresión general $y = m x + n$.

Para ellos, se hacía totalmente necesaria la coordinación entre la representación numérica y algebraica, objetivo principal de la tarea.

El profesor explica a sus alumnos otra manera de obtener la ecuación pedida, mediante la ecuación punto pendiente cuya expresión es $y = y_0 + m(x - x_0)$, siendo (x_0, y_0) el punto conocido.

<u>Fase 3</u>: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Descripción:

Siguiendo con el trabajo de coordinación y conversión entre los registros Numérico y Algebraico y los tratamientos dentro de cada uno ellos, esta tercera fase de la situación busca que los alumnos obtengan la ecuación de la recta únicamente a partir de los dos puntos conocidos, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de sustituir dichos valores en el ecuación $y=mx+n$ para averiguar el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente:

"En esta fase del juego, el cañón se encuentra en la posición (4, -3) y tenemos un marcianito situado en el punto (320, 1419).

Para poder pasar a la cuarta fase es necesario encontrar la ecuación de la recta que describe el rayo laser que sale del cañón y que alcanza a dicho marcianito."

Al igual que en la fase previa, la distancia entre los puntos es lo suficientemente distante como para evitar que el estudiante construya la gráfica a partir de ambos y determine la ordenada en el origen y la pendiente gráficamente.

Desarrollo de la situación en el aula:

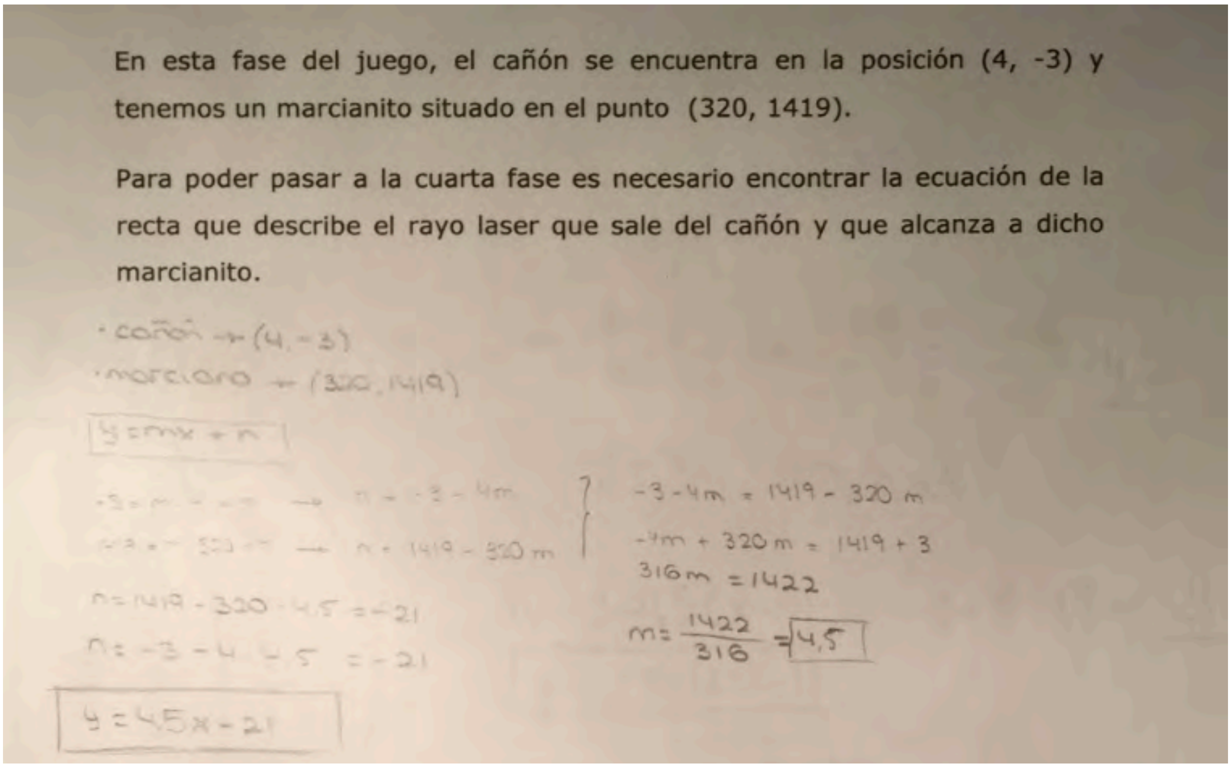
El profesor introduce la actividad, tras repasar los conceptos vistos en la fase anterior:

- **Profesor:** *En la pantalla que toca hoy nos dicen la posición del cañón, que está en el punto (4, -3), y dónde está uno de los marcianos, en el punto (320, 1419).*

  Para poder pasar a la cuarta fase del juego, tenéis que encontrar la ecuación de la recta que es el rayo que sale del cañón que alcanza a ese marciano, sabiendo la posición del cañón y la posición del marciano. No sabemos nada más. Y tenéis que encontrar la ecuación del rayo que da al marciano.

Utilizando, nuevamente, la expresión general de la función afín $y=mx+n$, los grupos 5 y 8 sustituyen las coordenadas de los dos puntos conocidos de la recta (posición del cañón y posición del marciano) y mediante la resolución del sistema de ecuaciones resultante obtienen los valores de m y den que les permite escribir la ecuación de la recta pedida.

Grupo 5


En esta fase del juego, el cañón se encuentra en la posición (4, -3) y tenemos un marcianito situado en el punto (320, 1419).

Para poder pasar a la cuarta fase es necesario encontrar la ecuación de la recta que describe el rayo laser que sale del cañón y que alcanza a dicho marcianito.

· cañón → (4, -3)
· marciano → (320, 1419)

$\boxed{y = mx + n}$

$-3 - 4m = 1419 - 320m$
$-4m + 320m = 1419 + 3$
$316m = 1422$
$m = \frac{1422}{316} = \boxed{4,5}$

$n = 1419 - 320 \cdot 4,5 = -21$
$n = -3 - 4 \cdot 4,5 = -21$

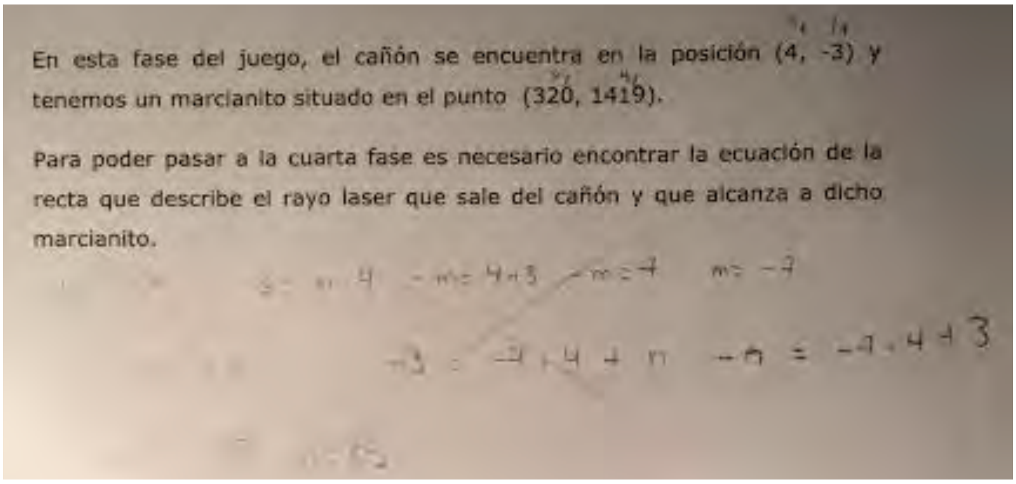
$\boxed{y = 4,5x - 21}$

FIGURA 4.5.5.118. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.6.3*

Por su parte, los grupos 1 y 7, también comienzan a resolver la actividad partiendo de $y= mx + n$, pero únicamente sustituyen las coordenadas correspondientes al punto donde se localiza el cañón, sin plantearse que como el rayo alcanza al marciano, también deben de sustituir las coordenadas del punto donde se ubica.

Ello, da lugar a la paralización de esta estrategia y a la utilización de una errónea partiendo de la expresión de la función de proporcionalidad $y=mx$ para intentar solucionar el problema, pues así solo hay una incógnita que despejar, mientras que cuando empleaban la función afín solo llegaban a una ecuación con dos incógnitas que no eran capaces de calcular.

Grupo 1



En esta fase del juego, el cañón se encuentra en la posición (4, -3) y tenemos un marcianito situado en el punto (320, 1419).

Para poder pasar a la cuarta fase es necesario encontrar la ecuación de la recta que describe el rayo laser que sale del cañón y que alcanza a dicho marcianito.

FIGURA 4.5.5.119. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.6.3*

Grupo 7

- **Profesor:** *¿Qué tal? ¿Me contáis lo que estáis haciendo?*
- **Maili:** *Pues hemos empezado cogiendo la ecuación y = mx + n.*
- **Lucía:** *Y hemos sustituido y por -3 y x por 4.*
- **Maili:** *Pero ahora estamos pensando que hay que coger la y= mx porque sino tenemos dos cosas que no sabemos.*
- **Profesor:** *Tenéis dos incógnitas, ¿no?*
- **Maili:** *Sí.*
- **Profesor:** *¿Cuántos puntos conocéis?*
- **Lucía:** *Dos, el cañón y el marciano.*
- **Profesor:** *¿El rayo va a pasar por los dos sitios?*
- **Lucía:** *Si, porque sale del cañón y da al marciano.*
- **Profesor:** *Ok. ¿Qué pasa si sustituís en y=mx + n por las coordenadas de los dos puntos? Escribidlo. (Maili es cribe las dos ecuaciones). ¿Qué es eso?*
- **Lucía:** *Dos ecuaciones.*
- **Profesor:** *¿Con cuántas incógnitas?*
- **Lucía y Maili:** *Dos.*
- **Profesor:** *y dos ecuaciones con dos incógnitas cada una, ¿qué es?*
- **Lucía:** *Un sistema.*

Los cuatro grupos restantes, justificándose en el hecho de haber empezado a estudiar ya para el examen después de que el profesor avisará hace tres clases la fecha del mismo, resuelven la actividad utilizando la fórmula que les permite calcular la pendiente a partir del cociente entre la variación de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente dados dos puntos.

Una vez obtenida la m, sustituyen su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener la ordenada en el origen y por tanto la ecuación de la recta pedida.

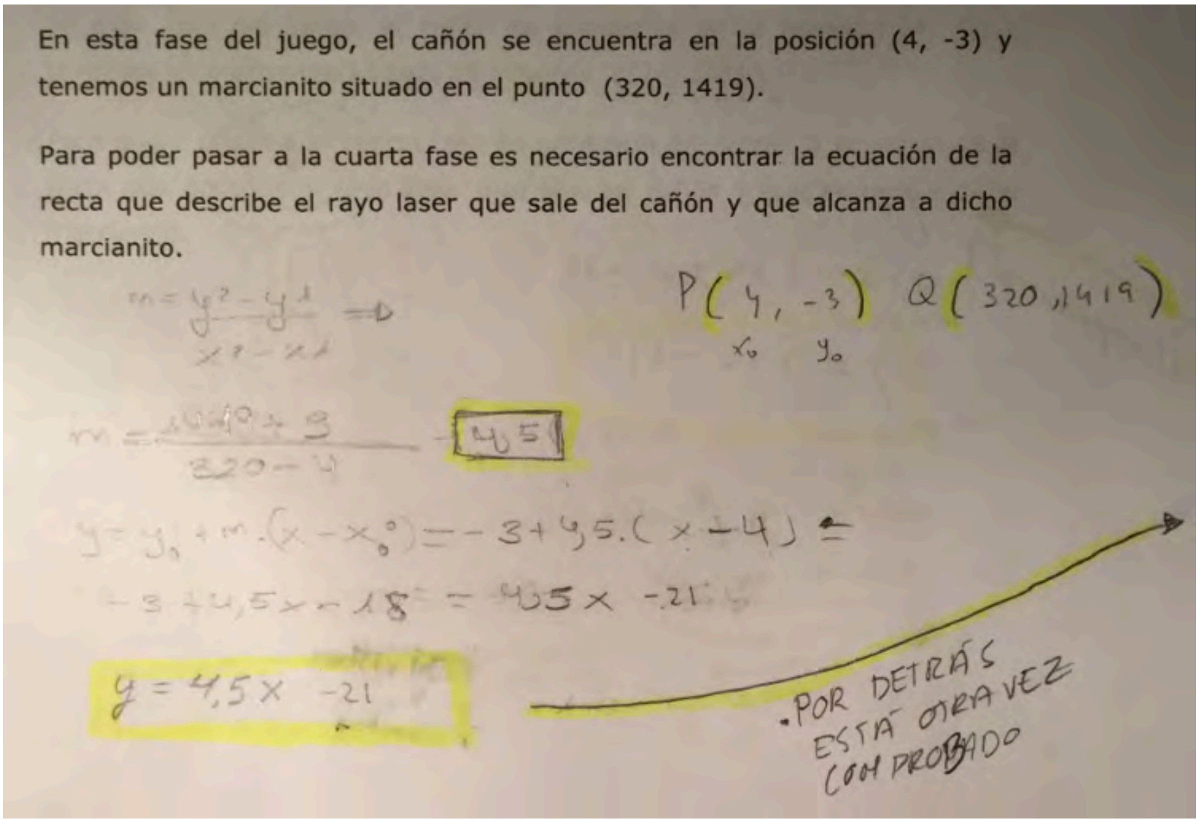


FIGURA 4.5.5.120. *Trabajo realizado por el grupo 4 en S.6.3*

De entre estos cuatro últimos grupos, tenemos que destacar lo ocurrido en los grupos 6 y 2.

El grupo 6, cómo hiciera en la fase 2, vuelve a utilizar la estrategia del tanteo par averiguar n, lo que es indicativo que no se ha fijado en ellos el procedimiento seguido y explicado en la institucionalización de los conceptos y resultados vistos el día anterior.

Grupo 6

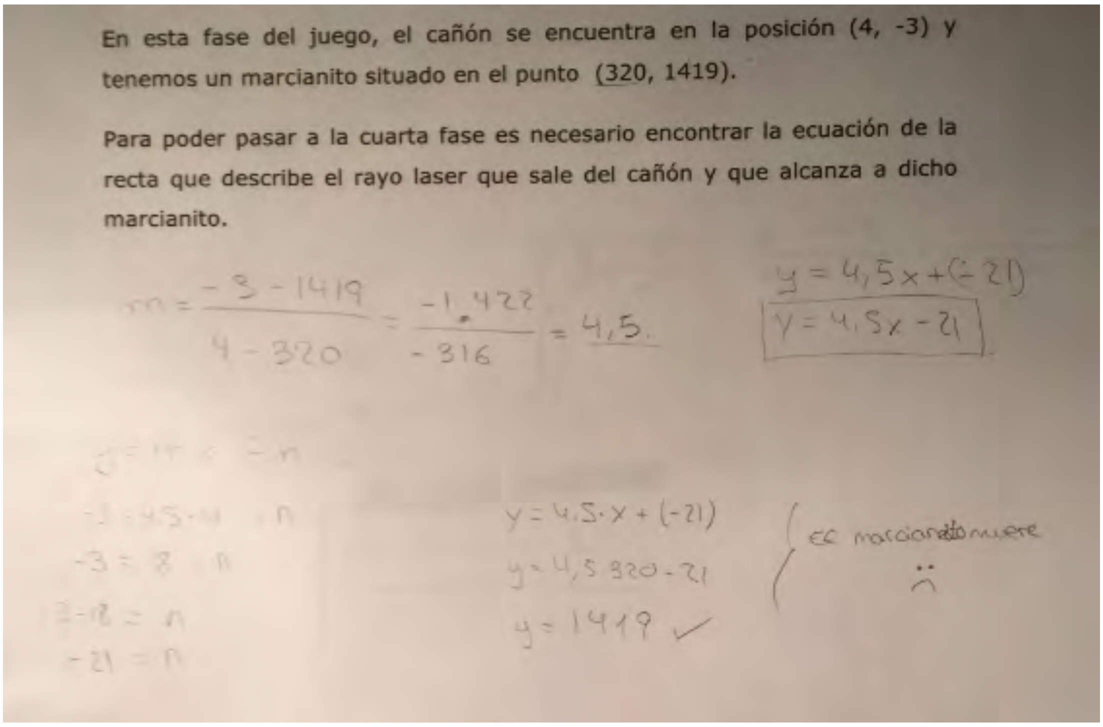
- **Profesor:** *¿Qué estáis haciendo?*
- **Sergio:** *Pues hemos utilizado la fórmula para sacar la pendiente...*
- **Profesor:** *¿Y esa fórmula de dónde la habéis sacado?*
- **Sergio:** *De estudiar para el examen.*
- **Profesor:** *Muy bien. Y a partir de ahí…¿qué vais a hacer?*
- **Sergio:** *Cómo ya sabemos m y tenemos los valores de x e y, pues vamos a sacer n por tanteo como el otro día.*

El caso del grupo 2 es un claro ejemplo de los procesos de memorización, mecanización y algoritmización que tiene lugar en el estudio de las matemáticas en múltiples ocasiones, pues si bien utilizan correctamente la fórmula para hallar la pendiente, la aplican sin llegar a comprender el sentido de la misma, Hecho nos atrevemos a decir que ha ocurrido en el resto de grupos que han procedido de esta manera aunque no hayan manifestado ninguna evidencia al respecto.

Grupo 2

- **Profesor:** *¿Cómo lo habéis resuelto?*
- **Beatriz:** *Hemos hallado la pendiente que es 4,5.*
- **Profesor:** *¿Cómo?*
- **Beatriz:** *Con la de la variación y entre la variación de x.*
- **Profesor:** *¿Y por qué conocéis esa fórmula?*
- **María y Sara:** *Porque venía en el libro y la hemos estudiado para el examen.*
- **Profesor:** *Ok. ¿Y cuánto os sale la pendiente entonces?*
- **Beatriz:** *4,5.*
- **Profesor:** *¿Y cómo habéis seguido?*
- **Beatriz:** *hemos cogido y=mx +n y hemos sustituido 4,5 y hemos cogido este punto y hemos sustituido la x y la y. Y hemos calculado la n, que es -21. Y la fórmula de la ecuación es y= 4,5x -21. Y hemos sustituido por la posición del marciano para ver si le daba. Y si le da.*

- **Profesor:** *¿Era necesario sustituir las coordenadas del marciano en la fórmula para ver si le alcanzaba?*
- **Beatriz:** *Sí.*
- **María:** *Si ya sabíamos que le daba.*
- **Profesor:** *Hemos dicho que el rayo ya le daba.*
- **Beatriz:** *¿Cómo que ya le daba?*
- **Profesor:** *Las instrucciones de la pantalla decían que había que encontrar la ecuación del rayo que sale del cañón y alcanza al marciano.*


En esta fase del juego, el cañón se encuentra en la posición (4, -3) y tenemos un marcianito situado en el punto (320, 1419).

Para poder pasar a la cuarta fase es necesario encontrar la ecuación de la recta que describe el rayo laser que sale del cañón y que alcanza a dicho marcianito.

FIGURA 4.5.5.121. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.6.3*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.47. *Estrategias utilizas en la Fase 3 de Situación 6*

Grupo	**Estrategia base**	**Cambio de estrategia**
Grupo 1	Utilización de la expresión algebraica de la función de proporcionalidad y= mx.	
Grupo 2	Cálculo de la pendiente a partir del cociente entre la variación de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente dados dos puntos. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener la ordenada en el origen.	
Grupo 3	Cálculo de la pendiente a partir del cociente entre la variación de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente dados dos puntos. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener la ordenada en el origen.	
Grupo 4	Cálculo de la pendiente a partir del cociente entre la variación de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente dados dos puntos. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener la ordenada en el origen.	

Grupo 5	Obtención de la ecuación de la recta a partir de los dos puntos conocidos, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de sustituir dichos valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente.	
Grupo 6	Cálculo de la pendiente a partir del cociente entre la variación de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente dados dos puntos. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener la ordenada en el origen.	
Grupo 7	Utilización de la expresión algebraica de la función de proporcionalidad y= mx.	Obtención de la ecuación de la recta a partir del punto donde se localiza el cañón y la pendiente de la misma, mediante la sustitución de dicho valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen *n*.
Grupo 8	Obtención de la ecuación de la recta a partir de los dos puntos conocidos, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de sustituir dichos valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente.	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.48. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 3 de la Situación 6*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Obtención de la ecuación de la recta a partir de los dos puntos conocidos, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de sustituir dichos valores en el ecuación y=mx +n para averiguar el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente.	2	25 %
Utilización de la expresión algebraica de la función de proporcionalidad y= mx.	2	25 %
Cálculo de la pendiente a partir del cociente entre la variación de la variable dependiente entre la variación de la variable independiente dados dos puntos. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener la ordenada en el origen.	4	50 %

Fuente: elaboración propia

Solo uno de los 8 grupos no ha conseguido llegar a ninguna estrategia que le permitiese encontrar la ecuación de la recta pedida a partir de dos puntos, lo que ha evidenciados ciertas carencias en lo que al trabajo con sistemas de ecuaciones y su resolución se refiere.

Aunque la fase se ha visto contaminada por el hecho de que los alumnos han comenzado el estudio de cara al examen y algunos de los grupos ya son conocedores de la fórmula que permite calcular la pendiente, la tarea nos ha permitido, por un lado, que los alumnos efectúen la conversión y coordinación entre los dos registros que entraban en juego, viéndose potencialmente mejorada con respecto al comienzo de esta situación; y por otro, poner de manifiesto el tipo de aprendizaje de las matemáticas que desarrollan los alumnos, basado en la memorización sin comprensión y en la aplicación de lo aprendido de manera mecánica en la resolución de los problemas.

<u>Fase 4</u>: Determinar la ecuación de la recta a partir de la gráfica.

Descripción:

La última fase de la situación tiene por objetivo, tras el trabajo previo realizado en las tres anteriores, que los alumnos sean capaces de obtener la ecuación de la recta del rayo laser a partir de dos puntos de coordenadas conocidas o de un punto de coordenadas conocidas y la pendiente, partiendo del registro gráfico para forzar la conversión a los registros Numérico y Algebraico:

"En la última parte del juego, tenemos la siguiente gráfica:

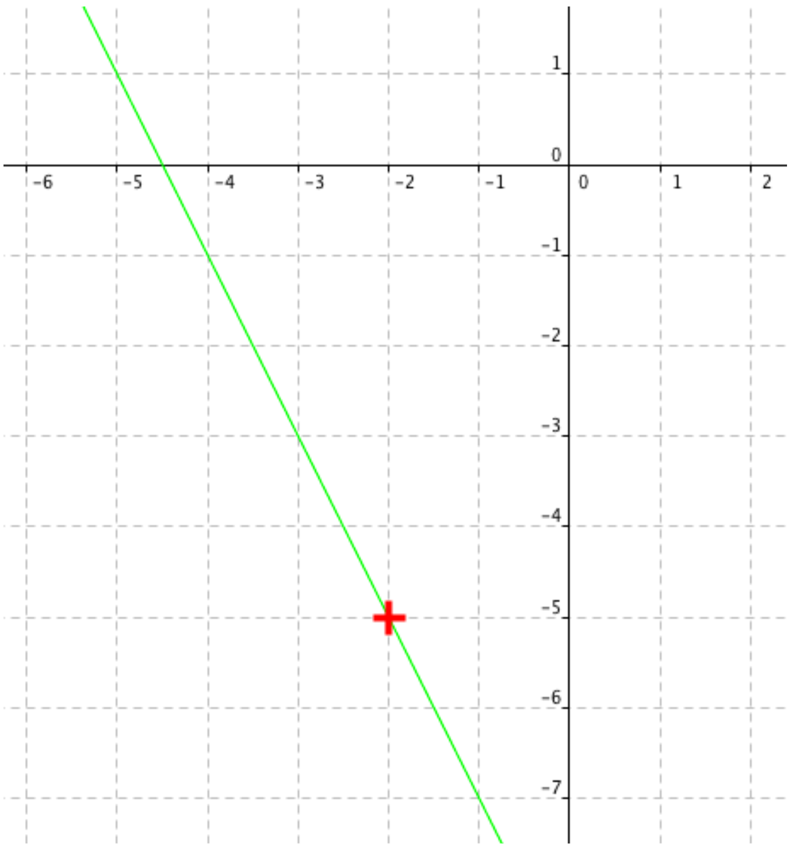


FIGURA 4.5.5.122. *Gráfica con la posición del cañón y trayectoria laser*

La cruz roja representa un cañón de doble boca, es decir, que emite el mismo rayo laser por ambas salidas.

Para finalizar el juego, debes averiguar cuantos de los siguientes tres marcianitos se libra del laser:"

Coordenadas (742, -1493) | Coordenadas (852, -1704) | Coordenadas (-961, 1913)

FIGURA 4.5.5.123. *Ficha 2 para el alumno con las coordenadas de localización de los marcianos*

La gráfica se ha diseñado de modo de modo que no aparece la ordenada en el origen para que el alumno se vea en la necesidad de obtener la ecuación de la recta por uno de los dos métodos explicados antes. De proporcionar la ordenada en el origen, la ecuación de la recta la obtendría por simple observación ya que dispondrían tanto de la pendiente como de este dato a partir de la gráfica, sin necesidad de realizar ningún cálculo ni conversión entre registros.

Como en anteriores casos, la posición de los marcianos se ha elegido de tal manera que no se pueda estudiar si el rayo laser les alcanza a partir del trozo de gráfica proporcionada y tengan que recurrir a la obtención de la ecuación de la recta para su posterior comprobación.

Desarrollo de la situación en el aula:

El profesor introduce la actividad, tras repasar los conceptos vistos en la fase anterior:

- **Profesor:** *Vamos ahora a la última pantalla. ¿Qué tenemos ahora? Pues ahora nos dan el cañón y el rayo en una gráfica. La cruz roja es el cañón, que es un cañón de doble boca, es decir, que tiene salido por dos sitios.*

  Y nos dan la posición de tres marcianos. Entonces, tenéis que averiguar a cuantos marcianos alcanza el rayo que hay en la gráfica. No tenéis más datos que la gráfica del cañón con el rayo y la posición de los tres marcianos.

Los grupos 2, 3, 4, 6, 7 y 8, localizan, mediante la gráfica dada, dos puntos de coordenadas enteras, para a partir de ellos calcular la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x institucionalizada al final de la fase anterior. Es decir, que dichos grupos realizan una primera conversión del registro Gráfico al Numérico y del Numérico al Algebraico para aplicar la misma estrategia que en la fase 3.

