Rev. Acad. Canar. Cienc., XVIII (Núms. 1-2), 167-183 (2006) (publicado en agosto de 2007)

IMPORTANCIA DEL ÁLGEBRA CONMUTATIVA EN LA TEORÍA DE CURVAS ALGEBRAICAS

Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra. Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense[1]
romosan@mat.ucm.es

Resumen

Nuestro objetivo es demostrar que el Álgebra Conmutativa es una de las piedras fundamentales de la moderna Geometría Algebraica y más concretamente de la teoría de curvas algebraicas.

Abstract

Our objective is to show that the Commutative Algebra is one of the fundamental stone of the modern Algebraic Geometry and more concretely about the theory of algebraic curves

Introducción

El Álgebra conmutativa es una de las piedras fundamentales de la moderna Geometría Algebraica y más concretamente de la teoría de curvas algebraicas. Proporciona los instrumentos para esta rama de las Matemáticas, de forma más o menos análoga a como el Análisis Diferencial proporciona los instrumentos para la Geometría Diferencial. Nuestro objetivo es justificar esta afirmación y con el fin de clarificar las ideas dividiremos el trabajo en cinco partes:

1) Influencia del Álgebra en las distintas ramas matemáticas.
2) Simbiosis Álgebra Conmutativa - Geometría Algebraica
3) Desarrollo del Álgebra Conmutativa a finales del siglo XIX. Avances en la teoría de las curvas algebraicas afines.
4) Los orígenes del Álgebra Local
5) Puntos singulares en las curvas algebraicas afines

[1] Conferencia impartida en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna gracias a la colaboración del Centro de Investigación de Matemáticas de Canarias C.I.M.A.C. y de la U.D.I. de Álgebra de la ULL.

1) Influencia del Álgebra en las distintas ramas matemáticas

En primer lugar nos referiremos brevemente al concepto del Álgebra. El Álgebra es una ciencia en un progreso de elaboración constante y por consiguiente, como todo lo vital, no puede delimitarse con una definición. Cada conquista amplía sus límites, establece nuevas conexiones con otras ramas de la Matemática, hace por tanto más difusa la línea que las separa y como consecuencia, modifica el concepto que de ella puede formarse.

La palabra "álgebra " proviene del nombre de un tratado del matemático y astrónomo Mohamed Al-Kharizmi, que vivió en el siglo IX. Su tratado sobre álgebra llevaba por título al-jebr w'almugabala, que significa: " transposición y eliminación " . Por transposición se entiende la transferencia de términos al otro miembro de la ecuación, y por eliminación la cancelación de términos iguales en ambos miembros.

La palabra árabe al-jebr se convirtió en " álgebra " al transcribirla al latín, mientras que al-mugabala fue desechada, lo cual explica el término moderno "álgebra " para esta disciplina.

El origen de este término responde muy bien al contenido real de la ciencia misma. El Álgebra es en esencia la doctrina de las operaciones matemáticas consideradas formalmente desde un punto de vista general, con abstracción de los números concretos y sus problemas están relacionados fundamentalmente con las reglas formales para la transformación de expresiones y la resolución de ecuaciones.

Más tarde, Omar Khayyam definió el Álgebra como la ciencia de resolver ecuaciones. Esta definición no tuvo su significado hasta finales del siglo XIX, cuando el Álgebra, junto con la teoría de ecuaciones , tomó nuevos derroteros, modificando esencialmente su carácter, pero no ese espíritu de generalidad que posee como ciencia de las operaciones formales.

El Álgebra contemporánea es el estudio de las operaciones, de las reglas de cálculo. Pero no se circunscribe como el Álgebra clásica, al estudio de las propiedades de las operaciones con números, sino que aspira a investigar propiedades de operaciones con elementos de una naturaleza mucho más general . Esta tendencia viene dictada por necesidades de orden práctico . Por ejemplo, en Mecánica sumamos fuerzas, velocidades, rotaciones, etc. Si para un conjunto dado de objetos se definen ciertas operaciones que satisfacen ciertas propiedades , se dice entonces que se ha definido una estructura algebraica. El actual punto de vista sobre el Álgebra consiste en considerarla como el estudio de las diferentes estructuras algebraicas. Puede considerarse que la noción de estructura aparece con la definición por Cayley en 1.854 del concepto de grupo abstracto y se desarrolla hasta la teoría de categorías actual, que proporciona el marco correcto para el desarrollo de técnicas de gran importancia como la homología, que reunen aspectos aislados que habían ido apareciendo al profundizar en problemas de teoría de grupos, anillos, módulos etc... El primer trabajo en el que se enfoca el Álgebra desde el punto de vista de las estructuras es el famoso libro de Van der Waerden: " Modern Algebra ", de importancia capital para el desarrollo algebraico posterior.

