Aplicación de MAPLE a la Investigación

por

Ignacio Luengo Velasco

MAPLE es un sistema de cálculo simbólico que por sus características de potencia y flexibilidad se ha convertido en una herramienta matemática de primera magnitud. Dentro de MAPLE hay decenas de paquetes de programas para las más variadas áreas de Investigación en Matemáticas, como por ejemplo combinatoria, teoría de grupos, teoría de números, geometría algebraica y geometría diferencial. Esto da una idea de su extensión y uso en la investigación.

En esta nota nos vamos a limitar a ilustrar su utilidad a través de nuestra propia experiencia. En los problemas geométricos en los que yo he trabajado se llega a menudo a una situación en la que, para verificar una cierta propiedad geométrica, hay que hacer un cálculo concreto, normalmente con un conjunto de polinomios. El uso que hacemos de MAPLE es como una especie de supercalculadora con muy poca programación y gran cantidad de datos.

Por supuesto esta no es la única ni la principal situación en la que MAPLE puede ser de gran utilidad. En general se puede decir que todo cálculo susceptible de ser realizado de manera explícita, puede hacerse con MAPLE, aunque en algunas ocasiones, la complejidad de la estructura de datos u otras razones dificultan su realización, o aconsejan echar mano de otros programas más específicos.

Al menos para los que usamos estos programas como supercalculadora, el ordenador se ha convertido en una especie de laboratorio. El estudio de un número significativo de ejemplos concretos puede permitir descubrir fenómenos nuevos, a los que convenientemente elaborados, se tratará de una explicación y, en su caso, formulación precisa de los posibles resultados.

Este enfoque experimental de las Matemáticas no es por supuesto nuevo, pero hasta hace poco estaba limitado a áreas muy específicas como las relacionadas con el cálculo numérico. La novedad consiste en que gracias a los paquetes de cálculo simbólico ese enfoque se está extendiendo a un buen número de campos de las Matemáticas en los que ya ha demostrado su eficacia.

En el estudio de puntos singulares de variedades algebraicas se asocian a cada punto P una serie de invariantes algebraicos, geométricos y topológicos. El principal invariante topológico que se asocia a un punto singular P de una hipersuperficie V de ecuación $f(x) = 0$, es el número de Milnor $\mu(V, P)$ que es, salvo el signo, la característica de Euler-Poincaré de la fibra de la fibración de Milnor de f en P menos 1. Para singularidades aisladas este invariante (V, P) juega un papel similar al género para superficies de

Riemann. Si se fija el género g de una superficie de Riemann se fija la topología y se puede definir el espacio de Moduli de superficies de Riemann (o curvas algebraicas) de género g, como el espacio de las estructuras de superificie de Riemann en una superficie topológica de género g dado. De la misma forma, fijado el número de Milnor μ existe un "espacio de moduli local" S que es el estrato μ-constante de la deformación universal del germen (V, P).

Para curvas planas este espacio S es no singular. Este hecho se puede probar de diferentes maneras y cada una de ellas refleja una serie de propiedades útiles que son propias de la dimensión $n = 2$. De hecho en [3] nosotros demostramos que S es singular para $n \geq 3$.

La parte esencial de la demostración consiste en dar un método efectivo para calcular las ecuaciones locales del espacio S, para determinadas singularidades de superficies en C^3. Estas ecuaciones locales son polinomios que se obtienen por un procedimiento recursivo y cuyo "tamaño" crece de manera exponencial. Más concretamente los ejemplos más sencillos con S singular son superficies de grado 10, y en este caso los polinomios que determina S tienen más de 50 variables y un cálculo completo de los polinomios está fuera del alcance de MAPLE. Sin embargo, un análisis más detallado del algoritmo de cálculo permite calcular la parte lineal de los polinomios, es decir, el espacio tangente a S. Este es el punto clave que permite predecir qué singularidades van a tener S singular. A partir de aquí un proceso de eliminación en el anillo local correspondiente al punto P permite concluir usando MAPLE que S es singular en el punto correspondiente a P.

MAPLE es también útil en otros problemas geométricos en los que se usa la resolución de singularidades para reducirlos a un cálculo explícito en un anillo de polinomios. Un problema de este estilo aparece en el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas sobre los complejos.