Grupo 8

- **Álvaro:** *Pues aplicamos la fórmula de antes, pero primero busca dos puntos.*
- **Colaborador 2:** *¿Qué es lo de antes?*
- **David:** *Lo de sacar la pendiente con y_2 menos y_1.*
- **Colaborador 2:** *¿Y de donde sacáis las coordenadas?*
- **David:** *De la gráfica. Por ejemplo (-2, -5) y (3, -3)*

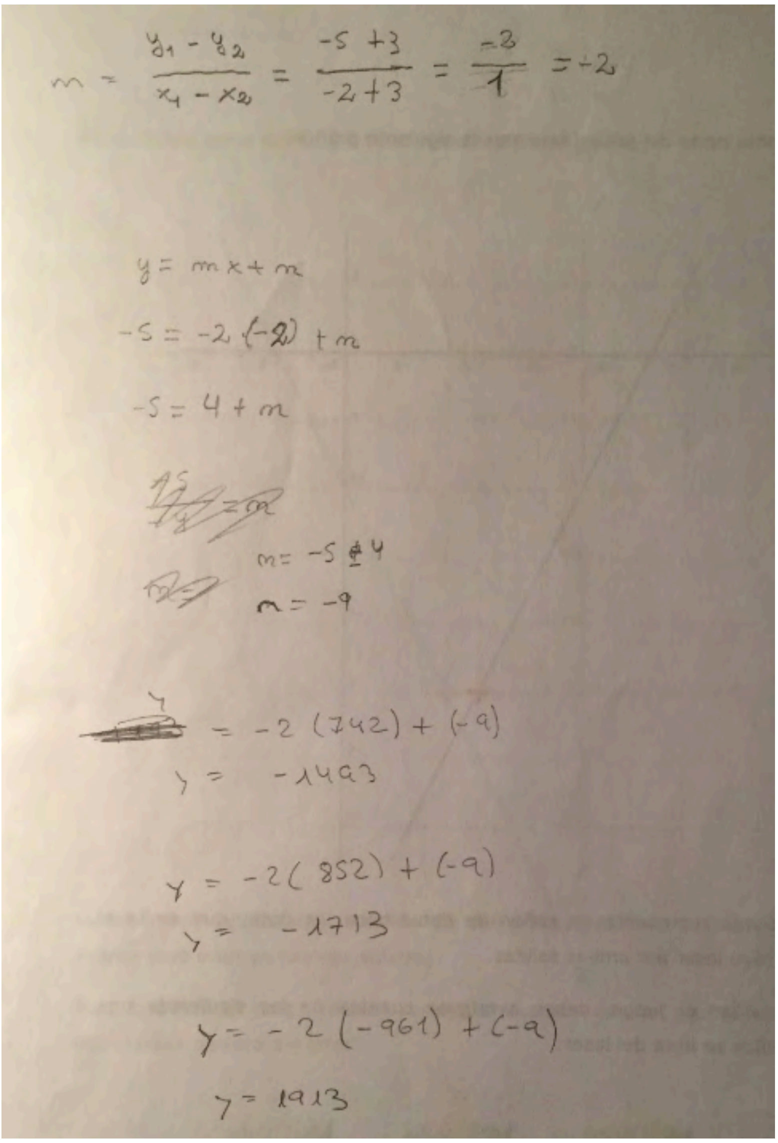
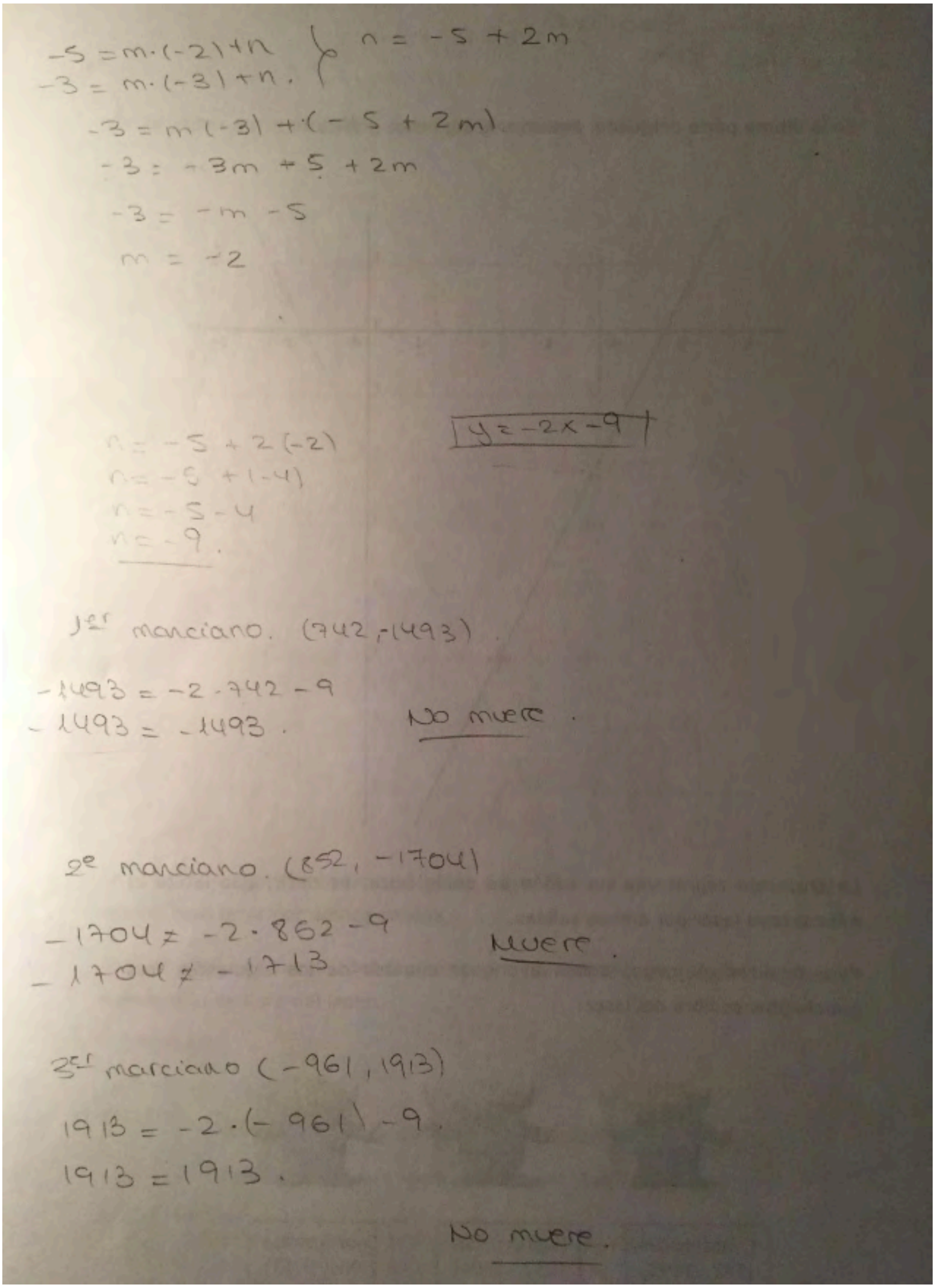


FIGURA 4.5.5.124. *Trabajo realizado por el grupo 8 en S.6.4*

Grupo 7



$-5 = m\cdot(-2)+n$
$-3 = m\cdot(-3)+n.$
$n = -5 + 2m$

$-3 = m(-3) + (-5 + 2m)$
$-3 = -3m + 5 + 2m$
$-3 = -m - 5$
$m = -2$

$\boxed{y = -2x - 9}$

$n = -5 + 2(-2)$
$n = -5 + (-4)$
$n = -5 - 4$
$n = -9.$

1er marciano. $(742, -1493)$.
$-1493 = -2\cdot 742 - 9$
$-1493 = -1493.$
No muere.

2º marciano. $(852, -1704)$
$-1704 \neq -2\cdot 852 - 9$
$-1704 \neq -1713$
Muere.

3er marciano $(-961, 1913)$
$1913 = -2\cdot(-961) - 9.$
$1913 = 1913.$
No muere.

FIGURA 4.5.5.125. *Trabajo realizado por el grupo 7 en S.6.4*

Hay que destacar, como algunos de estos grupos han calculado de manera equívoca el valor de la pendiente debido a los problemas presentados a la hora de operar con coordenadas negativas y los cambios de signo, lo que es un indicativo de la deficiente aprehensión que poseen de las operaciones con números enteros:

Grupo 6

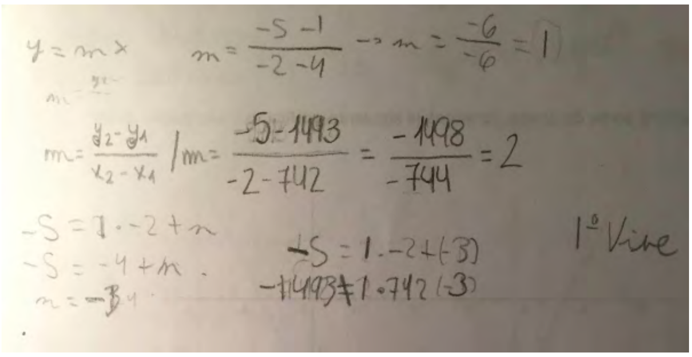


FIGURA 4.5.5.126. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.6.4*

Grupo 2

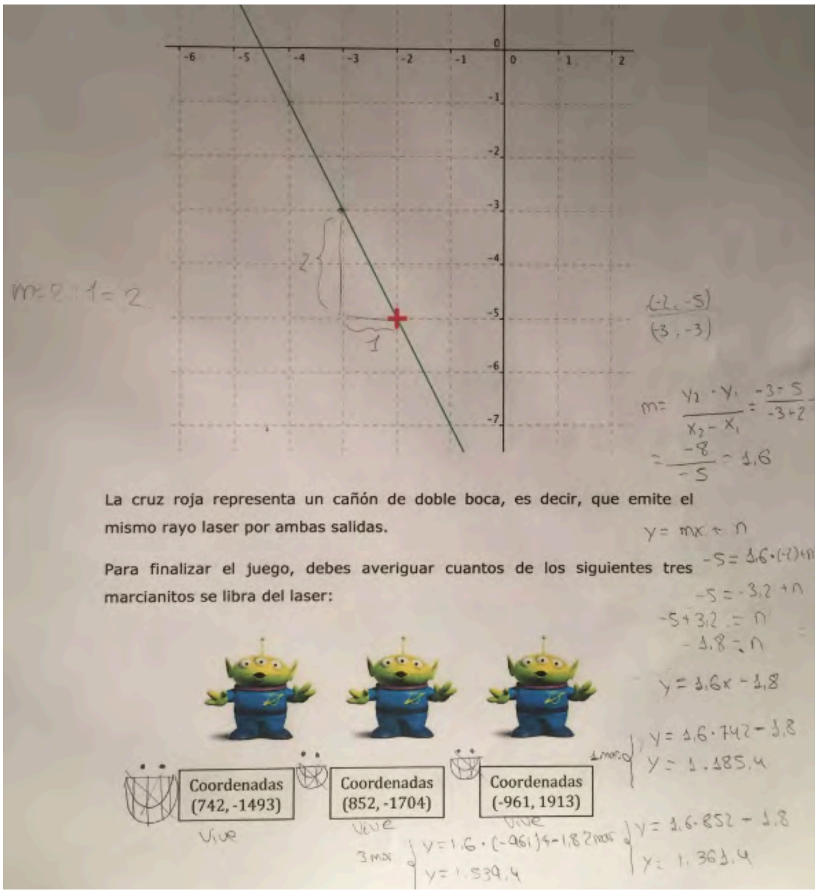


FIGURA 4.5.5.127. *Trabajo realizado por el grupo 2 en S.6.4*

Solo el grupo 5, pese haber explicado en la institucionalización de la situación 5 como se puede obtener la pendiente de una recta a través del estudio dela gráfica, ha sido capaz de obtener el valor de la pendiente efectuando tratamientos dentro del propio registro Gráfico. Esto es un claro ejemplo de las dificultades que conlleva el estudio de las variables visuales que forman parte de este sistema de representación:

Grupo 5

- **Colaborador 4:** *¿Me explicáis cómo lo habéis resuelto?*
- **Silvia:** *Hemos calculado primero, en que punto cortará la recta en el eje de la y. Y eso lo hemos hecho porque nos hemos dado cuenta que la pendiente es -2 porque cada cuadro que recorre hacía la derecha, baja dos, entonces, -2 entre 1 es -2. Entonces va a cortar en y en -9. Teniendo -9 y ya la pendiente que es -2, hemos obtenido la ecuación que es y= -2x -9. Luego hemos ido sustituyendo con la coordenada de los marcianitos y hemos visto que solo se libra uno.*

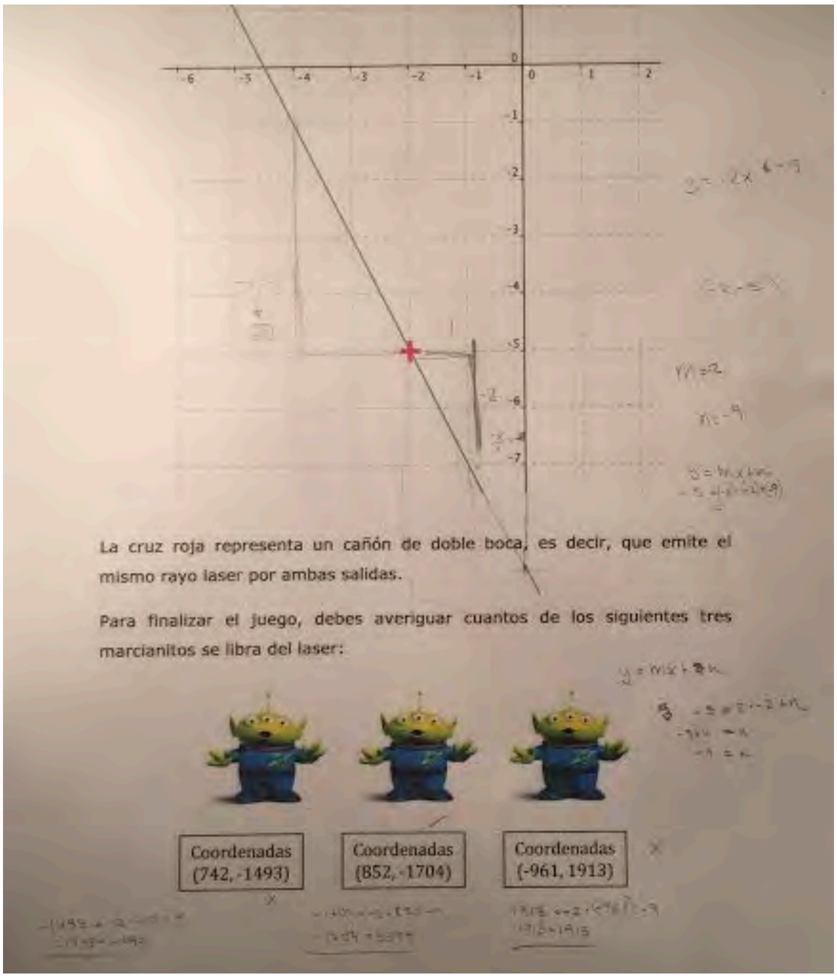


FIGURA 4.5.5.128. *Trabajo realizado por el grupo 5 en S.6.4*

Por su parte, el grupo 1 en lugar de escoger puntos por los que pasa la recta, utilizan las coordenadas de la posición de los marcianos para hallar los parámetros de la ecuación, sin caer en la cuenta que los marcianos pueden estar colocados en posiciones que no sean por las que pasa el rayo. Ello manifiesta, por un lado, una falta de comprensión de lo que la gráfica cartesiana representa y, por otro, una falta de habilidad en la identificación de puntos a través del registro gráfico:

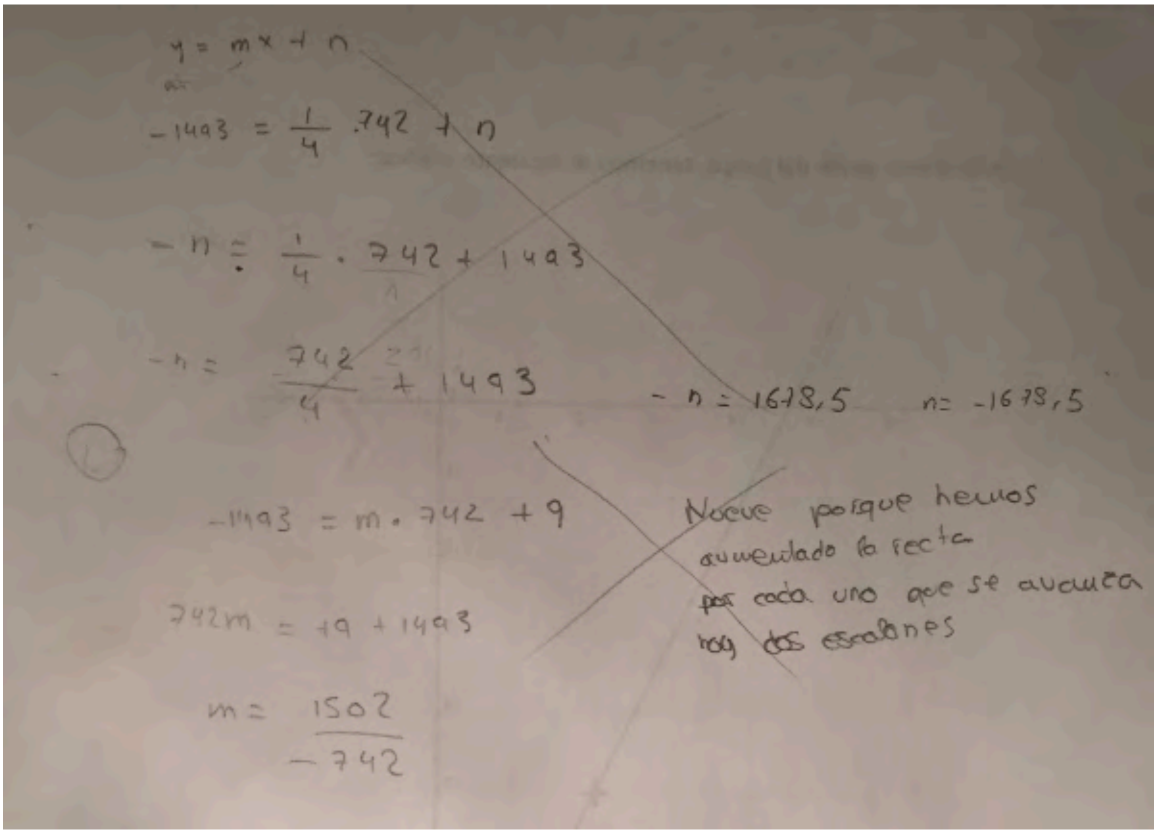


FIGURA 4.5.5.129. *Trabajo realizado por el grupo 1 en S.6.4*

Estrategias y conclusiones

Las estrategias utilizadas por los grupos y la evolución de las mismas han sido las siguientes:

TABLA 4.5.5.49. *Estrategias utilizas en la Fase 4 de Situación 6*

Grupo	Estrategia base	Cambio de estrategia
Grupo 1	Obtención de la ecuación de la recta a partir de las coordenadas de los marcianos.	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.
Grupo 2	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.	
Grupo 3	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.	
Grupo 4	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.	

Grupo 5	Obtención del valor de la pendiente efectuando tratamientos dentro del propio registro Gráfico. A partir de ese valor y también de manera gráfica, obtención del valor de n.
Grupo 6	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.
Grupo 7	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.
Grupo 8	Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en y= mx + n para obtener n.

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.5.50. *Estrategias bases utilizadas en la Fase 4 de la Situación 6*

Estrategias bases utilizadas	**Nº de grupos**	**Porcentaje**
Localización mediante la gráfica de dos puntos de coordenadas enteras. Cálculo de la pendiente mediante la fórmula del cociente de la variación de y entre la variación de x. Sustitución de su valor y el de las coordenadas de uno de los puntos en $y= mx + n$ para obtener n.	6	75 %
Obtención de la ecuación de la recta a partir de las coordenadas de los marcianos.	1	12,5 %
Obtención del valor de la pendiente efectuando tratamientos dentro del propio registro Gráfico. A partir de ese valor y también de manera gráfica, obtención del valor de n.	1	12,5 %

Fuente: elaboración propia

Esta última fase de la situación es un claro reflejo de cómo los tratamientos dentro del registro gráfico son más costosos cognitivamente que aquellos que se suelen efectuar dentro del Algebraico o el numérico, pues únicamente uno de los grupos ha obtenido toda la información necesaria para encontrar la ecuación de la recta trabajando únicamente sobre la gráfica cartesiana.

Por otra parte, esta fase se ha constituido como una buena actividad a través de la cual los alumnos tuvieran que poner en coordinación las unidades significantes propias de cada registro pese a la falta de congruencia existente entre ellas, consiguiéndose, al margen de los errores de cálculo al trabajar con número enteros, el objetivo de coordinar los registros Gráfico, Numérico y Algebraico en lo que a la obtención de la ecuación de la recta afín a partir de sus elementos se refiere.

4.5.6. Estudio del rendimiento en términos de calificaciones a partir de la metodología empleada.

Como ya se hiciera en el curso anterior, completamos ahora la investigación realizada con el correspondiente análisis estadístico, basado en un diseño pre-postest, con el fin de poder estudiar el alcance que la aplicación de la metodología desarrollada en el aula ha tenido sobre el rendimiento de la asignatura en términos de eficacia.

El estudio parte de la comparación de las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo B de 3º ESO antes y después de desarrollar la metodología planteada, considerando como pre-test la nota media obtenida en las dos primeras evaluaciones y como post-test la nota del examen que se centra en los contenidos trabajados en la ingeniería.

Del mimo modo que en 2º ESO, efectuaremos un análisis comparativo de los resultados obtenidos por el grupo experimental que ha seguido la metodología en esta tesis descrita y el grupo de control que ha continuado con la metodología habitual del centro, considerando como pre-test y post-test, en cada uno de los grupos, las mismas variables mencionadas en el párrafo anterior, lo que esperamos que nos permita establecer diferencias a nivel de aprendizaje y aplicación de conocimientos entre ambas metodologías.

De acuerdo al diseño de la investigación pre-postest, nos basamos fundamentalmente en comparaciones estadísticas de las calificaciones obtenidas antes y después de la intervención, mediante:

- Análisis descriptivo:
    - Parámetros de centralización y dispersión: media, mediana, moda, cuartiles, desviación típica y coeficiente de variación.
    - Tablas de frecuencias.
- Prueba de Shapiro-Wilk para comprobar la normalidad de los datos.

- Contraste de homogeneidad a partir de los pre-test para comprobar que el punto de partida de los grupos de control y experimental coinciden.
- Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon para comparar los resultados de pre-test con el post-test y así comprobar los efectos de la intervención. los pre-test con el post-test y así comprobar los efectos de la intervención. Se ha de comprobar previamente la normalidad de los datos.

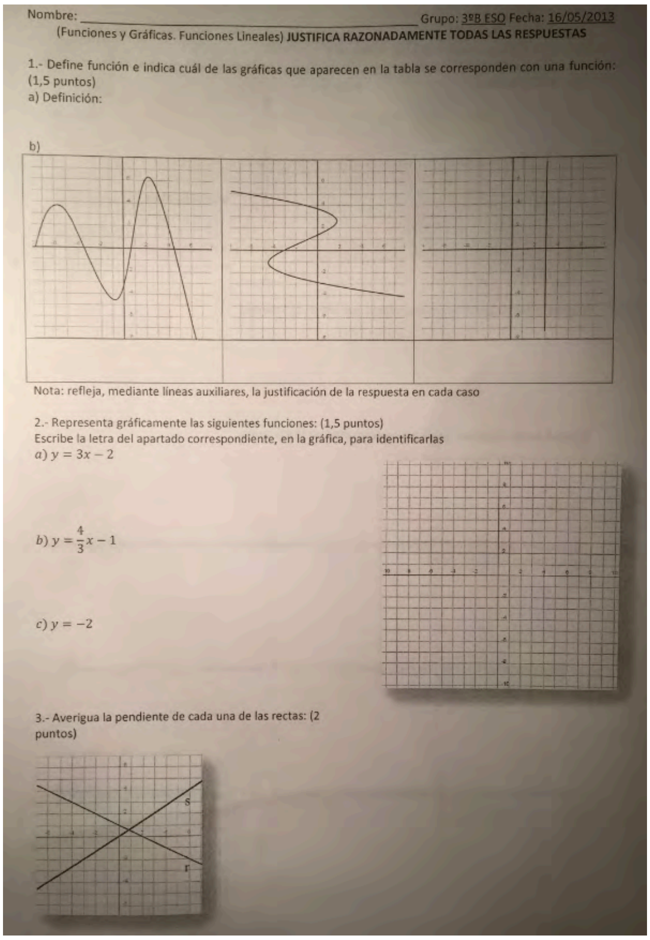
Para el análisis estadístico se emplean los siguientes programas informáticos:

- SPSS versión 19 para Windows.
- Statgraphics Centurion SR.
- Excel Profesional Plus 2010.

4.5.6.1. Comparación del rendimiento en términos de calificaciones dentro del grupo experimental.

Una vez finalizada la ingeniería y concluidas, por tanto, las dos unidades didácticas correspondientes a los contenidos trabajados, los alumnos realizaron el examen de tipología tradicional común a todos los grupos de 3º ESO, con el propósito de determinar el grado de adquisición de los conocimientos sin contemplar otros aspectos evaluables como son la utilidad y aplicabilidad distando mucho de la tipología de examen competencial.

El examen consta de 5 ítems con varios apartados en los cuales se entremezclan casi la totalidad de los contenidos vistos en clase. De entre los 5 ítems, 3 son de aplicación directa de conceptos y 2 son problemas:



Nombre: ______________________________ Grupo: 3ºB ESO Fecha: 16/05/2013

(Funciones y Gráficas. Funciones Lineales) **JUSTIFICA RAZONADAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS**

1.- Define función e indica cuál de las gráficas que aparecen en la tabla se corresponden con una función: (1,5 puntos)

a) Definición:

b)

Nota: refleja, mediante líneas auxiliares, la justificación de la respuesta en cada caso

2.- Representa gráficamente las siguientes funciones: (1,5 puntos)

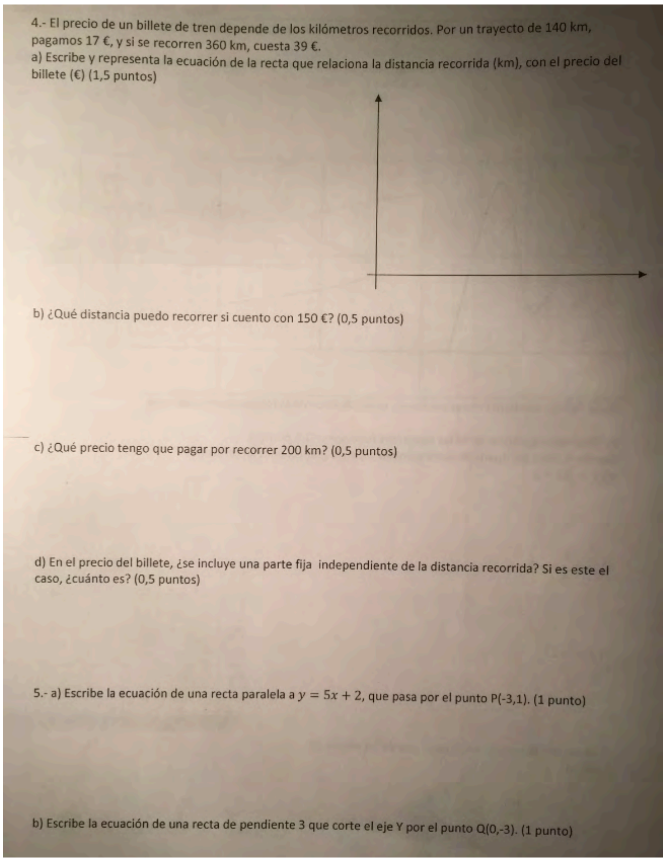
Escribe la letra del apartado correspondiente, en la gráfica, para identificarlas

a) $y = 3x - 2$

b) $y = \frac{4}{3}x - 1$

c) $y = -2$

3.- Averigua la pendiente de cada una de las rectas: (2 puntos)



4.- El precio de un billete de tren depende de los kilómetros recorridos. Por un trayecto de 140 km, pagamos 17 €, y si se recorren 360 km, cuesta 39 €.

a) Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona la distancia recorrida (km), con el precio del billete (€) (1,5 puntos)

b) ¿Qué distancia puedo recorrer si cuento con 150 €? (0,5 puntos)

c) ¿Qué precio tengo que pagar por recorrer 200 km? (0,5 puntos)

d) En el precio del billete, ¿se incluye una parte fija independiente de la distancia recorrida? Si es este el caso, ¿cuánto es? (0,5 puntos)

5.- a) Escribe la ecuación de una recta paralela a $y = 5x + 2$, que pasa por el punto P(-3,1). (1 punto)

b) Escribe la ecuación de una recta de pendiente 3 que corte el eje Y por el punto Q(0,-3). (1 punto)

FIGURA 4.5.6.1. *Examen sobe funciones de 3º ESO*

Como pre-test, a la hora de realizar el estudio, vamos autilizar la nota obtenida al hacer la media de las calificaciones finales obtenidas en la primera y segunda evaluación, y como post-test la correspondiente a la calificación del examen descrito más arriba, corregido y calificado por el profesor del instituto encargado de dar clase en nuestro grupo experimental.