Hablemos ahora un poco de la influencia del Álgebra en otras ramas de la Matemática y en otras ciencias en general. El Álgebra no es una ciencia aplicada en el sentido que tienen estas hoy en día, sino una ciencia pura. las ciecias aplicadas tienen,en su acepción usual, dos características que las definen, la de resolver problemas concretos del mundo que nos rodea y la de tomar prestado para este fín, un cuerpo de doctrina ya elaborado. El Álgebra no depende de nada,salvo de la teoría de conjuntos de la que, en última instancia, depende la Matemática toda, y además es una ciencia pura porque tiene su propia problemática, independiente de los fenómenos de la vida real. Pero el Álgebra si es una ciencia que se aplica. Ella presta a otras ramas de la Matemática y a otras ciencias en general, sus estructuras para lograr descripciones formales que las aclaren y potencien nuevos descubrimientos. Bien conocidas por ejemplo, las aplicaciones a la Física de la teoría de grupos y álgebras de Lie.

Y es que en el fondo de todo objeto matemático o colección de objetos, se encuentra la estructura algebraica. Por eso la casi totalidad de las ramas matemáticas usan de los teoremas del Álgebra en su propio beneficio. Pero esta dependencia del Álgebra no es como la dependencia, por ejemplo, de la Lógica. La Lógica suministra el esquema de razonamiento verdadero pero ahí para su misión. El Álgebra en cambio, como ciencia positiva que es, suministra a otras partes de la matemática resultados positivos que ellas usan para sacar sus conclusiones, asimismo positivas.

2.-Simbiosis Álgebra Conmutativa- Geometría Algebraica

En la teoría de anillos juega un papel fundamental el estudio de los anillos conmutativos y con unidad, lo que se conoce con el nombre de " Álgebra Conmutativa ". El Álgebra Conmutativa se desarrolló a partir de dos fuentes: 1) la Geometría Algebraica y 2) la Teoría de Números.

En 1) el prototipo de anillos estudiado es el anillo K[$X_1 \ldots X_n$] de polinomios en varias variables sobre un cuerpo K. En 2) es el anillo Z de los números enteros.El

Álgebra Conmutativa es una de las piedras fundamentales de la moderna Geometría Algebraica. Proporciona los instrumentos para esta rama de las Matemáticas , de forma más o menos análoga a como el Análisis Diferencial proporciona los instrumentos para la Geometría Diferencial.

La noción central en Álgebra Conmutativa, es el ideal primo. Éste proporciona una generalización común de los números primos de la Aritmética y de los puntos de la Geometría. La noción geométrica de concentrar la atención en el entorno de un punto , tiene su análoga algebraica en el importante proceso de localización de un anillo en un ideal primo.

Hablemos ahora más detenidamente de la relación Álgebra Conmutativa-Geometría Algebraica. Tomemos un texto de Álgebra Conmutativa; podemos elegir cualquiera entre los dos volúmenes de Zariski-Samuel ó también podemos consultar el de Matsumura. Esos textos contienen tópicos dirigidos hacia el estudio de la teoría de números. Pero la inmensa mayoría de los temas tratados en ellos tienen otro objetivo: la Geometría Algebraica. La mayor parte de los teoremas interesantes del Álgebra Conmutativa tienen una traducción directa e inmediata a la Geometría Algebraica. Pero hay mucho más , justamente lo más importante: el desarrollo del Álgebra Conmutativa ha venido condicionado por la Geometría Algebraica en el sentido de que la problemática de ésta ha sido la que indujo la de aquella. Así es que una gran parte del Álgebra Conmutativa tiene como única y exclusiva misión servir de basamento a la Geometría Algebraica. Esto establece la relación en un sentido, veamos el otro. ¿Existe hoy día la Geometría Algebraica tal como se concebía hace 50 años?. La respuesta es casi radicalmente que no. Sólo quedan unos pocos cultivadores esporádicos de la vieja geometría italiana y es que Oscar Zariski primero y Grothendieck después convirtieron a la geometría italiana en una rama del álgebra, Cuando un matemático de hoy piensa en una variedad algebraica piensa automáticamente en un álgebra finitamente generada sobre un cuerpo, su anillo de funciones polinómicas; cuando piensa en una subvariedad de una variedad , piensa en un ideal de este anillo; cuando piensa en un punto simple , piensa en un anillo local regular,etc. Simplificando la cuestión , Zariski hizo que un texto de Álgebra Conmutativa y otro de Geometría Algebraica sean prácticamente una misma cosa: estudian los mismos puntos sólo que usando palabras diferentes, de las cuales todo especialista tiene " in mente " un diccionario en los dos sentidos.

Evidentemente, es imposible distinguir una línea de separación entre el Álgebra Conmutativa y la Geometría Algebraica; sencillamente no existe. Los nombres de Dedekind, Kronecker, Hilbert, E. Nöether, Van der Waerden, Krull, Chevalley, Weil, Zariski, Cohen, Seidenberg, Samuel, Nagata, Nastold, Serre, Grothendieck, Hironaka y otros, van marcando el desarrollo del Álgebra Conmutativa y la Geometría Algebraica simultáneamente.

Para finalizar este apartado hablaremos un poco de la teoría de esquemas y del importante problema de la resolución de singularidades.

La generalización del concepto de variedad algebraica, lleva a la actual construcción de la Geometría Algebraica, utilizando el lenguaje de los esquemas.