Sea $V(z)$ un campo de vectores en C^n. La integración de la ecuación diferencial correspondiente $(z' = V(z))$ (1) es un proceso esencialmente trascendente, incluso si los coeficientes de V son algebraicos (es decir son polinomios en z). No obstante en el estudio de las soluciones próximas a un punto singular del campo $(V(P) = 0)$ hay una parte algebro-geométrica, y es la determinación de las separatrices. Una separatriz del campo V en P es una curva invariante (i.e. solución de la ecuación (1)) tal que $\gamma \cup P$ es una curva analítica en P. Para un campo de vectores V la existencia de separatrices en P tiene consecuencias importantes, porque de algún modo "modera" la dinámica de la ecuación (1) en un entorno de P. Su estudio fue iniciado en 1854 por Briot y Brouquet. En 1982 Camacho y Sad [1] demostraron para campos de vectores en C^2 que por cada punto singular pasa al menos una separatriz analítica. En [2] nosotros demostramos que para $n \geq 3$ existen campos de vectores holomorfos sin separatrices en C^n. Encontramos un conjunto $W \subset H$, en el espacio H de campos polinomiales de multiplicidad mayor o igual que 2 tal que los campos de W no tienen separatrices ni analíticas ni formales. El hecho que W sea localmente cerrado, es decir, dado por ecuaciones e inecuaciones significa que $dim(W) \geq (dim(H) - 10)$ si $W \neq \emptyset$ pero W puede ser vacío. En este punto interesante por otras razones encontrar un argumento geométrico que garantice $W \neq \emptyset$, además sería la forma más elegante de concluir la demostración. Desgraciadamente hasta el momento no hemos sido capaces de encontrar dicho argumento y en [2] concluimos la demostración de que $W \neq \emptyset$ exhibiendo una solución concreta de las ecuaciones implícitas que definen W. En este caso se llega a una situación parecida a la del problema anterior, las ecuaciones que definen W son polinomios en muchas variables, que en este caso se pueden calcular completamente, pero por su tamaño no hay ninguna esperanza de que un sistema de cálculo de bases de Gröbner pueda encontrar las soluciones. En [2] usamos un estudio geométrico de la resolución de los campos por explosiones para reducir las ecuaciones de W a otras más sencillas que se pueden calcular y resolver usando MAPLE.

Para acabar esta nota, una anécdota que ilustra bien alguna de las características de MAPLE. Hace unos días, ya muy tarde, me encontré a un compañero que trabaja en Geometría Algebraica, absorto ante la pantalla de un ordenador. Al interesarme por lo que hacía, me comentó que llevaba varias horas haciendo un programa de Fortran. " ¿Para qué necesitas programar en Fortran?", pregunté. Me explicó que necesitaba calcular unas clases de Chern para corroborar, en un intervalo razonable del género, una conjetura relacionada con el Lema de Clifford para fibrados de rango superior en curvas. El cálculo de las clases de Chern se reduce a unas sumas de números combinatorios, por lo que le expliqué que con MAPLE eso se podía hacer en dos líneas, escribiéndolo más o menos como escribiría la fórmula en un papel.

Así que con una pequeña ayuda, unos pocos minutos después de haber oído hablar de MAPLE, había calculado dichas sumas en un rango amplio del género. Más aún, aprovechando las facilidades de MAPLE para el cálculo de sumas indefinidas, es decir, de la función generatriz, obtuvo directamente la correspondiente función hipergeométrica generalizada que expresaba dichas sumas.

Volví a pasar por el mismo lugar una hora más tarde. Había verificado la conjetura hasta el género 300 y se encontraba investigando "experimentalmente" las propiedades de los valores especiales de las funciones hipergeométricas que le permitieran llegar a una demostración de su conjetura.

Ignacio Luengo Velasco

E-mail: Iluengo@mat.ucm.es

Referencias

[1] CAMACHO, C. Y SAD, P., *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. Math, **115**, 579-595 (1982).

[2] GÓMEZ-MONT, X. Y LUENGO, I., *Germs of holomorphic vector fields in C^3 without a separatrix*, Invent. Math., **109**, 211-219 (1992).

[3] LUENGO, I., *The μ-constant stratum is notsmooth*, Invent. Math., **90**, 139-152 (1987).