A continuación se muestra la tabla con las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo B de 3º ESO a lo largo de las dos primeras evaluaciones, así como la calificación del examen correspondiente a los contenidos de nuestra ingeniería:

TABLA 4.5.6.1.1. *Calificaciones a lo largo del curso 3º B*

3ºB	Primera Evaluación				Segunda Evaluación				Media 1ªY 2ª	Tercera Evaluación			
Alumno	**A**	**B**	**C**	**Media 1ª**	**D**	**E**	**F**	**Media 2ª**		**G**	**H**	**I**	**Media 3ª**
Alumno 1	7,8	-	0,9	2,40	2,75	3,9	5	4,16	3,28	0	-		
Alumno 2	10	10	10	10,00	10	10	10	10,00	10,00	10	10		
Alumno 3	4,8	2,9	4	3,93	0,5	0,5	3	1,75	2,84	1,5	1,9		
Alumno 4	8,6	4,3	6,4	6,43	5,5	3	6,7	5,48	5,95	6,9	9,25		
Alumno 5	6,8	2,5	4,3	4,48	2,75	1,75	6,75	4,50	4,49	5,3	7,9		
Alumno 6	5,85	4,4	3,5	4,31	2,75	5,4	6,25	5,16	4,74	2	7,75		
Alumno 7	7,8	5,8	7,5	7,15	8,75	8	7,4	7,89	7,52	7,9	6,75		
Alumno 8	4,4	3	3,5	3,60	5,5	2	3,75	3,75	3,68	1,5	1,75		
Alumno 9	5,5	3,6	3,9	4,23	5,75	1,75	5,75	4,75	4,49	5,25	4,1		
Alumno 10	8	1,2	3,75	4,18	4,75	0,5	1,4	2,01	3,09	2,25	4,4		
Alumno 11	6,7	6,2	8,1	7,28	9	6,6	8,75	8,28	7,78	9,1	9,5		
Alumno 12	4,85	2,4	2	2,81	5,75	1,9	4,5	4,16	3,49	1,25	1,5		
Alumno 13	7,05	6,5	5,5	6,14	4,25	4	5,5	4,81	5,48	5,25	7,25		
Alumno 14	4,75	4,2	7,4	5,94	3,25	4,75	5,5	4,75	5,34	7,8	8		
Alumno 15	7,6	4,4	7,6	6,80	7,9	3,75	5,5	5,66	6,23	5,25	6		
Alumno 16	6	3,3	5,8	5,23	9,5			2,38	3,80	3,5	4,7		
Alumno 17	7	2	8,25	6,38	4,5	1	5	3,88	5,13	4,5	7,5		
Alumno 18	4,85	1,8	2,4	2,86	8,4	2,75	4,7	5,14	4,00	3,75	8,25		
Alumno 19	5,3	5,2	7,5	6,38	6,9	3,75	7,75	6,54	6,46	5,5	7,5		
Alumno 20	5,3	6,7	5,8	5,90	7,3	7	4,75	5,95	5,93	2,25	7,75		
Alumno 21	2,75	3	2,5	2,69	7,9	2	3,5	4,23	3,46	3	5,25		
Alumno 22	5,3	5,7	6,7	6,10	8,5	4,75	7,75	7,19	6,64	5,4	6,4		
Alumno NEE				-				-	-				
Alumno 23	0,8	0	2	1,20	0,25	1,5	3,7	2,29	1,74	1	1,25		

3ºB	Primera Evaluación				Segunda Evaluación				Media 1ªY 2ª	Tercera Evaluación	
Alumno 24	9,9	9,3	9,6	9,60	9,25	9,5	10	9,69	9,64	10	9
Alumno 25	5,3	2,3	1,25	2,53	3,9	4	3,75	3,85	3,19	5	5,5
Alumno 26	10	5,2	6,25	6,93	9,5	6,4	8,5	8,23	7,58	5,6	9,5
Alumno 27	9,7	5,1	7,25	7,33	9,3	7,25	6	7,14	7,23	7,75	9,4

A: Examen unidad Fracciones y Decimales; **B**: Examen unidad Potencias y raíces; **C**: Examen final con sucesiones; **D** Examen unidad Lenguaje Algebraico; **E**: Examen unidad Ecuaciones de primer y segundo grado; **F**: Examen final con unidad de Sistemas de Ecuaciones; **G**: Examen Unidad Problemas métricos en el plano; **H**: Examen Unidad Funciones. Propiedades y funciones lineales.

Fuente: elaboración propia

Nos quedamos únicamente con los datos tomados como pre-test y post-test, eliminando de la muestra a los alumnos con necesidades educativas especiales por no realizar ningún examen estándar:

TABLA 4.5.6.1.2. *Pre-test/post-test1 3º B*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	H Post-test
Alumno 1	3,28	-
Alumno 2	10	10
Alumno 3	2,84	1,9
Alumno 4	5,95	9,25
Alumno 5	4,49	7,9
Alumno 6	4,74	7,75
Alumno 7	7,52	6,75
Alumno 8	3,68	1,75
Alumno 9	4,49	4,1
Alumno 10	3,09	4,4
Alumno 11	7,78	9,5
Alumno 12	3,49	1,5
Alumno 13	5,48	7,25
Alumno 14	5,34	8
Alumno 15	6,23	6
Alumno 16	3,80	4,7
Alumno 17	5,13	7,5
Alumno 18	4,00	8,25
Alumno 19	6,46	7,5
Alumno 20	5,93	7,75
Alumno 21	3,46	5,25
Alumno 22	6,64	6,4
Alumno 23	1,74	1,25
Alumno 24	9,64	9
Alumno 25	3,19	5,5
Alumno 26	7,58	9,5
Alumno 27	7,23	9,4

Fuente: elaboración propia

A partir de una primera aproximación a los datos, observamos:

TABLA 4.5.6.1.3. *Calificaciones pre-test 3º B*

Calificaciones Pre-test		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
Suspensos		13	48,2 %	48,2 %
Aprobados	[5, 6)	5	18,5 %	66,7 %
	[6,7)	3	11,1 %	77,8 %
	[7,9)	4	14,8 %	92,6 %
	[9, 10)	2	7,4 %	100%
	Total	16	51,8 %	
Total		27	100 %	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.6.1.4. *Calificaciones post-test 3º B*

Calificaciones Post-test		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
Suspensos		7	26,9 %	26,9 %
Aprobados	[5, 6)	2	7,7 %	34,6 %
	[6,7)	3	11,5 %	46,1 %
	[7,9)	8	30,8 %	76,9 %
	[9, 10)	6	23,1 %	100 %
	Total	19	73,1 %	
Total		26	100 %	

Fuente: elaboración propia

Podemos observar como el porcentaje de suspensos del post-test es considerablemente inferior al del pre-test (48,2 % > 26,9 %). Resulta llamativo como más de la mitad de los alumnos han obtenido calificaciones iguales o superiores a 7, viéndose aumentado de manera destacada el número de notables y sobresalientes (notables: 14,8 % < 30,8 %; sobresalientes: 7,4 %< 23,1 %).

Explorando los datos en relación a los estudiantes suspensos, podemos verificar cómo los alumnos 3, 8, 9, 10, 12, 16 y 23 tienen una calificación inferior a 5 tanto en el pre-test como en el post-test, mientras que los alumnos 5, 6, 18, 21 y 25, suspensos en el pre-test, aprueban el post-test.

El análisis descriptivo de los datos arroja los siguientes resultados:

TABLA 4.5.6.1.5. *Análisis descriptivo pre-test/post-test 3º B*

Curso 3º ESO (B)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,30	2,21	42,18%	27
Post-test	6,46	2,67	41,33%	26

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

Se observa cómo ambas variables presentan un exceso de dispersión con un CV > 25% por lo que hace que la media sea un valor poco representativo de los datos. Al hacer el pertinente estudio en 2º ESO ya señalamos que este hecho se reproduciría al analizar los datos del presente curso debido al escenario heterogéneo que forma parte de la realidad educativa de los centros de educación secundaria por la diversidad y diferencias individuales de los estudiantes (García, 1997; Booth y Ainscow, 2000; Álvarez *et al.,* 2002; Arnaiz, 2009).

Si tomamos como medida de centralización la mediana o los cuartiles, obtenemos:

TABLA 4.5.6.1.6. *Cuartiles pre-test/post-test 3º B*

	Percentil 25	Mediana	Percentil 75
Pre-test	3,70	4,84	6,27
Post-test	4,70	7,38	8,25

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

El centro de gravedad de los datos recogidos en el post-test se encuentra por encima del 5 (mediana= 7,38 > 5) y los percentiles 25 y 75 superan los valores estándar en relación a este tipo de datos (percentil 25= 4,70 > 2,50; percentil 75= 8,25> 7,5). Estos hecho junto con la gran diferencia que existe entre las medianas del pre-test y el post-test, por un lado, y de los percentiles 75, por otro, indican cierta mejora de los resultados en el grupo a nivel global.

Con el fin de estudiar más concretamente como ha influido la metodología desarrollada en el rendimiento de los alumnos en términos de calificaciones, procedemos a realizar una prueba t para datos pareados, previa comprobación del carácter normal de nuestras variables mediante el estadístico de Shapiro-Wilk:

TABLA 4.5.6.1.7. *Pruebas de normalidad pre-test/post-test 3º B*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Pre-test	,110	26	,200*	,966	26	,515
Post-test	,154	26	,113*	,910	26	,027

a. Corrección de la significación de Lilliefors.

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

A partir de los resultados obtenidos en la prueba podemos asumir normalidad para el pre-test [S-W= ,966; p-valor= ,525] pero no así para el post-test [S-W= ,910; p-valor= ,027].

Al darse está circunstancia de no normalidad en el post-test, no podemos hacer uso de la prueba t para comparar las variables, por lo que recurrimos a la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon para tal propósito:

TABLA 4.5.6.1.8. *Pruebas de Rangos con signo de Wilcoxon 3º B*

		N	Rango promedio	Suma de rangos
POSTEST1_3b - PRETEST3B	Rangos negativos	7[d]	6,29	44,00
	Rangos positivos	18[e]	15,61	281,00
	Empates	1[f]		
	Total	26		

d. POSTEST1_3b < PRETEST3B

e. POSTEST1_3b > PRETEST3B

f. POSTEST1_3b = PRETEST3B

Estadísticos de contraste[c]

	POSTEST1_3b - PRETEST3B
Z	-3,189[b]
Sig. asintót. (bilateral)	,001

b. Basado en los rangos negativos.

c. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Fuente: SPSS 19

Los resultados proporcionados por la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon nos llevan a concluir que existen diferencias significativas a nivel global entre el pre-test y el post-test [z=-3,189; p-valor= ,001], existiendo diferencias entre los resultados antes y después de la intervención; mejorando los resultados de los estudiantes tras el desarrollo de la misma.

Este hecho queda reflejado, además, a partir del siguiente gráfico, donde se puede observar cómo la mayoría de los alumnos se ubican por encima de la bisectriz o muy cercanos a ella, localizándose casi la totalidad de ellos en el primer y segundo cuadrante:

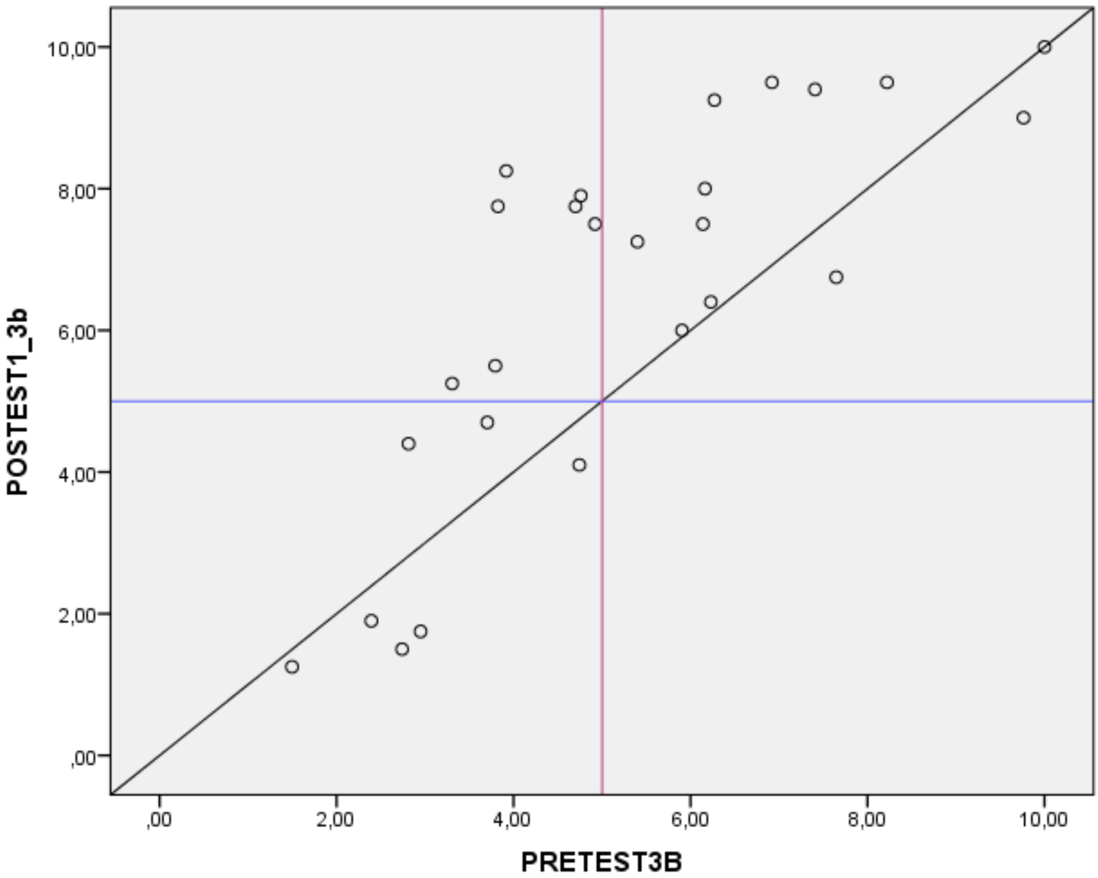


FIGURA 4.5.6.1.1: *Gráfico de nube de puntos*. (SPSS 19)

Todo lo hasta aquí expuesto se ve reforzado si realizamos un estudio más concreto de la comparativa entre calificaciones obtenidas en el pre-test y el post-test de cada uno de los alumnos.

De los 26 alumnos, 16 mejoran la calificación del post-test con respecto a la del pre-test, lo que supone que un 61,5 % de los estudiantes mejoran su rendimiento, y uno se mantuvo igual:

TABLA 4.5.6.1.9. *Alumnos de 3º B que mejoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	H Post-test	Diferencia Post-test – Pre-test
Alumno 2	10	10	0,00
Alumno 4	5,95	9,25	**3,30**
Alumno 5	4,49	7,9	**3,41***
Alumno 6	4,74	7,75	**3,01***
Alumno 10	3,09	4,4	**1,31**
Alumno 11	7,78	9,5	**1,73**
Alumno 13	5,48	7,25	**1,78**
Alumno 14	5,34	8	**2,66**
Alumno 16	3,80	4,7	**0,90**
Alumno 17	5,13	7,5	**2,38**
Alumno 18	4,00	8,25	**4,25***
Alumno 19	6,46	7,5	**1,04**
Alumno 20	5,93	7,75	**1,83**
Alumno 21	3,46	5,25	**1,79***
Alumno 25	3,19	5,5	**2,31***
Alumno 26	7,58	9,5	**1,93**
Alumno 27	7,23	9,4	**2,17**

Fuente: elaboración propia

De entre estos 16 alumnos, 14 (marcados en rojo) presentan una mejora significativa en las calificaciones tanto respecto al pre-test como respecto a la trayectoria general que han seguido a lo largo del curso, existiendo diferencias hasta de más de 2 puntos en 8 de los casos, destacando, particularmente, los alumnos marcados con asterisco, que teniendo calificaciones en el pre-test por debajo del aprobado, han mejorado sustancialmente su rendimiento en este sentido.

Dos de los alumnos (marcados en verde), el 16 y el 19, han obtenido calificaciones en el post-test con una diferencia entorno a un punto con respecto a la media global. Sin embargo, tal diferencia no es tan significativa como las anteriormente mencionadas, pues al estudiar la trayectoria de ambos estudiantes, se observa cómo en varios de los exámenes realizados hasta el momento obtienen calificaciones cercanas o superiores a la obtenida en el post-test.

Analicemos ahora los casos opuestos:

TABLA 4.5.6.1.10. *Alumnos de 3º B que empeoran el rendimiento*

Alumno	**Media 1ªY 2ª Pre-test**	**H Post-test**	**Diferencia Post-test – Pre-test**
Alumno 3	2,84	1,9	**-0,94**
Alumno 7	7,52	6,75	-0,77
Alumno 8	3,68	1,75	**-1,93**
Alumno 9	4,49	4,1	-0,39
Alumno 12	3,49	1,5	**-1,99**
Alumno 15	6,23	6	-0,23
Alumno 22	6,64	6,4	-0,24
Alumno 23	1,74	1,25	-0,49
Alumno 24	9,64	9	-0,64

Fuente: elaboración propia

Por este lado, 9 son los estudiantes que han obtenido una calificación más baja que la obtenida en el pre-test, lo que supone que un 34,6 % de los alumnos empeoran. Pese a tener tres estudiantes (marcados en verde) cuya diferencia entre calificaciones están muy cercanas a 1 punto (alumno 3) y 2 puntos (alumnos 8 y 12), no pueden ser consideradas como significativas si tenemos en cuenta los resultados obtenidos en el resto de exámenes realizados a lo largo del curso, pues el alumno 3 no ha aprobado ninguno de ellos y los alumnos 8 y 12 únicamente uno, obteniendo calificaciones que varían entre 0,5 y 4,8 en el caso del alumno 3, entre 1,5 y 5,5 en el caso del alumno 8 y entre 1,3 y 5,8 en el caso del alumno 12.

En conclusión, en vista de los resultados obtenidos a través de la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, reforzado por este último análisis, podemos afirmar que la metodología empleada en el aula para favorecer la conversión entre los registros de representación semióticos en lo que al estudio del concepto de función, sus propiedades, y el concepto de función afín se refiere, ha repercutido muy positivamente en el aprendizaje del alumnado, cuyo rendimiento, en términos de calificaciones, se ha visto mejorado considerablemente.

4.5.6.2 Comparación del rendimiento en términos de calificaciones a partir del examen de la unidad entre el grupo experimental y el grupo de control.

Una vez hemos comprobado que la metodología e ingeniería llevada a cabo en el aula ha repercutido positivamente en el rendimiento de los alumnos, vamos a realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos por el grupo experimental (3º ESO Grupo B) y el grupo de control (3º ESO Grupo A).

Ambos grupos han realizado la misma prueba post-test y el profesor encargado de impartir la asignatura de matemáticas así como de corregir los exámenes ha sido el mismo.

A continuación se muestra la tabla con las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo A de 3º ESO a lo largo de las dos primeras evaluaciones, así como la calificación del examen correspondiente a los contenidos de Funciones, Propiedades y funciones lineales:

TABLA 4.5.6.2.1. *Calificaciones a lo largo del curso 3º A*

3ºA	**Primera Evaluación**				**Segunda Evaluación**				**Media 1ªY 2ª**	**Tercera Evaluación**			
Alumno	**A**	**B**	**C**	**Media 1ª**	**D**	**E**	**F**	**Media 2ª**		**G**	**H**	**I**	**Media 3ª**
Alumno 28	4,5	2,75	5,5	4,56	5,25	3	3,75	3,94	4,25	3	2,5		
Alumno 29	2,25	2,25	5,5	3,88	5,75	3,5	5,25	4,94	4,41	2,5	5		
Alumno 30	9	7,75	8,25	8,31	8,5	10	7,25	8,25	8,28	8	10		
Alumno 31	4,5	4,75	3	3,81	6,5	5,25	5,75	5,81	4,81	5,5	4,5		
Alumno 32	2,5	2,5	4,5	3,50	6	2	4,25	4,13	3,81	2	4,5		
Alumno 33	7	6	8	7,25	5,75	5	5,5	5,44	6,34	5,75	3,5		
Alumno 34	3	3	1,5	2,25	1	2	1,75	1,63	1,94	1,5	1,75		
Alumno 35	2	3,5	3,5	3,13	6,5	7	3,5	5,13	4,13	4,5	0,5		
Alumno 36	1	2,75	1,5	1,69	2	0,5	2,5	1,88	1,78	1	2,25		
Alumno 37	5	6	5	5,25	5,5	2	7,25	5,50	5,38	2,5	1,5		
Alumno 38	3,25	3	3,75	3,44	6,75	3,25	4,25	4,63	4,03	4,25	2,75		
Alumno 39	7,5	8,75	7,5	7,81	7,25	8	7	7,31	7,56	7,75	8		
Alumno 40	6	0	3	3,00	7,5	2	4	4,38	3,69	5,75	7,75		
Alumno 41	6	6	6,5	6,25	7,25	3	7,25	6,19	6,22	3	6		
Alumno 42	3	3	3	3,00	5,5	2,25	2	2,94	2,97	3,5	5,5		
Alumno 43	7	8,5	8	7,88	7	2	7	5,75	6,81	2,25	2		
Alumno 44	7,5	5,25	5,5	5,94	5,75	7	6,75	6,56	6,25	4,5	5,5		
Alumno 45	4,5	2,75	5	4,31	7	4	5	5,25	4,78	3	2,75		
Alumno 46	4,5	4,75	5	4,81	5,75	6	7	6,44	5,63	4,24	2,25		
Alumno 47	0	0,75	4	2,19	1,75	0	1,25	1,06	1,63	0	2		
Alumno 48	6,5	2,5	5,75	5,13	4	1	3,5	3,00	4,06	4	3		
Alumno 49	7,5	7,5	4,5	6,00	9	8	4	6,25	6,13	8	8		
Alumno 50	7,5	4,25	7	6,44	9	5	4,25	5,63	6,03	4,25	5,5		

3ºA	Primera Evaluación				Segunda Evaluación				Media 1ªY 2ª	Tercera Evaluación	
Alumno 51	7,5	6,75	8	7,56	8,5	5	7,75	7,25	7,41	6	6,25
Alumno 52	8	6,25	8	7,56	10	9	10	9,75	8,66	8,5	6,5
Alumno 53	4	7,25	7	6,31	4,5	3,5	9,25	6,63	6,47	5	6
Alumno 54	2	1	1,5	1,50	1,25	0,5	0,25	0,56	1,03	0	0,5
Alumno 55	8,5	2,75	5	5,31	5,75	6	8,5	7,19	6,25	5,75	7,25

A: Examen unidad Fracciones y Decimales; **B**: Examen unidad Potencias y raíces; **C**: Examen final con sucesiones; **D** Examen unidad Lenguaje Algebraico; **E**: Examen unidad Ecuaciones de primer y segundo grado; **F**: Examen final con unidad de Sistemas de Ecuaciones; **G**: Examen Unidad Problemas métricos en el plano; **H**: Examen Unidad Funciones. Propiedades y funciones lineales.

Fuente: elaboración propia

Nos quedamos únicamente con los datos tomados como pre-test y post-test:

TABLA 4.5.6.2.2. *Pre-test/post-test 3º A*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	H Post-test
Alumno 28	4,25	2,5
Alumno 29	4,41	5
Alumno 30	8,28	10
Alumno 31	4,81	4,5
Alumno 32	3,81	4,5
Alumno 33	6,34	3,5
Alumno 34	1,94	1,75
Alumno 35	4,13	0,5
Alumno 36	1,78	2,25
Alumno 37	5,38	1,5
Alumno 38	4,03	2,75
Alumno 39	7,56	8
Alumno 40	3,69	7,75
Alumno 41	6,22	6
Alumno 42	2,97	5,5
Alumno 43	6,81	2
Alumno 44	6,25	5,5
Alumno 45	4,78	2,75
Alumno 46	5,63	2,25
Alumno 47	1,63	2
Alumno 48	4,06	3
Alumno 49	6,13	8
Alumno 50	6,03	5,5
Alumno 51	7,41	6,25
Alumno 52	8,66	6,5
Alumno 53	6,47	6
Alumno 54	1,03	0,5
Alumno 55	6,25	7,25

Fuente: elaboración propia

A partir de una primera aproximación a los datos, observamos:

TABLA 4.5.6.2.3. *Calificaciones pre-test 3º A*

Calificaciones Pre-test		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
Suspensos		14	50 %	50 %
Aprobados	[5, 6)	2	7,1 %	57,1 %
	[6,7)	8	28,6 %	85,7 %
	[7,9)	4	14,3 %	100 %
	[9, 10)	0	0 %	100 %
	Total	14	50 %	
Total		28	100 %	

Fuente: elaboración propia

TABLA 4.5.6.2.4. *Calificaciones post-test 3º A*

Calificaciones Post-test		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
Suspensos		15	53,6 %	53,6 %
Aprobados	[5, 6)	4	14,3 %	67,9 %
	[6,7)	4	14,3 %	82,2 %
	[7,9)	4	14,3 %	96,5 %
	[9, 10)	1	3,5 %	100 %
	Total	13	46,4 %	
Total		28	100 %	

Fuente: elaboración propia

Se observa como el porcentaje de suspensos en el post-test es ligeramente mayor que el del pre-test (50 % < 53,6 %).

Explorando los datos en relación a los estudiantes suspensos, podemos verificar cómo los alumnos 18, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 45, 47, 48 y 54 tienen una calificación inferior a 5 tanto en el pre-test como en el post-test. Por otro lado, los alumnos 29, 40 y 42, suspensos en el pre-test, aprueban el post-test, ocurriendo en sentido contrario con respecto a los alumnos 33, 37, 43 y 46.

La comparación del análisis descriptivo del grupo de control (3º ESO Grupo A) con el grupo experimental (3º ESO Grupo B) nos ofrece los siguientes resultados:

TABLA 4.5.6.2.5. *Análisis descriptivo pre-test/post-test 3º A*

Curso 3º ESO (A)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,03	2,00	42,28%	28
Post-test	4,41	2,52	57,14%	28

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

TABLA 4.5.6.2.6: *Análisis descriptivo pre-test/post-test 3º B*

Curso 3º ESO (B)				
	Media	Desviación típica	CV	N válido
Pre-test	5,30	2,21	42,18%	27
Post-test	6,46	2,67	41,33%	26

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

Volvemos a encontrarnos con valores del CV demasiado altos, por lo que la media se convierte en valor poco representativo de los datos de cara a la comparación. No obstante, resaltamos dos hechos:

- La media del grupo de control disminuye en el post-test en comparación con la del pre-test (5,03 > 4,41), mientras que en el grupo experimental ocurre al contrario (5,30 < 6,46).
- La diferencia existente entre la media del post-test del grupo de control (media= 4,41) con respecto a la del grupo experimental (media =6,46).

Veamos que ocurre con los valores de la mediana y los cuartiles:

TABLA 4.4.6.2.7. *Cuartiles pre-test/post-test 3º A*

Curso 3º ESO (A)			
	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	3,80	4,73	6,03
Post-test	2,25	4,50	6,13

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

TABLA 4.5.6.2.8. *Cuartiles pre-test/post-test 3º B*

Curso 3º ESO (B)			
	Percentil 25	**Mediana**	**Percentil 75**
Pre-test	3,70	4,84	6,27
Post-test	4,70	7,38	8,25

Fuente: SPSS 19 y elaboración propia

A partir de la mediana y los cuartiles podemos referir los siguientes aspectos:

- La diferencia, dentro del grupo de control, entre las medianas del pre-test y el post-test, por un lado, y de los percentiles 75, por otro, es muy pequeña, siendo un poco más marcada en el caso de los percentiles 25. Esto nos indica cómo el pre-test y el post-test se comportan de manera similar con respecto a estos parámetros de centralización. Además, el hecho de que los percentiles 75 estén muy por debajo del valor estándar (pre-test= 6,03 < 7,50; post-test= 6,13 < 7,50), señala que la mayoría de las calificaciones se encuentran entre el suspenso y el bien en el grupo A de 3º ESO.
- La diferencia entre las medianas y entre los percentiles de los pre-test del grupo de control y experimental, es casi inexistente, comportándose los dos de manera similar respecto a estos parámetros. Sin embargo, no ocurre lo mismo al examinar los post-test, en donde el grupo experimental presenta un mejora de los resultados.