En este construcción, el Álgebra y la Topología, intervienen tan estrechamente unidas, que es con frecuencia difícil deslindar sus campos. La teoría de haces proporciona el lenguaje indispensable para interpretar en términos geométricos las nociones esenciales del Álgebra Conmutativa, y para "globalizarlas" y desempeña un papel fundamental en la elaboración actual de la Geometría Algebraica. Y en su base, está el concepto de haz, donde aparecen íntimamente ligados el aspecto algebraico y el topológico.

La gran importancia del método de la resolución de singularidades está en que una gran parte de los teoremas de la Geometría Algebraica " global " se prueban para variedades lisas, desconociéndose que pasa con ellos en el caso de variedades con puntos singulares. Así, poseyendo un teorema de desingularización, es decir un proceso que permita pasar de una variedad con singularidades a una lisa que sea " muy semejante a la primera " (es decir, birracionalmente equivalente a la primera), se pueden extender los teoremas de variedades lisas a cualquier variedad.

3.-Desarrollo del Álgebra Conmutativa a finales del siglo XIX. Avances en la teoría de las curvas algebraicas afines.

A finales del siglo XIX los expertos en Álgebra Conmutativa estudiaban las curvas algebraicas en el plano proyectivo complejo, usando para ello métodos de geometría proyectiva, probablemente se había desarrollado con Abel,Jacobi, Weierstrass y Riemann la teoría de " funciones algebraicas " de una variable compleja. Es evidente la importancia de esta teoría en el desarrollo del estudio de curvas algebraicas planas, pero los métodos utilizados para el estudio de funciones algebraicas eran sobre todo de naturaleza trascendente incluso antes de Riemann. Con éste se acentúa más este carácterde trascendencia con la introducción de las superficies de Riemann y de funciones analíticas cualesquiera definidas sobre dichas superficies.

Después de la muerte de Riemann, Roch y Clebsch reconocieron que de los resultados obtenidos por los métodos trascendentes de Riemann se pueden obtener numerosas aplicaciones a a geometría proyectiva de curvas, lo cual incitó a los geómetras de aquella época a hacer demostraciones de aquellos resultados, puramente geométricas. En esta línea siguieron Gordan, Brill y M. Noëther. Pero estos razonamientos geométrico-analíticos no reposaban sobre fundamentos ciertos y es esencialmente para dar a la teoría de curvas algebraicas una base sólida, que Dedekind publica en 1.882 su gran memoria sobre este tema. La idea principal de su trabajo es la de abordar este tema desde el punto de vista afín, diferencia esencial con sus contemporáneos que consideraban invariablemente las curvas algebraicas sumergidas en el espacio proyectivo complejo.

En el mismo año 1.882 aparece también la memoria de Kronecker, mucho más ambiciosa que la de Dedekind pero también más vaga y más obscura. Su tema central es el estudio de los ideales de un álgebra finita íntegra sobre los anillos de polinomios $C[X_1,\dots,X_n]$ y $Z[X_1,\dots,X_n]$.

Era natural asociar a cada ideal de estos anillos la variedad algebraica formada por los ceros comunes a todos los elementos del ideal. Los estudios realizados en el siglo XIX en las geometrías de dimensión 2 y de dimensión 3 conducen intuitivamente a la idea de que toda variedad es unión de un número finito de variedades irreducibles. La demostración de este hecho es el fín que se propone Kronecker aunque explícitamente en ninguna parte de su memoria se encuentra la definición de variedad irreducible y de dimensión. Tampoco se sabe si Kronecker tenía el concepto actual de ideal primo.

Es Lasker quien en su memoria define correctamente el concepto de variedad irreducible así como el concepto de dimensión. En las interesantes consideraciones históricas que inserta en su trabajo, Lasker indica que se basa no sólamente en la tendencia puramente algebraica de Kronecker y Dedekind sino también en los métodos geométricos de la escuela de Clebsch y M. Noëther y sobre todo en el famoso teorema demostrado por éste último en 1.873 publicado en Math. Ann. t. VI pág. 351-359, generalizado por Hilbert en 1.893 en su célebre "teorema de los ceros". Sin duda, inspirado en este resultado, Lasker introduce en su memoria el concepto de ideal primario en los anillos $C[X_1,\dots,X_n]$ y $Z[X_1,\dots,X_n]$ y demuestra la existencia de una descomposición primaria para todo ideal de estos anillos. Aunque no se preocupa de la unicidad de esta descomposición. Es muy importante señalar que Lasker en esta memoria extiende los resultados anteriores, al anillo de las series enteras convergentes en el entorno de un punto, apoyándose para ello en el teorema preparatorio de Weirstrass.

Terminamos de mencionar a Hilbert, hablemos un poco de su obra. Hilbert escribió dos memorias, en 1.890 y 1.893. En la primera demuestra el teorema de la base de Hilbert que nos dice que todo ideal del anillo de polinomios está finitamente generado. La segunda memoria contiene el célebre Nullstellensatz, el cual establece una correspondencia biunívoca entre los ideales maximales del anillo $K[X_1,\ldots,X_n]$ siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado y los puntos del espacio afín A^n y también una correspondencia biunívoca entre los ideales primos del anillo $K[X_1,\ldots,X_n]$ y las variedades algebraicas irreducibles de A^n

De lo explicado anteriormente se deduce que gracias a Hilbert la teoría de curvas algebraicas experimentó un importante avance.

En la actualidad muchos algebristas y geómetras se dedican al estudio de la resolución de singularidades de las curvas algebraicas.

4.- Los orígenes del Álgebra Local

Como ya hemos señalado anteriormente un punto de una variedad algebraica es no singular cuando al localizar el anillo de coordenadas de la variedad en dicho punto, el resultado es un anillo local regular. Debido a ello en nuestro estudio de curvas algebraicas, los anillos locales revisten gran importancia. Estudiaremos brevemente los orígenes del Álgebra Local.

De las primeras nociones que aparecen en Álgebra Local, entendiendo esta disciplina en el sentido que hoy tiene, es la noción de anillo de fracciones. Bien es verdad que desde muchísimo antes, se conocían y manejaban anillos locales, como los anillos de series formales en un número finito de indeterminadas con coeficientes en un cuerpo, Pero este manejo no implicaba un conocimiento explícito del carácter local, o al menos un no darse cuenta exacta de él y sus consecuencias . Por eso, uno de los primeros pasos hacia la idea de localización, es la noción de anillo de fracciones de un anillo respecto de un sistema multiplicativamente cerrado.

La idea de anillo de fracciones de un anillo con respecto a un sistema multiplicativamente cerrado se debe a Grell, (1), (2), aunque donde se encuentra bien desarrollada es en Krull (1) y Chevalley (1).

La noción de anillo local aparece por primera vez en Krull (2), y en su forma actual. La virtud de este trabajo (2) de Krull se centra en su profundidad y su completitud. Krull no sólo es el autor de la idea, sino es el que la desarrolla y hasta tal punto lo hace, que la técnica expuesta en este artículo se conserva en muchos libros de texto de nuestros días.

La genialidad matemática de Krull no puede ser puesta en duda hoy día, pues es el padre del álgebra conmutativa moderna. En álgebra conmutativa , como en todas las ramas de la Matemática, existen unos teoremas claves, generalmente muy pocos en número, que son los que prueban la riqueza de una estructura y los que abren inmensas posibilidades a la teoría. Y en el caso del álgebra conmutativa estos teoremas se deben en su gran mayoría a Krull , aunque no siempre se le reconoce esta paternidad, de una manera completamente arbitraria. El ejemplo más claro de lo que acabamos de decir está en los llamados " Going-up theorem " y " Going-down theorem " de " Cohen-Seidenberg ", que se pueden encontrar por primera vez en Krull (3). Para darse cuenta de la importancia de estos teoremas basta pensar un momento y nos daríamos cuenta de que , sin ellos, el álgebra conmutativa se reduciría a la mitad y la noción de dimensión no pasaría de ser poco más que una definición arbitraria.

Después de Krull (2), publicado en 1.938, no se publicó nada sobre anillos locales hasta 1.943 en que aparece el trabajo de Chevalley (1) . En él se sientan las bases necesarias para el desarrollo de una teoría de la intersección que más tarde publicará este autor (véase Chevalley (2)). O sea, que Chevalley (1) tiene por objeto introducir la noción de multiplicidad de un ideal primario de un anillo local engendrado por un sistema de parámetros. A estas alturas ya eran conocidas las anomalías de la noción de multiplicidad de Van der Waerden (1), definida en términos de longitudes de ideales, por lo que claramente era necesario una nueva definición de este concepto. Chevalley (1) introduce una definición correcta de multiplicidad en el caso de anillos locales completos sólamente (la noción correcta de multiplicidad en el caso de un anillo local cualesquiera sería introducida posteriormente en Pierre Samuel (1)), lo que llevaría más tarde a describir su teoría de la intersección para variedades algebroides; básicamente es el primer tratado de Álgebra Local escrito en forma moderna, en forma actual. Este trabajo tiene como contribuciones esenciales las siguientes: topologías y complecciones, teorema de la dimensión de los anillos locales y la noción de multiplicidad.

La obra cumbre de Chevalley en el Álgebra Local es su teoría de la intersección, marcada en nuestra bibliografía con el número (2) y aparecida en 1.945. Este artículo está dividido en tres grandes partes que, respectivamente, están dedicadas a preliminares algebraicos, teoría de la intersección de variedades algebroides y teoría de la intersección de variedades algebraicas. A partir de la aparición de este trabajo comienzan ya a proliferar los artículos sobre Álgebra Local. En el año 1.946

vieron la luz tres trabajos verdaderamente importantes para el futuro desarrollo del Álgebra Local: el de Cohen (1) , el de Weil y el de Zariski (1). El trabajo de Cohen , discípulo de Zariski, está dedicado al estudio de los teoremas de estructura de los anillos locales completos. Weil en su tratado introduce el concepto de variedad algebraica abstracta.