Para estudiar de manera adecuada la comparación entre los dos grupos, pasamos a realizar las siguientes pruebas:

1. Prueba Shapiro-Wilk para comprobar la normalidad de las variables del grupo de control:

TABLA 4.5.6.2.9. *Pruebas de normalidad pre-test/post-test 3ºA*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Pre-test	,102	28	,200*	,977	28	,768
Post-test	,140	28	,167	,957	28	,296

a. Corrección de la significación de Lilliefors.

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

A partir de los resultados arrojados por la prueba de Shapiro-Wilk, podemos asumir, tanto para el pre-test [S-W= ,977; p-valor= ,768] como para el post-test [S-W= ,957; p-valor= ,296], la normalidad de las variables.

2. Contraste de homogeneidad a partir de los pre-test de ambos grupos, los cuales cumplen la hipótesis de normalidad, para comprobar que el punto de partida coincide:

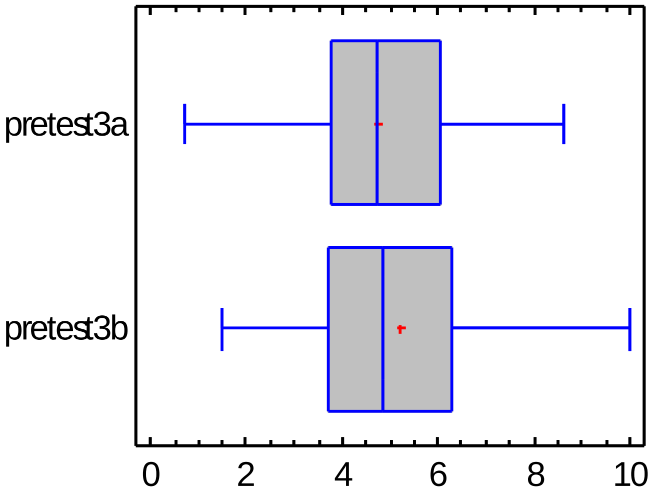


GRÁFICO 4.5.6.2.1. *Gráfico de Caja y bigotes para contrastar homogeneidad*. (SPSS 19)

A partir del contraste de homogeneidad realizado y de la información proporcionada por el gráfico, podemos suponer tanto igualdad de medias [t= -0,877843; p-valor= ,3841] como de varianzas [F= ,8252; p-valor=0,6241], con lo cuál los dos pre-test muestran una igualdad en la muestra, lo que indica que el punto de partida del grupo control y experimental es el mismo.

3. Dada la no normalidad del post-test del grupo experimental y no haber podido utilizar la prueba t para datos pareados en dicho grupo para estudiar si se habían producido diferencias significativas en el rendimiento de los alumnos, en términos de calificaciones, recurriendo a la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon para tal propósito, procedemos del mismo modo para el grupo de control con el fin de poder comparar los resultados:

TABLA 4.5.6.1.10. *Pruebas de Rangos con signo de Wilcoxon 3º A*

		N	Rango promedio	Suma de rangos
POSTEST1_3a - PRETEST3A	Rangos negativos	15[a]	15,93	239,00
	Rangos positivos	13[b]	12,85	167,00
	Empates	0[c]		
	Total	28		

a. POSTEST1_3a < PRETEST3A; b. POSTEST1_3a > PRETEST3A; c. POSTEST1_3a = PRETEST3A

Estadísticos de contraste[c]

	POSTEST1_3a - PRETEST3A
Z	-,820[a]
Sig. asintót. (bilateral)	,412

a. Basado en los rangos positivos. c. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon
Fuente: SPSS 19

Los resultados proporcionados por la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon nos llevan a concluir que no existen diferencias significativas a nivel general entre el pre-test y el post-test [z= -0,820; p-valor= ,412], por lo que el grupo de alumnos que ha seguido la metodología aplicada por el centro no presenta variaciones en su rendimiento a nivel global.

De manera homóloga a como se hizo con el grupo experimental, pasamos a realizar un estudio más concreto de la comparativa entre calificaciones dentro del grupo de control. De los 28 alumnos, 10 mejoran la calificación del post-test con respecto a la del pre-test, lo que supone que un 35,7 % de los estudiantes mejoran su rendimiento frente al 61,5 % que lo hacían en le grupo experimental:

TABLA 4.5.6.2.11. *Alumnos de 3º A que mejoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	H Post-test	Diferencias Post-test - Pre-test
Alumno 29	4,41	5	0,59
Alumno 30	8,28	10	**1,72**
Alumno 32	3,81	4,5	0,69
Alumno 36	1,78	2,25	0,47
Alumno 39	7,56	8	0,44
Alumno 40	3,69	7,75	**4,06***
Alumno 42	2,97	5,5	**2,53***
Alumno 47	1,63	2	0,38
Alumno 49	6,13	8	**1,88**
Alumno 55	6,25	7,25	**1,00**

Fuente: elaboración propia

De entre los 10 alumnos, 2 de ellos (marcados en rojo) presentan una mejora significativa en las calificaciones tanto respecto al pre-test como respecto a la trayectoria general a lo largo del curso, destacando, además, que ambos partían de una calificación e el pre-test de 3,69 y 2,97 respectivamente.

Por su parte, los alumnos 30, 49 y 55 (marcados en verde) han obtenido un resultado en el post-test con una diferencia mayor o igual a un punto. Sin embargo, tal diferencia no es tan significativa como las anteriormente mencionadas, pues al estudiar sus trayectorias a lo largo del curso se observa cómo en varios de los exámenes realizados hasta el momento obtienen calificaciones cercanas o superiores a la obtenida en el post-test.

Analicemos ahora los casos opuestos:

TABLA 4.5.6.2.12. *Alumnos de 3º A que empeoran el rendimiento*

Alumno	Media 1ªY 2ª Pre-test	H Post-test	Diferencias Post-test - Pre-test
Alumno 28	4,25	2,5	**-1,75**
Alumno 31	4,81	4,5	-0,31
Alumno 33	6,34	3,5	**-2,84**
Alumno 34	1,94	1,75	-0,19
Alumno 35	4,13	0,5	**-3,63**
Alumno 37	5,38	1,5	**-3,88**
Alumno 38	4,03	2,75	**-1,28**
Alumno 41	6,22	6	-0,22
Alumno 43	6,81	2	**-4,81**
Alumno 44	6,25	5,5	-0,75
Alumno 45	4,78	2,75	**-2,03**
Alumno 46	5,63	2,25	**-3,38**
Alumno 48	4,06	3	**-1,06**
Alumno 50	6,03	5,5	-0,53
Alumno 51	7,41	6,25	**-1,16**
Alumno 52	8,66	6,5	**-2,16**
Alumno 53	6,47	6	-0,47
Alumno 54	1,03	0,5	-0,53

Fuente: elaboración propia

En este caso, el 64,3 % de los alumnos empeoran su rendimiento frente al 34,6% que lo hacia en el grupo experimental. De entre estos 18 alumnos en donde la diferencia entre calificaciones se ha dado en sentido negativo, tenemos 4 (marcados en verde) que, si bien muestran un índice de empeoramiento entorno o superior a un punto, un análisis de las calificaciones obtenidas en los exámenes del resto de unidades refleja que dicha variación no es significativa dada la variabilidad de sus notas. Por otro lado, 7 son los casos cuya diferencia entre calificaciones es significativa.

A la vista de todos los resultados en este epígrafe obtenidos, tanto a partir de la prueba de los rangos de signo de Wilcoxon cómo con el análisis más concreto que se ha realizado de las diferencias entre calificaciones, podemos concluir que la ingeniería aplicada en clase ha contribuido de manera positiva en el rendimiento de los alumnos, dándose en ellos un aprendizaje de los contenidos de manera significativa mejorando su aprehensión y su rendimiento.

El desarrollo de la metodología empleada, en la que convergen la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos, ha proporcionando grandes ventajas en lo que al proceso de enseñanza-aprendizaje se refiere, en contraposición a la enseñanza más clásica y tradicional que se lleva a cabo en las aulas y que en el caso concreto de la transmisión de los contenidos de las unidades trabajadas se ha mostrado como insuficiente. Este hecho queda evidenciado al estudiar el rendimiento de los alumnos del grupo de control, tanto a lo largo del curso como en el examen correspondiente a la unidad aquí tratada.

5.CONCLUSIONES

5.1. Introducción

Realizados los distintos estudios sustentados en la Legislación Educativa, los libros de texto y las Evaluaciones de Diagnóstico más relevantes, así cómo llevadas a cabo las diferentes ingenierías didácticas para favorecer la coordinación entre registros semióticos en relación al Teorema de Pitágoras y la Semejanza, por un lado, y sobre la noción de función, sus propiedades y el concepto de función lineal, por otro, nos proponemos a continuación recapitular y ordenar los resultados obtenidos.

Aunque en cada uno de los capítulos fuimos extrayendo conclusiones a partir del establecimiento de unas hipótesis iniciales, nos encontramos ahora en condiciones de poder reorganizarlas para así poder tener una visión global del tema tratado y evaluar lo que en realidad hemos hecho en relación a nuestros propósitos iniciales.

Decíamos entonces que la identificación de fenómenos didácticos, dificultades y bloqueos específicos de la utilización de múltiples registros de representación, así como la importancia de su articulación en la enseñanza de las matemáticas, era necesaria, y no sólo a efectos de realizar un diagnóstico de la situación, sino como herramienta para comprender el funcionamiento de estos aspectos, tanto en las instituciones escolares como en el ámbito social, para así poder producir ingenierías didácticas que favoreciera la adquisición de destrezas y habilidades relacionadas con la conversión entre registros semióticos, buscando siempre medios de enseñanza más eficaces y epistemológicamente más correctos.

Los análisis realizados en los capítulos 2 y 3 en relación a los fenómenos de transposición didáctica vinculados al uso de los registros semióticos y a los procesos de transformación entre representaciones implicados en la enseñanza los objetos de conocimiento matemáticos, nos han proporcionado una imagen clara, y creemos que certera, de la realidad escolar, resultando de gran importancia a la hora de determinar y diseñar acciones futuras, desarrollables en el aula, para la mejora de estos aspectos y del aprendizaje de los conceptos en sí mismos, en consonancia con la realidad de las prácticas escolares.

Para finalizar la investigación, indicaremos las principales conclusiones obtenidas a lo largo del estudio. Comenzamos describiendo las conclusiones en relación a los objetivos e hipótesis de la investigación y presentando otros resultados derivados de los trabajos experimentales de ingeniería didáctica.

5.2. Conclusiones respecto a las hipótesis emitidas a partir de los objetivos iniciales

Con respecto a los objetivos de nuestra investigación, dentro del objetivo general de determinar que tipo de situaciones se pueden diseñar y plantear de manera que se favorezca el trabajo y conversión entre los diferentes registros de representación semiótica en los alumnos de secundaria, se enumeraron tres cuestiones iniciales, que retomamos a continuación, indicando las hipótesis establecidas y conclusiones obtenidas para cada una de ellas:

Cuestión 1. *¿La utilización de varios sistemas de representación y la conversión entre ellos, aspectos esenciales para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales del alumno, especialmente en la conceptualización matemática, son considerados y, lo que es más importante, trabajados a lo largo de la enseñanza obligatoria?*

En relación a esta primera cuestión, abordada desde el capítulo 2, emitimos la siguiente hipótesis, previa al análisis del Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria de la LOE y la LOMCE, y del currículum de la LOGSE, LOCE, LOE y LOMCE a nivel Nacional:

HIPOTESIS 1: La noción de cambio de registros semióticos goza de invisibilidad didáctica, no se contempla en el currículo ni entra en el tiempo didáctico.

A partir del estudio realizado de la legislación educativa de los últimos años en el capítulo 2, se concluye que no existe conciencia didáctica del papel que juega la conversión entre registros de representación en el aprendizaje de los conceptos en el área de matemáticas. No está incluido como proceso en ninguno de los bloques de contenidos, tanto en primaria como en secundaria, apareciendo implícitamente en los mismos. Este hecho repercute de manera directa en la práctica del profesorado, los cuales pasan por alto las posibles relaciones que pueden establecer los alumnos entre un objeto y su representación, así cómo las dificultades que ello conlleva, obviando y desconociendo la importancia que tiene la coordinación de los diferentes registros que hacen referencia a un mismo contenido en la aprehensión de los conocimientos.

Si comparamos las conversiones que, según lo marcado en el currículo el estudiante puede efectuar con el total de posibles conversiones que podrían realizar según el desarrollo cognitivo general del alumnado en cada curso, se observa gran diferencia, por lo que podríamos destacar ya un fenómeno didáctico: la actividad reductora del ejercicio de la representación.

De manera general, podemos decir que las transformaciones de registros de representación semiótica que tienen prioridad y mayor relevancia dentro de los bloques que conforman la asignatura en cada uno de los cursos, son los tratamientos, quedando relegada e incluso olvidada la conversión entre registros.

Toda actividad y proceso matemático lleva consigo la necesidad de cambiar de registro semiótico, motivo por el cual aparecen algunas conversiones entre representaciones implícitas en los contenidos. Sin embargo, no se señala la importancia que guardan tales conversiones con la comprensión significativa de las nociones matemáticos de tal manera que se contribuya, así, a evitar el establecimiento y creación de obstáculos en el proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos que subyacen en ellas.

En menor proporción, el análisis muestra como ciertas conversiones aparecen en las leyes de manera explícita, por lo que podría parecer que existe cierta introducción al uso y manejo de más de un registro de representación para un determinado concepto. No obstante, podemos decir, a partir de la manera en que se enuncian y recogen, que es limitado y paupérrimo con respecto a las posibilidades existentes en ambas etapas educativas, pues más que favorecer un aprendizaje significativo e integral de los objetos matemáticos y las propiedades que los caracterizan, persiguen que el alumno disponga de herramientas de resolución de tareas, pasando por alto la complejidad existente en el proceso de relación entre representaciones por la falta de congruencia entre las unidades significantes que caracterizan a cada registro semiótico.

Según lo estudiado en los currícula, las nociones son introducidas y presentadas a través de un único registro de representación, lo que, además de dar lugar a la confusión por la identificación del objeto de conocimiento con la representación utilizada, supone una pérdida de información significativa, pues para configurar un concepto en toda su extensión y profundidad, de manera que se evidencien y conozcan todas sus propiedades y características, se hace imprescindible trabajar con varias de las representaciones que hacen referencia al concepto objeto de aprendizaje en ambos sentidos de conversión.

Pese a las varias Reformas Educativas que han tenido lugar desde la aparición de la Educación Secundaria Obligatoria, y los aparentes y diversos cambios introducidos, podemos asegurar que la manera en que se contemplan los registros de representación y la conversión entre ellos no difiere de manera significativa de una ley a otra, permaneciendo prácticamente igual, siendo casi inexistente, lo que pone de manifiesto como dichos aspectos no son considerados, ni reciben la importancia y trascendencia que realmente tienen y juegan en el aprendizaje de las matemáticas.

Cuestión 2. *¿Es correcto el tratamiento que hacen los libros de texto de las transformaciones entre los distintos registros semióticos?*

Dimos respuesta, en el capítulo 2, a esta segunda cuestión, a partir del estudio de 18 libros de texto de Educación Primaria, tres por cada uno de los seis cursos que conforman la etapa, y 15 textos escolares de Secundaria, tres por cada uno de los 5 cursos que hay en la ESO (1º, 2º,3º, 4ºA y 4ºB) según está establecido en la LOE, pues la LOMCE no entrará en vigor en la etapa en los cursos impares hasta el año lectivo 2015-2016 y en los pares hasta el 2016-2017.

Previo al análisis, se emitieron las siguientes dos hipótesis:

HIPOTESIS 2: Los manuales escolares en lugar de intentar proponer actividades donde estén realmente presentes múltiples representaciones que ejerciten la movilización cognitiva y la coordinación de diferentes sistemas semióticos por parte del alumno, persigue, principalmente, proporcionar al alumno herramientas que les conduzcan a la solución de los problemas planteados de manera rápida, dando prioridad al aprendizaje de procesos algoritmizados, generando de este modo, bloqueos y dificultades al obviar los saltos cognitivos que tienen lugar en el paso de unas representaciones a otras.

El análisis mostró como los libros de texto promueven un uso simultáneo, no controlado, y en diversas ocasiones carente de sentido y funcionalidad, de algunos registros de representación semiótica, dando por hecho que el estudiante es capaz de interpretar y establecer relaciones entre ellas por sí mismo. Este hecho, junto con los obstáculos derivados por la falta de congruencia entre los diferentes registros semióticos que pueden entrar en juego en la conversión, genera la aparición de dificultades en el alumno debido tanto a la complejidad que ello conlleva como a la falta de destreza a la hora de articular varios sistemas de representación para un mismo concepto.

La manera en que los libros de texto de Primaria y Secundaria trabajan los tratamientos y conversiones entre registros no es satisfactorio ni suficiente. En lugar de intentar proponer actividades donde estén realmente presentes múltiples representaciones que ejerciten la movilización cognitiva y la coordinación de diferentes sistemas semióticos por parte del alumno, persiguen proporcionar al alumno herramientas que les conduzcan a la solución de los problemas planteados de manera rápida, generando de este modo, errores y dificultades al obviar los saltos cognitivos que tienen lugar en el paso de unas representaciones a otras.

Algunos de los fenómenos didácticos más destacables, de los múltiples que se han detectado y observado en los manuales escolares, derivados de una práctica reduccionista de la coordinación y conversión entre representaciones, son los siguientes:

- Libros de texto de primaria:
  - o *Las estructuras numéricas necesitan de la actuación coordinada de varios sistemas de representación para poner de manifiesto aspectos esenciales de tales estructuras* (Rico, 1996), sin embargo, los registros de representación que podemos encontrar principalmente son el registro numérico y el registro figural, y por lo tanto la única conversión que los alumnos van a realizar es entre ambos registros, limitando la adquisición de propiedades generales de los números y descubrir nuevas relaciones entre ellos.

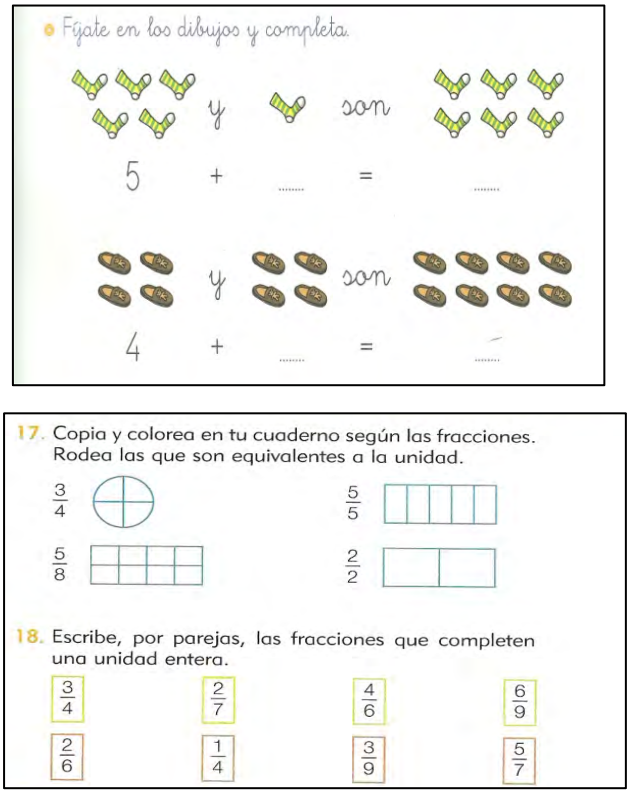


FIGURA 5.2.1. *Actividades numéricas. Libros de texto de Primaria de la Ed. Anaya y Edelvives*

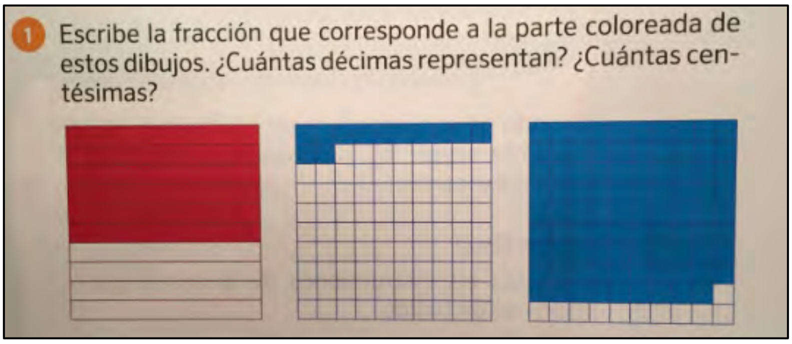


FIGURA 5.2.2. *Actividad de decimales. Libro de texto de Primaria de la Ed. SM*

- Detrás de las actividades denominadas de medición en los manuales escolares, encontramos que en realidad está teniendo lugar una sustitución de saberes ya que lo que se trabaja con tales actividades es la aritmética y el uso de los números naturales y fraccionarios, *reemplazando las magnitudes por los números y la medición por el conteo* (Chamorro, 2003).

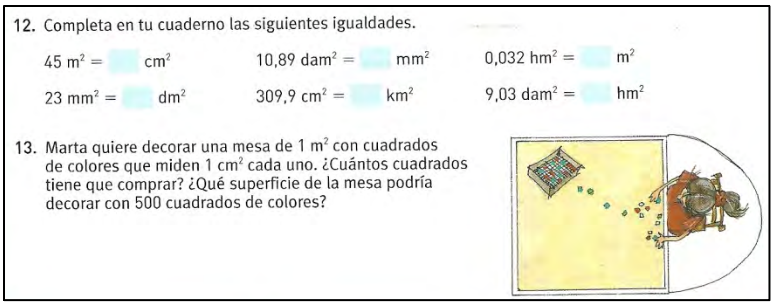


FIGURA 5.2.3. *Actividad de medida de magnitudes. Libro de texto de Primaria de la Ed. Edelvives*

Las tareas se presentan al estudiante por medio del registro de la lengua natural, el registro numérico y el registro figural-icónico. Este último aparece como soporte y recurso para ejemplificar las representaciones numérica y verbal, pero pocas de estas representaciones van acompañadas de la adquisición de algún concepto relacionado, se usan tan solo de forma icónica, por lo que las posibles conversiones que se pide que efectúen los alumnos son vacías, carentes de finalidad y sentido, no persiguiendo una coordinación entre los registros semióticos puestos en juego.

- En los libros de texto de cursos superiores se contempla, de manera casi única, la conversión del registro geométrico al registro numérico, de modo que la mayoría de las actividades que aparecen en los temas relativos a la geometría demandan del alumno la aplicación de una fórmula para su resolución, lo que supone un tratamiento algoritmizado y mecánico de la geometría.

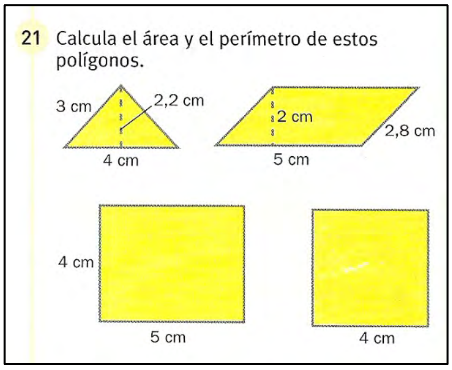


FIGURA 5.2.4 *Actividad de geometría. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

- Aunque son diversos los registros de representación semióticos que los libros parecen movilizar en el aprendizaje de contenidos estadísticos y tratamientos de datos, muchas de las actividades no persiguen realmente la coordinación entre los registros de representación mediante la conversión para que el alumno adquiera de manera significativa las nociones, sino proporcionar herramientas necesarias para que los estudiantes encuentren la solución al problema.

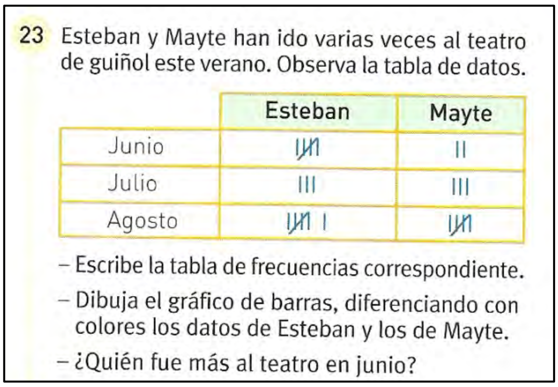


FIGURA 5.2.5. *Actividad de estadística. Libro de texto de Primaria de la Ed. Anaya*

- Libros de texto de secundaria:
    - Aparte del registro numérico, el sistema de representación semiótico más utilizado, en lo que al tratamiento fracciones se refiere en los manuales escolares, es el figural-icónico. Esto supone que la única conversión entre registros que promueven los libros analizados, es entre estos dos sistemas de representación:

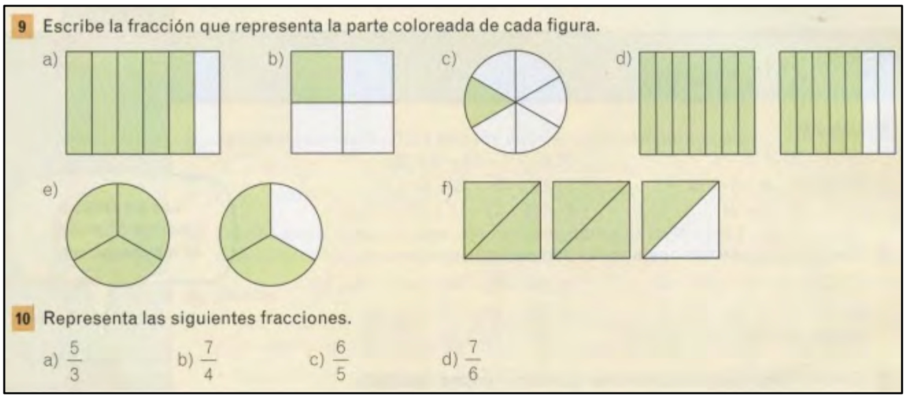


FIGURA 5.2.6. *Actividades de fracciones. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

    - Predominio de la operación: Gran parte de los temas dedicados al número se centran en el trabajo operacional y a estudiar algunas de sus propiedades matemáticas. Por ello, los tratamientos dentro de cada registro ocupan un lugar predominante en la actividad matemática de estos temas, que parecen perseguir que el alumno aprenda de memoria una serie de reglas que le permitan llevar a cabo dichas transformaciones de manera automática o algoritmizada. Las transformaciones que más aparecen se encuentran dentro del sistema de representación numérico.
    - La mayoría de los problemas propuestos en las unidades didácticas que se dedican al desarrollo y estudio del álgebra, se pueden resolver de forma aritmética sin necesidad de recurrir al registro algebraico, lo que indica que no se trata de actividades que verdaderamente movilicen la conversión entre el registro de la lengua natural y el registro algebraico.

Sin embargo, al alumno se le pide que los resuelva de manera algebraica, apareciendo así el fenómeno denominado algebrización de la aritmética (Gascón 1993 ; Bolea, 2003).

Calcula las longitudes de los lados de un rectángulo de perímetro 82 cm y cuya base mide 8 cm más que la altura.

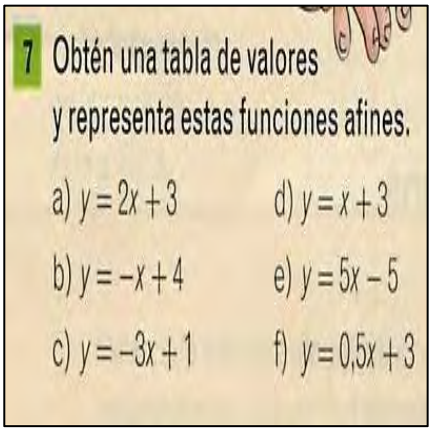
He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

FIGURA 5.2.7. *Actividades que algebrizan la aritmética. Libro de texto de Secundaria de la Ed. Anaya*

- Los libros de texto han tendido hacia una aritmetización y algebreización de la geometría debido al papel mecánico que han jugado las conversiones en este tipo de procesos, dando lugar a una pérdida de sentido de las actividades geométricas.