Como dijimos antes, el año 1.946 vió aparecer otro trabajo importante de Álgebra Local, Zariski (1) . Las motivaciones de este trabajo son de índole geométrica. En la introducción, Zariski hace notar que: " A esta teoría local, donde se estudian las propiedades de una variedad algebraica en el entorno de un punto, pertenecen conceptos analíticos y algebraico-geométricos tales como función holomorfa, rama analítica, punto simple, parámetros uniformizantes locales, multiplicidad de intersección, etc. ". Sin embargo la teoría local de una variedad V a lo largo de una subvariedad X, hace perder aspectos geométricos del par (V,X). Por eso, Zariski desarrolla una teoría semilocal, que está a mitad de camino entre lo local y lo global.

En 1.951, Chevalley publica un nuevo libro que es un tratado matemático de la teoría de cuerpos de funciones algebraicas de una variable sobre un cuerpo base arbitrario, introduce el concepto de " curva algebraica ".

Hay que destacar también la gran aportación de E.Noëther que estudió a fondo los anillos noetherianos y demostró el lema de normalización de una K-álgebra finitamente generada.

Y llegamos por fín a otro de los grandes trabajos del Álgebra Local: Samuel (1). A la vista de la decisiva influencia de este trabajo en la resolución de singularidades hecha por Hironaka (véase Hironaka (1) y (2)), podemos calificarle como el trabajo más importante del Álgebra Local hecho jamás. La idea es " generalizar a las componentes excedentarias y singulares de las intersecciones de variedades algebraicas la teoría de las multiplicidades de intersección debida a C. Chevalley y A. Weil, y relativa a las componentes propias " (Samuel (1), pág. 161). Para ello se necesita el concepto de multiplicidad de un ideal primario de un anillo local, que se introduce vía función de Hilbert. La genialidad de Pierre Samuel fue precisamente ésta: la de introducir en el Álgebra Local las técnicas de la función de Hilbert y estudiarla tan exhaustivamente mostrando su potencia y utilidad, que desde entonces ha quedado consagrada definitivamente con el nombre de función de Hilbert-Samuel.

Y con este trabajo entramos de lleno en la década de los cincuenta que tiene, desde el punto de vista del Álgebra Local, un carácter muy definido. Si se trata de adjetivar las distintas épocas del Álgebra Local, a la década 1.950-60 le correspondería por derecho propio el calificativo de edad de oro de los métodos homológicos. Y hay una razón evidente para ello: la aparición del famoso libro de Cartan-Eilenberg (1), que lanzó a una gran cantidad de matemáticos hacia ese tipo de estudios. Bien es verdad que el Cartan-Eilenberg apareció en 1.956 pero ya en 1.952 circulaban gran cantidad de "preprints" de él. Los principales trabajos de esta época son los siguientes: Cartan (1), Koszul (1), Auslander (1), Serre (1), Auslander´Buchsbaum (1) , (2) y (3), Tate (1).

Hay que observar también que con el Álgebra Homológica hay una clara tendencia a la linealización. Esta tendencia caracteriza la obra de E. Noëther y Krull.

En 1.953 Northcott publica " Ideal Theory " que es un tratado de teoría de ideales en los anillos noetherianos, anillos locales regulares y su completitud.

Y entramos en la década de los sesenta en que ya la proliferación de trabajos es inmensa . El primer texto aparecido es Nagata (1) que vió la luz en 1.962 y que para todo estudioso del Álgebra Local es un libro de uso diario. Contiene, junto a muchos resultados conocidos (pues esa es su misión, servir de texto de anillos locales), otros muchos originales y que se deben a la fructífera pluma de este matemático. Puntos importantes a destacar, entre otros muchos son los siguientes:

a.- En el capítulo III, que trata de multiplicidades se generaliza la función de Samuel para definir la multiplicidad de un módulo. Este punto de vista sería tomado más tarde en Serre (2) para su teoría de la intersección.

b.- El capítulo VI es uno de los más notables.Trata de anillos locales geométricos y sus motivaciones, claro es, provienen de la Geometría Algebraica.

c.-El capítulo VII trata de anillos henselianos, henselinización y el teorema preparatorio de Weierstrass.

d.- Contiene un apéndice con ocho ejemplos de " anillos noetherianos malos " entre los que se encuentra el ya famoso de un anillo noetheriano de dimensión infinita.

Otro libro importantísimo es Serre (2) del que, como en el caso anterior , destacamos lo fundamental:

a.- El capítulo IV. Dimensión y codimensión homológicas.

b.- El capítulo V trata de multiplicidades de módulos, su aspecto geométrico y la fórmula de los Tor.

Como punto final a este repaso de textos citaremos el de Nastold (1), tópico pero completísimo y el de Grauert-Remmert (1), que es un auténtico tratado de álgebras analíticas. Por su enorme importancia en el estudio de " lo étale" citaremos el magnífico texto de Raynaud (1) que es la obra de referencia por antonomasia de los anillos locales henselianos.

Por último en este repaso sobre los orígenes del Álgebra Local diremos que los grandes problemas que tiene planteados hoy día esta rama del Álgebra son los que derivan de problemas geométricos, siendo actualmente los geómetras los grandes estudiosos de esta disciplina.

Como colofón estudiaremos la manera de averiguar si un punto de una curva algebraica afín es regular ó no. Utilizando nuestro diccionario algebraico-geométrico será lo mismo que demostrar que el anillo local de la curva en el punto es regular ó no.

5.-Puntos singulares en las curvas algebraicas afines

5-1.- Definición de curva algebraica afín

Sea $R_2 = C[X_1,X_2]$, $I_0 = R_2(f)$, un ideal principal de R_2, $f = \sum a_{ij}X_1^iX_2^j$, $a_{ij} \in C$, $a_{ij} = 0$ salvo un número finito, f un polinomio perteneciente a R_2.

Diremos que *C es una curva algebraica plana (sumergida* en C^2, C =números complejos) cuando

$C = V(I_0) = \{(a,b) \in C^2$ tal que $f(a,b)=0\}$

5-2.- Ejemplos de puntos singulares y regulares de las curvas algebraicas afines

Ejemplo 1.-

Sea V_o la curva algebraica afín de ideal $I_o = R_2(X_2^2 - X_1^3)$. ¿ Son singulares los puntos P=(0,0), P'=$(2,\sqrt{8})$?.

Solución

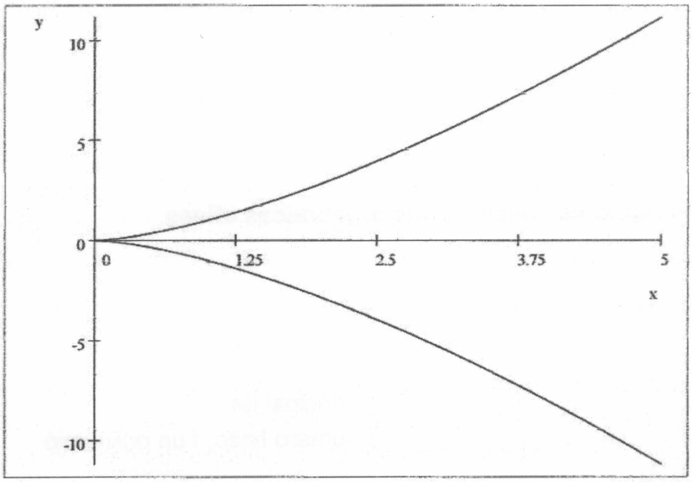
En nuestro diccionario algebraico-geométrico a la curva afín V_0 *le* corresponde su anillo de coordenadas $A(V_0)$

$A(V_0) = R_2/I_0$

$R_2/I_0 = \{f + I_0, f \in R_2\}$

$A(V_o) = R_2/I_0 = C[X_1,X_2]/I_0 = C[x_1,x_2]$, $x_1 = X_1 + I_0$, $x_2 = X_2 + I_0$, $x_2^2 - x_1^3 = 0$, x_1,x_2 ya no son indeterminadas independientes, pues están ligadas por la ecuación $x_2^2 - x_1^3 = 0$.

La representación de la curva (llamada parábola de Neil) será la siguiente:



a) Analicemos en primer lugar si P=(0,0) es singular o regular. Consideramos *p* el ideal primo de $A(V_0)$correspondiente al punto P=(0,0), *p*=$A(V_0)(x_1,x_2)$

S=$A(V_0)$ –*p* es una parte multiplicativamente cerrada de $A(V_0)$.
Construimos el anillo de fracciones

$S^{-1}A(V_0) = (A(V_0) - p)^{-1}A(V_0)$. A $S^{-1}A(V_0)$ se le designará por $A(V_0)_p$

$S^{-1}A(V_0)$ se construye de la manera siguiente:

$S^{-1}A(V_0) = S \times A(V_0)/R$

$S^{-1}A(V_0)$ es el conjunto cociente respecto de la relación de equivalencia R. A la clase cuyo representante sea (s,f), $s \in S, f \in A$, la representaremos por $\frac{f}{s}$

$(s,f)R = \{(s',f') \; con \; (s',f')R(s,f)\} = \frac{f}{s}$

$(s,f)R(s',f') \Leftrightarrow \exists t \in S$ tal que $t(sf' - s'f) = 0, \quad s,s' \in S, \; f,f' \in A(V_0)$
$A(V_0)_p = \{\frac{f}{s}, f \in A(V_0), s \notin p\}$

Definiendo la suma y el producto de clases, convertimos a $A(V_0)_p$ en un anillo .Además $A(V_0)_p$es un anillo local (posee sólo un ideal maximal) y este ideal maximal es

$pA(V_0)_p = A(V_0)_p(x_1,x_2)$

Si este ideal maximal puede ser generado por un solo elemento entonces el punto P=(0,0) es un punto regular,simple o no singular. En este caso se dice que el anillo $A(V_0)_p$ es un anillo de valoración discreta ó un anillo local regular de dimensión uno.