- En los libros de texto analizados se trabaja con registros de representación semiótico gráfico, algebraico y tabular de la función lineal, existiendo un predominio de la representación cartesiana de la misma, lo que puede llevar al alumno a identificar el concepto de función con tal representación.

- La mayor parte de los ejercicios propuestos están formulados dentro del marco algebraico, en los que es necesaria la conversión de tal registro al registro gráfico, utilizando como intermediario el registro tabular. La utilización que se hace en los textos del registro tabular es justamente ese, la de herramienta intermediaria que permite localizar puntos en el plano a partir de una representación algebraica, y no como una representación por sí misma.



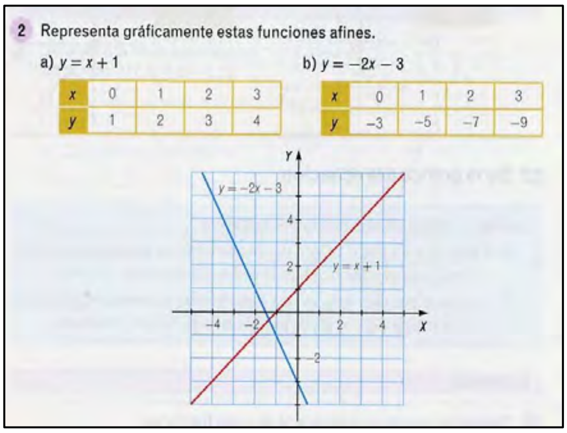


FIGURA 5.2.8. *Actividades de representación gráfica con tabla. Libros texto de Secundaria de las Ed. Santillana y Anaya*

> Este tipo de actividades no proponen ningún tipo de cuestiones donde el alumno tenga que reflexionar sobre propiedades más generales y significativas de la variación de una función, por lo que la representación gráfica de una función se convierte en un fin en sí mismo y no en un sistema de representación que da cuenta de ciertas propiedades y características que el registro algebraico no permite estudiar.

Destaca cómo el registro de la lengua natural predomina de manera absoluta, debido a que es considerado tradicionalmente como la fuente universal de conocimiento, desempeñando dos funciones básicas que se encuentran interrelacionadas: la de comunicar y la de representar.

Hay que tener en cuenta que una de las causas importantes, que se encuentra relacionada directamente con el deficiente rendimiento académico de muchos de los estudiantes en la escolaridad obligatoria, radica en el insuficiente desarrollo de su capacidad para la comprensión lectora, además de presentar grandes deficiencias a la hora de tener que justificar y argumentar resultados haciendo uso de la lengua escrita.

Cuando leemos un texto, no somos conscientes de la dificultad y complejidad de las operaciones que se realizan en nuestro sistema visual. En una fracción de segundo nuestro cerebro reconoce las palabras y accede a su sentido. Esta operación es más compleja de lo que parece, pues tiene lugar un proceso de reconocimiento y selección de las características visuales que son relevantes para la lectura y las que no lo son. Aprender a leer consiste en poner en conexión dos sistemas cerebrales presentes en el niño: el sistema visual de reconocimiento de las formas y las áreas del lenguaje.

No cabe duda que la lengua natural juega un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero en el caso concreto de la enseñanza de las matemáticas, el empleo de símbolos, tablas, gráficas, figuras, construcciones geométricas, etc., favorece las operaciones cognitivas, afianzando los conocimientos que se pretende que el estudiante adquiera.

Todo esto nos lleva a afirmar que un empleo tan predominante de dicho registro sin generar la necesidad de coordinarlo con los anteriormente mencionados resulta inadecuado, pues la comprensión de un enunciado es condición necesaria, aunque no suficiente, en la resolución de las diversas tareas que se les plantea a los estudiantes.

En el caso concreto de los libros de texto Educación Secundaria, encontramos que el registro de la lengua natural, el registro numérico y el algebraico son los más utilizados y entre los cuales se dan más conversiones. Los registros gráfico, geométrico, tabular y figural aparecen, en la mayor parte de las ocasiones, como soporte y recurso para ejemplificar las representaciones numérica y verbal, pero en contadas ocasiones van acompañadas de la adquisición de algún concepto o propiedad vinculada a él, por lo que las posibles conversiones que se pide que efectúen los alumnos están vacías, carentes de finalidad y sentido.

Como ya se viera a través del análisis legislativo, los objetos de conocimiento se presentan mediante un único registro de representación, el más representativo, sin contemplar más alternativas, salvo en contadas ocasiones mediante alguna referencia en el margen, dando lugar a la identificación inmediata del objeto de conocimiento con la representación utilizada.

La radiografía obtenida de los libros escolares, muestra como la enseñanza se encuentra en una situación estabilizada desde hace muchos años, con métodos fijados y estereotipados que han sido aplicados a muchas generaciones de escolares desde hace medio siglo, dando prioridad a aprendizajes centrados en procesos mecánicos, algorítmicos basados en la automatización de determinadas técnicas operatorias y la memorización, muy alejados del modelo basado en la articulación y conversión entre registros que proporciona la adquisición de conceptos de manera significativa.

HIPÓTESIS 3: Los registros de representación semióticos y la conversión entre ellos no son trabajados adecuadamente en la Enseñanza Obligatoria. No es satisfactorio ni suficiente el uso que se hace de ellos, pues se generan obstáculos didácticos importantes.

Las diferencias existentes, tanto desde el campo de lo epistemológico cómo desde lo cognitivo, entre las matemáticas y el resto de áreas de conocimiento, proceden de la manera que tenemos de acceder a los conceptos. Al contrario de lo que ocurre con otras ciencias en donde la percepción y utilización de instrumentos juegan un papel fundamental en el estudio de los objetos de conocimiento, el acceso a los objetos matemáticos se produce de manera única a través de representaciones semióticas, lo que modifica completamente el funcionamiento cognitivo que se moviliza y se pone en funcionamiento en la comprensión matemática.

Los dos materiales curriculares de mayor relevancia del proceso educativo, es decir, la legislación educativa y los libros de texto, pasan por alto el modo en que los distintos registros de un mismo concepto matemático proporcionan una caracterización diferente de dicha noción, así como el hecho de que un sistema de representación destaque alguna propiedad importante del concepto representado o que dificulte la comprensión de otras propiedades.

Los sistemas de representación están estrechamente ligados al proceso de enseñanza-aprendizaje de las nociones matemáticas, y sin embargo la manera en que parecen considerarse en el Decreto de Enseñanzas Mínimas analizado, no parecen ayudar ni favorecer la adquisición y enriquecimiento de las representaciones internas propias de cada alumno, así como el potenciar la reconstrucción, reconfiguración conexión y coordinación entre ellas de modo que puedan relacionar los significados y objetos matemáticos correspondientes de manera significativa.

Los tratamientos dentro de cada registro y, sobre todo, las conversiones entre los distintos registros de representación semiótica que ponen de manifiesto unas determinadas propiedades del objeto en estudio, son fuente de dificultades en el aprendizaje del alumno. Restar importancia a la pluralidad y diversidad de registros de representación, trae como consecuencia la consideración, por parte del alumno, de que todas las representaciones de un objeto matemático determinado tienen el mismo contenido.

Esta diversidad de registros y las dificultades que genera la conversión y coordinación entre ellos, como pueden ser los fenómenos de no congruencia, rara vez son tenidos en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

El hecho de que los objetos matemáticos sean solamente accesibles a través de sus representaciones semióticas conduce, de manera inmediata y necesaria, a prestarles atención estudiando su diversidad, funcionamiento e implicación en el proceso de comprensión de las nociones por parte del alumno, aspectos que, por el momento y basándonos en el estudio realizado, parecen estar ausentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Obligatoria.

Cuestión 3. *¿La relación que establecen los alumnos entre un objeto y su representación, o la conversión entre registros, son aspectos contemplados por las evaluaciones de diagnóstico con el fin de detectar las dificultades y bloqueos que producen y ponerles solución?*

El capítulo 3 es el encargado de dar respuesta a esta tercera cuestión, basándonos, para ello, en el estudio y análisis de dos de las grandes evaluaciones de diagnóstico contempladas en el panorama educativo a nivel internacional, PISA y TIMSS.

Las hipótesis de partida en relación a la cuestión planteada y las conclusiones a las que se llegan se especifican a continuación:

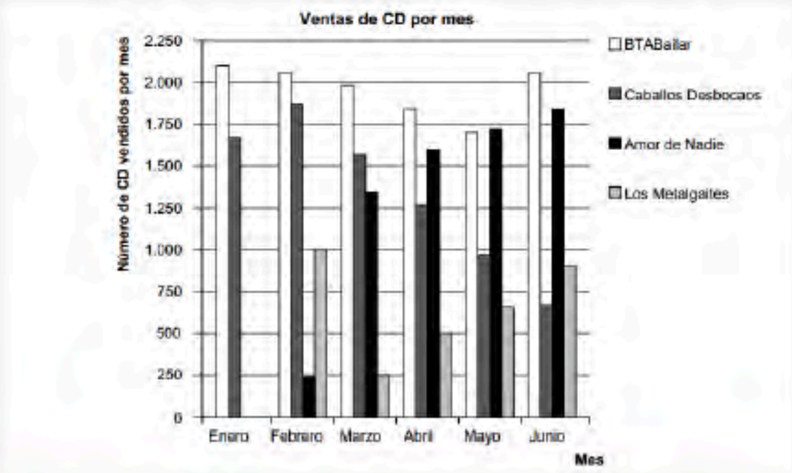
HIPÓTESIS 4: Los marcos teóricos respectivos contemplan aspectos concernientes a la importancia de emplear múltiples representaciones en el quehacer matemático. No obstante, los ítems que conforman las mismas difieren mucho de una adecuada coordinación y conversión entre registros semióticos.

A partir del estudio de las Evaluaciones de Diagnóstico podemos inferir, de manera general, que existe cierto interés en lo concerniente y relativo a la utilización de sistemas de representación y conversión y articulación de Registros Semióticos, pero no vas más allá de lo intuitivo y rutinario, sin profundizar en los verdaderos aspectos relacionados con una coordinación correcta y significativa entre la lengua natural, un sistema de números, una expresión algebraica, una gráfica, una figura o cuerpo geométrico, una tabla, un dibujo, un esquema, etc. lo cual permite una comprensión de un concepto a un mayor nivel de abstracción.

En contradicción con los marcos teóricos en los que se sustentan las evaluaciones y su diseño, el análisis de los ítems revela cómo en ningún momento los estudiantes deben llevar a cabo la construcción de algún modelo de representación, comparar diferentes representaciones o describir la relación entre distintos sistemas semióticos. Del mismo modo, la conversión, vinculación, integración y traducción con fluidez de diferentes registros semióticos, se reduce a lo sumo a dos registros de representación, existiendo un claro predominio de la articulación entre el registro de la lenguaje natural y el registro gráfico, en los cuales el alumno tiene que interpretar el gráfico en el contexto y situación que se les presenta para poder responder las cuestiones que se les formulan seguidamente.

LISTA DE ÉXITOS

Los nuevos CD de los grupos BTABailar y Caballos Desbocaos salieron a la venta en enero. En febrero los siguieron los CD de los grupos Amor de Nadie y Los Metalgaites. El siguiente gráfico muestra las ventas de CD de estos grupos desde enero hasta junio.



Pregunta 1

¿Cuántos CD vendió el grupo Los Metalgaites en abril?

A. 250

B. 500

C. 1000

D. 1270

Pregunta 2

¿En qué mes vendió por primera vez el grupo Amor de Nadie más CD que el grupo Caballos Desbocaos?

A. En ningún mes

B. En marzo

C. En abril

D. En mayo

FIGURA 5.2.9. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2012)

Sin embargo, estas actividades no van más allá de la simple recuperación de información que aparece en el gráfico que se muestra al inicio del ítem a modo de estímulo, sin generar en el estudiante una verdadera necesidad de articular ningún tipo de coordinación ni conversión entre los registros de representación puestos en juego, de analizar las unidades significantes de cada uno de ellos ni de establecer los vínculos pertinentes.

No se busca detectar si el estudiante es capaz de identificar las unidades significantes, los contenidos matemáticos y características relevantes que aportan los variados sistemas de representación que aluden a un mismo objeto de conocimiento.

Por tanto, podemos concluir que existe un salto considerable entre lo los marcos teóricos de las evoluciones parecen querer evaluar y diagnosticar en lo que ha destrezas, habilidades y capacidades cognitivas relacionadas con la representación se refiere, y lo que realmente se evalúa en los ítems que las componente, pues en los reactivos liberados no se manifiesta dicha intención.

HIPÓTESIS 5: Las evaluaciones de diagnostico no están diseñadas para detectar posibles bloqueos y errores generales que se manifiestan en los alumnos en lo referido al reconocimiento de un objeto de estudio en matemáticas a través de diferentes registros de representación así como en la conversión entre los mismos para afrontar y resolver situaciones en contextos cercanos a ellos.

La actividad matemática genera en muchos estudiantes dificultades y bloqueos de aprendizaje de naturaleza muy distinta a los que se producen en otras áreas. Esta situación particular que tiene la enseñanza de las matemáticas obliga a interrogarse sobre los procesos que subyacen en la comprensión de las y estudio de las mismas. Sin embargo, las evaluaciones de diagnóstico, cuyo uno de los propósitos fundamentales es el de identificar y tomar conciencia del funcionamiento cognitivo que tiene lugar en los alumnos y así comprender cómo se trabaja en matemáticas y por tanto cómo se adquieren conocimientos o aparecen errores y bloqueos para una posterior mejora de la práctica educativa, son obviados.

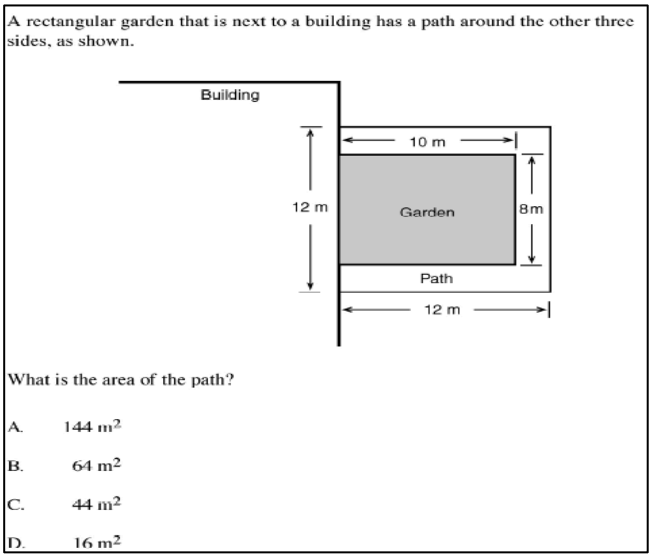
Aunque a priori pudiera parecer que en las evaluaciones de diagnóstico existen ítems diseñados para detectar bloqueos y dificultades en los procesos relacionados con nuestro tema de estudio, en realidad solo son actividades que evalúan que el alumno sea capaz de identificar y extraer información sin la necesidad de demostrar que han comprendido los conceptos implicados, no plantean reflexiones o dilemas ligados a la conversión entre registros, y mucho menos pretenden que el alumno sea capaz de caracterizar ni vincular un mismo concepto u objeto matemático con sus diversas representaciones, quedando reducidas a tareas de simple lectura, traducción y comprensión de una serie de enunciados matemáticos de relativa complejidad.

Entre sus propósitos no se encuentran los de valorar, detectar y diagnosticar las posibles carencias formativas que poseen los estudiantes de cara a la coordinación de los múltiples Registros Semióticos que se pueden utilizar en la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la materia, o si el estudiante es capaz de identificar las unidades significantes, los contenidos matemáticos y características relevantes que aportan los variados sistemas de representación que aluden a un mismo objeto de conocimiento y, menos aun, detectar y catalogar los errores, dificultades y bloqueos que se puedan producir producto de la utilización de los sistemas de representación y la conversión entre ellos.

HIPÓTESIS 6: Existe una fuerte influencia de la enseñanza tradicional de las matemáticas, tendiendo a evaluar competencias a partir de procesos mecánicos, algorítmicos y automáticos, disfrazados a través de contextos del día a día.

El análisis revela cómo la enseñanza más tradicional de las matemáticas, anclada en procesos de memorización y mecanización, que si bien aportan al alumno herramientas para resolver situaciones problemáticas en escenarios muy concretos, carecen de significado y sentido desde el punto de vista de una adquisición significativa de los conceptos matemáticos, tiene todavía una fuerte presencia en las evaluaciones estudiadas.

Pese a tratarse de ítems que parten de un contexto cotidiano o cercano al alumno y que parecen buscar el análisis, adquisición y evaluación de competencias, en realidad, un alto porcentaje son en realidad actividades centradas en la identificación y el cálculo que no exigen que los estudiantes demuestren que han comprendido los conceptos implicados ni pretenden que el alumno sea capaz encontrar y vincular dichos conceptos con una aplicación directa, práctica y útil de los mismos, quedando reducidos a tareas de simple lectura, traducción y comprensión de una serie de enunciados matemáticos de poca complejidad.


A rectangular garden that is next to a building has a path around the other three sides, as shown.

What is the area of the path?

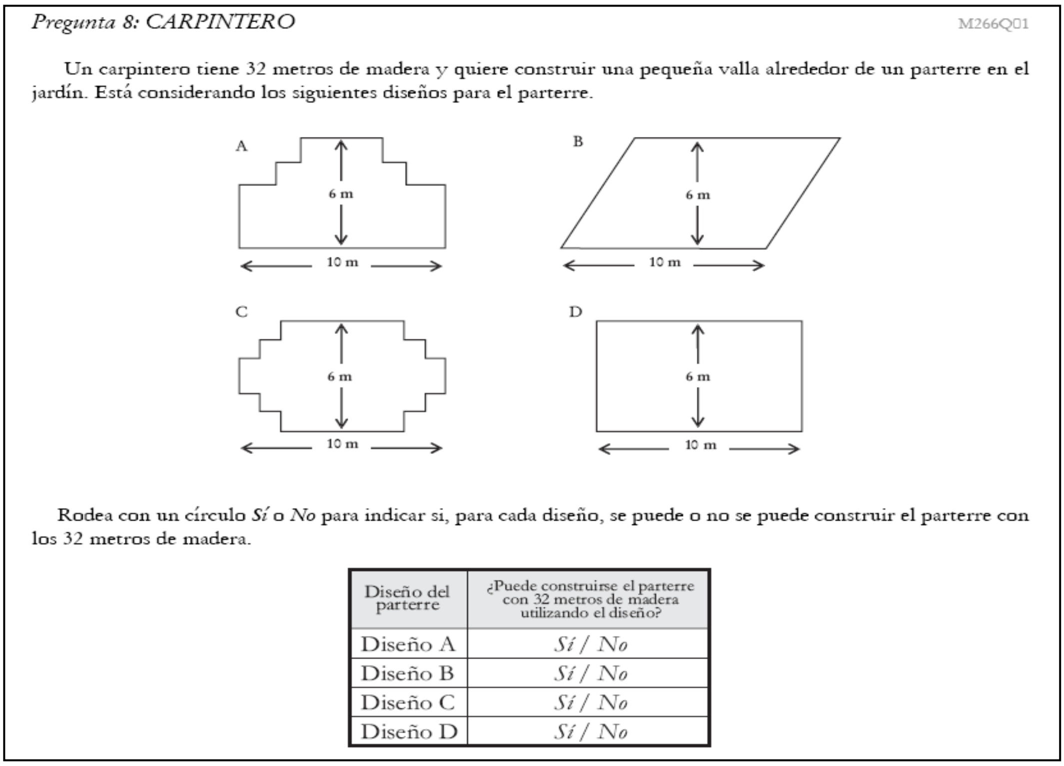
A. 144 m^2

B. 64 m^2

C. 44 m^2

D. 16 m^2

FIGURA 5.2.10. *Actividades TIMSS*. (IEA, 1999b)


Pregunta 8: CARPINTERO M266Q01

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.

Rodea con un círculo *Sí* o *No* para indicar si, para cada diseño, se puede o no se puede construir el parterre con los 32 metros de madera.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	*Sí / No*
Diseño B	*Sí / No*
Diseño C	*Sí / No*
Diseño D	*Sí / No*

FIGURA 5.2.11. *Actividad PISA.* (OCDE/INCE, 2003)

Mediante el trabajo con las representaciones, los alumnos asignan significados a los objetos de estudio y comprenden las estructuras matemáticas que subyacen. Por ello, han de recibir una preparación y educación en el uso, conversión y coordinación entre los diferentes sistemas de representación. El abordaje de estas tres cuestiones han puesto de manifiesto la necesidad de introducir cambios en la manera que se presentan, transmiten y se enseñan los contenidos, y sobre todo un cambio en la importancia que se concede a los distintos registros semióticos que se pueden emplear para referir un objeto de conocimiento y a la articulación entre ellos. Este cambio requiere una puesta en práctica en el aula distinta a la habitual y, por ende, un cambio de mentalidad en el profesores, que necesitarían, además, contar con propuestas didácticas, avanzadas pero también realistas, para introducir estos nuevos objetivos sin salirse de la línea que los estándares curriculares ha marcado y de ahí surge el interés del objetivo principal de esta tesis y tema de estudio e investigación:

¿Qué tipo de situaciones se pueden diseñar y plantear de manera que se favorezca el trabajo y conversión entre los diferentes registros de representación semiótico?

5.3. Conclusiones respecto a las hipótesis emitidas a partir del diseño experimental

Vamos ahora a retomar las hipótesis que emitimos en su momento. El sistema de prueba va a centrarse tanto en la aportación de las conclusiones que hemos ido exponiendo en su momento en los diferentes capítulos cómo en los estudios experimentales de ingeniería didáctica, debidamente validados a través de los análisis a priori y a posteriori, proporcionado también resultados que avalan ciertas predicciones.

HIPOTESIS 7: Los alumnos presentan un gran déficit en lo que a la conversión entre registros de representación se refiere, cometiendo muchos de los errores ya detectados en investigaciones que versan sobre la necesidad de la articulación de múltiples registros semióticos en la transmisión de conocimientos.

El análisis previo de libros de texto, legislación y evaluaciones, dejaba entrever la posible falta de destreza, por parte de los alumnos, a la hora de tener que relacionar un objeto de conocimiento con los distintos registros de representación semióticos que lo ostentan y articular conversiones entre las mismos, lo que se ha confirmado en el desarrollo de ambas ingenierías y sus correspondientes análisis a posteriori.

Cuando el alumno se encuentra con una situación en la que el concepto matemático viene dado a través del registro que ha acostumbrado a utilizar o a ver cuando se hace referencia a él, tiende a seguir trabajando dentro de ese mismo registro sin plantearse, inicialmente, el cambio hacía otro que le permita afrontar la situación de manera óptima.

Por otro lado, en el caso contrario de que el objeto matemático se represente mediante un registro que no es el habitual, gran parte de los alumnos presentan dificultades para identificarlo, apreciando una falta de criterio matemático a la hora de tener que resolver la problemática.

Por ello, se han encontrado errores y bloqueos producto de las limitaciones que genera la identificación del objeto de conocimiento con un único registro de representación en un contexto concreto, ya citados en otros trabajos e investigaciones (D'Amore, 2004, 2006; Duval, 1993, 1994, 1995, 1996, 2000, 2003, 2005, 2012; Godino, 2002, 2003; Hitt, 2007; Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006ª,2013, 2014).

Un ejemplo claro de ello se manifiesta en la identificación casi instantánea del concepto de función con la representación gráfica cartesiana, observable, entre otras situaciones, en la situación 2 de la ingeniería diseñada para 3º de ESO, en donde a partir de los datos de las emisiones de NO_2 y CO recogidos en una tabla por una de las empresas que va a pasar una inspección medioambiental los alumnos tenían que detectar los valores erróneos, algunos de ellos se plantearon resolver el problema a través de la construcción de las gráficas correspondientes a cada relación funcional dada, no siendo conscientes de la complejidad que ello conllevaba dada la naturaleza de los datos:

Grupo 6

- **Colaborador 3:** *Chicos, ¿qué estáis haciendo?*
- **Sergio:** *Una gráfica. Bueno, dos gráficas para ver si hay algo raro.*
- **Colaborador 3:** *¿Algo raro?*
- **Sergio:** *Si, con la recta que tiene que salir. Y luego ya veremos.*

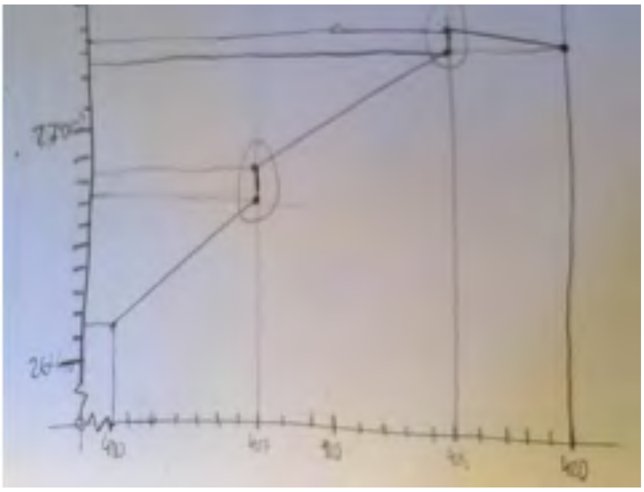


FIGURA 5.3.1. *Trabajo realizado por el grupo 6 en S.2.1 del segundo año*

Además, se detecta una grave falta de coordinación entre registros cuando la conversión hay que efectuarla hacia el registro de la lengua natural. Este hecho se observa, por ejemplo, en la situación en donde los alumno, a partir de la construcción geométrica que aparece a continuación, tienen que enunciar un Teorema similar al de Pitágoras para este tipo de figuras.

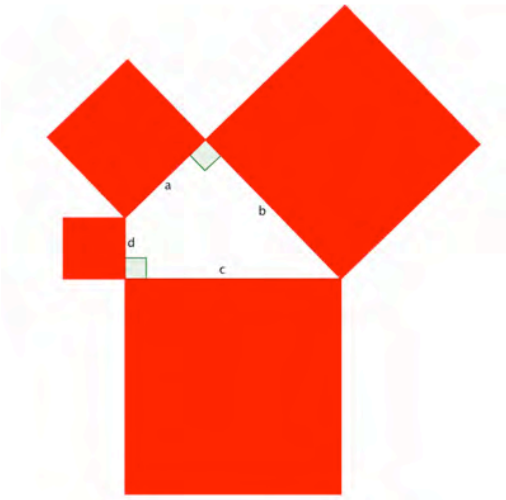


FIGURA 5.3.2. *Construcción geométrica sobre cuadrilátero*

La conversión hacia el registro de la lengua natural a partir cualquier otro no se produce de forma instantánea ni espontanea. Se observa que los alumnos saben más de lo que son competentes de expresar, pues cuándo se les pregunta son capaces de dar respuestas más claras de manera oral:

- **Profesor:** *A ver que habéis puesto como Teorema.*
- **Víctor:** *Es un poco lioso.*
- **Profesor: "***La suma de los cuadrados formados por los lados a y b es igual que los formados por los lados en los cuadrados d y c." Pero…¿la suma de qué?*
- **Víctor:** *Es igual a la suma de los lados de los cuadrados.*
- **Profesor:** *Pero…¿qué es lo que sumáis?*
- **José Antonio:** *Más que los lados es el área lo que sumas.*
- **Profesor:** *de las áreas. Pero…¿de las áreas de quienes?*
- **José Antonio:** *De los cuadrados. Ponlo.*
- **Profesor:** *Y ahora yo os hago una pregunta, ¿Por qué decís que los de la suma de a y b?*
- **Jaime:** *Porque son los catetos que no son la hipotenusa.*
- **Profesor:** *porque son los que forman, ¿El qué?*
- **Víctor:** *El triángulo.*
- **Profesor:** *Pero los catetos ¿Qué son lo que forma?*
- **José Antonio:** *El ángulo recto.*
- **Profesor:** *Eso es, el ángulo recto.¿ Y eso vosotros lo habéis dicho en vuestro Teorema?*
- **José Antonio:** *No.*

Esto puede ser debido al tipo de tareas habituales que se han desarrollado a lo largo de su formación matemática, en donde no se acostumbra a verbalizar la interpretación de un resultado o demostración que parte o se efectúa dentro de un registro determinado. Este tipo procesos requieren cierto aprendizaje que es pasado por alto habitualmente, pues el tener que expresar mediante la lengua natural una serie de descubrimientos o conclusiones es un proceso cognitivamente costoso para los alumnos.