Si este ideal maximal necesita los dos generadores entonces se dice que P es singular. Comprobamos que en el ideal maximal $pA(V_0)_p = A(V_0)_p(x_1,x_2)$ donde x_1,x_2 verifican $x_2^2 - x_1^3 = 0$, los dos generadores son independientes , no se puede poner uno como combinación lineal del otro con coeficientes en $A(V_0)_p$. El punto es singular, es una cúspide pues posee una tangente doble.

b) Sea P' el punto de coordenadas $P'=(2,\sqrt{8})$, su ideal primo correspondiente

será $p' = A(V_0)(x_1 - 2, x_2 - \sqrt{8})$, y el ideal maximal del anillo local $A(V_0)_{p'}$ será

$$p'A(V_0)_{p'} = A(V_0)_{p'}(x_1 - 2, x_2 - \sqrt{8}), x_2^2 - x_1^3 = 0$$

$$x_2^2 - 8 = x_1^3 - 8, \quad (x_2 + \sqrt{8})(x_2 - \sqrt{8}) = (x_1 - 2)(x_1^2 + 2x_1 + 4)$$

$$x_2 - \sqrt{8} = \frac{x_1^2+2x_1+4}{x_2+\sqrt{8}}(x_1 - 2); \quad \frac{x_1^2+2x_1+4}{x_2+\sqrt{8}} \in A(V_0)_{p'} \quad \textit{pues} \quad x_1^2 + 2x_1 + 4 \in A(V_0),$$
$$x_2 + \sqrt{8} \notin p'$$

El punto es regular pues el ideal maximal puede ser generado por un solo elemento ya que $x_2 - \sqrt{8}$ es combinación lineal de $x_1 - 2$ con coeficientes en $A(V_0)_{p'}$

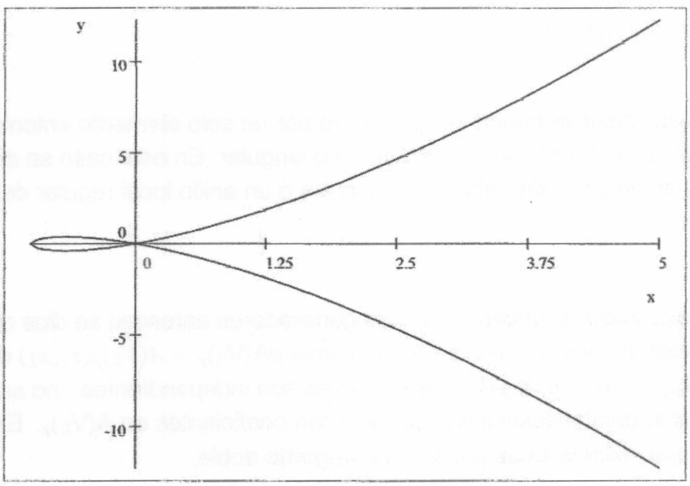
$$p'A(V_0)_{p'} = A(V_0)_{p'}(x_1 - 2, x_2 - \sqrt{8}) = A(V_0)_{p'}(x_1 - 2)$$

La curva posee sólamente una tangente en dicho punto.

Ejemplo 2

Sea $V_o = V(I_0)$ la curva algebraica afín de ideal $I_0 = R_2(X_2^2 - X_1^3 - X_1^2)$. ¿ Son singulares los puntos $P = (0,0), P' = (2, \sqrt{12})$?

Solución



Ésta es la representación de la curva , llamada nudo de Newton.

Consideramos el punto P=(0,0) entonces $A(V_0)_p(x_1, x_2)$ es el ideal maximal de $A(V_0)_p$, x_1, x_2 no son indeterminadas independientes pues verifican la ecuación: $x_2^2 - x_1^3 - x_1^2 = 0$. Los dos generadores del ideal maximal son independientes, no se puede poner uno en combinación lineal del otro con coeficientes en $A(V_0)_P$,luego $A(V_0)_P$ no es un anillo local regular ya que su ideal maximal no puede ser generado por un solo elemento. El punto P es singular, P=(0,0) es un nodo, es decir posee dos tangentes distintas.

b) Veamos si el punto P'= $(2,\sqrt{12})$*es* regular ó singular. Consideramos

$$p'A(V_0)_{p'} = A(V_0)_{p'}(x_1-2, x_2-\sqrt{12}) = A(V_0)_{p'}\ (x_1-2)$$

$$x_2^2-x_1^3-x_1^2=0,\quad x_2^2-12=x_1^3+x_1^2-12,\quad (x_2+\sqrt{12})(x_2-\sqrt{12}) = \\ =(x_1-2)(x_1^2+3x_1+6)$$

$$x_2-\sqrt{12} = \frac{x_1^2+3x_1+6}{x_2+\sqrt{12}}(x_1-2),\quad \frac{x_1^2+3x_1+6}{x_2+\sqrt{12}} \in A(V_0)_{p'}\ \ pues\ \ x_1^2+3x_1+6 \in A(V_0), \\ y\ \ x_2+\sqrt{12} \in p'$$

P' es regular pues en nuestro diccionario algebraico-geométrico el localizado de $A(V_0)$ en el punto P' es un anillo local regular. La curva posee sólo una tangente en dicho punto.