HIPÓTESIS 8: La realización de prácticas efectivas de conversión entre registros hace que la gestión tanto de la clase como del tiempo, sea costosa, por lo que el profesorado tiende a sustituirlas por prácticas menos reflexivas y más mecánicas.

No existe consciencia didáctica dentro de las aulas de las repercusiones en términos de aprendizaje que tiene la conversión entre registros, cuando lo cierto es que constituye, tal y como hemos constatado a partir de la puesta en práctica de las ingenierías, una variante delicada en la que se pone de manifiesto la comprensión global e integra de los conceptos, así como su aplicación en cualquier contexto.

Tanto el diseño como el desarrollo de las pertinentes ingenierías en el aula constatan como la gestión de la clase y la medida de los tiempos de realización de actividades en las que ciertamente tenga lugar esta movilización, requiere de un mayor control del escenario de aprendizaje, así como un adecuado dominio por parte del profesorado de los conocimientos que subyacen en este tipo de prácticas.

Este hecho unido a la complejidad cognitiva que existe en los procesos de coordinación de registros semióticos que deben tener lugar de manera obligatoria en la aprehensión de los contenido, contemplando *la discriminación del contenido por el cual una representación representa un objeto, la existencia de una multiplicidad de representaciones posibles para un mismo objeto, y la necesidad de no confundirlas con lo que ellas representan* (Duval, 2012) para que la relación cognitiva que permite el acceso a los objetos estudiados se de adecuadamente, dificulta el desarrollo y diseño de tareas que se ajusten a estos parámetros por parte del profesorado, el cuál muchas veces no es conocedor de tales consideraciones.

A través de la información recabada, el trabajo realizado con los alumnos en el aula y lo mencionado en los párrafos anteriores, existen ciertos indicios de que la mayoría de los ejercicios y tareas que se desarrollan en el transcurso de las clases son tomados de los manuales escolares o materiales similares en donde se parten de ilustraciones y representaciones prototípicas ya dadas o se resuelven sin necesidad de articular varios registros entre sí.

Cierto es que en todos los manuales analizados encontramos actividades en las que es necesario el paso de un sistema de representación a otro para encontrar la solución, sin embargo, en ningún caso ninguno que suponga una efectiva y consciente coordinación pues se tratan de ejercicios prototípico, mecánico, alejados de la auténtica movilización de procesos cognitivos que tienen lugar en aquellas tareas donde se crea una verdadera necesidad de realizar una conversión.

HIPOTESIS 9: Los alumnos tienden a efectuar conversiones hacia los registros operacionales debido a la preparación previa recibida en las aulas en donde existe un predominio del trabajo algorítmico y mecánico.

Podemos confirmar, a raíz del análisis a posteriori realizado en ambos cursos, como se presenta de manera predominante, por parte del alumnado, la utilización de manera inmediata a los registros numéricos y algebraicos para enfrentarse a la situaciones.

Esto es un claro síntoma de la existencia de una fuerte tendencia dentro de las aulas de la transmisión de métodos de resolución algorítmicos y mecánicos basados en el cálculo producto de una deficiente transposición didáctica, en detrimento de todas aquellas técnicas que se apoyan en procesos manipulativos y visuales y en transformaciones dentro de un propio registro de representación, que siendo mas directos e intuitivos no se han manifestado en los estudiantes de manera espontánea y natural como cabría esperar.

La sustitución de saberes que se produce actualmente en secundaria, como la aritmetización de la medida y algebrización de la geometría, han dado lugar, por ejemplo:

- a que los alumnos intentaran encontrar la relación existente entre el área de los cuadrados que se construyen sobre los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo, apreciable a través del registro de representación geométrico, a partir del cálculo, la medida y la resolución de ecuaciones derivadas de la expresión algebraica del teorema de Pitágoras, cuando la situaciones carecían de datos e información suficientes para resolverlas por dichos caminos, como puede observarse el las dos primeras situaciones de la ingeniería realizada en 2º ESO.

- a la utilización del registro numérico y algebraico prioritariamente, pese que a través del registro geométrico e incluso tabular podrían haber descubierto y visualizado de manera directa la proporcionalidad existente entre segmentos, en las actividades relacionadas con el aprendizaje de la semejanza, como puede observarse el la situación 6 de la ingeniería realizada en 2º ESO.
- a que en lo que al estudio de la dependencia de variables se refiere o incluso en la búsqueda de la pendiente de una función afín , los alumnos hayan recurrido de manera automática a la utilización de la regla de 3, a técnicas operaciones y a la utilización de la expresión algebraica de la función afín para despejar el valor de la incógnita pedida, cuando a través del registro gráfico eran fácilmente resolubles.

Estos son algunos de los ejemplos que hemos podido observar en la ingeniería que confirman la hipótesis emitida.

HIPOTESIS 10: Los alumnos manifiestan, a la hora de trabajar con registros semióticos más visuales, bloqueos estrechamente relacionados con las deficiencias que los mismos poseen en lo que a interpretación y capacidad de visualización se refiere, debido al tipo de trabajo previo recibido en el aula, basado en un tipo de enseñanza procedimental y algorítmica.

La hipótesis anteriormente corroborada, nos conduce de manera casi inmediata a la confirmación de esta. La falta de destrezas relacionadas con los procesos de visualización parecen concentrar un gran porcentaje de los obstáculos que los alumnos han manifestado a la hora de enfrentarse a situaciones como por ejemplo:

- en los que el teorema de Pitágoras está presente y no se ostenta la imagen prototípica de triángulo rectángulo como en el caso de la actividad de los postes de la luz, en la que únicamente un grupo ha sido capaz de visualizar y construir los triángulos rectángulos que se forman a partir de las hipotenusas dadas como cables:

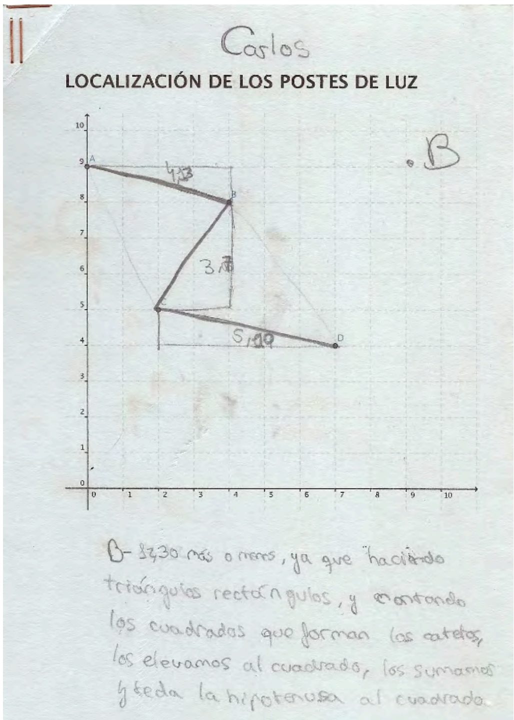


FIGURA 5.3.3. *Trabajo realizado por el grupo 5 en la S.5 del Tª de Pitágoras*

- en las que tienen que establecer relaciones de semejanza a partir de representaciones figurales, como en el caso de la situación del torneo de baloncesto en la que la mayoría de alumnos, ya conocedores del Teorema de Tales y por lo tanto del contenido que tienen que aplicar para resolver la situación, presentan dificultades a la hora de identificar sobre el esquema las sombras que proyectan los objetos y aplicar la razón de semejanza a partir de las dimensiones dadas en un tabla:

- **Fran**: *Profe, explícanoslo otra vez, que no nos hemos enterado.*
- **Colaborador 1**: *Enséñame el dibujo. ¿Cuál es la canasta?*
- **Fran**: *Esta* (la señala correctamente)
- **Colaborador 1**: *Señálame la altura de la canasta*
- **Fran**: *Esta* (la señala correctamente)
- **Colaborador 1**: *señálame la altura del trípode*
- **Fran**: *Esta* (la señala correctamente)
- **Colaborador 1**: *¿Cuál es la sombra que da la canasta?*
- **Fran**: *Esta* (señala la incidencia no la sombra). *Por el suelo.*
- **Colaborador 1**: *Señala otra vez la sombra de la canasta.*
- **Fran**: *Por aquí estará.* (señala el trozo de sombra del trípode)
- **Colaborador 1**: *Pero, ¿de dónde a donde va?*
- **Fran**: *De aquí a aquí* (señala el trozo de sombra del trípode)
- **Colaborador 1**: *Vamos a ver. El trípode tendrá una sombra y la canasta otra, ¿no?*
- **Fran**: *Si.*
- **Colaborador 1**: *¿Cuál es la sombra de la canasta y cuál la del trípode?*
- **Javier**: *La sombra de la canasta estará por aquí, por esta parte* (señalando la parte del triángulo rectángulo que forma la canasta la sombra y la proyección*) y la del trípode por aquí* (Idem a lo anterior)
- **Colaborador 1**: *¿La sombra está de pie?*
- **Fran**: *No, está por aquí, por el suelo.*
- **Colaborador 1**: *¿Cuál es la sombra de la canasta?*
- **Fran**: *Aquí.* (marcando el cacho de sombra desde el pie de la canasta al pie del trípode)
- **Javier**: *De esa punta a esta punta* (marcando lo mismo que Fran)
- **Fran**: *Yo creo que es esta parte negrita* (parte correspondiente al trípode)
- **Colaborador 1**: *Entonces, ¿Cuál es la del trípode? ¿Tú la sombra la ves por el aire?¿Por dónde ves tu la sombra?*

– **Fran**: *Pues no lo se.*

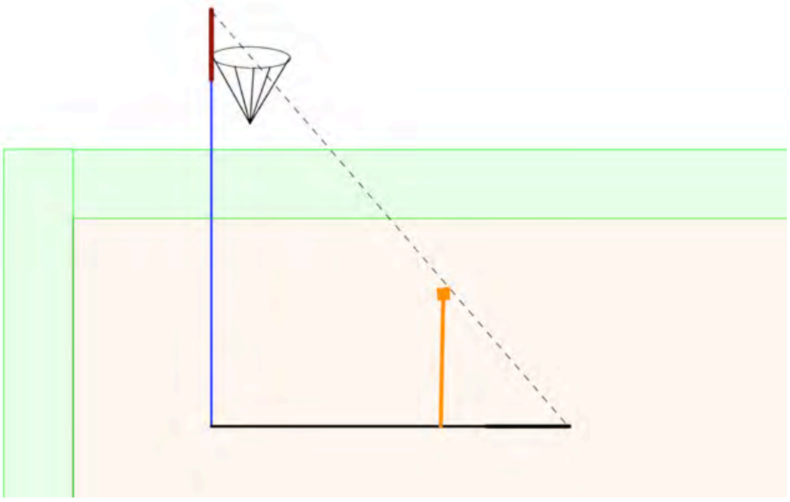


FIGURA 5.3.4. *Esquema de la situación descrita en la S.4 de Semejanza*

- o en las que deben extraer información de gráficas que representan relaciones funcionales.

Otro claro ejemplo que reafirma la hipótesis arriba enunciada la encontramos en la última situación de la ingeniería de 3º de ESO, siendo un claro reflejo de cómo los tratamientos dentro del registro gráfico resultan más costosos a los alumnos desde el punto de vista cognitivo por su relación con los procesos de visualización a los que no están acostumbrados, lo que lleva al estudiante a operar dentro del registro Algebraico o del registro Numérico, pues únicamente uno de los grupos ha obtenido toda la información necesaria para encontrar la ecuación de la recta trabajando únicamente sobre la gráfica cartesiana, estrategia considera ideal desde el punto de vista cognitivo:

Grupo 5

– **Colaborador 4:** *¿Me explicáis cómo lo habéis resuelto?*

– **Silvia:** *Hemos calculado primero, en que punto cortará la recta en el eje de la y. Y eso lo hemos hecho porque nos hemos dado cuenta que la pendiente es -2 porque cada cuadro que recorre hacía la derecha, baja dos, entonces, -2 entre 1 es -2. Entonces va a cortar en y en -9. Teniendo -9 y ya la pendiente que es -2, hemos obtenido la ecuación que es y= -2x -9. Luego hemos ido sustituyendo con la coordenada de los marcianitos y hemos visto que solo se libra uno.*

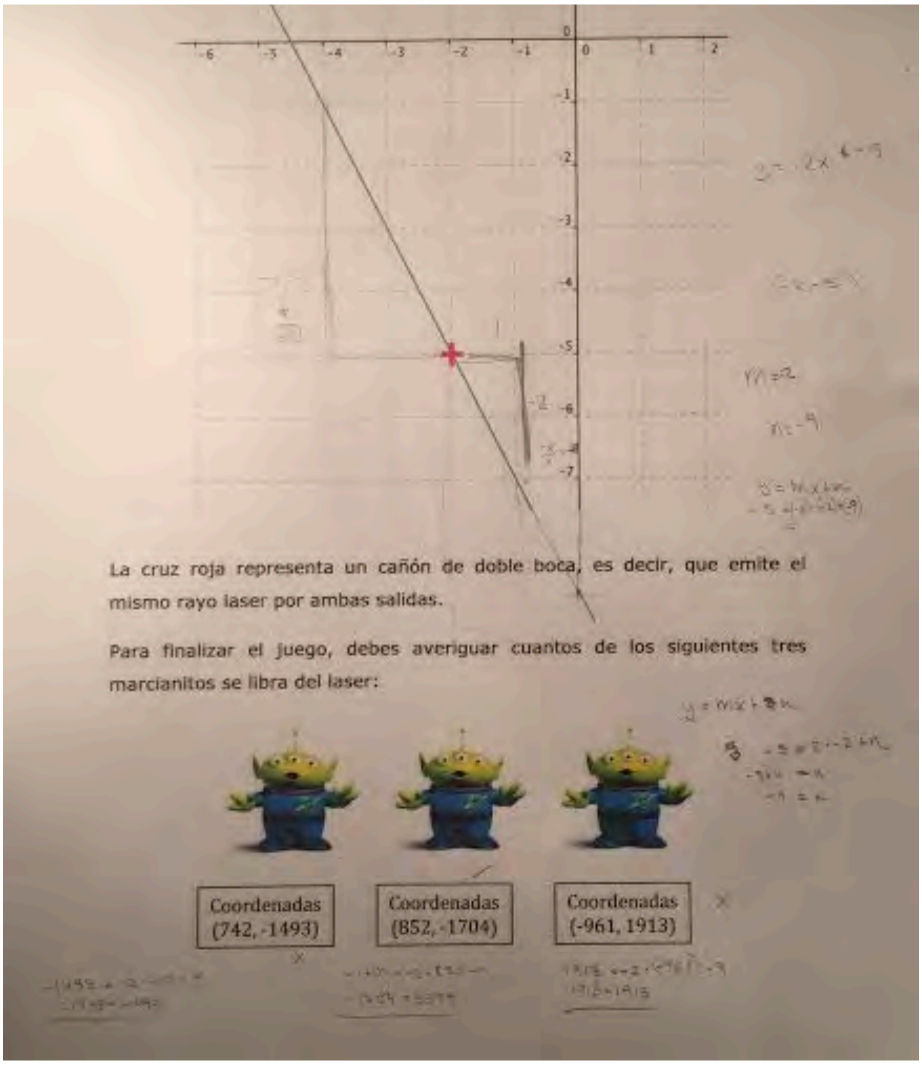


FIGURA 5.3.5. *Trabajo realizado por el grupo 5 en la S.6.4 de la ingeniería sobre la función*

Ello se debe a la cierta falta de trabajo en el aula de tareas en las que intervienen e interactúan los procesos de visualización y el razonamiento, que tan importantes son en la enseñanza-aprendizaje de la geometría y del análisis funcional, lo que sin duda tiene su origen en la falta de actividades de coordinación entre registros que podrían constituir un soporte consciente en los que anclar un aprendizaje más global y completo. Consideramos que se trata de una ausencia muy grave por las repercusiones que tiene en el aprendizaje del alumno, limitándose al trabajo fundamentalmente algebraico y numérico, lo que evidencia la falta de conocimiento de cómo se aprende en matemáticas.

HIPÓTESIS 11: El diseño y puesta en práctica de tareas efectivas sustentadas en la simbiosis entre la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos, permitiría un cambio de contrato didáctico, en el sentido de introducir conocimientos de orden a-didáctico, que ayudarían al profesor a precisar el objeto de enseñanza a tratar. De este modo se consigue en los alumnos una aprehensión de los conocimientos más integra y significativa a través de las múltiples representaciones utilizadas y su función como variables didácticas, así como favorecer y mejorar las destrezas relacionadas con la conversión de registros mediante situaciones a-didácticas.

A partir del análisis de las calificaciones obtenidas, por los estudiantes de los grupos en los que hemos intervenido, en los exámenes concernientes a los contenidos trabajados en las respectivas ingenierías, y su comparación, por un lado, con la trayectoria que han llevado a lo largo del curso, y, por otro, con las calificaciones y trayectoria de los alumnos del mismo curso que no han formado parte en nuestra intervención, podemos concluir que la metodología empleada en el grupo experimental, en la que convergen la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos, ha contribuido en la adquisición de los conocimientos de manera más significativa y global que en el caso del grupo de control que ha seguido la metodología del centro, manifestándose notoriamente en el estudio realizado en 3º de ESO.

En el caso concreto de los alumnos de 2º de ESO, no se detectaban inicialmente diferencias significativas a nivel global entre el grupo experimental y el de control a la hora de abordar un modelo de examen de tipología tradicional propuesto por el profesor de la asignatura, lo que es indicativo de que la metodología desarrollada en nuestro grupo prepara a los alumnos frente a este tipo de pruebas satisfactoriamente.

Debido al hecho de no poder valorar, a través del post-test basado en el examen clásico, hasta qué punto la metodología aplicada repercute positivamente en el rendimiento de los alumnos en términos de calificaciones, se decidió pasar un segundo post-test basado en un modelo de examen de características competenciales a través del cual poder estudiar si, efectivamente, el aprendizaje se ha producido de manera más significativa en los alumnos que han estado expuestos a ella. Los resultados en este sentido mostraron de manera clara y determinante como los alumnos sometidos a la metodología sustentada en la simbiosis de nuestras dos teorías de referencia son capaces de hacer frente a pruebas competenciales y contextualizadas lo que revela el amplio potencial a nivel formativo que presenta al producirse un verdadero aprendizaje, en contraposición con lo ocurrido con el grupo de control, pues se produce una fuerte diferencia, en sentido negativo, en la comparación de sus propias calificaciones cuando se trata de afrontar situaciones contextualizadas en las que deben aplicar los conceptos supuestamente adquiridos, señal de que se ha producido un proceso de enseñanza-aprendizaje que probablemente se ha basado en el trabajo mecánico, memorístico y operacional.

Los resultados de los análisis a priori y a posteriori nos han confirmado que es posible llevar a cabo con resultados óptimos, tanto en el ámbito del conocimiento como de la motivación, procesos de enseñanza-aprendizaje en los que se vea favorecida la conversión entre diferentes registros de representación semiótica en los que la construcción de conocimientos se haga de forma a-didáctica, pues encontramos varios ejemplos durante el desarrollo de las mismas de cómo el adquirir la destreza de la coordinación entre registros puede satisfacer las necesidades de aprendizaje y la resolución de problemas de manera particular para cada uno de los alumnos, dada que la importancia no radica en encontrar la representación adecuada en muchos casos, sino en averiguar las diversas y adecuadas representaciones que podemos emplear para articularlas adecuadamente, teniendo en cuenta sus virtudes y sus limitaciones.

Las ingenierías diseñadas han versado sobre dos contenidos matemáticos con necesidades semióticas distintas con el fin de poder dar ciertas garantías de que la metodología empleada, basada en la teoría de situaciones didácticas centrada en la atención a la coordinación entre registros, favorece muy positivamente el aprendizaje y la construcción de conocimiento en el alumnado.

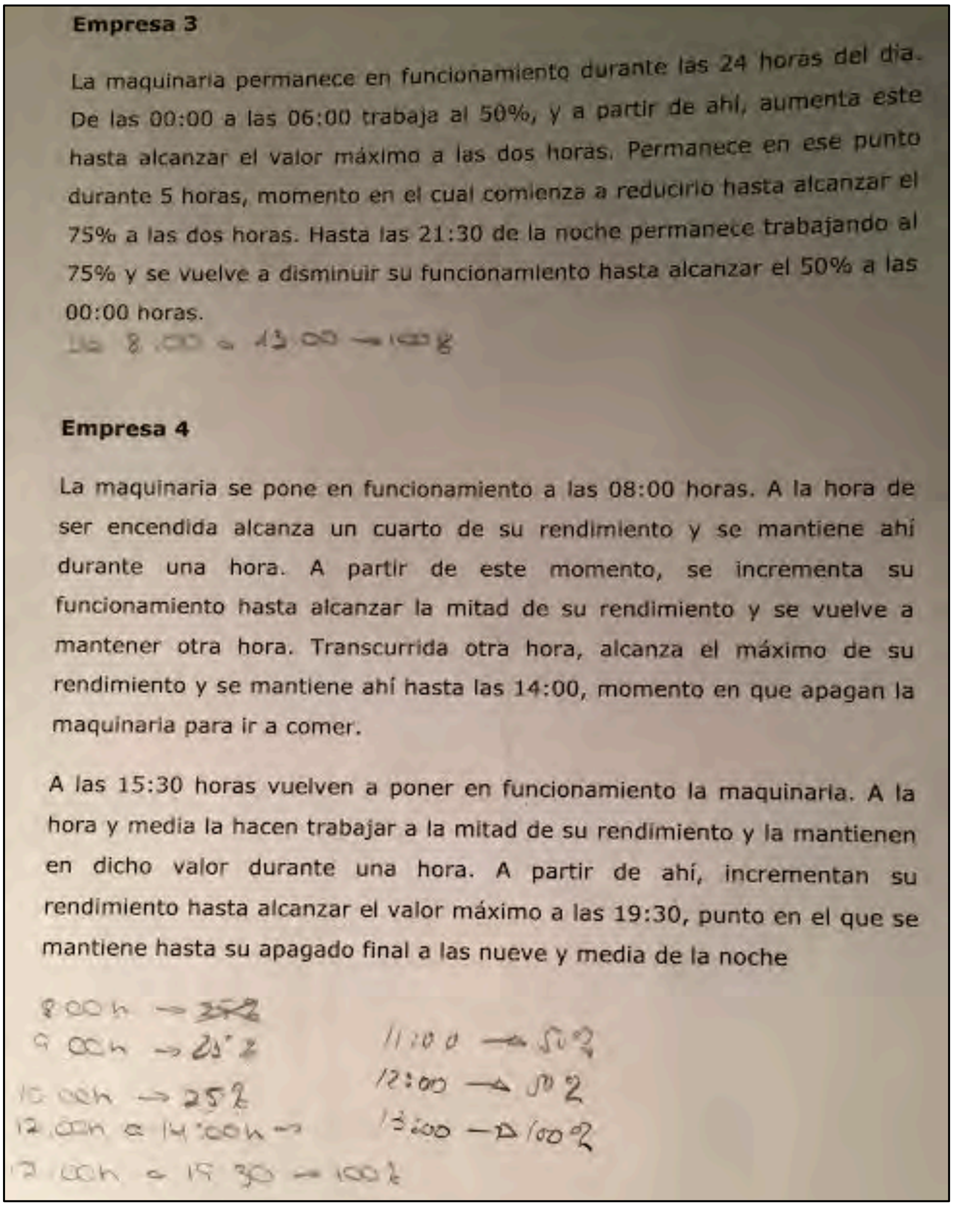
HIPÓTESIS 12: Las conversiones más complejas en términos de congruencia entre unidades significantes, son alcanzadas por la mayoría de los estudiantes que forman parte de nuestro estudio. Sin embargo, no todos ellos logran un grado de destreza suficiente con respecto a las conversiones que tienen como protagonistas registros discursivos y no discursivos y la coordinación entre ambos.

Efectivamente, la mayor parte de los alumnos han sido capaces de efectuar de manera progresiva conversiones en las que la falta de congruencia entre las unidades significantes que constituyen cada registro dificulta dicho proceso.

Sin embargo, se localizan algunos casos en los que los estudiantes han encontrado serias dificultades debido a este hecho, quedándose estancados por no logara un grado de destreza suficiente.

Algunos ejemplos concretos de estas circunstancias han sido:

- Pasar de información dada a través de la Lengua Natural, cuyas unidades están formadas por frases, palabras y letras, al registro gráfico formado por coordenadas, puntos, variables, etc., lo que requiere un salto cognitivo por parte del alumno que debemos tener en cuenta. Este fenómeno se ha evidenciado particularmente en la fase 3 de la actividad de la inspección medioambiental, en donde los alumnos han encontrado grandes dificultades al transformar la información dada por las empresas 3 y 4 mediante el registro de la lengua natural a la gráfica:



Empresa 3

La maquinaria permanece en funcionamiento durante las 24 horas del día. De las 00:00 a las 06:00 trabaja al 50%, y a partir de ahí, aumenta este hasta alcanzar el valor máximo a las dos horas. Permanece en ese punto durante 5 horas, momento en el cual comienza a reducirlo hasta alcanzar el 75% a las dos horas. Hasta las 21:30 de la noche permanece trabajando al 75% y se vuelve a disminuir su funcionamiento hasta alcanzar el 50% a las 00:00 horas.

De 8:00 a 13:00 → 100%

Empresa 4

La maquinaria se pone en funcionamiento a las 08:00 horas. A la hora de ser encendida alcanza un cuarto de su rendimiento y se mantiene ahí durante una hora. A partir de este momento, se incrementa su funcionamiento hasta alcanzar la mitad de su rendimiento y se vuelve a mantener otra hora. Transcurrida otra hora, alcanza el máximo de su rendimiento y se mantiene ahí hasta las 14:00, momento en que apagan la maquinaria para ir a comer.

A las 15:30 horas vuelven a poner en funcionamiento la maquinaria. A la hora y media la hacen trabajar a la mitad de su rendimiento y la mantienen en dicho valor durante una hora. A partir de ahí, incrementan su rendimiento hasta alcanzar el valor máximo a las 19:30, punto en el que se mantiene hasta su apagado final a las nueve y media de la noche

8:00h → ~~25%~~
9:00h → 25%
10:00h → 25%
12:00h a 14:00h →
17:00h a 19:30 → 100%

11:00 → 50%
12:00 → 50%
13:00 → 100%

FIGURA 5.3.6. *Trabajo realizado por el grupo 5 en la S.2.4 de la ingeniería sobre la función*

Grupo 7

- **Profesor:** *¿Me contáis que habéis hecho?*
- **Maili:** *La primera empresa que visitamos es la 3, porque a las 10:00 está al 100%.*
- **Profesor:** *¿Y por que habéis decidido no ir al resto de empresas?*
- **Lucía:** *El resto de empresas no está al 100% a las 10:00.*
- **Profesor:** *Perfecto. Después de la 3, ¿cuál visitáis?*
- **Maili, Esther y Lucía:** *la 4*

- **Profesor:** *¿por?*
- **Lucía:** *Porque acabamos a las 11 e la 3, tardamos media hora en llegar…y entonces a las 11:30 es la única que está al 100%.*
- **Profesor:** *¿A las 11:30 está al 100%?¿a que hora empieza?*
- **Maili:** *A las 08:00.*
- **Profesor:** *¿y que pasa?*
- **Esther:** *A la hora alcanza un cuarto de su rendimiento. Es decir, que a las 09:00 está al 25%.*
- **Profesor:** *Luego, a las 09:00, ¿dónde está?*
- **Lucía:** *Al 25% y se mantiene ahí durante una hora.*
- **Profesor:** *Es decir, que a las 10:00, ¿dónde está?*
- **Maili:** *En el 25%. Y ahora incremente un 50%.*
- **Profesor:** *¿Y cuánto tarda en ese incremento?*
- **Maili:** *Una hora y nos mantenemos otra hora.*
- **Profesor:** *Entonces a las 10:00 estábamos en el 25%, a las 11:00 hemos llegado al 50% y ahora estamos de las 11:00 a las 12:00 en el 50%. Por lo tanto a las 11:30 no podéis visitar esta empresa, ¿lo veis?*
- **Maili y Lucía:** *Sí. (el profesor se va)*
- **Esther:** *Pues yo creo que está bien.*
- **Maili:** *¿Y si hacemos una gráfica?*
- **Lucía:** *Eso estaba haciendo ya.*

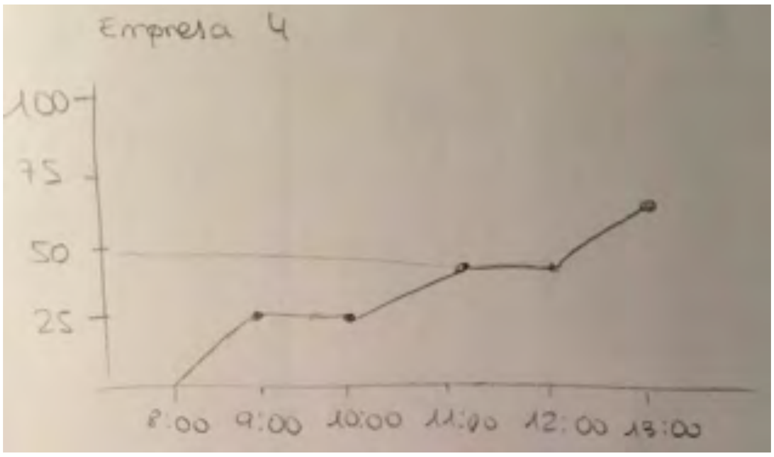


FIGURA 5.3.7. *Trabajo realizado por el grupo 7 en la S.6.4 de la ingeniería sobre la función*

- Conflictos a la hora de realizar la conversión entre el Registro de la Lengua Natural, dado a través del enunciado, y el Registro Numérico, formado por números, hacia el Registro Geométrico cuyas unidades significantes están formadas por puntos, segmentos y ángulos. Varios alumnos han manifestado dificultades en este sentido en la construcción del hexágono regular a partir de los datos dados en un enunciado y la realización de unos cálculos previos, todo ello en relación con el concepto de semejanza.

Como consecuencia sugerimos la necesidad de prestar atención a este tipo de conversiones con el fin de reforzarlas y lograr en los alumnos un grado de destreza adecuado para poder efectuarlas.

HIPÓTESIS 13: El uso de escenarios contextualizados y relacionados con actividades cercanas, familiares y conocidas por los alumnos, es indispensable para plantear ingenierías didácticas en donde la Teoría Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos establezcan una relación de simbiosis.

Creemos haber mostrado a través del desarrollo de las dos ingenierías planteadas cómo a través de tareas cercanas, próximas a contextos reconocibles no alejados de la realidad de los alumnos, hemos logrado aunar las dos teorías pilares en nuestra investigación, permitiendo dar significado a los conceptos y procedimientos matemáticos que tantas veces aparecen desconectados de su entorno y a la para que se genera la necesidad de realizar conversiones entre representaciones dándolo sentido al proceso en consonancia con las representaciones mentales propias de cada alumno y su bagaje adquirido.

El análisis a priori y a posteriori, junto con el estudio estadístico realizado posteriormente, constatan cómo la utilización de este tipo de problemas contextualizados que hemos utilizado, tanto en la ingeniería de 2º ESO como en la de 3º ESO, han forzado la convivencia entre la teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, potenciando el desarrollo de las capacidades y habilidades de identificación, utilización y transformación entre representaciones, sucesivamente refinadas y mejoradas como consecuencia de la interacción entre nuestras teorías, logrando favorecer tanto la conversión entre los múltiples registros semióticos, como la aprehensión de los contenidos matemáticos.

Este hecho queda evidenciado al estudiar el rendimiento de los alumnos del grupo de control de 2º ESO, tanto a lo largo del curso como en el examen correspondiente a la unidad aquí tratada, y como este se ve afectado de manera negativa a la hora de afrontar situaciones contextualizadas en las que deben aplicar los conceptos supuestamente adquiridos, ocurriendo totalmente al contrario en el grupo experimental.

Luego, en Educación Secundaria es de gran importancia contextualizar los conceptos haciendo uso del mayor numero de registros de representación posibles.

5.4. Otras conclusiones derivadas de los trabajos experimentales de ingeniería didáctica

Además de todas las conclusiones obtenidas en torno a las hipótesis de investigación formuladas, vamos ahora a exponer de manea breve y concisa otras consecuencias que podemos extraer de la experimentación de las ingenierías didácticas diseñadas y aplicadas:

- El obstáculo área/perímetro sigue manifestándose en alumnos de Secundaría, considerando que figuras que tienen igual cantidad de superficie deben tener igual perímetro. Este fenómeno se ha detectado en la primera situación de la ingeniería de 2º de ESO, en donde la estrategia base de algunos alumnos a la hora de demostrar que dos figuras tienen la misma cantidad de superficie como se les ha afirmado previamente, pasa por medir los lados de las mismas para proceder después a la comparación de perímetros. Al comprobar que los perímetros de ambas figuras no coinciden, optan por buscar otro método.

- Existe una falta de comprensión de la magnitud superficie y el empleo de sus unidades. Este hecho se manifiesta en todas aquellas situaciones o fases en donde se parte de la utilización del cuadradito como unidad de superficie, pues varios alumnos utilizan como unidad de medida el cm^2, para posteriormente expresarlo en cuadrados al cuadrado. Esto pone claramente de manifiesto la falta de un trabajo específico de las unidades de superficie del Sistema Métrico Decimal alejado de la práctica habitual del paso de unas unidades a otras empleando la escalera de conversión para encontrar las equivalencias.

- El proceso de enseñanza-aprendizaje de las figuras planas y el cálculo de sus áreas, que han recibido los alumnos de 2º de ESO en algún de su etapa escolar, se ha basado en la memorización y aplicación de formulas, lejos de un trabajo de deducción o construcción de las mismas a partir de la manipulación. Los contratiempos surgidos en el desarrollo de las situaciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras y la semejanza han puesto en evidencia el desconocimiento de las fórmulas para calcular el área de triángulos, rectángulos y cuadrados, que se ha detectado en varios de los estudiantes.

- El empleo y el abuso de figuras prototípicas en matemáticas, y en concreto en geometría, se ha manifestado de forma clara en la fase 2 de la situación 4 de la ingeniera de 2º de ESO. Varios son los alumnos que para indicar que los triángulos son rectángulos, lo construyen apoyando sobre el ángulo recto, sin tener en cuenta que un triángulo que tenga un ángulo de 90º en el vértice contrario al lado sobre el que se apoya, también es rectángulo. Este tipo de representación prototípica se forma en los alumnos a partir de los sucesivos encuentros que ha tenido a lo largo de su etapa escolar, creando así una representación gráfica estereotipada que les puede conducir a grandes bloqueos y errores, pues algunos alumnos parecen anteponer la posición del triángulo y el punto de vista adoptado para observarlo a la afirmación de que para que sea rectángulo es necesario que tenga un ángulo recto.

- La utilización de la regla de tres de manera constante por varios alumnos ha puesto de manifiesto la existencia del fenómeno didáctico del desplazamiento metacognitivo, de modo que dicha técnica ha desplazado al objeto de conocimiento que hay detrás, y los alumnos no son conscientes de haber trabajado con razones de semejanza ni proporcionalidad. De igual manera ocurre al trabajar las relaciones de dependencia en contextos funcionales, pues la utilización de la regla de tres no deja claro si en algunos de los grupos se está estableciendo de manera significativa la relación de dependencia entre variables, pues su uso mecánico pone en duda tal hecho.

- La razón de semejanza entre longitudes se constituye como un obstáculo en la aprehensión de la razón de semejanza entre superficies.

- Los alumnos manifiestan claras dificultades conceptuales a la hora de trabajar e interpretar las escalas en planos y aplicarla en el cálculo de superficies. Ello se debe a la falta de conexión existente entre la noción se razón de semejanza cuando de lo que se trata es de representar objetos de la realidad aplicando una reducción estrictamente necesaria para poder trabajar sobre ellos en un plano. Este fenómenos queda representado en la situación 7 de la ingeniería de 2º de ESO, en dónde los alumnos no tienen claro si la escala se refiere a unidades de longitud o a unidades cuadráticas, razonando, erróneamente, que un cuadrado (unidad de superficie) son 50 o 100 cuadrados en la realidad en función del plano del que dispongan, siendo más llamativo en el caso de los grupos que tienen el plano escala 1:50.

- El uso mecánico del registro tabular en la búsqueda de los puntos que permiten representar la gráfica de una función a partir de la expresión algebraica, conduce a los alumnos al cálculo de una infinidad de coordenadas aunque no haya necesidad de ello, como ha quedado demostrado en las situaciones 5 y 6 de 3º de ESO al tener que representar funciones afines.

- Existe una fuerte tendencia hacia la representación mediante un gráfico cartesiano por parte de los alumnos cuando se encuentran antes una función dada en el registro Algebraico, pese a que dicho proceso carezca de sentido como se ha evidenciado en la Situación 6 de la ingeniería de 3º ESO, cuyo diseño y elección de las coordenadas de posición de unos marcianos han hecho de dicha estrategia un método insuficiente.

5.5. Prospectiva

La tesis aquí presentada es la primera referencia que se tiene de un trabajo conjunto entre la Teoría de Situaciones y la Teoría de los Registros de Representación Semióticos para el diseño de situaciones que favorezca el trabajo y conversión entre los diferentes sistemas de representación a la vez que tienen lugar una aprehensión de los objetos matemáticos de manera significativa, integra y global.

Por ese motivo, muchos son los caminos que quedan por abordar desde esta perspectiva planteada y que se abren ante nosotros, exponiendo a continuación algunos de ellos:

I) Es necesario realizar un estudio y análisis de la práctica docente y la importancia que concede el profesorado a la utilización de varios registros de representación que aludan a un mismo objeto de conocimiento y a la necesidad de realizar conversiones entre ellos, así como de la formación y grado de competencia que tienen los mismos en este campo, mediante la preparación un cuestionario estructurado que permitiese valorar estas cuestiones.

II) Realizar un estudio exhaustivo desde la perspectiva de la Educación Personalizada del Aprendizaje, con el fin de hacer uso de lo aquí tratado cómo elemento en la personalización del aprendizaje, pues el hecho de presentar los objetos matemáticos a través de sus múltiples representaciones podría permitir atender las singularidades de aprendizaje de cada alumno, optando por unas u otras y coordinándolos entre sí en función de sus estilos cognitivos.

III) El diseño de nuestras ingenierías se ha centrado en unidades concretas de 2º y 3 º de ESO, por lo que sería conveniente diseñar una batería de situaciones que cubriese de manera general cada uno de los bloques de contenidos a trabajar en secundaria con el fin de favorecer la conversión entre registros en relación a cada uno de ellos.

IV) Deben buscarse las situaciones fundamentales que permitan al alumno percibir un estatuto claro del error, y que le ayuden a diferenciar los distintos tipos de errores. Nuestra intuición nos dice que tales situaciones habría que buscarlas probablemente en situaciones de tipo tecnológico en las que la precisión juega un papel importante, y que las situaciones más idóneas serían, probablemente, las de comunicación-validación.

V) Nuestro trabajo se ha desarrollado en los niveles de Educación Secundaria, por lo que querríamos indagar que efecto tendría la aplicación de situaciones fundamentales de este tipo en Educación Primaria, dado que el análisis de los manuales escolares y legislación de dicha etapa ha revelado que la preparación que recibe el alumno durante la Educación Primaria en lo que a coordinación entre registros de representación se refiere, esencial para un adecuado funcionamiento cognitivo del estudiante durante la Educación Secundaria donde estos procesos se acentúan y se hacen más necesarios debido al nivel de abstracción de los contenidos, es prácticamente inexistente.

La falta de coordinación no entorpece u obstaculiza toda la comprensión, pero si conlleva limitaciones en la transferencia de saberes, en su interiorización y su aplicabilidad.

ABSTRACT

DESIGN AND STUDY OF DIDACTICS SITUATIONS THAT ENHANCE WORK WITH SEMIOTICS REGISTERS

Introduction

What's behind the mistakes and difficulties that appear on the students to understand and study mathematics?are only related to the cognitive complexity of the content or such difficulties are also related to the possible ways to access the different mathematical objects?

The mathematical activity generated in many students learning difficulties that are not manifested in cognitive processes related to other areas of knowledge.

If something characterizes the processes of teaching and learning of mathematics is that, unlike what happens with the objects of study in the experimental sciences, the only way to access to them is through its different semiotic representations. The coordination among the different systems of representation that refer to the same mathematical concept, needs to move from one register to another (D'Amore, 1998, 2001, 2003, 2004, 2006; Duval, 1993, 1994, 1995, 1996, 2000, 2003, 2004, 2005, 2007, 2008, 2011, 2012; Godino, 2002, 2003, 2012, 2014; Kaput, 1989a, 1989b,1992, 1998; Radford, 1998, 2004a, 2004b, 2004c, 2006a, 2008,2009, 2011, 2013, 2014a).

Therefore, the treatments that can be realized within a given register and the conversion of one register into another, play an essential role in the grasp of the object and mathematical concepts. Through this work with representations, students give meanings to the objects of study and are able to understand the underlying mathematical structures, which is the main educational interest of this issue.

SYNTHESIS: Objectives and results

An adequate mathematical activity it must mobilize necessarily the articulation and conversion between the various register of representation by which we can make reference to the mathematical objects (Language Natura register, Numeric register, Tabular register, Figural register, geometric register, Algebraic register and Graph register). The use of several systems of representation is essential to the exercise and the development of the fundamental cognitive activities of the student, especially in the mathematical cognition, we should focus on the transformations that can be made between representations and within each one of them, and not so much in the semiotic representations employed.

With the purpose of analyzing to what extent these aspects are taken into account and particularly worked throughout the compulsory Secondary Education, we have specially based on the work of research which has been carried out by Raymond Duval in the field of the registers representation, some questions that can be made below are:

- **Question 1: How do these aspects are considered and, more importantly, worked along the compulsory education?**
- **Question 2: Is correct the treatment that the textbooks make of the transformations between different semiotic registers?**
- **Questión 3: The relation established by the students between an object and his representation, or the conversion between registers, are aspects covered by the diagnostic evaluation in order to detect the difficulties that produce and put an end solution?**

And more importantly,

- **Question 4: What types of situations can be designed and put in a way that favors the work and conversion between the different registers of semiotic representation?**

Our thesis is intended to give response to each one of these four questions, focusing on a priority basis in the last issue, aware that teachers need to know which are the best situations that lead to changes in what to our topic of study is concerned, as well as the characteristics which must be an effort to design training sessions on applicability in the school following the theory of Guy Brousseau.

For answer the first two issues raised in the objectives, has been carried out a study of the spanish legislative framework in the field of education and we have studied several textbooks of the Compulsory Secondary Education in order to consider whether their treatment of the transformations of the registers is adequate and sufficient.

The study has desk as both the articulation between semiotic registers, such as the appearance of certain phenomena that teaching in this process are generated by a lack of consistency between units that characterize each of them, are overlooked. They are not taken into account the difficulties and errors that the students show at the time of having to carry out conversions between representations, should be seen in any education improvement project.

For answer the third question have been analyzed diagnostic evaluations more relevant to national and international level: PISA, TIMSS and INCE.

The study of the evaluations has shown how the items that are not designed to detect difficulties and locks in the students in the conversion and use of representations. The activities are not oriented toward the analysis and improvement of educational practice in this sense, outside of what you'd expect from a true diagnostic evaluation, although all of them refer to their respective theoretical frameworks to aspects related to the use of the representations and the transformation of each other.

In response to the last question we have designed two didactic engineering based on the theory of didactics situations of Brousseau and the theory of the records of semiotic Representation of Duval.

Through a more than possible and beneficial symbiotic relationship between the two theories, the two didactic engineering has helped the student to encourage and carry out conversions between different records of existing representation based on the premises of the theory of situations, on the one hand, and to understand the mathematical concepts in a comprehensive manner through the theory of the registers of semiotic representation and the role of representations as didactic variables, on the other hand, since the registers are a necessary tool to design or analyze the situations faced by the students in a perspective of acquiring knowledge.

CONCLUSIONS

By combining the results of the study of the didactic transposition as for the observations of the engineering in the classroom, have developed a series of findings concerning the initial objectives raised in the thesis as well as to the assumptions in each of the chapters, which gives a ray of the treatment of the representations, their coordination and the difficulties in this underlying in the teaching of mathematics.

Based on an analysis of the qualifications obtained, by the students of the groups to which we have worked, and how they compare with each other, on the one hand, with the trajectory that have carried along the course, and, on the other hand, with the qualifications and track record of the students of the same course that does not have taken part in our intervention, we can conclude that the methodology used in the experimental group, which converge the theory of didactics situations and the theory of the registers of semiotic representation, has contributed in the acquisition of knowledge in a more meaningful manner and global.

The results of the analysis a priori and a posteriori have confirmed to us that it is possible to carry out with optimal results, both in the field of knowledge as to the motivation, teaching-learning processes in which is see favored the conversion between different registers of semiotic representation in which the construction of knowledge is done on a a-didactic.

BIBLIOGRAFIA

Alsina, C., Burgues, C. y Fortuny, J. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría. Matemáticas, cultura y aprendizaje 12.* Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Álvarez, V., Rodríguez, A., García, E., Gil, J., López, I., Romero, S., Padilla, M. T., García, J. y Correa, J. (2002). La atención a la diversidad en los centros de Enseñanza secundaria: estudio descriptivo en la provincia de Sevilla. *Revista de Investigación Educativa, 20(1)*, 225-245.

Amstrong, T. (2012). *El poder de la neurodiversidad.* Barcelona: Páidos.

Ansari, D. y Coch, D. (2006). Bridges over troubled waters: education and cognitive neuroscience. *TRENDS in Cognitive Sciences.*, *10 (4),* 146-151.

Área, M., Parcerisa, A. y Rodriguez, J. (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Barcelona: Grao.

Arnáiz, P. (2009). Análisis de las medidas de atención a la diversidad en la educación secundaria obligatoria. Monográfico. La educación ante la inclusión del alumnado con necesidades específicas de apoyo. *Revista de Educación, 349*, 203-224.

Arrieta, J., Álvarez, J.L. y González, A.E. (1997). El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con geoplanos. *Suma 25*, 71-86.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a cas environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 245–274.

Artigue, M. (2007, julio). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Conferencia Internacional de Educación Matemática,* Querétano, México.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 4*,13-20.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1989). *Funciones y gráficas. Matemáticas, cultura y aprendizaje 26*. Madrid: Síntesis.

Báez, R. y Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, *12*, *Número extraordinario*, 67-87.

Bagni, G.T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en el escuela secundaria. *RELIME, 7 (1)*, 5-23.

Balacheff, N. (1994a). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14 (1/2)*, 9-42.

Balacheff, N. (1994b). *Didactique computationnelle, évocation d'un projet de recherche*. Rennes : IRMAR.

Balacheff, N. (1994c). La transposition informatique. En Artigue M. et *al*. (eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, 364-370. Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria. *RELIME , 8 (3)*, 247-263.

Benítez, M., Gimenez, M. y Osicka, R. (2000). Las asignaturas pendientes y el rendimiento académico: ¿existe alguna relación? *Universidad Nacional del Nordeste; Argentina.* Recuperado el 16 de agosto de 2015 de http://www1.unne.edu.ar/cyt/humanidades/h-009.pdf.

Bkouche, R. (1991). *Faire des mathemátiques: le plaisir su sens*. Paris: Armand Colin.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(3)*, 219-236.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove?. *Educational studies in mathematics, 52(1)*, 3-28.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. (Tesis doctoral). *Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Booth, T. y Ainscow, M. (2000). Guía para la Evaluación y Mejora de la Educación Inclusiva (Índice de Inclusión): Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas. Traducción al Castellano Oficina regional de la UNESCO para América Latina y el Caribe/UNESCO.

Bosch, M. y Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19(1)*, 77–124.

Bosch, M. (2001). Un punto de vista Antropológico: La evaluación de los instrumentos de representación en la actividad matemática. En Luis C. Contreras (eds.) ... [et al.], *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.15-28). Huelva: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.

Briand, J. y Chevalier, M.C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* París: Hatier.

Brousseau, G (1975, marzo). L'analyse de la didactique des mathématiques, Trabajo presentado en *Colloques IREM de Bordeaux*, Bordeaux, Francia.

Brousseau, G (1976a). *Étude local des processus d'acquisition en situations scolaires*. Barcelona : Universidad de Barcelona.

Brousseau, G. (1976b). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Trabajo prensentado en *XXVIIème Rencontre de la CIEAEM*, Louvain, Bélgica.

Brousseau, G. (1983). Études de questions d'enseignement. *Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp. 183-226). Grenoble:I MAG.

Brousseau, G. (1984). Quelques conduites détérminantes en Didactique des Mathématiques. Trabajo presentado en *Colloques IREM de Bordeaux*, Bordeaux, Francia.

Brousseau, G (1986). *Théorisation des Phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. (Tesis doctoral). Universidad de Bordeaux I: Bordeaux.

Brousseau, G. (1989). Es obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En Bernarz, N. y Garnier, C, *Construction des savoirs* (pp. 41-63). Otawa : CIRADE.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz (Eds.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 65-95). Buenos Aires: Páidos.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000a). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista Educación Matemática, 12(1)*, 5-38.

Brousseau, G. (2000b). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire: l'étude de l'espace et de la géométrie. Recuperado el 15 de mayo de 2012: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_geometrie_03.pdf

Brousseau, G. (2006ª, julio). Mathématiques, ingenierie didactique et observation. Trabajo presentado en la *Conferencia en el PME*, Praga, Rep. Checa.

Brousseau, G. (2006b). L'ingenierie didactique en mathématiques. Trabajo presentado en *Conférences DAEST*, Université Bordeaux 2, Bordeaux, Francia.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1979). Algunos elementos del descubrimiento. En *L.*Shulman & E.Keislar (Eds.), *Aprendizaje por Descubrimiento. Evaluación Crítica*, (pp.115-132). México: Trillas.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, 42, 14(3)*, 353-369.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME, Número Especial 1*, 83-102.

Caro, P. (2009). La geometría nos rodea. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17*, 85-95.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y Educación*. Zaragoza: Edelvives.

Cascón, D. (2000). Análisis de las calificaciones escolares como criterio de rendimiento académico. Colegio Público Juan García Pérez, España. Recuperado de http://www3.usal.es./inico/investigacion/jornadas/jornada2/comunc/cl7

Castelnuovo E. (1963). *Geometría intuitiva*. Barcelona: Labor.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Castro, E y Castro, E. (1997). Representación y Modelización*. La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* 95-122*.* Barcelona: Horsori.

Chamorro, M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Chamorro, María del Carmen (2002). Métodos alternativos de investigación en didáctica de las matemáticas: la observación. En Murillo, Jesús; Arnal, Petra María; Escolano, Rafael; Gairín, José María (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 73-94). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Chamorro, M.C. (2003). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pearson Educación.

Chamorro, M.C. (2005a). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil*. Madrid: Pearson Educación.

Chamorro, M.C. (2005b). Matemática para la cabeza y las manos: la enseñanza de la geometría en la Educación Primaria. Conferencia presentada en *Ciclo de conferencias Organizado por la Editorial Proyecto Sur y el Centro Regional de Innovación y Formación (CRIF) "Las Acacias"*, Madrid, España.

Chamorro, M.C. (2007). Los registros de representación semiótica en la resolución de problemas matemáticos. *La competencia de la comunicación lingüística en las áreas del currículo*, 129-145. Ministerio de Educación, Secretaría General Técnica.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis. Texte paru dans les Actes du Séminaire pour l'année*, 190-200.

Chevallard, Y. (1996) Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x, 42*, 23-41.

Chevallard, Y. (1997). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires : Aique. Traducción de: *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir en- seigné*. París: La pensée sauvage. (2.a edición revisada, 1991.)

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22(1)*, 5-18.

Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *RELIME, 9(1)*, 65-84.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez Téllez, I. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *RELIME, 13 (2)*, 187-204.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libro de texto. *RELIME, 10 (1)*, 7-38.

Coxeter, H. S. M. (1971). *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley

D'Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: Dificultades cognitivas y obstáculos. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 15*, 63-78.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 27*, 51-76.

D'Amore B. (2003). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, *39 (1)*, 75-82.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *UNO, 35*, 90-106.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME, Número Especial 1*, 177-195.

D'Amore B., Radford L., Bagni GT. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva sociocultural de la matemática*. Colleción "Cuadernos del Seminario en educación". Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.

D'Amore, B. y Godino, L. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *RELIME, 10 (2)*, 191-218.

De la Rosa, A. (2000). El concepto de función en secundaria: Conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.), *Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario* (pp. 43-54). México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

Defior, F. (1996). *Las dificultades de aprendizaje, un enfoque cognitivo: lectura, escritura, matemáticas.* Malaga: Aljibe, D.L.

Dehaene, S. (2000, junio). Les bases cérébrales de l'intuition numérique. Texto presentado en la *167º conférence de l'Université de tous les savoirs*, París, Francia.

Dehaene, S. (2002a). El sentido numérico: Como la Mente Crea las matemáticas. *Boletín de la Asociación matemática Venezolana*, *9(1)*, 97-103.

Dehaene, S. (2002b). Le cerveau subliminal: imagerie cérébrale des opérations conscientes et inconscientes. *Le Lettre du Neurologue, 6(1)*, 18-19.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., and Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cogn. Neuropsychol, 20,* 487–506.

Dehaene, S. (2005). Les bases biologiques de l'aritmétique élémentaire. Pour la Science*, 330*, 70-76.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Kalogirou, P. y Kusniak A. (2011). Towards comprehensive theoretical model of students´ geometrical figure understanding and its relation with proof. *Proceedings VII of European Research in Mathematics Education CERME 7*, 598-607.

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 4*, 6-16.

Diaz, F. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* Mexico: McGraw Hill.

Díaz Lozano, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, M. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41,* (20-38).

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.1994)*, Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer A. P.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer A. P.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8(3)*, 24-41.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. y Belanger, M. (1987). Pedagogical Consideration Concerning the Problem of Representation. *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Duval, R., (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática,* (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5,* 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, E. (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une demarche géométrique. *Repères, 17*, 121-139.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques?. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 16(3),* 349-380.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer A. P.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. Trabajo presentado en la *24ª Conferencia Interncional del Grupo de Psicología en Educación Matemática*. Hiroshima: Japón.

Duval, R. (2003). *Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y...una quinta*. Universidad del Litoral Costa de Opâle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas superiores en el Desarrollo cognitivo.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R (2005). les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10*, 5 - 53.

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *RELIME, Número Especial 1*, 45-81.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2006c). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII ème Colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. (2006d). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME, 9(1)*, 143–168.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes od proof. En (Ed. P. Boero), *Theorems in schools,* 137-161. Rotterdam/Tapei: Sense Publishers.

Duval R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education. En (Eds. L. Radford, G. Schubring, F. Seeger), *Semiotics in Mathematics Education; Epistemology, History, Classroom and Culture,* 39-61. Rotterdam/Tapei: Sense Publishers.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar: os registros de representatcoes semioticas.* Sao Paolo: Proemeidtora.

Duval, R (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas: *Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales,* 14-17. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. y Godin, M (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Edel, R. (2003). El rendimiento académico: concepto, investigación y desarrollo. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 1(2),* 0. Red Iberoamericana de Investigación Sobre Cambio y Eficacia Escolar, Madrid, España.

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *UNIÓN, Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 1*, 17-35.

Escudero, I. (2003). La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. Ponencia presentada en *7° Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática*, Bajadoz, España.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *23*, 379-392.

Ekinova, H. (2010). Lacunes géométriques des futurs enseignants. *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, 15*, 97–118.