BIBLIOGRAFÍA

Atiyah,M.F. Macdonald,I.G.

(1) " Introduction to Commutative Algebra ". Addison-Wesley, Reading (Mass) 1.969

Auslander,M.

(1) " On the dimension of modules and algebras III. Global dimension ". Nagoya Math.J.9 (1.955).

Auslander,M.; Buchsbaum,D.A.

(1) " Homological dimension in local rings ". Trans.Amer. Math. Soc. 85 (1.957).

(2) " Homological dimension in noetherian rings ". Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1.958).

(3) " Unique factorization in regular local rings " Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 45 (1.959).

Cartan,H.

(1) " Extension du théoreme des chaines de syzygies " Univ. Roma Ist. Naz.Alta Mat. Rend. Appl. 11 (1.952).

Cartan,H.: Eilenberg,S.
(1) " Homological Algebra ". Princeton University Press. Princeton. 1.956.
Cohen,I.S.
(1) " On the structure and ideal theory of complete local rings ". Trans.Amer.Math. Soc. 59 (1.946).
Chevalley,C.
(1) " On theory of local rings " Ann. of Math. 44 (1.943)
(2) " Intersection of algebraic an algebroid varieties ". Trans.Amer. Math. Soc. 57 (1.945).
Fulton,W.
(1) " Algebraic Curves ". Benjamín. New York . 1.969
Grauert,H.; Remmert,R.
(1) " Analytische Stellenalgebren ". Springer-Verlag. Berlín 1.971.
Grell,H.
(1) " Beziehunger zwischen der Idealen verschiedener Ringe ". Math. Ann.97 (1.927).
(2) " Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl-und Funltionenkörpern ". Math.Ann. 97 (1.927).
Hironaka,H.
(1) " A note on algebraic geometry over ground rings. The invariance of Hilbert characteristic function under the specialization process ". Illinois J. Math. 2 (1.958).
(2) " Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero " Ann. Math. 79 (1.964).
Koszul,J.L.
(1) " Sur un type d'algebres différentielles en rapport avec la transgression ". Colloque de Topologie. Bruxelles.
Krull, W.
(1) " Idealtheorie ". Ergebnisse der Mathematik. 4 Band, Springer Verlag. 1.935.
(2) "Dimensionstheorie in stellenringen " J. reine angew Math. 179 (1.938).
(3) " Beïtrage zur Arithmetik Kommutativer Intergritätsbereiche III. Zum Dimensionsbegriff der Ideltheorie " Math. Zeit. 42 (1.937).
Matsumura,H.
(1) " Commutative Algebra ". Benjamín. New York. 1.970
Nagata, M.
(1) " Local rings ". Interscience. John Wiley . New York. 1.962.
Nastold, H.J.
(1) " Nuevos métodos de Ãlgebra Local ". Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid 1.967.
Raynaud, M.
(1) "Anneaux locaux henseliens ". Lec. Notes Math. 169. Springer-Verlag. Berlín. 1.970
Romo Santos, C.
(1) " Importancia y papel del Álgebra Conmutativa en la Geometría Algebraica actual ". Boletín 28 de la Sociedad " Puig Adam " de Profesores de Matemáticas.

Mayo 1.991.

(2) " Los orígenes del Álgebra Local ". Publicado en " Debate sobre la enseñanza de las Matemáticas ". Colección Biblioteca Pedagógica . Madrid 1.991. Centro Madrileño de Investigaciones Pedagógicas.

(3) " Tendencias y repercusiones del Álgebra actual ". Boletín de la Sociedad " Puig Adam " de Profesores de Matemáticas nº 48. Febrero 1.998.

(4) " Principales tópicos del Álgebra. Aplicaciones " . Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza 53. 1.998

Samuel, P.

(1) " La notion de multiplicité en Algèbre et en Géomètrie Algébrique " . J. Math. Pures Appl. 30 (1.951).

Serre, J.P.

(1) " Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethèriens ". Proc. Inst. Symp. on Algebraic number theory. Tokyo 1.955.

(2) " Algèbre locale. Multiplicités ". Lec. Notes Math. 11. Springer Verlag. Berlín. 1.965.

Tate,J.

(1) " Homology of notherian rings and local rings " Illinois J. Math. 1. (1.957).

Van der Waerden, B. L.

(1) " Der multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie ". Math. Ann. 97 (1.927).

(2) " Modern Algebra ". Ungar. New York. Vol. 1 (1.950). Vol. 2 (1.953)

Walker, R.J.

(1) " Algebraic Curves ". Princeton. Univ. Press. 1.950.

Zariski , O.

(1) " Generalized semi-local rings ". Summa Brasil. Math. 1 (1.946)

(2) " The concept of a simple point of an abstract algebraic variety ". Trans. Amer. Math. Soc. 62. 1.947.

Zariski-Samuel

(1) " Commutative Algebra ". Van Nostrand, Princeton. Vol.I (1.958). Vol. II (1.960)