Farfán, R y García, M.(2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.)*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 489-494). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Fernández, T., Godino, J. D. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, *26 (42),* 39-63.

Friedrich, W. (1971). *Methoden der marxistisch-leninistischen Sozialforschung*. Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 14,* 1-35.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Versión ampliada de: An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27 (2)*, 2 -7.

Freudenthal, H. (1980) Major problems of mathematicd education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*. Conferencia plenaria del ICME4, Berkeley.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una porposición para la enseñanza de la Geometría en el Escuela Primaria*. (Tesis Doctoral). Centro de Investigación del IPN, México.

García , M. (2010). De cómo la teoría puede mejorar el conocimiento y dirigir la práctica escolar en atención a la diversidad. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales, 16*, 29-51.

García Moreno, A. y Guillén, G. (2008). Diseño de un estudio para el análisis de libros de texto de la enseñanza secundaria obligatoria en la comunidad valenciana: el caso de la geometría. En R. Luengo; B. Gómez; M. Camacho y L.J. Blanco (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de trabajo. XII Simposio de la SEIEM* (327-340)*.* Badajoz, España.

García, M. y Llinares, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurrículum ,10*, 103-115.

García G., Serrano, C. y Espitia (1997). *Hacia la Noción de Función como Dependencia y Patrones de la Función Lineal*. Cuadernos didácticos. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13(3)*, 295-332.

Gattegno, C. (1967). La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático. En C. GATTEGNO, *El material para la enseñanza de las matemáticas* (3-12)*.* Madrid: Aguilar

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 22(2.3),* 237-284.

Godino, J. (2003). *TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J., Batanero, C. Y Font, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Granada: Proyecto EDUMAT-MAESTROS.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30 (2),* 163-184.

Godino, J. D., Contreras, A. Y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26(1)*, 39-88.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias, 27(1)*, 59–76.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). *Systems of practices and configurations of objects and processes as tools for the semiotic analysis in mathematics education. Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education.* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/semiotic%20systems_%206july09.pdf

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects*. Educational Studies in Mathematics, 77 (2),* 247-265.

Godino, J. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros.* Granada: Proyecto EDUMAT-MAESTROS.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representacion and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour*, *17 (1)*, 1-4.

Gómez-Chacón, I. M., y Kuzniak, A. (2013). Spaces for Geometric Work: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. En *International Journal of Science and Mathematics Education, 13 (1),* 201-226.

Gómez-Chacón, I. M., y Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental génesis. *RELIME, Revista latinoamericana de investigación en matemática*, *17(3)*, 181-196*.*

González Marí, J.L. (2010) *Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos: consideraciones generales*. Universidad de Málaga. Recuperado de http://www.gonzalezmari.es/materiales_infantil_primaria_y_ESO._Consid eraciones_generales.pdf

González-Martín, A. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias, 23(1)*, 81-94.

Grupo Beta, (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* Madrid: Síntesis

Guerra, M. (2010). La Geometría y su Didáctica. *Innovación y experinecias educativas, 31,* 1-18. Recuerado de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_32/MATILDE_GUERRA_2.pdf

Gueudet, G., y Trouche, L. (2011). Développement de ressources pour l'enseignement et dispositifs de formation : éléments de réflexion à partir du dispositif français Pairform@nce. En A. Kuzniak et M. Sangaré, *Actes du colloque EMF 2009*, Dakar, Sénégal,

Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity in Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics. *Springer, 327*, 75–87.

Hart, K. M., Brown, M. L. y Küchemann D. E. (1981). *Chlidren's Understanding of Mathematics: 11-16*. Oxford, London and Northampon. John Murray.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding*. D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hitt, F. (1996). Sistemas Semióticos de Representación del Concepto de Función y su Relación con Problemas Epistemológicos y Didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt F. (2000). *Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática*. México: Departamento de Matemática Educativa.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 165- 178). Universidad de Granada.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2)*, 213- 223.

Howard-Jones, P. (2008). *Fostering creative thinking: coconstructed insights from neuroscience and education*. Bristol, UK: University of Bristol and ESCalate

Howard-Jones, P (2010). *Investigación neuroeducativa, neurociencia, educación y cerebro: de contextos a práctica*. Madrid: La Muralla.

IEA. (1995a). *User Guide for the TIMSS 199*5 *International Database*. Boston: Boston College.

IEA. (1995b). *TIMSS 1995 Mathematics Items. Released set for eight grade.* Boston: Boston College.

IEA. (1999a). *User Guide for the TIMSS 199*9 *International Database*. Boston: Boston College.

IEA. (1999b). *TIMSS 1999 Mathematics Items. Released set for eight grade.* Boston: Boston College.

IEA. (2003a). *User Guide for the TIMSS 2003 International Database*. Boston: Boston College.

IEA. (2003b). *TIMSS 2003 Mathematics Items. Released set for eight grade.* Boston: Boston College.

IEA. (2007a). *User Guide for the TIMSS 2007 International Database*. Boston: Boston College.

IEA. (2007b). *TIMSS 2007 Mathematics Items. Released set for eight grade.* Boston: Boston College..

IEA. (2011a). *User Guide for the TIMSS 199*5 *International Database*. Boston: Boston College.

IEA. (2011b). *TIMSS 2011 Mathematics Items. Released set for eight grade.* Boston: Boston College.

INCE. (2010).

Ismenia, R. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME, 1(1)*, 5-21.

Janvier, C (1987a). Translation Processes in Mathematics Education. Problems of representation. En *The teaching and learning of Mathematics*, (pp. 27-32). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Janvier, C (1987b). Conceptions and Representations: The circle as an Example. Problems of representation. In *The teaching and learning of Mathematics* (pp. 147-158). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Jiménez, M. (2000). Competencia social: intervención preventiva en la escuela. *Infancia y Sociedad, 24*, 21-48.

Kaput, J (1987a). Representations Systems and Mathematics. Problems of representation. En *The teaching and learning of Mathematics* (pp. 16-26). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J (1987b). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. Problems of representation. In *The teaching and learning of Mathematics* (159-196). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167- 194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17 (2)*, 266-281.

Kaufmann L, Vogel SE, Starke M, Kremser C, Schoke M. (2008). Numerical and non-numerical ordinality processing in children with and without developmental dyscalculia: evidence from fMRI. *Cogn Dev*, *24*, 486-94.

Knuth, E. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(4)*, 500-508.

Kospentaris, G. Y Spyrou, P. (2008). Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-desptive level. En *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, v 13*, 133-157.

Kuzniak, A. (2005). Diversité des mathématiques enseignées "ici et ailleurs": l'exemple de la géométrie. En Copirelem (Ed), *Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs* (pp. 47–56). Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d’un cadre théorique pour l’enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6(2)*, 167–188.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du trtavail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES*, *15*, 75–95.

Lacasta, Eduardo (1998). Funcionamiento didáctico de los gráficos de funciones. En Pascual, José Ramón (Ed.), *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 135-154). Pamplona: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Lacasta, E. y Rodríguez, M. (2001 septiembre). El gráfico cartesiano de funciones como "medio" material: el paso de la representación gráfica a la analítica y el problema de las escalas. Comunicación presentada en el *V Simposio Nacional de la SEIEM*, Almería, España.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2001). A meta study on ic technologies in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed). *Proccedings of the mathematics education,1*, (pp. 111-122). Dordrecht: Kluwer A. P.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation. En A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-271). Dordrecht: Kluwer A. P.

Lee K., Lim Z. Y., Yeong S. H., Ng S. F., Venkatraman V., Chee M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: neuroanatomical correlates. *Brain Res. 1155,* 163–171.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60(1),* 1-64.

Lemonidis, C. (1991). Analyse es réalisation d’une expérience d’enseigment de l’ homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11(23)*, 295-324.

Loomis E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

López-Varona, J.A. y Moreno-Martínez, M.L. (1997). *Resultados de Ciencias. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*. Madrid: INCE/ MECD.

Markovits, Z., Eylon, B. S. y Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6(2)*, 18-24.

Markovits, Z., Eylon, B. S., y Bruckheimer, M.(1988). Difficulties students have with the function concept. En A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra* (pp. 43-60). Reston, VA: NCTM.

Martí, E. y Pozo, J.I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje, 90*, 11-30.

MEC. (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, *de Ordenación General del Sistema Educativo español*. Boletín Oficial del Estado, 238, de 4 de octubre de 1990.

MEC. (2001). Real Decreto 937/2001, de 3 de agosto*, por el que se modifica el Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, modificado por el Real Decreto 1390/1995, de 4 de agosto, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial del Estado, 215, de 7 de septiembre de 2001.

MEC. (2002). Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, *de Calidad de la Educación*. Boletín Oficial del Estado, 307, de 24 de diciembre de 2002.

MEC. (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero*, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial del Estado, 35, de 10 de febrero 2004.

MEC. (2006a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre*, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial del Estado, 5, de 5 de enero 2007.

MEC. (2006b). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria*. Boletín Oficial del Estado, 293, de 8 de enero 2007.

MEC. (2007). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio*, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria.* Boletín Oficial del Estado, 173, de 20 de julio de 2007.

MEC. (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, *para la mejora de la calidad educativa.* Boletín Oficial del Estado, 295, de 10 de diciembre de 2013.

MEC. (2014a). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Boletín Oficial del Estado, 52, de 1 de marzo de 2014.

MEC. (2014b). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Boletín Oficial del Estado, 3, de 3 de enero de 2015.

Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, *19(3)*, 5-30.

Montessori, M. (1937). *El Método de la Pedagogía Científica*. Barcelona: Araluce.

Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., González, E., Chrostowski, S. y O'connor, K. (2002). *TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003*. Chestnut Hill, MA: Boston College. Traducción de M. Angstadt (2002), Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003. Madrid: INCE/MECD.

NCTM. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*.

Nieto, J.M. (2011). *Neurodidáctica.* Madrid: CSS

OCDE/ Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE). (2000). *Proyecto PISA. La medida de los conocimientos y des- trezas de los alumnos: Un nuevo marco para la evaluación*. Madrid: INCE/MEC

OCDE/ Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE). (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: INCE/MEC

OCDE/ Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) (2006). *PISA 2006 Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE. Informe español*. Madrid: INCE/MEC

OCDE/ Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) (2009). *PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe español*. Madrid: INCE/MEC

OCDE/ Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) (2012). *Marcos y prueba de Evalaución de Pisa 2012: Lectura, ciencias y matemáticas.* Madrid: INCE/MEC

Papalia, D.E., Wendkos, S. Y Duskin, R. (2005). *Desarrollo humano* (9ª edición). México: McGraw-Hill.

Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos.* Barcelona: Graó.

Peirce, C.S. (1978). *The Collected Papers of Charles S. Peirce,* Vols 1-2. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Penalva, M.C. y Torregrosa, G. (2001). Representación y aprendizaje de las Matemáticas. Scripta in memoriam. *Homenaje al profesor Jesús Rafael de Vera Ferre. Algunas reflexiones a propósito de la enseñanza de la lengua oral* (pp. 650–658). Alicante: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Gutierres, A.; Boero, P. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam,The Netherlands: Sense

Piaget, J. (1948). *La representation de l'espace chez l'enfant*. Paris: PUF

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique.* Traducción: Introducción a la epistemología genética. Mexico: Páidos.

Piaget, J. (1968). *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchatel: Editorial Delachaux et Niestlé. Traducción: La formación del símbolo en el niño. México: Editorial Fondo de Cultura Económica.

Pica, P., Dehaene, S., Izard, V. y Spelke, E. (2008). Comment les nombres se répartissent dans l'espace. *M/S*, *12 (24),* 114-116.

Pluvinage, F. (2005). Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probalidades. *RELIME, 8 (1)*, 91-99.

Rabardel, P. (1999a). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En Bailleul M. (Ed), *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques ; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (203-213). Caen : IUFM de Caen.

Rabardel, P. (1999b). La composante ergonomique des formations professionnelles et techniques. *Technologies et formations, 82*, 4-7.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35(1)*, 277-302.

Radford, L. (2004a). *Semiótica cultural y cognición*. Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla, Chiapas México. Recuperado de http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf.

Radford L. (2004b). *The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism.* Plenary Lecture presented at the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference, Uppsala, Sweden. Recuperado de http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML

Radford, L. (2004c). Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *RELIME*, *7(2)*, 157-170.

Radford. L (2006a). Semiótica y educación matemática: introducción. *RELIME, Número Especial 1*, 7-22.

Radford. L (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME*, *Número Especial 1*, 103-129.

Radford, L. (2008). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. *PNA*, *3(1),* 1-18.

Radford, L. (2009). Astrazione e generalità matematica: alcune considerazioni semiotiche [Abstraction and mathematical generality: some semiotic remarks]. En B. D'Amore (Ed.), *Matematica, stupore e poesia [Mathematics, wonder and poetry]* (146-154). Firenze: Giunti.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1 – 27.

Radford, L. (2013). On semiotics and education. *Éducation et Didactique*, *7(1),* 185-204.

Radford, L. (2014a). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *85*, 405-422.

Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132-150.

Radford, L y Bardini, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38 (5)*, 507-530.

Radford, L., D'Amore, B. & Bagni, G. (2007). Obstáulos Epistemológicos y Perspectiva Socio-Cultural de la Matemática. *Colección Cuadernos del Seminario en Educación*, *10*, 5-25.

Radford. L y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *RELIME, 12(2),* 215-250.

Rico, L. (1996) Pensamiento Numérico. En Hitt, F. (edt.) Investigaciones en Educación Matemática. XX Aniversario del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (pp. 27-54). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Rico, L (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Jaen: Universidad de Jaén. Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico.

Saussure, F. (2006). *Curso de lingüística general*. Charles Bally y Albert Sechehaye. Madrid : Akal, D.L. Traducción de: Saussure, F. (1973). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot.

Sfard, A. (1989). Transition from Operational to Structural Conception: The notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII*, 151–158.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical Conceptions. Reflections on Processes and objects as different side on the same coin. *Educational Studies in mathematics, 22(4),* 1-32.

Sierpinska, A. (1989a). Sur un programe de recherche lié a la notion d'obstacle épistemologique. *En N. Berdnaz y C. Garnier (Eds.), Constructions de savoirs: Obstacles y Conflicts*, (pp. 30-148). Otawa, Canada: Agence d'Arc.

Sierpinska, A. (1989b). On 15-17 years old students´ conceptions of functions, iteration of functions and attractive points. *Preprint*, 454. Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Solar, H., Azcárate, C.y Deulofeu, J. (2009). Competencia de modelización en la interpretación de gráficas funcionales. En M.J. González, M. T González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 499-510). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Spivak, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

Stavy, R., y Babai, R. (2010). Overcoming intuitive interference in mathematics: insights from behavioral, brain imaging and intervention studies. *ZDM, 42(6),* 621-633.

Steinbring, H. (1991). Mathematics in Teaching Processes The Disparity between Teacher and Student Knowledge. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 11(1)*, 65-107.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12 (2),* 151-169.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathemat- ical Thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer A. P.

Tall, D. (1994). A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics. Comission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Toulouse, France.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus, en A.J. En Bishop y otros (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer A.P.

Tall, D. (1998). Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilites and Realities. En C.Alsina y otros (Eds.), *ICME 8 (1996), Proceedings* (pp. 65-82). Sevilla: S.A.E.M.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *RELIME, 10(2)*, 275-300.

Trouche, L. (2003). Construction et conduit des *instruments* dans les apprentissages mathématiques : nécessité des *orchestrations*. Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches Université Paris VII, novembre 2003**.** Edition de l'IREM, Université Montpellier II.

Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques: Quels usage pour quells aprentissasges?. *Educational Studies in Mathematics, 55,* 181-197.

Van Hiele, P.M y Van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. En FREUDENTHAL, H. (ed.), *Report on methods of initiation into georrtetry* (pp. 67-80). Groningen: J. B. Wolters.

Van Hiele, P.M. (1986). *Strucutre and insight. Atheory of mathematic education.* Londres: Academic Press.

Vázquez, A. (2000). *Análisis de los datos del tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) desde la perspectiva del sistema educativo español. Memoria de investigación*. Madrid: MEC/CIDE.

Vecino F. (1997). La representación del espacio en el niño. *UNO, Revista en didáctica de las matemáticas, 12*, 93-105.

Vecino F. (2001). La enseñanza de la geometría en la Educación Primaria. *Chamorro M. C. (Coord.) (2001): Dificultades del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: M.E.C.D.

Vecino, F. (2004). La consideración de distintas representaciones geométricas y su influencia en la proposición de una didáctica coherente de la Geometría. En Chamorro, M.C (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 9-36). Madrid: MEC

Vecino, F. (2005). Representación del espacio en el niño. El espacio como modelo de desarrollo de las distintas geometrías. En Chamorro, M.C (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil* (pp. 255-277). Madrid: Pearson Educación.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En Lesh, R. and Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Verganud, G. (1990).Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10(2,3)*, 133-170.

Verganud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of mathematical behavior, 17 (2)*, 167-181.

Vilella, J. (2001). La enseñanza de la geometría. Revista Pedagógica Páginas para el Docente, *2(21)*. Recuperado de http://www.aique.com.ar

Villarroel, S y Sgreccia, N. (2011).Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Unión, Revista en Didáctica de las matemáticas, 78,* 73-94.

Villain, V. (1995) Le transformaziones Geometriche Nella Scuola Secundaria Superiore. *L'insegnamiento della Matemática e delle Scienze Integrate, 18A-18B (6),* 669-688.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. *En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking* (pp. 65-8). Dordrecht: Kluwer A. P.

LIBROS DE TEXTOS DE SECUNDARIA

Álvarez, Mª Dolores; Marqués, Miguel; Miranda, Ana Yolanda; Morillo, Francisco; Parra, Susana; Redondo, Manuela; Redondo, Raquel; Sánchez, Mª Teresa; Santos, Teresa. *Matemáticas 1º ESO*. Serie La Casa del Saber (Ed. 2007). Madrid: Ed. Santillana.

Álvarez, Mª Dolores; Marqués, Miguel; Miranda, Ana Yolanda; Morillo, Francisco; Parra, Susana; Redondo, Manuela; Redondo, Raquel; Sánchez, Mª Teresa; Santos, Teresa. *Matemáticas 2º ESO*. Serie La Casa del Saber (Ed. 2008). Madrid: Ed. Santillana.

Álvarez, Mª Dolores; Hernández, Joaquín; Miranda, Ana Yolanda; Moreno, Mª Rosario; Parra, Susana; Redondo, Manuela; Redondo, Raquel; Sánchez, Mª Teresa; Santos, Teresa; Serrano, Esteban. *Matemáticas 3º ESO.* Serie La Casa del Saber (Ed. 2007). Madrid: Ed. Santillana.

Álvarez, Mª Dolores; Hernández, Joaquín; Miranda, Ana Yolanda; Moreno, Mª Rosario; Parra, Susana; Redondo, Manuela; Redondo, Raquel; Sánchez, Mª Teresa; Santos, Teresa; Serrano, Esteban. *Matemáticas 4º ESO*. *Opción A* Serie La Casa del Saber (Ed. 2008). Madrid: Ed. Santillana.

Álvarez, Mª Dolores; Hernández, Joaquín; Miranda, Ana Yolanda; Moreno, Mª Rosario; Parra, Susana; Redondo, Manuela; Redondo, Raquel; Sánchez, Mª Teresa; Santos, Teresa; Serrano, Esteban. *Matemáticas 4º ESO*. *Opción B.* Serie La Casa del Saber (Ed. 2008). Madrid: Ed. Santillana.

Colera Jiménez, José; Gaztelu Albero, Ignacio. *Matemáticas 1* (Ed. 2008). Madrid: Ed. Grupo ANAYA, S.A.

Colera Jiménez, José; Gaztelu Albero, Ignacio. *Matemáticas 2* (Ed. 2009). Madrid: Ed. Grupo ANAYA, S.A.

Colera Jiménez, José; García Pérez, Rosario; Gaztelu Albero, Ignacio; Oliverira González, Mª José. *Matemáticas 3.* (Ed. 2008). Madrid: Ed. Grupo ANAYA, S.A.

Colera Jiménez, José; Martínez Alonso, Mª Del Mar; Gaztelu Albero, Ignacio; Oliverira González, Mª José. *Matemáticas 4. Opción A. 2* (Ed. 2009). Madrid: Ed. Grupo ANAYA, S.A.

Colera Jiménez, José; Martínez Alonso, Mª Del Mar; Gaztelu Albero, Ignacio; Oliverira González, Mª José. *Matemáticas 4. Opción B. 2* (Ed. 2009). Madrid: Ed. Grupo ANAYA, S.A.

Vizmanos Buelta, José Ramón; Bujanda Jauregui, Mª Paz; Mansilla Romo, Serafín; Anzola González, Máximo. *Matemáticas, Pitágoras 1º ESO*. Proyecto Conecta 2.0 (Ed. 2012). Madrid: Ediciones SM.

Alcaide Guindo, Fernando; Vizmanos; Mansilla Romo, Serafín; de los Santos Mª Isabel. *Matemáticas, Pitágoras 2ª ESO*. Proyecto Conecta 2.0 (Ed. 2011). Madrid: Ediciones SM.

Anzola, González, Máximo; Vizmanos Buelta, José Ramón; Bellón, Manuel; Hervás, Juan Carlos. *Matemáticas, Pitágoras 3º ESO*. Proyecto Conecta 2.0 (Ed. 2012). Madrid: Ediciones SM.

Alcaide Guindo, Fernando; Vizmanos; Hernández Gómez, Joaquín; Serrano Marugán, Esteban; Moreno Warleta, María. *Matemáticas A, Pitágoras 4º ESO*. Proyecto Conecta 2.0 (Ed. 2012). Madrid: Ediciones SM.

Alcaide Guindo, Fernando; Vizmanos; Hernández Gómez, Joaquín; Serrano Marugán, Esteban. *Matemáticas B, Pitágoras 4º ESO*. Proyecto Conecta 2.0 (Ed. 2012). Madrid: Ediciones SM.

LIBROS DE TEXTOS DE PRIMARIA

Carrasco Mira, Alfredo: Rodríguez Pedrero, Celestino; Porras Carrasco, Genaro; Arribas Alonso, Carlos; Puras Puras, Yolanda; Armendáriz Pérez, Gloria; Román González, Juan Antonio; Carrón Moreno, Esperanza; Blázquez Gil, Carmen;Celemón Torrijos, María; Alarcón Castillo, Mercedes; Gómez GiraldezMª Generosa Luz; Ferreiro Olica, Joaquín. *Globalizado 1º Primaria.* Proyecto Mundo Agua (Ed. 2007). Madrid: Edelvives.

Carrasco Mira, Alfredo: Rodríguez Pedrero, Celestino; Porras Carrasco, Genaro; Arribas Alonso, Carlos; Puras Puras, Yolanda; Armendáriz Pérez, Gloria; Román González, Juan Antonio; Carrón Moreno, Esperanza; Blázquez Gil, Carmen;Celemón Torrijos, María; Alarcón Castillo, Mercedes; Gómez GiraldezMª Generosa Luz; Ferreiro Olica, Joaquín. *Globalizado 2º Primaria.* Proyecto Mundo Agua (Ed. 2007). Madrid: Edelvives.

Arribas Alonso, Carlos; Román González, Juan Antonio; Amant Ruíz, José; Navajas Serrano, Mª Dolores; Armendáriz Pérez Gloria. *Matemáticas 3º Primaria*. Proyecto Mundo Agua (Ed. 2008). Madrid: Edelvives.

Arribas Alonso, Carlos; Román González, Juan Antonio; Amant Ruíz, José; Navajas Serrano, Mª Dolores; Armendáriz Pérez Gloria. *Matemáticas 4º Primaria*. Proyecto Mundo Agua (Ed. 2008). Madrid: Edelvives.

Arribas Alonso, Carlos; Román González, Juan Antonio. *Matemáticas 5º Primaria*. Proyecto Mundo Agua (Ed. 2009). Madrid: Edelvives.

Arribas Alonso, Carlos; Román González, Juan Antonio; Puras puras, Yolanda. *Matemáticas 6º Primaria*. Proyecto Mundo Agua (Ed. 2009). Madrid: Edelvives.

Pérez Madorrán, Emma; Marsá Lafarge, Martina; Díaz Santos, Cristina; Ferri Sebastián, M.ª Trinidad; Hidalgo del Cid, Otilia. *Matemáticas 1º*. Proyecto Una a Una (Ed. 2011). Madrid: Anaya.

Pérez Madorrán, Emma; Marsá Lafarge, Martina; Díaz Santos, Cristina; Ferri Sebastián, M.ª Trinidad; Hidalgo del Cid, Otilia. *Matemáticas 2º*. Proyecto Una a Una (Ed. 2011). Madrid: Anaya.

Gaztelu Albero, Ignacio; Ferrero de pablo, Luis. *Matemáticas 3º*. Proyecto Abre la puerta (Ed. 2012). Madrid: Anaya

Gaztelu Albero, Ignacio; Ferrero de pablo, Luis. *Matemáticas 4º*. Proyecto Abre la puerta (Ed. 2012). Madrid: Anaya

Gaztelu Albero, Ignacio; Ferrero de pablo, Luis; Martín Martín, Pablo. *Matemáticas 5º*. Proyecto Abre la puerta (Ed. 2009). Madrid: Anaya

Gaztelu Albero, Ignacio; Ferrero de pablo, Luis; Martín Martín, Pablo. *Matemáticas 6º*. Proyecto Abre la puerta (Ed. 2012). Madrid: Anaya

Bernabeu Ruíz, Javier; Carvajal, Ana; Garín Muñoz, Mercedes; Puente Villacañas, Pilar; Téllez García, Mª José; Fernández Miranda, Mª Antonia;Herrero Parral, Nieves; Navarro Elbal, Alberto; Morales, Francisco; Vidal González, José Manuel; López, Sergio; Martín Fernández, Gregoria; Pérez Francisco, Mª Nila. Matemáticas 1 Primaria. Proyecto Savia (Ed. 2014). Madrid: Ediciones SM.

Bernabeu Ruíz, Javier; Bellido, Aurora; Garín Muñoz, Mercedes; Hidalgo García, Juan Miguel; Morales, Francisco; Vidal González, José Manuel; Moratalla de la Hoz, Vicente. Matemáticas 2 Primaria. Proyecto Savia (Ed. 2015). Madrid: Ediciones SM.

Bernabeu Ruíz, Javier; Garín Muñoz, Mercedes; Rodríguez Suárez, Mónica; Navarro Elbal, Alberto; Morales, Francisco; Vidal González, José Manuel; Pérez Francisco, Mª Nila; Aranzubía, Valvanera; Carvajal, Ana. Matemáticas 3 Primaria. Proyecto Savia (Ed. 2014). Madrid: Ediciones SM.

Bernabeu Ruíz, Javier; Garín Muñoz, Mercedes; Sánchez, Paloma; Morales, Francisco; Vidal González, José Manuel; Pérez Francisco, Mª Nila; Hidalgo García, Juan Miguel; Moratalla de la Hoz, Vicente; Francisco Cabello, Martín. Matemáticas 4 Primaria. Proyecto Savia (Ed. 2015). Madrid: Ediciones SM.

Bernabeu Ruíz, Javier; Garín Muñoz, Mercedes; Peña Romano, Miriam; Navarro Elbal, Alberto; Morales, Francisco; Vidal González, José Manuel; Pérez Francisco, Mª Nila; González Sánchez, Yolanda;Navarro, Angels; Medina Magdaleno, Gabriel; Macías Gil, Cristobal; Ramírez Uclés, Rafael; de Armas, Zoraida; Oro Pradera, Begoña. Matemáticas 5 Primaria. Proyecto Savia (Ed. 2014). Madrid: Ediciones SM.

Bernabeu Ruíz, Javier; Garín Muñoz, Mercedes; González Sánchez, Yolanda; Morales, Francisco; Vidal González, José Manuel; Pérez Francisco, Mª Nila; Hidalgo García, Juan Miguel; Moratalla de la Hoz, Vicente; Nieto, Miguel; Ramírez Uclés, Rafel; Pérez, Begoña. Matemáticas 6 Primaria. Proyecto Savia (Ed. 2015). Madrid: Ediciones SM.